Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

XXXII. Jahrgang.

Mit fünf lithographirten Tafeln.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1887.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Seite

Theorie der Restreihen zweiter Ordnung. Von Prof. Dr. Weihrauch . 1

Ueber die Integration linearer, nicht homogener Differentialgleichungen. Von Wold. Heymann 22

Zur Theorie der Elimination. Von Leop. Schendel 46

Zerlegung einer Form m^{ter} Ordnung und n^{ten} Grades in ihre linearen Factoren. Von Leop. Schendel 83

Der Kronecker'sche Subdeterminantensatz. Von L. Schendel 119

Zur Reduction der elliptischen Integrale in die Normalform. Von Cand. Vorsteher 145

Ueber lineare simultane Differentialgleichungen, welche durch hypergeometrische Functionen integrirt werden können. Von W. Heymann 176

Die r-stufige Determinante n^{ten} Grades. Von L. Schendel 185

Ueber die Basis der natürlichen Logarithmen. Von O. Schlömilch 191

Ueber Kettenbrüche. Von Dr. Veltmann 193

Einige Eigenschaften der Binomialcoefficienten mit Anwendungen auf die Combinationslehre. Von Prof. Dr. C. W. Baur . 218

Bemerkungen über die Gammafunctionen mit negativen Argumenten. Von Prof. Dr. Saalschütz 246

Eine Erweiterung des Factoriellensatzes. Von Prof. Dr. Saalschütz 251

Bemerkung über die Formen mit zwei Reihen Veränderlicher. Von Prof. Dr. Pasch 255

Eingrenzung der Zahl e auf geometrischem Wege. Von Prof. Dr. Weinmeister 256

Zur Theorie der binären quadratischen Formen von positiver Determinante. Von J. Vivanti 287

Bemerkungen zu der Grenzfunction algebraischer Iterationen. Von Dr. Schapira 310

Substitution neuer Variabelen in höheren Differentialquotienten. Von Dr. Bochow 346

Zur Theorie der Potenzreste. Von Dr. Kraus 360

Ueber den Rest der Reihe für $arcsin x$. Von O. Schlömilch 368

Zur Lehre von den unter unbestimmter Form erscheinenden Ausdrücken. Von Prof. Dr. Saalschütz 378

Synthetische und analytische Geometrie.

Einiges über Gebilde zweiten Grades und deren reciproke Inversen. Von B. Sporer 56

Ein geometrisches Problem. Von Prof. Dr. Schoute 59

Die Raumcurven vierter Ordnung erster und zweiter Species in ihrem Zusammenhange mit den Steiner'schen Schliessungsproblemen bei den ebenen Curven dritter Ordnung. Von Dr. Eberhard 65

Schluss der Abhandlung 129

Ueber einige Eigenschaften des Systems der Kegelschnitte, die drei feste Gerade berühren. Von C. Doehlemann 120

Seite

Berichtigung. Von Dir. Dr. **Geisenheimer** 127
Zur Einführung der Liniencoordinaten in die analytische Geometrie der Ebene. Von Dr. **Koehler** 152
Ueber die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise. Von Dr. **Curt Reinhardt** 183
Die Curven dritter und vierter Ordnung, welche durch die unendlich fernen Kreispunkte gehen. Von Prof. **Czuber** 257
Ueber Schnitt und Schein eines windschiefen Vierecks. Von Dr. **Beyel** 301
Ueber die Bewegung eines ebenen Systems. Von **C. Wittenbauer** 314
Ueber eine synthetische Erzeugung der Cremona'schen Transformation dritter und vierter Ordnung. Von **K. Doehlemann** 315
Ueber Regelflächen, deren Erzeugende zu den Mantellinien eines orthogonalen Kegels parallel sind. Von Dr. **Beyel** 321
Berechnung des Inhalts eines Vielecks aus den Coordinaten der Eckpunkte. Von Dr. **Veltmann** 339
Zur geometrischen Interpretation binärer Formen, speciell solcher von der vierten Ordnung im ternären Gebiete. Von Dr. **Fr. Hofmann** 363
Beweis einiger Lehrsätze von J. Steiner. Von **O. Zimmermann** 373

Statistik.

Zur mathematischen Statistik. Von Dr. **Zimmermann** 62
Zur mathematischen Statistik. Von **W. Küttner** 234

Mathematische Physik.

Zur Theorie der Wärmeleitung in festen Körpern. Von Prof. Dr. **Harnack** 91
Bestimmung der Cardinalpunkte eines dioptrisch-katoptrischen Systems centrirter sphärischer Flächen, mittelst Kettenbruchdeterminanten dargestellt. Von Prof. Dr. **Matthiessen** 170
Zur dynamischen Gastheorie. Von Dr. **Stankewitsch** 187
Ueber eine Stelle in Poisson's Mechanik. Von Dr. **Pfannstiel** 244
Bestimmung des Orts und der Helligkeit des gebrochenen Bildes eines Punktes, wenn die brechende Fläche eine Ebene ist. Von **W. Saltzmann** 369
Ueber eine Stelle in Poisson's Traité de mécanique. Von Dr. **Hess** 382

I.

Theorie der Restreihen zweiter Ordnung.

Von

Dr. K. Weihrauch,

o. Prof. d. physik. Geogr. a. d. Universität Dorpat.

In einer vor langer Zeit erschienenen Abhandlung über die allgemeinste Gleichung des ersten Grades mit vier Unbekannten (s. diese Zeitschrift, Bd. XXII, 1877) habe ich nachgewiesen,* dass die Anzahl der Auflösungen einer solchen Gleichung zum Theil von zahlentheoretisch interessanten Ausdrücken abhängt, welche gewonnen werden, wenn man die positiven Reste der Glieder einer gewissen arithmetischen Reihe nach einem bestimmten Modul mit dem zugehörigen Index multiplicirt und die Producte addirt. An Stelle der a. a. O. für derartige Aggregate gebrauchten Bezeichnung „Restproductensumme" scheint mir die Benennung „Restreihen zweiter Ordnung" passender. Ich bin damals den Beweis für einige Sätze bezüglich der Restreihen zweiter Ordnung schuldig geblieben und will deshalb nun eine kurze, vor mehr als einem Jahrzehnt von mir ausgearbeitete Theorie dieser Restreihen geben, was im Hinblick darauf gerechtfertigt erscheint, dass analoge Ausdrücke, doch höherer Art, sicherlich bei den Gleichungen mit mehr als vier Unbekannten auftreten werden, und dass die dann nothwendigen Sätze und Reductionsformeln in ähnlicher Weise, wie die hier zu entwickelnden, abgeleitet werden dürften. Obschon diese Gleichungen in zahlentheoretischer Hinsicht sehr interessante Resultate versprechen, haben dieselben doch bisher keine weitere Bearbeitung gefunden; nachdem ich in der angeführten Abhandlung den Weg angegeben, den man zur Lösung der betreffenden Fragen einschlagen muss, wandte ich mich ganz anderen Studien zu, die eine Fortsetzung der Arbeit nicht erlaubten.

Es ist, wie bei allen Problemen der unbestimmten Analysis, für das folgende selbstverständlich, dass es sich immer nur um ganze, positive Zahlen, eventuell mit Einschluss der Null, handelt.

---

* Es müssen daselbst S. 234 in der 3. Textzeile von oben zwischen die Worte „als auch" und „je zwei der Coefficienten" die Worte „nach Ausscheidung der vorhergehenden Theiler" eingeschoben werden.

1.

Man habe unter den Bedingungen

$$1)\qquad \begin{cases} b > a \geqq 0 \\ b > d > 0 \\ b > m_k \geqq 0 \end{cases}$$

die fundamentale Congruenz

$$2)\qquad a + (k-1)\,d \equiv m_k \;(mod\; b).$$

Unter einer Restreihe erster Ordnung will ich dann die Summe

$$3)\qquad \sigma_0 = \sum_{k=1}^{k=b} m_k$$

verstehen; eine Restreihe zweiter Ordnung dagegen, die in der gegenwärtigen Abhandlung schlechthin als Restreihe bezeichnet werden mag, wäre

$$4)\qquad \sigma_1 = \sum_{k=1}^{k=b} k\,m_k.$$

Da die Restreihe wesentlich von den Grössen a, d, b abhängt, soll sie in kurzer Weise künftig durch $(a,\ d)_b$ bezeichnet werden.

Man hat beispielsweise zur Berechnung von $(4,\ 7)_9$ Folgendes:

Ursprüngliche Reihe	4,	11,	18,	25,	32,	39,	46,	53,	60;
Reste *mod* 9	4,	2,	0,	7,	5,	3,	1,	8,	6;
Indices	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9;

Restreihe $(4, 7)_9 = 1.4 + 2.2 + 3.0 + 4.7 + 5.5 + 6.3 + 7.1 + 8.8 + 9.6 = 204.$

Für einzelne sehr einfache Fälle lässt sich $(a,\ d)_b$ leicht darstellen. So hat man für $(0,\ 1)_b$ aus der Congruenz 2)

$$5)\qquad m_k = k - 1,$$

d. h.

$$6)\qquad (0,\ 1)_b = \sum_{k=1}^{k=b} k\,(k-1) = \frac{b\,(b+1)\,(b-1)}{3}.$$

Ferner ist für $(b-1,\ b-1)_b$ aus jener Congruenz

$$7)\qquad \begin{cases} m_k \equiv \; -k \;(mod\; b) \\ m_k = b - k, \end{cases}$$

so dass

$$8)\qquad (b-1,\ b-1)_b = \sum_{k=1}^{k=b} k\,(b-k) = \frac{b\,(b+1)\,(b-1)}{6} = \frac{1}{2}\,(0,\ 1)_b.$$

Es wird sich später ergeben, dass eine Darstellung von $(a,\ d)_b$ durch die Grössen a, d, b allein im Allgemeinen nicht möglich ist.

2.

Zwei Restreihen $(a,\ d)_b$ und $(a',\ d')_b$ mögen complementär heissen, wenn die Gleichungen erfüllt sind

$$9)\qquad \begin{cases} a + a' = b - 1, \\ d + d' = b. \end{cases}$$

Complementäre Restreihen ergänzen sich zu einer nur vom Modul abhängigen Grösse, nämlich $\frac{b(b+1)(b-1)}{2}$.

Es sei, wie früher,

$$10)\quad \begin{cases} a+(k-1)\,d \equiv m_k \quad (mod\ b), \\ a'+(k-1)\,d' = b-1-a+(k-1)(b-d) \equiv n_k. \end{cases}$$

Daraus durch Addition

$$11)\quad m_k + n_k \equiv -1.$$

Aus den Bedingungen, welchen die Reste m_k und n_k unterworfen sind, folgt

$$12)\quad 0 \leqq m_k + n_k \leqq 2\,b-2,$$

oder mit Rücksicht auf 11)

$$13)\quad 0 < m_k + n_k < 2\,b-1,$$

$$14)\quad m_k + n_k = b-1.$$

Daher

$$15)\quad (a,\ d)_b + (a',\ d')_b = \sum_{k=1}^{k=b} k\,(m_k+n_k) = \frac{b\,(b+1)\,(b-1)}{2}.$$

Ein Beispiel hierfür bieten die in 1. berechneten Werthe von $(0,\ 1)_b$ und $(b-1,\ b-1)_b$. Für die praktische Anwendung wäre es bequem, Tabellen zu besitzen, welche die Werthe der Restreihen für die verschiedenen Moduli bis zu einer gewissen Grösse der letzteren enthielten. Ich habe solche Tabellen in grösserer Anzahl berechnet, allein der Raum verbietet, dieselben hier mitzutheilen. Es mag für die folgenden Betrachtungen angenommen werden, dass die Tabellen vorlägen, und dass der horizontale Eingang derselben die Werthe d von 1 bis $(b-1)$, der verticale die Werthe a von 0 bis $(b-1)$ enthalte. Man übersieht dann sofort, dass der eben bewiesene Satz bei der Aufstellung der Tabellen die ganze Berechnungsarbeit zunächst auf etwa die Hälfte reducirt.

3.

In jeder Verticalcolonne einer Tabelle ist die Summe s aller Restreihen constant, nämlich $\frac{b^2\,(b+1\,(b-1)}{4}$.

Man erhält s durch die Summation

$$16)\quad s = \sum_{a=0}^{a=b-1} (a,\ d)_b,$$

da für dieselbe Colonne d constant ist. Daraus

$$17)\quad s = \sum_{a=0}^{a=b-1}\ \sum_{k=1}^{k=b} k\,m_k = \sum_{k=1}^{k=b} k \,.\sum_{a=0}^{a=b-1} m_k.$$

Aus der Congruenz, welche m_k bestimmt, geht hervor, dass, wenn a die Reihe 0 bis $b-1$ durchläuft, die Reste m_k mit dieser nämlichen

Reihe in einer gewissen Ordnung zusammenfallen, woraus man sofort schliesst, dass

18) $$\sum_{a=0}^{a=b-1} m_k = \frac{b\,(b-1)}{2}$$

und

19) $$s = \frac{b^2\,(b+1)\,(b-1)}{4}.$$

Man hat mit Rücksicht auf 1. auch

20) $$s = \frac{3\,b}{4} \cdot (0,\ 1)_b = \frac{3\,b}{2} \cdot (b-1,\ b-1)_d.$$

Der Satz bezüglich s bietet eine bequeme Controle bei Aufstellung der Tabellen.

4.

Ist b eine Primzahl, so ist in jeder Horizontalreihe die Summe s' der Restreihen durch den Modul und a darstellbar, nämlich

21) $$s' = \frac{b\,(b+2)\,(b-1)^2}{4} - \frac{a\,b\,(b-1)}{2}.$$

Man hat hier

22) $$s' = \sum_{d=1}^{d=b-1} (a,\ d)_b$$

zu bilden. Dafür kann geschrieben werden

23) $$s' = \sum_{d=1}^{d=b-1} \sum_{k=1}^{k=b} k\,m_k = \sum_{d=1}^{d=b-1} m_1 + \sum_{k=2}^{k=b} k \,.\sum_{d=1}^{d=b-2} m_k.$$

Aus der für m_k geltenden Congruenz folgert man, dass, wenn d bei constantem a und k, während b eine Primzahl, alle Werthe 1 bis $b-1$ durchläuft, die m_k die Zahlenreihe von 0 bis $b-1$, jedoch mit Ausschluss von a, welches $d=0$ entspräche, darstellen. Berücksichtigt man nun noch, dass $m_1 = a$ ist, so kommt nach sehr einfacher Reduction zum Vorschein

24) $$s' = \frac{b\,(b+2)\,(b-1)^2}{4} - \frac{a\,b\,(b-1)}{2}.$$

Die Summen der aufeinanderfolgenden Horizontalreihen bilden daher, im Falle der Modul eine Primzahl ist, eine arithmetische Reihe erster Ordnung mit der Differenz $\frac{b\,(b-1)}{2}$. Auch dieser Satz kann zur Verification einzelner Tabellen benutzt werden.

5.

Es wird später gezeigt werden, wie der Fall, wenn b und d nicht relativ prim zu einander sind, auf den zurückgeführt werden kann, wo sie theilerfremd sind. Deshalb mögen hier einige Sätze gegeben werden, die sich auf den letzteren Fall beziehen.

Reductionen einzelner Colonnenglieder in den Tabellen aufeinander giebt folgender Satz:

Sind b und d relativ prim, so hat man stets

25) $$(b-r,\ d)_b = (r-1,\ d)_b - \frac{b\,(b-2\,r+1)}{2}.$$

Vergleicht man nämlich $(0,\ d)_b$ und $(1,\ d)_b$, so findet sich Folgendes.

Da b und d relativ prim sind, so enthält die Reihe der Reste m_k für $(0,\ d)_b$ alle Zahlen von 0 bis $b-1$; die Reihe der Reste für $(1,\ d)_b$ wird dann gefunden, wenn man zu den entsprechenden Resten für $(0,\ d)_b$ eins addirt; hierbei ist nur zu berücksichtigen, dass, wenn in der Reihe der Reste für $(0,\ d)_b$ das l_1^{te} Glied $b-1$ heisst, man für das entsprechende Element der nächsten Reihe nicht b, sondern 0 nehmen muss, so dass

26) $$(1,\ d)_b = (0,\ d)_b + \frac{b\,(b+1)}{2} - b\,l_1.$$

Befindet sich in der Reihe der Reste für $(1,\ d)_b$ der Rest $b-1$ an der l_2^{ten} Stelle, in der für $(2,\ d)_b$ an der l_3^{ten} u. s. f., so hat man

27) $$\begin{cases} (h,\ d)_b = (h-1,\ d)_b + \dfrac{b\,(b+1)}{2} - b\,l_h, \\ \qquad h = 1, 2, \ldots (b-1). \end{cases}$$

Ist der Unterschied der Indices von $b-1$ und $b-2$ in der Reihe der Reste für $(0,\ d)_b$ gleich u, so hat man offenbar, abgesehen von etwa hinzuzufügenden Vielfachen des Moduls,

28) $$\begin{cases} l_h = l_{h-1} - u = l_1 - (h-1)\,u, \\ \qquad h = 2, 3, \ldots (b-1). \end{cases}$$

In der Reihe für $(b-1,\ d)_b$ ist $b-1$ das erste Glied, also

29) $$l_{b=1} = 1.$$

Da man aus $(b-1,\ d)_b$ durch die oben angegebene Addition wieder $(0,\ d)_b$ erhält, so muss

30) $$l_1 = l_{b-1} - u,$$

oder mit Hinzufügung des offenbar nöthigen b

31) $$l_1 = 1 - u + b,$$

32) $$u = b + 1 - l_1.$$

Es wird also, abgesehen von Vielfachen des Moduls,

33) $$\begin{cases} l_r \quad\ = l_1 - (r-1)\,(b+1-l_1), \\ l_{b-r} = l_1 - (b-r-1)\,(b+1-l_1), \end{cases}$$

34) $$l_r + l_{b-r} = 2 + b\,v.$$

Sind r und $b-r$ verschieden, so können l_r und l_{b-r} nicht gleich sein, da alle l die Zahlenreihe von 1 bis b bilden müssen; es muss also

35) $$l_r + l_{b-r} > 2\,.$$

sein, woraus sich unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $l_h \gtrless b$, und v also in 34) gleich 1 sein muss, genau ergiebt

36) $$l_r + l_{b-r} = b + 2.$$

Setzt man voraus, dass

37) $$r < b - r,$$

so folgt aus 27), indem man von $h = r$ bis $h = b - r$ summirt:

38) $$(b - r, d)_b = (r - 1, d)_b + \frac{b(b+1)(b-2r+1)}{2} - b\sum_{h=r}^{h=b-r} l_h.$$

Ist b ungerade, so wird

39) $$\sum_{h=r}^{h=b-r} l_h = \sum_{h=r}^{h=(b-1):2} l_h + \sum_{h=(b+1):2}^{h=b-r} l_h$$

oder

40) $$\sum_{h=r}^{h=b-r} l_h = \sum_{h=r}^{h=(b-1):2} (l_h + l_{b-h}) = \frac{(b-2r+1)(b+2)}{2}.$$

Ist b gerade, so hat man

41) $$\sum_{h=r}^{h=b-r} l_h = \sum_{h=r}^{h=(b-2):2} (l_h + l_{b-h}) + l_{b:2}$$

oder

42) $$\sum_{h=r}^{h=b-r} l_h = \frac{(b-2r)(b+2)}{2} + \frac{b+2}{2} = \frac{(b-2r+1)(b+2)}{2},$$

wie man aus 36) erschliesst. Man hat also zunächst allgemein für $r < b - r$

43) $$(b - r, d)_b = (r - 1, d)_b - \frac{b(b-2r+1)}{2}.$$

Ersetzt man hier r durch $b - r + 1$, so geht die Gleichung in sich selbst über, d. h. die Beschränkung $r < b - r$ kann man fallen lassen.

Der Satz leistet, wie man leicht sieht, bei Berechnung der einzelnen Colonnen einer Tabelle sehr wesentliche Dienste.

6.

Sind b und d relativ prim, so lässt sich noch der folgende Satz bezüglich der Bestandtheile einer Colonne aufstellen:

Es ist immer, unter der Voraussetzung $p < d - 1$,

44) $$(p, d)_b = (d - p - 1, d)_b.$$

Es sei behufs des Beweises

45) $$\begin{cases} d - p - 1 + (k-1)d \equiv m_k \ (mod\ b), \\ \qquad p + (k-1)d \equiv n_k \ (mod\ b). \end{cases}$$

Ist weiter

46) $$n_u \equiv d - p - 1 \ (mod\ b),$$

d. h.

47) $$n_u = d - p - 1 = m_1,$$

so lässt sich folgende Zusammenstellung aller Reste beider Reihen machen:

$$48)\quad \begin{cases} m_h = n_{u+h-1} \text{ für } h = 1, 2, \ldots, (b-u+1), \\ m_{b-u+1+h} = n_h \quad \text{ für } h = 1, 2, \ldots, (u-1). \end{cases}$$

Schreibt man die beiden Restreihen zweiter Ordnung der vorstehenden Vergleichung entsprechend, so hat man

$$49)\quad \begin{cases} (d-p-1,\ d)_b = \sum_{k=1}^{k=b} k m_k = \sum_{k=b-u+2}^{k=b} k m_k + \sum_{k=1}^{k=b-u+1} k m_k, \\ (p,\ d)_b = \sum_{k=1}^{k=b} k n_k = \sum_{k=1}^{k=u-1} k m_{b-u+1+k} + \sum_{k=u}^{k=b} k m_{k-u+1}. \end{cases}$$

Hier sind in den ersten Summationen rechts je zwei m_k identisch, wobei der Unterschied ihrer Coefficienten k immer $b-u+1$ beträgt; Aehnliches gilt von den zweiten Summationen, bei denen dieser Unterschied gleich $-(u-1)$ ist. Durch Subtraction erhält man daher

$$50)\quad \begin{cases} (d-p-1,\ d)_b - (p,\ d)_b = (b-u+1)\sum_{h=b-u+2}^{k=b} m_k - (u-1)\sum_{k=1}^{k=b-u+1} m_k \\ \qquad = b\sum_{k=b-u+2}^{k=b} m_k - (u-1)\sum_{k=1}^{k=b} m_k. \end{cases}$$

Hier ist nun zunächst

$$51)\quad \sum_{k=1}^{k=b} m_k = \frac{b\,(b-1)}{2}.$$

Aus den ursprünglichen Congruenzen folgt [48)]

$$52)\quad \begin{cases} n_{h+1} \equiv p + hd \equiv m_{b-u+h+2} \ (mod\ b), \quad h = 0, 1, \ldots, (u-2), \\ d - p - 1 + (b-h-1) \equiv m_{b-h} \end{cases}$$

und

$$53)\quad m_{b-u+h+2} + m_{b-h} \equiv b - 1 \ (mod\ b),$$

d. h.

$$54)\quad m_{b-u+h+2} + m_{b-h} = b - 1.$$

Hiermit geht die in 50) noch übrig gebliebene Summation über in

$$55)\quad \sum_{k=b-u+2}^{k=b} m_k = \frac{(b-1)\,(u-1)}{2},$$

ob u gerade oder ungerade ist; im ersteren Falle erhält man nämlich ein mittleres Glied $\frac{b-1}{2}$ und überzeugt sich leicht, dass b und u nicht gleichzeitig gerade sein können, aus den Congruenzen

$$56)\quad \begin{cases} n_u = m_1 = d - p - 1 \equiv p + (u-1)\,d \\ \qquad 2d - 2p - 1 \equiv ud \end{cases} \ (mod\ b).$$

Mit dem angeführten Resultate geht 50) in den zu beweisenden Satz über, dass

57) $$(p, d)_b = (d - p - 1, d)_b.$$

Nimmt man hier die complementären Restreihen (s. 2.) und ersetzt dann daselbst d durch $b - d$, so erscheint

58) $$(d + p, d)_b = (b - 1 - p, d)_b.$$

Mit Hilfe der in 5. und 6. bewiesenen Sätze ist es immer möglich, aus einem einzigen Colonnenglied alle übrigen einfach abzuleiten, so dass die Berechnung der Tabellen ausserordentlich vereinfacht wird. Ein Beispiel mag dies erläutern.

Es soll die Colonne $(a, 7)_9$ berechnet werden. Laut eines früheren Beispiels hat man

$$(4, 7)_9 = 204.$$

Die Rechnung gestaltet sich dann folgendermassen:

$$\begin{array}{lll}
57) & p = 4 & (4, 7) = (2, 7) \qquad\quad = 204, \\
43) & r = 3 & (6, 7) = (2, 7) - 18 = 186, \\
57) & p = 6 & (6, 7) = (0, 7) \qquad\quad = 186, \\
43) & r = 1 & (8, 7) = (0, 7) - 36 = 150, \\
58) & p = 1 & (8, 7) = (7, 7) \qquad\quad = 150, \\
43) & r = 8 & (1, 7) = (7, 7) + 27 = 177, \\
57) & p = 1 & (1, 7) = (5, 7) \qquad\quad = 177, \\
43) & r = 6 & (3, 7) = (5, 7) + 9 \;\; = 186,
\end{array}$$

womit alle Colonnenglieder bestimmt sind.

7.

Bezüglich gewisser Werthe in der ersten Horizontalreihe der Tabellen existirt ein Satz, der zwar als specieller Fall eines späteren aufgefasst werden kann, jedoch an sich merkwürdig genug ist, um selbstständig behandelt zu werden.

Unter der Voraussetzung

59) $$cd \equiv 1 \pmod{b}$$

ist immer

60) $$(0, d)_b = (0, c)_b,$$

woraus dann nach 5. und 6. folgt, dass die Colonnen für c und d dieselben Werthe in verschiedener Anordnung enthalten.

Es mag

61) $$\left\{\begin{array}{l} (k-1)\,d \equiv m_k \\ c\,(k-1) \equiv n_k \end{array}\right. \pmod{b}$$

sein. In den beiden Restreihen, um die es sich handelt, ist dann die Differenz M der k^{ten} Theilsätze

62) $$M = k\,(m_k - n_k).$$

Ferner ist

$$63)\quad \begin{cases} m_{b-k+2} \equiv (b-k+1)\,d \equiv -(k-1)\,d \equiv -m_k \\ n_{b-k+2} \equiv (b-k+1)\,c \equiv -(k-1)\,c \equiv -n_h \end{cases} (mod\ b)$$

oder

$$64)\quad \begin{cases} m_{b-k+2} = b - m_k, \\ n_{b-k+2} = b - n_k. \end{cases}$$

Die Differenz N der $(b-k+2)^{\text{ten}}$ Theilsätze wird daher

$$65)\quad N = -(b-k+2)(m_k - n_k).$$

Aus der für n_k geltenden Congruenz 61) folgt durch Multiplication mit d unter Berücksichtigung der ursprünglichen Voraussetzung

$$66)\quad k-1 \equiv d\,n_k\ (mod\ b).$$

Man hat aber auch

$$67)\quad m_{n_k+1} \equiv d\,n_k\ (mod\ b),$$

also

$$68)\quad \begin{cases} m_{n_k+1} = k - 1 \\ \text{und analog}\ n_{m_k+1} = k-1. \end{cases}$$

Die Differenz P des $(n_k+1)^{\text{ten}}$ Theilsatzes in $(0, d)_b$ und des $(m_k+1)^{\text{ten}}$ in $(0, c)_b$ beträgt daher

$$69)\quad P = -(k-1)(m_k - n_k).$$

Ebenso findet man analog 64) die Ausdrücke

$$70)\quad \begin{cases} m_{b-n_k+1} = b - m_{n_k+1} = b-k+1, \\ n_{b-m_k+1} = b - n_{m_k+1} = b-k+1 \end{cases}$$

und daraus für die Differenz Q des $(b-n_k+1)^{\text{ten}}$ Theilsatzes in $(0, d)_b$ und des $(b-m_k+1)^{\text{ten}}$ in $(0, c)_b$ den Werth

$$71)\quad Q = (b-k+1)(m_k - n_k).$$

Man erhält nun sogleich

$$72)\quad M + N + P + Q = 0,$$

d. h., in

$$73)\quad (0, d)_b - (0, c)_b = \sum_{k=1}^{k=b} k m_k - \sum_{k=1}^{k=b} k n_k$$

lassen sich stets je 4 Glieder der ersten Summation mit den Indices k, $b-k+2$, n_k+1 und $b-n_k+1$ auffinden, deren Summe durch je 4 Glieder der zweiten Summation mit den Indices k, $b-k+2$, m_k+1, $b-m_k+1$ vernichtet wird. Schreibt man, da jedes Element m_k und n_k genau viermal gebraucht wird,

$$74)\quad 4\,((0, d)_b - (0, c)_b) = \sum_{k=1}^{k=b} 4 m_k . k - \sum_{k=1}^{k=b} 4 n_k . k,$$

so gewinnt man durch Combinirung der zusammengehörigen Theilsätze sofort das Resultat

$$75)\quad (0, d)_b = (0, c)_b.$$

Nimmt man die Complemente, so erhält, weil aus der ursprünglichen Voraussetzung auch

$$76)\qquad (b-c)\,(b-d) \equiv 1 \;\;(mod\;\; b)$$

folgt, der Satz die Gestalt

$$77)\qquad (b-1,\; d)_b = (b-c,\; c)_b.$$

In der ganzen Herleitung darf k nicht den Werth 1 annehmen, da ein Glied mit dem Index $b+1$ nicht vorkommt; wird indessen dieses Glied als identisch mit $m_1 = 0$ betrachtet, so erkennt man, dass die acht in Beziehung tretenden Glieder für $k=1$ verschwinden.

Der Satz leistet bei Aufstellung der Tabellen gute Dienste, da die Congruenz $cd \equiv 1$ $(mod\;\; b)$ immer lösbar ist, sobald d relativ prim zu b.

8.

Es mag nun der Satz folgen, welcher auf den Gegenstand, der die ganze Untersuchung über die Restreihen zweiter Ordnung veranlasste, zurückführt.

Ist wieder

$$78)\qquad cd \equiv 1 \;\;(mod\;\; b),$$

so findet die Gleichung statt

$$79)\qquad (\overline{ad},\; d)_b = (\overline{a-1+c},\; c)_b,$$

wenn man den kleinsten positiven Rest, den z nach dem Modul b lässt, durch $\overline{z}$ bezeichnet.

Zum Beweise gehe ich, wenn zunächst $a < \frac{b+1}{2}$ vorausgesetzt wird, von den Congruen en aus

$$80)\qquad \left\{\begin{array}{r} ad + (k-1)\,d \equiv m_k \\ a-1+c+(k-1)\,c \equiv n_k \end{array}\right. \;\;(mod\;\; b).$$

Für $k = \overline{ad+pd}$ wird das betreffende Glied der zweiten Reihe der Reste

$$81)\qquad n_{\overline{ad+pd}} = \overline{2a-1+p}.$$

Setzt man hier der Reihe nach $p = 0, 1, 2, \ldots, (b-1)$, so entstehen b verschiedene Werthe von $\overline{ad+pd}$, die mit der Zahlenreihe von 0 bis $(b-1)$ zusammenfallen. Man hat also

$$82)\quad (\overline{a-1+c},\, c)_b = \sum_{k=1}^{k=b} k\, n_k = \sum_{p=0}^{p=b-1} (\overline{ad+pd})\,(\overline{2a-1+p}) + b\,(a-1).$$

Der letzte Theilsatz $b\,(a-1)$ rührt daher, dass $(\overline{a-1+c,\, c})_b$ an sich mit demselben schliesst, wie man leicht findet; nun sind aber in $\overline{ad+pd}$ und $\overline{2a-1+p}$ alle Vielfachen von b weggeworfen, so dass in der Summation 82) $0.(a-1)$ an Stelle von $b\,(a-1)$ steht, und zwar für $p=b-a$. Die Gleichung 82) kann auch geschrieben werden:

$$83) \begin{cases} (\overline{a-1+c},\ c)_b = \sum\limits_{p=0}^{p=b-2a} (\overline{ad+pd})\ (\overline{2a-1+p}) \\ \qquad + \sum\limits_{p=b-2a+1}^{p=b-1} (\overline{ad+pd})\ (\overline{2a-1+p}) + b\,(a-1). \end{cases}$$

Da $2a < b+1$ sein soll, so kann in der ersten Summation $\overline{2a-1+p}$ durch $2a-1+p$ ersetzt werden, weil letzterer Werth dann immer $< b$; in der zweiten Summation hat $\overline{2a-1+p}$ die Grenzwerthe b und $b+2a-2$, so dass dort an Stelle von $\overline{2a-1+p}$ geschrieben werden darf $2a-1+p-b$. Berücksichtigt man noch

$$84) \qquad \overline{ad+pd} = m_{p+1},$$

so entsteht, wenn für p der Werth $k-1$ eingeführt wird,

$$84) \begin{cases} (\overline{a-1+c},\ c) = \sum\limits_{k=1}^{k=b-2a+1} m_k\,(2a-2+k) \\ \qquad + \sum\limits_{k=b-2a+2}^{k=b} m_k\,(2a-2+k-b) + b\,(a-1) \end{cases}$$

oder

$$86) \quad (\overline{a-1+c},\ c) = \sum_{k=1}^{k=b} k m_k + 2\,(a-1) \sum_{k=1}^{k=b} m_k - b \sum_{k=b-2a+2}^{k=b} m_k + b\,(a-1).$$

Man hat, wie früher,

$$87) \qquad \sum_{k=1}^{k=b} m_k = \frac{b\,(b-1)}{2}.$$

Die noch übrige Summation hat $2a-1$ Theilsätze, deren mittlerer m_{b-a+1} ist, wofür man aus den Congruenzen 80) sofort den Werth Null findet.

Ferner ist

$$88) \qquad \begin{cases} m_{b-2a+2+q} \equiv ad + (b-2a+1+q)\,d \\ m_{b-q} \qquad\quad \equiv ad + (b-q-1)\,d \end{cases} \quad (mod\ b),$$

also

$$89) \qquad m_{b-2a+2+q} + m_{b-q} = b,$$

d. h.

$$90) \qquad \sum_{k=b-2a+2}^{k=b} m_k = b\,(a-1).$$

Führt man diese Werthe oben ein, so entsteht

$$91) \qquad (\overline{a-1+c},\ c)_b = (\overline{ad},\ d)_b.$$

Aus der Gestalt des Satzes ist ersichtlich, dass die oben eingeführte Beschränkung $2a < b+1$ nun wegfallen darf, da doch nur die Reste nach b genommen werden.

Für $a = 0$ entsteht

92) $$(c-1,\ c)_b \equiv (0,\ d)_b,$$

oder mit Rücksicht auf 6. der in 7. gefundene Satz

93) $$(0,\ c)_b = (0,\ d)_b.$$

Beispielsweise sei $b = 9,\ d = 7,\ c = 4,\ a = 7$, dann ist

$$cd = 28 \equiv 1 \pmod{9},$$

$$(\overline{49},\ 7)_9 = (\overline{10},\ 4)_9;\ \text{d. h. } (4,\ 7)_9 = (1,\ 4)_9 = 204.$$

Setzt man in 91) $a - 1 + c$ an Stelle von $a - 1$, so nimmt die Gleichung die Form an

94) $$(\overline{a-1},\ c)_b = (\overline{ad-1},\ d)_b,$$

in welcher Gestalt sie für die Berechnung der Tabellen sehr werthvoll ist.

Wird dagegen a durch ac ersetzt, so erhält man

95) $$(a,\ d)_b = (\overline{c(a+1)-1},\ c)_b.$$

Diese Gleichung ist das Hauptresultat der ganzen Untersuchung, da sie benutzt werden kann, um einen Satz zu beweisen, den ich in der eingangs angeführten Abhandlung aufgestellt habe, und durch den erst die zu verlangende Symmetrie der dortigen Resultate hergestellt wird. Es sind daselbst folgende Congruenzen herangezogen:

96) $$\begin{cases} \mu - B_1 + h_{1,2} B_2 \equiv 0 \pmod{c_{1,2}}, \\ \mu - B_2 + h_{2,1} B_1 \equiv 0 \pmod{c_{2,1} = c_{1,2}}, \\ \left.\begin{array}{l} B_1 \equiv e_{1,2} B_2 \\ B_2 \equiv e_{2,1} B_1, \end{array}\right\} \pmod{c_{1,2}}, \end{cases}$$

in denen B_1 und B_2 relativ prim zu $c_{1,2} (= c_{2,1})$, dagegen μ beliebig ist. Die Grössen $h_{1,2},\ e_{1,2},\ h_{2,1},\ e_{2,1}$ sind positive Reste $< c_{1,2}$. A. a. O. findet sich die Behauptung, dass immer

97) $$(h_{1,2},\ e_{1,2})_{c_{1,2}} = (h_{2,1},\ e_{2,1})_{c_{1,2}}$$

sei. Aus obigen Congruenzen folgt

98) $$e_{1,2} \cdot e_{2,1} \equiv 1 \pmod{c_{1,2}},$$

99) $$B_2 (h_{1,2} + 1) \equiv B_1 (h_{2,1} + 1)$$

100) $$h_{1,2} + 1 \equiv e_{1,2} (h_{2,1} + 1) \pmod{c_{1,2}},$$

also

101) $$h_{1,2} = \overline{e_{1,2}(h_{2,1}+1) - 1},$$

so dass die Grössen $h_{2,1},\ e_{2,1},\ e_{1,2}$ den Bezeichnungen $a,\ d,\ c$ genau entsprechen; die Gleichung 95) lautet dann

102) $$(h_{2,1},\ e_{2,1})_{c_{1,2}} = (h_{1,2},\ e_{1,2})_{c_{1,2}},$$

was bewiesen werden sollte.

9.

Ist b eine einigermassen grosse Zahl, so wird die Berechnung von $(a,\ d)_b$ äusserst langwierig. Es sollen deshalb nun Formeln entwickelt werden, welche jede Restreihe zweiter Ordnung auf eine solche mit kleinerem

Modul zurückführen. Dabei sind die beiden Fälle, ob b und d theilerfremd sind oder nicht, wesentlich zu unterscheiden. Der zweite Fall kann auf den ersten durch folgenden Satz reducirt werden.

Es bezeichne f den grössten gemeinsamen Theiler von b und d, und es mag

103) $$\begin{cases} b = f\beta, \\ d = f\delta, \\ a = f\alpha + \gamma, \\ 0 \leqq \gamma < f \end{cases}$$

sein. Dann ist immer

104) $$(a, d)_b = f^2 (\alpha, \delta)_\beta + \frac{b^2 (f-1)(\beta-1)}{4} + \frac{b(b+1)}{2}\gamma$$

eine Gleichung, durch welche eine Restreihe mit kleinerem Modul eingeführt wird, derart, dass β und δ relativ prim sind.

Man erkennt leicht, dass der zweite Theilsatz rechts immer eine ganze Zahl ist, da $f-1$ und $\beta-1$ gerade sein müssen, wenn b ungerade.

Der Beweis für obige Gleichung ist sehr einfach. Ist

105) $$\alpha f + (k-1)\delta f = m_k \equiv n_k f \pmod{\beta f},$$

so wird

106) $$\alpha + (k-1)\delta \equiv n_k \pmod{\beta}.$$

Die Reihe der Reste n_k fällt mit $0, 1, 2, \ldots, (\beta-1)$, die der m_k mit $0, f, 2f, \ldots, (\beta-1)f$ zusammen; die m_k wiederholen sich immer nach β Gliedern. Wegen $\gamma < f$ und $n_k < \beta$ kann $m_k + \gamma = n_k f + \gamma$ nie über βf hinausgehen. Man hat also

107) $$a + (k-1)d = \alpha f + \gamma + (k-1)\delta f \equiv m_k + \gamma \equiv n_k f + \gamma \pmod{\beta f}$$

und

108) $$(a, d)_b = (\alpha f + \gamma, \delta f)_{\beta f} = \sum_{l=0}^{l=f-1} \sum_{k=1}^{k=\beta} (l\beta + k)(m_k + \gamma),$$

denn der Factor $l\beta + k$ durchläuft die ganze Zahlenreihe von 1 bis b. Führt man die Multiplication aus, so lassen sich alle Summationen leicht bestimmen. Man hat nämlich

109) $$\begin{cases} \sum_{l=0}^{l=f-1} \sum_{k=1}^{k=\beta} l\beta m_k = \beta \sum_{l=0}^{l=f-1} l \cdot \sum_{k=1}^{k=\beta} m_k = \beta \cdot \frac{f(f-1)}{2} \cdot f \cdot \frac{\beta(\beta-1)}{2}, \\ \sum_{l=0}^{l=f-1} \sum_{k=1}^{k=\beta} l\beta\gamma = \beta^2 \gamma \cdot \frac{f(f-1)}{2}, \\ \sum_{l=0}^{l=f-1} \sum_{k=1}^{k=\beta} k m_k = f^2 \sum_{k=1}^{k=\beta} k n_k = f^2 (\alpha, \delta)_\beta, \\ \sum_{l=0}^{l=f-1} \sum_{k=1}^{k=\beta} k\gamma = \gamma f \cdot \frac{\beta(\beta+1)}{2} \end{cases}$$

und daraus nach leichten Reductionen

110) $$(a, d)_b = f^2 . (\alpha, \delta)_\beta + \frac{b^2 (f-1)(\beta-1)}{4} + \gamma \frac{b(b+1)}{2}$$

Als Beispiel mag $(31, 21)_{49}$ berechnet werden.

Man hat $f=7$, $\beta=7$, $\delta=3$, $\alpha=4$, $\gamma=4$

$$(31, 21)_{49} = 49.(4, 3)_7 + 21609 + 4900 = 30625.$$

10.

Falls b und d relativ prim sind, hat man den folgenden Satz zur Zurückführung der Restreihe vom Modul b auf eine solche vom Modul d.

Es ist immer

$$111)\quad (a, d)_b = b\left[\frac{b(b+d+3)-2}{4} + \frac{b^2+d^2+1}{12d} - \frac{a(b+d-a-1)}{2d} - \frac{b\varrho}{d} - \frac{b}{d^2}(p_1, p)_d\right].$$

Hier sind die Grössen p und p_1 zu bestimmen aus den Congruenzen

$$112)\quad \begin{cases} b \equiv p \\ b-a \equiv p_1 \end{cases} \quad mod\, d,$$

mit der Bedingung

$$113)\quad 0 \overline{\gtrless} \begin{Bmatrix} p \\ p_1 \end{Bmatrix} < d,$$

während ϱ aus der Congruenz

$$114)\quad \varrho b \equiv a \;(mod\, d)$$

unter der Bedingung

$$115)\quad 0 < \varrho \overline{\gtrless} d$$

gefunden werden muss. Es ist sehr wohl zu berücksichtigen, dass ϱ anderen Bedingungen unterworfen ist, als die gewöhnlichen Reste.

Der Beweis der Gleichung 111) ist sehr complicirt.

Ich führe noch die Congruenz

$$116)\quad \begin{cases} -a \equiv \tau \;(mod\, d), \\ 0 \overline{\gtrless} \tau < d \end{cases}$$

ein. Nun werde gesetzt

$$117)\quad \begin{cases} qb = a + dt_q + r_q, \quad q = 0, 1, \ldots, d, \\ \qquad 0 < r_q \overline{\gtrless} d. \end{cases}$$

Dann ist offenbar

$$118)\quad r_d = \tau$$

und

$$119)\quad t_q - t_{q-1} \overline{\gtrless} 1.$$

Es sei nun, wie früher immer:

$$120)\quad a + (k-1)d \equiv m_k \;(mod\, b),$$

also:

$$121)\quad \begin{cases} m_{t_q+h} \equiv a + (t_q + h - 1)\,d, \\ \qquad \equiv qb - r_q + (h-1)\,d \qquad (mod\, b), \\ \qquad \equiv (h-1)\,d - r_q. \end{cases}$$

Lässt man hier h die Reihe $2, 3, \ldots, (t_{q+1} - t_q + 1)$ durchlaufen, so bleibt $(h-1)\,d - r_q$ oder $(t_{q+1} - t_q)\,d - r_q$ immer noch kleiner als b, aber > 0, weil

122) $$b = (t_{q+1} - t_q)\, d - r_q - r_{q+1}$$

nach 117), da ausserdem $r_{q+1} > 0$ ist. Man hat also geradezu

123) $$m_{t_q+h} = (h-1)\, d - r_q, \qquad h = 2, 3, \ldots, (t_{q+1} - t_q + 1).$$

Diese Gleichung passt nicht für $q = 0$ und für $q = d$. Man hat aber, da $t_0 = 0$ zu setzen ist:

124) $$\begin{cases} m_1 = a, \\ m_h = a + (h-1)\, d, \qquad h = 2, 3, \ldots, (t_1 + 1), \end{cases}$$

d. h. die Gleichung 123) gilt auch für $q = 0$, wenn man

125) $$r_0 = -a$$

setzt, wodurch allerdings r_0 einen ganz andern Charakter, als die übrigen r erhält. Lässt man q bis $d-1$ gehen, so wird für den grössten Werth von h, nämlich $h = t_d - t_{d-1} + 1$ der Werth m_{t_d+1} gewonnen.

Da aus 117) und 118) folgt.

126) $$t_d = b - \frac{a+\tau}{d},$$

so muss die Grösse $\frac{a+\tau}{d}$ untersucht werden, die zufolge 116) jederzeit ganzzahlig ist. Der Minimalwerth dafür ist 1; in diesem Fall wird

127) $$t_d = b - 1,$$

128) $$m_{t_d+1} = m_b,$$

womit die m_k abschliessen. Ist dagegen $\frac{a+\tau}{d} > 1$, so knüpfen sich an m_{t_d+1} noch die Werthe m_{t_d+h}, wo $h = 2, 3, \ldots, (b - t_d)$, für welche man, wie oben, hat

129) $$m_{t_d+h} = (h-1)\, d - r_d.$$

Was nun die Restreihe

130) $$(a, d)_b = \sum_{k=1}^{k=b} k m_k$$

anlangt, so kann man zunächst die ganze Reihe der Zahlen $k = 1$ bis $k = b$ in folgende Abtheilungen zerfällen, wobei daran erinnert werden mag, dass $t_0 = 0$:

131) $$\left.\begin{array}{llll} & & 1 & \\ t_0 & +2 & \text{bis} & t_1 + 1 \\ t_1 & +2 & ,, & t_2 + 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{d-1} & +2 & \text{bis} & t_d + 1 \end{array}\right\} \text{oder } t_q + 2 \text{ bis } t_{q+1} + 1, \quad q = 0, 1, \ldots, (d-1)$$

und $\quad t_d + 2$ bis b.

Aus 123)

132) $$m_{t_q+h} = (h-1)\, d - r_q$$

ersieht man, dass man hat $m_1 = a$,

$$133)\quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} m_k &= (k - t_q - 1)\, d - r_q \\ q &= 0,\, 1,\, \ldots,\, (d-1) \end{aligned}\right\} k = 2 \quad \text{bis} \quad k = t_d + 1, \\ \text{und analog aus 129)} \\ \qquad m_k = (k - t_d - 1)\, d - r_d, \\ \qquad k > t_d + 1. \end{cases}$$

Es kann die Restreihe daher in die Gestalt umgeformt werden:

$$134)\quad \begin{cases} (a,\, d)_b = \sum\limits_{k=1}^{k=b} k m_k = a + \sum\limits_{q=0}^{q=d-1} \sum\limits_{k=t_q+2}^{q=t_{q+1}+1} k\, ((k - t_q - 1)\, d - r_q) \\ \qquad + \sum\limits_{k=t_d+2}^{k=b} k((k - t_d - 1)\, d - r_d) = a + \sum\limits_{q=0}^{q=d-1} R + S. \end{cases}$$

Es ist dann weiter

$$135)\quad \begin{cases} R = \sum\limits_{k=t_q+2}^{k=t_{q+1}+1} (d k^2 - d\, (t_q + 1)\, k - k r_q) \\ \quad = d\, \dfrac{(t_{q+1} + 1)\, (t_{q+1} + 2)\, (2 t_{q+1} + 3) - (t_q + 1)\, (t_q + 2)\, (2 t_q + 3)}{6} \\ \quad - (d\, (t_q + 1) + r_q)\, \dfrac{(t_{q+1} + 1)\, (t_{q+1} + 2) - (t_q + 1)\, (t_q + 2)}{2}. \end{cases}$$

Ersetzt man hier t_q und t_{q+1} gemäss der Gleichung 117) durch

$$136)\quad \begin{cases} t_q \quad = \dfrac{q b - a - r_q}{d}, \\ t_{q+1} = \dfrac{(q + 1)\, b - a - r_{q+1}}{d}, \end{cases}$$

so kommt nach weitläufigen Reductionen, die hier übergangen werden müssen, zum Vorschein

$$137)\quad \begin{cases} R = \dfrac{1}{b d^2}\, [2\, (r_q^3 - r_{q+1}^3) - 3\, b\, q\, (r_q^2 - r_{q+1}^2) - 3\, (2\, d - a)\, (r_q^2 - r_{q+1}^2) \\ \qquad + 3\, b\, d\, q\, (r_q - r_{q+1}) + d\, (4\, d - 3\, a)\, (r_q - r_{q+1}) + 6\, b\, r_{q+1}^2 \\ \qquad - 6\, b\, (2\, d - a)\, r_{q+1} - 6\, b^2\, (q + 1)\, r_{q+1} + 3\, b^2\, (b + d)\, q \\ \qquad + b\, (b + d)\, (2\, b + 4\, d - 3\, a)]. \end{cases}$$

Hierauf ist eine Summation von $q = 0$ bis $q = d - 1$ auszudehnen, die kurz durch Σ bezeichnet werden mag. Es ist dann:

$$138)\quad \Sigma\, (r_q^3 - r_{q+1}^3) = r_0^3 - r_d^3 = -\, (a^3 + \tau^3), \text{ zufolge 118) und 125)},$$

$$139)\quad \begin{cases} \Sigma\, q\, (r_q^2 - r_{q+1}^2) = \Sigma\, r_{q+1}^2 - (d - 1)\, r_d^2 \\ \qquad = \sum\limits_{k=1}^{k=d} k^2 - d\, \tau^2 = \dfrac{d\, (d + 1)\, (2\, d + 1)}{6} - d\, \tau^2, \end{cases}$$

da alle r_q von $q = 1$ bis $q = d$ unter einander incongruent nach dem Modul d sind und deshalb nach 117) mit der Reihe $1,\, 2,\, \ldots,\, d$ zusammenfallen. Ferner:

140) $$\Sigma (r_q{}^2 - r_{q+1}{}^2) = a^2 - \tau^2;$$

141) $$\Sigma q\,(r_q - r_{q+1}) = \sum_{k=1}^{k=d} k - d\tau = \frac{d\,(d+1)}{2} - d\tau;$$

142) $$\Sigma\,(r_q - r_{q+1}) = -(a+\tau);$$

143) $$\Sigma\, r_{q+1}{}^2 = \sum_{k=1}^{k=d} k^2 = \frac{d\,(d+1)\,(2d+1)}{6};$$

144) $$\Sigma\, r_{q+1} = \frac{d\,(d+1)}{2};$$

145) $$\Sigma\, q = \frac{d\,(d-1)}{2}.$$

Der letzte Theilsatz von R innerhalb der Klammer ist einfach mit d zu multipliciren, und es ist dann nur noch der Ausdruck $\sum\limits_{q=0}^{q=d-1} (q+1)\,r_{q+1}$ oder $\sum\limits_{k=1}^{k=d} k r_k$ zu untersuchen. Schreibt man die Gleichung 117) in der Gestalt:

146) $$k b = a + d t_k + r_k,$$

so lässt sich daraus sofort die Congruenz ableiten:

147) $$(b-a) + (k-1)\,b \equiv r_k \ (mod\ d),$$

oder mit Rücksicht auf 112):

148) $$p_1 + (k-1)\,p \equiv r_k \ (mod\,d).$$

Alle r_k von $k=1$ bis $k=d$ erscheinen also als Reste der arithmetischen Reihe $p_1 + (k-1)\,p$ nach dem Modul d, jedoch mit dem Unterschiede von den bei den Restreihen zweiter Ordnung gebräuchlichen Resten, dass einer der Reste r_k, nämlich r_ϱ, gleich d wird, wie man aus 114):

149) $$\varrho\, b \equiv a \ (mod\,d)$$

durch Vergleichung mit 146) und mit Berücksichtigung des Umstandes, dass

150) $$0 < r_k \overline{\gtrless} d$$

sein muss, erfährt. Lässt man aber an Stelle von r_ϱ den Werth Null treten, so kommt der zur Untersuchung vorliegende Ausdruck auf eine Restreihe zweiter Ordnung nach dem Modul d zurück, und man hat

151) $$\sum_{q=0}^{q=d-1} (q+1)\,r_{q+1} = \sum_{k=1}^{k=d} k r_k\,(p_1, p)_d + \varrho\, d.$$

Setzt man alle gefundenen Werthe in ΣR ein, so erhält man nach langwierigen Reductionen:

2) $$\left\{\begin{aligned}\sum_{q=0}^{q=d-1} R = b\left(\frac{b\,(b+d+3)-2}{4} + \frac{b^2+d^2+1}{12d} - \frac{b\varrho}{d} - \frac{b}{d^2}\,(p_1, p)_d\right)\\ + \frac{1}{6d^2}\left(a^3 - 3a^2 d - 4ad^2 - 2\tau^3 + (3bd + 6d - 3a)\tau^2 - (3bd^2 + 4d^2 - 3ad)\tau - 3abd(b-1)\right).\end{aligned}\right.$$

Der Ausdruck für S kann leicht gewonnen werden, wenn man in dem Werth von R [s. 135)] die Grössen t_{q+1} und t_q durch $b-1$ und $t_d = \frac{bd - a - \tau}{d}$, und r_q durch τ ersetzt. Man erhält dann:

153) $$S = -\frac{1}{6d^2}(a^3 - 3a^2d + 2ad^2 - 2\tau^3 + (3bd + 6d - 3a)\tau^2 - (3bd^2 + 4d^2 - 3ad)\tau - 3abd(a-d$$

Fasst man die Grössen a, ΣR und S zusammen, so kommt die eingangs gegebene Gleichung zum Vorschein, der ich der leichteren Uebersicht halber noch die zur Bestimmung der Hilfsgrössen nöthigen Congruenzen beifüge, nämlich (unter der Bedingung, dass b und d relativ prim sind)

154) $$(a, d)_b = b\left[\frac{b(b+d+3)-2}{4} + \frac{b^2+d^2+1}{12d} - \frac{a(b+d-a-1)}{2d} - \frac{b\varrho}{d} - \frac{b}{d^2}(p_1, p)_d\right],$$

wo

155) $$\left.\begin{array}{c} \varrho b \equiv a \\ p \equiv b \\ p_1 \equiv b - a \end{array}\right\} (mod\ d), \quad \begin{array}{l} 0 < \varrho \leqq d, \\ 0 < p < d, \\ 0 \leqq p_1 < d. \end{array}$$

Beispiele: 1. Man soll $(11, 7)_{29}$ berechnen.

$$\begin{aligned} 29\varrho &\equiv 11 \ (mod\ 7) & \varrho &= 4, \\ p &\equiv 29 \ (mod\ 7) & p &= 1, \\ p_1 &\equiv 18 \ (mod\ 7) & p_1 &= 4. \end{aligned}$$

Leicht findet man $(4, 1)_7 = 70$ und daraus

$$(11, 7)_{29} = 29\left(\frac{1129}{4} + \frac{297}{28} - \frac{132}{7} - \frac{116}{7} - \frac{290}{7}\right) = 6264.$$

2. Man soll $(20, 5)_{32}$ berechnen:

$$\begin{aligned} 32\varrho &\equiv 20 \ (mod\ 5) & \varrho &= 5, \\ p &\equiv 32 \ (mod\ 5) & p &= 2, \\ p_1 &\equiv 12 \ (mod\ 5) & p_1 &= 2. \end{aligned}$$

Ferner $(2, 2)_5 = 25$ und daraus

$$(20, 5)_{32} = 32\left(\frac{639}{2} + \frac{35}{2} - 32 - 32 - 32\right) = 7712.$$

Zur Tabellenberechnung sucht man in der Regel wohl $(0, d)_b$. Dies giebt dann

156) $$p_1 = p, \quad \varrho = d$$

und man hat nach 5. und 6.

157) $$(p, p)_d = (0, p)_d - \frac{d(d-1)}{2}.$$

Die allgemeine Formel geht dann über in

158) $$(0, d)_b = b\left[\frac{b(b+d+1)-2}{4} + \frac{b^2 + d^2 + 1 - 6b}{12d} - \frac{b}{d^2}(0, p)_d\right],$$

wo

159) $$b \equiv p \ (mod\ d), \quad 0 < p < d.$$

Das für $(a, d)_b$ in 154 abgeleitete Resultat beweist, dass es im Allgemeinen unmöglich ist, eine Restreihe zweiter Ordnung durch einen geschlossenen, nur a, d und b enthaltenden Ausdruck darzustellen. Auf die unbestimmten Gleichungen bezogen, deren Untersuchung, so weit sie bisher gediehen, zu den Restreihen zweiter Ordnung führte, lässt dieser Umstand einen sehr wesentlichen Unterschied hinsichtlich der Anzahl der Lösungen bei theilerfremden oder nicht theilerfremden Coefficienten hervortreten.

11.

Schliesslich mögen einige Fälle angeführt werden, in denen eine directe Darstellung der Restreihe $(a, d)_b$ durch a, d, b trotz des oben Gesagten möglich ist.

1. Es sei $d = 1$ oder $d = b - 1$.

Für $d = 1$ hat man in Formel 154)

$$\varrho = 1, \quad p = 0 \text{ oder } = 1 \text{ (ausnahmsweise)}, \quad p_1 = 0, \quad (0, 0)_1 = 0,$$

also

160) $$(a, 1)_b = \frac{b(b+1)(b-1)}{3} - \frac{ab(b-a)}{2}.$$

Nimmt man hier die Complemente, so ist nach 2.

161) $$(b-1-a, b-1)_b = \frac{b(b+1)(b-1)}{2} - (a, 1)_b$$

und nach 5.

162) $$(b-1-a, b-1)_b = (a, b-1)_b - \frac{b(b-2a-1)}{2}.$$

Daraus

163) $$(a, b-1)_b = \frac{b(b+1)(b-1)}{6} + \frac{b(b-2a-1)}{2} + \frac{ab(b-a)}{2}.$$

Die Bestandtheile der ersten und letzten Colonne einer jeden Tabelle können also direct durch a und b dargestellt werden.

2. Es seien a und b durch d theilbar.

Man hat dann in 9.

$$f = d,$$
$$b = \beta d,$$
$$\delta = 1,$$
$$a = \alpha d,$$
$$\gamma = 0,$$

also

164) $$(a, d)_b = d^2 (\alpha, 1)_\beta + \frac{b^2(d-1)(\beta-1)}{4}.$$

Nun ist nach 160)

165) $$(\alpha, 1)_\beta = \frac{\beta(\beta+1)(\beta-1)}{3} - \frac{\alpha\beta(\beta-\alpha)}{2},$$

also für den Fall, dass a und b durch d theilbar sind:

166) $$(a, d)_b = \frac{b(b+d)(b-d)}{3d} + \frac{b^2(d-1)(b-d)}{4d} - \frac{ab(b-a)}{2d}.$$

Beispielsweise ist $(25, 5)_{30} = 1750 + 4500 - 375 = 5875$.

3. Es sei

167) $$d^2 \equiv -1 \ (mod\ b).$$

Dann ist die Darstellung von $(0, d)_b$ und von $(b-1, d)_b$ möglich. Man hat nämlich sofort

168) $$(b-d)\, d \equiv 1 \ (mod\ b).$$

Aus 2. folgt

169) $$(0, d)_b + (b-1, b-d)_b = \frac{b\,(b+1)\,(b-1)}{2},$$

aus 7. dagegen und 168):

170) $$(b-1, b-d)_b = (b-1, d),$$

aus 5. endlich:

171) $$(0, d)_b - (b-1, d) = \frac{b\,(b-1)}{2},$$

so dass die von d unabhängigen Ausdrücke resultiren:

172) $$\left\{\begin{aligned}(0, d)_b &= \frac{b\,(b-1)\,(b+2)}{4},\\ (b-1, d)_b &= \frac{b^2\,(b-1)}{4}\end{aligned}\right.$$

für

173) $$d^2 \equiv -1 \ (mod\ b).$$

Ist b von der Form $2n$ oder $4n+1$, so zeigt die Formel für $(b-1, d)_b$, dass an die Möglichkeit der Congruenz 173) gedacht werden kann; ist aber b von der Form $4n+3$, so wird der Werth für $(b-1, d)_b$ gebrochen, d. h. -1 ist quadratischer Nichtrest von $4n+3$, wie ja aus der Zahlentheorie bekannt ist.

Als Beispiel werde $(0, 7)_{25}$ berechnet. Es ist $7^2 \equiv -1 \ (mod\ 25)$, also

$$(0, 7)_{25} = \frac{25.24.27}{4} = 4050.$$

Im Anschluss an das Vorstehende mag noch Folgendes bemerkt werden.

Man erkennt aus der Gleichung 154), dass $(a, d)_b$ jedesmal in die Gestalt gebracht werden kann:

174) $$(a, d)_b = \frac{b\,(Ab^2 + Bb + C)}{12\,d},$$

wo A, B, C ganze Functionen von a und d allein sind, die indessen im Allgemeinen nicht in geschlossener Form darstellbar sind. Vermittelst 5. und 6. lässt sich $(a, d)_b$ jederzeit rasch aus $(0, d)_b$ berechnen. Ich gebe deshalb im Folgenden eine Zusammenstellung der Werthe für $(0, d)_b$ von $d = 1$ bis $d = 5$ mit Rücksicht auf die verschiedenen Zahlformen der Grösse b hinsichtlich des Moduls d. Die Ausdrücke sind sämmtlich aus 158) und 166) abgeleitet.

$$(0,\,1)_b = \frac{b\,(b+1)\,(b-1)}{3};$$

$$b = 2n, \quad (0,2)_b = \frac{b\,(b-2)\,(7b+8)}{24},$$

$$b = 2n+1, \quad (0,2)_b = \frac{7b\,(b+1)\,(b-1)}{24};$$

$$b = 3n, \quad (0,3)_b = \frac{b\,(b-3)\,(5b+6)}{18},$$

$$b = 3n+1, \quad (0,3)_b = \frac{b\,(b-1)\,(5b+4)}{18},$$

$$b = 3n+2, \quad (0,3)_b = \frac{b\,(b+1)\,(5b-4)}{18};$$

$$b = 4n, \quad (0,4)_b = \frac{b\,(b-4)\,(13b+16)}{48},$$

$$b = 4n+1, \quad (0,4)_b = \frac{b\,(b-1)\,(13b+7)}{48},$$

$$b = 4n+2, \quad (0,4)_b = \frac{b\,(b-2)\,(13b+14)}{48},$$

$$b = 4n+3, \quad (0,4)_b = \frac{b\,(b+1)\,(13b+7)}{48};$$

$$b = 5n, \quad (0,\,5)_b = \frac{b\,(b-5)\,(4b+5)}{15},$$

$$b = 5n+1, \quad (0,\,5)_b = \frac{b\,(b-1)\,(4b+1)}{15},$$

$$b = 5n+2, \quad (0,\,5)_b = \frac{b\,(2b-1)\,(2b+1)}{15},$$

$$b = 5n+3, \quad (0,\,5)_b = \frac{b\,(2b-1)\,(2b+1)}{15},$$

$$b = 5n+4, \quad (0,\,5)_b = \frac{b\,(b+1)\,(4b-1)}{15}.$$

Es ist sehr leicht mit Hilfe der oben erwähnten Gleichungen diese Tabellen fortzusetzen. Man wird dabei ohne Zweifel auf weitere interessante Sätze über die Restreihen zweiter Ordnung geführt werden. Ich gebe beispielsweise zwei Theoreme, die sich mit Hilfe der obigen Tabellen leicht verificiren lassen, deren directer Beweis übrigens vermittelst der bisher entwickelten Sätze sofort geführt werden kann.

Ist, immer unter der Voraussetzung relativer Primzahlen,

$$175)\quad \begin{cases} b_1 = nd + q_1, \quad 0 < q_1 < d, \quad (0,\,d)_{b_1} = \dfrac{b_1\,(A_1 b_1^2 + B_1 b_1 + C_1)}{12d}, \\ b_2 = nd + q_2, \quad 0 < q_2 < d, \quad (0,\,d)_{b_2} = \dfrac{b_2\,(A_2 b_2^2 + B_2 b_2 + C_2)}{12d} \end{cases}$$

gemäss 174), so hat man immer

176) 1. für $q_1 q_2 \equiv 1 \ (mod\ d)$ $\quad A_1 = A_2, \quad B_1 = \quad B_2, \quad C_1 = C_2;$

177) 2. „ $q_1 + q_2 = d$ $\quad A_1 = A_2, \quad B_1 = -B_2, \quad C_1 = C_2.$

Dorpat, Juli 1886.

II.

Ueber die Integration linearer, nicht homogener Differentialgleichungen.

Von

WOLD. HEYMANN,

Mathem. an der Königl. Bauschule zu Plauen i. V.

Die vorliegende Abhandlung bildet eine Fortsetzung einer Arbeit, die ich unter dem gleichen Titel im 30. Jahrgang (1. und 2. Heft) dieser Zeitschrift veröffentlicht habe.

Es wurde in der früheren Arbeit gezeigt, dass man für eine grössere Anzahl von linearen, nicht homogenen Differentialgleichungen das complete Integral aufstellen kann, ohne dass man von der auf sehr complicirte Ausdrücke führenden Methode der Variation der Constanten Gebrauch macht.

Wir suchten nämlich auf directem Wege eine Function zu gewinnen, die der Gleichung mit zweitem Gliede particulär genügt. — Diese Function, welche wir Supplement-Integral nannten, musste dem Integrale der reducirten Gleichung additiv beigegeben werden, und wir erhielten so das complete Integral der nicht reducirten Gleichung.

Für den gewöhnlichen Gebrauch sind es nun zunächst zwei Differentialgleichungen, bei welchen eine einfache Herleitung des Supplementintegrales höchst wünschenswerth sein muss, und um so mehr, als auf diese eine grosse Anzahl anderer Gleichungen zurückkommen. Es sind dies die Gleichungen:

$$\alpha)\qquad (a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{dx} + a_0 y = X,$$

$$\beta)\qquad (a_2 + b_2 x)\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0 x)\, y = X.$$

Für die erste dieser Gleichungen haben wir das Supplementintegral a. a. O. in dem Falle, dass X eine ganze Function bedeutet, ausführlich discutirt; auch in dem Falle, wo X eine beliebige Function ist, sind daselbst einige allgemeine Vorschriften zur Integration gegeben worden.

An dieser Stelle sollen I. Mittel und Wege gezeigt werden, wie man für die zweite der aufgestellten Gleichungen das Supplementintegral findet und zwar:

A. wenn X eine beliebige Function ist,

B. wenn X eine ganze Function ist.

Es soll II. in Kürze eine Uebersicht derjenigen linearen Differentialgleichungen gegeben werden, welche auf die Gleichungen α) und β) zurückkommen, und für welche demnach eine directe Ableitung des Supplementintegrales geleistet werden kann.

I.

A. Supplementintegral der Differentialgleichung

$$(a_2 + b_2 x)\, y'' + (a_1 + b_1 x)\, y' + (a_0 + b_0 x)\, y = X, \tag{1}$$

unter X eine beliebige Function von x verstanden.

Bekanntlich kann man die Gleichung 1) durch Substitutionen der Form

$$x = g(\xi), \quad y = \eta . h(\xi)$$

und durch vielfache Differentiationsprocesse auf die Weiler'sche Normalform*

$$\xi \frac{d^2 \eta}{d \xi^2} + (p + q + \xi) \frac{d \eta}{d \xi} + p \eta = f(\xi) \tag{2}$$

bringen, in welcher p und q positive rechte Brüche sind. Versuchen wir nun das Supplementintegral für die letzte Gleichung herzuleiten. Es liegt nahe, dasselbe in der Form

$$\eta = \int_{u_1}^{u_2} e^{u \xi}\, V du \tag{3}$$

vorauszusetzen, wo V eine noch zu bestimmende Function von u bedeutet. Nach Einführung des Ausdruckes 3) in die Gleichung 2) entsteht:

$$\int_{u_1}^{u_2} \{p\,(u+1) + q u + u\,(u+1)\,\xi\}\, e^{u\xi}\, V du = f(\xi),$$

oder nach einiger Reduction:

$$\{e^{u\xi} u\,(u+1)\, V\}_{u_1}^{u_2} + \int_{u_1}^{u_2} e^{u\xi} \left\{ [p\,(u+1) + q u]\, V - \frac{d}{du} [u\,(u+1)\, V] \right\} du = f(\xi).$$

Setzt man:

$$[p\,(u+1) + q u]\, V - \frac{d}{du} [u\,(u+1)\, V] = F(u),$$

wobei $F(u)$ noch zu bestimmen bleibt, so ergiebt sich:

$$V = -\, u^{p-1} (u+1)^{q-1} \int_{u_0}^{u} F(u)\, u^{-p} (u+1)^{-q}\, du,$$

unter u_0 eine Grösse verstanden, für welche das Integral verschwindet, und jetzt geht die in Rede stehende Gleichung über in:

$$-\left\{ e^{u\xi} u^p (u+1)^q \int_{u_0}^{u} F(u)\, u^{-p} (u+1)^{-q}\, du \right\}_{u_1}^{u_2} + \int_{u_1}^{u_2} e^{u\xi} F(u)\, du = f(\xi).$$

Gelingt es, die Function F so zu bestimmen, dass

---

* Vergl. „Vorlesungen über höhere Analysis" von O. Schlömilch.

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{u\xi} F(u)\, du = f(\xi)$$

und die Grenzen u_1 und u_2 gleichzeitig so zu wählen, dass

$$K = \left\{ e^{u\xi} u^p (u+1)^q \int_{u_0}^{u} F(u)\, u^{-p} (u+1)^{-q}\, du \right\}_{u_1}^{u_2} = 0,$$

so ist

$$3\text{a)}\quad \eta = -\int_{u_1}^{u_2} \left\{ e^{u\xi} u^{p-1} (u+1)^{q-1} \int_{u_0}^{u} F(u)\, u^{-p} (u+1)^{-q}\, du \right\} du$$

das gesuchte Supplementintegral der Gleichung 2).

Beispiel. Es sei

$$f(\xi) = \frac{\varkappa}{\xi^\nu}, \quad \nu > 0.$$

Dann ist F so zu bestimmen, dass

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{u\xi} F(u)\, du = \frac{\varkappa}{\xi^\nu}.$$

Aus der Theorie der Gammafunctionen ist bekannt, dass

$$\int_0^{\infty} e^{u\xi} u^{\nu-1}\, du = (-1)^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\xi^\nu}, \quad \xi < 0,$$

$$\int_0^{-\infty} e^{u\xi} u^{\nu-1}\, du = (-1)^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\xi^\nu}, \quad \xi > 0,$$

sonach hat man

$$F(u) = \frac{(-1)^\nu \varkappa}{\Gamma(\nu)} u^{\nu-1}; \quad u_1 = 0, \quad \begin{matrix} u_2 = +\infty, \text{ wenn } \xi < 0. \\ u_2 = -\infty, \text{ wenn } \xi > 0. \end{matrix}$$

Man überzeugt sich nun, dass für die gefundenen Grenzen und für $u_0 = 0$ der Ausdruck

$$K = \left\{ e^{u\xi} u^p (u+1)^q \int_0^{u} \varkappa u^{\nu-p-1} (u+1)^{-q}\, du \right\}_{u_1}^{u_2} = 0 \quad (\nu < p)$$

wird, und dass daher das Supplementintegral für die Gleichung

$$\xi \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + (p+q+\xi) \frac{d\eta}{d\xi} + p\eta = \frac{\varkappa}{\xi^\nu}$$

folgendermassen lautet:

$$\eta = \frac{(-1)^{\nu+1}\varkappa}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} \left\{ e^{u\xi} u^{p-1} (u+1)^{q-1} \int_0^{u} u^{\nu-p-1} (u+1)^{-q}\, du \right\} du,$$

worin dem Symbol ∞ noch das passende Vorzeichen zu ertheilen ist.

Man kann aber auch einen anderen Weg einschlagen, um für Gleichung 2) das Supplementintegral zu gewinnen, und man erhält es dann in einer anderen Form. Setzt man nämlich dieses Integral in der Gestalt

$$4)\qquad \eta = \int_{u_1}^{u_2} \left[S(u) \int_{u_0}^{u} e^{u\xi} V\,du \right] du$$

voraus, so geht die Differentialgleichung nach Einführung dieses Ausdruckes über in

$$\int_{u_1}^{u_2} S(u) \left[\int_{u_0}^{u} \{ p(u+1) + qu + u(u+1)\xi \} e^{u\xi} V du \right] du = f(\xi)$$

oder in

$$\int_{u_1}^{u_2} S(u) \left[\{ e^{u\xi} u(u+1) V \}_{u_0}^{u} + \int_{u_0}^{u} e^{u\xi} \{ [p(u+1)+qu] V - \frac{d}{du}[u(u+1)V] \} du \right] du = f(\xi).$$

Wählt man nun V so, dass

$$[p(u+1) + qu] V - \frac{d}{du}[u(u+1)V] = 0,$$

und u_0 so, dass

$$\{ e^{u\xi} u(u+1) V \}_{u_0} = 0,$$

dann bleibt zurück

$$\int_{u_1}^{u_2} S(u) e^{u\xi} u(u+1) V du = f(\xi).$$

Verfügt man über $S(u)$ so, dass

$$S(u) u(u+1) V = F(u),$$

wo F genau die vorige Bedeutung hat, nämlich die, dass

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{u\xi} F(u) du = f(\xi),$$

so ergiebt sich als Supplementintegral der Gleichung 2):

$$\eta = \int_{u_1}^{u_2} \left[\frac{F(u)}{u(u+1)V} \int_{u_0}^{u} e^{u\xi} V du \right] du,$$

welches wegen

$$V = u^{p-1}(u+1)^{q-1}$$

auch folgendermassen geschrieben werden kann:

$$4a)\qquad \eta = \int_{u_1}^{u_2} \left\{ u^{-p}(u+1)^{-q} F(u) \int_{u_0}^{u} e^{u\xi} u^{p-1}(u+1)^{q-1} du \right\} du.$$

Beispiel. Sei wie vorhin

$$f(\xi) = \frac{\varkappa}{\xi^{\nu}}, \qquad \nu > 0,$$

mithin

$$F(u) = \frac{(-1)^{\nu}\varkappa}{\Gamma(\nu)} u^{\nu-1}; \quad u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad \begin{matrix} u_2 = +\infty, \text{ wenn } \xi < 0, \\ u_2 = -\infty, \text{ wenn } \xi > 0, \end{matrix}$$

so stellt der Ausdruck

$$\eta = \frac{(-1)^\nu \varkappa}{\Gamma(\nu)} \int\limits_0^\infty \left\{ u^{\nu-p-1}(u+1)^{-q} \int\limits_0^u e^{u\xi} u^{p-1}(u+1)^{q-1} du \right\} du$$

mit entsprechendem Vorzeichen für das Symbol ∞ das Supplementintegral von

$$\xi\eta'' + (p+q+\xi)\eta' + p\eta = \frac{\varkappa}{\xi^\nu}, \quad \nu > 0$$

dar.

Anmerkungen.

Bei Aufstellung des Supplementintegrals der Gleichung 2) stösst man auf das Problem, in der Functionalgleichung

$$\int\limits_{u_1}^{u_2} e^{ux} F(u)\, du = f(x)$$

die Function F bei gegebener Function f zu ermitteln. — Nach Abel heisst f die „Fonction génératrice" von F, und F die „Déterminante" von f.* Für die Herleitung der Déterminante kann es zuweilen zweckmässig sein, wenn man das Integral in ein Fourier'sches Doppelintegral umsetzt, so dass die Formel

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{v_1}^{v_2} e^{u(x-v)\sqrt{-1}} f(v)\, du\, dv = 2\pi f(x), \quad v_1 < x < v_2$$

zur Anwendung kommt. In manchen Fällen bieten sich auch einfachere Mittel dar. Wir wollen hierzu einige bemerkenswerthe Beispiele geben.

Es sei $f(x)$ eine echt gebrochene Function. Dann wird es genügen, die Déterminante für die einzelnen Partialbrüche dieser Function aufzusuchen, und man hat es daher zunächst nur mit der Functionalgleichung

$$\text{a)} \qquad \int\limits_{u_1}^{u_2} e^{ux} F(u)\, du = \frac{g}{(x-h)^\nu}$$

zu thun. Man kommt leicht zum Ziele, wenn man von folgender bekannten Relation ausgeht:

$$\int\limits_{u_1}^{u_2} e^{ux} u^{\nu-1}\, du = \frac{(-1)^\nu \Gamma(\nu)}{x^\nu}, \quad \nu > 0,$$

wo

$$u_1 = 0 \text{ und } \left.\begin{matrix} u_2 = +\infty, \text{ wenn } x < 0 \\ u_2 = -\infty, \text{ wenn } x > 0 \end{matrix}\right\}.$$

Denn setzt man hierin $x - h$ an Stelle von x, so hat man unmittelbar

* Vergl. Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel, Tome second, XI, „Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes".

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{u(x-h)}\, u^{\nu-1}\, du = \frac{(-1)^\nu\, \Gamma(\nu)}{(x-h)^\nu}, \quad \nu > 0,$$

wo

$$u_1 = 0 \text{ und } \left.\begin{matrix} u_2 = +\infty, & \text{wenn} & x-h<0 \\ u_2 = -\infty, & \text{wenn} & x-h>0 \end{matrix}\right\}.$$

Der Fonct. gen.

$$f = \frac{g}{(x-h)^\nu}$$

entspricht sonach die Déterminante

$$F = \frac{(-1)^\nu g}{\Gamma(\nu)}\, u^{\nu-1}\, e^{-hu}.$$

Es sei in der Functionalgleichung

$$\text{b)} \qquad \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\, F(u)\, du = \frac{g\, x^n}{(x-h)^\nu} \quad (n \text{ ganzzahlig und positiv})$$

die Déterminante zu bestimmen. Man könnte diese Aufgabe durch Zerlegung der Fonct. gen. in Partialbrüche auf die vorige zurückführen; allein es ist bemerkenswerth, dass sich die Déterminante in geschlossener Form durch einen höheren Differentialquotienten ausdrücken lässt. Es ist nämlich im vorliegenden Falle

$$F(u) = \frac{(-1)^{\nu+n} g}{\Gamma(\nu)}\, \frac{d^n}{du^n}\left(u^{\nu-1}\, e^{-hu}\right),$$

$n < \nu$, $\nu > 0$ und die Grenzen sind wie unter a) zu wählen.

Die Richtigkeit der Behauptung kann durch Induction dargethan werden. Multiplicirt man nämlich Gleichung b) auf beiden Seiten mit x, so entsteht

$$\int_{u_1}^{u_2} x\, e^{ux}\, F(u)\, du = \frac{g\, x^{n+1}}{(x-h)^\nu};$$

integrirt man theilweise

$$\int_{u_1}^{u_2} u\, e^{ux}\, F(u)\, du = \left\{e^{ux}\, F(u)\right\}_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\, \frac{dF}{du}\, du$$

und beachtet, dass

$$\left\{e^{ux}\, F(u)\right\}_{u_1}^{u_2} = 0, \quad \text{wenn} \quad \begin{matrix} n+1 < \nu \\ \nu > 0 \end{matrix},$$

so hat man

$$-\int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\, \frac{dF}{du}\, du = \frac{g\, x^{n+1}}{(x-h)^\nu},$$

und das ist nichts Anderes, als wenn in Formel b) $n+1$ an Stelle von n gesetzt worden wäre. Da nun die Formel für $n=0$ richtig ist, wie unter a) gezeigt wurde, so ist sie für jedes positive ganzzahlige n richtig.

Allgemeiner kann man Folgendes aussprechen: Die Functionalgleichungen

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux} F(u)\, du = f(x) \quad \text{und} \quad \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} \frac{d^n F}{du^n}\, du = (-1)^n x^n f(x)$$

correspondiren, wenn

$$\left\{ e^{ux} \frac{d^{n-1} F}{du^{n-1}} \right\}_{u_1}^{u_2}$$

eine verschwindende Grösse ist.

Da bei Zerlegung einer gebrochenen Function complexe conjugirte Partialbrüche auftreten können, so kommt man bei der Herleitung des Supplementintegrals in die Lage, zu diesen complexen Grössen die Déterminanten bestimmen zu müssen. Diese sind wieder complex, und zwei conjugirte vereinigen sich zu einem reellen Ausdruck.

Es sei also die Déterminante F für folgende Functionalgleichung zu bestimmen:

c) $$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux} F(u)\, du = \frac{g_1}{(x-h_1)^\nu} + \frac{g_2}{(x-h_2)^\nu},$$

in welcher

$$g_1 = m + ni, \qquad h_1 = p + qi,$$
$$g_2 = m - ni; \qquad h_2 = p - qi.$$

Die Déterminante für den ersten Bruch ist $\dfrac{(-1)^\nu g_1}{\Gamma(\nu)} u^{\nu-1} e^{-h_1 u}$,

" " " " zweiten " " $\dfrac{(-1)^\nu g_2}{\Gamma(\nu)} u^{\nu-1} e^{-h_2 u}$.

Die Summe dieser Ausdrücke ist offenbar die Déterminante für die Summe der beiden Partialbrüche; man hat also

$$F(u) = \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(\nu)} u^{\nu-1} \{ g_1 e^{-h_1 u} + g_2 e^{-h_2 u} \}.$$

Da nun

$$e^{-h_1 u} = e^{-pu}(\cos qu - i \sin qu), \quad e^{-h_2 u} = e^{-pu}(\cos qu + i \sin qu),$$

so ergiebt sich für F der reelle Ausdruck

$$F(u) = \frac{2(-1)^\nu}{\Gamma(\nu)} u^{\nu-1} e^{-pu} \{ m \cos qu + n \sin qu \}, \quad \nu > 0.$$

Die Grenzen sind

$$u_1 = 0; \qquad \left. \begin{array}{l} u_2 = +\infty, \text{ wenn } x - p < 0 \\ u_2 = -\infty, \text{ wenn } x - p > 0 \end{array} \right\}.$$

Nicht selten ereignet es sich, dass lineare Differentialgleichungen behufs Veränderung ihrer constanten Parameter einem vielfachen Differentiationsprocess unterworfen werden, wobei der zweite Theil $f(x)$ der Gleichung die entsprechende Veränderung erleidet, nämlich übergeht in

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Soll für den letzten Ausdruck die Déterminante hergeleitet werden, so bestimme man zunächst die Déterminante von $f(x)$, d. h., man ermittle F aus

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux} F(u)\, du = f(x);$$

alsdann lässt sich zeigen, dass

$$u^n F(u)$$

die Déterminante der n^{ten} Ableitung von $f(x)$ ist. Man findet nämlich durch n-fache Differentiation der letzten Gleichung nach x

$$\text{d)} \qquad \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} u^n F(u)\, du = \frac{d^n f(x)}{dx^n},$$

was mit unserer Behauptung coincidirt.

Bisweilen wird mit Differentialgleichungen der Form

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = f(x)$$

auch folgende Transformation vorgenommen: Man substituirt $y = y_1 e^{\alpha x}$, differenzirt hierauf die Gleichung a-mal, substituirt rückwärts $y_1^{(a)} = y_2 e^{-\alpha x}$; hierauf transformirt man nochmals in analoger Weise $y_2 = y_3 e^{\beta x}$, differenzirt b-mal, setzt $y_3^{(b)} = e^{-\beta x} y_4$. Hierbei ist aus dem zweiten Theil $f(x)$ der ursprünglichen Gleichung Folgendes geworden:

$$e^{\beta x} \frac{d^b}{dx^b} \left\{ e^{(\alpha-\beta)x} \frac{d^a}{dx^a} e^{-\alpha x} f(x) \right\},$$

und es fragt sich nun, welche Gestalt die Déterminante für diesen Ausdruck annimmt.

Sei $F(u)$ die Déterminante von $f(x)$, so dass man hat

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux} F(u)\, du = f(x).$$

Setzt man hierin

$$u = v + \alpha,$$

so folgt

$$\int_{v_1}^{v_2} e^{vx} F(v+\alpha)\, dv = e^{-\alpha x} f(x);$$

differenzirt man dies a-mal nach x, so entsteht

$$\int_{v_1}^{v_2} e^{vx} v^a F(v+\alpha)\, dv = \frac{d^a}{dx^a} e^{-\alpha x} f(x);$$

substituirt man rückwärts

$$v = u - \alpha,$$

so folgt

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux}(u-\alpha)^a F(u)\,du = e^{\alpha x}\frac{d^a}{dx^a}e^{-\alpha x}f(x),$$

oder für

$$u = v + \beta$$

$$\int_{v_1}^{v_2} e^{vx}(v+\beta-\alpha)^a F(v+\beta)\,dv = e^{(\alpha-\beta)x}\frac{d^a}{dx^a}e^{-\alpha x}f(x),$$

und nach b-maliger Differentiation in Bezug auf x

$$\int_{v_1}^{v_2} e^{vx}v^b(v+\beta-\alpha)^a F(v+\beta)\,dv = \frac{d^b}{dx^b}\left\{e^{(\alpha-\beta)x}\frac{d^a}{dx^a}e^{-\alpha x}f(x)\right\},$$

oder endlich für

$$v = u - \beta$$

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux}(u-\beta)^b(u-\alpha)^a F(u)\,du = e^{\beta x}\frac{d^b}{dx^b}\left\{e^{(\alpha-\beta)x}\frac{d^a}{dx^a}e^{-\alpha x}f(x)\right\}.$$

Ist daher $F(u)$ die Déterminante von $f(x)$, so ist

$$(u-\alpha)^a(u-\beta)^b F(u)$$

die Déterminante von

$$e^{\beta x}\frac{d^b}{dx^b}\left\{e^{(\alpha-\beta)x}\frac{d^a}{dx^a}e^{-\alpha x}f(x)\right\}.$$

Diese Transformation kann in der angedeuteten Weise beliebig weit fortgesetzt werden.

B. Supplementintegral der Differentialgleichung

1) $$(a_2+b_2x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y = X,$$

unter X eine ganze Function verstanden,

$$X = A_0 + A_1\frac{x}{1!} + A_2\frac{x^2}{2!} + \dots + A_\mu\frac{x^\mu}{\mu!}.$$

In dem Falle, wo der zweite Theil der Differentialgleichung 1) eine ganze Function ist, treten wesentliche Vereinfachungen bei der Herleitung des Supplementintegrals ein. — In erster Linie verdient der Fall Beachtung, wo $b_0 = 0$ ist. Dann ist das Supplementintegral im Allgemeinen eine ganze Function μ^{ten} Grades

$$y = \alpha_0 + \alpha_1\frac{x}{1!} + \alpha_2\frac{x^2}{2!} + \dots + \alpha_\mu\frac{x^\mu}{\mu!};$$

die Grössen α bestimmen sich durch Coefficientenvergleichung. — Man vergl. die auf Seite 22 citirte Arbeit: Ueber die Integration etc., § 2. —

Ist $b_0 \gtrless 0$, so liegt die Sache nicht so einfach. Das Supplementintegral hat jetzt die Form

$$y = z + \alpha_0 + \alpha_1 \frac{x}{1!} + \ldots + \alpha_{\mu-1} \frac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!},$$

wobei z noch in besonderer Weise zu bestimmen ist. Führt man nämlich den letzten Ausdruck in die Gleichung 1) ein, so entsteht

$$(a_2 + b_2 x) z'' + (a_1 + b_1 x) z' + (a_0 + b_0 x) z + \left\{ k_0 + k_1 \frac{x}{1!} + \ldots + k_\mu \frac{x^\mu}{\mu!} \right\}$$
$$= A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + \ldots + A_\mu \frac{x^\mu}{\mu!}.$$

Es enthalten die k linear die μ Grössen α_0 bis $\alpha_{\mu-1}$, und letztere kann man immer so bestimmen, dass die Coefficienten A_μ und k_μ, $A_{\mu-1}$ und $k_{\mu-1}$, ..., A_1 und k_1 identisch werden. Im Speciellen kann es sich ereignen, dass die absoluten Glieder A_0 und k_0 dann von selbst übereinstimmen, und in diesem Falle würde das Supplementintegral eine Function $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Grades sein. Im Allgemeinen findet dies aber nicht statt, und es bleibt

$$(a_2 + b_2 x) z'' + (a_1 + b_1 x) z' + (a_0 + b_0 x) z = A_0 - k_0$$

zurück, für welche Gleichung noch besonders ein Supplementintegral aufzusuchen ist.

Die Gleichungen zur Bestimmung der α lauten folgendermassen:

$$b_0 \mu \, \alpha_{\mu-1} = A_\mu, \qquad \left.\begin{matrix} a_0 \alpha_h + b_0 h \alpha_{h-1} \\ + a_1 \alpha_{h+1} + b_1 h \alpha_h \\ + a_2 \alpha_{h+2} + b_2 h \alpha_{h+1} \end{matrix}\right\} = A_h,$$

$$\left.\begin{matrix} a_0 \alpha_{\mu-1} + b_0 (\mu-1) \alpha_{\mu-2} \\ + b_1 (\mu-1) \alpha_{\mu-1} \end{matrix}\right\} = A_{\mu-1}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\left.\begin{matrix} a_0 \alpha_{\mu-2} + b_0 (\mu-2) \alpha_{\mu-3} \\ + a_1 \alpha_{\mu-1} + b_1 (\mu-2) \alpha_{\mu-2} \\ + b_2 (\mu-2) \alpha_{\mu-1} \end{matrix}\right\} = A_{\mu-2}, \qquad \left.\begin{matrix} a_0 \alpha_1 + b_0 \alpha_0 \\ + a_1 \alpha_2 + b_1 \alpha_1 \\ + a_2 \alpha_3 + b_2 \alpha_2 \end{matrix}\right\} = A_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und eine Berechnung dieser Grössen ist immer möglich, weil $b_0 \gtrless 0$ vorausgesetzt wird.

Im allgemeinsten Falle ist daher das Supplementintegral der Gleichung 1) additiv zusammengesetzt aus einer ganzen Function $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Grades und aus einer Function z, welche letztere wiederum Supplementintegral der vorgelegten Differentialgleichung ist, wenn deren zweiter Theil einen constanten Werth

$$A_0 - k_0 = A_0 - (a_0 \alpha_0 + a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2) = B$$

hat.

Um nun z aus der Gleichung

1a) $$(a_2 + b_2 x) z'' + (a_1 + b_1 x) z' + (a_0 + b_0 x) z = B$$

zu bestimmen, könnte man diese in die Weiler'sche Normalform umsetzen, aber bei dieser Transformation tritt der Uebelstand ein, dass der zweite Theil der Gleichung wieder inconstant wird, und dass dadurch die Integration bedeutend complicirter ausfällt. Man versuche daher für die nicht transformirte Gleichung ein Supplementintegral herzuleiten.

Setzt man dasselbe in der Form

$$z = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V du$$

voraus, so erhält man nach Einführung dieses Ausdruckes in die Gleichung 1a)

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux} \{U_0 + U_1 x\} V du = B,$$

oder nach einiger Reduction

$$\{e^{ux} U_1 V\}_{u_1}^{u_2} + \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} \left\{U_0 V - \frac{d}{du}(U_1 V)\right\} du = B.$$

Hierin bedeuten

$$\left.\begin{array}{l} U_0 = a_2 u^2 + a_1 u + a_0 \\ U_1 = b_2 u^2 + b_1 u + b_0 \end{array}\right\}.$$

Man bestimme nun V so, dass

$$U_0 V - \frac{d}{du}(U_1 V) = 0$$

und, wenn möglich, die Grenzen u_1 und u_2 so, dass

$$\{e^{ux} U_1 V\}_{u_1}^{u_2} = B.$$

Aus der vorletzten Gleichung ergiebt sich

$$U_1 V = \gamma e^{\int \frac{U_0}{U_1} du}, \quad \gamma = const.,$$

und vermöge dieses Ausdruckes verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$\gamma \left\{ e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du} \right\}_{u_1}^{u_2} = B.$$

Für das Weitere sind nun vier Fälle der Integration zu unterscheiden und zwar je nachdem

1) $$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{a}{u-\alpha} + \frac{b}{u-\beta},$$

2) $$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{a}{(u-\alpha)^2} + \frac{b}{u-\alpha},$$

3) $$\frac{U_0}{U_1} = m + nu + \frac{a}{u-\alpha},$$

4) $$\frac{U_0}{U_1} = a_2 u^2 + a_1 u + a_0.$$

I. Es sei

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{a}{u-\alpha} + \frac{b}{u-\beta},$$

dann lässt sich die Gleichung 1a) folgendermassen schreiben:*

* Wir gebrauchen die Schreibweise S. Spitzer's, welcher diese Gleichung ausführlich behandelt hat. — Der Einfachheit halber ist $b_2 = 1$ gesetzt worden.

$$\alpha) \qquad (m+x)z'' + [a+b-(\alpha+\beta)(m+x)]z' + [-a\beta - b\alpha + \alpha\beta(m+x)]z = B.$$

Das Integral lautet:

$$z = \gamma \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{U_1} e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du},$$

d. h.

$$z = \gamma \int_{u_1}^{u_2} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{a-1} (u-\beta)^{b-1} du$$

und die Gleichung zur Bestimmung der Integrationsgrenzen

$$\left\{ \gamma e^{u(m+x)} (u-\alpha)^a (u-\beta)^b \right\}_{u_1}^{u_2} = B.$$

Bezeichnen wir nun die absolut kleinste Wurzel von $U_1 = 0$ mit α, so können bei positivem a die Grenzen $u_1 = 0$ und $u_2 = \alpha$ gebraucht werden und man erhält für γ aus der letzten Gleichung

$$\gamma = (-1)^{a+b+1} B \alpha^{-a} \beta^{-b} \qquad \left.\begin{matrix} \alpha \gtrless 0 \\ \beta \gtrless 0 \end{matrix}\right\} \text{ weil } b_0 \gtrless 0.$$

Ist hingegen a negativ, so verfahre man in folgender Weise: Man substituire in Gleichung α)

$$z = e^{\alpha x} z_1,$$

dann entsteht

$$(m+x)z_1'' + [a+b+(\alpha-\beta)(m+x)]z_1' + a(\alpha-\beta)z_1 = B^{-\alpha x} e;$$

dies giebt ν-mal differenzirt

$$(m+x)z_1^{(\nu+2)} + [a+\nu+b+(\alpha-\beta)(m+x)]z_1^{(\nu+1)} + (a+\nu)(\alpha-\beta)z_1^{\nu} = B(-\alpha)^{\nu} e^{-\alpha x}.$$

Setzt man nun

$$z_1^{(\nu)} = e^{-\alpha x} z_2,$$

so erhält man

$$(m+x)z_2'' + [a+\nu+b-(\alpha+\beta)(m+x)]z_2' + [-(a+\nu)\beta - b\alpha + \alpha\beta(m+x)]z_2 = B(-\alpha)^{\nu},$$

also eine Gleichung, die sich von Gleichung (α) nur dadurch unterscheidet, dass an Stelle von

	z	a	B
resp.	z_2	$a+\nu$	$B(-\alpha)^{\nu}$

steht. Man wähle nun für ν diejenige ganze positive Zahl, welche unmittelbar dem absolut genommenen Werthe von a folgt, dann ist

$$z_2 = \gamma \int_0^{\alpha} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{a+\nu-1} (u-\beta)^{b-1} du$$

ein brauchbares Supplementintegral der letzten Differentialgleichung. Der Zusammenhang zwischen diesem Integral und demjenigen der Gleichung α) ist gegeben durch

$$z = e^{\alpha x} {}_{\nu}\!\int z_2 e^{-\alpha x} dx^{\nu},$$

wobei die ν-fache Integration zweckmässig mit Hilfe der Formel

$${}_{\nu}\!\int f(x)\,dx^{\nu} = \frac{1}{(\nu-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-\omega)^{\nu-1} f(\omega)\,du$$

vollzogen werden kann.*

Für γ hat man zunächst

$$\gamma = (-1)^{a+\nu+b+1} (B(-\alpha)^{\nu})\,\alpha^{-(a+\nu)}\beta^{-b},$$

aber dieses zieht sich zusammen in

$$\gamma = (-1)^{a+b+1} B\alpha^{-a}\beta^{-b};$$

diese Grösse behält also ihren früheren Werth bei.

Sollte $a = 0$ sein, so genügt der reducirten Differentialgleichung, wie leicht zu sehen,

$$z = e^{\alpha x}$$

particulär, und die Integration erledigt sich auf anderem Wege. Ueberhaupt treten Vereinfachungen ein, wenn a und b ganze positive oder negative Zahlen sind.

Es möge noch folgende Anmerkung gestattet sein.

Besitzt die rechte Seite der Gleichung 1) einen Factor $e^{\varkappa x}$, lautet sie also $Xe^{\varkappa x}$, so lässt sich dieser Factor durch die Substitution

$$y = e^{\varkappa x} y_1,$$

stets entfernen. Denn nach Einführung dieser Substitution tritt die Exponentialfunction als Factor der linken Seite auf und geht durch Division fort, während sich $\varkappa$ mit den Coefficienten der Gleichung 1) so mischt, dass deren Gestalt erhalten bleibt.

Man kann auf Gleichungen dieser Art bei der Integration von

a) $(A_3 + B_3 x) z''' + (A_2 + B_2 x) z'' + (A_1 + B_1 x) z' + (A_0 + B_0 x) z = 0$

stossen. Lässt sich nämlich die letzte Differentialgleichung auf die Form

$$\frac{dZ}{dx} - \varkappa Z = 0$$

bringen, wobei

b) $Z = (a_2 + b_2 x) z'' + (a_1 + b_1 x) z' + (a_0 + b_0 x) z,$

so ist das Supplementintegral der letzten Gleichung ein particuläres Integral der Gleichung a). Es wird sonach durch eine complete Integration der Gleichung

* Es sei bemerkt, dass man sich in bestimmten Fällen — auch bei negativem a — die vielfache Integration ersparen kann, wenn man für u_2 unendlich grosse Werthe zulässt. Doch muss man dann unterscheiden, ob $m + x$ positiv oder negativ ist.

c) $(a_2 + b_2 x) z'' + (a_1 + b_1 x) z' + (a_0 + b_0 x) z = B e^{\varkappa x}$, $B = const.$

das vollständige Integral von a) gewonnen.

2. Es sei

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{a}{(u-\alpha)^2} + \frac{b}{u-\alpha},$$

dann lässt sich die Gleichung 1a) folgendermassen schreiben:

β) $(m+x) z'' + [b - 2\alpha(m+x)] z' + [a - b\alpha + \alpha^2 (m+x)] z = B.$

Das Supplementintegral lautet:

$$z = \gamma \int_{u_1}^{u_2} e^{u(m+x) - \frac{a}{u-\alpha}} (u-\alpha)^{b-2} du$$

und die Gleichung zur Bestimmung der Integrationsgrenzen:

$$\left\{ \gamma (u-\alpha)^b e^{u(m+x) - \frac{a}{u-\alpha}} \right\}_{u_1}^{u_2} = B.$$

Die Wahl der Grenzen hat nun in folgender Weise zu erfolgen:

$m+x$ negativ,	α negativ,	a beliebig	$u_1 = 0$, $u_2 = +\infty$,
$m+x$ positiv,	α positiv,	a beliebig	$u_1 = 0$, $u_2 = -\infty$,
$m+x$ negativ,	α positiv,	a negativ	$u_1 = 0$, $u_2 = \alpha - \delta$ } $\lim \delta = 0.$
$m+x$ positiv,	α negativ,	a positiv	$u_1 = 0$, $u_2 = \alpha + \delta$ } $\lim \delta = 0.$
$m+x$ negativ,	α positiv,	a positiv	Hier ergeben sich keine brauchbaren Grenzen.
$m+x$ positiv,	α negativ,	a negativ	Hier ergeben sich keine brauchbaren Grenzen.

Die linke Seite der Gleichung

$$\gamma (u-\alpha)^b e^{u(m+x) - \frac{a}{u-\alpha}} = B$$

verschwindet für $u = u_2$; für $u = u_1 = 0$ erhält man dagegen

$$-\gamma(-\alpha)^b e^{\frac{a}{\alpha}} = B, \quad \alpha \gtrless 0,$$

weshalb γ in den erledigten Fällen den Werth

$$\gamma = (-1)^{b+1} B \alpha^{-b} e^{-\frac{a}{\alpha}}$$

besitzt.

In den beiden Fällen, in welchen sich keine passenden Werthe für u_2 finden lassen, scheint nichts Anderes übrig zu bleiben, als dass man die Gleichung 1a) direct auf die Weiler'sche Normalform bringt. Dies geschieht (vergl. die auf Seite 23 citirten Vorlesungen von Schlömilch) mittels der Substitutionen

$$x = \delta + \varepsilon \xi^2 \quad \text{und} \quad z = \eta e^{-\varkappa \xi^2 - \lambda \xi},$$

vermöge welcher die Gleichung 1a) übergeht in

$$\xi \frac{d^2 \eta}{d \xi^2} + (p + q + \xi) \frac{d\eta}{d\xi} + p\eta = B' \xi e^{\varkappa \xi^2 + \lambda \xi}.$$

Die weitere Integration gehört in den Theil A der vorliegenden Arbeit. Es sei hier nur darauf hingewiesen, dass man im Verlaufe der Rechnung auf die Functionalgleichung

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{u\xi} F(u)\, du = B'\xi e^{\varkappa \xi^2 + \lambda \xi}$$

stösst, und dass in dieser die Déterminante F (wie dieses bei anderer Gelegenheit auf Seite 44 gezeigt werden soll) folgender Ausdruck ist·

$$F(u) = \frac{B'}{4\varkappa\sqrt{\pi\varkappa}}(u-\lambda)\, e^{-\frac{(u-\lambda)^2}{4\varkappa}}.$$

3. Es sei

$$\frac{U_0}{U_1} = m + nu + \frac{a}{u-\alpha},$$

dann lässt sich Gleichung 1a), welche jetzt die Gestalt

$$a_2 z'' + (a_1 + b_1 x) z' + (a_0 + b_0 x) z = B$$

besitzt, folgendermassen schreiben:

$$\gamma) \qquad n z'' + [m + x - n\alpha] z' + [a - \alpha(m + x)] z = B,$$

wobei der Einfachheit halber $b_1 = 1$ gesetzt wurde.

Das Supplementintegral lautet:

$$z = \gamma \int_{u_1}^{u_2} (u-\alpha)^{a-1} e^{u(m+x) + n\frac{u^2}{2}} du$$

und die Gleichung zur Bestimmung der Grenzen

$$\left\{\gamma(u-\alpha)^a e^{u(m+x)+n\frac{u^2}{2}}\right\}_{u_1}^{u_2} = B.$$

Die Wahl der Grenzen hat in folgender Weise stattzufinden:

n negativ, a positiv, α beliebig,	$u_1 = 0$, $u_2 = \alpha$, od. $+\infty$, od. $-\infty$,
n positiv, a positiv, α beliebig,	$u_1 = 0$, $u_2 = \alpha$, od. $+\infty\sqrt{-1}$, od. $-\infty\sqrt{-1}$,
n negativ, a negativ, α negativ,	$u_1 = 0$, $u_2 = +\infty$,
n negativ, a negativ, α positiv,	$u_1 = 0$, $u_2 = -\infty$,
n positiv, a negativ, α negativ,	$u_1 = 0$, $u_2 = +\infty\sqrt{-1}$,
n positiv, a negativ, α positiv,	$u_1 = 0$, $u_2 = -\infty\sqrt{-1}$.

Die linke Seite der Gleichung

$$\gamma(u-\alpha)^a e^{u(m+x)+n\frac{u^2}{2}} = B$$

verschwindet für $u = u_2$; für $u = u_1 = 0$ erhält man dagegen

$$-\gamma(-\alpha)^a = B, \qquad \alpha \gtrless 0,$$

weshalb γ in allen Fällen den Werth

$$\gamma = (-1)^{a+1} B \alpha^{-a}$$

besitzt.

4. Im letzten Falle lautet die Gleichung 1a):

$$a_2 z'' + a_1 z' + (a_0 + b_0 x) z = B,$$

und dieser genügt, wie hinreichend bekannt ist, falls $B \gtrless 0$,

$$z = \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} S\,du,$$

wobei

$$S = \left\{ \begin{array}{l} C_1\,\varepsilon_1 e^{\varepsilon_1 u x + a_1 \frac{\varepsilon_1^2 u^2}{2} + a_0 \varepsilon_1 u} \\ + C_2\,\varepsilon_2 e^{\varepsilon_2 u x + a_1 \frac{\varepsilon_2^2 u^2}{2} + a_0 \varepsilon_2 u} \\ + C_3\,\varepsilon_3 e^{\varepsilon_3 u x + a_1 \frac{\varepsilon_3^2 u^2}{2} + a_0 \varepsilon_3 u} \end{array} \right\}, \qquad \begin{array}{r} a_2\,\varepsilon^3 + 1 = 0, \\ b_0 = 1, \\ C_1 + C_2 + C_3 = 0. \end{array}$$

Wird nämlich das letzte Integral in die vorgelegte Gleichung eingeführt, so entsteht nach gehöriger Reduction auf der linken Seite

$$-(C_1 + C_2 + C_3),$$

welche Grösse Null zu setzen ist, wenn man die reducirte Gleichung vor sich hat. Ist aber die rechte Seite der Gleichung eine bestimmte Constante B, so hat man die willkürlichen Constanten einfach an die Bedingung

$$C_1 + C_2 + C_3 = -B$$

zu knüpfen. Im vorliegenden Falle ist also das Supplementintegral mit den particulären Integralen der reducirten Differentialgleichung innig verbunden. Wollte man das Supplementintegral für sich haben, so müsste man zwei der Constanten C gleich Null setzen.

II.

Lineare, nicht homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren complete Integration auf die Gleichungen

$$\alpha)\qquad (a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\frac{d^2 y}{d x^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{d y}{d x} + a_0 y = X,$$

$$\beta)\qquad (a_2 + b_2 x)\frac{d^2 y}{d x^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{d y}{d x} + (a_0 + b_0 x) y = X$$

führt.

Es giebt eine grosse Anzahl von Differentialgleichungen der Form

$$\gamma)\qquad \varphi_2(u)\frac{d^2 v}{d u^2} + \varphi_1(u)\frac{d v}{d u} + \varphi_0(u)\, v = \psi(u),$$

welche durch Substitutionen wie

$$u = g(x), \qquad v = y \,.\, h(x)$$

in die Gleichungen α) oder β) transformirt werden können.* Diese Substitutionen bringen zwar eine Veränderung des zweiten Theiles ψ der

* Die Gleichung β) kann mittels $y = e^{\lambda x} z$ auf die Form

$$\beta')\qquad (a_2 + b_2 x)\, z'' + (a_1 + b_1 x)\, z' + a_0 z = X_1$$

gebracht werden und erscheint dann als Specialfall von α). Da aber bekanntlich β') eine ganz eigenartige Behandlung erfordert, und da ihr Integral von dem der Gleichung α) wesentlich verschieden ist, so haben wir beide Gleichungen — α) und β) — an die Spitze gestellt.

Gleichung γ) hervor; immerhin bleibt aber diese eine Function der unabhängigen Variabelen, und man kann daher für alle diese Gleichungen γ) das Supplementintegral auf directem Wege — das soll heissen: ohne Variation der Constanten — ableiten.

Es wird nicht überflüssig sein, wenn wir eine kurze Uebersicht der hauptsächlichsten Gleichungen erwähnter Art geben, zumal eine solche Uebersicht auch Nutzen gewährt, wenn man es nur mit den reducirten Gleichungen zu thun hat.

Folgende Differentialgleichungen* — mit oder ohne zweiten Theil — lassen sich auf die Gleichungen α) oder β) — beziehentlich mit oder ohne zweiten Theil — zurückführen.

Auf α) kommt zurück:

$$1)\quad (a+bu+cu)^2\frac{d^2v}{du^2}+(a_1+b_1u)(a+bu+cu^2)\frac{dv}{du}+(a_0+b_0u+c_0u^2)v=0.$$

Substitution:

$$v=w\,e^{\int\frac{g+hu}{a+bu+cu^2}du}.$$

Auf 1) kommt zurück:

$$2)\quad \begin{aligned}(a+b\xi+c\xi^2+d\xi^3)^2\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+a_1(a+b\xi+c\xi^2+d\xi^3)\frac{d\eta}{d\xi}\\ +(a_0+b_0\xi+c_0\xi^2)\eta=0.\end{aligned}$$

Substitution:

$$\xi=\frac{\lambda u+1}{u},\qquad \eta=\frac{v}{u};$$

λ folgt aus

$$a+b\lambda+c\lambda^2+d\lambda^3=0.$$

Auf 1) kommt auch zurück:

$$3)\quad \begin{aligned}(a+b\xi+c\xi^2+d\xi^3)^2\frac{d^2v}{d\xi^2}+(a_1+b_1\xi+c_1\xi^2)(a+b\xi+c\xi^2+d\xi^3)\frac{dv}{d\xi}\\ +(a_0+b_0\xi+c_0\xi^2)v=0,\quad c_1=2d.\end{aligned}$$

Substitution:

$$\xi=\frac{\lambda u+1}{u};$$

λ folgt aus

$$a+b\lambda+c\lambda^2+d\lambda^3=0.$$

Auf 1) kommt zurück:

$$4)\quad \begin{aligned}t^2(a+bt^n+ct^{2n})^2\frac{d^2v}{dt^2}+t(a+bt^n+ct^{2n})(a_1+b_1t^n+c_1t^{2n})\frac{dv}{dt}\\ +(a_0+b_0t^n+c_0t^{2n})v=0,\quad c_1=(n+1)c.\end{aligned}$$

Substitution:

---

* Vergl. diese Zeitschrift, XXVIII. Jahrg. 4. Heft und XXIX. Jahrg. 3. Heft. — Der Einfachheit wegen sind die Gleichungen in der reducirten Form angeführt und die Buchstaben a, b, a_1, b_1 etc. wiederholt gebraucht worden, obgleich selbige in den verschiedenen Gleichungen verschiedene Bedeutung haben.

$$t^n = \frac{1}{u}.$$

Ist $c = c_1 = 0$, so lautet die letzte Differentialgleichung

$$5)\ t^2 (a + b t^n)^2 \frac{d^2 v}{d t^2} + t (a + b t^n)(a_1 + b_1 t^n) \frac{d v}{d t} + (a_0 + b_0 t^n + c_0 t^{2n}) v = 0,$$

und diese ist bedingungslos integrirbar.

Gleichung 5) fasst in sich zwei bekannte Specialfälle, nämlich — wenn $a_0 + b_0 t^n + c_0 t^{2n}$ durch $a + b t^n$ theilbar ist — die Euler'sche

$$6)\qquad t^2 (a + b t^n) \frac{d^2 v}{d t^2} + t (a_1 + b_1 t^n) \frac{d v}{d t} + (\alpha_0 + \beta_0 t^n) v = 0,$$

und — wenn $b = 0$ — die folgende:

$$7)\qquad a_2 t^2 \frac{d^2 v}{d t^2} + t (a_1 + b_1 t^n) \frac{d v}{d t} + (a_0 + b_0 t^n + c_0 t^{2n}) v = 0.$$

Für $t^n = \xi$ geht 7) über in

$$8)\qquad \alpha_2 \xi^2 \frac{d^2 v}{d \xi^2} + \xi (\alpha_1 + \beta_1 \xi) \frac{d v}{d \xi} + (\alpha_0 + \beta_0 \xi + \gamma_0 \xi^2) v = 0,$$

und diese Gleichung kommt vermöge

$$v = \xi^k w$$

auf die Gleichung β) zurück.

Endlich erinnern wir noch daran, dass die Gleichung

$$9)\qquad a_2 \frac{d^2 v}{d u^2} + (a_1 + b_1 u) \frac{d v}{d u} + (a_0 + b_0 u + c_0 u^2) v = 0$$

mittels der Substitution

$$v = w e^{m u^2 + n u}$$

in die Gleichung β) übergeführt werden kann.

Wir begnügen uns mit Angabe dieser neun Differentialgleichungen, obwohl noch lange nicht alle bis jetzt bekannten auf α) und β) reducirbaren Gleichungen genannt sind. — Besitzen nun die aufgestellten Gleichungen einen zweiten Theil, so kann für dieselben stets — durch Rückgang auf die Gleichungen α) resp. β) — das Supplementintegral hergeleitet werden. Das Problem läuft schliesslich immer darauf hinaus, in den Functionalgleichungen

$$\int_{u_1}^{u_2} (u - x)^\lambda F(u)\, du = f(x), \quad \text{resp.} \quad \int_{u_1}^{u_2} e^{u x} F(u)\, du = f(x)$$

die Déterminante F bei gegebener Fonct. gén. $f(x)$ zu ermitteln.

Wir wollen die Rechnung an einem Beispiele vollständig durchführen und wählen hierzu die Gleichung 9), wenn deren zweiter Theil eine ganze Function ist.

Supplementintegral der Differentialgleichung*

$$\text{9)}\qquad a_2 \frac{d^2 y}{d x^2} + (a_1 + b_1 x) \frac{d y}{d x} + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2) y = X,$$

$$X = A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + A_\mu \frac{x^\mu}{\mu!}.$$

Das Supplementintegral hat offenbar die Form

$$y = z + \alpha_0 + \alpha_1 \frac{x}{1!} + \ldots + \alpha_{\mu-2} \frac{x^{\mu-2}}{(\mu-2)!};$$

denn führt man diesen Ausdruck in die Gleichung 9) ein, so entsteht

$$a_2 \frac{d^2 z}{d x^2} + (a_1 + b_1 x) \frac{d z}{d x} + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2) z + k_0 + k_1 \frac{x}{1!} + \ldots + k_\mu \frac{x^\mu}{\mu!} = X,$$

und nun lassen sich die $\mu - 1$ Grössen α, welche linear in den k enthalten sind, so bestimmen, dass

$$k_2 = A_2, \quad k_3 = A_3, \quad \ldots, \quad k_\mu = A_\mu$$

und sonach

$$\text{9a)}\qquad a_2 \frac{d^2 z}{d x^2} + (a_1 + b_1 x) \frac{d z}{d x} + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2) z = B_0 + B_1 x$$

zurückbleibt, für welche Gleichung noch das Supplementintegral besonders zu ermitteln ist.

Das Gleichungssystem zur Bestimmung der α ist in folgendem Schema enthalten:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 \alpha_h \quad + b_0 h \alpha_{h-1} + c_0 h (h-1) \alpha_{h-2} \\ + a_1 \alpha_{h+1} + b_1 h \alpha_h \\ + a_2 \alpha_{h+2} \end{array}\right\} = A_h;$$

man hat also für $h = \mu$ bis $h = 2$

$$c_0 \mu (\mu - 1) \alpha_{\mu-2} = A_\mu, \quad b_0 (\mu - 1) \alpha_{\mu-2} + c_0 (\mu - 1)(\mu - 2) \alpha_{\mu-3} = A_{\mu-1} \quad \text{etc.}$$

Eine Bestimmung der α ist immer möglich, wenn $c_0 \gtrless 0$; der Fall $c_0 = 0$ ist im ersten Theil dieser Abhandlung erledigt worden.

Aus dem Schema geht noch hervor, dass (für $h = 0$ und 1)

$$B_0 = A_0 - \{a_0 \alpha_0 + a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2\}, \quad B_1 = A_1 - \left\{\begin{array}{l} a_0 \alpha_1 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_3 \\ + b_0 \alpha_0 + b_1 \alpha_1 \end{array}\right\}.$$

Jetzt hat man das Supplementintegral der Gleichung 9a) aufzustellen. Man transformire dieselbe mittels der Substitution (vergl. S. 39)

$$z = v e^{-\varkappa x^2 - \lambda x},$$

wodurch entsteht

$$a_2 \frac{d^2 v}{d x^2} + \left[\begin{array}{c} (a_1 - 2 a_2 \lambda) \\ + (b_1 - 4 a_2 \varkappa) x \end{array}\right] \frac{d v}{d x} + \left[\begin{array}{c} (a_0 - a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 - 2 a_2 \varkappa) \\ + (b_0 - 2 a_1 \varkappa - (b_1 - 4 a_2 \varkappa) \lambda) x \\ + (4 a_2 \varkappa^2 - 2 b_1 \varkappa + c_0) x^2 \end{array}\right] v = f(x),$$

$$f(x) = (B_0 + B_1 x) e^{\varkappa x^2 + \lambda x}$$

oder, wenn $\varkappa$ und λ so bestimmt werden, dass

---

* Die rechte Seite dürfte auch $X e^{\alpha x^2 + \beta x}$ lauten, ohne dass die Rechnung complicirter ausfällt, denn die Exponentialfunction kann durch die Substitution $y = y_1 e^{\alpha x^2 + \beta x}$ beseitigt werden.

$$4a_2\varkappa^2 - 2b_1\varkappa + c_0 = 0, \quad b_{\cdot} - 2a_1\varkappa - (b_1 - 4a_2\varkappa)\lambda = 0,$$

9b)
$$p\frac{d^2v}{dx^2} + (q+x)\frac{dv}{dx} + rv = f(x).$$

Die Bedeutung von p, q und r wird leicht erkannt; doch ist auch darauf zu achten, dass wir die Grösse

$$b_1 - 4a_2\varkappa,$$

mit welcher die vorletzte Differentialgleichung dividirt worden ist, in B_0 und B_1 eingehend denken. Die neuen Grössen B_0 und B_1 in f sind also mit den vorigen nicht identisch. Wesentliche Vorau setzung ist hierbei

$$b_1 - 4a_2\varkappa \lesseqgtr 0.$$

Führt man nun in die Gleichung 9b) — vergl. S. 25 — den Ausdruck

$$v = \int_{u_1}^{u_2} S(u) \cdot \left[\int_{u_0}^{u} e^{ux}\, V\, du\right] du$$

ein, so ergiebt sich

$$\int_{u_1}^{u_2} S(u)\left[\int_{u_0}^{u} \{(pu^2+qu+r)+ux\}\, e^{ux}\, V\, du\right] du = f(x)$$

oder

$$\int_{u_1}^{u_2} S(u)\left[\{e^{ux}\, u\, V\}_{u_0}^{u} + \int_{u_0}^{u} e^{ux}\left\{(pu^2+qu+r)\,V - \frac{d}{du}(uV)\right\} du\right] du = f(x).$$

Setzt man

$$(pu^2+qu+r)\,V - \frac{d}{du}(uV) = 0,$$

so wird

$$u\,V = u^r e^{p\frac{u^2}{2}+qu},$$

und es bleibt daher zurück

$$\int_{u_1}^{u_2} S(u)\left\{e^{ux}\, u^r e^{p\frac{u^2}{2}+qu}\right\}_{u_0}^{u} du = f(x).$$

Sei r (resp. sein reeller Bestandtheil) positiv, dann ist es erlaubt, $u_0 = 0$ zu nehmen. Wählt man hierauf die Function S so, dass

$$S(u) \cdot u^r e^{p\frac{u^2}{2}+qu} = F(u),$$

wo F die Déterminante in

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\, F(u)\, du = f(x)$$

bedeutet, so ist

$$v = \int_{u_1}^{u_2} \left[u^{-r} e^{-p\frac{u^2}{2} - qu} F(u) \int_0^u e^{ux} u^{r-1} e^{p\frac{u^2}{2}+qu} du \right] du$$

das gesuchte Supplementintegral der Gleichung 9b).

Bevor wir die Déterminante F bestimmen, erörtern wir den Fall, in welchem r negativ ist und daher u_0 nicht Null genommen werden darf.

In diesem Falle differenzire man die Gleichung

9b) $$pv'' + (q+x)v' + rv = f(x)$$

ν-mal, so dass entsteht

$$pw'' + (q+x)w' + (r+\nu)w = \frac{d^\nu}{dx^\nu} f(x),$$

wobei

$$w = \frac{d^\nu v}{dx^\nu},$$

und wähle für ν diejenige positive ganze Zahl, welche dem absoluten Werthe von r unmittelbar folgt. Die letzte Differentialgleichung kann nun so, wie Gleichung 9b) behandelt werden; zuletzt hat man, um v zu erhalten, noch eine ν-fache Integration vorzunehmen. Ausserdem ist auch zu beachten, dass der Déterminante $F(u)$ der Factor u^ν ertheilt werden muss, weil die Functionalgleichungen

$$\int_{u_1}^{u} e^{ux} F(u)\, du = f(x) \quad \text{und} \quad \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} u^\nu F(u)\, du = \frac{d^\nu}{dx^\nu} f(x)$$

correspondiren. (Vergl. S. 29.)

Stellen wir nun die einzelnen Ausdrücke zusammen, so erhalten wir als Supplementintegral der Differentialgleichung

9a) $$a_2 \frac{d^2 z}{dx^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{dz}{dx} + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2) z = f(x),$$

falls r positiv ist, folgendes:

$$z = e^{-\varkappa x^2 - \lambda x} \int_{u_1}^{u_2} \left[u^{-r} e^{-p\frac{u^2}{2} - qu} F(u) \int_0^u e^{ux} u^{r-1} e^{p\frac{u^2}{2}+qu} du \right] du,$$

und, falls r negativ ist:

$$z = e^{-\varkappa x^2 - \lambda x} \int_\nu dx^\nu \left\{ \int_{u_1}^{u_2} \left[u^{-r} e^{-p\frac{u^2}{2} - qu} F(u) \int_0^u e^{ux} u^{r+\nu-1} e^{p\frac{u^2}{2}+qu} du \right] du \right\},$$

$$r + \nu > 0,$$

und in beiden Integralen bedeutet F die Déterminante der Gleichung

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux} F(u)\, du = f(x), \quad f = (B_0 + B_1 x)\, e^{\varkappa x^2 + \lambda x}.$$

Um F zu bestimmen, wende man sich vorerst an die Gleichung

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux} F(u)\, du = x^{\mu} e^{\varkappa x^2 + \lambda x}.$$

Man findet für diese die Déterminante, wenn man die bekannte Identität

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} d\omega = \sqrt{\pi}$$

mittels

$$\omega = \frac{(u-\lambda) - 2\varkappa x}{2\sqrt{\varkappa}}, \quad \varkappa \gtrless 0$$

transformirt; es entsteht nämlich

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux} e^{-\frac{(u-\lambda)^2}{4\varkappa}} du = 2\sqrt{\varkappa\pi}\, e^{\varkappa x^2 + \lambda x},$$

$$u_1 = -\infty\sqrt{\varkappa}, \quad u_2 = +\infty\sqrt{\varkappa}.$$

Nach einem früher aufgestellten Satze (vergl. S. 28) ist nun unmittelbar

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux} \frac{d^{\mu}}{du^{\mu}} e^{-\frac{(u-\lambda)^2}{4\varkappa}} du = (-1)^{\mu}\, 2\sqrt{\varkappa\pi}\, x^{\mu} e^{\varkappa x^2 + \lambda x},$$

weil die Bedingung

$$\left\{ e^{ux} \frac{d^{\mu-1}}{du^{\mu-1}} e^{-\frac{(u-\lambda)^2}{4\varkappa}} \right\}_{-\infty\sqrt{\varkappa}}^{+\infty\sqrt{\varkappa}} = 0$$

erfüllt ist. Natürlich muss μ positiv und ganzzahlig und $\varkappa$ von Null verschieden sein; beides findet für unsere Untersuchung statt.

Hat man daher die Déterminante zu bestimmen in

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux} F(u)\, du = (B_0 + B_1 x)\, e^{\varkappa x^2 + \lambda x},$$

so beachte man, dass

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux} \cdot \frac{B_0}{2\sqrt{\varkappa\pi}}\, e^{-\frac{(u-\lambda)^2}{4\varkappa}} du = B_0 e^{\varkappa x^2 + \lambda x},$$

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux} \cdot \frac{B_1}{-2\sqrt{\varkappa\pi}} \frac{d}{du} e^{-\frac{(u-\lambda)^2}{4\varkappa}} du = B_1 x\, e^{\varkappa x^2 + \lambda x},$$

oder nach Addition

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux} \frac{1}{2\sqrt{\varkappa\pi}}\, e^{-\frac{(u-\lambda)^2}{4\varkappa}} \left\{ B_0 + B_1 \frac{u-\lambda}{2\varkappa} \right\} du = (B_0 + B_1 x)\, e^{\varkappa x^2 + \lambda x},$$

$$u_1 = -\infty\sqrt{\varkappa}, \quad u_2 = +\infty\sqrt{\varkappa}.$$

Mithin ist die zur Fonct. gén.

$$f(x) = (B_0 + B_1 x)\, e^{\varkappa x^2 + \lambda x}$$

gehörige Déterminante

$$F(u) = \frac{1}{2\sqrt{\varkappa\pi}}\, e^{-\frac{(u-\lambda)^2}{4\varkappa}} \left\{ B_0 + \frac{B_1}{2\varkappa}(u-\lambda) \right\};$$

dieser Ausdruck wäre an Stelle von F in die Supplementintegrale einzuführen.

Für die bisherige Integration war vorausgesetzt, dass

$$b_1 - 4a_2\varkappa \gtrless 0,$$

denn andernfalls könnte man die Grösse λ nicht bestimmen und überhaupt der Gleichung 9a) nicht die Form 9b) verleihen.

Sollte aber $b_1 - 4a_2\varkappa = 0$, d. h.

$$b_1^2 - 4a_2c_0 = 0$$

sein, so setze man von vornherein $\lambda = 0$, man transformire also die Gleichung 9a) mittels

$$z = v\, e^{-\varkappa x^2}$$

und wähle $\varkappa$ so, dass, wie früher,

$$4a_2\varkappa^2 - 2b_1\varkappa + c_0 = 0;$$

dadurch erlangt die Gleichung 9a) die Gestalt

9c) $$p\frac{d^2 v}{dx^2} + q\frac{dv}{dx} + (r + x)v = (B_0 + B_1 x)\, e^{\varkappa x^2}.$$

Hierbei ist darauf zu achten, dass die Gleichung 9a) durch die Grösse

$$b_0 - 2a_1\varkappa$$

dividirt wurde, welche von Null verschieden vorausgesetzt werden muss und darf, und dass wir diese Grösse in B_0 und B_1 eingehend denken.

Setzen wir das Supplementintegral wieder in der Form

$$v = \int_{u_1}^{u_2} S(u) \cdot \left[\int_{u_0}^{u} e^{ux}\, V\, du \right] du$$

voraus, so entsteht nach Einführung desselben in Gleichung 9c)

$$\int_{u_1}^{u_2} S(u) \left[\int_{u_0}^{u} \{ pu^2 + qu + r + x \}\, e^{ux}\, V\, du \right] du = (B_0 + B_1 x)\, e^{\varkappa x^2} = f(x)$$

oder

$$\int_{u_1}^{u_2} S(u) \left[\{ e^{ux}\, V \}_{u_0}^{u} + \int_{u_0}^{u} e^{ux} \left\{ (pu^2 + qu + r)\, V - \frac{dV}{du} \right\} du \right] du = f(x).$$

Wählt man V so, dass

$$(pu^2 + qu + r)\, V - \frac{dV}{du} = 0,$$

also

$$V = e^{p\frac{u^3}{3} + q\frac{u^2}{2} + ru},$$

und bestimmt man u_0 aus der Gleichung

$$pu_0^3 = -\infty,$$

so dass

$$V(u_0) = 0,$$

dann bleibt zurück

$$\int_{u_1}^{u_2} S(u)\, e^{ux}\, V\, du = f(x).$$

Setzt man

$$S(u)\, V = F(u)$$

und lässt F die Déterminante von

$$f = (B_0 + B_1 x)\, e^{\varkappa x^2}$$

bedeuten, so befriedigt der Ausdruck für v die Differentialgleichung 9c); es ist also

$$v = \int_{u_1}^{u_2} \left[\frac{F(u)}{V} \int_{u_0}^{u} e^{ux}\, V\, du\right] du$$

das gesuchte Supplementintegral von 9c).

Die Déterminante F hat nach der vorigen Untersuchung (unter Berücksichtigung, dass $\lambda = 0$) folgenden Werth:

$$F(u) = \frac{1}{2\sqrt{\varkappa\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{4\varkappa}} \left\{B_0 + \frac{B_1}{2\varkappa} u\right\},$$

und die Grenzen sind, wie früher,

$$u_1 = -\infty\sqrt{\varkappa}, \quad u_2 = +\infty\sqrt{\varkappa}.$$

Stellt man die Ausdrücke zusammen, so kommt man zu folgendem Schlussresultat:

Das Supplementintegral der Differentialgleichung

$$\text{9a)} \qquad a_2 \frac{d^2 z}{dx^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{dz}{dx} + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2)\, z = B_0 + B_1 x$$

lautet, falls

$$b_1^2 - 4a_2 c_0 = 0,$$

$$z = e^{-\varkappa x^2} \int_{-\infty\sqrt{\varkappa}}^{+\infty\sqrt{\varkappa}} \left[e^{-p\frac{u^3}{3} - q\frac{u^2}{2} - ru} F(u) \int_{u_0}^{u} e^{ux + p\frac{u^3}{3} + q\frac{u^2}{2} + ru} du\right] du.$$

III.

Zur Theorie der Elimination.

Von

LEOPOLD SCHENDEL.

I. Darstellung der Resultante von v Formen $m$ter Ordnung.

1. Wir stellen durch die Grösse

$$(a_1^{n_1})^{r_1} \ldots (a_\varkappa^{n_\varkappa})^{r_\varkappa}\, p_1 \ldots p_r^{\ n}, \quad r_1 + \ldots + r_\varkappa = r$$

das arithmetische Mittel aller derjenigen Ausdrücke dar, die man dadurch erhält, dass man auf alle möglichen Weisen die r Grössen $p_1^{\ n}, \ldots, p_r^{\ n}$ mit den $\varkappa$ Grössen $a_1^{\ n}, \ldots, a_\varkappa^{\ n}$, die einzeln in den Dimensionen $r_1, \ldots, r_\varkappa$ und zusammen in der Dimension r in ihr vertreten sind, durch algebraische Multiplication verbindet.

Die Anzahl dieser Ausdrücke, durch welche ihre Summe zu dividiren ist, ist

$$\frac{r!}{r_1! \ldots r_\varkappa!}.$$

Insbesondere ist

$$(a^n)^r\, p_1 \ldots p_r^{\ n} = a^n p_1^{\ n} \ldots a^n p_r^{\ n}$$

und darnach, wenn

$$a^n = a_1 \ldots a_n$$

gesetzt wird, die Grösse

$$a_1 \ldots a_n^{\ r}\, p_1 \ldots p_r^{\ n}$$

ein algebraisches Product von nr Factoren von der Form $a_\varkappa p_\lambda$, die man durch algebraische multiplicative Verbindung der Grössen $p_1, \ldots, p_r$ mit den Grössen $a_1, \ldots, a_n$ erhält.

Ferner stellen wir, indem wir

$$a_r^{\ n_r} = a_{r,1} \ldots a_{r,n_r}$$

und

$$\varkappa_r = 1, \ldots, n_r$$

setzen, durch die $v$factorige Grösse

$$(a_1^{n_1})^{\bar{n}_1 n_1 \ldots n_v} \ldots (a_v^{n_v})^{\bar{n}_v n_1 \ldots n_v}$$

ein algebraisches Product von $n_1 \ldots n_v$ Factoren dar, die man dadurch erhält, dass man die in den Dimensionen

$$\bar{n}_1 n_1 \ldots n_v, \ \ldots, \ \bar{n}_v n_1 \ldots n_v$$

in ihr vertretenen

linearen Factoren der Grössen

$$n_1, \ldots, n_v$$
$$a_1^{n_1}, \ldots, a_v^{n_v}$$

auf alle möglichen Weisen zu combinatorischen Producten von der Form

$$a_{1,\varkappa_1} \ldots a_{v,\varkappa_v}$$

verbindet.

Dieser Bildungsweise entsprechend ist unter Berücksichtigung der Gleichung

$$\bar{n}_{r_\mu} n_1 \ldots n_v = \bar{n}_{r_\mu} n_{r_1} \ldots n_{r_\varkappa} \bar{n}_{r_1} \ldots \bar{n}_{r_\varkappa} n_1 \ldots n_v$$

die $\varkappa$ factorige Grösse

$$(a_{r_1}{}^{n_{r_1}})^{\bar{n}_{r_1} n_1 \ldots n_v} \ldots (a_{r_\varkappa}{}^{n_{r_\varkappa}})^{\bar{n}_{r_\varkappa} n_1 \ldots n_v}$$
$$= ((a_{r_1}{}^{n_{r_1}})^{\bar{n}_{r_1} n_{r_1} \ldots n_{r_\varkappa}} \ldots (a_{r_\varkappa}{}^{n_{r_\varkappa}})^{\bar{n}_{r_\varkappa} n_{r_1} \ldots n_{r_\varkappa}})^{\bar{n}_{r_1} \ldots \bar{n}_{r_\varkappa} n_1 \ldots n_v}.$$

Die v factorige Grösse

$$(a_1{}^{n_1})^{\bar{n}_1 n_1 \ldots n_v} \ldots (a_v{}^{n_v})^{\bar{n}_v n_1 \ldots n_v}$$

nimmt bei einer Vertauschung zweier Factoren den Factor $(-1)^{n_1 \ldots n_v}$ an.

Sie ist in der Form

$$(a_r{}^{n_r})^{\bar{n}_r n_1 \ldots n_v} \overline{(a_r{}^{n_r})^{\bar{n}_r n_1 \ldots n_v} (a_1{}^{n_1})^{\bar{n}_1 n_1 \ldots n_v}} \ldots (a_v{}^{n_v})^{\bar{n}_v n_1 \ldots n_v}$$

und darnach in der Form

$$(a_r{}^{n_r})^{\bar{n}_r n_1 \ldots n_v} \overline{((a_r{}^{n_r})^{\bar{n}_r \bar{n}_r n_1 \ldots n_v} (a_1{}^{n_1})^{\bar{n}_1 \bar{n}_r n_1 \ldots n_v}} \ldots (a_v{}^{n_v})^{\bar{n}_v \bar{n}_r n_1 \ldots n_v})^{n_r}$$

darstellbar und erscheint in dieser Form als ein algebraisches Product von $\bar{n}_r n_1 \ldots n_v$ Factoren von der Form

$$a_r{}^{n_r} \overline{a_{r,\varkappa_r} a_{1,\varkappa_1} \ldots a_{v,\varkappa_v}{}^{n_r}}.$$

Die Grösse

$$(a_{0,r_1}{}^{n_r})^{n_{0,r_1}} \ldots (a_{0,r_v}{}^{n_r})^{n_{0,r_v}} \overline{(a_r{}^{n_r})^{\bar{n}_r n_1 \ldots n_v}} (a_1{}^{n_1})^{\bar{n}_1 n_1 \ldots n_v} \ldots (a_v{}^{n_v})^{\bar{n}_v n_1 \ldots n_v},$$
$$n_{0,r_1} + \ldots + n_{0,r_v} = \bar{n}_r n_1 \ldots n_v,$$

die aus ihr dadurch hervorgeht, dass man ihren $r$ten Factor durch die Grösse

$$(a_{0,r_1}{}^{n_r})^{n_{0,r_1}} \ldots (a_{0,r_v}{}^{n_r})^{n_{0,r_v}}, \quad n_{0,r_1} + \ldots + n_{0,r_v} = \bar{n}_r n_1 \ldots n_v$$

ersetzt, ist der Grösse

$$(a_{0,r_1}{}^{n_r})^{n_{0,r_1}} \ldots (a_{\ ,r_v}{}^{n_r})^{n_{0,r_v}} \overline{((a_r{}^{n_r})^{\bar{n}_r \bar{n}_r n_1 \ldots n_v} (a_1{}^{n_1})^{\bar{n}_1 \bar{n}_r n_1 \ldots n_v}} \ldots (a_v{}^{n_v})^{\bar{n}_v \bar{n}_r n_1 \ldots n_v})^{n_r},$$
$$n_{0,r_1} + \ldots + n_{0,r_v} = \bar{n}_r n_1 \ldots n_v$$

gleichwerthig und somit das arithmetische Mittel aller derjenigen Ausdrücke, die man dadurch erhält, dass man auf alle möglichen Weisen die $\bar{n}_r n_1 \ldots n_v$ Grössen $\overline{a_{r,\varkappa_r} a_{1,\varkappa_1} \ldots a_{v,\varkappa_v}{}^{n_r}}$ mit den v Grössen $a_{0,r_1}{}^{n_r}, \ldots, a_{0,r_v}{}^{n_r}$, die einzeln in den Dimensionen $n_{0,r_1}, \ldots, n_{0,r_v}$ und zusammen in der Dimension $\bar{n}_r n_1 \ldots n_v$ in ihr vertreten sind, durch algebraische Multiplication verbindet.

2. Wenn die v Formen $m$ter Ordnung

$$a_1{}^{n_1} p^{n_1}, \ldots, a_v{}^{n_v} p^{n_v}$$

für eine Grösse p verschwinden, so verschwindet für diese Grösse bei gewissen Werthen der Grössen $\varkappa_1, .., \varkappa_v$ auch die Determinante

$$a_{1,\varkappa_1} .. a_{v,\varkappa_v} \mid p p_1 .. p_{v-1}$$

und demnach auch die Grösse

$$(a_1^{n_1})^{\bar{n}_1 n_1 .. n_v} .. (a_v^{n_v})^{\bar{n}_v n_1 .. n_v} p p_1 .. p_{v-1}{}^{n_1 .. n_v}$$

die das Product der $n_1 .. n_v$ Determinanten darstellt, die man aus der Determinante

$$a_{1,\varkappa_1} .. a_{v,\varkappa_v} \mid p p_1 .. p_{v-1}$$

dadurch erhält, dass man den Grössen $\varkappa_1, .., \varkappa_v$ auf alle möglichen Weisen die Werthe

$$\varkappa_1 = 1, .., n_1; \quad ..; \quad \varkappa_v = 1, .., n_v$$

beilegt.

Sie erweist sich durch die Form

$$(a_r^{n_r})^{\bar{n}_r n_1 .. n_v} \Big(\overline{(a_r^{n_r})^{\bar{n}_r \bar{n}_r n_1 .. n_v}} (a_1^{n_1})^{\bar{n}_1 \bar{n}_r n_1 .. n_v} .. (a_v^{n_v})^{\bar{n}_v \bar{n}_r n_1 .. n_v} p p_1 .. p_{v-1}{}^{\bar{n}_r n_1 .. n_v} \Big)^{n_r},$$

in welcher sie darstellbar ist, als eine ganze rationale Function der Coefficienten der gegebenen Formen, welche diese bezw. in den Dimensionen

$$\bar{n}_1 n_1 .. n_v, \; .., \; \bar{n}_v n_1 .. n_v$$

enthält.

Die in ihr auftretenden Grössen $p_1, .., p_{v-1}$ sind beliebige Grössen und können durch irgendwelche $v-1$ Grössen aus der Reihe der Grössen $e_1, .., e_m$ ersetzt werden.

Die Gleichung

$$(a_1^{n_1})^{\bar{n}_1 n_1 .. n_v} .. (a_v^{n_v})^{\bar{n}_v n_1 .. n_v} p e_{\lambda_1} .. e_{\lambda_{v-1}}{}^{n_1 .. n_v} = 0$$

enthält offenbar die Grössen

$$p \varepsilon_{\lambda_1}, \; .., \; p \varepsilon_{\lambda_{v-1}}$$

nicht und erscheint darnach als die Endgleichung, die man durch die Elimination dieser Grössen aus den Gleichungen

$$a_1^{n_1} p^{n_1} = 0, \; .., \; a_v^{n_v} p^{n_v} = 0$$

erhält.

Indem man den Grössen $\lambda_1, .., \lambda_{v-1}$ alle möglichen Werthe aus der Zahlenreihe $1, .., m$ beilegt, erhält man $\binom{m}{v-1}$ Endgleichungen. Diese Endgleichungen sind sämmtlich, linear verbunden, in der einen Gleichung

$$(a_1^{n_1})^{\bar{n}_1 n_1 .. n_v} .. (a_v^{n_v})^{\bar{n}_v n_1 .. n_v} p p_1 .. p_{v-1}{}^{n_1 .. n_v} = 0$$

enthalten.

In Anbetracht des Umstandes, dass eine Endgleichung das Resultat einer Elimination ist, bezeichnen wir die Grösse

$$(a_1^{n_1})^{\bar{n}_1 n_1 .. n_v} .. (a_v^{n_v})^{\bar{n}_v n_1 .. n_v} p p_1 .. p_{v-1}{}^{n_1 .. n_v}$$

und in gleicher Weise eine jede Grösse, die sich von ihr nur durch einen von den Grössen $a_1^{n_1}, .., a_v^{n_v}$ unabhängigen Factor unterscheidet, als die Resultante der v Formen $m$ter Ordnung

$$a_1^{n_1} p^{n_1}, \; .., \; a_v^{n_v} p^{n_v}.$$

Im Falle $v = m$ unterscheidet sich die Grösse $pp_1 \,..\, p_{v-1}$ nur durch den Factor $pp_1 \,..\, p_{m-1} \mid \varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_m$ von der Grösse $e_1 \,..\, e_m$ und die Resultante ist daher unabhängig von der Grösse p.

Die Grösse

$$(a_1{}^{n_1})^{\bar{n}_1 n_1 \,..\, n_m} \,..\, \left(a_m^{n_m}\right)^{\bar{n}_m n_1 \,..\, n_m} e_1 \,..\, e_m{}^{n_1 \,..\, n_m}$$

ist die Resultante der m Formen $m$ter Ordnung

$$a_1{}^{n_1} p^{n_1}, \;..,\; a_m{}^{n_m} p^{n_m};$$

sie ist diejenige ganze rationale Function ihrer Coefficienten, deren Verschwinden das Vorhandensein einer Grösse p anzeigt, für welche die Formen sämmtlich verschwinden.

Im Falle $v < m$ ist die Resultante

$$(a_1{}^{n_1})^{\bar{n}_1 n_1 \,..\, n_v} \,..\, (a_v{}^{n_v})^{\bar{n}_v n_1 \,..\, n_v} \, pp_1 \,..\, p_{v-1}{}^{n_1 \,..\, n_v}$$

der v Formen $m$ter Ordnung

$$a_1{}^{n_1} p^{n_1}, \;..,\; a_v{}^{n_v} p^{n_v}$$

eine Form $n_1 \,..\, n_v$ten Grades für p, deren Coefficienten ganze rationale Functionen der Coefficienten und deren Verschwindungsgrössen die gemeinschaftlichen Verschwindungsgrössen der gegebenen Formen sind.

Die Anzahl der Gruppen, denen diese Verschwindungsgrössen angehören, ist $n_1 \,..\, n_n$. Im Falle $v = m - 1$ gehört einer jeden Gruppe nur eine Verschwindungsgrösse an.

Aus der Form

$$(a_r{}^{n_r})^{n_r \bar{n}_1 \,..\, n_m} \left(\overline{(a_r{}^{n_r})^{\bar{n}_r \bar{n}_r n_1 \,..\, n_m}} (a_1{}^{n_1})^{\bar{n}_1 \bar{n}_r n_1 \,..\, n_m} \,..\, (a_m^{n_m})^{\bar{n}_m \bar{n}_r n_1 \,..\, n_m} e_1 \,..\, e_m{}^{\bar{n}_r n_1 \,..\, n_m}\right)^{n_r}$$

der Resultante der m Formen

$$a_1{}^{n_1} p^{n_1}, \;..,\; a_m^{n_m} p^{n_m}$$

ergiebt sich, dass die Grösse

$$\overline{(a_r{}^{n_r})^{\bar{n}_r \bar{n}_r n_1 \,..\, n_m}} (a_1{}^{n_1})^{\bar{n}_1 \bar{n}_r n_1 \,..\, n_m} \,..\, (a_m{}^{n_m})^{\bar{n}_m \bar{n}_r n_1 \,..\, n_m} e_1 \,..\, e_m{}^{\bar{n}_r n_1 \,..\, n_m}$$

das algebraische Product

$$p_{r,1} \,..\, p_{r,\bar{n}_r n_1 \,..\, n_m}$$

der $\bar{n}_r n_1 \,..\, n_m$ Verschwindungsgrössen $p_{r,1}, \;..,\; p_{r,\bar{n}_r n_1 \,..\, n_m}$ der $m-1$ Formen

$$\overline{a_r{}^{n_r} p^{n_r}}, \;\; a_1{}^{n_1} p^{n_1}, \;..,\; a_m{}^{n_m} p^{n_m}$$

ist.

Wenn die m Formen

$$a^n e_1 p^{n-1}, \;..,\; a^n e_m p^{n-1}$$

für eine Grösse p verschwinden, so verschwindet für sie auch die mit ihnen durch die Gleichung

$$a^n p^n = a^n e_1 p^{n-1} . \, p \, \varepsilon_1 + \,..\, + a^n e_m p^{n-1} . \, p \, \varepsilon_m$$

verbundene Form $a^n p^n$; jene Grösse hat daher für

$$a^n = a_1 \,..\, a_n$$

die Form

$$p \equiv a_r a_{0,1} \,.\,.\, a_{0,m-2} \mid e_1 \,.\,.\, e_m ,$$

demnach gilt der Gleichung

$$n\, a^n e_\varkappa p^{n-1} = a_1 e_\varkappa \,.\, \overline{a}_1 a_1 \,.\,.\, a_n p^{n-1} + \,.\,.\, + a_n e_\varkappa \,.\, \overline{a}_n a_1 \,.\,.\, a_n p^{n-1}$$

zufolge die Gleichung

$$a_r e_\varkappa \,.\, \overline{a}_r a_1 \,.\,.\, a_n (a_r a_{0,1} \,.\,.\, a_{0\ m-2} \mid e_1 \,.\,.\, e_m)^{n-1} = 0$$

für $\varkappa = 1, \,.\,.,\, m$, und es müssen von den Grössen $a_1, \,.\,.,\, a_n$ zwei Grössen gleich sein.

Die Resultante der m Formen

$$a^n e_1 p^{n-1}, \ \,.\,.,\ a^n e_m p^{n-1}$$

heisst deshalb die Discriminante der Form $a^n p^n$; sie ist diejenige ganze rationale Function ihrer Coefficienten, deren Verschwinden anzeigt, dass unter ihren Verschwindungsgrössen zwei gleiche Gruppen vorhanden sind.

Die Discriminante der Form $m$ter Ordnung $a^n p^n$ hat die Form

$$(a^n e_1)^{(n-1)^{m-1}} \,.\,.\, (a^n e_m)^{(n-1)^{m-1}} e_1 \,.\,.\, e_m{}^{(n-1)^m}$$

und kann darnach auch in der Form

$$(a^n e_1 \,.\,.\, a^n e_m \ e_1 \,.\,.\, e_m{}^{n-1})^{(n-1)^{m-1}}$$

oder

$$((a^n)^m e_1 \,.\,.\, e_m{}^n)^{(n-1)^{m-1}}$$

dargestellt werden. Sie enthält die Coefficienten der Form in der Dimension

$$m(n-1)^{m-1}.$$

Insbesondere ist die Discriminante der binären Form $a^n p^n$

$$((a^n)^2 e_1 e_2{}^n)^{n-1}.$$

Die Resultante der binären Formen $a^n p^n$ und $a^n e_2 p^{n-1}$ hat die Form

$$(a^n)^{n-1} (a^n e_2)^n e_1 e_2{}^{(n-1)n}$$

und ist daher bei Berücksichtigung der Gleichung

$$a^n = a^n e_1 \,.\, \varepsilon_1 + a^n e_2 \,.\, \varepsilon_2$$

in der Form

$$(a^n e_1 \,.\, \varepsilon_1)^{n-1} (a^n e_2)^n e_1 e_2{}^{(n-1)n}$$

oder

$$(a^n e_1)^{n-1} (a^n e_2)^{n-1} e_1 e_2{}^{(n-1)^2} \,.\, \varepsilon_1{}^{n-1} a^n e_2 \ \ e_1 e_2{}^{n-1}$$

und demnach in der Form

$$((a^n)^2 e_1 e_2{}^n)^{n-1} \,.\, a^n e_2{}^n$$

und ferner bei Berücksichtigung der Gleichung

$$n\, a^n e_2 = a_1 e_2 \,.\, \overline{a}_1 a_1 \,.\,.\, a_n + \,.\,.\, + a_n e_2 \,.\, \overline{a}_n a_1 \,.\,.\, a_n$$

in der Form

$$n^{-n} a^n e_2{}^n \,.\, a_1{}^{n-1} \overline{a}_1 a_1 \,.\,.\, a_n e_1 e_2{}^{n-1} \,.\,.\, a_n{}^{n-1} \overline{a}_n a_1 \,.\,.\, a_n e_1 e_2{}^{n-1}$$

darstellbar. Es ist daher die Discriminante der binären Form $a^n p^n$

$$((a^n)^2 e_1 e_2{}^n)^{n-1} = n^{-n} \,.\, a_1{}^{n-1} \overline{a}_1 a_1 \,.\,.\, a_n e_1 e_2{}^{n-1} \,.\,.\, a_n{}^{n-1} \overline{a}_n a_1 \,.\,.\, a_n e_1 e_2{}^{n-1}$$

und demnach der $(-1)^{\binom{n}{2}} n^n$te Theil des Quadrates des aus $\binom{n}{2}$ Factoren bestehenden Determinantenproductes

$$a_1 a_2 \mid e_1 e_2 \,.\,.\, a_{n-1} a_n \mid e_1 e_2 .$$

3. Man kann für die Resultante

$$(a_1^{n_1})^{\bar{n}_1 n_1 \dots n_m} \dots (a_m^{n_m})^{\bar{n}_m n_1 \dots n_m} e_1 \dots e_m^{n_1 \dots n_m}$$

der m Formen $m$ter Ordnung

$$a_1^{n_1} p^{n_1}, \quad \dots, \quad a_m^{n_m} p^{n_m}$$

einen Determinantenausdruck ableiten, welcher es gestattet, sie in unendlich vielen wesentlich verschiedenen Formen durch die Coefficienten der Formen darzustellen.

Die Resultante

$$(a_1^{n_1})^{\bar{n}_1 n_1 \dots n_v} \dots (a_v^{n_v})^{\bar{n}_v n_1 \dots n_v} p p_1 \dots p_{v-1}^{n_1 \dots n_v}$$

der v Formen $m$ter Ordnung

$$a_1^{n_1} p^{n_1}, \quad \dots, \quad a_v^{n_v} p^{n_v}$$

geht aus der Resultante der m Formen offenbar dadurch hervor, dass man in ihr $m = v$ annimmt und die Grössen $e_1, \dots, e_m$ durch die Grössen $p, p_1, \dots, p_{v-1}$ ersetzt, und ist folglich in derselben Weise durch die Coefficienten der Formen darstellbar.

Beispielsweise ist, wenn wir die Grösse a^n in der Form

$$a^n = a^n \overline{\varepsilon_1^n} . \varepsilon_1^n + \dots + a^n \overline{\varepsilon_2^n} . \varepsilon_2^n$$

darstellen, die Resultante

$$(a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2}$$

der 2 Formen 2ter Ordnung

$$a_1^{n_1} p^{n_1}, \quad a_2^{n_2} p^{n_2}$$

durch die Determinante

$$(a_1^{n_1})^{n_2} \varepsilon_1^{n_2-1} \dots \varepsilon_2^{n_2-1} (a_2^{n_2})^{n_1} \varepsilon_1^{n_1-1} \dots \varepsilon_2^{n_1-1} \mid \overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2-1}} \dots \overline{\varepsilon_2^{n_1+n_2-1}}$$

gegeben, und darnach stellt sich die Resultante

$$(a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2})^{n_1} p p_1^{n_1 n_2}$$

der 2 Formen $m$ter Ordnung

$$a_1^{n_1} p^{n_1}, \quad a_2^{n_2} p^{n_2}$$

durch die Determinante

$$(a_1^{n_1})^{n_2} \overline{p}^{n_2-1} \dots \overline{p}_1^{n_2-1} (a_2^{n_2})^{n_1} \overline{p}^{n_1-1} \dots \overline{p}_1^{n_1-1} \mid \overline{p^{n_1+n_2-1}} \dots \overline{p_1^{n_1+n_2-1}}$$

dar, und wie für jene Determinante die Gleichung

$$a^n \varepsilon_1^\lambda \varepsilon_2^\mu \overline{\varepsilon_1^{n+\lambda-\varkappa} \varepsilon_2^{\mu+\varkappa}} = a^n \overline{\varepsilon_1^{n-\varkappa} \varepsilon_2^\varkappa} = \binom{n}{\varkappa} a^n e_1^{n-\varkappa} e_2^\varkappa,$$

so gilt für diese Determinante die Gleichung

$$a^n \overline{p}^\lambda \overline{p}_1^\mu \overline{\overline{p}^{n+\lambda-\varkappa} \overline{p}_1^{\mu+\varkappa}} = a^n \overline{\overline{p}^{n-\varkappa} \overline{p}_1^\varkappa} = \binom{n}{\varkappa} a^n p^{n-\varkappa} p_1^\varkappa.$$

Die Resultante

$$a^n a_1^n \dots a_{v-1}^n p p_1 \dots p_{v-1}^n$$

der v Formen $m$ter Ordnung

$$a^n p^n, \quad a_1 p, \quad \dots, \quad a_{v-1} p$$

ist in der Form

$$a^n a_1^n \dots a_{v-1}^n \mid p p_1 \dots p_{v-1}^{\bar{n}}$$

darstellbar.

II. Die Kronecker'sche Interpolationsformel.

Eine symmetrische Form der Grössen $p_1, \ldots, p_{n_2}$, welche für jede dieser Grössen vom Grade n_1 ist, ist in der Form

$$(a_1^{n_1})^{n_2} p_1 \ldots p_{n_2}^{\ n_1}$$

darstellbar.

Wir setzen sie als eine binäre Form voraus. Alsdann ist sie, da ein Product von n $m$gliedrigen Factoren einem Aggregate von

$$\binom{n+m-1}{m-1}$$

Gliedern gleich ist und demnach unter der gemachten Voraussetzung $a_1^{n_1}$ aus n_1+1 und also $(a_1^{n_1})^{n_2}$ aus $\binom{n_2+n_1}{n_1}$ Gliedern sich zusammensetzt, durch $\binom{n_1+n_2}{n_2}$ Werthe und somit insbesondere durch die $\binom{n_1+n_2}{n_2}$ Werthe bestimmt, welche sie annimmt, wenn für die Grössen $p_1, \ldots, p_{n_2}$ alle Combinationen der n_1+n_2 Grössen

$$p_{0,1}, \ldots, p_{0,n_1+n_2}$$

zu je n_2 gesetzt werden. Demnach gilt für sie die Gleichung

$$(a_1^{n_1})^{n_2} p_1 \ldots p_{n_2}^{\ n_1}$$

$$= (\varkappa; n_1+n_2)(a_1^{n_1})^{n_2} p_{0,\varkappa_1} \ldots p_{0,\varkappa_{n_2}}^{\ n_1} \cdot \frac{p_1 \ldots p_{n_2}^{\ n_1}\, \bar{p}_{0,\varkappa_1} \ldots \bar{p}_{0,\varkappa_{n_2}}\, p_{0,1} \ldots p_{0,n_1+n_2}^{\ n_2}\, \varepsilon_1 \varepsilon_2^{n_1 n_2}}{p_{0,\varkappa_1} \ldots p_{0,\varkappa_{n_2}}^{\ n_1}\, \bar{p}_{0,\varkappa_1} \ldots \bar{p}_{0,\varkappa_{n_2}}\, p_{0,1} \ldots p_{0,n_1+n_2}^{\ n_2}\, \varepsilon_1 \varepsilon_2^{n_1 n_2}},$$

da die rechts stehende symmetrische Form der Grössen $p_1, \ldots, p_{n_2}$ vom Grade n_1 für die bezeichneten Werthe der Grössen $p_1, \ldots, p_{n_2}$ dieselben Werthe annimmt, wie die links stehende Form. Setzt man nämlich für diese Grössen eine bestimmte Combination der gegebenen Grössen, so verschwinden die Zähler aller Quotienten bis auf einen, der dem Nenner gleich ist, und das diesen der Einheit gleichen Quotienten enthaltende Glied ist der Werth, den die links stehende Form für jene Combination annimmt.

Diese Gleichung ist die Kronecker'sche Interpolationsformel.

Aus ihr ergiebt sich die Rosenhain'sche interpolatorische Darstellung der Resultante der binären Formen

$$a_1^{n_1} p^{n_1}, \quad a_2^{n_2} p^{n_2}$$

vermittelst der Annahme, die Grössen $p_1, \ldots, p_{n_2}$ seien die Verschwindungsgrössen der Form $a_2^{n_2} p^{n_2}$. Für diese Annahme ist unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$p = a \mid e_1 e_2, \quad a = -p \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

offenbar

$$p_1 \ldots p_{n_2} = a_2^{n_2} e_1 e_2^{n_2}, \quad a_2^{n_2} = (-1)^{n_2} p_1 \ldots p_{n_2} \varepsilon_1 \varepsilon_2^{n_2},$$

und die Gleichung erhält bei Weglassung des Index 0 der Grössen $p_{0,\varkappa}$ die Form

$$(a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2}$$

$$= (\varkappa; n_1+n_2) \frac{(a_1^{n_1})^{n_2} p_{\varkappa_1} \ldots p_{\varkappa_{n_2}}^{\ n_1} (a_2^{n_2})^{n_1}\, \bar{p}_{\varkappa_1} \ldots \bar{p}_{\varkappa_{n_2}}\, p_1 \ldots p_{n_1+n_2}^{\ n_2}}{p_{\varkappa_1} \ldots p_{\varkappa_{n_2}}^{\ n_1}\, \bar{p}_{\varkappa_1} \ldots \bar{p}_{\varkappa_{n_2}}\, p_1 \ldots p_{n_1+n_2}^{\ n_2}\, \varepsilon_1 \varepsilon_2^{n_1+n_2}}$$

III. Von den gemeinschaftlichen Verschwindungsgrössen zweier binären Formen.

Wenn p_r eine der Verschwindungsgrössen

$$p_1, \ldots, p_{n_1}$$

der Form $a_1^{n_1} p^{n_1}$ ist, so verschwindet augenscheinlich die Grösse

$$(a_1^{n_1})^{n_2} (p_r^{n_2} \mid a_2^{n_2} a^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2}.$$

Der Gleichung

$$(a_1^{n_1})^{n_2} (p^{n_2} \mid a_2^{n_2} a^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2} = 0$$

genügen daher die Verschwindungsgrössen der Form $a_1^{n_1} p^{n_1}$, und ihre Wurzeln für $a_2^{n_2} a^{-n_2} p^0$ als Unbekannte sind somit unter der Voraussetzung, dass die Form $a^{n_2} p^{n_2}$ für keine von den Grössen $p_1, \ldots, p_{n_1}$ verschwindet, die Grössen

$$a_2^{n_2} a^{-n_2} p_1^{\,0}, \ \ldots, \ a_2^{n_2} a^{-n_2} p_{n_1}^{\,0}.$$

Von diesen Grössen verschwinden offenbar, wenn man ihr die Form

$$(\overline{a_2^{n_2}} (p^{n_2} \mid a_2^{n_2} a^{n_2}))^{n_1} (a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2} = 0$$

giebt und die Gleichung

$$\overline{a_2^{n_2}} (p^{n_2} \mid a_2^{n_2} a^{n_2}) = a^{n_2} p^{n_2} - a_2^{n_2} a^{n_2} . a_2^{n_2} p^{n_2}$$

berücksichtigt, n Grössen, wenn die Grösse

$$(\overline{a_2^{n_2}} a_2^{n_2})^{\nu} (a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2}$$

für $\nu = 0, \ldots, n-1$ verschwindet.

Ist also die Resultante der Formen $a_1^{n_1} p^{n_1}$ und $a^{n_2} p^{n_2}$ nicht Null, so genügen von den Verschwindungsgrössen der Form $a_1^{n_1} p^{n_1}$ n Grössen auch der Gleichung $a_2^{n_2} p^{n_2} = 0$, wenn die Grösse

$$(\overline{a_2^{n_2}} a^{n_2})^{\nu} (a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2},$$

die aus der Resultante der Formen $a_1^{n_1} p^{n_1}$ und $a_2^{n_2} p^{n_2}$ durch νmalige Anwendung der Operation $\overline{a_2^{n_2}} a^{n_2}$ hervorgeht, für $\nu = 0, \ldots, n-1$ verschwindet.

Hieraus ergiebt sich bei Berücksichtigung des Umstandes, dass die Grösse

$$a^{n_2} = a^{n_2} \overline{\varepsilon_1^{n_2}} . \varepsilon_1^{n_2} + \ldots + a^{n_2} \overline{\varepsilon_2^{n_2}} . \varepsilon_2^{n_2}$$

unter der nöthigen Einschränkung eine beliebige Grösse ist, weiter der Satz:

Von den Verschwindungsgrössen der Form $a_1^{n_1} p^{n_1}$ genügen n Grössen auch der Gleichung $a_2^{n_2} p^{n_2} = 0$, wenn die Grösse

$$(\overline{a_2^{n_2}} \varepsilon_1^{n_2} \varepsilon_2^{0})^{\nu_0} \ldots (\overline{a_2^{n_2}} \varepsilon_1^{0} \varepsilon_2^{n_2})^{\nu_{n_2}} (a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2}$$

für alle positiven ganzen Werthe, den Werth Null mit eingeschlossen, der Zahlen $\nu_0, \ldots, \nu_{n_2}$, welche der Gleichung

$$\nu_0 + \ldots + \nu_{n_2} = \nu$$

für $\nu = 0, \ldots, n-1$ genügen, verschwindet.

Die Operation

$$\overline{a_2^{n_2}} \varepsilon_1^{n_2 - \varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa}$$

fällt, wie aus der Form

$$a_2^{n_2} = a_2^{n_2}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2}}.\,\varepsilon_1^{n_2} + \ldots + a_2^{n_2}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa}}.\,\varepsilon_1^{n_2-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa} + \ldots + a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_2}.\,\varepsilon_2^{n_2}$$

ersichtlich ist, mit der Operation

$$\overline{a_1^{n_2}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa}}}$$

zusammen.

Nimmt man $a^{n_2} = \varepsilon_1^{n_2-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa}$ an, so verschwindet die Resultante der Formen $a_1^{n_1}p^{n_1}$ und $a^{n_2}p^{n_2}$ nur dann, wenn im Falle $\varkappa = n_2$ die Grösse e_1, im Falle $\varkappa = 0$ die Grösse e_2 und im Falle $n_2 > \varkappa > 0$ die Grössen e_1 und e_2 zu den Verschwindungsgrössen der Form $a_1^{n_1}p^{n_1}$ gehören.

Von den Verschwindungsgrössen der Form $a_1^{n_1}p^{n_1}$ genügen daher n Grössen auch der Gleichung $a_2^{n_2}p^{n_2} = 0$, wenn die Grösse

$$(\overline{a_2^{n_2}}\,\varepsilon_1^{n_2-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa})^{\nu}\,(a_1^{n_1})^{n_2}\,(a_2^{n_2})^{n_1}\,e_1\,e_2^{n_1 n_2}$$

für $\nu = 0, \ldots, n-1$ verschwindet, sofern von den Coefficienten $a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1}}$ und $a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_2}}$ für $\varkappa = n_2$ der erstere, für $\varkappa = 0$ der letztere und für $n_2 > \varkappa > 0$ beide nicht verschwinden.

Im Wesentlichen ist dies der Lagrange'sche Satz.

Die Grösse

$$(\overline{a_2^{n_2}}\,a^{n_2})^{\nu}\,(a_1^{n_1})^{n_2}\,(a_2^{n_2})^{n_1}\,e_1\,e_2^{n_1 n_2}$$

ist als gleich der Grösse

$$\frac{n_1!}{(n_1-\nu)!}\,(a_1^{n_1})^{n_2}\,(a_2^{n_2})^{n_1-\nu}\,(a^{n_2})^{\nu}\,e_1\,e_2^{n_1 n_2}$$

in der Form

$$(-1)^{n_1 n_2}\,\nu!\,(\varkappa;\,n_1)\,(a_2^{n_2})^{n_1-\nu}\,\overline{p_{\varkappa_1}}\ldots\overline{p_{\varkappa_\nu}}\,p_1\ldots p_{n_1}^{n_2}\,(a^{n_2})^{\nu}\,p_{\varkappa_1}\ldots p_{\varkappa_\nu}^{n_2}$$

darstellbar und verschwindet somit, wenn von den Verschwindungsgrössen $p_1, \ldots, p_{n_1}$ der Form $a_1^{n_1}p^{n_1}$ n Grössen auch der Gleichung $a_2^{n_2}p^{n_2} = 0$ genügen, in der That für $\nu = 0, \ldots, n-1$, da in diesen Fällen das Product $\overline{p_{\varkappa_1}}\ldots\overline{p_{\varkappa_\nu}}\,p_1\ldots p_{n_1}$ stets mindestens eine von den n Grössen enthält. Dagegen ergiebt sich für $\nu = n$, wenn $p_{r_1}, \ldots, p_{r_n}$ jene n Grössen sind, die Gleichung

$$(\overline{a_2^{n_2}}\,a^{n_2})^{n}\,(a_1^{n_1})^{n_2}\,(a_2^{n_2})^{n_1}\,e_1\,e_2^{n_1 n_2}$$
$$= (-1)^{n_1 n_2}\,n!\,(a_2^{n_2})^{n_1-n}\,\overline{p_{r_1}}\ldots\overline{p_{r_n}}\,p_1\ldots p_{n_1}^{n_2}\,(a^{n_2})^{n}\,p_{r_1}\ldots p_{r_n}^{n_2}.$$

Demzufolge ist, wenn p_r eine von den n Grössen ist,

$$(\overline{a_2^{n_2}}\,(p_r^{n_2}\,|\,a_0^{n_2}\,a^{n_2}))^{n}\,(a_1^{n_1})^{n_2}\,(a_2^{n_2})^{n_1}\,e_1\,e_2^{n_1 n_2} = 0.$$

Wenn also von den Verschwindungsgrössen der Form $a_1^{n_1}p^{n_1}$ n Grössen

$$p_{r_1}, \ldots, p_{r_n}$$

auch der Gleichung $a_2^{n_2}p^{n_2} = 0$ genügen, so genügen sie auch der Gleichung

$$(\overline{a_2^{n_2}}\,(p^{n_2}\,|\,a_0^{n_2}\,a^{n_2}))^{n}\,(a_1^{n_1})^{n_2}\,(a_2^{n_2})^{n_1}\,e_1\,e_2^{n_1 n_2} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung für $a_0^{n_2}\,a^{-n_2}\,p^0$ als Unbekannte sind die Grössen

$$a_0^{n_2}\,a^{-n_2}\,p_{r_1}^{0}, \ldots, a_0^{n_2}\,a^{-n_2}\,p_{r_n}^{0}$$

und in dem besondern Falle

$$a_0^{n_2} = \varepsilon_1^{n_2-\varkappa+\mu}\,\varepsilon_2^{\varkappa-\mu}, \quad a^{n_2} = \varepsilon_1^{n_2-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa}$$

die Grössen

$$(p_{r_1}^{0}\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2^{-1})^{\mu}, \ldots, (p_{r_n}^{0}\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2^{-1})^{\mu}.$$

IV. Die Tschirnhausen'sche Resolvente.

Aus den Wurzeln

$$a_2^{n_2} a^{-n_2} p_r^0, \quad r = 1, \ldots, n_1$$

der Gleichung

$$(a_1^{n_1})^{n_2} (p^{n_2} | a_2^{n_2} a^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2} = 0$$

für $a_2^{n_2} a^{-n_2} p^0$ als Unbekannte derselben lassen sich die Grössen

$$a_0^{n_2} a^{-n_2} p_r^0, \quad r = 1, \ldots, n_1$$

und darnach die Wurzeln der Gleichung $a_1^{n_1} \varepsilon_2^{-n_1} p^0 = 0$ und die Verschwindungsgrössen der Form $a_1^{n_1} p^{n_1}$ bestimmen.

Es ist nämlich offenbar

$$(a_1^{n_1})^{n_2} (p_r^{n_2} | a_2^{n_2} a^{n_2})^{n_1 - 1} (p_r^{n_2} | a_0^{n_2} a^{n_2}) e_1 e_2^{n_1 n_2} = 0$$

und somit

$$a_0^{n_2} a^{-n_2} p_r^0 = \frac{(a_1^{n_1})^{n_2} (p_r^{n_2} | a_2^{n_2} a^{n_2})^{n_1 - 1} a_0^{n_2} e_1 e_2^{n_1 n_2}}{(a_1^{n_1})^{n_2} (p_r^{n_2} | a_2^{n_2} a^{n_2})^{n_1 - 1} a^{n_2} e_1 e_2^{n_1 n_2}}$$

und für

$$a^{n_2} = \varepsilon_2^{n_2}, \quad a_0^{n_2} = \varepsilon_1^{\mu} \varepsilon_2^{n_2 - \mu}$$

insbesondere

$$(p_r^0 \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1})^{\mu} = \frac{(a_1^{n_1})^{n_2} (p_r^{n_2} | a_2^{n_2} \varepsilon_2^{n_2})^{n_1 - 1} \varepsilon_1^{\mu} \varepsilon_2^{n_2 - \mu} e_1 e_2^{n_1 n_2}}{(a_1^{n_1})^{n_2} (p_r^{n_2} | a_2^{n_2} \varepsilon_2^{n_2})^{n_1 - 1} \varepsilon_2^{n_2} e_1 e_2^{n_1 n_2}}.$$

Die Gleichung

$$(a_1^{n_1})^{n_2} (p^{n_2} | a_2^{n_2} a^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2} = 0$$

ist unter der Voraussetzung $n_2 < n_1$ für $a^{n_2} = \varepsilon_2^{n_2}$ die Tschirnhausen'sche Resolvente der Gleichung $a_1^{n_1} \varepsilon_2^{-n_1} p^0 = 0$.

In dieser Gleichung kann eine beliebige Anzahl von Gliedern, die jedoch nicht grösser als n_2 sein darf, durch eine geeignete Bestimmung der Grösse $a_2^{n_2}$ zum Verschwinden gebracht werden.

Sollen nämlich die Glieder, in welchen die Grössen

$$(a_2^{n_2} p^{n_2})^{n_1 - \varkappa_r} (a^{n_2} p^{n_2})^{\varkappa_r}, \quad r = 1, \ldots, n$$

auftreten, verschwinden, so hat man

$$(a_1^{n_1})^{n_2} (a^{n_2})^{n_1 - \varkappa_r} (a_2^{n_2})^{\varkappa_r} e_1 e_2^{n_1 n_2} = 0, \quad r = 1, \ldots, n$$

oder

$$(a_1^{n_1})^{n_2} (a^{n_2} e_1 e_2^{n_2})^{n_1 - \varkappa_r} (a_2^{n_2} e_1 e_2^{n_2})^{\varkappa_r} = 0, \quad r = 1, \ldots, n$$

zu setzen und erhält aus diesen Gleichungen für die Grösse $a_2^{n_2}$ die Bestimmungsgleichung

$$((a_1^{n_1})^{n_2} (a^{n_2} e_1 e_2^{n_2})^{n_1 - \varkappa_1})^{\overline{\varkappa_1} \varkappa_1 \ldots \varkappa_n} \ldots ((a_1^{n_1})^{n_2} (a^{n_2} e_1 e_2^{n_2})^{n_1 - \varkappa_n})^{\overline{\varkappa_n} \varkappa_1 \ldots \varkappa_n}$$
$$((a_2^{n_2} e_1 e_2^{n_2}) p_1^{n_2} \ldots p_{n-1}^{n_2})^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_n} = 0.$$

Berlin, den 15. October 1886.

Kleinere Mittheilungen.

I. Einiges über Gebilde zweiten Grades und deren reciproke Inversen.

I.

Ist

$$K^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

die Gleichung irgend eines Kegelschnittes, so ergiebt sich uns als Gleichung der circularen Inverse* desselben in Bezug auf den Ursprung als Inversionscentrum und den Werth $\varrho\varrho_1 = 1$:

$$C^4 = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx(x^2+y^2) + 2ey(x^2+y^2) + f(x^2+y^2)^2 = 0.$$

Transformiren wir diese Gleichung mittels der Werthe

$$x = \xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha, \quad y = \xi \sin\alpha - \eta \cos\alpha,$$

so erhalten wir hieraus die Gleichung:

$$(a\cos^2\alpha + 2b\cos\alpha\sin\alpha + c\sin^2\alpha)\xi^2 + (a\sin^2\alpha - 2b\sin\alpha\cos\alpha + c\cos^2\alpha)\eta^2$$
$$+ \lambda\xi\eta + 2d(\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha)(\xi^2+\eta^2) + 2e(\xi\sin\alpha - \eta\cos\alpha)(\xi^2+\eta^2)$$
$$+ f(\xi^2+\eta^2)^2 = 0.$$

Hieraus erhalten wir für die Halbirungspunkte der Abschnitte, welche die Curve C^4 auf den neuen Coordinaten schneidet, die Werthe

$$\frac{\xi_1+\xi_2}{2} = -\frac{1}{4}(d\cos\alpha + e\sin\alpha) \text{ und } \frac{\eta_1+\eta_2}{2} = -\frac{1}{4}(d\sin\alpha - e\cos\alpha).$$

Dies ergiebt uns für den durch diese zwei letzten Gleichungen dargestellten Punkt P aber in den ursprünglichen Coordinaten:

$$x = -\frac{d}{f}, \quad y = -\frac{e}{f}.$$

Legen wir nun aber durch die Endpunkte A, A_1 und B, B_1 der erwähnten Abschnitte Parallele mit den transformirten Axen, so erhalten wir ein Rechteck $MNOQ$ und in diesem Rechteck ist offenbar P der Mittelpunkt. Alle auf diese Art entstandenen Rechtecke haben also alle einen und denselben Mittelpunkt.

Wir haben jedoch ferner für die Längen s_1 und s_2 der Abschnitte AA_1 und BB_1 auf den Axen die Werthe:

$$s_1^2 = (\xi_1-\xi_2)^2 = (\xi_1+\xi_2)^2 - 4\xi_1\xi_2 \text{ und } s_2^2 = (\eta_1-\eta_2)^2 = (\eta_1+\eta_2)^2 - 4\eta_1\eta_2.$$

Setzen wir hierin die Werthe für $(\xi_1+\xi_2)$ u. s. w. ein und addiren, so erhalten wir:

$$s_1^2 + s_2^2 = \frac{4}{f^2}(d^2+e^2) - \frac{4}{f}(a+c).$$

---

* Nach der Methode der reciproken Radien.

Dies sagt uns aber, dass die erwähnten Rechtecke nicht nur alle denselben Mittelpunkt, sondern dass sie überdies alle gleiche Diagonalen haben. Setzen wir also in P ein und beschreiben mit der halben Diagonale eines solchen Rechtecks einen Kreis, so geht dieser Kreis durch die Ecken aller so entstandenen Rechtecke, α möge einen Werth haben, welchen es wolle.

Wir erhalten demnach den Satz:

Legen wir durch den reellen Doppelpunkt einer circularen Inverse (vierten Grades) eines Kegelschnittes zwei zu einander senkrechte Linien und ziehen durch die weiteren Punkte jeder dieser Linien mit der Curve Parallelen zu der andern Linie, so erhalten wir ein einem festen Kreise einbeschriebenes Rechteck. Oder:

Dreht sich der Scheitel eines rechten Winkels um den reellen Doppelpunkt einer circularen Inverse C^4 eines Kegelschnittes, so bestimmen dessen Schenkel auf der Curve eine Sehne, deren Halbirungspunkt einen Kreis zum Orte hat.

Ist der Kegelschnitt ein Kreis, so ist die Inverse ebenfalls ein solcher und wir bilden demnach für den Kreis und einen Punkt einen entsprechenden Satz.

Ist ferner das Inversionscentrum im Kegelschnitt selbst gelegen, so ist die Inverse vom dritten Grade und es ist nur noch der zweite Satz giltig, der Kreis selbst wird zur geraden Linie.

II.

Von speciellen Fällen dieses Satzes wollen wir nur erwähnen, dass er z. B. für die Pascal'sche Schnecke, also auch für die Cardioide giltig ist. Der letztere Satz lautet ferner z. B. für die Cissoide:

Dreht sich um die Spitze einer Cissoide ein rechter Winkel, so bestimmt dieser auf der Cissoide eine Sehne, deren Halbirungspunkt auf einer festen, zur Asymptote der Curve parallelen Linie liegt, welche den Abstand der Spitze von der Asymptote halbirt.

Gehen wir auf die Kegelschnitte zurück, so folgt aus den Sätzen über die Inversen für erstere der Satz:

Dreht sich der Scheitel eines rechten Winkels um einen Punkt P, so bestimmen seine Schenkel auf einem Kegelschnitt eine Sehne AB derart, dass der Ort des Fusspunktes des Lothes A von P auf AB ein Kreis ist.

Liegt P auf der Curve selbst, so geht der Ortskreis durch P und wir erhalten den bekannten Satz als speciellen Fall:

Dreht sich der Scheitel eines rechten Winkels um einen Punkt eines Kegelschnittes, so bestimmen dessen Schenkel auf dem Kegelschnitt eine Sehne, die durch einen festen Punkt geht.

III.

Zum Schlusse wollen wir noch bemerken, dass die oben angeführten Sätze sich auch auf den Raum ausdehnen lassen. Hierbei können wir bei der Ableitung auf analoge Weise wie in I verfahren, oder aber auch wie folgt. Halten wir zunächst eine der drei Coordinatenaxen fest, so folgt, dass die Ecken aller Quader, welche wir in Bezug auf diese feste Axe und auf die beiden anderen Axen analog wie die Rechtecke in I construiren, Ecken haben, welche auf zwei Kreisen liegen. Halten wir nun irgend eine der anderen Axen fest und lassen diese sich bewegen, so erhalten wir ein System von Quadern, deren Ecken nun auf zwei neuen Kreisen liegen, welche die beiden ersten schneiden. Fahren wir so fort, so finden wir, dass der Ort der Ecken aller möglichen Quader eine Fläche ist, welche von jeder Ebene nach einem Kreise geschnitten wird, also eine Kugel. Wir erhalten also den Satz:

Legen wir durch das Inversionscentrum der Inverse einer Fläche zweiten Grades drei zu einander senkrechte Axen, so schneidet die Fläche auf diesen Axen drei Abschnitte ab. Legen wir durch jeden Endpunkt eines solchen Abschnittes eine Ebene parallel den beiden anderen Abschnitten, so erhalten wir sechs einen Quader bildende Ebenen derart, dass alle so entstandenen Quader denselben Mittelpunkt haben und deren Ecken auf derselben Kugel liegen. Oder:

Dreht sich die Spitze eines Octanten um das Inversionscentrum einer Inverse einer Fläche zweiten Grades, so bestimmen dessen Kanten auf der Fläche Dreiecke, deren Schwerpunkte auf einer festen Kugel liegen.

Liegt das Inversionscentrum auf der Fläche zweiten Grades selbst, so geht auch hier die Kugel in eine Ebene über, indem sämmtliche Ecken des Quaders bis auf eine verschwinden, und wir erhalten z. B. den Satz:

Dreht sich eine Cissoide um ihre Rückkehrkante und hat irgend ein Octant mit ihr die Spitze gemein, so bestimmen die Kanten des Octanten auf dem Umdrehungskörper ein Dreieck, dessen Schwerpunkt in einer festen Ebene liegt.

Gehen wir auf die Fläche zweiten Grades zurück und bedenken, dass, wenn PA, PB und PC drei zu einander senkrechte Linien sind, das Loth von P auf die Ebene ABC durch den Höhenschnitt des Dreiecks ABC geht, so erhalten wir den Satz:

Dreht sich ein Octant um einen festen Punkt, so bestimmen seine Kanten auf einer Fläche zweiten Grades Dreiecke, deren Höhenschnitte auf einer festen Kugel liegen.

Zugleich ist hier ein von J. Steiner gegebener Satz bewiesen, nämlich:

Schneiden sich in einem Octaeder die drei Diagonalen unter rechten Winkeln, so liegen die acht Fusspunkte der Lothe vom Diagonalenschnitt auf die Octaederflächen auf einer Kugel.

Ist das Inversionscentrum auf der Fläche zweiten Grades gelegen, so geht die Kugel durch dasselbe und es folgt der Satz:

Dreht sich ein Octant mit seiner Spitze um einen Punkt einer Fläche zweiten Grades, so bestimmen dessen Kanten auf dieser Fläche ein Dreieck, dessen Ebene durch einen festen Punkt geht.

Weingarten (Württemberg), im Sept. 1886. B. SPORER.

II. Ein geometrisches Problem.

In den Mittelpunkten A_1, B_1, C_1 der Seiten BC, CA, AB eines gegebenen Dreiecks ABC sind auf den Seiten Senkrechte errichtet und auf jeder der letzteren ist ein Punkt derart angenommen, dass die Geraden AA_2, BB_2, CC_2, welche diese neuen Punkte A_2, B_2, C_2 mit den entsprechenden Eckpunkten des Dreiecks verbinden, durch irgend einen Punkt P gehen.

Wenn nun die auf bekannte Weise mit Vorzeichen versehenen Abstände A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 durch λ, μ, ν bezeichnet werden, so lässt sich untersuchen:

1. die unabhängig von der Lage des Punktes P allemal zwischen den Abständen λ, μ, ν bestehende Beziehung,
2. der Ort des Punktes P, für welchen die Abstände λ, μ, ν bei gleichzeitigem Zeichenwechsel zu einem neuen Punkte P' führen.

Auflösung.

1. Sind β und γ die Längen der von A_2 auf CA und AB gefällten Lothe und x, y, z die Abstände des P von den Seiten des Dreiecks ABC (die normalen Dreieckscoordinaten dieses Punktes), so hat man

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{y}{z}.$$

Sind weiter $2a$, $2b$, $2c$ die Längen der Dreiecksseiten BC, CA, AB, so ergiebt sich durch Projection von A_2A_1C auf β und A_2A_1B auf γ

$$\beta = a \sin C - \lambda \cos C, \quad \gamma = a \sin B - \lambda \cos B,$$

also auch

$$1) \qquad \frac{y}{z} = \frac{a \sin C - \lambda \cos C}{a \sin B - \lambda \cos B}.$$

Mittels dieses Ausdruckes für $\frac{y}{z}$ und der analogen Werthe von $\frac{z}{x}$ und $\frac{x}{y}$ findet man sofort die verlangte Bedingung

$$\frac{a\sin C-\lambda\cos C}{a\sin B-\lambda\cos B}\cdot\frac{b\sin A-\mu\cos A}{b\sin C-\mu\cos C}\cdot\frac{c\sin B-\nu\cos B}{c\sin A-\nu\cos A}=1$$

oder

$$(a\,tg\,B-\lambda)(b\,tg\,C-\mu)(c\,tg\,A-\nu)=(a\,tg\,C-\lambda)(b\,tg\,A-\mu)(c\,tg\,B-\nu)$$

oder

$$2)\qquad \Sigma\, a(tg\,B-tg\,C)\mu\nu+\Sigma\, bc\,tg\,A(tg\,B-tg\,C)\lambda=0.$$

Betrachtet man λ, μ, ν als die gewöhnlichen nicht homogenen Raumcoordinaten eines Punktes Q, so gehört diese Gleichung einer Mittelpunktsfläche zweiten Grades an, welche hierdurch Punkt für Punkt auf die Ebene des Dreiecks ABC bezogen ist. Für ein gleichschenkliges Dreieck ABC zerfällt diese Fläche in zwei Ebenen; für ein gleichseitiges Dreieck ABC ist die Gleichung eine Identität, wie es offenbar sein muss.

2. Wenn die gefundene Beziehung 2) bei Umkehrung der Zeichen von λ, μ, ν bestehen bleiben soll, so müssen λ, μ, ν gleichzeitig den beiden Bedingungen

$$3)\qquad \Sigma\, a(tg\,B-tg\,C)\mu\nu=0,\quad \Sigma\, bc\,tg\,A(tg\,B-tg\,C)\lambda=0$$

Genüge leisten. Diese Gleichungen sind homogen in λ, μ, ν. Da nun die Auffassung der λ, μ, ν als homogener Dreieckscoordinaten eines Punktes R in der ersten Gleichung 3) einen Kegelschnitt und in der zweiten Gleichung 3) eine Gerade erkennen lässt, so findet man zwei Systeme von proportionalen Werthen für λ, μ, ν, von welchen jedes für sich zu einem Orte von Punkten P führt. Es sind diese Systeme, wie man leicht verificirt, bestimmt durch die Gleichungen

$$\text{I)}\quad \begin{cases}\lambda=f\cos A,\\ \mu=f\cos B,\\ \nu=f\cos C,\end{cases}\qquad\qquad \text{II)}\quad \begin{cases}\lambda=f'\sin A,\\ \mu=f'\sin B,\\ \nu=f'\sin C,\end{cases}$$

worin f und f' Proportionalitätsfactoren bedeuten. Demnach ist nur noch in beiden Fällen der Ort der Punkte P anzugeben.

Fall der Gleichungen I). Die Auflösung der Gleichung 1) nach λ giebt

$$\lambda=\frac{y\sin B-z\sin C}{y\cos B-z\cos C}\,a$$

und ebenso erhält man analoge Ausdrücke für μ und ν. Mittels der ersten und zweiten Gleichung I) hat man also

$$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{(y\sin B-z\sin C)(z\cos C-x\cos A)}{(y\cos B-z\cos C)(z\sin C-x\sin A)}\cdot\frac{a}{b};$$

diese Gleichung reducirt sich zur regelmässigeren Gestalt

$$\Sigma\, a(tg\,B-tg\,C)x=0$$

und bedeutet eine Gerade. Diese Gerade enthält den Schwerpunkt ($f=0$), das Orthocentrum ($f=\infty$) und das Centrum des Umkreises ($f=$ Radius) des Dreiecks. Die mittels Zeichenwechsel von λ, μ, ν einander entsprechenden Punkte P und P' bilden auf ihr eine Involution, welche offenbar den

Schwerpunkt und das Orthocentrum des Dreieckes zu Doppelpunkten haben muss. Denn allein für $f=0$ und $f=\infty$ ist Zeichenwechsel wirkungslos. Es entspricht also dem Centrum des Umkreises der Punkt, welcher dieses Centrum von den beiden Doppelpunkten harmonisch trennt, d. h. das mitten zwischen Orthocentrum und Centrum des Umkreises liegende Centrum des Feuerbach'schen Kreises*.

Fall der Gleichungen II. Auf ganz analoge Weise findet man die Bedingung

$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{(y\sin B-z\sin C)(z\cos C-x\cos A)}{(y\cos B-z\cos C)(z\sin C-x\sin A)}\cdot\frac{a}{b},$$

welche sich in der regelmässigeren Form

$$\Sigma \sin(B-C)\,yz=0$$

darstellen lässt. In diesem Falle findet man also einen Kegelschnitt, welcher die Kiepert'sche gleichseitige Hyperbel, die Hyperbel der neun Punkte von Brocard ist, da sie durch die Eckpunkte des Dreiecks ABC, durch das Orthocentrum und den Schwerpunkt geht. Sie durchschneidet die oben gefundene Gerade im Orthocentrum und im Schwerpunkte und die mittels Zeichenwechsel einander auf ihr entsprechenden Punkte P und P' bilden auf ihr eine Involution, welche ebenfalls Orthocentrum und Schwerpunkt zu Doppelpunkten und also den Pol der oben gefundenen Gerade in Bezug auf die Hyperbel zum Involutionscentrum hat. Ist das Dreieck ABC gleichschenklig, so zerfällt die Kiepert'sche Hyperbel bekanntlich in Basis und Höhe dieses Dreiecks.

Schlussbemerkung. Im 4. Hefte des XXXI. Jahrg. dieser Zeitschrift (S. 251) hat Herr Dr. Schlömilch einen problematischen Satz aufgestellt, dessen Giltigkeitsbezirk er bestimmt zu sehen wünscht. Die vorige Untersuchung setzt uns dazu unmittelbar in den Stand. Die von Herrn Schlömilch mit O_1 und O_2 bezeichneten Punkte sind durch die Gleichung 2) in Verbindung mit den Bedingungen

$$\lambda^2+a^2=\mu^2+b^2=\nu^2+c^2$$

bestimmt; denn es sagen diese letzteren Gleichungen aus, dass die sechs Abstände A_2B, A_2C, B_2C, B_2A, C_2A, C_2B einander gleich sind. Man findet folgende Resultate:

„1. Bei einem ungleichschenkligen Dreiecke ABC giebt es zwei Paar einander entsprechender Punkte O_1 und O_2; das eine Paar ist reell und besteht aus dem Centrum des Umkreises und dem Centrum des Feuerbach-schen Kreises; das andere Paar ist imaginär. Und weiter giebt es noch

* Ist H das Orthocentrum, M das Centrum des Umkreises, E der Schwerpunkt und M' der gesuchte Punkt, so ändert die bekannte Beziehung $\frac{HM}{EM}=3$ die harmonische Bedingung $\frac{HM'}{EM'}+\frac{HM}{EM}=-1$ in $HM'=M'M$, u. s. w.

vier vereinzelte Punkte O, von welchen es natürlich dahin gestellt bleiben muss, ob sie Punkte O_1 oder O_2 sind."

Denn, indem die Mittelpunktsfläche 2) mit zwei der drei gleichseitigen hyperbolischen Cylindern

$$\mu^2 - \nu^2 = c^2 - b^2, \quad \nu^2 - \lambda^2 = a^2 - c^2, \quad \lambda^2 - \mu^2 = b^2 - a^2$$

acht gemeinschaftliche Punkte O bestimmt, genügen die Gleichungen I) nur für $f^2 = R^2$ und die Gleichungen II) nur für $f^2 = -R^2$ den neuen Bedingungen.

„2. Bei einem gleichschenkligen Dreiecke ABC gilt der Satz des Herrn Schlömilch unbedingt und ist der Ort der Punkte O das vom Scheitel auf die Basis gefällte Loth."

Groningen, 11. September 1886. P. H. Schoute.

III. Zur mathematischen Statistik.

Entgegnung auf die Ausführungen des Herrn W. Küttner (Bd. XXXI S 246flgg.)

Für diejenigen Leser dieser Zeitschrift, welchen die mathematisch-statistischen Fachjournale nicht zu Gesicht kommen, will ich zunächst bemerken, dass die von Herrn Küttner angewandte Methode bereits im Jahre 1876 in Masius' Rundschau der Versicherungen eine eingehende Widerlegung durch Herrn Prof. Dienger erfahren hat, ohne dass Herr Küttner von seiner Ansicht bekehrt wäre. Es wäre nun meines Erachtens nicht nöthig gewesen, auf den streitigen Punkt nochmals zurückzukommen, wenn nicht Herr Küttner aus seinem Verfahren jenen allgemeinen Satz abstrahirt und zuerst in dieser Zeitschrift, Jahrgang XXV, sodann in der „Zeitschrift für das Berg-, Hütten- und Salinenwesen", Jahrgang 1881 Bd. XXIX, mitgetheilt hätte, was mich veranlasste, gegen Herrn Küttner meine Stimme zu erheben.

Auf die Antwort, welche mir in dem 4. Hefte (Bd. XXXI) zu Theil wurde, und die weiteren Argumente, welche den Satz stützen sollen, muss ich nun Folgendes erwidern.

Es wird zunächst gesagt, dass ich die dem Satze vorausgeschickten Betrachtungen ignorirte, welche denselben genügend begründeten. Von solchen Betrachtungen ist nun an den beiden angeführten Stellen Nichts zu entdecken; denn sowohl in dem Jahrgang XXV dieser Zeitschrift, als in der umfangreichen und gründlichen Arbeit über die Knappschaftskassen (a. a. O., S. 159) ist der Satz unvermittelt gegeben. Die demselben vorhergehenden Entwickelungen habe ich in meiner Schrift nicht besonders erwähnt, da ich die in Herrn Küttner's Formelentwickelung ausgedrückten Grundsätze generell zu widerlegen versucht habe. Die zu dem Satze ursprünglich gegebene Begründung liegt einzig in dem mit „weil" beginnenden Theile desselben (ich komme später darauf zurück), wie ja der ganze Satz etwas Axiomatisches an sich trägt. Man muss daher auch meines Erachtens schon durch einfache Betrachtungen über Richtigkeit oder Unrichtigkeit desselben entscheiden können. Indessen ist es um so besser, dass Herr **Küttner** in der irrthümlichen Annahme, ich halte nur die Grenzmethode für zulässig, seinen Satz jetzt in Formeln bewiesen oder zu beweisen versucht hat.

In diesem Beweise ist derselbe Fehler gemacht, wie früher; es ist nämlich von vornherein Etwas angenommen, was gerade bewiesen werden soll. Herr **Küttner** beginnt (unten auf S. 247):

„Sei allgemein die Wahrscheinlichkeit, dass unter der Einwirkung der übrigen $(n-1)$ Ereignisse das i^{te} Ereigniss innerhalb der Zeit von x bis $x+\Delta x$ stattfindet, gleich $x_i \Delta x$ und die Wahrscheinlichkeit, dass keines dieser n Ereignisse innerhalb der angegebenen Zeit eintritt, gleich $1-\Delta y$."

Gut! Nun kann man aber doch nicht *a priori* annehmen — wie es Herr **Küttner** thut —, dass,

„wenn die Ereignisse alle unabhängig von einander wären," die Wahrscheinlichkeit, dass das i^{te} Ereigniss innerhalb der Zeit von x bis $x+\Delta x$ stattfindet, ebenfalls gleich $x_i \Delta x$ gesetzt werden darf! Diese letztere muss vielmehr zunächst etwa $\xi_i \Delta x$ genannt werden. Dann ist in den Gleichungen 1) und den folgenden, daraus entstehenden überall ξ_i an die Stelle von x_i zu setzen, und es müsste Gleichung 2) für unabhängige Ereignisse lauten:

$$dy = \xi_1\, dx + \xi_2\, dx + \ldots + \xi_n\, dx.$$

In den folgenden Entwickelungen ergiebt sich für abhängige Ereignisse Gleichung 7):

$$dy = x_1\, dx + x_2\, dx + \ldots + x_n\, dx.$$

Um demnach zu beweisen, was Herr **Küttner** beweisen will, nämlich dass die Abhängigkeit der Ereignisse von einander für das unendlich kleine Zeitelement dx ausser Betracht gelassen werden darf, müsste man beweisen, dass allgemein:

$$\xi_1\, dx + \xi_2\, dx + \ldots + \xi_n\, dx = x_1\, dx + x_2\, dx + \ldots + x_n\, dx$$

oder dass:

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

ist. Des Weiteren müsste man, da die Gleichung 9) in beiden Fällen zunächst verschiedene Resultate enthält, beweisen, dass:

$$\xi_i\, dx = x_i\, dx,$$

d. h. dass

$$\xi_i = x_i$$

ist, was aber nicht allgemein vorausgesetzt werden darf, weshalb ich Herrn **Küttner** auf seine Frage (S. 250 oben) erwidern muss, dass ich meine dort von ihm angeführten Worte in vollem Umfange aufrecht erhalte.

Auch die übrigen Ausführungen des Herrn Küttner auf S. 250, die den Leser leicht gegen meine Ansicht einnehmen könnten, glaube ich für unzutreffend erklären zu müssen.

Meine durch die betreffende Stelle bekämpfte Einwendung war hervorgerufen durch die in dem Satze selbst gegebene Begründung, das Abhängigkeitsverhältniss könne bei einem unendlich kleinen Zeitintervall

„nicht in Frage kommen, weil, wenn die Aufeinanderfolge zweier oder mehrerer Ereignisse von dem Zusammentreffen durch unsere Sinne unterschieden werden soll, immer ein endliches, wenn auch noch so kleines Zeitintervall zwischen denselben liegen muss“

Dies ist doch so zu verstehen, dass ein Abhängigkeitsverhältniss nach der Meinung des Herrn Küttner dann nicht als bestehend anzunehmen ist, wenn die Ereignisse, um welche es sich handelt, in demselben Zeitpunkte eintreffen. Ich habe aber dagegen bemerkt, dass Nichts gewonnen wird, wenn man die Ereignisse zusammenfallen lassen will, da dies gleichfalls eine Ungereimtheit sei. Ich hätte hinzusetzen können „mit Rücksicht auf die Statistik“, um welche es sich ja einzig und allein handelt. Indessen war dies ja selbstverständlich. Herr Küttner hat am Schlusse des erwähnten Artikels (in dieser Zeitschrift, Jahrgang XXV) die Erhebungen des Vereins Deutscher Eisenbahn-Verwaltungen „sehr gute statistische Aufzeichnungen“ genannt. In diesen Aufzeichnungen wird nie dieselbe Person sowohl unter den durch Tod, als auch unter den wegen Dienstunfähigkeit Ausscheidenden, also nie doppelt aufgeführt, sondern es wird entweder der Tod, oder die Dienstunfähigkeit als das zuerst eintretende Ereigniss betrachtet. So wird es auch wohl jeder andere Statistiker machen. Denn trüge er dieselbe Person in beide Spalten ein, so müsste man diesen Umstand auch wieder bei den auf Grund der Statistik angestellten Berechnungen berücksichtigen. Da aber hierdurch die Formeln an Einfachheit verlieren müssen, so ist eine solche Anschauungsweise unzweckmässig.

Ich glaube durch obige Entgegnung das Irrige in der Argumentation des Herrn Küttner klargestellt zu haben und halte, falls mein Gegner nicht durch mich überzeugt worden ist, eine weitere Polemik für zwecklos, namentlich mit Rücksicht auf die vergeblichen Bemühungen von Prof. Dienger a. a. O., auf welche ich die Leser hinzuweisen mir erlaube.

Berlin, Mitte September 1886. Dr. H. Zimmermann.

NS. Zusätzlich erwähne ich, dass ich in der inzwischen druckreif gewordenen Bearbeitung der Dienstunfähigkeits- und Sterbensstatistik des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen vom Jahre 1885 eine ausführliche Analyse der Entwickelungen des Herrn Küttner gebe.

Berlin, im December 1886. D. O.

IV.

Die Raumcurven vierter Ordnung erster und zweiter Species in ihrem Zusammenhang mit den Steiner'schen Schliessungsproblemen bei den ebenen Curven dritter Ordnung.

Von

Dr. V. EBERHARD

in Breslau.

Einleitung.

Die Schliessungsprobleme, welche Steiner im XXXII. Bande des Crelle'schen Journals aufgestellt hat, finden nach den Beweisen der Herren Küpper und Schoute ihre Erklärung durch den bekannten Satz, dass, wenn $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ irgend vier Punkte einer ebenen C^3 sind, die geraden Paare $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|\,|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|$ und $|\mathfrak{a}\mathfrak{d}|\,|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ die Curve noch in Punktepaaren $\mathfrak{p}, \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}, \mathfrak{s}$ treffen, deren Verbindungsgeraden $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}|$ und $|\mathfrak{q}\,\mathfrak{s}|$ sich in einem Punkte $\mathfrak{o}$ der C^3 schneiden. Ihr Zusammenhang mit diesem Satze ist ein so unmittelbarer, dass sie geradezu nur als veränderte Aussprachen desselben erscheinen und dass mit ihrer Annahme umgekehrt auch der Satz sofort in Evidenz tritt. Die Schliessungstheoreme von Steiner für die ebenen C^3 gestatten eine einfache Uebertragung auf räumliche C^4. Es ist jedoch zweckmässig, von ihrer speciellen Form abzusehen und unter einem Steiner'schen Punktsystem auf einer C^3 ein System von n festen Curvenpunkten $\mathfrak{a}_i$ der Beschaffenheit zu verstehen, dass, wenn, von irgend einem $n+1^{\text{ten}}$ Curvenpunkte $\mathfrak{p}_1$ aus, der Reihe nach die n Curvenpunkte $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_{n+1}$ bestimmt werden, wo $\mathfrak{p}_{i+1}$ der dritte Schnittpunkt der C^3 mit der Geraden $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{a}_i|$ ist, der Punkt $\mathfrak{p}_{n+1}$ in den Punkt $\mathfrak{p}_1$ fällt. Wenn dann $\mathfrak{o}$ ein Punkt einer räumlichen C^4 ist, $K_0{}^3$ der ihm zugehörige Projectionskegel der Curve, $C_0{}^3$ der Durchschnitt des letzteren mit einer beliebigen Ebene und $\mathsf{A} = \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ ein Steiner'sches Punktsystem der $C_0{}^3$, so repräsentiren die n Strahlen $|\mathfrak{o}, \mathfrak{a}_i|$ ein Steiner'sches Strahlensystem beziehlich des $K_0{}^3$ und

* Ueber die Literatur der Steiner'schen Schliessungsprobleme für die ebenen Curven dritter Ordnung und diejenigen vierter Ordnung mit zwei oder drei Doppelpunkten vergl. Schoute, Crelle Bd. XCV und Küpper, Annalen Bd. XXIV.

ein specielles Steiner'sches Secantensystem beziehlich der C^4. Wenn ferner die n Strahlen $|\mathfrak{o}, \mathfrak{a}_i|$ die C^4 ausser in $\mathfrak{o}$ noch in den n Punkten $\mathfrak{b}_i$ schneiden, die n Ebenen $[\mathfrak{b}_{i-1}, \mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_{i+1}]$ die C^4 noch in den n Punkten $\mathfrak{c}_i$, und die n Ebenen $[\mathfrak{o}, \mathfrak{b}_i, \mathfrak{c}_i]$ die C^4 noch in den n Punkten $\mathfrak{d}_i$, so repräsentiren die n Secanten $|\mathfrak{b}_i, \mathfrak{d}_i|$ der C^4 beziehlich dieser Curve ein Steiner'sches Secantensystem. Es fragt sich, in welcher Weise in dieser Uebertragung der Steiner'schen Schliessungstheoreme auf die räumlichen C^4 der obige Fundamentalsatz aus der Theorie der ebenen C^3 zum Ausdruck kommt.

Die Beantwortung dieser Frage ist der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit. Für jede der beiden Species räumlicher C^4 resultirt ein Theorem, welches für ihre Theorie von derselben Bedeutung ist, wie der angegebene Satz für die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung. Für die C^4 erster Species gilt ein Satz, der das völlige Analogon jenes Satzes über die ebenen C^3 ist; der Satz für C^4 zweiter Species ist das Analogon eines ebenso wichtigen Satzes aus der Kegelschnittstheorie. Der erste dieser beiden Sätze ist zuerst von Herrn Reye entdeckt und in den Annali di Matematica, Serie II Bd. 2 veröffentlicht worden. Ausser diesem Satze sind auch die für die C_1^4 in § 13 abgeleiteten Hilfssätze bekannt. Die Einheit der Darstellung schien mir jedoch die hier gegebene Herleitung zu rechtfertigen.

Das erste, einleitende Capitel enthält in den ersten drei Paragraphen die Beweise der Theoreme von Steiner, im Wesentlichen in der Küpper-schen Form. Dagegen findet sich in §§ 4 und 5 die Frage nach den Bedingungen eines Steiner'schen Punktsystems von einem neuen Gesichtspunkte aus aufgefasst. In der Küpper'schen Arbeit wird bewiesen, dass eine ungerade Anzahl von Punkten der C^3 allemal die Grundpunkte eines Steiner'schen Systems zweiter Ordnung bilden. Dieser Satz lehrt, dass bei gegebenen Fundamentalpunkten die Eigenschaft des Steiner'schen Systems auch lediglich durch die Anordnung der Fundamentalpunkte erreicht werden kann. Demgemäss werden in §§ 4 und 5 die identischen und eigentlichen Systeme definirt und die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für dieselben aufgestellt.

Im zweiten Capitel werden die Bedingungen erörtert, unter welchen n Secanten einer räumlichen C^4 ein Steiner'sches System bilden. Dabei verstehe ich unter letzterem ein System von n Secanten s_i der Art, dass, wenn durch dieselben n Ebenen α_i so gelegt werden, dass die erste α_1 beliebig durch s_1 die C^4 noch in $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ schneidet, die übrigen aber dadurch bestimmt sind, dass α_{i+1} durch den Schnittpunkt $\mathfrak{p}_{i+1}$ von α_i mit der Curve geht, die letzte Ebene α_n durch $\mathfrak{p}_1$ geht. Die Existenz solcher Systeme wird in § 6 aus der Existenz Steiner'scher Punktsysteme auf der C^3 nachgewiesen. Unabhängig von der C^3 werden in § 7 allgemein die Bedingungen solcher Secantensysteme abgeleitet. Dabei ergiebt sich für die C_1^4, dass irgend $n = 2m$ Secanten derselben sich im Allgemeinen kein Polygon $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_1$ umschreiben lässt, dass aber, wenn auch nur ein solches nachgewiesen wird, jeder Curvenpunkt zur Ecke $\mathfrak{p}_1$ eines gewählt werden kann.

Für die C_2^4 lautet das Resultat, dass im Allgemeinen zwei Polygone den n Secanten umschrieben werden können, dass aber, wenn drei nachgewiesen werden, jeder Curvenpunkt zur Ecke $\mathfrak{p}_1$ eines gewählt werden kann.

An die letzten Resultate knüpft sich unmittelbar eine einfache allgemeine Construction eines Steiner'schen Secantensystems auf einer C^4. Die Untersuchungen der §§ 8 und 9 sind deshalb von besonderer Wichtigkeit, weil die dort betrachteten einfachsten Formen Steiner'scher Secantensysteme später in den Capiteln III und IV die Grundlage einer Theorie sowohl der C_1^4, als der C_2^4 bilden. Für die C_1^4 existirt eine Grundform von vier Secanten, für die C_2^4 eine von vier und eine von drei Secanten.

In § 10 wird ein Analogon zu dem zweiten Satz von Clebsch (Crelle Bd. 63 § 3) dadurch abgeleitet, dass von den vier Secanten einer Grundform je zwei zur Coincidenz gebracht werden.

Bisher war eine gemeinsame Behandlung der beiden Species von C^4 nicht nur möglich, sondern durch ihre Natur auch direct geboten. Mit der Feststellung verschiedener Grundformen Steiner'scher Systeme für die beiden Arten aber wird für jede derselben eine eigene Untersuchungsweise erforderlich.

Im III. Capitel wird daher die Betrachtung der C_1^4 aufgenommen. Das Ergebniss der §§ 12—14 ist die Ableitung des wichtigen, von Reye entdeckten Satzes, wonach, wenn $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_i$ die 3.4 Schnittpunkte der C_1^4 und dreier Ebenen α, β, γ sind, die vier Ebenen $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i, \mathfrak{c}_i]$ die C_1^4 noch in vier Punkten $\mathfrak{d}_i$ einer Ebene δ schneiden. Der § 15 enthält Anwendungen dieses Satzes, welche dazu dienen, aus drei, zwei oder einem gegebenen Steiner-schen Secantensystem andere abzuleiten. Die diesbezüglichen Sätze sind in dem folgenden einen zusammengefasst: Sind drei Steiner'sche Secantensysteme erster Ordnung gegeben, nämlich $s_{1i} = |\mathfrak{a}_{1i}\mathfrak{b}_{1i}|$, $s_{2i} = |\mathfrak{a}_{2i}\mathfrak{b}_{2i}|$, $s_{3i} = |\mathfrak{a}_{3i}\mathfrak{b}_{3i}|$, $(i = 1 \dots n)$, so schneiden die $2n$ Ebenen $[\mathfrak{a}_{1i}, \mathfrak{a}_{2i}, \mathfrak{a}_{3i}]$ und $[\mathfrak{b}_{1i}, \mathfrak{b}_{2i}, \mathfrak{b}_{3i}]$ die C_1^4 noch in n Punktepaaren $\mathfrak{a}_{4i}$, $\mathfrak{b}_{4i}$, deren n Verbindende $s_{4i} = |\mathfrak{a}_{4i}\mathfrak{b}_{4i}|$ ein viertes System erster Ordnung bestimmen.

Das Capitel IV hat zum Gegenstand die C_2^4. Es gewährt dasselbe ein besonderes Interesse durch die grosse Analogie, welche zwischen der C_2^4 und dem Kegelschnitt zu Tage tritt. Zum Ausgangspunkt der Untersuchung in § 16 dient Satz 1 aus § 9, nach welchem ein Diagonaldreikant eines der C_2^4 einbeschriebenen Tetraeders allemal ein Steiner'sches Secantentripel bestimmt. Aus demselben resultirt zunächst bezieblich der drei Tripelstrahlen X_1, X_2, X_3 die wichtige Eigenschaft, dass die Berührungssecante $\mathfrak{X}_1$ der beiden aus X_1 an die C_2^4 möglichen Berührungsebenen die beiden anderen X_2 und X_3 schneidet. Wegen der Analogie dieses Satzes mit dem entsprechenden für ein Tripel conjugirter Punkte eines Kegelschnittes nenne ich die drei Strahlen X_i ein Tripel conjugirter Secanten und die drei Secanten $\mathfrak{X}_i$ resp. ihre Polarstrahlen. Ein Paar conjugirter Secanten X_1, X_2 ist dadurch charakterisirt, dass jede von der Polare der andern geschnitten wird. Im weiteren Verlaufe der Untersuchung wird nun der Satz abgeleitet: Dreht sich eine Secante X_2 um die Polare $\mathfrak{X}_1$ einer Secante X_1, so dreht sich auch ihre Polare $\mathfrak{X}_2$ um den Polstrahl X_1 von $\mathfrak{X}_1$.

In § 17 wird die Untersuchung in der Weise fortgesetzt, dass mehrere Secantentripel zugleich betrachtet werden. Es wird der merkwürdige Satz abgeleitet: Sind X_1, X_2, X_3 und Y_1, Y_2, Y_3 irgend zwei Tripel conjugirter Secanten, und construirt man diejenigen drei Secanten $|X_i Y_i|$, welche resp. X_i und Y_i schneiden, so schneiden dieselben ein und dieselbe Secante Z_1 der C_2^4. Unter Anderem wird hieraus gefolgert: Vertauscht man die Strahlen Y_1, Y_2, Y_3 cyklisch und construirt für jede Anordnung die zugehörige Axe Z, so bestimmen je zwei der drei Resultirenden Z ein Steiner'sches Secantenpaar der dritten Ordnung.

In § 18 endlich wird die Identität der überhaupt möglichen Tripel conjugirter Secanten mit allen denjenigen nachgewiesen, welche resultiren, wenn man die C_2^4 durch alle Ebenen schneidet und aus den Diagonalpunkten des Schnittpunktvierecks einer jeden an die Curve die noch übrigen ausserhalb der Ebene gelegenen drei Bisecanten zieht.

Der Charakter der Entwickelungen dieses Capitels lässt zur Genüge erkennen, dass der in denselben eingeschlagene Weg zur Aufdeckung weiterer Eigenschaften der C_2^4 geeignet sein dürfte.

Im V. Capitel erfährt die Theorie der Schliessungsprobleme eine wesentliche Erweiterung durch die Definition und den Nachweis Steiner-scher Punktsysteme auf einer räumlichen C_1^4. Ich verstehe unter einem solchen ein System von n Curvenpunkten $\mathfrak{a}_i$ der Art, dass, wenn die C^4 von irgend einer Ebene π_1 durch $\mathfrak{a}_1$ noch in $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ und weiter von $\pi_2 = [\mathfrak{a}_2 \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2]$ noch in $\mathfrak{p}_3$, von $\pi_3 = [\mathfrak{a}_3 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3]$ noch in $\mathfrak{p}_4 \ldots$ getroffen wird, allemal die Ebene $\pi_{n-1} = [\mathfrak{a}_{n-1} \mathfrak{p}_{n-2} \mathfrak{p}_{n-1}]$ durch $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_n$ und die Ebene $\pi_n = [\mathfrak{a}_n \mathfrak{p}_{n-1} \mathfrak{p}_n]$ durch $\mathfrak{p}_1$ geht.

Die diesbezüglichen Ergebnisse lauten: Sind n Punkte $\mathfrak{a}_i$ auf der C_1^4 beliebig gegeben, so kommt es,

1. wenn n von der Form $3m$ oder $3m+1$ ist $(m \geqq 2)$, im Allgemeinen kein Mal und im Besondern doppelt unendlich viele Mal vor, dass die n oder die $3n$ Seitenflächen eines der C_1^4 eingeschriebenen n-Ecks oder $3n$-Ecks der Reihe nach durch die Punkte $\mathfrak{a}_i$ gehen;
2. wenn aber n von der Form $3m+2$ ist $(m \geqq 2)$, stets doppelt unendlich viele Mal vor, dass sich der C_1^4 $3n$-Ecke einschreiben lassen, deren $3n$ Seitenflächen durch die Punkte $\mathfrak{a}_i$ gehen.

Capitel I.

Zur Theorie der Steiner'schen Polygone bei den ebenen Curven dritter Ordnung.

§ 1. Vorbemerkungen.

Auf einer ebenen Curve dritter Ordnung C^3 sind n Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \dots \mathfrak{a}_n$ willkürlich fixirt. Durch jeden Punkt $\mathfrak{a}_i$ ist ein Strahl a_i gezogen, so zwar, dass je zwei aufeinander folgende, a_i und a_{i+1}, sich in einem Punkte $\mathfrak{p}_{i+1}$ der C^3 schneiden. Mit dem ersten Strahl $a_i = \mathfrak{a}_1 | \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 |$ sind also auch die übrigen $a_i = \mathfrak{a}_i | \mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_{i+1} |$ $(i = 1 \dots n)$ bestimmt. Die zunächst als gesondert angenommenen Punkte $\mathfrak{a}$ können auch gruppenweise coincidiren; keine Gruppe soll jedoch zwei benachbarte Punkte $\mathfrak{a}$ enthalten. Bei der Construction des $(n+1)$-Ecks $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_{n+1}$ können also die Punkte $\mathfrak{a}$ resp. $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$-mal zur Anwendung gelangen, keiner derselben aber zweimal nacheinander. Demnach sind bei gegebener Anzahl n von Punkten $\mathfrak{a}$ die m Zahlen α willkürlich bis auf die Bedingungen $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n$ und $\alpha_\lambda > 0$.

Die Behandlungsweise der beiden angegebenen Systeme von n Fundamentalpunkten $\mathfrak{a}$ wird daher ein und dieselbe sein können. Der grösseren Einfachheit wegen ist im Folgenden da, wo ausdrücklich nichts Gegentheiliges gesagt ist, ein System von gesonderten n Punkten vorausgesetzt.

§ 2. Steiner'sche Systeme und Polygone.

Im Allgemeinen wird bei gegebenem $\mathfrak{p}_1$ der zugehörige Punkt $\mathfrak{p}_{n+1}$ nicht mit $\mathfrak{p}_1$ coincidiren. Wie oft tritt nun Coincidenz ein, wenn $\mathfrak{p}_1$ die Curve durchläuft?

Bezeichnet, im Falle dreier Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ und bei gegebenem $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{o}_4$ den dritten Schnittpunkt der Curve mit der Geraden $|\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_4|$, so schneiden sich nach einem bekannten Satze die Geraden $|\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_3|$ und $|\mathfrak{a}_2 \mathfrak{o}_4|$ in einem Punkte $\mathfrak{b}_2$ der Curve. Der Punkt $\mathfrak{o}_4$ ist demnach durch die drei Punkte $\mathfrak{a}$ bereits bestimmt, also ganz unabhängig von dem Punkte $\mathfrak{p}_1$.

Im Falle von n gegebenen Fundamentalpunkten $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \dots \mathfrak{a}_n$ werden bei der Bewegung von $\mathfrak{p}_1$ auf der Curve die Geraden $|\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_4|$, $|\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_6|$ u. s. w. sich um feste Curvenpunkte $\mathfrak{o}_4, \mathfrak{o}_6, \dots$ drehen, speciell

a) bei geradem n $|\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_n|$ um den Punkt $\mathfrak{o}_n$,

b) bei ungeradem n $|\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_{n+1}|$ um den Punkt $\mathfrak{o}_{n+1}$.

Es resultiren unmittelbar die beiden wichtigen Sätze:

1*a)* Zu $n = 2m$ Fundamentalpunkten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \dots \mathfrak{a}_n$ giebt es im Allgemeinen kein Polygon $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_{n+1}$, dessen letzte Ecke $\mathfrak{p}_{n+1}$ in die erste $\mathfrak{p}_1$ hineinfällt.

1*b)* Geschieht dies auch nur für einen Curvenpunkt $\mathfrak{p}_1$, so trifft es für jeden andern zu.

2a) Zu $n=2m+1$ Fundamentalpunkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_2 \dots \mathfrak{a}_n$ giebt es im Allgemeinen und höchstens vier Polygone $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_{n+1}$, für welche die letzte Ecke mit der ersten coincidirt. Die *1b)* entsprechende Folgerung ist hier bedeutungslos. Von keinem Punkte der C^3 giebt es eben mehr als vier Tangenten an diese. Dagegen liefert die Vertauschbarkeit des Anfangs- und Endpunktes $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_{n+1}$:

2b) Zieht man im Falle von $n=2m+1$ Fundamentalpunkten $\mathfrak{a}$ nacheinander die Geraden:

$$\mathfrak{a}_1|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2|,\ \mathfrak{a}_2|\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3|,\ \dots,\ \mathfrak{a}_n|\mathfrak{p}_n\mathfrak{p}_{n+1}|,\quad |\mathfrak{a}_1\mathfrak{p}_{n+1}\mathfrak{p}_{n+2}|,\ \dots,\ \mathfrak{a}_n|\mathfrak{p}_{2n}\mathfrak{p}_{2n+1}|,$$

so fällt allemal der Punkt $\mathfrak{p}_{2n+1}$ in den Punkt $\mathfrak{p}_1$.

§ 3. Directe Beweise der Hauptsätze 1b) und 2b).

Der Satz *2b)* lässt sich für drei Fundamentalpunkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ in folgender Form aussprechen: „Schneidet man die C^3 aus zweien ihrer Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ mittels der Geraden:

$$\mathfrak{a}_1|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2|,\ \mathfrak{a}_2|\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3| \ \text{ und } \ \mathfrak{a}_1|\pi_1\pi_2|,\ \mathfrak{a}_2|\pi_2\pi_3|,$$

so treffen sich die Geraden $|\mathfrak{p}_1\pi_3|$ und $|\pi_1\mathfrak{p}_3|$ in einem Punkte $\mathfrak{a}_3$ der Curve." Denn es stellen die 2.3 Geraden

$$|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2|,\ |\mathfrak{p}_3\pi_1|,\ |\pi_2\pi_3| \ \text{ und } \ |\mathfrak{p}_1\pi_3|,\ |\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3|,\ |\pi_1\pi_2|$$

zwei zerfallende Curven dritter Ordnung vor. Die C^3 geht aber durch acht ihrer Schnittpunkte, nämlich durch $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$, $\pi_1\pi_2\pi_3$, folglich auch durch den neunten $(|\mathfrak{p}_1\pi_3|, |\pi_1\mathfrak{p}_3|)$.

Im Falle von n Fundamentalpunkten $\mathfrak{a}$ auf der C^3 construire man von zwei beliebigen Curvenpunkten $\mathfrak{p}_1$ und π_1 aus die gebrochenen Linien $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \dots$ und $\pi_1\pi_2, \dots$ Die wiederholte Anwendung des aufgestellten Hilfssatzes führt dann nach der Reihe zu folgenden neuen Curvenpunkten:

$$(|\mathfrak{p}_1\pi_3|, |\pi_1\mathfrak{p}_3|) = \mathfrak{o}_3,\quad (|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4|, |\pi_1\pi_4|) = \mathfrak{o}_4;$$
$$(|\mathfrak{p}_1\pi_5|, |\pi_1\mathfrak{p}_5|) = \mathfrak{o}_5,\quad (|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_6|, |\pi_1\pi_6|) = \mathfrak{o}_6,\ \dots$$

und, je nachdem n gerade oder ungerade, zu

$$(|\mathfrak{p}_1\pi_{n+1}|, |\pi_1\mathfrak{p}_{n+1}|) = \mathfrak{o}_{n+1} \quad \text{oder} \quad (|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_{n+1}|, |\pi_1\pi_{n+1}|) = \mathfrak{o}_{n+1}.$$

Verlegt man nun $\mathfrak{p}_1$ in einen solchen Punkt der Curve, für welchen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_{n+1}$ coincidiren, so wird der Punkt $\mathfrak{o}_{n+1}$

a) bei geradem n dritter Schnittpunkt der Curve mit der Geraden $(\pi_1\mathfrak{p}_1)$,

b) bei ungeradem n dritter Schnittpunkt der Curve mit der Tangente $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1)$.

Es folgt, dass im ersten Falle π_{n+1} mit π_1 allemal zusammenfällt, im zweiten Falle aber nur dann, wenn π_1 und $\mathfrak{p}_1$ conjugirte Punkte sind.

Setzt man im zweiten Falle die Construction der Punkte $\mathfrak{o}$ in bekannter Weise fort, so gelangt man nacheinander zu den folgenden Punkten:

$$\begin{aligned}
(|\mathfrak{p}_1 \pi_{n+2}|,\ |\pi_1 \mathfrak{p}_2|) &= \mathfrak{o}_{n+2},\\
(|\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_3|,\ |\pi_1 \pi_{n+3}|) &= \mathfrak{o}_{n+3},\\
(|\mathfrak{p}_1 \pi_{n+4}|,\ |\pi_1 \mathfrak{p}_4|) &= \mathfrak{o}_{n+4} \ldots \text{ und schliesslich}\\
(|\mathfrak{p}_1 \pi_{2n+1}|,\ |\pi_1 \mathfrak{p}_{n+1}|) &= \mathfrak{o}_{2n+1}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\mathfrak{p}_{n+1} \equiv \mathfrak{p}_1$$

ist, so wie vorhin, jetzt gleichfalls

$$\pi_{2n+1} \equiv \pi_1 .$$

Damit sind die beiden Fundamentalsätze bewiesen.

§ 4. Entwickelung der beiden Grundformen identischer Steiner'scher Systeme aus einem solchen von nur drei Fundamentalpunkten.

Der Charakter eines Polygons $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_{n+1}$ ist nach dem Hauptsatz 1 *a)* völlig unabhängig von der Wahl des Punktes $\mathfrak{p}_1$. Indem man nämlich diesen ein- für allemal auf C^3 festlegt, wird man mit dem System der Fundamentalpunkte $\mathfrak{a}$ auch sofort für alle diesem zugehörigen Polygone einen Repräsentanten besitzen. Da die Angabe eines Punktes denselben zugleich auch seiner Lage nach auf der Curve bestimmt, so wird die namentliche Aufzählung der Fundamentalpunkte in fester Reihenfolge System und Polygon eindeutig definiren. Dementsprechend fixirt das Symbol

$$\mathfrak{p}_1 \overline{\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n} \text{ das } (n+1)\text{-Eck } \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_{n+1}$$

und zwar ganz besonders die letzte Ecke $\mathfrak{p}_{n+1}$. Mit Rücksicht darauf soll gesetzt werden:

$$\mathfrak{p}_i \overline{\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_{i+1} \ldots \mathfrak{a}_k} = \overline{\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_{k+1}} . \cos \varphi_{i,k+1},$$

wo $\varphi_{i,k+1}$ die Neigung der Strecke $\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_{k+1}$ gegen eine feste Gerade der Ebene bezeichnet. Es gelten dann für das eingeführte Symbol nachstehende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}_1 \overline{\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n} &= \mathfrak{p}_1 \overline{\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_i} + \mathfrak{p}_{i+1} \overline{\mathfrak{a}_{i+1} \ldots \mathfrak{a}_n},\\
\mathfrak{p}_{n+1} \overline{\mathfrak{a}_n \ldots \mathfrak{a}_1} &= \mathfrak{p}_{n+1} \overline{\mathfrak{a}_n \ldots \mathfrak{a}_{i+1}} + \mathfrak{p}_i \overline{\mathfrak{a}_i \ldots \mathfrak{a}_1},\\
\mathfrak{p}_{n+1} \overline{\mathfrak{a}_n \ldots \mathfrak{a}_1} &+ \mathfrak{p}_1 \overline{\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n} = 0.
\end{aligned}$$

Soll nun das Polygon der Punkte $\mathfrak{p}$ ein Steiner'sches sein, so findet diese Forderung Ausdruck durch die Gleichung:

$$\mathfrak{p}_1 \overline{\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n} = 0.$$

Ist umgekehrt diese Beziehung erfüllt, so ist im Allgemeinen das Polygon ein Steiner'sches. Es ist dabei gleichgiltig, wie oft ein einzelner Fundamentalpunkt $\mathfrak{a}_i$ bei der Construction des Polygons verwerthet worden ist. Wenn seine verschiedenen Standorte dabei ungleiche Namen führen, so geschieht das lediglich der grösseren Einfachheit im Ausdrucke wegen.

Das Bestehen der Bedingung $\mathfrak{p}_1 \overline{\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n} = 0$ kann auf zwei wesentlich verschiedene Momente zurückgeführt werden:

1. auf die Zahlen α_i und die Anordnung der Punkte $\mathfrak{a}_i$, wie z. B. in $\overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1} = 0$* oder in $\overline{\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2} = 0$, oder endlich in $\overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3} = 0$;
2. auf die gegenseitige Lage der Fundamentalpunkte $\mathfrak{a}$, wie z. B. in $\overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4} = 0$.

Ein Steiner'sches System der ersten Art bezeichnen wir als identisches oder absolut reducibles System und bedienen uns für dasselbe des Zeichens $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n \equiv 0$; ein Steiner'sches System der zweiten Art fassen wir dagegen als Steiner'sches System schlechthin oder auch als absolut irreducibles System auf, $\overline{\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n} = 0$.

Aus dem bekannten identischen System

$$\overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3} \equiv 0 \equiv \overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3}^2$$

lassen sich leicht zwei Grundformen identischer Systeme im Fall von n Fundamentalpunkten $\mathfrak{a}$ ableiten.

Zunächst folgen aus demselben zwei wichtige Principien:

$$1.\quad \mathfrak{p}_1\overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3} + \mathfrak{p}_4\overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3} \equiv 0, \text{ folglich}$$
$$\mathfrak{p}_1\overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3} \equiv \mathfrak{p}_1\overline{\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1};$$
$$2.\quad \mathfrak{p}_1\overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2} + \mathfrak{p}_3\overline{\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3} \equiv 0, \text{ folglich}$$
$$\mathfrak{p}_1\overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2} \equiv \mathfrak{p}_1\overline{\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3}.$$

Mittels des ersten kann man ein System nach Belieben transformiren:

$$\overline{\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k\mathfrak{a}_l\cdots} \equiv \overline{\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_l\mathfrak{a}_k\mathfrak{a}_i\cdots},$$

mittels des zweiten kann man dasselbe nach Belieben erweitern:

$$\overline{\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_k\mathfrak{a}_l\cdots\mathfrak{a}_n} \equiv \overline{\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_x\mathfrak{a}_l\mathfrak{a}_k\mathfrak{a}_x\cdots\mathfrak{a}_n},$$

ohne dadurch den Charakter des Polygons der $\mathfrak{p}$ zu ändern.

Die wiederholte Anwendung dieser beiden Principien auf das identische System

$$\overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3}^2 \equiv 0$$

führt zu folgenden neuen:

1. $\overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3}^2 \equiv 0 \equiv \overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_3}$,
2. $\overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_3} \equiv 0 \equiv \overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5}^2$,
3. $\overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_6\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5} \equiv 0 \equiv \overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_6\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_6\mathfrak{a}_5}$ u. s. f.,

ganz allgemein

a) bei ungeradem n

$$\overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\cdots\mathfrak{a}_{n-1}\mathfrak{a}_n}^2 \equiv 0,$$

b) bei geradem n

$$\overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\cdots\mathfrak{a}_{n-1}\mathfrak{a}_n\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_n\mathfrak{a}_{n-1}} \equiv 0.$$

---

* Ich schreibe $\overline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1}$ für $\mathfrak{p}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1$, $\overline{\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2}$ für $\mathfrak{p}_1\overline{\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2}$ etc.

Im Fall eines Steiner'schen Systems schlechthin ist ein Fundamentalpunkt $\mathfrak{a}_i$ durch die Lage der $n-1$ übrigen bestimmt. Diese Bestimmung ist eine eindeutige, falls er in der Complexion $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_{n-1} \mathfrak{a}_n$ nur einmal auftritt.

§ 5. Kriterien für das identische und irreducible System.

Unter welchen Bedingungen definirt eine Complexion $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$, in welcher Wiederholungen desselben Elements $\mathfrak{a}_i$ möglich sind, ein identisches System? Zur Entscheidung dieser Frage dienen uns die im vorigen Paragraphen entwickelten beiden Principien, das der Transformation $\overline{\ldots \mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_l \ldots} \equiv \overline{\ldots \mathfrak{a}_l \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_i \ldots}$, das der Erweiterung $\overline{\ldots \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_l \ldots} \equiv \overline{\ldots \mathfrak{a}_x \mathfrak{a}_l \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_x \ldots}$; nur werden wir das letztere in entgegengesetztem Sinne anwenden.

Wir theilen die Elemente der Complexion in zwei Classen. Es gehören zu der ersten Classe die Elemente an ungerader Stelle, also $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_5 \ldots$, zu denen der zweiten Classe die Elemente an gerader Stelle, also $\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_4 \mathfrak{a}_6 \ldots$

Mittels des Princips 1. können zunächst zwei benachbarte, dann aber auch zwei ganz beliebige Punkte derselben Classe vertauscht werden und es kann so schliesslich jede Permutation der Elemente einer Classe hergestellt werden.

Zwei Elemente derselben Classe sind durch eine ungerade, zwei Elemente verschiedener Classen durch eine gerade Anzahl von Zwischenelementen getrennt. In letzterem Falle kann man durch wiederholte Transformation es dahin bringen, dass die betreffenden Elemente nebeneinander zu stehen kommen. So ergiebt sich beispielsweise

$$\overline{\ldots \mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_l \mathfrak{a}_m \mathfrak{a}_n \mathfrak{a}_i \ldots} \equiv \overline{\ldots \mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_l \mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_n \mathfrak{a}_m \ldots} \equiv \overline{\ldots \mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_l \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_n \mathfrak{a}_m \ldots}$$

Nunmehr aber kann man den Punkt $\mathfrak{a}_i$ ausscheiden wegen $\overline{\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_i} \equiv 0$ und es resultirt also

$$\overline{\ldots \mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_l \mathfrak{a}_m \mathfrak{a}_n \mathfrak{a}_i \ldots} \equiv \overline{\ldots \mathfrak{a}_l \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_n \mathfrak{a}_m \ldots}$$

Mittels dieses Verfahrens kann man demnach, wenn in der ersten Classe m_i- und in der zweiten n_i-Punkte $\mathfrak{a}_i$ stehen, die gesammten $(m_i + n_i)$-Punkte $\mathfrak{a}_i$ auf $|m_i - n_i|$ in nur einer Classe reduciren. Das System ist alsdann irreducibel bezüglich des Punktes $\mathfrak{a}_i$ und kann durch weitere Anwendung der Operationen 1. und 2. auf ein anderes Element rücksichtlich $\mathfrak{a}_i$ nicht wieder reducibel werden.

Ein bezüglich jedes einzelnen Fundamentalpunktes $\mathfrak{a}$ irreducibles System heisst absolut irreducibel. Man hat zu seiner Herstellung aus einem gegebenen folgende Methode.

Man bilde für jeden Punkt $\mathfrak{a}_i$ den Ueberschuss $|m_i - n_i|$ der einen Classe an Punkten $\mathfrak{a}_i$ über die andere und vertheile die überschüssigen Punkte der ersten Classe beliebig auf die ungeraden, die der zweiten beliebig auf die geraden Stellen der Reihe. Die resultirende Complexion $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ repräsentirt dann das gesuchte System. Die möglichen verschiedenen Formen desselben können vermöge des Transformationsprincips leicht ineinander übergeführt werden. Als Gesammtresultat können wir die folgenden beiden wichtigen Sätze aussprechen:

1. Eine Complexion $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n$ definirt ein identisches System, wenn in derselben jeder Punkt $\mathfrak{a}_i$ an gerader Stelle ebenso oft auftritt, als an ungerader, und nur dann.

2. Ein irreducibles System $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n$ definirt, gleich Null gesetzt, allemal eine Lagenbeziehung der Fundamentalpunkte.

Capitel II.

Die Steiner'schen Secantensysteme auf den Raumcurven vierter Ordnung beider Species.

§ 6. Princip der Uebertragung der Schliessungsprobleme von den ebenen Curven dritter Ordnung auf die Raumcurven vierter Ordnung erster und zweiter Species.

Ist ein System von n Secanten a_i $(i = 1 \dots n)$ einer C^4 und durch dieselben n Ebenen α_i derart gegeben, dass die erste α_1 willkürlich angenommen, die übrigen aber durch die Bedingung bestimmt sind, dass je zwei aufeinander folgende α_i und α_{i+1} durch denselben Punkt $\mathfrak{p}_{i+1}$ der C^4 gehen, so nenne ich das System ein Steiner'sches, wenn die erste und letzte Ebene, α_1 und α_{n+1}, die C^4 in demselben Punkte $\mathfrak{p}_1$ treffen.

Die Existenz Steiner'scher Secantensysteme auf einer C^4 lässt sich leicht wie folgt nachweisen. Man nehme auf der Raumcurve irgend einen Punkt $\mathfrak{o}$ an, projicire aus demselben die Punkte der Curve durch Strahlen und construire in dem resultirenden Projectionskegel $K^3_{\mathfrak{o}}$ der C^4 ein Steiner'sches System von n Strahlen, was mittels eines ebenen Schnittes des Kegels stets auf unendlich viele Arten möglich ist. Die zweiten Durchschnitte der betreffenden Strahlen $s_1 \dots s_n$ mit der C^4, nämlich die Punkte $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n$, verbinde man entsprechend zu einem einfachen n-Eck und construire in den n Projectionskegeln $K_{\mathfrak{a}_i}^3$ der C^4 aus den n Ecken $\mathfrak{a}_i$ diejenigen n Secanten a_i der C^4, welche den n Bedingungen genügen

$$\overline{|\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_{i-1}|,\ s_i,\ |\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_{i+1}|} a_i = 0 \quad (i = 1 \dots n),$$

dann bilden die n Strahlen a_i ein Steiner'sches Secantensystem der C^4.

In der That, denn ist $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n$ ein dem Strahlensystem $s_1 \dots s_n$ zugehöriges Steiner'sches Polygon der C^4, und wird letztere von der Ebene $[|\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_{i-1}| \mathfrak{p}_i]$ zum vierten Male in $\mathfrak{q}_i$ geschnitten, so schneidet die Secante $|\mathfrak{q}_i \mathfrak{q}_{i+1}|$ die Secante a_i, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

In ganz analoger Weise, wie aus dem Steiner'schen System $s_1 \ldots s_n = 0$ das andere $a_1 \ldots a_n = 0$ abgeleitet worden ist, kann man aus diesem das dritte $b_1 \ldots b_n = 0$ ableiten u. s. f.

§ 7. Directer Nachweis der Steiner'schen Secantensysteme auf den Raumcurven vierter Ordnung.

1. Sind $a_1 \ldots a_n$ n beliebige, aber feste Secanten der C^4 und sind durch dieselben n Ebenen gelegt, von denen die erste α_1 willkürlich, die übrigen aber dadurch bestimmt sind, dass je zwei aufeinanderfolgende α_{i-1} und α_i durch denselben Punkt $\mathfrak{p}_i$ gehen, so kommt es im Allgemeinen:

a) im Fall einer C_1^4 (erster Species) bei geradem n keinmal, bei ungeradem n viermal vor;

b) im Fall einer C_2^4 (zweiter Species) sowohl bei geradem, als bei ungeradem n zweimal vor,

dass die erste und die letzte Ebene α_1 und α_n durch denselben Punkt $\mathfrak{p}_1 \equiv \mathfrak{p}_{n+1}$ der C^4 gehen.

Beweis. Es bezeichne $\varphi(n)$ die Anzahl derjenigen Punkte π der C^4, in welchen zwei Punkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_{n+1}$ vereinigt liegen. Jeder Punkt π der C^4 ist zugleich auch Punkt der Regelfläche $R\,|\,\alpha_1\alpha_n\,|$ der Durchschnittsstrahlen der Paare veränderlicher Ebenen $\alpha_1\alpha_n$ und somit unter den Schnittpunkten der C^4 mit der R zu suchen.

Bedeutet u die Ordnung der Fläche R und v die Vielfachheit jeder der beiden mit Bezug hierauf offenbar gleichwerthigen Axen a_1 und a_n, so erkennt man, dass sich die Gesammtzahl $4u$ der Schnittpunkte der C^4 und der $R|\alpha_1\alpha_n|$ aus folgenden vier Zahlen zusammensetzt:

1. aus der Anzahl $4v$ der Schnittpunkte der C^4 mit den beiden Axen a_1 und a_n;
2. aus der Anzahl $2.\varphi(n-1)$ der coincidenten Punktepaare $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{n+1}$;
3. aus der Anzahl $\varphi(n-2)$ der coincidenten Punktepaare $\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_n$ und
4. aus der Anzahl $\varphi(n)$ der Punkte $\pi = \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_{n+1}$.

Es besteht somit zwischen den Zahlen u und v und den Functionen φ dreier Argumente n, $n-1$, $n-2$ die Relation:

$$4u = 4v + \varphi(n) + 2.\varphi(n-1) + \varphi(n-2).$$

Die Zahlen u und v lassen sich leicht mittels des Chasles'schen Correspondenzprincips bestimmen. Jeder Ebene α_1 entsprechen wegen der Vertauschbarkeit von $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ zwei Ebenen α_n und jeder Ebene α_n wegen der Vertauschbarkeit von $\mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{p}_{n+1}$ zwei Ebenen α_1. Demnach gehen auch durch jeden Punkt der Axen a_1 und a_n je zwei Schnittstrahlen $|\alpha_1\alpha_n|$. Es resultirt demnach $u = 4$, $v = 2$ und zur Bestimmung der Function φ die Recursionsformel

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= 8-2.\varphi(n-1)-\varphi(n-2) \text{ und hieraus}\\
\varphi(n-1) &= 8-2.\varphi(n-2)-\varphi(n-3) \text{ u. s. w.,}\\
\varphi(4) &= 8-2.\varphi(3) \quad -\varphi(2),\\
\varphi(3) &= 8-2.\varphi(2) \quad -\varphi(1).
\end{aligned}$$

Die Zahl $\varphi(n)$ ist also eine lineare Function der Zahlen $\varphi(2)$ und $\varphi(1)$, mit denen zugleich sie gegeben ist.

Wenn im Falle einer Secante a_1 der C^4 die veränderlichen Schnittpunkte $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ letzterer mit der veränderlichen Ebene α_1 in einen zusammenfallen, so muss α_1 Tangentialebene der Curve in diesem Punkte sein. Danach ergiebt sich die Zahl $\varphi(1)$:

1. für eine Raumcurve vierter Ordnung 1. Sp. $\varphi(1)=4$,
2. " " " " " 2. " $\varphi(1)=2$.

Wenn im Falle zweier Secanten $a_1 a_2$ der C^4 die Punkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_3$ coincidiren sollen, so müssen sich die Ebenen α_1 und α_2 in einer Secante $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2|=|\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_2|$ schneiden.

Liegt eine C^4 1. Sp. vor, so beschreibt die Secante $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ bei der Drehung von α_1 um a_1 die eine Geradenschaar einer Secantenfläche F^2 und es schneiden im Allgemeinen nur diejenigen zwei Strahlen derselben die Secante a_2, welche durch die beiden Schnittpunkte der C^4 und der a_2 gehen. Darnach stellt sich für eine C^4 1. Sp. die Zahl $\varphi(2)=0$.

Ist dagegen die C^4 von der zweiten Species, so beschreibt bei der Drehung von α_1 um a_1 der Strahl $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2|$ eine Secantenfläche der dritten Ordnung $F^3(a_1)$ und abgesehen von den beiden Strahlen derselben, welche durch die Schnittpunkte der C^4 und ihrer Secante a_2 gehen, schneidet nur noch ein dritter Strahl $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2|=|\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_2|$ die a_2. Wegen der noch hinzutretenden Vertauschbarkeit der Punkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ auf diesem Strahle ergiebt sich hieraus für die C^4 der zweiten Species die Zahl $\varphi(2)=2$.

Die Substitution der gefundenen beiden Werthsysteme

1) $\varphi(1)=4,\ \varphi(2)=0$; 2) $\varphi(1)=2,\ \varphi(2)=2$

in unsere obigen Functionalgleichungen liefert für jede der beiden Raumcurven ein besonderes System zugehöriger Zahlen $\varphi(\nu)$.

1. Für die C^4 1. Sp. ist $\varphi(1)=4$, $\varphi(2)=0$, $\varphi(3)=4$, $\varphi(4)=0$, …, $\varphi(2\nu-1)=4$, $\varphi(2\nu)=0$.

2. Für die C^4 2. Sp. ist $\varphi(1)=2$, $\varphi(2)=2$, $\varphi(3)=2$, $\varphi(4)=2$, …, $\varphi(\nu)=2$.

In Worten besagt dies

für die Raumcurve C^4 1. Sp.:

1*a)* Sind auf einer $C_1{}^4$ irgend n Secanten $a_1 \ldots a_n$ gegeben und ist zu diesen in bekannter Weise ein einfaches $(n+1)$-Eck $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_{n+1}$ construirt, so kommt es, je nachdem

für die Raumcurve $C_2{}^4$:

1*a)* Sind auf einer $C_2{}^4$ irgend n Secanten $a_1 \ldots a_n$ gegeben und ist zu diesen in bekannter Weise ein einfaches $(n+1)$-Eck $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_{n+1}$ construirt, so kommt es bei der Beschrei-

n eine gerade oder ungerade Zahl ist, bei der Beschreibung der Curve durch $\mathfrak{p}_1$ im Allgemeinen 0 oder viermal vor, dass sich das $(n+1)$-Eck der Punkte $\mathfrak{p}$ zu einem einfachen n-Eck schliesst, und folglich:

1 *b)* Tritt aber im Falle eines geraden n die Coincidenz des Punktes $\mathfrak{p}_{n+1}$ mit $\mathfrak{p}_1$ einmal ein, so tritt sie ein- für allemal, d. h. für jeden Punkt der C^4 ein.

bung der Curve durch den Punkt $\mathfrak{p}_1$ im Allgemeinen und höchstens zweimal vor, dass sich das $(n+1)$-Eck der Punkte $\mathfrak{p}$ zu einem einfachen n-Eck schliesst. Und folglich:

1 *b)* Tritt aber dabei die Coincidenz des Punktes $\mathfrak{p}_{n+1}$ mit $\mathfrak{p}_1$ dreimal ein, so tritt sie ein- für allemal, d. h. für jeden Punkt der Curve ein. In den beiden Fällen 1 *b)* ist also das System der n Secanten a ein Steiner-sches Secantensystem und jedes zugehörige n-Eck von Punkten $\mathfrak{p}$ ein Steiner'sches Polygon der C^4.

Für den Fall eines geraden n überzeugt man sich leicht von der Existenz Steiner'scher Secantensysteme sowohl auf einer C_1^4, als auf einer C_2^4.

2. Man verbinde irgend n Punkte der C_1^4 zu einem einfachen n-Eck $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_n$, lege durch seine n Seiten $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2|$, $|\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3|$, $\ldots$, $|\mathfrak{p}_n\mathfrak{p}_1|$ n Ebenen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ und schneide mittels derselben die C^4 in ebenso vielen Punktepaaren, so bestimmen ihre n Verbindenden $a_1, a_2 \ldots a_n$ ein Steiner'sches System der C_1^4.

2. Man verbinde irgend n Punkte der C_2^4 zu einem einfachen n-Eck $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_n$, nehme dann weiter eine feste Secante A auf der Curve an und construire diejenigen n Secanten $a_1, a_2 \ldots a_n$ der C_2^4, welche die Axe A und je eine der n Seiten $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2|$, $|\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3|$, $\ldots$, $|\mathfrak{p}_n\mathfrak{p}_1|$ des n-Ecks zugleich schneiden. Dann bestimmen die n Secanten a ein Steiner'sches System der C_2^4.

Es ist von Wichtigkeit für die Darstellung, wenn irgend zwei Secanten a_1, a_2 der C_2^4 vorliegen, für diejenige eine Secante der Curve, welche beiden zugleich begegnet, eine feste Bezeichnung zu haben. Ich will diese Secante durch $A|a_1 a_2| = |a_1 a_2|$ und die ihr als Axe zugehörige Secantenfläche der Curve durch $F^3|a_1 a_2|$ bezeichnen.

Sind im Falle eines ungeraden n sowohl auf einer C_1^4, als auf einer C_2^4 in ganz analoger Weise n Secanten $a_1 \ldots a_n$ construirt, und fasst man dieselben als ein System von $2.n$ Secanten $a_1 \ldots a_{2n}$ derart auf, dass man $a_{i+n} \equiv a_i$ $(i < n)$ nimmt, so liefert die Art der Construction sofort die beiden Sätze:

3. Irgend $n = 2m+1$ Secanten einer Raumcurve C_1^4 bestimmen ein Steiner'sches Secantensystem zweiter Ordnung $(a_1 \ldots a_n)^2 = 0$.

3. Irgend $n = 2m+1$ Strahlen einer Secantenfläche $F^3(A)$ der C_2^4 bestimmen ein Steiner-sches Secantensystem zweiter Ordnung $(a_1 \ldots a_n)^2 = 0$.

Dabei ist ganz allgemein unter einem Steiner'schen Secantensystem m^{ter} Ordnung von n Secanten $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n$ das System von $m.n$ Secanten $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_{mn}$ zu verstehen, in welchem, wenn $r < n < \varrho < m.n$ und $\varrho \equiv r . mod\, n$ ist, $a_\varrho = \mathfrak{a}_r$ ist.

§ 8. Die Steiner'schen Secantensysteme auf der Raumcurve vierter Ordnung erster Species.

Das Theorem 1*b)* des vorigen Paragraphen für die C^4 erster Species lautet in seiner einfachsten Form:

1. Schneidet man die C^4 aus den vier Seiten s_i eines ihr einbeschriebenen einfachen Vierecks $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4$, $s_i = |\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_{i+1}|$ durch irgend vier Ebenen σ_i noch in vier Punktepaaren, so bestimmen die durch dieselben fixirten vier Secanten t_i ein Steiner'sches System. Die Richtigkeit dieses Satzes erkennt man direct, indem man die Ebenen σ_i durch ein und denselben Curvenpunkt $\mathfrak{o}$ annimmt. Die vier resultirenden Secanten t'_i bilden in dem Projectionskegel der C^4 aus $\mathfrak{o}$ und folglich auch für die C^4 ein Steiner'sches System, und jedes diesem zugehörige Steiner'sche Polygon $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \mathfrak{p}_4 \mathfrak{p}_1$ ist auch dem System s_i umschrieben.

Es bezeichnen $\mathfrak{o}_2$ und $\mathfrak{o}_4$ die vierten Schnittpunkte resp. der Ebenen $[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3]$ und $[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_4 \mathfrak{a}_3]$ mit der C^4. Es wird dann diese von der Ebene $\sigma_1 = [s_1, \mathfrak{a}_3]$ noch in $\mathfrak{o}_2$, von $\sigma_2 = [s_2 \mathfrak{o}_2]$ noch in $\mathfrak{a}_1$, von $\sigma_3 = [s_3 \mathfrak{a}_1]$ noch in $\mathfrak{o}_4$, von $\sigma_4 = [s_4 \mathfrak{o}_4]$ noch in $\mathfrak{a}_3$ getroffen; d. h. aber:

2. Die vier Seiten s_i eines der C^4 einbeschriebenen einfachen Vierecks bestimmen ein Steiner'sches System, und es folgt:

3. Die vier Secanten t_1, t_2, t_3, t_4 eines Steiner'schen Systems werden allemal wieder von den vier Secanten s_1, s_2, s_3, s_4 eines zweiten geschnitten.

Als interessanter specieller Fall von 2. ist zu bemerken, dass, wenn das Viereck der Punkte $\mathfrak{a}$ ein ebenes ist, es auch alle ihm zugehörigen Vierecke der Punkte $\mathfrak{p}$ sind. Denn da $|\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2|$ und $|\mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4|$ auf einer Secantenfläche F^2 der C^4 zu verschiedenen Geradenschaaren gehören, so gilt das auch von $|\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2|$ und $|\mathfrak{p}_3 \mathfrak{p}_4|$, es müssen diese beiden Geraden sich folglich schneiden.

Die Sätze 2. und 3. lassen sich unmittelbar verallgemeinern. Es gilt:

4. Zu jedem der C^4 eingeschriebenen einfachen $2m$-Eck existiren unendlich viele andere, deren Ecken auf der C^4 liegen, und deren $2m$ Seiten die des gegebenen entsprechend schneiden. Und:

5. Die $2m$ Secanten $t_1 \dots t_{2m}$ eines Steiner'schen Systems werden allemal wieder von den $2m$ Secanten $s_1 \dots s_{2m}$ eines zweiten geschnitten.

Der Satz 4. liefert ein Kriterium dafür, ob ein gegebenes System von n Secanten $a_1 \dots a_n$ ein Steiner'sches ist oder nicht.

Man construire, ausgehend von irgend einem Punkte $\mathfrak{p}_1$ der C^4, der Reihe nach in den Flächen $F^2(a_1)$, $F^2(a_2)$, ..., $F^2(a_n)$, die n Strahlen $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2| = s_1$, $|\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3| = s_2$, ..., $|\mathfrak{p}_{n-1}\mathfrak{p}_n| = s_{n-1}$, $|\mathfrak{p}_n\mathfrak{p}_{n+1}| = s_n$. Schliesst sich das Polygon $s_1 s_2 \dots s_n$, so ist das System $a_1 \dots a_n$ ein Steiner'sches, im andern Falle nicht.

§ 9. Die Steiner'schen Secantensysteme auf der Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species.

Die Durchführung der den Betrachtungen des vorigen Paragraphen analogen für die C^4 zweiter Species erfordert die Ableitung einiger fundamentaler Sätze aus der Theorie dieser Curve.

1. Durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{o}$ des Raumes gehen im Allgemeinen und höchstens drei Doppelkanten der C_2^4.

Beweis. Die einzige durch die C_2^4 mögliche Fläche zweiter Ordnung $\overline{F^2}$ schneidet eine Secantenfläche $F^3(s)$ der Curve in der C_2^4 selbst und in zwei Geraden g aus einer ihrer beiden Schaaren, nämlich denjenigen beiden dreipunktig Schneidenden der C_2^4, welche durch die Schnittpunkte letzterer und der Secante s gehen. Der Projectionskegel vierter Ordnung K_0^4 der C_2^4 aus dem Punkte $\mathfrak{o}$ schneidet die $\overline{F^2}$ in der C_2^4 selbst und einer andern C'^4_2 gleicher Species, und es besitzt diese in Bezug auf die C_2^4 die drei- und einpunktig schneidenden Geraden der $\overline{F^2}$ selbst zu ein- und dreipunktig schneidenden. Die C'^4_2 schneidet den Durchschnitt sechster Ordnung der Flächen $\overline{F^2}$ und $F^3(s)$ in zwölf Punkten, nämlich die beiden Strahlen g in zwei, die C_2^4 in zehn Punkten. Vier dieser letzteren sind die vier Schnittpunkte der C_2^4 mit der Polarebene von $\mathfrak{o}$ beziehlich der $\overline{F^2}$, und die sechs übrigen vertheilen sich in drei Paaren auf den drei Doppelkanten der C_2^4 durch den Punkt $\mathfrak{o}$.

2. In einer Secantenfläche $F^3(X)$ der C_2^4 mit der Axe X schneiden sich die Ebenen der aus den Punkten von X ausgehenden Paare von Doppelkanten yz in einer zweiten festen Axe X_n der Fläche $F^3(X)$, der sogenannten Nebenaxe dieser Fläche, und es bestimmen die Strahlenpaare $y_i z_i$ auf derselben mittels ihrer Schnittpunkte $\mathfrak{y}_i \mathfrak{z}_i$ eine Involution.

Beweis. Zunächst ist klar, dass keine zwei Strahlen $y_i y_k$ oder $y_i z_k$ sich schneiden. Es würden sonst in einer Ebene $[X y_i y_k]$ oder $[X y_i z_k]$ sechs Schnittpunkte der C_2^4 liegen. Demnach hat die Schnittlinie zweier Ebenen $[y_i z_i]$ und $[y_k z_k]$ vier Punkte mit der $F^3(X)$ gemein, sie fällt also ganz in diese Fläche. Da aber die drei Geraden y_i, z_i, X_n den gesammten Durchschnitt dritter Ordnung der $F^3(X)$ und der Ebene $[y_i z_i]$ bilden, die Schnittpunkte der Strahlen $y_k z_k$ mit $[y_i z_i]$ nicht auf y_i und z_i liegen können, so folgt der erste Theil des Satzes

Durch einen Punkt $\mathfrak{y}_i$ von X_n geht allemal ein und nur ein Leitstrahl von $F^3(X)$, nämlich die Verbindende der beiden durch $\mathfrak{y}_i$ bestimmten Schnittpunkte der C_2^4 mit der Ebene $[X\mathfrak{y}_i]$, die Secante y_i. Die dritte Secante z_i durch den Schnittpunkt $(X_{\mathfrak{y}}\,i)$ trifft X_n im Punkte $\mathfrak{z}_i$. Da nun $\mathfrak{y}_i$ und $\mathfrak{z}_i$ in dieser Construction offenbar vertauschbar sind, so bilden die Paare $\mathfrak{y}_i\,\mathfrak{z}_i$ eine Involution.

Für die Doppelpunkte $\bar{\mathfrak{y}}\,\bar{\mathfrak{z}}$ dieser Involution coincidiren die Secantenpaare yz, und je nachdem $\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ reell oder imaginär sind, hat man aus X_n zwei reelle oder zwei imaginäre doppelt berührende Ebenen an die C_2^4.

3. Sind die n Secanten $X_1\,X_2 \ldots X_n$ der C_2^4 Axen eines Steiner'schen Systems, so sind es auch ihre n Nebenaxen X_{n1}, X_{n2}, ..., X_{nn}, sowie jede Combination aus n dieser $2n$ Strahlen, in welcher keine zwei Indices gleich sind und deren Anzahl demnach 2^n beträgt. Allen diesen Systemen gehört aber auf der C_2^4 ein und dasselbe System Steiner-scher Polygone zu.

4. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für ein Steinersches System von drei Secanten $X_1 X_2 X_3$ ist, dass dieselben die drei Diagonalen eines der C_2^4 einbeschriebenen Tetraeders $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4$ sind.

Beweis. Es sei $\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1$ ein der C_2^4 einbeschriebenes, dem Tripel $X_1 X_2 X_3$ umbeschriebenes Dreieck. Dann schneiden die beiden Ebenen $[X_2\mathfrak{x}_2]$ und $[X_3\mathfrak{x}_3]$ die Curve zu vierten Malen in zwei Punkten $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$. Diese liegen nach Voraussetzung mit X_1 und $\mathfrak{x}_1$ in einer Ebene, d. h. sie fallen beide in den vierten Schnittpunkt der C_2^4 mit der Ebene $[X_1\mathfrak{x}_1]$. Die drei Strahlen X_1, X_2, X_3 sind also die Diagonalen des Tetraeders $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4$.

Haben umgekehrt drei Secanten X_1, X_2, X_3 solche Lage, so sind die vier Seitendreiecke des Tetraeders vier ihnen um- und der C_2^4 eingeschriebene Steiner'sche Dreiecke.

5. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für ein Steinersches System von vier Secanten a_1, a_2, a_3, a_4, ein sogenanntes Steiner'sches Quadrupel, besteht darin, dass die a Leitstrahlen einer Secantenfläche $F^3(A)$ sind und ihnen ein einfaches Viereck der C_2^4 umschrieben ist.

Beweis. Es schneide die Axe $|a_1 a_2|$ der Fläche $F^3|a_1 a_2|$ die Curve in den beiden Punkten $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$, die Ebenen $[a_3\mathfrak{q}_1]$ und $[a_3\mathfrak{q}_2]$ treffen die C_2^4 zu vierten Malen in den Punkten $\mathfrak{q}_3$ und $\mathfrak{q}_4$. Dann müssen im Fall eines Steiner'schen Quadrupels die vierten Durchschnitte der C_2^4 mit den Ebenen $[a_4\mathfrak{q}_3]$ und $[a_4\mathfrak{q}_4]$ resp. in die Punkte $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ fallen, die einzig mögliche Axe $|a_3 a_4|$ der Fläche $F^3(a_3 a_4)$ muss also mit der Axe $|a_1 a_2|$ identisch sein.

Ist aber auch noch die zweite Bedingung erfüllt, so haben wir drei Vierecke der C_2^4:

$$\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_3\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2, \quad \mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_1, \quad \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4,$$

welche dem System $a_1 a_2 a_3 a_4$ umschrieben sind.

6. Auf die beiden Stammsysteme, das Secantentripel und das Secantenquadrupel, lässt sich jedes Steiner'sche Secantensystem einer C_2^4 zurückführen und aus der Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Reduction für irgend ein System von n Secanten der Curve schliesst man auf seinen Charakter.

Zunächst bestimmt man in dem System $s_1 \dots s_n$ die Axen u und v der Flächen $F^3|s_n s_{n-1}|$ und $F^3|s_{n-2} s_{n-3}|$ und die Axe w der Fläche $F^3|uv|$, und bestimmt man in den Flächen $F^3(u)$ und $F^3(v)$ diejenigen beiden Secanten t_{n-2} und t_{n-3}, welche den beiden Relationen genügen:

$$(s_n s_{n-1} w t_{n-2}) = 0 \quad \text{und} \quad (w s_{n-2} s_{n-3} t_{n-3}) = 0,$$

so ist das System $t_{n-2}\, t_{n-3}\, s_{n-4} \dots s_1$ ebenfalls ein Steiner'sches. In demselben ersetzen wir auf ganz analoge Weise die Folge der vier Strahlen $t_{n-2} t_{n-3} s_{n-4} s_{n-5}$ durch die Folge der beiden Strahlen $t_{n-4} t_{n-5} \dots$

Wir gelangen schliesslich zu einem Steiner'schen System *a)* von drei Secanten $t_3 t_2 s_1$, wenn n ungerade ist, *b)* von vier Secanten $t_4 t_3 s_2 s_1$, wenn n gerade ist. Im ersten Falle sind die drei Strahlen $t_3 t_2 s_1$ Strahlen eines Steiner'schen Tripels, im zweiten Falle sind die vier Strahlen $t_4 t_3 s_2 s_1$ Strahlen eines Steiner'schen Quadrupels. Umgekehrt, wenn eine von den beiden Beziehungen eintritt, ist das System der s ein Steiner'sches.

§ 10.

Ein wichtiger specieller Fall eines Steiner'schen Systems von vier Secanten sowohl auf der C_1^4, als auf der C_2^4 ist der folgende:

1. Es seien auf einer C^4 zwei Secanten s_1 und s gegeben. Dreht man um die eine s_1 eine Ebene und legt nach deren veränderlichen Schnittpunkten mit der C^4 aus der andern s zwei Ebenen, verbindet endlich die vierten Schnittpunkte letzterer mit der C^4 durch eine Gerade, so schneiden alle diese Geraden ein und dieselbe feste Secante s_2 der C^4. Im Falle einer C_2^4 sind die drei Secanten s_1, s, s_2 Strahlen ein und derselben Secantenfläche F^3.

Indem man diesen Satz der Reihe nach auf die einzelnen Axen eines Steiner'schen Systems $s_1 \dots s_n$ anwendet, gelangt man zu dem andern:

2. Ist auf einer C^4 ein Steiner'sches System $s_1 \dots s_n$ gegeben, und wird auf ihr eine Secante s beliebig angenommen, so projicirt man aus s die Steiner'schen Polygone $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n$ des ersten Systems $s_1 \dots s_n$ auf die C^4 als Steiner'sche Polygone $\mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_n$ eines zweiten Systems $t_1 \dots t_n$.

Für den Fall einer C_1^4 ergiebt sich hieraus und im Verein mit der Bemerkung, dass die n Seiten eines Polygons $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n$, resp. die aus n solchen Polygonen so ausgewählten n Seiten, dass keine zwei denselben Basisstrahl s schneiden, Axen eines Steiner'schen Secantensystems der C_1^4 sind, der folgende Satz:

3. Sind die n Secanten $s_1 = |\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1|$, $s_2 = |\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2|$, ..., $s_n = |\mathfrak{a}_n \mathfrak{b}_n|$ der C_1^4 Axen eines Steiner'schen Systems und projicirt man dieselben

aus einer beliebigen $(n+1)^{ten}$ Secante s der Curve auf diese in die n Secanten $|\mathfrak{a}'_i \mathfrak{b}'_i| = s'_i$ $(i = 1 \ldots n)$, so sind diese ebenfalls die Axen eines Steiner'schen Systems.

§ 11.

Die Steiner'schen Secantensysteme der C^4 beider Species scheiden sich zufolge des wichtigen Satzes $(s_1 s_2 s_3)^2 = 0$ in reducible und irreducible Systeme. Die absolute Analogie zwischen den hierauf bezüglichen Fragen und den entsprechenden bei den Curven dritter Ordnung in den §§ 4 und 5 gestattet die unmittelbare Uebertragung der dort gefundenen Resultate. Jedoch ist zu bemerken, dass, während sie bei den Raumcurven erster Species ganz allgemein gelten, sie im Falle einer C_2^4 nur auf die Secantensysteme in einer Secantenfläche $F^3(s)$ übertragbar sind.

(Schluss folgt.)

V.

Zerlegung einer Form $m$ter Ordnung und $n$ten Grades in ihre linearen Factoren.

Von

Leopold Schendel.

Denkt man sich die Grössen $\overline{a_1}$ und $\overline{a_2}$ mit dem Quotienten

$$\frac{a_1 \,..\, a_m \mid e_1 \,..\, e_m}{a_1 \,..\, a_m \mid e_1 \,..\, e_m}$$

verbunden, so ist unter der Voraussetzung

$$a_3 p = 0,\ \ldots,\ a_m p = 0$$

die Grösse

$$p = p\,\varepsilon_1 . e_1 + \ldots + p\,\varepsilon_m . e_m$$

in der Form

$$p = a_1 p . \overline{a_1} + a_2 p . \overline{a_2}$$

darstellbar und darnach die Form $m$ter Ordnung und $n$ten Grades

$$a^n p^n = \sum_0^n \binom{n}{\varkappa} a^n \overline{a_1}^{\,n-\varkappa}\, \overline{a_2}^{\,\varkappa} . a_1 p^{n-\varkappa}\, a_2 p^{\varkappa}.$$

Aus der Gleichung

$$a^n \overline{a_1}^{\,n-\lambda}\; a^n \overline{a_1}^{\,n-\varkappa}\, \overline{a_2}^{\,\varkappa-\lambda} \mid \overline{a_1}\, \overline{a_2}^{\,\lambda}$$
$$= \sum_0^{\lambda} (-1)^{\mu} \binom{\lambda}{\mu} a^n \overline{a_1}^{\,n-\mu}\, \overline{a_2}^{\,\mu}\; a^n \overline{a_1}^{\,n-\varkappa+\mu}\, \overline{a_2}^{\,\varkappa-\mu}$$

ergiebt sich für $\lambda = \varkappa - 1$ nach Multiplication mit $\left(a^n \overline{a_1}^{\,n}\right)^{\varkappa-2}$ für die Coefficienten dieser Darstellung die Gleichung

$$\left(a^n \overline{a_1}^{\,n}\right)^{\varkappa-1} a^n \overline{a_1}^{\,n-\varkappa}\, \overline{a_2}^{\,\varkappa} = \left(a^n \overline{a_1}^{\,n}\right)^{\varkappa-2} a^n \overline{a_1}^{\,n-\varkappa+1}\; a^n \overline{a_1}^{\,n-\varkappa}\, \overline{a_2} \mid \overline{a_1}\, \overline{a_2}^{\,\varkappa-1}$$
$$+ \sum_1^{\varkappa-1} (-1)^{\mu-1} \binom{\varkappa-1}{\mu} \left(a^n \overline{a_1}^{\,n}\right)^{\mu-1} a^n \overline{a_1}^{\,n-\mu}\, \overline{a_2}^{\,\mu}$$
$$. \left(a^n \overline{a_1}^{\,n}\right)^{\varkappa-\mu-1} a^n \overline{a_1}^{\,n-\varkappa+\mu}\, \overline{a_2}^{\,\varkappa-\mu}.$$

Ihr zufolge ist die Grösse

$$\left(a^n \overline{a_1}^{\,n}\right)^{\varkappa-1} a^n \overline{a_1}^{\,n-\varkappa}\, \overline{a_2}^{\,\varkappa}$$

eine ganze rationale Function der $\varkappa$ Formen

$$\left(a^n \overline{a_1}^{\,n}\right)^{\lambda-2} a^n \overline{a_1}^{\,n-\lambda+1}\; a^n \overline{a_1}^{\,n-\lambda}\, \overline{a_2} \mid \overline{a_1}\, \overline{a_2}^{\,\lambda-1}, \quad \lambda = 1,\ \ldots,\ \varkappa,$$

und zwar stellt sie sich als ein Aggregat von Gliedern dar, die man, abgesehen von den Coefficienten, dadurch erhält, dass man die $\varkappa$ Formen bezw. mit den Potenzexponenten $r_1, \ldots, r_\varkappa$ versieht, sie zu einem Producte vereinigt und den Grössen $r_1, \ldots, r_\varkappa$ alle diejenigen Werthe, den Werth Null mit eingeschlossen, beilegt, durch welche der Gleichung

$$1 r_1 + \ldots + \varkappa r_\varkappa = \varkappa$$

genügt wird.

Die Form

$$\left(a^n \overline{a_1}^{\,n}\right)^{\lambda-2} a^n \overline{a_1}^{\,n-\lambda+1}\, a^n \overline{a_1}^{\,n-\lambda}\, \overline{a_2} \mid \overline{a_1}\, \overline{a_2}^{\,\lambda-1},$$

in der die Grösse $\overline{a_1}\,\overline{a_2}$ ein combinatorisches Product ist und daher selbst an Stelle der Factoren mit dem eingangs gegebenen Quotienten vereint gedacht werden kann, kann unter Beibehaltung dieser Eigenschaft, da sie bei Vertauschung von $a^n \overline{a_1}^{\,n-\lambda+1}$ und $a^n \overline{a_1}^{\,n-\lambda}\, \overline{a_2}$ bei ungeradem λ unverändert ihren Werth beibehält und bei geradem λ das entgegengesetzte Zeichen annimmt, bei ungeradem λ in der Form

$$2\left(a^n \overline{a_1}^{\,n}\right)^{\lambda-2} (a^n)^2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2}^{\,\lambda-1}\, \overline{a_1}^{\,2n-2\lambda+1}\, \overline{a_2}$$

und bei geradem λ in der Form

$$\left(a^n \overline{a_1}^{\,n}\right)^{\lambda-2} (a^n)^2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2}^{\,\lambda}\, \overline{a_1}^{\,2n-2\lambda}$$

dargestellt werden.

Die Grösse

$$\left(a^n \overline{a_1}^{\,n}\right)^{\varkappa-1} a^n \overline{a_1}^{\,n-\varkappa}\, \overline{a_2}^{\,\varkappa}$$

ist daher eine ganze rationale Function der $\varkappa$ ersten der n Formen

$$a^n \overline{a_1}^{\,n-1}\, \overline{a_2},$$

$$\left(a^n \overline{a_1}^{\,n}\right)^0 (a^n)^2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2}^{\,2}\, \overline{a_1}^{\,2n-4}, \quad \left(a^n \overline{a_1}^{\,n}\right)^1 (a^n)^2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2}^{\,2}\, \overline{a_1}^{\,2n-5}\, \overline{a_2},$$

$$\left(a^n \overline{a_1}^{\,n}\right)^2 (a^n)^2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2}^{\,4}\, \overline{a_1}^{\,2n-8}, \quad \left(a^n \overline{a_1}^{\,n}\right)^3 (a^n)^2\, \overline{a_1}\, \overline{a_1}^{\,4}\, \overline{a_1}^{\,2n-9}\, \overline{a_2}, \ldots$$

Setzt man die erste dem Werthe $\lambda = 1$ entsprechende Form

$$a^n \overline{a_1}^{\,n-1}\, \overline{a_2} = 0,$$

so ist infolge der Gleichung $a_1 \overline{a_2} = 0$

$$a_1 \equiv a^n \overline{a_1}^{\,n-1}$$

oder demzufolge

$$a_1 = \frac{a^n \overline{a_1}^{\,n-1}}{a^n \overline{a_1}^{\,n}}.$$

In diesem Falle nimmt daher unter Berücksichtigung der Gleichung

$$\overline{a_2} = -\, a_1 \overline{a_1}\, \overline{a_2}$$

die Grösse

$$\left(a^n \overline{a_1}^{\,n}\right)^{\varkappa-1} a^n \overline{a_1}^{\,n-\varkappa}\, \overline{a_2}^{\,\varkappa}$$

die Form

$$(-1)^\varkappa \left(a^n \overline{a}_1^{\,n}\right)^{-1} a^n \overline{a}_1^{\,n-\varkappa} \left(a^n \overline{a}_1^{\,n-1}\, \overline{a}_1 \overline{a}_2\right)^\varkappa$$

an und ist eine ganze rationale Function der $\varkappa - 1$ ersten der $n-1$ Formen

$$\left(a^n\overline{a}_1^{\,n}\right)^0 (a^n)^2\, \overline{a}_1\overline{a}_2^{\,2}\,\overline{a}_1^{\,2n-4}, \quad \left(a^n\overline{a}_1^{\,n}\right)^0 a^n (a^n)^2\, \overline{a}_1\overline{a}_2^{\,2}\,\overline{a}_1\overline{a}_2\overline{a}_1^{\,3n-6},$$
$$\left(a^n\overline{a}_1^{\,n}\right)^2 (a^n)^2\, \overline{a}_1\overline{a}_2^{\,4}\,\overline{a}_1^{\,2n-8}, \quad \left(a^n\overline{a}_1^{\,n}\right)^2 a^n (a^n)^2\, \overline{a}_1\overline{a}_2^{\,4}\,\overline{a}_1\overline{a}_2\overline{a}_1^{\,3n-10}, \ldots$$

Sie hat für $\varkappa = 0$ den Werth Eins und für $\varkappa = 1$ den Werth Null und stellt für die folgenden Werthe von $\varkappa$ die Formen

$$(a^n)^2\, \overline{a}_1\overline{a}_2^{\,2}\,\overline{a}_1^{\,2n-4},$$
$$2a^n (a^n)^2\, \overline{a}_1\overline{a}_2^{\,2}\,\overline{a}_1\overline{a}_2\overline{a}_1^{\,3n-6},$$
$$\left((a^n)^2 . (a^n)^2\, \overline{a}_1\overline{a}_2^{\,4} - 3\left((a^n)^2\,\overline{a}_1\overline{a}_2^{\,2}\right)^2\right)\overline{a}_1^{\,4n-8},$$
$$2\left((a^n)^2 . a^n (a^n)^2\, \overline{a}_1\overline{a}_2^{\,4}\,\overline{a}_1\overline{a}_2 - 2(a^n)^2\,\overline{a}_1\overline{a}_2^{\,2} . a^n (a^n)^2\, \overline{a}_1\overline{a}_2^{\,2}\,\overline{a}_1\overline{a}_2\right)\overline{a}_1^{\,5n-10},$$
$$\Big((a^n)^4 . (a^n)^2\, \overline{a}_1\overline{a}_2^{\,6} - 15(a^n)^2\,\overline{a}_1\overline{a}_2^{\,2} . (a^n)^2 . (a^n)^2\,\overline{a}_1\overline{a}_2^{\,4} + 45\left((a^n)^2\,\overline{a}_1\overline{a}_2^{\,2}\right)^3$$
$$+ 40\, a^n (a^n)^2\, \overline{a}_1\overline{a}_2^{\,2}\,\overline{a}_1\overline{a}_2^{\,2}\Big)\overline{a}_1^{\,6n-12},$$
$$2\Big((a^n)^4 . a^n (a^n)^2\, \overline{a}_1\overline{a}_2^{\,6}\,\overline{a}_1\overline{a}_2 - 9(a^n)^2\,\overline{a}_1\overline{a}_2^{\,2} . (a^n)^2 . a^n (a^n)^2\, \overline{a}_1\overline{a}_2^{\,4}\,\overline{a}_1\overline{a}_2$$
$$+ 5\, a^n (a^n)^2\, \overline{a}_1\overline{a}_2^{\,2}\,\overline{a}_1\overline{a}_2 . (a^n)^2 . (a^n)^2\, \overline{a}_1\overline{a}_2^{\,4} + 3\left((a^n)^2\,\overline{a}_1\overline{a}_2^{\,2}\right)^2$$
$$. a^n (a^n)^2\, \overline{a}_1\overline{a}_2^{\,2}\,\overline{a}_1\overline{a}_2\Big)\overline{a}_1^{\,7n-14}, \ldots$$

dar. Und für die Form $a^n p^n$ gilt unter der gemachten Voraussetzung $a_3 p = 0, \ldots, a_m p = 0$ oder

$$p = a_1 p . \overline{a}_1 + a_2 p . \overline{a}_2$$

die Gleichung

$$\left(a^n \overline{a}_1^{\,n}\right)^{n-1} a^n p^n$$
$$= \sum_0^n (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} \left(a^n \overline{a}_1^{\,n}\right)^{-1} a^n \overline{a}_1^{\,n-\varkappa} \left(a^n \overline{a}_1^{\,n-1}\, \overline{a}_1 \overline{a}_2\right)^\varkappa . \left(a^n \overline{a}_1^{\,n-1} p\right)^{n-\varkappa} a_2 p^\varkappa.$$

Berücksichtigt man, dass die Grösse

$$\left(a^n \overline{a}_1^{\,n}\right)^{-1} a^n \overline{a}_1^{\,n-\varkappa} \left(a^n \overline{a}_1^{\,n-1}\, \overline{a}_1 \overline{a}_2\right)^\varkappa$$

sich multiplicativ aus den drei Grössen a^n, $\overline{a}_1\overline{a}_2$, $\overline{a}_1$ zusammensetzt und bei dieser Zusammensetzung die ersteren zwei Grössen $\varkappa$ mal und die dritte Grösse $(n-2)\varkappa$ mal als Factoren betheiligt sind, so folgt aus der Form dieser Gleichung, dass die n linearen Formen, deren Product die Grösse

$$\left(a^n \overline{a}_1\right)^{n-1} a^n p^n$$

ist, die Form

$$\left(a^n \overline{a}_1^{\,n-1} + w_n a_2\right) p$$

haben, in der die Grösse w_n eine $n$werthige Grösse ist, bei deren Zusammensetzung nur die Grössen

$$a^n,\ \overline{a}_1\overline{a}_2,\ \overline{a}_1$$

und zwar die ersteren zwei 1mal und die dritte $(n-2)$ mal als Factoren betheiligt sind, und deren n Werthe $w_{n,1}, \ldots, w_{n,n}$ die Eigenschaft besitzen, dass die Summe ihrer Combinationen zu je $\varkappa$ für $\varkappa = 0, \ldots, n$ den Werth

$$(-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} \left(a^n \overline{a}_1^{\,n}\right)^{-1} a^n \overline{a}_1^{\,n-\varkappa} \left(a^n \overline{a}_1^{\,n-1}\, \overline{a}_1 \overline{a}_2\right)^\varkappa$$

hat, und somit die Wurzeln der Gleichung $n$ten Grades

$$\sum_0^n \binom{n}{\varkappa} \left(a^n \overline{a}_1^{\,n}\right)^{-1} a^n \overline{a}_1^{\,n-\varkappa} \left(a^n \overline{a}_1^{\,n-1}\, \overline{a}_1 \overline{a}_2\right)^\varkappa w_n^{\,n-\varkappa} = 0$$

sind.

Lösen wir von der Form der Grösse w_n die Grössen a^n, $\overline{a}_1\overline{a}_2$, $\overline{a}_1$ ab und bezeichnen sozusagen das Gerippe derselben durch ω_n, so stellen sich bei Berücksichtigung der Gleichung

$$\overline{a}_1 = a_2\, \overline{a}_1 \overline{a}_2$$

die n linearen Formen in der Form

$$(1+\omega_n)\, a^n \overline{a}_1^{\,n-1}\, p$$

dar.

Die Verschwindungsgrössen der linearen Form ap haben die Form

$$p \equiv a\, \overline{a}_1 \overline{a}_2$$

und sind durch die Gleichungen

$$ap = 0,\quad a_3 p = 0,\quad \ldots,\quad a_m p = 0$$

bestimmt.

Die Verschwindungsgrössen der Form $a^n p^n$ stellen sich daher in der Form

$$p \equiv a^n \overline{a}_1^{\,n-1}\, \overline{a}_1 \overline{a}_2 + w_n \overline{a}_1$$

oder

$$p \equiv (1+\omega_n)\, a^n \overline{a}_1^{\,n-1}\, \overline{a}_1 \overline{a}_2$$

dar. Sie sind zugleich Verschwindungsgrössen der $m-2$ beliebigen linearen Formen $a_3 p, \ldots, a_m p$.

Einfach gestaltet sich die Bestimmung der Grösse w_n, die für $n=1$ offenbar den Werth Null hat, für $n = 2, 3, 4$.

1. Die Grösse

$$(-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} \left(a^n \overline{a}_1^{\,n}\right)^{-1} a^n \overline{a}_1^{\,n-\varkappa} \left(a^n \overline{a}_1^{\,n-1}\, \overline{a}_1 \overline{a}_2\right)^\varkappa,$$

welche die Summe der Combinationen ihrer n Werthe zu je $\varkappa$ für $\varkappa = 0, \ldots, n$ darstellt, nimmt für $n=2$ die Werthe

$$1,\ 0,\ (a^2)^2\, \overline{a}_1 \overline{a}_2^{\,2}$$

an, und es ist daher die zur quadratischen Form gehörige Grösse

$$w_2 = \sqrt[2]{-(a^2)^2\, \overline{a}_1 \overline{a}_2^{\,2}}\,;$$

ihre beiden Werthe erhält man dadurch, dass man der Quadratwurzel die Factoren $+1$ und -1 beifügt.

2. Für $n=3$ hat jene Grösse die Werthe

$$1,\ 0,\ 3(a^3)^2\, \overline{a}_1 \overline{a}_2^{\,2}\, \overline{a}_1^{\,2},\quad 2a^3 (a^3)^2\, \overline{a}_1 \overline{a}_2^{\,2}\, \overline{a}_1 \overline{a}_2\, \overline{a}_1^{\,3}.$$

Aus der Gleichung

$$\left((a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\right)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2} = (a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\,\overline{a_1}^{2}\,.\,(a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\,\overline{a_2}^{2} - \left((a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}\right)^2$$

ergiebt sich, wenn man die Gleichungen

$$(a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\,\overline{a_1}^{2} = a^3\overline{a_1}^{3}\,.\,a^3\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}, \quad (a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\,\overline{a_2}^{2} = -\left(a^3\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\right)^2$$

und

$$a^3\overline{a_1}^{3}\,.\,(a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\,\overline{a_1}\,\overline{a_2} = a^3(a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{a_1}^{3}$$

berücksichtigt, die Relation

$$\left(a^3(a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{a_1}^{3}\right)^2 + \left((a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\,\overline{a_1}^{2}\right)^3$$
$$+\left((a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\right)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\,.\left(a^3\overline{a_1}^{3}\right)^2 = 0.$$

Giebt man ihr die Form

$$-\left((a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\,\overline{a_1}^{2}\right)^3$$
$$= \left(a^3(a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{a_1}^{3}\right)^2 + \left((a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\right)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\,.\left(a^3\overline{a_1}^{3}\right)^2,$$

so bilden die rechts stehenden Glieder eine quadratische Form mit den Coefficienten

$$1,\ 0,\ \left((a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\right)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2},$$

für welche

$$w_2 = \sqrt[2]{-\left((a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\right)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}}$$

oder

$$w_2\,.\,a^3\overline{a_1}^{3} = \sqrt[2]{\left(a^3(a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{a_1}^{3}\right)^2 + \left((a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\,\overline{a_1}^{2}\right)^3}$$

ist, und es gilt daher die Gleichung

$$-(a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\,\overline{a_1}^{2}$$
$$= \sqrt[3]{a^3(a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{a_1}^{3} + w_{2,1}\,.\,a^3\overline{a_1}^{3}}\,.\,\sqrt[3]{a^3(a^3)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{2}\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{a_1}^{3} + w_{2,2}\,.\,a^3\overline{a_1}^{3}},$$

in der offenbar, wenn σ eine complexe dritte Wurzel der positiven Einheit ist, den Cubikwurzeln die Factoren $1, 1$; σ, σ^2; σ^2, σ beigefügt werden können. Nun haben die Grössen

$$v_1 + v_2, \quad \sigma v_1 + \sigma^2 v_2, \quad \sigma^2 v_1 + \sigma v_2$$

infolge der Gleichungen

$$\sigma^3 = 1, \quad 1 + \sigma + \sigma^2 = 0$$

die Eigenschaft, dass die Summen ihrer Combinationen zu je $0, \ldots, 3$ die Werthe

$$1,\ 0,\ -3v_1v_2,\ v_1^3 + v_2^3$$

haben. Werden durch v_1 und v_2 jene Cubikwurzeln bezeichnet, so stimmen diese Werthe mit den eingangs gegebenen Werthen überein, und es ist folglich die zur cubischen Form gehörige Grösse

$$w_3 = \sqrt[3]{a^3 (a^3)^2 \overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;\overline{a_1}\,\overline{a_2}\;\overline{a_1}^3 + w_{2,1}\cdot a^3\,\overline{a_1}^3}$$
$$+ \sqrt[3]{a^3 (a^3)^2 \overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;\overline{a_1}\,\overline{a_2}\;\overline{a_1}^3 + w_{2,2}\,.\,a^3\,\overline{a_1}^3},$$

wenn ihre drei Werthe dadurch bestimmt werden, dass man den Cubikwurzeln die Factoren

$$1,\ 1;\quad \sigma,\ \sigma^2;\quad \sigma^2,\ \sigma$$

beifügt.

3. Für $n = 4$ hat die in Betracht kommende Grösse die Werthe

$$1,\ 0,\ 6(a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;\overline{a_1}^4,\quad 8a^4(a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;\overline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{a_1}^6,$$
$$(a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^4\,.\,\left(a^4\,\overline{a_1}^4\right)^2 - 3\left((a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;\overline{a_1}^4\right)^2.$$

Für die Grösse

$$a^4(a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;\overline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{a_1}^6 = a^4\,\overline{a_1}^4\,.\,(a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;\overline{a_1}^3\,\overline{a_2}$$

gilt, da offenbar

$$a^4\,\overline{a_1}^4\,.\,(a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;\overline{a_1}^3\,\overline{a_2} = -(a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;a^4\left|\,\overline{a_1}^4\left(\overline{a_1}^3\,\overline{a_2}\right)\right.,$$

ferner

$$a^4\,\overline{a_1}^4\,.\,a^4\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}^3 = 2(a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;\overline{a_1}^3\,\overline{a_2}$$

und den Gleichungen

$$(a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;\overline{a_1}^4 = a^4\,\overline{a_1}^4\,.\,a^4\,\overline{a_1}^2\,\overline{a_2}^2,\quad (a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;\overline{a_2}^4 = a^4\,\overline{a_1}^2\,\overline{a_2}^2\,.\,a^4\,\overline{a_2}^4 - \left(a^4\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}^3\right)^2$$

zufolge

$$a^4\,\overline{a_1}^4\,.\,\left(a^4\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}^3\right)^2 = (a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;a^4\left|\,\overline{a_1}^4\,\overline{a_2}^4\right.$$

ist, die Gleichung

$$12\left((a^4)^2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;\overline{a_1}^3\,\overline{a_2}\right)^2$$
$$= (a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;a^4\left|\left(-4\,\overline{a_1}^4\left(\overline{a_1}^3\,\overline{a_2}\right).\,a^4\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}^3 + \overline{a_1}^4\,\overline{a_2}^4\,.\,a^4\,\overline{a_1}^4\right)\right.,$$

und für die Grösse

$$(a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;\overline{a_1}^4 = a^4\,\overline{a_1}^4\,.\,a^4\,\overline{a_1}^2\,\overline{a_2}^2$$

hat man, da nach der Gleichung

$$3(a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;\overline{a_1}^2\,\overline{a_2}^2 = \left(a^4\,\overline{a_1}^2\,a^4\,\overline{a_2}^2 + 2\left(a^4\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}\right)^2\right)\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2$$

einerseits

$$6(a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;\overline{a_1}^2\,\overline{a_2}^2 = a^4\,\overline{a_1}^4\,a^4\,\overline{a_2}^4 - 3\left(a^4\,\overline{a_1}^2\,\overline{a_2}^2\right)^2$$

und andererseits

$$(a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^4 = a^4\,\overline{a_1}^4\,a^4\,\overline{a_2}^4 + 3\left(a^4\,\overline{a_1}^2\,\overline{a_2}^2\right)^2,$$

und demnach

$$6\left(a^4\,\overline{a_1}^2\,\overline{a_2}^2\right)^2 - (a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^4 = -6(a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;\overline{a_1}^2\,\overline{a_2}^2$$

ist, die Gleichung

$$12(a^4)^2\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;\overline{a_1}^4\,.\left(a^4\,\overline{a_1}^2\,\overline{a_2}^2\right)^2 - (a^4)^2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}^4\,.\,(a^4)^2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;\overline{a_1}^4$$
$$= (a^4)^2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}^2\;a^4\left|\,6\,\overline{a_1}^4\left(\overline{a_1}^2\,\overline{a_2}^2\right).\,a^4\,\overline{a_1}^2\,\overline{a_2}^2\right..$$

Da nun das combinatorische Product

$$a_1{}^4\left(a^4\,|\,\overline{a_1\,a_2}^{\,4}\right)=-4\overline{a_1}^{\,4}\left(\overline{a_1}^{\,3}\,\overline{a_2}\right).a^4\,\overline{a_1\,a_2}^{\,3}+6\overline{a_1}^{\,4}\left(\overline{a_1}^{\,2}\,\overline{a_2}^{\,2}\right).a^4\,\overline{a_1}^{\,2}\,\overline{a_2}^{\,2}+\overline{a_1}^{\,4}\,\overline{a_2}^{\,4}\,.\,a^4\,\overline{a_1}^{\,4}$$

ist, so hat also die Grösse

$$12\left((a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,3}\,\overline{a_2}\right)^2+12\,(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,4}.\left(a^4\,\overline{a_1}^{\,2}\,\overline{a_2}^{\,2}\right)^2$$
$$-(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,4}.(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,4}$$

den Werth

$$(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,a^4\,|\,\overline{a_1}^{\,4}\left(a^4\,|\,\overline{a_1\,a_2}^{\,4}\right)$$

oder

$$2\,(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,4}.(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,4}-(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,a^4\,|\,\overline{a_1\,a_2}^{\,4}.a^4\,\overline{a_1}^{\,4}$$

und es ist somit

$$12\left((a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,3}\,\overline{a_2}\right)^2+12\,(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,4}.\left(a^4\,\overline{a_1}^{\,2}\,\overline{a_2}^{\,2}\right)^2$$
$$-3\,(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,4}.(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,4}+(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,a^4\,|\,\overline{a_1\,a_2}^{\,4}.a^4\,\overline{a_1}^{\,4}=0.$$

Demnach gilt die Relation

$$4\left(a^4(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,\overline{a_1\,a_2\,a_1}^{\,6}\right)^2+4\left((a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,4}\right)^3$$
$$-(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,4}.\left(a^4\,\overline{a_1}^{\,4}\right)^2.(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,4}+\tfrac{1}{3}(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,a^4\,|\,\overline{a_1\,a_2}^{\,4}.\left(a^4\,\overline{a_1}^{\,4}\right)^3=0.$$

Giebt man ihr die Form

$$\left(a^4(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,\overline{a_1\,a_2\,a_1}^{\,6}\right)^2$$
$$=\left(-(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,4}\right)^3-(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,4}.\left(-(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,4}\right)\left(\tfrac{1}{2}a^4\,\overline{a_1}^{\,4}\right)^2$$
$$-\tfrac{2}{3}(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,a^4\,|\,\overline{a_1\,a_4}^{\,4}.\left(\tfrac{1}{2}a^4\,\overline{a_1}^{\,4}\right)^3,$$

so bilden die rechts stehenden Glieder eine cubische Form mit den Coefficienten

$$1,\ 0,\ -(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,4},\ -\tfrac{2}{3}(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,a^4\,|\,\overline{a_1\,a_2}^{\,4},$$

für welche

$$w_3=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{3}(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,a^4\,|\,\overline{a_1\,a_2}^{\,4}+\sqrt[2]{\left(\tfrac{1}{3}(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,a^4\,|\,\overline{a_1\,a_2}^{\,4}\right)^2-\left(\tfrac{1}{3}(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,4}\right)^3}}$$
$$+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{3}(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,a^4\,|\,\overline{a_1\,a_2}^{\,4}-\sqrt[2]{\left(\tfrac{1}{3}(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,a^4\,|\,\overline{a_1\,a_2}^{\,4}\right)^2-\left(\tfrac{1}{3}(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,4}\right)^3}}$$

ist, und es gilt daher die Gleichung

$$a^4(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,\overline{a_1\,a_2\,a_1}^{\,6}=\sqrt[2]{-(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,4}+\tfrac{1}{2}w_{3,1}.a^4\,\overline{a_1}^{\,4}}\,.$$
$$\sqrt[2]{-(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,4}+\tfrac{1}{2}w_{3,2}.a^4\,\overline{a_1}^{\,4}}\,.\sqrt[2]{-(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,4}+\tfrac{1}{2}w_{3,3}.a^4\,\overline{a_1}^{\,4}},$$

in der den Quadratwurzeln, deren Zeichen offenbar das der Form

$$a^4(a^4)^2\,\overline{a_1\,a_2}^{\,2}\,\overline{a_1\,a_2\,a_1}^{\,6}$$

ist, die Factoren $+1, +1, +1;\ +1, -1, -1;\ -1, +1, -1;\ -1, -1, +1$ beigefügt werden können. Nun haben die Grössen

$$+v_1+v_2+v_3,\quad +v_1-v_2-v_3,\quad -v_1+v_2-v_3,\quad -v_1-v_2+v_3$$

die Eigenschaft, dass die Summen ihrer Combinationen zu je 0, .., 4 die Werthe

$$1,\ 0,\ -2(v_1^2+v_2^2+v_3^2),\ 8v_1v_2v_3,$$
$$(v_1^2+v_2^2+v_3^2)^2-4(v_1^2v_2^2+v_1^2v_3^2+v_2^2v_3^2)$$

haben. Werden durch v_1, v_2, v_3 jene Quadratwurzeln bezeichnet, so stimmen diese Werthe mit den eingangs gegebenen Werthen überein, und es ist folglich die zur biquadratischen Form gehörige Grösse

$$w_4=\sqrt[2]{-(a^4)^2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,4}+\tfrac12 w_{3,1}.a^4\overline{a_1}^{\,4}}+\sqrt[2]{-(a^4)^2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,4}+\tfrac12 w_{3,2}.a^4\overline{a_1}^{\,4}}$$
$$+\sqrt[2]{-(a^4)^2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,4}+\tfrac12 w_{3,3}.a^4\overline{a_1}^{\,4}},$$

wenn ihre vier Werthe dadurch bestimmt werden, dass man den Quadratwurzeln, denen das Zeichen der Form

$$a^4(a^4)^2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{a_1}^{\,6}$$

zukommt, die Factoren

$$+1,\ +1,\ +1;\ +1,\ -1,\ -1;\ -1,\ +1,\ -1;\ -1,\ -1,\ +1$$

beifügt.

Die vier Werthe der Grösse w_4 werden hiernach aus einer Quadratwurzel und der Summe und der Differenz der beiden anderen Quadratwurzeln durch Beifügung der Factoren $+1, +1;\ +1, -1$ und bezw. $-1, +1;\ -1, -1$ erhalten. Auf Grund der Formel

$$(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm 2ab$$

und infolge des Umstandes, dass das Product der drei Quadratwurzeln und die Summe ihrer Quadrate durch die Formen

$$a^4(a^4)^2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{a_1}^{\,6},\quad -3(a^4)^2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,4}$$

dargestellt werden, ist daher auch unabhängig von dem Zeichen der Form $a^4(a^4)^2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{a_1}^{\,6}$ die Grösse

$$w_4=\sqrt[2]{-(a^4)^2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,4}+\tfrac12 w_3.a^4\overline{a_1}^{\,4}}$$
$$+\sqrt[2]{-2(a^4)^2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,4}-\tfrac12 w_3.a_4\overline{a_1}^{\,4}+\frac{2a^4(a^4)^2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{a_1}^{\,6}}{\sqrt[2]{-(a^4)^2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}^{\,2}\,\overline{a_1}^{\,4}+\tfrac12 w_3.a^4\overline{a_1}^{\,4}}}},$$

wenn die Zeichen der Quadratwurzeln durch Beifügung der Factoren

$$+1,\ +1,\ +1;\ +1,\ -1,\ +1;\ -1,\ +1,\ -1;\ -1,\ -1,\ -1$$

bestimmt werden.

Berlin, den 6. Januar 1886.

VI.

Zur Theorie der Wärmeleitung in festen Körpern.*

Von

Dr. Axel Harnack,

Professor am Polytechnikum in Dresden.

Die Arbeiten, welche Fourier in den Jahren 1807—1822 über die Wärme veröffentlichte, waren in doppelter Beziehung grundlegend. Denn erstlich gelang es ihm, für die früheren Untersuchungen von Lambert und Biot über Wärmevertheilung den umfassenden mathematischen Ausdruck in Form einer partiellen Differentialgleichung aufzustellen, sodann vermochte er zum erstenmal allgemeine Methoden zur Integration solcher Gleichungen anzugeben, Methoden, welche schon einige Jahrzehnte vorher bei dem Problem der schwingenden Saiten von Euler und Daniel Bernoulli eifrig erstrebt, aber nicht vollständig erkannt waren. Die Grundgleichungen, von denen Fourier und zum Theil auch schon Biot ausgingen, bestehen noch gegenwärtig in voller Geltung, wiewohl ihnen die nunmehr aufgegebene Anschauung der Wärme als eines imponderabelen Fluidums zu Grunde lag. In der That basirt die Herleitung der Differentialgleichung auch nur auf den physikalisch erwiesenen Thatsachen der specifischen Wärme eines Körpers und eines der Temperaturdifferenz proportionalen Wärmeaustausches zwischen zwei Körpern von ungleicher Temperatur. Die allgemeinen Methoden aber, welche Fourier zur Integration angab, mussten, wenn sie auch im Wesentlichen das Richtige trafen, doch sehr bald berechtigten Einwendungen begegnen, in dem Maasse, als man erkannte, dass er den Begriff der willkürlichen Function zu eng gefasst und dementsprechend die Voraussetzungen für die Giltigkeit seines Verfahrens nicht genugsam präcisirt hatte. Poisson's grosses Werk über die Wärmetheorie (1835) vervollkommnete zwar auch in diesen Punkten vielfach die mathematische Darstellung, eine vollständige Erledigung war aber auch hier noch nicht gegeben. Dieser Mangel wurde um so fühlbarer, als die Probleme der Potentialtheorie, Elektrostatik und Hydrodynamik auf ganz gleichartige Differentialgleichungen führten, und den exacten Beweisen der Integration

* Zuerst mit Ausnahme des letzten Paragraphen und bis auf einige Aenderungen und Zusätze erschienen in der „Festschrift der naturw. Gesellschaft Isis zu Dresden". (Mai 1885.)

wandten sich darum die Arbeiten von Gauss, Dirichlet und Riemann zu. Trotzdem sind diese Bemühungen noch gegenwärtig, zumal in der Potentialtheorie, nicht abgeschlossen. Einen weiteren kleinen Beitrag hierzu soll diese Arbeit liefern, in welcher ich im Anschluss an Riemann's Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen (herausgegeben von Hattendorff, 2. Aufl.) die einfachsten Probleme der Wärmebewegung behandle.

Wer den vierten Abschnitt jener Schrift studirt, kann nicht in Zweifel darüber sein, dass die Beweise, zumal in den §§ 52 und 59, nicht nur keine directe und allgemeine Methode zur Bildung der gesuchten Integralfunction liefern, sondern auch berechtigte Bedenken über die Giltigkeit und Eindeutigkeit der gefundenen Lösungen bestehen lassen, und sich nur unter genaueren Angaben der Voraussetzungen als richtig erweisen.

Der wesentliche Inhalt meiner Untersuchung besteht in der Methode, durch welche die Integralfunction aus der Differentialgleichung und den Grenzbedingungen direct gebildet wird, und in der Durchführung der Convergenzbeweise.

§ 1.

Der von zwei parallelen Ebenen begrenzte Körper.

Es sei ein Körper gegeben, der nur von zwei parallelen Ebenen $x = 0$ und $x = l$ begrenzt ist. Die Temperatur u desselben soll in den zu den Begrenzungsebenen parallelen Querschnitten constant, also bei jedem Werthe der Zeit t eine Function von x allein sein.

Wenn nun der Temperaturzustand $u = f(x)$ zur Anfangszeit $t = 0$, sowie die Temperaturen $u = \varphi(t)$ und $u = \psi(t)$ in den beiden begrenzenden Ebenen $x = 0$ und $x = l$ gegeben sind, so soll gezeigt werden, dass der Wärmezustand im Innern des Körpers vollkommen bestimmt ist und als Function von t und x dargestellt werden kann, wenn noch folgende Forderungen gestellt werden. Die Function u soll im Innern des Körpers eine stetige Function der beiden Variabelen x und t sein, welche für $x = 0$ und $x = l$ gleichmässig stetig in die Werthe $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ und für $t = 0$ gleichmässig stetig in den Werth $f(x)$ übergeht. Ferner soll die partielle Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}$ im Innern des Körpers stetig sein, und für $x = 0$ und $x = l$ soll $\frac{\partial u}{\partial x}$ entweder endlich bleiben oder, was sich im Folgenden als ausreichend zeigen wird, es soll $\frac{\partial u}{\partial x} sin \frac{\pi}{l} kx$ bei jedem endlichen Werthe von k gleichmässig, unabhängig von t, für $x = 0$ und $x = l$ verschwinden. Die Ableitung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ soll im Innern des Körpers endlich und integrirbar sein in Bezug auf die beiden Variabelen x und t; ihre Integralfunction nach x ist $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Zur Vereinfachung der Untersuchung nehme ich dabei an, dass die Grenzfunctionen $f(x)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ durchaus endlich und stetig sind. Die blosse Voraussetzung ihrer Integrirbarkeit würde allerdings für das Folgende auch genügen, doch gestaltet sich die Discussion dann nicht so einfach; es erfordert dann auch die Annahme, dass die Functionen unendlich werden können, eine besondere Berücksichtigung.

Zur Abkürzung der Formeln dient es, die Längeneinheit so zu wählen, dass die Dicke l des Körpers gleich π wird. Nach der Fourier'schen Fundamentalgleichung handelt es sich nun um die Integration der partiellen Differentialgleichung:

$$1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

unter Berücksichtigung der gegebenen Grenzbedingungen.

Eine im Uebrigen willkürliche Function u der beiden Variabelen x und t, welche bei jedem von 0 verschiedenen positiven Werthe von t nicht nur selbst stetig ist, sondern auch eine stetige erste Ableitung nach x besitzt, kann im Innern des Intervalles von $x = 0$ bis $x = \pi$ stets durch eine Fourier'sche Reihe von der Form:

$$2)\qquad u(t, x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \sin kx$$

dargestellt werden, wobei die noch zu bestimmenden, von t allein abhängigen Coefficienten a_k der Gleichung genügen:

$$3)\qquad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(t, x) \sin kx\, dx.$$

Die Reihe selbst hat an den Grenzen $x = 0$ und $x = \pi$ stets den Werth null, während die Grenzfunctionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ von 0 verschieden gegeben sein können. Sie stellt also die Function nur für das Innere des Gebietes dar.

Da wir annehmen, dass die Differentialgleichung 1) bei beliebiger Annäherung an die Grenzen erfüllt ist, so ist

$$4)\qquad \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial t} \sin kx\, dx = \alpha^2 \int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin kx\, dx.$$

Umgekehrt folgt aus dem Bestehen dieser Gleichung bei allen ganzzahligen Werthen von k auch die Differentialgleichung 1).

Führt man die rechte Seite durch theilweise Integration aus, so erhält man

$$\alpha^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \sin kx\right]_0^\pi - k\alpha^2 \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x} \cos kx\, dx.$$

Hier verschwindet der erste Term, unserer Annahme zufolge; das zweite Integral ergiebt den Werth:

$$-k\alpha^2 [u \cos kx]_0^\pi - k^2\alpha^2 \int_0^\pi u \sin kx\, dx.$$

Geht nun die Function u für $x = 0$ und $x = \pi$ stetig in die Functionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ über, so wird dieser Ausdruck gleich

5) $$-k\alpha^2 [(-1)^k \psi(t) - \varphi(t)] - k^2\alpha^2 \int_0^\pi u \sin kx\, dx.$$

Nun ist zu untersuchen, unter welchen Bedingungen sich die Reihenfolge der Integration und der Differentiation nach dem Parameter t im ersten Integrale der Gleichung 4) vertauschen lässt. Im Innern des Körpers besteht die Gleichung:

$$\int_{t_0}^t dt \int_\varepsilon^{\pi-\eta} \frac{\partial u}{\partial t} \sin kx\, dx = \alpha^2 \int_{t_0}^t dt \int_\varepsilon^{\pi-\eta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin kx\, dx,$$

wobei ε und η beliebig klein sind, t_0 und t irgend zwei Werthe grösser als Null bedeuten. Die Reihenfolge der Integrationen auf der linken Seite lässt sich vertauschen, weil zufolge der Gleichung 1) $\frac{\partial u}{\partial t}$ ebenso wie $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ endlich und integrirbar ist. Demnach wird

6) $$\int_\varepsilon^{\pi-\eta} \sin kx\, dx\, [u(t,x) - u(t_0,x)]$$

$$= \alpha^2 \int_{t_0}^t dt \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} \sin kx\right]_\varepsilon^{\pi-\eta} - k\,[u \cos kx]_\varepsilon^{\pi-\eta} - k^2 \int_\varepsilon^{\pi-\eta} u \sin kx\, dx \right\}.$$

Lässt man nun ε und η nach null convergiren, so erhält der Ausdruck unter dem Integral der rechten Seite den unter 5) angegebenen Werth, falls das Glied $\left[\frac{\partial u}{\partial x} \sin kx\right]$ gleichmässig, d. h. unabhängig von t, nach null convergirt, und falls ebenso die Function u gleichmässig in die Grenzwerthe $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ übergeht. Dies tritt also ein, wenn bei allen Werthen von t zwischen t_0 und t der nämliche Werth von x ausreichend ist, um die Ungleichungen:

7) $$[u(t,x) - \varphi(t)] < \delta, \quad [u(t,\pi-x) - \psi(t)] < \delta$$

zu erfüllen.* Alsdann gewinnt die Gleichung 6) die Form:

* In dem allgemeinen Falle, wo man nur die Integrirbarkeit von $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ voraussetzt, hat man die Forderung eines „im Allgemeinen gleichmässigen" Ueberganges zu stellen, d. h. nach Ausschluss von Stellen durch Intervalle, deren Summe beliebig klein ist, sollen sich bei jedem Werthe von δ die obigen Ungleichungen erfüllen lassen. Man hat dann zu zeigen: erstens dass diese Forderung

$$8)\quad \int_0^\pi \sin kx\,dx[u(t,x)-u(t_0,x)] = \alpha^2\int_0^t dt\left\{-k((-1)^k\psi(t)-\varphi(t))-\frac{k^2\pi}{2}a_k\right\}$$

und die Differentiation nach t liefert die lineare Differentialgleichung:

$$9)\qquad \frac{d a_k}{dt}+k^2\alpha^2 a_k = -\frac{2}{\pi}k\alpha^2[(-1)^k\psi(t)-\varphi(t)]$$

und hieraus folgt:

$$10)\quad a_k = -\frac{2}{\pi}k\alpha^2 e^{-k^2\alpha^2 t}\left[\int_0^t[(-1)^k\psi(t)-\varphi(t)]e^{k^2\alpha^2 t}\,dt + C_k\right],$$

wobei C_k eine von t und x unabhängige Constante bedeutet.

Für $t=0$ soll $u(t,x)$ in den Werth $f(x)$ übergehen, also muss

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t,x)\sin kx\,dx \quad \text{in den Werth} \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx\,dx$$

übergehen, wenn wir wieder annehmen, dass der Uebergang von $u(t,x)$ in $f(x)$ ein gleichmässig stetiger ist, wenigstens nach Ausschluss beliebig kleiner Intervalle von $x=0$ bis ε, und $x=\pi-\eta$ bis π. Hieraus folgt, wenn man in der Formel 10) t gleich null werden lässt:

$$11)\qquad -\frac{2}{\pi}k\alpha^2 C_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx\,dx.$$

Mithin ist die Function $u(t,x)$, wenn sie überhaupt existirt, d. h. wenn die eingeführten Bedingungen alle miteinander verträglich sind, eine ganz bestimmte, und darstellbar durch die Reihe:

$$12)\quad u(t,x) = \frac{2}{\pi}\alpha^2\sum_{k=1}^{k=\infty}k\sin kx\int_0^t[(-1)^{k-1}\psi(z)+\varphi(z)]e^{-k^2\alpha^2(t-z)}\,dz$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}e^{-k^2\alpha^2 t}\sin kx\int_0^\pi f(z)\sin kz\,dz.$$

Man kann diese Formel durch bekannte Darstellungen von $\frac{x}{2}$ und $\frac{\pi-x}{2}$ vermittelst Sinusreihen so ergänzen, dass sie für $x=0$ und $x=\pi$ die Werthe $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ annimmt. Sodann bemerkt man, dass die Willkürlichkeit des Nullpunktes der Temperatur sich dadurch ausdrückt, dass bei Veränderung der Functionen $f(x)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ um eine additive Constante auch die Function u die nämliche Aenderung erfährt.

---

ausreichend ist, um aus der Differentialgleichung 9) die Gleichung 10) zu gewinnen, zweitens dass sie von der durch die Gleichung 12) dargestellten Function wirklich erfüllt wird.

§ 2.

Untersuchung der erhaltenen Function.

Die Gleichung 12) giebt den allgemeinen Ausdruck an für jedwede Function, welche der partiellen Differentialgleichung 1) und den weiteren am Eingang des ersten Paragraphen gestellten Grenz- und Nebenbedingungen genügt; sie lehrt insbesondere, dass es unter diesen Bedingungen nur eine einzige Function geben kann. Nun aber ist die Frage zu beantworten, ob die Gleichung 12) in der That eine Function der betrachteten Eigenschaft darstellt, wie auch immer die stetigen Functionen $f(z)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ gegeben sein mögen.*

Wir können die Untersuchung zerlegen, indem wir die Summen in dieser Gleichung einzeln behandeln. Wir beginnen mit der Summe

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-k^2\alpha^2 t}\, sin\, kx \int_0^\pi f(z)\, sin\, kz\, dz.$$

I. Zuerst bemerke man den Satz:

$$1)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-k^2\alpha^2 t}\, sin\, kx \int_{0.}^{\pi} f(z)\, sin\, kz\, dz = \int_0^\pi dz \left[f(z) \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-k^2\alpha^2 t}\, sin\, kx\, sin\, kz \right].$$

Da nämlich bei jedem Werthe von t, der von null verschieden ist,

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-k^2\alpha^2 t}\, sin\, kx\, sin\, kz$$

gleichmässig in Bezug auf z convergirt, so wird das Integral nach z dieser unendlichen Reihe durch gliedweise Integration erhalten.

II. Es ist zu beweisen, dass für $t = 0$

$$2)\qquad lim\, \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[f(z) \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-k^2\alpha^2 t}\, sin\, kx\, sin\, kz \right] dz = f(x)$$

wird, und zwar dass dieser Uebergang ein gleichmässig stetiger ist. Der Satz ist einleuchtend, sobald die Reihe:

---

* In Bezug auf diese Untersuchung muss ich noch des Aufsatzes von Herrn Schläfli im 72. Bande des Crelle'schen Journals erwähnen, der für die in diesem Paragraphen enthaltenen Ausführungen zum Theil massgebend gewesen ist. Im Uebrigen erscheint mir die in jener Abhandlung durchgeführte Methode zur Integration der partiellen Differentialgleichung, welche absichtlich die Anwendung der Reihe und des Doppelintegrals von Fourier vermeidet, trotz ihrer Präcision nicht zweckmässig zu sein. Es spricht sich dieses schon in dem Umstande aus, dass zur Bildung der Integralformen zuerst immer besondere Voraussetzungen über die Grenzfunctionen eingeführt werden, die sich nachträglich als überflüssig erweisen.

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-k^2\alpha^2 t} \sin kx \int_0^\pi f(z) \sin kz \, dz$$

auch noch für $t=0$ convergirt; denn man erhält alsdann die Darstellung der Function $f(x)$ vermittelst einer Fourier'schen Reihe. Es kommt aber darauf an, den Satz zu beweisen, auch wenn diese Darstellbarkeit von $f(x)$ nicht vorausgesetzt wird, die ja bekanntlich durch die Stetigkeit der Function $f(x)$ noch nicht gegeben ist.

Zu diesem Zwecke ist es nöthig, eine Relation einzuführen, welche Jacobi bei der Transformation der Theta-Functionen bewiesen hat (Ges. Werke Bd. 1 S. 264) und welche im Wesentlichen zuerst von Poisson (Journal de l'École Polyt. 1823, S. 420) aufgestellt wurde. Es ist

$$3)\qquad \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-\frac{(2n\pi+x)^2}{4\alpha^2 y}} = \frac{\alpha\sqrt{y}}{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-n^2\alpha^2 y}\cos(nx)\right].$$

Man beweist diese Gleichung am directesten, indem man auf die Function $F(x)=e^{-ax^2}$ den allgemeinen Satz anwendet: Hat eine paare Function $F(x)$ die Eigenschaft, dass die unendliche Reihe $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x+2n\pi)$ gleichmässig convergirt für $0 \leq x \leq \pi$, so stellt die Fourier'sche Reihe:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(x)\,dx + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty} \cos nx \int_0^\infty F(x)\cos nx\,dx$$

überall, wo sie convergirt, den Werth jener unendlichen Reihe dar.

Weiterhin werden auch die Ableitungen der Gleichung 3) benutzt, die wir hier gleich angeben wollen. Differentiirt man die Gleichung nach x, so folgt, weil sich beiderseits gleichmässig convergente Reihen für $y>0$ ergeben:

$$4)\qquad \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3 y^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(2n\pi+x)\,e^{-\frac{(2n\pi+x)^2}{4\alpha^2 y}} = \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-n^2\alpha^2 y}\, n \sin(nx).$$

Setzt man hier statt x den Werth $x-\pi$, so wird $\sin(nx)$ gleich $(-1)^n \sin(nx)$, also

$$5)\qquad \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3 y^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}((2n-1)\pi+x)\,e^{-\frac{((2n-1)\pi+x)^2}{4\alpha^2 y}} = \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-n^2\alpha^2 y}\, n\,(-1)^n \sin(nx).$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-n^2\alpha^2 y}\, n \sin nx \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-n^2\alpha^2 y}\, n\,(-1)^{n-1} \sin nx$$

bei jedem endlichen positiven Werthe von y stetige Functionen von x mit stetigen Ableitungen sind, und diese Functionen convergiren bei jedem Werthe von x, auch bei dem Werthe $x=0$, für $y=0$ nach null.

Man setze nun in der Gleichung 2)

$$2 \sin kx \sin kz = \cos k(x-z) - \cos k(x+z)$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-k^2\alpha^2 t}[\cos k(x-z) - \cos k(x+z)]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha\sqrt{t}}\left[\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-\frac{[2n\pi+(x-z)]^2}{4\alpha^2 t}} - \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-\frac{[2n\pi+(x+z)]^2}{4\alpha^2 t}}\right],$$

so ist der Ausdruck

$$6)\quad \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\alpha\sqrt{t}}\int_0^\pi f(z)\,dz\left[\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{[2n\pi+(x-z)]^2}{4\alpha^2 t}} - \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{[2n\pi+(x+z)]^2}{4\alpha^2 t}}\right]$$

zu untersuchen, und zu zeigen, dass derselbe unabhängig von x, lediglich durch Wahl eines kleinen Werthes von t, dem Werthe $f(x)$ beliebig nahe kommt.

Die Glieder, in welchen $n=0$ ist, hebe man zunächst heraus und betrachte

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\alpha\sqrt{t}}\int_0^\pi f(z)\,dz\left[e^{-\frac{(x-z)^2}{4\alpha^2 t}} - e^{-\frac{(x+z)^2}{4\alpha^2 t}}\right].$$

Wird x von 0 und π verschieden vorausgesetzt, d. h. bedeutet es irgend einen mittleren Werth, so betrachte man im ersten Integral das Intervall von

$$z = x - \varepsilon \text{ bis } z = x + \varepsilon.$$

Der übrige Betrag des Integrales, sowie das ganze zweite Integral kann unabhängig von x, lediglich durch die Wahl einer oberen Grenze für t, beliebig klein gemacht werden. Nun wird durch die Substitution $\frac{x-z}{2\alpha\sqrt{t}} = y$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\alpha\sqrt{t}}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(z)\,e^{-\frac{(x-z)^2}{4\alpha^2 t}}\,dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{\varepsilon}{2\alpha\sqrt{t}}}^{+\frac{\varepsilon}{2\alpha\sqrt{t}}} f(x-2\alpha\sqrt{t}\,y)\,e^{-y^2}\,dy$$

und ist $f(x)$ eine stetige Function von x, so ist lediglich durch Wahl von ε

$$f(x-2\alpha\sqrt{t}\,y) = f(x) \pm (<\delta),$$

wobei δ eine beliebig kleine Grösse bedeutet; also ist das vorstehende Integral gleich

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} f(x)\int_{-\frac{\varepsilon}{2\alpha\sqrt{t}}}^{+\frac{\varepsilon}{2\alpha\sqrt{t}}} e^{-y^2}\,dy \pm \left(<\delta\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{\varepsilon}{2\alpha\sqrt{t}}}^{+\frac{\varepsilon}{2\alpha\sqrt{t}}} e^{-y^2}\,dy\right).$$

Der erste Term convergirt nach $f(x)$, der zweite mit δ nach null.

Es ist nun leicht nachzuweisen, dass die übrigen Glieder des Ausdruckes 6) unabhängig von x lediglich durch Wahl einer oberen Grenze von t beliebig klein gemacht werden können. Man erhält

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\alpha\sqrt{t}}\int_0^{\pi} f(z)\,dz\sum_1^{\infty} e^{-\frac{(2n\pi+(x-z))^2}{4\alpha^2 t}}$$

$$<\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\alpha\sqrt{t}}\int_0^{\pi} f(z)\,dz\sum_1^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4\alpha^2 t}}.$$

Die Summe auf der rechten Seite ist kleiner als die geometrische Progression

$$\sum_1^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)\pi^2}{4\alpha^2 t}}.$$

Summirt man diese, so erkennt man, dass die rechte Seite kleiner ist als

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{u}\,e^{-u}}{1-e^{-2u}}\,G,$$

wobei $\sqrt{u}=\frac{\pi}{2\alpha\sqrt{t}}$ gesetzt ist und G den grössten Betrag bezeichnet, den $f(x)$ besitzt. Der Quotient convergirt, wenn t null wird, also u über jede Grenze wächst, nach null. Nach demselben Verfahren kann man das Verschwinden der übrigen in 6) enthaltenen Summen beweisen.

III. Indem wir nun zu der Betrachtung der beiden anderen in der Gleichung 12) enthaltenen Summen übergehen, nämlich

$$\frac{2}{\pi}\,\alpha^2\sum_{k=1}^{k=\infty} k\sin kx\int_0^t \varphi(z)\,e^{-k^2\alpha^2(t-z)}\,dz$$

und

$$\frac{2}{\pi}\,\alpha^2\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k k\sin kx\int_0^t \psi(z)\,e^{-k^2\alpha^2(t-z)}\,dz,$$

können wir auch bei diesen Summen die Vertauschbarkeit der Summation und Integration behaupten, falls dieselben den an sie gestellten Forderungen Genüge leisten sollen, die zunächst nur darin zu bestehen brauchen, dass sie stetige Functionen von x definiren. Man vergleiche zu diesem Zwecke die erste Reihe

$$w(t,x)=\frac{2}{\pi}\,\alpha^2\sum_{k=1}^{k=\infty} k\sin kx\int_0^t \varphi(z)\,e^{-k^2\alpha^2(t-z)}\,dz$$

mit der Function

$$w_1(t,x)=\frac{2}{\pi}\,\alpha^2\int_0^t \varphi(z)\sum_{k=1}^{k=\infty} k\sin kx\,e^{-k^2\alpha^2(t-z)}\,dz.$$

Die unter dem Integral stehende Summe convergirt zwar für $z=t$ nicht mehr, aber sie stellt, wie bei der Ableitung der Gleichungen 4) und 5) gezeigt wurde, bei jedem x eine stetige Function von z dar, die für $z=t$ verschwindet. So lange x innerhalb eines Intervalles liegt, dessen Werthe von null verschieden sind, convergirt diese Reihe mit $t-z$ auch gleichmässig nach null, d. h. es ist

$$w_1(t,x)=\frac{2}{\pi}\,\alpha^2\int_0^{t-\varepsilon}\varphi(z)\sum_{k=1}^{k=\infty}k\sin kx\,e^{-k^2\alpha^2(t-z)}\,dz$$

bis auf eine Grösse, die durch Wahl von ε beliebig klein ist, bei allen Werthen von x, die innerhalb eines Intervalles von x_0 bis x gelegen sind, falls x_0 und x von null verschieden sind. Hieraus folgt aber, dass

$$7)\quad \int_{x_0}^{x} w_1(t,x)\,dx=\frac{2}{\pi}\,\alpha^2\int_0^{t}\varphi(z)\sum_{k=1}^{k=\infty}-(\cos kx-\cos kx_0)\,e^{-k^2\alpha^2(t-z)}\,dz$$

ist. Bildet man nun

$$\int_{x_0}^{x} w(t,x)\,dx=W(t,x),$$

so ist dies eine stetige Function, für welche eine Darstellung vermittelst der Cosinusreihe möglich ist, und zwar ist

$$\begin{aligned}W(t,x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}W(t,x)\,dx+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\cos kx\int_0^{\pi}W(t,x)\cos kx\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}W(t,x)\,dx-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\cos kx\int_0^{\pi}w(t,x)\sin kx\,dx\end{aligned}$$

oder, da $W(t,x_0)=0$ ist,

$$W(t,x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}(\cos kx-\cos kx_0)\int_0^{\pi}w(t,x)\sin kx\,dx$$

$$8)\quad \int_{x_0}^{x} w(t,x)\,dx=-\frac{2}{\pi}\,\alpha^2\sum_{k=1}^{k=\infty}(\cos kx-\cos kx_0)\int_0^{t}\varphi(z)\,e^{-k^2\alpha^2(t-z)}\,dz.$$

Wenn gezeigt werden kann, dass die Reihen in den Gleichungen 7) und 8) übereinstimmen, so folgt daraus, dass auch die stetigen Functionen w_1 und w identisch sind. Die Reihe in der Gleichung 8) kann geschrieben werden

$$-\frac{2}{\pi}\alpha^2\int_0^{t-\varepsilon}\varphi(z)\sum_{k=1}^{k=\infty}(\cos kx-\cos kx_0)\,e^{-k^2\alpha^2(t-z)}\,dz$$

$$-\frac{2}{\pi}\alpha^2\sum_{k=1}^{k=\infty}(\cos kx-\cos kx_0)\int_{t-\varepsilon}^{t}\varphi(z)\,e^{-k^2\alpha^2(t-z)}\,dz$$

und es ist sonach zu zeigen, dass der zweite Theil mit ε nach null convergirt. Es ist aber der Betrag dieser Summe kleiner als

$$\frac{2}{\pi}\alpha^2\sum_{k=1}^{k=\infty}2G\int_{t-\varepsilon}^{t}e^{-k^2\alpha^2(t-z)}\,dz=\frac{4}{\pi}G\alpha^2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1-e^{-k^2\alpha^2\varepsilon}}{k^2\alpha^2},$$

wenn man mit G den grössten Betrag bezeichnet, den die Function $\varphi(z)$ im Intervall von $t-\varepsilon$ bis t annimmt, und die rechte Seite dieser Gleichung convergirt mit ε nach null.

In derselben Weise lässt sich die Vertauschbarkeit der auf die Function ψ bezüglichen Summation beweisen, und man erhält das Resultat:

Jede Function $u(t,x)$ [Gleichung 12), § 1], welche der partiellen Differentialgleichung unter den angegebenen Nebenbedingungen genügt, kann auch in die Form gebracht werden:

$$9)\qquad u(t,x)=-\frac{2}{\pi}\alpha^2\int_0^t\left[\psi(t-z)\sum_{k=1}^{k=\infty}e^{-k^2\alpha^2 z}\,k\,(-1)^k\sin kx\right]dz$$
$$+\frac{2}{\pi}\alpha^2\int_0^t\left[\varphi(t-z)\sum_{k=1}^{k=\infty}e^{-k^2\alpha^2 z}\,k\sin kx\right]dz$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left[f(z)\sum_{k=1}^{k=\infty}e^{-k^2\alpha^2 t}\sin kx\sin kz\right]dz.$$

IV. Da bei jedem endlichen Werthe von t die dritte Summe in der Gleichung 9) für $x=0$ und $x=\pi$ nach null convergirt, so ist zu zeigen, dass

$$-\frac{2}{\pi}\alpha^2\int_0^t\left[\psi(t-z)\sum_{k=1}^{k=\infty}e^{-k^2\alpha^2 z}\,k\,(-1)^k\sin kx\right]dz$$
$$+\frac{2}{\pi}\alpha^2\int_0^t\left[\varphi(t-z)\sum_{k=1}^{k=\infty}e^{-k^2\alpha^2 z}\,k\sin kx\right]dz$$

für $x=0$ nach dem Werthe $\varphi(t)$ und für $x=\pi$ nach dem Werthe $\psi(t)$ convergirt, und zwar wiederum gleichmässig, d. h. so, dass man bei allen

Werthen von $t > 0$ die Variable x so nahe an 0 resp. π bestimmen kann, dass jener Werth sich von $\varphi(t)$ resp. $\psi(t)$ beliebig wenig unterscheidet. Aus den Gleichungen

$$10) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-k^2\alpha^2 z} k \sin kx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3 z^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (2n\pi + x)\, e^{-\frac{(2n\pi+x)^2}{4\alpha^2 z}},$$

$$11) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-k^2\alpha^2 z} (-1)^k k \sin kx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3 z^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} ((2n-1)\pi + x)\, e^{-\frac{((2n-1)\pi+x)^2}{4\alpha^2 z}}$$

greife man, wenn x beliebig klein werden soll, wiederum die Glieder $n=0$ heraus und betrachte

$$12) \quad \frac{\pi - x}{2\alpha\sqrt{\pi}} \int_0^t \psi(t-z)\, e^{-\frac{(\pi-x)^2}{4\alpha^2 z}} \frac{dz}{z^{3/2}} \quad \text{und} \quad \frac{x}{2\alpha\sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(t-z)\, e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 z}} \frac{dz}{z^{3/2}}.$$

Setzt man im zweiten Integral $\frac{x}{2\alpha\sqrt{z}} = y$, $\frac{x\,dz}{4\alpha z^{3/2}} = -dy$, so wird dasselbe gleich:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}}^{\infty} \varphi\left(t - \frac{x^2}{4\alpha^2 y^2}\right) e^{-y^2}\, dy.$$

Um nun zu zeigen, dass dieses Integral für $x=0$ gleichmässig stetig in den Werth $\varphi(t)$ übergeht, während t irgendwelche Werthe grösser als null besitzt, bezeichne man mit δ eine beliebig kleine, aber feste Grösse und zerlege das Integral in die Theile:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2\alpha\sqrt{\delta}}} \varphi\left(t - \frac{x^2}{4\alpha^2 y^2}\right) e^{-y^2}\, dy + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\alpha\sqrt{\delta}}}^{\infty} \varphi\left(t - \frac{x^2}{4\alpha^2 y^2}\right) e^{-y^2}\, dy.$$

Das erste Integral kann durch Wahl von x beliebig klein gemacht werden, vom andern kann man nach derselben Methode, wie oben bei der Function $f(x)$, erkennen, dass es für $x=0$ gleichmässig in den Werth $\varphi(t-0) = \varphi(t)$ übergeht.

Desgleichen verwandelt sich das erste Integral 12) durch die Substitution

$$\frac{\pi - x}{2\alpha\sqrt{z}} = y, \quad \frac{\pi - x}{4\alpha z^{3/2}}\, dz = -dy$$

in

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\pi - x}{2\alpha\sqrt{t}}}^{\infty} \psi\left(t - \frac{(\pi - x)^2}{4\alpha^2 y^2}\right) e^{-y^2}\, dy$$

und bekommt ebenso für $x=\pi$ den Grenzwerth $\psi(t-0)=\psi(t)$. Dass nun die übrigen Terme, welche aus den Reihen 10) und 12) hervorgehen, wiederum den Grenzwerth null liefern, lässt sich folgendermassen einsehen.

Im Integral

$$\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}}\int_0^t \varphi(t-z)\frac{dz}{z^{3/2}}\sum_1^{\infty}(2n\pi+x)e^{-\frac{(2n\pi+x)^2}{4\alpha^2 z}}-(2n\pi-x)e^{-\frac{(2n\pi-x)^2}{4\alpha^2 z}}$$

heben sich bei jedem endlichen Werthe von z die Glieder gegenseitig auf, wenn α null wird. Zerlegt man also das Integral in die Theile von $z=0$ bis $z=\varepsilon$ und von $z=\varepsilon$ bis $z=t$, so kann man in dem zweiten Integral, da die Summe eine hinsichtlich x gleichmässig convergente ist, den Grenzprocess für $x=0$ gliedweise vollziehen, und sonach ist der Grenzwerth dieses Theiles für $x=\pi$ null. Man braucht also nur noch zu beweisen, dass das Integral

$$\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}}\int_0^{\varepsilon}\varphi(t-z)\frac{dz}{z^{3/2}}\sum_1^{\infty}(2n\pi+x)e^{-\frac{(2n\pi+x)^2}{4\alpha^2 z}}$$

und ebenso das andere:

$$\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}}\int_0^{\varepsilon}\varphi(t-z)\frac{dz}{z^{3/2}}\sum_1^{\infty}(2n\pi-x)e^{-\frac{(2n\pi-x)^2}{4\alpha^2 z}}$$

lediglich durch Wahl von ε, unabhängig von x, beliebig klein gemacht werden kann. Es ist aber

$$\frac{1}{z^{3/2}}\sum_1^{\infty}(2n\pi+x)e^{-\frac{(2n\pi+x)^2}{4\alpha^2 z}}=\frac{e^{-\frac{\pi^2}{8\alpha^2 z}}}{z^{3/2}}\sum_1^{\infty}(2n\pi+x)e^{-\frac{(2n\pi+x)^2-\frac{1}{2}\pi^2}{4\alpha^2 z}}.$$

Der Factor vor der Summe ist für $z=0$ null und bleibt durch Wahl von ε im Intervall von $z=0$ bis $z=\varepsilon$ beliebig klein. Die Summe ist jedenfalls nicht grösser als

$$\sum_1^{\infty}(2n\pi+x)e^{-\frac{(2n\pi+x)^2-\frac{1}{2}\pi^2}{4\alpha^2\varepsilon}}$$

und dies repräsentirt bei allen Werthen von x einen endlichen Werth. Dasselbe gilt für die Summe

$$\frac{1}{z^{3/2}}\sum_1^{\infty}(2n\pi-x)e^{-\frac{(2n\pi+x)^2}{4\alpha^2 z}}=\frac{e^{-\frac{\pi^2}{8\alpha^2 z}}}{z^{3/2}}\sum_1^{\infty}(2n\pi-x)e^{-\frac{(2n\pi-x)^2-\frac{1}{2}\pi^2}{4\alpha^2 z}}.$$

Aus diesen Eigenschaften ergiebt sich ohne Weiteres, dass das Integral von 0 bis ε durch Wahl von ε beliebig klein bleibt.

In analoger Weise hat man die Untersuchung des nämlichen Integrals für $x=\pi$, sowie den Nachweis bei dem auf ψ bezüglichen Integrale für $x=0$ und $x=\pi$ auszuführen.

V. Das Verhalten des ersten Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x}$ und die durch die Differentialgleichung geforderte Relation zwischen $\frac{\partial u}{\partial t}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ wird an der Gleichung 9) evident, der wir die Form geben:

$$13)\quad u(t,x) = -\frac{2}{\pi}\alpha^2 \int_0^t \left[\psi(y)\sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-k^2\alpha^2(t-y)}\, k\,(-1)^k \sin kx\right] dy$$
$$+\frac{2}{\pi}\alpha^2 \int_0^t \left[\varphi(y)\sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-k^2\alpha^2(t-y)}\, k \sin kx\right] dy$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-k^2\alpha^2 t} \sin kx \int_0^\pi f(z) \sin kz\, dz.$$

In der dritten Summe, die für $t > 0$ gliedweise sowohl nach x wie nach t differentiirt werden kann, erkennt man, dass alle Differentialquotienten dieses Theiles stetige Functionen sind (auch an den Grenzstellen $x = 0$ und $x = \pi$), und dass die Differentialgleichung von ihnen erfüllt ist.

In jedem der beiden anderen Glieder kann man sich an Stelle der trigonometrischen Reihe die in den Gleichungen 4) und 5) enthaltenen Exponentialreihen substituirt denken. So tritt an Stelle des zweiten Gliedes z. B. der Ausdruck

$$14)\quad w = \frac{2}{\pi}\alpha^2 \int_0^t \left[\varphi(y)\frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3(t-y)^{3/2}} \sum_{-\infty}^{+\infty}(2n\pi + x)\, e^{-\frac{(2n\pi+x)^2}{4\alpha^2(t-y)}}\right] dy.$$

Die partiellen Ableitungen dieser Function nach x können für $0 < x < \pi$ durch successive Differentiation unter dem Integral dargestellt werden, und man sieht hieraus, dass alle diese Ableitungen stetige Functionen von x sind, so lange $0 < x < \pi$ ist. Da aber die Ableitungen dieser Exponentialreihe bei allen Werthen von y (mit Ausnahme des Werthes $y = t$) durch Differentiation der trigonometrischen Reihe in der Gleichung 4) erhalten werden, so sind beispielsweise die erste und zweite Ableitung von w auch gleich:

$$15)\quad \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{2}{\pi}\alpha^2 \lim_{\varepsilon=0} \int_0^{t-\varepsilon} \left[\varphi(y)\sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-k^2\alpha^2(t-y)}\, k^2 \cos kx\right] dy, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{2}{\pi}\alpha^2 \lim_{\varepsilon=0} \int_0^{t-\varepsilon} -\left[\varphi(y)\sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-k^2\alpha^2(t-y)}\, k^3 \sin kx\right] dy. \end{aligned}$$

Desgleichen erhält man auch die partiellen Ableitungen von w in Bezug auf t durch successive Differentiation der unter dem Integral stehenden Function nach dem Parameter t und alle diese partiellen Ableitungen sind ebenfalls stetige Functionen, so lange $t > 0$ und $0 < x < \pi$. Mit Einführung der trigonometrischen Reihen erhalten dieselben die Form:

$$16)\quad \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{2}{\pi}\,\alpha^2 \lim_{\varepsilon=0} \int\limits_0^{t-\varepsilon} -\alpha^2 \left[\varphi(y) \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-k^2\alpha^2(t-y)}\, k^3 \sin kx\right] dy, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{2}{\pi}\,\alpha^2 \lim_{\varepsilon=0} \int\limits_0^{t-\varepsilon} \alpha^4 \left[\varphi(y) \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-k^2\alpha^2(t-y)}\, k^5 \sin kx\right] dy. \end{aligned}$$

Aus diesen und den vorhergehenden Gleichungen ersieht man, dass die partielle Differentialgleichung im Innern des Körpers von der Function w erfüllt ist. Dieselben Betrachtungen lassen sich für die noch übrige Summe in der Gleichung 13) ausführen.

VI. Man hat schliesslich noch den Nachweis zu führen, dass die Function $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \sin x\right)$ an den Grenzen $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindet, eine Eigenschaft, die deshalb wesentlich ist, weil nur auf Grund derselben erkannt werden konnte, dass nur eine einzige Function bei den gegebenen Bedingungen existirt. Es genügt nachzuweisen, dass

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \sin x\right)$$

für $x = 0$ verschwindet, da dann die analoge Eigenschaft für den ersten Theil der Reihe 13) gilt. In der Gleichung 14) hat man, nachdem man sie nach x differentiirt hat, bei einem beliebig kleinen Werthe von x nur den Theil zu betrachten, den wir mit Weglassung constanter Factoren schreiben:

$$17)\qquad w_1 = \int\limits_{t-\varepsilon}^{t} \varphi(y) \left(1 - \frac{x^2}{2\alpha^2(t-y)}\right) e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2(t-y)}} \frac{dy}{(t-y)^{3/2}}.$$

Hier bedeutet ε eine beliebig klein fixirte Grösse. Von allen übrigen Termen der differentiirten Gleichung 14) ist evident, dass sie auch für $x = 0$ nach einem bestimmten endlichen Werthe convergiren. Auf jeden der beiden Bestandtheile der Gleichung 17) kann der erste Mittelwerthsatz angewendet werden; bezeichnet man also mit $\varphi(t - \Theta\varepsilon)$ und $\varphi(t - \Theta'\varepsilon)$ zwei Werthe von φ im Intervall von $t - \varepsilon$ bis t und führt man die neue Variabele

$$z = \frac{x}{2\alpha\sqrt{t-y}}$$

ein, so wird

$$w_1 = \frac{4\alpha}{x}\left\{\varphi(t-\Theta\varepsilon)\int\limits_{\frac{x}{2\alpha\sqrt{\varepsilon}}}^{\infty} e^{-z^2}\,dz - 2\varphi(t-\Theta'\varepsilon)\int\limits_{\frac{x}{2\alpha\sqrt{\varepsilon}}}^{\infty} e^{-z^2} z^2\,dz\right\}.$$

Also ist

$$\lim_{x=0}(w_1 \sin x) = 4\alpha\left\{\varphi(t-\Theta\varepsilon)\int\limits_0^{\infty} e^{-z^2}\,dz - 2\varphi(t-\Theta'\varepsilon)\int\limits_0^{\infty} e^{-z^2} z^2\,dz\right\}$$
$$= 2\alpha\sqrt{\pi}\,\{\varphi(t-\Theta\varepsilon) - \varphi(t-\Theta'\varepsilon)\}.$$

Die vorstehende Grösse kann durch Wahl von ε von vornherein beliebig klein gemacht werden.

Die Function $\frac{\partial w}{\partial x}$ lässt sich auch durch eine Fourier'sche Reihe darstellen, und zwar ist

18) $$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\pi}\varphi(t) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty} \cos kx \left\{-\varphi(t) + k^2\alpha^2 \int\limits_0^t \varphi(z)\, e^{-k^2\alpha^2(t-z)}\,dz\right\}.$$

Das Verhalten dieser Function an den Grenzstellen $x=0$ und $x=\pi$ ist aber an dieser Reihe nicht so einfach zu beweisen; wenigstens ist das Verfahren, mittels dessen ich in dem ersten Abdruck dieser Arbeit den Nachweis zu führen suchte, unzureichend. Wesentlich einfacher werden die letzten Untersuchungen, wenn für $\varphi(t)$ die Differentiirbarkeit vorausgesetzt wird.

Die Art dieser ganzen Untersuchung lehrt, dass die Fourier'sche Reihe ein geeignetes Hilfsmittel ist, um die allgemeine Form der Integralfunction zu bilden und zu berechnen; dass aber die schliessliche Bestätigung dieser Function nicht unmittelbar an dieser Reihe, sondern nach vollzogener Summation derselben erhalten wird, wie solches auch bei einem analogen Problem der Potentialtheorie der Fall ist.

§ 3.

Der durch eine einzige Ebene begrenzte unendliche Raum.

Der unendliche Raum sei nur durch die Ebene $x=0$ begrenzt. Für die Querschnitte senkrecht zur x-Axe ist die Temperaturvertheilung zur Zeit $t=0$ als Function $f(x)$ gegeben; desgleichen ist die Temperatur $\varphi(t)$ in der begrenzenden Ebene während des ganzen Verlaufes bekannt. Diese Functionen nehmen wir wiederum der Einfachheit wegen als stetige an; $f(x)$ soll überdies zwischen den Grenzen 0 und ∞ absolut integrirbar sein.

Wir wollen nun beweisen, dass sich immer ein und nur ein Integral der partiellen Differentialgleichung finden lässt, welches diesen Grenzbedingungen genügt, wenn wir von der Function $u(t,x)$ noch voraussetzen, dass sie nebst ihrer ersten und zweiten Ableitung nach x im Innern des ganzen Raumes stetig ist, dass sie zwischen den Grenzen 0 und ∞ absolut integrirbar ist, und dass u und $\frac{\partial u}{\partial x}$ für $x=\infty$, $\frac{\partial u}{\partial x}\sin x$ für $x=0$ verschwinden. Eine Function von dieser Beschaffenheit muss dargestellt werden können durch das zweifache Fourier'sche Integral:

1) $$u(t,x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dq\,\sin qx\int_0^\infty u(t,\lambda)\sin q\lambda\,d\lambda.$$

Das innere Integral ist eine Function von t, welche folgende Eigenschaften zu erfüllen hat. Bezeichnen wir es mit $F(t)$, so ist

2) $$F'(t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty u(t,\lambda)\sin q\lambda\,d\lambda=\int_0^\infty\frac{\partial u}{\partial t}\sin q\lambda\,d\lambda=\alpha^2\int_0^\infty\frac{\partial^2 u}{\partial\lambda^2}\sin q\lambda\,d\lambda.$$

Indem hier wieder die Vertauschung in der Reihenfolge der Integration und Differentiation vollzogen wird, tritt wie früher die Forderung eines gleichmässig steten Ueberganges in die Grenzwerthe auf. Das letzte Integral ergiebt nun durch theilweise Integration:

$$\alpha^2\left[\frac{\partial u}{\partial\lambda}\sin q\lambda\right]_0^\infty-\alpha^2 q\,[u\cos q\lambda]_0^\infty-\alpha^2q^2\int_0^\infty u\sin q\lambda\,d\lambda.$$

Ist also $\frac{\partial u}{\partial\lambda}\sin q\lambda=0$ für $\lambda=0$, $\frac{\partial u}{\partial\lambda}=0$ für $\lambda=\infty$, ferner $u=\varphi(t)$ für $\lambda=0$ und $u=0$ für $\lambda=\infty$, so wird

3) $$F'(t)=\alpha^2q\,\varphi(t)-\alpha^2q^2F(t)$$

und das vollständige Integral dieser linearen Gleichung ist:

4) $$F(t)=e^{-\alpha^2q^2t}\left[\alpha^2q\int_0^t\varphi(\lambda)\,e^{\alpha^2q^2\lambda}\,d\lambda+C\right].$$

Die Constante C ist noch eine Function $\chi(q)$ von q; also ist

5) $$u(t,x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dq\,\sin qx\,e^{-\alpha^2q^2t}\left[\alpha^2q\int_0^t\varphi(\lambda)\,e^{\alpha^2q^2\lambda}\,d\lambda+\chi(q)\right].$$

Nun soll für $t=0$ $u(0,x)=f(x)$ sein; ist dieser Uebergang ein gleichmässig stetiger, so folgt aus der Gleichung

$$F(t,q)=\int_0^\infty u(t,\lambda)\sin q\lambda\,d\lambda$$

6) $$F(0,q)=\chi(q)=\int_0^\infty f(\lambda)\sin q\lambda\,d\lambda$$

und mithin ist

7) $$u(t,x)=\frac{2}{\pi}\alpha^2\int_0^\infty q\,dq\,\sin qx\int_0^t\varphi(\lambda)\,e^{-\alpha^2q^2(t-\lambda)}\,d\lambda$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dq\,\sin qx\,e^{-\alpha^2q^2t}\int_0^\infty f(\lambda)\sin q\lambda\,d\lambda.$$

In den beiden zweifachen Integralen lässt sich bei jedem endlichen Werthe von x zufolge der Annahme der absoluten Integrirbarkeit von $f(\lambda)$ die Reihenfolge der Integrationen vertauschen; also wird

$$8)\qquad u(t,x)=\frac{2}{\pi}\alpha^2\int_0^t\varphi(\lambda)\,d\lambda\int_0^\infty q\sin qx\, e^{-\alpha^2q^2(t-\lambda)}\,dq$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\lambda)\,d\lambda\int_0^\infty \sin qx\sin q\lambda\, e^{-\alpha^2q^2t}\,dq.$$

Es ist aber

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2q^2t}\cos qx\,dq=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2t}}\,e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2t}}$$

und durch Differentiation nach x folgt hieraus:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2q^2t}q\sin qx\,dq=\frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3}\,x\,e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2t}}t^{-3/2},$$

ferner ist:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2q^2t}\sin qx\sin q\lambda\,dq=\frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha\sqrt{t}}\left[e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4\alpha^2t}}-e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4\alpha^2t}}\right].$$

Man erhält sonach statt der Gleichung 8)

$$9)\qquad u(t,x)=\frac{x}{2\alpha\sqrt{\pi}}\int_0^t\varphi(\lambda)\,e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2(t-\lambda)}}(t-\lambda)^{-3/2}\,d\lambda$$
$$+\frac{1}{2\alpha\sqrt{t\pi}}\int_0^\infty f(\lambda)\left[e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4\alpha^2t}}-e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4\alpha^2t}}\right]d\lambda.$$

Setzt man noch im ersten Integral

$$\frac{x}{2\alpha\sqrt{(t-\lambda)}}=y,\quad \frac{x\,d\lambda}{4\alpha(t-\lambda)^{3/2}}=dy$$

und bildet man das zweite zwischen den Grenzen $\lambda=-\infty$ bis $\lambda=+\infty$, indem man bei negativen Werthen von λ die Definition $f(-\lambda)=-f(\lambda)$ einführt, so wird

$$10)\quad u(t,x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}}^\infty\varphi\left(t-\frac{x^2}{4\alpha^2y^2}\right)e^{-y^2}\,dy+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-2\alpha y\sqrt{t})\,e^{-y^2}\,dy.$$

Die geforderten Eigenschaften lassen sich nun sämmtlich nachweisen. Ich übergehe die Beweise für die gleichmässige Convergenz der Werthe von $u(t,x)$ an der Grenze $x=0$ nach $\varphi(t)$ und an der Grenze $t=0$ nach $f(x)$, da dieses aus der Formel 9) nach derselben Methode, wie bei den Gleichungen 6) und 12) im vorigen Paragraphen folgt.

Für $x = 0$ convergirt $u(t, x)$ nach null; denn es ist das erste Integral der Gleichung 10) dem Betrage nach kleiner als der Maximalwerth von $\varphi(t)$ multiplicirt mit

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-y^2}\, dy$$

und dies wird mit beliebig wachsenden Werthen von x beliebig klein. Dass auch das andere Integral null wird, erkennt man am einfachsten aus der Gleichung 9) vermittelst des zweiten Mittelwerthsatzes. Denn von dem Theile

$$\int\limits_0^{\infty} f(\lambda)\, e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4\alpha^2 t}}\, d\lambda$$

sieht man unmittelbar, dass er dem Betrage nach nicht grösser als

$$e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}} \int\limits_0^{\omega} f(\lambda)\, d\lambda$$

ist, wenn man mit ω denjenigen Werth zwischen 0 und ∞ bezeichnet, für welchen das vorstehende Integral dem Betrage nach am grössten wird. Im andern Theile betrachte man die Abschnitte

$$\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\omega} f(\lambda)\, e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4\alpha^2 t}}\, d\lambda + \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \int\limits_{\omega}^{\infty} f(\lambda)\, e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4\alpha^2 t}}\, d\lambda.$$

Die Grösse ω sei so gewählt, dass

$$\int\limits_{\omega}^{\infty} abs[f(\lambda)]\, d\lambda < \delta$$

ist; dann ist auch bei allen Werthen von x

$$\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \int\limits_{\omega}^{\infty} f(\lambda)\, e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4\alpha^2 t}}\, d\lambda < \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}}\,\delta,$$

denn der zweite Factor in diesem Integral ist positiv und höchstens gleich 1. Das andere Integral aber wird, wenn wir x grösser als ω annehmen, nach dem zweiten Mittelwerthsatz gleich

$$\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4\alpha^2 t}} \int\limits_{\Theta\omega}^{\omega} f(\lambda)\, d\lambda$$

und convergirt daher bei beliebig wachsenden Werthen von x nach null. Auch die absolute Integrirbarkeit von $u(t, x)$ in Bezug auf x im unendlichen Intervall folgt aus der absoluten Integrirbarkeit von $f(x)$. Für die erste Ableitung nach x erhält man aus der Gleichung 9):

$$11)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(\lambda)\, e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2(t-\lambda)}} (t-\lambda)^{-3/2}\, d\lambda$$

$$- \frac{x^2}{4\alpha^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(\lambda)\, e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2(t-\lambda)}} (t-\lambda)^{-5/2}\, d\lambda$$

$$- \frac{1}{4\alpha^3\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} \int_0^\infty f(\lambda) \left[(x-\lambda)\, e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4\alpha^2 t}} - (x+\lambda)\, e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4\alpha^2 t}} \right] d\lambda.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, wie früher, das geforderte Verhalten von $\frac{\partial u}{\partial x}$ an der Grenze $x = 0$. Ferner erfordert nur das Glied

$$\int_0^\infty f(\lambda)(x-\lambda)\, e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4\alpha^2 t}}\, d\lambda$$

die besondere Darlegung, dass es für $x = \infty$ verschwindet; denn bei den anderen Termen geht dies unmittelbar aus dem Umstande hervor, dass die Exponentialfunction mit negativem Exponenten von höherer Ordnung verschwindet als jede algebraische Potenz. Das vorstehende Integral zerlege man nun wiederum in die Theile von 0 bis ω und ω bis ∞, wobei ω so fixirt ist, dass

$$\int_\omega^\infty abs[f(\lambda)]\, d\lambda < \delta$$

ist. Der grösste Betrag, welchen der Factor $(x-\lambda)\, e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4\alpha^2 t}}$ annehmen kann, während λ das ganze Intervall durchläuft, ist $\alpha\sqrt{2t}\, e^{-1/2}$. Mithin wird

$$\int_\omega^\infty f(\lambda)(x-\lambda)\, e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4\alpha^2 t}}\, d\lambda < \delta\,\alpha\sqrt{2t}\, e^{-1/2},$$

und

$$\int_0^\omega f(\lambda)(x-\lambda)\, e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4\alpha^2 t}}\, d\lambda$$

wird, wenn x beliebig viel grösser als ω angenommen ist, gleich

$$(x-\omega)\, e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4\alpha^2 t}} \int_{\Theta\omega}^{\omega} f(\lambda)\, d\lambda;$$

dieser Ausdruck convergirt nach null, wenn x unendlich wird.

Durch weitere Differentiationen erhält man die höheren Ableitungen, welche stetige Functionen im ganzen innern Raume sind.

Wir haben für das Verhalten im Unendlichen die Voraussetzung eingeführt, dass $u(t, x)$ und $\frac{\partial u}{\partial x}$ für $x = \infty$ verschwinden. Es fragt sich, ob man nicht bei den gegebenen Grenzbedingungen eine andere Lösung der Aufgabe erhält, wenn man von der Function $u(t, x)$ nur verlangt, dass sie nebst ihrer ersten Ableitung für $x = \infty$ endlich bleibt? Dieses ist aber nicht der Fall. Denn ist U eine andere Function, welche diesen neuen Bedingungen genügt, so ist die Differenz $\omega = U - u$ eine im Innern des betrachteten Raumes, nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen nach x, stetige Function, welche nebst ihrer ersten Ableitung auch für $x = \infty$ endlich bleibt und welche ferner die Eigenschaften hat, dass

$$1)\quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \qquad 2)\quad \omega = 0 \text{ für } x = 0, \qquad 3)\quad \omega = 0 \text{ für } t = 0$$

ist. Es kann gezeigt werden, dass diese Function constant gleich null ist. Das gelingt vermittelst eines Verfahrens, welches von Heine (Theorie der Kugelfunctionen, 2. Aufl., Bd. 2) im Anschluss an Dirichlet angegeben worden ist. Es ist, wenn wir mit z einen beliebig grossen Werth bezeichnen:

$$\int_0^z dx \int_0^t \omega \frac{\partial \omega}{\partial t} dt = \frac{1}{2} \int_0^z \omega^2 dx,$$

$$\int_0^t dt \int_0^z \omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dx = \int_0^t dt \left[\omega \frac{\partial \omega}{\partial x}\right]_0^z - \int_0^t dt \int_0^z \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 dx,$$

also:

$$\frac{1}{2} \int_0^z \omega^2 dx = \alpha^2 \int_0^t dt \left[\omega \frac{\partial \omega}{\partial x}\right]_0^z - \alpha^2 \int_0^t dt \int_0^z \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Lässt man nun z unendlich werden, so bleibt der Voraussetzung nach

$$\alpha^2 \int_0^t dt \left[\omega \frac{\partial \omega}{\partial x}\right]_0^z$$

sicherlich endlich; also muss

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \omega^2 dx + \alpha^2 \int_0^t dt \int_0^z \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 dx$$

endlich bleiben. Dies ist aber nur dann möglich, wenn für $x = \infty$ die Function ω null wird; denn andernfalls würde jedes dieser Integrale positiv unendlich. Dann ist aber

$$\frac{1}{2} \int_0^z \omega^2 dx = -\alpha^2 \int_0^t dt \int_0^z \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 dx$$

und da die linke Seite positiv, die rechte negativ ist, so muss ω im Allgemeinen und wegen der Stetigkeit durchaus null sein.

Die Lösung des Problems in der Form 9) oder 10), nicht in der Form 7), giebt aber noch zu einer andern Bemerkung Anlass. Diese Gleichungen liefern ein Integral der partiellen Differentialgleichung, ohne dass man von der Function $f(x)$ die absolute Integrirbarkeit zwischen 0 und ∞ zu fordern braucht, wenn nur das Integral von

$$f(x - 2\alpha y \sqrt{t})\, e^{-y^2}\, dy$$

zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ einen bestimmten Werth repräsentirt.

Dies tritt z. B. dann immer ein, wenn $f(x)$ eine durchweg stetige Function ist, die auch für $x = \infty$ endlich bleibt. In diesem Falle giebt es immer nur eine Lösung der gestellten Aufgabe, welche in der angegebenen Form ausgedrückt ist.

Auch hier gilt die bereits oben gemachte Bemerkung über die Willkürlichkeit des Nullpunktes der Temperatur, woraus man von vornherein ersieht, dass es unwesentlich ist, ob man eine Function $f(x)$ einführt, die im Unendlichen den Werth null oder irgend einen endlichen Werth hat.

Würde die Function $f(x)$ im Unendlichen selbst unendlich, so kann die Formel 10) zwar auch noch einen bestimmten Werth behalten und eine Lösung der Differentialgleichung liefern, doch würde der Beweis der Eindeutigkeit neue Untersuchungen erfordern.

§ 4.
Die Kugel.

Mit Einführung von Polarcoordinaten r, ϑ, ψ für das Innere und die Oberfläche einer Kugel erhält die Differentialgleichung für den Temperaturzustand die Form:

$$1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \frac{\operatorname{cotg} \vartheta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right].$$

Bei einer homogenen mit Masse erfüllten Vollkugel vom Radius R sind die Grenzbedingungen gegeben:

a) $$u = f(r, \vartheta, \psi) \text{ für } t = 0$$

und entweder

b) $$u = \varphi(\vartheta, \psi, t) \text{ für } r = R,$$

d. h. die Temperatur an der Oberfläche, oder wenn die Temperatur des Gases, mit welcher die Kugel in Berührung steht, bekannt ist:

c) $$\frac{\partial u}{\partial r} + h\,[u - \varphi(\vartheta, \psi, t)] = 0 \text{ für } r = R;$$

h bedeutet die Constante der Wärmeleitung an der Oberfläche.

Da die Lösung dieser Aufgabe in Heine's Theorie der Kugelfunctionen genau behandelt ist, obwohl dort, was nicht nothwendig ist, die Entwickelbarkeit der Function φ nach Kugelfunctionen vorausgesetzt, und überdies von vornherein angenommen wird, dass auch die zweiten Ableitungen der gesuchten Function im Innern der Kugel durch Kugelfunctionen darstellbar sind, so kann ich mich darauf beschränken, anzugeben, wie man auch hier nach der nämlichen allgemeinen Methode zur Bildung der Function gelangt, von welcher man dann durch eine nachträgliche Untersuchung zu zeigen hat, dass sie allen geforderten Bedingungen genügt.

Die gesuchte Function muss, da sie stetige erste Ableitungen nach r, ϑ, φ im Innern der Kugel besitzen soll, bei jedem Werth von r kleiner als R, durch eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe darstellbar sein. Wir setzen demnach:

$$2)\qquad u(t, r, \vartheta, \psi) = \sum_0^\infty X_n,$$

wobei

$$3)\qquad X_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int u P^{(n)}(\cos\gamma)\, d\sigma$$

ist. Die Integration erstreckt sich bei jedem Werthe von $r < R$ über die Oberfläche der zugehörigen Kugel; $d\sigma$ ist das Oberflächenelement der Kugel mit dem Radius 1; η und ω sind die Variabelen der Integration, welche an Stelle von ϑ und ψ treten, und

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\eta + \sin\vartheta\sin\eta\cos(\omega-\psi).$$

Die Grössen X_n sind nun Functionen von r, ϑ, ψ und t. Welche Bedingungen müssen dieselben erfüllen, damit die Function u die Differentialgleichung 1) befriedigt?

Multiplicirt man die Differentialgleichung 1), indem man sich dieselbe in η und ω geschrieben denkt, mit $P^{(n)}(\cos\gamma)$, was auch kürzer mit $P^{(n)}$ bezeichnet werden soll, und integrirt alsdann beide Seiten über die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius 1, so wird die linke Seite gleich:

$$4)\qquad \int\frac{\partial u}{\partial t}P^{(n)}\,d\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\int u P^{(n)}\,d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1}\,\frac{\partial X_n}{\partial t}.$$

Die rechte Seite ergiebt, abgesehen von dem Factor α^2,

$$5)\quad \int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}\right)P^{(n)}\,d\sigma + \frac{1}{r^2}\int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\omega^2}\,\frac{1}{\sin^2\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\operatorname{cotg}\eta\,\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)P^{(n)}\,d\sigma.$$

Das zweite Integral lässt sich umformen; es ist $d\sigma = \sin\eta\, d\eta\, d\omega$, und wendet man auf die einzelnen Glieder das Verfahren der theilweisen Integration an, so findet man, dass dieses Integral den Werth bekommt:

$$\int u\left[\frac{\partial^2 P^{(n)}}{\partial\omega^2}\,\frac{1}{\sin^2\eta}+\frac{\partial^2 P^{(n)}}{\partial\eta^2}+\operatorname{cotg}\eta\,\frac{\partial P^{(n)}}{\partial\eta}\right]d\sigma.$$

Gemäss der partiellen Differentialgleichung, welcher die Kugelfunction $P^{(n)}$ genügt, ist der in der Klammer enthaltene Ausdruck gleich

$$-n(n+1)P^{(n)}$$

und sonach erhält man für den Ausdruck 5)

$$6)\qquad \int\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{n(n+1)u}{r^2}\right]P^{(n)}\,d\sigma.$$

Zusammen mit der Gleichung 4) folgt also aus der ursprünglichen Differentialgleichung für die Grössen X_n die partielle Differentialgleichung:

7) $$\frac{\partial X_n}{\partial t}=\alpha^2\left[\frac{\partial^2 X_n}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial X_n}{\partial r}-\frac{n(n+1)}{r^2}X_n\right].$$

Es sind also die Grössen X_n Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung der Variabelen ϑ und ψ, welche ausserdem von den Parametern r und t so abhängen, dass sie dieser partiellen Differentialgleichung genügen.

Wie man diese Gleichung zu behandeln hat, ist bekannt. Man zerlege die Function X_n in zwei Summanden:

8) $$X_n = Y_n + Z_n.$$

Der Theil Y_n soll von t unabhängig sein und die Gleichung

9) $$\frac{\partial^2 Y_n}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial Y_n}{\partial r}-\frac{n(n+1)}{r^2}Y_n=0$$

befriedigen. Im Innern der Kugel soll $v=\sum_0^\infty Y_n$ eine nebst ihren ersten Ableitungen stetige Function von r sein, und für $r=R$ soll sie entweder der Bedingung b) oder der Bedingung c) genügen.

Der Theil Z_n soll die Differentialgleichung

10) $$\frac{\partial Z_n}{\partial t}=\alpha^2\left[\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial Z_n}{\partial r}-\frac{n(n+1)}{r^2}Z_n\right]$$

erfüllen; $w=\sum_0^\infty Z_n$ soll innerhalb der Kugel eine nebst ihren ersten Ableitungen stetige Function von r sein, welche für $r=R$ bei allen Werthen von t entweder die Bedingung $w=0$ oder $\frac{\partial w}{\partial r}+hw=0$ erfüllt, und welche für $t=0$ in die Function $f(r,\vartheta,\psi)$ übergeht.

Die Bestimmung von Y_n ist einfach. Denn es folgt aus der Gleichung 9) das allgemeine Integral

$$Y_n=C_n r^n+C'_n r^{-(n+1)},$$

wobei die Grössen C_n und C'_n, von r unabhängig, Kugelfunctionen der Variabelen ϑ und ψ sind. Da v eine stetige Function von r auch für $r=0$ sein soll, so ist $C'_n=0$, also

$$v=\sum_0^\infty r^n C_n \quad\text{und}\quad C_n=\frac{2n+1}{4\pi}\frac{1}{r^n}\int v\,P^{(n)}\,d\sigma.$$

Wenn nun die Function v für $r=R$ gleichmässig stetig in den Werth $\varphi(\vartheta,\psi,t)$ übergeht, so ist

$$C_n=\frac{2n+1}{4\pi}\frac{1}{R^n}\int\varphi(\eta,\omega,t)\,P^{(n)}\,d\sigma,$$

also

11) $$v=\frac{1}{4\pi}\sum_0^\infty(2n+1)\frac{r^n}{R^n}\int\varphi(\eta,\omega,t)\,P^{(n)}\,d\sigma,$$

oder wenn man summirt:

12) $$v=\frac{R(R^2-r^2)}{4\pi}\int\frac{\varphi(\eta,\omega,t)\,d\sigma}{(R^2-2rR\cos\gamma+r^2)^{3/2}}.$$

Dass dieses Integral in der That den geforderten Grenzbedingungen genügt, ist nach dem von Poisson angegebenen Verfahren zu beweisen.

Liegt die Bedingung c) vor, so erhält man aus der Gleichung für $r=R$:

$$\frac{\partial v}{\partial r}+h[v-\varphi(\eta,\omega,t)]=0$$

$$\left[\int\frac{\partial v}{\partial r}P^{(n)}\,d\sigma\right]_{r=R}+h\left[\int v\,P^{(n)}\,d\sigma\right]_{r=R}-h\int\varphi\,P^{(n)}\,d\sigma=0.$$

Da

$$\left[\int v\,P^{(n)}\,d\sigma\right]=\frac{4\pi}{2n+1}C_n R^n$$

ist, so wird

$$13)\qquad C_n(n+hR)R^{n-1}=\frac{h}{4\pi}(2n+1)\int\varphi\,P^{(n)}\,d\sigma$$

und schliesslich ist wiederum der Beweis für den Grenzübergang zu liefern.

Die Bestimmung von Z_n aber, die sich durch die Substitution $Z_n=\frac{1}{r}V_n$ etwas vereinfachen lässt, erfordert die Einführung von Cylinderfunctionen und ist von Poisson, Riemann und Heine in den genannten Werken erledigt worden; nur fehlt, wenigstens bei einer beliebig gegebenen stetigen Function $f(r,\vartheta,\psi)$, der Nachweis, dass die Function w für $t=0$ in die gegebene Function f übergeht. Von Heine ist diese Lücke noch nicht vollständig ausgefüllt worden; doch lässt sie sich auf Grund der Heine-schen Untersuchungen* beseitigen. Ich will daher im folgenden Paragraphen das einfachste Beispiel dieser Art erledigen, welches neuerdings nach einem von Herrn Christoffel angedeuteten, jedoch minder einfachen Verfahren von Herrn Fudzisawa** gelöst worden ist. Die Methode, welche ich anwende, wird sich auch in dem allgemeinen Falle als nützlich erweisen.

§ 5.

Die Kugel in einem diathermanen Medium.

Die Temperatur w im Innern einer homogenen Kugel, deren Radius der Einfachheit wegen wiederum gleich π gesetzt werde, ist in jedem Punkte nur von dem Abstande x vom Mittelpunkt der Kugel abhängig, wenn dieselbe zur Zeit $t=0$ als Function $F(x)$ von x allein gegeben ist, und wenn die Kugel sich in einem Medium von constanter Temperatur, welche gleich null gesetzt wird, befindet. Die Bestimmung des Wärmezustandes hängt dann nur ab von der Ermittelung einer Function $v=xw$, welche den Bedingungen genügen muss:

---

* Einige Anwendungen der Residuenrechnung von Cauchy. (Journal f. Math., Bd. 89. Handbuch der Kugelfunctionen, 2. Aufl., Bd. 2 S. 213.)

** Ueber eine in der Wärmeleitungstheorie auftretende, nach den Wurzeln einer transscendenten Gleichung fortschreitende unendliche Reihe. Diss. Strassburg 1886.

a) $$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

b) $$v = x\,F(x) = f(x) \quad \text{für} \quad t = 0,$$

c) $$v = 0 \quad \text{für} \quad x = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + h v = 0 \quad \text{für} \quad x = \pi.$$

Bezeichnet man mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ der Grösse nach geordnet die Wurzeln der transscendenten Gleichung

1) $$\lambda \cos \pi \lambda + h \sin \pi \lambda = 0,$$

so wird nach dem von Fourier angegebenen Verfahren

2) $$v = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n\, e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 t} \sin(\lambda_n x)$$

und die Coefficienten b sollen der Gleichung genügen:

3) $$b_n = \frac{\int_0^\pi f(x) \sin(\lambda_n x)\, dx}{\int_0^\pi (\sin \lambda_n x)^2\, dx} = \frac{4\lambda_n}{2\pi\lambda_n - \sin 2\lambda_n \pi} \int_0^\pi f(x) \sin \lambda_n x\, dx.$$

Es ist zu beweisen, dass die Reihe 2) für $t = 0$ nach dem Werthe $f(x)$ convergirt.

Bei jedem Werthe $t > 0$ convergirt die Reihe 2) gleichmässig; sie stellt für $x = \pi$ eine stetige Function von t dar, nämlich

4) $$\psi(t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n\, e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 t} \sin(\lambda_n \pi).$$

Im ersten Paragraphen ist nun die Aufgabe gelöst, das Integral u der partiellen Differentialgleichung zu bilden, wenn die Grenzbedingungen gegeben sind

b') $$u = f(x) \quad \text{für} \quad t = 0,$$

c') $$u = 0 \quad \text{für} \quad x = 0, \qquad u = \psi(t) \quad \text{für} \quad x = \pi.$$

Diese Function ist dargestellt durch die Reihe:

5) $$u = \frac{2}{\pi}\alpha^2 \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k-1} k \sin kx \int_0^t \psi(z)\, e^{-k^2\alpha^2(t-z)}\, dz$$
$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-k^2\alpha^2 t} \sin kx \int_0^\pi f(z) \sin kz\, dz.$$

Setzt man hier für $\psi(z)$ gemäss der Gleichung 4) die Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} b_n\, e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 z} \sin(\lambda_n \pi)$$

und kann man nachweisen, dass dann die Function u identisch wird mit der Function v [Gleich. 2)], so ist damit bewiesen, dass v für $t=0$ nach dem Werthe $f(x)$ convergirt.

Es ist

$$\psi(z)\, e^{-k^2\alpha^2(t-z)} = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n\, e^{-\alpha^2 k^2 t - \alpha^2 z(\lambda_n^2 - k^2)} \sin(\lambda_n \pi)$$

und das Integral dieser Reihe zwischen den Grenzen ε und t kann durch gliedweise Integration gebildet werden, wenn ε ein beliebig kleiner Werth >0 ist, weil die rechte Seite gleichmässig convergirt, so lange z grösser als null ist. Es ist also

$$\int_{\varepsilon}^{t} \psi(z)\, e^{-k^2\alpha^2(t-z)}\, dz = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin(\lambda_n \pi)\, \frac{e^{-\alpha^2 k^2 t - \alpha^2 \varepsilon(\lambda_n^2 - k^2)} - e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 t}}{\alpha^2(\lambda_n^2 - k^2)}.$$

Lässt man ε nach null convergiren, so folgt, weil die rechte Seite auch für $\varepsilon=0$ zufolge der Beschaffenheit der Wurzeln λ_n gleichmässig convergirt:

$$6)\qquad \int_{0}^{t} \psi(z)\, e^{-k^2\alpha^2(t-z)}\, dz = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin(\lambda_n \pi)\, \frac{e^{-\alpha^2 k^2 t} - e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 t}}{\alpha^2(\lambda_n^2 - k^2)}.$$

Mithin wird u durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$\begin{aligned} 7)\qquad u = {} & \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k-1}\, k \sin kx\, e^{-\alpha^2 k^2 t} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_n}{\lambda_n^2 - k^2} \sin(\lambda_n \pi) \\ & - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k-1}\, k \sin kx \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_n}{\lambda_n^2 - k^2}\, e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 t} \sin(\lambda_n \pi) \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{k=\infty} \sin kx\, e^{-\alpha^2 k^2 t} \int_0^{\pi} f(z) \sin kz\, dz. \end{aligned}$$

Die zweite Summe ist nichts Anderes, als die Function v in Form der gewöhnlichen Fourier'schen Reihe, die nach Sinus der ganzen Vielfachen von x fortschreitet. Denn es ist

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v \sin kx\, dx &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n\, e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 t} \int_0^{\pi} \sin(\lambda_n x) \sin kx\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n\, e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 t}\, k\, (-1)^k \frac{\sin(\lambda_n \pi)}{\lambda_n^2 - k^2}. \end{aligned}$$

Damit also $v=u$ sei, muss nur noch gezeigt werden, dass die erste und dritte Summe in der Gleichung 7) sich aufheben, dass also

$$(-1)^k\, k \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_n}{\lambda_n^2 - k^2} \sin(\lambda_n \pi) = \int_0^{\pi} f(z) \sin kz\, dz$$

ist. Setzt man für b_n seinen Werth aus der Gleichung 3) ein, und berücksichtigt man, dass die Reihe auf der linken Seite gleichmässig convergirt, so ist die linke Seite gleich

$$(-1)^k k \int_0^\pi f(z)\, dz \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{4\lambda_n}{2\pi\lambda_n - \sin 2\lambda_n \pi} \cdot \frac{\sin(\lambda_n \pi)\sin(\lambda_n z)}{\lambda_n^2 - k^2},$$

und dieser Ausdruck ist gleich der rechten Seite, falls die Gleichung besteht:

$$8) \qquad \sin kz = (-1)^k k \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{4\lambda_n}{2\pi\lambda_n - \sin 2\lambda_n \pi} \cdot \frac{\sin(\lambda_n \pi)\sin(\lambda_n z)}{\lambda_n^2 - k^2}.$$

Dies aber ist die von Heine bewiesene Reihe, welche er als Verallgemeinerung der Lagrange'schen Interpolationsformel für gewisse transscendente Functionen in der allgemeinen Form

$$\frac{\Theta(\alpha, x)}{\tilde{\omega}(\alpha)} = \sum \frac{\Theta(\lambda, x)}{(\alpha - \lambda)\,\tilde{\omega}'(\lambda)}$$

bewiesen hat. Im vorliegenden Falle ist

$$\tilde{\omega}(\lambda) = \lambda \cos \pi\lambda + h \sin \pi\lambda, \quad \Theta(k, x) = \sin kx.$$

Gleichartige Untersuchungen sind auch von Herrn Dini ausgeführt worden.*

Es ist also — und das wird auch für das allgemeinere Wärmeproblem von Nutzen sein — die einfachere Darstellung, welche nach Wurzeln der transscendenten Gleichung $\sin(\lambda\pi) = 0$ fortschreitet, in Zusammenhang gebracht mit der Darstellung, bei welcher die Wurzeln der Gleichung

$$\lambda \cos \pi\lambda + h \sin \pi\lambda = 0$$

vorkommen. Ist im ersten Falle der Convergenzbeweis geführt, so kann er auch im zweiten ohne neue Convergenzuntersuchungen gewonnen werden.

* Serie di Fourier, Pisa 1880, S. 139 flgg.

Kleinere Mittheilungen.

IV. Der Kronecker'sche Subdeterminantensatz.

Da aus der Determinante $a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_v} \mid e_{\lambda_1} e_{\lambda_v}$ dadurch, dass man den combinatorischen Producten $a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_v}$ und $e_{\lambda_1} e_{\lambda_v}$ und andererseits deren einzelnen Factoren die Quotienten

$$\frac{\overline{a_{\varkappa_1}} \,..\, \overline{a_{\varkappa_v}}\, a_1 \,..\, a_n}{\overline{a_{\varkappa_1}} \,..\, \overline{a_{\varkappa_v}}\, a_1 \,..\, a_n}, \quad \frac{\overline{e_{\lambda_1}} \,..\, \overline{e_{\lambda_v}}\, e_1 \,..\, e_n}{\overline{e_{\lambda_1}} \,..\, \overline{e_{\lambda_v}}\, e_1 \,..\, e_n}$$

beifügt, zwei gleichwerthige Determinantenausdrücke entstehen, so kann man sich in der aus der Gleichung

$$a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_v} \mid e_{\lambda_1} e_{\lambda_v} = a_{\varkappa_1} \mid e_{\lambda_1} . a_{\varkappa_v} \mid e_{\lambda_v} - a_{\varkappa_1} \mid e_{\lambda_v} . a_{\varkappa_v} \mid e_{\lambda_1}$$

hervorgehenden Gleichung

$$a_{\varkappa_1} \mid e_{\lambda_1} - \frac{a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_v} \mid e_{\lambda_1} e_{\lambda_v}}{a_{\varkappa_v} \mid e_{\lambda_v}} = \frac{a_{\varkappa_1} \mid e_{\lambda_v} . a_{\varkappa_v} \mid e_{\lambda_1}}{a_{\varkappa_v} \mid e_{\lambda_v}}$$

jene Quotienten mit den Grössen $a_{\varkappa_1}$, $a_{\varkappa_v}$, $a_{\varkappa_1} a_{\varkappa_v}$ und e_{λ_1}, e_{λ_v}, $e_{\lambda_1} e_{\lambda_v}$ verbunden denken. Der Subtrahendus geht dann aus dem Minuendus durch Verminderung der v um 1 hervor und nimmt für $v = 2$ den Werth an, den der rechts stehende Quotient für $v = 1$ hat, während für $v = n$ der Minuendus den Werth $a_{\varkappa_1} e_{\lambda_1}$ erhält. Setzt man daher $v = 2, .., n$ und addirt die dadurch entstehenden Gleichungen, so erhält man den Kronecker'schen Subdeterminantensatz

$$a_{\varkappa_1} e_{\lambda_1} = \sum_1^n \frac{a_{\varkappa_1} \mid e_{\lambda_v} . a_{\varkappa_v} \mid e_{\lambda_1}}{a_{\varkappa_v} \mid e_{\lambda_v}} \quad (\overline{a_{\varkappa_1}} \,..\, \overline{a_{\varkappa_v}}\, a_1 \,..\, a_n \mid \overline{e_{\lambda_1}} \,..\, \overline{e_{\lambda_v}}\, e_1 \,..\, e_n),$$

in dem, was wir durch die in Klammern gesetzte Subdeterminante andeuten, die rechts stehenden Determinanten mit den Quotienten

$$\frac{\overline{a_{\varkappa_1}} \,..\, \overline{a_{\varkappa_v}}\, a_1 \,..\, a_n}{\overline{a_{\varkappa_1}} \,..\, \overline{a_{\varkappa_v}}\, a_1 \,..\, a_n}, \quad \frac{\overline{e_{\lambda_1}} \,..\, \overline{e_{\lambda_v}}\, e_1 \,..\, e_n}{\overline{e_{\lambda_1}} \,..\, \overline{e_{\lambda_v}}\, e_1 \,..\, e_n}$$

zu verbinden oder, kürzer ausgedrückt, durch die Subdeterminante

$$\overline{a_{\varkappa_1}} \,..\, \overline{a_{\varkappa_v}}\, a_1 \,..\, a_n \mid \overline{e_{\lambda_1}} \,..\, \overline{e_{\lambda_v}}\, e_1 \,..\, e_n$$

zu ergänzen sind.

Wendet man den Kronecker'schen Subdeterminantensatz, der in der gegebenen Form sich auf die Determinante $a_1 \,..\, a_n \mid e_1 \,..\, e_n$ bezieht, auf die Determinante

$$a_1 p_1 a_1 e_1 \,..\, a_1 e_m \mid a_2 p_2 a_2 e_1 \,..\, a_2 e_m$$

an, so ergiebt sich, da die in ihr auftretenden combinatorischen Producte infolge der Gleichung $p = p\,\varepsilon_1 . e_1 + \ldots + p\,\varepsilon_m . e_m$ verschwinden, für die bilineare Form $a_1 p_1 a_2 p_2$ die Darstellung

$$a_1 p_1 a_2 p_2 = \sum_1^m \frac{a_1 p_1 \,|\, a_2 e_{\lambda_v} . a_1 e_{\varkappa_v} \,|\, a_2 p_2}{a_1 e_{\varkappa_v} \,|\, a_2 e_{\lambda_v}}$$

$$(\overline{a_1 e_{\varkappa_1}} \ldots \overline{a_1 e_{\varkappa_v}}\, a_1 e_1 \ldots a_1 e_m \,|\, \overline{a_2 e_{\lambda_1}} \ldots \overline{a_2 e_{\lambda_v}}\, a_2 e_1 \ldots a_2 e_m),$$

in der die den Werthen $v = 1, \ldots, m$ entsprechenden Determinanten $a_1 p_1 | a_2 e_{\lambda_v}$ und $a_1 e_{\varkappa_v} | a_2 p_2$, da sie offenbar nur die Grössen $p_1 \varepsilon_{\varkappa_1}, \ldots, p_1 \varepsilon_{\varkappa_v}$ und $p_2 \varepsilon_{\lambda_1}, \ldots, p_2 \varepsilon_{\lambda_v}$ enthalten, von einander unabhängige lineare Formen für p_1 und p_2 sind.

Aus ihr erhält man durch einfaches Weglassen der Indices der Grössen a_1, a_2 und p_1, p_2 für die quadratische Form $a^2 p^2$ die Darstellung

$$a^2 p^2 = \sum_1^m \frac{a^2 p \,|\, e_{\lambda_v} . a^2 e_{\varkappa_v} \,|\, p}{a^2 e_{\varkappa_v} \,|\, e_{\lambda_v}} \quad ((a^2)^{m-v}\, \overline{e_{\varkappa_1}} \ldots \overline{e_{\varkappa_v}}\, e_1 \ldots e_m \,|\, \overline{e_{\lambda_1}} \ldots \overline{e_{\lambda_v}}\, e_1 \ldots e_m)$$

und darnach insbesondere die Darstellung

$$a^2 p^2 = \sum_1^m \frac{a^2 e_{\varkappa_v} \,|\, p^2}{a^2 e_{\varkappa_v}^2} \quad ((a^2)^{m-v}\, \overline{e_{\varkappa_1}} \ldots \overline{e_{\varkappa_v}}\, e_1 \ldots e_m^2).$$

Berlin, den 5. Juli 1885. LEOPOLD SCHENDEL.

V. Ueber einige Eigenschaften des Systems der Kegelschnitte, die drei feste Gerade berühren.

(Hierzu Taf. I Fig. 1—8.)

Vorbemerkung. Zwei Ebenen E_1 und E_2 seien quadratisch aufeinander bezogen und die beiden Dreiecke der Hauptpunkte zur Deckung gebracht. Auf dieses Dreieck ABC beziehen sich die homogenen Coordinaten in beiden Ebenen (Fig. 1). Ferner seien die Coordinaten als die Abstände selbst definirt, die ein Punkt von den drei Seiten dieses Dreiecks hat, und es mögen die Coordinaten für beide Ebenen mit x_1, x_2, x_3 bezeichnet werden. Dann entspricht einer Geraden g_1 durch die Ecke C, die gegeben ist durch

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 0,$$

eine Gerade g_2, deren Gleichung

$$\beta x_1 + \alpha x_2 = 0.$$

Bildet nun die erste Gerade mit CB und CA die Winkel γ_1 und γ_2, so ist

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

und für die entsprechende Gerade g_2 wird

$$\frac{x_2}{x_1} = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2}.$$

Daraus folgt aber, dass die Gerade g_2 mit AC den Winkel γ_1 und mit BC den Winkel γ_2 bildet, d. h. „g_1 und g_2 liegen symmetrisch zur Halbirungslinie des Winkels ACB; g_2 ist das Bild von g_1, gespiegelt an dieser Winkelhalbirenden.“

Nehmen wir nun einen beliebigen Kegelschnitt, der CA und CB berührt und dessen Brennpunkte F_1 und F_2 seien. Zieht man dann CF_1 und CF_2, so müssen diese beiden Strahlen nach einem bekannten Satze mit den beiden Tangenten durch C gleiche Winkel einschliessen. Dann ergiebt sich aber sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes:

> „Hat man einen Kegelschnitt, der zwei Dreiecksseiten, z. B. CA und CB, berührt, und zieht man vom Schnittpunkte der beiden Tangenten nach dem einen Brennpunkte, so geht der diesem Verbindungsstrahl entsprechende durch den andern Brennpunkt des Kegelschnittes.“

Aus diesen schon bekannten Eigenschaften ergeben sich einige vielleicht neue Sätze.

I.

Wählen wir (Fig. 2) einen Kegelschnitt, der die drei Dreiecksseiten berührt. Sind f_1 und f_2 seine beiden Brennpunkte, so müssen nach dem obigen Satze Af_1 und Af_2, Bf_1 und Bf_2, Cf_1 und Cf_2 entsprechende Strahlen sein. Dem Schnittpunkte f_1 der drei Strahlen Af_1, Bf_1, Cf_1 muss also der Schnittpunkt f_2 der drei entsprechenden Strahlen Af_2, Bf_2, Cf_2 entsprechen, d. h.:

> „Die beiden Brennpunkte eines jeden dem Dreieck ABC einbeschriebenen Kegelschnittes sind entsprechende Punkte in der Transformation.“

Daraus folgt dann aber: Lässt man den einen Brennpunkt f_1 auf einer Curve n^{ter} Ordnung F_1^n fortrücken und construirt immer den zugehörigen Kegelschnitt, der dem Dreieck ABC einbeschrieben ist, so beschreibt der andere Brennpunkt in jedem dieser Kegelschnitte die Curve F_2^{2n}, die der Curve F_1^n in der quadratischen Transformation entspricht. Diese Curve F_2^{2n} ist dann also von der $(2n)^{\text{ten}}$ Ordnung und hat die Ecken ABC zu n-fachen Punkten. Wir haben also:

> „Lässt man in dem zweifach-unendlichen System der Kegelschnitte, die drei feste Gerade berühren, den einen Brennpunkt auf einer beliebigen Curve F_1^n n^{ter} Ordnung fortrücken, so beschreibt der andere Brennpunkt eine Curve F_2^{2n} von der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung, welche die Schnittpunkte der drei festen Geraden zu n-fachen Punkten hat.“

> „Lässt man dagegen den einen Brennpunkt auf einer Curve von der $(2\nu)^{\text{ten}}$ Ordnung fortrücken, welche die Schnittpunkte der drei Geraden zu ν-fachen Punkten hat, so rückt der andere Brennpunkt auf einer Curve von der ν^{ten} Ordnung weiter.“

In dem einfach unendlichen System von Kegelschnitten, das zu einer Curve F_1^n gehört, sind auch $(3n)$ Doppelgerade enthalten. Denn ist X (Fig. 3) einer der Schnittpunkte von F_1^n mit AC, so entspricht diesem die Gegenecke B, und BX doppelt gezählt ist der Kegelschnitt, der zum Punkte X gehört. F_1^n schneidet aber jede Dreiecksseite in n Punkten, also sind $3n$ solche zerfallene Kegelschnitte in unserm System vorhanden.

II.

Die Curven F_1^n und F_2^{2n} sind projectivisch eindeutig aufeinander bezogen; denn jedem Punkte von F_1 entspricht ein Punkt von F_2 und umgekehrt. Daraus folgt:

„Ist F_1 eine rationale Curve, so ist es auch die F_2."

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser beiden Curven sind immer die „grossen Axen" der Kegelschnitte des Systems. Um nun die Enveloppe aller dieser Axen zu bestimmen, stellen wir zunächst allgemein folgende Frage: Wenn zwei beliebige Curven C^n und C^m von der n^{ten} beziehungsweise m^{ten} Ordnung projectivisch eindeutig aufeinander bezogen sind, von welcher Classe ist die Enveloppe der Verbindungslinien entsprechender Punkte?

Ist S (Fig. 4) ein beliebiger Punkt und ziehen wir durch ihn irgend einen Strahl λ, so schneidet dieser die C^n in n Punkten und diesen entsprechen n Punkte auf der C^m. Die Verbindungslinien dieser letzten Punkte mit S wollen wir als Strahlen μ bezeichnen. Dann ist klar, dass jedem Strahl λ im Allgemeinen n Strahlen μ entsprechen. Jedem Strahl μ entsprechen aber offenbar m Strahlen λ, entsprechend den m Schnittpunkten, welche ein Strahl μ mit der C^m liefert. Zwischen den Strahlen λ und μ besteht aber dann eine (mn)-Correspondenz, also kann es $(m+n)$-mal eintreten, dass ein Strahl λ mit einem Strahl μ zusammenfällt, d. h. es giebt $(m+n)$ Tangenten des Erzeugnisses von C^n und C^m, die durch den Punkt S gehen. Die Enveloppe ist also von der $(n+m)^{\text{ten}}$ Classe.

In unserem System von Kegelschnitten ist nun die eine Curve von der n^{ten}, die andere von der $(2n)^{\text{ten}}$ Ordnung. Wir erhalten dann folgenden Satz:

„Die grossen Axen all' der Kegelschnitte, welche einem Dreieck ABC einbeschrieben sind und deren einer Brennpunkt auf einer Curve n^{ter} Ordnung fortrückt, umhüllen eine Curve $(3n)^{\text{ter}}$ Classe."

Die $(3n)$ Geradenpaare oder Doppelgeraden, welche in dem System der Kegelschnitte enthalten sind, berühren natürlich auch diese Curve $(3n)^{\text{ter}}$ Classe.

III.

Wir wollen nun den Ort der Mittelpunkte unseres Kegelschnittsystems untersuchen. — In der quadratischen Transformation entspreche ganz allgemein einer Curve C^n eine andere C^{2n} von der $(2n)^{\text{ten}}$ Ordnung (Fig. 5).

Dann sind beide Curven projectivisch eindeutig aufeinander bezogen und jedem Punkte P_1 von C^n entspricht ein und nur ein Punkt P_2 auf C^{2n} und umgekehrt.

Wenn man nun die Verbindungslinie $P_1 P_2$ immer in constantem Verhältniss $\varkappa:\mu$ theilt, wo liegen die dadurch erhaltenen Punkte Q?

Die Gleichung der Curve C^n sei $f(x_1 x_2 x_3) = 0$. Ist dann $x'_1 x'_2 x'_3$ ein Punkt P_1 derselben, so hat man zunächst

1) $$f(x'_1 x'_2 x'_3) = 0.$$

Dem Punkte P_1 entspricht ein Punkt P_2 mit den Coordinaten $y_1 y_2 y_3$ und man hat

$$y_1 = \frac{\varrho}{x'_1}, \quad y_2 = \frac{\varrho}{x'_2}, \quad y_3 = \frac{\varrho}{x'_3}.$$

Das ϱ bestimmt sich nun aus der Relation, die zwischen den drei homogenen Coordinaten eines Punktes immer statthat. Sind nämlich abc die Längen der drei Dreiecksseiten des Fundamentaldreiecks und ist K sein doppelter Inhalt, so muss man haben

$$a y_1 + b y_2 + c y_3 = K = const. \quad \text{oder} \quad \varrho \cdot \left\{ \frac{a}{x'_1} + \frac{b}{x'_2} + \frac{c}{x'_3} \right\} = K,$$

daraus

$$\varrho = \frac{K x'_1 x'_2 x'_3}{a x'_2 x'_3 + b x'_1 x'_3 + c x'_1 x'_2}.$$

Die Coordinaten $X_1 X_2 X_3$ des Punktes Q, der die Strecke $P_1 P_2$ im bestimmten Abstandsverhältniss $\varkappa:\mu$ theilt, sind aber

2) $$X_1 : X_2 : X_3 = \left(\varkappa x'_1 + \frac{\mu \cdot \varrho}{x'_1}\right) : \left(\varkappa x'_2 + \frac{\mu \cdot \varrho}{x'_2}\right) : \left(\varkappa x'_3 + \frac{\mu \cdot \varrho}{x'_3}\right).$$

Die Gleichungen 1) und 2) bestimmen zusammen den Ort der Punkte Q insofern, als sich aus 2) zu jedem Punkte $x'_1 x'_2 x'_3$, welcher der Gleichung 1) genügt, der zugehörige Punkt Q ergiebt.

Um nun den Grad für den Ort der Punkte Q festzustellen, bestimmen wir die Anzahl der Schnittpunkte dieses Ortes mit einer beliebigen Geraden

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0.$$

Für die Schnittpunkte hat man dann zunächst vermöge der Gleichungen 2)

$$\alpha(\varkappa x'^2_1 + \mu\varrho) x'_2 x'_3 + \beta(\varkappa x'^2_2 + \mu\varrho) x'_1 x'_3 + \gamma(\varkappa x'^2_3 + \mu\varrho) x'_1 x'_2 = 0$$

oder, wenn man den Werth für ϱ einsetzt,

3) $$\begin{aligned} &\alpha(\varkappa a x'_1 x'_2 x'_3 + \varkappa b x'_1 x'_3 + \varkappa c x'_1 x'_2 + \mu K x'_2 x'_3) \\ &+ \beta(\varkappa b x'_2 x'_3 x'_1 + \varkappa c x'_2 x'_1 + \varkappa a x'_2 x'_3 + \mu K x'_3 x'_1) \\ &+ \gamma(\varkappa c x'_3 x'_1 x'_2 + \varkappa a x'_3 x'_2 + \varkappa b x'_3 x'_1 + \mu K x'_1 x'_2) = 0. \end{aligned}$$

Dieser Gleichung und ausserdem der Gleichung 1) müssen also die Coordinaten $x'_1 x'_2 x'_3$ genügen. Die Gleichung 1) ist aber vom n^{ten} Grade, die Gleichung 3) vom dritten Grade, also giebt es $(3n)$ Werthepaare, welche beiden Gleichungen genügen. Der Ort der Punkte Q ist also von der $(3n)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Nehmen wir nun speciell $\varkappa = \mu = 1$, so erhalten wir den Ort der Halbirpunkte oder bei unserm System von Kegelschnitten den Ort der Mittelpunkte. Es ist also der Satz bewiesen:

„Die Mittelpunkte aller einem Dreieck einbeschriebenen Kegelschnitte, deren einer Brennpunkt auf einer Curve n^{ter} Ordnung fortrückt, liegen auf einer Curve $(3n)^{\text{ter}}$ Ordnung."

Von dieser Curve der Mittelpunkte sind $(3n)$ Punkte gegeben; denn wenn die Schnittpunkte der F_1 mit den Dreiecksseiten je mit der Gegenecke verbunden werden, so liefern die Halbirpunkte der so erhaltenen Strecken Punkte der Curve.

IV.

In den beiden Ebenen E_1 und E_2 giebt es vier sich selbst entsprechende Punkte. Da dann für einen Kegelschnitt, der einen dieser vier Punkte zum Brennpunkt hat, der andere auch damit zusammenfällt, so müssen diese Kegelschnitte Kreise sein. In der That sind auch unter den gemachten Voraussetzungen die vier sich selbst entsprechenden Punkte nichts Anderes, als die Mittelpunkte der vier Kreise, welche die drei gegebenen Geraden berühren. Der Mittelpunkt des Kreises, der die drei Geraden auf den Strecken AB, BC, AC berührt, ist der „Einheitspunkt" der Coordinaten.

Geht eine Curve F_1^n durch einen dieser vier Mittelpunkte, so geht auch die entsprechende F_2^{2n} durch den nämlichen Punkt. Durch denselben läuft dann auch die Curve der Mittelpunkte des Kegelschnittsystems.

Die beiden Ebenen E_1 und E_2 sind übrigens involutorisch aufeinander bezogen, d. h. einem Punkte, betrachtet als zur Ebene E_1 oder E_2 gehörig, entspricht immer wieder der gleiche Punkt. Dies ergiebt sich schon daraus, dass für einen Punkt seine drei Coordinaten immer dieselben sind, mag nun der Punkt als zur Ebene E_1 oder E_2 gehörig angesehen werden. Denn die Coordinaten sind ja in beiden Ebenen als die senkrechten Abstände des Punktes von dem nämlichen Dreieck definirt.

Wenn dann aber (Fig. 6) in der Transformation einer Curve F_1^n eine andere F_2^{2n} entspricht und wir betrachten einen der Schnittpunkte von F_1 und F_2 und nennen ihn P_1 und Q_2 als Punkt von E_1 beziehungsweise E_2, so muss also diesem Punkte ein und nur ein Punkt entsprechen und dieser muss offenbar auch wieder zugleich auf F_1 und F_2 liegen. Die $2n^2$ Schnittpunkte von F_1 und F_2 sind einander also paarweise zugeordnet in der Art, dass immer einem Schnittpunkte ein bestimmter anderer entspricht.

Die Curven F_1^n und F_2^{2n} sind durch die Transformation projectivisch eindeutig aufeinander bezogen. Die Enveloppe der Verbindungslinien enthält dann aber auch die Verbindungslinie zweier solcher einander entsprechender Schnittpunkte als Tangente und zwar doppelt gezählt, z. B. als $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$. Die n^2 Verbindungslinien der einander paarweise zugeordneten Schnittpunkte der zwei entsprechenden Curven sind also Doppeltangenten des Erzeugnisses der beiden Curven. Wir haben also:

„Die Curve $(3n)^{\text{ter}}$ Classe, welche von den sämmtlichen grossen Axen des Kegelschnittsystems, das zur Curve F_1^n gehört, umhüllt wird, hat im Allgemeinen n^2 Doppeltangenten."

V.

Wenn f_1 der eine Brennpunkt, AB, AC, BC Tangenten eines Kegelschnittes sind, so findet man (Fig. 7) den andern Brennpunkt bekanntlich in folgender Weise. Man fällt von f_1 aus die Lothe auf die drei Tangenten und construirt den Kreis durch die Fusspunkte. Der durch den gegebenen Brennpunkt f_1 gehende Durchmesser f_1M ist dann die grosse Axe des Kegelschnittes und auf ihm liegt der andere Brennpunkt f_2 so, dass $Mf_1 = Mf_2$. Unter Bezugnahme auf die bereits abgeleiteten Resultate würden sich aus dieser Construction verschiedene Sätze ergeben.

Weiter lässt sich aber Folgendes erkennen. Nimmt man (Fig. 8) den Punkt f_1 auf dem dem Dreieck ABC umschriebenen Kreise an, so liegen nach einem bekannten Satze die Fusspunkte der drei Lothe auf einer Geraden und wenn man zu sämmtlichen Punkten des Kreises diese zugehörigen Fusspunktslinien construirt, so umhüllen diese eine dreispitzige Curve von der vierten Ordnung und dritten Classe. ABC sind die Spitzen derselben, die drei Höhen die Rückkehrtangenten in ihnen.

Wenn man dann aber von f_1 aus auf die zugehörige Linie der Fusspunkte die Senkrechte fällt, so muss auf ihr in unendlicher Ferne der Punkt M gelegen sein; es rückt also auch der andere Brennpunkt f_2 in unendliche Ferne, d. h. der zu einem solchen Punkte f_1 gehörige Kegelschnitt ist eine Parabel und f_1M ihre Axe. Man erkennt dann aber:

„Die Punkte des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises stellen alle Punkte der einen oder andern Ebene vor, deren entsprechende in der andern Ebene im Unendlichen liegen. Oder kürzer: Der unendlich entfernten Geraden entspricht der dem Dreieck ABC umschriebene Kreis."

Die Gleichung dieses Kreises ist

$$a\,x_2x_3 + b\,x_1x_3 + c\,x_1x_2 = 0.$$

Die beliebige Curve F_1^n, auf der wir den Brennpunkt unseres Kegelschnittsystems sich fortbewegen lassen, schneidet nun diesen Kreis in $(2n)$ Punkten und ebensoviel unendlich ferne Punkte hat die entsprechende F_2^{2n}, die reell sind oder nicht, je nachdem die Schnittpunkte von F_1^n mit dem Kreise reell oder imaginär sind. Berührt F_1^n den Kreis, so berührt F_2^{2n} die unendlich ferne Gerade der Ebene E_2. In Bezug auf unser Kegelschnittsystem ergiebt sich daraus:

„In dem System der Kegelschnitte, welche drei Gerade berühren und deren einer Brennpunkt auf einer Curve n^{ter} Ordnung fortrückt, sind im Allgemeinen $(2n)$ Parabeln enthalten." *

Da ferner die zu einem Punkte f_1 des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises gehörige Fusspunktsgerade die Scheiteltangente der betreffenden Parabel ist, so können wir noch hinzufügen:

„Die $(3n)$ Scheiteltangenten dieser Parabeln berühren sämmtlich die genannte Linie vierter Ordnung dritter Classe."

Natürlich berühren die Axen dieser $(3n)$ Parabeln auch sämmtlich die Curve $(3n)^{\text{ter}}$ Classe, welche sich als Enveloppe der Axen des Kegelschnittsystems ergab.

Die Schnittpunkte von F_1^n mit dem Kreise und die unendlich fernen Punkte von F_1^n liefern dann auch die unendlich fernen Punkte der Curve $(3n)^{\text{ter}}$ Ordnung, auf welcher die Mittelpunkte der Kegelschnitte des Systems liegen. Denn es ist klar, dass dieser Mittelpunkt ins Unendliche fällt, wenn entweder f_2 oder f_1 im Unendlichen gelegen. Für die Schnittpunkte von F_1^n mit dem Kreise sind aber die entsprechenden zweiten Brennpunkte f_2 im Unendlichen gelegen und den unendlich fernen Punkten von F_1^n entsprechen n Punkte f_2 auf dem dem Dreieck ABC umschriebenen Kreise. Wir können dies dann so ausdrücken:

„Die Axen der $(3n)$ Parabeln in dem Kegelschnittsystem liefern die $3n$ unendlich fernen Punkte der Curve der Kegelschnittsmittelpunkte."

VI.

Nehmen wir als speciellen Fall für die Curve F_1^n eine Gerade, so erhalten wir folgende Sätze:

„Rückt der eine Brennpunkt eines einem Dreieck ABC einbeschriebenen Kegelschnittes auf einer Geraden fort, so beschreibt der andere Brennpunkt einen Kegelschnitt, der durch die Ecken A, B, C geht. Je nachdem die Gerade den dem Dreieck ABC umschriebenen Kreis schneidet, nicht schneidet oder berührt, ist dieser Kegelschnitt Hyperbel, Ellipse oder Parabel.

Die grossen Axen dieser sämmtlichen Kegelschnitte umhüllen eine Linie von der dritten Classe, welche die gegebene Gerade zur Doppeltangente hat. Dieselbe ist also von der vierten Ordnung. Die Mittelpunkte der sämmtlichen Kegelschnitte des Systems liegen auf einer Curve dritter Ordnung. Verbindet man je einen Schnittpunkt der gegebenen Geraden und einer Dreiecksseite mit der dieser letz-

* Ausserdem gehören auch zu den n unendlich fernen Punkten von F_1^n als zugehörige Kegelschnitte Parabeln, so dass im Ganzen $(3n)$ Parabeln in dem System vorhanden sind.

teren gegenüberliegenden Ecke, so geht diese Curve dritter Ordnung auch durch die Halbirpunkte dieser drei so erhaltenen Strecken."

München, April 1886. Carl Doehlemann, Cand. math.

VI. Berichtigung.

Infolge einer Anregung durch Herrn Professor Dr. Sturm wird hinsichtlich der in Jahrgang XXXI dieser Zeitschrift S. 193 veröffentlichten Arbeit: „Die Erzeugung polarer Elemente für Flächen und Curven durch die projectivische Verallgemeinerung des Schwerpunktes" nachstehende Ergänzung bez. Berichtigung gegeben.

Auf S. 201 finden sich folgende Sätze:

Die Pole, welche der Axe eines Ebenenbüschels in Bezug auf die Schnittcurven seiner Ebenen mit einer Fläche entsprechen, bilden eine gerade Punktreihe.

Die Polarebenen, welche dem Strahle einer Punktreihe in Bezug auf die aus diesen Punkten an eine Fläche gelegten Berührungskegel entsprechen, bilden ein Ebenenbüschel erster Ordnung.

Eine einfache Betrachtung zeigt, dass die hiernach einer gegebenen Geraden entsprechenden beiden polaren Geraden für jede Fläche zusammenfallen. Somit sind auch einer Geraden in Bezug auf eine beliebige Raumcurve nicht, wie auf S. 207 gefolgert wurde, vier, sondern nur zwei Gerade polar zugeordnet.

Ferner ergiebt sich bezüglich der Sätze S. 203 oben aus der vorhergehenden Begründung des § 3:

Enthält der aus einem Punkte der Gegenebene an die Fläche gelegte Berührungskegel unter seinen Strahlen Inflexionstangenten der Fläche, so bildet die Berührungscurve des Kegels längs einer solchen Tangente ein Element mit constanter — von der Lage des Kegelscheitels auf der Inflexionstangente unabhängiger — Krümmung*; die Inflexionstangente selbst wird eine Rückkehrkante des Kegels. Da jede durch diese Rückkehrkante gelegte Ebene eine Tangentialebene der Berührungscurve darstellt, während der zugehörige Berührungspunkt im Allgemeinen nur als einfacher, nicht singulärer Punkt der Fläche auftritt, folgt:

Um den Pol der Ebene ε in Bezug auf eine Fläche zu erhalten, suche man den Pol von ε in Bezug auf die Berührungscurve des Tangentialkegels aus einem Punkte von ε und bringe dann (im Sinne der Ab-

---

* Vergl.: „Beziehungen zwischen den Krümmungen reciproker räumlicher Gebilde", Bd. XXX S. 150 dieser Zeitschrift.

handlung) diejenigen Punkte der Berührungscurve, in welchen die Kegelstrahlen die Fläche osculiren, mit dem Gewichte 1 in Abrechnung.

Entsprechend hat man bei Bestimmung der Polarebene zu einem Punkte in Bezug auf eine Fläche die Tangentialebenen, welche sich in den Inflexionspunkten der Schnittcurve in einer durch den Punkt gehenden Ebene an die Fläche legen lassen, von der Developpabeln dieser Schnittcurve in Abzug zu bringen.

Falls diese bei allen Flächen von höherer als zweiter Ordnung auftretenden ausgezeichneten Elemente sich, wie dies vielfach geschieht, als feste singuläre Gebilde absondern, behält für den eigentlichen, als Rest verbleibenden Tangentialkegel bez. Schnittcurve der Satz die ursprüngliche Fassung.

Tarnowitz, im October 1886. Dr. GEISENHEIMER.

VII.

Die Raumcurven vierter Ordnung erster und zweiter Species in ihrem Zusammenhang mit den Steiner'schen Schliessungsproblemen bei den ebenen Curven dritter Ordnung.

Von

Dr. V. Eberhard

in Breslau.

(Schluss.)

Capitel III.

Zur Theorie der Raumcurven vierter Ordnung erster Species.

§ 12. Das Secantenquadrupel einer C_1^4.

Die unter § 8 entwickelten charakteristischen Eigenschaften für die Stammform des Steiner'schen Secantensystems einer C^4 1. Sp. führen zu einem Satze über diese Curve, der an und für sich als von denselben unabhängig erscheint und der sich für die Theorie der C^4 von fundamentaler Bedeutung erweist. Dieser Satz lautet:

1. Sind s_1, s_2, s_3 irgend drei Secanten der C^4 und $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ drei veränderliche Ebenen durch dieselben, welche der C^4 zum dritten und vierten Male resp. in den Punktepaaren $\mathfrak{p}_1\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{p}_2\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{p}_3\mathfrak{r}_3$ begegnen, und treffen endlich die Ebenen π, ϱ der Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{r}$ die Curve zum vierten Mal in den Punkten $\mathfrak{p}_4$ und $\mathfrak{r}_4$, so schneiden alle möglichen Secanten $|\mathfrak{p}_4\mathfrak{r}_4|$ eine und dieselbe feste Secante s_4 der C^4. Die vier Secanten s sollen ein Secantenquadrupel der Curve heissen.

Beweis. Wir führen die Construction für einen Fall aus und schneiden in der resultirenden Configuration Γ die C^4 mittels einer Ebene σ_4 durch die Secante $|\mathfrak{p}_4\mathfrak{r}_4|$ in der supplementären Secante s_4. Es wird gezeigt werden, dass alle möglichen Secanten $|\mathfrak{p}_4\mathfrak{r}_4|$ die feste Secante s_4 schneiden.

Es genügt nachzuweisen, dass, wenn $\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31}$ drei andere Ebenen durch die Secanten s_1, s_2, s_3, wenn ferner $\mathfrak{p}_{i1}, \mathfrak{r}_{i1}$ $(i=1, 2, 3)$ deren zweite Paare von Durchschnittspunkten mit der C^4 sind, und wenn endlich $\mathfrak{p}_{41}$, $\mathfrak{r}_{41}$ die vierten Schnittpunkte der Ebenen π_1 und ϱ_1 durch die Punkte $\mathfrak{p}_{i1}$

und $\mathfrak{r}_{i1}$ mit der Curve sind, dass dann die Secante $|\mathfrak{p}_{41}\mathfrak{r}_{41}|$ die Secante s_4 schneidet.

Zu dem Ende halten wir in der Configuration Γ zunächst die Ebenen σ_1 und σ_2 fest, variiren aber σ_3; dann schneiden alle dabei resultirenden Secanten $|\mathfrak{p}_4\mathfrak{r}_4|$ die Secante s_4 und σ_4 dreht sich um s_4. Denn zufolge der ursprünglichen Configuration Γ sind die vier Secanten s_3, $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2|$, s_4, $|\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2|$ ein Steiner'sches System der C^4.

Durch die Coincidenz der Ebene σ_3 mit der Ebene σ_{31} und folglich auch der Punkte $\mathfrak{p}_3$ und $\mathfrak{p}_{31}$, $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}_{31}$ gelangen wir zu einer Configuration Γ_1. In derselben halten wir die Ebenen σ_1 und σ_{31}, also auch die Secanten $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_{31}|$ und $|\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_{31}|$ fest, variiren aber die Ebene σ_2. Dann werden alle dabei resultirenden Strahlen $|\mathfrak{p}_4\mathfrak{r}_4|$ die feste Secante s_4 schneiden und also auch derjenige Strahl, welcher der Ebene σ_{21} im Gebilde Γ_2 zugehört.

In dieser Configuration Γ_2 halten wir die Ebenen σ_{21} und σ_{31} fest, variiren aber σ_1. Dann schneiden alle dabei auftretenden Geraden $|\mathfrak{p}_4\mathfrak{r}_4|$ und unter ihnen auch die der Ebene σ_{11} entsprechende, nämlich die Secante $|\mathfrak{p}_{41}\mathfrak{r}_{41}|$, die Secante s_4. W. z. b. w.

Dieser Satz lässt sich in verschiedenen Fassungen aussprechen. Die beiden wichtigsten sind die folgenden:

2. Sind auf einer C^4 irgend drei Secanten s_1, s_2, s_3 und ein Punkt $\mathfrak{p}$ gegeben, und schneidet man aus diesem mittels einer Ebene π die C^4 in dem Punkttripel $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$, projicirt schliesslich dieses aus $s_1 s_2 s_3$ auf die C^4 als Punkttripel $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$, so laufen die allen möglichen Ebenen π entsprechenden Verbindungebenen ϱ der Punkte $\mathfrak{r}_i$ sämmtlich durch einen und denselben Punkt $\mathfrak{r}$ der C^4. Und:

3. Aus den vier Strahlen eines Secantenquadrupels werden die vier Schnittpunkte einer Ebene mit der C^4 auf diese allemal wiederum als vier Punkte einer Ebene projicirt, und folglich:

4. Die 4.4 Berührungspunkte der 4.4 aus den Strahlen eines Quadrupels an die C^4 möglichen Berührungsebenen liegen zu je 4 in 64 Ebenen. Durch jeden Berührungspunkt gehen 16 dieser 64 Ebenen und durch je zwei zu verschiedenen Secanten gehörige je vier. Es sind im Ganzen $(4.3.2)^2$ solche Systeme von je vier Ebenen möglich, welche alle 16 Berührungspunkte zugleich enthalten.

Die Sätze 3) und 4) lauten in ihren wichtigen Umkehrungen, wie folgt:

5. Schneiden irgend zwei Ebenen π und ϱ die C^4 resp. in den Punkten $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_4$ und $\mathfrak{r}_1 \dots \mathfrak{r}_4$, und zieht man die vier Secanten $|\mathfrak{p}_i\mathfrak{r}_i|$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, welche im Falle $\pi = \varrho$ in vier Tangenten der C^4 übergehen, so bestimmen irgend vier diesen supplementäre Secanten resp. Tangenten $s_1 \dots s_4$ der C^4 ein Quadrupel.

Als ein interessanter specieller Fall des Satzes 1 ist noch der folgende zu bemerken:

6. Schneidet man die C^4 aus einer festen Secante S mittels dreier veränderlicher Ebenen in drei veränderlichen Punktepaaren $\mathfrak{p}_1\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{p}_2\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{p}_3\mathfrak{r}_3$, so treffen die Ebenen $[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3]$ und $[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3]$ die C^4 zum vierten Male in einem Paare $\mathfrak{p}_4\mathfrak{r}_4$, dessen Verbindungsgerade allemal dieselbe feste Secante s' der C^4 schneidet. Oder:

7. Ist auf der C^4 eine Secante s und ein Punkt $\mathfrak{p}$ gegeben, und legt man durch $\mathfrak{p}$ eine Ebene π, welche die C^4 ausser in $\mathfrak{p}$ noch in $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ schneidet, so werden $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ aus s auf die C^4 als Punkte $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ einer Ebene ϱ projicirt, und alle Ebenen ϱ laufen durch einen festen Punkt $\mathfrak{r}$ der C^4.

An das Auftreten der Beigeordneten s' einer beliebigen Secante s knüpfen sich zwei interessante Fragen:

1. Welche Secanten s der C^4 sind sich selbst beigeordnet?

2. Welche Secanten s der C^4 sind ihren Beigeordneten selbst wieder beigeordnet?

§ 13. Hilfssätze.

1. Unter den Secantenflächen $F^2(s)$ einer C^4 giebt es im Allgemeinen und höchstens vier Kegelflächen.

Beweis. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein ausserhalb der C^4 gelegener Punkt $\mathfrak{o}$ Scheitel eines der besagten vier Kegel sei, besteht darin, dass $\mathfrak{o}$ gemeinsamer Schnittpunkt der drei Projectionskegel dritter Ordnung der C^4 aus irgend dreien ihrer Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ ist. Zwei dieser, die Kegel $K^3{}_\mathfrak{p}$ und $K^3{}_\mathfrak{q}$, schneiden sich aber ausser in der Grundcurve und dem Strahle $|\mathfrak{p}\mathfrak{q}|$ in noch einer Raumcurve IV. Ordn. 1. Sp., und diese schneidet die C^4 in acht Punkten. Der Kegel $K^3{}_\mathfrak{r}$ trifft daher die C'^4 in nur vier ausserhalb der C^4 gelegenen Punkten $\mathfrak{o}$.

2. Die vier Scheitel $\mathfrak{o}$ bestimmen das gemeinsame Polartetraeder aller Flächen $F^2(s)$ der C^4.

Beweis. Denn sind $\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{o}_2$ irgend zwei der vier Scheitel, und schneidet eine Ebene durch die Gerade $|\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}_2|$ die C^4 in den vier Punkten $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_4$, so laufen zufolge der Definition von $\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{o}_2$ die Geraden $|\mathfrak{o}_1\mathfrak{p}_1|$ und $|\mathfrak{o}_1\mathfrak{p}_2|$ durch die Punkte $\mathfrak{p}_4$ und $\mathfrak{p}_3$ und die Geraden $|\mathfrak{o}_2\mathfrak{p}_1|$ und $|\mathfrak{o}_2\mathfrak{p}_4|$ durch die Punkte $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_3$. Es sind somit $\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{o}_2$ einander conjugirt bezüglich jeder Fläche $F^2(s)$ des Büschels C^4.

3. Die vier Schnittpunkte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_4$ der C^4 mit einer Ebene π und die vier Tangenten p_1, p_2, p_3, p_4 in diesen vier Punkten werden aus jedem Scheitel $\mathfrak{o}$ auf die C^4 als die vier Schnittpunkte $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_4$ der Curve mit einer Ebene ϱ und in die vier Tangenten r_1, r_2, r_3, r_4 in den vier Punkten $\mathfrak{r}$ projicirt.

Beweis. Denn das Punktepaar $\mathfrak{p}_i\mathfrak{r}_i$ und das Geradenpaar $p_i r_i$ ist harmonisch getrennt durch den Scheitel $\mathfrak{o}$ und seine Polarebene.

4. Die Ebenen $[p_i r_i]$ doppelter Berührung mit der C^4 bestimmen vier Ebenenbüschel zweiter Classe, die Büschel der Tangentialebenen der Kegel $K^2(\mathfrak{o})$.

5. In jedem dieser Büschel treten vier vierpunktig berührende Ebenen der C^4 auf, die 16 Wendungsberührebenen der Curve in ihren 16 Schnittpunkten mit den 4 Seitenflächen des Tetraeders der 4 Scheitel $\mathfrak{o}$.

§ 14. Folgerungen.

Verbindet man die Sätze 3 und 5 aus § 12 mit Satz 3 aus § 13, so gelangt man zu folgendem wichtigen Schlusse:

1. Sind s_1, s_2, s_3, s_4 Strahlen eines Quadrupels der C^4, so bestimmen irgend vier ihnen supplementäre Secanten der Curve ein zweites Quadrupel. Mit Hilfe dieses Satzes beweist man leicht den folgenden:

2. Schneiden irgend drei Ebenen α, β, γ die C^4 resp. in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{b}_4$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{c}_4$, so schneiden die vier Ebenen $[\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_i \mathfrak{c}_i]$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ die C^4 zu vierten Malen in den vier Punkten $\mathfrak{d}_i$ einer Ebene δ.

Beweis. Nach Satz 5 in § 12 bestimmen die vier Secanten $|\mathfrak{a}_i \mathfrak{d}_i|$ ein Quadrupel, und folglich gilt nach Satz 1 dieses Paragraphen dies auch von den vier Secanten $|\mathfrak{b}_i \mathfrak{c}_i|$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Dann aber müssen zufolge des Satzes 3 in § 12 die vier Punkte $\mathfrak{d}_i$ in einer Ebene δ liegen. Herr Reye, der Entdecker dieses Satzes, hat denselben als speciellen Fall eines allgemeinern Theorems über die Schnittpunktsysteme der C^4 mit Flächen zweiter Ordnung gegeben. Derselbe hat auch aus seinem Satze die wesentlichsten Consequenzen gezogen, weshalb ich hier auf dieselben verzichte.

§ 15. Erweiterungen der Schliessungsprobleme.

Der zuletzt entwickelte Satz kann dazu dienen, aus mehreren gegebenen Steiner'schen Secantensystemen andere durch sie mitbestimmte zu construiren. Alle diesbezüglichen Ausführungen sind in folgendem einen Satze zusammengefasst, aus welchem sie sich als specielle Fälle unmittelbar ableiten lassen.

1. Sind s_{1i}, s_{2i}, s_{3i} $(i = 1 \ldots n)$ drei Steiner'sche Secantensysteme erster Ordnung der C^4, $s_{1i} = |\mathfrak{a}_{1i} \mathfrak{b}_{1i}|$, $s_{2i} = |\mathfrak{a}_{2i} \mathfrak{b}_{2i}|$, $s_{3i} = |\mathfrak{a}_{3i} \mathfrak{b}_{3i}|$, so schneiden die n Ebenenpaare $\alpha_i = [\mathfrak{a}_{1i} \mathfrak{a}_{2i} \mathfrak{a}_{3i}]$ und $\beta_i = [\mathfrak{b}_{1i} \mathfrak{b}_{2i} \mathfrak{b}_{3i}]$ die C^4 in n Punktepaaren $\mathfrak{a}_{4i}$ und $\mathfrak{b}_{4i}$, deren n Verbindungsgeraden $s_{4i} = |\mathfrak{a}_{4i} \mathfrak{b}_{4i}|$ ein viertes Steiner'sches Secantensystem bestimmen.

Beweis. Es seien $\mathfrak{p}_{1i}$, $\mathfrak{p}_{2i}$, $\mathfrak{p}_{3i}$ drei Steiner'sche Polygone der Systeme s_{1i}, s_{2i}, s_{3i} $(i = 1 \ldots n)$ und $\mathfrak{p}_{41}$ der vierte Schnittpunkt der C^4 mit der Ebene $\pi_1 = [\mathfrak{p}_{11} \mathfrak{p}_{21} \mathfrak{p}_{31}]$, dann liegen allgemein die Punkte $\mathfrak{p}_{1i}$, $\mathfrak{p}_{2i}$,

$\mathfrak{p}_{3i}$, $\mathfrak{p}_{4i}$ in der Ebene π_i, also die Punkte $\mathfrak{p}_{1n}$, $\mathfrak{p}_{2n}$, $\mathfrak{p}_{3n}$, $\mathfrak{p}_{4n}$ in der Ebene π_n und folglich die Punkte $\mathfrak{p}_{11}$, $\mathfrak{p}_{21}$, $\mathfrak{p}_{31}$, ... $\mathfrak{p}_{4,(n+1)}$ in der Ebene π_1, d. h. der Punkt $\mathfrak{p}_{4,(n+1)}$ coincidirt mit $\mathfrak{p}_{41}$.

Es folgt hieraus als specieller Fall:

2. Bestimmen die n Secanten s_1, s_2, ... s_n ein Steiner'sches System, so thun es auch die n Begleitenden.

3. Bestimmen die drei Secantensysteme s_{1i}, s_{2k}, s_{3l} ($i = 1 \dots p_1$, $k = 1 \dots p_2$, $l = 1 \dots p_3$) drei Steiner'sche Systeme erster Ordnung, und ist M das kleinste Multiplum von p_1, p_2, p_3, so constituiren die M Secanten s_{4m} ($m = 1 \dots M$) ein viertes Steiner'sches System ($s_{ik} = |\mathfrak{a}_{ik}\mathfrak{b}_{ik}|$). Der Beweis fällt mit dem des Satzes 1 identisch zusammen, wenn man in den drei gegebenen Systemen dreimal M Secanten zählt.

4. Sind die drei Secantensysteme $s_{1i} = |\mathfrak{a}_{1i}\mathfrak{b}_{1i}|$ ($i = 1 \dots p_1$), $s_{2k} = |\mathfrak{a}_{2k}\mathfrak{b}_{2k}|$ ($k = 1 \dots p_2$), $s_{3l} = |\mathfrak{a}_{3l}\mathfrak{b}_{3l}|$ ($l = 1 \dots p_3$) drei Steiner'sche Systeme resp. von den Ordnungen r_1, r_2, r_3, und ist M das kleinste Multiplum von p_1, p_2, p_3, N das kleinste Multiplum von $p_1 . r_1$, $p_2 . r_2$, $p_3 . r_3$, so bestimmen die M Secanten $s_{4m} = |\mathfrak{a}_{4m}\mathfrak{b}_{4m}|$ ein viertes Steiner'sches System von der Ordnung $\frac{N}{M}$.

Man kann den Satz 1 dieses Paragraphen noch nach einem andern Princip specialisiren und erhält dadurch eine zweite Reihe von Beziehungen.

5. Sind die beiden Systeme von n und $2n$ Secanten:

$$\Sigma_1 = s_{11} \dots s_{1n} \quad (s_{1i} = |\mathfrak{a}_{1i}\mathfrak{b}_{1i}|),$$
$$\Sigma_2 = s_{21} \dots s_{2n},\ s_{31} \dots s_{3n}$$

zwei Steiner'sche Systeme der ersten Ordnung, so bestimmen die n Secanten $s_{4i} = |\mathfrak{a}_{4i}\mathfrak{b}_{4i}|$ ein drittes Steiner'sches System der ersten Ordnung. Der Beweis ist ebenso zu führen wie der Beweis des Satzes 1. Durch Umkehrung des Satzes 5 ergiebt sich:

6. Sind die Secantensysteme $s_{1i} = |\mathfrak{a}_{1i}\mathfrak{b}_{1i}|$ und $s_{2i} = |\mathfrak{a}_{2i}\mathfrak{b}_{2i}|$ Steiner'sche der ersten Ordnung, und legt man durch je zwei Gerade $|\mathfrak{a}_{1i}\mathfrak{a}_{2i}|$ und $|\mathfrak{b}_{1i}\mathfrak{b}_{2i}|$ zwei Ebenen α_i und β_i, welche die C^4 noch resp. in den Punktepaaren $\mathfrak{a}_{3i}\mathfrak{a}_{4i}$ und $\mathfrak{b}_{3i}\mathfrak{b}_{4i}$ schneiden, so bestimmen die $2 . n$ Secanten $\dots s_{3i} = |\mathfrak{a}_{3i}\mathfrak{b}_{3i}| \dots$, $s_{4k} = |\mathfrak{a}_{4k}\mathfrak{b}_{4k}| \dots$ ein drittes Steiner'sches System gleichfalls von der ersten Ordnung.

7. Sind die α_i und β_i Tangentialebenen der C^4, coincidiren also die Paare s_{3i} und s_{4i}, so bestimmen die n Strahlen s_{3i} ein Steiner'sches System der zweiten Ordnung.

Beweis zu 6. Angenommen, die $2n^{\text{te}}$ Secante, welche das System der $2n-1$ Secanten $s_{31} \dots s_{3n}$, $s_{41} \dots s_{4,(n-1)}$ zu einem Steiner'schen ergänzt, wäre nicht s_{4n}, sondern eine Secante s, so würde derselben zufolge des Satzes 5 ein Strahl $|\mathfrak{a}_{2n}\mathfrak{b}_2|$ im System $s_{21}s_{22} \dots$ entsprechen, welcher dasselbe zu einem Steiner'schen erster Ordnung ergänzt, und der von dem Strahl s_{2n} verschieden wäre, was unmöglich.

8. Ist das System der $3.n$ Secanten $s_{11} \dots s_{1,n}$, $s_{21} \dots s_{2,n}$, $s_{31} \dots s_{3,n}$ ein Steiner'sches erster Ordnung ($s_{1i} = |\mathfrak{a}_{1i}\mathfrak{b}_{1i}|$), ($s_{2i} = |\mathfrak{a}_{2i}\mathfrak{b}_{2i}|$), ($s_{3i} = |\mathfrak{a}_{3i}\mathfrak{b}_{3i}|$), so ist das System der n Secanten $s_{4i} = |\mathfrak{a}_{4i}\mathfrak{b}_{4i}|$ ebenfalls ein Steiner'sches System und zwar von der ersten Ordnung. Oder:

Bestimmen die n Secanten $s_{11}, s_{12}, \dots s_{1n}$ ein Steiner'sches System dritter Ordnung, so bestimmen ihre n Begleitenden $s_{41}, s_{42}, \dots s_{4,n}$ ein solches der ersten Ordnung. Und:

9. Bestimmen die n Secanten $s_{1i} = |\mathfrak{a}_{1i}\mathfrak{b}_{1i}|$ ($i = 1 \dots n$) ein Steiner'sches System der ersten Ordnung, und legt man durch je zwei Punkte $\mathfrak{a}_{1i}$ und $\mathfrak{b}_{1i}$ zwei Ebenen α_i und β_i, welche die C^4 resp. noch in den Punkten $\mathfrak{a}_{2i}$, $\mathfrak{a}_{3i}$, $\mathfrak{a}_{4i}$ und $\mathfrak{b}_{2i}$, $\mathfrak{b}_{3i}$, $\mathfrak{b}_{4i}$ schneiden, so bestimmen die $3.n$ Secanten $|\mathfrak{a}_{21}\mathfrak{b}_{21}| \dots |\mathfrak{a}_{2,n}\mathfrak{b}_{2,n}|$, $|\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{b}_{31}| \dots |\mathfrak{a}_{3,n}\mathfrak{b}_{3,n}|$, $|\mathfrak{a}_{41}\mathfrak{b}_{41}| \dots |\mathfrak{a}_{4,n}\mathfrak{b}_{4,n}|$ ein neues Steiner'sches System und zwar der ersten Ordnung. Oder:

Sind die Ebenen α_i und β_i Schmiegungsebenen der C^4 in den Punkten $\mathfrak{a}_{2i}$ und $\mathfrak{b}_{2i}$, so bestimmen die n Secanten $|\mathfrak{a}_{2i}\mathfrak{b}_{2i}|$ ein zweites Steiner'sches System und zwar der dritten Ordnung.

Beweis zu 8. Man construire zu dem gegebenen Secantensystem ein zugehöriges $3n$-Eck $\mathfrak{p}_{11} \dots \mathfrak{p}_{1,n}$, $\mathfrak{p}_{21} \dots \mathfrak{p}_{2,n}$, $\mathfrak{p}_{31} \dots \mathfrak{p}_{3,n}$ ($\mathfrak{p}_{3,n+1} \equiv \mathfrak{p}_{1,1}$) und schneide die C^4 durch die n Ebenen $[\mathfrak{p}_{1i}\mathfrak{p}_{2i}\mathfrak{p}_{3i}]$ noch in n Punkten $\mathfrak{p}_{4i}$, so begegnet die Gerade $|\mathfrak{p}_{4,i-1}\mathfrak{p}_{4i}|$ der Secante s_{4i} und speciell die Gerade $|\mathfrak{p}_{4n}\mathfrak{p}_{41}|$ der Secante $s_{4,n}$.

Beweis zu 9. Man bestimme, von einem beliebigen Curvenpunkte $\mathfrak{p}_{21}$ ausgehend, mittels des Systems $s_{21} \dots s_{2n}$, $s_{31} \dots s_{3n}$, $s_{41} \dots s_{4n}$ auf bekannte Weise den Punkt $\mathfrak{p}_{4,n+1}$ und schneide die C^4 mittels der n Ebenen $[\mathfrak{p}_{2i}\mathfrak{p}_{3i}\mathfrak{p}_{4i}]$ und der Ebene $[\mathfrak{p}_{31}\mathfrak{p}_{41}\mathfrak{p}_{4,n+1}]$ noch in n Punkten $\mathfrak{p}_{1i}$ und dem Punkte $\mathfrak{p}_{1,n+1}$. Dann schneidet aber allgemein $|\mathfrak{p}_{1,i}\mathfrak{p}_{1,i+1}|$ die Secante s_{1i} und speciell $|\mathfrak{p}_{1,n}\mathfrak{p}_{1,n+1}|$ die Secante $s_{1,n}$. Nach Voraussetzung ist aber $\mathfrak{p}_{1,n+1} \equiv \mathfrak{p}_{1,1}$; es folgt daher $[\mathfrak{p}_{3,1}\mathfrak{p}_{4,1}\mathfrak{p}_{4,n+1}] \equiv [\mathfrak{p}_{3,1}\mathfrak{p}_{4,1}\mathfrak{p}_{2,1}]$ und weiter $\mathfrak{p}_{4,n+1} \equiv \mathfrak{p}_{2,1}$.

Capitel IV.

Zur Theorie der Raumcurven vierter Ordnung zweiter Species.

§ 16. Das Tripel conjugirter Secanten einer C_2^4.

Wir hatten in § 9, Satz 4 gefunden:

1*a)* Ein Steiner'sches Secantentripel der C_2^4 ist Diagonaldreikant unendlich vieler der Curve einbeschriebener Tetraeder. Und:

1*b)* Das Diagonaldreikant irgend eines der C_2^4 einbeschriebenen Tetraeders ist ein Steiner'sches Secantentripel.

Diese beiden Sätze bilden den Ausgangspunkt für eine Theorie der Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species. Dieselbe zeigt in ihrer Entwickelung eine so auffallende Analogie mit der Theorie der Kegelschnitte und zwar gerade der wichtigsten Eigenschaften dieser Curven, nämlich der Polareigenschaften, dass die Vermuthung hohe Wahrscheinlichkeit gewinnt, es sei die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species das räumliche Analogon des Kegelschnittes und deswegen für die Theorie der Raumcurven überhaupt von derselben Bedeutung, wie der Kegelschnitt für die Theorie der ebenen Curven. Ich werde die wesentlichsten dieser Eigenschaften, die Polareigenschaften der C_2^4, in Kürze entwickeln.

Es seien $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_4$ irgend vier Curvenpunkte. Ich construire die drei Secanten X_1, X_2, X_3 der Curve, welche die drei Paare Gegenkanten des Tetraeders der vier Punkte $\mathfrak{p}$ schneiden. Ich nenne drei solche Secanten X_1, X_2, X_3 ein Tripel conjugirter Secanten der C_2^4.

Die beschriebene Configuration zeigt höchst wichtige und merkwürdige Lagenverhältnisse. Wir vervollständigen dieselbe noch durch die folgenden Linien:

durch die drei Axen der Secantenflächen, $F^3|X_1X_2|$, $F^3|X_2X_3|$, $F^3|X_3X_1|$, welche wir mit $\mathfrak{X}_3$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ bezeichnen;

durch die drei Nebenaxen der drei Secanten X_1, X_2, X_3, nämlich durch die drei Geraden X_{1n}, X_{2n}, X_{3n}, und:

durch die drei Tangentenpaare $t_{i1}t_{i2}$ der C_2^4, in deren 3.2 Durchschnitten mit den Secanten $\mathfrak{X}_i$.

Die an dieser Configuration sich nunmehr darbietenden ausgezeichneten Beziehungen sind folgende:

Das Steiner'sche Tripel $X_1X_2X_3$ lässt sich zerlegen in drei Steiner'sche Dupel (X_2X_3), (X_3X_1), (X_1X_2), entsprechend den drei einfachen räumlichen Vierecken, welche die Kanten des Tetraeders bilden.

Fasst man das Dupel (X_2X_3) auf, und verlegt man die Ecke $\mathfrak{p}_1$ eines zugehörigen Polygons nach einem Durchschnitt der C_2^4 und der Secante $\mathfrak{X}_1$, so fällt auch der dritte Eckpunkt $\mathfrak{p}_3$ in diesen Punkt, und es coincidirt die Secante $|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3|$ mit der Tangente t_{11}, woraus erhellt:

Die beiden Tangenten t_{11} und t_{12} der Curve in ihren Schnittpunkten mit $\mathfrak{X}_1$ schneiden die Secante X_1. Oder:

Verbindet man die beiden Schnittpunkte $\mathfrak{t}_{i1}$ und $\mathfrak{t}_{i2}$ der C_2^4 und der Secante $\mathfrak{X}_i$ mit der X_i durch Ebenen, so berühren diese die Curve in $\mathfrak{t}_{i1}$ und $\mathfrak{t}_{i2}$. Und:

Legt man aus einem Tripelstrahl X_1 die beiden Berührungsebenen an die C_2^4, so schneidet die Verbindende der beiden Berührungspunkte die beiden anderen Tripelstrahlen X_2 und X_3.

Umgekehrt findet man, wenn X_2 und X_3 gegeben sind, den dritten Strahl X_1 des Tripels, indem man die Gerade $\mathfrak{X}_1$ construirt, in ihren

Schnittpunkten mit der Curve die Tangenten an diese legt und endlich die Axe X_1 der Secantenfläche $F^3|t_{11}t_{12}|$ bestimmt.

Ich nenne $\mathfrak{X}_i$ den Polarstrahl von X_i, und X_i den Polstrahl von $\mathfrak{X}_i$. Irgend eine Secante $X_1 = \mathfrak{Y}_1$ ist daher als Polstrahl in Bezug auf eine zweite Secante $\mathfrak{X}_1$ und als Polarstrahl in Bezug auf eine zweite Secante Y_1 aufzufassen.

Ein Secantenpaar $X_i \mathfrak{X}_i$ zeigt folgende merkwürdige Eigenschaft:

2. Beschreibt eine Secante $\mathfrak{X}_2 = Y_2$ der C_2^4 die Secantenfläche $F^3\binom{X_1}{\mathfrak{Y}_1}$, so beschreibt ihr Polstrahl X_2 die Secantenfläche $F^3(\mathfrak{X}_1)$ des Polarstrahls $\mathfrak{X}_1$ von X_1 und ihr Polarstrahl $\mathfrak{Y}_2$ die Secantenfläche $F^3(Y_1)$ des Polstrahls Y_1 von $\mathfrak{Y}_1$.

Beweis. Es reicht aus, den ersten Theil dieses Satzes zu beweisen. Zu dem Ende legen wir durch X_1 eine Ebene, bestimmen in dieser die Secante $\mathfrak{X}_2$ und in deren Schnittpunkten mit der C_2^4 die Tangenten t_{21} und t_{22}. Die eine, t_{21}, mit der $\mathfrak{X}_1$ zusammen als Strahlen einer Secantenfläche aufgefasst, definiren eine Axe X_2 und ich behaupte, dass diese auch die zweite Tangente t_{22} schneidet.

Man erkennt dies, indem man noch die Axe X_3 der Fläche $F^3|\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2|$ construirt; dann bilden offenbar die drei Secanten X_i ein Steiner'sches Secantentripel. Denn dadurch, dass man die erste Ecke $\mathfrak{p}_1$ eines Steiner-schen Polygons nacheinander erst in die beiden Durchschnitte der C_2^4 und der Secante $\mathfrak{X}_1$, dann in den Berührungspunkt von t_{21} verlegt, findet man drei den drei Axen X_1, X_2, X_3 zugehörige sich schliessende Polygone $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_1$, womit die besagte Eigenschaft nachgewiesen ist.

Damit aber ist nach 1. auch der Hauptsatz bewiesen.

Zwei conjugirte Secanten X_1 und X_2 sind demnach dadurch charakterisirt, dass jeder von der Polare des andern geschnitten wird, und man kann mit Bezug darauf den Satz 2. auch so fassen:

3. Die conjugirten Secanten eines festen Strahles X schneiden ein und dieselbe Axe $\mathfrak{X}$, die Polare des gegebenen Strahles X.

§ 17. Folgerungen aus dem Vorhergehenden.

1. Sind auf der C_2^4 irgend zwei Tripel conjugirter Secanten gegeben X_i und Y_i $(i = 1, 2, 3)$ und construirt man die drei Axen $T_i = |X_i Y_i|$, so sind diese selbst wiederum Leitstrahlen einer und derselben Secantenfläche $F^3(Z)$.

Beweis. Es mögen die drei Axen der drei Secantenflächen $F^3|T_1T_2|$, $F^3|T_2T_3|$, $F^3|T_3T_1|$ zunächst als von einander verschieden angenommen und dementsprechend durch Z_3, Z_1, Z_2 bezeichnet werden. Ich bestimme in den beiden Flächen $F^3(T_1)$ und $F^3(T_2)$ zu Z_3 die beiden Leitstrahlen Z_{31} und Z_{32}, welche die Relationen erfüllen:

$$(X_1 Z_{31} Y_1 Z_3) = 0 \text{ und } (X_2 Z_{32} Y_2 Z_3) = 0.$$

Aus denselben folgt

$$(X_1 X_2 Z_{32} Y_2 Y_1 Z_{31}) = 0$$

und hieraus wegen

$$(X_1 X_2 X_3) = 0 \text{ und } (Y_1 Y_2 Y_3) = 0$$

schliesslich

$$(X_3 Z_{31} Y_3 Z_{32}) = 0.$$

In Worten heisst das:

Die beiden Secanten Z_{31} und Z_{32} bestimmen zusammen mit X_3 und Y_3 ein Steiner'sches Quadrupel, sie schneiden also die Axe $T_3 = |X_3 Y_3|$.

Da es aber immer nur eine Secante der C_2^4 giebt, welche zwei andere Secanten schneidet, also immer nur eine, welche den Secanten T_3 und T_1, und nur eine, welche den Secanten T_3 und T_2 begegnet, so ergiebt sich

$$Z_{31} \equiv Z_2 \text{ und } Z_{32} \equiv Z_1.$$

Es bestehen jetzt zwischen den Strahlen der beiden Tripel und den drei Strahlen Z die drei Beziehungen:

$$(X_1 Z_2 Y_1 Z_3) = 0, \quad (X_2 Z_3 Y_2 Z_1) = 0, \quad (X_3 Z_1 Y_3 Z_2) = 0.$$

Es sei nun $\mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \mathfrak{p}_1$ ein der C_2^4 einbeschriebenes, dem Tripel $X_1 X_2 X_3$ umschriebenes Dreieck und es schneiden die drei Ebenen $[Z_i \mathfrak{p}_i]$ die Curve zu vierten Malen in den drei Punkten $\mathfrak{q}_i$. Dann ist den drei angegebenen Relationen zufolge das Dreieck $\mathfrak{q}_2 \mathfrak{q}_3 \mathfrak{q}_1$ dem Tripel $Y_1 Y_2 Y_3$ umschrieben.

Es mögen die drei Ebenen $[X_i \mathfrak{p}_i]$ sich in dem Curvenpunkte $\mathfrak{p}_4$, und die drei Ebenen $[Y_i \mathfrak{q}_i]$ sich in dem Curvenpunkte $\mathfrak{q}_4$ schneiden. Indem wir dieses Punktepaar der Reihe nach mit den Punktepaaren $(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{q}_1)$, $(\mathfrak{p}_2 \mathfrak{q}_2)$, $(\mathfrak{p}_3 \mathfrak{q}_3)$ combiniren, sehen wir, dass die Secante $|\mathfrak{p}_4 \mathfrak{q}_4|$ und, wie sie, auch die drei anderen $|\mathfrak{p}_i \mathfrak{q}_i|$, von allen drei Secanten Z_i geschnitten werden.

Entweder müssen nun die vier Secanten $|\mathfrak{p}_i \mathfrak{q}_i|$ zusammen mit den drei Secanten Z_i auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, welche durch die C_2^4 geht, oder es coincidiren die drei Secanten Z_i in eine einzige Z.

Der erste Fall ist ausgeschlossen, da durch die C_2^4 nur eine einzige Fläche zweiter Ordnung möglich ist und da eine Gerade dieser Fläche die Curve entweder in einem, oder in drei Punkten schneidet, keinesfalls aber in zweien. Es bleibt somit nur die zweite Möglichkeit, und damit ist der obige Satz 1. bewiesen.

Aus diesem wichtigen Satze 1. lassen sich mehrere interessante Folgerungen ziehen.

2. Gegeben sind irgend zwei Secanten T_2 und T_3 der C_2^4 als Axen zweier Flächen $F^3(T_2)$ und $F^3(T_3)$. Bestimmt man in denselben alle Paare conjugirter Secanten $X_2 X_3$ und zu jedem Paar den dritten Strahl X_1 des Tripels, so sind alle Resultirenden X_1 selbst wiederum Strahlen einer Fläche $F^3(T_1)$, und die drei Axen T selbst schneiden ein und dieselbe Axe Z.

Beweis. Zu jedem Strahl X_2 der $F^3(T_2)$ giebt es einen und nur einen conjugirten Strahl X_3 der Fläche $F^3(T_3)$, nämlich die Axe $|\mathfrak{X}_2 T_3|$ der Fläche $F^3|\mathfrak{X}_2 T_3|$.

Wenn nun $X_2 X_3 X_1$ ein bestimmtes, und $Y_2 Y_3 Y_1$ ein veränderliches Tripel der gegebenen Construction ist, so schneidet nach Satz 1. die Secante $|X_1 Y_1|$ die festen Secanten X_1 und $|T_2 T_3|$; und folglich schneidet die veränderliche Secante Y_1 die feste Secante T_1, w. z. b. w.

3. Sind irgend zwei Tripel conjugirter Secanten gegeben $X_1 X_2 X_3$ und $Y_1 Y_2 Y_3$, so bestimmen die drei Secanten $|X_1 Y_1| = T_{11}$, $|X_2 Y_2| = T_{22}$, $|X_3 Y_3| = T_{33}$ nach Satz 1 eine Secante Z_1. Ganz entsprechend definiren die drei Secanten $|X_1 Y_2| = T_{12}$, $|X_2 Y_3| = T_{23}$ und $|X_3 Y_1| = T_{31}$ eine Secante Z_2 und ganz ebenso die drei Secanten $|X_1 Y_3| = T_{13}$, $|X_2 Y_1| = T_{21}$ und $|X_3 Y_2| = T_{32}$ eine Secante Z_3. Irgend zwei von den drei Secanten Z bestimmen ein Steiner'sches Dupel der dritten Ordnung.

Beweis. Wir bestimmen die Axe A der beiden Secanten Z_1 und Z_2. Sie schneide die $C_2{}^4$ in den beiden Punkten $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}_2$. Wir construiren zu $\mathfrak{a}_2$ im Tripel $X_1 X_2 X_3$ und zu $\mathfrak{b}_2$ im Tripel $Y_1 Y_2 Y_3$ die zugehörigen Steiner'schen Dreiecke $\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3 \mathfrak{b}_1$. Der Definition von Z_2 zufolge wird man diese beiden Dreiecke aus Z_2 auf die Curve als Dreiecke $\mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_4 \mathfrak{b}_3$ und $\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_4$ projiciren.

Es wird die Secante Z_1 von den drei Strahlen $|\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1|$, $|\mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_3|$, $|\mathfrak{a}_4 \mathfrak{b}_4|$, die Secante Z_2 von den drei anderen $|\mathfrak{b}_4 \mathfrak{a}_3|$, $|\mathfrak{b}_3 \mathfrak{a}_1|$, $|\mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}_4|$ geschnitten. Es ist demnach das einfache Sechseck $(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}_4 \mathfrak{b}_4 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_3)$ der $C_2{}^4$ einbeschrieben und dem Secantendupel umschrieben, w. z. b. w.

§ 18. Die Nebenaxen der Strahlen eines Steiner'schen Tripels.

Man kann ein Tripel conjugirter Secanten offenbar auch auf folgende Weise construiren. Man schneide die C^4 durch eine beliebige Ebene ξ in den Ecken eines vollständigen Vierecks $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \mathfrak{p}_4$, construire dessen drei Diagonalpunkte $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ und lege aus diesen an die C^4 die noch möglichen drei dritten Doppelkanten X_1, X_2, X_3. Je zwei der Doppelkanten eines Diagonalpunktes $\mathfrak{x}_i$ sind nämlich das in ihm sich schneidende Paar Gegenseiten des vollständigen Vierecks.

In der Ebene ξ liegen offenbar auch die drei Nebenaxen X_{1n}, X_{2n}, X_{3n} der Strahlen X_1, X_2, X_3. Denn X_{in} wird ja allemal von der zweiten und dritten durch einen Punkt $\mathfrak{x}_i$ von X_i gehenden Doppelkante getroffen.

Aus diesem Grunde folgt auch, dass keine zwei Ebenen des Raumes dasselbe Tripel X_i bestimmen, es müssten sonst die drei Strahlen des Tripels in der Schnittlinie der beiden Ebenen ein und dieselbe Nebenaxe besitzen.

Zu jeder Secante X_1 gehört eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Paaren conjugirter Secanten $X_2 X_3$, welche mit ihr zusammen ein Steiner'sches Tripel definiren. Die Secanten der C_2^4 treten selbst aber in doppelt unendlicher Mannigfaltigkeit auf: Also existirt im Ganzen eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit Steiner'scher Tripel. Andererseits sind die Ebenen im Raume gleichfalls in dreifach unendlicher Mannigfaltigkeit vorhanden, somit auch die ihnen zugehörigen Tripel.

Wir schliessen:

1. Zu jedem gegebenen Tripel conjugirter Strahlen $X_1 X_2 X_3$ existirt allemal eine und nur eine Ebene ξ, welche das Tripel in den drei Diagonalpunkten $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ ihres Schnittpunktvierecks mit der Curve schneidet.

Und folglich:

2. Die drei Nebenaxen X_{1n}, X_{2n}, X_{3n} der Secanten X_1, X_2, X_3 liegen in ein und derselben Ebene ξ.

Wir beweisen diese beiden wichtigen Sätze direct, wie folgt.

Es sei ξ eine beliebige, aber feste Ebene und $X_1 X_2 X_3$ das zugehörige Strahlentripel; $Y_1 Y_2 Y_3$ sei irgend ein zweites Tripel conjugirter Secanten der Raumcurve.

Ich halte die Gerade X_{1n} fest und drehe um dieselbe ξ, so bleibt die Secante X_1 fest, während die beiden anderen $X_2 X_3$ die Fläche $F^3(\mathfrak{X}_1)$ beschreiben. Mit der bestimmten Lage $\xi = \xi'$ wird X_3 in die Secante $X'_3 = |\mathfrak{X}_1 \mathfrak{Y}_1|$ übergehen.

Es ist X'_3 offenbar sowohl conjugirt dem Strahl X_1 als dem Strahl Y_1, d. h. es ist X'_3 der Polstrahl der Axe $|X_1 Y_1|$. Es muss somit X'_2 Secante dieser Axe sein.

Halten wir nun X'_{3n} fest und drehen ξ um X'_{3n} aus der Lage ξ' in die bestimmte Lage ξ'', so coincidirt X'_1 mit Y_1 und es wird X'_2 Secante der Polare von Y_1.

Halten wir endlich Y_{1n} fest und drehen ξ aus der Lage ξ'' in die bestimmte Lage η, so geht X''_2 in die Lage Y_2 und damit X''_3 in die Lage Y_3 über, w. z. b. w.

Aus den Sätzen 1. und 2. ergeben sich wichtige Folgerungen.

3. Sind X_1 und X_2 zwei conjugirte Secanten und X_{1n} und X_{2n} ihre Nebenaxen, welche sich in $\mathfrak{q}$ schneiden, so liegt $\mathfrak{q}$ auf der Axe $|X_1 X_2|$.

Denn diese Axe schneidet sowohl die eine, als auch die andere Nebenaxe als Strahl der beiden Flächen $F^3[X_1]$ und $F^3[X_2]$, und da sie nicht mit ihnen in einer Ebene liegen kann, so muss sie durch ihren gemeinsamen Schnittpunkt gehen.

Im Fall eines Tripels $X_1 X_2 X_3$ bilden daher die drei Nebenaxen desselben ein Dreiseit, dessen Ecken auf den drei Polaren $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$ liegen.

Man kann jetzt die Aufgabe lösen: Durch irgend einen Punkt $\mathfrak{o}$ des Raumes die möglichen Nebenaxen zu construiren.

Construction. Ich schneide aus $\mathfrak{o}$ die C_2^4 durch die drei Doppelkanten $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$, construire zu diesen die Polstrahlen X_1, Y_1, Z_1 und zu diesen die Nebenaxen X_{1n}, Y_{1n}, Z_{1n}. Diese letzteren verbinde ich mit $\mathfrak{o}$ durch die drei Ebenen ξ, η, ζ, so bestimmen in denselben die 3.3 Diagonalpunkte ihrer drei Durchschnittsvierecke mit der C_2^4, das sind die Durchschnittspunkte $\mathfrak{x}_i = (\xi X_i)$, $\mathfrak{y}_i = (\eta Y_i)$, $\mathfrak{z}_i = (\zeta Z_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, drei Tripel X_i, Y_i, Z_i $(1, 2, 3)$. Die drei Paare verbindender Geraden von $\mathfrak{o}$ mit den drei Punktepaaren $(\xi \mathfrak{X}_i)$, $(\eta \mathfrak{Y}_i)$, $(\zeta \mathfrak{Z}_i)$ $(i = 2, 3)$ ergeben die drei durch $\mathfrak{o}$ gehenden Paare von Nebenaxen $\mathfrak{X}_{in}$, $\mathfrak{Y}_{in}$, $\mathfrak{Z}_{in}$.

Zum Schluss mag noch der folgende interessante Satz Platz finden:

Jedes dem Tripel $X_1 X_2 X_3$ umschriebene Steiner'sche Dreieck $\mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \mathfrak{p}_1$ liegt perspectivisch zu dem Dreieck $\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_1$, $(\mathfrak{x}_i = (\xi \mathfrak{X}_i))$ und es bestimmen die Perspectivitätscentra eine zweite Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species.

Capitel V.

Die Steiner'schen Punktsysteme auf der Raumcurve vierter Ordnung erster Species.

§ 19.

Die Theorie der Schliessungsprobleme bei einer C_1^4 lässt sich erweitern und zwar lässt sie sich von Secantensystemen auf Punktsysteme ausdehnen. Ich verstehe unter einem Steiner'schen Punktsystem der C_1^4 ein System von n Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, ..., $\mathfrak{a}_n$, für welches, wenn π_i eine Ebene durch $\mathfrak{a}_i$ ist und wenn $\mathfrak{p}_{i-1} \mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_{i+1}$ die Schnittpunkte der π_i mit der C^4 sind, mindestens ein geschlossenes System von n Ebenen π_1, π_2, ..., π_n existirt oder wenn mindestens ein der C^4 eingeschriebenes einfaches n-Eck $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n$ existirt, dessen n Seitenflächen $\pi_i = [\mathfrak{p}_{i-1} \mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_{i+1}]$ der C^4 zu vierten Malen in den n Punkten $\mathfrak{a}_i$ begegnen.

In Betreff eines solchen Steiner'schen Punktsystems gilt nämlich der wichtige und interessante Satz:

1. In einem Steiner'schen Punktsystem $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, ..., $\mathfrak{a}_n$ der C^4 existiren, je nachdem n von der Form $n = 3m$ oder von den Formen $n = 3m + 1$, $n = 3m + 2$ ist, doppelt unendlich viele der Curve eingeschriebene und dem System umschriebene räumliche n-Ecke oder $3n$-Ecke, und zwar kann jede Ebene durch den Fundamentalpunkt $\mathfrak{a}_1$ als Ebene π_1 und ihre drei Schnitt-

punkte mit der C^4 in jeder Anordnung als die Ecken $\mathfrak{p}_n$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ angenommen werden.

Beweis. Das Polygon der Voraussetzung sei $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n$; ein zweites Polygon der Construction sei $\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \dots \mathfrak{q}_{n+1}$. Es ist zu beweisen, dass $\mathfrak{q}_{n+1}$ identisch $\mathfrak{q}_1$ ist.

Wir halten im Polygon der Punkte $\mathfrak{p}$ die Ecke $\mathfrak{p}_1$ fest und variiren die Ebene π_1 um den Strahl $|\mathfrak{a}_1 \mathfrak{p}_1|$. Dann dreht sich π_2 um die feste Axe $|\mathfrak{a}_2 \mathfrak{p}_1|$ und es beschreibt dabei die Seite $|\mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3|$ die eine Regelschaar der Fläche $F^2|\mathfrak{a}_2 \mathfrak{p}_1|$. Die Projectionsebene dieser aus $\mathfrak{a}_3$, die Ebene π_3, dreht sich somit um die feste Axe $|\mathfrak{a}_3 \mathfrak{p}_4|$ und folglich dreht sich π_4 um die feste Axe $|\mathfrak{a}_4 \mathfrak{p}_4|$.

Durch die fortgesetzte Wiederholung dieser Schlussweise gelangt man allgemein zu der Erkenntniss, dass ausser $\mathfrak{p}_1$ auch die Punkte $\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \dots \mathfrak{p}_{3m+1}$ fest bleiben und folglich die Ebenen π_4, π_7, ... π_{3i+1} sich um feste Axen $|\mathfrak{a}_4 \mathfrak{p}_4|$, $|\mathfrak{a}_7 \mathfrak{p}_7|$, ..., $|\mathfrak{a}_{3i+1} \mathfrak{p}_{3i+1}|$ drehen, dass deshalb die Ebenen π_{3i} und π_{3i+2} sich um die festen Axen $|\mathfrak{a}_{3i} \mathfrak{p}_{3i+1}|$ und $|\mathfrak{a}_{3i+2} \mathfrak{p}_{3i+1}|$ drehen, und dass sich je ein Ebenenpaar π_{3i-1} und π_{3i} in der Secante $|\mathfrak{p}_{3i-1} \mathfrak{p}_{3i}|$ einer Fläche F^2 schneidet.

Da zur Construction der Seiten $|\mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3|$, $|\mathfrak{p}_5 \mathfrak{p}_6|$, ... immer einer der beiden Strahlen $|\mathfrak{a}_2 \mathfrak{p}_1|$ und $|\mathfrak{a}_3 \mathfrak{p}_4|$, $|\mathfrak{a}_5 \mathfrak{p}_4|$ und $|\mathfrak{a}_6 \mathfrak{p}_7|$ u. s. f. ausreicht, so erkennt man in dem Falle $n = 3m$, dass das Polygon $\mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \mathfrak{p}_5 \mathfrak{p}_6 \dots \mathfrak{p}_{3m-1} \mathfrak{p}_{3m}$ ein Steiner'sches bezüglich des Systems von $2m$ Secanten $|\mathfrak{a}_1 \mathfrak{p}_1|$, $|\mathfrak{a}_2 \mathfrak{p}_1|$, $|\mathfrak{a}_4 \mathfrak{p}_4|$, $|\mathfrak{a}_5 \mathfrak{p}_4|$, ... ist und dass folglich dieses System als ein Steiner'sches aufzufassen ist, d. h. dass die einer Ebene π_1 des Büschels $|\mathfrak{a}_1 \mathfrak{p}_1|$ entsprechende Ebene π_{n-1} des Büschels $|\mathfrak{a}_{n-1} \mathfrak{p}_{n-2}|$ durch $\mathfrak{p}_n$ geht.

Drehen wir nun π_1 so um $|\mathfrak{a}_1 \mathfrak{p}_1|$, dass $\mathfrak{p}_2$ identisch $\mathfrak{q}_2$ wird, so wird ganz allgemein $\mathfrak{p}_{3i+2}$ identisch $\mathfrak{q}_{3i+2}$. Halten wir in der neu entstandenen Configuration nunmehr diese Punkte fest und drehen wir die Ebene π_2 um die Axe $|\mathfrak{a}_2 \mathfrak{p}_2| = |\mathfrak{a}_2 \mathfrak{q}_2|$, bis der veränderliche Punkt $\mathfrak{p}_1$ in den Punkt $\mathfrak{q}_1$ rückt, so coincidirt ganz allgemein ein Punkt $\mathfrak{p}_{3i+1}$ mit dem Punkte $\mathfrak{q}_{3i+1}$, und es coincidirt überhaupt irgend ein Punkt $\mathfrak{p}$ mit dem entsprechenden $\mathfrak{q}$. Damit ist aber für den Fall $n = 3m$ die Richtigkeit des Satzes 1. nachgewiesen.

Ist n von der Form $3m+1$ oder $3m+2$, so schliessen wir aus dem eben geführten Beweise, indem wir n mit 3 multipliciren, unmittelbar auch auf die beiden anderen in 1. ausgesprochenen Sätze.

Es entsteht die Frage:

Wenn die Punkte $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n$ ganz beliebig auf der C^4 angenommen sind, wieviel Polygone $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n$ können dann der Curve ein- und dem n-Eck $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n$ umschrieben werden?

Wir haben drei Fälle zu unterscheiden: $n = 3m$, $3m+1$, $3m+2$.

Im ersten Falle sind durch die ersten $n-2$ Punkte $\mathfrak{a}_1$ die beiden übrigen $\mathfrak{a}_{n-1}$ und $\mathfrak{a}_n$ vollkommen und eindeutig bestimmt. Denn nach

Annahme der Punkte $\mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{p}_1$ sind durch die Punkte $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{n-2}$ die sämmtlichen übrigen Punkte $\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3 \cdots \mathfrak{p}_{n-1}$ gegeben, dann aber sind durch die Ebenen $[\mathfrak{p}_{n-2}\mathfrak{p}_{n-1}\mathfrak{p}_n]$ und $[\mathfrak{p}_{n-1}\mathfrak{p}_n\mathfrak{p}_1]$ auch die Punkte $\mathfrak{a}_{n-1}$ und $\mathfrak{a}_n$ ein- für allemal fixirt. Bei allgemeiner Lage der Fundamentalpunkte $\mathfrak{a}$ wird also ein geschlossenes Polygon $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_n\mathfrak{p}_1$ nicht existiren.

Im zweiten Falle, $n = 3m + 1$, werden bei Variation von $\mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{p}_1$ auf der C^4 nach Satz 1 $[\mathfrak{p}_{n-3}\mathfrak{p}_{n-2}\mathfrak{p}_n]$ und $[\mathfrak{p}_{n-2}\mathfrak{p}_n\mathfrak{p}_1]$ sich um zwei feste Curvenpunkte $\mathfrak{b}_{n-2}$ und $\mathfrak{b}_n$ drehen. — Es sei $\mathfrak{p}_n\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_n$ ein dem System $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ zugehöriges N-Eck. Man bestimme $\mathfrak{c}_1 = (C^4[\mathfrak{p}_n\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_n])$, $\mathfrak{c}_n = (C^4[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_n\mathfrak{p}_{n-3}])$, so sind $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_n$ gleichfalls nach 1 allein durch $\mathfrak{b}_{n-2}$, $\mathfrak{a}_{n-2}$, $\mathfrak{a}_{n-1}$, $\mathfrak{a}_n$ fixirt. Die Construction des N-Ecks kommt daher darauf hinaus, $\mathfrak{p}_n$ so zu finden, dass $[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_n\mathfrak{p}_{n-3}]$, $[\mathfrak{p}_{n-3}\mathfrak{p}_n\mathfrak{p}_{n-2}]$, $[\mathfrak{p}_{n-2}\mathfrak{p}_n\mathfrak{p}_1]$ und $[\mathfrak{p}_1 t_{\mathfrak{p}_n}]$ resp. durch $\mathfrak{c}_n$, $\mathfrak{b}_{n-2}$, $\mathfrak{b}_n$ und $\mathfrak{c}_1$ gehen. — Diese Aufgabe aber deckt sich mit der andern, zu den zwei festen Punkten $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}$ der C^4 zwei andere $\mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{q}$ so zu bestimmen, dass $[\mathfrak{c}\mathfrak{p}_n\mathfrak{q}]$ und $[\mathfrak{c}_1\mathfrak{q}\mathfrak{p}_n]$ die C^4 resp in $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}_n$ berühren. Projicirt man aber die C^4 mit ihren Punkten $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}_n$ und deren Verbindungsgeraden aus $\mathfrak{c}_1$ auf eine Ebene, so erkennt man leicht, dass es in letzter Linie gilt, auf einer ebenen C^3 zu zwei festen Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einen Punkt $\mathfrak{x}$ so zu construiren, dass, wenn $\mathfrak{y} = (C^3|\mathfrak{a}\mathfrak{x}|)$, $\mathfrak{z} = (C^3|\mathfrak{b}\mathfrak{x}|)$ ist, die Tangente $t\mathfrak{y}$ durch $\mathfrak{z}$ geht. — Die neun Lösungen dieser Aufgabe bestimmen die einzig möglichen neun der C^4 ein-, dem willkürlichen System $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ umschriebenen N-Ecke $\mathfrak{p}_n\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_n$.

Im dritten Falle, $n = 3m + 2$, endlich ersetzen wir mit Bezug auf Satz 1. das System der ersten $n - 4$ Fundamentalpunkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{n-4}$ durch die beiden Curvenpunkte $\mathfrak{b}_{n-3}$ und $\mathfrak{b}_n$, das System der vier Curvenpunkte $\mathfrak{a}_{n-3}$, $\mathfrak{a}_{n-2}$, $\mathfrak{a}_{n-1}$, $\mathfrak{a}_n$ durch die zwei Punkte $\mathfrak{c}_{n-4}$ und $\mathfrak{c}_1$, und reduciren dadurch die Frage auf die andere: Wenn $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{b}_{n-3}$, $\mathfrak{c}_{n-4}$, $\mathfrak{c}_1$ irgend vier Curvenpunkte sind, wieviele Tetraeder $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_n$, $\mathfrak{p}_{n-3}$, $\mathfrak{p}_{n-4}$ lassen sich dann der Curve einbeschreiben, deren vier Seitenflächen $[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_n\mathfrak{p}_{n-3}]$, $[\mathfrak{p}_n\mathfrak{p}_{n-3}\mathfrak{p}_{n-4}]$, $[\mathfrak{p}_{n-3}\mathfrak{p}_{n-4}\mathfrak{p}_1]$ und $[\mathfrak{p}_{n-4}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_n]$ resp. durch die Punkte $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{b}_{n-3}$, $\mathfrak{c}_{n-4}$, $\mathfrak{c}_1$ gehen?

Es ist aber klar, dass, wenn auch nur ein solches Tetraeder existirt, dann einmal und folglich auch ein- für allemal die Beziehung $(\mathfrak{b}_n\mathfrak{b}_{n-3}\mathfrak{c}_{n-4}\mathfrak{c}_1)^3 = 0$ erfüllt ist. In der That lassen sich aber stets solche Tetraeder und zwar im Ganzen neun construiren.

Construction eines der gesuchten Tetraeder.

Der Einfachheit wegen mögen die gegebenen vier festen Curvenpunkte mit $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$ bezeichnet sein.

Man verbinde die Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ durch eine Ebene und schneide mittels derselben die C^4 zum vierten Male im Punkte $\mathfrak{a}$. Aus $\mathfrak{a}$ lege man durch die Curventangente $t_{\mathfrak{a}_4}$ im Punkte $\mathfrak{a}_4$ eine zweite Ebene und aus dem vierten Schnittpunkte $\mathfrak{b}$ dieser mit der Curve lege man eine Osculationsebene an die Curve mit dem Berührungspunkte $\mathfrak{p}_4$. Es sei $\mathfrak{q}$ der vierte Schnittpunkt der Curve mit der Ebene $[\mathfrak{p}_4 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3]$ und $\mathfrak{r}$ ihr vierter Schnittpunkt mit der Ebene $[\mathfrak{p}_4 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{q}]$. Dann lege man aus $|\mathfrak{p}_4 \mathfrak{r}|$ die vier Berührungsebenen an die C^4, $[|\mathfrak{p}_4 \mathfrak{r}| \mathfrak{p}_1]$, und nehme den jedesmaligen Berührungspunkt $\mathfrak{p}_1$ zur Ecke eines dem Dreikant $\mathfrak{p}_4 |\mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2|$ umschriebenen Dreiecks $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3$. Die Ebene eines dieser Dreiecke geht durch den Punkt $\mathfrak{a}_4$ und dieses Dreieck bestimmt mit $\mathfrak{p}_4$ zusammen das gesuchte Tetraeder. Vergl. § 14 Satz 2.

Es giebt sonach neun der Curve einbeschriebene Tetraeder, welche einem auf der Curve gegebenen Tetraeder umschrieben sind.

Wir stellen die Sätze über die Steiner'schen Punktsysteme auf einer C_1^4 nun nochmals zusammen.

Sind n Punkte $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n$ auf der C^4 beliebig gegeben, so kommt es:

1. wenn n von der Form $3m$ ist, im Allgemeinen kein Mal und im Besondern doppelt unendlich viele Mal vor, dass die n aufeinander folgenden Seitenflächen eines der C^4 eingeschriebenen einfachen N-Ecks der Reihe nach durch die n Punkte $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n$ gehen;
2. wenn aber n von einer der Formen $3m+1$, $3m+2$ ist, stets doppelt unendlich viele Mal vor, dass sich der C^4 $(3n)$-Ecke einschreiben lassen, deren $3n$ Seitenflächen der Reihe nach durch die Punkte $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n$ laufen.

Als specieller Fall dieses letzten Satzes ergiebt sich noch:

3. Irgend zwei Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ der C^4 bestimmen ein Steiner-sches Punktsystem der sechsten Ordnung.

§ 20.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich wiederum auf die Bestimmung Steiner'scher Punktsysteme aus anderen gegebenen. Die diesbezüglichen Sätze lassen sich aus dem folgenden Haupttheorem ableiten.

1. Sind auf der C^4 drei Steiner'sche Punktsysteme erster Ordnung $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \dots \mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \dots \mathfrak{b}_n$ und $\mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2 \dots \mathfrak{c}_n$ gegeben, so wird die Curve von den n Ebenen $[\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_i \mathfrak{c}_i]$ $(i = 1 \dots n)$ in den n Punkten $\mathfrak{d}_i$ eines vierten Steiner'schen Systems geschnitten $(n = 3m)$.

Beweis. Denn sind $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n$, $\mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_n$, $\mathfrak{r}_1 \dots \mathfrak{r}_n$ drei zu den Systemen gehörige Polygone und verbindet man drei entsprechende Punkte dieser, $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{r}_i$ durch eine Ebene η_i, so schneiden drei aufeinander folgende Ebenen η: η_{i-1}, η_i, η_{i+1}, die C^4 zu vierten Malen in drei Punkten $\mathfrak{t}_{i-1}$, $\mathfrak{t}_i$, $\mathfrak{t}_{i+1}$ einer Ebene τ_i durch den Punkt $\mathfrak{d}_i$ und die n Punkte $\mathfrak{t}_i$ bestimmen ein Polygon des Systems $\mathfrak{d}_i$.

1*a)* Sind $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n$ und $\mathfrak{b}_1 \dots \mathfrak{b}_n$ zwei Steiner'sche Punktsysteme, und sind

α) $s_1 \dots s_n$ entweder die n Tangenten der Curve in den Punkten $\mathfrak{b}_1 \dots \mathfrak{b}_n$ oder die Seiten des einfachen n-Ecks $\mathfrak{b}_1 \dots \mathfrak{b}_n$,

β) im Falle $n \equiv 0 \ (mod\,2)$ $s_1 \dots s_{\frac{n}{2}}$ die Verbindenden der $\frac{1}{2}n$ Paare von Gegenecken $\mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{b}_{\frac{1}{2}n+i}$,

so schneiden die n oder $2 \cdot \frac{n}{2}$ Ebenen $[\mathfrak{a}_i s_i]$ die C^4 in n Punkten $\mathfrak{c}_i$ eines dritten Steiner'schen Systems erster Ordnung.

1 *b)* Ist $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n$ ein Steiner'sches Punktsystem erster Ordnung und bedeutet $\mathfrak{a}'_i$ den vierten Schnittpunkt der Curve entweder mit ihrer Schmiegungsebene α_i im Punkte $\mathfrak{a}_i$, oder mit der Verbindungsebene α_i der Punkte $\mathfrak{a}_{i-1}$, $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_{i+1}$, so bestimmen die n Punkte $\mathfrak{a}'_i$ ein zweites Steiner'sches Punktsystem erster Ordnung.

2 *a)* Bestimmen die $n = 9m$ Punkte $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n$ ein Steiner'sches System der ersten Ordnung, so bestimmen die $3m$ Ebenen $[\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_{i+3m} \mathfrak{a}_{i+6m}]$ durch ihre vierten Durchschnitte $\mathfrak{b}_1 \dots \mathfrak{b}_{3m}$ mit der C^4 ein viertes Steiner'sches System, und zwar von der ersten Ordnung. Oder: Bestimmen die $3m$ Punkte $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_{3m}$ ein Steiner'sches System dritter Ordnung, so bestimmen die $3m$ Schmiegungsebenen der C^4 in ihnen durch ihre vierten Durchschnitte $\mathfrak{b}_1 \dots \mathfrak{b}_{3m}$ mit letzterer ein solches der ersten Ordnung. Und:

2 *b)* Schneidet man die C^4 aus den $3m$ Punkten $\mathfrak{b}_i$ eines Steiner'schen Punktsystems erster Ordnung durch die $3m$ Ebenen β_i in den $3m . 3$ Punkten $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_{3m+i}$, $\mathfrak{a}_{6m+i}$, so bestimmen die $9m$ Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_{9m}$ ein Steiner'sches Punktsystem erster Ordnung. Oder: Legt man aus den $3m$ Punkten $\mathfrak{b}_1 \dots \mathfrak{b}_{3m}$ eines Steiner'schen Systems erster Ordnung $3m$ Schmiegungsebenen an die C^4, so bestimmen deren $3m$ Berührungspunkte $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_{3m}$ ein solches der dritten oder der ersten Ordnung.

3 *a)* Sind $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n$ und $\mathfrak{b}_1 \dots \mathfrak{b}_n$ zwei Steiner'sche Systeme der ersten Ordnung, und ist $\mathfrak{p}$ irgend ein Curvenpunkt, so schneiden die n Ebenen $[\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_i]$ die C^4 zu vierten Malen in n Punkten $\mathfrak{c}_i$ eines dritten Systems derselben Ordnung.

3 *b)* Ist $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n$ ein Steiner'sches System erster Ordnung der C^4, und ist s irgend eine Secante der Curve, so schneiden die n Ebenen $[s\mathfrak{a}_i]$ die C^4 zu vierten Malen in n Punkten $\mathfrak{b}_i$ eines zweiten Steiner'schen Systems erster Ordnung.

Das Haupttheorem und seine unter den Rubriken 1, 2, 3 enthaltenen Folgerungen lassen sich leicht auf Systeme höherer Ordnung ausdehnen.

VIII.

Zur Reduction der elliptischen Integrale in die Normalform.

Von

E. Vorsteher,

Cand. math. in Berlin.

In der Theorie der elliptischen Functionen ist es eine der ersten Aufgaben, das Integral

$$\int \frac{dx}{R},$$

wo R die Quadratwurzel aus einer Function vierten Grades bedeutet, in die Normalform überzuführen. Dabei sind die drei Fälle zu unterscheiden, dass von den vier Wurzeln von R^2 entweder alle reell, oder zwei reell und zwei complex, oder endlich alle complex sind. In seiner Abhandlung: „Ueber die Substitutionen der ersten Ordnung und die Umformung der elliptischen Integrale in die Normalform" (Crelle's Journal Bd. 34) hat Richelot gezeigt, wie diese Reduction sich durch Substitutionen der genannten Art ausführen lässt und wie der zweite und dritte der genannten Fälle sich mit Leichtigkeit auf den ersten zurückführen lassen. Dem in der Richelot-schen Abhandlung eingehaltenen Gange folgt Durège in seinem Lehrbuche: Theorie der ellipt. Functionen, 3. Aufl., Leipzig 1878. Da aber Richelot in seiner Abhandlung sich eine kleine Incorrectheit zu Schulden kommen lässt und Durège (§ 13 der Ellipt. Funct.) in weiterer Verfolgung des Richelot'schen Gedankenganges einen Irrthum begeht, der ihn zu falschen Endergebnissen führt, so sei es mir an dieser Stelle gestattet, nochmals auf den so wichtigen Gegenstand zurückzukommen. Aus dem oben angegebenen Grunde betrachte ich dabei nur den Fall, dass die vier Wurzeln von R^2 alle reell sind.

Wir stellen uns also die Aufgabe, das Differential

$$\frac{dx}{R} = \frac{dx}{\sqrt{A(x-p)(x-q)(x-\pi)(x-\varkappa)}}$$

durch eine lineare Substitution auf die Form

$$C \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

zu bringen. Da R verschwindet, wenn x einen der Werthe p, q, π, $\varkappa$ annimmt, $(1-z^2)(1-k^2z^2)$ aber Null wird, wenn z einen der Werthe $+1$,

$-1, +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ erhält, so folgt, dass die Substitution derart sein muss, dass jedem der Werthe p, q, π, $\varkappa$ von x einer der Werthe $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ von z entspreche. Wir wollen festsetzen, dass dem Werthe p der Werth $+1$, dem Werthe q der Werth -1, den Werthen π und $\varkappa$ resp. die Werthe $+\frac{1}{k}$ und $-\frac{1}{k}$ entsprechen. Den ersten beiden Festsetzungen genügen wir, indem wir setzen

$$1)\qquad \frac{x-p}{x-q} = P\frac{1-z}{1+z},$$

den letzten beiden, indem wir

$$2)\qquad \frac{x-\pi}{x-\varkappa} = Q\frac{1-kz}{1+kz}$$

setzen.

Substituirt man in diesen Gleichungen für x die Werthe p, q, π, $\varkappa$ und für z die ihnen entsprechenden Werthe $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$, so erhält man zur Bestimmung von P, Q, k die folgenden Gleichungen:

$$3)\qquad \begin{aligned} \frac{\pi-p}{\pi-q} &= -P\frac{1-k}{1+k}, & \frac{p-\pi}{p-\varkappa} &= Q\frac{1-k}{1+k}, \\ \frac{\varkappa-p}{\varkappa-q} &= -P\frac{1+k}{1-k}, & \frac{q-\pi}{q-\varkappa} &= Q\frac{1+k}{1-k} \end{aligned}$$

und hieraus folgt durch Multiplication

$$4)\qquad P^2 = \frac{(\pi-p)(\varkappa-p)}{(\pi-q)(\varkappa-q)}, \quad Q^2 = \frac{(p-\pi)(q-\pi)}{(p-\varkappa)(q-\varkappa)}$$

und durch Division

$$4)\qquad \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 = \frac{(p-\pi)(q-\varkappa)}{(p-\varkappa)(q-\pi)}.$$

Dass nun, wenn wir P, Q, k diesen Gleichungen gemäss bestimmen, die Gleichungen 1) und 2) genau dasselbe aussagen, folgt daraus, dass beide Gleichungen die Form haben

$$Axz + Bx + Cz + D = 0.$$

Wenn wir also für x und z die erwähnten vier Werthepaare einsetzen, so bestimmen sich einerseits k, andererseits die Verhältnisse von A, B, C, D. Die Gleichungen 1) und 2) stellen, auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, eine gleichseitige Hyperbel dar, deren Asymptoten den Coordinatenaxen parallel sind, falls die Grössen P, Q, k reell sind, falls also unsere Substitution überhaupt reell ist.

Die Grössen P, Q, k werden reell, wenn die rechten Seiten der Gleichungen 4) positiv sind, und dies ist der Fall, wie man leicht sieht, wenn man dafür Sorge trägt, dass p und q, π und $\varkappa$ je zwei der Grösse nach aufeinander folgende Wurzeln sind. Dabei hat man die grösste und kleinste Wurzel auch als zwei aufeinander folgende gelten zu lassen. Durch diese

Bedingung werden von den 24 möglichen Anordnungen der Grössen p, q, π, $\varkappa$ acht ausgeschlossen.

Hält man an dieser Bedingung fest, so hat man eine reelle Substitution, und man kann leicht zeigen, dass dieselbe die verlangte Transformation des Differentials leistet. Differentiirt man die Gleichungen 1) und 2), so erhält man

$$5)\qquad \begin{aligned} (p-q)\frac{dx}{(x-q)^2} &= -2P\frac{dz}{(1+z)^2}, \\ (\pi-\varkappa)\frac{dx}{(x-\varkappa)^2} &= -2Qk\frac{dz}{(1+kz)^2}. \end{aligned}$$

Dividirt man diese Gleichungen resp. durch die Gleichungen 1) und 2), so erhält man

$$\frac{(p-q)\,dx}{(x-p)(x-q)} = -2\frac{dz}{1-z^2}, \quad \frac{(\pi-\varkappa)\,dx}{(x-\pi)(x-\varkappa)} = -\frac{2k\,dz}{1-k^2z^2},$$

mithin

$$\frac{dx}{\sqrt{A(x-p)(x-q)(x-\pi)(x-\varkappa)}} = \pm\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{A(p-q)(\pi-\varkappa)}}\,\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu wählen ist, je nachdem x und z gleichzeitig abnehmen, oder x wächst, während z abnimmt. Da nämlich nach der Gleichung 1) oder 2) x eine eindeutige Function von z und umgekehrt auch z eine eindeutige Function von x ist, so folgt, dass die Argumente x und z entweder stets zusammen wachsen, oder stets, während das eine wächst, das andere abnimmt. Man könnte dies auch aus den Gleichungen 5) schliessen, wie Richelot und mit ihm Durège es thun.

Es mögen nun zunächst folgende Bemerkungen an unsere bisherigen Gleichungen geknüpft werden. Die Gleichungen 4) lassen, selbst wenn wir die rechten Seiten derselben durch die den p, q, π, $\varkappa$ aufgelegte Bedingung positiv gemacht haben, noch immer eine doppelte Wahl des Wurzelzeichens zu. Die Grösse $\frac{1-k}{1+k}$ ist nun positiv, so lange $-1 < k < 1$, k also ein positiver oder negativer echter Bruch ist, negativ, wenn $k^2 > 1$. Wollen wir also für k einen positiven oder negativen echten Bruch erhalten, so haben wir zu setzen:

$$6)\qquad \frac{1-k}{1+k} = +\sqrt{\frac{(p-\pi)(q-\varkappa)}{(p-\varkappa)(q-\pi)}}.$$

Wir sehen hier auch, dass es unstatthaft ist, von vornherein k als eine positive Grösse anzunehmen, wie Richelot und Durège es thun. Legen wir den Grössen p, q, π, $\varkappa$ nur die aus der Forderung nach der Reellität der Substitution sich ergebende Bedingung auf, dass p und q, π und $\varkappa$ je zwei benachbarte Wurzeln sind, und wählen wir demgemäss die Werthe von p, q, π, $\varkappa$ unter den Wurzelwerthen aus — es sind noch 16 verschiedene Anordnungen möglich —, so kann k ebensowohl positiv als negativ werden. Bei acht Anordnungen wird k positiv, bei den übrigen acht negativ, wie daraus hervorgeht, dass nach Gleichung 6) k sein Zeichen ändert, wenn man p und q oder π und $\varkappa$ miteinander vertauscht, aber ungeändert bleibt, wenn man beide Vertauschungen gleichzeitig macht; bei diesen Vertauschungen fahren aber p, q, π, $\varkappa$ fort, die ihnen auferlegte Bedingung zu erfüllen. Die Forderung, dass k positiv werde, würde also von den möglichen Anordnungen der Grössen p, q, π, $\varkappa$ acht weitere ausschliessen, so dass nur acht Anordnungen übrig blieben, welche sich in Gruppen von je vier so theilen, dass die eine Gruppe aus der andern entsteht, indem man gleichzeitig p und q, π und $\varkappa$ miteinander vertauscht. Da ferner, wie aus der Gleichung 1) hervorgeht, z in $-z$ übergeht, wenn man p und q vertauscht, so wird zu der einen dieser Gruppen der Fall gehören, dass z mit x wächst, zu der andern der Fall, dass z abnimmt, während x wächst. — Wenn also Richelot meint, dass von den 16 verschiedenen Anordnungen, welche reelle Substitutionen liefern, acht ausgeschlossen werden müssen, weil der Modul k ein unechter Bruch werde, so ist dies ein Irrthum; k kann stets zu einem echten Bruch gemacht werden durch die angegebene Wahl des Wurzelzeichens. Lassen wir die Forderung, dass der Modul k positiv werden solle, fallen, so sind alle 16 Anordnungen anwendbar.

Haben wir das Vorzeichen von $\frac{1-k}{1+k}$ bestimmt, so ist damit auch nach den Gleichungen 3) das Vorzeichen von P und Q bestimmt. Wählen wir dieses Vorzeichen gemäss der Gleichung 6) als positiv — und wir werden nachher sehen, warum wir es so wählen müssen —, so wird nach 3) P positiv, wenn p und q die beiden äussersten, d. h. die grösste und kleinste Wurzel von R^2 sind; in jedem andern Falle dagegen wird P negativ. Q wird nach 3) negativ, wenn π und $\varkappa$ die beiden äussersten Wurzeln sind, in jedem andern Falle positiv. Durch diese Bemerkung erledigt sich mit einem Schlage die ganze Betrachtung, welche Durège S. 49 flgg. zur Bestimmung des Vorzeichens von P anstellt, und man erkennt zugleich, dass die Meinung von Durège, dass von der Grösse Q „ganz das Nämliche" gelte, wie von P, irrig ist. Haben wir die Werthe von p, q, π, $\varkappa$ unter den vier Wurzeln von R^2 so gewählt, dass p und q, π und $\varkappa$ benachbarte Wurzeln sind, und haben wir dann gemäss der eben angegebenen Regel die Zeichen von P und Q bestimmt, so können wir aus den Gleichungen 5) ablesen, ob x und z bei dieser Wahl der Grössen p, q, π, $\varkappa$ gleichzeitig wachsen, oder ob das eine wächst, während das andere abnimmt. Das Erstere ist der Fall, wenn

$$\frac{P}{p-q} \quad \text{und} \quad \frac{Qk}{\pi-\varkappa}$$

negativ sind, das Letztere, wenn diese Grössen positiv sind.

Richelot und mit ihm Durège beachten dagegen die Gleichungen 3) nicht, sondern suchen die Zeichen von P und Q aus den Gleichungen 5) zu bestimmen, indem sie aus diesen Gleichungen den umgekehrten Schluss ziehen, dass den Grössen P und Q ein solches Zeichen beizulegen sei, dass $\frac{P}{p-q}$ und $\frac{Q}{\pi-\varkappa}$ (sie betrachten k von vornherein als positiv) negativ werden, wenn x und z gleichzeitig wachsen, positiv, wenn das eine abnimmt, während das andere wächst. Sie bedürfen daher erst einer Betrachtung darüber, bei welchen Anordnungen der Grössen p, q, π, $\varkappa$ das Eine oder das Andere stattfindet und wie in diesen Fällen das Zeichen von $p-q$ resp. $\pi-\varkappa$ beschaffen ist. Dass Durège dabei zu einer falschen Bestimmung betreffs Q kommt, ist schon erwähnt. Die von Richelot angegebenen Formeln sind richtig.

Die 16 Anordnungen der Grössen p, q, π, $\varkappa$, welche reelle Substitutionen liefern, theilen sich, wie wir schon erwähnt haben, in zwei Gruppen von je acht Anordnungen, für deren eine k positiv, für deren andere k negativ ist. Jede dieser zwei Gruppen theilt sich wieder in zwei Gruppen von je vier Anordnungen, für deren eine x und z stets gleichzeitig wachsen, während für die andere x wächst bei abnehmendem z. Wir wollen diese Substitutionen jetzt angeben. Zunächst suchen wir die Substitutionen, bei denen k positiv wird. Ausserdem setzen wir fest, dass k ein echter Bruch sei, dass also $\frac{1-k}{1+k}$ gemäss der Gleichung 6) als positiv angenommen und demnach die Zeichen von P und Q nach der angegebenen Regel bestimmt seien. Ordnet man dann die Werthe von z, welche den vier Wurzeln von R^2 entsprechen, der Grösse nach, so hat man in wachsender Reihenfolge

$$-\frac{1}{k},\ -1,\ +1,\ +\frac{1}{k},$$

entsprechend den Werthen von x:

$$\varkappa,\quad q,\quad p,\quad \pi.$$

Sollen nun x und z gleichzeitig wachsen, so müssen die Werthe von $\varkappa$, q, p, π auch eine wachsende Reihenfolge bilden; soll aber x abnehmen, während z wächst, so müssen die Werthe von $\varkappa$, q, p, π eine abnehmende Reihenfolge bilden. Dabei haben wir uns zu denken, dass das Wachsen oder Abnehmen von x ohne Aufhören durch $\pm\infty$ oder $\mp\infty$ hindurch geschehe. Bezeichnen wir also die vier Wurzeln von R^2, der Grösse nach geordnet, mit

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \delta,$$

so dass $\alpha > \beta > \gamma > \delta$, so haben wir das folgende Schema für die acht Anordnungen, bei denen k positiv ist:

$k > 0$, x und z wachsen gleichzeitig:

$$\begin{array}{l|cccc}
z \ldots & -\frac{1}{k}, & -1, & +1, & +\frac{1}{k}, \\
x \ldots & \varkappa, & q, & p, & \pi, \\
\hline
 & \gamma, & \beta, & \alpha, & \delta, \\
 & \delta, & \gamma, & \beta, & \alpha, \\
 & \alpha, & \delta, & \gamma, & \beta, \\
 & \beta, & \alpha, & \delta, & \gamma;
\end{array}$$

$k > 0$, z nimmt ab bei wachsendem x:

$$
\begin{array}{ccccc}
z \ldots & -\frac{1}{k}, & -1, & +1, & +\frac{1}{k}, \\
x \ldots & \varkappa, & q, & p, & \pi. \\
\hline
& \delta, & \alpha, & \beta, & \gamma, \\
& \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, \\
& \beta, & \gamma, & \delta, & \alpha, \\
& \gamma, & \delta, & \alpha, & \beta.
\end{array}
$$

Vertauschen wir in diesen beiden Schemata die Werthe von π und $\varkappa$, so erhalten wir die acht Anordnungen, für welche k negativ wird; die Beziehung zwischen x und z bleibt dieselbe. Bestimmen wir aber k nicht gemäss der Gleichung 6), sondern nehmen $\frac{1-k}{1+k}$ positiv, so dass also k ein unechter Bruch wird, so kehren sich auch die Zeichen von P und Q um, und es folgt dann aus den Gleichungen 5), dass in diesem Falle für die ersten vier Anordnungen z bei wachsendem x abnimmt, für die zweiten vier Anordnungen x und z gleichzeitig wachsen.

Das Integral

$$\int \frac{dx}{R}$$

ist nun aber erst dann auf die Normalform reducirt, wenn die Grenzen des neuen Integrals zwischen -1 und $+1$ liegen. Damit das Integral $\int \frac{dx}{R}$ reell sei, müssen die Grenzen der Integration zwischen zwei aufeinander folgenden Wurzeln, d. h. in den Intervallen

1) $\alpha \ldots \beta$,
2) $\beta \ldots \gamma$,
3) $\gamma \ldots \delta$,
4) $\delta \ldots \mp \infty \ldots \alpha$

liegen und A muss ein solches Zeichen haben, dass R^2 positiv wird. Im andern Falle können wir das Integral in mehrere reelle und imaginäre Theile zerlegen, von denen jeder die Bedingung, dass die Integrationsgrenzen ein Intervall nicht überschreiten, erfüllt. Es ergeben sich hiernach vier Fälle, je nachdem die Integrationsgrenzen im ersten, zweiten, dritten oder vierten Intervall liegen, und wir müssen sehen, ob wir für jeden dieser Fälle unter den aus den obigen Schemata sich ergebenden Reductionsformeln solche auswählen können, bei denen die Bedingung, dass die Grenzen von z zwischen $+1$ und -1 liegen, erfüllt ist. Den Fall eines negativen k brauchen wir nicht weiter zu berücksichtigen, da es uns jetzt nur um Auffindung einer passenden Reductionsformel zu thun ist, diese aber im Falle eines positiven und eines negativen k ungeändert bleibt. Zunächst aber erkennen wir, dass k jetzt kein unechter Bruch sein kann, dass wir also k gemäss der Gleichung 6) bestimmen müssen. Denn wäre k ein unechter Bruch, so würde z, wenn es von -1 bis $+1$ continuirlich fortschreitet, auch die Werthe $-\frac{1}{k}$ und $+\frac{1}{k}$ passiren, und es würde also x bei dem Fortschreiten von q nach p auch die Werthe $\varkappa$ und π passiren, also mehrere Intervalle durchlaufen. Ist aber k ein echter Bruch, so durchläuft x, während z von -1 nach $+1$ geht, nur das Intervall $q \dots p$, und wir erreichen also sofort unsern Zweck, wenn wir für p und q eben diejenigen Wurzelwerthe nehmen, zwischen denen die Integrationsgrenzen des x liegen. Demnach haben wir in jedem der angegebenen Schemata die erste Anordnung zu wählen, wenn die Integrationsgrenzen des x im ersten Intervall liegen, die zweite, wenn sie im zweiten Intervall liegen u. s. f. Für jedes der Intervalle, in welchem x liegen kann, haben wir also zwei Reductionsformeln, welche das Integral auf die Normalform zurückführen. Bei der einen dieser Reductionsformeln wachsen x und z gleichzeitig, bei der andern wächst x bei abnehmendem z.

Stellen wir die Reductionsformeln noch einmal zusammen, so sind sie:

$$\frac{1-k}{1+k} = +\sqrt{\frac{(p-\pi)(q-\varkappa)}{(p-\varkappa)(q-\pi)}},$$

$$\frac{x-p}{x-q} = \mp\sqrt{\frac{(p-\pi)(p-\varkappa)}{(q-\pi)(q-\varkappa)}}\,\frac{1-z}{1+z}$$

$-$, wenn x in einem der drei ersten Intervalle liegt,
$+$, wenn x im vierten Intervalle liegt

oder

$$\frac{x-\pi}{x-\varkappa} = \mp\sqrt{\frac{(p-\pi)(q-\pi)}{(p-\varkappa)(q-\varkappa)}}\,\frac{1-kz}{1+kz}$$

$-$, wenn x im zweiten Intervalle liegt,
$+$, wenn x im ersten, dritten oder vierten Intervalle liegt,

$$\frac{dx}{\sqrt{A(x-p)(x-q)(x-\pi)(x-\varkappa)}} = \pm\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{A(p-q)(\pi-\varkappa)}}\,\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$+$, wenn x und z gleichzeitig wachsen,
$-$, wenn z abnimmt bei wachsendem x.

Bemerken will ich noch, dass Durège in einem an mich gerichteten Briefe die Ausstellungen, die ich an seiner Darstellung machte und auf die ich im Vorigen an den geeigneten Stellen hingewiesen habe, als unzutreffend bezeichnete, in eine Polemik aber nicht einzugehen wünschte. Ich übergebe dieselben deshalb dem Urtheile des mathematischen Publicums.

IX.

Zur Einführung der Liniencoordinaten in die analytische Geometrie der Ebene.

Von

Dr. C. Koehler

in Heidelberg.

Hierzu Taf. II Fig. 1—7.

In einer Mittheilung des Herrn Reuschle im XXXI. Bande dieser Zeitschrift (S. 371) wird mit Recht darauf aufmerksam gemacht, dass die Art, wie die rechtwinkligen Liniencoordinaten* in den meisten Lehrbüchern der analytischen Geometrie der Ebene eingeführt werden, etwas Willkürliches und Unbefriedigendes habe, und dann ein Weg zur Einführung dieser Coordinaten vorgeschlagen, der logischer sei als der bisherige und sich dabei durch grosse Einfachheit auszeichne. Dieser Weg lässt aber, wie ich glaube, die Analogie zwischen den Linien- und Punktcoordinaten nicht genügend hervortreten; er zeigt zwar, dass es logischer ist, $\frac{A}{C}$ und $\frac{B}{C}$, statt etwa $\frac{A}{B}$ und $\frac{C}{B}$, als Coordinaten der Geraden zu wählen, wenn $Ax+By+C=0$ deren Gleichung in Cartesischen Coordinaten ist, er enthüllt aber nicht, weshalb auch alle anderen Bestimmungsstücke der Geraden, z. B. ihr senkrechter Abstand vom Anfangspunkte des Systems und dessen Winkel mit der x-Axe, als Coordinaten derselben nicht in Betracht kommen können und es geradezu nothwendig ist, die negativen reciproken Axenabschnitte als Coordinaten der Geraden zu wählen. Auch fehlt in der Mittheilung des Herrn Reuschle, wie in fast allen Lehrbüchern, die Hervorhebung des Falles, in welchem diese Coordinatenbestimmung versagt, während ich diese schon deshalb für unbedingt nothwendig halte, weil dabei

* Im Folgenden werden die Coordinaten der Geraden im rechtwinkligen Cartesischen Coordinatensystem stets kurz als rechtwinklige Liniencoordinaten bezeichnet, um dadurch hervorzuheben, dass ihnen dasselbe Coordinatensystem zu Grunde liegt, wie den Cartesischen Punktcoordinaten. Bezeichnet man erstere nämlich im Gegensatz zu letzteren, wie dies vielfach geschieht, als Plücker'sche Liniencoordinaten, so kann dadurch leicht die Vorstellung erweckt werden, das System, auf das sie bezogen sind, sei von dem Cartesischen verschieden.

neben aller Analogie doch auch ein wesentlicher Unterschied zwischen den rechtwinkligen Punkt- und Liniencoordinaten sich zeigt.

Ich möchte nun in dieser Notiz den Weg mittheilen, auf dem ich in meinen Vorlesungen über analytische Geometrie die rechtwinkligen Liniencoordinaten einzuführen pflege und den oben gestellten Anforderungen gerecht zu werden versuche; er ist weiter als der gewöhnliche, darf aber trotzdem, wie ich glaube, kaum als Umweg bezeichnet werden, da er in der Vorlesung, wenn nicht schon vor — wie hier —, dann jedenfalls nach Einführung der rechtwinkligen Liniencoordinaten zurückgelegt werden muss.

Selbstverständlich beabsichtige ich nicht, etwas thatsächlich Neues zu geben; nur die Anordnung des Stoffes dürfte vielleicht neu sein, indem bei derselben die homogenen Coordinaten die Brücke bilden, welche von den rechtwinkligen Punkt- zu den rechtwinkligen Liniencoordinaten hinüberführt. Durch diese Darstellung wurde ich dann noch fast unwillkürlich zu einigen Betrachtungen über das von Herrn Schwering eingeführte Coordinatensystem (vergl. diese Zeitschrift Bd. XXI) veranlasst, die ich derselben anfüge.

1.

Bedeuten x, y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes und ist*

1) $$H_i \equiv a_i x + b_i y + c_i,$$

so sind

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0$$

die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks, wenn die Determinante $(a_1 b_2 c_3)$ nicht verschwindet. Unter dieser Voraussetzung kann man jede beliebige Gerade g der Ebene durch eine Gleichung von der Form

$$u_1 H_1 + u_2 H_2 + u_3 H_3 = 0$$

darstellen. Schneidet nämlich (Fig. 1) g die Seite $N_2 N_3$ im Punkte N'_1 und ist $V=0$ die Gleichung der Geraden $N_1 N'_1$, so hat die Gleichung von g jedenfalls die Form

$$V + u_1 H_1 = 0;$$

V selbst aber ist, da $N_1 N'_1$ durch den Punkt N_1 geht, von der Form

$$V = u_2 H_2 + u_3 H_3,$$

folglich ist die Gleichung der Geraden g

2) $$\Sigma u_i H_i = 0.$$

Hat g in rechtwinkligen Coordinaten die Gleichung

$$Px + Qy + R = 0,$$

so dienen zur Bestimmung der Constanten u_i die drei Gleichungen

---

* Im Folgenden ist stets $i = 1, 2, 3$ zu setzen, so dass also eine Gleichung, die diesen Index, aber kein Summenzeichen enthält, stets die Stelle von drei Gleichungen vertritt.

$$\Sigma u_i a_i = P, \quad \Sigma u_i b_i = Q, \quad \Sigma u_i c_i = R,$$

die immer auflösbar sind, wenn die Determinante $(a_1 b_2 c_3)$ nicht verschwindet, was ja oben vorausgesetzt ist.

In der neuen Gleichung der Geraden enthalten die Ausdrücke H_i die Variablen x und y, sie ändern sich also selbst mit diesen; wir haben somit die Gerade hier dargestellt durch eine homogene lineare Gleichung mit drei Variablen.

Wir fragen nun nach der geometrischen Bedeutung dieser Variablen. Da man die Gleichung 2) mit einem constanten Factor multipliciren darf, ohne dass sie deshalb aufhört, die Gerade g darzustellen, so ist zunächst klar, dass es nur auf die Verhältnisse der neuen Variablen zu einander, nicht auf die Werthe der letzteren selbst ankommt. Ferner ist

$$\frac{-H_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} = r_i$$

der senkrechte Abstand des Punktes x, y von der Geraden $H_i = 0$, also

$$H_i = k_i r_i,$$

wo der constante Factor k_i nur abhängt von den Coefficienten der Gleichung $H_i = 0$ und folglich für alle Punkte x, y der Ebene derselbe bleibt. Dagegen wird k_i sich ändern mit der Form der Gleichung $H_i = 0$, z. B. $= -1$ sein, wenn diese Gleichung die Hesse'sche Normalform besitzt; die drei Factoren k_i werden also einmal beliebig gewählt werden können, dann aber bei beliebiger Bewegung eines Punktes in der ganzen Ebene festgehalten werden müssen. Daher haben wir für die neuen Variablen H_i folgende geometrische Bedeutung: sie sind proportional beliebigen, aber fest gewählten Vielfachen der senkrechten Abstände des betrachteten Punktes von den drei Geraden $H_i = 0$.

Aus den Definitionsgleichungen 1) dieser Grössen folgt direct, dass, wenn ein Punkt x, y gegeben ist, ihre Verhältnisse bestimmt sind, und dass umgekehrt, wenn diese Verhältnisse beliebig gegeben sind, durch sie ein Punkt x, y der Ebene eindeutig bestimmt ist; die Grössen H_i sind demnach eine neue Art von Coordinaten des Punktes in der Ebene. Setzen wir, da es doch nur auf ihre Verhältnisse ankommt, $H_i = \varrho x_i$, wo ϱ ein beliebiger Factor ist, so lautet die Gleichung der Geraden in den neuen Coordinaten:

$$\Sigma u_i x_i = 0,$$

und der Zusammenhang zwischen ihnen und den rechtwinkligen Punktcoordinaten ist gegeben durch die Gleichungen

$$3) \qquad \varrho x_i = a_i x + b_i y + c_i.$$

Da die Gleichung der Geraden und, wie man durch Auflösung der Gleichungen 3) nach x, y, 1 sieht, ebenso diejenige jeder Curve n^{ter} Ordnung in diesen Coordinaten homogen wird, so nennt man dieselben homogene Coordinaten und zwar homogene Dreieckscoordinaten, weil sie bezogen sind auf das aus den Geraden $H_i = 0$ oder $x_i = 0$ gebildete Dreieck. Dieses selbst wird das Fundamentaldreieck, seine Seiten werden die Fundamentallinien, seine Ecken die Fundamentalpunkte des Coordinatensystems genannt.

Für die neuen Coordinaten x_i hat man auch die Definitionsgleichungen

4) $$\varrho x_i = k_i r_i,$$

die unabhängig von dem rechtwinkligen Coordinatensystem sind, von dem wir ursprünglich ausgingen. Sie sagen aus, dass die x_i proportional sind gegebenen Vielfachen der senkrechten Abstände des betrachteten Punktes von den drei Fundamentallinien. Doch kann man diese Abstände, statt in senkrechter, auch in drei beliebigen, aber fest gegebenen Richtungen messen; denn ist der Abstand irgend eines Punktes in der Richtung, die den Winkel ω_i mit der Seite $x_i = 0$ des Dreiecks bildet, gleich q_i, so ist stets $q_i = \frac{r_i}{\sin \omega_i}$; die unter dem Winkel ω_i gemessenen Abstände sind also gegebene Vielfache der senkrechten Abstände, da $\sin \omega_i$ von dem betrachteten Punkte völlig unabhängig ist. Man kann demnach auch sagen: Die homogenen Coordinaten x_i eines Punktes sind proportional seinen in drei beliebig, aber fest gewählten Richtungen gemessenen Abständen von den drei Fundamentallinien. Dabei darf aber keine der gegebenen Richtungen der ihr entsprechenden Fundamentallinie parallel sein, da sonst $\sin \omega_i = 0$, also q_i im Allgemeinen unendlich gross wird.

Aus dem Vorhergehenden folgt direct, dass, wenn wir in den Gleichungen 4) den drei Constanten k_i beliebig gewählte bestimmte Werthe gegeben haben, wir beim Uebergang zu rechtwinkligen Coordinaten setzen müssen

$$\varrho x_i = k_i (x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i - n_i),$$

indem wir den auf einer Seite dieser Gleichungen auftretenden Factor -1 in ϱ hineinziehen. Sollen insbesondere unsere homogenen Coordinaten eines Punktes den senkrechten Abständen selbst von den drei Fundamentallinien proportional sein, so ist zu setzen

$$\varrho x_i = x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i - n_i.$$

Ist dagegen von vornherein der Zusammenhang zwischen den homogenen und den rechtwinkligen Coordinaten gegeben durch die Gleichungen 3), so dürfen die Constanten k_i nicht mehr beliebig gewählt werden, sie haben dann die Werthe

$$k_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$$

oder genauer gesagt: sie sind diesen Quadratwurzeln proportional zu nehmen.

Wie wir nun auf diese Weise die Lage eines Punktes durch die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ bestimmt finden und die Grössen x_i deshalb als Coordinaten des Punktes betrachten können, ebenso wollen wir jetzt drei Grössen definiren, durch deren Verhältnisse die Lage einer Geraden in der Ebene bestimmt ist, und diese als Coordinaten der Geraden einführen.

In unseren homogenen Punktcoordinaten hat die Gleichung einer Geraden die Form

$$\Sigma u_i x_i = 0,$$

ihre Lage ist demnach bestimmt durch die drei constanten Grössen u_i oder richtiger, da man durch eine derselben die Gleichung dividiren darf, durch die Verhältnisse dieser Grössen. Wir besitzen also in ihnen homogene Coordinaten der geraden Linie; dieselben sind zunächst nur analytisch definirt als die Coefficienten der Gleichung der betreffenden Geraden in homogenen Punktcoordinaten, wir werden aber ihre geometrische Bedeutung bald kennen lernen.

Vorher fragen wir nur noch: welches geometrische Gebilde stellt eine in diesen Liniencoordinaten homogene lineare Gleichung dar? oder: welches Gebilde constituiren alle Geraden, deren Coordinaten u_i der Gleichung

5) $$\Sigma d_i u_i = 0$$

genügen?

Sind u'_i die Coordinaten einer dieser Geraden, so muss sein

$$\Sigma d_i u'_i = 0;$$

nun lautet die Gleichung dieser Geraden in Punktcoordinaten

$$\Sigma u'_i x_i = 0,$$

sie ist also erfüllt für $x_i = d_i$, die betreffende Gerade geht somit durch den Punkt mit den Coordinaten d_i, jede der Geraden, deren Coordinaten der Gleichung 5) genügen, geht folglich durch diesen Punkt. Ebenso zeigt man, dass die Coordinaten jeder beliebigen Geraden, die durch den Punkt d_i geht, der obigen Gleichung genügen müssen; durch diese Gleichung sind demnach alle und nur diejenigen Geraden bestimmt, welche durch den Punkt d_i gehen; sie ist also die Gleichung dieses Punktes, da man einen Punkt ebenso gut als den gemeinsamen Ort aller durch ihn hindurchgehenden Geraden ansehen kann, wie man die Gerade als den Ort aller auf ihr liegenden Punkte betrachtet.

Eine lineare Gleichung in diesen homogenen Liniencoordinaten stellt also stets einen Punkt dar, dessen Coordinaten man aus ihr direct ablesen kann; es sind ihre Coefficienten, ganz ebenso wie in der Gleichung der Geraden die Coefficienten die Coordinaten derselben waren. Sieht man also in der Gleichung

$$\Sigma u_i x_i = 0$$

die Grössen x_i als variabel, die u_i als constant an, so stellt sie dar eine Gerade mit den Coordinaten u_i; sieht man dagegen die Grössen u_i als variabel, die x_i als constant an, so stellt sie dar einen Punkt mit den Coordinaten x_i. Schon hier tritt in formaler Beziehung eine grosse Analogie zwischen Punkt- und Liniencoordinaten zu Tage, wir werden deshalb erwarten dürfen, dass auch die geometrische Bedeutung der Liniencoordinaten eine derjenigen der Punktcoordinaten entsprechende sein wird.

Um diese geometrische Bedeutung, d. i. die Bedeutung der Coefficienten u_i in der Gleichung $\Sigma u_i x_i = 0$ der beliebigen Geraden g kennen zu lernen, führen wir in sie statt der homogenen Punktcoordinaten wieder die ursprünglichen rechtwinkligen ein durch die Gleichungen

$$\varrho x_i = k_i\,(x \cos\alpha_i + y \sin\alpha_i - n_i);$$

ausserdem werde sie durch Multiplication mit dem constanten Factor τ auf die Normalform gebracht, so dass sie lautet:

$$\tau \Sigma u_i k_i\,(x \cos\alpha_i + y \sin\alpha_i - n_i) = 0.$$

Sind nun μ_i, ν_i die rechtwinkligen Coordinaten der Ecke N_i des Fundamentaldreiecks, so erhält man für den senkrechten Abstand π_i der betrachteten Geraden g vom Punkte N_i

$$\pi_i = -\tau u_i k_i\,(\mu_i \cos\alpha_i + \nu_i \sin\alpha_i - n_i),$$

da die mit u_k und u_l multiplicirten Klammerausdrücke für $x = \mu_i$, $y = \nu_i$ verschwinden, weil die Seiten $x_k = 0$, $x_l = 0$ des Fundamentaldreiecks durch den Punkt N_i gehén (k und l bedeuten aus der Reihe 1, 2, 3 zwei Zahlen, die von i und voneinander verschieden sind). Bezeichnen wir das vom Punkte N_i auf die Seite $N_k N_l$ gefällte Perpendikel mit p_i, so ist demnach

$$\pi_i = \tau u_i k_i p_i,$$

also

$$u_i = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{k_i p_i} \pi_i,$$

oder, wenn wir

$$\frac{1}{k_i p_i} = \lambda_i \tag{6}$$

setzen,

$$\sigma u_i = \lambda_i \pi_i, \tag{7}$$

wo σ ein beliebiger Proportionalitätsfactor ist. Die homogenen Coordinaten einer Geraden sind somit proportional gegebenen Vielfachen ihrer senkrechten Abstände von den drei Eckpunkten des Fundamentaldreiecks. Dies ist also die geometrische Bedeutung der homogenen Liniencoordinaten, die dualistisch entspricht derjenigen der homogenen Punktcoordinaten.

Aus dieser Untersuchung geht aber hervor, dass die Constanten, mit denen diese senkrechten Abstände multiplicirt sind, nicht mehr beliebig gewählt werden dürfen, wenn die Constanten k_i gegeben sind; denn die Grössen λ_i sind dann durch die Gleichungen 6) bestimmt, in denen die p_i nur von dem der ganzen Betrachtung zu Grunde gelegten Fundamentaldreieck abhängig, also von vornherein gegebene Constanten sind. Sind insbesondere alle $k_i = 1$, d. h. nimmt man die Coordinaten des Punktes proportional seinen senkrechten Abständen selbst von den Fundamentallinien, so wird $\lambda_i = \frac{1}{p_i}$; man darf also dann die Coordinaten der Geraden nicht proportional nehmen ihren senkrechten Abständen selbst von den Fundamentalpunkten, sondern den mit $\frac{1}{p_i}$ multiplicirten Werthen derselben. Nur wenn das Fundamentaldreieck ein gleichseitiges ist, können wir sowohl für den Punkt, wie für die Gerade die Coordinaten den betreffenden Abständen selbst proportional setzen, da dann der Factor $\frac{1}{p_i}$ in σ hineingenommen werden kann.

Nimmt man dagegen die λ_i beliebig an, setzt also die Coordinaten der Geraden beliebig gegebenen Vielfachen ihrer senkrechten Abstände von den drei Fundamentalpunkten proportional, so sind die k_i nicht mehr beliebig, sondern bestimmt durch die Gleichungen

$$k_i = \frac{1}{\lambda_i p_i},$$

die Coordinaten des Punktes sind dann also proportional bestimmt gegebenen Vielfachen seiner senkrechten Abstände von den drei Fundamentallinien. Unter dieser Annahme, dass die λ_i beliebig gegeben seien, können wir den Abstand einer Geraden von dem Fundamentalpunkte N_i statt in senkrechter, auch in einer Richtung messen, die mit ihr den beliebig, aber fest gegebenen Winkel ω_i bildet; denn ist τ_i der so gemessene Abstand, so ist $\tau_i = \frac{1}{\sin \omega_i} \pi_i$, also τ_i ein gegebenes Vielfaches des senkrechten Abstandes. Ferner ist klar, dass wir in allen Fällen, d. h. auch wenn die λ_i nicht mehr beliebig, sondern fest bestimmt sind, die Abstände der Geraden von den drei Fundamentalpunkten statt in senkrechter Richtung alle drei in einer und derselben, für jede Gerade im Uebrigen beliebigen Richtung messen dürfen, da sich diese Abstände stets verhalten wie $\pi_1 : \pi_2 : \pi_3$.

Ist der Zusammenhang zwischen den x_i und den rechtwinkligen Coordinaten durch die Gleichungen 3) gegeben, so ist, wie wir wissen, k_i durch die Gleichung

$$k_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$$

bestimmt, also

$$\lambda_i = \frac{1}{k_i p_i} = \frac{1}{a_i \mu_i + b_i \nu_i + c_i},$$

oder, wenn wir die Werthe von μ_i, ν_i aus den Gleichungen

$$a_k x + b_k y + c_k = 0, \quad a_l x + b_l y + c_l = 0$$

berechnen und in die letzte Gleichung einsetzen, ferner die Determinante $(a_1 b_2 c_3)$ mit Δ, ihre Unterdeterminanten mit A_i, B_i, C_i bezeichnen,

$$\lambda_i = \frac{a_k b_l - a_l b_k}{\Delta} = \frac{C_i}{\Delta}.$$

Statt λ_i gleich $\frac{C_i}{\Delta}$ zu setzen, dürfen wir aber auch

$$\lambda_i = C_i$$

annehmen, da Δ in allen drei Grössen λ_i vorkommt und deshalb in den Proportionalitätsfactor σ der Gleichungen

$$\sigma u_i = \lambda_i \pi_i$$

hineingenommen werden kann. Den drei Grössen

8) $$k_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2},\quad k_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2},\quad k_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2}$$
entsprechen also die drei Grössen

9) $$\lambda_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2,\quad \lambda_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3,\quad \lambda_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

2.

Um nun zu zeigen, dass das rechtwinklige Coordinatensystem als specieller Fall des hier betrachteten homogenen Coordinatensystems aufgefasst werden kann, nehmen wir zunächst an, das dem letzteren zu Grunde liegende Fundamentaldreieck sei ein rechtwinkliges. Sind dann (Fig. 2) x und y die senkrechten Abstände eines Punktes P von den beiden aufeinander senkrechten Seiten $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ und ist r_3 sein Abstand von der Seite $x_3 = 0$, so haben wir hier für die homogenen Coordinaten des Punktes die Gleichungen
$$\varrho x_1 = k_1 x,\quad \varrho x_2 = k_2 y,\quad \varrho x_3 = k_3 r_3.$$

Wir setzen nun die beliebigen Constanten $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, da x_1 und x_2 den senkrechten Abständen selbst proportional werden sollen, und, damit x_3 nicht unendlich gross wird, wenn wir die Seite $x_3 = 0$ nachher ins Unendliche rücken lassen, $k_3 = \frac{1}{p_3}$; dann wird

10) $$\varrho x_1 = x,\quad \varrho x_2 = y,\quad \varrho x_3 = \frac{r_3}{p_3}.$$

Lassen wir nun die Seite $x_3 = 0$ parallel mit sich selbst ins Unendliche rücken, so werden r_3 und p_3 unendlich gross; diese beiden Grössen werden sich aber, so lange der betrachtete Punkt im Endlichen liegt, nur um eine additive endliche Grösse unterscheiden, der Grenzwerth ihres Quotienten wird somit gleich der Einheit, es ist folglich in diesem speciellen Dreieckscoordinatensystem, in welchem zwei Seiten des Dreiecks senkrecht aufeinander stehen, die dritte aber im Unendlichen liegt,
$$x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1.$$

Ist demnach die Gleichung irgend einer Curve in diesen homogenen Coordinaten gegeben, so hat man nur $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$ zu setzen, um die Gleichung der Curve in rechtwinkligen Coordinaten zu erhalten. Und umgekehrt: wenn die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung in rechtwinkligen Punktcoordinaten gegeben ist und man setzt in ihr $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ und multiplicirt sie dann mit x_3^n, so wird sie homogen in den Coordinaten unseres speciellen Dreieckscoordinatensystems. Die rechtwinkligen Punktcoordinaten bilden also nur einen speciellen Fall homogener Punktcoordinaten.

Der Grenzwerth von $\frac{r_3}{p_3}$ ist aber, wie schon oben bemerkt wurde, nur dann gleich der Einheit, wenn der betrachtete Punkt im Endlichen liegt, also nur für solche Punkte gehen die homogenen Coordinaten des geeignet gewählten Systems über in die rechtwinkligen, während für die unendlich fernen Punkte unsere Betrachtung nicht mehr gilt. In der That verlieren wir die Herrschaft über die Lage der unendlich fernen Punkte im rechtwinkligen Coordinatensystem; denn es genügt zur Bestimmung eines solchen Punktes nicht, dass man seine Coordinaten $x=\infty$, $y=\infty$ kennt, es muss auch noch das Verhältniss $\frac{x}{y}$ derselben gegeben sein, wenn die Lage des Punktes bestimmt sein soll. Durch seine homogenen Coordinaten in einem beliebigen Dreieckscoordinatensystem ist dagegen auch ein unendlich ferner Punkt völlig bestimmt; denn aus den Gleichungen

$$\varrho x_i = a_i x + b_i y + c_i$$

folgt für $x=\infty$, $y=\infty$, falls $\lim \frac{x}{y} = k$ ist,

$$x_1 : x_2 : x_3 = a_1 k + b_1 : a_2 k + b_2 : a_3 k + b_3\,;$$

die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ haben also auch in diesem Falle völlig bestimmte endliche Werthe.

Man kann dies auch, ohne die rechtwinkligen Coordinaten zu Hilfe zu nehmen, direct einsehen. Verstehen wir nämlich der Einfachheit halber für den Augenblick unter x_1, x_2, x_3 drei Grössen, die den senkrechten Abständen eines Punktes von den drei Fundamentallinien proportional sind, und ziehen (Fig. 3) durch N_1, N_2, N_3 drei Gerade nach irgend einem unendlich fernen Punkte, so ist für jeden Punkt der Geraden $N_1 N'_1$, resp. $N_2 N'_2$, $N_3 N'_3$ bekanntlich

$$x_2 : x_3 = \sin\beta : \sin\gamma, \quad x_3 : x_1 = \sin\gamma : \sin\alpha, \quad x_1 : x_2 = \sin\alpha : \sin\beta,$$

für ihren Schnittpunkt also

$$x_1 : x_2 : x_3 = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

d. h. seine Coordinaten sind bestimmten endlichen Grössen proportional.

Wir finden also hier einen wesentlichen Vorzug der homogenen Punktcoordinaten vor den rechtwinkligen: vermittelst der ersteren beherrscht man direct die Lage jedes im Endlichen oder im Unendlichen liegenden Punktes, vermittelst der letzteren dagegen nur diejenige der im Endlichen liegenden Punkte.

Wir wollen nun auch die Bedeutung der Liniencoordinaten in dem oben betrachteten speciellen homogenen, d. i. in dem gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinatensystem aufsuchen. Da in diesem zwei Fundamentalpunkte des Coordinatendreiecks im Unendlichen liegen, so können wir diese Bedeutung nicht direct erkennen, sondern müssen zunächst die Seite $x_3 = 0$ wieder im Endlichen annehmen.

Die homogenen Punktcoordinaten waren gegeben durch die Gleichungen 10). Da $\lambda_i = \frac{1}{k_i p_i}$ ist, so sind demnach die homogenen Coordinaten einer Geraden g, welche die Abstände π_i von den Fundamentalpunkten hat,

$$\sigma u_1 = \frac{\pi_1}{p_1}, \quad \sigma u_2 = \frac{\pi_2}{p_2}, \quad \sigma u_3 = \pi_3,$$

es ist also

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{\pi_1}{\pi_3} \cdot \frac{1}{p_1} : \frac{\pi_2}{\pi_3} \cdot \frac{1}{p_2} : 1.$$

Bezeichnen wir nun (Fig. 4) die Axenabschnitte $N_3 N'_1$, $N_3 N'_2$ der Geraden mit a und b, die Strecken $N_1 N'_1$, $N_2 N'_2$ mit q_1 und q_2, so ist

$$\frac{\pi_1}{\pi_3} = \frac{q_1}{a}, \quad \frac{\pi_2}{\pi_3} = \frac{q_2}{b},$$

falls nur a und b von Null verschieden sind; also ist

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{q_1}{p_1} \cdot \frac{1}{a} : \frac{q_2}{p_2} \cdot \frac{1}{b} : 1.$$

Lässt man nun die Seite $x_3 = 0$ wieder parallel mit sich selbst ins Unendliche rücken, so wird

$$\lim \frac{q_1}{p_1} = \lim \frac{a - p_1}{p_1} = -1, \quad \lim \frac{q_2}{p_2} = \lim \frac{b - p_2}{p_2} = -1$$

und folglich

$$u_1 : u_2 : u_3 = -\frac{1}{a} : -\frac{1}{b} : 1.$$

Aus dieser Proportion sieht man, dass man im rechtwinkligen Coordinatensystem die negativen reciproken Axenabschnitte der Geraden, die wir, wie üblich, mit u und v bezeichnen wollen, als ihre Coordinaten zu betrachten hat.

Aus der Gleichung einer Curve in diesen speciellen homogenen Liniencoordinaten erhält man demnach diejenige in rechtwinkligen Liniencoordinaten, indem man $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = 1$ setzt. Und umgekehrt: die Gleichung einer Curve n^{ter} Classe in rechtwinkligen Liniencoordinaten wird homogen in dem speciellen Dreieckscoordinatensystem, wenn man in ihr $u = \frac{u_1}{u_3}$, $v = \frac{u_2}{u_3}$ setzt und sie mit u_3^n multiplicirt.

Die Gleichung

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

stellt, wie in jedem homogenen Coordinatensystem, so auch in unserem jetzt betrachteten eine Gerade oder einen Punkt dar, je nachdem man die x_i oder die u_i als Variable betrachtet. Setzen wir nun $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$, so ist folglich in rechtwinkligen Coordinaten

11) $$ux + vy + 1 = 0$$

die Gleichung der Geraden mit den Coordinaten u, v oder diejenige des Punktes x, y, je nachdem man x und y oder u und v als Variable betrachtet. Nehmen wir x und y als variabel an und vergleichen sie mit der allgemeinen Gleichung der Geraden in rechtwinkligen Coordinaten

$$Ax + By + C = 0,$$

so sehen wir, dass die Grössen $\frac{A}{C}$ und $\frac{B}{C}$ als Coordinaten der Geraden zu betrachten sind. Dies sind in der That die negativen reciproken Axenabschnitte der Geraden. Warum man aber nothwendig gerade sie als Coordinaten der Geraden im rechtwinkligen System zu wählen hat, ist nur einleuchtend, wenn man die rechtwinkligen Coordinaten als speciellen Fall der homogenen auffasst. Nehmen wir in Gleichung 11) u und v als variabel an, betrachten sie also als Gleichung des Punktes x, y und vergleichen sie mit der allgemeinen linearen Gleichung in u und v:

$$12)\qquad Pu + Qv + R = 0,$$

so sehen wir, dass diese einen Punkt mit den Coordinaten

$$x = \frac{P}{R}, \quad y = \frac{Q}{R}$$

darstellt.

Um jetzt die Transformationsgleichungen herzuleiten, welche beliebige homogene mit den rechtwinkligen Liniencoordinaten verbinden, suchen wir zunächst den senkrechten Abstand einer beliebigen Geraden u_0, v_0 von dem durch die Gleichung 12) gegebenen Punkte.

Die Gerade hat die Gleichung

$$u_0 x + v_0 y + 1 = 0,$$

folglich ist ihr senkrechter Abstand π von dem gegebenen Punkte, der die Coordinaten $\frac{P}{R}$, $\frac{Q}{R}$ hat,

$$\pi = -\frac{Pu_0 + Qv_0 + R}{R\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}.$$

Wir wissen nun, dass die Coordinaten u_i einer Geraden in einem beliebigen Dreieckscoordinatensystem gegebenen Vielfachen ihrer senkrechten Abstände von den Fundamentalpunkten proportional sind, und müssen deshalb zuerst die Gleichungen dieser Fundamentalpunkte suchen. Sind die homogenen Punktcoordinaten mit den rechtwinkligen wieder durch die Gleichungen 3) verbunden, so ergeben sich die rechtwinkligen Coordinaten des Fundamentalpunktes N_i als $\frac{A_i}{C_i}$ und $\frac{B_i}{C_i}$, wenn wieder A_i, B_i, C_i die Unterdeterminanten der Determinante $(a_1 b_2 c_3)$ bezeichnen; die Gleichungen der drei Fundamentalpunkte lauten demnach in rechtwinkligen Liniencoordinaten:

$$A_i u + B_i v + C_i = 0,$$

folglich sind die senkrechten Abstände π_i einer beliebigen Geraden u, v von diesen drei Punkten proportional den Grössen

$$\frac{A_i u + B_i v + C_i}{C_i}$$

und also, da nach den Gleichungen 9) $\lambda_i = C_i$ und nach 7) $\sigma u_i = \lambda_i \pi_i$ ist,

$$13)\qquad \varrho u_i = A_i u + B_i v + C_i.$$

Durch diese Gleichungen sind die homogenen Liniencoordinaten mit den rechtwinkligen verknüpft, während ihnen dualistisch gegenüberstehen die Gleichungen

$$\varrho x_i = a_i x + b_i y + c_i,$$

welche die homogenen Punktcoordinaten durch die rechtwinkligen ausdrücken. Um umgekehrt die rechtwinkligen Coordinaten jedesmal durch die homogenen darzustellen, haben wir die letzten und vorletzten Gleichungen nach x, y, 1 resp. u, v, 1 aufzulösen und erhalten so die Gleichungen

$$14)\qquad x=\frac{\Sigma A_i x_i}{\Sigma C_i x_i},\quad y=\frac{\Sigma B_i x_i}{\Sigma C_i x_i};$$

$$15)\qquad u=\frac{\Sigma a_i u_i}{\Sigma c_i u_i},\quad v=\frac{\Sigma b_i u_i}{\Sigma c_i u_i}.$$

Wir fanden früher, dass die rechtwinkligen Punktcoordinaten versagen für unendlich ferne Punkte, und sehen nun aus den Gleichungen 14), dass $x=\infty$ und $y=\infty$ ist für alle Punkte, die auf der Geraden

$$\Sigma C_i x_i = 0$$

liegen, und nur für diese; wir müssen deshalb annehmen, dass alle unendlich fernen Punkte der Ebene auf dieser Geraden liegen, und können daher von einer unendlich fernen Geraden der Ebene sprechen.

Die beiden Gleichungen 15) zeigen uns, dass $u=\infty$ und $v=\infty$ wird, falls

$$\Sigma c_i u_i = 0$$

ist, d. h. für jede Gerade, welche durch den zu dieser Gleichung gehörigen Punkt geht. Dieser Punkt spielt also bei den rechtwinkligen Liniencoordinaten dieselbe Rolle, wie die unendlich ferne Gerade bei rechtwinkligen Punktcoordinaten. Er ist offenbar der Anfangspunkt des rechtwinkligen Systems, da die Axenabschnitte aller durch diesen gehenden Geraden gleich Null sind, ihre reciproken Werthe also unendlich werden.

In der That gilt die Betrachtung, durch welche wir die rechtwinkligen Liniencoordinaten aus den homogenen hergeleitet haben, nicht mehr, falls $a=0$ und $b=0$ ist. In diesem Coordinatensystem verlieren wir also die Herrschaft über die durch seinen Anfangspunkt gehenden Geraden, und erst wenn wir das Verhältniss $\frac{u}{v}$, falls u und v unendlich gross sind, kennen, sind wir im Stande, die Lage einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden zu bestimmen, da dieses Verhältniss für alle einander parallelen Geraden dasselbe bleibt.

Dass dagegen die homogenen Liniencoordinaten nicht versagen für Gerade, die durch den Fundamentalpunkt N_3 gehen, ist direct einzusehen und folgt ausserdem aus den Gleichungen 13), aus denen sich für $u=\infty$, $v=\infty$, falls $\lim\frac{u}{v}=l$ ist, ergiebt

$$u_1:u_2:u_3 = A_1 l + B_1 : A_2 l + B_2 : A_3 l + B_3.$$

Also auch die homogenen Liniencoordinaten sind vor den rechtwinkligen wieder bevorzugt, indem sie für keine Gerade der Ebene eine Ausnahmestellung verlangen.

Die Ausnahmestellung der durch den Anfangspunkt gehenden Geraden im rechtwinkligen Liniencoordinatensystem hebe ich, wie schon anfangs bemerkt, deshalb besonders hervor, weil sie gewöhnlich nicht betont, sondern in den meisten Lehrbüchern einfach angenommen wird, die Gleichung

$$Ax + By + C = 0$$

jeder Geraden lasse sich auf die Form

$$ux + vy + 1 = 0$$

bringen, während dies, falls $C = 0$ ist, d. h. die betrachtete Gerade durch den Anfangspunkt geht, unmöglich ist.*

In dieser Hinsicht befinden sich die rechtwinkligen Liniencoordinaten — bei aller sonstigen Gleichberechtigung — immer im Nachtheil gegen die rechtwinkligen Punktcoordinaten; denn während die letzteren nur versagen für die unendlich fernen Punkte, die uns überhaupt nie direct zugänglich und ausserdem unabhängig von der Lage des rechtwinkligen Coordinatensystems in der Ebene sind, versagen die ersteren für alle Geraden, welche durch einen im Endlichen liegenden Punkt gehen, und diese Geraden sind nicht unabhängig von der Lage des rechtwinkligen Systems in der Ebene, da sie stets durch den Anfangspunkt desselben gehen.

3.

Hier liegt nun die Frage nahe: giebt es vielleicht ein anderes nicht homogenes Coordinatensystem, das den gleichen Vorzug für Liniencoordinaten besitzt, den das rechtwinklige für Punktcoordinaten darbietet?

Diese Frage lässt sich aber von vornherein schon verneinen, falls wir uns auf die Betrachtung der Ebene beschränken, da in dieser keine reciproke Beziehung zwischen den unendlich fernen Punkten und der unendlich fernen Geraden besteht, indem es von solchen Punkten unendlich viele, dagegen nur eine unendlich ferne Gerade in ihr giebt. Sobald wir aber aus der Ebene heraustreten und statt der Geraden, die in einer Ebene liegen, diejenigen betrachten, die durch einen und denselben unendlich fernen Punkt gehen, so können wir ein dem rechtwinkligen Punktcoordinatensystem völlig analoges System für Liniencoordinaten finden. In einem solchen Bündel von Parallelstrahlen und diesen Strahlen parallelen Ebenen giebt es ja unendlich viele unendlich ferne Gerade, dagegen nur eine unendlich ferne Ebene. Nehmen wir nun zwei aufeinander senkrechte Ebenen des Bündels als Coordinatenebenen, so ist durch ihre senkrechten Abstände von diesen jede Gerade des Bündels bestimmt, mit Ausnahme aller unendlich fernen Geraden, für welche man noch das Verhältniss dieser Abstände kennen muss. Diese Geraden sind aber unabhängig von der Lage des gewählten Coordinatensystems im Bündel, dasselbe leistet also das Gleiche für die Geraden des Bündels, was das rechtwinklige für die Punkte der Ebene

* Es sei beiläufig bemerkt, dass dieser Ausnahmefall z. B schon nicht übersehen werden darf, wenn man in die in Punktcoordinaten gegebene Scheitelgleichung der Parabel die rechtwinkligen Liniencoordinaten einführt.

leistet; es hat aber weiter keine praktische Bedeutung, da es nur die Projection des rechtwinkligen Punktcoordinatensystems aus einem unendlich fernen Punkte ist.

Viel wichtiger ist es, zu untersuchen, ob wir nicht in der Ebene Liniencoordinaten finden können, die den rechtwinkligen Punktcoordinaten, wenn auch nicht völlig, so doch mehr entsprechen, als die rechtwinkligen Liniencoordinaten.

Aus den homogenen Coordinaten erhielten wir die rechtwinkligen Punktcoordinaten dadurch, dass wir eine Seite des rechtwinkligen Fundamentaldreiecks ins Unendliche rücken liessen; wir dürfen deshalb erwarten, dass wir Liniencoordinaten von ähnlicher Einfachheit erhalten werden, wenn wir nicht eine Seite, sondern eine Ecke dieses Fundamentaldreiecks ins Unendliche rücken lassen.

Nehmen wir der Einfachheit halber auch hier ein rechtwinkliges Fundamentaldreieck (Fig. 5) $N_1 N_2 N_3$ an, und messen wir die Abstände der Geraden g von den drei Fundamentalpunkten nicht in senkrechter Richtung, sondern parallel zur Seite $x_2 = 0$, so dass also diese drei Abstände sind

$$N_1 P = w, \quad N_2 Q = t, \quad N_3 P = s,$$

dann sind die Coordinaten u_i der Geraden, wenn wir für die drei beliebigen Constanten λ_i die Werthe wählen

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{p_3},$$

bestimmt durch die Gleichungen

$$\sigma u_1 = w, \quad \sigma u_2 = t, \quad \sigma u_3 = \frac{s}{-p_3}.$$

Rückt nun der Punkt N_3 auf der Geraden $N_1 N_3$ ins Unendliche, so wird $N_3 P = s$ negativ unendlich gross, p_3 positiv unendlich, und beide Grössen unterscheiden sich nur um eine endliche additive Constante (wenn nicht P selbst ins Unendliche rückt, also die betrachtete Gerade parallel zu $N_1 N_3$ ist); der Grenzwerth von $\frac{s}{-p_3}$ ist also gleich der Einheit und folglich

$$u_1 : u_2 : u_3 = w : t : 1.$$

Die Seite $N_2 N_3$ (Fig. 6) ist jetzt der Seite $N_1 N_3$ parallel, und eine Gerade ist bestimmt durch die nicht mehr homogenen Coordinaten w und t, d. h. durch ihre von den Punkten N_1 resp. N_2 aus gemessenen Abschnitte auf den beiden Geraden, die wir als die Axen dieses Coordinatensystems betrachten wollen. In ihnen haben also die Coordinaten der Geraden eine ebenso einfache geometrische Bedeutung, wie im rechtwinkligen Coordinatensystem diejenigen des Punktes. Auch hier sind gewisse Gerade, wie dort die unendlich fernen Punkte, nicht direct durch ihre Coordinaten bestimmt; für jede den Axen parallele Gerade werden ja die Axenabschnitte beide unendlich gross. In der That dürfen wir für diese Geraden nicht mehr $\lim \frac{s}{-p_3} = 1$ setzen, weil der Punkt P selbst im Unendlichen liegt; der

Uebergang von den homogenen zu diesen Liniencoordinaten ist dann nicht mehr in der obigen Weise möglich. Doch können wir die Lage dieser Geraden bestimmen, wenn wir ausser ihren Coordinaten auch deren Verhältniss $\frac{w}{t}$ kennen, da dieses Verhältniss für irgend eine Gerade, welche die Fundamentallinie $N_1 N_2$ im Punkte R schneidet, stets $=\frac{N_1 R}{N_2 R}$ ist. Während wir also im rechtwinkligen Coordinatensystem über alle Punkte, die auf der unendlich fernen Geraden liegen, die Herrschaft verlieren, so besitzen wir sie hier nicht mehr über alle Geraden, die durch einen unendlich fernen Punkt, den Schnittpunkt der beiden Axen des Systems, gehen. Die Geraden, welche hier eine Ausnahmestellung einnehmen, sind aber abhängig von der Lage des Coordinatensystems, wie es nicht anders zu erwarten war.

Dieses einfache Liniencoordinatensystem hat Herr Schwering im 21. Bande dieser Zeitschrift eingeführt und in seinem Buche „Die Theorie und Anwendung der Liniencoordinaten" (Leipzig 1884) ausschliesslich benützt. Herr Schlegel hat dann im 23. Bande dieser Zeitschrift darauf aufmerksam gemacht, dass dasselbe dem rechtwinkligen Punktcoordinatensystem reciprok ist. Da bei dieser reciproken Beziehung die Gerade $N_1 N_2$ dem Anfangspunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems entspricht, so wollen wir sie die Anfangsgerade des Schwering'schen Coordinatensystems nennen.

Wir wollen nun noch fragen, welche Grössen wir in diesem System als Coordinaten eines Punktes zu betrachten haben, diese Grössen aber nicht aus der Gleichung des Punktes, sondern wieder mit Hilfe der homogenen Coordinaten bestimmen.

Kehren wir zu diesen zurück, so haben wir, da

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{p_3}$$

gesetzt wurde und $k_i = \frac{1}{\lambda_i p_i}$ ist, für k_i die Werthe

$$k_1 = \frac{1}{p_1}, \quad k_2 = \frac{1}{p_2}, \quad k_3 = -1$$

und folglich, wenn wieder r_i den senkrechten Abstand eines beliebigen Punktes von der Seite $x_i = 0$ bedeutet,

$$\varrho x_1 = \frac{r_1}{p_1}, \quad \varrho x_2 = \frac{r_2}{p_2}, \quad \varrho x_3 = -r_3$$

oder

16) $$x_1 : x_2 : x_3 = -\frac{1}{p_1}\frac{r_1}{r_3} : -\frac{1}{p_2}\frac{r_2}{r_3} : 1.$$

Die Division durch r_3 ist erlaubt, so lange r_3 nicht gleich Null ist; unsere Betrachtung gilt also für alle Punkte der Ebene, ausser für die auf der Geraden $N_1 N_2$ gelegenen (Fig. 5). In der obigen Proportion kommen keine Grössen vor, die unendlich werden, wenn der Punkt N_3 auf der Seite $x_2 = 0$

ins Unendliche rückt, sie gilt also auch für das Schwering'sche Coordinatensystem. Verbindet man in ihm (Fig. 7) den betrachteten Punkt P mit den Punkten N_1 und N_2, deren Gleichungen $w=0$, resp. $t=0$ sind, und bezeichnet die Abschnitte $N_2 D$ und $N_1 C$ dieser Verbindungslinien auf der t- und w-Axe mit d und c, so ist

$$\frac{r_1}{r_3}=\frac{p_1}{c}, \quad \frac{r_2}{r_3}=\frac{p_2}{d}$$

oder

$$\frac{1}{p_1}\frac{r_1}{r_3}=\frac{1}{c}, \quad \frac{1}{p_2}\frac{r_2}{r_3}=\frac{1}{d};$$

die Proportion 16) lautet also:

$$x_1:x_2:x_3=-\frac{1}{c}:-\frac{1}{d}:1.$$

Als nicht homogene Coordinaten ξ, η eines Punktes im Schwering-schen Coordinatensystem haben wir demnach zu wählen die negativen reciproken Axenabschnitte derjenigen beiden Geraden, welche den Punkt mit den Punkten $t=0$ und $w=0$ verbinden.

Die Analogie mit den Liniencoordinaten im rechtwinkligen System tritt schon hier hervor, sie wird aber bei einer weiteren Specialisirung des Schwering'schen Systems nachher noch auffallender werden.

Der obige Uebergang von den homogenen zu diesen Coordinaten ist nicht mehr gestattet, wenn $r_3=0$ ist, wie schon vorhin bemerkt wurde. Unsere neuen Punktcoordinaten versagen also für alle Punkte, welche auf der Anfangsgeraden $N_1 N_2$ des Systems liegen, die Coordinaten jedes solchen Punktes werden unendlich gross, und es muss noch ihr Verhältniss gegeben sein, wenn seine Lage bestimmt sein soll. Auch hier sind diese Punkte abhängig von der Lage des Coordinatensystems in der Ebene, da sie jedesmal auf der Anfangsgeraden desselben liegen. Dieses nicht homogene Punktcoordinatensystem ist aber dadurch interessant, dass in ihm die unendlich fernen Punkte uns direct zugänglich sind, d. h. bestimmte endliche Coordinaten besitzen; denn die Coordinaten

$$\xi=h, \quad \eta=-h,$$

wo h eine beliebige Constante ist, bestimmen stets eindeutig einen unendlich fernen Punkt, da die Axenabschnitte der beiden die Lage des Punktes $(h, -h)$ bestimmenden Geraden in diesem Falle entgegengesetzt gleich, diese Geraden selbst also parallel sind.

Wir wollen jetzt den Zusammenhang zwischen diesen und den rechtwinkligen Punktcoordinaten herstellen und kehren zu diesem Zwecke nochmals zu den homogenen Coordinaten zurück.

Sind

$$x=0, \quad y=0, \quad \frac{x}{p_3}+\frac{y}{p_2}-1=0$$

die Gleichungen der drei Seiten des Fundamentaldreiecks (Fig. 5) im rechtwinkligen Coordinatensystem, so hat man für die homogenen Punktcoordinaten die Gleichungen

$$\varrho x_1 = a_1\left(\frac{x}{p_3} + \frac{y}{p_2} - 1\right), \quad \varrho x_2 = b_2 y, \quad \varrho x_3 = a_3 x,$$

in denen die Constanten a_1, b_2, a_3 so zu bestimmen sind, dass λ_1, λ_2, λ_3 die früher festgesetzten Werthe 1, 1, $-\frac{1}{p_3}$ erhalten. Nun haben wir früher (S. 158) gesehen, dass, falls

$$\varrho x_i = a_i x + b_i y + c_i,$$

die Grössen λ_i den Unterdeterminanten C_i gleich oder wenigstens proportional sein müssen. Die Proportion

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = C_1 : C_2 : C_3$$

lautet aber in unserem speciellen Falle:

$$1 : 1 : -\frac{1}{p_3} = -a_3 b_2 : \frac{a_3 a_1}{p_2} : \frac{a_1 b_2}{p_3};$$

sie ist befriedigt durch die Werthe

$$a_1 = -1, \quad b_2 = \frac{1}{p_2}, \quad a_3 = -1.$$

Demnach vermitteln die Gleichungen

$$\varrho x_1 = -\frac{x}{p_3} - \frac{y}{p_2} + 1, \quad \varrho x_2 = \frac{y}{p_2}, \quad \varrho x_3 = -x$$

den Zusammenhang zwischen diesem speciellen homogenen und dem rechtwinkligen Coordinatensystem. Aus ihnen folgt

$$x_1 : x_2 : x_3 = \left(\frac{y - p_2}{p_2 x} - \frac{1}{p_3}\right) : -\frac{y}{p_2 x} : 1,$$

also wird, wenn wir p_3 unendlich werden lassen, wo dann die beiden ersten Glieder auf der rechten Seite der Proportion in die Punktcoordinaten des Schwering'schen Systems übergehen:

$$\xi = \frac{y - p_2}{p_2 x}, \quad \eta = -\frac{y}{p_2 x};$$

ξ und η sind somit durch die rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückt. Aus diesen Gleichungen folgt wieder die geometrische Bedeutung der neuen Punktcoordinaten, die wir oben direct gefunden haben.

Endlich wollen wir noch den Zusammenhang zwischen den Schwering'schen und den rechtwinkligen Liniencoordinaten herleiten.

Aus den Gleichungen

$$\varrho x_i = a_i x + b_i y + c_i$$

folgen, wie wir wissen, die Gleichungen

$$\sigma u_i = A_i u + B_i v + C_i,$$

in denen A_i, B_i, C_i die Unterdeterminanten der Determinante $(a_1 b_2 c_3)$ bedeuten. In unserem speciellen homogenen Coordinatensystem, das mit dem Schwering'schen zusammenfällt, erhält man demnach aus den Gleichungen

$$\varrho x_1 = -\frac{y}{p_2} + 1, \quad \varrho x_2 = \frac{y}{p_2}, \quad \varrho x_3 = -x$$

die folgenden:

$$\sigma u_1 = \frac{1}{p_2}, \quad \sigma u_2 = v - \frac{1}{p_2}, \quad \sigma u_3 = -\frac{1}{p_2} u,$$

also ist

$$u_1 : u_2 : u_3 = -\frac{1}{u} : \left(-\frac{p_2 v}{u} + \frac{1}{u}\right) : 1;$$

man hat folglich die Schwering'schen Liniencoordinaten ausgedrückt durch die rechtwinkligen in den Gleichungen

$$w = -\frac{1}{u}, \quad t = \frac{-p_2 v + 1}{u},$$

die natürlich auch direct auf geometrischem Wege hergeleitet werden können.

Zum Schluss endlich wollen wir noch die specielle Annahme machen, dass die Entfernung p_2 der beiden Axen von einander im Schwering-schen Coordinatensystem gleich der Einheit sei.

In diesem Falle ist (Fig. 7)

$$N_1 C = c = tg\,\gamma, \quad N_2 D = d = tg\,\delta,$$

also

$$\xi = -\frac{1}{tg\,\gamma}, \quad \eta = -\frac{1}{tg\,\delta}.$$

γ und δ sind die beiden Winkel, welche in dem von dem betrachteten Punkte P mit N_1 und N_2 gebildeten Dreieck an der Anfangsgeraden liegen; dieselben sind positiv, resp. negativ zu rechnen, je nachdem der Punkt P in der Halbebene der positiven oder in derjenigen der negativen Axen liegt.

Um die Analogie zwischen diesen Punkt- und den rechtwinkligen Liniencoordinaten hier recht deutlich hervortreten zu lassen, wollen wir die Punkte $w = 0$, $t = 0$, die den rechtwinkligen Coordinatenaxen $x = 0$, $y = 0$ entsprechen, als Coordinatenpunkte des Schwering'schen Systems bezeichnen. Dem Dreiseit, das im rechtwinkligen Coordinatensystem von den beiden Coordinatenaxen und einer Geraden g gebildet wird, entspricht dann in unserem System das Dreieck, das von den beiden Coordinatenpunkten und dem Punkte P gebildet wird, und die Coordinaten eines Punktes sind hier, wie wir eben sahen, die negativen reciproken Tangenten der Winkel, welche von den Verbindungsgeraden desselben mit den Coordinatenpunkten und von der Anfangsgeraden begrenzt werden, während im rechtwinkligen System die Coordinaten einer Geraden die negativen reciproken Längen der Strecken sind, welche von den Schnittpunkten der Geraden mit den Coordinatenaxen und vom Anfangspunkte begrenzt werden.

Das Schwering'sche Coordinatensystem ist also bei diesen Festsetzungen für Punktcoordinaten völlig reciprok dem rechtwinkligen Coordinatensystem für Liniencoordinaten.

X.

Bestimmung der Cardinalpunkte eines dioptrisch-katoptrischen Systems centrirter sphärischer Flächen, mittels Kettenbruchdeterminanten dargestellt.

Von

Prof. Dr. LUDWIG MATTHIESSEN

in Rostock.

In einem früheren Aufsatze (XXIX. Jahrg. dieser Zeitschr., 1884, S. 343) sind von mir nach einem zuerst von Ferraris angewandten Verfahren die Formeln zur Bestimmung der Cardinalpunkte eines dioptrischen Systems centrirter sphärischer Flächen abgeleitet worden. Vor Kurzem hat Hermann Brockmann in der Centralzeitung für Optik und Mechanik (Decemberheft 1886) gezeigt, wie sich diese Formeln in einfacher Weise auch auf den Fall anwenden lassen, wo die letzte Fläche spiegelt, so dass die Lichtstrahlen das brechende System wieder in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Es soll im Folgenden mit Hinweis auf die frühere Abhandlung eine kurze Darstellung dieser Verallgemeinerung der dioptrischen Determinanten gegeben werden, woran sich eine Anwendung derselben auf die Theorie der bekannten Sanson'schen Bilder im Linsenauge knüpfen wird.

Wir setzen also voraus, dass in einem brechenden System von a Flächen die letzte spiegelt, so dass die Lichtstrahlen wieder rückwärts aus dem System austreten. Ferner sollen unter Annahme der Gauss'schen Beschränkungen nur paraxiale Strahlen in Betracht gezogen werden, auf welche ausschliesslich nur die Cardinalpunkte Bezug haben. Das in Betracht zu ziehende System hat dann $2a-1$ Flächen, von denen die a^{te} Fläche den Brechungsindex $n_a = -1$ besitzt. Ist dann, wie früher, d_{a-1} der Abstand des Scheitels der a^{ten} Fläche von dem der $(a-1)^{\text{ten}}$, so wird sein

$$d_a = -d_{a-1}, \quad d_{a+1} = -d_{a-2}, \quad \ldots, \quad d_{2a-2} = -d_1,$$

$$\begin{aligned} f_a = \varphi_a = \tfrac{1}{2} r_a, \quad & f_{a+1} = \varphi_{a-1}, \quad \varphi_{a+1} = f_{a-1}, \\ & f_{a+2} = \varphi_{a-2}, \quad \varphi_{a+2} = f_{a-2}, \\ & \ldots\ldots, \quad \ldots\ldots, \\ & f_{2a-1} = \varphi_1, \quad \varphi_{2a-1} = f_1. \end{aligned}$$

Die secundären Focalinterstitien werden sein

$$J_a = -J_{a-1}, \quad J_{a+1} = -J_{a-2}, \quad \ldots, \quad J_{2a-2} = -J_1.$$

Die Interstitialdeterminante ist alsdann

$$R_{2a-2} = \left|\begin{array}{cccc|cccc} J_1 & \varphi_2 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ -f_2 & J_2 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & \varphi_{a-1} & . & . & . & . \\ . & . & -f_{a-1} & J_{a-1} & \varphi_a & . & . & . \\ \hline . & . & . & -f_a & -J_{a-1} & \varphi_{a-1} & . & . \\ . & . & . & . & -f_{a-1} & -J_{a-2} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & \varphi_2 \\ 0 & . & . & . & . & . & -f_2 & -J_1 \end{array}\right|.$$

Bezeichnet man, wie früher, die erste Gruppe mit R_{a-1}, die vierte mit R'_{a-1}, wo R'_{a-1} sich von R_{a-1} nur durch den Factor $(-1)^{a-1}$ unterscheidet, so ergiebt die Entwickelung

$$R_{2a-2} = R_{a-1} . R'_{a-1} - f_a \varphi_a \frac{\partial R_{a-1}}{\partial J_{a-1}} \cdot \frac{\partial R'_{a-1}}{\partial J_{a-1}}$$
$$= (-1)^{a-1} \left\{ R^2_{a-1} - \tfrac{1}{4} r^2_a \left(\frac{\partial R_{a-1}}{\partial J_{a-1}}\right)^2 \right\},$$

worin $\frac{\partial R_{a-1}}{\partial J_{a-1}} = R_{a-2}$ gesetzt werden kann. Die Determinante lässt sich offenbar auch als Product zweier Determinanten schreiben, nämlich

$$R_{2a-2} = (-1)^{a-1} \begin{vmatrix} J_1 & \varphi_2 & . & . & . \\ -f_1 & J_2 & . & . & . \\ . & . & . & \varphi_{a-1} & 0 \\ . & . & -f_{a-1} & J_{a-1} & \frac{1}{2} r_a \\ . & . & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} J_1 & \varphi_2 & . & . & . \\ -f_2 & J_2 & . & . & . \\ . & . & . & \varphi_{a-1} & 0 \\ . & . & -f_{a-1} & J_{a-1} & 1 \\ . & . & 0 & -\frac{1}{2} r_a & 1 \end{vmatrix}.$$
$$= (-1)^{a-1} (R_{a-1} - \tfrac{1}{2} r_a R_{a-2})(R_{a-1} + \tfrac{1}{2} r_a R_{a-2}).$$

Zunächst ist nun die erste Brennpunktsdistanz, d. h. der Abstand des ersten Hauptbrennpunktes F von der Vorderfläche S_1:

$$S_1 F = f_1 + \frac{f_1 \varphi_1}{R_{2a-2}} \cdot \frac{\partial R_{2a-2}}{\partial J_1} = \varphi_{2a-1} - \frac{\varphi_{2a-1} f_{2a-1}}{R_{2a-2}} \cdot \frac{\partial R_{2a-2}}{\partial J_{2a-2}} = \Sigma_1 \Phi,$$

also $\Sigma_1 \Phi = S_1 F$, wo Φ den zweiten Hauptbrennpunkt des dioptrisch-katoptrischen Systems, Σ_1 seine letzte Fläche bezeichnet. Da aber Σ_1 mit S_1 coincidirt, so coincidiren auch die beiden Hauptbrennpunkte. Ferner ist die zweite Brennweite

$$\varphi = (-1)^{2a-1} n_1 n_2 \ldots n_{2a-1} f,$$

und im vorliegenden Falle

$$n_a = -1, \quad n_{a+1} = \frac{1}{n_{a-1}}, \ \ldots, \ n_{2a-1} = \frac{1}{n_1},$$

folglich $\varphi = f$, d. h. es sind die Brennweiten nach Lage und Grösse dieselben. Weiter sind die Haupt- und Knotenpunktsdistanzen

$$H_\alpha S_1 = \alpha_1 = f - S_1 F, \quad H_\beta \Sigma_1 = \alpha_2 = \varphi - \Sigma_1 \Phi,$$
$$K_\alpha S_1 = k_1 = -\varphi - S_1 F, \quad K_\beta \Sigma_1 = k_2 = -f - \Sigma_1 \Phi.$$

Demnach vereinigen sich auch die Hauptpunkte H_α, H_β in einem Punkte H, ebenso die Knotenpunkte K_α, K_β in einem Punkte K. Daraus folgt weiter, dass das System wie ein sphärischer Spiegel functionirt vom Radius $r = 2f$, dessen optischer Mittelpunkt im Hauptpunkte H und dessen Krümmungsmittelpunkt im Knotenpunkte K liegt. Da nämlich allgemein $HK = f + \varphi$ ist, so liegt K ebenso weit vor F, wie F vor H, d. h. im Centrum des substituirten Spiegels.

Sind x_0 und x_1 die Abscissen eines Objectes Y_0 und seines Bildes Y_1 bezüglich H, so ist

$$\frac{f}{x_0} + \frac{f}{x_1} = 1, \quad \frac{Y_0}{Y_1} = \frac{-x_0}{x_1}.$$

Die Hauptbrennweite und die Hauptpunktsdistanz sind

$$f = \varphi = \frac{(-1)^{a-1} n_1 n_2 \ldots n_{a-1} f_1^2 f_2^2 \ldots f_{a-1}^2 \cdot \frac{1}{2} r_a}{R_{2a-2}},$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = f - \left(f_1 + \frac{f_1 \varphi_1}{R_{2a-2}} \cdot \frac{\partial R_{2a-2}}{\partial J_1}\right).$$

Wenn es sich darum handelt, den Krümmungshalbmesser r_a der letzten, spiegelnden Fläche dioptrisch zu messen, während die übrigen Elemente bekannt sind, so bedarf es dazu der Messung des Bildes Y_1 eines Objectes Y_0, welches sich in der Entfernung x_0 von dem Hauptpunkte H befindet. Da aber die Hauptpunktsdistanz HS_1 oder α_1 der Vorderfläche eine Function von r_a ist, so muss man sie auf einem andern Wege ermitteln. Bei dicken Systemen kann der Werth von α_1 direct durch Messung gefunden werden, und zwar mittels zweier Beobachtungen bei verschiedenen Objectsdistanzen. Sind nämlich s_0 und s_1 die Objectsdistanzen von S_1, β_0 und β_1 die Bildverhältnisse, so wird sein

$$\frac{1}{s_0 + \alpha_1} - \frac{\beta_0}{s_0 + \alpha_1} = \frac{1}{s_1 + \alpha_1} - \frac{\beta_1}{s_1 + \alpha_1} = \frac{1}{f}$$

oder

$$\frac{s_0 + \alpha_1}{s_1 + \alpha_1} = \frac{1 - \beta_0}{1 - \beta_1},$$

folglich

$$\alpha_1 = \frac{s_1(1 - \beta_0) - s_0(1 - \beta_1)}{\beta_0 - \beta_1}.$$

In dünnen Systemen von kleiner Krümmung ist jedoch α_1 so klein, dass man es gegen s_0 oder x_0 vernachlässigen kann.

Aus dem gemessenen Bildverhältnisse wird nun weiter durch Berechnung x_1 gefunden und somit auch f. Alsdann ergiebt sich r_a aus der Formel für die Brennweite, nämlich

$$r_a = \frac{2f \cdot R_{2a-2}}{f_1 \ldots f_{a-1} \varphi_{a-1} \ldots \varphi_1},$$

wo aber R_{2a-2} noch eine lineare Function von r_a ist. Nun ist

$$J_{a-1} = f_a - \varphi_{a-1} + d_{a-1} = \tfrac{1}{2} r_a - \varphi_{a-1} + d_{a-1}$$

und

$$R_{a-1} = J_{a-1} R_{a-2} + \varphi_{a-1} f_{a-1} R_{a-3},$$

folglich

$$R_{2a-2} = (-1)^{a-1} \{[(\tfrac{1}{2} r_a - \varphi_{a-1} + d_{a-1}) R_{a-2} + \varphi_{a-1} f_{a-1} R_{a-3}]^2 - \tfrac{1}{4} r_a^2 R^2_{a-2}\};$$

hieraus verschwindet das Quadrat von r_a, so dass die Gleichung in r_a linear wird. Man findet mit leichter Mühe

$$r_a = \frac{(-1)^{a-1} f[(\varphi_{a-1} - d_{a-1}) R_{a-2} - \varphi_{a-1} f_{a-1} R_{a-3}]^2}{\tfrac{1}{2} f_1 \ldots f_{a-1} \varphi_{a-1} \ldots \varphi_1 + f[(\varphi_{a-1} - d_{a-1}) R_{a-2} - \varphi_{a-1} f_{a-1} R_{a-3}] R_{a-2}},$$

Wenn man nun Dividend und Divisor dieses Quotienten durch $(-1)^{a-1} R^2_{a-2}$ dividirt und die beiden Brennweiten des vor der spiegelnden Fläche liegenden dioptrischen Systems der Kürze wegen

$$\frac{f_1 \ldots f_{a-1}}{R_{a-2}} = f', \quad \frac{\varphi_1 \ldots \varphi_{a-1} (-1)^{a-2}}{R_{a-2}} = \varphi'$$

schreibt, so resultirt

$$r_a = \frac{f\left[\varphi_{a-1} - d_{a-1} - \varphi_{a-1} f_{a-1} \frac{R_{a-3}}{R_{a-2}}\right]^2}{-\tfrac{1}{2} f' \varphi' + f\left[\varphi_{a-1} - d_{a-1} - \varphi_{a-1} f_{a-1} \frac{R_{a-3}}{R_{a-2}}\right]}.$$

Nun ist

$$R_{a-1} = (f_a - \varphi_{a-1} + d_{a-1}) R_{a-2} + \varphi_{a-1} f_{a-1} R_{a-3},$$

also

$$\varphi_{a-1} - d_{a-1} - \varphi_{a-1} f_{a-1} \frac{R_{a-3}}{R_{a-2}} = f_a - \frac{R_{a-1}}{R_{a-2}},$$

und ferner das secundäre Hauptpunktsinterstitium des vorangehenden Systems [vergl. *loc. cit.* 27)]

$$D_{a-1} = \varphi' - \left(f_a - \frac{R_{a-1}}{R_{a-2}}\right),$$

folglich

$$\varphi_{a-1} - d_{a-1} - \varphi_{a-1} f_{a-1} \frac{R_{a-3}}{R_{a-2}} = \varphi' - D_{a-1}.$$

Der Ausdruck für den Krümmungsradius der letzten, spiegelnden Fläche ist demnach

$$r_a = \frac{f(\varphi' - D_{a-1})^2}{-\tfrac{1}{2} f' \varphi' + f(\varphi' - D_{a-1})},$$

wo D_{a-1} das secundäre Hauptpunktsinterstitium des vorangehenden Systems oder der Abstand der spiegelnden Fläche von dem zweiten Hauptpunkte des vorangehenden dioptrischen Systems, $\varphi' - D_{a-1}$ die Entfernung des zweiten Brennpunktes desselben Systems von der spiegelnden Fläche, f' und φ' seine Brennweiten und f die Brennweite des ganzen dioptrisch-katoptrischen Systems bedeuten. Ist $a = 2$, so erhält man

$$r_2 = \frac{f(\varphi_1 - d_1)^2}{-\tfrac{1}{2} f_1 \varphi_1 + f(\varphi_1 - d_1)}.$$

Löst man die allgemeine Gleichung nach f auf, so resultirt

$$f = \tfrac{1}{2} r_a \frac{f' \varphi'}{(\varphi' - D_{a-1}) \{r_a - (\varphi' - D_{a-1})\}}.$$

Da der scheinbare Ort H der spiegelnden Fläche offenbar von ihrer Krümmung unabhängig ist, so muss es auch α_1 sein. Wir fanden oben

$$\alpha_1 = f - \left(f_1 + \frac{f_1 \varphi_1}{R_{2a-2}} \cdot \frac{\partial R_{a-2}}{\partial J_1}\right).$$

Es ist nun

$$\frac{\partial R_{2a-2}}{\partial J_1} = (-1)^{a-1}\left(\frac{\partial R_{a-1}}{\partial J_1} - \tfrac{1}{2} r_a \frac{\partial R_{a-2}}{\partial J_1}\right)(R_{a-1} + \tfrac{1}{2} r_a R_{a-2}),$$

$$R_{2a-2} = (-1)^{a-1}(R_{a-1} - \tfrac{1}{2} r_a R_{a-2})(R_{a-1} + \tfrac{1}{2} r_a R_{a-2}).$$

Es ist also

$$\alpha_1 = f - \left(f_1 + f_1 \varphi_1 \frac{\dfrac{\partial R_{a-1}}{\partial J_1} - \tfrac{1}{2} r_a \dfrac{\partial R_{a-2}}{\partial J_1}}{R_{a-1} - \tfrac{1}{2} r_a R_{a-2}}\right).$$

Weiter ist

$$\frac{\partial R_{a-1}}{\partial J_1} = (\tfrac{1}{2} r_a - \varphi_{a-1} + d_{a-1}) \frac{\partial R_{a-2}}{\partial J_1} + \varphi_{a-1} f_{a-1} \frac{\partial R_{a-3}}{\partial J_1},$$

$$R_{a-1} = (\tfrac{1}{2} r_a - \varphi_{a-1} + d_{a-1}) R_{a-2} + \varphi_{a-1} f_{a-1} R_{a-3};$$

folglich

$$\alpha_1 = f - \left[f_1 + f_1 \varphi_1 \frac{(-\varphi_{a-1} + d_{a-1}) \dfrac{\partial R_{a-2}}{\partial J_1} + \varphi_{a-1} f_{a-1} \dfrac{\partial R_{a-3}}{\partial J_1}}{(-\varphi_{a-1} + d_{a-1}) R_{a-2} + \varphi_{a-1} f_{a-1} R_{a-3}}\right],$$

d. h. gleich einem Ausdrucke, der r_a nicht enthält.

Wenn die spiegelnde Fläche eben ist, also $r_a = \infty$, so liefert die Gleichung in r_a oder f:

$$f = \frac{\tfrac{1}{2} f' \varphi'}{\varphi' - D_{a-1}}.$$

Ist dabei $a = 2$, so findet man

$$f = -\frac{\tfrac{1}{2} f_1 \varphi_1}{\varphi_1 - d_1} = \alpha_1,$$

d. h. der scheinbare Brennpunkt der spiegelnden Fläche liegt in der davor liegenden brechenden Fläche; ihr scheinbarer Krümmungsradius ist $2f$.

Die vorstehenden Betrachtungen werden auf das Auge angewendet, wenn es sich darum handelt, die Krümmung der Linsenflächen mit Hilfe der Sanson'schen Bilder zu messen. Wir wollen dabei ausgehen von folgenden geometrischen und optischen Constanten des accommodationsfreien, schematischen menschlichen Auges A:

Krümmungsradius der Hornhaut	$r_0 =$	7,829 mm,
„ „ vorderen Linsenfläche	$r_1 =$	10,0 „
„ „ hinteren „	$r_2 =$	$-$ 6,0 „
Ort der vorderen Linsenfläche	$d_1 =$	3,6 „
Dicke der Krystalllinse	$d_2 =$	3,6 „
Brechungsindex der flüssigen Augenmedien .	$n_1 =$	1,3350,
Totalindex der Krystalllinse	$n_2 =$	1,4384.

Die dioptrischen Elemente für das erste Sanson'sche Bild sind nun

$$f_1 = -23{,}37, \quad \varphi_1 = 31{,}20, \quad f_2 = \varphi_2 = \tfrac{1}{2} r_2 = 5, \quad f_3 = \varphi_1, \quad \varphi_3 = f_1,$$

$$d_2 = -d_1, \quad J_1 = \tfrac{1}{2}r_2 - \varphi_1 + d_1 = -22{,}60,$$
$$R_2 = -J_1^2 + \tfrac{1}{4}r_2^2 = -485{,}76.$$

Daraus ergiebt sich

$$f = \varphi = \frac{f_1 f_2 \varphi_1}{R_2} = 7{,}505, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = -3{,}048.$$

Demnach ist

die Hauptpunktsdistanz $S_1 H = 3{,}048$,
" Brennpunktsdistanz $S_1 F = 10{,}553$,
" Knotenpunktsdistanz $S_1 K = 18{,}058$.

Dies sind also die Oerter der Cordinalpunkte des dioptrisch-katoptrischen Systems. Wenn d_1 bekannt, r_2 unbekannt, aber f gemessen ist, so findet man den Krümmungsradius der vorderen Linsenfläche aus

$$r_2 = \frac{f(\varphi_1 - d_1)^2}{-\tfrac{1}{2}f_1\varphi_1 + f(\varphi_1 - d_1)}.$$

Die dioptrischen Elemente für das zweite Sanson'sche Bild sind

$$f_1 = -23{,}37, \quad \varphi_1 = 31{,}20, \quad f_2 = -129{,}20, \quad \varphi_2 = 139{,}20,$$
$$J_1 = f_2 - \varphi_1 + d_1 = -156{,}80, \quad J_2 = \tfrac{1}{2}r_3 - \varphi_2 + d_2 = -138{,}60,$$
$$f_3 = \varphi_3 = \tfrac{1}{2}r_3 = -3;$$
$$f_4 = \varphi_2, \quad \varphi_4 = f_2, \quad d_3 = -d_2, \quad J_3 = -J_2,$$
$$f_5 = \varphi_1, \quad \varphi_5 = f_1, \quad d_4 = -d_1, \quad J_4 = -J_1,$$
$$R_4 = 13825480 = (J_1 J_2 + f_2\varphi_2)^2 - \tfrac{1}{4}r_3^2 J_1^2.$$

Daraus ergiebt sich

$$f = \varphi = \frac{f_1 f_2 f_3 \varphi_2 \varphi_1}{R_4} = -2{,}845, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = -6{,}796.$$

Für die Gleichungen in f und r_3 ergeben sich folgende Werthe:

$$f' = -19{,}256, \quad \varphi' = 27{,}698,$$
$$\varphi' - D_2 = 20{,}902, \quad r_3 - (\varphi' - D_2) = 26{,}902.$$

Die Oerter der Cardinalpunkte des dioptrisch-katoptrischen Systems sind nunmehr:

$$S_1 H_1 = 6{,}796, \quad S_1 F = 3{,}950, \quad S_1 K = 1{,}105.$$

Demnach liegt der Brennpunkt des dioptrischen Spiegels 0,35 mm hinter der vorderen Linsenfläche und der optische Mittelpunkt 0,404 mm vor der hinteren Fläche. Das zweite Sanson'sche Bild liegt nahe vor F. Ist r_3 unbekannt, aber f gemessen, so findet man r_3 aus

$$r_3 = \frac{f(\varphi' - D_2)}{-\tfrac{1}{2}f'\varphi' + f(\varphi' - D_2)}.$$

XI.

Ueber lineare simultane Differentialgleichungen, welche durch hypergeometrische Functionen integrirt werden können.

Von

Woldemar Heymann

in Plauen i. V.

Im 3. Heft des XXIX. Jahrganges dieser Zeitschrift habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass die Gleichung

$$1)\quad (\alpha+\beta\xi+\gamma\xi^2+\delta\xi^3)\frac{d\eta}{d\xi}+(\alpha_1+\beta_1\xi)\eta^2+(\alpha_2+\beta_2\xi)\eta+(\alpha_3+\beta_3\xi)=0$$

in die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe transformirt werden kann.

Da von Gleichungen der Form

$$2)\qquad L\frac{d\eta}{d\xi}+M\eta^2+N\eta+P=0$$

die Integration des folgenden Systems linearer Gleichungen:

$$3)\qquad \begin{cases} R\dfrac{dy}{dx}+P_1y+Q_1z=V_1, \\ R\dfrac{dz}{dx}+P_2y+Q_2z=V_2 \end{cases}$$

abhängt, so ist es unmittelbar klar, dass man ein System linearer Differentialgleichungen aufstellen können wird, welches mittels hypergeometrischer Functionen zu integriren ist.

In der That findet man leicht, dass das System

$$4)\qquad \begin{cases} (a+bx+cx^2+dx^3)\dfrac{dy}{dx}+(a_1+b_1x)y+(c_1+d_1x)z=V_1, \\ (a+bx+cx^2+dx^3)\dfrac{dz}{dx}+(a_2+b_2x)y+(c_2+d_2x)z=V_2 \end{cases}$$

diese Eigenschaft besitzt — insofern nämlich, als dessen Integration nach der d'Alembert'schen Methode direct von der Integration der Gleichung 1) abhängig gemacht werden kann.*

---

* Vergl. die Abhandlung des Verfassers: Ueber die Integration linearer, nicht homogener Differentialgleichungen. Diese Zeitschrift Jahrg. XXX, S. 102 u. 103.

Es wird im Allgemeinen aber immer ein Umweg sein, wenn man von den linearen simultanen Gleichungen 4) auf die nicht lineare Gleichung 1) zurückgeht und diese schliesslich doch wieder in eine lineare verwandelt. Wir stellen uns daher die Aufgabe, die Gleichungen 4) so zu behandeln, dass wir ohne Durchgang durch eine nicht lineare Differentialgleichung auf die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe kommen.

Der Einfachheit halber setzen wir voraus, dass die rechten Seiten der Gleichung 4) Null sind und dass auch $a=0$. Hierdurch wird die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt. Denken wir uns die Variabele x ersetzt durch $\frac{1}{x}$, so lauten die Gleichungen 4) bei Veränderung der Buchstaben einfacher:

$$5)\quad \left\{\begin{aligned} &(a+bx+cx^2)\frac{dy_1}{dx}+(a_1+b_1x)y_1+(c_1+d_1x)y_2=0,\\ &(a+bx+cx^2)\frac{dy_2}{dx}+(a_2+b_2x)y_1+(c_2+d_2x)y_2=0,\end{aligned}\right.$$

und dieses ist das System, welches in der erwähnten Weise behandelt werden soll.

Die weitere Transformation besteht nun darin, dass man in die Gleichungen 5) successive die Substitutionen

$$y_k=e^{\int\frac{g_0+g_1x}{a+bx+cx^2}dx}\eta_k,\quad \eta_k=a_{k1}z_1+a_{k2}z_2\quad (k=1,2)$$

einführt, wobei die Form der Gleichungen erhalten bleibt. Dann kann man im Allgemeinen über die Substitutionscoefficienten so verfügen, dass die erste der Gleichungen durch $x-\varepsilon_1$, die zweite durch $x-\varepsilon_2$ theilbar wird, wo ε_1 und ε_2 die als voneinander verschieden vorausgesetzten Wurzeln der Gleichung

$$a+bx+cx^2=0$$

bedeuten.* Die in dieser Weise vereinfachten Gleichungen lassen sich unmittelbar durch hypergeometrische Functionen integriren.

Setzt man der Kürze halber

$$\left\{\begin{aligned} &a+bx+cx^2=c(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)=F,\\ &a_1+b_1x=\varphi_{11},\quad c_1+d_1x=\varphi_{12},\\ &a_2+b_2x=\varphi_{21},\quad c_2+d_2x=\varphi_{22},\end{aligned}\right.$$

so lauten die Gleichungen 5):

$$5)\quad \left\{\begin{aligned} &F\frac{dy_1}{dx}+\varphi_{11}y_1+\varphi_{12}y_2=0,\\ &F\frac{dy_2}{dx}+\varphi_{21}y_1+\varphi_{22}y_2=0,\end{aligned}\right.$$

und substituirt man zunächst

---

* Diese Transformation lässt sich auf ein System von n simultanen Gleichungen ausdehnen. Vergl. meine Abhandlung: Ueber eine Transformation bei linearen simultanen Differentialgleichungen. Journal f. d. r. u. a. M. Bd. 98.

$$y_k = e^{\int \frac{G}{F} dx} \eta_k, \quad G = g_0 + g_1 x,$$

so entsteht

$$6) \quad \begin{cases} F \dfrac{d\eta_1}{dx} + f_{11}\eta_1 + f_{12}\eta_2 = 0, \\ F \dfrac{d\eta_2}{dx} + f_{21}\eta_1 + f_{22}\eta_2 = 0, \end{cases}$$

worin

$$\begin{cases} f_{11} = G + \varphi_{11}, & f_{12} = \quad \varphi_{12}, \\ f_{12} = \quad \varphi_{21} & f_{22} = G + \varphi_{22}. \end{cases}$$

Nun verlange man, weil dies durch die spätere Transformation gefordert wird, dass

$$V(\varepsilon_i) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}_{x=\varepsilon_i} = 0 \quad (i = 1, 2),$$

dann gewinnt man für G folgende Gleichung:

$$[G^2 + (\varphi_{11} + \varphi_{22})\, G + \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21}]_{x=\varepsilon_i} = 0,$$

und hieraus folgen zwei Werthe $G(\varepsilon_i)$ und $G'(\varepsilon_i)$, so dass man hat

$$\alpha) \quad \begin{cases} g_0 + g_1 \varepsilon_1 = G(\varepsilon_1), \\ g_0 + g_1 \varepsilon_1 = G'(\varepsilon_1), \end{cases} \qquad \beta) \quad \begin{cases} g_0 + g_1 \varepsilon_2 = G(\varepsilon_2), \\ g_0 + g_1 \varepsilon_2 = G'(\varepsilon_2). \end{cases}$$

Indem man eine der Gleichungen α) mit einer der Gleichungen β) verbindet, wird es möglich, g_0 und g_1 zu bestimmen, vorausgesetzt, dass ε_1 und ε_2 voneinander verschieden sind. Da diese Gleichungen in vierfacher Weise gepaart werden können, so giebt es auch vier voneinander verschiedene Substitutionsgruppen, welche jedoch äquivalent sind.

Führt man hierauf in die Gleichungen 6) die linearen Substitutionen

$$\begin{cases} \eta_1 = a_{11} z_1 + a_{12} z_2, \\ \eta_2 = a_{21} z_1 + a_{22} z_2 \end{cases}$$

ein, löst sogleich nach $\dfrac{dz_1}{dx}$ und $\dfrac{dz_2}{dx}$ auf und setzt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = D,$$

so findet man

$$7) \quad \begin{cases} D.F \dfrac{dz_1}{dx} + (a_{11} z_1 + a_{12} z_2)(a_{22} f_{11} - a_{12} f_{21}) + (a_{21} z_1 + a_{22} z_2)(a_{22} f_{12} - a_{12} f_{22}) \\ \qquad = 0, \\ D.F \dfrac{dz_2}{dx} - (a_{11} z_1 + a_{12} z_2)(a_{21} f_{11} - a_{11} f_{21}) - (a_{21} z_1 + a_{22} z_2)(a_{21} f_{12} - a_{11} f_{22}) \\ \qquad = 0. \end{cases}$$

Soll nun die erste dieser Gleichungen durch $x - \varepsilon_1$, die zweite durch $x - \varepsilon_2$ theilbar sein, so muss

$$\begin{cases} (a_{22} f_{11} - a_{12} f_{21})_{x=\varepsilon_1} = 0, & (a_{22} f_{12} - a_{12} f_{22})_{x=\varepsilon_1} = 0, \\ (a_{21} f_{11} - a_{11} f_{21})_{x=\varepsilon_2} = 0, & (a_{21} f_{12} - a_{11} f_{22})_{x=\varepsilon_2} = 0, \end{cases}$$

und hieraus ergeben sich für die Substitutionscoefficienten proportionale Ausdrücke, die sich nicht widersprechen, weil $V(\varepsilon_i) = 0$.

Die Gleichungen 11) lauten jetzt einfacher:

$$8)\qquad \begin{cases} (x-\varepsilon_2)\dfrac{dz_1}{dx}+\alpha_1 z_1+\beta_1 z_2=0, \\ (x-\varepsilon_1)\dfrac{dz_2}{dx}+\alpha_2 z_1+\beta_2 z_2=0; \end{cases}$$

$\alpha_1 \ldots \beta_2$ sind bestimmte Constanten. Eliminirt man aus beiden Gleichungen eine der abhängigen Variabelen, etwa z_2, so kommt man zu der Differentialgleichung

$$9)\qquad (x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\frac{d^2 z_1}{dx^2}+(\gamma_1+\delta_1 x)\frac{dz_1}{dx}+\gamma_0 z_1=0,$$

und nun kann die Integration leicht vollzogen werden. Indem man rückwärts rechnet, gewinnt man schliesslich die Integrale des Systems 5).

Die Transformation versagt in mehreren Fällen: 1. wenn $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, d. h., wenn F vollkommen quadratisch ist; 2. wenn F linear ist; 3. wenn F constant ist.

1. Ist F vollkommen quadratisch,

$$F=c(x-\varepsilon_1)^2,$$

so setze man für $\dfrac{1}{x-\varepsilon_1}$ eine neue Variabele, etwa wieder x, dann erhält man folgendes System simultaner Gleichungen:

$$10)\qquad \begin{cases} x\dfrac{dy_1}{dx}+\varphi_{11}y_1+\varphi_{12}y_2=0, \\ x\dfrac{dy_2}{dx}+\varphi_{21}y_1+\varphi_{22}y_2=0, \end{cases}$$

in welchem die φ_{ik} lineare Ausdrücke bedeuten, also — wenn auf die frühere Bedeutung der Buchstaben keine Rücksicht genommen wird —

$$\begin{cases} \varphi_{11}=a_1+b_1 x, & \varphi_{12}=c_1+d_1 x, \\ \varphi_{21}=a_2+b_2 x, & \varphi_{22}=c_2+d_2 x. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 10) leitet man mittels der Substitutionen

$$\begin{cases} y_k=e^{\int\frac{G}{x}dx}\eta_k, & \eta_1=a_{11}z_1+a_{12}z_2, \\ G=g_0+g_1 x, & \eta_2=a_{21}z_1+a_{22}z_2 \end{cases}$$

folgendes System ab:

$$11)\qquad \begin{cases} D.x\dfrac{dz_1}{dx}+(a_{11}z_1+a_{12}z_2)(a_{22}f_{11}-a_{12}f_{21})+(a_{21}z_1+a_{22}z_2)(a_{22}f_{12}-a_{12}f_{22}) \\ \qquad =0, \\ D.x\dfrac{dz_2}{dx}-(a_{11}z_1+a_{12}z_2)(a_{21}f_{11}-a_{11}f_{21})-(a_{21}z_1+a_{22}z_2)(a_{21}f_{12}-a_{11}f_{22}) \\ \qquad =0, \end{cases}$$

worin

$$\begin{cases} f_{11}=G+\varphi_{11}, & f_{12}=\varphi_{12}, \\ f_{21}=\varphi_{21}, & f_{22}=G+\varphi_{22}, \end{cases}\qquad D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Um die erste Gleichung des Systems 11) zu vereinfachen, verlange man, dass sie durch x theilbar werde; dann muss

$$\begin{cases} (a_{22}f_{11} - a_{12}f_{21})_{x=0} = 0, \\ (a_{22}f_{12} - a_{12}f_{22})_{x=0} = 0, \end{cases} \quad \text{mithin} \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix}_{x=0} = 0.$$

Die letzte Determinante giebt entwickelt

$$[G^2 + (\varphi_{11} + \varphi_{22})G + \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21}]_{x=0} = 0,$$

d. h.

$$g_0^2 + (a_1 + c_2)g_0 + a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0,$$

woraus g_0 zu bestimmen ist.

Die zweite Gleichung des Systems 11) kann nicht in gleicher Weise vereinfacht werden, denn man würde in diesem Falle die Substitutionsdeterminante D zum Verschwinden bringen. Wohl aber kann man eine Vereinfachung dadurch herbeiführen, dass man in den linearen Ausdrücken

$$a_{21}f_{11} - a_{11}f_{21} \quad \text{und} \quad a_{21}f_{12} - a_{11}f_{22}$$

die Coefficienten von x verschwinden lässt. Dadurch gelangt man zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{cases} a_{21}(g_1 + b_1) - a_{11}\,b_2 = 0, \\ a_{21}\,d_1 - a_{11}(g_1 + d_2) = 0, \end{cases} \quad \text{mithin} \quad \begin{vmatrix} g_1 + b_1 & b_2 \\ d_1 & g_1 + d_2 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.

$$g_1^2 + (b_1 + d_2)g_1 + b_1 d_2 - b_2 d_1 = 0.$$

Durch die letzte Gleichung ist g_1 bestimmt; für die Substitutionscoefficienten ergeben sich proportionale Ausdrücke. — Da sowohl für g_0, wie auch für g_1 im Allgemeinen zwei Werthe gefunden werden, so hat man auch bei dieser Art der Transformation vier voneinander verschiedene Substitutionsgruppen, die sämmtlich dasselbe leisten.

Die Gleichungen 11) nehmen nun folgende einfache Gestalt an:

$$\text{12)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} + \alpha_1 z_1 + \beta_1 z_2 = 0, \\ x\dfrac{dz_2}{dx} + \alpha_2 z_1 + \beta_2 z_2 = 0, \end{cases}$$

und aus ihnen geht durch Elimination von z_2 die Differentialgleichung

$$\text{13)} \qquad x\frac{d^2 z_1}{dx^2} + (\gamma_1 + \delta_1 x)\frac{dz_1}{dx} + \gamma_0 z_1 = 0$$

hervor.

2. Ist F linear,

$$F = a + bx,$$

so setze man für $a + bx$ eine neue Variabele, etwa wieder x; dann erhält das System

$$
10)\qquad \begin{cases} x\dfrac{dy_1}{dx}+\varphi_{11}y_1+\varphi_{12}y_2=0,\\ x\dfrac{dy_2}{dx}+\varphi_{21}y_1+\varphi_{22}y_2=0,\end{cases}
$$

welches soeben unter Nr. 1 behandelt worden ist.

3. Ist F constant, so hat man es mit folgendem Gleichungssystem zu thun:

$$
14)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}+\varphi_{11}y_1+\varphi_{12}y_2=0;\\ \dfrac{dy_2}{dx}+\varphi_{21}y_1+\varphi_{22}y_2=0,\end{cases}
$$

wo die φ_{ik} wieder lineare Ausdrücke bedeuten.

Aus den Gleichungen 14) leitet man mittels der Substitutionen

$$
\begin{cases} y_k=e^{\int G\,dx}\eta_k, & \eta_1=a_{11}z_1+a_{12}z_2,\\ G=g_0+g_1x & \eta_2=a_{21}z_1+a_{22}z_2\end{cases}
$$

folgendes System ab:

$$
15)\qquad \begin{cases} D\dfrac{dz_1}{dx}+(a_{11}z_1+a_{12}z_2)(a_{22}f_{11}-a_{12}f_{21})+(a_{21}z_1+a_{22}z_2)(a_{22}f_{12}-a_{12}f_{22})\\ \qquad =0,\\ D\dfrac{dz_2}{dx}-(a_{11}z_1+a_{12}z_2)(a_{21}f_{11}-a_{11}f_{21})-(a_{21}z_1+a_{22}z_2)(a_{21}f_{12}-a_{11}f_{22})\\ \qquad =0,\end{cases}
$$

worin D und f_{ik} die bekannte Bedeutung haben.

Um die erste dieser Gleichungen zu vereinfachen, verlange man, dass die linearen Ausdrücke

$$
a_{22}f_{11}-a_{12}f_{21} \quad\text{und}\quad a_{22}f_{12}-a_{12}f_{22}
$$

constant werden; dies führt auf folgende Gleichungen:

$$
\begin{array}{lll} a_{22}(g_1+b_1)-a_{12} & b_2 & =0,\\ a_{22} \quad d_1 & -a_{12}(g_1+d_2) & =0,\end{array}\quad\text{mithin}\quad \begin{vmatrix} g_1+b_1 & b_2\\ d_1 & g_1+d_2\end{vmatrix}=0,
$$

d. h.

$$
g_1^2+(b_1+d_2)g_1+b_1d_2-b_2d_1=0.
$$

Die erste Gleichung des Systems 15) lautet jetzt:

$$
16)\qquad \frac{dz_1}{dx}+\alpha_1z_1+\beta_1z_2=0.
$$

Die zweite Gleichung dieses Systems kann nunmehr nicht in der gleichen Weise vereinfacht werden, und eine andere Reduction scheint nicht zweckdienlich zu sein. Man substituire daher sogleich den aus 16) folgenden Ausdruck für z_2 in die genannte Differentialgleichung, welche dadurch folgende Gestalt erlangt:

$$
17)\qquad \frac{d^2z_1}{dx^2}+(\gamma_1+\delta_1x)\frac{dz_1}{dx}+(\gamma_0+\delta_0x)z_1=0.
$$

Wenn man will, so kann man in dieser Gleichung mittels des noch unbestimmt gelassenen g_0 den Coefficienten δ_0 zum Verschwinden bringen. Die Grössen α_{11} und α_{21} können beliebige Werthe erhalten; eine derselben darf der Null gleich gesetzt werden. — Hiermit sind alle Hauptfälle der Transformation erledigt.

Es sei zum Schluss noch bemerkt, dass das System

$$18)\quad \begin{cases} x(a+bx^n+cx^{2n})\dfrac{dy_1}{dx}+(a_1+b_1x^n)y_1+(c_1+d_1x^n)y_2=0, \\ x(a+bx^n+cx^{2n})\dfrac{dy_2}{dx}+(a_2+b_2x^n)y_1+(c_2+d_2x^n)y_2=0 \end{cases}$$

vermöge der Substitution

$$x^n=\frac{1}{u}$$

auf das System 5) zurückkommt.

Kleinere Mittheilungen.

VII. Ueber die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise.

(Hierzu Taf. II Fig. 8.)

An die beiden Kreise mit den Mittelpunkten G und H seien die äusseren Tangenten AB und CD und die inneren Tangenten AC und BD construirt. Die ersteren mögen sich in E, die letzteren in F schneiden. Dann sind die beiden Kreise G und H unter Anderem dem Dreieck ACE eingeschrieben, folglich geht ihre Centrale GH durch E und halbirt den durch die äusseren Tangenten gebildeten Winkel. Desgleichen geht aber auch die Centrale GH durch den Schnittpunkt F der inneren Tangenten und halbirt den von ihnen eingeschlossenen Winkel, weil beide Kreise Berührungskreise des Dreiecks ABF sind. Es ergiebt sich also der bekannte Satz:*

I. Die Centrale zweier Kreise geht durch den Schnittpunkt sowohl der äusseren wie der inneren gemeinschaftlichen Tangenten und halbirt ihre Winkel.

Mögen ferner die Kreise G und H von den Tangenten

AB in den Punkten J und K, AC in den Punkten P und Q,
CD " " " L " M, BD " " " R " S

berührt werden. Dann ist der Kreis G dem Dreieck AEC eingeschrieben; folglich liegt der Mittelpunkt G auf der Halbirungslinie des Aussenwinkels CAJ, und aus ähnlichen Gründen der Mittelpunkt H des andern Kreises auf der Halbirungslinie des Nebenwinkels EAC. Die Linien GA und HA stehen also senkrecht aufeinander. Ebenso aber auch die Linien, welche von G und H nach den Punkten B oder C oder D gehen. Damit ergiebt sich der Satz:

II. Die vier Punkte, in welchen sich von den vier gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise je eine äussere und eine innere schneiden, liegen auf einem Kreise, welcher

* Die Sätze II—VI scheinen neu zu sein; wenigstens ist es dem Verfasser trotz eifriger Nachforschungen nicht gelungen, jene Sätze als bekannt zu erweisen, was um so auffälliger erscheint, als der in Satz II erwähnte Kreis fast immer zur Construction der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise verwendet wird. Jene Sätze wurden schon vor Jahresfrist beim Schulunterricht gefunden; mögen sie deshalb auch die Begründung behalten, die sie zur Verwerthung in der Elementarmathematik tauglich macht.

die Mittelpunkte der beiden gegebenen Kreise zu Gegenpunkten hat.

Sei ferner Z der Mittelpunkt der Centrale GH und ZT senkrecht auf AB, so ist $JT = TK$, also das Dreieck ZJT dem Dreieck ZKT congruent, demnach $ZJ = ZK$. Ebenso ist aber auch $ZL = ZM$. Daraus folgt:

III. Die Berührungspunkte der äusseren gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise liegen auf einem Kreise, dessen Centrum der Mittelpunkt der Centrale beider Kreise ist.

Ganz in der gleichen Weise lässt sich durch die Senkrechte ZT' auf AC beweisen, dass auch die Punkte P, Q, R, S gleichweit von Z entfernt sind, und es ergiebt sich also der dem vorigen analoge Satz:

IV. Die Berührungspunkte der inneren gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise liegen auf einem Kreise, dessen Centrum der Mittelpunkt der Centrale beider Kreise ist.

Aus den Sätzen über die dem Dreieck eingeschriebenen Kreise ergeben sich weitere Folgerungen, insbesondere über die Abstände der Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise. So ist z. B.

$$AB = CD = PQ = RS, \quad JK = LM = AC = BD,$$

d. h.:

V. Die Abschnitte der äusseren (inneren) Tangenten zweier Kreise zwischen den inneren (äusseren) Tangenten sind gleich dem Abstande der Berührungspunkte einer inneren (äusseren) Tangente.

Da die Gerade AG den Aussenwinkel A des Dreiecks ABF halbirt, so ist

$$F\hat{A}G = 90^0 - \tfrac{1}{2} B\hat{A}F$$

und ebenso

$$G\hat{F}A = 90^0 - \tfrac{1}{2} A\hat{F}B,$$

folglich

$$A\hat{G}F = \tfrac{1}{2}(B\hat{A}F + A\hat{F}B).$$

Nun ist nach dem zweiten der obigen Sätze GZA ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze in Z, folglich ist

$$A\hat{Z}F = 2A\hat{G}F = B\hat{A}F + A\hat{F}B$$

und demnach

$$A\hat{Z}F + F\hat{B}A = B\hat{A}F + A\hat{F}B + F\hat{B}A = 180^0.$$

Das Viereck $ABFZ$ ist also ein Sehnenviereck. Dasselbe gilt von dem Viereck $AZCE$. Bezeichnet man die Punkte A, B, C, D, in welchen sich je eine äussere und eine innere Tangente schneiden, der Kürze halber als Tangentenschnittpunkte, so ergiebt sich der Satz:

VI. Die auf einer äusseren (inneren) gemeinschaftlichen Tangente zweier Kreise befindlichen Tangentenschnittpunkte liegen mit dem Mittelpunkte der Centrale und dem Schnittpunkte der beiden inneren (äusseren) Tangenten auf einem Kreise.

Diese Sätze haben nun ihrerseits wiederum rückwirkende Kraft auf diejenigen Theoreme, mit deren Hilfe sie abgeleitet wurden, nämlich auf die Sätze über die Berührungskreise eines Dreiecks, weil ja die Seiten desselben als gemeinschaftliche Tangenten seiner Berührungskreise aufgefasst werden können.

Es sollen der Kürze halber die verschiedenen Arten von Kreisen, von denen die Sätze II, III (IV), VI handeln, als Kreise der ersten, zweiten und dritten Art bezeichnet werden. Dann zeigt sich, dass der einem Dreieck* umgeschriebene Kreis ein Kreis der dritten Art ist, so dass der Satz gilt:

VII. Die Mittelpunkte der sechs Centralen der vier Berührungskreise eines Dreiecks liegen auf dem dem Dreieck umgeschriebenen Kreise.

Wird nun der umgeschriebene Kreis eines Dreiecks construirt, so bestimmt eine von den Winkelhalbirungslinien des Dreiecks einen jener sechs Centralenmittelpunkte. Durch ihn aber ergeben sich mit Hilfe eines Kreises der ersten Art sofort die beiden auf jener Winkelhalbirungslinie liegenden Mittelpunkte von Berührungskreisen des Dreiecks, damit aber die übrigen Winkelhalbirungslinien und die Mittelpunkte der anderen beiden Berührungskreise. Bestimmt man dann einen der Berührungspunkte der Dreiecksseiten mit einem der Berührungskreise direct, so lassen sich mit Hilfe von Kreisen der zweiten Art alle übrigen elf Berührungspunkte leicht durch Kreise ermitteln, deren Mittelpunkte und Radien bekannt sind. Dadurch wird die für den praktischen Zeichner bisher nicht gerade bequeme Construction der vier Berührungskreise eines Dreiecks mit ihren zwölf Berührungspunkten wesentlich vereinfacht, verschärft und einer grossen Anzahl von Controlen unterworfen.

Meissen. Dr. Curt Reinhardt.

VIII. Die $r$stufige Determinante $n$ten Grades.

Wir nennen eine $r$stufige Determinante $n$ten Grades die Grösse

$$a_1^n \,..\, a_r^n \,|p_{1,1} \,..\, p_{r,1}| \,..\, |p_{1,n} \,..\, p_{r,n},$$

die dadurch entsteht, dass man das combinatorische Product $a_1^n \,..\, a_r^n$ unter steter Beibehaltung der Reihenfolge seiner Factoren nach einander mit den n combinatorischen Producten $p_{1,1} \,..\, p_{r,1}, \; .., \; p_{1,n} \,..\, p_{r,n}$ algebraisch multiplicativ verbindet.

Sie ist darnach das Product der n Determinanten

$$a_1 \,..\, a_r | p_{1,1} \,..\, p_{r,1}, \;\; .., \;\; a_1 \,..\, a_r | p_{1,n} \,..\, p_{r,n}.$$

Demzufolge nimmt sie den Factor $(-1)^n$ an, wenn in dem combinatorischen Producte $a_1^n \,..\, a_r^n$ zwei Factoren mit einander vertauscht werden,

---

* Man denke sich beispielsweise das Dreieck ABF in Fig. 8 als gegeben.

und erleidet dabei in ihrem Werthe bei geradem n keine und bei ungeradem n nur hinsichtlich des Zeichens eine Aenderung.

Die $r$stufige Determinante $n$ten Grades ist ein Aggregat von $r!^n$ Gliedern, die sich aus den Grössen

$$a_\varkappa{}^n p_{\lambda_1,1} \ldots p_{\lambda_n,n} \quad (\varkappa, \lambda_1, \ldots, \lambda_n = 1, \ldots, r)$$

zusammensetzen. Diese Grössen sind die Elemente der Determinante, und zwar bezeichnen wir die Grösse $a_\varkappa{}^n p_{\lambda_1,1} \ldots p_{\lambda_n,n}$ als das $(\varkappa, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$te Element.

Die Anzahl der Elemente ist r^{n+1}. Die Elemente der Determinante können daher in einem $(n+1)$dimensionalen Raume in gleich weit von einander abstehenden parallelen Reihen zu einem rechteckigen regelmässigen $(n+1)$dimensionalen Raumgebilde, das für $n=1$ oder die Ebene das Quadrat und für $n=2$ oder den Raum der Würfel ist, zusammengestellt werden. Zu diesem Zwecke ordnet man auf einer Geraden die Elemente

$$a_1{}^n p_{1,1} \ldots p_{1,n}, \ \ldots, \ a_r{}^n p_{1,1} \ldots p_{1,n}$$

in gleichen Abständen an, schiebt sie senkrecht gegen diese Gerade um dieselben Abstände unter steter Vergrösserung des ersten Index der Grösse $p_{1,1}$ um Eins $(n-1)$mal in eine Ebene weiter, nimmt dann unter der gleichen Veränderung des ersten Index der Grösse $p_{1,2}$ eine gleiche Verschiebung der Elemente in den Raum vor und fährt so fort.

Nach der Gleichung

$$a_1{}^n \ldots a_r{}^n | p_{1,1} \ldots p_{r,1} | \ldots | p_{1,n} \ldots p_{r,n} = a_1 \ldots a_r | p_{1,1} \ldots p_{r,1} \ldots a_1 \ldots a_r | p_{1,n} \ldots p_{r,n}$$

lässt sich unter der Voraussetzung $\varkappa_1 + \ldots + \varkappa_\nu = n$ das Product von ν $r$stufigen Determinanten von den Graden $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\nu$ durch eine $r$stufige Determinante $n$ten Grades darstellen, und ferner ist

$$a_1{}^n \ldots a_r{}^n | \overline{p_1 \ldots p_r}^{\,n} = a_1 \ldots a_r | p_1 \ldots p_r{}^n.$$

Bei Berücksichtigung der Gleichung

$$a_1 \ldots a_m | e_1 \ldots e_m{}^n = a_1{}^n \ldots a_m{}^n | \overline{e_1 \ldots e_m}^{\,n}$$

hat man ferner die Gleichung

$$a_{1,1} \ldots a_{1,\nu} \overline{a_{\varkappa_1}} \ldots \overline{a_{\varkappa_r}}^{\,n} = a_{1,1}{}^n \ldots a_{1,\nu}{}^n \overline{a_{\varkappa_1}{}^n} \ldots \overline{a_{\varkappa_r}{}^n}.$$

Beispielsweise ist darnach unter der Voraussetzung

$$a_3 p = 0, \ \ldots, \ a_m p = 0,$$

weil alsdann die Grösse p in der Form

$$p = a_1 p \,.\, \overline{a_1} + a_2 p \,.\, \overline{a_2}$$

und somit infolge der Gleichungen

$$a_1 = a_2 \overline{a_1} \, \overline{a_2}, \quad a_2 = - a_1 \overline{a_1} \, \overline{a_2}$$

in der Form

$$p = a_1 p \,.\, a_2 \overline{a_1} \, \overline{a_2} - a_2 p \,.\, a_1 \overline{a_1} \, \overline{a_2}$$

oder

$$p = -(a_1 a_2 | p) \overline{a_1} \, \overline{a_2}$$

darstellbar ist,

$$p^n = (-1)^n a_1{}^n a_2{}^n \,|\, p^{\overset{n}{-}} \overline{a_1{}^n}\, \overline{a_2{}^n}$$

und folglich

$$a^n p^n = a_1{}^n a_2{}^n \,|\, p^{\overset{n}{-}} a^n \overline{a_1{}^n}\, \overline{a_2{}^n}.$$

Für $n = 2$ und $m = 2$ ergiebt sich aus dieser Gleichung, welche entwickelt die Form

$$a^n p^n = (\varkappa;\, n+1)(-1)^{\varkappa - 1} \binom{n}{\varkappa - 1} a_1{}^n p^{\varkappa - 1} a_2{}^n p^{n+1-\varkappa} a^n \overline{a_1{}^n}\, \overline{a_2{}^n}$$

hat, die Gleichung

$$a_1{}^2 a_2{}^2 \,|\, e_1 e_2^{\overset{2}{-}} . a^2 p^2 = a_1{}^2 a^2 \,|\, e_1 e_2^{\overset{2}{-}} . a_2{}^2 p^2 - 2 a_1{}^2 p\, a_2{}^2 p\, a^2 \,|\, e_1 e_2^{\overset{2}{-}} + a_2{}^2 a^2 \,|\, e_1 e_2^{\overset{2}{-}} . a_1{}^2 p^2.$$

Berlin, 31. Mai 1885. LEOPOLD SCHENDEL.

IX. Zur dynamischen Gastheorie.

In der Abhandlung „Ueber das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmoleculen“ hat Boltzmann einen sehr allgemeinen Satz über eine Functionaldeterminante bewiesen; in Bezug auf diesen Satz sind alle übrigen Sätze von Boltzmann über die in der dynamischen Gastheorie vorkommenden Functionaldeterminanten nur Specialfälle.

Die von Boltzmann benutzte Methode des Beweises jenes Satzes ist aber nicht sehr streng. Viel strenger und eleganter lässt sich der Satz auf Grund eines allgemeinen Theorems beweisen, das nämlich im Zusammenhange mit der Jacobi'schen Theorie des „letzten Multiplicators“ steht; das zu zeigen ist der Zweck der vorliegenden Abhandlung.

Wir setzen voraus, dass folgendes System simultaner Differentialgleichungen bestehe:

$$1)\qquad \left|\begin{array}{llll} \dfrac{dP_1}{dt} = \varrho_1, & \dfrac{dP_2}{dt} = \varrho_2, & \ldots, & \dfrac{dP_{m+1}}{dt} = \varrho_{m+1}, \\ \dfrac{dQ_1}{dt} = \sigma_1, & \dfrac{dQ_2}{dt} = \sigma_2, & \ldots, & \dfrac{dQ_n}{dt} = \sigma_n{}^*, \end{array}\right.$$

wo $\varrho_1, \ldots, \varrho_{m+1}$ blos Functionen von $Q_1, \ldots, Q_u$, und $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ blos Functionen von $P_1, \ldots, P_{m+1}$ sind.

Diese Gleichungen bestimmen die Grössen $P_1, \ldots, Q_n$ als Functionen von t und $m+n+1$ willkürlichen Constanten; als solche können wir jene Werthe der Grössen $P_1, \ldots, Q_n$ betrachten, die einem bestimmten Werthe von t, z. B. t_0 entsprechen. Diese Werthe sollen durch $p_1, \ldots, p_{m+1}$, $q_1, \ldots, q_n$ bezeichnet werden.

Ferner mögen die Grössen $p_1, \ldots, p_{m+1}$ mit einander durch die Gleichung

$$2)\qquad F(p_1, p_2, \ldots, p_{m+1}) = b$$

verbunden sein, wo b eine Constante mit einem bestimmten Werthe ist (im Gegensatz zu den willkürlichen Constanten).

Wir nehmen also an, die Grössen $p_1, \ldots, p_{m+1}$ seien durch eine Relation verbunden, infolge deren nur m von ihnen, z. B. $p_1, p_2, \ldots, p_m$,

---

* Ich modificire in Etwas das von Boltzmann benutzte System der Bezeichnungen.

willkürlich sind, die $m+1^{\text{te}}$ aber Function der übrigen ist. Also ist jede der $m+n+1$ Grössen $P_1, \ldots, P_{m+1}, Q_1, \ldots, Q_n$ Function von t und $m+n$ willkürlichen Grössen $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_n$.

Gesetzt, wir haben in einem mehrfachen Integrale die Variabeln $P_1, \ldots, P_m, Q_1, \ldots, Q_n$ durch die Variabeln $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_n$ zu ersetzen, wobei t als constant betrachtet werden soll, dann ist die Functionaldeterminante zu berechnen:

$$\Delta = \Sigma \pm \frac{\partial P_1}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial P_m}{\partial p_m} \cdot \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial Q_n}{\partial q_n}.$$

Wollen wir unter

$$\frac{\partial F}{\partial P_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial P_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial P_{m+1}}$$

die Resultate der Substitutionen in

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial p_{m+1}}$$

der Grössen $P_1, \ldots, P_{m+1}$ resp. anstatt $p_1, \ldots, p_{m+1}$ verstehen [F bezeichnet die Function, die auf der linken Seite der Gleichung 2) figurirt], so setzen wir

$$\frac{\partial F}{\partial P_{m+1}} = \mathsf{H}$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial P_1}\varrho_1 + \frac{\partial F}{\partial P_2}\varrho_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial P_{m+1}}\varrho_{m+1} = \mathsf{E};$$

endlich bezeichnen wir durch η und ε die Werthe der Functionen H und E für $t = t_0$, d. h. die Resultate der Substitutionen in diese Functionen der Grössen $p_1, \ldots, p_{m+1}, q_1, \ldots, q_n$ für $P_1, \ldots, P_{m+1}, Q_1, \ldots, Q_n$.

Das erwähnte Boltzmann'sche Theorem besteht darin, dass

$$\Delta = \frac{\varepsilon . \mathsf{H}}{\eta . \mathsf{E}}.$$

Wir wollen zum Beweise dieses Theorems schreiten. Wir setzen

$$F(P_1, P_2, \ldots, P_{m+1}) = B; \tag{3}$$

B ist folglich eine Function von t und $m+n$ willkürlichen Constanten $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_n$; b ist der Werth von B für $t = t_0$. Es ist klar, dass die Grössen $P_1, \ldots, P_m, Q_1, \ldots, Q_n$ entweder als Functionen der ebenerwähnten $m+n$ willkürlichen Constanten und t, oder als Functionen derselben willkürlichen Constanten und B betrachtet werden können.

Transformiren wir die Gleichungen 1), indem wir die Veränderliche t durch B ersetzen.

Die Differentiation der Gleichung 3) giebt unter Berücksichtigung der Gleichungen 1):

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial P_1}\varrho_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial P_{m+1}}\varrho_{m+1}\right\} dt = dB,$$

wo

$$dt = \frac{dB}{\mathsf{E}}. \tag{4}$$

Auf Grund der Formel 4) können wir dem System 1), von dem wir die Gleichung $\frac{dP_{m+1}}{dt} = \varrho_{m+1}$ weglassen, folgende Gestalt geben:

$$5)\qquad \begin{cases} \frac{dP_1}{dB} = \frac{\varrho_1}{\mathsf{E}}, \ \ldots, \ \frac{dP_m}{dB} = \frac{\varrho_m}{\mathsf{E}}, \\ \frac{dQ_1}{dB} = \frac{\sigma_1}{\mathsf{E}}, \ \ldots, \ \frac{dQ_n}{dB} = \frac{\sigma_n}{\mathsf{E}}. \end{cases}$$

Die rechten Seiten der Gleichungen 5) sind blos Functionen der Grössen $P_1, \ldots, P_m, P_{m+1}, Q_1, \ldots, Q_n$, oder, auf Grund der Formel 3), der Grössen $P_1, \ldots, P_m, Q_1, \ldots, Q_n$ und B. Folglich stellt das System 5) ein System simultaner Differentialgleichungen dar, die $P_1, \ldots, P_m, Q_1, \ldots, Q_n$ als Functionen von B und willkürlichen Constanten $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_n$ bestimmen.

Setzen wir

$$\frac{\mathsf{E}}{\mathsf{H}} = \mathsf{X},$$

so nehmen die Gleichungen 5) folgende Gestalt an:

$$6)\qquad \begin{cases} \frac{dP_1}{dB} = \frac{\varrho_1}{\mathsf{XH}}, \ \ldots, \ \frac{dP_m}{dB} = \frac{\varrho_m}{\mathsf{XH}}, \\ \frac{dQ_1}{dB} = \frac{\sigma_1}{\mathsf{XH}}, \ \ldots, \ \frac{dQ_n}{dB} = \frac{\sigma_n}{\mathsf{XH}}. \end{cases}$$

Auf das System 6) wenden wir folgendes Theorem von J a c o b i an: Besteht ein System simultaner Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X}, \ \ldots, \ \frac{dx_n}{dx} = \frac{X_n}{X}$$

($X, X_1, \ldots, X_n$ sind Functionen von $x, x_1, \ldots, x_n$), die $x_1, \ldots, x_n$ als Functionen von x und willkürlichen Constanten $a_1, \ldots, a_n$ bestimmen, so muss die Functionaldeterminante

$$D = \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial a_n}$$

der Gleichung

$$\frac{d}{dx}[lg(XD)] = \frac{1}{X}\left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\}$$

genügen.*

Im gegenwärtigen Falle entsprechen den Grössen $x, x_1, \ldots, x_n$ die Grössen $B, P_1, \ldots, P_m, Q_1, \ldots, Q_n$, den Functionen $X, X_1, \ldots, X_n$ die Functionen $X, \frac{\varrho_1}{\mathsf{H}}, \ldots, \frac{\varrho_m}{\mathsf{H}}, \frac{\sigma_1}{\mathsf{H}}, \ldots, \frac{\sigma_n}{\mathsf{H}}$, den willkürlichen Constanten $a_1, \ldots, a_n$ die willkürlichen Constanten $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_n$, der Determinante D die Determinante Δ.

Wir wollen das Symbol

$$\frac{\partial' \Phi}{\partial' P_i}$$

benutzen, um die partielle Derivirte der Function

$$\Phi(P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_m, P_{m+1})$$

* J a c o b i, Vorlesungen über Dynamik. 12. Vorlesung.

nach P_i zu bezeichnen, bei deren Bildung P_{m+1} als Function aller übrigen P und B angesehen wird. Also ist

$$\frac{\partial' \Phi}{\partial' P_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial P_{m+1}} \cdot \frac{\partial P_{m+1}}{\partial P_i}.$$

Von B hängt die Function Φ explicite nicht ab; daher ist

$$\frac{\partial' \Phi}{\partial' B} = \frac{\partial \Phi}{\partial P_{m+1}} \cdot \frac{\partial P_{m+1}}{\partial B}.$$

Es ist klar, dass dem Ausdrucke

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n},$$

der im Jacobi'schen Theorem figurirt, jetzt der Ausdruck entspricht

$$7) \quad \frac{\partial' \mathsf{X}}{\partial' B} + \frac{\partial'}{\partial' P_1}\left(\frac{\varrho_1}{\mathsf{H}}\right) + \ldots + \frac{\partial'}{\partial' P_m}\left(\frac{\varrho_m}{\mathsf{H}}\right) + \frac{\partial'}{\partial' Q_1}\left(\frac{\sigma_1}{\mathsf{H}}\right) + \ldots + \frac{\partial'}{\partial' Q_n}\left(\frac{\sigma_n}{\mathsf{H}}\right).$$

Wir wollen diesen Ausdruck bilden. Es ist zunächst

$$\frac{\partial' \mathsf{X}}{\partial' B} = \frac{1}{\mathsf{H}} \cdot \frac{\partial' \mathsf{E}}{\partial' B} - \frac{\mathsf{E}}{\mathsf{H}^2} \cdot \frac{\partial' \mathsf{H}}{\partial' B}$$

$$= \frac{1}{\mathsf{H}} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial P_1 \partial P_{m+1}} \varrho_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial P_2 \partial P_{m+1}} \varrho_2 + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial P_{m+1}^2} \varrho_{m+1} \right\} \cdot \frac{\partial P_{m+1}}{\partial B}$$

$$- \frac{\mathsf{E}}{\mathsf{H}^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial P_{m+1}^2} \cdot \frac{\partial P_{m+1}}{\partial B}$$

($\varrho_1, \ldots, \varrho_{m+1}$ sind blos Functionen der Grössen Q und wurden deshalb bei der obigen Differentiation als constant betrachtet); aus 3) geht nun hervor, dass

$$\frac{\partial P_{m+1}}{\partial B} = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial P_{m+1}}} = \frac{1}{\mathsf{H}};$$

folglich ist

$$8) \quad \frac{\partial' \mathsf{X}}{\partial' B} = \frac{1}{\mathsf{H}^2} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial P_1 \partial P_{m+1}} \varrho_1 + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial P_{m+1}^2} \varrho_{m+1} \right\} - \frac{\mathsf{E}}{\mathsf{H}^3} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial P_{m+1}^2}.$$

Weiter ist

$$\frac{\partial'}{\partial' P_1}\left(\frac{\varrho_1}{\mathsf{H}}\right) = -\frac{\varrho_1}{\mathsf{H}^2} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial P_1 \partial P_{m+1}} + \frac{\partial^2 F}{\partial P_{m+1}^2} \cdot \frac{\partial P_{m+1}}{\partial P_1} \right\}$$

oder, da auf Grund von 3)

$$\frac{\partial P_{m+1}}{\partial P_1} = -\frac{1}{\mathsf{H}} \cdot \frac{\partial F}{\partial P_1},$$

$$9) \quad \frac{\partial'}{\partial' P_1}\left(\frac{\varrho_1}{\mathsf{H}}\right) = -\frac{1}{\mathsf{H}^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial P_1 \partial P_{m+1}} \varrho_1 + \frac{1}{\mathsf{H}^3} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial P_{m+1}^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial P_1} \varrho_1.$$

Analog haben wir

$$10) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial'}{\partial' P_2}\left(\dfrac{\varrho_2}{\mathsf{H}}\right) = -\dfrac{1}{\mathsf{H}^2} \cdot \dfrac{\partial^2 F}{\partial P_2 \partial P_{m+1}} \varrho_2 + \dfrac{1}{\mathsf{H}^3} \cdot \dfrac{\partial^2 F}{\partial P_{m+1}^2} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial P_2} \varrho_2, \\ \cdot\ , \\ \dfrac{\partial'}{\partial' P_m}\left(\dfrac{\varrho_m}{\mathsf{H}}\right) = -\dfrac{1}{\mathsf{H}^2} \cdot \dfrac{\partial^2 F}{\partial P_m \partial P_{m+1}} \varrho_m + \dfrac{1}{\mathsf{H}^3} \cdot \dfrac{\partial^2 F}{\partial P_{m+1}^2} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial P_m} \varrho_m. \end{cases}$$

Endlich, da P_{m+1} von $Q_1, \ldots, Q_n$ unabhängig ist und $\mathsf{H}, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ blos Functionen von $P_1, \ldots, P_{m+1}$ sind, haben wir:

$$11)\qquad \frac{\partial'}{\partial' Q_1}\left(\frac{\sigma_1}{\mathsf{H}}\right)=0,\ \ldots,\ \frac{\partial'}{\partial' Q_n}\left(\frac{\sigma_n}{\mathsf{H}}\right)=0.$$

Addiren wir die Gleichungen 9), 10) und 11) zusammen und setzen zur rechten Seite der resultirenden Gleichung den Ausdruck

$$-\frac{1}{\mathsf{H}^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial P_{m+1}{}^2}\varrho_{m+1}+\frac{1}{\mathsf{H}^3}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial P_{m+1}{}^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial P_{m+1}}\varrho_{m+1},$$

der identisch gleich Null ist, hinzu, so kommt

$$\frac{\partial'}{\partial' P_1}\left(\frac{\varrho_1}{\mathsf{H}}\right)+\ldots+\frac{\partial'}{\partial' P_m}\left(\frac{\varrho_m}{\mathsf{H}}\right)+\frac{\partial'}{\partial' Q_1}\left(\frac{\sigma_1}{\mathsf{H}}\right)+\ldots+\frac{\partial'}{\partial' Q_n}\left(\frac{\sigma_n}{\mathsf{H}}\right)$$
$$=-\frac{1}{\mathsf{H}^2}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial P_1\,\partial P_{m+1}}\varrho_1+\ldots+\frac{\partial^2 F}{\partial P_{m+1}{}^2}\varrho_{m+1}\right\}+\frac{\mathsf{E}}{\mathsf{H}^3}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial P_{m+1}{}^2}=-\frac{\partial'\mathsf{X}}{\partial' B}$$

[s. die Formel 8)]. Also ist der Ausdruck 7) identisch gleich Null und auf Grund des erwähnten Jacobi'schen Satzes

$$\frac{d}{dB}[lg(\mathsf{X}.\Delta)]=0.$$

Daraus folgt

$$\mathsf{X}.\Delta=const.,$$

wobei *const.* eine von B unabhängige Grösse bedeuten soll.

Für $B=b$, d. h. für $t=t_0$ haben wir:

$$\Delta=1,\quad \mathsf{X}=\frac{\varepsilon}{\eta};$$

daher ist

$$const.=\frac{\varepsilon}{\eta}\ \text{ und }\ \Delta=\frac{\varepsilon.\mathsf{H}}{\eta.\mathsf{E}},$$

was zu beweisen war.

Warschau. B. W. Stankewitsch,
Docent an der kaiserl. Universität.

X. Ueber die Basis der natürlichen Logarithmen.

Zur Herleitung der Differentialformeln für den Logarithmus und die Exponentialgrösse genügt bekanntlich der Nachweis, dass die Potenz $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ bei unendlich wachsenden m gegen eine endliche Grenze convergirt, deren Betrag nicht sofort mit erheblicher Genauigkeit bestimmt zu werden braucht. In meinem Compendium der höheren Analysis habe ich jenen Existenzbeweis darauf gegründet, dass die genannte Potenz gleichzeitig mit m wächst, aber sowohl bei geraden als bei ungeraden m kleiner als 4 bleibt. Die Sache lässt sich aber kürzer und eleganter auf folgende Weise erledigen.

Für ganze positive m und $\alpha>\beta>0$ ergeben sich durch Division die Ungleichungen

$$(m+1)\,\alpha^m > \frac{\alpha^{m+1}-\beta^{m+1}}{\alpha-\beta} > (m+1)\,\beta^m$$

oder

1) $$[\alpha-(m+1)(\alpha-\beta)]\,\alpha^m < \beta^{m+1},$$

2) $$\alpha^{m+1} > [\beta+(m+1)(\alpha-\beta)]\,\beta^m.$$

Aus Nr. 1) erhält man für $\alpha = 1+\frac{1}{m}$, $\beta = 1+\frac{1}{m+1}$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1},$$

mithin successive $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 < \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 < \left(1+\frac{1}{3}\right)^3$ u. s. w. Die Potenz $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ wächst also fortwährend.

Substituirt man die vorigen Werthe von α und β in Nr. 2) und beachtet, dass

$$\beta+(m+1)(\alpha-\beta) = 1+\frac{2}{m+1}+\frac{1}{m(m+1)} > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^2$$

ist, so findet man

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+2},$$

mithin $\left(1+\frac{1}{1}\right)^2 > \left(1+\frac{1}{2}\right)^3 > \left(1+\frac{1}{3}\right)^4$ u. s. w. Demnach nimmt die Potenz $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$ fortwährend ab; da sie aber ihrer Natur nach nicht negativ werden kann, so muss sie gegen einen bestimmten Grenzwerth e convergiren.

Aus der hiermit gerechtfertigten Definition

$$Lim\left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}\right\} = e$$

folgt

$$Lim\left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right\} = Lim\,\frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}}{1+\frac{1}{m}} = e.$$

Die Potenzen $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ und $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$ convergiren also gegen den gemeinschaftlichen Grenzwerth e, die erste durch Zunahme, die zweite durch Abnahme; es ist daher

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < e < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Für $m = 100$ geben diese Ungleichungen

$$2{,}7049 < e < 2{,}7319$$

und als arithmetisches Mittel näherungsweise $e = 2{,}718$, was vorläufig ausreicht. Die genauere Bestimmung von e gehört in die spätere Theorie der Reihen.

Schlömilch.

XII.

Ueber Kettenbrüche.

Von

Dr. W. Veltmann,

Docent a. d. landwirthschaftl. Akademie Poppelsdorf-Bonn.

---

§ 1.

Betrachtet man die Zähler und Nenner zweier aufeinander folgenden und irgend eines späteren Näherungsbruches eines Kettenbruches als veränderliche Grössen, so ist der Zähler, sowie auch der Nenner des letzteren eine lineare Function derjenigen der beiden ersteren. Ist der Kettenbruch periodisch, so bestimmen sich die Näherungsbrüche, welche ganzen Perioden entsprechen, paarweise durch mehrmalige Wiederholung ein und derselben linearen Substitution. Man kann daher auf solche Kettenbrüche, sowie auf die Darstellung irrationaler Grössen zweiten Grades durch dieselben die von mir in Grunert's Archiv der Mathematik Bd. 58 S. 342 gegebene Theorie derartiger Substitutionen anwenden. Dies soll im Folgenden geschehen. Da zugleich auch in anderen Beziehungen die Kettenbrüche hier in etwas anderer Weise behandelt werden, als gewöhnlich, so mögen vorher die Hauptsätze über die Kettenbrüche kurz angeführt und, soweit ein von dem gewöhnlichen abweichendes Verfahren stattfindet, bewiesen werden.

$\frac{P}{Q} \equiv \frac{R}{S}$ soll bedeuten, dass $P = R$ und $Q = S$ ist, die beiden Brüche also nicht blos gleich sind, sondern auch gleiche Zähler und gleiche Nenner haben.

Wenn

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3\ldots}}}$$

oder, wie hier gewöhnlich geschrieben werden soll,

$$\left.\frac{a_1}{b_1}\right|\overline{+\left.\frac{a_2}{b_2}\right|}\overline{+\frac{a_3}{b_3}}\ldots$$

ein beliebiger Kettenbruch ist, so soll

$$\left.\frac{a_1}{b_1}\right|\overline{+\frac{a_2}{b_2}\ldots\Big|}\overline{+\frac{a_n}{b_n}}$$

der n^{te} Näherungswerth,

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\Big| + \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}} \cdots$$

der demselben zugeordnete oder n^{te} **Restwerth**, a_n und b_n resp. der n^{te} **Theilzähler** und **Theilnenner** genannt werden.

§ 2.

Wenn $\frac{a_1}{b_1}\Big| + \frac{a_2}{b_2} \cdots$ ein beliebiger Kettenbruch ist und die Näherungsbrüche mit $\frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \cdots$ bezeichnet werden, so ist

$$1) \qquad \begin{aligned} \frac{Z_1}{N_1} &= \frac{a_1}{b_1}, \\ \frac{Z_2}{N_2} &= \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2}, \\ \frac{Z_3}{N_3} &= \frac{a_3 Z_1 + b_3 Z_2}{a_3 N_1 + b_3 N_2}, \\ \frac{Z_4}{N_4} &= \frac{a_4 Z_2 + b_4 Z_3}{a_4 N_2 + b_4 N_3} \\ &\text{u. s. w.,} \end{aligned}$$

allgemein

$$\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{a_{n+1} Z_{n-1} + b_{n+1} Z_n}{a_{n+1} N_{n-1} + b_{n+1} N_n}.$$

Nach diesen Formeln, durch welche nicht blos die Werthe der Näherungsbrüche, sondern auch die Zähler und Nenner derselben einzeln bestimmt sind, sollen die Näherungsbrüche stets berechnet werden. Andere Formen derselben, dadurch erhalten, dass man Zähler und Nenner in gleichem Verhältniss ändert, sollen nicht angewandt werden.

§ 3.

Ein beliebiger Kettenbruch sei

$$2) \qquad k = \frac{a_1}{b_1}\Big| + \frac{a_2}{b_2} \cdots \Big| + \frac{a_\mu}{b_\mu}\Big| + \frac{c_1}{d_1}\Big| + \frac{c_2}{d_2} \cdots \Big| + \frac{c_\nu}{d_\nu}.$$

Man berechne

$$\frac{c_1}{d_1}\Big| + \frac{c_2}{d_2} \cdots \Big| + \frac{c_\nu}{d_\nu}$$

nach § 2 und erhalte $\frac{P}{Q}$, so dass also

$$3) \qquad k = \frac{a_1}{b_1}\Big| + \frac{a_2}{b_2} \cdots \Big| + \frac{a_\mu}{b_\mu}\Big| + \frac{P}{Q}.$$

Wenn dann die beiden letzten Näherungsbrüche von

$$\frac{a_1}{b_1}\Big| + \frac{a_2}{b_2} \cdots \Big| + \frac{a_\mu}{b_\mu}:$$

$$\frac{Z_{\mu-1}}{N_{\mu-1}} \text{ und } \frac{Z_\mu}{N_\mu}$$

sind, wenn ferner der Kettenbruch k in der ursprünglichen Form [Gl. 2)] nach § 2 berechnet $\frac{R}{S}$ liefert, so ist nicht blos [unmittelbar nach § 2 und Gl. 3)]

$$\frac{R}{S} = \frac{Z_{\mu-1} P + Z_\mu Q}{N_{\mu-1} P + N_\mu Q},$$

sondern diese Brüche stimmen auch in Zähler und Nenner überein, d. h. es ist

$$\frac{R}{S} \equiv \frac{Z_{\mu-1} P + Z_\mu Q}{N_{\mu-1} P + N_\mu Q}.$$

Beweis. Angenommen,

4) der Satz gelte allgemein für jeden Kettenbruch, welcher nicht mehr als eine bestimmte Anzahl $m+n$ Theilzähler und -nenner enthält.

Es soll gezeigt werden, dass er dann auch für einen beliebigen Kettenbruch gilt, welcher $m+n+1$ Theilzähler und -nenner hat.

Ein Kettenbruch letzterer Art sei

$$K = \frac{a_1}{b_1}\Big| + \frac{a_2}{b_2} \cdots \Big| + \frac{a_m}{b_m}\Big| + \frac{c_1}{d_1}\Big| + \frac{c_2}{d_2} \cdots \Big| + \frac{c_n}{d_n}\Big| + \frac{p}{q},$$

$\frac{Z_{m-1}}{N_{m-1}}$ und $\frac{Z_m}{N_m}$ seien die nach § 2 erhaltenen beiden letzten Näherungsbrüche des Kettenbruchs

$$\frac{a_1}{b_1}\Big| + \frac{a_2}{b_2} \cdots \Big| + \frac{a_m}{b_m},$$

ebenso $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$ und $\frac{Z_n}{N_n}$ die nach § 2 erhaltenen Näherungsbrüche von

$$\frac{c_1}{d_1}\Big| + \frac{c_2}{d_2} \cdots \Big| + \frac{c_n}{d_n}.$$

Dann sind nach der gemachten Voraussetzung 4)

$$\frac{Z_{m-1} Z_{n-1} + Z_m N_{n-1}}{N_{m-1} Z_{n-1} + N_m N_{n-1}} \text{ und } \frac{Z_{m-1} Z_n + Z_m N_n}{N_{m-1} Z_m + N_m N_n}$$

congruent den nach § 2 erhaltenen beiden letzten Näherungswerthen von

$$\frac{a_1}{b_1}\Big| + \frac{a_2}{b_2} \cdots \Big| + \frac{a_m}{b_m}\Big| + \frac{c_1}{d_1}\Big| + \frac{c_2}{d_2} \cdots \Big| + \frac{c_n}{d_n}$$

und für den Kettenbruch K erhält man somit nach § 2 den Werth

$$5)\qquad \frac{(Z_{m-1} Z_{n-1} + Z_m N_{n-1}) p + (Z_{m-1} Z_n + Z_m N_n) q}{(N_{m-1} Z_{n-1} + N_m N_{n-1}) p + (N_{m-1} Z_m + N_m N_n) q}.$$

Ferner ist nun der nach § 2 erhaltene Werth von

$$\frac{c_1}{d_1}\Big| + \frac{c_2}{d_2} \cdots \Big| + \frac{c_n}{d_n}\Big| + \frac{p}{q} \equiv \frac{Z_{n-1} p + Z_n q}{N_{n-1} p + N_n q}.$$

Nach dem zu beweisenden Satze würde man also für K erhalten:

$$\frac{Z_{m-1}(Z_{n-1}p + Z_n q) + Z_m(N_{n-1}p + N_n q)}{N_{m-1}(Z_{n-1}p + Z_n q) + N_m(N_{n-1}p + N_n q)}.$$

Dieser Bruch stimmt aber in Zähler und Nenner mit 5) überein. Hieraus folgt nun auf bekannte Weise durch Schluss von t auf $t+1$ der Satz allgemein.

§ 4.

Zwei aufeinander folgende Näherungsbrüche $\frac{Z_n}{N_n}$ und $\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$ mögen ein **Näherungspaar** genannt werden. Bildet man die Differenz derselben

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{Z_n N_{n+1} - N_n Z_{n+1}}{N_n N_{n+1}},$$

so nennen wir den Zähler des letztern Bruches

$$= \begin{vmatrix} Z_n & Z_{n+1} \\ N_n & N_{n+1} \end{vmatrix}$$

die Determinante des Näherungspaares.

§ 5.

Die Determinante eines Näherungspaares entsteht aus derjenigen des vorhergehenden durch Multiplication mit -1 und mit dem letzten der in den beiden Paaren vorkommenden Theilzähler.

Beweis. Es ist

$$Z_n N_{n+1} - N_n Z_{n+1}$$
$$= (\text{nach § 2})\ Z_n(a_{n+1}N_{n-1} + b_{n+1}N_n) - N_n(a_{n+1}Z_{n-1} + b_{n+1}Z_n)$$
$$= -a_{n+1}(Z_{n-1}N_n - N_{n-1}Z_n),$$

w. z. b. w.

§ 6.

Sind sämmtliche Theilzähler etwa mit Ausnahme der beiden ersten $=1$, so sind nach § 5 die Determinanten von zwei aufeinander folgenden Näherungspaaren einander entgegengesetzt gleich. Diejenige des ersten Paares soll in diesem Falle die Determinante des Kettenbruchs genannt werden. Wird dieselbe mit δ, diejenige des Paares, welches n Theilzähler und -nenner enthält, mit δ_n bezeichnet, so ist

$$\delta_n = (-1)^n \delta.$$

§ 7.

Vier Grössen p, q, r, s gegeben, vier andere a, b, c, d zu bestimmen, derart, dass von dem Kettenbruch $\frac{a}{b}\Big| + \frac{c}{d}$ der erste Näherungswerth $= \frac{p}{q}$, der zweite $= \frac{r}{s}$, mithin die Determinante dieses Paares $= ps - qr$ wird.

Auflösung. Es soll $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$, $\frac{ad}{bd+c}=\frac{r}{s}$ werden. Man wird also

$$a=p,\quad b=q,\quad d=\frac{r}{p},\quad c=s-\frac{qr}{p}$$

setzen. Der Kettenbruch wird demnach $\frac{p}{q}\Big|\!+\frac{s-qr:p}{r:p}$.

§ 8.

Ein Kettenbruch ändert seinen Werth nicht, wenn in demselben irgendwo $\frac{1}{0}+\frac{1}{0}$ eingeschaltet oder am Ende angehängt wird. Die Reihe der Näherungswerthe ändert sich nur in der Weise, dass die beiden vorhergehenden sich wiederholen.

Beweis. Die vorhergehenden Näherungswerthe seien $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$. Die beiden folgenden sind dann $\frac{p+0.r}{q+0.r}=\frac{p}{q}$ und $\frac{r+0.p}{s+0.q}=\frac{r}{s}$, also dieselben wie die vorhergehenden.

§ 9.

Es sei

$$y=\frac{a+\alpha x}{b+\beta x} \tag{6}$$

eine beliebige gebrochene Function ersten Grades der Veränderlichen x, also β nicht $=0$. Je nachdem dann b und β gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben oder $b=0$ ist, wird y entweder für einen negativen oder einen positiven Werth von x oder für $x=0$ unendlich gross. Die Function ist also stetig und nimmt beständig zu oder beständig ab im ersten Falle für $x=0$ bis $x=+\infty$, im zweiten für $x=0$ bis $x=-\infty$, im dritten für Beides. Für $x=0$ wird $y=\frac{a}{b}$, für $x=\pm\infty$ wird $y=\frac{\alpha}{\beta}$. Stellt man die Function durch eine Curve in einem rechtwinkligen Coordinatensystem dar, so wird dieselbe an der Seite der Ordinatenaxe, an welcher sie stetig ist, für $x=0$ bis $x=\infty$ alle Werthe von $\frac{a}{b}$ bis $\frac{\alpha}{\beta}$ durchlaufen. Folgende Uebersicht zeigt das Verhalten der Function in den verschiedenen Fällen.

	A. Für positive x	B. Für negative x
	durchläuft y alle Werthe	
I. b und β von gleichen Vorzeichen	zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{\alpha}{\beta}$	nicht zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{\alpha}{\beta}$
II. b und β von entgegengesetzten Vorzeichen	nicht zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{\alpha}{\beta}$	zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{\alpha}{\beta}$.

§ 10.

q_1 und q_2 seien zwei beliebige positive, p_1 und p_2 zwei beliebige Zahlen, k eine Grösse, welche zwischen $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ liegt. Dieselbe soll in einen Kettenbruch entwickelt werden, derart, dass die beiden ersten Näherungswerthe $=\frac{p_1}{q_1}$ und $=\frac{p_2}{q_2}$ werden. Die folgenden Theilzähler sollen sämmtlich $=1$, die Theilnenner möglichst grosse ganze Zahlen werden.

Auflösung. Man leite aus den Brüchen $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ andere Brüche $\frac{p_3}{q_3}$, $\frac{p_4}{q_4}$, ... nach folgenden Formeln ab:

$$7)\qquad \frac{p_1+p_2x_3}{q_1+q_2x_3}=\frac{p_3}{q_3},$$

$$8)\qquad \frac{p_2+p_3x_4}{q_2+q_3x_4}=\frac{p_4}{q_4}$$

u. s. w.

und bestimme die Zahlen x_3, x_4, ... auf folgende Weise: Man setze

$$9)\qquad k=\frac{p_1+p_2R_3}{q_1+q_2R_3},$$

also

$$10)\qquad R_3=\frac{q_1k-p_1}{p_2-q_2k}.$$

Dieser Werth von R_3 ist positiv, weil in Gl. 9) der Fall I in § 9 stattfindet, also nur für positive Werthe von R_3 derjenige von k zwischen $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ liegen kann. Man nehme nun für x_3 die grösste in dem Werthe von R_3 Gleichung 10) enthaltene ganze Zahl, wodurch dann nach Gleichung 7) auch p_3 und q_3 bestimmt sind und q_3 eine positive Grösse wird. Setzt man jetzt in Gleichung 9) für k und R_3 die veränderlichen Grössen y und x, also

$$11)\qquad y=\frac{p_1+p_2x}{q_1+q_2x}, \ldots$$

so hat man für y und x die zusammengehörigen Werthe

$$\begin{array}{c|cccc} x & 0 & x_3 & R_3 & +\infty, \\ y & \frac{p_1}{q_1} & \frac{p_3}{q_3} & k & \frac{p_2}{q_2}. \end{array}$$

Die Werthe von x nehmen hier beständig zu, die von y also beständig zu oder ab; der Werth von k liegt daher auch zwischen $\frac{p_2}{q_2}$ und $\frac{p_3}{q_3}$, während zugleich $\frac{p_3}{q_3}$ zwischen $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ liegt. Setzt man also jetzt

$$12)\quad k=\frac{p_2+p_3R_4}{q_2+q_3R_4}, \quad \text{also} \quad 13)\quad R_4=\frac{q_2k-p_2}{p_3-q_3k},$$

so ist R_4 wieder positiv und die grösste darin enthaltene ganze Zahl kann für x_4 genommen werden. $\frac{p_4}{q_4}$ wird dann zwischen $\frac{p_2}{q_2}$ und $\frac{p_3}{q_3}$, k zwischen $\frac{p_3}{q_3}$ und $\frac{p_4}{q_4}$ liegen. Und so fort. Für die R und die x ergeben sich immer positive Werthe; jeder Näherungsbruch liegt zwischen den beiden vorhergehenden und k zwischen zwei aufeinander folgenden. Fährt man etwa fort bis zu $\frac{p_n}{q_n}$, so wird dann

$$14)\quad k=\frac{p_{n-1}+p_n R_{n+1}}{q_{n-1}+q_n R_{n+1}},\qquad 15)\quad R_{n+1}=\frac{q_{n-1}k-p_{n-1}}{p_n-q_n k}$$

und es ist nun

$$16)\qquad k=\frac{p_1}{q_1}\Big|+\frac{q_2-q_1p_2:p_1}{p_2:p_1}\Big|+\frac{1}{x_3}\Big|+\frac{1}{x_4}\cdots\Big|+\frac{1}{x_n}\Big|+\frac{1}{R_{n+1}}$$

der verlangte Kettenbruch.

Beweis. Der Kettenbruch hat die beiden ersten Näherungsbrüche $=\frac{p_1}{q_1}$ und $=\frac{p_2}{q_2}$ nach § 7 S. 196; die übrigen Näherungsbrüche sind $\frac{p_3}{q_3}$, $\frac{p_4}{q_4}$ u. s. w. nach den Gleichungen 7), 8), ... und nach § 2 S. 194; der ganze Kettenbruch aber ist $=k$ nach Gl. 14) und § 2.

§ 11.

Unter der Voraussetzung, dass ν wenigstens $=3$ ist, findet in § 10 die Gleichung statt

$$17)\qquad \frac{1}{R_{\nu+1}}=R_\nu-x_\nu,$$

d. h. irgend ein Restbruch vom vierten an ist gleich dem Ueberschuss des vorhergehenden Restnenners über die darin enthaltenen Ganzen. Die Restbrüche sind daher sämmtlich kleiner, die Restnenner grösser als 1, die Theilnenner wenigstens $=1$. Eine Ausnahme machen hier nur möglicherweise R_3 und x_3.

Beweis. Es ist nach Gl. 16)

$$k=\frac{p_1}{q_1}\Big|+\frac{q_2-q_1p_2:p_1}{p_2:p_1}\Big|+\frac{1}{x_3}\Big|+\frac{1}{x_4}\Big|+\frac{1}{x_5}\cdots\Big|+\frac{1}{x_{\nu-1}}\Big|+\frac{1}{R_\nu}$$

und auch

$$k=\frac{p_1}{q_1}\Big|+\frac{q_2-q_1p_2:p_1}{p_2:p_1}\Big|+\frac{1}{x_3}\Big|+\frac{1}{x_4}\Big|+\frac{1}{x_5}\cdots\Big|+\frac{1}{x_{\nu-1}}\Big|+\frac{1}{x_\nu}\Big|+\frac{1}{R_{\nu+1}},$$

woraus folgt

$$R_\nu=x_\nu+\frac{1}{R_{\nu+1}},$$
$$\frac{1}{R_{\nu+1}}=R_\nu-x_\nu,$$

welches obige Gleichung 17) ist. Da $R_\nu-x_\nu$ stets kleiner als 1 ist, so ist $R_{\nu+1}$ nothwendig grösser als 1 und die darin enthaltenen Ganzen, d. h.

x_{n+1} wenigstens $= 1$. Hier darf aber für ν nicht weniger als 3, für $\nu+1$ nicht weniger als 4 gesetzt werden; denn ein R_2 und x_2 kommt in der Entwickelung des Kettenbruches nicht vor. In der That kann in Gleichung 9) S. 198 die Grösse k so nahe an $\frac{p_1}{q_1}$ genommen werden, dass aus derselben sich $R_3 < 1$, $x_3 = 0$ ergiebt.

§ 12.

In § 10 nehmen die dort sämmtlich als positiv erkannten Nenner der Näherungsbrüche von q_4 an beständig derart zu, dass jeder derselben wenigstens gleich der Summe der beiden vorhergehenden ist, so dass also q_n wenigstens $= (n-4)q_4$ ist.

Beweis. Da

$$q_5 = q_3 + q_4 x_4, \quad q_6 = q_4 + q_5 x_5 \quad \text{u. s. w.}$$

und nach § 11 $x_4, x_5, \ldots$ wenigstens $= 1$ sind, so ist q_5 grösser als q_4, q_6 grösser als $2q_4$ u. s. w., q_n grösser als $(n-4)q_4$.

§ 13.

Wenn $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ und $\frac{p_n}{q_n}$ in § 10 S. 198 zwei aufeinander folgende Näherungsbrüche sind und es wird

$$R_n = x_n + \beta$$

gesetzt, wo also β positiv und kleiner als 1 ist, so gelten folgende Gleichungen:

$$18)\qquad \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - k = \frac{(-1)^n \delta}{q_{n-1}(q_n + q_{n-1}\beta)},$$

$$19)\qquad k - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n \delta\beta}{q_n(q_n + q_{n-1}\beta)},$$

$$20)\qquad \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n \delta}{q_n q_{n-1}},$$

$$21)\qquad \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - k = \frac{(-1)^n \delta\mu}{q_n q_{n-1}},$$

$$22)\qquad k - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n \delta\nu}{q_n q_{n-1}}.$$

Hier sind μ und ν positive Grössen und es ist

$$23)\qquad \mu + \nu = 1,$$

$$24)\qquad \mu : \nu = q_n : (q_{n-1}\beta).$$

Beweis. Es ist nach Gl. 14) S. 199

$$k = \frac{p_{n-2} + p_{n-1}R_n}{q_{n-2} + q_{n-1}R_n},$$

also

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - k = \frac{p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2}}{q_{n-1}(q_{n-2} + q_{n-1}R_n)}$$

$$= \frac{(-1)^n \delta}{q_{n-1}(q_{n-2} + q_{n-1}[x_n + \beta])} = \frac{(-1)^n \delta}{q_{n-1}(q_n + q_{n-1}\beta)},$$

was die Gleichung 18) ist.

Ferner ist
$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n}{q_n q_{n-1}} = \frac{(-1)^n \delta}{q_n q_{n-1}},$$
was die Gleichung 20) ist. Subtrahirt man jetzt Gleichung 18) von 20), so erhält man Gl. 19). Bestimmt man dann zwei Grössen μ und ν den Gleichungen 21) und 22) gemäss, so sind μ und ν positiv und durch Addition von 21) und 22) erhält man mit Rücksicht auf 20) die Gl. 23). Wenn man ferner Gl. 18) durch 19) und 21) durch 22) dividirt, so hat man links, also auch rechts gleiche Quotienten; die letzteren sind aber gleich $\frac{q_n}{q_{n-1}\beta}$ und $\frac{\mu}{\nu}$, womit dann auch die Gl. 24) bewiesen ist.

§ 14.

In § 10 S. 198 unterscheidet sich die Grösse k von einem Näherungswerthe um weniger als δ dividirt durch das Quadrat des Nenners desselben und auch um weniger als δ dividirt durch das Product dieses Nenners mit dem nächstfolgenden. Von zwei aufeinander folgenden Näherungsbrüchen unterscheidet sich der zweite von k weniger als der erste.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus Gleichung 21), weil $q_n > q_{n-1}$ und nach Gl. 23) $\mu < 1$. Die zweite folgt aus Gl. 22), weil $\nu < 1$, und die dritte aus 21) und 22, weil nach 24) $\nu < \mu$ ist.

§ 15.

Wenn in § 10 S. 198 die Grössen k, p_1, p_2, q_1, q_2 rational sind, so wird irgend ein Restnenner R eine ganze Zahl und zwar wenigstens $= 2$. Der Kettenbruch schliesst also hier und der letzte Theilnenner ist $= 2$.

Beweis. Nach Gl. 15) S. 199 ist

25) $$R_{n+1} = \frac{p_{n-1} - q_{n-1}k}{q_n k - p_n}.$$

Sind k, p_1, p_2, q_1, q_2 reducirte Brüche mit dem Nennerproduct $= m$, so wird nach den Gleichungen 7), 8) u. s. w. S. 198 der Zähler und Nenner, sowie auch der k-fache Zähler und Nenner eines jeden Näherungsbruches durch Multiplication mit m eine ganze Zahl. Schreibt man also Gl. 25) so:

$$R_{n+1} = \frac{m(p_{n-1} + q_{n-1}k)}{m(q_n k - p_n)} = \frac{m\, q_{n-1}\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - k\right)}{m\, q_n\left(k - \frac{p_n}{q_n}\right)}$$

$$= \text{[nach Gl. 18) u. 19)]}\ \frac{m\,\frac{(-1)^n \delta}{q_n + q_{n-1}\beta}}{m\,\frac{(-1)^n \delta\beta}{q_n + q_{n-1}\beta}}.$$

so sind auch hier Dividend und Divisor ganze Zahlen. Da q_n nach § 12 stets wenigstens um q_4 wächst, m und δ aber constant bleiben, so nimmt der absolute Werth des Dividenden stets ab. Der Divisor aber ist kleiner als der Dividend, weil β kleiner als 1 ist, muss also irgend einmal $= \pm 1$ werden. Dann wird R_{n+1} eine ganze Zahl und zwar wenigstens $= 2$, weil die R immer grösser als 1 sind.

§ 16.

Nach § 10 S. 198 und § 15 lässt sich jeder rationale Bruch durch einen Kettenbruch

$$\cdots + \frac{1}{x_{n-1}}\Big| + \frac{1}{x_n}$$

mit gegebenem Anfangspaar und Determinante darstellen. Die Determinante des letzten Paares ist entweder $+\delta$ oder $-\delta$. Da x_n wenigstens $= 2$ ist, so kann man statt x_n auch $x_n - 1 + \frac{1}{1}$ setzen, so dass man also den Kettenbruch

$$\cdots + \frac{1}{x_{n-1}}\Big| + \frac{1}{x_n - 1}\Big| + \frac{1}{1}$$

erhält. Die Zahl der Näherungsbrüche, sowie der Näherungspaare wird hierdurch um 1 grösser und die Determinante des letzten Paares ist derjenigen bei der vorigen Form dem Vorzeichen nach entgegengesetzt. Man kann also nach Belieben den Kettenbruch so schreiben, dass die Determinante des letzten Näherungspaares $+\delta$ oder $-\delta$ wird.

§ 17.

Wenn in § 10 S. 198 q_1 und q_2 beide negativ wären, so würden (§ 9) $R_3, R_4, \ldots, x_3, x_4, \ldots$ positiv, $q_3, q_4, \ldots$ negativ werden. Dadurch, dass man p_1, p_2, q_1, q_2 und somit auch $p_3, p_4, \ldots, q_3, q_4, \ldots$ das entgegengesetzte Zeichen gäbe, würde man also diesen Fall auf den vorigen zurückführen können.

Wenn ferner q_1 und q_2 entgegengesetzt sind, so erhält y die Werthe zwischen $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ für negative Werthe von x; $x_3, x_4, \ldots$ werden also negativ. Dieselben Näherungswerthe, die man dann erhält, werden aber auch erhalten, wenn man p_2 und q_2 das entgegengesetzte Zeichen giebt, weil dann auch $x_3, x_4, \ldots$ entgegengesetzte Zeichen erhalten. Der Fall ist also ebenfalls von dem früheren nicht wesentlich verschieden.

§ 18.

Wenn in § 10 S. 198 die Grösse k irrational ist, so kann keiner der Restnenner R eine ganze Zahl werden; der Kettenbruch setzt sich ins Unendliche fort. Aus § 14 S. 201 folgt dann, dass die Näherungsbrüche der Grösse k immer näher und beliebig nahe kommen, so dass also die Grösse durch den unendlichen Kettenbruch dargestellt ist.

§ 19.

Um die gewöhnlichen Kettenbrüche zu erhalten, muss man als Anfangspaar $\frac{1}{0}$ und $\frac{0}{1}$ nehmen. Es sei also

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{0}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{0}{1}.$$

Dann ist

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{1+0.x_3}{0+1.x_3},$$

wo x_3 als die in R_3 enthaltenen Ganzen sich aus

$$k = \frac{1+0.R_3}{0+1.R_3} = \frac{1}{R_3}, \text{ also } R_3 = \frac{1}{k}$$

bestimmt. Ist nun $k > 1$, so ist $x_3 = 0$, also $\frac{p_3}{q_3} = \frac{1}{0}$. Ferner ist jetzt

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{0+1.x_4}{1+0.x_4},$$

wo x_4 sich aus

$$k = \frac{0+1.R_4}{1+0.R_4} = \frac{R_4}{1}, \text{ also } R_4 = k$$

bestimmt. Es ist also $x_4 =$ den in $R_4 = k$ enthaltenen Ganzen. Dann wird

$$\frac{p_5}{q_5} = \frac{p_3 + p_4 x_5}{q_3 + q_4 x_5} \text{ u. s. w.}$$

Wenn dagegen $k < 1$, so ist x_3 gleich den in $\frac{1}{k}$ enthaltenen Ganzen. In ersterem Falle sind die Näherungsbrüche $\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{x_4}{1}$ u. s. w., im zweiten $\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{x_3}$ u. s. w. In dem erhaltenen Kettenbruch

$$\frac{1}{x_1}\Big| + \frac{1}{x_2}\Big| + \frac{1}{x_3}\Big| + \frac{1}{x_4} \cdots$$

ist im ersteren Falle $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, im zweiten nur $x_1 = x_2 = 0$. Die Determinante des Kettenbruchs ist immer $= 1$, diejenige der einzelnen Näherungspaare abwechselnd $+1$ und -1.

Eine rationale Grösse k liefert einen endlichen Kettenbruch mit dem letzten Theilnenner wenigstens $= 2$; bei einer irrationalen Grösse k wird der Kettenbruch unendlich.

§ 20.

Vier positive ganze Zahlen p, q, r, s mögen der Gleichung genügen

26) $$ps - qr = (-1)^n,$$

wo n irgend eine ganze Zahl, und es sei $p < r$, mithin auch $q < s$. Wenn man dann $\frac{r}{s}$ in einen gewöhnlichen Kettenbruch entwickelt, so ist entweder $\frac{p}{q}$ oder $\frac{r-p}{s-q}$ der vorletzte Näherungsbruch dieses Kettenbruchs, je nachdem die Zahl der Theilnenner desselben mit n gleichartig (gleichzeitig gerade oder ungerade) ist oder nicht.

Beweis. Wird $\frac{r}{s}$ in einen Kettenbruch entwickelt und ist $\frac{p'}{q'}$ der vorletzte Näherungswerth, m die Zahl der Theilnenner, so ist

$$p's - q'r = (-1)^m.$$

Wenn nun m und n gleichartig sind, also $(-1)^m = (-1)^n$, so ist

$$x = p', \quad y = q'$$

eine Lösung der unbestimmten Gleichung

$$sx - ry = (-1)^n \tag{27}$$

und die übrigen Lösungen sind

$$x = p' + \nu r, \quad y = q' + \nu s, \tag{28}$$

wo ν eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ist. Da nun nach Gl. 26) auch

$$x = p, \quad y = q$$

eine Lösung ist und aus den Gl. 28) nur für $\nu = 0$ positive Werthe von x und y erhalten werden, welche kleiner als resp. r und s sind, so muss

$$p' = p, \quad q' = q$$

sein.

Wenn dagegen $(-1)^m = -(-1)^n$, so ist

$$x = -p', \quad y = -q'$$

eine Lösung der Gleichung 27) und die übrigen Lösungen sind

$$x = -p' + \nu r, \quad y = -q' + \nu s. \tag{29}$$

Da nun nach Gl. 26) auch $x = p$ und $y = q$ eine Lösung von Gl. 27) ist und aus Gl. 29) nur für $\nu = 1$ positive Werthe von x und y resp. kleiner als r und s erhalten werden, so muss

$$r - p' = p, \quad s - q' = q,$$

mithin

$$p' = r - p, \quad q' = s - q$$

sein.

§ 21.

Wenn

$$k = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \cdots + \frac{1}{x_n}$$

und

$$k' = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n-1}} \cdots + \frac{1}{x_1}$$

zwei Kettenbrüche sind, welche dieselben Theilnenner in umgekehrter Reihenfolge haben, und es sind $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ die beiden letzten Näherungsbrüche von k, so sind $\frac{p}{r}$ und $\frac{q}{s}$ die beiden letzten Näherungsbrüche von k'. Bei der Umkehrung eines Kettenbruchs mit dem letzten Näherungspaare $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ ändert sich also letzteres in der Weise, dass q und r sich vertauschen.

§ 22.

Wenn x und x' positive irrationale Grössen, p, q, r, s ganze Zahlen zwischen $+\infty$ und $-\infty$ sind und es ist

$$30)\qquad ps-qr=\pm 1,$$

$$31)\qquad x=\frac{p+rx'}{q+sx'},$$

so haben die beiden Grössen x und x', in Kettenbrüche entwickelt, gleiche Restbrüche.

Beweis. Es ist nach § 7 S. 196

$$\frac{p}{q}\Big| + \frac{s-qr:p}{r:p}$$

ein Kettenbruch, von welchem $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ die beiden Näherungswerthe sind. Mithin nach Gl. 31) und § 2 S. 194

$$32)\qquad x=\frac{p}{q}\Big| + \frac{s-qr:p}{r:p}\Big| + \frac{1}{x'}.$$

Hier werde $\frac{1}{x'}$ nach § 19 S. 202 in einen gewöhnlichen Kettenbruch entwickelt

$$33)\qquad \frac{1}{x'}=\frac{1}{a_1}\Big| + \frac{1}{a_2} \cdots \Big| + \frac{1}{a_n}\Big| + \frac{1}{R},$$

also nach Gl. 32)

$$34)\qquad x=\frac{p}{q}\Big| + \frac{s-qr:p}{r:p}\Big| + \frac{1}{a_1}\Big| + \frac{1}{a_2} \cdots \Big| + \frac{1}{a_n}\Big| + \frac{1}{R}.$$

Die Grössen x und x' sind also jetzt durch Kettenbrüche mit dem gemeinsamen Restbruch $\frac{1}{R}$ dargestellt; jedoch ist derjenige in Gl. 34) kein gewöhnlicher Kettenbruch, wird also darin noch verwandelt werden müssen. Man kann die Entwickelung Gl. 33) so weit fortsetzen, dass das dem Restbruch $\frac{1}{R}$ vorhergehende Näherungspaar x'_1 und x'_2 von x' beliebig genau wird, wo dann auch die entsprechenden zu dem nämlichen Restbruch $\frac{1}{R}$ gehörigen Näherungswerthe von x in Gl. 34), welche $=\frac{Z_1}{N_1}$ und $\frac{Z_2}{N_2}$ sein mögen, beliebig genau werden. Da nun x positiv ist, so werden bei hinreichender Genauigkeit auch $\frac{Z_1}{N_1}$ und $\frac{Z_2}{N_2}$ positiv, d. h. Z_1 und N_1, sowie auch Z_2 und N_2 von gleichem Zeichen sein. Aus Gl. 31) folgt aber, dass, wenn für x' zwei Werthe x'_1 und x'_2 gesetzt werden, von welchen der eine nur sehr wenig grösser, der andere sehr wenig kleiner ist als x', auch der wahre Werth von x zwischen den entsprechenden Werthen $\frac{Z_1}{N_1}$ und $\frac{Z_2}{N_2}$ liegen wird. Nun ist aber nach § 2 S. 194

$$35)\qquad x = \frac{Z_1 + Z_2 R}{N_1 + N_2 R}.$$

Da R positiv ist, so kann dieser Werth nach § 9 S. 197 nur zwischen $\frac{Z_1}{N_1}$ und $\frac{Z_2}{N_2}$ liegen, wenn N_1 und N_2 gleiche Vorzeichen haben. In Gl. 35) haben also Z_1, Z_2, N_1 und N_2 gleiche Vorzeichen. Sobald dies aber der Fall ist, wachsen von dieser Stelle an die absoluten Werthe der Zähler und der Nenner der Näherungswerthe. Man kann also in der Gl. 35) jetzt Z_1, Z_2, N_1, N_2 als positiv betrachten und $Z_2 > Z_1$, $N_2 > N_1$ nehmen. Da nun Z_1, Z_2, N_1, N_2 ganze Zahlen sind und nach Gl. 30) S. 205 die Determinante des Kettenbruchs $=1$, somit $Z_1 N_2 - Z_2 N_1 = \pm 1$ ist, da ferner $\frac{Z_2}{N_2}$ in einen gewöhnlichen Kettenbruch entwickelt und dieser nach § 16 S. 202 so geschrieben werden kann, dass die Determinante des letzten Näherungspaares der obigen $Z_1 N_2 - Z_2 N_1$ gleich ist, so ist nach § 20 S. 203 $\frac{Z_1}{N_1}$ der erste Bruch dieses Paares. Wenn also auf die angegebene Weise

$$\frac{Z_2}{N_2} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \cdots + \frac{1}{b_n}$$

erhalten wird, so ist nach Gl. 35) und § 2 S. 194

$$x = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \cdots + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{R}.$$

Es ist also $\frac{1}{R}$ auch ein Restbruch des gewöhnlichen Kettenbruches, in welchen sich x entwickeln lässt.

§ 23.

Ein periodischer Kettenbruch sei

$$k = \frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} \cdots + \frac{1}{g_e} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \cdots + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \cdots + \frac{1}{h_c} \cdots$$

Die Periode und der den Perioden vorhergehende Theil können immer als mehrgliedrig betrachtet werden, da man nach § 8 S. 197 beliebig oft $\frac{1}{0} + \frac{1}{0}$ einschalten kann. Da jeder Restbruch des periodischen Theils wieder ein periodischer Kettenbruch ist, so kann $\frac{1}{h_1}$ der Anfang des periodischen Theils sein oder es kann auch der Theil von $\frac{1}{g_1}$ bis $\frac{1}{g_e}$ beliebig weit in den periodischen Theil hineinreichen.

Ferner sei

$$\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} \cdots + \frac{1}{g_{e-1}} = \frac{x_0}{\xi_0}, \quad \frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} \cdots + \frac{1}{g_e} = \frac{y_0}{\eta_0},$$

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \cdots + \frac{1}{h_{c-1}} = \frac{p}{q}, \quad \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \cdots + \frac{1}{h_c} = \frac{r}{s}.$$

Es ist dann
$$x_0\eta_0 - \xi_0 y_0 = (-1)^e, \quad ps - qr = (-1)^c.$$
Setzt man den Kettenbruch fort bis zu Ende der ersten, zweiten, dritten u. s. w Periode, so mögen die nach § 2 S. 194 erhaltenen letzten Näherungspaare mit
$$\frac{x_1}{\xi_1} \text{ und } \frac{y_1}{\eta_1}, \quad \frac{x_2}{\xi_2} \text{ und } \frac{y_2}{\eta_2}, \quad \frac{x_3}{\xi_3} \text{ und } \frac{y_3}{\eta_3} \text{ u. s. w.}$$
bezeichnet werden. Es entsteht dann $\frac{x_n}{\xi_n}$ aus $\frac{y_{n-1}}{\eta_{n-1}}$, indem man zu dem letzten Theilnenner des letzteren noch $\frac{p}{q}$ hinzufügt, und ebenso entsteht $\frac{y_n}{\eta_n}$ aus $\frac{y_{n-1}}{\eta_{n-1}}$, indem man zum letzten Theilnenner des letzteren $\frac{r}{s}$ hinzufügt. Nach § 3 S. 194 ist also
$$\frac{x_1}{\xi_1} = \frac{px_0 + qy_0}{p\xi_0 + q\eta_0}, \quad \frac{y_1}{\eta_1} = \frac{rx_0 + sy_0}{r\xi_0 + s\eta_0},$$
$$\frac{x_2}{\xi_2} = \frac{px_1 + qy_1}{p\xi_1 + q\eta_1}, \quad \frac{y_2}{\eta_2} = \frac{rx_1 + sy_1}{r\xi_1 + s\eta_1}$$
u. s. w., allgemein
$$\frac{x_n}{\xi_n} = \frac{px_{n-1} + qy_{n-1}}{p\xi_{n-1} + q\eta_{n-1}}, \quad \frac{y_n}{\eta_n} = \frac{rx_{n-1} + sy_{n-1}}{r\xi_{n-1} + s\eta_{n-1}}.$$
x_n und y_n werden also aus x_{n-1} und y_{n-1} durch eine sich immer wiederholende lineare Substitution erhalten. Zur Bestimmung von x_n und y_n aus x_0 und y_0 kann man daher die Formeln anwenden, welche in der in § 1 erwähnten Abhandlung gegeben sind.* Dasselbe gilt für die Bestimmung von ξ_n und η_n aus ξ_0 und η_0.

Statt $\begin{matrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{matrix}$ in jener Abhandlung ist hier zu nehmen $\begin{matrix} p & q \\ r & s \end{matrix}$ und man erhält dann durch Anwendung der dortigen Formeln 17) und 21)

36) $$w = \sqrt{qr + \left(\frac{p-s}{2}\right)^2} = \sqrt{qr - ps + \left(\frac{p+s}{2}\right)^2}$$
oder, wenn man

---

* In der genannten Abhandlung sind die Grössen $x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2$ u. s. w. von einander abhängig nach den Gleichungen

2) $$x_{n+1} = ax_n + by_n,$$
$$y_{n+1} = \alpha x_n + \beta y_n,$$
und wenn man dann

17) $$\sqrt{b\alpha + \left(\frac{a-\beta}{2}\right)^2} = w$$
setzt, so ergiebt sich

21) $$x_n = \frac{\left(\frac{a-\beta}{2} + w\right)x_0 + by_0}{2w}\left(\frac{a+\beta}{2} + w\right)^n + \frac{-\left(\frac{a-\beta}{2} - w\right)x_0 - by_0}{2w}\left(\frac{a+\beta}{2} - w\right)^n,$$
$$y_n = \frac{\alpha x_0 - \left(\frac{a-\beta}{2} - w\right)y_0}{2w}\left(\frac{a+\beta}{2} + w\right)^n + \frac{-\alpha x_0 + \left(\frac{a-\beta}{2} + w\right)y_0}{2w}\left(\frac{a+\beta}{2} - w\right)^n.$$
Diese Gleichungen haben hier dieselben Nummern, wie in jener Abhandlung.

$$37)\qquad \frac{s+p}{2}=\sigma,\quad \frac{s-p}{2}=\delta$$

setzt,

$$38)\qquad w=\sqrt{qr+\delta^2}=\sqrt{qr-ps+\sigma^2}=\sqrt{\sigma^2-(-1)^c},$$

$$39)\quad \frac{x_n}{\xi_n}\equiv\frac{\left\{\left[\left(\frac{p-s}{2}+w\right)x_0+qy_0\right]\left[\frac{p+s}{2}+w\right]^n+\left[-\left(\frac{p-s}{2}-w\right)x_0-qy_0\right]\left[\frac{p+s}{2}-w\right]^n\right\}\frac{1}{2w}}{\left\{\left[\left(\frac{p-s}{2}+w\right)\xi_0+q\eta_0\right]\left[\frac{p+s}{2}+w\right]^n+\left[-\left(\frac{p-s}{2}+w\right)\xi_0-q\eta_0\right]\left[\frac{p+s}{2}-w\right]^n\right\}\frac{1}{2w}},$$

$$40)\quad \frac{y_n}{\eta_n}\equiv\frac{\left\{\left[rx_0-\left(\frac{p-s}{2}-w\right)y_0\right]\left[\frac{p+s}{2}+w\right]^n+\left[-rx_0+\left(\frac{p-s}{2}+w\right)y_0\right]\left[\frac{p+s}{2}-w\right]^n\right\}\frac{1}{2w}}{\left\{\left[r\xi_0-\left(\frac{p-s}{2}-w\right)\eta_0\right]\left[\frac{p+s}{2}+w\right]^n+\left[-r\xi_0+\left(\frac{p-s}{2}+w\right)\eta_0\right]\left[\frac{p+s}{2}-w\right]^n\right\}\frac{1}{2w}},$$

oder

$$41)\quad \frac{x_n}{\xi_n}\equiv\frac{\{[(w-\delta)x_0+qy_0][\sigma+w]^n+[(w+\delta)x_0-qy_0][\sigma-w]^n\}\frac{1}{2w}}{\{[(w-\delta)\xi_0+q\eta_0][\sigma+w]^n+[(w+\delta)\xi_0-q\eta_0][\sigma-w]^n\}\frac{1}{2w}},$$

$$42)\quad \frac{y_n}{\eta_n}\equiv\frac{\{[rx_0+(w+\delta)y_0][\sigma+w]^n+[-rx_0+(w-\delta)y_0][\sigma-w]^n\}\frac{1}{2w}}{\{[r\xi_0+(w+\delta)\eta_0][\sigma+w]^n+[-r\xi_0+(w-\delta)\eta_0][\sigma-w]^n\}\frac{1}{2w}}$$

oder, anders geordnet:

$$43)\quad \frac{x_n}{\xi_n}\equiv\frac{\{[-\delta x_0+qy_0][(\sigma+w)^n-(\sigma-w)^n]+wx_0[(\sigma+w)^n+(\sigma-w)^n]\}\frac{1}{2w}}{\{[-\delta\xi_0+q\eta_0][(\sigma+w)^n-(\sigma-w)^n]+w\xi_0[(\sigma+w)^n+(\sigma-w)^n]\}\frac{1}{2w}},$$

$$44)\quad \frac{y_n}{\eta_n}\equiv\frac{\{[rx_0+\delta y_0][(\sigma+w)^n-(\sigma-w)^n]+wy_0[(\sigma+w)^n+(\sigma-w)^n]\}\frac{1}{2w}}{\{[r\xi_0+\delta\eta_0][(\sigma+w)^n-(\sigma-w)^n]+w\eta_0[(\sigma+w)^n+(\sigma-w)^n]\}\frac{1}{2w}}.$$

Ist der Kettenbruch rein periodisch

$$=\frac{1|}{|h_1}+\frac{1|}{|h_2}\cdots+\frac{1|}{|h_c}+\frac{1|}{|h_1}+\frac{1|}{|h_2}\cdots+\frac{1|}{|h_c}---$$
$$=\frac{1|}{|0}+\frac{1|}{|0}+\frac{1|}{|h_1}+\frac{1|}{|h_2}\cdots+\frac{1|}{|h_c}+\frac{1|}{|h_1}+\frac{1|}{|h_2}\cdots+\frac{1|}{|h_c}---,$$

so hat man $\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}$ an die Stelle von $\begin{matrix}x_0 & y_0\\ \xi_0 & \eta_0\end{matrix}$ zu setzen und die Gleichungen 41), 42), 43), 44) werden dann, wenn jetzt x', ξ', y', η' dieselbe Bedeutung haben, wie oben x, ξ, y, η:

$$45)\qquad \therefore\ \frac{x'_n}{\xi'_n}\equiv\frac{\{(w-\delta)(\sigma+w)^n+(w+\delta)(\sigma-w)^n\}\frac{1}{2w}}{q[(\sigma+w)^n-(\sigma-w)^n]\frac{1}{2w}},$$

$$46)\quad \frac{y'_n}{\eta'_n} = \frac{r[(\sigma+w)^n-(\sigma-w)^n]\frac{1}{2w}}{[(w+\delta)(\sigma+w)^n+(w-\delta)(\sigma-w)^n]\frac{1}{2w}},$$

$$47)\quad \frac{x'_n}{\xi'_n} = \frac{\{-\delta[(\sigma+w)^n-(\sigma-w)^n]+w[(\sigma+w)^n+(\sigma-w)^n]\}\frac{1}{2w}}{q[(\sigma+w)^n-(\sigma-w)^n]\frac{1}{2w}},$$

$$48)\quad \frac{y'_n}{\eta'_n} = \frac{r[(\sigma+w)^n-(\sigma-w)^n]\frac{1}{2w}}{\{\delta[(\sigma+w)^n-(\sigma-w)^n]+w[(\sigma+w)^n+(\sigma-w)^n]\}\frac{1}{2w}}.$$

Es ist $\sigma+w$ grösser als der absolute Werth von $\sigma-w$. Lässt man also n ins Unendliche wachsen, so verschwindet $(\sigma-w)^n$ gegen $(\sigma+w)^n$, während zugleich $(\sigma+w)^n$ herausfällt, und man erhält dann für den unendlichen gemischten periodischen Kettenbruch aus Gl. 41) oder 42) (aus ersterer nicht unmittelbar, sondern nach einer kleinen Umformung, nämlich Multiplication von Zähler und Nenner mit $w+\delta$ u. s. w.)

$$49)\qquad \frac{y}{\eta} = \frac{r x_0 + (w+\delta) y_0}{r\xi_0 + (w+\delta)\eta_0} = \frac{x_0 + \frac{w+\delta}{r} y_0}{\xi_0 + \frac{w+\delta}{r}\eta_0}$$

und für den unendlichen rein periodischen Kettenbruch aus Gl. 45) oder 46)

$$50)\qquad \frac{y'}{\eta'} = \frac{r}{w+\delta}.$$

Die Gleichung 50) folgt auch aus 49) nach § 2 S. 194.

§ 24.

Wenn $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ das letzte Näherungspaar eines Kettenbruchs

$$k = \frac{1|}{|h_1} + \frac{1|}{|h_2} \dots + \frac{1|}{|h_c}$$

ist, so stellen die beiden Ausdrücke

$$51)\qquad \frac{r}{\frac{s-p}{2}+\sqrt{\left(\frac{s+p}{2}\right)^2-(-1)^c}} = \frac{r}{\delta+w}$$

und

$$52)\qquad \frac{q}{\frac{s-p}{2}+\sqrt{\left(\frac{s+p}{2}\right)^2-(-1)^c}} = \frac{q}{\delta+w}$$

unendliche rein periodische Kettenbrüche dar, resp. mit den Perioden

$$k = \frac{1}{h_1}\Big| + \frac{1}{h_2} \cdots \Big| + \frac{1}{h_c}$$

und

$$k' = \frac{1}{h_c}\Big| + \frac{1}{h_{c-1}} \cdots \Big| + \frac{1}{h_1}.$$

Beweis. Dass 51) den Kettenbruch mit der Periode k darstellt, sagt unmittelbar die Gleichung 50). Der Kettenbruch k' hat nach § 21 S. 204 das letzte Näherungspaar $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{s}$. Um also dieselbe Gleichung 50) auch auf den unendlichen Kettenbruch mit der Periode k' anwenden zu können, müssen q und r vertauscht werden; dadurch verwandelt sich aber der Ausdruck 51) in 52).

§ 25.

Eine positive irrationale Grösse $\frac{a+\sqrt{m}}{b}$, wo m eine ganze positive nicht quadratische Zahl ist, a und b ganze Zahlen sind und a, b, $\sqrt{m}$ keinen gemeinsamen Theiler haben mögen, giebt, in einen Kettenbruch entwickelt, einen periodischen Kettenbruch.

Beweis. Es sei

53) $$\frac{a+\sqrt{m}}{b} = k = \frac{1}{0}\Big| + \frac{1}{0}\Big| + \frac{1}{x_3}\Big| + \frac{1}{x_4}\Big| + \frac{1}{x_5} \cdots$$

Die beiden ersten Näherungsbrüche sind $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{0}$ und $\frac{p_2}{q_2} = \frac{0}{1}$. Die Entwickelung geschieht nach § 19 S. 202, also

$$\frac{1+0\,R_3}{0+1\,R_3} = k, \quad R_3 = \frac{1}{k} = x_3 + \frac{1}{R_4} \quad (R_4 > 1);$$

$$\frac{1+0\,x_3}{0+1\,x_3} = \frac{p_3}{q_3};$$

$$\frac{0+p_3 R_4}{1+q_3 R_4} = k, \quad R_4 = \frac{0-k}{q_3 k - p_3} = x_4 + \frac{1}{R_5} \quad (R_5 > 1);$$

$$\frac{0+p_3 x_4}{1+q_3 x_4} = \frac{p_4}{q_4}$$

u. s. w.;

54) $$\frac{p_{n-1} + p_n R_{n+1}}{q_{n-1} + q_n R_{n+1}} = k, \quad R_{n+1} = \frac{p_{n-1} - q_{n-1} k}{q_n k - p_n}$$

$$= \frac{p_{n-1} - q_{n-1}\frac{a+\sqrt{m}}{b}}{q_n \frac{a+\sqrt{m}}{b} - p_n} = \frac{b p_{n-1} - a q_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{m}}{a q_n - b p_n + q_n \sqrt{m}}$$

$$= \frac{(b p_{n-1} - a q_{n-1} - q_{n-1}\sqrt{m})(a q_n - b p_n - q_n \sqrt{m})}{(a q_n - b p_n + q_n\sqrt{m})(a q_n - b p_n - q_n \sqrt{m})}$$

$$=\frac{(bp_{n-1}-aq_{n-1})(aq_n-bp_n)+q_{n-1}q_n m-[(bp_{n-1}-aq_{n-1})q_n+(aq_n-bp_n)q_{n-1}]\sqrt{m}}{(aq_n-bp_n)^2-q_n^2 m}$$

$$=\frac{b(ap_{n-1}q_n-bp_{n-1}p_n+aq_{n-1}p_n)+(m-a^2)q_{n-1}q_n-b(p_{n-1}q_n-p_nq_{n-1})\sqrt{m}}{-bp_n(2aq_n-bp_n)-(m-a^2)q_n^2}$$

$$55)\quad =\frac{b(ap_{n-1}q_n-bp_{n-1}p_n+aq_{n-1}p_n)+(m-a^2)q_{n-1}q_n-(-1)^n b\sqrt{m}}{-bp_n(2aq_n-bp_n)-(m-a^2)q_n^2}$$

$$56)\quad =\frac{ap_{n-1}q_n-bp_{n-1}p_n+aq_{n-1}p_n+\frac{m-a^2}{b}q_{n-1}q_n-(-1)^n\sqrt{m}}{-p_n(2aq_n-bp_n)-\frac{m-a^2}{b}q_n^2}.$$

Von den beiden letzten Ausdrücken für R_{n+1} wird man entweder 56) oder 55) nehmen, je nachdem $m-a^2$ durch b theilbar ist oder nicht. In beiden Fällen ist im Zähler das letzte Glied, abgesehen vom Vorzeichen, von n unabhängig. Von dem übrigen Theile des Zählers und dem Nenner soll jetzt gezeigt werden, dass dieselben nicht beliebig gross werden können und zuletzt immer dasselbe Vorzeichen haben wie $b\sqrt{m}$. Wir gehen von dem Ausdruck 54) für R_{n+1} aus, also

$$R_{n+1}=\frac{p_{n-1}-q_{n-1}k}{q_nk-p_n}=\frac{q_{n-1}\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}-k\right)}{q_n\left(k-\frac{p_n}{q_n}\right)}$$

$$=[\text{nach Gl. 21) und 22) S. 200, wo jetzt } \delta=1]\ \frac{\frac{(-1)^n\mu}{q_n}}{\frac{(-1)^n\nu}{q_{n-1}}}$$

$$=[\text{nach Gl. 24) S. 200}]\ \frac{\frac{(-1)^n\mu}{q_n}}{\frac{(-1)^n\beta\mu}{q_n}}.$$

Damit aber dieser Ausdruck mit 55) in Zähler und Nenner übereinstimme, müssen Zähler und Nenner noch multiplicirt werden mit

$$b(aq_n-bp_n-q_n\sqrt{m})$$
$$=bq_n\left(a-b\frac{p_n}{q_n}-\sqrt{m}\right).$$

Bezeichnet man also den ganzen rationalen Theil des Zählers von 55) mit t, den ebenfalls ganzen rationalen Nenner mit u, so ist

$$57)\qquad \frac{t-(-1)^n b\sqrt{m}}{u}=\frac{b\left(a-b\frac{p_n}{q_n}-\sqrt{m}\right)(-1)^n\mu}{b\left(a-b\frac{p_n}{q_n}-\sqrt{m}\right)(-1)^n\beta\mu}.$$

Der in diesem Ausdruck enthaltene Näherungsbruch $\frac{p_n}{q_n}$ wird bei fortgesetzter Entwickelung beliebig genau $= \frac{a+\sqrt{m}}{b}$. Durch Einsetzung dieses Werthes in 57) erhält man also ebenfalls mit beliebiger Genauigkeit

$$58) \qquad \frac{t-(-1)^n b\sqrt{m}}{u} = \frac{-2b\sqrt{m}\,(-1)^n \mu}{-2b\sqrt{m}\,(-1)^n \beta\mu}$$

oder

$$59) \qquad \frac{t-(-1)^n b\sqrt{m}}{u} = \frac{-(2\mu-1)(-1)^n b\sqrt{m}-(-1)^n b\sqrt{m}}{-2(-1)^n b\sqrt{m}\,\beta\mu}.$$

In dieser Gleichung ist rechts ebenso wie links im Zähler der irrationale Theil abgesondert. Dieselbe zeigt, dass bei fortgesetzter Entwickelung des Kettenbruchs beliebig genau

$$t = -(2\mu-1)(-1)^n b\sqrt{m}, \quad u = -2(-1)^n b\sqrt{m}\,\beta\mu$$

wird. Nach Gl. 24) S. 200 ist nun $\mu > \nu$, mithin nach Gl. 23) $\mu > \frac{1}{2}$; es liegt also $2\mu - 1$ ebenso wie μ zwischen 0 und 1. Mithin erhält sowohl t wie u das Vorzeichen des irrationalen Theils des Dividenden von 55). Man kann daher von einer gewissen Stelle der Entwickelung an diese drei Grössen sämmtlich als positiv betrachten.

Nennt man den absoluten Werth der in $b\sqrt{m}$ enthaltenen Ganzen t', die in $2b\sqrt{m}$ enthaltenen u' ($= 2t'$ oder $= 2t'+1$), so können, da t stets eine ganze Zahl ist und nicht $= 0$ sein kann, nach Gl. 59) in dem Dividenden nicht unter $t'+1$ und nicht über u' Ganze enthalten sein. Der Nenner aber kann höchstens gleich den Ganzen im Dividenden sein, weil die R stets grösser als 1 sind. Die Anzahl der Combinationen der ganzen Werthe, welche im Dividenden enthalten sein können, mit den höchstens ebenso grossen Werthen des Nenners ist also

$$60) \qquad = (t'+1)+(t'+2)+(t'+3)\cdots+u' = \frac{(t'+u'+1)(u'-t')}{2}.$$

Der Kettenbruch wird also periodisch und die Anzahl der Glieder einer Periode kann nicht grösser als der Ausdruck 60) sein.

§ 26.

Wenn die Grössen $\frac{a+\sqrt{m}}{b}$ in § 25 und $\frac{a-\sqrt{m}}{\pm b}$, wo das Zeichen im Nenner so zu nehmen ist, dass diese Grösse ebenfalls positiv wird, in Kettenbrüche entwickelt werden, so ist die Periode des einen die umgekehrte des andern.

B e w e i s. Es sei

$$61) \qquad \frac{a+\sqrt{m}}{b} = \frac{1}{g_1}\cdots\Big|\overline{+\frac{1}{g_e}}\Big|\overline{+\frac{1}{h_1}}\cdots\Big|\overline{+\frac{1}{h_c}}\Big|\overline{+\frac{1}{h_1}}\cdots\Big|\overline{+\frac{1}{h_c}}\cdots.$$

Nach Gl. 49) S. 209 ist dann, wenn x_0, y_0, ξ_0, η_0, p, q, r, s, δ, σ dieselbe Bedeutung haben wie dort,

$$\frac{a+\sqrt{m}}{b}=\frac{rx_0+(\delta+w)y_0}{r\xi_0+(\delta+w)\eta_0}=\frac{y_0+\frac{r}{\delta+w}x_0}{\eta_0+\frac{r}{\delta+w}\xi_0}. \tag{62}$$

Da $y_0\xi_0-x_0\eta_0=-(-1)^\sigma$, so haben nach Gl. 62) und § 22 S. 205 die Grössen $\frac{a+\sqrt{m}}{b}$ und $\frac{r}{\delta+w}$ in Kettenbrüche entwickelt gleiche Restbrüche. Nun ist aber $\frac{r}{\delta+w}$ nach § 24 S. 209 gleich einem rein periodischen Kettenbruche mit der Periode

$$\frac{1|}{h_1}+\frac{1|}{h_2}\cdots+\frac{1|}{h_c}.$$

Da nun ein solcher Kettenbruch von denjenigen Restbrüchen desselben, welche nur volle Perioden enthalten, nicht verschieden ist, so kann man $\frac{r}{\delta+w}$ selbst als Restbruch von $\frac{a+\sqrt{m}}{b}$ betrachten.

Die Gleichung 62) bleibt, wie man leicht erkennt, richtig, wenn man den irrationalen Grössen $\sqrt{m}$ und w das entgegengesetzte Zeichen giebt, also

$$\begin{aligned}\frac{a-\sqrt{m}}{\pm b}&=\frac{rx_0+(\delta-w)y_0}{\pm r\xi_0\pm(\delta-w)\eta_0}\\&=\frac{rx_0(\delta+w)+(\delta^2-w^2)y_0}{\pm r\xi_0(\delta+w)\pm(\delta^2-w^2)\eta_0}=\frac{rx_0(\delta+w)+(-qr)y_0}{\pm r\xi_0(\delta+w)\pm(-qr)\eta_0}\\&=\frac{x_0-\frac{q}{\delta+w}y_0}{\pm\xi_0\mp\frac{q}{\delta+w}\eta_0}.\end{aligned}$$

Da $x_0(\mp\eta_0)-(\pm\xi_0)(-y_0)=\mp x_0\eta_0\pm\xi_0 y_0=\mp(-1)^\sigma$, so haben nach § 22 S. 205 die Grössen $\frac{a-\sqrt{m}}{\pm b}$ und $\frac{q}{\delta+w}$ in Kettenbrüche entwickelt gleiche Restbrüche. Nun stellt aber $\frac{q}{\delta+w}$ nach § 24 S. 209 einen rein periodischen Kettenbruch mit der Periode

$$\frac{1|}{h_c}+\frac{1|}{h_{c-1}}\cdots+\frac{1|}{h_1}$$

dar. Man kann also wieder diesen Bruch selbst als Restbruch von $\frac{a-\sqrt{m}}{\pm b}$ betrachten. Die beiden Grössen $\frac{a+\sqrt{m}}{b}$ und $\frac{a-\sqrt{m}}{\pm b}$ geben also in der That Kettenbrüche mit Perioden, von welchen die eine die Umkehrung der andern ist.

§ 27.

Eine beliebige nicht quadratische ganze Zahl A lässt sich darstellen in einer der beiden Formen

$$A = \frac{\left(\frac{s+p}{2}\right)^2 \pm 1}{u^2},$$

wo s, p und u ganze Zahlen sind, $s+p$ eine gerade Zahl ist.

Beweis. Nach § 25 S. 210 giebt $\alpha + \sqrt{A}$, wo α eine beliebige positive rationale Zahl ist, also auch $\frac{1}{\alpha+\sqrt{A}}$ in einen Kettenbruch entwickelt einen periodischen Kettenbruch k, und wenn man die Bezeichnungen in § 23 S. 206 anwendet, so ist nach Gl. 49)

$$\begin{aligned}
k &= \frac{r x_0 + (w+\delta) y_0}{r \xi_0 + (w+\delta) \eta_0} \\
&= \frac{(r x_0 + \delta y_0 + w y_0)(r x_0 + \delta y_0 - w y_0)}{(r \xi_0 + \delta \eta_0 + w \eta_0)(r x_0 + \delta y_0 - w y_0)} \\
&= \frac{(r x_0 + \delta y_0)^2 - w^2 y_0^2}{(r \xi_0 + \delta \eta_0)(r x_0 + \delta y_0) + [(r x_0 + \delta y_0)\eta_0 - (r \xi_0 + \delta \eta_0) y_0] w - w^2 \eta_0 y_0} \\
&= \frac{(r x_0 + \delta y_0)^2 - w^2 y_0^2}{(r \xi_0 + \delta \eta_0)(r x_0 + \delta y_0) + r (x_0 \eta_0 - \xi_0 y_0) w - w^2 \eta_0 y_0} \\
&= \frac{r^2 x_0^2 + 2 r \delta x_0 y_0 - q r y_0^2}{r^2 x_0 \xi_0 + (x_0 \eta_0 + \xi_0 y_0) r \delta - q r \eta_0 y_0 + (-1)^e r w} \\
&= \frac{r x_0^2 + 2 \delta x_0 y_0 - q y_0^2}{r x_0 \xi_0 + (x_0 \eta_0 + \xi_0 y_0)\delta - q \eta_0 y_0 + (-1)^e w}.
\end{aligned}$$

Nennt man den Zähler dieses Bruches u und den rationalen Theil des Nenners v, so ist

$$\frac{1}{\alpha + \sqrt{A}} = \frac{u}{v + (-1)^e w} = \frac{1}{\frac{v}{u} + \frac{(-1)^e}{u} w} = \frac{1}{\frac{v}{u} + \frac{(-1)^e}{u}\sqrt{\left(\frac{s+p}{2}\right)^2 - (-1)^e}},$$

woraus folgt

$$A = \frac{\left(\frac{s+p}{2}\right)^2 - (-1)^e}{u^2}.$$

Hiermit ist der Satz bewiesen, weil q, r, x_0, y_0 und 2δ ganze Zahlen sind, somit auch u eine ganze Zahl ist und daher $\frac{s+p}{2}$ ebenfalls ganz sein muss. Aus Letzterem folgt zugleich, dass auch $\frac{p-s}{2} = \delta$ eine ganze Zahl ist.

§ 28.

Wenn A eine beliebige nicht quadratische positive ganze Zahl und a die nächst kleinere ganze Wurzel aus derselben ist, so giebt $\frac{1}{a+\sqrt{A}}$ einen rein periodischen Kettenbruch, welcher mit $\frac{1}{2a}$ anfängt.

Beweis. Man bringe nach § 27 A auf die Form

$$63)\qquad A=\frac{\left(\frac{s+p}{2}\right)^2-(-1)^c}{r^2}.$$

Welche Werthe sich hier für s und p einzeln durch die Entwickelung in § 27 ergeben, ist für vorliegenden Zweck gleichgiltig. Aus voriger Gleichung bestimmt sich blos die Summe derselben

$$64)\qquad s+p=2\sqrt{Ar^2+(-1)^c}$$

und man kann deshalb über s und p weiter so verfügen, dass zugleich

$$65)\qquad s-p=2ar$$

wird. Dann ist

$$66)\qquad s=\sqrt{Ar^2+(-1)^c}+ar,$$

$$67)\qquad p=\sqrt{Ar^2+(-1)^c}-ar.$$

s und p werden also ganze Zahlen, $s>0$ und p nicht kleiner als 0. Ferner bestimme man eine Zahl q so, dass

$$68)\qquad qr-ps=-(-1)^c,$$

also nach Gl. 66) und 67)

$$\begin{aligned}
qr-(A-a^2)r^2-(-1)^c&=-(-1)^c,\\
qr-(A-a^2)r^2&=0,\\
q&=(A-a^2)r.
\end{aligned}$$

Es wird also q eine ganze Zahl >0. Aus Gl. 65) folgt jetzt

$$69)\qquad a=\frac{s-p}{2r}$$

und dann hieraus und aus Gl. 63)

$$\frac{1}{a+\sqrt{A}}=\frac{1}{\frac{s-p}{2r}+\sqrt{\frac{\left(\frac{s+p}{2}\right)^2-(-1)^c}{r^2}}}$$

$$=\frac{r}{\frac{s-p}{2}+\sqrt{\left(\frac{s+p}{2}\right)^2-(-1)^c}}$$

$$70)\qquad =\frac{r}{\frac{s-p}{2}+\sqrt{\left(\frac{s+p}{2}\right)^2+qr-ps}}.$$

Wird nun $\frac{r}{s}$ in einen Kettenbruch entwickelt mit einer geraden oder ungeraden Anzahl Theilnenner, je nachdem c gerade oder ungerade ist, so ist nach § 20 S. 203. $\frac{p}{q}$ der vorletzte Näherungswerth dieses Kettenbruches. Der Ausdruck 70) stellt also nach § 24 S. 209 einen rein periodischen Kettenbruch dar, dessen Periode der aus $\frac{r}{s}$ erhaltene Kettenbruch ist. Dass derselbe mit $\frac{1}{2a}$ anfängt, folgt daraus, dass $2a$ der ganze Theil von $a+\sqrt{A}$ ist.

§ 29.

In § 28 ist die Periode des aus $\frac{1}{a+\sqrt{A}}$ erhaltenen Kettenbruches, wenn man das erste Glied fortlässt, symmetrisch.

Beweis. Es sei

71) $$\frac{r}{s}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\dots+\frac{1}{a_n},$$

also

72) $$\frac{p}{q}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{a_1}\dots+\frac{1}{a_{n-1}}.$$

Setzen wir jetzt

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\dots+\frac{1}{a_n}=\frac{r'}{s'},$$

so folgt aus Gl. 71)

$$\frac{r'}{s'}=\frac{s}{r}-2a=\frac{s-2ar}{r}$$

und dies ist nach Gl. 69) $=\frac{p}{r}$, welcher Bruch nach § 21 S. 204 der vorletzte Näherungsbruch der Umkehrung des dem $\frac{r}{s}$ gleichen Kettenbruchs Gl. 71), also

$$\frac{p}{r}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n-1}}\dots+\frac{1}{a_1}$$

ist. Der Kettenbruch

$$\frac{r'}{s'}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\dots+\frac{1}{a_n}$$

und seine Umkehrung

$$\frac{p}{r}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n-1}}\dots+\frac{1}{a_1}$$

sind also gleich; derselbe ist demnach symmetrisch.

§ 30.

Es liegt der Gedanke nahe, die Beziehung, welche zwischen dem gewöhnlichen Kettenbruche und der binären linearen Substitution stattfindet, auf ternäre, quaternäre u. s. w. Substitutionen auszudehnen. Was zunächst die ternären Substitutionen betrifft, so würde man also die Frage zu beantworten haben: Welche Entwickelung steht zu der ternären linearen Substitution in derselben Beziehung, in welcher die Kettenbruchentwickelung zur binären Substitution steht? Der Darstellung einer Quadratwurzel durch einen periodischen Kettenbruch würde dann die Berechnung der dritten Wurzel durch eine ebenfalls periodische Entwickelung entsprechen. In der That führt, wie in der in § 1 erwähnten Abhandlung in Grunert's Archiv gezeigt ist, die Ermittelung der Resultate einer mehrmals wiederholten ternären Substitution auf eine Gleichung dritten Grades. Crelle's Journal für Mathematik Bd. 69 enthält zwei Abhandlungen von Jacobi: „Ueber die Auflösung einer unbestimmten Gleichung" und „Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen u. s. w.", in welchen dieser Gegenstand behandelt ist. Ferner hat in Bd. 75 Herr Bachmann eine Arbeit über denselben veröffentlicht. Schon für drei Veränderliche resp. die dritte Wurzel wird die Rechnung ohne Vergleich complicirter als die Kettenbruchentwickelung und die Darstellung einer Quadratwurzel durch einen Kettenbruch. Die obigen Gleichungen 39) S. 208 bis 50) entsprechenden Formeln giebt Jacobi nicht; dieselben würden auch auf dem Wege, auf welchem Lagrange die ersteren entwickelt hat, wohl schwer zu erhalten sein. Ohne Zweifel werden diese Formeln auf die Jacobi'sche Entwickelung der dritten Wurzel in ähnlicher Weise angewendet werden können, wie obige Gleichung 49) auf die Entwickelung der Quadratwurzel. Auch dürften einzelne in Bezug auf die Entwickelung selbst noch nicht vollständig erledigte Fragen hierdurch Aufklärung finden. Nähere Erörterungen hierüber bleiben einer späteren Arbeit vorbehalten.

XIII.

Einige Eigenschaften der Binomialcoefficienten mit Anwendungen auf Combinationslehre.

Von

Dr. C. W. Baur,

Professor am königl. Polytechnikum in Stuttgart.

Der Ausdruck für das allgemeine Glied einer Zahlenreihe

$$y_0, \; y_1, \; y_2, \; \ldots,$$

welche durch ihr eigenes Anfangsglied und diejenigen der Reihen ihrer Differenzen erster, zweiter, ... Ordnung: $\Delta' y_0$, $\Delta^2 y_0$, ... bestimmt ist:

$$y_m = y_0 + \binom{m}{1} \Delta' y_0 + \binom{m}{2} \Delta^2 y_0 + \ldots$$

lässt sich auf folgende Reihe anwenden:

$$0^n, \; 1^n, \; 2^n, \; 3^n, \; \ldots,$$

welche unter Voraussetzung eines positiven ganzen Werthes von n die constante n^{te} Differenz darbietet $\Delta^n 0 = n! = n(n-1)\ldots 2.1$, also von der n^{ten} Ordnung ist. Man erhält, wenn man vorerst auch unter x eine positive ganze Zahl versteht, die Gleichung

$$1) \qquad x^n = 0^n + \binom{x}{1} \Delta' 0^n + \binom{x}{2} \Delta^2 0^n + \cdots + \binom{x}{n} \Delta^n 0^n.$$

Die Giltigkeit derselben ist aber nicht an die Bedingung positiver ganzer Werthe von x gebunden, denn nach Entwickelung der Ausdrücke für die Binomialcoefficienten:

$$\binom{x}{1} = \frac{1}{1} \cdot x, \quad \binom{x}{2} = \frac{1}{1.2}(x^2 - x), \quad \binom{x}{3} = \frac{1}{1.2.3}(x^3 - 3x^2 + 2x), \; \ldots$$

erhält man eine Gleichung des n^{ten} Grades, welche aber von allen der natürlichen Zahlenreihe entnommenen Werthen von x befriedigt wird, also mehr als n Wurzeln hat, somit eine identische nach x sein muss. Man wird keinen Anstand daran nehmen, dass für solche positiven ganzen Werthe von x, welche kleiner sind als n, etwa $x = r$, die Reihe schon mit dem Gliede $\binom{x}{r} \Delta^r 0^n$ abbricht, also nach Entwickelung der Binomialcoefficienten x^n, was links vorhanden ist, rechts nicht zu Stande kommt. Die rechts bei diesem Gliede abbrechende Gleichung ist eben keine identische und kann auch nach der oben angewendeten Schlussfolgerung nicht als solche erklärt werden, weil nur die $r+1$ Wurzeln $0, 1, 2, \ldots, r$, deren es höchstens n sind, nachgewiesen werden können.

Schreibt man aber die Gleichung so, wie sie oben in 1) geschrieben ist und ordnet, nach Entwickelung der Binomialcoefficienten, nach Potenzen, so müssen die Coefficienten sämmtlicher letzteren verschwinden. Augenscheinlich ist dies für x^n der Fall, man erhält nämlich $\frac{\Delta^n 0^n}{n!} - 1 = 0$.

Für die Combinationslehre hat unsere Gleichung eine naheliegende Bedeutung. Einerseits ist nämlich x^n, unter der von jetzt an stets festgehaltenen Voraussetzung positiver ganzer Werthe von x und von n, die Anzahl der Versetzungen (Permutationen) zwischen x gegebenen Elementen, die wir mit $1, 2, 3, \ldots, x$ bezeichnen, zur n^{ten} Classe; es sind damit alle Zusammenstellungen (Complexionen) von n Elementen gemeint, von denen jedes irgend einem der x gegebenen gleich ist. Es kann also eine solche bestehen aus einem einzigen, aber n-mal aufgeführten Elemente, oder aus deren zweien in solchen Anzahlen, welche sich zu n ergänzen, und in allen möglichen Umsetzungen u. s. f. Nach der Anzahl der verschiedenen unter den x Elementen, welche in der Versetzung vorkommen, bestimmt sich die Ordnung der letzteren. Die Ordnungszahl kann, wenn $n < x$, von 1 bis n, wenn aber nicht $n < x$, von 1 bis x ansteigen. Ist $n > x$, so sind zum Mindesten $n - x$ unter den gegebenen Elementen mehr als einmal, also wiederholt in der Versetzung vorhanden.

Andererseits bedeutet $\binom{x}{r}$, wo r alle ganzen Werthe von 1 bis x annehmen kann, die Anzahl der Verbindungen (Combinationen) zwischen den x gegebenen Elementen zur r^{ten} Classe ohne Wiederholungen, d. h. die Anzahl der verschiedenen Fälle von Auswahl, nach welchen r verschiedene unter den x Elementen ausgehoben werden können, ohne Rücksicht auf die Reihenfolge, in der sie zur Aushebung gelangen. Gewöhnlich macht man die ausgehobenen Elemente in derjenigen Ordnung namhaft, in welcher sie, wenn es, wie oben, Zahlen sind, in der natürlichen Reihe, wenn es aber Buchstaben sind, im Alphabet auftreten.

Aus jeder von den $\binom{x}{r}$ möglichen Verbindungen zur r^{ten} Classe kann man diejenigen unter den x^n Versetzungen erzeugen, in welchen die — und nur die in der Verbindung vorhandenen Elemente vorkommen. Ist $r = n$, so sind zu diesem Zwecke nur Umsetzungen erforderlich; ist $r < n$, so bedarf es Umsetzungen und Wiederholungen; ist aber $r > n$, so giebt es der fraglichen Versetzungen keine. Da die Anzahl der so erzeugbaren Versetzungen nicht von der Auswahl, sondern nur von der Anzahl r der in der Verbindung vorhandenen Elemente, daneben selbstverständlich auch von n abhängt, so wird jene Anzahl mit $\binom{x}{r}$ multiplicirt die Anzahl der zur

r^{ten} Ordnung gehörigen unter den x^n Versetzungen angeben. Gleichung 1) giebt daher Veranlassung, anzunehmen, dass, wenn man alle x^n Versetzungen nach ihren Ordnungszahlen in Gruppen zerlegt, durch die Glieder der rechten Seite die Versetzungen in den einzelnen Gruppen gezählt werden und also folgende Sätze stattfinden:

2) Von r verschiedenen Elementen erhält man $\Delta^r 0^n$ solcher Versetzungen zur n^{ten} Classe, welche alle r Elemente enthalten, oder mit einem abkürzenden Ausdruck: man erhält $\Delta^r 0^n$ vollzählige Versetzungen zur n^{ten} Classe mit Wiederholungen.

3) Unter den x^n Versetzungen zwischen x verschiedenen Elementen zur n^{ten} Classe mit Wiederholungen sind es $\binom{x}{r}\Delta^r 0^n$ von der r^{ten} Ordnung.

Die Fälle, in welchen $\Delta^r 0^n$ oder $\binom{x}{r}$ verschwindet, oder $\Delta^r 0^n = n!$ wird, findet man im Einklang mit den obigen Sätzen.

Satz 2) giebt noch zu der Bemerkung Anlass, dass die Zahlen, welche angeben, wie oft die einzelnen unter den r Elementen in der Versetzung zur n^{ten} Classe vorkommen, die Summe n liefern müssen. Höchstens kann eine solche Zahl den Werth $n-r+1$ erhalten, die anderen sind der Einheit gleich. Daher auch:

Die Anzahl der Verbindungen der r^{ten} Classe mit Wiederholungen zwischen den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n-r+1$ zur Summe n ist $\Delta^r 0^n$.

Wir haben unsere Folgerung aber noch nicht als eine vollständig sichere aufgestellt, weil es scheinen könnte, dass Gl. 1) auch befriedigt bleiben würde, wenn anstatt der Factoren $\Delta' 0^n$, $\Delta^2 0^n$, ... mit der Bedeutung, die wir denselben etwa irrthümlich zugeschrieben hätten, andere Factoren auftreten würden, welche an den einzelnen Gliedern Werthänderungen mit sich bringen, die sich gegenseitig aufheben.

Das kann aber nicht sein; denn jedenfalls müssten auch diese anderen Factoren nicht von x, sondern nur von n und r abhängen, und fände sich die damit behaftete Gleichung bei unveränderten Werthen von n und r durch alle der natürlichen Zahlenreihe entnommenen Werthe von x, also ebenso wie Gl. 1) selbst, identisch nach x befriedigt. Dass man alsdann, wenn beide Gleichungen nach Potenzen von x geordnet sind, durch Vergleichung der Coefficienten gleich hoher Potenzen in beiden, bei der höchsten beginnend und nach der Ordnung der abnehmenden Exponenten fortschreitend, nach und nach zum Nachweise für die Uebereinstimmung sämmtlicher neuen Factoren mit den alten gelangt, ist leicht einzusehen.

Die Schriften über Combinationslehre beschäftigen sich zwar bei Behandlung der sogenannten Versetzungen und Verbindungen mit beschränkten Wiederholungen auch mit dem Gegenstande unserer beiden Sätze, aber in einer andern Weise, als es hier geschieht. Es wird dort nämlich für jedes der gegebenen Elemente eine obere Grenze der Anzahl von Wiederholungen, mit welchen es in die Versetzung oder Verbindung eingehen kann, festgesetzt. Dass auch die Anzahl von Wiederholungen überhaupt in Betracht gezogen worden wäre, welche in einer Versetzung oder Verbindung von gegebener Classenzahl vorhanden sein können, gleichviel auf was für Elemente sie sich beziehen, ist uns nicht bekannt. Dagegen wird von den oben mit $\Delta' 0^n$, $\Delta^2 0^n$, ... bezeichneten Differenzen anderweitig Gebrauch gemacht. **Oettinger** giebt in seiner „Lehre von den Combinationen, Freiburg i. B., 1837" S. 63 flgg. mit etwas anderer Bezeichnung eine Formel für die Summe der als Producte behandelten Verbindungen zwischen den Gliedern x, x_1, x_2, ..., x_n einer arithmetischen Progression mit der Differenz Δx, zur q^{ten} Classe mit Wiederholungen:

$$SC'(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)^q = \frac{\Delta^n x^{q+n}}{n!\,(\Delta x)^n}.$$

Mit $x = 0$, $\Delta x = 1$ erhält man, da die Combinationen, in welche x eingeht, in obigem Sinne nicht in Betracht kommen, mit Anwendung einer naheliegenden Vereinfachung:

$$SC'(1, 2, 3, \ldots, n)^q = \frac{\Delta^n 0^{q+n}}{n!}$$

$$= \frac{1}{n!}\left\{n^{q+n} - \binom{n}{1}(n-1)^{q+n} + \binom{n}{2}(n-2)^{q+n} + \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)\binom{n}{n-2}^{q+n} 2 - (-1)^n \binom{n}{n-1}^{q+n} 1\right\}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left\{n^{q+n-1} - \binom{n-1}{1}(n-1)^{q+n-1} + \binom{n-1}{2}(n-2)^{q+n-1} \right.$$
$$\left. - (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-2} 2^{q+n-1} + (-1)^{n-1}\binom{n+1}{n-1}^{q+n-1} 1\right\}$$

$$= \frac{\Delta^{n-1} 1^{q+n-1}}{(n-1)!}.$$

Mit $q = 2$, $n = 5$ erhält man z. B. für die Reihe der sechsten Potenzen der natürlichen Zahlen mit 1 als Anfangsglied eine mit 3360 beginnende Reihe der vierten Differenzen, also:

$$SC'(1, 2, 3, 4, 5)^2 = \frac{3360}{4!} = 140.$$

Der obige Ausdruck in seiner ersten Gestalt giebt nun in Verbindung mit unserem Satze 2) die Folgerung:

Die Anzahl der vollzähligen Versetzungen zwischen n verschiedenen Elementen zur $(q+n)^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholungen ist gleich dem Product aus $n!$ und der Summe der als Producte behandelten Verbindungen zwischen den natürlichen Zahlen von 1 bis n zur q^{ten} Classe mit Wiederholungen.

Von fünf Elementen erhält man z. B. $5!\,140 = 5.3360 = 16800$ vollzählige Versetzungen zur siebenten Classe mit Wiederholungen.

Ein Beweis dieser Folgerung auf combinatorischem Wege — etwa derart, dass die einzelnen als Producte behandelten Verbindungen irgendwie zur Abzählung der fraglichen Versetzungen benützt würden — scheint nicht nahe zu liegen.

Dagegen liefert, nachdem unsere Sätze 2) und 3) bewiesen sind, Gl. 1) die Hilfsmittel, um auch zu den Summenwerthen $SC'(1, 2, 3, \ldots, n)^q$ zu gelangen. Deutet man nämlich durch Unterdrückung des Accents an C an, dass die Wiederholungen, welche vorher zugelassen waren, jetzt wegbleiben sollen, so giebt unsere Gl. 1) nach Entwickelung der Binomialcoefficienten und Ordnung nach Potenzen von x von der höchsten an:

$$\begin{aligned} x^n = \frac{\Delta^n 0^n}{n!} x^n &+ \left\{ -SC(1, 2, \ldots, n-1)^1 \cdot \frac{\Delta^n 0^n}{n!} + \frac{\Delta^{n-1} 0^n}{(n-1)!} \right\} x^{n-1} \\ &+ \left\{ + SC(1, 2, \ldots, n-1)^2 \cdot \frac{\Delta^n 0^n}{n!} \right. \\ &\qquad \left. - SC(1, 2, \ldots, n-2)^1 \cdot \frac{\Delta^{n-1} 0^n}{(n-1)!} + \frac{\Delta^{n-2} 0^n}{(n-2)!} \right\} x^{n-2} \\ &+ \cdots, \end{aligned}$$

also

$$\frac{\Delta^n 0^n}{n!} = 1,$$

$$\frac{\Delta^{n-1} 0^n}{(n-1)!} = SC(1, 2, \ldots, n-1)^1,$$

$$\frac{\Delta^{n-2} 0^n}{(n-2)!} = SC(1, 2, \ldots, n-2)^1 . SC(1, 2, \ldots, n-1)^1 - SC(1, 2, \ldots, n-1)^2.$$

Die erste Folgerung enthält nur Bekanntes, in der zweiten kann unmittelbar SC' statt SC gesetzt werden. Zu der dritten giebt eine einfache Nachrechnung $SC'(1, 2, \ldots, n-2)^2$ als Werth der rechten Seite.

Wie man sieht, giebt unsere Gleichung auch die Mittel, um Combinationssummen mit Wiederholungen aus solchen ohne Wiederholungen abzuleiten. Wir verfolgen aber diesen anderweitig schon mehrfach behandelten Gegenstand nicht weiter.

Gleichungen, welche wie unsere 1) ein Aggregat von Binomialcoefficienten darbieten, die entwickelt die Potenzen der Grundzahl x von der ersten bis zur n^{ten} liefern, giebt es mehrere. Die einfachsten Fälle einer solchen haben sich uns bei anderer Gelegenheit dargeboten und mögen im Folgenden entwickelt werden:

$$x^1 = \binom{x}{1},$$

$$x^2 = \binom{x}{1}\left(\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{2}\right) = \binom{x}{2} + \binom{x+1}{2},$$

$$x^3=\binom{x}{2}\left(\frac{x-2}{3}+\frac{2x+2}{3}\right)+\binom{x+1}{2}\left(\frac{2x-2}{3}+\frac{x+2}{3}\right)$$
$$=\binom{x}{3}+2\binom{x+1}{3}+2\binom{x+1}{3}+\binom{x+2}{3}=\binom{x}{3}+4\binom{x+1}{3}+\binom{x+2}{3},$$
$$x^4=\binom{x}{3}\left(\frac{x-3}{4}+3\cdot\frac{x+1}{4}\right)$$
$$+4\cdot\binom{x+1}{3}\left(2\cdot\frac{x-2}{4}+2\cdot\frac{x+2}{4}\right)$$
$$+\binom{x+2}{3}\left(3\cdot\frac{x-1}{4}+\frac{x+3}{4}\right)$$
$$=\binom{x}{4}+3\binom{x+1}{4}+8\binom{x+1}{4}+8\binom{x+2}{4}+3\binom{x+2}{4}+\binom{x+3}{4}$$
$$=\binom{x}{4}+11\binom{x+1}{4}+11\binom{x+2}{4}+\binom{x+3}{4}.$$

Um das diesen einzelnen Fällen zu Grunde liegende allgemeine Gesetz nachzuweisen, schreibt man mit Benützung der Zeichen $(n, 0)$, $(n, 1)$, ..., $(n, n-1)$ für die noch unbekannten Coefficienten die Gleichung an:

$$4)\quad x^n=(n,0)\binom{x}{n}+(n,1)\binom{x+1}{n}+\ldots+(n,n-1)\binom{x+n-1}{n},$$

welche sich sowohl durch die Vorgänge, als auch durch die Betrachtung rechtfertigt, dass nach Entwickelung der Ausdrücke für die Binomialcoefficienten die rechte Seite die Potenzen der Grundzahl x von der ersten bis zur n^{ten} einschliesslich enthält, zur Bestimmung der n Coefficienten also n lineare Gleichungen zu Gebote stehen.

Um diese zu entwickeln, geht man von Gl. 4) nach dem in den einzelnen Fällen angewendeten Verfahren über auf:

$$x^{n+1}=(n,0)\binom{x}{n}\left\{\frac{x-n}{n-1}+n\cdot\frac{x+1}{n+1}\right\}$$
$$+(n,1)\binom{x+1}{n}\left\{2\cdot\frac{x-(n-1)}{n+1}+(n-1)\frac{x+2}{n+1}\right\}$$
$$+(n,2)\binom{x+2}{n}\left\{3\cdot\frac{x-(n-2)}{n+1}+(n-2)\frac{x+3}{n+1}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(n,n-1)\binom{x+n-1}{n}\left\{n\cdot\frac{x+1}{n+1}+\frac{x+n}{n+1}\right\}$$
$$=(n,0)\binom{x}{n+1}+\{n(n,0)+2.(n,1)\}\binom{x+1}{n+1}$$
$$+\{(n-1)(n,1)+3.(n,2)\}\binom{x+2}{n+1}$$
$$+\ldots+(n,n-1)\binom{x+n}{n+1}.$$

Durch Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem nach Massgabe von 4) giltigen:

$$x^{n+1} = (n+1, 0)\binom{x}{n+1} + (n+1, 1)\binom{x+1}{n+1} + \dots + (n+1, n)\binom{x+n}{n+1}$$

erhält man:

$$5) \qquad \begin{cases} (n+1, 0) = (n, 0), \\ (n+1, 1) = n(n, 0) + 2(n, 1), \\ (n+1, 2) = (n-1)(n, 1) + 3(n, 2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ (n+1, n) = (n, n-1). \end{cases}$$

Die erste und die letzte dieser Gleichungen geben mit Rücksicht auf die Vorgänge:

$$\begin{aligned} (n+1, 0) &= (n, 0) = (n-1, 0) = \dots = (1, 0) = 1, \\ (n+1, n) &= (n, n-1) = (n-1, n-2) = \dots = (1, 0) = 1. \end{aligned}$$

Die zweite der Gleichungen 5) führt, auf immer kleinere Werthe von n angewendet, zur Bestimmung von $(n+1, 1)$, die dritte sodann ebenso auf $(n+1, 2)$ u. s. f. Wir bringen aber dieses Verfahren hier nicht zur Durchführung, weil wir nachher ein förderlicheres kennen lernen werden.

Nahe liegt der Gedanke, die Coefficienten in 4) dadurch zu bestimmen, dass wir diese Gleichung auf 1) zurückführen unter Anwendung des bekannten Satzes:

$$\binom{x+r}{n} = \binom{x}{n} + \binom{x}{n-1}\binom{r}{1} + \binom{x}{n-2}\binom{r}{2} + \dots + \binom{x}{1}\binom{r}{n-1} + \binom{r}{n}.$$

Drückt man vermittelst desselben die in 4) vorkommenden Binomialcoefficienten in den in 1) vorkommenden aus, so erhält man die Mittel, um die Coefficienten $(n, n-1)$, $(n, n-2)$, ..., $(n, 1)$, $(n, 0)$ der Ordnung nach, in welcher sie hier aufgeführt sind, zu bestimmen.

Wir bringen aber auch dieses Verfahren hier nicht zur Durchführung, sondern geben nur am Schlusse einen der Beachtung werthen Satz über die Binomialcoefficienten, den dasselbe gelegentlich erkennen lässt.

Das förderlichste Verfahren zur Bestimmung der Coefficienten in 4) ist folgendes:

Wir schreiben die Gleichungen an, welche ausdrücken, dass Gleichung 4) für die Werthe 1, 2, 3, ..., r von x, wo nur $r < n$ sein soll, gilt:

$$\begin{aligned} 1^n &= (n, n-1)\binom{n}{n}, \\ 2^n &= (n, n-1)\binom{n+1}{n} + (n, n-2)\binom{n}{n}, \\ 3^n &= (n, n-1)\binom{n+2}{n} + (n, n-2)\binom{n+1}{n} + (n, n-3)\binom{n}{n}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ r^n &= (n, n-1)\binom{r+n-1}{n} + (n, n-2)\binom{r+n-2}{n} + (n, n-3)\binom{r+n-3}{n} \\ &\qquad + \dots + (n, n-r)\binom{n}{n}. \end{aligned}$$

Werden diese Gleichungen addirt, nachdem sie der Reihe nach mit

$$(-1)^{r-1}\binom{n+1}{r-1},\quad (-1)^{r-2}\binom{n+1}{r-2},\quad (-1)^{r-3}\binom{n+1}{r-3},\ \ldots,\ -\binom{n+1}{1},\ +1$$

durchmultiplicirt worden, so finden sich sämmtliche darin vorkommenden Coefficienten $(n, n-1)$, $(n, n-2)$, ... mit Ausnahme des letzten $(n, n-r)$ eliminirt, dieser letzte aber bestimmt sich. Es tritt nämlich in der entstehenden Gleichung der Coefficient $(n, n-1)$ mit folgendem Factor behaftet auf:

$$6)\quad \binom{r+n-1}{1}-\binom{n+1}{1}\binom{r+n-2}{n}+\ldots+(-1)^{r-2}\binom{n+1}{r-2}\binom{n+1}{n}$$
$$+(-1)^{r-1}\binom{n+1}{r-1}\binom{n}{n}.$$

Dies ist aber nichts Anderes, als das Anfangsglied der Reihe der $(n+1)^{\text{ten}}$ Differenzen zu der Reihe der Werthe, welche der Ausdruck $\binom{z}{n}$ annimmt, wenn für z nach und nach die $n+2$ Glieder der arithmetischen Progression

$$7)\quad (r-2),\ (r-1),\ r,\ (r+1),\ \ldots,\ (r+n-2),\ (r+n-1)$$

gesetzt werden. Dass diese Werthe so lange verschwindende sind, bis man zu dem Gliede n der arithmetischen Progression gelangt, welches den am Schlusse von 6) vorkommenden Werth $\binom{n}{n}$ liefert, thut nichts zur Sache. Jedenfalls aber giebt $\binom{z}{n}$ entwickelt einen Ausdruck des n^{ten} Grades nach z, liefert also eine Reihe der n^{ten} Ordnung, wenn für z die Glieder einer arithmetischen Progression gesetzt werden; die $(n+1)^{\text{ten}}$ Differenzen derselben verschwinden somit, es verschwindet also auch der Factor, mit welchem in der entstehenden Gleichung der Coefficient $(n, n-1)$ auftritt. Nicht anders aber zeigt man, dass auch alle anderen Coefficienten $(n, n-2)$, $(n, n-3)$, ... mit Ausnahme des letzten $(n, n-r)$ mit verschwindenden Factoren behaftet auftreten, man hat nur anstatt 7) andere arithmetische Progressionen anzuwenden. Für $(n, n-2)$ ist es die folgende:

$$(r-3),\ (r-2),\ (r-1),\ r,\ (r+1),\ \ldots,\ (r+n-3),\ (r+n-2).$$

Für den letzten verschwindenden $(n, n-r-1)$ ist es:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ (n+1).$$

Für den mit dem Factor $+1$ auftretenden Coefficienten $(n, n-r)$ aber erhält man die Bestimmung:

$$8)\quad (n, n-r)=r^n-\binom{n+1}{1}(r-1)^n+\binom{n+1}{2}(r-2)^n+\ldots$$
$$+(-1)^{r-2}\binom{n+1}{r-2}2^n+(-1)^{r-1}\binom{n+1}{r-1}1^n.$$

Beispielsweise:

$$(n, n-1)=1^n,$$
$$(n, n-2)=2^n-\binom{n+1}{1}1^n,$$
$$(n, n-3)=3^n-\binom{n+1}{1}2^n+\binom{n+1}{2}1^n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Bereits unsere Vorgänge liessen bemerken, dass jede zwei gleichweit vom Anfang und vom Ende der rechten Seite in Gl. 4) abstehenden Glieder mit gleichen Coefficienten behaftet sind:

$$(n, 0) = (n, n-1), \quad (n, 1) = (n, n-2), \quad \ldots, \quad (n, r) = (n, n-r-1).$$

Die Uebereinstimmung des in 8) enthaltenen Coefficientengesetzes mit dieser Wahrnehmung zeigt sich so:

Mit $(r+1)$ statt r giebt dasselbe:

$$(n, n-r-1) = (r+1)^n - \binom{n+1}{1} r^n + \binom{n+1}{2} (r-1)^n + \ldots + (-1)^r \binom{n+1}{r} 1^n.$$

Mit $n-r$ statt r aber:

$$(n, r) = (n-r)^n - \binom{n+1}{1} (n-r-1)^n + \binom{n+1}{2} (n-r-2)^n - \ldots + (-1)^{n-r-1} \binom{n+1}{n-r-1} 1^n,$$

wofür man schreiben kann:

$$(n, r) = (-1)^n (-n+r)^n - (-1)^n \binom{n+1}{1} - (n+r+1)^n + \ldots + (-1)^{r+1} \binom{n+1}{r+2} (-1)^n + (-1)^r \binom{n+1}{r+1} 0^n.$$

Somit:

$$\begin{aligned} &(n, n-r-1) - (n, r) \\ &= (r+1)^n - \binom{n+1}{1} r^n + \ldots + (-1)^r \binom{n+1}{r} 1^n - (-1)^r \binom{n+1}{r+1} 0^n \\ &\quad + (-1)^r \binom{n+1}{r+2} (-1)^n + \ldots + (-1)^n \binom{n+1}{n} (-n+r+1)^n \\ &\quad + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} (-n+r)^n. \end{aligned}$$

Dies ist aber nichts Anderes, als das Anfangsglied der Reihe der $(n+1)^{\text{ten}}$ Differenzen zu der Reihe:

$$(-n+r)^n, \quad (-n+r+1)^n, \quad \ldots, \quad (-1)^n, \quad 0^n, \quad (+1)^n, \quad \ldots, \quad r^n, \quad (r+1)^n,$$

welche von der n^{ten} Ordnung ist, also verschwindende $(n+1)^{\text{te}}$ Differenzen liefert. Somit:

$$(n, n-r-1) - (n, r) = 0, \quad (n, n-r-1) = (n, r),$$

und wir können jetzt unsern Erfund folgendermassen zusammenfassen:

$$4) \quad x^n = (n, 0) \binom{x}{n} + (n, 1) \binom{x+1}{n} + \ldots + (n, n-1) \binom{x+n-1}{n};$$

$$4\text{a}) \quad \begin{cases} (n, 0) = (n, n-1) = 1^n, \\ (n, 1) = (n, n-2) = 2^n - \binom{n+1}{1} 1^n, \\ (n, 2) = (n, n-3) = 3^n - \binom{n+1}{1} 2^n + \binom{n+1}{2} 1^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (n, r) = (n, n-r-1) = (r+1)^n - \binom{n+1}{1} r^n + \ldots + (-1)^r \binom{n+1}{r} 1^n. \end{cases}$$

Die Bedeutung dieser Gleichung 4) für die Combinationslehre hat sich bei Gelegenheit der Behandlung folgender Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erkennen gegeben:

Von n Personen, welche nach der Aufeinanderfolge ihrer Geburtstage (im gewöhnlichen Sinne von Jahrestag der Geburt) innerhalb eines Kalenderjahres mit

$$(1),\ (2),\ (3),\ \ldots,\ (n)$$

bezeichnet werden, weiss man nichts, als dass sie innerhalb x aufeinander folgender Kalenderjahre geboren sind, und man hat insbesondere keinerlei Ursache, die Geburt irgend einer von diesen Personen eher in einem, als in einem andern der x Jahre anzunehmen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass irgend eine Versetzung (Permutation) der n Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ die Ordnung angiebt, in welcher die n Personen dem abnehmenden Lebensalter nach aufeinander folgen?

Vor Allem bemerken wir: wenn in der fraglichen Versetzung unmittelbar auf eine Zahl u eine grössere Zahl v folgt, oder sagen wir künftig: wenn von u auf v eine Folge stattfindet, so kann die Person (v) in demselben Jahre wie (u) oder auch in einem nachfolgenden Jahre geboren sein; wenn aber unmittelbar auf u eine kleinere Zahl v folgt, oder wenn von u auf v eine Umkehrung stattfindet, so kann (v) nur in einem späteren Jahre als (u) geboren sein. Wenn daher die fragliche Versetzung die ihr zugeschriebene Bedeutung haben soll, so kann sie, falls $n > x$, höchstens $x-1$ Umkehrungen zwischen je zwei aufeinander folgenden Gliedern darbieten, sie muss also die Wahrscheinlichkeit Null erhalten, wenn sie mehr als $x-1$ Umkehrungen darbietet.

Nehmen wir nun einige der einfachsten Fälle vor.

Erster Fall: $n = 2$. Versetzung 1.2. Es kann (1) in jedem der x Jahre und (2) in demselben oder in jedem der nachfolgenden unter den x Jahren geboren sein, also Anzahl der für die Versetzung 1.2 günstigen Fälle:

$$x + (x-1) + (x-2) + \ldots + 2 + 1 = \binom{x+1}{2}.$$

Versetzung 2.1. Es kann (1) in jedem der x Jahre mit Ausnahme des letzten, (2) aber nur in einem nachfolgenden Jahre geboren sein, also Anzahl der günstigen Fälle:

$$(x-1) + (x-2) + \ldots + 2 + 1 = \binom{x}{2}.$$

Die Anzahl aller möglichen Fälle der Vertheilung der Geburten von (1) und (2) auf die x Jahre ist:

$$x^2 = \binom{x}{2} + \binom{x+1}{2}.$$

Die Wahrscheinlichkeiten für die Versetzungen 1.2 und 2.1 werden also:

$$\frac{1}{x^2}\cdot\binom{x+1}{2} \text{ und } \frac{1}{x^2}\cdot\binom{x}{2}.$$

Die Ergebnisse der Aufzählung der für die zwei Versetzungen günstigen Fälle können wir auf folgende Form bringen:

$$\text{für } 1.2\colon\ \sum_1^x{}_v \sum_v^x{}_w w^0 = \sum_1^x{}_v \binom{x-v+1}{1} = \binom{x}{1} + \binom{x-1}{1} + \dots + \binom{1}{1} = \binom{x+1}{2},$$

$$\text{für } 2.1\colon\ \sum_1^{x-1}{}_v \sum_{v+1}^x{}_w w^0 = \sum_1^{x-1}{}_v \binom{x-v}{1} = \binom{x-1}{1} + \binom{x-2}{1} + \dots + \binom{1}{1} = \binom{x}{1}.$$

Man wird bemerken, dass kein Fehler entsteht, wenn man x statt $x-1$ als obere Grenze auch beim ersten Summenzeichen einführt; man erhält nur nach $\binom{1}{1}$ noch den von selbst verschwindenden Summanden $\binom{0}{1}$, also auch Anzahl der für 2.1 günstigen Fälle:

$$\sum_1^x{}_v \sum_{v+1}^x{}_w w^0.$$

Zweiter Fall: $n = 3$.

Die Anzahl der für die Versetzung 1.2.3 günstigen Fälle können wir angeben durch:

$$\sum_1^x{}_u \sum_u^x{}_v \sum_v^x{}_w w^0 = \sum_1^x{}_u \sum_u^x{}_v \binom{x-v+1}{1} = \sum_1^x{}_u \binom{x-u+2}{2} = \binom{x+2}{3}.$$

Anzahl der für die Versetzung 1.3.2 günstigen Fälle:

$$\sum_1^x{}_u \sum_u^x{}_v \sum_{v+1}^x{}_w w^0 = \sum_1^x{}_u \sum_u^x{}_v \binom{x-v}{1} = \sum_1^x{}_u \binom{x-u+1}{2} = \binom{x+1}{3}.$$

Versetzung 2.1.3:

$$\sum_1^x{}_u \sum_{u+1}^x{}_v \sum_v^x{}_w w^0 = \sum_1^x{}_u \sum_{u+1}^x{}_v \binom{x-v+1}{1} = \sum_1^x{}_u \binom{x-u+1}{2} = \binom{x+1}{3}.$$

Versetzung 2.3.1:

$$\sum_1^x{}_u \sum_u^x{}_v \sum_{v+1}^x{}_w w^0 = \binom{x+1}{3} \quad \text{wie bei } 1.3.2.$$

Versetzung 3.1.2:

$$\sum_1^x{}_u \sum_{u+1}^x{}_v \sum_v^x{}_w w^0 = \binom{x+1}{3} \quad \text{wie bei } 2.1.3.$$

Versetzung 3.2.1:

$$\sum_1^x{}_u \sum_{u+1}^x{}_v \sum_{v+1}^x{}_w w^0 = \sum_1^x{}_u \sum_{u+1}^x{}_v \binom{x-v}{1} = \sum_1^x{}_u \binom{x-u}{2} = \binom{x}{3}.$$

Die Anzahl sämmtlicher möglichen Fälle ist:

$$x^3 = \binom{x+2}{3} + 4\binom{x+1}{3} + \binom{x}{3},$$

also werden die Wahrscheinlichkeiten

für 1.2.3: $\frac{1}{x^3}\cdot\binom{x+2}{3}$,

für 1.3.2, 2.1.3, 2.3.1 und 3.1.2: $\frac{1}{x^3}\cdot\binom{x+1}{3}$,

für 3.2.1: $\frac{1}{x^3}\cdot\binom{x}{3}$,

Nach diesen Vorgängen werden wir uns für berechtigt halten dürfen, die Behauptung aufzustellen:

Die Anzahl der (im Sinne der gestellten Aufgabe) günstigen Fälle für eine solche Versetzung der Zahlen 1, 2, ..., n, welche r Folgen und also $n-1-r$ Umkehrungen darbietet, ist $\binom{x+r}{n}$, die Wahrscheinlichkeit der Versetzung also $\frac{1}{x^n}\cdot\binom{x+r}{n}$.

Dass diese Wahrscheinlichkeit Null wird, wenn die Anzahl der Umkehrungen den Betrag $x-1$ übersteigt oder die Anzahl der Folgen den Betrag $(n-1)-(r-1)=n-x$ nicht erreicht, also $x+r<n$ wird, steht mit der oben gemachten Bemerkung im Einklang.

Wenn aber die Anzahl x^n sämmtlicher möglichen Fälle durch Gl. 4) angegeben wird und die Binomialcoefficienten $\binom{x}{n}$, $\binom{x+1}{n}$, ... $\binom{x+n-1}{n}$ die ihnen soeben zugeschriebenen Bedeutungen haben, so muss (n, r) die Anzahl der mit r Folgen behafteten Versetzungen der Zahlen 1, 2, 3, ..., n angeben.

Diese Folgerung ist von der Zahl x und von jederlei Beziehung zu der gestellten Aufgabe gänzlich unabhängig. Es gilt also allgemein der Satz:

Zwischen n Elementen sind

$$(n, r)=(r+1)^n-\binom{n+1}{1}r^n+\binom{n+1}{2}(r-1)^n-\ldots+(-1)^r\binom{n+1}{r}1^n$$

solche Versetzungen (ohne Wiederholungen zur n^{ten} Classe), welche mit r Folgen (zwischen je zwei benachbarten Gliedern) behaftet sind, möglich.

Der Umstand, dass hier eine über das Gebiet der obigen Aufgabe hinausgreifende Folgerung zum Vorschein gekommen ist, macht die Aufstellung eines selbstständigen Beweises dafür wünschenswerth.

Wir führen denselben der erreichbaren Durchsichtigkeit halber vorerst für einen besondern Werth $n=5$, aber in einer Weise, welche die Anwendbarkeit des Beweisverfahrens auf jeden beliebigen Werth von n unzweideutig erkennen lässt, durch.

Um zwischen fünf Elementen a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 alle Versetzungen (kurzweg, oder Versetzungen zur fünften Classe ohne Wiederholungen) zu bilden, denken wir uns alle Versetzungen mit Wiederholungen zur fünften Classe angeschrieben, welche sich zwischen fünf anderen Elementen 1, 2, 3, 4, 5 bilden lassen. Setzt man irgend eine derselben über die fünf ursprünglichen Elemente a, etwa

$$\begin{matrix} 5 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5, \end{matrix}$$

und liest die Elemente a in der Ordnung ab, nach welcher die darüber stehenden Zahlen in der natürlichen Reihe aufeinander folgen, indem man im Falle der Gleichheit mehrerer solcher Zahlen (2 und 2) die Ordnung der Stellenzeiger an den a einhält $(a_3 a_4)$, so bekommt man im vorliegenden Falle die Versetzung:

$$a_3\ a_4\ a_5\ a_2\ a_1.$$

Diese ergiebt sich aber nach dem vorgeschriebenen Verfahren nicht blos aus der Versetzung 5.4.2.2.3 der neuen Elemente, sondern aus jeder der 21 folgenden:

3.2.1.1.1	4.3.1.1.2	4.3.1.2.2	4.3.2.2.2
4.2.1.1.1	5.3.1.1.2	5.3.1.2.2	5.3.2.2.2
5.2.1.1.1	5.4.1.1.2	5.4.1.2.2	5.4.2.2.2
4.3.1.1.1	5.4.1.1.3	5.4.1.2.3	5.4 2.2.3
5.3.1.1.1		5.4.1.3.3	5.4.2.3.3
5.4.1.1.1			5.4.3.3.3.

In all' diesen Versetzungen findet — den Folgen $a_3 a_4$ und $a_4 a_5$ entsprechend — von dem dritten auf das vierte und von dem vierten auf das fünfte Element Gleichheit oder Zunahme, von dem fünften auf das zweite und von dem zweiten auf das erste Element, den Umkehrungen $a_5 a_2$ und $a_2 a_1$ entsprechend, jedenfalls Zunahme statt. Mit der oben angewendeten Bezeichnung erhält man daher die Anzahl der Versetzungen in obiger Gruppe, gezählt durch:

$$\sum_1^n {}_y \sum_y^n {}_z \sum_z^n {}_u \sum_{u+1}^n {}_v \sum_{v+1}^n {}_w\, w^0,$$

und es wird

$$\sum_{v+1}^n {}_w\, w^0 = \binom{n-v}{1}, \quad \sum_{u+1}^n {}_v \binom{n-v}{1} = \binom{n-u}{2},$$

$$\sum_z^n {}_u \binom{n-u}{2} = \binom{n-z+1}{3}, \quad \sum_y^n {}_z \binom{n-z+1}{3} = \binom{n-y+2}{4},$$

$$\sum_1^n {}_y \binom{n-y+2}{4} = \binom{n+2}{5};$$

$n=5$ giebt:

$$\binom{n+2}{5} = \binom{7}{5} = 21.$$

Ebenso ergiebt sich die Versetzung $a_4\, a_3\, a_5\, a_2\, a_1$ aus jeder der sechs folgenden:

4.3.2.1.2, 5.3.2.1.2, 5.4.2.1.2, 5.4.2.1.3, 5.4.3.1.3, 5.4.3.2.3.

Hier ist von der vierten auf die dritte, von der fünften auf die zweite und von der zweiten auf die erste Zahl, den Umkehrungen $a_4 a_3$, $a_5 a_2$ und $a_2 a_1$

entsprechend, jedenfalls Zunahme, von der zweiten auf die dritte aber, der Folge $a_3 a_5$ entsprechend, Gleichheit oder Zunahme vorhanden.

Die Anzahl der Versetzungen in der Gruppe wird also gezählt durch

$$\sum_1^n y \sum_{y+1}^n z \sum_z^n u \sum_{u+1}^n v \sum_{v+1}^n w\, w^0 = \binom{n+1}{5} = 6 \text{ für } n = 5.$$

Hiermit mag die Behauptung als nachgewiesen gelten, dass jede Versetzung der ursprünglichen fünf Elemente a, welche an Folgen und Umkehrungen folgende Anzahlen darbietet:

	0	und	4
oder	1	„	3
„	2	„	2
„	3	„	1
„	4	„	0

aus einer Gruppe von

$$\binom{5}{5}, \text{ oder } \binom{6}{5}, \text{ oder } \binom{7}{5}, \text{ oder } \binom{8}{5}, \text{ oder } \binom{9}{5}$$

Versetzungen mit Wiederholungen zur fünften Classe zwischen den fünf neuen Elementen $1.2.3.4.5$ entspringt.

Und allgemein: Die n^n Versetzungen mit Wiederholungen zur n^{ten} Classe zwischen n Elementen $1.2.3\ldots n$ lassen sich in eine Reihe von Gruppen verschiedener Arten zerlegen, so dass

jede	Gruppe	1^{ter}	Art	$\binom{n}{n}$	Versetzungen,
„	„	2^{ter}	„	$\binom{n+1}{n}$	„
„	„	3^{ter}	„	$\binom{n+2}{n}$	„
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
jede	Gruppe	n^{ter}	Art	$\binom{n+n-1}{n}$	Versetzungen

enthält, und eine Versetzung zwischen n Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ohne Wiederholungen zur n^{ten} Classe nach dem oben angewendeten Verfahren aus einer Gruppe erster, oder zweiter, oder dritter, ... oder n^{ter} Art entspringt, wenn sie an Folgen und Umkehrungen folgende Anzahlen darbietet:

	0	und	$n-1$
oder	1	„	$n-2$
„	2	„	$n-3$
. . .	. . .	. . .	. . .
oder	$n-1$	und	0.

Mit $x = n$ giebt aber unsere Gl. 4):

$$n^n = (n, 0)\binom{n}{n} + (n, 1)\binom{n+1}{n} + \ldots + (n, n-1)\binom{n+n-1}{n}.$$

Es ist also

$$(n,r)=(r+1)^n-\binom{n+1}{1}r^n+\binom{n+1}{2}(r-1)^n-\ldots+(-1)^r\binom{n+1}{r}1^n$$

die Anzahl der mit r Folgen und $n-1-r$ Umkehrungen (zwischen je zwei benachbarten Gliedern) behafteten Versetzungen (zur n^{ten} Classe ohne Wiederholungen) zwischen n Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Wir wollen diesen Erfund noch der Probe unterwerfen, dass die Gesammtzahl aller Versetzungen der Elemente a den bekannten Betrag $n!$ haben muss.

Setzt man

$$S_0=S_1=0,\quad S_2=1^n,\quad S_3=1^n+2^n,\quad \ldots,\quad S_{n+1}=1^n+2^n+\ldots+n^n,$$

so findet sich:

$$\begin{aligned}
&(n,0)+(n,1)+(n,2)+\ldots+(n,n-1)\\
&=S_{n+1}-\binom{n+1}{1}S_n+\binom{n+1}{2}S_{n-1}-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n+1}{n-1}S_2\\
&\qquad\qquad+(-1)^n\binom{n+1}{n}S_1+(-1)^{n+1}\binom{n+1}{n+1}S_0\\
&=\Delta^{n+1}S_0.
\end{aligned}$$

Nun wird aber

$$\Delta S_0=0,\quad \Delta S_1=1^n,\quad \Delta S_2=2^n,\quad \ldots,\quad \Delta S_n=n^n,$$

es ist somit $\Delta^{n+1}S_0$ das Anfangsglied der Reihe der n^{ten} Differenzen zu der Reihe $0^n, 1^n, 2^n, \ldots$, welche bekanntlich constant gleich $n!$ sind.

Es bleibt uns noch übrig, den oben in Aussicht gestellten, gelegentlich gefundenen Satz über Binomialcoefficienten nachzutragen. Derselbe bezieht sich auf eine Umwandlung des mit einem abgekürzten Zeichen eingeführten Ausdrucks:

$$\begin{aligned}
(m,n,k)=\binom{m}{k}\cdot\binom{n}{0}+\binom{m-1}{k-1}\binom{n+1}{1}+\binom{m-2}{k-2}\binom{n+2}{2}+\ldots\\
+\binom{m-k}{0}\binom{n+k}{k}.
\end{aligned}$$

Bringt man die Glieder desselben auf folgende Formen:

$$\binom{m}{k}\binom{n}{0}=\frac{m}{k}\cdot\binom{m-1}{k-1}\binom{n}{0},$$

$$\binom{m-1}{k-1}\cdot\frac{n+1}{1}\cdot\binom{n}{0}=\frac{m-1}{k-1}\cdot\binom{m-2}{k-2}\binom{n+1}{1},$$

$$\binom{m-2}{k-2}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\binom{n+1}{1}=\frac{m-2}{k-2}\cdot\binom{m-3}{k-3}\binom{n+2}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\binom{m-k+1}{1}\cdot\frac{n+k-1}{k-1}\cdot\binom{n+k-2}{k-2}=\frac{m-k+1}{1}\cdot\binom{m-k}{0}\binom{n+k-1}{k-1},$$

$$\binom{m-k}{0}\cdot\frac{n+k}{k}\cdot\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{m-k}{0}\binom{n+k}{k};$$

Multiplicirt man ferner alle Glieder mit dem Factor 1 durch, nachdem derselbe für die aufeinander folgenden Glieder folgendermassen in zwei Summanden zerlegt worden ist:

$$0+1,\quad \frac{1}{k}+\frac{k-1}{k},\quad \frac{2}{k}+\frac{k-2}{k},\quad \ldots,\quad \frac{k-1}{k}+\frac{1}{k},\quad 1+0,$$

und wendet für die erste Form des Gliedes den ersten, für die zweite den zweiten Summanden an, so erhält man:

$$\begin{aligned}
(m,n,k) &= \frac{m}{k}\cdot\binom{m-1}{k-1}\binom{n}{0} \\
&+\binom{m-1}{k-1}\cdot\frac{n+1}{k}\cdot\binom{n}{0}+\frac{m-1}{k}\cdot\binom{m-2}{k-2}\binom{n+1}{1} \\
&+\binom{m-2}{k-2}\cdot\frac{n+2}{k}\cdot\binom{n+1}{1}+\frac{m-2}{k}\cdot\binom{m-3}{k-3}\binom{n+2}{2} \\
&+\cdot\;\cdot \\
&+\binom{m-k+1}{1}\cdot\frac{n+k-1}{k}\cdot\binom{n+k-2}{k-2}+\frac{m-k+1}{k}\cdot\binom{m-k}{0}\binom{m+k-1}{k-1} \\
&+\binom{m-k}{0}\cdot\frac{n+k}{k}\cdot\binom{n+k-1}{k-1} \\
&=\left\{\binom{m-1}{k-1}\binom{n}{0}+\binom{m-2}{k-2}\binom{n+1}{1}+\ldots+\binom{m-k}{0}\binom{n+k}{k}\right\}\cdot\frac{m+n+1}{k} \\
&=(m-1,\,n,\,k-1)\cdot\frac{m+n-1}{k}.
\end{aligned}$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Beziehung erhält man nach und nach:

$$(m,n,k)=(m-k+1,\,n,\,1)\cdot\frac{m+n-k+3}{2}\cdot\frac{m+n-k+4}{3}\cdots\frac{m+n-1}{k},$$

aber

$$(m-k+1,\,n,\,1)=\binom{m-k+1}{1}\binom{n}{0}+\binom{m-k}{0}\binom{n+1}{1}=\frac{m+n-k+2}{1},$$

somit

$$\begin{aligned}
(m,n,k)&=\binom{m}{k}\binom{n}{0}+\binom{m-1}{k-1}\binom{n+1}{1}+\binom{m-2}{k-2}\binom{n+2}{2}+\ldots \\
&+\binom{m-k}{0}\binom{n+k}{k}=\binom{m+n+1}{k}.
\end{aligned}$$

Stuttgart, September 1886.

XIV.

Zur mathematischen Statistik.

Schlusswort in dem Streite Dr. H. Zimmermann contra W. Küttner.

Von

W. Küttner

in Burgk bei Dresden.

Im XXXII. Bande, S. 62 flg. dieser Zeitschrift hat Herr Dr. Zimmermann eine Entgegnung auf meine Ausführungen im XXXI. Bande, S. 246 flg. derselben Zeitschrift der Oeffentlichkeit übergeben, aus der ich entnehme, dass derselbe einen Theil meiner Ausführungen leider nicht verstanden hat. Ich würde Herrn Dr. Zimmermann brieflich über seinen Irrthum aufgeklärt haben, hätte derselbe nicht meine Beweisführung angegriffen und mir ohne alle Berechtigung den Vorwurf gemacht, in den früheren (Karup's?) Fehler verfallen zu sein. Das erfordert eine öffentliche Widerlegung, und ich bin der geehrten Redaction ganz besonders dankbar, dass sie mir hierzu in einem Schlussworte den erforderlichen Raum gestattet.

Da ich möglichst kurz sein will, so erkläre ich zunächst, dass in meinem Aufsatze die Wahrscheinlichkeiten $x_1 \varDelta x$, $x_2 \varDelta x$, ... als gegeben zu betrachten sind und die Untersuchung sich nur darauf erstreckt, wie gross die Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereigniss $1 - \varDelta y$ oder $\varDelta y_i$ ist, wenn diese Wahrscheinlichkeiten, nämlich $x_1 \varDelta x$, $x_2 \varDelta x$, ..., *a)* vollständig unabhängigen Ereignissen, *b)* theilweise abhängigen Ereignissen und *c)* vollständig abhängigen Ereignissen zukommen. Darum konnte es sich a. a. O. doch nur handeln, und ich hätte es infolge dessen für unmöglich gehalten, dass Jemand meinen Ausführungen eine andere Auslegung würde geben können. Mit Rücksicht auf Herrn Dr. Zimmermann habe ich mich hierin allerdings geirrt und ich bedaure, an Stelle des Satzes: „wenn die Ereignisse alle unabhängig von einander wären“ nicht lieber die Worte: „wenn $x_1 \varDelta x$, $x_2 \varDelta x$, ... die Wahrscheinlichkeiten unabhängiger Ereignisse wären“, und an Stelle des Satzes: „wo alle zusammengesetzten Ereignisse unmöglich sind“ nicht besser die Worte: „wo $x_1 \varDelta x$, $x_2 \varDelta x$, ... die Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse sind, die sich alle gegenseitig ausschliessen“ gebraucht zu haben.

Fasst Herr Dr. Zimmermann meine Entwickelungen so auf, wie sie nach dem Obigen zu verstehen sind und auch nur verstanden werden konnten, so wird er zugeben müssen, dass seine Einwendungen vollständig hin fällig werden. Ich finde überhaupt, dass Herr Dr. Zimmermann sich ganz in dem Ideengange des Herrn Prof. Dienger bewegt, den er bei jeder passenden Gelegenheit als Autorität ins Feld führt. Sind denn Herrn Dr. Zimmermann die schwachen Stellen in der Arbeit des Herrn Prof. Dienger in „Masius' Rundschau der Versicherungen", Jahrg. 1872 S. 505 flg., die Karup später schonungslos aufgedeckt hat, vollständig unbekannt geblieben?

Wenig Vortheil für Herrn Dr. Zimmermann verspreche ich mir auch davon, dass er die Fachgenossen auf den Streit hinweist, der in „Masius' Rundschau der Versicherungen", Jahrg. 1876, zwischen Prof. Dienger und Joh. Karup — nicht zwischen Prof. Dienger und mir, wie man nach Herrn Dr. Zimmermann's Ausführungen glauben könnte — geführt worden ist. Die Sprache in diesem Streite ist überdies eine so leidenschaftliche und so wenig frei von persönlichen Invectiven, dass man mit Rücksicht auf das Ansehen unserer mathematischen Literatur ohne Noth nicht darauf zurückkommen sollte.

Das Vorgehen des Herrn Dr. Zimmermann hat nach meiner Auffassung sehr viel Aehnlichkeit mit dem Widerstande, den im Anfang des 18. Jahrhunderts Michel Rolle der Infinitesimalrechnung entgegensetzte. Glaubt denn Herr Dr. Zimmermann, dass es etwas Anderes ist, sich zu überzeugen, dass die Elemente einer krummen Linie gerade sind, als einzusehen, dass für ein unendlich kleines Zeitintervall die in Rede stehenden abhängigen Ereignisse unabhängig von einander werden? Nach seiner Ansicht scheint dies der Fall zu sein, denn er meint, indem er meine Argumentationen beiseite lässt, man müsse durch einfache Betrachtungen über die Richtigkeit oder Unrichtigkeit eines solchen Satzes entscheiden können. Mit der letzteren Aeusserung befindet sich Herr Dr. Zimmermann meiner Auffassung nach überdies im directen Widerspruch mit seiner früheren Darlegung, wo er sagt: „Was vernachlässigt werden darf, zeigt sich, wenn man die Gleichung in endlichen Grössen aufstellt und dann zur Grenze übergeht."

Ich würde der ganzen Angelegenheit keine so hohe Bedeutung beilegen, wäre nicht mein Satz für die Entwickelung der mathematischen Statistik von grosser Wichtigkeit. So lange man sich mit einfachen Problemen, wie es die gegenwärtige Art der Invaliditätsversicherung ist, beschäftigt, kann man denselben leicht entbehren. Aber schon dann, wenn die Reactivirungswahrscheinlichkeit zur Sterbens- und Invaliditätswahrscheinlichkeit hinzutritt, complicirt sich die Aufgabe dergestalt, dass nicht mehr die ganze einjährige Altersstrecke, sondern nur unendlich kleine Theile derselben in Betracht gezogen werden können. Zwingender wird dies noch bei bestimmten Arten der Wittwen- und Waisenversicherung.

Aus diesem Grunde will ich hier noch einige Entwickelungen folgen lassen, die vielleicht auch in den Augen des Herrn Dr. Zimmermann geeignet sind, meinen Satz zu stützen. Ich will zunächst versuchen, ganz allgemein zu beweisen, dass in einem unendlich kleinen Zeitintervall das abhängige Ereigniss unabhängig wird.

Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der n Ereignisse A_1, A_2, ..., A_n, die sämmtlich unabhängig von einander im Laufe der Zeit eintreten können, sollen innerhalb der Zeit von 0 bis Δx der Reihe nach $F_1(\Delta x)$, $F_2(\Delta x)$, ... sein. Weiter setzen wir fest, dass die Beobachtung von A_i innerhalb 0 und Δx nur dann möglich sein soll, wenn kein anderes der übrigen $n-1$ Ereignisse mit eingetreten ist. In diesem Falle ist die Beobachtung von A_i ein total abhängiges Ereigniss, dessen Wahrscheinlichkeit wir mit $\Phi(\Delta x)$ bezeichnen wollen. Zur Berechnung von $\Phi(\Delta x)$ haben wir aber

$$1)\quad \Phi(\Delta x) = F_i(\Delta x)\,[1-F_1(\Delta x)]\,[1-F_2(\Delta x)]\ldots[1-F_{i-1}(\Delta x)]\,[1-F_{i+1}(\Delta x)]\ldots[1-F_n(\Delta x)].$$

Da $\Phi(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... stetige Functionen sind, so können wir solche nach Mac-Laurin's Satze entwickeln und, wenn wir beachten, dass $\Phi(0) = F_1(0) = F_2(0) = \ldots = 0$, auch in aller Strenge setzen

$$2)\quad \Phi(\Delta x) = \varphi(\Delta x)\,\Delta x,\quad F_1(\Delta x) = f_1(\Delta x)\,\Delta x,\quad F_2(\Delta x) = f_2(\Delta x)\,\Delta x,\ \ldots$$

Der Fall, wo für $x=0$ die Derivirten der Function $\Phi(x)$ oder $F_1(x)$ oder $F_2(x)$, ... unendlich werden, unterliegt besonderer Betrachtung. Für die mathematische Statistik, wo $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... immer unbekannt sind und passende Substitutionen hierfür gesucht werden müssen, verlieren durch diese Ausnahme die Resultate nichts an ihrer allgemeinen Geltung.

Führen wir die Ausdrücke unter 2) in 1) ein, so folgt nach Ausführung der angedeuteten Multiplication

$$3)\quad \varphi(\Delta x)\,\Delta x = f_i(\Delta x)\,\Delta x - N_2\,\Delta x^2 + N_3\,\Delta x^3 - + \ldots \pm N_n\,\Delta x^n$$

und, wenn wir der Kürze halber

$$N_2\,\Delta x^2 - N_3\,\Delta x^3 + - \ldots \mp N_n\,\Delta x^n = Q\,\Delta x^2$$

setzen, wo Q eine positive Grösse ist, auch

$$4)\qquad \varphi(\Delta x)\,\Delta x = f_i(\Delta x)\,\Delta x - Q\,\Delta x^2.$$

Aus letzterer Gleichung entnehmen wir, dass, so lange Δx endlich ist, auch

$$\varphi(\Delta x)\,\Delta x < f_i(\Delta x)\,\Delta x,$$

dass aber, wenn zur Grenze übergegangen wird, nachdem Gleichung 4) vorher durch Δx dividirt worden ist,

$$\lim \varphi(\Delta x) = \varphi(dx) = f_i(dx)$$

oder in aller Strenge

$$5)\qquad \varphi(dx)\,dx = f_i(dx)\,dx,\quad \Phi(dx) = F_i(dx)$$

folgt.

Damit ist aber erwiesen, dass die Beobachtungswahrscheinlichkeit $\Phi(x)$, der die denkbar grösste Abhängigkeit beigelegt worden ist, für das unendlich kleine Zeitintervall von 0 bis dx genau denselben Werth annimmt, den sie besitzt, wenn die störenden Ereignisse gar nicht vorhanden sind. Die von Herrn Dr. Zimmermann aufgeworfene Gleichung

$$\xi_i\, dx = x_i\, dx,$$

von deren Erfüllung seiner Ansicht nach die Richtigkeit meines Satzes abhängt, ist somit selbst für den ungünstigsten Fall verificirt.*

Ist die Beobachtung des Ereignisses A_i nur theilweise von dem Eintreffen der übrigen $n-1$ Ereignisse abhängig und ihre Wahrscheinlichkeit $\Psi(x)$, so hat man für das endliche Zeitintervall von 0 bis $\varDelta x$

$$\Phi(\varDelta x) < \Psi(\varDelta x) < F_i(\varDelta x),$$

für das unendlich kleine Zeitintervall von 0 bis dx nach 5) aber

$$\Phi(dx) = \Psi(dx) = F_i(dx).$$

Meinem Satze liegt die Eigenschaft zu Grunde, welche durch die Gleichung

$$\Psi(dx) = F_i(dx)$$

für das Einzelereigniss ausgedrückt wird. Ich hätte auch, wie aus meinem Beweise a. a. O. folgt, die Eigenschaft, welche durch die Gleichung

$$\Psi(dx) = \Phi(dx)$$

zur Darstellung kommt, benützen können, in welchem Falle der Satz wie folgt zu formuliren gewesen wäre:

> Wenn n Ereignisse, die von n von einander unabhängigen Ursachen im Laufe der Zeit bedingt werden, sich theilweise ausschliesen, so kann bei Bildung der Wahrscheinlichkeit für das Zusammen- oder Nichtzusammentreffen mehrerer oder aller dieser Ereignisse in einem unendlich kleinen Zeitintervall so verfahren werden, als ob die Ereignisse sich sämmtlich gegenseitig ausschlössen.

Beide Sätze, d. h. der obige und der vom Herrn Dr. Zimmermann angegriffene, widersprechen sich scheinbar, denn der eine behauptet das Gegentheil von dem, was der andere ausdrückt. Es rührt dies, wie wir wissen, daher, dass immer die in Rede stehende Wahrscheinlichkeit zwischen zwei Grenzen liegt, die im Punkte Null zusammenfliessen und infolge dessen in einem unendlich kleinen Abstande von diesem Punkte sich noch nicht messbar von einander entfernen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann daher hier ebenso gut mit der einen, wie mit der andern Grenze als zusammenfallend betrachtet werden.

Der Widerspruch hebt sich auch, wenn man bedenkt, dass in einem unendlich kleinen Zeitintervall nicht zwei Ereignisse hinter einander eintreten

---

* In seiner neuesten Arbeit „Analyse der Karup-Küttner'schen Entwickelungen" stützt Herr Dr. Zimmermann seine Behauptung von der Unrichtigkeit meiner Beweisführung ausschliesslich auf den unzutreffenden Satz

$$\xi_i\, dx > x_i\, dx.$$

Seine Einwendungen sind somit auch dort alle hinfällig. D. V.

können.* Diese Eigenschaft hat nämlich zur Folge, dass erstens kein Ereigniss innerhalb dieser Zeit das andere zu stören vermag, wodurch sie also unabhängig von einander werden, und zweitens, dass, wenn das eine eingetreten ist, kein anderes nachfolgen kann, wodurch sie sich gleichsam gegenseitig ausschliessen. —

Um auch den letzten Rest eines etwaigen Zweifels über die Richtigkeit und Zweckmässigkeit meines Satzes zu zerstreuen, will ich zum Schluss vermittelst desselben noch die Ableitung von drei Formeln zur Berechnung der Activitätswahrscheinlichkeit folgen lassen, die in ihren Voraussetzungen von Grund aus verschieden sind.

Sei die Wahrscheinlichkeit für einen Activen, innerhalb des unendlich kleinen Altersintervalles von x bis $x+dx$ zu sterben, gleich $\sigma(x)\,dx$, und invalid zu werden, gleich $i(x)\,dx$, so ist, wenn $f(x)$ die Wahrscheinlichkeit für einen Activen ist, das Alter x im Zustande der Arbeitsfähigkeit zu erleben, nach meinem Satze

$$f(x+dx)=f(x)\,[1-\sigma(x)\,dx][1-i(x)\,dx],$$

woraus

$$\text{6a)} \qquad \frac{f'(x)\,dx}{f(x)}=-\sigma(x)\,dx-i(x)\cdot dx$$

folgt. Hieraus ergiebt sich aber zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit y, dass ein a-jähriger Activer am Ende des nächsten Jahres noch im Zustande der Activität lebt, die Grundformel

$$\text{6)} \qquad y=\frac{f(a+1)}{f(a)}=e^{-\int_a^{a+1}[\sigma(x)+i(x)]\,dx},$$

von der wir in der Folge immer ausgehen werden, wie verschieden wir auch die Relation zwischen $\sigma(x)\,dx$ und der Sterbenswahrscheinlichkeit, und zwischen $i(x)\,dx$ und der Invaliditätswahrscheinlichkeit festsetzen. Hierbei bezeichnen wir, abweichend von dem gewöhnlichen Sprachgebrauche, die Wahrscheinlichkeiten als abhängig oder unabhängig, je nachdem die bezüglichen Ereignisse als abhängig oder unabhängig aufgefasst werden.

I.

a) Die Sterbenswahrscheinlichkeit s ist abhängig,
b) die Invaliditätswahrscheinlichkeit q ist abhängig.

Zufolge der obigen Annahme setzen wir innerhalb des kleinen Integrationsweges von a bis $a+1$

---

* Die Wahrscheinlichkeit, dass sie zusammenfallen, ist gegenüber der Wahrscheinlichkeit des einfachen Ereignisses unendlich klein und kommt nicht in Betracht. Herr Dr. Zimmermann ist daher in ganz irrigen Anschauungen befangen, wenn er meint, man müsse diese Ereignisse besonders beobachten und registriren. D. V.

$$7)\qquad \frac{f(x)}{f(a)}[1-i(x)\,dx]\,\sigma(x)\,dx = s\,dx,$$
$$\frac{f(x)}{f(a)}[1-\sigma(x)\,dx]\,i(x)\,dx = q\,dx,$$

d. h. wir definiren

$$s=\int\limits_a^{a+1}\frac{f(x)}{f(a)}[1-i(x)\,dx]\,\sigma(x)\,dx$$

und

$$q=\int\limits_a^{a+1}\frac{f(x)}{f(a)}[1-\sigma(x)\,dx]\,i(x)\,dx.$$

Aus 7) folgt

$$8)\qquad \sigma(x)\,dx = s\frac{dx}{\frac{f(x)}{f(a)}} \quad \text{und} \quad i(x)\,dx = q\frac{dx}{\frac{f(x)}{f(a)}}.$$

Substituiren wir diese Werthe in 6), so folgt

$$9)\qquad y = e^{-(s+q)\int\limits_a^{a+1}\frac{dx}{\frac{f(x)}{f(a)}}}.$$

Die Auflösung dieser Gleichung erfordert weiter, dass auch über den Verlauf der Function $f(x)$ eine Hypothese aufgestellt wird. Wir setzen innerhalb des kleinen Integrationsweges von a bis $a+1$

$$10)\qquad \frac{f(x)}{f(a)} = 1-(1-y)(x-a),$$

womit ein geradliniger Verlauf auch für $f(x)$ angenommen wird.

Damit geht Gleichung 9) in

$$y = e^{-(s+q)\int\limits_a^{a+1}\frac{dx}{1-(1-y)(x-a)}}, \quad y = e^{\frac{s+q}{1-y}\operatorname{lognat} y}$$

über, woraus

$$1=\frac{s+q}{1-y}$$

und endlich

$$11)\qquad y = 1-s-q$$

folgt. **Es ist dies die vom Herrn Dr. Zimmermann in der Schrift „Ueber Dienstunfähigkeits- und Sterbensverhältnisse“, Berlin 1886, benützte Formel, deren Richtigkeit ohne Weiteres erhellt.**

Dass diese Formel unabhängig von den hier zur Anwendung gekommenen Hypothesen ist und vermittelst meines Satzes auch ohne alle Voraussetzungen über den Verlauf der Sterblichkeit, Invalidität und Activität gefunden werden kann, lässt sich wie folgt zeigen.

Setzen wir

$$\frac{f(x)}{f(a)}[1-i(x)\,dx]\,\sigma(x)\,dx = \psi_1(x)\,dx,$$
$$\frac{f(x)}{f(a)}[1-\sigma(x)\,dx]\,i(x)\,dx = \psi_2(x)\,dx,$$

so folgt zunächst

12) $$\sigma(x)\,dx = \frac{\psi_1(x)\,dx}{\frac{f(x)}{f(a)}}, \quad i(x)\,dx = \frac{\psi_2(x)\,dx}{\frac{f(x)}{f(a)}}$$

und

13) $$\int_a^{a+1} \psi_1(x)\,dx = s, \quad \int_a^{a+1} \psi_2(x)\,dx = q.$$

Führen wir die Werthe aus 12) in 6a) ein, so folgt weiter

$$\frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = -\frac{\psi_1(x)\,dx}{\frac{f(x)}{f(a)}} - \frac{\psi_2(x)\,dx}{\frac{f(x)}{f(a)}},$$

$$f'(x)\,dx = -f(a)\,[\psi_1(x)\,dx + \psi_2(x)\,dx]$$

und durch Integration

$$f(a+1) - f(a) = -f(a)\left[\int_a^{a+1} \psi_1(x)\,dx + \int_a^{a+1} \psi_2(x)\,dx\right].$$

Werden für die auf der rechten Seite stehenden Integrale ihre Werthe aus 13) substituirt und beide Seiten durch $f(a)$ dividirt, so erhalten wir, wie oben

$$y = 1 - s - q.$$

II.

a) Die Sterbenswahrscheinlichkeit $s' = 1 - p'$ ist **unabhängig**,

b) die Invaliditätswahrscheinlichkeit q ist **abhängig**.

Bezeichnet man mit $\varphi(x)$ das zum Alter x gehörige Glied einer Absterbeordnung, die mit 1 anhebt und für eine Gesammtheit gilt, die jeden Invalidgewordenen sofort durch einen gleichalterigen Activen ersetzt, so folgt:

$$\varphi(x + dx) = \varphi(x)\,[1 - \sigma(x)\,dx], \quad \frac{\varphi'(x)\,dx}{\varphi(x)} = -\sigma(x)\,dx$$

und hieraus

13) $$\frac{\varphi(a+1)}{\varphi(a)} = p' = e^{-\int_a^{a+1} \sigma(x)\,dx}.$$

Wird dieser Ausdruck in 6) eingeführt, so erhält man zunächst

14) $$y = p' e^{-\int_a^{a+1} i(x)\,dx}$$

und, wenn hierin für $i(x)\,dx$ der Werth aus 8) in Verbindung mit 10) substituirt wird,

$$y = p' e^{-q\int_a^{a+1} \frac{dx}{1-(1-y)(x-a)}}.$$

Damit folgt aber

$$y = p' e^{\frac{q}{1-y} \operatorname{lognat} y}, \quad \operatorname{lognat} y = \operatorname{lognat} p' + \frac{q}{1-y} \operatorname{lognat} y$$

und hieraus die sogenannte **Behm'sche Formel**

15) $$y = p' - \frac{1+p'}{2}\,q.$$

III.

a) Die Sterbenswahrscheinlichkeit $s' = 1 - p'$ ist unabhängig,

b) die Invaliditätswahrscheinlichkeit q' ist unabhängig.

Bezeichnet man mit $\psi(x)$ das zum Alter x gehörige Glied einer Activitätsordnung, die mit 1 anhebt und für eine Gesammtheit gilt, die jeden Gestorbenen sofort durch einen gleichalterigen Activen ersetzt, so folgt

$$\psi(x + dx) = \psi(x)\,[1 - i(x)\,dx],$$

$$\frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)} = -\,i(x)\,dx,$$

16) $$\frac{\psi(a+1)}{\psi(a)} = (1 - q') = e^{-\int\limits_a^{a+1} i(x)\,dx}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in 14), so folgt die von Karup angegebene Formel

$$y = p'(1 - q'),$$

17) $$y = (1 - s')(1 - q').$$

In den vorstehenden Entwickelungen, durch die wir drei verschiedene Formeln für y kennen gelernt haben, sind durchgängig $\sigma(x)\,dx$ und $i(x)\,dx$ als vollkommen unabhängig von einander betrachtet worden, selbst dort, wo wir den Wahrscheinlichkeiten s und q vollständige Abhängigkeit beilegten. In Formel 11) hätte sich, wenn bei $\sigma(x)\,dx$ und $i(x)\,dx$ zwischen Abhängigkeit und Unabhängigkeit zu unterscheiden gewesen wäre, das Fehlerhafte meines Satzes am allerersten documentiren müssen. Nichts von Alledem ist eingetreten. Die Voraussetzung, dass in einem unendlich kleinen Zeitintervall Invalidität und Sterblichkeit unabhängig sind, führte auf eine Formel, die eine vollständige Abhängigkeit dieser Ereignisse für ein endliches Zeitintervall ausdrückte. Die Form der Function für die Activitätswahrscheinlichkeit hing nicht davon ab, wie $\sigma(x)\,dx$ und $i(x)\,dx$ interpretirt wurden, sondern wie man den Uebergang vom Unendlichkleinen zum Endlichen herstellte.

Zu denselben Ergebnissen wäre man freilich auch gelangt, wenn auf Grund des zweiten Satzes die Wahrscheinlichkeiten $\sigma(x)\,dx$ und $i(x)\,dx$ so aufgefasst worden wären, als ob die ihnen zugehörigen Ereignisse sich gegenseitig ausschlössen. Ist $\gamma(x)\,dx$ die Wahrscheinlichkeit, in dem unendlich kleinen Altersintervall von x bis $x + dx$ im Zustande der Activität zu verbleiben, so ist unter dieser Voraussetzung

$$1 = \gamma(x)\,dx + \sigma(x)\,dx + i(x)\,dx, \quad \gamma(x)\,dx = 1 - \sigma(x)\,dx - i(x)\,dx$$

und somit

$$f(x + dx) = f(x)\,[1 - \sigma(x)\,dx - i(x)\,dx].$$

Hieraus folgt, wie oben,

$$\frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = -\,\sigma(x)\,dx - i(x)\,dx,$$

$$\frac{f(a+1)}{f(a)} = e^{-\int_a^{a+1}[\sigma(x)+i(x)]\,dx}.$$

An Stelle der Gleichungen 7) hätte man sogleich

$$\frac{f(x)}{f(a)}\,\sigma(x)\,dx = s\,dx,$$

$$\frac{f(x)}{f(a)}\,i(x)\,dx = q\,dx$$

anschreiben können u. s. w.

Stellen wir die aus der Grundgleichung 6) für y abgeleiteten Formeln zusammen, so erhalten wir

$$y = 1 - s - q,$$

$$y = 1 - s' - q + \frac{s'q}{2},$$

$$y = 1 - s' - q' + s'q'.$$

Die ersteren zwei Formeln werden vom Herrn Dr. Zimmermann als vollkommen richtig anerkannt. Die Richtigkeit der letzteren wird von ihm mit den Herren Dienger, Behm und Heym bestritten, freilich ohne alle Berechtigung. Die Gesetzmässigkeit, die zwischen den drei Formeln besteht, ist unverkennbar. Zu der ersten Formel tritt, wenn ein Wahrscheinlichkeitswerth unabhängig wird, das halbe Product der beiden Wahrscheinlichkeiten hinzu. Zur zweiten Formel tritt, wenn auch der andere Wahrscheinlichkeitswerth unabhängig wird, wiederum das halbe Product beider Wahrscheinlichkeiten hinzu. Dass an Stelle von $\frac{s'q}{2} + \frac{s'q'}{2}$ der Werth $s'q'$ steht, wird selbst Herr Dr. Zimmermann als keine bedenkliche Abweichung von der Gesetzmässigkeit betrachten können.

Zu der Entwickelung Karup's konnte Herr Behm* noch mit einem Scheine der Berechtigung sagen: „Das, was bewiesen werden soll, stellt der Verfasser nämlich ohne Weiteres als Behauptung auf, allerdings in die Form von Infinitesimalgrössen gekleidet, und dann wird durch einen Zirkelschlag auf denselben Satz als Resultat der Entwickelung zurückgegangen. Zu solchen mathematischen Spielereien scheint sich die Differential- und Integralrechnung gut zu eignen.“ Meint Herr Dr. Zimmermann, der diese harten Worte Behm's vertritt und damit auch meine Arbeiten zu charakterisiren glaubt,** dass sie angesichts der vorstehenden Ableitungen heute noch seine Sache stützen können?

Wenn Herr Dr. Zimmermann aber S. 9 seiner Schrift „Ueber Dienstunfähigkeits- und Sterbensverhältnisse“ sagt, ich hätte meine von den Diffe-

* Statistik der Mortalitäts- u. s. w. Verhältnisse, Berlin 1876.

** Vereinsblatt für deutsches Versicherungswesen, 14. Jahrg. S. 298.

rentialen höherer Ordnung befreiten Formeln ohne Weiteres geben können, so vergisst er, dass ich in diesem Falle die Invalidität und Sterblichkeit als gegenseitig sich ausschliessend betrachtet hätte, was in seinen Augen doch ebenso falsch hätte sein müssen, wie die Annahme von der Unabhängigkeit dieser Ereignisse. —

Ich weiss nicht, ob das Vorstehende Herrn Dr. Zimmermann in seinen Ansichten erschüttert hat. Der vorurtheilsfreie Leser wird aber — das hoffe ich zuversichtlich — mir zustimmen, wenn ich nunmehr meinerseits den Streit für abgeschlossen erachte und ohne Rücksicht auf die Meinung des Herrn Dr. Zimmermann mit Hilfe meines Satzes an dem Ausbau der mathematischen Statistik weiter arbeite.

Burgk b. Dresden, Ende December 1886.

NS. Inzwischen ist die im gegenwärtigen Bande dieser Zeitschrift, S. 64 angekündigte „Analyse der Karup-Küttner'schen Entwickelungen" erschienen. Die Arbeit leidet vorzugsweise daran, dass sie sich mit dem Kern der Sache gar nicht befasst, immer total abhängige Ereignisse voraussetzt, wo nur von theilweise abhängigen Ereignissen gesprochen werden sollte, und Willkürlichkeiten und ganz wunderliche Auffassungen enthält. Die Gleichung aber

$$1-\varDelta y=1-x_1\,\varDelta x-x_2\,\varDelta x-\ldots-x_n\,\varDelta x,$$

welche Herr Dr. Zimmermann S. 51 a. a. O. aufstellt, ist **falsch**, wenn es sich — wie es doch der Fall ist — um theilweise abhängige Ereignisse handelt. Für total abhängige und für unabhängige Ereignisse bedarf es eines besonderen Satzes nicht; hier können die Gleichungen sofort nach den Elementen der Wahrscheinlichkeitsrechnung angeschrieben werden.

Herr Dr. Zimmermann gründet die Untersuchung immer nur auf die Wahrscheinlichkeit, dass ein Activer im nächsten Jahre nicht invalid wird, aber stirbt, und bedenkt nicht, dass bisher alle Schriftsteller in ihre Untersuchungen als Sterbenswahrscheinlichkeit der Activen einen Werth einführten, dem eine ganz andere, aber nicht minder berechtigte Definition zu Grunde lag. Freilich, wenn man nur seine eigenen Definitionen für zutreffend und alles Uebrige für falsch erklärt, hat man nicht nöthig, die Arbeiten Anderer besonders zu beachten.

Burgk b. Dresden, Mitte Juni 1887. D. V.

Kleinere Mittheilungen.

XI. Ueber eine Stelle in Poisson's Mechanik.

In Nr. 408 seines Traité de Mécanique kommt Poisson zu Formeln, die mir nicht richtig zu sein scheinen.

Er hat zwei Coordinatensysteme eingeführt: das der xyz, welches im Raume fest ist, und das der $x_1 y_1 z_1$, welches fest mit dem beweglichen und als fest vorausgesetzten Körper verbunden ist. Indem er die Richtungscosinus der Axensysteme mit a, b, c, a'; b' etc. bezeichnet, legt er die Verbindungsgleichungen

$$\text{I)}\qquad \begin{aligned} x &= a x_1 + b y_1 + c z_1, \\ y &= a' x_1 + b' y_1 + c' z_1, \\ z &= a'' x_1 + b'' y_1 + c'' z_1 \end{aligned}$$

zu Grunde und entwickelt nun in Nr. 404—407 sehr klar und präcis die Bewegung des Körpers um die momentane Rotationsaxe u. s. w. Darauf sagt er in Nr. 408:

„Da die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes M [eines Punktes des festen Körpers. Anm. d. Verf.] in Bezug auf die festen Axen Ox, Oy, Oz: $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sind, so müssen die Componenten derselben Geschwindigkeit in Beziehung auf die Axen Ox_1, Oy_1, Oz_1 sein:

$$\text{II)}\qquad \begin{aligned} & a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt}, \\ & b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt}, \\ & c\frac{dx}{dt} + c'\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt}, \end{aligned}$$

weil die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten denselben Gesetzen folgt, wie diejenige der Kräfte. Wenn man nun in diese Ausdrücke die Werthe von $\frac{dx}{dt}$ etc. aus Nr. 404 einsetzt und schon dort gemachte Reductionen ausführt, findet man

$$\text{III)}\qquad \begin{aligned} & a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt} = q z_1 - r y_1, \\ & b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt} = r x_1 - p z_1, \\ & c\frac{dx}{dt} + c'\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt} = p q_1 - q x_1; \end{aligned}$$

folglich drücken die drei Grössen

$$qz_1 - ry_1,\quad rx_1 - pz_1,\quad py_1 - qx_1,$$

die für alle Punkte der momentanen Rotationsaxe gleich 0 sind, für einen beliebigen andern Punkt M die Componenten seiner Geschwindigkeit parallel den Axen Ox_1, Oy_1, Oz_1 aus."

Hierin ist nun ein offenbarer Irrthum enthalten. Denn nach der ursprünglichen Voraussetzung ist das System der x_1, y_1, z_1 fest mit dem Körper verbunden und dieser selbst wird als fester Körper betrachtet. Es hat auch Poisson ausdrücklich ausgesprochen (Nr. 404 im 3. Abschnitt): „Dagegen ändern sich die Coordinaten x_1, y_1, z_1 von Punkt zu Punkt des bewegten Körpers; aber sie bleiben beständig dieselben für denselben Punkt und ändern sich nicht mit der Zeit." Daraus folgt aber, dass die Componenten der Geschwindigkeit nach den Axen Ox_1, Oy_1, Oz_1, also die Grössen $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$ für alle Punkte des Körpers **jederzeit** gleich 0 sind und nicht nur für Punkte der momentanen Rotationsaxe.

Der Irrthum scheint sich bei der Entwickelung der Ausdrücke II) eingeschlichen zu haben. Aus den zu Grunde gelegten Gleichungen I) folgt allerdings

$$\begin{aligned} x_1 &= ax + a'y + a''z, \\ y_1 &= bx + b'y + b''z, \\ z_1 &= cx + c'y + c''z. \end{aligned}$$

Bei der Differentiation nach t hat aber Poisson übersehen, dass die a, a' etc. selbst Functionen der Zeit t sind. Es sind daher die Ausdrücke II) nicht vollständig, sondern dieselben müssen vielmehr lauten:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt} + x\frac{da}{dt} + y\frac{da'}{dt} + z\frac{da''}{dt}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt} + x\frac{db}{dt} + y\frac{db'}{dt} + z\frac{db''}{dt}, \\ \frac{dz_1}{dt} &= c\frac{dx}{dt} + c'\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt} + x\frac{dc}{dt} + y\frac{dc'}{dt} + z\frac{dc''}{dt}, \end{aligned}$$

und wenn man hierin die schon gefundenen Werthe von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, x, y, z einsetzt, so werden dieselben identisch gleich 0.

Haben sich aber einmal die Gleichungen III) als unrichtig herausgestellt, so wird dieser Fehler nun in dem Folgenden mit durchgeschleppt und es kann daher auch das über die beschleunigenden Kräfte Gesagte nicht als richtig angesehen werden; und je weiter die Rechnung geführt wird, um so schwieriger muss es werden, das Richtige von dem Unrichtigen zu trennen.

Es macht allerdings schon beim Lesen dieser Abschnitt den Eindruck, als ob Poisson selbst ob seiner Resultate Bedenken aufgestiegen wären. Denn es tritt bei der Aufstellung der Ausdrücke II) ein Mangel an Bestimmtheit ein, den man sonst bei ihm nicht gewohnt ist. Er stellt seine

Ausdrücke nicht in der Form präciser Gleichungen dar, sondern giebt dieselben im Text und sucht sie mit der Bemerkung zu rechtfertigen, dass die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten dieselben Gesetze befolgt, wie die der Kräfte — obwohl in dem ganzen vorhergehenden Abschnitte von Kräften überhaupt noch nicht die Rede gewesen ist.

Auf der andern Seite nimmt es einen aber Wunder, wenn man sich in die Lage versetzt sieht, einem Meister der Mathematik, wie Poisson, ein derartiges Versehen nachsagen zu müssen. Um so mehr drängen sich mir Bedenken auf, als mir nicht bekannt ist, dass schon einmal auf diesen Punkt als auf eine Unrichtigkeit aufmerksam gemacht worden wäre. Ich bin deshalb mit Vergnügen bereit, meine Auffassung zu corrigiren, wenn einer der geschätzten Leser dieses Blattes Aufschluss zu geben weiss, wie die besprochene Sache aufzufassen sei, und nur aus diesem Grunde habe ich mich veranlasst gesehen, an diesem Orte ein mehr als ein halbes Jahrhundert zurück liegendes Thema zur Sprache zu bringen.

Schivelbein. Dr. PFANNSTIEL.

XII. Bemerkungen über die Gammafunctionen mit negativen Argumenten.

1.

Für ein positives μ haben die Functionen $\Pi(\mu-1)$ und $\Gamma(\mu)$ dieselben Werthe und dieselben Eigenschaften; erstere hat die Form eines Products, letztere die eines bestimmten Integrals. Wird μ negativ, so behält $\Pi(\mu-1)$, mit Ausschluss negativer ganzer Zahlen, für die es $\pm\infty$ wird, stets einen bestimmten Sinn, während das Integral seine Bedeutung verliert. Doch lässt sich, mit Benutzung eines von Liouville gelegentlich seiner Betrachtungen über gebrochene Differentialquotienten angewandten Hilfsmittels, ein anderes bestimmtes Integral angeben, welches wiederum den Werth von $\Pi(\mu-1)$ hat und sich somit als Fortsetzung der Γ-Function, wenn wir die Bezeichnung Γ den positiven Argumenten reserviren, darstellt. Dies ist, wenn k eine positive ganze Zahl oder 0 bedeutet:

$$1)\quad \Gamma_1(\mu)=\int_0^\infty x^{\mu-1}\left(e^{-x}-1+x-\frac{x^2}{1.2}\pm\ldots+(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k!}\right)dx$$
$$-k>\mu>-k-1.$$

Um dies als Fortsetzung der Γ-Function zu erkennen, genügt der Nachweis, dass $\Gamma_1(\mu)$ dem Fundamentalsatz der ersteren sich unterwirft, nämlich dass

$$2)\quad \begin{cases}\Gamma(\mu+1)=\mu\,\Gamma_1(\mu) & \text{für } 0>\mu>-1,\\ \Gamma_1(\mu+1)=\mu\,\Gamma_1(\mu) & \text{für } \mu<-1\end{cases}$$

ist. Durch partielle Integration folgt aber aus 1)

$$\Gamma_1(\mu)=\left[\frac{x^\mu}{\mu}\left(e^{-x}-1\pm\ldots+(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k!}\right)\right]_{x=\infty}-\left[\frac{x^\mu}{\mu}(-1)^k\left(\frac{x^{k+1}}{k+1!}\mp\ldots\right)\right]_{x=0}$$
$$+\frac{1}{\mu}\int\limits_0^\infty x^\mu\left(e^{-x}-1+x\mp\ldots+(-1)^k\frac{x^{k-1}}{k-1!}\right)dx$$

und hierin liegt, da die erste Zeile in den Grenzwerthen verschwindet, weil $\mu+k$ noch negativ, $\mu+k+1$ hingegen schon positiv ist, der Beweis des Satzes. — Für $k=0$ ist der Beweis ebenso zu führen und dabei nur das Symbol $0!$ durch 1 zu ersetzen.

Verstehe ich unter α einen positiven echten Bruch und setze in 2) der Reihe nach

$$\mu=-\alpha,\quad -\alpha-1,\quad -\alpha-2,\quad \ldots,\quad -\alpha-k,$$

so erhalte ich durch Multiplication der entstehenden Gleichungen:

$$\Gamma(1-\alpha)=(-1)^{k+1}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k)\Gamma_1(-\alpha-k),$$

also

$$\Gamma_1(-\alpha-k)=(-1)^{k+1}\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \tag{3}$$

oder auch

$$\Gamma_1(-\alpha-k)=\frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(\alpha+k+1)}\cdot\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}. \tag{4}$$

Die Function $\Gamma_1(\mu)$ ist also abwechselnd negativ oder positiv, je nachdem μ zwischen 0 und -1, -1 und -2, -2 und -3 u. s. w. liegt; für $\mu=0,-1,-2,\ldots$ wird sie, wie gesagt, $\pm\infty$. Setze ich

$$(-1)^{k+1}\Gamma_1(-\alpha-k)=\psi(\alpha+k), \tag{5}$$

so ist $\psi(\alpha+k)$ stets positiv und zwar

$$\psi(\alpha+k)=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)\,\Gamma(\alpha+k+1)} \tag{6}$$

und daher

$$\psi(\alpha+k+1)=\frac{\psi(\alpha+k)}{\alpha+k+1}. \tag{7}$$

Die Function $\psi(\alpha+k)$ wird ∞ für $\alpha=0$ und für $\alpha=1$, dazwischen erreicht sie ein Minimum; geschehe dies für $\alpha=\alpha_1$, dann ist

$$\psi'(\alpha_1+k)=0.$$

Differentiire ich nun Gleichung 7) nach α und setze nachher $\alpha=\alpha_1$, so kommt

$$\psi'(\alpha+k+1)=\frac{(\alpha+k+1)\,\psi'(\alpha+k)-\psi(\alpha+k)}{(\alpha+k+1)^2},$$
$$\psi'(\alpha_1+k+1)=-\frac{\psi(\alpha_1+k)}{(\alpha_1+k+1)^2}=neg.,$$

also ist das Minimum von $\psi(\alpha+k+1)$ für $\alpha=\alpha_1$ **noch nicht** erreicht, d. h. die Stellen des Minimums in den einzelnen Intervallen rücken den Endpunkten derselben immer näher; auch werden sie immer kleiner, denn nach 7) ist

$$\psi(\alpha_1+k+1)=\frac{\psi(\alpha_1+k)}{\alpha_1+k+1}$$

und

$$Min\,\psi(\alpha+k+1)<\psi(\alpha_1+k+1).$$

Ist k sehr gross, so ist hinreichend genau

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+k+1)&=\left(\frac{k+\alpha}{e}\right)^{k+\alpha}\cdot\sqrt{2(k+\alpha)\pi}\\&=k^{k+\alpha+\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{\alpha}{k}\right)^{k+\alpha+\frac{1}{2}}\cdot e^{-k-\alpha}.\sqrt{2\pi}\\&=\left(\frac{k}{e}\right)^{k}\cdot k^{\alpha+\frac{1}{2}}.\sqrt{2\pi},\end{aligned}$$

also nach 6):

8) $$\psi(\alpha+k)=\left(\frac{e}{k}\right)^{k}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2k}}\cdot\frac{1}{k^{\alpha}.sin(\alpha\pi)}.$$

Diese Function erreicht ihr Minimum, wenn $k^{\alpha}\,sin(\alpha\pi)$ den grössten Werth annimmt, d. i. mit $\alpha=1-\beta$ für

$$tg(\beta\pi)=\frac{1}{\pi\,l_{nt}k},$$

also für

$$\alpha=1-\frac{1}{\pi^2\,l_{nt}k},$$

d. i. sehr nahe an 1, und das Minimum selbst ist

$$Min\,\psi(\alpha+k)=\frac{\pi^{\frac{3}{2}}e^{\frac{1}{\pi^2}}}{\sqrt{2}}\left(\frac{e}{k}\right)^{k}\frac{l_{nt}k}{k^{\frac{1}{2}}},$$

d. i. sehr nahe an 0. —

Setzen wir in 4) $\alpha+k=-\mu$ zurück, so folgt noch

9) $$\Gamma_1(\mu)\,\Gamma(1-\mu)=\frac{\pi}{sin(\mu\pi)}\qquad\mu<0.$$

2.

Herr Prym führt in seiner Abhandlung* „Zur Theorie der Gammafunction" zwei Functionen $P(\mu)$ und $Q(\mu)$ ein, nämlich

10) $$P(\mu)=\frac{1}{e}\left\{\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu(\mu+1)}+\frac{1}{\mu(\mu+1)(\mu+2)}+\cdots\right\},$$

11) $$Q(\mu)=c_0+c_1\mu+c_2\mu^2+\cdots;\quad c_k=\frac{1}{k!}\int_1^{\infty}e^{-x}\,l_{nt}^{k}x\cdot\frac{dx}{x},$$

und beweist, dass allgemein (auch für complexe Werthe von μ)

12) $$P(\mu)+Q(\mu)=\Gamma(\mu),\ \text{bez.}=\Pi(\mu-1),$$

und dass insbesondere für reelle positive Werthe von μ

* Journal für Mathematik, Bd. 82 S. 165.

$$13)\quad \begin{cases} P(\mu)=\int\limits_0^1 x^{\mu-1}.e^{-x}\,dx, \\ Q(\mu)=\int\limits_1^\infty x^{\mu-1}.e^{-x}\,dx \end{cases}$$

wird. Wir wollen sehen, welche Gleichungen an Stelle dieser letzteren im Falle eines negativen μ zu setzen sind. Zunächst bringe ich die obere Reihe für $P(\mu)$ auf eine andere, ebenfalls von Herrn Prym angegebene Form. Zerlegen wir die einzelnen Brüche und sammeln die Coefficienten etwa von $\frac{1}{\mu+k}$, so erhalten wir

$$\frac{1}{e}\cdot\frac{(-1)^k}{k!}\left(1+1+\frac{1}{1.2}+\cdots\right)=\frac{(-1)^k}{k!},$$

folglich ist

$$14)\quad P(\mu)=\frac{1}{\mu}-\frac{1}{1.(\mu+1)}+\frac{1}{2!\,(\mu+2)}\mp\cdots$$

Bezeichnen wir nun mit $P_1(\mu)$ und $Q_1(\mu)$ die Integrale

$$15)\quad \begin{cases} P_1(\mu)=\int\limits_0^1 x^{\mu-1}\left(e^{-x}-1+x\mp\cdots+(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k!}\right)dx, \\ Q_1(\mu)=\int\limits_1^\infty x^{\mu-1}\left(e^{-x}-1+x\mp\cdots+(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k!}\right)dx \\ \qquad\qquad -k>\mu>-k-1, \end{cases}$$

so folgt

$$P_1(\mu)=\int\limits_0^1(-1)^{k+1}\left(\frac{x^{k+\mu}}{(k+1)!}-\frac{x^{k+\mu+1}}{(k+2)!}\pm\cdots\right)dx$$

$$=(-1)^{k+1}\left\{\frac{1}{(k+1)!\,(k+\mu+1)}-\frac{1}{(k+2)!\,(k+\mu+2)}\pm\cdots\right\}$$

und also

$$16)\quad P_1(\mu)=P(\mu)-\frac{1}{\mu}+\frac{1}{1.(\mu+1)}\mp\cdots+(-1)^{k+1}\frac{1}{k!\,(\mu+k)}.$$

Ferner zerfällt $Q_1(\mu)$ in zwei Theile; der erste ist

$$\int\limits_1^\infty x^\mu e^{-x}\frac{dx}{x}$$

oder mittels der für jedes μ giltigen Reihenentwickelung für x^μ

$$=\int\limits_1^\infty\frac{e^{-x}}{x}\left(1+\mu\, l_{nt}x+\frac{\mu^2}{1.2}l_{nt}^2x+\ldots\right)dx,$$

d. i., wie ein Blick auf 11) zeigt, $=Q(\mu)$. Der andere Theil von $Q_1(\mu)$ ist aber, da alle nach der Integration vorhandenen Exponenten, einschliesslich $k+\mu$, negativ sind:

$$=\frac{1}{\mu}-\frac{1}{1.(\mu+1)}\pm\cdots+(-1)^k\frac{1}{k!\,(k+\mu)}$$

und daher

$$17)\qquad Q_1(\mu)=Q(\mu)+\frac{1}{\mu}-\frac{1}{1.(\mu+1)}\pm\cdots+(-1)^k\frac{1}{k!\,(\mu+k)}.$$

Diese Gleichungen 16) und 17) treten also an Stelle der Gleichungen 13) und die Addition der ersteren ergiebt mit Rücksicht auf 15) und 1):

$$P_1(\mu)+Q_1(\mu)=\Gamma_1(\mu)=P(\mu)+Q(\mu)$$

in Uebereinstimmung mit Gleichung 12).

Königsberg, im März 1887. Prof. Dr. Louis Saalschütz.

XIII. Eine Erweiterung des Factoriellensatzes.

Wenn man unter μ, ν, γ willkürliche Grössen, unter n eine positive ganze Zahl versteht, so gilt der Satz:

$$1)\qquad \frac{\mu(\mu+1+n\gamma)(\mu+2+n\gamma)\ldots(\mu+n-1+n\gamma)}{1.2.3\ldots n}$$

$$+\frac{\mu(\mu+1+(n-1)\gamma)\ldots(\mu+n-2+(n-1)\gamma)}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{\nu}{1}$$

$$+\frac{\mu(\mu+1+(n-2)\gamma)\ldots(\mu+n-3+(n-2)\gamma)}{1.2.3\ldots(n-2)}\cdot\frac{\nu(\nu+1+2\gamma)}{1.2}$$

$$+\frac{\mu(\mu+1+(n-3)\gamma)\ldots(\mu+n-4+(n-3)\gamma)}{1.2.3\ldots(n-3)}\cdot\frac{\nu(\nu+1+3\gamma)(\nu+2+3\gamma)}{1.2.3}+\cdots$$

$$+\frac{\nu(\nu+1+n\gamma)\ldots(\nu+n-1+n\gamma)}{1.2.3\ldots n}$$

$$=\frac{(\mu+\nu)(\mu+\nu+1+n\gamma)(\mu+\nu+2+n\gamma)\ldots(\mu+\nu+n-1+n\gamma)}{1.2.3\ldots n}.$$

Derselbe kann als eine particuläre Lösung einer von Herrn Schlömilch in dem Aufsatze: „Eine Verallgemeinerung des binomischen Satzes"* angeregten und behandelten Aufgabe angesehen werden, wenn den daselbst in Rede stehenden Functionen $f_1(\mu)$, $f_2(\mu)$, $f_3(\mu)$, ... die Werthe

$$2)\quad f_1(\mu)=\mu,\quad f_2(\mu)=\frac{\mu(\mu+1+2\gamma)}{1.2},\quad f_3(\mu)=\frac{\mu(\mu+1+3\gamma)(\mu+2+3\gamma)}{1.2.3}\ \text{etc.}$$

zuertheilt werden, — particulär, weil nur eine willkürliche Grösse, γ, in die Lösung eingeht.

Der Beweis der Gleichung 1) lässt sich aber in folgender Art führen. Für $n=1$ und $n=2$ ist ihre Richtigkeit von selbst klar; auch für $n=3$, wobei die Functionen beiderseits für γ vom zweiten Grade werden, lässt sich die Wahrheit des Satzes durch gewöhnliche Multiplication oder, etwas geschickter, durch Substitution dreier Specialwerthe für γ, etwa

---

* Diese Zeitschrift, Jahrg. 30 (1885), S. 191.

$$\gamma=0,\quad \gamma=-\frac{\mu+\nu+1}{3},\quad \gamma=-\frac{\mu+\nu+2}{3},$$

erkennen. Dieselbe Methode scheint sich allgemein nicht bequem anwenden zu lassen und wir wählen daher die Schlussart von n auf $n+1$.

Indem wir somit die Gleichung 1) als richtig ansehen, multipliciren wir sie zunächst mit $1.2.3\ldots n$, wodurch die einzelnen Glieder auf ihrer linken Seite die Binomialcoefficienten $(n)_0$, $(n)_1$, $(n)_2$, $\ldots$, $(n)_n$ zu Factoren erhalten, und ersetzen dann die willkürliche Grösse γ durch eine andere, δ, mittels der Gleichung

$$\gamma=(n+1)\delta.$$

Jetzt fügen wir auf der rechten Seite den Factor

$$\mu+\nu+n+(n+1)n\delta$$

hinzu, wodurch dieselbe, wenn für $n\delta$ wieder eine einzelne Grösse, etwa ε gesetzt wird, die gewünschte Form

$$(\mu+\nu)(\mu+\nu+1+(n+1)\varepsilon)\ldots(\mu+\nu+n+(n+1)\varepsilon)$$

annimmt. Zwecks Multiplication der linken Seite theilen wir obigen Factor für die einzelnen Glieder, die ich der Reihe nach mit G_0, G_1, G_2, $\ldots$, G_n bezeichne, in verschiedener Art, und zwar

für G_0 in M_0+N_0:

$$M_0\ =\mu+n+n(n+1)\delta,\qquad N_0\ =\nu;$$

für G_1 in M_1+N_1:

$$M_1\ =\mu+n-1+(n-1)(n+1)\delta,\qquad N_1\ =\nu+1+(n+1)\delta,$$

. . . . ;

für G_{k-1} in $M_{k-1}+N_{k-1}$:

$$M_{k-1}=\mu+n-k+1+(n-k+1)(n+1)\delta,\quad N_{k-1}=\nu+k-1+(k-1)(n+1)\delta;$$

für G_k in M_k+N_k:

$$M_k\ =\mu+n-k+(n-k)(n+1)\delta\qquad N_k\ =\nu+k+k(n+1)\delta$$

etc. etc.

Es ist ferner

$$\begin{aligned}G_{k-1}&=(n)_{k-1}\mu(\mu+1+(n-k+1)(n+1)\delta)\ldots(\mu+n-k+(n-k+1)(n+1)\delta)\\&\quad\times\nu(\nu+1+(k-1)(n+1)\delta)\ldots(\nu+k-2+(k-1)(n+1)\delta),\\G_k\ &=(n)_k\quad\mu(\mu+1+(n-k)(n+1)\delta)\ldots(\mu+n-k-1+(n-k)(n+1)\delta)\\&\quad\times\nu(\nu+1+k(n+1)\delta)\ldots(\nu+k-1+k(n+1)\delta).\end{aligned}$$

Wir nehmen nun zusammen:

$$G_0M_0,\ G_0N_0+G_1M_1,\ G_1N_1+G_2M_2,\ \ldots,\ G_{k-1}N_{k-1}+G_kM_k,\ \ldots,\ G_nN_n.$$

Bezeichnen wir die Glieder der Entwickelung für $n+1$, wie sie sein müssten, wenn der Satz auch dafür noch richtig bliebe, mit H_0, H_1, H_2, $\ldots$, H_{n+1}, so ist allerdings, wie unmittelbar zu ersehen:

3) $$G_0M_0=H_0\ \text{ und }\ G_nN_n=H_{n+1}.$$

Die dazwischen liegenden Summen unterscheiden sich aber von den betreffenden Gliedern. Ich gehe nun daran, diese Unterschiede aufzusuchen und zu beweisen, dass die Summe aller Unterschiede verschwindet; damit wird gleichzeitig die Giltigkeit des Satzes dargethan sein.

Wir vergleichen $G_{k-1}N_{k-1}+G_kM_k$ mit H_k; letzteres ist, wenn wir die Bezeichnungen

$$4)\quad \begin{cases} \mu+\ 1\ +(n+1-k)n\delta=\overset{k}{\alpha}_1, & \nu+\ 1\ +kn\delta=\overset{k}{\beta}_1, \\ \mu+\ 2\ +(n+1-k)n\delta=\overset{k}{\alpha}_2, & \nu+\ 2\ +kn\delta=\overset{k}{\beta}_2, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ \mu+n-k+(n+1-k)n\delta=\overset{k}{\alpha}_{n-k}, & \nu+k-1+kn\delta=\overset{k}{\beta}_{k-1} \end{cases}$$

einführen:

$$H_k=(n+1)_k\,\mu\,\nu\,\overset{k}{\alpha}_1\overset{k}{\alpha}_2\dots\overset{k}{\alpha}_{n-k}\overset{k}{\beta}_1\overset{k}{\beta}_2\dots\overset{k}{\beta}_{k-1}.$$

Durch dieselben Grössen α und β ausgedrückt ist aber

$$\begin{aligned} G_{k-1}N_{k-1}&=(n)_{k-1}\,\mu\nu(\overset{k}{\alpha}_1+(n+1-k)\delta)(\overset{k}{\alpha}_2+(n+1-k)\delta)\dots(\overset{k}{\alpha}_{n-k}+(n+1-k)\delta)\\ &\qquad\times(\overset{k}{\beta}_1-(n+1-k)\delta)\dots(\overset{k}{\beta}_{k-1}-(n+1-k)\delta),\\ G_k\ \ M_k\ &=(n)_k\ \ \mu\nu(\overset{k}{\alpha}_1-k\delta)(\overset{k}{\alpha}_2-k\delta)\dots(\overset{k}{\alpha}_{n-k}-k\delta)\\ &\qquad\times(\overset{k}{\beta}_1+k\delta)(\overset{k}{\beta}_2+k\delta)\dots(\overset{k}{\beta}_{k-1}+k\delta). \end{aligned}$$

Beginnen wir, die Multiplication auszuführen, so sehen wir, dass die Summe der Anfangsglieder, der Beziehung

$$(n)_{k-1}+(n)_k=(n+1)_k$$

wegen, gleich H_k wird. Betrachten wir jetzt zuerst $G_{k-1}N_{k-1}$ für sich allein. Wir können es auch schreiben

$$\begin{aligned} G_{k-1}N_{k-1}=(-1)^{k-1}\mu\nu(n)_{k-1}((n+1-k)\delta+\overset{k}{\alpha}_1)\dots((n+1-k)\delta+\overset{k}{\alpha}_{n-k})\\ \times((n+1-k)\delta-\overset{k}{\beta}_1)\dots((n+1-k)\delta-\overset{k}{\beta}_{k-1}). \end{aligned}$$

Sei nunmehr die Summe der Combinationen der $n-1$ Grössen

$$(\alpha;-\beta)=\overset{k}{\alpha}_1,\ \overset{k}{\alpha}_2,\ \dots,\ \overset{k}{\alpha}_{n-k},\ -\overset{k}{\beta}_1,\ -\overset{k}{\beta}_2,\ \dots,\ -\overset{k}{\beta}_{k-1}$$

in der r^{ten} Classe

$$=C_r(\alpha;-\beta),$$

dann wird

$$\begin{aligned} &G_{k-1}N_{k-1}\\ &=(-1)^{k-1}\mu\nu(n)_{k-1}\{(n+1-k)^{n-1}\delta^{n-1}+C_1(\alpha;-\beta)(n+1-k)^{n-2}\delta^{n-2}\\ &\qquad+C_2(\alpha;-\beta)(n+1-k)^{n-3}\delta^{n-3}+\dots\\ &\qquad+C_{n-2}(\alpha;-\beta)(n+1-k)\delta+(-1)^{k-1}\overset{k}{\alpha}_1\dots\overset{k}{\beta}_{k-1}\}. \end{aligned}$$

Das Product G_kM_k unterscheidet sich von dem eben entwickelten dadurch, dass $(n)_k$ an die Stelle von $(n)_{k-1}$ und $-k\delta$ an Stelle von $+(n+1-k)\delta$ tritt. Somit ergiebt sich der Coefficient A_r von δ^r in der Summe beider Producte:

$$\begin{aligned} 5)\quad A_r&=(-1)^{k-1}\mu\nu C_{n-1-r}(\alpha;-\beta)\{(n)_{k-1}(n-k+1)^r+(n)_k(-1)^rk^r\}\\ &=(-1)^{k-1}\mu\nu C_{n-1-r}(\alpha;-\beta)(n)_k k\{(n-k+1)^{r-1}+(-1)^rk^{r-1}\}. \end{aligned}$$

(Beiläufig sehen wir hieraus, dass der Coefficient von δ, nämlich A_1, des letzten Factors wegen verschwindet.)

Ich werde jetzt zeigen, dass der Coefficient von $(n)_k$ im Ausdruck 5) bezüglich k vom $n-2^{\text{ten}}$ Grade ist. Zu dem Zwecke suchen wir die Potenzsummen der Grössen $(\alpha; -\beta)$. Setzen wir vorübergehend z. a.

$$\mu+(n+1)n\delta=a,\quad \nu=b,\quad kn\delta=c,$$

so ist [s. die Gl. 4)]

$$\begin{aligned}
\overset{k}{\alpha}_1 &= a+1-c, & \overset{k}{\beta}_1 &= b+1+c,\\
\overset{k}{\alpha}_2 &= a+2-c, & \overset{k}{\beta}_2 &= b+2+c,\\
&\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots,\\
\overset{k}{\alpha}_{n-k} &= a+n-k-c, & \overset{k}{\beta}_{k-1} &= b+k-1+c.
\end{aligned}$$

Daher wird

$$6)\quad (\overset{k}{\alpha}_1)^p+(\overset{k}{\alpha}_2)^p+\dots+(\overset{k}{\alpha}_{n-k})^p=\sum_{h=0}^{p}(p)_h(a-c)^{p-h}(1^h+2^h+\dots+(n-k)^h).$$

Nun ist

$$1^h+2^h+\dots+x^h=\frac{x^{h+1}}{h+1}+\frac{x^h}{2}+B_1x^{h-1}+\dots$$

(worin $B_1\dots$ Constanten sind, deren Kenntniss hier nicht weiter nöthig ist); daher

$$1^h+2^h+\dots+(n-k)^h=(-1)^{h+1}\frac{k^{h+1}}{h+1}+D_1k^h+D_2k^{h-1}+\dots,$$

worin $D_1, D_2, \dots$ ebenfalls von k unabhängige Zahlen sind; folglich ist im Coefficienten von $(p)_h$ in 6) das Glied, welches die höchste Potenz von k (welches auch in c steckt) enthält:

$$(-1)^{p-1}(n\delta)^{p-h}\frac{k^{p+1}}{h+1}.$$

Jetzt kommt aber zur Summe 6) folgende hinzu:

$$\begin{aligned}
7)\qquad &(-1)^p\left\{(\overset{k}{\beta}_1)^p+(\overset{k}{\beta}_2)^p+\dots+(\overset{k}{\beta}_{k-1})^p\right\}\\
&=(-1)^p\sum_{h=0}^{p}(p)_h(b+c)^{p-h}(1^h+2^h+\dots+(k-1)^h).
\end{aligned}$$

Hierin ist

$$1^h+2^h+\dots+(k-1)^h=\frac{k^{h+1}}{h+1}-\frac{k^h}{2}+B_1k^{h-1}+\dots,$$

also das Glied im Coefficienten von $(p)_h$, welches die höchste Potenz von k enthält,

$$(-1)^p(n\delta)^{p-h}\frac{k^{p+1}}{h+1}.$$

Dies Glied hebt sich nun gegen das obige fort; und da eine analoge Betrachtung für jedes h von 0 bis p gilt, so folgt:

Die Summe der p^{ten} Potenzen der Grössen $(\alpha; -\beta)$ ist durch einen Ausdruck p^{ten} Grades in k darstellbar. Daraus ergiebt sich aber mittels der bekannten Newton'schen Beziehungen sofort, dass auch die Summe der Combinationen derselben Grössen in der p^{ten} Classe durch einen Ausdruck p^{ten} Grades in k ausgedrückt werden kann.

Gehen wir nunmehr zu A_r, dem Coefficienten von δ^r zurück, so ist gezeigt, dass $C_{n-r-1}(\alpha; -\beta)$ eine Function $n-r-1^{\text{ten}}$ Grades in k ist; fügen wir den Factor k und die Klammer, die (für $r>1$) vom $r-2^{\text{ten}}$ Grade ist, hinzu, so wird der Factor von $(-1)^{k-1}(n)_k$ ein Ausdruck $n-2^{\text{ten}}$ Grades in k, und ich kann schreiben, wenn ich ihn mit $\varphi(k)$ bezeichne:

$$-A_r = (-1)^k\, \varphi(k)\, (n)_k.$$

Halte ich nun r fest und ändere k, d. h. suche die Coefficienten von δ^r in allen Gliedern des zu bildenden Ausdrucks

$$G_0 M_0,\ G_0 N_0 + G_1 M_1,\ G_1 N_1 + G_2 M_2 \text{ etc.}$$

auf, so ist ihre negative Summe:

$$8)\qquad \varphi(0)(n)_0 - \varphi(1)(n)_1 + \varphi(2)(n)_2 \mp \dots + (-1)^n \varphi(n)(n)_n.$$

Die Grössen $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ... (deren erste den Werth 0 hat) bilden aber, indem für k der Reihe nach 0, 1, 2, ... gesetzt wird, eine arithmetische Progression von geringerem als dem n^{ten} (nämlich $n-2^{\text{ten}}$) Grade, folglich ist nach einem von Arndt herrührenden Satze* die Summe 8) gleich Null, und damit gezeigt, wenn nacheinander $r = 1, 2, 3, \dots, n-1$ genommen wird, dass

$$\begin{aligned} & G_0 M_0 + G_0 N_0 + G_1 M_1 + G_1 N_1 + \dots \\ \text{oder } & G_0(M_0 + N_0) + G_1(M_1 + N_1) + \dots + G_n(M_n + N_n) \\ & = H_0 + H_1 + H_2 + \dots + H_{n+1} \end{aligned}$$

ist, w. z. b. w.

Durch Specialisirung von γ in 2) gelangt man im Anschluss an den genannten Aufsatz des Herrn Schlömilch zu mancherlei summirbaren Reihen; z. B. führt $\gamma = -1$ auf den gewöhnlichen binomischen Lehrsatz, $\gamma = 1$ auf die Entwickelung von $\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^\mu$, $\gamma = -\frac{1}{2}$ auf die Reihe

$$1 + \mu x + \frac{\mu^2}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu^2-(\frac{1}{2})^2)}{1.2.3}x^3 + \frac{\mu^2(\mu^2-1^2)}{1.2.3.4}x^4 + \frac{\mu(\mu^2-(\frac{1}{2})^2)(\mu^2-(\frac{3}{2})^2)}{5!}x^5 + \frac{\mu^2(\mu^2-1^2)(\mu^2-2^2)}{6!}x^6 + \dots = \left(1 + \frac{x^2}{2} + x\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\right)^\mu.$$

---

* Crelle's Journal, Bd. 31 S. 239. — Uebrigens verschwindet bereits die Summe der Coefficienten von δ^r in $G_0 M_0$, $G_1 M_1$, $G_2 M_2$ etc., wie andererseits in $G_0 N_0$, $G_1 N_1$, $G_2 N_2$ etc.

Königsberg, im November 1886. Prof. Dr. Louis Saalschütz.

XIV. Bemerkung über Formen mit zwei Reihen Veränderlicher.

Wenn eine Form $F(x_1 x_2 \dots x_n)$ oder kurz $F(x)$ der homogenen Veränderlichen $x_1 x_2 \dots x_n$ zu einem festen Werthsystem $a_1 a_2 \dots a_n$ der letzteren (Punkt a) in solcher Beziehung steht, dass mit $F(x)$ auch $F(x+\lambda a)$, d. i. $F(x_1+\lambda a_1, \dots, x_n+\lambda a_n)$ für alle Werthe von λ verschwindet, so ist bekanntlich identisch

$$F(x)=F(x+\lambda a), \text{ d. h. } a_1 \frac{\partial F}{\partial x_1}+a_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}+\cdots+a_n \frac{\partial F}{\partial x_n}=0.$$

In der That: durch Einführung von n unabhängigen linearen Formen $\xi_1 \dots \xi_n$, von denen die $n-1$ ersten im Punkte a verschwinden, während die letzte bei a einen von Null verschiedenen Werth b annimmt, geht $F(x)$ in eine Form $G(\xi)$ über, von der Beschaffenheit, dass mit $G(\xi)$ auch $G(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n+\lambda b)$ für alle λ verschwindet; $G(\xi)$ ist daher frei von ξ_n, $F(x)=G(\xi)=G(\xi_1 \dots \xi_{n-1} 0)$ wird durch Einsetzen von $x+\lambda a$ statt x nicht geändert.

Dies vorausgeschickt, soll hier der bei mancher Gelegenheit in Betracht kommende Satz bewiesen werden: Bedeutet $f(x,y)$ eine Form r^{ten} Grades von $x_1 \dots x_n$ und zugleich ϱ^{ten} Grades von $y_1 \dots y_n$, von der Beschaffenheit, dass mit $f(x,y)$ auch $f(x+\lambda y, y)$ verschwindet, so ist $r \leqq \varrho$ und f darstellbar als Form $(\varrho-r)^{\text{ten}}$ Grades der y und r^{ten} Grades der Verbindungen $u_{ik}=x_i y_k - x_k y_i$. [Wenn überdies mit $f(x,y)$ auch $f(x, x+\lambda y)$ verschwindet, so ist $r=\varrho$ und f nur von den u_{ik} abhängig.]

Beweis. Nach dem Vorhergehenden ist $\Sigma y_i f'(x_i)=0$ bei allen x und y, mithin, wenn man die zweite Ableitung von f nach x_i und y_k mit f_{ik} bezeichnet:

$$\sum_i y_i f_{ik}+f'(x_k)=0, \quad \sum_{i,k} y_i x_k f_{ik}=-\sum_k x_k f'(x_k)=-rf,$$
$$\sum_{i,k} x_i y_k f_{ik}=\varrho \sum_i x_i f'(x_i)=r\varrho f, \quad r(\varrho+1)f=\sum_{i,k} f_{ik} u_{ik}.$$

Setzt man noch zur Abkürzung:

$$\frac{f_{ik}-f_{ki}}{r(\varrho+1)}=g_{ik}=-g_{ki},$$

so wird zunächst $f=\Sigma g_{ik} u_{ik}$, erstreckt über alle Paare ungleicher Nummern $1 \dots n$. In diesem Ausdruck für die Form f lassen sich aber die g_{ik} derselben Behandlung unterwerfen, wie f selbst, u. s. f.; denn aus $\Sigma y_m f'(x_m)=0$ folgt:

$$\sum_m y_m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_m}=0, \quad \sum_m y_m \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_m}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}=0,$$
$$\sum_m y_m \frac{\partial f_{ki}}{\partial x_m}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}=0, \quad \sum_m y_m \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_m}=0.$$

Bezüglich der hier angewendeten Operation vergleiche man: Clebsch, Binäre Formen, S. 14; Rosanes, Mathem. Annalen, Bd. 6 S. 283.

Giessen, April 1887. M. Pasch.

XV. Eingrenzung der Zahl e auf geometrischem Wege.

Im Anschluss an den Art. X der kleineren Mittheilungen: „Ueber die Basis der natürlichen Logarithmen", sei folgende Bemerkung gestattet. Bekanntlich kann man den Begriff dieser Zahl auch mittels Geometrie behufs Quadratur der Hyperbel entwickeln. Zieht man durch den Scheitel und einen beliebigen Curvenpunkt Parallele zu der einen Asymptote, bis sie die andere treffen, so liegen zwischen denselben ein hyperbolisches Viereck und zwei Parallelogramme, von welch' letzteren jedes eine der Parallelen zur Seite hat. Durch Vergleichung dieser drei Flächen gelangt man zur Ungleichung:

$$(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} < e < (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}+1},$$

wo δ einen beliebigen positiven Werth hat. Da sich beide Seiten nur durch den Factor $1+\delta$ unterscheiden, so geben sie e um so genauer an, je kleiner δ ist.

Man kann nun engere Grenzen erhalten, indem man einerseits beide Punkte durch die Sehne verbindet und ein Trapez statt des grösseren Parallelogramms einführt, und andererseits an beide Punkte Tangenten legt und das kleinere Parallelogramm durch die Summe zweier Trapeze ersetzt. Auf diese Weise erhält man zur Bestimmung der Zahl e:

$$(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}+\frac{1}{2+\delta}} < e < (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}+\frac{1}{2}}.$$

Für $\delta = \frac{1}{100}$ ergiebt sich

$$2{,}718235 < e < 2{,}718304$$

und für $\delta = \frac{1}{1000}$

$$2{,}7182814 < e < 2{,}7182820.$$

Tharand. WEINMEISTER.

XV.

Die Curven dritter und vierter Ordnung, welche durch die unendlich fernen Kreispunkte gehen.

Von

EMANUEL CZUBER,

Professor am Polytechnikum in Brünn.

Hierzu Taf. III Fig. 1–10.

Die besonderen Curven dritter und vierter Ordnung, welche vermöge des Umstandes, dass sie durch die unendlich fernen Kreispunkte gehen, unter den Linien gleicher Ordnung eine ähnliche Stellung einnehmen, wie der Kreis unter den Kegelschnitten, und wie dieser durch eine Reihe besonderer Eigenschaften sich auszeichnen, sind schon wiederholt aus verschiedenen Gesichtspunkten behandelt worden. Eine analytische Darstellung derselben hat Casey[1]) gegeben. Specielle Formen der Curve vierter Ordnung sind von Siebeck[2]) ebenfalls auf analytischem Wege untersucht worden. Eine Reihe von Eigenschaften der Curve dritter Ordnung hat Eckardt[3]) angegeben, und eine besondere Species dieser Curve ist wiederholt auf verschiedenen Grundlagen behandelt worden, so von Schröter,[4]) Durège,[5]) Pelz,[6]), Küpper, zuletzt von Hermes[7]) und Schoute[8]).

In den folgenden Blättern werden die genannten Curven aus einem Gesichtspunkte dargestellt, welcher in einfacher und natürlicher Weise zur

1) On Bicircular Quartics. Transact. of the Royal Irish Academy. Vol. 24 pag. 457.

2) Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammenhängen. Journ. Crelle, Bd. 57 S 359 u. Bd. 59 S. 173.

3) Ueber die Curven dritter Ordnung, welche durch die zwei imaginären unendlich entfernten Kreispunkte gehen. Zeitschrift f. Math. u. Phys., Bd. 14 S. 368.

4) Ueber eine besondere Curve dritter Ordnung etc. Math. Annal., d. 5 S. 50.

5) Ueber die Curve dritter Ordnung, welche den geometrischen Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar bildet. Ibid., S. 83.

6) Ueber das Problem der Glanzpunkte. Sitzungsber. d. Wiener Akademie, Bd. 64 S. 730.

7) Ueber eine gewisse Curve dritten Grades. Journ. Crelle, Bd. 97 S. 177.

8) Bemerkungen zur vorangehenden Abhandl. Ibid., Bd. 99 S. 98.

Erkennung ihrer besonderen Eigenschaften und ihrer mannigfaltigen Formen führt, nämlich als stereographische Projectionen der sphärischen Curve vierter Ordnung.[1])

§ 1.

Gemeinsame Eigenschaften.

1. Der Kugel $\varkappa$ sei eine Curve vierter Ordnung $C^{(4)}$ aufgeschrieben und werde mit der Kugel stereographisch, d. i. aus einem Punkte O der Kugeloberfläche auf eine der zugehörigen Tangentialebene ω parallele Ebene ε projicirt. Das Bild ist eine Curve vierter oder dritter Ordnung, je nachdem das Projectionscentrum ausserhalb oder auf $C^{(4)}$ liegt, aber von besonderer Art. Im ersten Falle enthält nämlich die Ebene ω vier imaginäre Punkte I_1, I_2; I'_1, I'_2 der Raumcurve $C^{(4)}$, welche, paarweise in den imaginären Inflexionstangenten i, i' der Kugel im Punkte O liegend, durch diese in die unendlich fernen Kreispunkte $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}'$ der Ebene ε projicirt werden; die letzteren sind demnach Doppelpunkte der Projection von $C^{(4)}$. Im zweiten Falle hat die Ebene ω mit $C^{(4)}$ ausser zwei in O vereinigten reellen zwei imaginäre Punkte I, I' gemein, je einen in jeder der beiden Wendetangenten i, i', und diese werden, wie früher, in die unendlich fernen Kreispunkte $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}'$ von ε abgebildet, welche also der Projection von $C^{(4)}$ angehören. Wir fassen das Resultat so zusammen:

Bei der stereographischen Projection der Kugel bildet sich eine ihr aufgeschriebene Curve vierter Ordnung $C^{(4)}$ in eine Curve vierter Ordnung $\mathfrak{C}^{(4)}$ mit den unendlich fernen Kreispunkten als Doppelpunkten oder in eine durch die unendlich fernen Kreispunkte gehende Curve dritter Ordnung $\mathfrak{C}^{(3)}$ ab, je nachdem das Projectionscentrum O ausserhalb oder auf $C^{(4)}$ liegt.

Man hat für eine Curve der ersten Art die Bezeichnung bicirculare Curve vierter Ordnung, für eine solche der zweiten Art die Bezeichnung circulare Curve dritter Ordnung eingeführt.

2. Das gemeinsame Polartetraeder der Flächen des durch $C^{(4)}$ gelegten Büschels zweiter Ordnung werden wir das Fundamentaltetraeder der Raumcurve nennen und seine Ecken mit P_1, P_2, P_3, P_4, die zugeordneten Ebenen mit π_1, π_2, π_3, π_4 bezeichnen. Die ersteren sind Inversionscentra von $C^{(4)}$, d. i. Punkte, aus welchen die Curve mittels reciproker Radien in sich selbst übergeführt werden kann; die letzteren schneiden aus $\varkappa$ Kreise K_1, K_2, K_3, K_4 aus, durch welche die zu $\varkappa$ orthogonalen Directrixkugeln der Inversionen beziehungsweise hindurchgehen; je drei dieser Kreise haben den vierten zum gemeinsamen Orthogonalkreis. Für die Projection ergiebt sich hieraus der Satz:

---

1) Bezüglich der wichtigen Stellung, welche die hier behandelten Curven in der Kinematik einnehmen, und ihrer mechanischen Erzeugung sei auf Dr. L. Burmester's „Lehrbuch der Kinematik“ hingewiesen.

Die bicirculare Curve vierter und die circulare Curve dritter Ordnung besitzt vier Inversionscentra $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$, aus welchen sie in sich selbst übergeführt werden kann; die Seitenpaare des vollständigen Vierecks, in welchem diese Centra die Ecken bilden und das fortan als Fundamentalviereck der betreffenden Plancurve bezeichnet werden soll, schneiden sich unter rechtem Winkel; die Inversionskreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_4$ stehen in solcher Beziehung zu einander, dass je drei von dem vierten orthogonal geschnitten werden.

Aus der Lage des Polartetraeders gegen die Kugel folgt, dass drei dieser Inversionskreise reell, der vierte imaginär sei; den letzteren ersetzen wir durch jenen reellen Kreis, welcher von den drei ersteren diametral geschnitten wird.

3. Wir betrachten einen der vier Kegel zweiter Ordnung, welche der Raumcurve $C^{(4)}$ doppelt umschrieben sind, beispielsweise den Kegel mit dem Mittelpunkt P_1. Jede seiner Tangentialebenen schneidet die Kugel nach einem Kreise, welcher $C^{(4)}$ doppelt, und zwar in zwei bezüglich P_1 inversen Punkten, berührt. Die Gesammtheit dieser Kreise bildet eine durch $C^{(4)}$ eingehüllte Kreisschaar, welche dem sphärischen Kreisbündel mit dem Potenzcentrum P_1 und mit dem Orthogonalkreis K_1 angehört, und der Ort der Pole der Kreisebenen in Bezug auf die Kugel ist ein in π_1 liegender Kegelschnitt C_1. Beachtet man wieder, dass der Pol eines Kugelkreises bei stereographischer Projection den Mittelpunkt des Bildkreises ergiebt, so schliesst man:

Die bicirculare Curve vierter und die circulare Curve dritter Ordnung besitzt vier Schaaren doppelt berührender Kreise; für jede Schaar ist einer der vier Inversionskreise gemeinsamer Orthogonalkreis und ein Kegelschnitt der Ort der Mittelpunkte.

Die aufgetretenen vier Kegelschnitte mögen in Correspondenz mit den Inversionskreisen mit $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_4$ bezeichnet und Centralkegelschnitte oder, aus einem später nachzuweisenden Grunde, Focalkegelschnitte genannt werden.

4. Der in Art. 3 erwähnte Kegelschnitt C_1 und die Spur C'_1 des doppelt umschriebenen Kegels aus P_1 in π_1 sind polarreciproke Figuren bezüglich des Kreises K_1; mithin haben alle drei Linien, C_1, K_1 und C'_1, dasselbe gemeinsame Tripel conjugirter Punkte, nämlich $P_2 P_3 P_4$. In der Projection spricht sich das folgendermassen aus:

Das einem Focalkegelschnitte und dem zugehörigen Inversionskreise gemeinsame Tripel harmonischer Pole fällt mit den Mittelpunkten der drei anderen Inversionskreise zusammen.

5. Die Beziehung zwischen der Raumcurve $C^{(4)}$ und den vier Kegelschnitten C_1, C_2, C_3, C_4 kann auch in der Weise ausgedrückt werden, dass man die Raumcurve als Ort der Berührungspunkte der durch die Tangenten

eines der Kegelschnitte an die Kugel gelegten Berührungsebenen, mit anderen Worten: als Selbstschattengrenze der Kugel bei der Beleuchtung derselben aus einem der Kegelschnitte definirt. Diese Auffassung zeigt, dass die in einem Punkte von $C^{(4)}$ an die Kugel gelegte Tangentialebene alle vier Kegelschnitte gleichzeitig, jede andere keinen derselben berührt. Demzufolge berührt die Ebene ω, im Falle das Projectionscentrum ausserhalb $C^{(4)}$ liegt, keinen der Kegelschnitte, und im Falle es auf $C^{(4)}$ liegt, alle vier zugleich; wir schliessen daraus für die Projection:

Die Focalkegelschnitte einer bicircularen Curve vierter Ordnung berühren die unendlich ferne Gerade nicht, sind also Ellipsen, Kreise oder Hyperbeln; die Focalkegelschnitte einer circularen Curve dritter Ordnung sind Parabeln.

6. Die Anwendung der in Art. 5 besprochenen räumlichen Beziehung auf einen der Punkte I (Art. 1) von $C^{(4)}$ ergiebt folgendes Resultat. Die Tangentialebene der Kugel in einem solchen Punkte nimmt die betreffende Inflexionstangente i auf und geht daher durch O, sie enthält die in dem gedachten Punkte an $C^{(4)}$ gezogene Tangente und berührt die Kegelschnitte C_1, C_2, C_3, C_4. Ihre Spur in ε ist demnach Tangente an die Projection von $C^{(4)}$ in einem der unendlich fernen Kreispunkte und gemeinschaftliche Tangente der Focalkegelschnitte $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_4$. Daraus folgt einerseits, dass die Focalkegelschnitte, da sie nach den unendlich fernen Kreispunkten gerichtete gemeinsame Tangenten besitzen, confocal sind, und andererseits, dass ihre Brennpunkte als Schnittpunkte conjugirter Paare der in den unendlich fernen Kreispunkten an die Curvenprojection gezogenen Tangenten Doppelbrennpunkte der letzteren sind. Hiermit ist der Satz erwiesen:

Die Focalkegelschnitte einer bicircularen Curve vierter Ordnung sind confocale Ellipsen, oder Hyperbeln, oder concentrische Kreise, diejenigen einer circularen Curve dritter Ordnung confocale (und coaxiale) Parabeln; ihre gemeinsamen Brennpunkte sind Doppelbrennpunkte der Curve.

7. Eine beliebige Tangente t an den Kegelschnitt C_1 und die ihrem Berührungspunkte T in Bezug auf den Kreis K_1 zugeordnete Polare t' schneiden sich in einem Punkte D der Doppelcurve, welche die Ebene π_1 mit der Tangentenfläche von $C^{(4)}$ gemein hat. Denn t ist gemeinschaftliche Spur der Berührungsebenen, welche in zwei einer Kegelkante aus P_1 angehörenden Punkten A, A' von $C^{(4)}$ an die Kugel gelegt werden, und t' die Spur der Berührungsebene des Kegels längs der nämlichen Kante, beide Spuren auf π_1 bezogen, und es schneidet die letztgenannte Ebene aus dem erstgenannten Ebenenpaar dasjenige Tangentenpaar von $C^{(4)}$ aus, dessen Berührungspunkte A, A' sind. Auf die Projection von $C^{(4)}$ übertragen giebt dies den Satz:

Der Ort des Schnittpunktes zweier Tangenten der bicircularen Curve vierter und der circularen Curve dritter Ordnung, deren Berührungspunkte durch eine der vier Inversionen einander zugeordnet sind, ist eine Curve vierter Ordnung mit Inflexionsknoten in den Centren der drei anderen Inversionen.

8. Aus Art. 7 geht weiter hervor, dass auch diejenigen Punkte, in welchen C_1 von K_1 oder von der Kugel geschnitten wird, der erwähnten Doppelcurve angehören. Die in einem solchen Punkte zusammentreffenden Tangenten von $C^{(4)}$ sind aber von besonderer Art; jede derselben hat nämlich mit der Kugel ausser diesem Punkte noch die im Berührungspunkte mit $C^{(4)}$ vereinigten zwei (imaginären) Punkte, im Ganzen also drei Punkte gemein, ist daher eine der Inflexionstangenten der Kugel in dem gedachten Punkte. Da nun die Projectionen der Inflexionstangenten eines beliebigen Punktes der Kugel durch die unendlich fernen Kreispunkte der Projectionsebene ε hindurchgehen, so ergiebt sich der Satz:

Jeder Punkt, in welchem ein Focalkegelschnitt von dem zugehörigen Inversionskreise geschnitten wird, ist Schnittpunkt von zwei aus den unendlich fernen Kreispunkten an die Projection von $C^{(4)}$ gezogenen Tangenten, also ein einfacher Brennpunkt dieser Projection. Es besitzt daher sowohl die bicirculare Curve vierter, als die circulare Curve dritter Ordnung 16 einfache Brennpunkte, welche zu je vieren auf die Inversionskreise und auf die Focalkegelschnitte vertheilt sind; hierdurch ist auch die Benennung dieser Kegelschnitte gerechtfertigt.

9. Die Schnittpunkte von $C^{(4)}$ mit der Oberfläche des Fundamentaltetraeders oder, was dasselbe bedeutet, mit den Kreisen K_1, K_2, K_3, K_4 sind Punkte stationärer Schmiegungsebenen der Raumcurve; durch jede Ecke des Tetraeders gehen vier solcher Ebenen und jede schneidet die Kugel nach einem Kreise, der mit der Curve vier aufeinander folgende Punkte gemein hat. Die Pole der durch P_1 gehenden stationären Schmiegungsebenen sind die Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von C_1 und K_1 mit C_1, ihre Schmiegungspunkte die Berührungspunkte derselben Tangenten mit K_1. Für die Projection ergiebt sich hieraus der folgende Satz:

Jeder Punkt, in welchem die Projection von $C^{(4)}$ von einem der Inversionskreise geschnitten wird, ist ein cyklischer Punkt oder Scheitel der Projection, d. h. ein Punkt, in welchem sie von einem Kreise vierpunktig berührt wird. Demnach besitzt die bicirculare Curve vierter und die circulare Curve dritter Ordnung 16 cyklische Punkte, welche zu je vier auf die Inversionskreise vertheilt sind. Sie ergeben sich als Berührungspunkte der den Inversionskreisen und den zugeordneten Focalkegelschnitten gemeinsamen Tangenten mit den ersteren, während die Berührungspunkte dieser Tangenten mit den Focalkegelschnitten Mittelpunkte der vierpunktig osculirenden Kreise sind.

10. Durch einen beliebigen Punkt A von $C^{(4)}$ gehen sieben ausgezeichnete Bisecanten: vier, welche ihn mit den Ecken des Fundamentaltetraders verbinden, und drei, welche die Paare conjugirter Kanten desselben schneiden; beide Gruppen hängen derart zusammen, dass die Bisecanten der zweiten Gruppe als Diagonaldreikant in dem durch die Bisecanten der ersten Gruppe gebildeten vollständigen Vierkant auftreten. Hierdurch sind dem Punkte A sieben Punkte der Curve in charakteristischer Weise zugeordnet, welche mit B_1, B_2, B_3, B_4; D_1, D_2, D_3 bezeichnet werden mögen.

Der ersten Gruppe der Bisecanten ist bezüglich der Kugel polar zugeordnet ein Vierseit $b_1 b_2 b_3 b_4$, welches in der zum Punkte A gehörigen Tangentialebene α der Kugel einerseits und in der Oberfläche des Fundamentaltetraeders andererseits liegt, und dessen Seiten die Kegelschnitte C_1, C_2, C_3, C_4 in Punkten 1, 2, 3, 4 beziehungsweise berühren, die in einer Geraden, nämlich in derjenigen Kugeltangente in A enthalten sind, welche der daselbst an die Curve $C^{(4)}$ gezogenen Tangente reciprok ist. Den Bisecanten der zweiten Gruppe ist das Diagonaldreiseit $d_1 d_2 d_3$ jenes Vierseits polar zugeordnet.

Während 1, 2, 3, 4 die Pole zu denjenigen Kugelkreisen sind, welche $C^{(4)}$ in den Punktepaaren AB_1, AB_2, AB_3, AB_4 berühren, entsprechen den Ecken des Vierseits $b_1 b_2 b_3 b_4$ Kreise, deren jeder mit der Curve ausser A zwei mit B und einen mit D bezeichneten Punkt gemein hat, und seinen Diagonalpunkten Kreise, deren jeder ausser A zwei mit D bezeichnete Punkte aufnimmt.

Für die Projection ergeben sich aus dieser räumlichen Betrachtung folgende Beziehungen:

Einem beliebigen Punkte $\mathfrak{A}$ der bicircularen Curve vierter und der circularen Curve dritter Ordnung sind sieben Punkte der Curve in bemerkenswerther Weise zugeordnet. Vier derselben, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_4$, entsprechen ihm vermöge der vier Inversionen und bilden die zweiten Berührungspunkte der durch $\mathfrak{A}$ gehenden doppelt berührenden Kreise, deren Centra (1), (2), (3), (4) in der zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Normale der Curve und auf den Focalkegelschnitten $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_4$ resp. liegen, auf letzteren derart, dass die zugehörigen Tangenten $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{b}_4$ ein Vierseit bilden, dessen Ecken in die Seiten des Fundamentalvierecks fallen [Ecke $(\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2)$ in die Seite $\overline{\mathfrak{P}_3 \mathfrak{P}_4}$ u. s. w.] und dessen Seiten auf den Strahlen $\mathfrak{A}\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{A}\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{A}\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{A}\mathfrak{P}_4$ beziehungsweise senkrecht stehen. Die aus den Ecken dieses Vierseits als Mittelpunkten durch $\mathfrak{A}$ beschriebenen sechs Kreise nehmen je zwei mit $\mathfrak{B}$ bezeichnete Punkte auf und schneiden sich in drei weiteren Punkten $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$ der Curve, deren Verbindungslinien mit $\mathfrak{A}$ auf den Diagonalen $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$ des obigen Vierseits beziehungsweise senkrecht stehen; die Kreise endlich, welche aus den Diagonalpunkten durch $\mathfrak{A}$ beschrieben werden, gehen durch je zwei mit $\mathfrak{D}$ bezeichnete Punkte.

11. Zwischen den verschiedenen Formen der Raumcurve $C^{(4)}$ und den Formen ihrer Projection besteht ein Zusammenhang, der nun näher betrachtet werden soll.

a) Bei der zweitheiligen Raumcurve $C^{(4)}$ ist das Fundamentaltetraeder vollständig reell. Eine seiner Ecken — etwa P_1 — liegt innerhalb der Kugel, die zugeordnete Ebene π_1 ausserhalb, der Kreis K_1 ist imaginär. Von den drei übrigen Ecken fällt eine — etwa P_2 — innerhalb C_1, die beiden anderen, P_3 und P_4, liegen ausserhalb dieses Kegelschnittes; demzufolge schneidet π_2 die Curve nicht und haben C_2 und K_2 keine gemeinsamen Tangenten, daher (da $C^{(4)}$ reell vorausgesetzt wird) auch keine gemeinsamen Punkte,[1]) es wird K_2 von C_2 eingeschlossen; dagegen schneiden π_3 und π_4 die Raumcurve in je vier Punkten, C_3 und K_3, ebenso C_4 und K_4 haben vier gemeinsame Tangenten, das eine Linienpaar vier, das andere keine gemeinsamen Punkte. Wir schliessen daraus:

Die bicirculare Curve vierter und die circulare Curve dritter Ordnung wird zweitheilig,

1. wenn der Inversionskreis imaginär ist;[2])
2. wenn Inversionskreis und Focalkegelschnitt keine gemeinsamen Tangenten haben;
3. wenn sie vier Tangenten und Punkte,
4. wenn sie vier Tangenten, aber keine reellen Punkte gemein haben.

Alle vier Fälle treten an einer solchen Curve neben einander auf, sie hat acht reelle, zu je vier auf zwei Inversionskreise vertheilte cyklische Punkte und vier reelle auf einem Kreise liegende einfache Brennpunkte.

b) Von dem Fundamentaltetraeder der eintheiligen Raumcurve $C^{(4)}$ sind nur zwei Ecken, P_1 und P_2, nebst den zugeordneten Ebenen π_1 und π_2 reell. Erstere liegen ausser der Kugel, letztere schneiden die Curve in je zwei reellen Punkten; C_1 und K_1, ebenso C_2 und K_2 haben je zwei reelle Tangenten und Punkte gemein. Daraus folgt:

Die bicirculare Curve vierter und die circulare Curve dritter Ordnung wird eintheilig, wenn Inversionskreis und Focalkegelschnitt zwei reelle gemeinsame Tangenten und Punkte

---

1) Der Fall, dass C und K keine Tangenten, aber vier reelle Punkte gemein haben, kann nur aus einer vollständig imaginären Raumcurve entspringen.

2) An die Stelle eines imaginären Inversions- als Orthogonalkreises tritt ein reeller Diametralkreis.

gemein haben, und es erscheint dieser Fall an der Curve zweimal; sie besitzt vier reelle cyklische Punkte und vier reelle einfache Brennpunkte, beide paarweise auf den zwei Inversionskreisen liegend.

c) Hat die Raumcurve $C^{(4)}$ einen Knotenpunkt P, so sind zwei Ecken des Fundamentaltetraeders in diesem und die zugeordneten Ebenen in der zugehörigen Tangentialebene π der Kugel vereinigt, welche die beiden anderen Ecken P_1, P_2 enthält. Von den Ebenen π_1, π_2 schneidet eine die Curve ausser im Doppelpunkte P in zwei reellen, die andere in zwei imaginären Punkten; die Kegelschnitte C_1, C_2 werden von den zugeordneten Kreisen K_1, K_2 in P einfach und zwar auf der hohlen Seite berührt, das eine Linienpaar hat ausserdem zwei Tangenten und Punkte, das andere Linienpaar keine weiteren Elemente gemein. Der Kegelschnitt C in π endlich ist so angeordnet, dass aus P zwei reelle Tangenten an ihn gehen, reciprok zugeordnet den Tangenten im Knotenpunkte. Auf die Projection überträgt sich dies wie folgt:

Die bicirculare Curve vierter und die circulare Curve dritter Ordnung hat einen Knotenpunkt,

1. wenn der Inversionskreis den Focalkegelschnitt auf der concaven Seite berührt und noch zwei Tangenten und Punkte oder
2. keine weiteren Elemente mit ihm gemein hat;
3. wenn er auf einen ausserhalb des Focalkegelschnitts liegenden Punkt sich reducirt.

Alle drei Fälle sind an der Curve vereinigt, sie besitzt zwei reelle cyklische Punkte und vier reelle einfache Brennpunkte, wovon zwei im Doppelpunkt vereinigt sind.

d) Hat die Raumcurve $C^{(4)}$ einen isolirten Doppelpunkt P, so ändern sich die Beziehungen dem Falle *c)* gegenüber insofern, als beide Ebenen π_1 und π_2 die Curve ausser im Doppelpunkte in zwei reellen Punkten schneiden, als ferner C_1, C_2 von den zugeordneten Kreisen K_1, K_2 auf der convexen Seite berührt werden und eines dieser Linienpaare ausserdem zwei Tangenten und Punkte, das andere blos zwei Tangenten gemeinsam hat; C in π endlich ist so angeordnet, dass aus P keine reelle Tangente daran gezogen werden kann. Demnach:

Die bicirculare Curve vierter und die circulare Curve dritter Ordnung hat einen isolirten Doppelpunkt,

1. wenn der Inversionskreis den Focalkegelschnitt auf der convexen Seite berührt und ausserdem zwei Tangenten und Punkte, oder
2. nur zwei Tangenten mit ihm gemein hat;
3. wenn er auf einen innerhalb des Focalkegelschnitts liegenden Punkt sich reducirt.

Alle drei Fälle treten neben einander auf, die Curve besitzt vier reelle cyklische Punkte, paarweise auf die beiden Inversionskreise vertheilt, und vier reelle einfache Brennpunkte, zwei davon im Doppelpunkt vereinigt.

e) Von dem Fundamentaltetraeder der Raumcurve $C^{(4)}$ mit einem stationären Punkte P sind drei Ecken in diesem und die zugeordneten Ebenen in der zugehörigen Berührungsebene π der Kugel vereinigt. Die vierte Ecke P_1 liegt in π und die ihr zugeordnete Ebene π_1 hat mit $C^{(4)}$ ausser dem stationären und dem ihm benachbarten noch einen vierten reellen Punkt gemein, C_1 wird durch K_1 im Punkte P osculirt. C in π ist so angeordnet, dass nur eine Tangente durch P daran gezogen werden kann — entsprechend der einzigen Tangente der Curve im stationären Punkte. Wir leiten hieraus ab:

Die bicirculare Curve vierter und die circulare Curve dritter Ordnung hat einen Rückkehrpunkt,

1. wenn der Inversionskreis den Focalkegelschnitt osculirt;
2. wenn er auf einen Punkt im Umfange des Focalkegelschnitts sich reducirt.

Beide Fälle kommen an der Curve neben einander vor, sie besitzt nur einen reellen cyklischen Punkt und vier reelle einfache Brennpunkte, drei davon im stationären Punkte vereinigt.

f) Mit dem Auftreten von zwei Doppelpunkten zerfällt die Raumcurve $C^{(4)}$ in zwei Kreise und besitzt unendlich viele Fundamentaltetraeder, welchen zwei Ecken P_1, P_2 und Ebenen π_1, π_2 gemeinsam sind. Bei reellen und getrennten Doppelpunkten liegen P_1 und P_2 ausserhalb der Kugel, K_1 und K_2 sind reell und in reeller Doppelberührung mit C_1, C_2 respective. Fallen die Doppelpunkte zusammen, so vereinigt sich mit ihnen einer der Punkte P_1, P_2 — etwa P_1 — und C_2 wird von K_2 in einem Scheitel osculirt. Sind die Doppelpunkte imaginär, so fällt einer der Punkte P_1, P_2 innerhalb der Kugel und wird einer von den Kreisen K_1, K_2 imaginär; die letzteren befinden sich in ideeller Doppelberührung mit den zugehörigen Kegelschnitten. Wir schliessen daraus:

Die bicirculare Curve vierter Ordnung zerfällt in zwei Kreise, die circulare Curve dritter Ordnung in einen Kreis und eine Gerade, wenn der Inversionskreis den Focalkegelschnitt doppelt berührt.[1]) Die beiden Theile der Curve schneiden sich, wenn die Doppelberührung reell ist, sie haben keine

---

1) Diese beiden Grenzformen haben den Grund gegeben zu der Bezeichnung „bicirculare Curve“ einerseits und „circulare Curve“ andererseits. Vergl. Casey, l. c. S. 459.

reellen Punkte gemein, wenn sie ideell ist; in beiden Fällen existiren zwei Inversionskreise und zwei Focalkegelschnitte. Die beiden Theile der Curve berühren einander, wenn die Doppelberührung (Osculation) in einem Scheitel des Focalkegelschnitts stattfindet; in diesem Falle existirt nur ein Inversionskreis und ein Focalkegelschnitt.

Die bicirculare Curve vierter Ordnung zerfällt insbesondere in einen Kreis und einen Punkt (Nullkreis, Doppelpunkt), die circulare Curve dritter Ordnung in eine Gerade und einen Punkt, wenn der Inversionskreis sich auf einen Brennpunkt des Focalkegelschnittes reducirt.

12. Für die Curven mit singulärem Punkte hat sich im vorigen Artikel unter *c*), *d*), *e*) ein gemeinsames Entstehungsgesetz ergeben; sie sind Enveloppen eines Kreises, dessen Mittelpunkt einen Kegelschnitt durchläuft, während sein Umfang durch einen festen Punkt geht. Die Natur des singulären Punktes ist von der Lage des festen Punktes gegen den Kegelschnitt und die Ordnung der Curve von der Art des letzteren abhängig.

Nur ein veränderter Ausdruck dieser Darstellungsweise ist es, wenn man die genannten Curven definirt als Ort der Punkte, welche zu einem festen Punkte symmetrisch liegen in Bezug auf die Tangenten eines Kegelschnittes. Aus dieser Auffassung aber geht ihre Identität mit den Fusspunktcurven der Kegelschnittslinien[1]) unmittelbar hervor. Denn ist $\mathfrak{C}$ (Fig. 1) ein Kegelschnitt, $\mathfrak{P}$ ein fester Punkt, $\mathfrak{t}$ eine beliebige Tangente an $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ der zu $\mathfrak{P}$ symmetrische Punkt bezüglich $\mathfrak{t}$, so beschreibt der Schnittpunkt $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{P}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{t}$, d. i. der Fusspunkt des aus $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{t}$ gefällten Lothes, eine Curve, welche der von $\mathfrak{A}$ beschriebenen ähnlich ist, weil beständig $\mathfrak{P}\mathfrak{B} = \frac{1}{2}\mathfrak{P}\mathfrak{A}$ ist.

Aus obiger Definition lässt sich für die in Rede stehenden Curven noch ein bemerkenswerthes gemeinsames Entstehungsgesetz nachweisen, das wie folgt ausgesprochen werden kann: Wenn ein Kegelschnitt über einen ihm congruenten festen Kegelschnitt derart rollt, dass der Berührungspunkt in Bezug auf beide beständig gleiche relative Lage hat, so beschreibt ein mit dem rollenden Kegelschnitt fest verbundener Punkt eine bicirculare Curve vierter oder eine circulare Curve dritter Ordnung, je nachdem die Kegelschnitte einen Mittelpunkt haben oder Parabeln sind, und zwar eine Curve mit Knotenpunkt, mit isolirtem Doppelpunkt oder mit Rückkehrpunkt, je nachdem der beschreibende Punkt ausserhalb, innerhalb oder auf dem Umfange des rollenden Kegelschnitts angenommen wird. Ist $\mathfrak{C}$ (Fig. 2) der feste Kegelschnitt, $\mathfrak{P}$ ein fester Punkt, $\mathfrak{C}'$ eine beliebige Lage des rollenden

1) Vergl. A. Ameseder, Grunert's Archiv, Th. 64 S. 145.

Kegelschnitts, so sind unter den gemachten Voraussetzungen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ in Bezug auf die gemeinsame Tangente $\mathfrak{t}$ symmetrisch angeordnet und irgend zwei bezüglich $\mathfrak{t}$ symmetrische Punkte $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ haben gegen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ resp. gleiche relative Lage. Letzteres gilt auch von $\mathfrak{P}$ und dem symmetrisch zugeordneten Punkte $\mathfrak{A}$, welch' letzterer dem Früheren zufolge eine Curve von der oben bezeichneten Art beschreibt, und da $\mathfrak{P}$ in Bezug auf $\mathfrak{C}$ fest bleibt, so steht auch $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{C}'$ während des Rollens von $\mathfrak{C}'$ in fester Verbindung.

13. In weiterer Ausführung der Ergebnisse des Art. 5 soll nun die Art der Focalkegelschnitte einer bicircularen Curve vierter Ordnung und ihre gegenseitige Lage bei einer circularen Curve dritter Ordnung bestimmt werden.

a) Die Spuren der Berührungsebenen, welche durch das Projectionscentrum O an die der Raumcurve $C^{(4)}$ doppelt umschriebenen Kegel zweiter Ordnung gehen, haben für die Projection $\mathfrak{C}^{(4)}$ zweifache Bedeutung: sie sind Doppeltangenten derselben und vertreten gleichzeitig diejenigen doppelt berührenden Kreise, deren Centra die unendlich fernen Punkte der Focalkegelschnitte sind. Daraus folgt:

Die bicirculare Curve vierter Ordnung besitzt acht Doppeltangenten, welche sich paarweise in den Inversionscentren schneiden und auf den Asymptoten der zugeordneten Focalkegelschnitte senkrecht stehen.

Die Anzahl der reellen (reell oder ideell berührenden) unter ihnen hängt von der Lage des Projectionscentrums gegen $C^{(4)}$ ab.

Wir betrachten zuerst die zweitheilige Raumcurve. Ihre doppelt umschriebenen Kegel scheiden sich in zwei Paare: die Kanten der Kegel des einen Paares gehen durch je einen Punkt des einen und einen Punkt des andern Astes; die Kanten der Kegel des andern Paares verbinden je zwei Punkte desselben Astes. Die Kegel eines jeden Paares sind wieder dadurch von einander unterschieden, dass bei dem einen beide Aeste von $C^{(4)}$ einem Mantel angehören, während bei dem andern auf jedem Mantel ein Ast der Curve liegt. Wird nun O innerhalb eines Astes von $C^{(4)}$ angenommen, so liegt es innerhalb beider Kegel des ersten Paares und innerhalb des einen Kegels aus dem zweiten Paare, so dass nur an einen der vier Kegel reelle Tangentialebenen gehen; die beiden Aeste von $\mathfrak{C}^{(4)}$ sind bei dieser Lage von O derart angeordnet, dass der eine von dem andern eingeschlossen wird. Wählt man das Projectionscentrum zwischen den beiden Aesten von $C^{(4)}$, so liegt es ausserhalb beider Kegel des ersten und auch ausserhalb des einen Kegels des zweiten Paares, so dass an drei Kegel reelle Tangentialebenen gehen; die beiden Aeste von $\mathfrak{C}^{(4)}$ schliessen einander bei dieser Wahl des Centrums aus. Demnach:

Die beiden Ovale einer zweitheiligen bicircularen Curve vierter Ordnung liegen entweder so, dass eines das andere einschliesst oder dass sie sich gegenseitig ausschliessen. Im ersten Falle hat die Curve ein Paar reeller Doppeltangenten, und drei ihrer Focalkegelschnitte sind Ellipsen, die vierte eine Hyperbel; im zweiten Falle besitzt die Curve drei Paare reeller Doppeltangenten, und drei der Focalkegelschnitte sind Hyperbeln, der vierte eine Ellipse.

Bei der eintheiligen Raumcurve gehen, wo auch das Projectionscentrum angenommen werden mag, nur an einen der beiden doppelt umschriebenen Kegel reelle Tangentialebenen durch dasselbe; wir schliessen daraus:

Die eintheilige bicirculare Curve vierter Ordnung besitzt ein Paar reeller Doppeltangenten; von den Focalkegelschnitten ist einer eine Ellipse, der andere eine Hyperbel.

Bei der Raumcurve mit einem Doppelpunkt hat man zwischen den beiden doppelt umschriebenen Kegeln und dem dreifach umschriebenen Kegel aus dem Doppelpunkt zu unterscheiden. Wo auch das Projectionscentrum angenommen wird, immer gehen durch dasselbe nur an einen der erstgenannten Kegel reelle Tangentialebenen; bezüglich des letzterwähnten Kegels sind solche nur dann vorhanden, wenn das Projectionscentrum ausserhalb der Curvenschleifen, resp. mit dem isolirten Doppelpunkt auf einerlei Seite des Curvenastes angenommen wird. Hieraus ergiebt sich:

Die bicirculare Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkt hat ein Paar reeller Doppeltangenten; zwei ihrer Focalkegelschnitte sind Hyperbeln, der dritte eine Ellipse oder umgekehrt, je nachdem die Schleifen der Curve einander ausschliessen oder nicht, beziehungsweise je nachdem der isolirte Punkt ausserhalb oder innerhalb des Ovals liegt.

Auch bei der Raumcurve mit Rückkehrpunkt ist zwischen dem einzigen doppelt umschriebenen und dem dreifach umschriebenen Kegel aus der Curvenspitze zu unterscheiden; je nachdem das Projectionscentrum auf der einen oder der andern Seite des Curvenastes angenommen wird, gehen durch dasselbe an den ersten oder den zweiten Kegel reelle Tangentialebenen. Wir drücken dies so aus:

Die beiden Doppeltangenten der bicircularen Curve mit Rückkehrpunkt sind imaginär oder reell, je nachdem durch den stationären Punkt reelle oder imaginäre Tangenten an die Curve gehen; von ihren Focalkegelschnitten ist einer eine Ellipse, der andere eine Hyperbel.

b) Einfacher gestalten sich die Verhältnisse bei der circularen Curve dritter Ordnung. Hier gehen Ellipsen und Hyperbeln in Parabeln über und der Gegensatz drückt sich nur noch in der Lage aus. Die bezüglichen Resultate lassen sich demnach so zusammenfassen:

Bei der zweitheiligen circularen Curve dritter Ordnung sind drei Focalparabeln nach der einen, die vierte nach der entgegengesetzten Seite offen; bei der eintheiligen und ebenso bei der Curve mit Rückkehrpunkt haben die beiden Focalparabeln entgegengesetzte Lage; bei der Curve mit Doppelpunkt sind zwei Focalparabeln der dritten entgegengesetzt.

§ 2.

Besondere Formen der bicircularen Curve vierter Ordnung.

14. Für drei specielle Lagen des Projectionscentrums nimmt $\mathfrak{C}^{(4)}$ besondere Merkmale an, und zwar: *a*) wenn *O* in einer Seitenfläche, *b*) in einer Kante des Fundamentaltetraeders, und *c*) wenn es in weiterer Specialisirung des ersten Falles in einem der Punkte angenommen wird, welche der in jener Ebene liegende Kegelschnitt *C* mit dem zugehörigen Kreise *K* gemein hat.

a) Einfach symmetrische Curven.

15. Gehört das Projectionscentrum *O* einer Seitenfläche des Fundamentaltetraeders an, so fällt die zugeordnete Ecke in die Ebene ω; ihre Projection rückt daher ins Unendliche in der zur Spur jener Seitenfläche senkrechten Richtung, die bezügliche Inversion von $\mathfrak{C}^{(4)}$ verwandelt sich in orthogonale Symmetrie in Bezug auf die eben genannte Spur, welche gleichzeitig einen Inversionskreis und den ihm zugeordneten Focalkegelschnitt vertritt, gemeinsame Axe der anderen Focalkegelschnitte ist und die übrigen Inversionscentra enthält. Die Anordnung der reellen einfachen Brennpunkte und der cyklischen Punkte hängt davon ab, in welcher Seitenfläche des Tetraeders das Projectionscentrum gewählt worden ist; in dieser Richtung können folgende Fälle unterschieden werden:

α) Bei der zweitheiligen Curve liegen die Brennpunkte entweder in der Symmetrieaxe oder in einem Kreise; im ersten Falle enthält diese nothwendig auch vier cyklische Punkte, im zweiten Falle nur bedingungsweise.

β) Bei der eintheiligen Curve liegen zwei Brennpunkte und zwei cyklische Punkte in der Symmetrieaxe, die zwei anderen Paare zu beiden Seiten derselben.

γ) Bei der Curve mit Knotenpunkt fallen ausser den beiden mit ihm vereinigten Brennpunkten entweder zwei cyklische und die beiden anderen Brennpunkte in die Symmetrieaxe, oder es gehört ihr keiner dieser Punkte an.

δ) Bei der Curve mit isolirtem Punkt enthält die Symmetrieaxe ausser den zwei dort vereinigten noch die zwei anderen Brennpunkte und zwei cyklische Punkte, oder nur die letzteren.

ε) Bei der Curve mit stationärem Punkt liegen die vier einfachen Brennpunkte und der einzige cyklische Punkt in der Symmetrieaxe.

Eine einfach symmetrische Curve ergiebt sich, wenn der Mittelpunkt des Inversionskreises in einer Axe des Focalkegelschnitts angenommen wird.

b) Zweifach symmetrische Curven.

16. Liegt das Projectionscentrum in einer Kante des Fundamentaltetraeders, so gehört es zwei Seitenflächen zugleich an. Die den letzteren gegenüberliegenden Ecken fallen in die Ebene ω, ihre Projectionen rücken daher ins Unendliche und es gehen zwei der Inversionen von $\mathfrak{C}^{(4)}$ in orthogonale Symmetrie in Bezug auf die zu einander rechtwinkligen Spuren der oben erwähnten Seitenflächen über. Diese Spuren fallen mit den Axen der Focalkegelschnitte zusammen, und jede vertritt die Stelle eines Focalkegelschnitts und des zugeordneten Inversionskreises; in ihrem Schnittpunkte, dem Centrum der Focalkegelschnitte und der bicircularen Curve, vereinigen sich die im Endlichen verbliebenen Inversionscentra. Um eine Uebersicht über die Curven dieser Gattung zu erlangen, unterscheiden wir folgende Fälle.

α) Die Curve ist zweitheilig, in ihrem Mittelpunkte sind zwei Inversionscentra vereinigt. Schliesst ein Ast den andern ein, so liegen die vier einfachen Brennpunkte in einer Symmetrieaxe; schliessen die Aeste einander aus, so liegen die Brennpunkte entweder in einer Symmetrieaxe oder in einem Kreise; im ersten Falle enthält jede Symmetrieaxe vier cyklische Punkte, im zweiten Falle nur die eine, während die anderen vier auf einem Kreise liegen.

Curven dieser Art entstehen, wenn Inversionskreis und Focalkegelschnitt concentrisch sind.

β) Die Curve ist eintheilig; jede der beiden Symmetrieaxen enthält zwei einfache Brennpunkte und zwei cyklische Punkte. Ein eigentlicher Focalkegelschnitt und Inversionskreis ist nicht vorhanden.

Bei Curven dieser Art entfällt die Erzeugung durch einen variablen Kreis, dessen Mittelpunkt einen Kegelschnitt durchläuft.

γ) Die Curve hat einen Doppelpunkt; zwei Brennpunkte sind mit diesem vereinigt, die beiden anderen liegen mit zwei cyklischen Punkten in einer Symmetrieaxe, während die andere ausser dem Doppelpunkt keinen weiteren Punkt der Curve, beziehungsweise zwei cyklische Punkte enthält, je nachdem der Doppelpunkt ein Knotenpunkt oder isolirt ist.

Curven dieser Art besitzen einen Focalkegelschnitt, dessen Mittelpunkt den Inversionskreis vertritt; sie sind identisch mit den Fusspunktcurven der Hyperbel und der Ellipse in Bezug auf den Mittelpunkt — der Hyperbel entspricht die Curve mit Knotenpunkt, der Ellipse die Curve mit isolirtem Punkt.

Die Lemniscate des Bernoulli zählt als specieller Fall hierher, sie entspringt aus der gleichseitigen Hyperbel.[1])

c) Cartesische Curven.

17. Das Projectionscentrum werde in einen der (reellen) Punkte verlegt, wo die Kugel von den Kegelschnitten C_1, C_2, C_3, C_4 getroffen wird. In Art. 8 ist gezeigt worden, dass die Inflexionstangenten der Kugel in einem solchen Punkte Tangenten an $C^{(4)}$ sind; es vereinigen sich also die Punkte I, I_1 in i und I', I'_1 in i' (s. Art. 1) in je einen Punkt, und wendet man die Betrachtungen des Art. 6 auf diesen Fall an, so ergiebt sich, dass erstens die Brennpunkte der Focalkegelschnitte und zweitens die Tangenten in jedem der beiden unendlich fernen imaginären Doppelpunkte von $\mathfrak{C}^{(4)}$ zusammenfallen, so dass diese Doppelpunkte den Charakter von Spitzen annehmen und die Focalkegelschnitte concentrische Kreise werden. Man bezeichnet diese Gattung bicircularer Curven als Cartesische Curven.

Die eben hervorgehobenen Eigenschaften von $\mathfrak{C}^{(4)}$ lassen sich auch in folgender Weise begründen. Die Polare einer beliebigen Tangente von $C^{(4)}$ in Bezug auf die Kugel hat mit jedem der Kegelschnitte C_1, C_2, C_3, C_4 einen Punkt gemein (s. Art. 5); da nun bei der getroffenen Wahl von O die Inflexionstangenten i, i' sowohl Tangenten von $C^{(4)}$, als auch polarreciprok bezüglich der Kugel sind, so enthalten sie die Schnittpunkte der Ebene ω mit den drei Kegelschnitten, welche nicht durch O gehen; infolge dessen gehen die Projectionen dieser Kegelschnitte durch die unendlich fernen Kreispunkte, sind also Kreise, während die Projection des vierten durch O gehenden Kegelschnitts, welche mit der Spur seiner Ebene — der Symmetrieaxe von $\mathfrak{C}^{(4)}$ — zusammenfällt, als Hyperbel aufzufassen ist. Aus der so erwiesenen Coincidenz der Brennpunkte der Focalkegelschnitte folgt die Vereinigung der Doppelbrennpunkte von $\mathfrak{C}^{(4)}$ zu einem dreifachen Brennpunkt, sowie das Zusammenfallen der Tangenten in den imaginären Doppelpunkten, also die Verwandlung dieser in Spitzen.

Den beiden Punkten, welche der durch O gehende Kegelschnitt mit der Ebene ω gemein hat, als Polen entsprechen die beiden doppelt berührenden Ebenen von $C^{(4)}$, welche O enthalten und deren Spuren Doppeltangenten von $\mathfrak{C}^{(4)}$ sind; eine dieser Ebenen ist ω selbst, die in ihr befindlichen Tangenten i, i' projiciren sich in die unendlich fernen Kreispunkte (Spitzen), deren Verbindungslinie, d. i. die unendlich ferne Gerade, als Doppeltangente nur im übertragenen Sinne gelten kann. Es besitzt demnach jede Cartesische Curve nur eine zu ihrer Symmetrieaxe senkrechte Doppeltangente.

1) Die in diesem Artikel betrachteten Curven, mit Ausnahme der unter α) angeführten Species, bei welcher die Brennpunkte in einem Kreise liegen, sind von Siebeck, l. c., behandelt worden.

Bei der folgenden Aufzählung der einzelnen Formen wird der Kegelschnitt, auf welchem O liegt, mit C und der Kugelkreis, den seine Ebene ausschneidet, mit K bezeichnet.

α) Die Raumcurve sei zweitheilig. C und K schneiden sich in vier reellen Punkten, von welchen einer das Projectionscentrum O selbst ist (Fig. 3); die aus diesem nach den drei anderen gerichteten Strahlen gehen durch die Ecken des den beiden Linien gemeinsamen Polardreiecks, ihre Schnittpunkte mit der Projectionsebene sind also einfache Brennpunkte und Inversionscentra von $\mathfrak{C}^{(4)}$ zugleich. Mithin:

Die zweitheilige Cartesische Curve hat drei reelle einfache Brennpunkte, welche in der Symmetrieaxe liegen und mit den drei Inversionscentren zusammenfallen.

Diese Curvenform, von Descartes eingeführt, ist unter der speciellen Bezeichnung Cartesisches Oval vermöge ihrer optischen Eigenschaften vielfach studirt worden.[1])

β) Die Raumcurve sei eintheilig. C und K schneiden sich in zwei Punkten, wovon der eine O selbst ist; der aus O nach dem andern geführte Strahl geht auch durch die reelle Ecke des Polardreiecks, das C und K gemein haben, giebt also in seiner Spur einen einfachen Brennpunkt und das im Endlichen verbleibende Inversionscentrum von $\mathfrak{C}^{(4)}$. Daher:

Die eintheilige Cartesische Curve hat drei reelle einfache Brennpunkte; davon liegt einer in der Symmetrieaxe und fällt mit dem einzigen Inversionscentrum zusammen, die beiden anderen sind symmetrisch zu beiden Seiten der Axe.

γ) Die Raumcurve habe einen Doppelpunkt. C und K berühren einander und schneiden sich überdies in zwei Punkten, deren einer O ist; der aus O nach dem andern gezogene Strahl enthält eine Ecke des den Linien gemeinsamen Polardreiecks. Wir schliessen also wie vorhin:

Die Cartesische Curve mit Doppelpunkt hat drei reelle einfache Brennpunkte, die in der Symmetrieaxe liegen; zwei derselben sind mit dem Doppelpunkte vereinigt, der dritte ist zugleich Centrum der einzigen Inversion.

Diese unter dem Namen Pascal'sche Schnecke oder Limaçon bekannte Curve ist nach den Erörterungen des Art. 12 identisch mit der Fusspunktcurve des Kreises und jene besondere Form der Epitrochoide, welche entsteht, wenn der rollende Kreis gleich ist dem Grundkreise; sie besitzt einen Knotenpunkt oder einen isolirten Punkt, je nachdem der Pol im ersten, der beschreibende Punkt im zweiten Falle ausserhalb oder innerhalb des betreffenden Kreises angenommen wird.

δ) Die Raumcurve habe einen stationären Punkt. K osculirt C und schneidet es in einem Punkte, der als Projectionscentrum zu wählen

1) Chasles, Aperçu histor., p. 161 und Note XXI p. 350 flg.

ist. Der aus O nach dem Osculationspunkte gerichtete Strahl trifft die Projectionsebene in einem Punkte, der ebenso als Vereinigung dreier einfachen Brennpunkte, wie dreier (uneigentlichen) Inversionscentren anzusehen ist. Mithin:

Die Cartesische Curve mit Rückkehrpunkt hat drei mit dem letzteren vereinigte einfache Brennpunkte; eine eigentliche Inversion besteht hier nicht.

Diese unter dem Namen Cardioide bekannte Curve ist nach Art. 12 Fusspunktcurve des Kreises in Bezug auf einen Punkt seines Umfanges, zugleich Epicykloide für den speciellen Fall, dass die Halbmesser des rollenden und des Grundkreises gleich gross sind.

§ 3.

Circulare Curven dritter Ordnung.

18. Unter den Kanten des Kegels dritter Ordnung, welcher die sphärische Curve $C^{(4)}$ aus einem ihrer Punkte projicirt, befinden sich auch die von diesem Punkte ausgehenden ausgezeichneten Bisecanten, von welchen in Art. 10 die Rede war, nämlich die vier, welche nach den Ecken des Fundamentaltetraeders gehen, und die drei, welche die Paare gegenüberliegender Kanten desselben schneiden. Für die Projection ergiebt sich daraus der Satz:

Die circulare Curve dritter Ordnung geht durch die Ecken $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ und durch die Diagonalpunkte $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$ ihres Fundamentalvierecks.

19. Die Tangente an $C^{(4)}$ im Punkte O heisse u, die ihr conjugirte Kugeltangente sei v. Die Spur der ersteren ist der reelle unendlich ferne Punkt $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{C}^{(3)}$; die letztere geht durch die Punkte, in welchen die Ebene ω von den Kegelschnitten C_1, C_2, C_3, C_4 berührt wird, und bezeichnet daher in ε die Axenrichtung $\mathfrak{V}$ der Focalparabeln. Die den eben erwähnten Berührungspunkten bezüglich der Kugel zugeordneten Polarebenen sind die vier den Punkt O enthaltenden doppelt berührenden Ebenen von $C^{(4)}$ und gehen durch u, ihre Spuren sind Tangenten an $\mathfrak{C}^{(3)}$ in den Inversionscentren und gehen durch $\mathfrak{U}$. Die Schmiegungsebene σ von $C^{(4)}$ in O endlich, welche ausser u die benachbarte Tangente der Curve enthält und sie überdies in einem Punkte S schneidet, ergiebt als Spur eine Gerade $\mathfrak{s}$, welche, da sie $\mathfrak{C}^{(3)}$ in dem unendlich fernen Punkte $\mathfrak{U}$ berührt, eine Asymptote der Curve ist und zum Unterschied von den beiden imaginären Asymptoten, deren Berührungspunkte $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}'$ sind, als reelle Asymptote bezeichnet werden soll; sie schneidet die Curve im Punkte $\mathfrak{S}$. Wir fassen diese Ergebnisse so zusammen:

Die in den Inversionscentren an die circulare Curve dritter Ordnung gezogenen Tangenten und ihre reelle Asymptote sind rechtwinklig zur gemeinsamen Axe der Focalparabeln.

19. Die Verbindungslinie zweier Punkte A, B von $C^{(4)}$ werde zur Axe eines Ebenenbüschels gemacht; dasselbe schneidet aus der Kugel ein Büschel von Kreisen und aus der Curve eine Schaar von Bisecanten aus, deren Ort eine der Regelflächen aus dem Flächenbüschel zweiter Ordnung ist, das $C^{(4)}$ zur Grundcurve hat. Im Weiteren sind zwei Fälle zu unterscheiden.

a) Geht die Gerade AB durch eine Ecke des Fundamentaltetraeders, so ist die Regelfläche developpabel, ein Kegel mit jener Ecke als Mittelpunkt; der hieraus resultirende Satz, nur ein anderer Ausdruck für die Eigenschaft der Inversion, lautet:

Die Kreise eines Büschels, welches zwei mit einer Ecke des Fundamentalvierecks in gerader Linie liegende Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ der circularen Curve dritter Ordnung zu Grundpunkten hat, schneiden die Curve in Punktepaaren, deren Verbindungslinien in derselben Ecke zusammenlaufen.

Vermöge der eindeutigen Zuordnung der Kreise des Büschels und der Punktepaare von $\mathfrak{C}^{(3)}$ folgt daraus:

Ein Kreisbüschel und ein ihm projectivisches Strahlenbüschel aus einem Punkte der Potenzaxe erzeugen eine circulare Curve dritter Ordnung, für welche der Mittelpunkt des Strahlenbüschels Inversionscentrum ist; der dem unendlich grossen Kreise entsprechende Strahl berührt die Curve in diesem Inversionscentrum und bezeichnet damit die Richtung der reellen Asymptote.

b) Bei allgemeiner Lage der Punkte A, B wird die Regelfläche windschief, und da sie das Projectionscentrum O enthält, so projiciren sich ihre beiden Regelschaaren in Strahlenbüschel. Mittelpunkte dieser Büschel sind zwei Punkte $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ von $\mathfrak{C}^{(3)}$, nämlich die Spuren der durch O gehenden Regelstrahlen l, l', und da Ebene (ll') als Berührungsebene der Regelfläche im Punkte O die Tangente u aufnimmt, so läuft die Gerade $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}'$ durch $\mathfrak{U}$. Nehmen wir an, $\overline{AB}$ gehöre zur Regelschaar l, so können wir das Ergebniss dieser Betrachtung so aussprechen:

Die Kreise eines Büschels, das zwei beliebige Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ der circularen Curve dritter Ordnung zu Grundpunkten hat, schneiden die Curve in Punktepaaren, deren Verbindungslinien durch einen festen Punkt $\mathfrak{L}'$ der Curve gehen; dieser mit dem Punkte $\mathfrak{L}$, wo $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ die Curve zum dritten Mal schneidet, verbunden giebt eine Parallele zur reellen Asymptote.

Daraus schliesst man wie vorhin:

Ein Kreisbüschel und ein ihm projectivisches Strahlenbüschel erzeugen eine circulare Curve dritter Ordnung; der dem unendlich grossen Kreise entsprechende Strahl bezeichnet die Richtung der reellen Asymptote.

Angenommen, die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ lägen selbst in einer Parallelen zur Asymptote; dann fällt $\mathfrak{L}$ mit dem unendlich fernen Punkte $\mathfrak{U}$, folglich $\mathfrak{L}'$ mit $\mathfrak{S}$ zusammen, und die Anwendung des obigen Satzes auf diesen besondern Fall giebt den Satz:

Ist die Verbindungslinie der Grundpunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ parallel zur Asymptote, so laufen die Verbindungslinien der ausgeschnittenen Punktepaare in dem Punkte $\mathfrak{S}$ zusammen, in welchem die Curve von der Asymptote geschnitten wird.

Umgekehrt:

Geht die Verbindungslinie der Grundpunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ durch den Punkt $\mathfrak{S}$, so sind die Verbindungslinien der ausgeschnittenen Punktepaare parallel zur Asymptote.

Werden zwei Inversionscentra als Grundpunkte des Büschels gewählt, z. B. $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ (Fig. 4), so tritt die in $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$ liegende Ecke $\mathfrak{Q}_3$ des Diagonaldreiecks an die Stelle von $\mathfrak{L}$; und da unter den Kreisen des Büschels einer durch $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ geht, weil die Winkel $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_2\mathfrak{P}_2$ rechte sind, so tritt der dritte in $\overline{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}$ liegende Curvenpunkt $\mathfrak{Q}'_3$ an die Stelle von $\mathfrak{L}'$. Daraus schliesst man zunächst:

Die Parallelen zur Asymptote, welche durch die Ecken des Diagonaldreiecks $\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2\mathfrak{Q}_3$ gezogen werden, treffen die Gegenseiten dieses Dreiecks in Punkten der Curve $\mathfrak{Q}'_1$, $\mathfrak{Q}'_2$, $\mathfrak{Q}'_3$.

Im Folgenden werden $\mathfrak{Q}'_1$, $\mathfrak{Q}'_2$, $\mathfrak{Q}'_3$ kurz die Gegenpunkte zu $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$ genannt.

Ferner folgt aus dem Obigen:

Die Kreise eines durch zwei Inversionscentra gelegten Büschels schneiden die Curve in Punktepaaren, deren Verbindungslinien durch den Gegenpunkt desjenigen Diagonalpunktes gehen, welcher in der Potenzaxe des Büschels liegt.

Endlich:

Die Kreise eines durch zwei Diagonalpunkte gelegten Büschels schneiden die Curve in Punktepaaren, deren Verbindungslinien durch den dritten Diagonalpunkt laufen.

20. Die Umkehrung des ersten unter Art. 19*b*) bewiesenen Satzes führt in ihrer Anwendung auf specielle Fälle zu bemerkenswerthen Eigenschaften der Curve; sie lautet:

Zieht man durch zwei Punkte $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ der circularen Curve dritter Ordnung, deren Verbindungslinie der Asymptote parallel ist, zwei beliebige Strahlen, welche die Curve in den Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, beziehungsweise in $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ schneiden, so liegen die vier Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ jedesmal in einem Kreise.

a) Zunächst mögen die Punkte eines Paares, etwa $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, zusammenfallen; der entsprechende Satz lautet:

18*

Berührt ein Kreis die Curve in $\mathfrak{A}$ und schneidet sie in $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, so treffen die Tangente in $\mathfrak{A}$ und die Gerade $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ mit der Curve in Punkten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ zusammen, deren Verbindungslinie der Asymptote parallel ist.

b) Wir lassen nun in beiden Paaren die Punkte zusammenfallen und werden so zu dem Satze geführt:

Die Tangenten, welche ein die Curve doppelt berührender Kreis mit ihr gemein hat, schneiden die Curve in zwei Punkten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$, deren Verbindungslinie der Asymptote parallel ist. Oder auch: Die Verbindungslinie der Berührungspunkte irgend zweier aus $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ an die Curve geführten Tangenten geht durch ein Inversionscentrum.

Ein specielles Punktepaar $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ bilden die auf der Asymptote selbst liegenden Punkte $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{S}$; da nun die aus $\mathfrak{U}$ an die Curve geführten Tangenten sie in den Inversionscentren berühren, so müssen die aus $\mathfrak{S}$ gezogenen Tangenten in den Diagonalpunkten berühren. Mithin:

Die in den Diagonalpunkten $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$ des Fundamentalvierecks an die Curve gelegten Tangenten vereinigen sich in dem Punkte $\mathfrak{S}$, wo sie von der Asymptote geschnitten wird.

Hieraus folgt, dass ein Kreis, welcher die Curve in einem der Diagonalpunkte berührt, sie in zwei Punkten schneidet, deren Verbindungslinie der Asymptote parallel ist.

c) Es falle ferner der Punkt $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{L}$, ebenso $\mathfrak{B}'$ mit $\mathfrak{L}'$ zusammen; die beiden Strahlen berühren dann die Curve in $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ und schneiden sie in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ beziehungsweise. Mit Beziehung auf einen in Art. 19 bewiesenen Satz ergiebt sich hieraus:

Zwei Punkte $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$, deren Verbindungslinie der Asymptote parallel ist, liegen mit ihren Tangentialpunkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ in einem Kreise und die Verbindungslinie der letzteren geht durch den Punkt $\mathfrak{S}$ der Curve.

Wird $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}'_1$ für $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ genommen, so geht $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{S}$ und somit $\mathfrak{A}'$ in den Tangentialpunkt $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{S}$ über; dasselbe gilt für $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}'_2$ und $\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{D}'_3$. Daher:

Die in $\mathfrak{D}'_1$, $\mathfrak{D}'_2$, $\mathfrak{D}'_3$ an die Curve gezogenen Tangenten vereinigen sich im Tangentialpunkte $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{S}$.

d) Wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ sich vereinigen, so berührt der durch die vier Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ gelegte Kreis die Curve in $\mathfrak{A}$ und schneidet sie in den Punkten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$; der unter *a)* gefundene Satz erfährt folgende Erweiterung:

Berührt ein Kreis die Curve in $\mathfrak{A}$ und schneidet sie in $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, so treffen die Strahlen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}'$ die Curve in zwei Punkten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$, deren Verbindungslinie der Asymptote parallel läuft.

e) Fallen endlich drei von den vier Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ zusammen, etwa $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ mit $\mathfrak{A}$, so verwandelt sich der durch sie gelegte Kreis in den Krümmungskreis der Curve im Punkte 𝔄 und der Strahl 𝔏𝔄𝔅 geht in die Tangente desselben Punktes über. Hiermit ergiebt sich der Satz, der eine einfache Construction der Krümmungskreise von $\mathfrak{C}^{(3)}$ gestattet:

Osculirt ein Kreis die Curve im Punkte 𝔄 und schneidet sie im Punkte 𝔄′, so treffen die Tangente in 𝔄 und der Strahl 𝔄𝔄′ die Curve in zwei Punkten 𝔏, 𝔏′, deren Verbindungslinie der Asymptote parallel ist.

Seine Anwendung auf ein Inversionscentrum und auf einen Diagonalpunkt des Fundamentalvierecks beweist die Sätze:

Der Krümmungskreis in einem Inversionscentrum $\mathfrak{P}_i$ schneidet die Curve dort, wo sie von dem Strahl $\mathfrak{P}_i\mathfrak{S}$ getroffen wird.

Der Krümmungskreis in einem Diagonalpunkte $\mathfrak{Q}_i$ des Fundamentalvierecks schneidet die Curve in dem Gegenpunkt $\mathfrak{Q}'_i$.

21. Nach den Ausführungen des Art. 19 gehört zu jeder Bisecante der Raumcurve $C^{(4)}$ eine bestimmte durch $C^{(4)}$ gehende Regelfläche zweiter Ordnung; das reciproke Gebilde der letzteren in Bezug auf die Kugel ist eine Fläche derselben Art, deren Regelstrahlen denjenigen der ersten Fläche polar zugeordnet sind. In der stereographischen Projection bilden sich zwei Polaren der Kugel in ein Paar rechtwinkliger Geraden ab, und die Entfernung der Kugelpunkte, welche in der einen enthalten sind, wird im Bilde durch die andere halbirt. Im Zusammenhange mit den Ergebnissen des Art. 19 folgt hieraus der Satz:

Zieht man durch zwei Punkte 𝔏, 𝔏′ der circularen Curve dritter Ordnung, deren Verbindungslinie der Asymptote parallel ist, beliebige Strahlen, welche die Curve weiter in 𝔄 und 𝔅, beziehungsweise in 𝔄′ und 𝔅′ schneiden mögen, so werden die Mittellothe der Sehnen 𝔄𝔅 und 𝔄′𝔅′ durch ein und denselben Kegelschnitt eingehüllt.

Die Punkte 𝔏, 𝔏′ können nur zusammenfallen, indem sie sich mit einem Inversionscentrum vereinigen; dann decken sich auch die beiden Strahlenbüschel um 𝔏, 𝔏′ und der sie einhüllende Kegelschnitt geht in die dem betreffenden Inversionscentrum zugeordnete Focalparabel über.

Es giebt aber einen Fall, wo die Regelschaaren der polaren Fläche sich ebenso wie die der ursprünglichen in zwei Strahlenbüschel projiciren und der diese Projectionen einhüllende Kegelschnitt demgemäss in ein Punktepaar ausartet. Offenbar tritt dies dann ein, wenn an die Stelle von 𝔏, 𝔏′ das specielle Punktepaar 𝔘, 𝔖 gesetzt wird; denn da alle Sehnen 𝔄𝔅, welche durch 𝔘 gehen, parallel sind, so werden auch ihre Mittellothe parallel und haben den unendlich fernen Punkt 𝔅 gemein. Es handelt sich also noch um den Punkt, in welchem die Mittellothe der Sehnen 𝔄′𝔅′ aus 𝔖 sich vereinigen. Die Strahlenbüschel aus 𝔘 und 𝔖 projiciren diejenige durch $C^{(4)}$ gehende Regelfläche zweiter Ordnung, welche das Ebenenbüschel durch die Tangente u (s. Art. 19) bestimmt; die Ebene ω enthält zwei Erzeugende dieser Fläche, nämlich u und die Gerade II', folglich gehen zwei Erzeugende der polarreciproken Fläche durch das Centrum O der Projection. Diejenige, welche u entspricht, ist v und giebt, wie oben schon erwähnt, den Punkt $\mathfrak{V}$ als Mittelpunkt des zu $\mathfrak{U}$ gehörigen Strahlenbüschels; diejenige, welche $\overline{II'}$ entspricht, geht dem Art. 6 zufolge durch den Doppelbrennpunkt $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{C}^{(3)}$ und dieser also ist Mittelpunkt des zweiten Strahlenbüschels, welches dem Sehnenbüschel aus $\mathfrak{S}$ zugeordnet ist.

Der Ort der Schnittpunkte zugeordneter Strahlen aus den Büscheln $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ ist ein Kegelschnitt, und zwar eine gleichseitige Hyperbel, weil ihm der unendlich ferne Punkt der Asymptote von $\mathfrak{C}^{(3)}$ (als Halbirungspunkt der in ihr enthaltenen Sehne) und die Richtung $\mathfrak{V}$ der gemeinsamen Axe der Focalparabeln (als Mittelpunkt der durch die unendlich fernen Kreispunkte begrenzten Sehne) angehört; $\mathfrak{C}^{(3)}$ wird von dieser Hyperbel in den Inversionscentren geschnitten.

Der Ort der Schnittpunkte zugeordneter Strahlen aus den Büscheln $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{F}$ ist der über $\mathfrak{S}\mathfrak{F}$ als Durchmesser beschriebene Kreis; er schneidet $\mathfrak{C}^{(3)}$ in den Diagonalpunkten des Fundamentalvierecks.

Diese Ergebnisse können in den Sätzen zusammengefasst werden:

Der Ort der Mittelpunkte aller zur reellen Asymptote parallelen Sehnen einer circularen Curve dritter Ordnung, oder die auf die Curve bezogene erste Polare ihres unendlich fernen Punktes $\mathfrak{U}$ ist eine gleichseitige Hyperbel, welche die Asymptote der Curve und die Axe ihrer Focalparabeln zu Asymptoten hat; sie schneidet die Curve in den Inversionscentren.

Der Ort der Mittelpunkte aller Sehnen, welche durch den Schnittpunkt $\mathfrak{S}$ der Curve mit ihrer Asymptote laufen, ist jener Kreis $\mathfrak{K}_0$, welcher die Verbindungslinie von $\mathfrak{S}$ mit dem Doppelbrennpunkt $\mathfrak{F}$ zum Durchmesser hat; er schneidet die Curve ausser in $\mathfrak{S}$ in den Diagonalpunkten des Fundamentalvierecks.[1]

22. An den letzten Satz lässt sich eine wichtige Folgerung knüpfen. Die vier Punkte $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$, $\mathfrak{O}_3$ und $\mathfrak{S}$, welche der Kreis $\mathfrak{K}_0$ mit $\mathfrak{C}^{(3)}$ gemein hat, bilden die Projectionen von vier Punkten der Raumcurve $C^{(4)}$, welche dem Punkte O, der als Projectionscentrum gewählt worden, in besonderer Weise zugeordnet sind: die ersten drei bestimmen mit O die Transversalen der Gegenkantenpaare des Fundamentaltetraeders und vertreten für ihn die in Art. 10 mit D_1, D_2, D_3 bezeichneten Punkte; der vierte, S, bestimmt mit der Tangente u die Osculationsebene von $C^{(4)}$ in O, welche aus der Kugel den zugehörigen Krümmungskreis ausschneidet. Dem obigen Satze

1) Auf diesen und den dritten in Art. 19 b) aufgestellten Satz gründet sich die von H. Durège im 14. Bande der Zeitschrift f. Math. u. Phys., S. 368 mitgetheilte Construction circularer Curven dritter Ordnung.

zufolge liegen nun die Punkte D_1, D_2, D_3, S in einem Kreise der Kugel und diese Beziehung gilt, wie für O, so für alle Punkte der $C^{(4)}$. Da endlich der osculirende Kreis der Raumcurve sich in den osculirenden Kreis des zugeordneten Punktes der Projection abbildet, so schliessen wir:

Bestimmt man zu einem beliebigen Punkte $\mathfrak{A}$ der circularen Curve dritter Ordnung (oder der bicircularen Curve vierter Ordnung) die Punkte $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$ und legt durch dieselben einen Kreis, so schneidet dieser die Curve zum vierten Male in demjenigen Punkte, wo sie von dem zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Osculationskreis geschnitten wird.

Fällt $\mathfrak{A}$ mit einem Inversionscentrum zusammen, so wird die zugehörige Punktgruppe $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$ durch die drei anderen Inversionscentra vertreten. Mithin:

Der durch drei Inversionscentra der circularen Curve dritter Ordnung gelegte Kreis schneidet die Curve nochmals dort, wo sie von dem zum vierten Inversionscentrum gehörigen Krümmungskreise geschnitten wird.

Lässt man $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{Q}_1$ zusammenfallen, so treten $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$ an die Stelle zweier $\mathfrak{D}$-Punkte und der durch die letzteren gelegte Kreis artet in die Gerade $\mathfrak{Q}_2\mathfrak{Q}_3$ aus; mithin schneidet der in $\mathfrak{Q}_1$ osculirende Kreis die Curve im zugehörigen Gegenpunkte $\mathfrak{Q}'_1$, ein Resultat, das am Schlusse des Art. 20 auf anderem Wege gefunden worden ist.

23. Aus der räumlichen Betrachtung, welche zu den Schlusssätzen des Art. 21 geführt hat, geht hervor, dass die Ebenen eines durch $\overline{II'}$ gelegten Büschels mit der Kugel ein Büschel von Kreisen, deren Pole auf dem Strahl $O\mathfrak{F}$ liegen, und mit der Raumcurve $C^{(4)}$ eine Schaar von Bisecanten bestimmen, welche den Strahl $O\mathfrak{S}$ schneiden; das Kreisbüschel bildet sich stereographisch in eine Schaar concentrischer Kreise um $\mathfrak{F}$ als Centrum, die Schaar der Bisecanten in ein Strahlenbüschel um den Punkt $\mathfrak{S}$ ab, und aus der eindeutigen Zuordnung zwischen Kreisen und Strahlen folgt:

Ein Büschel concentrischer Kreise und ein ihm projectivisches Strahlenbüschel erzeugen eine circulare Curve dritter Ordnung, für welche der Mittelpunkt des ersteren der Doppelbrennpunkt ist und welche im Mittelpunkt des letzteren von der reellen Asymptote geschnitten wird; diese selbst ist der dem unendlich grossen Kreise entsprechende Strahl.

24. Einem bekannten Satze zufolge fällt der Mittelpunkt des Kreises, der einem beliebigen Polardreieck einer Parabel umschrieben wird, in die Leitlinie. Da nun irgend drei Inversionscentra, z. B. $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ (Fig. 5), ein Tripel conjugirter Punkte in Bezug auf die dem vierten Centrum $\mathfrak{P}_1$ zugeordnete Focalparabel bilden, so geht die Leitlinie der letzteren durch den Mittelpunkt $\mathfrak{O}_1$ des durch die erstgenannten Punkte gelegten Kreises. Es ist aber leicht zu erkennen, dass die Punkte $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{P}_1$ mit dem Mittelpunkt

$\mathfrak{M}_0$ des Kreises $\mathfrak{K}_0$, welcher dem Diagonaldreieck $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3$ umschrieben ist, in einer Geraden und derart liegen, dass $\mathfrak{O}_1\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_0\mathfrak{P}_1$ ist. Daraus schliesst man:

Die Leitlinien der Focalparabeln einer circularen Curve dritter Ordnung gehen durch die Ecken eines Vierecks $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_4$, das symmetrisch ist zu dem Fundamentalviereck in Bezug auf den Mittelpunkt des durch seine Diagonalpunkte gelegten Kreises.

§ 4.

Besondere Formen der circularen Curve dritter Ordnung.

a) Symmetrische Curven.

25. Von den drei besonderen Lagen des Projectionscentrums, welche in Art. 14 angeführt worden sind, kann hier, wo dasselbe auch der Curve angehören muss, nur die erste platzgreifen; indem aber das Projectionscentrum auf der Raumcurve $C^{(4)}$ und in einer Seitenfläche des Fundamentaltetraeders zugleich liegt, fällt es mit einem der Punkte stationärer Schmiegungsebenen zusammen. Dies hat zur Folge, dass die Asymptote zur Wendetangente im unendlich fernen Punkte $\mathfrak{U}$ der Curve wird und dass die Zahl der cyklischen Punkte sich um Eins verringert. Als besondere Eigenschaft ist demnach zunächst hervorzuheben:

Die symmetrische circulare Curve dritter Ordnung besitzt eine Inflexionsasymptote.

Die Symmetrieaxe vertritt die Stelle einer Focalparabel und des zugeordneten Inversionskreises, enthält die im Endlichen verbliebenen Inversionscentra, die nun gleichzeitig cyklische Punkte der Curve und Diagonalpunkte ihres Fundamentalvierecks sind, und ist gemeinsame Axe der übrigen Focalparabeln. Auf ihr liegen:

a) bei der zweitheiligen Curve ausser den drei Inversionscentren eventuell die vier einfachen Brennpunkte, wenn sie nicht einem Kreise angehören;

b) bei der eintheiligen Curve ausser dem Inversionscentrum zwei einfache Brennpunkte — die beiden anderen sind symmetrisch angeordnet;

c) bei der Curve mit Knotenpunkt nebst dem Inversionscentrum die vier einfachen Brennpunkte, zwei davon mit dem Doppelpunkt vereinigt;

d) bei der Curve mit isolirtem Punkte ausser dem Inversionscentrum eventuell die beiden getrennt liegenden einfachen Brennpunkte, wenn sie nicht symmetrisch angeordnet sind;

e) bei der Curve mit stationärem Punkte die vier einfachen Brennpunkte, drei davon mit der Spitze vereinigt.

Eine symmetrische Curve entsteht, wenn der Mittelpunkt des Inversionskreises in der Axe der Focalparabel angenommen wird.

Die unter e) angeführte Form, die Cissoide, ist dem Art. 12 zufolge Fusspunktcurve einer Parabel in Bezug auf den Scheitel als Pol und kann auch in der dort näher angegebenen Weise als Rollcurve erzeugt werden, wenn Grundcurve und rollende Curve congruente Parabeln sind und der Scheitel der zweiten als beschreibender Punkt gewählt wird.

b) Curven, bei welchen die unendlich fernen Kreispunkte conjugirte Punkte sind.[1])

26. Eine besondere Gattung bilden diejenigen circularen Curven dritter Ordnung, bei welchen der Doppelbrennpunkt ein Punkt der Curve ist, mit anderen Worten, deren imaginäre Asymptoten auf der Curve sich schneiden, die unendlich fernen Kreispunkte also das Merkmal conjugirter Punkte aufweisen.

Dem am Schlusse des Art. 21 ausgesprochenen Satze zufolge liegt der Doppelbrennpunkt $\mathfrak{F}$ mit den Punkten $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$ und $\mathfrak{S}$ in einem Kreise $\mathfrak{K}_0$, dem letztgenannten Punkte diametral gegenüber; fällt er in die Curve, so muss er also nothwendig mit einem der Punkte $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$ coincidiren — es geschehe dies mit $\mathfrak{Q}_3$, so dass fortan $\mathfrak{Q}_3 \equiv \mathfrak{F}$. Dies hat zur Folge, dass für jede Focalparabel eine Seite des ihr zugeordneten, von drei Seiten des Fundamentalvierecks gebildeten Polardreiecks durch den Brennpunkt geht, die gegenüberliegende Ecke also auf der Leitlinie liegt. Daraus leitet sich der Satz ab:

Bei einer circularen Curve dritter Ordnung, welche durch ihren Doppelbrennpunkt geht, liegen die Inversionscentra in den Leitlinien der Focalparabeln, mit anderen Worten, die aus dem reellen unendlich fernen Punkte einer solchen Curve an dieselbe gezogenen Tangenten sind die Leitlinien ihrer Focalparabeln.

Die Vergleichung dieses Satzes mit dem in Art. 24 bewiesenen, welcher von der Lage der Leitlinien bei der allgemeinen Curve handelt, zeigt, dass bei der speciellen Curve die Inversionscentra sich in zwei Paare sondern, derart, dass die Punkte jedes Paares auf entgegengesetzten Seiten und in gleichen Entfernungen von dem zur Asymptote parallelen Durchmesser des Kreises $\mathfrak{K}_0$ liegen; und die Leitlinie der dem einen von beiden zugeordneten Focalparabel geht durch den andern.

Die Bedingung, unter welcher die circulare Curve dritter Ordnung durch ihren Doppelbrennpunkt geht, besteht dem Obigen zufolge darin, dass eine Seite des der Focalparabel und dem Inversionskreis gemeinsamen Polardreiecks durch den Brennpunkt der ersteren gehen, eine Ecke also auf ihrer Leitlinie liegen muss. Zieht sich der Inversionskreis auf einen Punkt zusammen, so ist der Bedingung nur dann entsprochen, wenn dieser Punkt entweder der Leitlinie angehört, oder mit dem Brennpunkt zusammenfällt.

---

1) Vergl. die in der Einleitung unter 4) bis 8) citirten Arbeiten.

In letzterem Falle zerfällt die Curve in eine Gerade und einen doppelt zählenden Punkt; **es bleibt also als einzig mögliche Singularität der Doppelpunkt** (als **Knotenpunkt**) **übrig.**

Da die Tangenten der Punkte $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$ sich in $\mathfrak{S}$ vereinigen, so folgt für die specielle Form der Curve der Satz:

Der Durchmesser des Kreises $\mathfrak{K}_0$, welcher $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{F}$ verbindet, berührt die Curve in dem letzteren Punkte.

27. Es ist früher gezeigt worden (Art. 19), dass ein Kreis, der durch zwei Diagonalpunkte geht, die Curve ausserdem in zwei Punkten schneidet, deren Verbindungslinie durch den dritten Diagonalpunkt läuft. Auf den vorliegenden besondern Fall angewendet, führt dies zu dem Resultat, dass die Kreise eines Büschels mit den Grundpunkten $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$ die Curve in Punktepaaren schneiden, deren Verbindungslinien ein Strahlenbüschel um den Doppelbrennpunkt $\mathfrak{F}$ bilden. Es handelt sich um die Zuordnung der Kreise und Strahlen.

Behufs Erledigung dieser Frage mögen drei besondere Kreise aus dem Büschel herausgehoben werden: derjenige, welcher die Curve in $\mathfrak{Q}_1$ berührt, dann jener, welcher sie in $\mathfrak{Q}_2$ berührt, endlich der Kreis $\mathfrak{K}_0$ (Fig. 6). Der erste schneidet die Curve ausser in $\mathfrak{Q}_2$ im Punkte $\mathfrak{Q}'_2$ [s. Schlussbemerkung Art. 20*b*)], ihm ist also der Strahl $\mathfrak{Q}_1\mathfrak{F}\mathfrak{Q}'_2$ zugeordnet, welcher, da Winkel $\mathfrak{S}\mathfrak{Q}_1\mathfrak{F}$ ein rechter ist, durch seinen Mittelpunkt $\mathfrak{M}_1$ geht; der zweite Kreis schneidet die Curve ausser in $\mathfrak{Q}_1$ im Punkte $\mathfrak{Q}'_1$, der ihm zugeordnete Strahl $\mathfrak{Q}_2\mathfrak{F}\mathfrak{Q}'_1$ geht aus dem analogen Grunde durch seinen Mittelpunkt $\mathfrak{M}_2$; der dritte Kreis schneidet die Curve in den Punkten $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{S}$, deren Verbindungslinie gleichfalls durch den zugehörigen Mittelpunkt $\mathfrak{M}_0$ geht. Daraus aber folgt, dass dieselbe Beziehung bei allen Paaren zugeordneter Elemente stattfindet; denn die Mittelpunkte der Kreise bilden auf der Centrallinie des Büschels eine Punktreihe, welche zu derjenigen, die das Strahlenbüschel um $\mathfrak{F}$ auf dieser Linie bestimmt, projectivisch ist, und da drei Elemente beider Reihen sich decken, so geschieht dies mit allen.

Die Centrallinie des Kreisbüschels ist, da sie die Mittelpunkte von $\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}'_2$ und $\mathfrak{Q}_2\mathfrak{Q}'_1$ verbindet, der Asymptote parallel, seine Axe $\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2$ **steht somit auf der Asymptote senkrecht.**

Hiermit ist die einfachste, von **Küpper** zuerst angegebene Erzeugungsweise der speciellen Curve nachgewiesen, die wir so aussprechen können:

Ein Kreisbüschel und das Büschel der durch einen festen Punkt gehenden Durchmesser erzeugen eine circulare Curve dritter Ordnung, für welche die unendlich fernen Kreispunkte conjugirte Punkte sind; der Mittelpunkt des Durchmesserbüschels ist ihr Doppelbrennpunkt und bestimmt mit den Grundpunkten des Kreisbüschels das Diagonaldreieck des Vierecks ihrer Inversionscentra.

Daraus ergiebt sich unmittelbar, dass die so erzeugte Curve zweitheilig ist, wenn das Kreisbüschel reelle Grundpunkte hat; dass sie eintheilig wird, wenn das Büschel ein solches mit Grenzpunkten ist; dass sie einen Doppelpunkt aufweist, wenn die Kreise des Büschels einander berühren.

Es möge noch ein zweiter Beweis des letzten Satzes Platz finden, welcher auf die Raumcurve $C^{(4)}$ zurückführt.

In der Ebene ω werde eine gerade Punktreihe p angenommen und aus derselben in einer beliebigen Geraden p' eine projectivische Punktreihe derart abgeleitet, dass jedem Punkte in p der ihm bezüglich der Kugel conjugirte Punkt in p' zugeordnet wird. Den beiden Punktreihen entsprechen in Bezug auf die Kugel zwei projectivische Büschel von Polarebenen, welche aus der Kugel zwei projectivische Kreisbüschel ausschneiden, deren Erzeugniss eine Curve vierter Ordnung $C^{(4)}$ ist, die durch das Projectionscentrum O als einen der Grundpunkte des aus p entspringenden Büschels hindurchgeht. Je zwei zugeordnete Kreise der beiden Büschel schneiden sich, den gemachten Voraussetzungen gemäss, orthogonal.

Nun gehe man zur Projection über. Die Projection von $C^{(4)}$ ist eine circulare Curve dritter Ordnung, die Projection des aus p' entsprungenen Kreisbüschels wieder ein Kreisbüschel, dagegen die Projection des der Polreihe p entsprechenden Kreisbüschels ein Strahlenbüschel, und da zusammengehörige Elemente auch in der Projection sich rechtwinklig schneiden, so sind die Strahlen Durchmesser der zugeordneten Kreise. Die circulare Curve dritter Ordnung, welche die Projection von $C^{(4)}$ bildet, erscheint also als Erzeugniss eines Kreisbüschels und der in einem festen Punkte zusammenlaufenden Durchmesser.

Es bleibt noch zu zeigen, dass sie durch ihren Doppelbrennpunkt geht. Der Beweis hierfür gründet sich auf die Bemerkung, dass die Polarebenen derjenigen Punkte in p und p', welche der Kugelfläche angehören, diese sowohl, als die Curve $C^{(4)}$ in eben diesen Punkten berühren. Demzufolge sind die Spuren der Polarebenen der beiden imaginären Punkte I, I', welche p mit der Kugel gemein hat, Tangenten der Projection von $C^{(4)}$ in den unendlich fernen Kreispunkten, und da sie sich auf der Curve, nämlich im Mittelpunkt des Durchmesserbüschels, schneiden, so ist $\mathfrak{C}^{(3)}$ thatsächlich von der bezeichneten speciellen Art.

Die Centrallinie $\mathfrak{m}$ des Kreisbüschels $\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2$ (Fig. 6) halbirt die durch $\mathfrak{F}$ laufenden Sehnen der Curve; einem für die allgemeine Curve bewiesenen Satze (Schlusssatz des Art. 21) zufolge werden die durch $\mathfrak{S}$ laufenden Sehnen von dem Umfange des Kreises $\mathfrak{K}_0$ halbirt. Wenn demnach die Asymptote $\mathfrak{s}$ (Fig. 7), ihr Schnittpunkt $\mathfrak{S}$ mit der Curve, der Doppelbrennpunkt $\mathfrak{F}$ und ein beliebiger Punkt $\mathfrak{A}$ der Curve gegeben sind, so lassen sich weitere Punkte in beliebiger Anzahl wie folgt ableiten. Man verzeichne den Kreis $\mathfrak{K}_0$, der $\mathfrak{S}\mathfrak{F}$ zum Durchmesser hat, und führe durch seinen Mittelpunkt $\mathfrak{M}_0$ die Parallele $\mathfrak{m}$ zu $\mathfrak{s}$. Der auf dem Strahl $\mathfrak{S}\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}$ in Bezug auf den

Umfang von $\mathfrak{K}_0$ symmetrisch liegende Punkt $\mathfrak{B}$ sowohl, als der auf dem Strahl $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}$ in Bezug auf $\mathfrak{m}$ symmetrisch liegende Punkt $\mathfrak{E}$ gehören der Curve an, und von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}$ aus lassen sich auf demselben Wege neue Punkte gewinnen. Nur wenn $\mathfrak{A}$ mit einem der Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{m}$ zusammenfällt, führt die unmittelbare Anwendung dieses Verfahrens zu keinem Ziele; da aber $\mathfrak{A}$ nun Doppelpunkt der Curve wird, so gehört ihr auch derjenige Punkt an, wo die Parallele zu $\mathfrak{m}$ aus $\mathfrak{F}$ und die Senkrechte zu $\mathfrak{m}$ aus $\mathfrak{A}$ sich schneiden, und dieser kann zum Ausgangspunkt genommen werden.

28. Die Betrachtungen des vorigen Artikels geben die Mittel an die Hand, um für eine nach dem Küpper'schen Verfahren erzeugte Curve die Asymptote, das Fundamentalviereck, die Focalparabeln und Inversionskreise zu construiren.

Mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen seien $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$ (Fig. 8) die Grundpunkte des Kreisbüschels und $\mathfrak{F}$ der Mittelpunkt des Durchmesserbüschels. Die Richtung der Asymptote $\mathfrak{z}$ ist durch die Centrallinie $\mathfrak{m}$ des Kreisbüschels gegeben und ihre Lage dadurch bestimmt, dass sie von $\mathfrak{m}$ ebenso weit entfernt ist wie $\mathfrak{F}$ und auf der entgegengesetzten Seite liegt. Der durch $\mathfrak{F}$ gelegte Kreis des Büschels schneidet $\mathfrak{z}$ im Punkte $\mathfrak{S}$, die aus $\mathfrak{S}$ nach den Punkten $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$, $\mathfrak{F}$ geführten Strahlen berühren hier die Curve. Die Verbindungslinien von $\mathfrak{F}$ mit den Punkten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{N}$, welche $\mathfrak{K}_0$ mit $\mathfrak{m}$ gemein hat, bestimmen die in $\mathfrak{F}$ sich schneidenden Seiten des Fundamentalvierecks, welche ihre Begrenzung durch die aus $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{N}$ resp. beschriebenen Kreise des Büschels erhalten; hiermit sind die Inversionscentra $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ bestimmt. Auch für die Focalparabeln liegen die nöthigen Elemente bereits vor; $\mathfrak{F}$ ist ihr gemeinsamer Brennpunkt, die durch $\mathfrak{F}$ zu $\mathfrak{m}$ gezogene Senkrechte $\mathfrak{x}$ ihre gemeinsame Axe, und ihre Leitlinien gehen durch die Inversionscentra — die Zuordnung ist aus Art. 26 zu entnehmen. Endlich sind noch die Inversionskreise anzugeben. Zu ihrer Construction führt die Bemerkung, dass die Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ mit dem Kreise $\mathfrak{L}$ zu einem Büschel mit der Potenzaxe $\overline{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4}$ und die Kreise $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_4$ mit dem Kreise $\mathfrak{N}$ zu einem Büschel mit der Potenzaxe $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$ gehören.

Die Construction erleidet eine unwesentliche Aenderung, wenn die Grundpunkte $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$ imaginär sind; die aus $\mathfrak{F}$ nach den Grenzpunkten des Kreisbüschels gezogenen Strahlen berühren die Curve in den letzteren. Von den beiden Kreisen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{N}$ wird nur einer und demgemäss nur ein Paar von Inversionscentren etc. reell.

29. Die Anwendung des eben besprochenen Verfahrens auf den Fall, wo $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$ zu einem Punkte $\mathfrak{O}$ (Fig. 9) sich vereinigen, führt in sehr einfacher Weise zu einigen bemerkenswerthen Eigenschaften der Curve mit Doppelpunkt.[1])

---

1) Vergl. die eingangs unter 7) und 8) citirten Arbeiten.

Durch den Anblick der Figur erkennt man unmittelbar:

Die Entfernung des Doppelpunktes $\mathfrak{O}$ von der Asymptote $\mathfrak{s}$ ist halb so gross als jene des Doppelbrennpunktes $\mathfrak{F}$, und die Dreiecke, welche er mit den Punkten $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{F}$ einerseits und mit den Inversionscentren $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ andererseits bestimmt, sind rechtwinklig bei $\mathfrak{O}$.[1])

Geht man von einem beliebigen Kreise des Büschels aus, verbindet die auf demselben liegenden Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ der Curve mit $\mathfrak{O}$ und schreitet nun zu immer kleineren Kreisen des Büschels fort, so sind die Grenzen, welchen die Strahlen $\mathfrak{A}\mathfrak{O}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{O}$ dabei sich nähern, die Tangenten der Curve im Doppelpunkte; da nun der Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{O}\mathfrak{B}$ beständig ein rechter bleibt, so folgt hieraus:

Die Tangenten im Doppelpunkt stehen aufeinander senkrecht.

Zu ihrer näheren Bestimmung führt die Bemerkung, dass jeder durch ein Inversionscentrum gezogene Strahl die Curve in zwei weiteren Punkten gleichwinklig schneidet; dies gilt auch von den Strahlen $\mathfrak{P}_1\mathfrak{O}$, $\mathfrak{P}_2\mathfrak{O}$ und lässt, wenn man den ersten Satz dieses Artikels beachtet, erkennen:

Die Tangenten im Doppelpunkte halbiren die Winkel der nach den beiden Inversionscentren gezogenen Strahlen.

Die Focalparabeln $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, deren Leitlinien durch $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_1$ beziehungsweise gehen, schneiden sich in $\mathfrak{O}$ rechtwinklig und berühren dort die zugeordneten Inversionskreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$; die dritte Focalparabel, welcher der punktförmige Inversionskreis $\mathfrak{O}$ zugehört, hat $\mathfrak{m}$ zur Leitlinie und berührt die Doppelpunktstangenten der Curve.

30. Es ist in Art. 25 erwähnt worden, dass bei der allgemeinen Curve, wenn sie symmetrisch wird, die Diagonalpunkte des Fundamentalvierecks mit den Inversionscentren, und zwar in der Symmetrieaxe zusammenfallen. Daraus folgt:

Wird die circulare Curve dritter Ordnung, bei welcher die unendlich fernen Kreispunkte conjugirte Punkte sind, symmetrisch, so ist ihr Doppelbrennpunkt zugleich Inversionscentrum und cyklischer Punkt.

Die Bedingung für das Entstehen einer solchen Curve, wenn sie als Enveloppe eines Kreises erzeugt wird, besteht darin, dass der Inversionskreis ausser der in Art. 26 ausgesprochenen Forderung auch noch die erfüllen muss, dass sein Mittelpunkt in der Axe der Focalparabel liege. Wird die Curve nach dem Küpper'schen Verfahren erzeugt, so tritt Symmetrie ein, sobald der Mittelpunkt des Durchmesserbüschels in der Potenzaxe des Kreisbüschels angenommen wird; sowohl dieser, als auch die Grundpunkte des Kreisbüschels sind Inversionscentra der Curve.

---

1) Von dem Dreieck $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{O}$ gilt Letzteres auch bei der allgemeinen Curve.

Die symmetrische Curve mit Doppelpunkt ist unter dem Namen *Strophoide* bekannt.

31. Zum Schluss mögen noch die beiden Fälle Erwähnung finden, wo die specielle Curve in *Linien niederer Ordnung* zerfällt.

Einmal geschieht dies, wenn der Mittelpunkt $\mathfrak{F}$ des Durchmesserbüschels in der Centrallinie $\mathfrak{m}$ des Kreisbüschels angenommen wird (Fig. 10); die Curve zerfällt dann in die Gerade $\mathfrak{m}$ und den aus $\mathfrak{F}$ als Mittelpunkt beschriebenen Kreis des Büschels, die Schnittpunkte beider sind Doppelpunkte der Gesammtcurve; das in Art. 28 erörterte Verfahren liefert die Inversionscentra und die Inversionskreise. Aus $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ wird der Kreis $\mathfrak{F}$ in die Gerade $\mathfrak{m}$ und umgekehrt übergeführt, aus den Punkten $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ werden beide in sich selbst transformirt. Die zu $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ gehörigen Focalparabeln berühren die zugehörigen Inversionskreise in den Endpunkten der kürzesten Brennpunktssehne, die beiden anderen fallen mit der Axe $\mathfrak{x}$ zusammen. Man entnimmt daraus, *dass die Einhüllende eines Kreises, dessen Mittelpunkt eine Parabel durchläuft und dessen Umfang den diese Parabel in den Endpunkten ihrer kürzesten Brennpunktssehne doppelt berührenden Kreis orthogonal schneidet, aus dem über dieser Sehne als Durchmesser beschriebenen Kreise und der ins Unendliche verlängerten Sehne selbst sich zusammensetzt.*

Der zweite hierher zählende Fall wird herbeigeführt, wenn man den Mittelpunkt des Durchmesserbüschels mit einem der Grundpunkte des Kreisbüschels zusammenfallen lässt; die Curve löst sich in einen doppelt zählenden Punkt und eine Gerade auf. Diese bildet die Leitlinie, jener den Brennpunkt der Focalparabel. Es spricht sich darin der bekannte Satz aus, dass die aus den Punkten einer Parabel durch ihren Brennpunkt beschriebenen Kreise von der Leitlinie eingehüllt werden.

XVI.

Zur Theorie der binären quadratischen Formen von positiver Determinante.

Von

J. VIVANTI

in Mantua.

Zweite Mittheilung.*

---

1. Die vorliegende Note ist der Untersuchung der unbestimmten Gleichung:**

$$Dx^2 - 3 = y^2$$

von dem Standpunkte der Theorie der quadratischen Formen aus besonders gewidmet. Es mögen jedoch einige Bemerkungen über Nullformen vorangehen, die vielleicht bei den nachfolgenden Entwickelungen von Nutzen sein werden.

2. Eine Nullform kann keine uneigentliche Form sein. Denn dazu müsste der grösste gemeinschaftliche Theiler von a, c in b nicht aufgehen, was unmöglich ist.

3. Eine primitive Nullform $(a, b, -c)$ ist stets und nur dann eine ambige Form, wenn $a = 1$ oder $a = 2$.

Dass in diesen Fällen die Form ambig ist, zeigt sich von selbst. Ist umgekehrt $(a, b, -c)$ eine ambige Form, so muss b durch a oder durch $\frac{1}{2}a$ theilbar sein; es ist aber $c = a + b$, folglich haben a, b, c den gemeinschaftlichen Theiler a oder $\frac{1}{2}a$, und die Form ist nicht primitiv, wenn nicht $a = 1$ oder $a = 2$ ist.

4. Die Werthe von D, für welche primitive ambige Nullformen $(a, b, -c)$ existiren, sind dadurch charakterisirt, dass die Gleichung A) für $x = 1$ oder für $x = 2$ einen ganzzahligen Werth von y liefert.

Ist erstens $(a, b, -c)$ eine ambige Form, so ist $a = 1$ oder $a = 2$, und

$$D = b^2 + b + 1 \text{ bezw. } = b^2 + 2b + 4;$$

durch Einsetzung in A) folgt:

$$x^2(b^2 + b + 1) - 3 = y^2 \text{ bezw. } x^2(b^2 + 2b + 4) - 3 = y^2.$$

---

* Die vorangehende Arbeit ist in dieser Zeitschrift Bd. XXXI S. 273—282 erschienen. Sie möge im Folgenden als Z. T. I citirt werden.

** Diese Gleichung werden wir von nun an als Gleichung A) bezeichnen.

Setzt man $x=2$ bezw. $=1$, so folgt:

$$y=\pm(2b+1) \text{ bezw. } =\pm(b+1).$$

Hat zweitens A) eine ganzzahlige Lösung $(1, y)$ oder $(2, y)$, so folgt:

$$D=y^2+3 \text{ bezw. } 4D=y^2+3.$$

Setzt man nun $y=b+1$ bezw. $=2b+1$ (da y im zweiten Falle offenbar ungerade sein muss), so erhält man:

$$D=b^2+2b+4 \text{ bezw. } =b^2+b+1,$$

so dass man die ambigen primitiven Nullformen hat:

$$(2, b, -(b+2)) \text{ bezw. } (1, b, -(b+1)).$$

5. Für geradzahlige Werthe von D giebt es keine primitiven Nullformen; denn aus

$$D=a^2+ab+b^2$$

erhellt, dass, wenn D gerade ist, a und b ebenfalls gerade sein müssen.

6. Besitzt die Gleichung A) ganzzahlige Lösungen, so folgt dasselbe für jede andere Gleichung

$$D'x^2-y^2=3,$$

bei welcher D' aus der Division von D durch ein vollständiges Quadrat entsteht. Denn setzt man $D'=\frac{D}{h^2}$, so entspringt aus der Lösung (x, y) von A) die Lösung (hx, y) unserer Gleichung.

7. Die Frage nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichung A) in ganzen Zahlen lässt sich bis jetzt nicht vollständig erledigen. Von der praktischen Auflösung des Problems, sowie von der Aufsuchung der Werthepaare (x, y), welche die Gleichung A) befriedigen, wird weiter unten gehandelt. Hier möge nur gezeigt werden, dass A) stets und nur für diejenigen Werthe von D **rational** auflösbar ist, welche Nullformen zulassen.

Ist g^2 das grösste in D enthaltene Quadrat, und setzt man:

$$D=g^2D', \quad x=\frac{X}{gZ}, \quad y=\frac{Y}{Z},$$

so geht A) in:

$$\alpha) \qquad D'X^2-Y^2-3Z^2=0$$

über; jeder rationalen Lösung von A) entspricht eine ganzzahlige Lösung von α), und umgekehrt. Nun ist bekanntlich (Dirichlet, Zahlentheorie, 3. Aufl., § 157) die Gleichung:

$$ax^2+by^2+cz^2=0$$

stets und nur dann in relativen Primzahlen x, y, z lösbar, wenn:

$$\left(\frac{-bc}{a}\right)=1, \quad \left(\frac{-ca}{b}\right)=1, \quad \left(\frac{-ab}{c}\right)=1,$$

und a, b, c nicht alle dasselbe Vorzeichen haben. Wenden wir den Satz auf die Gleichung α) an, so reduciren sich die obigen Bedingungen auf:

$$\left(\frac{-3}{D'}\right)=1,\quad \left(\frac{D'}{-3}\right)=1.$$

Wegen der zweiten Bedingung muss D' die Form $3n$ oder $3n+1$ haben; wegen der ersten muss (Gauss, Disq. Ar. 120) D' ungerade sein und keinen Theiler von der Form $6n+5$ besitzen.* Folglich müssen in D der Factor 2 und die Primzahlen von der Form $6n+5$ mit geraden Exponenten auftreten. Dies ist aber (Z. T. I, 5) die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Nullformen von der Determinante D; also ist unsere Behauptung gerechtfertigt.

8. Bevor wir zur praktischen Lösung der Gleichung A) übergehen, mögen einige numerische Resultate angegeben werden.

Die Anzahl der Werthe von D, welche primitive Nullformen zulassen, ist

zwischen	1	und	1000:	147,
„	1001	„	2000:	139,
„	5001	„	6000:	126,
„	42001	„	43000:	121,
„	99001	„	100000:	117.

Von den zwischen 1 und 1000 enthaltenen D-Werthen, welche Nullformen zulassen, giebt es nur 25, für welche die Gleichung A) unlösbar ist.

9. Wir fanden früher (Z. T. I, 7) als nothwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung A) die eigentliche Aequivalenz zweier primitiven reciproken Nullformen

$$(a,\, b,\, -c),\quad (b,\, a,\, -c)$$

von der Determinante D. Fragt man sich umgekehrt, ob die Gleichung A) für einen angegebenen Werth von D lösbar ist, so kann man eine primitive Nullform $(a,\, b,\, -c)$ von der Determinante D bestimmen, und untersuchen, ob die Formen $(a,\, b,\, -c)$, $(b,\, a,\, -c)$ eigentlich äquivalent sind. Dadurch erhält man zugleich eine Lösung von A), falls eine solche existirt.

10. Was die Aufsuchung einer primitiven Nullform von der Determinante D betrifft, so können wir ähnlich wie in Z. T. I, $5c$) verfahren. Da die Determinante D primitive Nullformen zulässt, so darf in D weder 2, noch 9, noch irgend eine Primzahl von der Form $6n+5$ aufgehen. Dann ist aber D (Gauss, D. Ar. 120, 182) in ein einfaches und ein dreifaches Quadrat zerlegbar:

$$D=p^2+3q^2,$$

derart, dass p und q relative Primzahlen sind. Setzt man:

$$2q=a,\quad p-q=b$$

oder

$$q+p=a,\quad q-p=b,$$

je nachdem $p>q$ oder $p<q$, so ist:

$$D=a^2+ab+b^2$$

* Also umfasst die erste Bedingung die zweite.

und a, b sind relative Primzahlen;* daher ist $(a, b, -c)$, wo $c = a + b$, eine primitive Nullform von der Determinante D.

11. Entwickelt man die Periode (Gauss, D. Ar. 186 figg.) der Form $(a, b, -c)$, so ist die Gleichung A) stets und nur dann lösbar, wenn in dieser Periode die Form $(b, a, -c)$ vorkommt. Ist in diesem Falle

$$(a, b, -a') = (-a', b', a'') = \cdots = (-a^{(n)}, b^{(n)}, b) = (b, a, -a') = \cdots$$
$$= (a, b, -a')$$

die Periode von $(a, b, -c)$ (wo a' statt c der Symmetrie halber gesetzt wurde), $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ die hieraus entstehende Substitution, welche $(a, b, -c)$ in $(b, a, -c)$ überführt, und setzt man

$$h^{(r+1)} = \frac{b^{(r)} + b^{(r+1)}}{a^{(r+1)}},$$

so ist (Gauss, D. Ar. 189):

$$\alpha = \pm [h'', h''', \ldots, h^{(n)}] = \pm p, \quad \gamma = \pm [h', h'', \ldots, h^{(n)}] = \pm q,$$

wo p, q positive Zahlen bezeichnen.** Nun ist (Z. T. I, 7):

$$x = \frac{\alpha + \gamma}{b};$$

also ist:

$$x = \frac{\alpha + \gamma}{b}, \quad y = \sqrt{Dx^2 - 3}$$

eine Lösung von A).

12. Wir werden x stets als positiv annehmen, also:

$$x = \frac{p + q}{b};$$

dann muss y denjenigen von den zwei Werthen $\pm\sqrt{Dx^2 - 3}$ erhalten, welcher $\equiv (a - b)x \pmod 3$ ist [siehe die Formel ι) in Z. T. I, 7, wo x statt r im Zähler zu setzen ist].

13. Es handelt sich jetzt darum, alle Lösungen der Gleichung A) aufzufinden. Ist $F = (A, B, C)$ eine eigentlich primitive Form der Determinante D, welche durch eine Substitution $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ in eine andere Form F_1 übergeht, so sind alle Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha_r, & \beta_r \\ \gamma_r, & \delta_r\end{pmatrix}$, welche F in F_1 überführen, durch die Formeln (Gauss, D. Ar. 203):

$$\alpha_r = \alpha t_r - (\alpha B + \gamma C)u_r, \quad \beta_r = \beta t_r - (\beta B + \delta C)u_r,$$
$$\gamma_r = \gamma t_r + (\alpha A + \gamma B)u_r, \quad \delta_r = \delta t_r + (\beta A + \delta B)u_r$$

gegeben, wo t_r, u_r alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung:

$$\alpha) \qquad t^2 - Du^2 = 1$$

---

* Die Zahlen $q + p$, $q - p$ können keinen andern gemeinschaftlichen Theiler besitzen, als 2; so auch die Zahlen $2q$, $p - q$. Sie besitzen auch thatsächlich diesen gemeinschaftlichen Theiler, wenn p und q ungerade sind; das kann aber in unserem Falle nicht geschehen, da D ungerade sein muss.

** Denn da a und b dasselbe Vorzeichen haben, ist $n+1$ gerade, und da ausserdem a positiv ist, haben α und γ stets dasselbe Vorzeichen.

darstellt. — Da also $(a, b, -c)$ eine primitive, und zwar eine eigentlich primitive (§ 2) Form ist, so geht dieselbe in die reciproke Nullform $(b, a, -c)$ durch jede Substitution $\begin{pmatrix}\alpha_r, & \beta_r\\ \gamma_r, & \delta_r\end{pmatrix}$ über, wenn $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ eine solche Substitution ist, und:

$$\beta)\quad \begin{cases} \alpha_r = \alpha t_r + (\gamma a + (\gamma-\alpha) b) u_r, & \beta_r = \beta t_r + (\delta a + (\delta - \beta) b) u_r,\\ \gamma_r = \gamma t_r + (\alpha a + \gamma b) u_r, & \delta_r = \delta t_r + (\beta a + \delta b) u_r. \end{cases}$$

Es ergiebt sich aber aus Z. T. I, 7:

$$\gamma)\quad \begin{cases} \alpha = \tfrac{1}{3}\{(a+2b)x - y\}, & \beta = \tfrac{1}{3}\{(a-b)x + 2y\},\\ \gamma = \tfrac{1}{3}\{(b-a)x + y\}, & \delta = \tfrac{1}{3}\{(2a+b)x + y\}; \end{cases}$$

durch Einsetzung dieser Werthe in $\beta)$ erhält man:

$$\delta)\quad \begin{cases} \alpha_r = \tfrac{1}{3}[(a+2b)(t_r x + u_r y) - (t_r y + D u_r x)],\\ \beta_r = \tfrac{1}{3}[(a-b)(t_r x + u_r y) + 2(t_r y + D u_r x)],\\ \gamma_r = \tfrac{1}{3}[(b-a)(t_r x + u_r y) + (t_r y + D u_r x)],\\ \delta_r = \tfrac{1}{3}[(2a+b)(t_r x + u_r y) + (t_r y + D u_r x)]. \end{cases}$$

Offenbar werden die $\delta)$ aus den $\gamma)$ dadurch erhalten, dass man $t_r x + u_r y$ bezw. $t_r y + D u_r x$ statt x bezw. y setzt. Hieraus folgt, dass unendlich viele Lösungen der Gleichung A) durch die Formeln:

$$\varepsilon)\qquad x_r = t_r x + u_r y, \quad y_r = t_r y + D u_r x$$

gegeben sind, wo (t_r, u_r) alle Lösungen der Gleichung $\alpha)$ darstellt.*

Bezeichnet man durch (T, U) die kleinste Lösung von $\alpha)$ (von der Lösung $t=1$, $u=0$ abgesehen), und setzt man $\pm\sqrt{D} = \varrho$, so werden bekanntlich alle Lösungen von $\alpha)$ durch die Formel:

$$t_r + \varrho u_r = (T + \varrho U)^r$$

gegeben. Aus $\varepsilon)$ folgt:

$$y_r + \varrho x_r = (y + \varrho x)(t_r + \varrho u_r) = (y + \varrho x)(T + \varrho U)^r;$$

es ergeben sich auch, wegen der bekannten Relationen:

$$t_{r+1} + t_{r-1} = 2 T t_r, \quad u_{r+1} + u_{r-1} = 2 T u_r,$$

die Recursionsformeln:

$$x_{r+1} + x_{r-1} = 2 T x_r, \quad y_{r+1} + y_{r-1} = 2 T y_r.$$

14. Die unendlich vielen Lösungen der Gleichung A), welche aus einer derselben durch die obige Methode erhalten wurden, können offenbar direct ermittelt werden, indem man in die Formel:

$$x = \frac{\alpha + \gamma}{b}$$

nach und nach die Coefficienten aller Substitutionen einsetzt, durch welche $(a, b, -c)$ in $(b, a, -c)$ übergeht. Wir bezeichnen der Kürze halber diese zwei Formen durch F bezw. f, entwickeln die Periode von F und stellen uns dieselbe als ins Unendliche wiederholt vor. Jede der zwei Formen werden wir mit den Indices $1, 2, \ldots, r, \ldots$ behaften, je nachdem sie in

* t_r und u_r werden stets als positiv angenommen.

der unendlichen Formenreihe für das erste, zweite, ..., r^{te}, ... Mal wieder erscheint, so dass sowohl F, F_1, F_2, ..., F_r, ..., ein und dieselbe Form bedeuten, als auch f, f_1, f_2, ..., f_r, ... Die betrachtete Formenreihe ist also folgende:

$\alpha)$ $$F \ldots f \ldots F_1 \ldots f_1 \ldots F_2 \ldots f_2 \ldots$$

Die Formeln $\beta)$ des vorigen Paragraphen stellen die Substitution dar, durch welche F in f_r übergeht; hieraus folgt leicht, dass (x_r, y_r) *eben diejenige* Lösung von A) ist, welche aus der F in f_r überführenden Substitution entspringt.

Setzen wir die Reihe auch rückwärts fort:

$$\ldots F_{-2} \ldots f_{-2} \ldots F_{-1} \ldots f_{-1} \ldots F \ldots f \ldots F_1 \ldots f_1 \ldots F_2 \ldots f_2 \ldots,$$

so wird (x_{-r}, y_{-r}) derjenigen Substitution entsprechen, durch welche F in f_{-r} übergeht. Da

$$(T + \varrho U)^{-r} = (T - \varrho U)^r,$$

also $t_{-r} = t_r$, $u_{-r} = -u_r$, so ist:

$$x_{-r} = t_r x - u_r y, \quad y_{-r} = t_r y - D u_r x.$$

Da x stets als positiv angenommen wird (§ 12), so sind x_r, x_{-r} für alle Werthe von r ebenfalls positiv. Aus den Formeln:

$$x_r = t_r x + u_r y, \quad x_{-r} = t_r x - u_r y$$

folgt nämlich:

$$x_r x_{-r} = t_r^2 x^2 - u_r^2 y^2 = t_r^2 x^2 - u_r^2 (D x^2 - 3) = (t_r^2 - D u_r^2) x^2 + 3 u_r^2$$
$$= x^2 + 3 u_r^2 > 0;$$

nun ist offenbar $x_r > 0$ für $y > 0$, $x_{-r} > 0$ für $y < 0$, also in jedem Falle:

$$x_r > 0, \quad x_{-r} > 0.$$

Man beachte auch Folgendes:

Ist $y > 0$, so ist $y_r > 0$; ist $y < 0$, so ist $y_{-r} < 0$.

15. Aus jedem Paare von reciproken Nullformen von der Determinante D ergiebt sich eine unendliche Reihe von Lösungen der Gleichung A). Betrachtet man insbesondere das umgekehrte Paar des vorigen, nämlich f, F, und ist $\begin{pmatrix}\alpha'_r, & \beta'_r\\ \gamma'_r, & \delta'_r\end{pmatrix}$ die Substitution, welche f in F_r überführt, so muss aus der Zusammensetzung der Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha'_r, & \beta'_r\\ \gamma'_r, & \delta'_r\end{pmatrix}$ die Substitution:

$$\begin{pmatrix} t_r - b u_r & (a+b) u_r \\ a u_r & t + b u_r \end{pmatrix}$$

entstehen, durch welche F in F_r übergeht. Es muss also sein:

$$t_r - b u_r = \alpha \alpha'_r + \beta \gamma'_r, \quad (a+b) u_r = \alpha \beta'_r + \beta \delta'_r,$$
$$a u_r = \gamma \alpha'_r + \delta \gamma'_r, \quad t_r + b u_r = \gamma \beta'_r + \delta \delta'_r;$$

durch Anwendung der Relationen (Z. T. I, 7):

$$\alpha = -\gamma + b x, \qquad \beta = 2\gamma + (a-b) x,$$
$$\gamma = \frac{(b-a) x + y}{3}, \quad \delta = \gamma + a x,$$

$$\alpha'_r = -\gamma'_r + a x'_r, \qquad \beta'_r = 2\gamma'_r + (b-a)x'_r,$$
$$\gamma'_r = \frac{(a-b)x'_r + y'_r}{3}, \quad \delta'_r = \gamma'_r + b x'_r$$

ergiebt sich:

$$3t_r = yy'_r + Dxx'_r, \quad 3u_r = xy'_r + yx'_r,$$

woraus folgt:

$$x'_r = t_r x - u_r y, \quad y'_r = D u_r x - t_r y,$$

also

$$x'_r = +x_{-r}, \quad y'_r = -y_{-r}.$$

Aus dem Formenpaare F, f und aus dessen Umkehrung entspringen also zwei Reihen von Lösungen der Gleichung A), nämlich:

α) $\qquad (x_r, y_r)$ und $(x_r, -y_r) \qquad (r = -\infty \ldots +\infty)$.

16. Nunmehr wollen wir sehen, ob die von anderen etwa existirenden Paaren von Nullformen von der Determinante D herrührenden Lösungen von A) von den vorher gefundenen verschieden sind. Sei (X, Y) eine irgendwie ermittelte Lösung von A). Durch dieselbe in Z. T. I, 7 (am Ende) durchgeführte Schlussweise zeigt sich, dass durch Einsetzung in die dortige Formel ι) wenigstens eines von den zwei Werthen $\pm Y$ für $\sqrt{y^2}$ γ und folglich α, β, δ ganzzahlige Werthe annehmen. Diese Werthe von α, β, γ, δ bilden eine Substitution, durch welche F in f übergeht. Da aber **alle** derartigen Substitutionen in der Reihe:

$$\begin{pmatrix} \alpha_r, & \beta_r \\ \gamma_r, & \delta_r \end{pmatrix} \qquad (r = -\infty \ldots +\infty)$$

enthalten sind, so ist auch die Lösung $(X, \pm Y)$ in der Reihe:

$$(x_r, y_r) \qquad (r = -\infty \ldots +\infty)$$

enthalten. Gilt das obere Zeichen, so ist damit bewiesen, dass (X, Y) keine neue Lösung ist; im entgegengesetzten Falle, wo nämlich $(X, -Y)$ in der Reihe (x_r, y_r) enthalten ist, gehört (X, Y) der Reihe:

$$(x_r, -y_r) \qquad (r = -\infty \ldots +\infty)$$

und bildet folglich keine neue Lösung.

Die zwei Reihen: $\quad (x_r, y_r)$ und $(x_r, -y_r) \qquad (r = -\infty \ldots +\infty)$

enthalten also **alle** Lösungen der Gleichung A), bei welchen $x > 0$ ist. Die übrigen Lösungen sind:

$$(-x_r, y_r) \text{ und } (-x_r, -y_r) \qquad (r = -\infty \ldots +\infty).$$

Wegen der Relationen α), § 15, kann man auch alle Lösungen von A), bei welchen x positiv ist, durch die vier Reihen (wo x_0, y_0 mit x, y identisch sind) darstellen:

$$\begin{aligned} &(x_r, y_r) && (r = 0 \ldots \infty), \\ &(x_r, -y_r) && (r = 0 \ldots \infty), \\ &(x'_r, y'_r) && (r = 1 \ldots \infty), \\ &(x'_r, -y'_r) && (r = 1 \ldots \infty). \end{aligned}$$

17. Da α_r, γ_r gleiches Vorzeichen haben und mit r wachsen, so wächst auch x_r mit r, und dasselbe findet für x'_r statt. Da nun y_r mit x_r, y'_r mit x'_r wegen der Relationen:

$$Dx_r^2 - y_r^2 = 3, \quad Dx'^2_r - y'^2_r = 3$$

absolut zunimmt, so können wir sagen, unter den Lösungen:

$$(x_r, y_r) \qquad (r = 0 \ldots \infty)$$

sei (x, y), unter den Lösungen:

$$(x'_r, y'_r) \qquad (r = 1 \ldots \infty)$$

sei (x'_1, y'_1) die absolut kleinste. Wir wollen aber auch beweisen, dass (x, y) absolut kleiner als (x'_2, y'_2), dass (x'_1, y'_1) absolut kleiner als (x_1, y_1) ist, dass also (x, y), (x'_1, y'_1) die absolut kleinsten Lösungen von A) sind. Es wird dazu genügen, zu zeigen, dass:

$$x < x'_2, \quad x'_1 < x_1.$$

Wir entwickeln zwei ganze Perioden der Form F, also:

$$F, F', F'', \ldots, F^{(n-1)}, F^{(n)}, F^{(n+1)}, \ldots, F^{(s-1)}, F^{(s)}, F_1, F'_1, F''_1, \ldots, F_1^{(n-1)}, F_1^{(n)}, F_1^{(n+1)}, \ldots, F_1^{(s-1)}, F_1^{(s)},$$

wo:

$$F^{(n+1)} = F_1^{(n+1)} = f \text{ und } F_1^{(r)} = F^{(r)} = (a^{(r)}, b^{(r)}, -a^{(r+1)}),$$

und sei:

$$h_1^{(r+1)} = h^{(r+1)} = \frac{b^{(r)} + b^{(r+1)}}{a^{(r+1)}},$$

so dass man die Folge der Zahlen $h^{(r)}$ hat:

$$h', h'', \ldots, h^{(n)}, h^{(n+1)}, \ldots, h^{(s)}, h^{(s+1)}, h'_1, h''_1, \ldots, h_1^{(n)}, h_1^{(n+1)}, \ldots, h_1^{(s)}.$$

Man beachte Folgendes:

a) Ist $\lambda', \lambda'', \ldots$ eine Reihe von positiven Zahlen, so ist allgemein:

$$[\lambda^{(p)}, \ldots, \lambda^{(q)}] < [\lambda^{(p_1)}, \ldots, \lambda^{(q)}] \text{ für } p > p_1,$$
$$[\lambda^{(p)}, \ldots, \lambda^{(q)}] < [\lambda^{(p)}, \ldots, \lambda^{(q_1)}] \text{ für } q < q_1,$$
$$[\lambda^{(p)}, \ldots, \lambda^{(q+1)}] = [\lambda^{(p)}, \ldots, \lambda^{(q)}]\lambda^{(q+1)} + [\lambda^{(p)}, \ldots, \lambda^{(q-1)}] > [\lambda^{(p)}, \ldots, \lambda^{(q)}]\lambda^{(q+1)}.$$

b) Da sämmtliche $b^{(r)}$ von 0 verschieden sind und $b^{(n+1)} = a$, $a^{(n+1)} = b$, so ist:

$$h^{(s+1)} > \frac{b}{a}, \quad h_1^{(n+1)} = h^{(n+1)} > \frac{a}{b}.$$

Nach diesen Vorbemerkungen können wir zum Beweise unserer Behauptungen übergehen.

Es ist (§ 11):

$$\alpha) \quad bx = [h'', \ldots, h^{(n)}] + [h', \ldots, h^{(n)}],$$
$$\beta) \quad bx_1 = [h'', \ldots, h_1^{(n)}] + [h', \ldots, h_1^{(n)}],$$
$$\gamma) \quad ax'_1 = [h^{(n+3)}, \ldots, h^{(s)}] + [h^{(n+2)}, \ldots, h^{(s)}],$$
$$\delta) \quad ax'_2 = [h^{(n+3)}, \ldots, h_1^{(s)}] + [h^{(n+2)}, \ldots, h_1^{(s)}].$$

Nun ist:

$$\varepsilon) \quad [h'', \ldots, h^{(n)}] = [h''_1, \ldots, h_1^{(n)}] < [h^{(n+3)}, \ldots, h_1^{(n)}]$$
$$< [h^{(n+3)}, \ldots, h_1^{(n+1)}]\frac{1}{h^{(n+1)}} < [h^{(n+3)}, \ldots, h_1^{(n+1)}]\frac{b}{a} < [h^{(n+3)}, \ldots, h_1^{(s)}]\frac{b}{a},^*$$

und ähnlich:

* Da nämlich a und $a^{(n+1)} = b$ gleiches Vorzeichen haben, so muss $F^{(n+1)} = f$ von $F_1 = F$ mindestens um zwei Stellen abstehen, woraus folgt $n + 1 \overline{\lessgtr} s - 1$.

ζ) $$[h', \ldots, h^{(n)}] < [h^{(n+2)}, \ldots, h_1^{(s)}]\frac{b}{a};$$

es ist auch:

η) $$[h^{(n+3)}, \ldots, h^{(s)}] < [h'', \ldots, h^{(s)}] < [h'', \ldots, h^{(s+1)}]\frac{1}{h^{(s+1)}}$$
$$< [h'', \ldots, h^{(s+1)}]\frac{a}{b} < [h'', \ldots, h_1^{(n)}]\frac{a}{b}$$

und ähnlich:

ϑ) $$[h^{(n+2)}, \ldots, h^{(s)}] < [h', \ldots, h_1^{(n)}]\frac{a}{b}.$$

Durch Addition von ε) und ζ) bezw. von η) und ϑ) und Anwendung der Gleichungen α) und δ) bezw. β) und γ) ergiebt sich:

$$b x < a x'_2 \frac{b}{a}, \quad a x'_1 < b x_1 \frac{a}{b},$$

also:

$$x < x'_2, \quad x'_1 < x_1,$$

w. z. b. w.

18. Der in Z. T. I, 10 flgg. untersuchte besondere Fall zeigte uns, wieviel die Lösung einer unbestimmten Gleichung zu zwei Variabelen erleichtert wird, wenn sie symmetrisch ist. Wir fragen uns nunmehr, in welchen Fällen die Gleichung A) auf eine symmetrische Gleichung zurückgeführt werden kann. Dass dies in einigen Fällen möglich ist, zeigt uns das folgende Beispiel.

Ist D gleich einem um eine Einheit verminderten Quadrate, also $D = m^2 - 1$, so geht durch die Substitution $y = mx + z$ die Gleichung A) in die symmetrische Gleichung:

$$x^2 + z^2 + 2mxz = -3$$

über.

19. Wir wollen nun sehen, ob man im Allgemeinen eine lineare ganzzahlige Substitution:

α) $$z = ax + by, \quad w = cx + dy$$

bestimmen darf, welche die Gleichung A) in eine in z und w symmetrische Gleichung [die als Gleichung B) bezeichnet werden möge] überführt. Ist dies möglich, so sind die Lösungen (w, z) der Gleichung B) so beschaffen, dass die Reihe der Werthe von w mit der Reihe der Werthe von z zusammenfällt; sind also:

$$w_0, w_1, \ldots, w_r, \ldots; \quad z_0, z_1, \ldots, z_r, \ldots$$

die Reihen der Werthe von w bezw. z, der Grösse nach geordnet, so kann man sich vorsetzen, es müsse

β) $$w_0 = z_1, \quad w_1 = z_2, \quad \ldots, \quad w_{r-1} = z_r, \quad \ldots$$

sein (vergl. den in Z. T. I behandelten Fall). Da aber (§ 13):

$$x_{r+1} = 2Tx_r - x_{r-1}, \quad y_{r+1} = 2Ty_r - y_{r-1},$$

also:

$$w_{r+1} = 2Tw_r - w_{r-1}, \quad z_{r+1} = 2Tz_r - z_{r-1}$$

ist, so werden alle Gleichungen β) erfüllt, sobald zwei von ihnen befriedigt sind. Unsere Substitution α) muss also den zwei Gleichungen:

$$w_0 = z_1, \quad w_1 = z_2,$$

d. i.:

$$\gamma) \qquad a x_1 + b y_1 = c x_0 + d y_0,$$

$$\delta) \qquad a x_2 + b y_2 = c x_1 + d y_1$$

genügen, wo (§ 13):

$$\begin{aligned} x_1 &= T x_0 + U y_0, \\ y_1 &= D U x_0 + T y_0, \\ x_2 &= T x_1 + U y_1 = (T^2 + D U^2) x_0 + 2 T U y_0, \\ y_2 &= D U x_1 + T y_1 = 2 D T U x_0 + (T^2 + D U^2) y_0, \end{aligned}$$

$$T^2 - D U^2 = 1,$$

$$D x_0^2 - y_0^2 = 3$$

ist.

Schreiben wir der Einfachheit wegen p, q statt x_0, y_0, und setzen uns vor, a, b, c, d als lineare homogene Functionen von p, q zu bestimmen:

$$a = a_1 p + a_2 q, \quad b = b_1 p + b_2 q,$$

$$c = c_1 p + c_2 q, \quad d = d_1 p + d_2 q.$$

Durch Einsetzung der Werthe von a, b, c, d, x_1, y_1 in γ) ergiebt sich:

$$(a_1 T + b_1 D U) p^2 + (a_2 T + a_1 U + b_1 T + b_2 D U) p q + (b_2 T + a_2 U) q^2$$

$$= c_1 p^2 + (c_2 + d_1) p q + d_2 q^2.$$

Diese Gleichung ist identisch erfüllt, wenn:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 T + b_1 D U, \\ c_2 + d_1 &= a_2 T + a_1 U + b_1 T + b_2 D U, \\ d_2 &= b_2 T + a_2 U \end{aligned}$$

ist. Man erhält aus δ) auf dieselbe Weise:

$$\begin{aligned} c_1 T + d_1 D U &= a_1 (2 T^2 - 1) + 2 b_1 D T U, \\ c_1 U + d_1 T + c_2 T + d_2 D U &= a_2 (2 T^2 - 1) + 2 b_2 D T U + 2 a_1 T U + b_1 (2 T^2 - 1), \\ c_2 U + d_2 T &= 2 a_2 T U + b_2 (2 T^2 - 1). \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich nach leichten Umformungen:

$$c_1 = a_1 T + b_1 D U, \quad c_2 = a_2 T + b_2 D U,$$

$$d_1 = a_1 U + b_1 T, \qquad d_2 = a_2 U + b_2 T.$$

Die Determinante der Substitution α) ist also:

$$\Delta = a d - b c = U [(a_1^2 - D b_1^2) p^2 + 2 (a_1 a_2 - D b_1 b_2) p q + (a_2^2 - D b_2^2) q^2].$$

Dieser Ausdruck wird beträchtlich vereinfacht, wenn es möglich ist, a_1, a_2, b_1, b_2 derart zu bestimmen, dass sie den folgenden drei Gleichungen genügen:

$$\varepsilon) \qquad a_1^2 - D b_1^2 = - D,$$

$$\zeta) \qquad a_1 a_2 - D b_1 b_2 = 0,$$

$$\eta) \qquad a_2^2 - D b_2^2 = 1;$$

dann ist:

$$\vartheta) \qquad \Delta = U (q^2 - D p^2) = - 3 U.$$

Quadrirt man ζ) und benutzt die durch ε), η) gegebenen Werthe von a_1^2, $D b_2^2$, so wird:

$$a_2^2 D (b_1^2 - 1) = b_1^2 D (a_2^2 - 1),$$

woraus $a_2^2 = b_1^2$. Nimmt man $b_1 = a_2$ an und setzt in ζ) ein, so erhält man $a_1 = b_2 D$. Es kommt also Alles darauf an, a_2 und b_2 der Gleichung η) gemäss zu bestimmen. Dazu kann man einfach:

$$a_2 = T, \quad b_2 = U$$

nehmen; dann ist

$$\begin{aligned} a_1 &= DU, & b_1 &= T, \\ c_1 &= 2DTU, & d_1 &= T^2 + DU^2, \\ c_2 &= T^2 + DU^2, & d_2 &= 2TU. \end{aligned}$$

Aus α) folgt wegen ϑ):

$$x = \frac{1}{3U}(-dz + bw), \quad y = \frac{1}{3U}(cz - aw),$$

also:

$$3 = Dx^2 - y^2 = \frac{1}{9U^2}[(Dd^2 - c^2)z^2 + (Db^2 - a^2)w^2 - 2(Dbd - ac)zw].$$

Nun findet man leicht:

$$\begin{aligned} Db^2 - a^2 &= (T^2 - DU^2)(Dp^2 - q^2) = 3, \\ Dd^2 - c^2 &= (T^2 - DU^2)(Db^2 - a^2) = 3, \\ Dbd - ac &= T(Db^2 - a^2) = 3T; \end{aligned}$$

die vorige Gleichung reducirt sich also auf:

$$9U^2 = z^2 + w^2 - 2Tzw,$$

welches die gesuchte symmetrische Gleichung B) ist.

20. Da wir x stets als positiv annehmen (§ 12) und die gefundenen Werthe von a, b, c, d positiv sind, so sind w, z wegen der Formeln α), § 19, ebenfalls positiv.

Durch Auflösung von B) ergiebt sich:

α)
$$w = Tz \pm U\sqrt{Dz^2 + 9}$$

oder

$$z = Tw \mp U\sqrt{Dw^2 + 9},$$

also:

$$z_{r\pm 1} = Tz_r \pm U\sqrt{Dz_r^2 + 9}, \quad w_{r\pm 1} = Tw_r \pm U\sqrt{Dw_r^2 + 9}.$$

Hieraus erhält man die Werthereihen:

$$w_0, w_1, \ldots, w_r, \ldots; \quad z_0, z_1, \ldots, z_r, \ldots,$$

sobald die kleinste Lösung (w_0, z_0) von B) bekannt ist.

Aus α) folgt:

$$\frac{dw}{dz} = T \pm \frac{UDz}{\sqrt{Dz^2 + 9}}.$$

Dass $\frac{dw}{dz} > 0$, wenn man das obere Vorzeichen annimmt, ist einleuchtend; wir wollen aber auch zeigen, dass diese Ungleichung selbst im entgegengesetzten Falle besteht. Da nämlich, wie aus der Gleichung $T^2 - DU^2 = 1$ folgt:

$$T > U\sqrt{D}$$

ist, und ausserdem:

$$\sqrt{Dz^2 + 9} > z\sqrt{D},$$

so ist im betrachteten Falle:

$$\frac{dw}{dz} > U\sqrt{D} - \frac{UDz}{z\sqrt{D}} = 0.$$

Kennen wir also eine Lösung (W, Z) von B) und wissen, dass der Werth Z von z der kleinstmögliche ist, so können wir behaupten, dass (W, Z) die kleinste Lösung ist, bei welcher (wegen der angenommenen Relation $z_r = w_{r-1}$) $w > z$ ist.* Nun ist B) für $w = 3U$, $z = 0$ befriedigt; man muss also

$$w_0 = 3U, \quad z_0 = 0$$

setzen, und es giebt zwischen 0 und $3U$ keinen Werth von w, der irgend einer Lösung gehöre, bei welcher z positiv und kleiner als w ist.

Lässt sich für einen angegebenen positiven Werth W von w, der nicht der Werthereihe w_r angehört, die Gleichung B) in ganzen Zahlen auflösen und sind Z, Z' die zwei aus B) für $w = W$ entspringenden Werthe von z, wo $Z < W < Z'$ ist,** so muss, wenn W zwischen w_r und w_{r+1} liegt, Z zwischen z_r und z_{r+1} $\left(\text{wegen } \frac{dw}{dz} > 0\right)$ liegen; folglich, da die Reihen der Werthe von w und z identisch sind und

$$z_r = w_{r-1}, \quad z_{r+1} = w_r$$

schiebt sich ein neuer Werth von w in die Reihe der w-Werthe zwischen w_{r-1} und w_r ein. Fährt man so fort, so findet man schliesslich, dass zwischen 0 und $3U$ ein Werth von w liegen muss. Solcher Werthe kann es mehrere geben:

$$w', w'', \ldots, w^{(s)};$$

jedem von diesen entsprechen, wie überhaupt jedem Werthe von w, zwei Werthe von z; der eine ist negativ und interessirt uns darum nicht, der zweite liegt zwischen z_1 und z_2. Jedem dieser Werthe, die, als w-Werthe angenommen, zwischen w_0 und w_1 liegen, entsprechen zwei z-Werthe; der eine coincidirt der Grösse nach mit einem der Werthe w', w'', ..., ist also zwischen z_0 und z_1 enthalten, der zweite liegt zwischen z_2 und z_3, folglich, als w-Werth angenommen, zwischen w_1 und w_2. Man sieht ein, dass jeder der Werthe w', w'', ... eine unendliche Werthereihe erzeugt, welche sich in die Reihe

$$\beta) \qquad w_0, w_1, \ldots, w_r, \ldots$$

derart einschiebt, dass ein Element jeder neuen Reihe in jedem Intervalle der Reihe β) liegt. Solche Reihen sind offenbar nur in endlicher Anzahl vorhanden.

---

* Dass $Z < W$ sein muss, ist einleuchtend, da sonst eine andere Lösung $w = Z$, $z = W$ existirte, bei welcher der Werth von z kleiner wäre als bei der Lösung (W, Z), was der Annahme widerspricht.

** Es ist:

$$Z' = TW + U\sqrt{DW^2+9} > W,$$
$$Z = TW - U\sqrt{DW^2+9} < TW - UW\sqrt{D} = (T - U\sqrt{D})W;$$

da aber:

$$(T - U\sqrt{D})(T + U\sqrt{D}) = 1, \quad 0 < T - U\sqrt{D} < T + U\sqrt{D},$$

so ist $Z < W$.

Wir bezeichnen im Folgenden die Reihe β) durch P, die Reihen, welche aus w', w'', ... entstehen, durch P', P'', ...

21. Es möge nunmehr untersucht werden, ob alle den Lösungen von B) entsprechenden Lösungen von A) ganzzahlig sind. Da aber ganzzahligen Werthen von x ganzzahlige Werthe von y wegen A) entsprechen, so können wir unsere Untersuchungen auf die Werthe von x beschränken.

Die Werthe der Reihe P sind sämmtlich durch $3\,U$ theilbar. Aus der Gleichung:

$$w_{r+1} = Tw_r + U\sqrt{Dw_r+9}$$

ersieht man nämlich, dass, wenn w_r durch $3\,U$ theilbar ist, dasselbe für w_{r+1} stattfindet; nun ist $w_0 = 3\,U$, also sind sämmtliche Elemente der Reihe P durch $3\,U$ theilbar. Da aber (§ 19):

$$\alpha) \qquad x = \frac{1}{3\,U}\{-dz+bw\},$$

so sind alle den Werthen der Reihe P entsprechenden Werthe von x ganzzahlig.

22. Fassen wir jetzt die übrigen Reihen ins Auge, so ersehen wir vor Allem, dass der Factor U im Nenner der rechten Seite von α), § 21, verschwindet. Es ist nämlich:

$$\alpha) \qquad 3\,Ux = -[(T^2+DU^2)p+2\,TUq]z+[Tp+Uq]w$$
$$\equiv -T^2pz+Tpw \quad (mod\ U);$$

da aber

$$\beta) \qquad T^2\equiv 1 \ (mod\ U), \quad z = Tw \pm U\sqrt{Dw^2+9} \equiv Tw \ (mod\ U),$$

so ist:

$$3\,Ux = p(Tw-z) \ (mod\ U) \equiv 0 \ (mod\ U)$$

und $3x$ ist ganz.

13. Um zu untersuchen, ob auch x ganz ist, schicken wir drei einfache Bemerkungen voraus.

a) Ist (X, Y) eine Lösung der Gleichung A), so ist weder X, noch Y durch 3 theilbar; denn sonst müsste

$$DX^2-Y^2=3$$

durch 9 theilbar sein.

b) Sind m, n zwei durch 3 nicht theilbare Zahlen, so geht 3 entweder in $m+n$ oder in $m-n$ auf.

c) Ist ein Element einer Reihe $P^{(r)}$ durch 3 theilbar, so findet dasselbe für alle Elemente der Reihe statt. Denn zwei benachbarte Elemente von $P^{(r)}$ sind durch die Gleichung:

$$w^{(r)}_{s\pm 1} = Tw^{(r)}_s \pm U\sqrt{Dw^{(r)2}_s+9}$$

verbunden. Wir können dann kurz sagen, die Reihe $P^{(r)}$ sei durch 3 theilbar.

Nun ist wegen α), β), § 22:

$$\begin{aligned} 3\,Ux = &\quad [Tp+Uq-T\{(T^2+DU^2)p+2\,TUq\}]w \\ &\mp [(T^2+DU^2)p+2\,TUq]\,U\sqrt{Dw^2+9} \\ = &-[2\,DTU^2p+(T^2+DU^2)\,Uq]w \\ &-[(T^2+DU^2)p+2\,TUq]\,U\sqrt{Dw^2+9}, \end{aligned}$$

also mit Hinzuziehung der Formeln in § 19:

$$3x = -y_2 w \mp x_2 \sqrt{Dw^2+9},$$

oder, da es nur auf den absoluten Werth von x ankommt (vergl. § 12):

α) $$3x = y_2 w \pm x_2 \sqrt{Dw^2+9}.$$

Gehört nun w einer durch 3 theilbaren Reihe an, so sind die beiden durch α) gegebenen Werthe von x ganzzahlig; gehört aber w einer durch 3 nicht theilbaren Reihe an, so ist jedenfalls der eine jener beiden Werthe ganzzahlig.

24. Aus § 19 erhält man:

$$3y = Dx_2 w \pm y_2 \sqrt{Dw^2+q}.$$

Drücken wir x und y durch p und q aus und setzen wieder x_0, y_0 statt p, q, so erhalten wir schliesslich:

$$3x = [2TDUx_0 + (T^2+DU^2)y_0]w \pm [(T^2+DU^2)x_0 + 2TUy_0]\sqrt{Dw^2+9},$$
$$3y = [(T^2+DU^2)x_0 + 2TUy_0]Dw \pm [2TDUx_0 + (T^2+DU^2)y_0]\sqrt{Dw^2+9}.$$

25. Fassen wir sämmtliche in den letzten Paragraphen entwickelte Resultate zusammen, so können wir schliessen:

Sind

α) $$k',\ k'',\ \ldots,\ k^{(s)},\ k^{(s+1)} = 3U$$

alle zwischen 0 und $3U+1$ (die Grenzwerthe ausgeschlossen) enthaltenen ganzzahligen Werthe, welche, in die Gleichung:

β) $$z^2 + w^2 - 2Tzw = 9U^2$$

eingesetzt, ganzzahlige Werthe für z geben, so bildet jeder der Werthe α), z. B. $k^{(r)}$, das erste Glied einer unendlichen Reihe $P^{(r)}$ von ganzen Zahlen:

$$k^{(r)},\ k_1^{(r)},\ k_2^{(r)},\ \ldots,$$

welche dem Gesetze:

γ) $$k_{\lambda\pm 1}^{(r)} = Tk_\lambda^{(r)} \pm U\sqrt{Dk_\lambda^{(r)^2}+9}$$

gemäss fortfahren. Aus jedem Elemente $k_\lambda^{(r)}$ entspringen zwei Lösungen der Gleichung β), nämlich:

γ) $$w = k_\lambda^{(r)},\quad z = k_{\lambda+1}^{(r)}$$

und

δ) $$w = k_\lambda^{(r)},\quad z = k_{\lambda-1}^{(r)}.$$

Die Lösungen der Gleichung:

ε) $$Dx^2 - 3 = y^2$$

hängen von denjenigen der Gleichung β) durch die Relationen zu § 24 ab. Aus jedem Elemente $k_\lambda^{(r)}$ entspringen zwei Lösungen von ε) oder nur eine, je nachdem die Reihe $P^{(r)}$ durch 3 theilbar ist oder nicht. Es entsprechen nämlich den beiden Lösungen γ), δ) im ersten Falle und nur einer derselben im zweiten ganzzahlige Werthe für x und y.

Mantua, den 21. April 1887.

XVII.

Ueber Schnitt und Schein eines windschiefen Vierecks.

Von

Dr. C. Beyel
in Zürich.

Hierzu Taf. III Fig. 11.

1.

Wir gehen von einem Kegel zweiten Grades K^2 und zwei windschiefen Geraden g_1, g_2 aus, welche K^2 berühren. Indem wir die Tangentialebenen des Kegels mit den Geraden g_1, g_2 schneiden, erhalten wir auf diesen zwei projective Punktreihen. Die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Punkte bilden eine Regelschaar eines Hyperboloids H^2. Bei dieser Entstehung von H^2 sind die Tangentialebenen des Kegels zugleich Tangentialebenen des Hyperboloids. Folglich müssen sich Kegel und Hyperboloid in einem Kegelschnitt T^2 berühren. Seine Ebene E ist die Polarebene von der Spitze C des Kegels in Bezug auf das Hyperboloid. Sind h_1, h_2 zwei Gerade der erwähnten Regelschaar, so schneiden sie g_1, g_2 und berühren K^2 in T^2. g_1, g_2 berühren K^2 ebenfalls in Punkten von T^2. Wir schliessen daher:

Sind zwei gegenüberliegende Seitenpaare $g_1 h_1$, $g_2 h_2$ eines windschiefen Vierecks Tangenten eines Kegels, so liegen ihre Berührungspunkte in einer Ebene.

2.

Schneide eine beliebige Ebene E die Geraden $g_1 h_1$, $g_2 h_2$ in den resp. Punkten $G_1 H_1$, $G_2 H_2$, so können wir durch dieselben einen Kegelschnitt T^2 legen. Dieser bestimmt mit einem der Geradenpaare $g_1 g_2$, $h_1 h_2$ ein Hyperboloid H^2, auf dem das andere Paar liegt. Lassen wir jetzt T^2 das Kegelschnittbüschel durchlaufen, welches G_1, H_1, G_2, H_2 zu Grundpunkten hat, so erhalten wir für jede Lage von T^2 ein Hyperboloid H^2. Alle diese Hyperboloide haben das windschiefe Viereck $g_1 h_1 g_2 h_2$ gemeinsam, sie bilden folglich ein Büschel. Für jedes Hyperboloid des Büschels giebt es zwei reelle Stellungen von Ebenen, welche das Hyperboloid nach Kreisen schneiden. Also werden die Geraden g_1, h_1, g_2, h_2 von einer solchen Ebene in vier Punkten eines Kreises geschnitten. Wir bezeichnen dieselbe als eine Kreisschnittebene des windschiefen Vierecks.

Nun sind im Büschel unendlich viele Hyperboloide, also giebt es unendlich viele Stellungen von Kreisschnittebenen des windschiefen Vierecks. Sei dann P ein beliebiger Punkt des Raumes, so geht durch P und eine reelle Stellung eine reelle Ebene. Wir sagen daher:

Durch einen reellen Punkt des Raumes gehen unendlich viele reelle Ebenen, welche zwei gegenüberliegende Seitenpaare eines windschiefen Vierecks in Punkten eines Kreises schneiden.

3.

Wir wenden uns zur Construction der Kreisschnittebenen. Der Kürze halber wollen wir die Ebenen $g_1 h_1$, $g_2 h_2$ mit E_1, E_2 bezeichnen. A_{11}, A_{22} seien die Schnittpunkte von $g_1 h_1$, $g_2 h_2$; A_{12}, A_{21} seien diejenigen von $g_1 h_2$, $g_2 h_1$. g sei die Schnittlinie der Ebenen E_1, E_2. h sei die Verbindungslinie der Punkte A_{12}, A_{21} (Fig. 11)*. Wir gehen von einem Punkte P in g aus und suchen die Kreise K_1^2 der Ebene E_1, welche g_1 in $G_1 G'_1$, h_1 in $H_1 H'_1$ so treffen, dass $G_1 H_1$, $G'_1 H'_1$ auf Geraden ϱ_1, ϱ'_1 durch P liegen. Für diese Kreise hat P die nämliche Polare p_1. Es ist diejenige Gerade durch A_{11}, welche von P durch $g_1 h_1$ harmonisch getrennt wird. Fällen wir aus P die Normale m_1 zu p_1, so liegen in m_1 die Mittelpunkte M_1 der Kreise K_1^2. Sei X ein Punkt von *einem* dieser Kreise, so geht letzterer auch durch den Punkt X_1, welcher durch P und p_1 von X harmonisch getrennt wird. XX_1 bestimmen den Kreis. Wir können also durch jeden Punkt der Ebene einen Kreis K_1^2 legen. Folglich bilden die Kreise K_1^2 ein Büschel B_1. Die Geraden g_1, h_1 schneiden dasselbe in Paaren einer Involution, mithin sind auch die Geraden ϱ_1, ϱ'_1, welche diese Paare mit P verbinden, entsprechende Strahlen einer Involution J_1. Jedes Paar derselben schneidet $g_1 h_1$ in vier Punkten eines Kreises K_1^2. Nun führen wir einen analogen Gedankengang für die Ebene E_2 durch. Wir bestimmen die Kreise K_2^2, welche $g_2 h_2$ in Punkten $G_2 G'_2$, $H_2 H'_2$ schneiden, von denen $G_2 H_2$, $G'_2 H'_2$ auf Geraden ϱ_2, ϱ'_2 durch P liegen. Diese Kreise bilden ein Büschel B_2 und haben ihre Mittelpunkte M_2 auf einer Geraden m_2 durch P, welche zu p_2 — der vierten harmonischen von $\overline{PA_{22}}$ in Bezug auf $g_2 h_2$ — senkrecht steht. Die Geraden g_2, h_2 schneiden die Kreise K_2^2 in Paaren einer Involution, also bilden auch die Geraden ϱ_2, ϱ'_2 eine Involution J_2.

Die Linie g trifft die Kreise der Büschel B_1, B_2 in Paaren von Involutionen. Beide haben den Punkt P und den Schnittpunkt der Linien p_1, p_2 zu Doppelelementen; folglich fallen die zwei Involutionen in eine — J — zusammen. Je ein Kreis K_1^2 schneidet einen Kreis K_2^2 in einem Paare dieser Involution. Durch dieselbe sind also die Kreise K_1^2, K_2^2 und somit auch die Paare der Involutionen J_1, J_2 einander eindeutig zugeordnet.

* In der Figur ist angenommen, dass E_1 die Aufrissebene und E_2 die Grundrissebene sei.

4.

Wir ziehen aus den obigen Ueberlegungen einige Schlüsse für die Kreisschnittebenen.

Sei in der Ebene E_1 eine Gerade ϱ_1 gezogen, welche g in P, $g_1 h_1$ in $G_1 H_1$ treffe (Fig. 11), so geht durch die letzteren zwei Punkte ein Kreis K_1^2. Derselbe schneidet g in zwei Punkten P_1, P_2. Durch sie geht ein Kreis K_2^2. Seine Schnittpunkte mit g_2, h_2 seien $G_2 G'_2$, $H_2 H'_2$. Von diesen liegen $G_2 H_2$, $G'_2 H'_2$ auf Geraden ϱ_2, ϱ'_2 durch P und es ist

$$PG_1 . PH_1 = PP_1 . PP_2 = PG_2 . PH_2 = PG'_2 . PH'_2 .$$

Daraus folgt, dass die Punkte G_1, H_1, G_2, H_2 auf einem Kreise liegen und ebenso die Punkte G_1, H_1, G'_2, H'_2. Also sind die Ebenen $\varrho_1 \varrho_2$ und $\varrho_1 \varrho'_2$ Kreisschnittebenen. In analoger Weise erhalten wir die Kreisschnittebenen durch eine Gerade der Ebene E_2 oder der Ebenen $g_1 h_2$, $g_2 h_1$. Wir schliessen daher:

Durch eine beliebige Gerade einer Ebene des windschiefen Vierecks $g_1 h_1 g_2 h_2$ können wir zwei Ebenen legen, welche zwei gegenüberliegende Seitenpaare in Punkten eines Kreises schneiden.

Die gegebene Construction der Kreisschnittebenen versagt, wenn die Gerade, durch welche wir die Ebenen legen wollen, parallel zu g oder zu h ist. Sei z. B. ϱ_1 parallel zu g, so giebt uns folgender Gedankengang eine Kreisschnittebene durch ϱ_1: die gesuchte Ebene wird jedenfalls E_2 in einer Geraden ϱ_2 schneiden, welche zu g parallel ist. Somit sind ϱ_1, ϱ_2 zwei parallele Sehnen des Kreises der Ebene. Also muss die Gerade, welche die Mitten der Sehnen verbindet, zur Richtung derselben senkrecht stehen. Legen wir daher durch die Mitte S_1 der Punkte G_1, H_1, in denen ϱ_1 die Geraden g_1, h_1 trifft, die Normalebene N zu ϱ_1, so muss diese ϱ_2 in der Mitte S_2 der Punkte G_2, H_2 schneiden, welche ϱ_2 mit g_2, h_2 gemeinsam hat. Nun liegen die Mitten zwischen allen Punkten, in denen Parallele zu g die Geraden g_2, h_2 treffen, auf einer Linie s_2, welche A_{22} mit der Mitte S von A_{12}, A_{21} verbindet. N schneidet s_2 in einem Punkte S_2; durch diesen geht die gesuchte Gerade ϱ_2, welche mit ϱ_1 in einer Kreisschnittebene liegt.

Verschieben wir jetzt ϱ_1 parallel zu sich selbst, so erhalten wir für jede Lage von ϱ_1 eine Kreisschnittebene, welche zu g parallel ist. Bei dieser Verschiebung bewegt sich S_1 auf der Mittenlinie $A_{11} S$ — sagen wir auf s_1. Die Normalebenen in den Punkten S_1 zu den Geraden ϱ_1 sind zueinander parallel und schneiden die Ebene $s_1 s_2$ in den resp. Verbindungslinien S_1, S_2. Folglich sind auch diese zueinander parallel und durch ihre Richtung müssen die in Rede stehenden Kreisschnittebenen gehen. Die Richtung $S_1 S_2$ wird am einfachsten als Richtung der Transversalen durch S zu h construirt, welche in S zu g senkrecht steht.

Indem wir das Analoge für Kreisschnittebenen zeigen, welche zu h parallel sind, schliessen wir:

Sollen zwei gegenüberliegende Seitenpaare eines windschiefen Vierecks von einer Ebene, die zu einer fünften Seite parallel ist, in Punkten eines Kreises geschnitten werden, so muss diese Ebene auch zu der Transversalen der fünften und sechsten Seite parallel sein, welche in der Mitte der fünften Seite auf dieser senkrecht steht.

5.

Wir knüpfen wieder an die Erörterungen an, welche am Anfang von 4. stehen.

Schneide K_1^2 die Geraden g_1, h_1 ausser in $G_1 H_1$ noch in $G'_1 H'_1$, so liegen diese zwei Punkte auf einer Geraden ϱ'_1 durch P (Fig. 11) und es ist

$$PG'_1 . PH'_1 = PP_1 . PP_2 = PG_2 . PH_2 = PG'_2 . PH'_2 .$$

Folglich sind auch die Ebenen $\varrho'_1 \varrho_2$ und $\varrho'_1 \varrho'_2$ Kreisschnittebenen des windschiefen Vierecks. Bemerken wir, dass $\varrho_1 \varrho'_1$, $\varrho_2 \varrho'_2$ Paare der Involutionen J_1, J_2 sind, welche durch das Paar $P_1 P_2$ der Involution J einander zugeordnet werden, so sagen wir:

Die Ebenen, welche je durch einen Strahl der Involution J_1 und einen Strahl des entsprechenden Paares der Involution J_2 gehen, sind Kreisschnittebenen des windschiefen Vierecks.

Wir wollen die vier Ebenen $\varrho_1 \varrho_2$, $\varrho_1 \varrho'_2$, $\varrho'_1 \varrho_2$ und $\varrho'_1 \varrho'_2$ ein Quadrupel von Kreisschnittebenen durch P nennen. Dann fragen wir nach ihrer Enveloppe. Sie wird durch die Ebenen gebildet, welche durch entsprechende Paare von zwei einander eindeutig zugeordneten Strahleninvolutionen an demselben Scheitel gehen. Im Allgemeinen erzeugen nach einem Satze von Joncquières* zwei solche Involutionen einen Kegel vierter Classe. In unserem Falle erleidet aber die Zuordnung der Involutionen eine Specialisirung. Setzen wir nämlich an Stelle von ϱ_1 die Gerade g, so geht durch die Punkte A_{12}, A_{21} auf g ein Kreis K_1^2 und ein Kreis K_2^2. Daraus folgt, dass sich g in der Zuordnung der Involutionen selbst entspricht. Also ist jede Ebene durch g ein Theil unseres allgemeinen Erzeugnisses. Dasselbe zerfällt daher in ein Ebenenbüschel durch g und einen Kegel dritter Classe.

Indem wir in analoger Weise die Kreisschnittebenen durch einen Punkt von h untersuchen, schliessen wir:

Die Ebenen, welche zwei gegenüberliegende Seitenpaare eines windschiefen Vierecks in Punkten eines Kreises schnei-

* Joncquières, Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque (Journal de Liouville 1861, p. 117). Vergl. Cremona, Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane, 1862, p. 64.

den und durch einen Punkt einer fünften Seite des Vierecks gehen, umhüllen einen Kegel dritter Classe.

Liegt P auf g unendlich fern, so zerfällt dieser Kegel in das Büschel von Parallelebenen, welches wir unter 4. nachgewiesen haben, und in zwei Ebenenbüschel, deren Scheitelkanten die Stellungen von E_1 und E_2 sind. Lassen wir P die Gerade g durchlaufen, so erhalten wir zu jeder Lage von P einen Kegel dritter Classe. Wir können beweisen, dass alle diese Kegel sich in der nämlichen Curve dritter Classe C_{3u} auf der unendlich fernen Ebene schneiden. Seien nämlich $\varrho_1\varrho'_1$, $\varrho_2\varrho'_2$ wieder zwei entsprechende Paare der Involutionen J_1, J_2 am Scheitel P und ziehen wir durch einen Punkt P^* auf g zu diesen Strahlen die Parallelen, so folgt aus der Aehnlichkeit der entstehenden Figuren, dass die resp. Schnittpunkte der Parallelen mit $g_1 h_1$, $g_2 h_2$ auf Kreisen liegen, deren Potenzen in Bezug auf P^* die nämlichen sind. Also bestimmen diese Parallelen Kreisschnittebenen des windschiefen Vierecks, welche den Ebenen $\varrho_1\varrho_2$, $\varrho_1\varrho'_2$, $\varrho'_1\varrho_2$, $\varrho'_1\varrho'_2$ parallel sind. Es ist folglich jedem Quadrupel von Kreisschnittebenen durch P ein Quadrupel durch P^* parallel. Nun umhüllen die ersteren Ebenen einen Kegel dritter Classe, also thun es auch die Kreisschnittebenen durch P^* und beide Kegel schneiden sich auf der unendlich fernen Ebene.

Indem wir in angegebener Weise durch alle Punkte P von g die Kreisschnittebenen zeichnen, erhalten wir alle möglichen Kreisschnittebenen, da jede von ihnen g schneiden muss. Somit stellt uns die Curve C_{3u} die Stellungen dieser Kreisschnittebenen vor. Daraus folgt unmittelbar:

Die Ebenen, welche zwei gegenüberliegende Seitenpaare eines windschiefen Vierecks in Punkten eines Kreises schneiden und durch einen reellen Punkt des Raumes gehen, umhüllen einen Kegel dritter Classe.

Wir erwähnen, dass vier Ebenen dieses Kegels den Ebenen des windschiefen Vierecks parallel sind und zwei den Seiten g resp. h.

Suchen wir die Kreisschnittebenen, welche durch eine beliebige Gerade gehen, so construiren wir in zwei Punkten der Geraden die Kreisschnittebenen. Sie umhüllen Kegel dritter Classe, die sich in der unendlich fernen Ebene schneiden. Die gemeinsamen Tangentialebenen der zwei Kegel lösen die Aufgabe. Wir schliessen daher:

Durch eine beliebige reelle Gerade im Raume gehen drei Ebenen, welche zwei gegenüberliegende Seitenpaare eines windschiefen Vierecks in Punkten eines Kreises schneiden.

6.

Zwei Kreise K_1^2, K_2^2 (4.), welche sich in zwei Punkten von g schneiden, bestimmen eine Kugel K_g^2. Sind wieder $\varrho_1\varrho'_1$, $\varrho_2\varrho'_2$ die Verbindungslinien der Punkte, in denen $g_1 h_1$, $g_2 h_2$ die Kreise K_1^2, K_2^2 treffen, so schneiden die Ebenen $\varrho_1 \varrho_2$, $\varrho_1 \varrho'_2$, $\varrho'_1 \varrho_2$ und $\varrho'_1 \varrho'_2$ aus der Kugel Kreise, auf denen die erwähnten Schnittpunkte liegen. Wir sagen daher:

Ein Quadrupel von Kreisschnittebenen durch P schneidet die gegenüberliegenden Seitenpaare $g_1 h_1$, $g_2 h_2$ eines windschiefen Vierecks in acht Punkten einer Kugel.

Lassen wir jetzt K_1^2, K_2^2 die Büschel B_1, B_2 (3.) durchlaufen, so erhalten wir zu jedem zugeordneten Paare von Kreisen eine Kugel K_g^2. Die Mittelpunkte aller dieser Kugeln liegen in der Schnittlinie m_g der Normalebenen durch m_1 resp. m_2 zu E_1 resp. E_2. Dieselbe geht folglich durch P und muss zur Ebene $p_1 p_2$ — sagen wir P — senkrecht stehen. Also ist P und P in Bezug auf die Kugeln K_g^2 Pol und Polarebene. Ist x ein Punkt von einer Kugel K_g^2, so liegt auf ihr auch der Punkt X_1, welcher durch P und P von X harmonisch getrennt wird. $X X_1$ bestimmen diese Kugel. Es geht also durch jeden Punkt des Raumes eine Kugel K_g^2 und wir schliessen:

Wir können durch einen beliebigen Punkt des Raumes stets eine Kugel so legen, dass sie zwei gegenüberliegende Seitenpaare eines windschiefen Vierecks in acht Punkten schneidet, welche in vier Kreisschnittebenen durch einen gegebenen Punkt einer fünften Seite des Vierecks liegen.

Lassen wir jetzt P die Gerade g durchlaufen, so fragen wir nach dem Orte der Linien m_g. Da bemerken wir, dass zu jeder Lage von P eine Ebene P gehört. Alle diese Ebenen bilden ein Büschel, das h zur Scheitelkante hat. Fällen wir auf dieselben aus den Punkten P die Senkrechten, so müssen diese einer Ebene parallel sein, welche zu h senkrecht steht. Mithin ist jedem Punkte P ein Punkt der unendlich fernen Geraden u zugeordnet, welche die Normalstellung zu h ist. Die Verbindungslinien der zugeordneten Punkte sind die Geraden m_g. Folglich bilden dieselben eine Regelschaar R_g eines hyperbolischen Paraboloids. Wir sagen daher:

Die Kugeln, welche zwei gegenüberliegende Seitenpaare $g_1 h_1$, $g_2 h_2$ eines windschiefen Vierecks in Gruppen von acht Punkten eines Quadrupels von Kreisschnittebenen durch einen Punkt einer fünften Seite treffen, haben ihre Mittelpunkte auf einer Regelschaar eines hyperbolischen Paraboloids.

Eine analoge Betrachtung, bei der wir von h ausgehen, führt zu Kugeln K_h^2, deren Mittelpunkte auf den Geraden m_h einer Regelschaar R_h eines hyperbolischen Paraboloids liegen.

7.

Wir wenden uns nochmals zu dem Büschel von Hyperboloiden (2.), denen die gegenüberliegenden Seitenpaare $g_1 h_1$, $g_2 h_2$ eines windschiefen

Vierecks gemeinsam sind. In den Punkten A_{11}, A_{22} berühren die Ebenen $g_1 h_1$, $g_2 h_2$ alle Hyperboloide des Büschels. Die Schnittlinie dieser Tangentialebenen ist die Gerade g. Folglich sind g und h in Bezug auf alle Hyperboloide des Büschels zueinander conjugirt. Zeichnen wir auf g und h in Bezug auf die Hyperboloide die Involutionen harmonischer Pole, so haben diese A_{12}, A_{21} und A_{11}, A_{22} zu Doppelpunkten. Folglich sind diese Involutionen für alle Hyperboloide die nämlichen.

Sei nun $P_h C_h$ ein Paar der Involution harmonischer Pole auf h — für dasselbe ist $(P_h C_h A_{11} A_{22}) = -1$ — und $P_g C_g$ ein Paar auf g, so sind nach dem Gesagten die Verbindungslinien dieser Punkte in Bezug auf sämmtliche Hyperboloide des Büschels zueinander conjugirt. Bezeichnen wir unter diesen Linien $P_h P_g$ mit p und $C_h C_g$ mit c, so hat also eine Ebene E durch p zum Ort der Pole in Bezug auf die Hyperboloide des Büschels die Gerade c.

Projiciren wir aus einem beliebigen Punkte C von c die Geraden g_1, h_1, g_2, h_2 auf die Ebene E, so berühren die projicirenden Ebenen einen Kegel, der aus C an ein Hyperboloid des Büschels gelegt werden kann; es ist dasjenige Hyperboloid, in Bezug auf welches C und E Pol und Polarebene sind. Die Projectionen von $g_1 h_1 g_2 h_2$ sind also in ihren Schnittpunkten mit der Ebene E Tangenten an denjenigen Kegelschnitt T^2, in welchem E das erwähnte Hyperboloid schneidet.

Treffen die Geraden g, h des windschiefen Vierecks die Ebene E in den Punkten G, H, so geht die Polarebene von G in Bezug auf das in Rede stehende Hyperboloid durch C und h. Sie schneidet E in der Polare des Punktes G in Bezug auf T^2. Diese Schnittlinie ist zugleich die Projection der Geraden h aus C auf E. In analoger Weise können wir zeigen, dass die Projection der Geraden g aus C auf E die Polare des Punktes H in Bezug auf T^2 ist.

Bemerken wir noch, dass p eine beliebige Transversale zu g, h und dass E eine beliebige Ebene durch p war, so schliessen wir:

Wir können zwei gegenüberliegende Seitenpaare $g_1 h_1$, $g_2 h_2$ eines windschiefen Vierecks stets so auf eine beliebige Ebene E projiciren, dass die Projectionen der vier Seiten in ihren Schnittpunkten mit der Ebene einen Kegelschnitt T^2 berühren. Die Centra, von denen aus dieses möglich ist, liegen in einer Geraden. Sie schneidet die zwei übrigen Seiten g, h des Vierecks und wird durch seine Ecken von derjenigen Geraden harmonisch getrennt, welche durch die Schnittpunkte von E mit g und h geht. Die Projection einer jeden der Seiten g und h ist die Polare des Schnittpunktes der andern mit E in Bezug auf T^2.

8.

Nehmen wir in der Ebene E einen Kegelschnitt T^2 an, der durch die vier Schnittpunkte von g_1, h_1, g_2, h_2 mit E geht, so ist hierdurch ein Hyperboloid des Büschels festgesetzt. Der Pol der Ebene E in Bezug auf dieses Hyperboloid ist ein Punkt von c. Von ihm aus werden $g_1 h_1$, $g_2 h_2$ als Tangenten von T^2 projicirt. Wir sagen daher:

Ziehen wir durch vier Punkte G_1, H_1, G_2, H_2 eines Kegelschnittes zwei gegenüberliegende Seitenpaare $g_1 h_1$, $g_2 h_2$ eines windschiefen Vierecks, so können wir stets einen Punkt des Raumes angeben, von dem aus diese Seiten als Tangenten des Kegelschnittes erscheinen. Oder:

Ziehen wir durch vier Punkte eines Kegelschnittes zwei gegenüberliegende Seitenpaare eines windschiefen Vierecks, so schneiden sich die vier Ebenen, welche durch diese Seiten gehen und den Kegelschnitt berühren, in einem Punkte.

Ist E eine Kreisschnittebene, so folgt:

Schneidet eine Ebene zwei gegenüberliegende Seitenpaare eines windschiefen Vierecks in Punkten eines Kreises, so giebt es stets einen Punkt im Raume, von dem aus diese Seiten als Kreistangenten erscheinen.

Schneidet E die Seiten $g_1 h_1$, $g_2 h_2$ in Punkten eines Parallelogramms, so muss E zu g und h parallel sein. Also liegen G und H in der Richtung der Seiten dieses Parallelogramms. Projiciren wir jetzt $g_1 h_1$, $g_2 h_2$ aus Punkten von c, so sind die Projectionen von g und h Durchmesser der Kegelschnitte, welche von den Projectionen der Geraden $g_1 h_1$, $g_2 h_2$ berührt werden. Nun schneiden sich die letzteren Projectionen paarweise auf den ersteren. Also bilden auch die Projectionen von $g_1 h_1$, $g_2 h_2$ ein Parallelogramm und wir sagen:

Schneidet eine Ebene zwei gegenüberliegende Seitenpaare eines windschiefen Vierecks in Punkten eines Parallelogrammes, so giebt es eine Gerade, von deren Punkten aus diese Seiten ebenfalls als Parallelogramm erscheinen. Die Ecken des letzteren Parallelogramms liegen auf den Mittenlinien des ersteren.

Ist E die unendlich ferne Ebene, so liegt auch p unendlich fern. Dann ist c die Gerade, welche die Mitten zwischen $A_{11} A_{22}$ und $A_{12} A_{21}$ verbindet. In diesem Falle schliessen wir:

Ist C ein Punkt, der auf der Verbindungslinie der Mitten von zwei windschiefen Seiten eines windschiefen Vierecks liegt, so berühren die Ebenen durch C und die übrigen vier

Seiten einen Kegel zweiten Grades längs Erzeugenden, welche resp. zu diesen vier Seiten parallel sind.

Soll C auf der Geraden c unendlich fern liegen, so ist C der Pol zur Ebene E in Bezug auf ein Hyperboloid, das E zur Durchmesserebene hat, folglich befindet sich in E der Mittelpunkt dieses Hyperboloids. Nun liegen die Mittelpunkte aller Hyperboloide des Büschels auf einer Geraden. Diese schneidet E in einem Punkte M, welcher Mittelpunkt eines Kegelschnittes T^2 ist. Seine Tangenten in den Schnittpunkten mit $g_1 h_1$, $g_2 h_2$ sind Parallelprojectionen dieser Geraden. Wir sagen daher:

Unter den Kegelschnitten, welche durch die Schnittpunkte einer Ebene mit zwei gegenüberliegenden Seitenpaaren eines windschiefen Vierecks gehen, giebt es stets einen, dessen Tangenten in den erwähnten Schnittpunkten Parallelprojectionen der Seiten des Vierecks sind.

Kleinere Mittheilungen.

XVI. Bemerkungen zu der Grenzfunction algebraischer Iterationen.

In einem Vortrage, welchen ich im Naturhistorisch-medicinischen Verein an der Universität zu Heidelberg am 4. Februar 1887 unter dem Titel: „Ueber ein neues Princip algebraischer (und analytischer) Iterationen" gehalten habe,* habe ich als Verallgemeinerung des Gauss'schen arithmetisch-geometrischen Mittels folgendes Theorem bewiesen.

Die Wurzeln der q^{ten} algebraischen Gleichung n^{ten} Grades aus dem unendlichen Systeme

$$f({}^{q}u) = u^n - \binom{n}{1}{}^{(q+1)}\varphi_1 u^{n-1} + \binom{n}{2}{}^{(q+1)}\varphi_2{}^2 u^{n-2} - + \ldots + (-1)^n\,{}^{(q+1)}\varphi_n{}^n = 0$$

$$(q = -\infty, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

seien immer

$${}^{(q)}\varphi_1,\ {}^{(q)}\varphi_2,\ \ldots,\ {}^{(q)}\varphi_n,$$

so dass für jeden ganzzahligen Werth des „Iterationsindex" q der allgemeine Algorithmus

$$A_{\varphi_\lambda}) \qquad {}^{(q+1)}\varphi_\lambda^\lambda = \frac{1}{\binom{n}{\lambda}} \sum \varphi_{i_1}\varphi_{i_2}\ldots\varphi_{i_\lambda}$$

zunächst mit der Beschränkung (die später fallen gelassen werden kann) stattfinden soll, dass die aus $A_{\varphi_\lambda})$ entspringende λ^{te} Wurzelausziehung mit absolutem Vorzeichen genommen werde. Sind nun, indem wir für $q = 0$ den Iterationsindex ganz weglassen,

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n$$

Functionen von m complexen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_m$, welche in der Umgebung des Werthesystems

$$\alpha) \qquad x_1 = \alpha_1,\quad x_2 = \alpha_2,\quad \ldots,\quad x_m = \alpha_m$$

als Potenzreihen, welche nach Potenzen von $(x_1 - \alpha_1), (x_2 - \alpha_2), \ldots, (x_m - \alpha_m)$ fortschreiten, darstellbar sind, deren von x unabhängiges Glied, etwa $\alpha_{0,\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ für alle φ_λ ein gemeinsames ist und die sonst den Charakter der von mir oft als „Cofunctionen" charakterisirten Potenzreihen haben, so

> existirt immer eine „Grenzpotenzreihe", welche die einander gleichwerdenden Wurzeln der zu $q = \infty$ gehörigen

* Vergl. Verhandlungen des genannten Vereins, N. F. IV. Bd. 1. Heft.

Gleichung für das Werthesystem α repräsentirt und der sich alle Potenzreihen ${}^{(q)}\varphi_\lambda$ insofern mit der (von n unabhängigen) Rapidität 2^q nähern, als in ${}^{(q)}\varphi_\lambda$ die Coefficienten der ersten 2^q Dimensionen für alle $\lambda = 1, 2, \ldots, n$ entsprechend einander gleich werden und ihre entsprechenden Werthe auch für alle folgenden q beibehalten, also mit den entsprechenden von ${}^{(\infty)}\varphi_\lambda$ übereinstimmen.

Ich habe im genannten Vortrage angedeutet (und demnächst werde ich es ausführlich nachweisen), dass in dem speciellen Falle, wenn

$$\beta) \qquad \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)$$

ganze rationale Functionen sind, die Grenzfunction für die ganze Ebene dadurch definirt werden kann, dass eine ganz bestimmte rationale Function derselben ein Integral wird einer Differentialgleichung mit einer endlichen Anzahl ϱ singulärer Punkte, zu welcher die Fuchs'sche Classe von linearen Differentialgleichungen* überhaupt und speciell diejenigen, welche nach Fuchs die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen und Abel'schen Integrale definiren,** in engster Verwandtschaft stehen. Ueberhaupt lässt sich Alles, was Gauss in seinem „Nachlass" von dem arithmetisch-geometrischen Mittel behauptet (welches als specieller Fall $n = 2$ in unserer Function enthalten ist) Wort für Wort auch für unsere Function verallgemeinern.

Hier will ich die Entwickelung geben, welche als Verallgemeinerung von 9 in Pars II von Gauss' Nachlass betrachtet werden kann.

Aus

$$\lambda) \qquad \frac{d\,{}^{(q+1)}\varphi_\lambda}{{}^{(q+1)}\varphi_\lambda} = \frac{1}{n}\sum \frac{{}^{(q)}\varphi_i\,{}^{(q+1)}\varphi^{\lambda-1}_{(i)\lambda-1}}{{}^{(q)}\varphi_\lambda{}^{\lambda}}\,\frac{d\,{}^{(q)}\varphi_i}{{}^{(q)}\varphi_i} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

[wobei ${}^{(q+1)}\varphi^{\lambda-1}_{(i)\lambda-1}$ analog wie $A\varphi_\lambda$) aus den Wurzeln derjenigen Gleichung $n-1^{\text{ten}}$ Grades gebildet ist, welche mit $f({}^{(q)}u) = 0$ alle Wurzeln mit Ausnahme einer gewissen φ_i gemein hat] erhellt, dass, wenn man fortfährt, in dieser Weise die Quotienten $\frac{d\,{}^{(q+1)}\varphi_\lambda}{{}^{(q+1)}\varphi_\lambda}$ als lineare Functionen von ebensolchen Quotienten mit niedrigerem Iterationsindex auszudrücken, die Jacobi'sche Functionaldeterminante des Systems für jedes (q) Null wird und nur Null wird für diejenigen Werthe von x, für welche die Discriminante

* Vergl. Fuchs, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, Borch. Journ. Bd. 66, 68 flgg.

** ibid. 1. Die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Parameters aufgefasst. Borch. Journ. Bd. 71.

2. Zur Theorie der Abel'schen Functionen (Ueber die Form der Argumente der Thetafunctionen etc.). Borch. Journ. Bd. 73.

3. Ueber die linearen Differentialgleichungen, welchen die Periodicitätsmoduln der Abel'schen Integrale genügen. Borch. J. Bd. 73.

$$ {}^{(q+1)}\Delta = \frac{{}^{(q)}\Delta_1}{n\,{}^{(q+1)}\varphi_1\,{}^{(q+1)}\varphi_2^2 \dots {}^{(q+1)}\varphi_{n-1}^{n-1}} $$

$$ = \frac{{}^{(q)}\varphi_1\,{}^{(q)}\varphi_2 \dots {}^{(q)}\varphi_n}{n\,{}^{(q+1)}\varphi_1\,{}^{(q+1)}\varphi_2^2 \dots {}^{(q+1)}\varphi_n^n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ {}^{(q+1)}\varphi_{(1)1} & {}^{(q+1)}\varphi_{(2)1} & \dots & {}^{(q+1)}\varphi_{(n)1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ {}^{(q+1)}\varphi_{(1)n-1}^{n-1} & {}^{(q+1)}\varphi_{(2)n-1}^{n-1} & \dots & {}^{(q+1)}\varphi_{(n)n-1}^{n-1} \end{vmatrix} $$

verschwindet, wobei Δ_1 genau diejenige Determinante ist, von welcher ich im IV. Capitel des zweiten Abschnittes meines Werkes „Theorie allgemeiner Cofunctionen“ bewiesen habe, dass

$$ \Delta_1 = ({}^{(q)}\varphi_1 - {}^{(q)}\varphi_2)({}^{(q)}\varphi_1 - {}^{(q)}\varphi_3) \dots ({}^{(q)}\varphi_{n-1} - {}^{(q)}\varphi_n), $$

d. h. Δ_1^2 ist genau die Discriminante von $f({}^{(q)}u) = 0$. Die singulären Punkte sind somit die Nullpunkte des Productes

$$ {}^{(q+1)}\Delta = {}^{(q)}\Delta \,.\, {}^{(q-1)}\Delta \dots {}^{(1)}\Delta, $$

indem die Elemente der Determinante ${}^{(q+1)}\Delta$ aus den Elementen der Determinanten ${}^{(1)}\Delta$, ${}^{(2)}\Delta$, ..., ${}^{(q-1)}\Delta$, ${}^{(q)}\Delta$ in bekannter Weise componirt sind.

Aus den in λ) enthaltenen n Gleichungen, welche für ein beliebiges q jedes der n Elemente

$$ \frac{d\,{}^{(q+1)}\varphi_1}{{}^{(q+1)}\varphi_1}, \quad \frac{d\,{}^{(q+1)}\varphi_2}{{}^{(q+1)}\varphi_2}, \quad \dots, \quad \frac{d\,{}^{(q+1)}\varphi_n}{{}^{(q+1)}\varphi_n} $$

als lineare Functionen der entsprechenden n vorhergehenden

$$ \frac{d\,{}^{(q)}\varphi_1}{{}^{(q)}\varphi_1}, \quad \frac{d\,{}^{(q)}\varphi_2}{{}^{(q)}\varphi_2}, \quad \dots, \quad \frac{d\,{}^{(q)}\varphi_n}{{}^{(q)}\varphi_n} $$

darstellen lassen, kann man leicht ein anderes System von je $(n-1)$ linearen Functionen von je $(n-1)$ Elementen herleiten, indem man die Differenzen einführt, welche man erhält, wenn man für jedes q immer

$$ \frac{d\,{}^{(q+1)}\varphi_n}{{}^{(q+1)}\varphi_n} $$

von allen vorhergehenden $\frac{d\,{}^{(q+1)}\varphi_\lambda}{{}^{(q+1)}\varphi_\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, \dots, n-1)$ subtrahirt und die Differenzen als neue Elemente auffasst. Zieht man nämlich die aus λ) für $\lambda = n$ sich ergebende Gleichung von allen vorhergehenden $(\lambda = 1, 2, \dots, n-1)$ ab, so erhält man zunächst, wenn man Kürze halber die Bezeichnung

$$ {}^{(q+1)}\psi_{i,k} = \frac{{}^{(q)}\varphi_i\,{}^{(q+1)}\varphi_{(i)k-1}^{k-1} - {}^{(q+1)}\varphi_k^k}{{}^{(q+1)}\varphi_k^k} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, n-1, n \\ k = 1, 2, \dots, n-1 \end{pmatrix} $$

einführt, $(n-1)$ lineare Functionen von je n Elementen

$$ \frac{d\,{}^{(q+1)}\varphi_k}{{}^{(q+1)}\varphi_k} - \frac{d\,{}^{(q+1)}\varphi_n}{{}^{(q+1)}\varphi_n} = \frac{1}{n}\sum_1^n{}_i\,{}^{(q+1)}\psi_{i,k}\,\frac{d\,{}^{(q)}\varphi_i}{{}^{(q)}\varphi_i} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). $$

Bedenkt man aber, dass unserer Definition und Bezeichnung gemäss für ein beliebiges q und k immer

$$\sum_1^n {}^{(q+1)}\psi_{i,k} = 0$$

wird, so kann man offenbar das Gleichungssystem so schreiben:

$$\begin{aligned}
&({}^{(q+1)}\varphi_1, {}^{(q+1)}\varphi_n) \\
&= \frac{1}{n}\left[{}^{(q+1)}\psi_{1,1}\ ({}^{(q)}\varphi_1, {}^{(q)}\varphi_n) + {}^{(q+1)}\psi_{2,1}\ ({}^{(q)}\varphi_2, {}^{(q)}\varphi_n) + \cdots + {}^{(q+1)}\psi_{n-1,1}\ ({}^{(q)}\varphi_{n-1}, {}^{(q)}\varphi_n)\right], \\
&({}^{(q+1)}\varphi_2, {}^{(q+1)}\varphi_n) \\
&= \frac{1}{n}\left[{}^{(q+1)}\psi_{1,2}\ ({}^{(q)}\varphi_1, {}^{(q)}\varphi_n) + {}^{(q+1)}\psi_{2,2}\ ({}^{(q)}\varphi_2, {}^{(q)}\varphi_n) + \cdots + {}^{(q+1)}\psi_{n-1,2}\ ({}^{(q)}\varphi_{n-1}, {}^{(q)}\varphi_n)\right], \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&({}^{(q+1)}\varphi_{n-1}, {}^{(q+1)}\varphi_n) \\
&= \frac{1}{n}\left[{}^{(q+1)}\psi_{1,n-1}({}^{(q)}\varphi_1, {}^{(q)}\varphi_n) + {}^{(q+1)}\psi_{2,n-1}({}^{(q)}\varphi_2, {}^{(q)}\varphi_n) + \cdots + {}^{(q+1)}\psi_{n-1,n-1}({}^{(q)}\varphi_{n-1}, {}^{(q)}\varphi_n)\right],
\end{aligned}$$

wobei Kürze halber

$$\frac{d\,{}^{(p)}\varphi_k}{{}^{(p)}\varphi_k} - \frac{d\,{}^{(p)}\varphi_n}{{}^{(p)}\varphi_n} = ({}^{(p)}\varphi_k, {}^{(p)}\varphi_n)$$

gesetzt ist.

Die Determinante $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung dieses Systems ist mit der obigen Determinante ${}^{(q+1)}\Delta$ identisch und wird aus jener unmittelbar durch Subtraction der letzten Colonne von allen vorhergehenden erhalten. Dieselbe wird also Null für die Nullwerthe der obigen Discriminante und nur für diese.

Man kann also für jedes q die $(n-1)$ Differenzen

$$({}^{(q)}\varphi_1, {}^{(q)}\varphi_n),\ ({}^{(q)}\varphi_2, {}^{(q)}\varphi_n),\ \ldots,\ ({}^{(q)}\varphi_{n-1}, {}^{(q)}\varphi_n);$$

auch linear ausdrücken durch die $(n-1)$ ursprünglichen Differenzen

$$(\varphi_1, \varphi_n),\ (\varphi_2, \varphi_n),\ \ldots,\ (\varphi_{n-1}, \varphi_n);$$

die Determinante des Systems ist ein Product aller vorhergehenden Determinanten und die Elemente sind Compositionen aller vorhergehenden Elemente, unter denen nur homogene Functionen von

$${}^{(q)}\varphi_1,\ {}^{(q)}\varphi_2,\ \ldots,\ {}^{(q)}\varphi_n,$$

nicht aber die der

$$d\,{}^{(q)}\varphi_1,\ d\,{}^{(q)}\varphi_2,\ \ldots,\ d\,{}^{(q)}\varphi_n$$

vorkommen. Bezeichnet man, analog wie Gauss, mit

$$\begin{aligned}
{}^{(q)}s = \frac{d\,{}^{(q)}\varphi_1}{{}^{(q)}\varphi_1} + \frac{d\,{}^{(q)}\varphi_2}{{}^{(q)}\varphi_2} + \cdots + \frac{d\,{}^{(q)}\varphi_n}{{}^{(q)}\varphi_n} = n\frac{d\,{}^{(q)}\varphi_n}{{}^{(q)}\varphi_n} + ({}^{(q)}\varphi_1, {}^{(q)}\varphi_n) + \cdots \\
+ ({}^{(q)}\varphi_{n-1}, {}^{(q)}\varphi_n)
\end{aligned}$$

und berücksichtigt, dass

$$\frac{d\,{}^{(q+1)}\varphi_n}{{}^{(q+1)}\varphi_n} = \frac{1}{n}\left[\frac{d\,{}^{(q)}\varphi_1}{{}^{(q)}\varphi_1} + \frac{d\,{}^{(q)}\varphi_2}{{}^{(q)}\varphi_2} + \cdots + \frac{d\,{}^{(q)}\varphi_n}{{}^{(q)}\varphi_n}\right],$$

so folgt für jedes q $(q = 1, 2, \ldots, \infty)$

$${}^{(q+1)}s = {}^{(q)}s + ({}^{(q)}\varphi_1, {}^{(q)}\varphi_n) + ({}^{(q)}\varphi_2, {}^{(q)}\varphi_n) + \cdots + ({}^{(q)}\varphi_{n-1}, {}^{(q)}\varphi_n),$$

also:

$$\begin{aligned}
{}^{(\infty)}s = s &+ (\varphi_1, \varphi_n) + ('\varphi_1, '\varphi_n) + (''\varphi_1, ''\varphi_n) + \cdots \\
&+ (\varphi_2, \varphi_n) + ('\varphi_2, '\varphi_n) + (''\varphi_2, ''\varphi_n) + \cdots \\
&\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&+ (\varphi_{n-1}, \varphi_n) + ('\varphi_{n-1}, '\varphi_n) + (''\varphi_{n-1}, ''\varphi_n) + \cdots \\
= &\frac{d\varphi_1}{\varphi_1}\left\{1 + \frac{1}{n}('\psi_{11} + '\psi_{12} + \cdots + '\psi_{1\,n-1}) + \frac{1}{n^2}(\ ) + \frac{1}{n^3}(\ ) + \cdots\right\} \\
&+ \frac{d\varphi_2}{\varphi_2}\left\{1 + \frac{1}{n}('\psi_{21} + '\psi_{22} + \cdots + '\psi_{2\,n-1}) + \frac{1}{n^2}(\ ) + \frac{1}{n^3}(\ ) + \cdots\right\} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \frac{d\varphi_n}{\varphi_n}\left\{1 + \frac{1}{n}('\psi_{n,1} + '\psi_{n,2} + \cdots + '\psi_{n,n-1}) + \frac{1}{n^2}(\ ) + \frac{1}{n^3}(\ ) + \cdots\right\}.
\end{aligned}$$

Für $n = 2$, $\varphi_1 = x$, $\varphi_2 = y$ erhält man die Formeln von Gauss a. a. O.

Ich werde bei einer späteren Gelegenheit mehrere Anwendungen von unserer Function geben und werde unter Anderem auch zeigen, dass man aus einer Notiz von Herrn Schlömilch „Ueber Mittelgrössen verschiedener Ordnungen" (Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 3, S. 301) nützliche Schlüsse für unsere Function ziehen kann.

Heidelberg, Juni 1887. Dr. Hermann Schapira.

XVII. Sätze über die Bewegung eines ebenen Systems.

I. Ist ein ebenes System gleichzeitig mehreren Bewegungen ausgesetzt, von welchen jede einzelne durch den momentanen Drehpunkt C_n, den Wendepol W_n und die Winkelgeschwindigkeit ω_n gegeben ist, so ist der resultirende Drehpunkt C bekanntlich der Schwerpunkt aller C_n, wenn in denselben die Winkelgeschwindigkeiten ω_n als Gewichte angebracht werden. Es lässt sich zeigen: Der Wendepol W der resultirenden Bewegung ist der Schwerpunkt aller Wendepole W_n und aller Drehpunkte C_n, wenn in ersteren die Gewichte ω_n^2, in letzteren die Gewichte $\omega_n(\Sigma\omega - \omega_n)$ angebracht werden.

II. Besitzt ein ebenes System gleichzeitig zwei Bewegungen mit den momentanen Drehpunkten C_1, C_2 und den Wendepolen W_1, W_2, so lässt sich zeigen: Der Wendepol W der resultirenden Bewegung liegt auf einer Parabel, welche durch die Wendepole W_1, W_2 geht; die Tangenten dieser Parabel in W_1, W_2 schneiden sich im Halbirungspunkte der Strecke C_1C_2.

Graz. Wittenbauer.

(Aus den Sitzungsber. d. Wiener Akademie, 1886, XVI.)

XVIII. Ueber eine synthetische Erzeugung der Cremona'schen Transformation dritter und vierter Ordnung.

(Hierzu Taf. III Fig. 12 u. 13.)

Die Cremona'sche Transformation zweiter Ordnung oder die quadratische Transformation lässt sich nach Steiner bekanntlich dadurch stereometrisch erzeugen, dass man das Strahlsystem der Geraden, die zwei festen windschiefen Geraden begegnen, mit zwei Ebenen schneidet. Jede Gerade des Systems schneidet dann entsprechende Punkte der quadratisch aufeinander bezogenen Ebenen aus. In ganz ähnlicher Weise lässt sich nun auch die Cremona'sche Transformation dritter und vierter Ordnung stereometrisch klar veranschaulichen. Nehmen wir nämlich statt der beiden Geraden eine Raumcurve dritter Ordnung und schneiden das Strahlsystem ihrer Secanten mit zwei Ebenen, so erhält man eine Transformation vierter Ordnung. Um dies nachzuweisen, brauchen wir blos folgende zwei Sätze als bekannt vorauszusetzen:

1. Durch jeden beliebigen Punkt im Raume giebt es eine Secante der Raumcurve. Liegt aber der Punkt auf der Raumcurve selbst, so giebt es unendlich viele durch ihn gehende Secanten, welche den die Curve von diesem Punkte aus projicirenden Kegel zweiter Ordnung bilden.

2. Alle Secanten der Raumcurve dritter Ordnung, welche eine vorgegebene Gerade schneiden, bilden eine Fläche vierter Ordnung.

I.

Es seien E und E_1 die beiden Ebenen, ST (Fig. 12) ihre Schnittlinie und A, B, C, bezw. D_1, E_1, F_1 die Schnittpunkte derselben mit der Raumcurve. Dann ist klar, dass einem beliebigen Punkte P der einen Ebene ein und nur ein Punkt P_1 der andern Ebene entspricht, und umgekehrt. Denn durch P giebt es blos eine einzige Secante der Raumcurve, welche eben die E_1 in P_1 trifft. Nehmen wir aber einen der Punkte A, B, C, so geht durch ihn ein ganzer Kegel von Secanten, welcher E_1 in einem Kegelschnitt trifft, der auch D_1, E_1, F_1 als Punkte enthält.

Wenn ferner die Linien AB, AC, BC, D_1E_1, E_1F_1, F_1D_1 der Schnittlinie ST bezüglich in den Punkten γ_1, β_1, α_1, φ, δ, ε begegnen und wir einen Kegelschnitt immer blos durch fünf ihn bestimmende Punkte bezeichnen, so entspricht, da ja auch AB, BC Secanten der Raumcurve sind, offenbar

dem Punkte A der Kegelschnitt $(\beta_1 \gamma_1 D_1 E_1 F_1)$,
" " B " " $(\alpha_1 \gamma_1 D_1 E_1 F_1)$;
" " F_1 " " $(\delta \varepsilon A B C)$
u. s. w.;

A, B, C, D_1, E_1, F_1 sind also eine Gruppe von singulären Punkten der Transformation.

Ferner erkennt man leicht, dass die Punkte der Schnittlinie ST sich selbst entsprechen. Denn ist Q ein Punkt auf ST und zwar als Punkt von E betrachtet, so geht durch ihn eine Secante; diese trifft aber E_1 wieder in Q.

Dagegen machen eine Ausnahme die Punkte α_1, β_1, γ_1, δ, ε, φ. Denn nehmen wir z. B. α_1 als einen Punkt der E_1, so ist BC die durch ihn gehende Secante. Diese liegt aber selbst in E, ihr Schnittpunkt mit E wird also unbestimmt, d. h. dem Punkte α_1 entspricht jeder Punkt von BC. Es entspricht also

dem Punkte δ die Gerade $F_1 E_1$,
" " ε " " $D_1 F_1$,
" " α_1 " " BC
u. s. w.;

die Punkte δ, ε, φ, α_1, β_1, γ_1 bilden also eine zweite Gruppe von singulären Punkten.

II.

Nehmen wir jetzt eine Gerade in E. Dann bilden alle Secanten, welche dieser begegnen, eine Fläche vierter Ordnung und diese hat die gegebene Raumcurve zur Doppelcurve. Denn durch jeden Punkt der Raumcurve gehen zwei Erzeugende dieser Regelfläche; es giebt nämlich immer zwei Erzeugende des die Curve von diesem Punkte aus projicirenden Kegels, welche zugleich die vorgegebene Gerade schneiden.

Die E_1 schneidet also diese Regelfläche in einer Curve vierter Ordnung, welche $D_1 E_1 F_1$ zu Doppelpunkten hat. Man sieht dies Letztere übrigens auch daraus sofort ein, dass die Gerade in E den Kegelschnitt $(\delta \varepsilon A B C)$ ja zweimal trifft, also die entsprechende Curve zweimal durch F_1 gehen muss. Ferner muss, da die Gerade in E jede Seite des Dreiecks ABC trifft, die entsprechende Curve vierter Ordnung auch durch $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ je einfach hindurchgehen.

Es entspricht also einer Geraden in E eine rationale Curve vierter Ordnung in E_1, welche $D_1 E_1 F_1$ zu Doppelpunkten hat und ausserdem noch durch $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ geht. Damit ist der Charakter der Transformation als einer Cremona'schen vierter Ordnung nachgewiesen. Einer Geraden in E_1 entspricht natürlich eine Curve vierter Ordnung mit ABC als Doppelpunkten und $\delta \varepsilon \varphi$ als einfachen Punkten. Es ist nun leicht nachzuweisen, dass einer beliebigen Curve n^{ter} Ordnung C^n in E eine Curve C_1^{4n} in E_1 entspricht. Wir wählen eine beliebige Gerade in E_1; dieser entspricht dann eine Curve vierter Ordnung in E, welche die C^n in $4n$ Schnittpunkten schneiden wird.

Diesen und nur diesen müssen die Schnittpunkte der Geraden in E_1 mit der C_1 entsprechen, also ist C_1 nothwendig von der $(4n)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Ferner hat die C^n mit jedem der Kegelschnitte $(\delta\varepsilon ABC)$, $(\delta\varphi ABC)$, $(\varepsilon\varphi ABC)$ offenbar $2n$ Punkte gemeinsam. also sind, da jedem dieser Schnittpunkte immer einer der Punkte $F_1 E_1 D_1$ entspricht, diese drei Punkte $(2n)$-fache Punkte der C_1^{4n} und ebenso sind, entsprechend den n Schnittpunkten der C^n mit jeder der Seiten des Dreiecks ABC, die Punkte α_1, β_1, γ_1 (n)-fache Punkte der C_1^{4n}. Wir haben also:

> „Einer beliebigen Curve n^{ter} Ordnung C^n in E entspricht in E_1 eine Curve von der $(4n)^{\text{ten}}$ Ordnung C_1^{4n}, welche D_1, E_1, F_1 zur $2n$-fachen, α_1, β_1, γ_1 zu (n)-fachen Punkten hat, und umgekehrt."

Natürlich entspricht einer Curve n^{ter} Ordnung in E_1 auch eine Curve $(4n)^{\text{ter}}$ Ordnung in E mit A, B, C, δ, ε, φ als $(2n)$-fachen, bezw. (n)-fachen Punkten.

Nehmen wir jetzt aber allgemeiner an, unsere Curve C^n habe den Punkt A zum λ-fachen, den Punkt B zum μ-fachen, den Punkt C zum ν-fachen Punkt und die Punkte δ, ε, φ bezüglich als $\varkappa$-fache, ϱ-fache und χ-fache Punkte, so ist die Ordnung der C_1 nur noch

$$4n - 2(\lambda+\mu+\nu) - (\varkappa+\varrho+\chi),$$

weil eben jedesmal, wenn C^n z. B. durch A hindurchgeht, der Kegelschnitt $(\beta_1\gamma_1 D_1 E_1 F_1)$ sich absondert, und wenn C^n durch ε läuft, die Gerade $D_1 F_1$. Rechnet man diese abscheidenden Kegelschnitte und Geraden nicht mit, so hat dann auch die C_1 die D_1, E_1, F_1, α_1, β_1, γ_1 nicht mehr als $(2n)$-, bezw. (n)-fache Punkte, vielmehr sind dies nur noch der Reihe nach

$$[2n-(\lambda+\mu+\nu)-(\varrho+\chi)], \quad [2n-(\lambda+\mu+\nu)-(\varkappa+\chi)],$$
$$[2n-(\lambda+\mu+\nu)-(\varkappa+\varrho)],$$
$$[n-(\mu+\nu)], \quad [n-(\lambda+\mu)], \quad [n-(\lambda+\mu)]\text{-fache Punkte},$$

wie man auch bald einsieht.

Beispielsweise entspricht dem Netz der Kegelschnitte in E, das durch die Punkte A, B, C bestimmt ist, das Netz der Kegelschnitte in E_1 durch die Punkte D_1, E_1,' F_1. Je zwei entsprechende Kegelschnitte schneiden sich auf ST.

III.

Die bisher nachgewiesenen Sätze lassen sich nun auch räumlich deuten. Denken wir uns die Ebene E fest, die E_1 dagegen durch immer andere und andere Ebenen ersetzt, so können wir den in I ausgesprochenen Satz so formuliren:

> „Hat man eine Raumcurve dritter Ordnung und irgend eine ebene Curve n^{ter} Ordnung, so bilden alle Secanten der Raumcurve, welche diese ebene Curve schneiden, eine Regelfläche von der $(4n)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche die Raumcurve selbst zur $(2n)$-fachen Curve hat, die in der Ebene der ebenen Curve liegenden Secanten aber als (n)-fache Erzeugende enthält."

Dies ist die Verallgemeinerung des ganz am Anfang unter 2. erwähnten Hilfssatzes. Ein einfacher, specieller Fall desselben ist folgender:

> „Hat man eine Raumcurve dritter Ordnung und einen Kegelschnitt, so bilden alle Secanten der Raumcurve, die diesem begegnen, eine Fläche achter Ordnung, welche die Raumcurve selbst als vierfache Curve, die in der Ebene des Kegelschnittes liegenden Secanten aber als Doppelerzeugende enthält.“

In ähnlicher Weise könnten wir auch den andern Fall, wo die C^n die singulären Punkte der E in gewisser Vielfachheit enthält, räumlich deuten. Z. B. haben wir:

> „Hat man eine Raumcurve und legt durch drei ihrer Punkte einen sonst beliebigen Kegelschnitt, so bilden alle Secanten der Raumcurve, welche diesem begegnen, vorausgesetzt, dass von den Kegeln zweiter Ordnung abgesehen wird, ein Hyperboloid, das die Raumcurve selbst enthält.“

Nun können wir der Ebene E_1 aber noch weitere, besondere Lagen geben. Legen wir E_1 durch eine Tangente der Raumcurve, so fallen von den Punkten D_1, E_1, F_1 zwei zusammen und es ist ausserdem diese Tangente als Bestimmungsstück mitzurechnen. Die Curve vierter Ordnung, welche einer Geraden in E entspricht, hat dann in dem Punkte, wo die beiden Doppelpunkte zusammenfallen, eine Selbstberührung mit vorgegebener Tangente. Eine ähnliche Singularität hat auch die C_1^{4n}, die einer beliebigen C^n entspricht, in diesem Punkte, und zwar ist von den noch vorhandenen $(2n-1)$ Tangenten eine die vorgegebene.

Nehmen wir endlich E_1 als Osculationsebene der Raumcurve, so hätte die Curve vierter Ordnung, welche einer Geraden in E entspricht, einen dreifachen Punkt, in dem aber nur eine einzige Tangente vorhanden, so dass derselbe äusserlich nicht besonders in die Augen springt. Man findet auch leicht, dass ein solcher dreifacher Punkt für neun Bedingungen zählt, wie es auch sein muss, da von der Curve vierter Ordnung ausserdem noch drei Punkte gegeben.

Zu bemerken ist, dass der zweite Hauptfall der Cremona'schen Transformation vierter Ordnung, wo die Curve vierter Ordnung durch einen dreifachen Punkt und sechs weitere Punkte bestimmt erscheint, hier nicht enthalten ist.

IV.

Lassen wir jetzt die Raumcurve dritter Ordnung in einen Kegelschnitt K und in eine diesen schneidende Gerade G zerfallen, so giebt es wiederum, wenn wir von dem Strahlbündel im Schnittpunkt der Geraden mit dem Kegelschnitt absehen, durch jeden beliebigen Punkt im Raume eine Gerade, welche K und G begegnet, während in jeder beliebigen Ebene zwei solche Strahlen liegen. Die Punkte der zerfallenen Raumcurve nehmen auch hier wieder eine Ausnahmestellung ein, insofern es nämlich durch dieselben unendlich viele Secanten giebt. Liegt der Punkt auf G, so bilden diese einen Kegel zweiter Ordnung, während die durch einen Punkt von K gehenden Strahlen des Systems einen in der Ebene durch den Punkt und durch G liegenden Strahlbüschel bilden. Schneiden wir dieses Strahlsystem mit zwei Ebenen, so werden diese wieder Punkt für Punkt eindeutig aufeinander bezogen, und zwar erhalten wir die Cremona'sche Transformation dritter Ordnung.

Nehmen wir nämlich noch eine weitere Gerade g hinzu, so ergiebt sich schon aus dem in der Einleitung unter 2. erwähnten Satze, dass alle Secanten unserer zerfallenen Raumcurve, welche g treffen, eine Fläche dritter Ordnung bilden, was sich übrigens ja auch davon unabhängig leicht beweisen lässt. Der Kegelschnitt liegt ganz auf dieser Fläche — durch jeden seiner Punkte geht ja noch eine Erzeugende derselben —, die G ist Doppelgerade der Fläche, — durch jeden ihrer Punkte laufen zwei Erzeugende der Fläche.

Sind nun wieder E und E_1 die beiden schneidenden Ebenen, die sich (Fig. 13) in ST treffen, während G sie in A und D_1, K in B, C, E_1, F_1 trifft und sind im Uebrigen die Bezeichnungen die nämlichen wie in Fig. 12, nur dass α_1 mit δ zusammenfallen muss, so sieht man leicht Folgendes ein: $A, B, C, \varepsilon, \varphi, D_1, E_1, F_1, \beta_1, \gamma_1$ sind die singulären Punkte; es entspricht

dem Punkte A der Kegelschnitt $(\beta_1\gamma_1 D_1 E_1 F_1)$,
" " B die Gerade $D_1\gamma_1$,
" " C " " $D_1\beta_1$,
" " E " " $D_1 F_1$ u. s. f.

Ferner:

„Einer beliebigen Geraden in E entspricht in E_1 eine Curve dritter Ordnung, welche D_1 zum Doppelpunkt, E_1, F_1, β_1, γ_1 zu einfachen Punkten hat. Allgemein entspricht einer beliebigen Curve n^{ter} Ordnung C^n in E eine Curve $(3n)^{\text{ter}}$ Ordnung C_1^{3n} in E_1, welche D_1 zum $(2n)$-fachen, E_1, F_1, β_1, γ_1 zu (n)-fachen Punkten hat."

Damit ist nachgewiesen, dass wir durch die erwähnte Beziehung in der That die Cremona'sche Transformation dritter Ordnung erhalten. Die weiteren Betrachtungen sind sämmtlich den schon angewandten ganz analog.

V.

Wir können auch hier wieder folgenden Satz aussprechen:

„Hat man eine zerfallene Raumcurve dritter Ordnung, bestehend aus einem Kegelschnitt und einer diesen schneidenden Geraden, und ausserdem eine beliebige ebene Curve n^{ter} Ordnung, so bilden alle Secanten der Raumcurve, welche diese Curve schneiden, eine Regelfläche $(3n)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Gerade als $(2n)$-fache Erzeugende, den Kegelschnitt und die in der Ebene der ebenen Curve liegenden zwei Erzeugenden als (n)-fache Elemente enthält."

Es steht uns nun auch hier wieder frei, den beiden schneidendon Ebenen besondere Lagen anzuweisen. Wir können z. B. die E_1 so wählen, dass sie K berührt. Dann fallen E_1 und F_1 zusammen und es ist die Tangente in diesem Punkt gegeben, d. h. jede C_1^{3n} berührt diese Tangente des Kegelschnittes K. Oder wählt man die Ebene E_1 so, dass sie durch G geht und überdies den Kegelschnitt berührt, so erhält die Curve dritter Ordnung eine Spitze mit vorgegebener Tangente, die anderen Curven eine höhere Singularität, in der $(2n-1)$ Tangenten vorhanden sind und darunter eine gegeben ist.

Damit sind also die Cremona'schen Transformationen zweiter, dritter und vierter Ordnung, mit Ausnahme eines Falles der letzteren, rein geometrisch erzeugt, was für die Einführung in diese Theorie, der Anschaulichkeit wegen, von Nutzen sein mag.

München, April 1887.

Karl Doehlemann,
gepr. Lehramtscandidat.

XVIII.

Ueber Regelflächen, deren Erzeugende zu den Mantellinien eines orthogonalen Kegels parallel sind.

Von

Dr. C. Beyel

in Zürich.

Hierzu Taf. IV Fig. 1—16.

A. Regelflächen vom Grade $3n$.

1.

Wir gehen von zwei Ebenen A und B aus; x sei ihre Schnittlinie. Durch einen Punkt O derselben ziehen wir eine Gerade h, welche weder in A, noch in B liegen soll. In A sei eine Curve n^{ter} Ordnung — $C_a{}^n$ — gegeben, welche O nicht enthalte (Fig. 1).

Sei E eine beliebige Ebene durch h, so trifft diese die Curve $C_a{}^n$ in n Punkten $A_1 \dots A_n$ und B in einer Geraden b. Wir fällen nun aus den Punkten $A_1 \dots A_n$ die Perpendikel p auf b. Drehen wir jetzt E um h, so erhalten wir in jeder Ebene E n Gerade p. Wir können beweisen, dass diese auf einer Regelfläche vom Grade $3n$ liegen.

Wir fassen die Linien p einer Ebene E als Schnittlinien von E mit Ebenen N auf, welche zu der in E liegenden Geraden b senkrecht stehen. Diese Ebenen N sind also zu einander parallel. Eine Parallelebene N* zu ihnen durch O schneidet E in einer Geraden p^*, welche zu den p parallel ist. Drehen wir die Ebene E um h, so gehört zu jeder ihrer Lagen eine Ebene N*. Alle Ebenen N* sind zur Ebene B senkrecht. Sie gehen folglich durch diejenige Gerade z, welche in O zur Ebene B senkrecht steht, d. h. sie bilden ein Büschel. Dasselbe ist projectivisch zum Büschel der Ebenen E und beide Büschel erzeugen einen Kegel zweiten Grades — $K_0{}^2$ — mit der Spitze in O.* Die Mantellinien dieses Kegels sind die Geraden, welche wir oben mit p^* bezeichneten. Sie sind zu den Geraden p parallel, d. h.

* Es ist ein sogenannter orthogonaler Kegel (vergl. Schröter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung, Leipzig 1880, S. 61 flgg.). Als Eigenschaften von $K_0{}^2$ heben wir hervor: Die Ebenen normal zu h und z schneiden $K_0{}^2$ in Kreisen, für welche die Schnittpunkte mit h und z Endpunkte eines Durchmessers sind. Die Tangentialebenen in h und z an $K_0{}^2$ stehen zur Ebene hz senkrecht.

letztere schneiden den Kegel K_0^2 in der unendlich fernen Ebene. Bezeichnen wir mit K_∞^2 den Kegelschnitt, welchen die unendlich ferne Ebene aus K_0^2 schneidet, so können wir also sagen: die Linien p treffen K_∞^2. Ueberdies sind sie Transversalen zu h und C_a^n. Sie liegen daher auf einer Regelfläche, welche K_∞^2, h und C_a^n zu Leitcurven hat. Im Allgemeinen ist der Grad einer solchen Regelfläche gleich $4n$. Weil aber h den Kegelschnitt K_∞^2 trifft, wird dieser Grad um n vermindert. Also erfüllen die p, wie behauptet, eine Regelfläche R_p^{3n} vom Grade $3n$.

Durch jede Ebene E werden einer Geraden durch O in B n Punkte von C_a^n zugeordnet, d. h. es wird durch das Ebenenbüschel um h eine ein-n-deutige Beziehung zwischen den Strahlen eines Büschels S_b in der Ebene B und den Punkten von C_a^n vermittelt. Unter Benutzung dieser Beziehung lässt sich die Erzeugung von R_p^{3n} kurz so ausdrücken:

Fällen wir aus den Punkten von C_a^n auf die entsprechenden Strahlen des Büschels S_b die Perpendikel, so ist ihr Ort eine Regelfläche vom Grade $3n$.

Wir knüpfen an die Darstellung von R_p^{3n} einige Bemerkungen über diese Fläche.

K_∞^2 ist eine n-fache Curve, h eine $2n$-fache Gerade von R_p^{3n}.

Die Ebene hz schneidet R_p^{3n} ausser in h noch in n Geraden $z_1 \ldots z_n$, welche zu z parallel sind. Die Tangentialebenen an R_p^{3n} in den unendlich fernen Punkten dieser Geraden stehen zur Ebene hz senkrecht. Die Ebene durch h, welche zur Ebene hz senkrecht steht, berührt R_p^{3n} im unendlich fernen Punkte von h und schneidet aus R_p^{3n} n Gerade, welche zu h parallel sind. (Vergl. Anmerkung *.)

In der Ebene A liegen zwei Erzeugende d_1, d_2 des Kegel K_0^2. Jede derselben schneidet C_a^n in n Punkten, und da sie überdies h und K_∞^2 trifft, so ist sie eine n-fache Gerade von R_p^{3n}.

Die unendlich ferne Ebene schneidet R_p^{3n} ausser in K_∞^2 noch in n Geraden. Diese verbinden den unendlich fernen Punkt von h mit den unendlich fernen Punkten von C_a^n.

Construiren wir in den Punkten A von C_a^n zu den Geraden p die Senkrechten s, welche h schneiden, so sind diese zu den resp. Geraden b parallel, welche mit s und p in einer Ebene liegen, d. h. sie sind zur Ebene B parallel. Mithin liegen die s auf einer Regelfläche R_s^{2n}, welche C_a^n, h und die Stellung der Ebene B zu Leitlinien hat. Diese Regelfläche ist vom Grade $2n$. Wir schliessen daher:

Die Geraden, welche in den Punkten von C_a^n zu den p senkrecht stehen und mit diesen in einer Ebene durch O liegen, erfüllen eine Regelfläche vom Grade $2n$.

Lassen wir die Voraussetzung fallen, dass O nicht in C_a^n liege, und nehmen wir an, O sei ein r-facher Punkt von C_a^n, so wird ihm entsprechend der Grad von R_p^{3n} um $2.r$ vermindert.

2.

Wir untersuchen nun die Curven C^{3n}, welche von einer beliebigen Ebene P aus R_p^{3n} geschnitten werden. Diese Curven sind im Allgemeinen von der Ordnung $3n$. Sie haben in h einen $2n$-fachen Punkt. Vier n-fache Punkte liegen resp. in K_∞^2, d_1, d_2. Diesen Singularitäten würde eine Classenzahl der Curven entsprechen, welche gleich n^2+3n ist. Weitere Singularitäten sind durch gegebene Singularitäten von $C_a{}^n$ bedingt und vermindern diese Classenzahl nach bekannten Gesetzen.

Unter den Curven C^{3n} heben wir diejenigen — $C_0{}^{3n}$ — hervor, deren Ebenen P_0 zu z oder h senkrecht stehen. Solche Ebenen schneiden den Kegel $K_0{}^2$ in Kreisen. Ihre imaginären Punkte J_1, J_2 auf der unendlich fernen Ebene sind die Schnittpunkte von P_0 mit K_∞^2. Durch diese müssen die Curven $C_0{}^{3n}$ gehen. Wir sagen daher:

Die Ebenen, welche zu den Geraden h und z senkrecht stehen, schneiden R_p^{3n} in Curven, für welche die imaginären Kreispunkte n-fache Punkte sind.

Treffe P_0 die Geraden h und z in den resp. Punkten H und Z, so *begrenzen diese den Durchmesser eines Kreises*, welchen P_0 aus $K_0{}^2$ schneidet. Auf diesem Kreise liegen die Schnittpunkte D_1, D_2 von P_0 mit d_1, d_2. Letztere Geraden sind für R_p^{3n} n-fach, also sind D_1, D_2 für $C_0{}^{3n}$ n-fache Punkte. Wir schliessen daher:

Der $2n$-fache Punkt H und die vier n-fachen Punkte J_1, J_2, D_1, D_2 von $C_0{}^{3n}$ liegen auf einem Kreise, für welchen HZ ein Durchmesser ist.

Die Punkte D_1, D_1 befinden sich überdies in der Geraden a, welche P_0 aus A schneidet. Sie sind also auch in dem Falle durch reelle Elemente definirt, in welchem d_1, d_2 conjugirt imaginäre Gerade von $K_0{}^2$ sind.

Wir wenden uns jetzt speciell der Curve C_b^{3n} zu, in welcher eine Parallelebene P_b zu B die Fläche R_p^{3n} schneidet. Wir construiren in folgender Weise Punkte B dieser Curve. Sei A_1 ein Punkt auf $C_a{}^n$ (Fig. 1), so ziehen wir durch ihn zu h und z die Parallelen h^* und z^*. Schneiden diese P_b in B_h und B_z und trifft h die Ebene P_b in H, so fällen wir aus B_z auf die Gerade $\overline{HB_h}$ die Normale. Ihr Fusspunkt liegt auf C_b^{3n}.

Indem wir diese Construction für alle Punkte von C_b^{3n} ausführen, bemerken wir, dass sowohl die Punkte B_z, wie die Punkte B_h auf Curven n^{ter} Ordnung liegen. Beide Curven $C_z{}^n$, $C_h{}^n$ sind zu einander affin mit der Richtung von B_hB_z oder HZ als Affinitätsrichtung. Axe der Affinität ist die Gerade a, welche P_b aus A schneidet. Mit Hilfe dieser affinen Curven erhalten wir C_b^{3n} nach folgendem Gesetze:

Wir construiren zu den Punkten von $C_h{}^n$, welche auf einer Geraden durch H liegen, die entsprechenden von $C_z{}^n$ und fällen aus letzteren die Senkrechten auf die Gerade. C_b^{3n} ist der Ort der Fusspunkte der Senkrechten.

Nach demselben Gesetze zeichnen wir die Curven, welche die Normalebenen zu h aus R_p^{3n} schneiden.

Geben wir in einer Ebene P_0 zwei beliebige Curven n^{ter} Ordnung C_z^n, C_h^n, welche mit a als Axe zu einander affin sind, so können wir auf unendlich viele Weisen die eine dieser Curven als Orthogonalprojection und die andere als schiefe Parallelprojection einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung C_a^n auffassen. Wir erhalten eine solche Curve, indem wir in den Punkten der einen von den zwei gegebenen Curven — sagen wir von C_z^n — die Senkrechten zu P_0 construiren und diese mit einer Ebene durch a schneiden. Hierdurch wird jedem Punkte B_z von C_z^n ein Punkt A von C_a^n zugeordnet und somit auch dem Punkte A der Punkt B_h von C_h^n, welcher in der angedeuteten Affinität dem Punkte B_z correspondirt. Verbinden wir jetzt die correspondirenden Punkte von C_a^n und C_h^n, so sind die Verbindungslinien zu einander parallel (Fig. 1). Somit erscheint in der That C_h^n als die Projection von C_a^n in der Richtung von $\overline{AB_h}$. Ziehen wir durch einen beliebigen Punkt H der Ebene P_0 die Gerade h, welche die Richtung von $\overline{AB_h}$ hat, so ist hierdurch eine Regelfläche R_p^{3n} festgelegt. Die Construction des Schnittes mit P_0 hängt nur von C_h^n und C_z^n ab und beweist uns folgenden Satz:

Gegeben seien zwei affine Curven n^{ter} Ordnung C_h^n, C_z^n und ein beliebiger Punkt H ihrer Ebene. Eine Gerade durch H schneidet die eine Curve — sagen wir C_h^n — in n Punkten, welchen in der Affinität n Punkte der andern Curve entsprechen. Fällen wir aus letzteren die Perpendikel auf die Gerade, so liegen ihre Fusspunkte in einer Curve der Ordnung $3n$. Für dieselbe ist H ein $2n$-facher Punkt. Die imaginären Kreispunkte sind n-fache Punkte. Construiren wir den Punkt Z, welcher H in der Affinität entspricht, so schneidet der Kreis über HZ als Durchmesser aus der Axe der Affinität zwei n-fache Punkte.

Die Ordnungszahl der Curven C^{3n} wird um $2r$ vermindert, wenn H ein r-facher Punkt von C_h^n und somit O ein r-facher Punkt von C_a^n ist.

3.

Wir fragen nun nach dem Orte der Senkrechten t, welche aus den resp. Geraden durch H die Punkte von C_b^{3n} schneiden. Wir beweisen, dass durch jeden Punkt P der Ebene $2n$ Gerade t gehen, d. h. dass ihr Ort eine Curve von der $2n^{ten}$ Classe — C_{2n} — ist. Es müssen nämlich die Punkte von C_b^{3n}, von denen aus $\overline{HP}$ unter rechtem Winkel erscheint, auf einem Kreise K^2 liegen, der HP zum Durchmesser hat. Dieser Kreis schneidet C_b^{3n} in $6n$ Punkten. Von ihnen liegen $2n$ in H und $2n$ in den imaginären Kreispunkten. Es bleiben mithin noch $2n$ Schnittpunkte. Durch diese und P gehen $2n$ Gerade t, welche Tangenten einer Curve $2n^{\text{ter}}$ Classe — C_{2n} — sind.*

Nach dem Gesagten können wir den Zusammenhang zwischen C_b^{3n} und C_{2n} kurz so ausdrücken:

Construiren wir über H und einem Punkte P der Ebene als Enden eines Durchmessers einen Kreis, so schneiden die Tangenten aus P an C_{2n} denselben ein zweites Mal in den Punkten B von C_b^{3n}.

Ist P ein Punkt von C_{2n}, so schneiden sich in ihm zwei benachbarte Tangenten von C_{2n}. Daraus schliessen wir, dass der Kreis mit HP als Durchmesser die Curve C_b^{3n} berührt. Wir sagen daher:

Die Kreise, welche H und je einen Punkt P von C_{2n} zu Enden eines Durchmessers haben, berühren eine Curve C_b^{3n}. Die Berührungspunkte liegen je im zweiten Schnittpunkte der Kreise mit den Tangenten in P an C_{2n}.

Die Mittelpunkte der letzterwähnten Kreise liegen auf einer Curve — C_{2n}^* —, welche zur Curve C_{2n} centrisch collinear liegt mit H als Centrum, der unendlich fernen Geraden als Axe. Wir sagen also:

Die Kreise, welche durch H gehen und die Curve C_b^{3n} berühren, haben ihre Mittelpunkte auf einer Curve von der $2n^{\text{ten}}$ Classe.

Treten an Stelle von P die Punkte, in welchen die Tangenten aus H die Curve C_{2n} berühren, so tangiren die Kreise über PH die Curve C_b^{3n} in H. Wir schliessen daher:

Die Tangenten in H an C_b^{3n} stehen senkrecht zu den Tangenten, welche von H aus an C_{2n} gehen.

Liegt P unendlich fern, so degenerirt K^2 in die unendlich ferne Gerade und in eine Linie durch H, welche zur Richtung von P senkrecht steht. Letztere Linie schneidet C_b^{3n} in n Punkten. Die Normalen in ihnen umhüllen C_{2n}. Daraus folgt:

Construiren wir in den Punkten B von C_b^{3n} die Normalen zu den resp. Geraden HB, so umhüllen diese eine Curve von der $2n^{\text{ten}}$ Classe.

Daraus schliessen wir, dass die Linien, welche in den n-fachen Punkten D_1, D_2 von C_b^{3n} zu den resp. Geraden HD_1, HD_2 senkrecht stehen, n-fache Tangenten von C_{2n} sind. Eine weitere n-fache Linie ist die unendlich ferne Gerade der Ebene. Nach diesen Singularitäten würde sich für C_{2n} eine Ordnungszahl gleich n^2+n ergeben. Ihre Verminderung hängt von Singularitäten der Curve C_a^n ab.

---

* Wir können dies auch dadurch beweisen, dass wir C_{2n} als Umriss der Fläche R_p^{3n} aus Z_∞ auffassen.

4.

Ein weiterer Zusammenhang zwischen den Curven C_b^{3n} und C_{2n} ergiebt sich, wenn wir in einem Punkte B von C_b^{3n} die Tangente t_b construiren und in der Tangente t von C_{2n}, welche durch B geht, den Berührungspunkt B_t zeichnen. Um diese Constructionen durchzuführen, untersuchen wir die Tangentialebenen von R_p^{3n}, welche durch die Gerade p gehen, in der B liegt, und benützen einen Satz aus der Theorie der Regelflächen. Derselbe sagt, dass das Büschel der Tangentialebenen durch eine Gerade zur Reihe der Berührungspunkte projectivisch ist. Kennen wir drei dieser Tangentialebenen mit ihren Berührungspunkten, so ist die erwähnte Projectivität festgelegt.

Wir suchen nun in unserem Falle drei Tangentialebenen durch p und ihre Berührungspunkte. Die Ebenen schneiden wir mit P_b. Die Berührungspunkte projiciren wir in der Richtung von z auf P_b resp. auf t. Dann erhalten wir drei Gerade durch B, denen drei Punkte auf t zugeordnet sind. Construiren wir in dieser Projectivität zu B die entsprechende Gerade, so ist diese die Tangente t_b in B an C_b^{3n}. Bestimmen wir zu t den entsprechenden Punkt, so wird in ihm die Curve C_{2n} von t berührt.

Es bleibt uns noch übrig, die erwähnte Projectivität festzulegen. Wir bezeichnen zu diesem Zwecke mit S_h den Schnittpunkt von p und h. Dann wird in S_h die Fläche R_p^{3n} von der Ebene ph berührt. Diese schneidet P_b in $\overline{BH}$. Die Projection von S_h auf P_b liegt im Schnittpunkte S von t mit $\overline{HZ}$ (Fig. 2). Es sind folglich $\overline{BH}$ und S ein Paar der Projectivität. Construiren wir in S_h einen Kegel K_0^{*2}, der zu K_0^2 parallel ist, so liegt p auf K_0^{*2}. Die Tangentialebene in p an K_0^{*2} berührt R_p^{3n} im unendlich fernen Punkte von p. Wir erhalten ihre Schnittlinie u mit der Ebene P_b, indem wir den Kreis zeichnen, welchen K_0^{*2} aus P_b schneidet. SH ist ein Durchmesser dieses Kreises. Seine Tangente in B ist die Gerade u. Ihr entspricht in der Projectivität der unendlich ferne Punkt U von t.

Eine dritte Tangentialebene durch p berührt R_p^{3n} in A. Sie geht durch die Tangente in A an C_a^{3n}, mithin auch durch den Schnittpunkt S_a dieser Tangente mit a. In demselben Punkte schneiden sich die Tangenten, welche in B_z und B_h die resp. Curven C_z^n, C_h^n berühren. Bemerken wir noch, dass B_z die Orthogonalprojection des Punktes A auf P_b ist, so folgt, dass $\overline{BS_a}$ und B_z ein drittes Paar der Projectivität sind.

Projiciren wir jetzt (Fig. 2) die Reihe t aus dem Punkte H, so erhalten wir ein Büschel, das zu dem Büschel um B projectivisch ist. Beide Büschel erzeugen einen Kegelschnitt K_t^2, in dessen Punkten sich die entsprechenden Strahlen der Büschel schneiden. Indem wir K_t^2 zur Construction von t_b und B_t benützen, fassen wir diese dahin zusammen:

Wir zeichnen einen Kegelschnitt K_t^2, der in H die Gerade HZ berührt und der durch B geht. Ein weiterer Punkt des Kegelschnittes liegt im Schnitte von $\overline{BS_a}$ mit $\overline{HB_z}$. Schneiden wir u mit einer Parallelen durch H zu t, so erhalten wir ein fünftes Element von K_t^2. Die Tangente in B an K_t^2 ist t_b. Der Schnittpunkt von t mit K_t^2 ist B_t.

Durch diese Construction wird jedem Punkte B von C_b^{3n} ein Punkt B_t von C_{2n} zugeordnet. Nach dem unter 3 Bewiesenen muss der Kreis über HB_t in B von der Tangente t_b berührt werden. Daraus ergiebt sich folgende Ausdrucksweise für die angedeutete Zuordnung:

Die Tangente in einem Punkte von C_b^{3n} bildet mit der Geraden durch H denselben Winkel, wie die Tangente im zugeordneten Punkte von C_{2n} mit der Geraden durch H.

5.

Die gegebene Erzeugungsweise von R_p^{3n} lässt nach zwei Richtungen eine Verallgemeinerung zu.

a) Für die eine knüpfen wir an die Construction einer Linie p in einer Ebene E an (Fig. 1). Sei F eine beliebige Ebene im Raume, so können wir durch den Punkt A von C_a^n in der Ebene E eine Gerade f ziehen, welche zu der Ebene F parallel ist. Construiren wir dann durch A in E eine Gerade d, für welche $(h^* p f d) = \varDelta$ ist — wobei $\varDelta$ eine constante Zahl sei —, so liegen die Geraden d auf einer Regelfläche R_d^{3n} vom Grade $3n$.

Construiren wir nämlich durch O zu den Geraden $h^* p f d$ die Parallelen $h p^* f^* d^*$, so sind diese durch die Relation $(h p^* f^* d^*) = \varDelta$ verknüpft. Drehen wir jetzt E um h, so durchlaufen die Geraden f^* ein Strahlenbüschel um O, dessen Ebene F* zu F parallel ist. Die Geraden p^* bewegen sich auf dem Kegel K_0^2. Die Geraden d^* bilden je mit einer Geraden p^*, f^*, h das Doppelverhältniss $\varDelta$. Folglich liegen die d^* auf einem Kegel zweiten Grades — K_d^2 —, welcher dem Kegel K_0^2 in einer Collineation $(hF^*\varDelta)$ entspricht.* Nun sind die Geraden d^* parallel zu den Geraden d des in Rede stehenden Ortes, d. h. sie schneiden den Kegel K_d^2 in der unendlich fernen Ebene. Mithin liegen sie auf einer Regelfläche, welche diesen Kegelschnitt zur Leitcurve hat. Zwei weitere Leitcurven sind h und C_a^n. h schneidet den Kegelschnitt in der unendlich fernen Ebene. Folglich ist die Regelfläche vom Grade $3n$. Wir bemerken, dass die Geraden f auf einer Regelfläche $2n^{\text{ten}}$ Grades — R_f^{2n} — liegen, welche h, C_a^n und die Stellung der Ebene F zu Leitcurven hat. Bezeichnen wir mit C_h^n den Cylinder, welcher C_a^n in der Richtung von h projicirt, so lässt sich die Abhängigkeit der in Rede stehenden Flächen durch die Relation $(C_h^n R_p^{3n} R_f^{2n} R_d^{3n}) = \varDelta$ ausdrücken.

---

* Vergl. meine Abhandlung: Ueber centrische und plane Collineation Nr. 2. Vierteljahrsschrift der naturforsch. Gesellsch. in Zürich, Bd. XXXI S. 4.

Wir heben einige Lagen von F hervor, bei denen sich die Beziehungen zwischen R_p^{3n} und R_d^{3n} vereinfachen.

α) Steht F senkrecht zu z oder senkrecht zu h, so schneidet diese Ebene K_d^2 in einem Kreise. Folglich muss F und jede Ebene, welche zu F parallel ist, aus R_d^{3n} eine Curve C_d^{3n} schneiden, welche die imaginären Kreispunkte zu n-fachen Punkten hat. Wir leiten C_d^{3n} aus der oben (3) untersuchten Curve C_b^{3n} ab, indem wir auf den Geraden durch H die Strecken $B B_h$ nach gegebenem Verhältniss theilen.

Steht F zu z senkrecht, so muss auch f zu p normal sein. Nehmen wir dann an, dass d und h^* die Linien f und p harmonisch trennen, so müssen die Geraden f und p die Winkel zwischen d und h^* halbiren. Steht F zu h senkrecht, so ist auch f zu h^* senkrecht. Soll jetzt p und d mit f und h^* eine harmonische Gruppe bilden, so müssen h^* und f die Winkel zwischen p und d halbiren. Wir schliessen daher:

Tragen wir in den Ebenen durch O je den Winkel ph^* von p oder h^* aus nach entgegengesetzter Seite ab, so erhalten wir Gerade d von Flächen R_d^{3n}.

Leiten wir die Schnitte C_d^{3n} dieser Flächen aus C_b^{3n} ab, so folgt:

Tragen wir auf den Geraden durch H die Strecke BB_h entweder von B oder von B_h aus nach entgegengesetzter Richtung ab, so erhalten wir Punkte von Curven C_d^{3n}.

β) Fällt F mit der Ebene A zusammen, so degenerirt R_f^{2n} in ein Strahlenbüschel durch O. Daraus folgt: Construiren wir in den Punkten von C_a^n die Geraden d, welche resp. mit p, h^* und den Linien durch O ein bestimmtes Doppelverhältniss bilden, so liegen die d auf einer Regelfläche vom Grade $3n$.

Sei C_d^{3n} der Schnitt derselben mit P_b, so besteht folgender Zusammenhang zwischen C_d^{3n} und C_b^{3n}:

Construiren wir auf den Geraden durch H die Punkte B_d, welche mit B, B_h und einem Punkte in a ein bestimmtes Doppelverhältniss bilden, so liegen die Punkte B_d auf C_d^{3n}.

Wir bemerken noch, dass die letzterwähnten Curven C_d^{3n} im Allgemeinen die imaginären Kreispunkte nicht zu n-fachen Punkten haben.

b) Eine zweite Verallgemeinerung geht von der Curve C_b^{3n} aus, in welcher die Ebene B die Fläche R_p^{3n} schneidet. Projiciren wir diese Curve in der Richtung von h auf die Ebene A, so erhalten wir eine Curve der $3n^{\text{ten}}$ Ordnung — C_a^{3n}, welche in O einen $2n$-fachen Punkt hat. Ordnen wir jetzt die Punkte, in denen die Ebenen durch h die Curve C_a^{3n} schneiden, den Geraden zu, welche dieselben Ebenen aus B schneiden, und fällen wir aus den Punkten auf die zugeordneten Geraden die Senkrechten, so liegen diese auf einer Regelfläche vom Grade $5n$. Sie hat nämlich K_∞^2, h und C_a^{3n} zu Leitcurven. h schneidet K_∞^2 und geht durch den $2n$-fachen Punkt O von C_a^{3n}. Somit ist der Grad der Regelfläche gleich $2.2.3n - 3n - 2.2n = 5n$.

P_b schneidet R_p^{5n} in einer Curve fünfter Ordnung, welche H zum $4n$-fachen und die imaginären Kreispunkte zu n-fachen Punkten hat. Um Punkte dieser Curve — C_b^{5n} — zu construiren, projiciren wir C_a^{3n} in der Richtung von z auf P_b. Wir erhalten dann eine Curve der $3n^{\text{ten}}$ Ordnung C_z^{3n}. Ihre Punkte B_z^* leiten wir in folgender Weise aus den Punkten B_h, B_z, B von C_h^n, C_z^n, C_b^{3n} ab: Treffe HB die Gerade a in S^*, so schneiden wir $S^* B_z$ (Fig. 2) mit einer Geraden durch B, welche zu $B_z B_h$ parallel ist. Der Schnittpunkt ist B_z^*. Die Senkrechte aus ihm zu HB trifft letztere Gerade in einem Punkte von C_b^{5n}.

Aus R_p^{5n} können wir nach demselben Gesetze, nach welchem wir R_p^{5n} aus R_p^{3n} ableiteten, eine Regelfläche vom Grade $7n$ erzeugen. Fahren wir auf diese Weise fort, so gelangen wir nach p-facher Anwendung des nämlichen Gedankens zu einer Regelfläche vom Grade $(2p+1)n$. Die Erzeugenden aller dieser Regelflächen sind resp. parallel zu den Mantellinien eines orthogonalen Kegels. Ebenen, welche senkrecht zu z oder h sind, schneiden aus diesen Flächen Curven, für welche die imaginären Kreispunkte n-fache Punkte sind.

Nach den in a) aufgestellten Gesichtspunkten können wir aus den Regelflächen, deren Erzeugung wir in b) besprochen haben, neue Regelflächen vom nämlichen Grade ableiten.

Indem wir im Folgenden einige Specialisirungen der allgemeinen Entwickelungen durchführen, beschränken wir uns darauf, die einfachsten Typen der entstehenden Flächen und Curven zu besprechen. Aus ihnen lassen sich die allgemeinen Formen durch centrische Collineation ableiten.

B. Ueber eine specielle Regelfläche dritten Grades.

1.

In der Ebene A liege eine Gerade g_a. Lassen wir in den unter A. 1 gegebenen Entwickelungen g_a an Stelle von C_a^n treten, so erhalten wir eine Regelfläche dritten Grades nach folgendem Gesetze:

Gegeben sei ein Ebenenbüschel mit der Scheitelkante h, eine Gerade g_a und eine Ebene B. Schneide eine Ebene des Büschels aus g_a den Punkt A, aus B die Gerade b, so fällen wir aus A die Senkrechte auf b. Dann ist der Ort der Normalen eine Regelfläche dritten Grades — R_p^3.

h ist eine doppelte Gerade von R_p^3. Die unendlich ferne Ebene schneidet R_p^3 in K_∞^2 und in der Stellung einer Ebene, welche zu h und g_a parallel ist. Der Schnitt von A mit R_p^3 besteht aus g_a und den Geraden d_1, d_2. Sei G_z die Ebene durch g_a, welche parallel zu z ist, so liegen in ihr ausser g_a noch zwei Gerade von R_p^3, welche durch den Schnittpunkt S_h von h mit G_z gehen. Die eine von ihnen, p_z, ist parallel zu z; die andere, p_h, wird von der Normalebene durch h zu G_z aus letzterer Ebene geschnitten.

Ziehen wir in den Punkten von g_a die Parallelen f zur Ebene B, so sind diese zu den resp. Geraden b parallel und folglich zu den resp. Geraden p senkrecht. Nun liegen die f auf einem hyperbolischen Paraboloid, für welches g_a, h und die Stellung der Ebene B Leitlinien sind. Daraus ergiebt sich folgende Erzeugung von R_p^3:

Gegeben sei ein hyperbolisches Paraboloid. h und g_a seien zwei Gerade desselben, welche nicht der Schaar von parallelen Geraden angehören. Construiren wir in den Schnittpunkten der letzteren mit g_a zu diesen die Senkrechten, welche h schneiden, so liegen diese auf einer Regelfläche dritten Grades.

Eine andere Ausdrucksweise für die Darstellung von R_p^3 ergiebt sich bei folgendem Gedankengang:

Ein Orthogonalkegel ist bestimmt, wenn wir seine Spitze H, einen Träger der zu einander senkrechten Ebenenbüschel und die Richtung des andern Trägers kennen. Lassen wir jetzt die Spitze des Kegels den ersten Träger h durchlaufen, während wir die Richtung des andern Trägers z festhalten, so gehört zu jeder Lage der Spitze ein orthogonaler Kegel. Wir wollen die Gesammtheit dieser Kegel als ein Büschel bezeichnen. Durch eine Gerade g_a im Raume und die Spitze eines solchen Kegels geht eine Ebene, welche den Kegel in zwei Erzeugenden von R_p^3 schneidet. Wir sagen daher:

Sind die Ebenen eines Büschels perspectivisch zur Reihe der Spitzen von Orthogonalkegeln eines Büschels, so schneiden die Ebenen aus den entsprechenden Kegeln die Erzeugenden von R_p^3.

g_a schneidet jeden Orthogonalkegel des Büschels in zwei Punkten A_1, A_2. Geben wir umgekehrt auf g_a einen beliebigen Punkt A_1, so können wir beweisen, dass durch ihn ein Orthogonalkegel des Büschels geht. Legen wir nämlich die Normalebene durch A_1 zu z, so muss diese den gesuchten Kegel in einem Kreise schneiden, welcher durch A_1 geht. Ein zweiter Punkt des Kreises liegt im Schnitt der Normalebene mit h. Der Schnitt der letzteren Ebene mit der Ebene hz liefert einen Durchmesser des Kreises. Somit ist derselbe — und also auch ein Orthogonalkegel durch A_1 — eindeutig bestimmt. Trifft g_a diesen Orthogonalkegel ein zweites Mal in A_2 und zeichnen wir jetzt den Orthogonalkegel, welcher durch A_2 geht, so finden wir, dass auf demselben auch A_1 liegt. Daraus folgt, dass g_a die Orthogonalkegel in Paaren einer Involution schneidet. Diesen sind durch die Orthogonalkegel die Punkte der Geraden h eindeutig zugeordnet. R_p^3 wird durch die Geraden hervorgebracht, welche die entsprechenden Punkte dieser Projectivität verbinden.

Wir fügen einige Bemerkungen über die abgeleitete Involution und Projectivität bei.

In der Involution sind die Schnittpunkte A_z und A_h von p_z und p_h mit g_a ein Paar. Ihm entspricht auf h der Punkt S_h. Construiren wir zur Ebene hz durch h die Normalebene, so schneidet diese aus g_a den Mittelpunkt der Involution. Ihm und dem unendlich fernen Punkte von g_a entspricht der unendlich ferne Punkt von h. Nehmen wir ein Paar der Involution auf g_a und den entsprechenden Punkt auf h beliebig an, so ist damit ein Orthogonalkegel und somit die Projectivität festgelegt. Am einfachsten geschieht dies dadurch, dass wir einen Doppelpunkt der Involution und seinen entsprechenden Punkt in h annehmen.

Eine weitere Darstellung von R_p^3 knüpft an die Ebenen an, durch welche die Geraden p in der Richtung von z projicirt werden. Diese Ebenen umhüllen einen parabolischen Cylinder (A. 3, Anm.) C_y^2. h schneidet die unendlich ferne Erzeugende dieses Cylinders. g_a und die Geraden p sind Tangenten desselben. Somit erscheint R_p^3 als Ort der Tangenten von C_y^2, welche h und g_a schneiden.

Um die Geraden zu construiren, welche durch einen Punkt A von g_a gehen, legen wir durch A und h eine Ebene. Sie schneidet C_y^2 in einer Parabel. An diese gehen aus A zwei Tangenten. Eine von ihnen liegt in der Tangentialebene an C_y^2, welche g_a enthält — es ist die Ebene, welche wir oben mit G_z bezeichneten —, und gehört nicht zu R_p^3. Die andere Tangente ist eine Gerade p. Beide Tangenten fallen in eine zusammen, wenn an Stelle von A der Berührungspunkt von g_a mit C_y^2 tritt. Dann liegt diese Tangente auf R_p^3. Zugleich befindet sie sich auch in der Ebene G_z. In ihr liegen, wie wir oben gesehen, die Geraden g_a, p_z und p_h von R_p^3. Unter ihnen kann nur p_h die erwähnte Tangente sein. Ihr Schnittpunkt A_h mit g_a ist folglich der Berührungspunkt von g_a mit C_y^2. Wir schliessen daraus: Im Punkte A_h wird C_y^2 von R_p^3 berührt.

2.

Wir untersuchen jetzt den Schnitt von R_p^3 mit einer Ebene P_b. Derselbe ist eine Curve dritter Ordnung C_b^3, welche durch die imaginären Kreispunkte geht. Sie hat im Schnittpunkte H von h mit P_b einen Doppelpunkt. Um weitere Punkte von C_b^3 zu erhalten, projiciren wir g_a in den Richtungen von z und h auf P_b. g_z und g_h seien diese Projectionen. Z sei der Schnittpunkt von z mit P_b. Dann geht C_b^3 durch den Schnittpunkt von g_z und g_h, durch den Schnitt von $\overline{HZ}$ mit g_z (Fig. 3) und durch den Fusspunkt des Perpendikels, welches aus H auf g_z gefällt werden kann. g_h trifft C_b^3 in dem unendlich fernen Punkte. Die Normale in H zu HZ schneidet g_h in einem Punkte von C_b^3. Der Kreis über HZ als Durchmesser trifft a in zwei weiteren Punkten der Curve.

Indem wir die unter A. 2 für C_b^{3n} entwickelte Construction specialisiren, ziehen wir durch H eine beliebige Gerade b. Sie schneide g_h in B_h. Die Parallele durch B_h zu HZ treffe g_z in B_z. Die Senkrechte aus B_z auf b trifft letztere Gerade in einem Punkte B von C_b^3.

Diese Construction ist nur abhängig von g_z, g_h, H und der Richtung HZ. Wir schliessen daher:

Gegeben seien in einer Ebene zwei Gerade g_z, g_h und ein Punkt H. Wir construiren die Dreiecke, welche eine der Geraden — sagen wir g_z — zur gemeinsamen Seite haben. Eine Ecke B_h bewege sich in g_h. Von den Seiten durch B_h enthalte eine H, während die andere eine gegebene Richtung hat. Aus dem Schnittpunkte der letzteren Seiten mit g_z fällen wir die resp. Senkrechten auf HB_h. Ihre Fusspunkte liegen auf einer Curve C_b^3.

Die Ebene P_b schneidet das Büschel der Orthogonalkegel in einem Büschel von Kreisen, deren Mittelpunkte auf HZ liegen und welche sich in H berühren. Zu jedem Kegel gehört eine Ebene durch g_a, also zu jedem der erwähnten Kreise eine Gerade, welche durch den Schnittpunkt G von g_a mit P_b geht. Mithin ist das Büschel der Geraden durch g projectivisch zum Büschel der Kreise. Diese Projectivität ist dadurch ausgezeichnet, dass dem Kreise mit dem Radius Null, d. h. dem Punkte H die Gerade durch H entspricht. Je ein Kreis ist bestimmt, wenn wir seinen zweiten Schnittpunkt Z^* mit der Geraden HZ kennen. Daher ist auch die Reihe der Punkte Z^* zum Büschel der Geraden durch G projectivisch. Daraus ergiebt sich folgende Darstellung für C_b^3:

Gegeben sei eine Punktreihe und ein zu ihr projectives Strahlenbüschel. H sei ein Punkt der Reihe, welcher in seinem entsprechenden Strahle liegt. Construiren wir den Kreis, welcher H und einen Punkt der Reihe zu Durchmesserenden hat, so schneidet der Strahl, welcher dem Punkte entspricht, aus dem Kreise zwei Punkte von C_b^3.

Bei dieser Ableitung von C_b^3 ergiebt sich, dass derjenige unter den erwähnten Kreisen, welcher durch H und G geht, zum entsprechenden Strahl die Tangente in G an C_b^3 hat. Dem unendlich fernen Punkte Z^* correspondirt ein Strahl g_h, der einen unendlich fernen Punkt von C_b^3 enthält und überdies aus der Normalen in H zu HZ einen Punkt von C_b^3 schneidet. Construiren wir den zweiten Strahl g_z, welcher durch seinen entsprechenden Punkt geht, so liegt der Punkt in C_b^3. Damit haben wir wieder die Linien g_h und g_z gefunden, welche wir oben zur Darstellung von C_b^3 benutzten.

3.

Wir wenden uns zur Untersuchung der Enveloppe der Linien $\overline{B_z B}$. Dieselbe wird erhalten als Schnitt des Cylinders C_y^2 mit der Ebene P_b und ist folglich eine Parabel. Ihre Axenrichtung ist die Richtung von HZ. Die Gerade HZ schneidet aus g_z einen Punkt der Scheiteltangente dieser Parabel. Die Curve C_b^3 ist der Ort der Fusspunkte der Senkrechten, welche wir aus H auf die Tangenten der Parabel fällen können.

Geben wir nun eine beliebige Parabel P^2 und einen Punkt H ihrer Ebene, so suchen wir aus P^2 und H eine Curve C_b^3 abzuleiten. Wir ziehen zu diesem Zwecke durch H zur Axenrichtung der Parabel eine Parallele. Schneide diese die Scheiteltangente t_s der Parabel in B_h, so geht durch B_h eine zweite Tangente g_z an P^2. Dann fällen wir aus H auf zwei Tangenten t_1, t_2 der Parabel die Senkrechten und zeichnen ihre Fusspunkte T_1, T_2. Ferner ziehen wir durch H die Senkrechte zu g_z. Ihr Fusspunkt sei B_z. Durch B_h, $T_1 T_2$, B_z, durch die imaginären Kreispunkte J_1, J_2 und den Punkt H als Doppelpunkt wird eine Curve dritter Ordnung C_b^{3*} bestimmt. Jetzt ziehen wir durch die Schnittpunkte von t_1, t_2 mit g_z zur Axenrichtung der Parabel die Parallelen und bringen diese resp. mit HT_1, HT_2 zum Schnitte. Betrachten wir die Verbindungslinie der Schnittpunkte als eine Linie g_h, so können wir nach der in 2 gegebenen Methode mit Hilfe von H, g_z und g_h eine Curve dritter Ordnung erzeugen. Diese hat H zum Doppelpunkte, geht durch B_h, B_z, $T_1 T_2$, $J_1 J_2$ und fällt daher mit der oben bestimmten Curve C_b^3 zusammen. Wir schliessen daraus:

Gegeben sei eine Parabel P^2 und ein Punkt H ihrer Ebene. Fällen wir aus H auf die Tangenten der Parabel die Senkrechten, so liegen ihre Fusspunkte auf einer Curve dritter Ordnung C_b^3.

Geben wir umgekehrt eine circulare Curve dritter Ordnung C_b^3 durch ihren Doppelpunkt H und vier im Endlichen gelegene Punkte, so ziehen wir in ihnen zu den Verbindungslinien mit H die Normalen. Diese bestimmen als Tangenten eine Parabel, mit deren Hilfe wir weitere Punkte von C_b^3 construiren können.

Sei S der Schnittpunkt von $t_1 t_2$, so geht durch S, H, $T_1 T_2$ ein Kreis. Es folgt daher:

Construiren wir die Kreise, welche durch einen festen Punkt H gehen, und ziehen wir in den Schnittpunkten der durch H gehenden Durchmesser mit den resp. Kreisen die Tangenten an P^2, so schneiden diese die resp. Kreise ein zweites Mal in Punkten von C_b^3.

Bewegt sich S auf einer Geraden durch H, so schliessen wir:

Gegeben sei ein Büschel von Kreisen, die sich in einem Punkte berühren, und eine Parabel. Construiren wir in den zweiten Schnittpunkten der Mittelpunktslinie des Büschels mit allen Kreisen an die Parabel die Tangenten, so liegen ihre Schnittpunkte mit den resp. Kreisen auf einer Curve C_b^3.

Sind die Tangenten t_1, t_2 benachbart, so geht S in den Berührungspunkt T über. Der Kreis, welcher HT zum Durchmesser hat, berührt C_b^3. Wir folgern daraus:

Alle Kreise, für welche ein Durchmesserende in einem festen Punkte H liegt und für welche das andere Durchmesserende sich im Berührungspunkte einer Tangente von P^2 befindet, berühren in ihrem zweiten Schnittpunkte mit der erwähnten Tangente eine Curve C_b^3.

Aus diesem Satze schliessen wir, dass C_b^3 die Parabel P^2 in drei Punkten berührt. Es sind die Fusspunkte der Normalen aus H auf P^2. Weiter folgern wir, dass die Tangenten in H an C_b^3 zu den Tangenten senkrecht stehen, welche aus H an P^2 gelegt werden können. Es wird daher H ein isolirter Punkt von C_b^3 sein, wenn er in Bezug auf P^2 elliptisch ist. Liegt H in P^2, so ist er eine Spitze für C_b^3. Ist H in Bezug auf P^2 hyperbolisch, so gehen durch ihn zwei reelle Aeste von C_b^3.

Der zuletzt angeführte Satz lehrt uns auch die Curve C_b^3 construiren, welche durch den Doppelpunkt und drei Punkte mit der Tangente in einem oder zwei Punkte mit ihren Tangenten gegeben ist.

Die Mittelpunkte M der Strecken, welche H mit den Punkten T von P^2 verbinden, liegen auf einer neuen Parabel P_m^2, welche zu P^2 centrisch ähnlich liegt. Indem wir bemerken, dass die Punkte M Centra von Kreisen sind, welche durch H und T gehen, sagen wir:

Construiren wir aus den Punkten einer Parabel als Mittelpunkten die Kreise, welche durch einen festen Punkt gehen, so umhüllen diese eine Curve C_b^3.

Wir transformiren schliesslich die zuletzt hervorgehobene Figur in einer centrischen Collineation erster Ordnung. Dabei wählen wir den Brennpunkt B_r von P_m^2 als Centrum und disponiren so, dass das Bild von P_m^2 ein Kreis K_m^2 wird. Dann ist das Bild der unendlich fernen Geraden eine Tangente q von K_m^2. Den imaginären Kreispunkten entsprechen imaginäre Punkte, welche die Rechtwinkelinvolution um B_r aus q schneidet. Der Parabel P^2 correspondirt ein Kegelschnitt K^2, welcher zu K_m^2 centrisch involutorisch liegt mit H als Centrum und q als Axe. Wir schliessen daher:

Gegeben sei ein Kreis K_m^2 vom Mittelpunkte B_r und ein Punkt H. q sei eine Tangente des Kreises und werde von der Rechtwinkelinvolution um B_r in den imaginären Punkten J_1, J_2 getroffen. Construiren wir die Kegelschnitte, welche durch H, J_1, J_2 gehen und für welche der Pol der Geraden q den Kreis K^2 durchläuft, so umhüllen diese Kegelschnitte eine Curve dritter Ordnung C^3. Sie geht durch J_1, J_2 und hat H zum Doppelpunkte. Sie berührt in drei Punkten den Kegelschnitt K^2, welcher mit H als Centrum und q als Axe zum Kreise K_m^2 involutorisch ist.

Um Punkte von C^3 zu zeichnen, gehen wir von einem entsprechenden Paare $Q_m\,Q$ der Kegelschnitte K_m^2, K^2 aus. Wir construiren den Kegelschnitt K_q^2, welcher durch J_1, J_2, H und Q geht und für welchen Q_m, q Pol und Polare sind. Die Tangente in Q an K^2 schneidet K_q^2 ein zweites Mal im Berührungspunkte von K_q^2 mit C^3.

4.

Zu einer noch specielleren Fläche dritten Grades als die jetzt behandelte werden wir geführt, indem wir von drei in einem Punkte O sich schneidenden zu einander senkrechten Geraden x, y, z ausgehen. In der Ebene xz liege eine Gerade g_{xz}, welche zu x parallel ist. h_{yz} sei eine der Geraden durch O in der Ebene yz, welche den Winkel zwischen y und z halbiren. H_{yz} sei die Ebene durch g_{xz}, welche zu h_{yz} parallel ist. Sie treffe xy in g_{xy}.

Lassen wir jetzt an Stelle von A, B in 1 die Ebenen xz, xy treten und an Stelle von g_a, h die Geraden g_{xz} und h_{yz}, so erhalten wir in folgender Weise eine Fläche dritten Grades:

Wir ziehen in der Ebene H_{yz} die Parallelen zu h_{yz} und zeichnen ihre Schnittpunkte mit g_{xz}, g_{xy}. Indem wir diese mit O verbinden, erhalten wir Dreiecke. Ihre Höhenlinien, welche durch Punkte von g_{xz} gehen, erfüllen eine Regelfläche dritten Grades R^3.

z stellt zwei unendlich benachbarte Gerade von R^3 vor. Längs derselben berührt die Ebene xz die Fläche R^3. Die Ebene H_{yz} ist Tangentialebene von R^3 im unendlich fernen Punkte von g_{xz}. Sei H der Schnittpunkt, in dem eine Parallelebene durch g_{xz} zur Ebene xy die Gerade h_{yz} schneidet, so gehen die Normalen zu den Erzeugenden von R^3, welche h_{yz} schneiden, durch H. Daraus ergiebt sich folgende Darstellung von R^3:

Bewegen wir einen rechten Winkel so, dass der eine seiner Schenkel stets durch den festen Punkt H geht, während der Scheitel die Gerade g_{xz} durchläuft und der andere Schenkel auf der Geraden h_{yz} gleitet, so beschreibt dieser eine Regelfläche R^3.

Geben wir zwei beliebige windschiefe Gerade im Raume, so können wir vier Regelflächen der betrachteten Art construiren, für welche eine der gegebenen Geraden h_{yz} und die andere g_{xz} ist. Zu diesem Zwecke zeichnen wir die gemeinsame Normale zu den beiden Geraden. Im Schnittpunkte dieser Normalen mit der Geraden, welche an Stelle von h_{yz} treten soll, tragen wir die Länge der Normalen nach beiden Seiten ab. Hierdurch erhalten wir zwei Punkte, von denen der eine an Stelle des Punktes O, der andere an Stelle des Punktes H der Fläche treten kann. Damit sind zwei Flächen festgesetzt, welche eine der gegebenen Geraden — Punkt für Punkt — zur Doppellinie haben. Für zwei weitere Flächen ist die andere Gerade eine solche Doppellinie.

Die Involution auf g_{xz} und die projectivische Zuordnung der Punktereihe auf h_{yz} sind dadurch ausgezeichnet, dass die Involution den Schnittpunkt Z von z mit g_{xz} zum Mittelpunkt und Doppelpunkt hat. Ihm entspricht der Punkt O in h_{yz}. Dem unendlich fernen Punkte von g_{xz} correspondirt der unendlich ferne Punkt von h_{yz}.

Ziehen wir in der Ebene durch H und g_{xz} zu den Geraden, welche H mit den Punkten von g_{xz} verbinden, in diesen die Normalen, so umhüllen dieselben eine Parabel, welche H zum Brennpunkte hat. Sie stellt uns die Spur des parabolischen Cylinders C_y^2 vor, dessen Tangenten die Erzeugenden von R^3 sind. Indem wir mit Hilfe dieser Parabel R^3 zeichnen, schliessen wir:

In einer Ebene B^* sei eine Parabel mit dem Brennpunkte H und dem Scheitel S gegeben. In letzterem construiren wir eine Senkrechte zu B^* und zeichnen einen Punkt O, für welchen $SO = OH$ ist. h_{yz} sei die Gerade durch O und H. Verbinden wir jetzt die Punkte, welche die Normalebenen zu B^* durch die Parabeltangenten aus h_{yz} und der Scheiteltangente der Parabel schneiden, so liegen diese Verbindungslinien auf einer Fläche dritten Grades.

Die circularen Curven dritter Ordnung, welche eine Parallelebene P_b zu xy aus R^3 schneidet, zeichnen wir mit Hilfe des Schnittpunktes H von P_b mit h_{yz} und der Schnittlinie von P_b mit den Ebenen xz und H_{yz}. Wir können diese Construction dahin fassen:

Gegeben seien zwei parallele Gerade x^*, g_{xy}^* und ein Punkt H ihrer Ebene. Construiren wir die rechtwinkligen Dreiecke, deren eine Kathete x^* ist, deren Hypotenusen durch O gehen und aus g_{xy}^* eine Ecke schneiden, so liegen die Fusspunkte der Höhen dieser Dreiecke auf einer Curve dritter Ordnung. Sie hat H zum Doppelpunkte, geht durch die imaginären Kreispunkte, hat g_{xy}^* im unendlich fernen Punkte zur Inflexionstangente und wird von x^* im Fusspunkte des Perpendikels aus H berührt.*

Sei H_{yz}^* eine Ebene durch x, welche zu h_{yz} senkrecht steht, so schneidet auch diese die Fläche R^3 in einer circularen Curve dritter Ordnung. Dieselbe hat in O eine Spitze. Die Durchführung der Construction dieser Curve beweist folgenden Satz:

Gegeben sei ein Punkt O und eine Gerade o, welche um c vom Punkte O abstehe. Sei P_0 ein Punkt von o, so ziehen wir in ihm zu P_0O die Normale und tragen auf dieser von P_0 aus nach beiden Seiten die constante Grösse c ab. Die Endpunkte

---

* In Fig. 4, 5, 6 und 7 sind vier solche Schnitte von R^3 gezeichnet, welche uns den Uebergang des Punktes H vom isolirten Punkte durch die Spitze zum Doppelpunkte veranschaulichen. Wir bemerken, dass die (stark gezogenen) Linien x^* resp. x in der Ebene xz liegen. Der Abstand des Punktes H von x^* giebt uns an, um wieviel die Ebene der Curve C^3 von der Ebene xy entfernt ist. Es ist daher leicht aus den vier Curven ein Modell der Fläche herzustellen.

In Fig. 4 ist die Parabel P_m^2 eingezeichnet, welche die Mittelpunkte aller Kreise durch H enthält, welche C^3 berühren.

In Fig. 5 ist die Parabel P^2 dargestellt, auf deren Tangenten die Punkte von C^3 liegen.

ıe Gerade in der Richtung von z berührt. Die Curve lässt sich aus ;i parallelen Geraden und einem Punkte construiren und beweist den Satz:

Gegeben seien zwei parallele Gerade g_1, g_2 und ein Punkt H. eht sich eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks um H, hrend die rechtwinklige Ecke sich auf einer der zwei paralen Geraden bewegt und eine zweite Ecke die andere Gerade rchläuft, und steht die Hypotenuse der Dreiecke stets senk:ht zu beiden Geraden, so beschreibt die dritte Ecke eine rve dritter Ordnung (Fig. 8).

C. Sätze.

Wir stellen ◡ ınden einige Sätze zusammen, welche sich bei :cialisirung der allgemeinen Untersuchungen für $n = 2$ leicht ergeben.

1. Satz. $Oxyz$ sei das rechtwinklige Axenkreuz. Gegeben sei eine gel, deren Mittelpunkt M in x liegt und welche durch O geht. h_{yz} sei ɜ der Geraden durch O, welche den Winkel zwischen y und z halbiren. $_z{}^2$ und $K_{xy}{}^2$ seien die Kreise, welche die Ebenen xz und xy aus der ʒel schneiden. Mit P_{xz} und P_{xy} seien die Punkte bezeichnet, in weln die Ebenen durch h_{yz} die erwähnten Kreise treffen. Construiren wir den Dreiecken $OP_{xz}P_{xy}$ die Höhen durch P_{xz}, so liegen diese auf einer ;elfläche vierten Grades R^4. Dieselbe hat h_{yz} zur doppelten Geraden.

Führen wir die gleiche Construction für den Fall durch, dass die Kugel ıt durch O gehe, so erhalten wir als Ort der Höhen eine Regelfläche ısten Grades. Dieselbe hat h_{yz} zur vierfachen Geraden.

2. Satz. In einer Ebene H sei ein Kegelschnitt K^2, eine Gerade x und Punkt O dieser Geraden gegeben. Sei P ein Punkt des Kegelschnittes, fällen wir aus P auf x die Senkrechte und tragen ihre Länge von P aus einer Normalen zur Ebene H nach beiden Seiten ab. Die Endpunkte binden wir mit O. Fällen wir jetzt in den so erhaltenen Dreiecken aus Ecken, welche auf der nämlichen Seite von H liegen, die Höhen, so illen dieselben eine Regelfläche sechsten Grades. Die Normale in O zu ist eine vierfache Gerade der Fläche.

Liegt O auf K^2, so wird der Grad der Fläche um 2 vermindert.

3. Satz. Gegeben sei ein Kreis vom Mittelpunkte M. O sei ein Punkt Kreises. Schneide eine Senkrechte zu OM den Kreis und die Gerade f in den resp. Punkten $P_1 P_2 P_m$, so liegen die Fusspunkte der Normalen

* Drehen wir die Dreiecke um OP_0, bis sie zur Ebene durch Oo senkrecht ıen, so stellen die Höhen, welche nicht durch O gehen, zwei Flächen der be-delten Art dar.

aus P_m auf OP_1 und OP_2 in einer Curve vierter Ordnung C^4. Dieselbe ist circular und hat in O einen dreifachen Punkt (Fig. 9).* Die Normalen umhüllen eine Curve dritter Classe.

Eine Curve der nämlichen Art C^4 erhalten wir, wenn OM eine beliebige, durch O gezogene Gerade ist (Fig. 10).

4. Satz. Gegeben sei ein Kreis vom Mittelpunkte M. O sei ein Punkt des Kreises. Eine Senkrechte zu OM schneide ihn in $P_1 P_2$. Die Fusspunkte der Normalen aus P_1 zu OP_2 und aus P_2 zu OP_1 liegen auf einer Curve vierter Ordnung C^4, welche circular ist und in O einen dreifachen Punkt hat. Die Normalen umhüllen eine Curve dritter Classe (Fig. 11 u. 12, erstere stellt die Curve dar, für welche OM kein Durchmesser ist).

5. Satz. Gegeben sei ein Kreis vom Mittelpunkte M. d sei einer seiner Durchmesser. Fällen wir aus den Punkten D von d auf die Halbmesser des Kreises, welche von den D aus unter rechtem Winkel erscheinen, die Senkrechten, so liegen ihre Fusspunkte auf einer Curve sechster Ordnung C^6. Sie hat in M einen vierfachen Punkt. Die imaginären Kreispunkte sind Doppelpunkte. Die Senkrechten umhüllen eine Curve vierter Classe (Fig. 13).**

Eine Curve der nämlichen Art erhalten wir, wenn an Stelle von d eine beliebige Gerade tritt (Fig. 14).

6. Satz. Gegeben seien zwei concentrische Kreise K_1^2, K_2^2 mit dem Mittelpunkte O. Dreht sich die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks um O, während dieselbe aus $K_1^2 K_2^2$ zwei Ecken schneidet, und ist eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks parallel einer gegebenen Richtung,*** so durchläuft der Höhenfusspunkt eine Curve der sechsten Ordnung C^6. O ist ein (isolirter) vierfacher Punkt, die imaginären Kreispunkte sind Doppelpunkte dieser Curve (Fig. 15).

7. Satz. Gegeben sei ein Kreis vom Mittelpunkte O. d sei ein Durchmesser desselben. Eine Normale in einem Punkte D von d schneide den Kreis in zwei Punkten P_1, P_2. Construiren wir aus D als Mittelpunkt den Kreis durch $P_1 P_2$, so wird derselbe von den Geraden OP_1, OP_2 ein zweites Mal in Punkten einer Curve sechster Ordnung geschnitten. Sie hat O zum vierfachen Punkte und die imaginären Kreispunkte zu Doppelpunkten (Fig. 16).

---

* Im Punkte B ist nach A. 4 die Tangente construirt. Ferner sind Kreise gezeichnet, welche C^4 berühren und aus Tangenten von C_3 die Berührungspunkte schneiden.

** Folgendes ist eine Tangentenconstruction: Sind B_1, B_2 zwei Punkte von C^6, welche in Bezug auf O symmetrisch liegen, so schneiden wir x mit der Normalen in B_1 zu OB_1. Diesen Schnittpunkt S verbinden wir mit B_2. SB_2 schneidet aus der Normalen in O zu OB_1 einen Punkt T der Tangente in B_1 an C^6. Der Ort der Punkte T ist eine Curve der achten Ordnung.

*** Die rechtwinklige Ecke des Dreiecks bewegt sich auf einer Ellipse E^2 (Fig. 15).

XIX.

Berechnung des Inhalts eines Vielecks aus den Coordinaten der Eckpunkte.

Von

Dr. W. Veltmann,

Docent an der landwirthschaftl. Akademie Poppelsdorf-Bonn.

Hierzu Taf. V Fig. 1–6.

Die zuerst von Gauss in den Zusätzen zu Schumacher's Uebersetzung von „Carnot, Géométrie de position" gegebene Formel für den Inhalt eines Polygons soll hier gemäss dem natürlichen Begriffe des Flächeninhalts und nach dem ebenfalls naturgemässen Verfahren der Zusammensetzung aus Dreiecken, welche ganz im Innern des Polygons liegen, allgemein hergeleitet werden.

§ 1. In dem rechtwinkligen Coordinatensystem werden die positiven Abscissen (x oder ξ) nach oben, die positiven Ordinaten (y oder η) nach rechts genommen. Die Verbindungsstrecke zweier Punkte A und B wird AB oder BA genannt, je nachdem man derselben die Richtung von A nach B oder von B nach A beilegt. Die beiden Drehungsrichtungen werden unterschieden als rechtläufige (nach rechts, also von der positiven Abscissenhalbaxe durch 90^0 gegen die positive Ordinatenhalbaxe) und rückläufige (nach links). Die Coordinaten eines Punktes werden so bezeichnet:

	A	B	...	P_1	P_2	...
Abscisse	x_a	x_b	...	x_1	x_2	...
Ordinate	y_a	y_b	...	y_1	y_2	...
Abscisse	ξ_a	ξ_b	...	ξ_1	ξ_2	...
Ordinate	η_a	η_b	...	η_1	η_2	...

§ 2. Von einem Punkte P_1 wird eine gerade Strecke P_1P_2, von P_2 eine solche P_2P_3 u. s. w., von P_n eine Strecke P_nP_1 so gezogen, dass, wenn man das hierdurch entstandene Polygon von einem Punkte aus in obiger Reihenfolge der Strecken vollständig durchläuft, keine Strecke und auch kein Theil einer solchen zweimal durchlaufen wird. Dagegen werden möglicherweise einzelne Punkte zwei-, dreimal u. s. w. angetroffen (Doppelpunkte, dreifache Punkte u. s. w.). Man kann der gebrochenen Linie die Richtung

22*

$P_1 P_2 \ldots P_n P_1$ oder auch die umgekehrte $P_n P_{n-1} \ldots P_1 P_n$ beilegen. Die Richtungen der einzelnen Strecken werden immer mit derjenigen des ganzen Polygons übereinstimmend genommen. Hat die gebrochene Linie keine mehrfachen Punkte, so wird dieselbe eine einfach geschlossene, im entgegengesetzten Falle eine mehrfach geschlossene genannt.

§ 3. Wenn man eine mehrfach geschlossene gebrochene Linie von einem mehrfachen Punkte aus bis zum ersten Male zu diesem zurück durchläuft, so hat man einen Theil des Polygons durchlaufen, welcher, ebenso wie auch der noch übrige Theil, für sich ein geschlossenes Polygon ist. Jeden der beiden Theile kann man, wenn derselbe kein einfach geschlossenes Polygon ist, in gleicher Weise behandeln und so fort, bis das ganze Polygon in einfach geschlossene Polygone zerlegt ist. Die Zerlegung kann möglicherweise auf mehr als eine Weise geschehen. So lässt sich z. B. das Polygon 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 1 (Fig. 1) zerlegen in 1 2 3 4 5 6 1 und 9 10 11 6 7 8 9 oder auch in 1 2 3 10 11 6 1 und 3 4 5 6 7 8 3. An jedem der Theilpolygone folgen die einzelnen Strecken und Streckentheile in derselben Reihenfolge auf einander und haben dieselbe Richtung, wie an dem ganzen Polygon. Ein Punkt, welcher das ganze Polygon durchläuft, hat auch den Umfang eines jeden Theilpolygons in dessen Richtung durchlaufen, wenn auch nicht immer die einzelnen Strecken desselben unmittelbar nacheinander.

§ 4. Ein einfach geschlossenes Polygon theilt die Ebene in einen inneren und einen äusseren Theil. Ein Punkt gehört dem letzteren oder dem ersteren an, je nachdem er sich, ohne den Umfang zu berühren, unendlich weit entfernen kann oder nicht. Zwei innere oder zwei äussere Punkte lassen sich durch eine Linie verbinden, welche den Umfang nicht berührt. Ein innerer und ein äusserer Punkt können nicht durch eine Linie verbunden werden, die den Umfang nicht trifft. Letzterer hat ein inneres und ein äusseres Ufer und die beiden Richtungen desselben können unterschieden werden als nach rechts und nach links um die Fläche des Vielecks (den inneren Theil der Ebene) herum.

Um einen Eckpunkt des Vielecks möge ein Kreis gezogen werden, hinreichend klein, damit er den Umfang desselben nur in zwei Punkten schneidet. Von den beiden Sectoren, worin dieser Kreis getheilt ist, liegt der eine innerhalb, der andere ausserhalb des Vielecks und demgemäss werden die beiden Winkel als innere und äussere Polygonwinkel unterschieden.

§ 5. In Fig. 2 seien AB und AC zwei zusammenstossende Seiten, α ein innerer Winkel eines einfach geschlossenen Vielecks. Ist α kleiner als 180^0 und liegt in der unendlichen Fläche des Winkels α kein Eckpunkt des Vielecks, so ist BC eine Diagonale, die ganz innerhalb des Vielecks liegt. Befinden sich dagegen Eckpunkte des Vielecks in der Fläche des Winkels, so verbinde man jeden derselben mit A. Diejenige der Verbindungslinien, welche mit AB den kleinsten Winkel bildet, sei AD. Liegt auf derselben kein anderer Eckpunkt, so ist AD eine Diagonale ganz innerhalb des Vielecks. Enthält aber AD noch einen oder mehrere andere Eckpunkte, so ist die Verbindungslinie des dem A nächsten mit A eine solche Diagonale. Ist $\alpha > 180^0$ oder $= 180^0$, so würde, wenn kein Eckpunkt in dem Winkel α läge, auch keine Verbindungslinie dieser Punkte in α liegen. Man würde von einem beliebigen Punkte in α aus sich unendlich weit entfernen können, ohne den Umfang zu treffen; α wäre ein äusserer Winkel. Somit liegt wenigstens ein Eckpunkt in der Fläche des Winkels α und es kann daher in derselben Weise, wie vorhin, eine Diagonale ganz innerhalb des Vielecks erhalten werden.

In jedem Falle ist es also möglich, in dem Vieleck eine Diagonale zu ziehen, welche ganz in dem Vieleck liegt und ausser den Endpunkten keine Eckpunkte des Vielecks enthält. Dieselbe theilt das Vieleck in zwei einfach geschlossene Vielecke, deren Flächen ganz innerhalb der Fläche des ursprünglichen liegen und von welchen jedes wenigstens einen Eckpunkt weniger hat, als das letztere. Diese können wieder auf gleiche Weise getheilt werden und so fort, bis das ganze Vieleck in Dreiecke zerlegt ist. Jedes Dreieck liegt ganz innerhalb des Vielecks und jeder Punkt des letzteren gehört einem der Dreiecke an; die Fläche des Vielecks ist aus den Flächen der Dreiecke zusammengesetzt. Jede der Diagonalen, welche gezogen worden sind, ist gemeinsame Seite zweier Theildreiecke, jede Umfangsstrecke gehört nur einem Dreieck an. Die erste Theilung liefert zwei Theile T' und T'', von welchen jeder blos eine Diagonale als Seite hat. Die Theilung von T' liefert dann einen Theil T'_1, die von T'_1 einen Theil T'_2 u. s. w. von der nämlichen Eigenschaft, bis man zu einem Dreieck von dieser Eigenschaft gelangt. Gleiches gilt von T''. Unter den Dreiecken, in welche das Vieleck zerlegt wird, befinden sich also wenigstens zwei, von welchen eine Seite eine Diagonale, die beiden anderen Seiten des Vielecks sind. Durch Abschneiden eines solchen Dreiecks vermindert sich die Seitenzahl um 1. Auf gleiche Weise kann von dem noch übrigen Theil ein Dreieck abgeschnitten werden u. s. w., bis nur noch ein Dreieck, das $(n-2)^{\text{te}}$, übrig ist. Man erhält also durch diese Zerlegung, welche von der ursprünglichen möglicherweise verschieden ist, $(n-2)$ Dreiecke. Da die Eckpunkte der letzteren sämmtlich Eckpunkte des Vielecks sind, so ist die Winkelsumme des letzteren gleich der Summe der Winkel der Dreiecke, $=(n-2).180^0$.

§ 6. Die Definition des Inhalts einer einfach geschlossenen Fläche ist derjenigen der Länge einer geraden Linie nicht ganz analog. Die Längeneinheit lässt sich auf einer Linie in einer bestimmten Weise, von einem Ende aus zusammenhängend so oft abtragen, dass der Rest kleiner ist als die Längeneinheit. Auf letzterer kann der Rest ebenso abgetragen werden

u. s. w., wodurch dann die Länge der Linie unter der allgemeinen Form einer reellen Zahl, als Kettenbruch erhalten wird. Da jeder Rest kleiner ist als die Hälfte des vorhergehenden, so erhält man hierdurch nothwendig die ganze Linie. Auf einer Fläche dagegen kann ein Quadrat nicht in einer bestimmten, von jeder andern ausgezeichneten Weise und nicht immer so abgetragen werden, dass der Rest kleiner ist als das Quadrat. Ueberdies kann hier gar nicht unmittelbar definirt werden, was „grösser" und „kleiner" bedeuten soll. Um den Inhalt einer beliebigen einfach geschlossenen Fläche F zu erhalten, werde das Einheitsquadrat in eine Anzahl $= n^2$ Quadrate, jedes $= \frac{1}{n^2}$ zerlegt. Dann werde die ganze Ebene durch zwei aufeinander senkrechte Schaaren von parallelen Linien in Quadrate, ebenfalls sämmtlich $= \frac{1}{n^2}$, zerlegt. Die Zahl derjenigen von diesen Quadraten, welche ganz in der Fläche F liegen, sei m. Wächst m ins Unendliche, so ist $lim \frac{m}{n^2}$ der Inhalt der Fläche. Für ein Dreieck lässt sich leicht zeigen, dass bei beliebiger Richtung der Schaaren von parallelen Linien der Inhalt gleich dem halben Producte aus Grundlinie mal Höhe ist. Ebenso können folgende Behauptungen leicht bewiesen werden: Wird eine einfach geschlossene Fläche nach § 5 in Dreiecke zerlegt, so ist bei beliebiger Richtung der Schaaren von parallelen Linien der Inhalt des Vielecks gleich der Summe der Inhalte der Dreiecke, somit gleich einer bestimmten endlichen Zahl. Zerlegt man eine einfach geschlossene Fläche in eine endliche Anzahl von ebensolchen mit endlichem Umfange, so ist der Inhalt des ganzen Vielecks gleich der Summe der Inhalte der Theile. Die Anzahl der Theile muss hier als eine endliche vorausgesetzt werden, weil, wie ich in Bd. 27 (1882) dieser Zeitschrift S. 313 gezeigt habe, eine Fläche in unendlich viele Theile zerlegt werden kann, welche zusammen nicht der Fläche gleich sind.

§ 7. Unter der Determinante einer geraden Strecke AB soll die Determinante $\begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix}$ verstanden werden, wo also die Abscissen in der oberen, die Ordinaten in der unteren Zeile, die Coordinaten des Anfangspunktes links, die des Endpunktes rechts stehen. Diese Determinante möge kurz mit D_{ab} bezeichnet werden.

§ 8. Es ist $D_{ab} + D_{ba} = 0$, also $D_{ab} = -D_{ba}$.

§ 9. Wenn drei Punkte A, B, C in beliebiger Reihenfolge in gerader Linie liegen, so ist

$$D_{ab} + D_{bc} + D_{ca} = 0 \quad \text{oder} \quad D_{ab} + D_{bc} = D_{ac}.$$

Beweis. Die Gleichung der geraden Linie, in welcher die Punkte A, B, C liegen, lässt sich immer in einer der beiden Formen $y = mx + n$ oder $x = my + n$ darstellen. Nimmt man die erstere, so ist

$$\begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_b & x_c \\ y_b & y_c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_c & x_a \\ y_c & y_a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ m x_a + n & m x_b + n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_b & x_c \\ m x_b + n & m x_c + n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_c & x_a \\ m x_c + n & m x_a + n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ n & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_b & x_c \\ n & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_c & x_a \\ n & n \end{vmatrix} = 0.$$

§ 10. Wenn beliebig viele Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ in gerader Linie liegen, so ist

$$D_{12} + D_{23} + D_{34} + \cdots + D_{n-1,n} + D_{n1} = 0$$

oder

$$D_{12} + D_{23} + D_{34} + \cdots + D_{n-1,n} = D_{1n}.$$

Beweis. $D_{12} + D_{23}$ (nach § 9) $= D_{13}$; hierzu D_{34} (nach § 9) $= D_{14}$ u. s. w.

§ 11. Der Inhalt eines Dreiecks ABC bestimmt sich nach der Formel

$$2 \cdot ABC = D_{ab} + D_{bc} + D_{ca}.$$

Beweis. Die Richtung ABC des Umfangs sei die rechtläufige; die Seite AB möge in der Abscissenaxe liegen (Fig. 3). Da $y_a = y_b = 0$ ist, so liefert obiger Ausdruck

$$\begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_b & x_c \\ y_b & y_c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_c & x_a \\ y_c & y_a \end{vmatrix}$$

den Werth $x_b y_c - x_a y_c = y_c(x_b - x_a) = CD \cdot BA$ und dies ist der doppelte Inhalt des Dreiecks. Jetzt drehe man das Coordinatensystem um einen Winkel $= \varphi$ nach rechts. Sind die neuen Coordinaten ξ und η, so ist

$$x = \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi, \quad y = \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi.$$

Obiger Ausdruck wird also jetzt:

$$\begin{vmatrix} \xi_a \cos\varphi - \eta_a \sin\varphi & \xi_b \cos\varphi - \eta_b \sin\varphi \\ \xi_a \sin\varphi + \eta_a \cos\varphi & \xi_b \sin\varphi + \eta_b \cos\varphi \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_b \cos\varphi - \eta_b \sin\varphi & \xi_c \cos\varphi - \eta_c \sin\varphi \\ \xi_b \sin\varphi + \eta_b \cos\varphi & \xi_c \sin\varphi + \eta_c \cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \xi_c \cos\varphi - \eta_c \sin\varphi & \xi_a \cos\varphi - \eta_a \sin\varphi \\ \xi_c \sin\varphi + \eta_c \cos\varphi & \xi_a \sin\varphi + \eta_a \cos\varphi \end{vmatrix}.$$

Dieser Ausdruck entsteht aber aus

$$\begin{vmatrix} \xi_a & \xi_b \\ \eta_a & \eta_b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_b & \xi_c \\ \eta_b & \eta_c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_c & \xi_a \\ \eta_c & \eta_a \end{vmatrix},$$

indem man jede dieser drei Determinanten nach Cauchy's Multiplicationsregel mit $\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = 1$ multiplicirt. Die Formel stellt also bei beliebiger Lage des Coordinatensystems den Inhalt des Dreiecks dar.

Bei rechtläufig gerichtetem Umfang ist also der Inhalt des Dreiecks gleich der Summe der Determinanten der Seiten, jede in der Richtung des Umfangs genommen. Dieselbe Regel gilt nun auch bei rückläufiger Richtung des Umfangs, weil dann der Inhalt des Dreiecks und auch die Determinante einer jeden Seite desselben das entgegengesetzte Zeichen erhält.

Die Sätze §§ 9 und 10 hätten sich auch hieraus ableiten lassen.

§ 12. Der Inhalt eines einfach geschlossenen Vielecks $P_1 P_2 \ldots P_n$ bestimmt sich nach der Formel

$$2 \cdot P_1 P_2 \ldots P_n = D_{12} + D_{23} + D_{34} + \cdots + D_{n-1,n} + D_{n1}.$$

Beweis. Der Umfang des Vielecks möge die rechtläufige Richtung haben. Man zerlege dasselbe nach § 5 in Dreiecke. Bestimmt man dann die Inhalte sämmtlicher Dreiecke, den Umfang derselben rechtläufig genommen, nach § 11, so ist der doppelte Inhalt eines jeden gleich der Summe der Determinanten der rechtläufig gerichteten Seiten desselben. Durch Addition erhält man also nach § 6 den doppelten Inhalt $2F$ des Vielecks

$$2F = \sum (D_{ab} + D_{bc} + D_{ca}),$$

wo der Ausdruck $\sum$ die Summe der Inhaltsausdrücke sämmtlicher Dreiecke ist. Nun sei in Fig. 4 AB eine der Diagonalen, also die gemeinsame Seite zweier Theildreiecke ACB und ABD. Dann sind AB und BA rechtläufig gerichtete Seiten resp. der beiden Dreiecke ABD und ACB. In dem Ausdruck $\sum$ kommt also die Determinante von AB und auch die von BA vor, welche nach § 8 zusammen $= 0$ sind. Aus dem Ausdruck $\sum$ fallen somit die Determinanten sämmtlicher Diagonalen heraus.

Ferner sei EF (Fig. 5) eine Seite des Umfangs. An dieser liegt dann ein Theildreieck EFG. In dem Ausdruck $\sum$ kommt daher die Determinante von EF, nicht aber die von FE vor. Die Strecke EF hat aber die Richtung EF auch als Seite des Vielecks. Somit sind in dem Ausdrucke $\sum$ nur die Determinanten sämmtlicher Vielecksseiten, jede in ihrer Richtung genommen, zurückgeblieben.

Giebt man dem Umfange die entgegengesetzte Richtung, so ändert der Inhalt und die Determinante einer jeden Umfangsstrecke das Zeichen; die Inhaltsformel gilt somit auch für diesen Fall.

§ 13. Wendet man die Formel

$$2F = D_{12} + D_{23} + \cdots + D_{n-1} + D_{n1}$$

auf ein mehrfach geschlossenes Polygon $P_1 P_2 \ldots P_n$ an, so ist $2F$ die Summe der Inhalte der einfach geschlossenen Polygone, worin sich dasselbe nach § 37 zerlegen lässt, den Inhalt eines jeden positiv oder negativ genommen, je nachdem sein Umfang die rechtläufige oder rückläufige Richtung hat. In welcher Weise das Polygon zerlegt worden, ist hierbei gleichgiltig.

Beweis. Das Polygon sei nach § 3 in einfach geschlossene Polygone f_1, f_2, ... zerlegt. Jede Strecke des Umfangs eines Theilpolygons hat als solche dieselbe Richtung, wie als Theil des Umfangs des ganzen Polygons. Bestimmt man also den doppelten Inhalt eines jeden nach § 12, so ist die

Summe derselben zusammengesetzt aus den Determinanten sämmtlicher Seiten aller Theilpolygone, jede der letzteren in der Richtung genommen, welche sie als Theil des ganzen Polygons hat. Wenn demnach die Doppelpunkte blos Eckpunkte der letzteren sind, keiner derselben eine Seite theilt, so hat man schon den Ausdruck $2F$. Liegt dagegen ein Doppelpunkt O (Fig. 6) auf einer Seite $P_m P_{m+1}$ des Vielecks, so kommen in dem Ausdrucke für obige Inhaltssumme die Determinanten von $P_m O$ und $O P_{m+1}$ vor. Diese vereinigen sich aber nach § 8 zu der Determinante von $P_m P_{m+1}$. Ueberall, wo eine Polygonseite durch einen Doppelpunkt getheilt ist, vereinigen sich die Determinanten der beiden Theile zur Determinante der ganzen Strecke und man hat dann wieder obigen Ausdruck.

Nachdem man die Gleichheit des Ausdrucks $2F$ und obiger Inhaltssumme erkannt hat, kann man diese Grösse als den Inhalt des mehrfach geschlossenen Polygons definiren.

XX.

Substitution neuer Variabelen in höheren Differentialquotienten.

Von

Dr. Bochow

in Burg bei Magdeburg.

I.

Durch die Schreibweise ${}^{x}D_t^n f(t)$ bezeichne ich, dass ich die Function $f(t)$ von t nach t n-mal differenzirt habe und nach vollendeter Differentiation den Specialwerth $t = x$ — welchen ich die „Grenze" des Differentialquotienten nenne — eingeführt habe. Diese Schreibweise, analog der des Integrales und identisch mit der in meiner Dissertation (Der Differentialquotient zu beliebigem Index, Halle 1885) benutzten Bezeichnung der Differentialquotienten zu beliebigem Index, halte ich für bequemer und übersichtlicher, als die gewöhnlich gebrauchte $\left|\dfrac{d^n f(t)}{dt^n}\right|_{t=x}$. f kann neben t auch x von Anfang an enthalten. Dann bedeutet ${}^{x}D_t^n f(t, x)$, dass vor und während der Differentiation nur t als variabel anzusehen ist; nach ausgeführter Differentiation nach t wird dies als $t = x$ specialisirt, so dass der Ausdruck schliesslich nur wieder x enthält.

Für den Index $n = 1$ ist leicht abzuleiten die Beziehung

$$1) \qquad {}^{\psi(x)}D^1_{\psi(t)}\, F(\psi(t)) = \frac{1}{\psi'(x)}\, {}^{x}D_t^1\, F(\psi(t)),$$

wo ich also einmal nach t, einmal nach einer Function ψ von t differenzire.

Besteht nun eine Gleichung

$$2) \qquad {}^{x}D_t^1 f(t) = \varphi(x),$$

ist φ gegeben und f so zu bestimmen, dass es dieser Gleichung genügt, so ist die Lösung dieser Aufgabe unbestimmt; nicht nur die Function $f(t)$, für welche $f'(t) = \varphi(t)$, ist eine Lösung. Setzen wir vielmehr

$$2\alpha) \qquad D_t^1 f(t) = F(t),$$

wo F eine ganz beliebige Function bedeutet, welche nur die Eigenschaft besitzen muss, dass

$$2\beta) \qquad F(x) = \varphi(x)$$

ist, so ist

2γ) $$f(t) = \int F(t)\,dt + Const.$$

eine Lösung von Nr. 2α). Wählen wir in 2γ) die Constante, welche nur von t unabhängig zu sein braucht, x aber enthalten kann, so, dass sie für $t = x$ verschwindet, so kommt

2δ) $$f(t) = f(x) + \int_x^t F(t)\,dt,$$

und wir können $F(t)$ beliebig specialisiren, wenn nur Nr. 2β) gewahrt bleibt. Die einfachste Specialisirung bleibt natürlich $F(t) = \varphi(t)$. Wir können aber auch setzen $F(t) = \varphi(x)\,\psi(t)$, wo ψ nur der Bedingung genügen muss, dass $\psi(x) = 1$ ist, und erhalten als Lösung von Nr. 2)

2a) $$\psi(x) = 1, \quad f(t) = f(x) + \varphi(x) \int_x^t \psi(t)\,dt$$

und, wenn wir $\psi(t)$ constant gleich Eins setzen,

2b) $$f(t) = f(x) + (t - x)\,\varphi(x).$$

$f(x)$ ist in allen diesen Lösungen unbestimmt, so lange es nicht durch Nebenbedingungen der Aufgabe bestimmt wird.

Ohne Weiteres sind die folgenden Gleichungen klar. Es seien m und n positive ganze Zahlen, die Null eingeschlossen, so ist

3) $$\begin{cases} n \gtrless m, & {}^xD_t^n (t-x)^m = 0, \\ n = m, & {}^xD_t^n (t-x)^n = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1 = n! \end{cases}$$

Der Differentialquotient ${}^xD_t^1 \dfrac{\psi(t) - \psi(x)}{t - x}$, wo ψ eine beliebige Function bedeutet, stellt sich folgendermassen heraus: zunächst in unbestimmter Form

$$= \operatorname*{Lim}_{t=x} \frac{(t-x)\,\psi'(t) - (\psi(t) - \psi(x))}{(t-x)^2},$$

also sein relativer Werth

$$= \operatorname*{Lim}_{t=x} \frac{\psi'(t) + (t-x)\,\psi''(t) - \psi'(t)}{2(t-x)} = \frac{\psi''(x)}{2},$$

4) $${}^xD_t^1 \frac{\psi(t) - \psi(x)}{t - x} = \frac{\psi''(x)}{2}.$$

Hieraus folgt weiter

5) $${}^xD_t^1 \left[\left(\frac{\psi(t) - \psi(x)}{t - x} \right)^2 : \psi'(t) \right] = 0.$$

Es ist

$${}^xD_t^n\,(\psi(t) - \psi(x))^k = {}^xD_t^n \left[\left(\frac{\psi(t) - \psi(x)}{t - x} \right)^k (t-x)^k \right]$$
$$= \sum_{m=0}^{n} \left[\binom{n}{m} {}^xD_t^{n-m} \left(\frac{\psi(t) - \psi(x)}{t - x} \right)^k {}^xD_t^m (t-x)^k \right].$$

Nach Nr. 3 verschwinden alle Glieder ausser dem Gliede $m=k$:

$$6)\quad {}^{x}D_t^{n-k}\left(\frac{\psi(t)-\psi(x)}{t-x}\right)^k=\frac{1}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}\,{}^{x}D_t^{n}\,(\psi(t)-\psi(x))^k.$$

II.

Wir stellen uns folgende Aufgabe: Gegeben sind zwei Functionen f und ψ; eine Function F so zu finden, dass

$${}^{x}D_t^n f(\psi(t))={}^{\psi(x)}D^n_{\psi(t)}F.$$

Wir nehmen an, F sei ein Product $f(\psi(t))\Phi$, wo Φ eine neue unbekannte Function bedeutet, die von der Natur der Function f unabhängig ist. Das ist eine willkürliche Annahme; im Verlauf der Untersuchung müsste es sich jedoch zeigen, wenn sie unberechtigt war. Φ wird Function von ψ sein müssen. Da wir aber, wenn wir die Gleichung $\psi(t)=y$ nach t auflösen können in der Form $t=\varphi(y)$, stets t als Function von $\psi(t)$ darzustellen im Stande sind $[t=\varphi(\psi(t))]$, so bezeichnen wir Φ einfach mit $\Phi(t)$. $\Phi(x)$ ist dann der Specialwerth, den es für $t=x$, resp. für $\psi(t)=\psi(x)$ annimmt. Da wir aber nicht voraussetzen dürfen, dass Φ für alle Indices n dieselbe Function sein wird, so charakterisiren wir das zum Index n gehörige Φ durch $\Phi_n(t)$. Demnach lautet unsere Aufgabe:

Eine Function $\Phi_n(t)$ so zu finden, dass für beliebige positiv ganze n und für beliebige f

$$7)\qquad {}^{x}D_t^n f(\psi(t))={}^{\psi(x)}D^n_{\psi(t)}\,[f(\psi(t))\,\Phi_n(t)]$$

sei.

III.

Das Gesetz des Index der Function Φ_n und ihre Gestalt.

Wir setzen voraus, in Nr. 7) sei Φ_n die gesuchte Function: so müssen wir auch alle aus Nr. 7) sich ergebenden Consequenzen für Φ gelten lassen, und werden durch Entfaltung derselben auf die Natur von Φ schliessen.

A. In Nr. 7) entwickeln wir rechterseits nach der Regel zur Differentiation eines Productes:

$$8\text{a})\qquad {}^{x}D_t^n f(\psi(t))=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\,{}^{\psi(x)}D^{n-k}_{\psi(t)}f(\psi(t))\,{}^{\psi(x)}D^k_{\psi(t)}\,\Phi_n\right].$$

Nun ist, da Nr. 7) für beliebige Functionen gelten soll,

$${}^{\psi(x)}D^{n-k}_{\psi(t)}f(\psi(t))={}^{\psi(x)}D^{n-k}_{\psi(t)}\left[\frac{f(\psi(t))}{\Phi_{n-k}}\,\Phi_{n-k}\right]={}^{x}D_t^{n-k}\,\frac{f(\psi(t))}{\Phi_{n-k}}.$$

Diesen Ausdruck entwickeln wir nach Differentialquotienten von f und $1:\Phi_{n-k}$:

$$8\text{b})\quad {}^xD_t^{n-k}\frac{f(\psi(t))}{\Phi_{n-k}}=\sum_{m=0}^{n-k}\left[\binom{n-k}{m}{}^xD_t^{n-k-m}f(\psi(t))\,{}^xD_t^m\frac{1}{\Phi_{n-k}}\right],$$

setzen wieder umgekehrt

$${}^xD_t^m\frac{1}{\Phi_{n-k}}={}^{\psi(x)}D_{\psi(t)}^m\frac{\Phi_m}{\Phi_{n-k}},$$

führen 8b) in 8a) ein, ordnen nach Differentialquotienten von f und erhalten

$$8)\qquad {}^xD_t^n f(\psi(t))$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\left\{\binom{n}{p}{}^xD_t^{n-p}f(\psi(t))\sum_{k=0}^{p}\left[\binom{p}{k}{}^{\psi(x)}D_{\psi(t)}^{p-k}\frac{\Phi_{p-k}}{\Phi_{n-k}}{}^{\psi(x)}D_{\psi(t)}^k\Phi_n\right]\right\}.$$

B. In Nr. 7) setzen wir $f(\psi(t))=f(\psi(t)).1$ und entwickeln nach Differentialquotienten von f und 1, indem wir überall

$${}^xD_t^r\,1={}^{\psi(x)}D_{\psi(t)}^r\Phi_r$$

setzen; so kommt

$${}^xD_t^n f(\psi(t))=\sum_{p=0}^{n}\left[\binom{n}{p}{}^xD_t^{n-p}f(\psi(t))\,{}^{\psi(x)}D_{\psi(t)}^p\Phi_p\right]$$

oder, $\Phi_p=(\Phi_p.\Phi_n):\Phi_n$ gesetzt,

$$9)\qquad {}^xD_t^n f(\psi(t))$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\left\{\binom{n}{p}{}^xD_t^{n-p}f(\psi(t))\sum_{k=0}^{p}\left[\binom{p}{k}{}^{\psi(x)}D_{\psi(t)}^{p-k}\frac{\Phi_p}{\Phi_n}{}^{\psi(x)}D_{\psi(t)}^k\Phi_n\right]\right\}.$$

C. Vergleichen wir nun Nr. 8) und 9), so muss, da alles Uebrige in den beiden Gleichungen übereinstimmt, Φ in Ansehung seines Index das Gesetz befolgen

$$10)\qquad \Phi_{p-k}:\Phi_{n-k}=\Phi_p:\Phi_n.$$

Unsere Substitutionsformel soll auch für den Differentiationsindex $n=0$ gelten; setzen wir $k=p$, so folgt

$$\Phi_n=(\Phi_p\,\Phi_{n-p}):\Phi_0,$$

also, $n-p=q$ gesetzt,

$$11)\qquad \Phi_{p+q}=(\Phi_p\,\Phi_q):\Phi_0.$$

$p=q=1$ giebt.

$$\Phi_2=\Phi_1^2:\Phi_0,$$

$p=1,\ q=2$:

$$\Phi_3=\Phi_1^3:\Phi_0^2.$$

So kann man fortfahren und erhält Φ_n ausgedrückt durch Φ_1 und Φ_0 als

$$12)\qquad \Phi_n=\Phi_1^n:\Phi_0^{n-1}.$$

Nun führen wir eine neue unbekannte Function $X(t)$ ein durch die Gleichung

$$13)\qquad \Phi_1(t)=X(t)\,\Phi_0(t),$$

so wird

$$14)\qquad \Phi_n(t)=X(t)^n\,\Phi_0(t),$$

und wenn wir dies in Nr. 7 einsetzen und einfach Φ statt Φ_0 schreiben, erhalten wir: unsere gesuchte Substitutionsformel hat die Gestalt

15) $$ {}^{x}D_t^n f(\psi(t)) = {}^{\psi(x)}D_{\psi(t)}^n [f(\psi(t))\, X(t)^n\, \Phi(t)]. $$

Wir haben nun nur noch die Functionen X und Φ zu bestimmen.

IV.

Bestimmung von X und Φ.

A. Nr. 15) soll auch für den Index $n=0$ gelten. Es ist aber

$$ {}^{x}D_t^0 F(t) = F(x), $$

mithin, da gleichzeitig t zu x und $\psi(t)$ zu $\psi(x)$ wird,

$$ f(\psi(x)) = f(\psi(x))\, \Phi(x), $$

16) $$ \Phi(x) = 1. $$

Offenbar brauchen wir, um $X(t)$ und $\Phi(t)$ zu bestimmen, wie ein Blick auf Nr. 15) zeigt, nur den Index $n=1$ ins Auge zu fassen:

17) $$ {}^{x}D_t^1 f(\psi(t)) = {}^{\psi(x)}D_{\psi(t)}^1 [f(\psi(t))\, X(t)\, \Phi(t)]. $$

Diese Formel muss für beliebige f gelten. $f=1$ giebt

18) $$ 0 = X(x)\, {}^{\psi(x)}D_{\psi(t)}^1\, \Phi(t) + \Phi(x)\, {}^{\psi(x)}D_{\psi(t)}^1\, X(t), $$

also mit Hilfe von Nr. 1) und 16)

$$ X(x)\, {}^{x}D_t^1\, \Phi(t) + {}^{x}D_t^1\, X(t) = 0. $$

$f = 1 : \Phi(t)$ und $f = 1 : X(t)$ liefern

$$ {}^{x}D_t^1 (1 : \Phi(t)) = {}^{\psi(x)}D_{\psi(t)}^1\, X(t) $$

oder

19a) $$ -\frac{1}{\Phi(x)^2}\, {}^{x}D_t^1\, \Phi(t) = \frac{1}{\psi'(x)}\, {}^{x}D_t^1\, X(t), $$

und analog

19b) $$ -\frac{1}{X(x)^2}\, {}^{x}D_t^1\, X(t) = \frac{1}{\psi'(x)}\, {}^{x}D_t^1\, \Phi(t). $$

Indem wir diese beiden Gleichungen miteinander multipliciren, erhalten wir

$$ 1 : X(x)^2 = 1 : \psi'(x)^2, $$

also

$$ X(x) = \pm\, \psi'(x). $$

Dies führen wir in Nr. 18) ein und benutzen zugleich Nr. 19a), so kommt

$$ \mp\, {}^{x}D_t^1\, X(t) + {}^{x}D_t^1\, X(t) = 0, $$

also gilt das obere Zeichen:

20) $$ X(x) = \psi'(x), \quad \Phi(x) = 1. $$

B. Nr. 19b) können wir so schreiben:

$$ {}^{x}D_t^1\, X(t) + \psi'(x)\, {}^{x}D_t^1\, \Phi(t) = 0. $$

Wir addiren beiderseits $\psi''(x)\, \Phi(x) = \psi''(x)$, so kommt

$$ {}^{x}D_t^1\, X(t) + \psi'(x)\, {}^{x}D_t^1\, \Phi(t) + \psi''(x)\, \Phi(x) = \psi''(x) $$

oder

21) $$ {}^{x}D_t^1 [X(t) + \psi'(t)\, \Phi(t)] = \psi''(x). $$

Durch Integration ergiebt sich

$$X(t) + \psi'(t)\,\Phi(t) = \int \psi''(x)\,dt + Const.,$$

also, wenn wir als Integrationsgrenzen x und t, und für $\int \psi''(x)\,dt$ die Specialisirung $(t-x)\,\psi''(x)$ wählen,

$$|X(t) + \psi'(t)\,\Phi(t)|_{t=x}^{t=t} = (t-x)\,\psi''(x),$$

d. h. nach Nr. 20)

$$X(t) + \psi'(t)\,\Phi(t) = 2\,\psi'(x) + (t-x)\,\psi''(x).$$

Die rechte Seite gestalten wir so um:

$$2\left(\psi'(x) + \frac{t-x}{2}\,\psi''(x)\right) = 2\,\frac{\psi(x) + (t-x)\psi'(x) + \frac{(t-x)^2}{2!}\,\psi''(x) - \psi(x)}{t-x}.$$

Da es sich nun nur um Werthe von t sehr nahe an x handelt, können wir $\psi(x) + (t-x)\,\psi'(x) + \frac{(t-x)^2}{2}\,\psi''(x)$ durch $\psi(t)$ ersetzen, mithin

22) $$X(t) + \psi'(t)\,\Phi(t) = 2\,\frac{\psi(t) - \psi(x)}{t-x}.$$

Diese Gleichung hätten wir auch mittels Nr. 4) sofort aus der Differentialgleichung Nr. 21) herstellen können.

C. Für $t = x$ wird sowohl X als $\psi'\Phi$ gleich der halben rechten Seite in Nr. 22). Für variabele t setzen wir

23) $$\begin{cases} X(t) = \quad A(t) \quad \dfrac{\psi(t) - \psi(x)}{t-x}, \\[2ex] \Phi(t) = (2 - A(t))\,\dfrac{\psi(t) - \psi(x)}{t-x} : \psi'(t); \end{cases}$$

A bedeutet eine noch unbekannte Function von t. Führen wir dies in Nr. 17) ein, so muss sein

$$^{x}D_t^1\,f(\psi(t)) = {}^{\psi(x)}D_{\psi(t)}^1\left[f(\psi(t))\,A(t)\,(2 - A(t))\left(\frac{\psi(t) - \psi(x)}{t-x}\right)^2 : \psi'(t)\right]$$

oder nach Nr. 1)

$$f'(\psi(x))\,(\psi'(x))^2$$

$$= \underset{t=x}{Lim}\left[\begin{array}{l} f'(\psi(t))\,\psi'(t)\;A(t)\,(2 - A(t))\left(\dfrac{\psi(t) - \psi(x)}{t-x}\right)^2 : \psi'(t) \\[2ex] + f(\psi(t))\;\;D_t^1\left[A(t)\,(2 - A(t))\left(\dfrac{\psi(t) - \varphi(x)}{t-x}\right)^2 : \psi'(t)\right] \end{array}\right]$$

$$= f'(\varphi(x))\,\psi'(x)^2 A(x)\,(2 - A(x)) + f(\psi(x))\;\;{}^{x}D_t^1\left[A(t)\,(2 - A(t))\left(\frac{\psi(t) - \psi(x)}{t-x}\right)^2 : \psi'(t)\right].$$

Damit dies möglich, muss erstens

24a) $$A(x)\,(2 - A(x)) = 1,\ \text{d. h.}\ A(x) = 1,$$

und zweitens

$$A(x)\,(2 - A(x))\;{}^{x}D_t^1\left[\left(\frac{\psi(t) - \psi(x)}{t-x}\right)^2 : \psi'(t)\right] + \psi'(x)\,{}^{x}D_t^1\,[A(t)\,(2 - A(t))] = 0$$

sein. Nach Nr. 5) verschwindet der erste Summand, also wird diese Bedingung erfüllt, wenn A constant gleich Eins ist:

$$24)\qquad A(t) = 1.$$

Demnach

$$25)\qquad \begin{cases} X(t) = \dfrac{\psi(t) - \psi(x)}{t - x}, \\ \Phi(t) = \dfrac{\psi(t) - \psi(x)}{t - x} : \psi'(t). \end{cases}$$

V.

Setzen wir nun diese Werthe von X und Φ in Nr. 15) ein, so erhalten wir als die gesuchte Substitutionsformel

$$26)\qquad {}^x D_t^n f(\psi(t)) = {}^{\psi(x)} D_{\psi(t)}^n \left[f(\psi(t)) \left(\frac{\psi(t) - \psi(x)}{t - x} \right)^{n+1} : \psi'(t) \right].$$

Wir setzen $\psi(t) = y$; es folge hieraus $t = \varphi(y)$. y werde zu v, wenn t zu x resp. $\psi(t)$ zu $\psi(x)$ wird. Ferner ist $1 : \psi'(t) = 1 : \dfrac{d\psi(t)}{dt} = \dfrac{dt}{d\psi(t)} = \dfrac{d\varphi(y)}{dy} = \varphi'(y)$. Führen wir also y und v in Nr. 26) ein, so können wir schreiben:

$$27)\qquad \left\{ \begin{aligned} {}^x D_t^n f(\psi(t)) &= \frac{d^n f(\psi(x))}{dx^n} = \frac{d^n f(v)}{(d\varphi(v))^n} \\ &= {}^v D_y^n \left[f(y) \left(\frac{y - v}{\varphi(y) - \varphi(v)} \right)^{n+1} . \varphi'(y) \right] \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\psi(t) = y, \quad t = \varphi(y); \\ &t = x, \quad y = v. \end{aligned}$$

Diese Gleichung enthält die Lösung des Problems der „Vertauschung der unabhängigen Variabelen“ bei der mehrfachen Differentiation.

Diese Formel, am leichtesten aus der Theorie der Differentiation zu beliebigem (d. h. negativem und gebrochenem) Index fliessend, ist zuerst gegeben und für derartige Indices bewiesen worden von Dr. Schimpf (Untersuchungen aus der Infinitesimalrechnung, Programm Bochum 1885), später — jedoch selbstständig gefunden — von mir in meiner Dissertation: dort erwähne ich auch bereits, dass sie auch für positiv ganze Indices gilt, hielt es jedoch bei dem allgemeinen Interesse, welches ihr wohl zukommt, für angezeigt, den obigen unabhängigen Beweis dafür zu erbringen. In der ersten Abhandlung des zweiten Bandes von Schlömilch's Compendium, betitelt „Die höheren Differentialquotienten“, welche wohl als eine Zusammenfassung des bisher in unserer Frage Geleisteten angesehen werden darf, findet sich diese Formel nicht, und zwei andere [Nr. 40) und 41)]

$$27\text{a})\qquad \frac{d^n f(y)}{dx^n} = D_\varrho^{n-1} \left\{ \left(\frac{\varrho}{\varphi(y + \varrho) - \varphi(y)} \right)^n f'(\varrho) \right\}_{\varrho = 0},$$

$$27\text{b})\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = D_\varrho^{n-1} \left(\frac{\varrho}{\varphi(y + \varrho) - \varphi(y)} \right)^n_{\varrho = 0}$$

besitzen den Mangel, dass auf der einen Seite der Gleichung ein n^{ter}, auf der andern ein $(n-1)^{\text{ter}}$ Differentialquotient steht [nur für die Specialisirung $\psi(t) = 1:t$ enthält die in Rede stehende Abhandlung eine Formel, die auf beiden Seiten gleiche Indices zeigt].

Die Grundlage und den Ausgangspunkt aller Untersuchungen bildet bei Schlömilch die Reihe [Nr. 7)]:

$$28\text{a)}\quad \left\{\begin{array}{l} D_x{}^n f(y) \\ = \dfrac{U_1}{1} f'(y) + \dfrac{U_1}{1.2} f''(y) + \dfrac{U_3}{1.2.3} f'''(y) + \cdots + \dfrac{U_n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(y), \\ y = \psi(x), \quad U_k = \{D_\varrho{}^n [\psi(x+\varrho) - \psi(x)]^k\}_{\varrho=0}. \end{array}\right.$$

Entwickeln wir aber unsere Formel Nr. 26) nach der Regel zur Differentiation eines Productes, so kommt:

$$\begin{array}{c} {}^x D_t{}^n f(\psi(t)) \\ = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \binom{n}{k} {}^{\psi(x)}D^k_{\psi(t)} f(\psi(t))\; {}^{\psi(x)}D^{n-k}_{\psi(t)} \left[\left(\dfrac{\psi(t) - \psi(x)}{t-x} \right)^{n+1} : \psi'(t) \right] \right\}. \end{array}$$

Nun verschwindet der Coefficient des Gliedes $k = 0$, da er nach Nr. 26) gleich ${}^xD_t{}^n 1$ ist; den des allgemeinen Gliedes gestalten wir so um:

$${}^{\psi(x)}D^{n-k}_{\psi(t)} \left\{ \left(\frac{\psi(t) - \psi(x)}{t-x} \right)^k \left(\frac{\psi(t) - \psi(x)}{t-x} \right)^{n-k+1} : \psi'(t) \right\} = {}^xD_t{}^{n-k} \left(\frac{\psi(t) - \psi(x)}{t-x} \right)^k$$

und wenden Nr. 6) darauf an, so wird unsere Reihe:

$$28)\qquad {}^xD_t{}^n f(\psi(t)) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{f^{(k)}(\psi(k))}{k!} {}^xD_t{}^n (\psi(t) - \psi(x))^k \right]$$

oder, ausgeschrieben,

$$28\text{b)}\quad \begin{array}{c} {}^xD_t{}^n f(\psi(t)) \\ = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{f'(\psi(x))}{1!} {}^xD_t{}^n (\psi(t) - \psi(x)) + \dfrac{f''(\psi(x))}{2!} {}^xD_t{}^n (\psi(t) - \psi(x))^2 \\ + \dfrac{f'''(\psi(x))}{3!} {}^xD_t{}^n (\psi(t) - \psi(x))^3 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(\psi(x))}{n!} {}^xD_t{}^n (\psi(t) - \psi(x))^n \end{array} \right\}. \end{array}$$

Man überzeugt sich leicht, dass dies mit der Schlömilch'schen Reihe identisch ist, also müssen auch die beiderseitigen weiteren Resultate übereinstimmen. Unsere Herleitung aber, direct aus der Grundformel Nr. 26), scheint mir natürlicher als die Schlömilch'sche, durch eine Specialisirung gewonnene.

VI.

Specialisirungen.

A. Specielle f in Nr. 26) und 27).

1. f constant, $= 1$, giebt:

$$29\text{a)}\qquad {}^{\psi(x)}D^n_{\psi(t)} \left[\left(\frac{\psi(t) - \psi(x)}{t-x} \right)^{n+1} : \psi'(t) \right] = 0,$$

$$29\text{b)}\qquad {}^vD_y{}^n \left[\left(\frac{y-v}{\varphi(y) - \varphi(v)} \right)^{n+1} \varphi'(y) \right] = 0;$$

2. $f(\psi(t)) = \psi(t)$:

$$30)\quad \begin{cases} {}^{x}D_t^{\,n}\,\psi(t) = \psi^{(n)}(x) = \dfrac{d^n v}{dx^n} = {}^{\psi(x)}D^{\,n}_{\psi(t)}\left[\dfrac{\psi(t)}{\psi'(t)}\left(\dfrac{\varphi(t)-\psi(x)}{t-x}\right)^{n+1}\right] \\ \qquad = \dfrac{d^n v}{(d\,\varphi(v))^n} = {}^{v}D_y^{\,n}\left[y\left(\dfrac{y-v}{\varphi(y)-\varphi(v)}\right)^{n+1}\varphi'(y)\right]; \end{cases}$$

3. $f(\psi(t)) = \psi'(t)$:

$$31)\quad \begin{cases} {}^{x}D_t^{\,n}\,\psi'(t) = \psi^{(n+1)}(x) = \dfrac{d^{n+1} v}{dx^{n+1}} = {}^{\psi(x)}D^{\,n}_{\psi(t)}\left(\dfrac{\psi(t)-\psi(x)}{t-x}\right)^{n+1} \\ \qquad = \dfrac{d^{n+1} v}{(d\,\varphi(v))^{n+1}} = {}^{v}D_y^{\,n}\left(\dfrac{y-v}{\varphi(y)-\varphi(v)}\right)^{n-1}. \end{cases}$$

4. $f(\psi(t)) = \dfrac{\psi(t)-\psi(x)}{t-x}$. Wir entwickeln nach dem Taylor'schen Satze nach Potenzen von $(t-x)$ und erhalten

$$32)\quad \begin{cases} {}^{x}D_t^{\,n}\,\dfrac{\psi(t)-\psi(x)}{t-x} \\ = \dfrac{\psi^{(n+1)}(x)}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\,\dfrac{d^{n+1} v}{dx^{n+1}} = {}^{\psi(x)}D^{\,n}_{\psi(t)}\left[\left(\dfrac{\psi(t)-\psi(x)}{t-x}\right)^{n+2} : \psi'(t)\right] \\ = \dfrac{1}{n+1}\,\dfrac{d^{n+1} v}{(d\,\varphi(v))^{n+1}} = {}^{v}D_y^{\,n}\left[\left(\dfrac{y-v}{\varphi(y)-\varphi(v)}\right)^{n+2}\varphi'(y)\right]. \end{cases}$$

5. Setzen wir $f(\psi(t)) = \dfrac{d\,F(\psi(t))}{dt} = F'(\psi(t))\,\psi'(t)$ und schreiben wieder f statt F, so kommt

$$33)\quad \begin{cases} {}^{x}D_t^{\,n}\,\dfrac{d\,f(\psi(t))}{dt} = \dfrac{d^{n+1} f(v)}{dx^{n+1}} = {}^{\psi(k)}D^{\,n}_{\psi(t)}\left[\left(\dfrac{\psi(t)-\psi(x)}{t-x}\right)^{+1} f'(\psi(t))\right] \\ \qquad = \dfrac{d^{n+1} f(v)}{(d\,\varphi(v))^{n+1}} = {}^{v}D_y^{\,n}\left[\left(\dfrac{y-v}{\varphi(y)-\varphi(v)}\right)^{n+1} f'(y)\right]. \end{cases}$$

6. Wir stellen die Formeln 2, 3, 4 zusammen, indem wir, wo es nöthig ist, $(n+1)$ durch n ersetzen. So erhalten wir die Gleichungsreihe

$$34)\quad \begin{cases} {}^{x}D_t^{\,n}\,\psi(x) = \psi^{(n)}(x) = \dfrac{d^n v}{dx^n} = \dfrac{d^n v}{(d\,\varphi(v))^n} \\ \text{a)}\ = {}^{\psi(x)}D^{\,n}_{\psi(t)}\left[\psi(t)\left(\dfrac{\psi(t)-\psi(x)}{t-x}\right)^{n+1} : \psi'(t)\right] = {}^{v}D_y^{\,n}\left[y\left(\dfrac{y-v}{\varphi(y)-\varphi(v)}\right)^{n+1}\varphi'(y)\right] \\ \text{b)}\ = {}^{\psi(x)}D^{\,n-1}_{\psi(t)}\left(\dfrac{\psi(t)-\psi(x)}{t-x}\right)^{n} = {}^{v}D_y^{\,n-1}\left(\dfrac{y-v}{\varphi(y)-\varphi(v)}\right)^{n} \\ \text{c)}\ = n\;{}^{\psi(x)}D^{\,n-1}_{\psi(t)}\left[\left(\dfrac{\psi(t)-\psi(x)}{t-x}\right)^{n+1} : \psi'(t)\right] = n\;{}^{v}D_y^{\,n-1}\left[\left(\dfrac{y-v}{\varphi(y)-\varphi(v)}\right)^{n+1}\varphi'(y)\right]. \end{cases}$$

Man überzeugt sich leicht, dass 34b) mit der unter 27b) angeführten Schlömilch'schen Formel identisch ist.

7. Wir ersetzen in Nr. 33) $(n+1)$ durch n:

$$35)\left\{\begin{aligned}{}^{x}D_t^n f(\psi(t)) &= \frac{d^n f(v)}{dx^n} = \frac{d^n f(v)}{(d\varphi(v))^n} = {}^{\psi(x)}D_{\psi(t)}^{n-1}\left[\left(\frac{\psi(t)-\psi(x)}{t-x}\right)^n f'(\psi(t))\right] \\ &= {}^{v}D_y^{n-1}\left[\left(\frac{y-v}{\varphi(y)-\varphi(v)}\right)^n f'(y)\right].\end{aligned}\right.$$

Man sieht, Nr. 35) ist identisch mit der unter Nr. 27a) angeführten Formel von Schlömilch. Auch die Reihe Nr. 28a) ging mit Leichtigkeit hervor: es erweist sich also unsere Formel 26/27) als eine umfassende Grundformel.

B. Specielle ψ.

1. $\psi(t) = a + bt$.

$$\begin{aligned}{}^{x}D_t^n f(a+bt) &= {}^{a+bx}D_{a+bt}^n\left[f(a+bt)\left(\frac{a+bt-a-bx}{t-x}\right)^{n+1} : b\right] \\ &= b^n\, {}^{a+bx}D_{a+bt}^n f(a+bt),\end{aligned}$$

also, $a+bt=y$ gesetzt,

$$36a)\qquad {}^{x}D_t^n f(a+bt) = b^n\, {}^{a+bx}D_y^n f(y).$$

Setzen wir $a+bx=v$, $x=\frac{v-b}{a}$, so kommt

$$36b)\qquad {}^{v}D_y^n f(y) = b^{-n}\, {}^{\frac{v-b}{a}}D_t^n f(a+bt).$$

2. $\psi(t) = t^2$.

$$\begin{aligned}{}^{x}D_t^n f(t^2) &= {}^{x^2}D_{t^2}^n\left[f(t^2)\left(\frac{t^2-x^2}{t-x}\right)^{n+1} : (2t)\right] \\ &= \frac{1}{2}\, {}^{x^2}D_{t^2}^n\left[\frac{f(t^2)\,(t+x)^{n+1}}{t}\right],\end{aligned}$$

also, $t^2=y$, $t=\sqrt{y}$ gesetzt,

$$37a)\qquad {}^{x}D_t^n f(t^2) = \frac{1}{2}\, {}^{x^2}D_y^n\left[\frac{f(y)\,(\sqrt{y}+x)^{n+1}}{\sqrt{y}}\right].$$

Setzen wir $x^2=v$, also $x=\sqrt{v}$, so kommt

$$37b)\qquad {}^{v}D_y^n\left[\frac{f(y)\,(\sqrt{y}+\sqrt{v})^{n+1}}{\sqrt{y}}\right] = 2\, {}^{\sqrt{v}}D_t^n f(t^2).$$

3. $\psi(t) = \sqrt{t}$.

$$\begin{aligned}{}^{x}D_t^n f(\sqrt{t}) &= {}^{\sqrt{x}}D_{\sqrt{t}}^n\left[f(\sqrt{t})\left(\frac{\sqrt{t}-\sqrt{x}}{t-x}\right)^{n+1} : \frac{1}{2\sqrt{t}}\right] \\ &= 2\, {}^{\sqrt{x}}D_{\sqrt{t}}^n\left[f(\sqrt{t})\,\frac{\sqrt{t}}{(\sqrt{t}+\sqrt{x})^{n+1}}\right],\end{aligned}$$

also, $\sqrt{t}=y$ gesetzt,

$$38a)\qquad {}^{x}D_t^n f(\sqrt{t}) = 2\, {}^{\sqrt{x}}D_y^n\, \frac{f(y)\,y}{(y+\sqrt{x})^{n+1}}.$$

Setzen wir $\sqrt{x}=v$, $x=v^2$, so kommt

$$38b)\qquad {}^{v}D_y^n\, \frac{f(y)\,y}{(y+v)^{n+1}} = \frac{1}{2}\, {}^{v^2}D_t^n f(\sqrt{t}).$$

Nach dieser Methode, welche durch die gegebenen Beispiele wohl genugsam illustrirt ist, sind auch die folgenden Gleichungen gewonnen.

4. $\psi(t) = 1 : \sqrt{t}$.

$$39\text{a)}\quad {}^{x}D_t^n f\left(\sqrt{\frac{1}{t}}\right) = (-1)^n 2 \sqrt{\frac{1}{x}}^{n+1} {}^{\sqrt{\frac{1}{x}}}D_{y^n} \frac{f(y)\, y^{2n-1}}{(1+y\sqrt{x})^{n+1}},$$

$$39\text{b)}\quad {}^{v}D_y^n \frac{f(y)\, y^{2n-1}}{\left(1+\frac{y}{v}\right)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{2\, v^{n+1}} {}^{\frac{1}{v^2}}D_t^n f\left(\sqrt{\frac{1}{t}}\right);$$

5. $\psi(t) = 1 : t$:

$$40\text{a)}\quad {}^{x}D_t^n f\left(\frac{1}{t}\right) = (-1)^n \left(\frac{1}{x}\right)^{n+1} {}^{\frac{1}{x}}D_y^n \left[f(y)\, y^{n-1}\right],$$

$$40\text{b)}\quad {}^{v}D_y^n \left[f(y)\, y^{n-1}\right] = \frac{(-1)^n}{v^{n+1}} {}^{\frac{1}{v}}D_t^n f\left(\frac{1}{t}\right).$$

Nr. 40) und 36) sind die beiden einzigen Fälle, dass die zu differenzirenden Functionen auf beiden Seiten von x resp. v frei sind.

6. $\psi(t) = 1 : t^2$.

$$41\text{a)}\quad {}^{x}D_t^n f\left(\frac{1}{t^2}\right) = \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{n+1} {}^{\frac{1}{x^2}}D_y^n \left[f(y)\, y^{\frac{n}{2}-1} (1+x\sqrt{y})^{n+1}\right],$$

$$41\text{b)}\quad {}^{v}D_y^n \left[f(y)\, y^{\frac{n}{2}-1} \left(1+\sqrt{\frac{y}{v}}\right)^{n+1}\right] = \frac{(-1)^n 2}{v^{n+1}} {}^{\sqrt{\frac{1}{v}}}D_t^n f\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Mit diesen Specialisirungen wollen wir uns genügen lassen.

C. Bisher hatten wir stets angenommen, dass f die Function $\psi(t)$ ausdrücklich enthalte; das ist aber nicht einmal nöthig. Denn wenn f einfach das Argument t enthält, also $f(t)$ zu differenziren ist, so können wir, vorausgesetzt, dass wir die Gleichung $\psi(t) = y$ als $t = \varphi(y)$ nach t aufzulösen im Stande sind, t stets durch $\psi(t)$ ausdrücken, $t = \varphi(\psi(t))$, also f auch als Function von ψ darstellen: $f(t) = f[\varphi(\psi(t))] = F(\psi(t))$. Es ist darum auch

$$42)\quad {}^{x}D_t^n f(t) = {}^{\psi(x)}D_{\psi(t)}^n \left[f(t) \left(\frac{\psi(t)-\psi(x)}{t-x}\right)^{n+1} : \psi'(t)\right]$$

und hiermit die Aufgabe gelöst, eine neue Differentiationsvariabele zu substituiren, die ursprünglich nicht in f enthalten war. Führen wir y ein, so muss also φ die Umkehrungsfunction von ψ, d. h. $\psi(\varphi(y)) = y$ sein, dann wird

$$43)\quad {}^{x}D_t^n f(t) = {}^{\psi(x)}D_y^n \left[f(\varphi(y)) \left(\frac{y-\psi(x)}{\varphi(y)-x}\right)^{n+1} : \varphi'(y)\right], \quad \psi(\varphi(y)) = y.$$

1. Beispiel. $t = \varphi(y) = \sin y,\ y = \psi(t) = \arcsin t$.

$$44\text{a)}\quad {}^{x}D_t^n f(t) = {}^{\arcsin x}D_y^n \left[f(\sin y) \left(\frac{y-\arcsin x}{\sin y - x}\right)^{n+1} \cos y\right].$$

2. Beispiel. $t = \varphi(y) = arcsin y, \;\; y = \psi(t) = sin t.$

44b) $${}^{x}D_t^n f(t) = {}^{sin x}D_y^n \left[f(arcsin y) \left(\frac{y - sin x}{arcsin y - x} \right)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right].$$

3. Beispiel. $t = \varphi(y) = e^y, \;\; y = \psi(t) = log t.$

45a) $${}^{x}D_t^n f(t) = {}^{log x}D_y^n \left[f(e^y) \left(\frac{y - log x}{e^y - x} \right)^{n+1} e^y \right].$$

4. Beispiel. $t = \varphi(y) = log y, \;\; y = \psi(t) = e^t.$

45b) $${}^{x}D_t^n f(t) = {}^{e^x}D_y^n \left[f(log y) \left(\frac{y - e^x}{log y - x} \right)^{n+1} \frac{1}{y} \right].$$

Aus Nr. 43) ist ersichtlich: Setze ich sowohl in der Function f des links stehenden Differentialquotienten, als auch in der Function f des rechts stehenden an Stelle des jedesmaligen Differentiationsargumentes t resp. y die Grenze des Differentialquotienten, x resp. $\psi(x)$, ein, so erscheint links $f(x)$, rechts $f[\varphi(\psi(x))] = f(x)$, also beide Male $f(x)$; geschieht dies nicht, so ist die Substitution falsch.

VII.

Beispiele.

Nach Crelle's Vorgang bezeichne ich durch das Symbol $(m, r)^p$ die Factorenfolge

48) $$(m, r)^p = m(m+r)(m+2r)\ldots(m+\overline{p-1}\,r);$$

m ist die „Basis", r die „Differenz", p der „Exponent" dieser „Facultät", deren Symbol ähnlich zu lesen ist wie die Potenz, die ja (so lange p eine ganze Zahl) für $r = 0$ daraus hervorgeht. Wie man sieht, ist für beliebige m

49) $$D_x^n x^m = (m, -1)^n x^{m-n},$$

mithin

50) $$(m, -1)^1 = m, \quad (m, -1)^0 = 1.$$

Ferner: wenn m gleich Null oder einer positiven ganzen Zahl kleiner als n ist, so ist $(m, -1)^n = 0$. Es ist

51) $$(n, -1)^n = n!$$

52) $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{(n, -1)^k}{(k, -1)^k} = \frac{(n, -1)^{n-k}}{(n-k, -1)^{n-k}}.$$

Für eine Facultät, deren Basis eine Summe zweier Zahlen ist, gilt derselbe binomische Satz wie für die Potenz. Denn:

$$D_x^p x^{\lambda+\mu} = (\lambda+\mu, -1)^p x^{\lambda+\mu-p} = D_x^p (x^\lambda x^\mu)$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \left[\binom{p}{k} D_x^k x^\lambda D_x^{p-k} x^\mu \right] = \sum_{k=0}^{p} \left[\binom{p}{k} (\lambda, -1)^k x^{\lambda-k} (\mu, -1)^{p-k} x^{\mu-p+k} \right],$$

53) $$(\lambda+\mu, -1)^p = \sum_{k=0}^{p} \left[\binom{p}{k} (\lambda, -1)^k (\mu, -1)^{p-k} \right].$$

Als Gesetz der **Exponenten** der Facultät ergiebt sich

$$D_x^{p+q} x^m = (m, -1)^{p+q} x^{m-p-q} = D_x^q (D_x^p x^m) = D_x^q ((m, -1)^p x^{m-p})$$
$$= (m, -1)^p (m-p, -1)^q x^{m-p-q},$$

54) $(m, -1)^{p+q} = (m, -1)^p (m-p, -1)^q = (m, -1)^q (m-q, -1)^p.$

Wir wollen nun unsere Formeln benutzen, um eine Reihe von Identitäten für die Facultät zu beweisen.

In Nr. 28) setzen wir $\psi(t) - t^{\alpha}$, $f(z) = z^m$; so kommt

$${}^xD_t^n\, x^{\alpha m} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k!}(m, -1)^k (x^{\alpha})^{m-k}\, {}^xD_t^n (t^{\alpha} - x^{\alpha})^k\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{m}{k} x^{\alpha m - \alpha k}\, {}^xD_t^n \sum_{p=0}^{k} \left(\binom{k}{p} t^{\alpha(k-p)} x^{\alpha p} (-1)^p\right)\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{m}{k} x^{\alpha m - \alpha k} \sum_{p=0}^{k} \left((-1)^p \binom{k}{p} (\alpha k - \alpha p, -1)^n x^{\alpha k - \alpha p - n} x^{\alpha p}\right)\right],$$

also, wenn wir auch auf der linken Seite die Differentiation ausführen, $= (\alpha m, -1)^n x^{\alpha m - n}$, und die gleichen Potenzen von x auf beiden Seiten weglassen:

55) $$(\alpha m, -1)^n = \sum_{k=1}^{n} \left\{\binom{m}{k} \sum_{p=0}^{k} \left[(-1)^p \binom{k}{p} (\alpha k - \alpha p, -1)^n\right]\right\};$$

z. B. $n = 2$:

$$\alpha m (\alpha m - 1)$$
$$= \binom{m}{1} \sum_{p=0}^{1} \left[(-1)^k \binom{1}{p} (\alpha - \alpha p, -1)^2\right] + \binom{m}{2} \sum_{p=0}^{2} \left[(-1)^p \binom{2}{p} (2\alpha - \alpha p, -1)^2\right]$$
$$= \binom{m}{1} (\alpha, -1)^2 + \binom{m}{2} ((2\alpha, -1)^2 - 2(\alpha, -1)^2)$$
$$= m\alpha(\alpha - 1) + m(m-1)(\alpha(2\alpha - 1) - \alpha(\alpha - 1))$$
$$= m\alpha[\alpha - 1 + (m-1)\alpha] = \alpha m(\alpha m - 1).$$

Benutzen wir für die speciellen α, $\alpha = 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -2$ die Formeln Nr. 37) bis 41), so erhalten wir Gleichungen von anderer Gestalt:

56 a) $$2(2m, -1)^n = \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n+1}{k} \left(\frac{n-k}{2} + m, -1\right)^n\right]$$

oder, wenn wir $\frac{n}{2} + m = p$ setzen,

56 β) $$\sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n+1}{k} \left(p - \frac{k}{2}, -1\right)^n\right] = 2(2p - n, -1)^n,$$

57) $$2^{2n} \left(\frac{m}{2}, -1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} (m+1, -1)^k (-n-1, -1)^{n-k} 2^k\right],$$

58) $$(-m, -1)^n = (-1)^n (m + n - 1, -1)^n.$$

In der That, stellt man die Facultäten als Factorenfolgen dar und multiplicirt auf der rechten Seite jedes Glied mit (—1), so sieht man, dass das rechts stehende Product nur die umgekehrte Anordnung des links stehenden ist:

$$59)\quad \left\{\begin{aligned} & 2^{2n}\left(-\frac{m}{2}, -1\right)^n \\ & = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left\{ \binom{n}{k} (m+2n-1, -1)^k (-n-1, -1)^{n-k} 2^k \right\}, \end{aligned}\right.$$

$$60)\quad \left\{\begin{aligned} & (-2n, -1)^m \\ & = (-1)^n 2^{2n} \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n+1}{k} \left(m+\frac{n}{2}-1, -1\right)^k (n+1, -1)^k 2^{-k} \right]. \end{aligned}\right.$$

Weitere Specialisirungen anzuführen unterlasse ich, da ja Schlömilch bereits für die hauptsächlichsten Fälle eine Menge von schönen Beispielen gegeben hat.

Kleinere Mittheilungen.

XIX. Zur Theorie der Potenzreste.

1. Wenn n und k beliebige ganze Zahlen bedeuten und ϱ ein positiver ganzer Exponent ist, dann besteht die Congruenz

$$1)\qquad [n+\varrho k]^{\binom{\varrho}{0}}.[n+(\varrho-2)k]^{\binom{\varrho}{2}}.[n+(\varrho-4)k]^{\binom{\varrho}{4}}\ldots$$
$$\equiv[n+(\varrho-1)k]^{\binom{\varrho}{1}}.[n+(\varrho-3)k]^{\binom{\varrho}{3}}.[n+(\varrho-5)k]^{\binom{\varrho}{5}}\ldots\quad (mod\, k^\varrho).$$

Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir vorerst an, derselbe sei für den Exponenten ϱ richtig. Alsdann lässt sich seine Giltigkeit auch leicht für den Exponenten $(\varrho+1)$ nachweisen.

Die Congruenz 1) liefert, wenn man in ihr $n+k$ für n einsetzt:

$$2)\quad [n+(\varrho+1)k]^{\binom{\varrho}{0}}.[n+(\varrho-1)k]^{\binom{\varrho}{2}}\ldots\equiv[n+\varrho k]^{\binom{\varrho}{1}}.[n+(\varrho-2)k]^{\binom{\varrho}{3}}\ldots$$
$$(mod\, k^\varrho).$$

Bezeichnet man

$$F(n)=[n+\varrho k]^{\binom{\varrho}{0}}\quad .[n+(\varrho-2)k]^{\binom{\varrho}{2}}.[n+(\varrho-4)k]^{\binom{\varrho}{4}}\ldots,$$
$$G(n)=[n+(\varrho-1)k]^{\binom{\varrho}{1}}.[n+(\varrho-3)k]^{\binom{\varrho}{3}}.[n+(\varrho-5)k]^{\binom{\varrho}{5}}\ldots,$$

so kann 1) in Form einer Gleichung geschrieben werden:

$$3)\qquad F(n)=G(n)+k^\varrho H(n).$$

Die Congruenz 2) lässt sich unter dieser Voraussetzung schreiben:

$$F(n+k)=G(n+k)+k^\varrho H(n+k)\quad \text{oder}$$
$$4)\qquad G(n+k)=F(n+k)-k^\varrho H(n+k).$$

Indem man 3) und 4) miteinander multiplicirt, ergiebt sich

$$F(n)\,G(n+k)$$
$$=G(n)\,F(n+k)+k^\varrho[H(n)\,F(n+k)-G(n)\,H(n+k)]-p^{2\varrho}\,H(n)\,H(n+k).$$

Nun ist bekanntlich die alternirende Function

$$H(n)\,F(n+k)-F(n)\,H(n+k)$$

durch $n+k-n=k$ theilbar, d. h. es ist

$$H(n)\,F(n+k)-F(n)\,H(n+k)\equiv 0\qquad (mod\, k).$$

Nach 3) hat man ausserdem

$$F(n)\equiv G(n)\qquad (mod\, k),$$

daher ist auch

$$H(n)\,F(n+k)-G(n)\,H(n+k)\equiv 0\qquad (mod\, k);$$

d. h. der Ausdruck $H(n)F(n+k) - G(n)H(n+k)$ ist durch k theilbar. Dies berücksichtigt, schreibt sich Gleichung 5) auch

$$F(n)G(n+k) = G(n)F(n+k) + k^{\varrho+1}.z,$$

wo z eine ganze Zahl bedeutet; oder auch

$$F(n)G(n+k) \equiv G(n)F(n+k) \qquad (mod\, k^{\varrho+1}).$$

Da aber

$$F(n)G(n+k) = [n+\varrho k]^{\binom{\varrho+1}{1}}.[n+(\varrho-2)k]^{\binom{\varrho+1}{3}}.[n+(\varrho-4)k]^{\binom{\varrho+1}{5}}\ldots,$$

$$G(n)F(n+k) = [n+(\varrho+1)k]^{\binom{\varrho+1}{0}}.[n+(\varrho-1)k]^{\binom{\varrho+1}{2}}.[n+(\varrho-3)k]^{\binom{\varrho+1}{4}}\ldots,$$

so hat man schliesslich

$$[n+(\varrho+1)k]^{\binom{\varrho+1}{0}}.[n+(\varrho-1)k]^{\binom{\varrho+1}{2}}\ldots \equiv [n+\varrho k]^{\binom{\varrho+1}{1}}.[n+(\varrho-2)k]^{\binom{\varrho+1}{3}}\ldots$$
$$(mod\, k^{\varrho+1}).$$

Die Congruenz 1) gilt sonach auch für den Exponenten $\varrho+1$, sobald sie für den Exponenten ϱ erwiesen ist. Nun ist sie offenbar für $\varrho=1$ und $\varrho=2$ erfüllt; denn für diese Fälle hat man bezw.

$$n+k\equiv n \quad (mod\, k), \qquad (n+2k)n \equiv (n+k)^2 \quad (mod\, k^2).$$

Daher ist 1) allgemein giltig für jeden positiven ganzen Exponenten ϱ.

2. Eine Aufeinanderfolge von Grössen

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots$$

soll eine arithmetische Restreihe erster Ordnung in Bezug auf den Modul k genannt werden, sobald die sämmtlichen Differenzen der aufeinander folgenden Grössen bezüglich des Moduls k einander congruent sind. Desgleichen möge eine Reihe

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots$$

eine arithmetische Restreihe m^{ter} Ordnung bezüglich des Moduls k heissen, wenn die Glieder der m^{ten} Differenzenreihe einander bezüglich des Moduls k congruent sind. Für das (allgemeine) x^{te} Glied r_x der Restreihe erhält man in letzterem Falle:

$$r_x \equiv r_0 + \binom{x-1}{1}(r_1-r_0) + \binom{x-1}{2}(r_2-2r_1+r_0) + \ldots$$
$$+\binom{x-1}{m}\left[r_m - \binom{m}{1}r_{m-1} + \binom{m}{2}r_{m-2} - + \ldots\right] \quad (mod\, k).$$

3. Es bedeute p eine Primzahl, a eine durch p nicht theilbare ganze Zahl und ϱ einen positiven ganzen Exponenten. Dann ist, dem Fermatschen Satze zufolge, für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ stets

$$a^{\lambda(p-1)}.(a^{p-1}-1)^{\varrho} \equiv 0 \qquad (mod\, p^{\varrho}),$$

woraus

$$a^{(\varrho+\lambda)(p-1)} - \binom{\varrho-1}{1}a^{(\varrho+\lambda-1)(p-1)} + \binom{\varrho-1}{2}a^{(\varrho+\lambda-2)(p-1)} - + \ldots$$
$$\equiv a^{(\varrho+\lambda-1)(p-1)} - \binom{\varrho-1}{1}a^{(\varrho+\lambda-2)(p-1)} + \binom{\varrho-1}{2}a^{(\varrho+\lambda-3)(p-1)} - + \ldots$$
$$(mod\, p^{\varrho}).$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die Reste der Potenzen $a^{i+x(p-1)}$ (bei $x=0$, $1, 2, \ldots$) nach dem Modul p^ϱ eine arithmetische Restreihe $(\varrho-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bilden, deren allgemeines Glied

$$a^{i+x(p-1)} \equiv a^i \left[1+\binom{x}{1}(a^{p-1}-1)+\binom{x}{2}(a^{p-1}-1)^2+\cdots \right.$$
$$\left. +\binom{x}{\varrho-1}(a^{p-1}-1)^{\varrho-1}\right] \qquad (mod\, p^\varrho).$$

Setzt man $a^{p-1}-1=cp$, so folgt

$$a^{i+x(p-1)} \equiv a^i\left[1+\binom{x}{1}cp+\binom{x}{2}c^2p^2+\cdots+\binom{x}{\varrho-1}c^{\varrho-1}p^{\varrho-1}\right] \qquad (mod\, p^\varrho).$$

Mit Hilfe dieser Formel lässt sich der Rest jeder beliebigen Potenz von a nach dem Modul p^ϱ berechnen bei Kenntniss der Reste von a, a^2, a^3, $\ldots$, a^{p-1} nach jenem Modul.

Unter p werde jetzt eine ungerade Primzahl verstanden, und a sei irgend eine primitive Wurzel von p^ϱ. Zufolge Art. 1 besteht die Congruenz

$$[n+\varrho p]^{\binom{\varrho}{0}}.[n+(\varrho-2)p]^{\binom{\varrho}{2}}\cdots \equiv [n+(\varrho-1)p]^{\binom{\varrho}{1}}.[n+(\varrho-3)p]^{\binom{\varrho}{3}}\ldots$$
$$(mod\, p^\varrho).$$

Nimmt man a zur Basis eines Indicessystems in Bezug auf den Modul p^ϱ, so leitet sich aus letzterer Congruenz unmittelbar die folgende her:

$$ind[n+\varrho p]-\binom{\varrho}{1}ind[n+(\varrho-1)p]+\binom{\varrho}{2}ind[n+(\varrho-2)p]-+\cdots\equiv 0$$
$$[mod(p-1)p^{\varrho-1}]$$

oder

$$ind[n+\varrho p]-\binom{\varrho-1}{1}ind[n+(\varrho-1)p]+-\cdots$$
$$\equiv ind[n+(\varrho-1)p]-\binom{\varrho-1}{1}ind[n+(\varrho-2)p]+-\cdots \qquad [mod(p-1)p^{\varrho-1}],$$

welche bestehen bleibt [vergl. Congruenz 1), Art. 1], wenn man in ihr $n+\lambda p$ ($\lambda=0, 1, 2, \ldots$) für n einsetzt. Es folgt daraus, dass die Indices

$$ind\, n,\ ind\, n+p,\ ind\, n+2p,\ ind\, n+3p, \ldots$$

in Bezug auf den Modul $(p-1)p^{\varrho-1}$ eine arithmetische Restreihe $(\varrho-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bilden. Man erhält sonach

$$ind[n+xp]$$
$$\equiv ind\, n+\binom{x}{1}[ind(n+p)-ind\, n]+\binom{x}{2}[ind(n+2p)-2\,ind(n+p)+ind\, n]+\ldots$$
$$+\binom{x}{\varrho-1}\left[ind[n+(\varrho-1)p]-\binom{\varrho-1}{1}ind[n+(\varrho-2)p]+-\cdots\right]$$
$$[mod(p-1)p^{\varrho-1}].$$

Dabei sind die Ausdrücke

$$[ind(n+p)-ind\, n],\quad [ind(n+2p)-2\,ind(n+p)+ind\, n],\quad \ldots$$
$$\left[ind[n+(\varrho-1)p]-\binom{\varrho-1}{1}ind[n+(\varrho-2)p]+-\cdots\right]$$

noch durch bezw. $(p-1)$, $p(p-1)$, $\ldots$, $p^{\varrho-2}(p-1)$ theilbar, so dass man letztere Congruenz auch in der Form schreiben kann

$$ind(n+xp) \equiv ind\,n + x c_1 (p-1) + \binom{x}{2} c_2 p (p-1) + \dots$$
$$+ \binom{x}{\varrho-1} c_{\varrho-1} p^{\varrho-2} (p-1) \quad [mod(p-1)p^{\varrho-1}].$$

Diese Beziehung lehrt $ind(n+xp)$ aus $ind n$, $ind(n+p)$, ..., $ind[n+(\varrho-1)p]$ berechnen.

Ist a eine primitive Wurzel von p^ϱ, dann ist auch $a+\lambda p$ $(\lambda = 0, 1, 2, \dots)$ eine solche. Es sei

$$a + \lambda p \equiv a^{z_\lambda} \qquad (mod p^\varrho),$$

so folgt

$$(a+\lambda p)^x \equiv a^{z_\lambda x} \qquad (mod p^\varrho).$$

Indem man zu den Indices in Bezug auf die Basis a und den Modul p^ϱ übergeht, ergeben sich der Reihe nach

$$\begin{array}{rcll} z_\varrho & \equiv & ind[a+\varrho p] & [mod(p-1)p^{\varrho-1}], \\ -\varrho z_{\varrho-1} & \equiv & -\varrho\, ind[a+(\varrho-1)p] & \quad " \\ +\binom{\varrho}{2} z_{\varrho-2} & \equiv & +\binom{\varrho}{2} ind[a+(\varrho-2)p] & \quad " \\ \dots & & \dots\dots\dots, & \end{array}$$

woraus durch Addition

$$z_\varrho - \binom{\varrho}{1} z_{\varrho-1} + \binom{\varrho}{2} z_{\varrho-2} - + \dots$$
$$\equiv ind[a+\varrho p] - \binom{\varrho}{1} ind[a+(\varrho-1)p] + - \dots \equiv 0 \quad [mod(p-1)p^{\varrho-1}].$$

Es bilden sonach (dem Früheren gemäss) die z_λ eine arithmetische Restreihe $(\varrho-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Man erhält also bei Kenntniss von z_0, z_1, z_2, ..., $z_{\varrho-1}$ die Indices der Basis $a+\lambda p$ aus denjenigen der Basis a, indem man die letzteren mit

$$z_\lambda \equiv z_0 + \binom{\lambda}{1}[z_1 - z_0] + \binom{\lambda}{2}[z_2 - 2z_1 + z_0] + \dots$$
$$+ \binom{\lambda}{\varrho-1}\left[z_{\varrho-1} - \binom{\varrho-1}{1} z_{\varrho-2} + \dots\right] \quad [mod(p-1)p^{\varrho-1}]$$

multiplicirt.

Mainz, im Februar 1887. Dr. J. Kraus.

XX. Zur geometrischen Interpretation binärer Formen, speciell solcher von der vierten Ordnung, im ternären Gebiete.

(Hierzu Taf. V Fig. 7.)

Für eine binäre Form vierten Grades a_x^4, oder in canonischer Form:

$$u \equiv x_1^4 + 6m\, x_1^2 x_2^2 + x_2^4,$$

liefert das Nullsetzen der Hesse'schen Form $(ab)^2 a_x^2 b_x^2 = 0$, oder für die canonische Form ausgerechnet:

$$m(x_1^4 + x_2^4) + (1-3m^2)\, x_1^2 x_2^2 = 0$$

vier Wurzelpunkte, über deren geometrischen Zusammenhang mit den vier Wurzeln der Form selbst die meisten Lehr und Handbücher der modernen Algebra die nöthige Erläuterung nur flüchtig geben.

Salmon-Fiedler (Algebra der linearen Transformationen) macht allerdings die Bemerkung (S. 271 der zweiten deutschen Ausgabe, Art. 216), dass obige Gleichung der Hesse'schen Form den sogenannten harmonischen Kegelschnitt vorstellt für zwei Kegelschnitte B und F, von welchen beiden der eine, B, gebildet wird vom Burnside-Kegelschnitt*

$$xz - y^2 = 0,$$

der andere dagegen, F, dargestellt wird von der in Gestalt einer Kegelschnittgleichung transformirten biquadratischen Form selbst. — Demnach wäre ergänzend zu sagen, dass die vier Wurzelpunkte der Hesse'schen Form die Schnittpunkte sind jenes harmonischen Kegelschnittes mit dem zur Interpretation benützten Burnside-Kegelschnitte; aber in die Entstehung der geometrischen Configuration, durch welche die zweimal vier Punkte der Original- und der Hesse'schen Form verbunden sind, lässt diese Erklärung eben noch nicht deutlich hineinsehen.

Wir gedenken in den folgenden Zeilen die Herstellung jener Wurzelpunkte der Hesse'schen Form auf möglichst directem, geometrischen Wege zu versuchen — der uns schliesslich, wenn wir wollen, wieder mit dem soeben genannten harmonischen Kegelschnitt Zusammenhang gewinnen lässt.

1. Wir fragen uns vor Allem: Was ist die geometrische Bedeutung jener Punkte x, welche durch Nullsetzen der zweiten Polaren von z in Bezug auf eine Form vierten Grades definirt werden, für die Annahme eines willkürlichen Punktes z; welche also als Wurzeln der folgenden quadratischen Gleichung bestimmt werden:

$$z_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2 z_1 z_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + z_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0$$

oder kürzer

$$z_1^2 u_{11} + 2 z_1 z_2 u_{12} + z_2^2 u_{22} = 0;$$

symbolisch

$$a_x^2 a_z^2 = 0.$$

Wir geben zugleich das Resultat dieser Operationen, angewandt auf die canonische Form, an:

$$\begin{cases} A \ldots \;\; z_1^2(x_1^2 + m x_2^2) + 4m\, z_1 z_2\, x_1 x_2 + z_2^2(m x_1^2 + x_2^2) = 0, \\ A' \ldots \;\; x_1^2(z_1^2 + m z_2^2) + 4m\, x_1 x_2\, z_1 z_2 + x_1^2(m z_1^2 + z_2^2) = 0. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen ist jedem Punkte z ein Punktepaar x in ganz bestimmter Weise zugeordnet. Da aber die Grössen (z_1^2), $(z_1 z_2)$, (z_2^2), geschrieben als x', y', z', offenbar die Relation erfüllen

* Wir lassen im Folgenden den Zahlenfactor 4 weg, mit welchem behaftet gewöhnlich der Burnside-Kegelschnitt in der Form geschrieben wird: $4xz - y^2 = 0$. Es ist das für die Rechnung und für alle weiteren Schlüsse ganz unwesentlich.

$$x'z' = y'^2,$$

während zwischen den Grössen (x_1^2), $(x_1 x_2)$, (x_2^2), geschrieben als x, y, z, dieselbe Beziehung herrscht, so sieht man, dass die aus den Werthen von $z_1 z_2$ und $x_1 x_2$ berechneten Zahlen $x'y'z'$, resp. xyz interpretirt werden können als homogene Coordinaten von Punkten, die sich auf dem festen Burnside-Kegelschnitte

$$B \dots \quad xz - y^2 = 0$$

vorfinden. Wir gedenken also zu untersuchen, wie ein beliebig vorgegebenes z auf diesem Kegelschnitte zwei Punkte x auf demselben Kegelschnitte definirt (als Wurzeln der zweiten Polaren, deren Gleichungen A, A') — wenn ausserdem noch die vier Wurzelpunkte der biquadratischen Form bereits auf ihm markirt sind.

Was nun diese letzteren Wurzelpunkte, die der Originalform selbst, anlangt, so sind sie aus vier Zahlenpaaren (x_1, x_2) entstanden, welche so beschaffen sind, dass sie die Gleichung

$$x_1^4 + 6m\, x_1^2 x_2^2 + x_2^4 = 0$$

erfüllen. Ersetzt man nochmals (x_1^2), $(x_1 x_2)$, (x_2^2) durch die neuen Symbole vom ersten Grade: x, y, z, so ist damit auch gesagt, dass man 4 mal 3 Zahlen (x, y, z) angeben kann, für welche

$$M \dots \quad x^2 + 6my^2 + z^2 = 0.$$

Diese Zahlen x, y, z, resp. die durch sie als homogene Coordinaten markirten Punkte können wiederum, als der Relation

$$B \dots \quad xz - y^2 = 0$$

genügend, aufgesucht werden auf dem Burnside-Kegelschnitt. Demnach werden die Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$x_1^4 + 6m\, x_1^2 x_2^2 + x_2^n = 0$$

im ternären Gebiet interpretirt als Schnittpunkte obigen Kegelschnittes M mit dem festen Kegelschnitte B.

Aber da eben die Relation $xz - y^2 = 0$ erfüllt ist, können wir auch das Glied $6my^2$ auflösen in $(4m\,y^2 + 2m\,xz)$ und damit M neuerdings anschreiben als

$$F \dots \quad x^2 + 2m\,xz + 4m\,y^2 + z^2 = 0.$$

Mit anderen Worten: Dieser letztere Kegelschnitt F schneidet den Burnside-Kegelschnitt $xz - y^2 = 0$ in denselben Punkten, wie der ursprünglich aufgestellte M; F geht durch die Schnittpunkte des Kegelschnittes B mit M, weil die Gleichung von F geschrieben werden kann

$$F \equiv M + 2mB = 0.$$

Nun kann man zu einem auf dem Burnside-Kegelschnitt gelegenen Punkte z, der die Coordinaten $x'y'z'$ hat, die Polare in Bezug auf F suchen. Dieselbe hat zur Gleichung

$$x'(x + mz) + 4m\,y'y + z'(mx + z) = 0.$$

Dies ist aber genau die Gleichung A, A', wenn in derselben unsere fortwährend gebrauchten Substitutionen für (x_1^2), $(x_1 x_2)$, (x_2^2); (z_1^2), $(z_1 z_2)$, (z_2^2)

gemacht werden. Wir wiederholen: die Werthsysteme $z_1 z_2$, $x_1 x_2$, wie sie durch die Gleichung A einander zugeordnet werden, liefern vermittelst Burnside's Transformation Punkte $z(x'y'z')$ und $x(xyz)$ auf dem Burnside-Kegelschnitte, wobei die zu z nach den Gleichungen A zugeordneten Punkte x erhalten werden als Schnittpunkte des festen Kegelschnittes B oder $xz - y^2 = 0$, mit der für den Punkt z in Bezug auf den Kegelschnitt der Originalform F gebildeten Polaren.

Vergl. Fig. 7. In derselben ist der Kegelschnitt, welcher die Form selbst repräsentirt, mit F bezeichnet; B sei der Burnside-Kegelschnitt. Ein Punkt z war vorgegeben [durch das beliebig angegebene Werthepaar $z_1 z_2$ definirt, von welchem ausgehend ein Punkt $x' = (z_1^2)$, $y' = (z_1 z_2)$, $z' = (z_2^2)$ des Burnside-Kegelschnittes gewonnen wurde]. Jene zwei Werthepaare $(x_1 x_2)$, wie sie eigentlich durch die Gleichungen A dem Werthsystem $z_1 z_2$ algebraisch zugewiesen sind, geben Veranlassung zu den Substitutionen $x = (x_1^2)$, $y = (x_1 x_2)$, $z = (x_2^2)$; und die so erhaltenen Punkte xyz finden sich eben wiederum auf dem Burnside-Kegelschnitt. Sie sind dort sichtbar als Schnittpunkte der für den Punkt z in Bezug auf F gebildeten Polaren mit dem festen Burnside-Kegelschnitt.

Somit wäre eine Interpretation der zweiten Polaren einer biquadratischen Form gewonnen, und zwar im ternären Gebiete. — Dass die Beziehung zwischen den Punkten x und z eine reciproke ist, zeigte bereits die symbolische Gleichungsform $a_x^2 a_z^2 = 0$; dasselbe kann aber auch nunmehr als geometrisch evident angesehen werden, denn wenn die Polare von z in Bezug auf F durch x geht, so geht auch umgekehrt die Polare von x durch z.

2. Es sei nun für einen bestimmten Punkt z im binären Gebiete

$$H \equiv \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

geschrieben gedacht in den z. Damit wäre auch gesagt, dass das zugehörige Punktepaar x diesmal einen einzigen Punkt liefert, denn obige Determinante ist die Discriminante der für x quadratischen Gleichung

$$x_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} + 2 x_1 x_2 \frac{d^2 u}{\partial z_1 \partial z_2} + x_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z_2^2} = 0.$$

Mit dieser Bemerkung wäre auch die geometrische Interpretation in unserer Figur, der Wurzelpunkt der Hesse'schen Form ermöglicht. Sie sind so gelegen, dass die für sie in Bezug auf F genommene Polare den Burnside-Kegelschnitt B berührt; ihre Anzahl bestimmt sich somit auf vier — wie es auch der Grad der Hesse'schen Form mit sich bringen muss —; denn verschafft man sich zu sämmtlichen Tangenten an B den jeweiligen Pol in Bezug auf F, so wird es an vier Stellen vorkommen, dass die durch jene Pole dargestellte Curve zweiter Ordnung die Curve B schneidet.

Demnach geben wir als geometrische Definition der Wurzelpunkte z der Hesse'schen Form einer Form vierten Grades im ternären Gebiete, und gewonnen mit Hilfe des Burnside-Kegelschnittes die folgende: „sie sind jene Punkte z, deren in Bezug auf den Form-Kegelschnitt F gebildete Polaren den Burnside-Kegelschnitt B berühren; oder: sie sind die vier Schnittpunkte jenes Kegelschnittes mit B, der gebildet wird von den Polen sämmtlicher Tangenten von B, bestimmt in Bezug auf F."

Wir werden nun auf das Einfachste, wie schon früher in Aussicht gestellt, einen Zusammenhang mit dem sogenannten harmonischen Kegelschnitt* für die Kegelschnitte B und F erkennen.

Es sei in der Figur P ein Punkt, gelegen auf B, dessen in Bezug auf F gebildete Polare den Kegelschnitt B berührt. Man kann fragen, wie die Geraden durch P gelegen sind (es giebt deren im Allgemeinen zwei), für welche die auf ihnen gelegenen vier Schnittpunkte mit B und F vier harmonische Punkte sind. Offenbar giebt es durch P nur eine Gerade von solcher Eigenschaft, nämlich die vom Punkte P nach dem Berührungspunkte Q geführte Gerade. Wie dieselbe in der That vier harmonische Punkte $QRPS$ aufweist als Schnittpunkte mit den beiden Kegelschnitten B und F, ist der Figur zu entnehmen, in welcher nach der Voraussetzung P der Pol von QT. Ebenso ist aber auch der Figur zu entnehmen, dass nur eine solche Gerade durch P möglich ist. Denn jede Gerade durch P würde die Polare von P in Bezug auf F, d. h. die Gerade QT, in einem Punkte Q' so treffen, dass Q' mit P die zwei Schnittpunkte der Geraden mit F harmonisch trennen würde; es giebt aber nur einen solchen Punkt Q', dass er zugleich auf der Geraden QT und auf dem Kegelschnitte B liegen könnte, das ist eben der schon benützte Berührpunkt Q. Also geht durch P nur eine Gerade von der Eigenschaft, dass sie B und F in vier harmonischen Punkten trifft. Demnach ist P ein Punkt der Enveloppe jener Geraden, welche die beiden Kegelschnitte B und F in vier harmonischen Punkten treffen; d. h. P ist in der That ein Punkt des ebengenannten harmonischen Kegelschnittes H der Kegelschnitte B und F.

So sind wir in der That ohne jede Rechnung zu dem in den ersten Worten der Einleitung erwähnten Resultat gelangt, dass der harmonische Kegelschnitt H in Bezug auf B und F den Burnside-Kegelschnitt in den vier Punkten trifft, welche die Wurzelpunkte der Hesse'schen Form kennzeichnen. Aber es ist bemerkenswerth, dass nach unserer Ableitung der Wurzelpunkte der Hesse'schen Form das Heranziehen jenes harmonischen Kegelschnittes ganz entbehrlich wäre.

Vielleicht mag der hier eingeschlagene Weg zur Ableitung dieser Beziehungen, abgesehen von seiner Einfachheit, auch deswegen Beachtung ver-

* Vergl. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte, Art. 354.

dienen, weil als Nebenresultat die geometrische Deutung des zweiten Polarsystems der Formen vierter Ordnung sich ungezwungen ergiebt.

München, Winter 1886. Dr. Fritz Hofmann.

XXI. Ueber den Rest der Reihe für *arcsin x*.

Wenn man den Mac-Laurin'schen Satz zur Entwickelung von $f(x) = \arcsin x$ benutzen will, so kann man zwar aus $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ und mittels der Recursionsformel

$$f^{(k+2)}(x) = \frac{(2k+1)\,x\,f^{(k+1)}(x) + k^2 f^{(k)}(x)}{1-x^2}$$

die Coefficienten der Reihe leicht finden, dagegen verursacht die Discussion des Restes einige Mühe, weil der independente Ausdruck von $f^{(n+1)}(x)$ etwas complicirt ist. Die Sache lässt sich aber auf folgende Weise ohne besondere Weitläufigkeiten erledigen.

Bekanntlich ist

$$f^{(n+1)}(x) = D^n\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n(1-x)^n\sqrt{1-x^2}}\left\{C_0 - C_1\frac{1-x}{1+x} + C_2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \cdots + (-1)^n C_n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right\}$$

und darin

$$C_0 = 1,\quad C_1 = \frac{1(n)_1}{2n-1},\quad C_2 = \frac{1.3(n)_2}{(2n-1)(2n-3)},$$

$$C_3 = \frac{1.3.5(n)_3}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)},\ \ldots$$

Diese Coefficienten besitzen (wie die Binomialcoefficienten) die Eigenschaft

$$C_0 = C_n,\quad C_1 = C_{n-1},\quad C_2 = C_{n-2},\ \ldots,$$

sie bilden demnach eine aus zwei symmetrischen Hälften bestehende Reihe. Anfangs ist

$$1 = C_0 > C_1 > C_2 > \ldots,$$

die Coefficienten nehmen also bis zur Mitte der Reihe ab, erreichen dort ein positives Minimum, das bei ungeraden n zweimal vorkommt, und wachsen dann bis $C_n = 1$; mit Ausnahme von C_0 und C_n sind daher alle C positive echte Brüche. Hieraus erhellt, dass die Reihe

$$C_0 - C_1\frac{1-x}{1+x} + C_2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \cdots + (-1)^n C_n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

von $x = 0$ bis $x = 1$ eine endliche Summe $\varphi(x, n)$ besitzt, die selbst im Falle $n = \infty$ endlich bleibt [nämlich $\varphi(x, \infty) = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+x)}$]; es ist also

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n(1-x)^n\sqrt{1-x^2}}\,\varphi(x, n).$$

Für den Rest, der in Mac Laurin's Reihe auf das mit x^n versehene Glied folgt, gilt nun die von mir angegebene Formel

$$R_{n+1}=\frac{(1-\vartheta)^{n-p+1}x^{n+1}}{p.1.2.3\ldots n}f^{(n+1)}(\vartheta x),$$

worin ϑ einen positiven echten Bruch und p eine willkürliche positive Grösse bezeichnet; man hat demnach im vorliegenden Falle

$$R_{n+1}=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\cdot\frac{(1-\vartheta)^{n-p+1}x^{n+1}}{p(1-\vartheta x)^{n+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\varphi(\vartheta x,n)}{\sqrt{1+\vartheta x}},$$

wobei man gleich bemerkt, dass $p=\frac{1}{2}$ die zweckmässigste Wahl von p ist, wodurch entsteht

$$R_{n+1}=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\left(\frac{x-\vartheta x}{1-\vartheta x}\right)^{n+\frac{1}{2}}\cdot\frac{2\sqrt{x}.\varphi(\vartheta x,n)}{\sqrt{1+\vartheta x}}.$$

Aus dem bekannten Satze, dass bei unendlich wachsenden n und unter der Bedingung $\alpha>\beta>0$

$$Lim\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}=0$$

ist, folgt für $\alpha=1,\ \beta=\frac{1}{2}$

$$Lim\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}=0,$$

und da alle übrigen in R_{n+1} vorkommenden Factoren endliche Grössen bleiben, so lange x das Intervall von 0 bis 1 nicht überschreitet, so ergiebt sich unter dieser Voraussetzung $Lim\,R_{n+1}=0$.

Schlömilch.

XXII. Bestimmung des Ortes und der Helligkeit des gebrochenen Bildes eines Punktes, wenn die brechende Fläche eine Ebene ist.

(Hierzu Taf. V Fig. 8 u. 9.)

In Lehrbüchern findet man häufig das gebrochene Bild einer Münze, welche unter Wasser erblickt wird, so dargestellt, als ob dasselbe ausser der senkrechten Erhebung eine seitliche Verrückung vom Auge des Beobachters weg erfahren hätte, während in Wirklichkeit das Bild nach dem Auge des Beobachters hin gerückt wird. Es soll daher im Folgenden eine einfache Bestimmung der Ortsverschiebung gegeben werden, welche das gebrochene Bild eines Punktes erleidet, wenn die brechende Fläche eine Ebene ist.

Sei also (Fig. 8) A ein leuchtender Punkt, der sich in einem stärker brechenden Medium, z. B. Wasser, befindet, $AG=h$ seine Entfernung von der brechenden Ebene NN, seien ferner AB und AC zwei benachbarte Strahlen mit den Einfallswinkeln i und $i+di$, seien ferner FB und FC die Richtungen der zugehörigen gebrochenen Strahlen, also F der Durchschnitt der rückwärts verlängerten, so lässt sich leicht beweisen, dass der zu AB gehörige gebrochene Strahl von allen benachbarten Strahlen derselben Ebene in demselben Punkte F geschnitten wird. Es ist nämlich

$GB = h\,tg\,i$ und da BC den Zuwachs von GB darstellt, wenn i in $i+di$ übergeht, so erhält man, wenn kleine Grössen zweiter Ordnung vernachlässigt werden,

$$1)\qquad BC = \frac{h}{cos^2 i}\,di.$$

Man erhält ferner aus dem Dreieck BCF

$$\frac{BF}{BC} = \frac{sin(90 - \overline{r+dr})}{sin\,dr} = \frac{cos(r+dr)}{dr},$$

$$2)\qquad BF = \frac{h(cos\,r - sin\,r\,dr)}{cos^2 i\,.\,dr}\,di.$$

Bezeichnet man ferner den Brechungsexponenten für den Uebergang des Lichtes aus der Luft in das stärker brechende Medium mit n, so ist

$$sin\,r = n\,sin\,i, \quad dr = \frac{n\,cos\,i\,di}{dr}.$$

Eliminirt man mit Hilfe dieser Gleichungen den Buchstaben r aus 2), so wird

$$BF = \frac{h(1 - n^2 sin^2 i - n^2 sin\,i\,cos\,i\,di)}{n\,cos^3 i}.$$

Vernachlässigen wir im Zähler das kleine Glied von der Ordnung di, so wird BF für den Durchschnitt aller Strahlen, welche dem Intervall von $i-di$ bis $i+di$ entsprechen, gleich gross. Es wird also

$$3)\qquad BF = \frac{h(1 - n^2 sin^2 i)}{n\,cos^3 i}.$$

Ein Auge, welches diesen kleinen Strahlenbüschel auffängt, wird also das gebrochene Bild des Punktes A in F erblicken.

Es soll nun untersucht werden, wie weit das Bild des Punktes A durch die Brechung gehoben wird. Bezeichnet man das Loth FH mit h', so findet man $h' = BF.cos\,r$ und daraus

$$4)\qquad \frac{h'}{h} = \frac{(1 - n^2 sin^2 i)^{3/2}}{n\,cos^3 i} = \frac{\{1 - (n^2 - 1)\,tg^2 i\}^{3/2}}{n}.$$

Lassen wir zunächst i constant und betrachten $\frac{h'}{h}$ nur als Function von n, so ergiebt die Differentiation des ersten Ausdruckes nach n

$$\frac{\partial\left(\frac{h'}{h}\right)}{\partial n} = -\frac{\sqrt{1 - n^2 sin^2 i}\,(2n^2 sin^2 i + 1)}{n^2 cos^3 i}.$$

Da das Zeichen der Quadratwurzel, wie aus 4) hervorgeht, nur positiv genommen werden kann, so ist obiger Ausdruck stets negativ, d. h. $\frac{h'}{h}$ ist eine mit wachsendem n abnehmende Function. Da nun für $n = 1$ $\frac{h'}{h} = 1$ wird, so muss für alle Werthe von n, welche > 1 sind, $\frac{h'}{h} < 1$ sein.

Daraus ergiebt sich der Satz, dass in jeder Richtung das gebrochene Bild eines Punktes in einem stärker brechenden Mittel gehoben erscheint und zwar um so mehr, je stärker brechend das Mittel ist.

Setzt man ferner $n = const.$ und betrachtet $\frac{h'}{h}$ nur als Function von i, so lässt der zweite Ausdruck in 4) erkennen, dass $F(i)$ mit wachsendem i stetig abnimmt.

Für $i = 0$ wird $\frac{h'}{h} = \frac{1}{n}$ und für den Grenzwerth von i, d. h. für $n \sin i = 1$, wird $\frac{h'}{h} = 0$. Daraus ergiebt sich der Satz: Das Bild eines Gegenstandes in einem stärker brechenden Mittel erscheint um so höher, in je schieferer Richtung es erblickt wird, bis es im Grenzfalle, wo der Blick parallel der brechenden Ebene gerichtet ist, in der Grenzfläche erscheint. Befindet sich das Auge senkrecht über dem Gegenstande, so erblickt es denselben in $\frac{1}{n}$tel der Höhe, also beim Wasser z. B. in drei Viertel der Höhe.

Es soll nun noch die seitliche Verschiebung des Bildes, also die Länge GH gemessen werden. Da $GB = h\, tg\, i$ und $HB = BF \sin r$, so findet man nach einigen Umformungen die seitliche Verschiebung

$$5) \qquad GH = h(n^2 - 1)\, tg^3 i.$$

Da dieser Ausdruck für die gemachte Voraussetzung $n > 1$ stets positiv ist, so ergiebt sich hieraus, dass das gebrochene Bild eines Punktes in seitlicher Richtung stets nach dem blickenden Auge zu gerückt erscheint. Die Grösse dieser seitlichen Verschiebung ist nach 5) zunächst proportional der Tiefe des leuchtenden Punktes unter der brechenden Ebene, sie ist ferner bei derselben Blickrichtung um so grösser, je grösser n ist; endlich wächst sie bei demselben brechenden Mittel mit wachsendem i. Bei senkrechtem Blick auf die brechende Fläche ist sie gleich Null. Für den Grenzwerth von i erhält man als Grösse der seitlichen Verschiebung den Werth $\frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}}$. In diesem Falle wird BF in Gleichung 3) gleich Null, d. h. das Bild erscheint da, wo die Grenzstrahlen die brechende Ebene treffen.

Um den geometrischen Ort des Punktes F, wo das Bild des Punktes A erscheint, in rechtwinkligen Coordinaten darzustellen, nehmen wir den Fusspunkt G des von A gefällten Lothes (Fig. 8) als Coordinatenanfangspunkt, die Richtung GA als positive X-Axe, GB als positive Y-Axe. Dann sind die Coordinaten des Punktes F gleich $x = FH$ und $y = GH$ und man hat also aus 4) und 5)

$$6) \qquad x = \frac{h}{n} \{1 - (n^2 - 1)\, tg^2 i\}^{3/2}, \quad y = h(n^2 - 1)\, tg^3 i.$$

Die Elimination von $tg\, i$ aus diesen Gleichungen ergiebt

$$7) \qquad \left(\frac{nx}{h}\right)^{2/3} + \left(\frac{\sqrt{n^2 - 1}}{h} \cdot y\right)^{2/3} = 1.$$

Diese Gleichung stellt bekanntlich die Evolute einer Ellipse dar, deren Axen mit den gewählten Coordinatenaxen zusammenfallen und deren Halbaxen a und b gleich nh und $h\sqrt{n^2-1}$ sind. Da $\frac{b}{a}=\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$, also stets <1 ist, so ist nh die grosse Halbaxe dieser Ellipse; da ferner die lineare Excentricität derselben $=h$ ist, so ist der leuchtende Punkt ein Brennpunkt der Ellipse, deren Evolute die Bildlinie ist. Diese Evolute kehrt der X-Axe die convexe Seite zu und wird von den Coordinatenaxen in den Punkten berührt, welche von dem Coordinatenanfangspunkte die Entfernungen $\frac{h}{n}$ und $\frac{h}{\sqrt{n^2-1}}$ haben.

Es lässt sich leicht die interessante Bemerkung machen, dass für jeden Punkt der Bildlinie die Blickrichtung, in welcher dieser Punkt gesehen wird, mit der Tangente in diesem Punkte zusammenfällt. Denn aus 7) findet man

$$8)\qquad \frac{dy}{dx}=-\sqrt[3]{\frac{n^2}{n^2-1}}\cdot\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$$

Das ist die Tangente des Winkels, welchen die Berührungslinie mit der Richtung GA einschliesst. Nennt man daher den Winkel, den dieselbe Linie mit der Richtung AG einschliesst, α, so erhält man

$$tg\,\alpha=\sqrt[3]{\frac{n^2}{n^2-1}}\cdot\sqrt[3]{\frac{y}{x}}=\frac{n\,tg\,i}{\sqrt{1-(n^2-1)\,tg^2 i}}=\frac{n\,sin\,i}{\sqrt{1-n^2\,sin^2 i}}=tg\,r,$$

d. h. es ist $\alpha=r$; r ist aber der Winkel, welchen die Blickrichtung, in welcher der betrachtete Punkt gesehen wird, mit der Richtung AG einschliesst, womit die obige Behauptung bewiesen ist. Die Tangenten der Evolute sind aber Normalen der zugehörigen Ellipse. Denkt man sich die Evolute mit ihrer zugehörigen Ellipse um die X-Axe rotirend, so entsteht ein Rotationsellipsoid, welches einen Brennpunkt im leuchtenden Punkte A hat. Dieses Rotationsellipsoid hat nach dem Vorhergehenden die Bedeutung, dass das Auge des Beobachters überall, wenn es das Bild des Punktes A sehen will, seinen Blick senkrecht gegen die Fläche des Ellipsoids richten muss.

Es soll nun noch untersucht werden, wie die Helligkeit des gebrochenen Bildes von der Blickrichtung abhängig ist. Die Strahlen zwischen AB und AC (Fig. 9) sollen dem Intervall $i-di$ bis $i+di$ entsprechen; nach der Brechung schneiden sich dieselben in F. Lässt man diese Figur um das von A auf die brechende Ebene gefällte Loth rotiren, so erkennt man, dass die zwischen den Kegelmänteln, welche den halben Oeffnungen $i-di$ und $i+di$ entsprechen, befindlichen Lichtstrahlen nach der Brechung sich in dem Kreise schneiden, welchen der Punkt F um das Loth AM beschreibt. Betrachtet man das von A ausgehende Strahlenbüschel, welches durch eine Rotation $d\varphi$ entsteht, so ist dasselbe von der Form einer Pyramide mit einer rechtwinkligen Grundfläche, welche durch $BCDE$ dargestellt sein mag. Nach der Brechung befinden sich die rückwärts verlängerten Strahlen in dem prismatischen Raume $BCDEFK$. Es ist aber $FK = h(n^2-1)tg^3 i\, d\varphi$, also von der Ordnung $d\varphi$, und wir können daher für dieses Strahlenbüschel, welches in das Auge tritt, annähernd annehmen, dass alle Strahlen von demselben Punkte kommen. In beiden Büscheln gehen durch die Fläche $BCDE$ gleichviel Strahlen. Um nun die Dichtigkeit der Strahlen in beiden Büscheln zu vergleichen, setzen wir die Dichtigkeit in der Fläche $BCDE = 1$. Es ist aber in dem Büschel A ein zu AB in der Entfernung 1 von der Spitze senkrecht gelegter ebener Schnitt von der Grösse $\frac{BCDE.\cos i}{AB^2}$ $= \frac{BCDE.\cos^3 i}{h^2}$. Also, da die Dichtigkeiten sich umgekehrt wie die Flächen verhalten, erhalte ich, wenn mit δ die Dichtigkeit des Büschels A bezeichnet wird,

$$\delta = \frac{h^2}{\cos^3 i}.$$

Ebenso erhalte ich für das gebrochene Büschel den Durchschnitt senkrecht zu $FB = BCDE.\cos r$ und in der Entfernung 1 von der Kante FK $= BCDE.\cos r / FB^2 = BCDE.n^2 \cos^6 i / h^2 \cos^3 r$. Bezeichnet man daher die Dichtigkeit dieses Büschels mit δ', so erhält man

$$\delta' = \frac{h^2 \cos^3 r}{n^2 \cos^6 i}.$$

Daraus ergiebt sich endlich

$$9) \qquad \frac{\delta'}{\delta} = \frac{\cos^3 r}{n^2 \cos^3 i} = \frac{(1 - n^2 \sin^2 i)^{3/2}}{n^2 \cos^3 i}.$$

Dieser Quotient stellt das Verhältniss der Helligkeit des gebrochenen Bildes und des leuchtenden Punktes dar, wenn von der Absorption im brechenden Mittel und von dem Umstande abgesehen wird, dass nur ein Theil des von A kommenden Lichtbüschels aus der brechenden Fläche austritt. Für den Grenzfall erhalte ich $\frac{\delta'}{\delta} = 0$, für senkrechten Blick aber $\frac{1}{n^2}$, also für Wasser $\frac{9}{16}$. Da im letztern Falle nur ein sehr kleiner Theil reflectirt wird, so stellen die Werthe 0 und $\frac{1}{n^2}$ annähernd, der erste sogar genau, die Grenzwerthe der Helligkeit dar.

W. Saltzmann,
Oberl. am Gymn. in Neu-Ruppin.

XXIII. Beweis einiger Lehrsätze von Jakob Steiner.

Auf S. 667 der Gesammelten Werke Jakob Steiner's (Crelle, Bd. 55) finden sich unter II die Sätze 1 bis 5 ohne Beweise mitgetheilt. Was Steiner in Nr. 5 von dem Kegelschnitt und den Kreisen behauptet, behalte ich mir vor, bei einer geeigneteren Gelegenheit zu beweisen, weil dazu gewisse besondere Betrachtungen nöthig sind, was Steiner selbst auch andeutet. Der Rest von Nr. 5 ist sehr bekannt. Die Nummern 3 und 4 sind nur Folgerungen aus 2, daher will ich hier nur die Nummern 1 und 2 beweisen, denn sie enthalten die Hauptsachen der ganzen Abhandlung II.

Die Sätze lauten folgendermassen:

„1. Sind in gleicher Ebene irgend zwei Curven, die eine vom p^{ten}, die andere vom q^{ten} Grade, in fester Lage gegeben, und bewegen sich die Endpunkte einer constanten Strecke ab einer Geraden S beziehlich in denselben, so umhüllt die Gerade eine Curve $4pq^{\text{ter}}$ Classe, welche die im Unendlichen liegende Gerade G_∞ zur $2pq$-fachen Tangente hat.

2. Bewegen sich die Endpunkte der constanten Strecke ab in einer festen Curve n^{ten} Grades C^n, so umhüllt die Gerade S eine Curve $2n(n-1)^{\text{ter}}$ Classe, welche die gegebene Curve in jedem ihrer im Unendlichen liegenden n Punkte vierpunktig berührt, und welche die Gerade G_∞ zur $n(n-1)$-fachen Tangente hat. Demzufolge giebt es in der gegebenen Curve nach jeder bestimmten Richtung nur je $n(n-1)$ Sehnen von irgend einer gegebenen Länge ab. Die Mitten solcher $n(n-1)$ gleichen und parallelen Sehnen liegen allemal in irgend einer Curve $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, und in gleichen Curven liegen auch die nach gleicher Seite hin liegenden Endpunkte der Sehnen.“

Beweis.

1. Ich bezeichne die beiden festen Curven durch C^p und C^q. Um zu erfahren, von welcher Classe die Enveloppe der Geraden S ist, bestimme ich die Anzahl ihrer Tangenten, welche durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ der Ebene gehen. Indem ich nun den Punkt $\mathfrak{P}$ in einer beliebigen Lage festhalte, werde ich eine der beiden Curven, z. B. C^p transformiren, und zwar folgendermassen: Zunächst beschreibe ich um jeden Punkt $\mathfrak{c}$ der Curve C^p als Mittelpunkt einen Kreis $\mathfrak{C}$ vom Radius ab. Nun trifft jeder Strahl s des Punktes $\mathfrak{P}$ die Curve C^p in p Punkten $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_p$, welche die Mittelpunkte von ebensovielen Kreisen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_p$ sind. Die Schnittpunktpaare dieser Kreise mit dem Strahl s mögen $\gamma_1, \gamma'_1; \gamma_2, \gamma'_2; \ldots; \gamma_p, \gamma'_p$ heissen. Dann behaupte ich, dass, während s sich um $\mathfrak{P}$ dreht, die Schnittpunkte γ eine Curve C^{4p} von der Ordnung $4p$ durchlaufen.

In der That, auf jedem Strahle s liegen $2p$ Punkte γ, und ausserdem ist $\mathfrak{P}$ ein $2p$-facher Punkt des Ortes der Punkte γ. Denn beschreibe ich um $\mathfrak{P}$ als Mittelpunkt einen Kreis vom Radius ab, so trifft derselbe die Curve C^p in $2p$ Punkten $\mathfrak{c}$, welche die Mittelpunkte von $2p$ Kreisen $\mathfrak{C}$ sind. Die Strahlen s, welche nach diesen Mittelpunkten laufen, treffen die $2p$ Kreise $\mathfrak{C}$ unter Anderem sämmtlich in $\mathfrak{P}$, also ist dies ein $2p$-facher Punkt der erhaltenen Curve, welche somit von der Ordnung $4p$ ist.

Man kann aber auch leicht nachweisen, dass eine beliebige Gerade g den Ort der Punkte γ in $4p$ Punkten schneidet. Ich denke mir nämlich die Gerade g in derselben Weise transformirt wie die Curve C^p. Dann erhalte ich bekanntlich die Conchoide des Nikomedes, welche von der vierten Ordnung ist. Diese Conchoide trifft die Curve C^p in $4p$ Punkten $\mathfrak{c}$, deren Verbindungslinien mit $\mathfrak{P}$ die Gerade g offenbar in den $4p$ Punkten schneiden, welche sie mit dem Orte der Punkte γ gemein hat. Also ist dieser Ort eine Curve $4p^{\text{ter}}$ Ordnung C^{4p}.

[Anmerkung. Es ist leicht, die Gleichung der Curve C^{4p} anzugeben. Nimmt man $\mathfrak{P}$ zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so möge

$$1)\qquad f_p(x, y) = 0$$

die Gleichung der Curve C^p sein. Bezeichne ich jetzt die constante Strecke ab durch r und die Coordinaten eines beliebigen Punktes von C^p durch α, β, so stellt die Gleichung

$$2)\qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

einen der Kreise $\mathfrak{C}$ dar, und lege ich den Grössen α, β alle Werthepaare bei, welche die Gleichung 1) erfüllen, so stellt 2) nacheinander alle Kreise $\mathfrak{C}$ dar. Die Gleichung des Strahles s, welcher von $\mathfrak{P}$ nach dem Mittelpunkte eines Kreises $\mathfrak{C}$ geht, lautet:

$$3)\qquad \beta x - \alpha y = 0.$$

Eliminire ich aus den Gleichungen 2), 3) und aus $f_p(\alpha, \beta) = 0$ die Grössen α, β, so ergiebt sich die Gleichung der Curve C^{4p}.]

Nun schneidet C^{4p} die Curve C^q in $4pq$ Punkten $\mathfrak{z}$. Deren Verbindungslinien mit $\mathfrak{P}$ sind die Tangenten, welche sich von $\mathfrak{P}$ aus an die Enveloppe der Geraden S ziehen lassen. Denn ein Strahl $\mathfrak{P}\mathfrak{z} = s$ trifft die Curve C^p in p Punkten, von denen einer um die Strecke ab von $\mathfrak{z}$ entfernt ist. Also ist $\mathfrak{P}\mathfrak{z}$ eine Tangente S der gesuchten Enveloppe, welche somit von der Classe $4pq$ ist und durch C_{4pq} bezeichnet werden möge. (Offenbar hätte man anstatt der Curve C^p auch die Curve C^q transformiren können, ohne das Resultat zu ändern.)

Es erübrigt nun noch, den zweiten Theil des Satzes Nr. 1 von Steiner zu beweisen, demzufolge die G_∞ eine $2pq$-fache Tangente der Curve C_{4pq} sein soll. Dies ist erwiesen, sobald es feststeht, dass von jedem Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ der G_∞ nur $2pq$ im Endlichen befindliche Tangenten an die Curve C_{4pq} gehen. Modificiren wir also unsere obige Transformation für den Fall, dass $\mathfrak{P}$ im Unendlichen liegt, so werden alle Strahlen s dieses Punktes parallel, und durch die Transformation von C^p ergeben sich zwei Curven $C^{p'}$, $C^{p''}$, welche man auch erhält, wenn man C^p auf einem Strahle s in beiderlei Sinne je um die Strecke ab parallel mit sich selbst verschiebt. Die frühere Curve C^{4p} wird also jetzt vertreten durch die beiden Curven $C^{p'}$, $C^{p''}$, welche mit C^p congruent sind. Mithin sind $C^{p'}$, $C^{p''}$ auch von der Ordnung p und treffen C^q zusammen in $2pq$ Punkten, deren Verbindungslinien mit $\mathfrak{P}_\infty$ die

Tangenten sind, welche von diesem Punkte aus an die Enveloppe der Geraden S gezogen werden können. Daher ist, wie Steiner behauptet, die G_∞ eine $2pq$-fache Tangente der Curve C_{4pq}.

2. Bewegen sich die beiden Endpunkte der constanten Strecke ab in einer festen Curve n^{ter} Ordnung C^n, so ist die Transformation dieser Curve nach dem vorigen Paragraphen für einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ eine Curve $4n^{\text{ter}}$ Ordnung C^{4n}. Dieselbe hat mit der gegebenen Curve C^n offenbar dieselben Asymptoten und berührt dieselben je vierpunktig im Unendlichen. Dies folgt direct aus der Transformation mittels der Kreise $\mathfrak{C}$. Nämlich jedem der beiden Zweige der Curve C^n, welche sich einer Asymptote t dieser Curve ins Unendliche nähern, entsprechen zufolge der Transformation zwei Zweige, welche sich derselben Asymptote ins Unendliche nähern. Also hat C^{4n} etc.

Aendere ich nun in der Ebene die Lage des Punktes $\mathfrak{P}$, so hat die Curve C^{4n}, welche sich jedesmal ergiebt, ausser $4n(n-1)$ im Endlichen liegenden Punkten mit C^n stets jene $4n$ im Unendlichen befindlichen Punkte gemein, welche fest bleiben, wenn $\mathfrak{P}$ sich auch verschiebt. Diese $4n$ Punkte auf der G_∞ kommen, als total unabhängig von der Lage des Punktes $\mathfrak{P}$, unter den $4n^2$ Schnittpunkten von C^n und C^{4n}, die zur Bestimmung der Tangenten S dienen, welche durch $\mathfrak{P}$ gehen, gar nicht in Betracht. Denn wollte man sie berücksichtigen, so würde man alsbald auf die Absurdität gerathen, dass jede Gerade, die nach einem der Punkte geht, welche C^n mit der G_∞ gemein hat, eine Tangente der Enveloppe von S sei.

Es bleiben daher für die Bestimmung der Classe der Enveloppe von S nur die im Endlichen befindlichen $4n(n-1)$ Schnittpunkte von C^n und C^{4n} zur Beachtung übrig. Es ergiebt sich nun aus der Transformation mittels der Kreise $\mathfrak{C}$ augenblicklich, dass diese $4n(n-1)$ Punkte paarweise auf $2n(n-1)$ Strahlen von $\mathfrak{P}$ vertheilt liegen. Denn ist γ ein Schnittpunkt von C^n und C^{4n}, so liegt auf dem Strahle $\mathfrak{P}\gamma$ im Abstande ab von γ (in der einen oder andern Richtung) ein Punkt $\mathfrak{c}$ von C^n. Ist nun γ ein bei der Transformation dem $\mathfrak{c}$ entsprechender Punkt von C^{4n}, so ist bei der Transformation des Punktes γ (der nun als C^n angehörig betrachtet wird) $\mathfrak{c}$ ein entsprechender Punkt von C^{4n}, d. h. die Curven C^n und C^{4n} schneiden sich in den beiden Punkten $\mathfrak{c}$ und γ des Strahles $\mathfrak{P}\gamma$. Mithin sind die $4n(n-1)$ Schnittpunkte von C^n und C^{4n} allerdings paarweise auf Strahlen des Punktes $\mathfrak{P}$ vertheilt, und es lassen sich daher von $\mathfrak{P}$ an die Enveloppe der Geraden S nur $2n(n-1)$ Tangenten ziehen; diese Enveloppe ist also eine Curve $2n(n-1)^{\text{ter}}$ Classe $C_{2n(n-1)}$.

Dass diese Curve die C^n in jedem ihrer auf der G_∞ liegenden n Punkte vierpunktig berührt, leuchtet ohne Weiteres ein, und dass die G_∞ eine $n(n-1)$-fache Tangente der $C_{2n(n-1)}$ ist, ergiebt sich ganz ähnlich wie im vorigen Paragraphen der Beweis, dass die G_∞ eine $2pq$-fache Tangente der

C_{4pq} ist, indem man $\mathfrak{P}$ auf die G_∞ verlegt. Transformirt man nämlich für diese Lage von $\mathfrak{P}$ die C^n, so ergiebt sich eine Curve von der Ordnung $2n$, welche aus zwei mit C^n congruenten Curven $C^{n'}$ und $C^{n''}$ besteht. Diese beiden Curven erhält man auch, wenn man C^n in beiderlei Sinne je um die Strecke ab parallel auf einem Strahle des Punktes $\mathfrak{P}_\infty$ verschiebt. Da die drei Curven C^n, $C^{n'}$, $C^{n''}$ also in ähnlicher Lage und congruent sind, so gehen sie durch dieselben n Punkte der G_∞, und hieraus folgt, dass die $n(n-1)$ Schnittpunkte $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_{n(n-1)}$ von C^n und $C^{n'}$, welche sich im Endlichen befinden, und ebenso die $n(n-1)$ im Endlichen enthaltenen Schnittpunkte $\gamma''_1, \gamma''_2, \ldots, \gamma''_{n(n-1)}$ von C^n und $C^{n''}$ je auf einer Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $C^{(n-1)'}$ und $C^{(n-1)''}$ liegen, welche beide Curven ähnlich gelegen und congruent sind.

Aus denselben Gründen wie oben folgt nun, dass allein die im Endlichen befindlichen $2n(n-1)$ Schnittpunkte γ' und γ'' von C^n mit $C^{n'}$ und $C^{n''}$ für die Bestimmung der Tangenten S in Betracht kommen, welche von $\mathfrak{P}_\infty$ aus an die Enveloppe gehen, und dass die $2n(n-1)$ Schnittpunkte γ' und γ'' zu je zweien auf $n(n-1)$ Strahlen von $\mathfrak{P}$ vertheilt sind, d. h. es gehen von $\mathfrak{P}_\infty$ nur $n(n-1)$ Tangenten an die Enveloppe der Geraden S; diese Enveloppe hat also die G_∞ zur $n(n-1)$-fachen Tangente und ist von der $2n(n-1)^{\text{ten}}$ Classe.

Wir wollen nun annehmen, dass auf einem Strahle $s_\mathfrak{k}$ von $\mathfrak{P}_\infty$ die Schnittpunkte $\gamma'_\mathfrak{k}$ und $\gamma''_\mathfrak{k}$ von C^n mit $C^{n'}$ und $C^{n''}$ liegen, so dass also $\gamma'_\mathfrak{k}\gamma''_\mathfrak{k} = ab$. Die Mitte von $\gamma'_\mathfrak{k}\gamma''_\mathfrak{k}$ heisse $\mu_\mathfrak{k}$. Dann ist es klar, dass die Punkte γ' und γ'' auf verschiedenen Seiten von den Mitten μ liegen, und zwar z. B. die Punkte γ' alle links von μ und die Punkte γ'' alle rechts von μ, denn die Punkte γ' können mit den Punkten γ'' durch parallele Verschiebung um die Strecke ab zur Deckung gebracht werden. Daraus folgt aber, dass die Mitten μ auch mit den Punkten γ' und γ'' zur Deckung gebracht werden können, indem man sie auf den durch sie gehenden Strahlen von $\mathfrak{P}_\infty$ nach links oder nach rechts um die Strecke $\frac{ab}{2}$ verschiebt. Daher liegen die Mitten μ der parallelen und gleichen Sehnen der Curve C^n auch auf einer Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche congruent und in ähnlicher Lage ist mit den Curven $C^{(n-1)'}$, $C^{(n-1)''}$, auf welchen die Endpunkte der parallelen und gleichen Sehnen sich befinden.

Steiner hätte auch allgemeiner sagen können: Trägt man auf den gleichen und parallelen Sehnen der Curve C^n von den Mitten aus eine constante Strecke d nach links oder rechts ab, so liegen die $n(n-1)$ Endpunkte dieser Strecken auch auf einer Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche congruent und in ähnlicher Lage ist mit der Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, auf der die Mitten der gleichen und parallelen Sehnen liegen.

Danzig, September 1887. H. E. M. O. Zimmermann.

XXIV. Zur Lehre von den unter unbestimmter Form erscheinenden Ausdrücken.

Wenn $v=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x=a$ unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint und wenn für denselben Werth von x der Differentialquotient $\frac{dv}{dx}$ bestimmt werden soll, so ist dies insofern unbequem, als derselbe sich zunächst ebenfalls in unbestimmter Form darstellt. Nachfolgende Methode dient zur Abkürzung der zu seiner endgiltigen Bestimmung erforderlichen Rechnung. Dabei wird vorausgesetzt, dass der wahre Werth von v_a (d. h. v für $x=a$) nicht unendlich werde $\left(\text{in welchem Falle auch } v'_a, \text{ d. h. } \frac{dv}{dx} \text{ für } x=a, \text{ für jedes endliche } a \text{ unendlich würde}\right)$. Sind also n Differentiationen des Zählers und des Nenners erforderlich, um den wahren Werth von v_a zu finden, so soll jedenfalls $\varphi^{(n)}a$ von 0 verschieden sein, während $f^{(n)}a$ einen beliebigen endlichen Werth einschliesslich der Null haben kann.

Sei zunächst $n=1$, also $\varphi'a$ von 0 verschieden, so ist:

$$1)\qquad v_a=\frac{f'a}{\varphi'a}$$

und allgemein:

$$2)\qquad v'=\frac{f'x-v\,\varphi'x}{\varphi(x)}$$

oder:

$$3)\qquad v'=\frac{\varphi'x\left(\frac{f'x}{\varphi'x}-v\right)}{\varphi(x)}.$$

Dieser Ausdruck erscheint für $x=a$ wegen 1) in unbestimmter Form, also ist:

$$v'_a=\left(\frac{\varphi''x\left(\frac{f'x}{\varphi'x}-v\right)+\varphi'x\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{f'x}{\varphi'x}\right)-v'\right)}{\varphi'x}\right)_a=\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{f'x}{\varphi'x}\right)\right)_a-v'_a,$$

daher:

$$4)\qquad 2v'_a=\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{f'x}{\varphi'x}\right)\right)_a.$$

Ist weiter $n=2$, also $f(a)=f'(a)=0$, $\varphi(a)=\varphi'(a)=0$, $\varphi''(a)$ von 0 verschieden, so ist:

$$5)\qquad v_a=\frac{f''a}{\varphi''a}$$

und v'_a, welches in der Form der Gleichung 2) unbestimmt erscheint:

$$v'_a=\left(\frac{(f''x-v\,\varphi''x)-v'\varphi'x}{\varphi'x}\right)_a,$$

also:

$$6) \qquad 2v'_a = \left(\frac{f''x - v\varphi''x}{\varphi'x}\right)_a,$$

d. i. wieder, da $\varphi''a$ von 0 verschieden ist:

$$= \left(\frac{\varphi''x\left(\frac{f''x}{\varphi''x} - v\right)}{\varphi'x}\right)_a,$$

also wegen 5) $= \frac{0}{0}$ und daher (wie oben):

$$2v'_a = \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{f''x}{\varphi''x}\right)\right)_a - v'_a,$$

folglich:

$$3v'_a = \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{f''x}{\varphi''x}\right)\right)_a.$$

Ist $n = 3$, sind also noch $f''a$ und $\varphi''a$ gleich der Null, so muss man von der Gleichung 6) weiter gehen und gelangt auf diese Weise unschwer zu folgendem allgemeinen Resultat:

Wenn:

$$\varphi(a) = \varphi'a = \cdots = \varphi^{(n-1)}a = 0, \quad \varphi^{(n)}a \gtrless 0,$$
$$f(a) = f'a = \cdots = f^{(n-1)}a = 0, \quad f^{(n)}a \gtreqless 0,$$

und wenn:

$$\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)} = z$$

gesetzt wird, so ist:

$$7) \qquad (n+1)v'_a = z'_a, \quad v_a = z_a.$$

Es kann vorkommen, dass von Anfang an oder während der Rechnung ein Factor u sich aussondern lässt, der für $x = a$ in bestimmter Form erscheint. Dadurch vereinfacht sich die Operation. Geschehe dies etwa nach der k^{ten} Differentiation, sei also:

$$8) \qquad \frac{f^{(k)}x}{\varphi^{(k)}x} = u \cdot \frac{F(x)}{\Phi(x)},$$

wobei k auch gleich Null sein kann und wobei der Fall nicht ausgeschlossen werden soll, dass $\frac{f^{(k)}x}{\varphi^{(k)}x}$ durch Aufhebung eines gemeinsamen Factors in Zähler und Nenner bereits für $x = a$ in völlig bestimmter Form erscheine, dass also der Factor von u in 8) gleich der Einheit sei; nur muss die Anzahl der vorgeschriebenen Differentiationen (n) so gezählt werden, als ob kein Factor fortgehoben wäre.

Da noch $n - k$ Differentiationen fehlen, um $\frac{f^{(k)}x}{\varphi^{(k)}x}$ (wie es in seiner ursprünglichen Form erscheint) in seinen wahren Werth $\frac{f^{(n)}x}{\varphi^{(n)}x}$ (für $x = a$) überzuführen, so ist bei zweimaliger Anwendung von 7):

$$(n-k+1)\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{f^{(k)}x}{\varphi^{(k)}x}\right)\right)_a = \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{f^{(n)}x}{\varphi^{(n)}x}\right)\right)_a = z'_a = (n+1)v'_a.$$

Andererseits giebt die Differentiation von 8) allgemein:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f^{(k)}x}{\varphi^{(k)}x}\right)=u'\frac{F(x)}{\Phi(x)}+u\frac{d}{dx}\left(\frac{F(x)}{\Phi(x)}\right),$$

folglich ist:

$$9)\quad\left\{\begin{array}{l}(n+1)v'_a=(n+1-k)\left\{u'_a\left(\frac{F(x)}{\Phi(x)}\right)_a+u_a\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{F(x)}{\Phi(x)}\right)\right)_a\right\}\\ \text{und:}\\ \qquad v_a=u_a\left(\frac{F(x)}{\Phi(x)}\right)_a,\end{array}\right.$$

wobei die unbestimmt erscheinende Function $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$, wenn überhaupt vorhanden, nebst ihrem Differentialquotienten wieder nach den Gleichungen 7) zu behandeln ist.

1. Beispiel.* Sei:

$$v=\frac{e^x(x-2)+x+2}{(e^x-1)^3};$$

wie gross sind v und v' für $x=0$?

Die Anzahl der Differentiationen ist: $n=3$. Nun ist zuerst:

$$v_0=\left(\frac{e^x(x-1)+1}{3e^x(e^x-1)^2}\right)_0,$$

also:

$$u=\frac{e^{-x}}{3},\quad k=1,\quad \frac{F(x)}{\Phi(x)}=\frac{e^x(x-1)+1}{(e^x-1)^2}.$$

Dann folgt nach 7) mit $n=2$:

$$3\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{F(x)}{\Phi(x)}\right)\right)_0=-\frac{1}{2}(e^{-x})_0=-\frac{1}{2},\quad \left(\frac{F(x)}{\Phi(x)}\right)_0=\frac{1}{2},$$

und dann nach 9), worin $n+1-k=3$ zu setzen ist:

$$4v'_0=3(-\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{18}),\quad v'_0=-\tfrac{1}{6},\quad v_0=\tfrac{1}{6}.$$

2. Beispiel. Es sollen $v=\frac{e^{2x}(2x-5)+e^4}{(x-2)^2}$ und v' für $x=2$ bestimmt werden.

Hier ist $n=2$, ferner:

$$k=1,\quad u=2e^{2x},\quad \frac{F(x)}{\Phi(x)}=1$$

und somit nach 9):

$$v'_2=\tfrac{1}{3}\cdot 2u'_2=\tfrac{8}{3}e^4,\quad v_2=2e^4.$$

Die Methode lässt sich ebenfalls anwenden, wenn eine Function zweier Variabelen, zwischen denen eine Gleichung besteht, für gewisse zusammengehörige Werthe derselben unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint; desgleichen erleichtert sie öfters die Rechnung, wenn für diejenige Stelle einer Curve, an welcher der Differentialquotient in der Form $\frac{0}{0}$ sich darstellt, der Krüm-

* Aus dem Uebungsbuch (für Differentialrechnung) des Herrn Geh. Rath Schlömilch entlehnt.

mungsradius gefunden werden soll, wie aus nachfolgendem Beispiel ersehen werden mag.

Für die sich als Dreiblatt zeigende Curve:

$$10)\qquad y^4+axy^2=bx^3-x^4\,*$$

wird der Differentialquotient:

$$11)\qquad y'=\frac{3bx^2-ay^2-4x^3}{2y(2y^2+ax)}$$

unbestimmt für die zusammengehörigen Werthe $x=0$, $y=0$; seine wahren Werthe sind $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ und $\pm\infty$. Um den letzteren Werth zu vermeiden, vertauschen wir die Coordinaten, setzen also:

$$x=\eta,\quad y=\xi\quad\text{und}\quad \frac{1}{y'}=\frac{d\eta}{d\xi}=\eta'.$$

Dann wird aus 11), wenn ich Zähler und Nenner durch y^2 dividire:

$$12)\qquad \eta'=\frac{2\left(2\xi+a\frac{\eta}{\xi}\right)}{(3b-4\eta)\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2-a}=\frac{2(2\xi+av)}{(3b-4\eta)v^2-a},$$

wobei $\frac{\eta}{\xi}=v$ gesetzt ist. Für den Punkt $(\xi=0,\ \eta=0)$ wird dann nach 7):

$$v_0=\eta'_0,\quad v'_0=\tfrac{1}{2}\eta''_0,$$

folglich, wenn die Gleichung 12) differentiirt und dann auf den Punkt $(\xi=0,\ \eta=0)$ angewandt wird:

$$13)\qquad \frac{1}{2}\eta''_0=\frac{-2a+2(3b+2av_0^2)v_0^2-\frac{a}{2}(a+3bv_0^2)\eta''_0}{(3bv_0^2-a)^2}.$$

Nun ist, wie aus 12) abzuleiten, $v_0=\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ oder $=0$. Im ersten Falle folgt durch Auflösung der für η''_0 linearen Gleichung 13):

$$\eta''_0=\frac{1}{a}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right),$$

im zweiten Falle:

$$\eta''_0=-\frac{2}{a}.$$

Somit haben wir, wenn ϱ der Krümmungsradius ist, die zusammengehörigen Werthe:

$$x=0,\quad y=0,\quad \frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{b}{a}},\quad \varrho=\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}\sqrt{1+\frac{a}{b}}$$

und:

$$x=0,\quad y=0,\quad \frac{dy}{dx}=\pm\infty,\qquad \varrho=\frac{a}{2}.$$

* S. a. a. O. § 29, Aufgabe 5).

Königsberg, im August 1887. LOUIS SAALSCHÜTZ.

XXV. Ueber eine Stelle in Poisson's Traité de mécanique.

In einer Note, S. 244—246 des laufenden Jahrganges dieser Zeitschrift, beanstandet Herr Dr. Pfannstiel die Entwickelungen, auf Grund deren Poisson unter Nr. 408 seines Traité de mécanique zur Aufstellung derjenigen kinematischen Gesetze gelangt, welche für die Untersuchung der Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt die allgemeinste Grundlage bilden. Der H. Verf. setzt daselbst Zweifel in die Richtigkeit des angewandten Verfahrens, die, wenn sie begründet wären, direct die Ungiltigkeit der gedachten Formeln und mit diesen die Unrichtigkeit der schon gewonnenen Resultate über Rotationsprobleme zur Folge haben müssten. Zum Glücke ist nun die Zulässigkeit der Poisson'schen Behauptungen eine unbestreitbare, und es soll im Nachstehenden der Versuch gemacht werden, den Beweis hierfür zu erbringen.

Ist x, y, z das feste rechtwinklige Coordinatensystem des Raumes, x_1, y_1, z_1 dasjenige des rotirenden Körpers, so sind bezüglich des letzteren die Coordinaten x_1, y_1, z_1 eines und desselben Körperpunktes feste, d. h. von der Zeit unabhängige Werthe. Die Coordinaten x, y, z des Punktes bezüglich der festen Axen dagegen sind variabel, und es bestehen die Relationen

$$\text{I)}\quad \begin{aligned} x &= a x_1 + b y_1 + c z_1, \\ y &= a' x_1 + b' y_1 + c' z_1, \\ z &= a'' x_1 + b'' y_1 + c'' z_1; \end{aligned} \qquad \text{II)}\quad \begin{aligned} x_1 &= a x + a' y + a'' z, \\ y_1 &= b x + b' y + b'' z, \\ z_1 &= c x + c' y + c'' z, \end{aligned}$$

worin die a, b, …, c'' die neun Neigungscosinus der Axen der zwei Coordinatensysteme vorstellen.

Dreht sich nun der Körper zur Zeit t während eines unendlich kleinen Zeitelements dt von einer Lage in die Nachbarlage, so ist dadurch der Punkt x, y, z im Raume von der Stelle x, y, z in die unendlich nahe gelegene Stelle $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ übergegangen, und es wird durch die Kenntniss der Verschiebungen dx, dy, dz die Geschwindigkeit des Punktes völlig bestimmt. Insbesondere ist die Richtung derselben definirt durch eine gerade Linie, deren Neigungscosinus gegen die Axen im festen Raume bezw. proportional sind $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Nun können aber diese Richtungscosinus auch gemessen werden gegen die Axen des beweglichen Systems, d. h., weil das Messen einer Ortsveränderung zugleich das Festhalten eines Ortes involvirt, gegen eine fixirt gedachte Lage dieses Systems, beispielsweise jene, welche es zur Zeit t inne hatte. Es resultiren dann für die aufzustellenden Cosinus bis auf einen Proportionalitätsfactor die Ausdrücke

$$
\text{III)} \qquad
\begin{aligned}
& a\frac{dx}{dt}+a'\frac{dy}{dt}+a''\frac{dz}{dt}, \\
& b\frac{dx}{dt}+b'\frac{dy}{dt}+b''\frac{dz}{dt}, \\
& c\frac{dx}{dt}+c'\frac{dy}{dt}+c''\frac{dz}{dt},
\end{aligned}
$$

deren Giltigkeit unanfechtbar ist.

Nun freilich handelt es sich um die fundamentale Frage: kann man vorstehende Summen der Reihe nach wirklich als die „Geschwindigkeiten“ unseres Punktes bezüglich der Axen des rotabeln Systems der x_1, y_1, z_1 auffassen und demgemäss gleich $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}$ setzen — oder nicht? Herr Dr. Pfannstiel scheint diese Frage zu verneinen, indem er anführt, dass ja die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des betrachteten Systempunktes von der Zeit t unabhängig und demgemäss die Differentialquotienten $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}$ für denselben jederzeit gleich Null seien.

Diese Schlussfolgerung scheint mir aber eine irrthümliche. x_1, y_1, z_1 sind allerdings von der Zeit t unabhängige, feste Werthe, aber einzig und allein für das zugleich mit dem Punkte *mitbewegte* Raumsystem der x_1, y_1, z_1, nicht etwa für eine fixirte oder auch nur einen Moment fixirt gedachte Lage desselben, gegen welche die Ortsveränderung des Punktes gemessen werden soll. Mit anderen Worten: $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}$ im Sinne des Herrn Dr. Pfannstiel sind die relativen Geschwindigkeiten des bewegten Punktes und als solche freilich durchaus gleich Null, das Werthsystem Poisson's dagegen verzeichnet die für den Zeitpunkt t gemessenen absoluten Geschwindigkeiten desselben, welche vorher gegen das feste Coordinatensystem des Raumes geschätzt wurden, nunmehr für eine unveränderlich gedachte Lage x_1, y_1, z_1 des beweglichen Coordinatensystems.

Dass als letztere dabei gerade die Lage zur Zeit t gewählt wird, die nur für diesen Zeitpunkt als fest erscheint, hat nichts Wunderliches, weil die Differentialentwickelungen des angeführten Poisson'schen Abschnittes nur die Kenntniss des momentanen Geschwindigkeitszustandes eines beliebigen Körperpunktes bedingen wollen. [Würde statt der Lage x_1, y_1, z_1 zur Zeit t jene zur Zeit $t+dt$ als bestimmend angenommen werden, so würden statt der Formeln III) Formeln erscheinen, die sich von den ersteren nur durch unendlich kleine Grössen erster Ordnung unterscheiden würden, entsprechend den Zunahmen $da, db, \ldots, dc''$; wie auch geometrisch deutlich ist, dass die Richtungscosinus einer Geraden für zwei Coordinatensysteme, welche durch eine unendlich kleine Drehung zur Deckung gebracht werden können, bis auf solche Grössen dieselben sind.]

Punkte im Körper, welche bei der Ueberführung des Systems der x_1, y_1, z_1 von einer Lage in die unendlich benachbarte Lage absolut in Ruhe bleiben, für welche also die Zunahmen dx_1, dy_1, dz_1 gegen die erstere Lage effectiv Null sind, giebt es nur eine einfach unendliche Anzahl, gelegen auf einer geraden Linie, der instantanen Drehungsaxe. Man erkennt diese Thatsache durch das Nullsetzen der Ausdrücke III) der Pfannstiel'schen Note.

Handelt es sich freilich, im Gegensatz zu dem Ziele der Poisson-schen Entwickelungen, um die Verfolgung von Drehungsvorgängen, die sich innerhalb eines gewissen endlichen Zeitintervalles vollziehen und also im Allgemeinen eine Integration von Differentialgleichungen erheischen, dann ist auch die Annahme einer wirklichen Anfangslage des mit dem Körper beweglichen Coordinatensystems unausbleiblich. In der That findet sich z. B. bei den Jacobi'schen Bestimmungsweisen der Neigungscosinus $a, b, \ldots, c''$ in allen Rotationsproblemen (vergl. den II. Band der „Gesammelten Werke") irgend eine ursprüngliche, durch die Zeit t_0 charakterisirte Lage x_1^0, y_1^0, z_1^0, gegen welche erst die allgemeine Lage x_1, y_1, z_1 zur Zeit t gemessen wird, ehe diese für das feste Raumsystem x, y, z zur Bestimmung kommt.

Zum Schlusse dieser Erwägungen sei noch bemerkt, dass die totale Differentiation der Relationen II), wie sie Herr Dr. Pfannstiel S. 245 seiner Note ausführt, natürlich identisch 0 ergeben muss. Denn werden daselbst sowohl von den Coordinaten x, y, z, als den Cosinus $a, b, \ldots, c''$ die Differentiale gebildet, so heisst dies nichts Anderes, als es wird vorgenommen: 1. eine unendlich kleine Verschiebung des betrachteten materiellen Punktes in der Richtung der Axen x, y, z, und 2. eine unendlich kleine Drehung des Axensystems x_1, y_1, z_1 um diese Axen. Da aber die beiden Coordinatensysteme der x, y, z und x_1, y_1, z_1 denselben festen Punkt zum Ursprung haben und überdies der Körperpunkt als mit den Axen x_1, y_1, z_1 starr verbunden angesehen werden kann, so sind die ersteren Verschiebungen drei Drehungen um x, y, z bezw. gleich zu erachten, welche, wie leicht ersichtlich, dieselben Amplituden besitzen wie die Drehungen 2., weshalb die totalen Aenderungen der Coordinaten des Punktes im Raume x_1, y_1, z_1 Null sind. Um eigentlich ganz correct zu sein, müssten daher die Poisson'schen Differentialquotienten der x_1, y_1, z_1 nach t partiell genommen und daher entweder durch das Zeichen ∂, oder durch Einklammern oder sonstwie kenntlich gemacht sein.

Soweit die materielle Seite des Themas. Ob freilich, wie der Herr Verf. am Schlusse seiner Note vermuthet, aus dem Mangel an Präcision und aus der allerdings wenig durchsichtigen Behandlungsweise bei Poisson wirklich Zweifel desselben an der Berechtigung und inneren Wahrscheinlichkeit seiner Formeln hervorsehen, wage ich nicht zu entscheiden.

München. Dr. Wilhelm Hess.

Historisch-literarische Abtheilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

XXXII. Jahrgang.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1887.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

I. Abhandlungen.

Seite

Ueber die Entdeckung der Variation und der jährlichen Gleichung des Mondes. (Schluss.) Von **C. Anschütz** 1
Die Quaestio „De proportione dyametri quadrati ad costam ejusdem“ des Albertus de Saxonia. Von **H. Suter** 41
Die Platonische Zahl. Von **C. Demme** 81, 121
Verzeichniss von Druckfehlern in den Gauss'schen Abhandlungen über die hypergeometrische Reihe. Von **H. Simon** 99
Quelques lettres inédites de René Descartes et de Constantyn Huygens. Von **D. Bierens de Haan** 161
Ueber eine neue Ausgabe von Galilei's sämmtlichen Werken. Von **A. Favaro** . 173
Bemerkung zu einer Stelle im Almagest. Von **A. Wittstein** 201

II. Recensionen.

Geschichte der Mathematik.

Zwerger, Die lebendige Kraft und ihr Maass. Von **J. Henrici** 18
Heiberg et Menge, Euclidis opera omnia. Von **M. Cantor** 57
Bilfinger, Die Zeitmesser der antiken Völker. Von **M. Cantor** 57
Giesing, Leben und Schriften Leonardo's da Pisa. Von **M. Cantor** 58
Tannery, Les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas. Von **M. Cantor** . 59
Mendthal, Geometria Culmensis. Von **M. Cantor** 62
Günther, Die geometrischen Näherungsconstructionen Albrecht Dürer's. Von **M. Cantor** 63
Anschütz, Ungedruckte wissenschaftliche Correspondenz zwischen Johann Kepler und Herwarth von Hohenburg 1599. Von **M. Cantor** 63
Marie, Histoire des sciences mathématiques et physiques VIII et IX. Von **M. Cantor** 64
" " " " " " " X. " " " 157
" " " " " " " XI. " " " 222
Albrecht, Geschichte der Elektricität. Von **B. Nebel** 103
Huygens, Traité de la lumière. Von **P. Zech** 135
Günther, Erdkunde und Mathematik. Von **M. Cantor** 156
Wappler, Zur Geschichte der deutschen Algebra im XV. Jahrhundert. Von **M. Cantor** 156
Favaro, Miscellanea Galileiana inedita. Von **M. Cantor** 174
Friis, Tychonis Brahei et ad eum doctorum virorum epistolae. Von **M. Cantor** 176
Rothlauf, Die Physik Plato's. Von **M. Cantor** 220
Harnack, Leibniz' Bedeutung in der Geschichte der Mathematik. Von **M. Cantor** 221

Unterrichtswesen, Philosophie.

Seite

Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen. Von **M. Cantor** . . . 38
Mach, Der relative Bildungswerth der philologischen und der mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächer der höheren Schulen. Von **M. Cantor** . . . 65
Cohen, Kant's Theorie der Erfahrung. Von **M. Lasswitz** . . . 137

Arithmetik, Algebra, Analysis.

Weierstrass, Abhandlungen aus der Functionslehre. Von **M. Cantor** . . . 35
Viola, Mathematische Sophismen. Von **M. Cantor** . . . 35
Beau, Analytische Untersuchungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen und der Fourier'schen Integrale. Von **M. Cantor** . . . 37
Simon, Die harmonische Reihe. Von **M. Cantor** . . . 37
Mansion, Elemente der Theorie der Determinanten. Von **S. Günther** . . . 66
Grünwald, Dei sistemi numerici a base imaginaria. Von **M. Cantor** . . . 116
Legendre, Zahlentheorie (deutsch von **Maser**). Von **M. Cantor** . . . 117
Gauss, Die Hauptsätze der Elementarmathematik. Von **K. Schwering** . . . 143
Henrich, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Von **K. Schwering** . . . 144
Wrobel, Die arithmetischen und geometrischen Verhältnisse, Proportionen und Progressionen mit Anwendung auf die Zinseszins- und Rentenrechnung. Von **K. Schwering** . . . 148
Fuhrmann, Wegweiser in der Arithmetik, Algebra und niederen Analysis. Von **K. Schwering** . . . 148
Carr, A synopsis of elementary resultats in pure mathematics. Von **M. Cantor** 152
Selling, Eine neue Rechenmaschine. Von **S. Günther** . . . 210
Ekholm, **Charlier**, **Hagström**, Fyrställiga logaritmisk-trigonometriska Handtabeller. Von **M. Cantor** . . . 34
Prytz, Tables d'Antilogarithmes. Von **M. Cantor** . . . 153, 209
Gravelius, Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Decimaltheilung des Quadranten. Von **M. Cantor** . . . 155

Synthetische, analytische, descriptive Geometrie.

Weingarten, Ueber die Theorie der auf einander abwickelbaren Oberflächen. Von **H. v. Mangoldt** . . . 18
Funcke, Die analytische und die projectivische Geometrie der Ebene, die Kegelschnitte auch nach den Methoden der darstellenden und der elementarsynthetischen Geometrie. Von **K. Schwering** . . . 25
Vogt, Der Grenzbegriff in der Elementarmathematik. Von **K. Schwering** . . . 27
Gerlach, Lehrbuch der Mathematik. Von **K. Schwering** . . . 27
Recknagel, Ebene Geometrie. Von **K. Schwering** . . . 30
Müller, Planimetrische Constructionsaufgaben. Von **K. Schwering** . . . 31
Berichtigung. Von **E. R. Müller** . . . 102
Gysel, Beiträge zur analytischen Geometrie der Curven und Flächen zweiten Grades. — Ueber die sich rechtwinklig schneidenden Normalen einer Fläche zweiten Grades. Von **M. Cantor** . . . 33
Sanio, Die Abbildung eines äusseren Kreisbogen-Polygons auf eine Kreisfläche. Von **G. Holzmüller** . . . 112
Artzt, Untersuchungen über ähnliche Dreiecke, die einem festen Dreieck umschrieben sind. Von **C. Müsebeck** . . . 114
Hochheim, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene III. Von **M. Cantor** 116

Seite
Uth, Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie. Von **K. Schwering** . . 140
Janisch, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Von **K. Schwering** 140
Stegmann, Die Grundlehren der ebenen Geometrie. Von **K. Schwering** . . . 141
Diekmann, Uebungen und Aufgaben für den propädeutischen Unterricht in der Geometrie. Von **K. Schwering** 142
Wiese & Lichtblau, Sammlung geometrischer Constructionsaufgaben. Von **K. Schwering** 142
Wiegand, Erster Cursus der Planimetrie. Von **K. Schwering** 145
Burckhardt, Lehrbuch der Stereometrie. Von **K. Schwering** 146
v. Lilienthal, Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der krummen Oberflächen und geradlinigen Strahlensysteme. Von **K. Schwering** 146
Fiedler, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage II. Von **C. Rodenberg** 178
Schönflies, Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung. Von **C. Rodenberg** 181
Heinze, Genetische Stereometrie. Von **C. Rodenberg** 183
Hoffmann, Die Construction doppelt berührender Kegelschnitte mit imaginären Bestimmungsstücken. Von **C. Rodenberg** 209
Heller, Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaaren. Von **C. Rodenberg** . . 210
Abdank-Abakanowicz, Les intégraphes, la courbe intégrale et ses applications. Von **F. Kraft** 148

Trigonometrie, Geodäsie, Geographie, Geophysik.

Grosse-Bohle, Ebene Trigonometrie. Von **K. Schwering** 29
Bohn, Die Landmessung. Von **E. Hammer** 67
Spitz, Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie. Von **E. Hammer** 69
Günther, Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie. Von **E. Hammer** 69
Cornelius, Grundriss der physikalischen Geographie. Von **E. Hammer** . . . 70
Jordan, Grundzüge der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung. Von **E. Hammer** 70
Vogler, Lehrbuch der praktischen Geometrie. Von **B. Nebel** 73
Günther, Lehrbuch der Geophysik und physikalischen Geographie II. Von **P. Treutlein** 108
Steinhauser, Grundzüge der mathematischen Geographie und der Landkartenprojection. Von **S. Günther** 212
Lingg, Erdprofil der Zone von 31^0 bis 65^0 n. Br. Von **F. Erk** 216
Gauss, Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate (deutsch von Börsch und Simon). Von **M. Cantor** 223

Mechanik, Physik, Meteorologie.

Betti, Lehrbuch der Potentialtheorie (deutsch von Meyer). Von **M. Cantor** . . 16
Wilda, Beitrag zur Behandlung der mechanischen Wärmelehre. Von **B. Nebel** 75
Wiedemann, Die Lehre von der Elektricität IV. Von **B. Nebel** 76
Walberer, Anfangsgründe der Mechanik fester Körper. Von **B. Nebel** . . . 76
Sohncke, Der Ursprung der Gewitterelektricität und der gewöhnlichen Elektricität der Atmosphäre. Von **B. Nebel** 76
Wrobel, Die Physik in elementar-mathematischer Behandlung. Von **B. Nebel** 102
Wildermann, Die Grundlehren der Elektricität und ihre wichtigsten Anwendungen. Von **B. Nebel** 103
Hullmann, Die Gay-Lussac'sche Formel. Von **P. Zech** 104

Seite

Ketteler, Theoretische Optik. Von **P. Zech** 105
Mann, Der Atomaufbau in den chemischen Verbindungen. Von **P. Zech** . . 106
Neumann, Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers (herausgegeben von **Meyer**). Von **P. Zech** 106
Planté, Untersuchungen über Elektricität (deutsch von **Wallentin**). Von **P. Zech** 107
Mascart, Handbuch der statischen Elektricität I (deutsch von **Wallentin**). Von **P. Zech** 133
Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik III. Von **P. Zech** 134
Leitzmann, Wärmevertheilung auf einen Meridiankreis. Von **P. Zech** 135
Verdet, Wellentheorie des Lichtes II (deutsch von **Exner**). Von **P. Zech** . . . 135
Fudzisawa, Ueber eine in der Wärmeleitungstheorie auftretende, nach den Wurzeln einer transcendenten Gleichung fortschreitende unendliche Reihe. Von **P. Zech** 136
Clausius, Examen des objections faites par M. Hirn à la théorie cinétique des gaz. Von **P. Zech** 136
Schellwien, Optische Häresien. Von **P. Zech** 136
Meisel, Geometrische Optik. Von **S. Szapski** 139
Van Bebber, Handbuch der ausübenden Witterungskunde II. Von **F. Erk** . . 213
Hoh, Elektricität und Magnetismus als kosmotellurische Kräfte. Von **W. C. Wittwer** 219

Bibliographie . . . . Seite 39, 78, 118, 159, 186, 225
Mathematisches Abhandlungsregister: 1. Januar bis 30. Juni 1886 188
" " 1. Juli bis 31. December 1886 229

Historisch-literarische Abtheilung.

Ueber die Entdeckung der Variation und der jährlichen Gleichung des Mondes.

Von

C. ANSCHÜTZ, S. J.

(Schluss.)

Nota zu S. 208 des vor. Jahrg. Die Anm. 3, 4, 6 sind nicht vom Verfasser, sondern vom befreundeten Corrector. Sie sind berechtigt, wenn K. auch hier die Excentricität = 0,018 annahm, statt des alten 0,04 („*olim major fuit*", cf. S. 14, N.); nur das Wörtchen „nie" dürfte zu stark sein. C. B.

Dies war und blieb für einige Zeit auch das Hinderniss, das Kepler abhielt, seine Theorie, die ohne Kenntniss der Gravitation schwerlich schärfer definirt werden konnte, praktisch verwendbar zu machen. Zudem absorbirten andere Pläne seine ganze Aufmerksamkeit und Thätigkeit.[1]) Nur mittelbar kam er der Lösung näher, insofern schon einige Monate später für ihn die Zeit begann, wo er Tycho's reiches Beobachtungsmaterial sich zu Nutzen machen konnte. In den ersten Jahren fand er die Zeit nicht, sich eingehender mit der Mondtheorie zu beschäftigen, da er von der Ausarbeitung seines unsterblichen Werkes „Commentaria motus Martis" zu sehr in Anspruch genommen war.[2]) Er gab jedoch den Gedanken, den er gefasst hatte, nicht auf; um so weniger, als er in Tycho's Beobachtungen sofort neue Anhaltspunkte fand. Zuerst streifte sich so die Idee von einem wahrhaft enormen Betrag dieser Ungleichheit ab, da er sah, wie Tycho mittelst der von ihm eingeführten Variation[3]) den wahren Ort des Mondes

1) In diese Zeit fällt Kepler's höchst peinliche Verwickelung in den Plagiatstreit Ursus-Brahe; die Anbahnung seiner Verbindung mit Brahe und die Sorge für eine neue Lebensstellung, eventuell seine Uebersiedelung nach Prag; seine Reise zu Brahe nach Benatek; die Vorarbeiten für seine Optik; der erste Entwurf der „Harmonice mundi"; der Beginn der Arbeiten über Mars Man begreift kaum, wie ein Mann so Verschiedenes zugleich bewältigen konnte.

2) Vgl. O. O. VIII, 631: „*Non bene accipit mea verba, quasi dixissem, me nihil de Luna posse concludere, nisi perspectis et reliquis planetis. Ego vero hoc dicebam, tantum mihi occupationis in planetis ceteris, ut non vacet examinare illa, quae Braheus jam elaborarat.*"

3) Ich meine die dritte Ungleichheit des Mondlaufes, die wir heute noch „Variation" nennen; dieselbe war Kepler vor seiner persönlichen Zusammenkunft mit Brahe noch unbekannt; es liegt also der merkwürdige Fall vor, dass Kepler

schon viel genauer darstellte. Mehr und mehr musste ihn aber die Wahrnehmung bestärken, dass auch Tycho trotz dieser Verbesserung in seinen Beobachtungen nicht an einer Unregelmässigkeit vorbeikam, die er zuerst durch einen „*circellus annuae variationis*" darzustellen, und, da dies nicht gut ging, durch Weglassung des zweiten Theiles der Zeitgleichung zu compensiren versuchte.[1]) In letzterem Vorgehen, das für Longomontan ein Nothbehelf und für Tycho ein Gegenstand des Aergers war, erkannte Kepler sofort etwas seinen Ansichten von der Sache sehr Conformes. Schon bald nach Tycho's Tode erregte die Inconsequenz in den eben herausgegebenen „Progymnasmata" den Tadel der Astronomen, und dieser erstreckte sich auch auf Kepler, weil er dieselbe nicht beseitigt habe. Kepler äusserte sich hierüber:[2]) „Der Gedanke selbst wäre so übel nicht, und wird durch Analogien gerechtfertigt,[3]) wenn nur der Betrag besser stimmte! Denn sagen, das zweite Element der Zeitgleichung sei beim Mond zu vernachlässigen, ist ebenso viel, als wenn man behauptet, die mittlere Bewegung des Mondes, wie sie die übrigen Astronomen angeben,[4]) erleide im Winter eine Retardation, im Sommer eine Acceleration, weil genau derselbe Weg, den der Mond im Sommer in $360^0\,57'$ (Stern-) Zeit zurücklegt, und nicht mehr, von ihm im Winter in $361^0\,1'$ zurückgelegt würde.[5]) Da ferner die Ent-

---

die vierte (in ihrem Maximum fast viermal geringere) vor der dritten bekannt war. Dies hat jedoch nichts Befremdendes, wenn man bedenkt, dass Tycho Brahe von ununterbrochen fortgesetzten Beobachtungen ausging, also nothwendig die Ungleichheit zuerst finden musste, die den grösseren Einfluss auf die Mondörter überhaupt ausübt, während Kepler seinen Schluss aus einzelnen Beobachtungen zog, welche sich auf die Finsternisse beziehen. In den Syzygien wird aber der Betrag der Variation bekanntlich $=0$. Deshalb wurde Kepler's Untersuchung durch dieselbe nicht erheblich gestört.

1) Ich verweise auf den ersten Theil dieser Abhandlung (S. 164, 165).

2) O. O. VIII, 627 (Brief an Odontius vom 30. Sept. 1606): „*Rei qualitas non valde absurda est seque exemplis defendit, si modo quantitas consentiret! Nam qui dicit, negligendam esse alteram partem aequationis in Luna, is statuit, Lunae illum motum, qui apud ceteros astronomos est medius, hyeme tardum esse, aestate velocem, quia quantum aestate de orbe Lunae volvitur temporibus 360. 57′ aequatoriis, tantundem, non plus, volveretur hieme temporibus 361. 1′. Itaque cum aestate Sol sit remotior ab orbe Lunae quam hieme, posset aliquis cogitare, causam inaequalitatis esse physicam, et Solem propiorem impedire nonnihil Lunae motum.*"

3) Man erinnere sich an den Vergleich dieser Mondgleichung (denn an diese denkt Kepler, sonst könnte er nicht mit „Denn" fortfahren) mit der Mittelpunktsgleichung der Sonne (oben S. 213).

4) Dem Sinne nach ebenso viel als: Nach Berücksichtigung aller andern Ungleichheiten.

5) D. h. in der Zeit, in welcher die Erde um diese Winkel rotirt. Kepler sieht hier ganz ab vom ersten Theil der Zeitgleichung und von allen übrigen Mondgleichungen. Der Mondlauf müsste also, wenn es keine weitere Mondgleichung mehr gäbe, ein gleichförmiger sein. Die wahren Tage würden aber nur noch

fernung der Sonne von der Mondbahn im Sommer grösser ist, als im Winter, liegt der Gedanke nahe, dass diese Ungleichheit einen physischen[1]) Grund habe, oder dass die Sonne bei grösserer Nähe den Mondlauf etwas hemme."

Als die übrigen Arbeiten etwas abgenommen hatten, machte sich Kepler ernstlich an die Umgestaltung der Mondtheorie. Die Erfahrung so vieler Astronomen nach ihm blieb ihm jedoch auch nicht erspart. Frisch sagt hierüber:[2]) „Am meisten Arbeit machten ihm die Ungleichheiten des Mondlaufes, und Kepler erschöpfte sich in übermenschlichen Anstrengungen,[3]) um die Bahn des Erdsatelliten den von ihm aufgefundenen Gesetzen anzupassen"; ferner:[4]) Kepler habe seine Mondtheorie in dem projectirten und bereits begonnenen „Hipparchus"[5]) niederlegen wollen, allein da er daran verzweifelte, zu einem befriedigenden Ende zu gelangen, habe er den gesammelten Stoff auf die *„Epitome Astronomiae Copernicanae"* und die *„Tabulae Rudolphinae"* vertheilt. Kepler selbst schreibt an Crüger, den 28. Febr. 1624:[6]) „Guter Gott, welche Mühe habe ich es mich kosten lassen, wie oft die Mondtheorie verändert, um den Finsternissbeobachtungen gerecht zu werden!" Und an Mästlin, schon den 8. Febr. 1601:[7]) „Ich stelle mich selbst nicht zufrieden; aber ich glaube, du wirst begreifen, dass

---

durch die verschiedene Bewegung der Sonne in der Ekliptik differiren, welche im Winter 61′, im Sommer 57′ beträgt, und welche hier der Einfachheit wegen als im Aequator liegend angesehen wird (eben sofern vom ersten Theil der Zeitgeichung abstrahirt wird). Während eines wahren Tages rotirt also die Erde im Winter um 361° 1′, im Sommer um 360° 57′. Sagt man nun, der zweite Theil der Zeitgleichung solle weggelassen werden, so heisst das, der wahre Tag sei dem mittleren gleich zu setzen (beide Ausdrücke hier gebraucht nur mit Rücksicht auf den zweiten Theil), welcher den Massstab für alle Bewegungen bildet. Sonach müsste in einem mittleren Tag die Erde im Winter um 361° 1′ rotiren, im Sommer um 360° 57′. Tycho's Auskunftsmittel besagt sonach, dass im Winter der mittlere Tag länger anzunehmen sei, als sonst geschieht, sofern die Gleichförmigkeit des Mondlaufes aufrecht gehalten werden soll. Das heisst aber mit anderen Worten, der Mond bleibe zurück, wenn die gewöhnliche (richtige) Dauer der mittleren Tage beibehalten wird. — In der „Epitome Astronomiae Copernicanae" L. III, P. III (O. O. VI, 250) bestimmt er den täglichen Weg der Sonne genauer zu 57′ 5″ im Sommer und 61′ 21″ im Winter.

1) Im Gegensatz zu den phoronomischen Darstellungsmitteln der Alten.

2) O. O. VI, 3.

3) *„Immanem impendit operam."*

4) O. O. III, 512.

5) Kepler selbst bemerkt (O. O. III, 517): *„Pragae inchoata a multis annis, Lincii vero continuata, praesertim anno 1616."* Er war bis zu seinem Tode damit beschäftigt, kam aber zu keinem Ziele.

6) O. O. VI, 35: *„Quantum ego, Deus bone, laborum hausi, quoties hypotheses Lunae immutavi, ut eclipses tuerer!"*

7) O. O. VIII, 738: *„Mihi ipsi non satisfacio; sed existimo te videre, plus difficultatis esse in una Luna, quam in omnibus planetis."*

der Mond allein mehr Schwierigkeiten verursacht, als alle übrigen Planeten zusammen." Ja, in einem Briefe an Crüger, vom 9. Sept. 1624,[1]) klagt er darüber, dass es ihm zwar gelungen sei, die Mondbewegung im Ganzen genauer darzustellen als seine Vorgänger, aber einzelne Finsternisse zeigten noch Differenzen von einer Viertelstunde und darüber, so dass er gar auf die Idee gerieth, der Erdschatten sei nicht diametral der Sonne entgegengesetzt!

Etwa 6 Jahre nach Tycho's Tode trat deshalb in Bezug auf diesen Punkt bei Kepler eine Periode ein, die ich nicht anders als die der Confusion bezeichnen kann. Die verschiedensten Hypothesen wurden ersonnen, auch combinirt, um den von Tycho aufgestellten zu kleinen Betrag der Mondgleichung,[2]) an dem Kepler zuerst festzuhalten versuchte, seine Variation und die Beobachtungen zusammenzureimen. Dies war der Kernpunkt aller Schwierigkeiten, wie zwei Stellen noch aus dem Jahre 1616, kurz bevor Kepler sich endgiltig entschied,[3]) bezeugen. In den aus den Beobachtungen sich ergebenden Mondpositionen traten immer wieder Differenzen auf, deren summirter Betrag dem Maximum der jährlichen Gleichung[4]) mehr oder weniger entspricht. Durch Tycho's sonderbares Verfahren war ein Theil dieser Differenzen gedeckt, der andere aber wurde von Kepler für eine der Variation noch anhaftende Ungenauigkeit gehalten. So schrieb er an Mästlin, den 5. Mai:[5]) „Wenn ich mich an den Mond mache, so finde ich mehr Schwierigkeiten als je, obgleich Tycho Brahe die gröbsten Fehler beseitigt hat. Das rechne ich noch zu den Kleinigkeiten, dass die Durchmesser der leuchtenden Scheiben und des Schattenkegels bei ihm nicht stimmen; schlimmere Sorge bereitet mir die Zeitgleichung, und jene Ungleichheit, die er Variation nannte. Denn je mehr Beobachtungen Tycho's ich discutire, um so schlechter stimmt seine Variation mit denselben überein,[6]) so dass Differenzen von 12, 13, 14, 15 Minuten sich ergeben. Darüber komme ich nicht

1) O. O. VI, 37.

2) Die Tycho, wie bereits gezeigt wurde, aus Verlegenheit als ein Anhängsel der Zeitgleichung behandelte. Kepler nennt sie deshalb „ein glücklich ersonnenes Uebel" („*malum bene conditum*". O. O. VIII, 627).

3) Hiervon später.

4) Das Maximum derselben beträgt 11,23 Bogenminuten, was im siderischen Mondlauf 20,4 Zeitminuten ausmacht, in Bezug auf Finsternisse aber 22,1 Min.

5) O. O. VI, 14: „*Dum ad Lunam venio, plus invenio laborum quam unquam, cum tamen potissima a Tychone Brahe sint absoluta. Illa levia sunt, quod diametri luminum et umbrae apud ipsum non correspondent; major est cura aequationis temporis, et illius inaequalitatis, quam variationem dixit. Nam quo plures ejus examino observationes, hoc minus Tychonica variatio respondet observatis, adeo ut ad 12, 13, 14, 15 minuta dissideat. In his adhuc haereo.*"

6) Natürlich ist dies nicht die Schuld der Variation, die eben Fehler, für welche sie nicht gilt, auch nicht zu beseitigen vermochte. Tycho hatte ihr Maximum genau genug zu 40′ 30″ angegeben.

hinaus.“ Und an Crüger, den 17. Juni desselben Jahres:[1]) „Die Zeitgleichung leidet noch an einer merkwürdigen Unregelmässigkeit, von der du wohl kaum eine Ahnung hast. Und andererseits weicht die von Tycho Variation genannte Ungleichheit bis zu 6 und 10 Minuten von den Beobachtungen ab.“

Klarer geht die überraschend richtige Bestimmung des Maximums aus einer Stelle aus dem Jahre 1607 hervor, wo Kepler, durch Angriffe auf Tycho's verstümmelte Zeitgleichung veranlasst, schreibt:[2]) „Mir gefällt zwar die Weglassung des zweiten Theils [der Zeitgleichung] auch nicht, aber ich kann daran nichts auf's Gerathewohl ändern, bevor ich mit den Planetenbahnen ins Reine gekommen bin. Denn schon jetzt, ohne Aenderung der Annahme Tycho's, kann der Fehler bis zu 6′ anwachsen. Würde ich diese Art der Ausgleichung beseitigen, so kämen noch 4′ hinzu. So könnte hie und da infolge meiner Abänderung[3]) ein Fehler von 10′ oder 11′ sich ergeben, und ich würde so mich mit meiner Aenderung dem Tadel aussetzen.“

Hier konnte nur die Theorie entscheidend eingreifen, und sie that es auch, dem Resultat nach glücklich, in der Form höchst unglücklich. In einer aus dem Jahre 1627 stammenden Stelle[4]) bemerkt

---

1) O. O. VI, 25: *„Temporis aequatio adhuc miram habet inaequalitatem, de qua vix suspiceris. Et illa Tychoni dicta variatio ab observatis rursum prorsumque usque ad 6 et 10 minuta dissentit.“*

2) O. O. VIII, 627: *„Etsi non probo ipsam partis alterius omissionem, nihil tamen mutare possum temere, quoad in planetis fuero expeditus. Nam potest contingere, etiam sic invariata Tychonica hypothesi error 6′. Si jam mutem hanc aequandi rationem, accedent alia 4′. Sic interdum posset per meam mutationem error contingere 10′ vel 11′; ita in reprehensionem inciderem cum mea mutatione.“* Hieraus ist auch klar, dass Kepler, wie ich schon bemerkte, die beiden Fehler, die er dem Anschein nach aus zu grosser Hochachtung vor Tycho's Genauigkeit getrennt halten zu müssen glaubte, nur hätte addiren müssen, um das Richtige zu haben.

3) Man beachte wohl, dass Kepler hier nur von der Beseitigung der Brahe'schen Inconsequenz redet; er will sagen, bevor die Aenderung, die er vor hatte, durchgeführt sei, würde besser das Flickwerk Tycho's beibehalten, weil es den Fehler wenigstens verringere.

4) O. O. VI, 571. Auf eine Erklärung einzelner Ausdrücke in dieser Stelle kann ich mich nicht einlassen; dies erforderte zu viel Raum, und gehört nicht hierher. Höchst sonderbar ist, dass Kepler die vorher erwähnte Idee einer zweifachen Abweichung noch nicht aufgegeben hat. Daher hält er an der Erhöhung des Maximums der Variation auf 49′ bis 51′ fest, und zerbricht sich den Kopf, warum das von seiner Theorie hier geforderte Maximum so stark den von Tycho aufgestellten Betrag überschreite. Die Schuld an diesem Missgriff scheint mir daran zu liegen, dass seine verunglückte Erklärung der Variation die Erhöhung des von Tycho richtig angegebenen Maximums forderte, und so Kepler verhinderte, die beiden Abweichungen von den Beobachtungen als Wirkungen derselben Ursache aufzufassen. Hätte er so verfahren, so hätte er sogleich die Ueber-

Kepler, die von ihm supponirte Ursache fordere ein Maximum von $21^m\ 40^s$; also ein so überraschend genaues Resultat, dass man geneigt ist, im Hinblicke auf Kepler's frühere Erklärungen[1]) sich unter dieser Ursache etwas sehr Vortreffliches vorzustellen. Aber die Enttäuschung bleibt nicht lange aus.

Schon gleich Anfangs hatte Kepler, wie man sich erinnern wird, auf eine dritte mögliche Ursache hingewiesen, dass nämlich die tägliche Rotation der Erde von der Entfernung der Erde von der Sonne abhängig sei,[2]) und zwar im Winter schneller, im Sommer langsamer erfolge, so dass der Mond scheinbar im Winter langsamer, im Sommer schneller thatsächlich gleiche Bogen durchlaufe. Und in der That! Diese und keine andere ist die soeben von Kepler bezeichnete Ursache. Der Vorwurf, Kepler habe irrthümlich ein drittes Element der Zeitgleichung angenommen, ist also begründet.

Zunächst ist die Frage berechtigt, wie Kepler denn sich überhaupt zu einer für unsere mechanischen Begriffe so absurden Auffassung bekennen; dann, wie er derselben sogar seine ältere merkwürdig correcte Auffassung opfern konnte?[3])

In Bezug auf die erste Frage stand zunächst ein wesentliches Hinderniss von Seite der damaligen Beobachter nicht im Wege. Kepler selbst gesteht zu,[4]) dass auch bei den übrigen Planeten sich so eine Ungleichheit bemerkbar machen müsste; weist aber darauf hin, dass die Wirkung bei allen mit einziger Ausnahme des Mondes eine so geringe sei, dass sie von den Beobachtungsfehlern verdeckt werde.

Was dann die uns sofort einleuchtende mechanische Unmöglichkeit betrifft, so war dieselbe für Kepler nicht vorhanden; er kannte von dem, was wir „Trägheit“ nennen, nur die eine Seite, dass ein Körper ohne eine auf ihn einwirkende Kraft nicht in Bewegung kommt, während ihm die Vorstellung mangelte, dass eine einmal in Bewegung befindliche Masse in stets gleichbleibender Bewegung von aus sich unbegrenzter Dauer verharrt. Daher die

---

einstimmung des von seiner Theorie geforderten Betrages mit der Wirklichkeit sehen müssen. Natürlich fand er deshalb auch immer wieder neue Differenzen zwischen Beobachtung und Theorie.

1) Siehe besonders S. 210 vor. Jahrg.

2) Vgl. S. 218 Anm. 4 med.

3) Den genauen Zeitpunkt dieses Umschwungs in Kepler's Ideen festzustellen gelang mir nicht; ich fand zu wenig Anhaltspunkte. Nur so viel kann ich als sicher bezeichnen, dass Kepler im Jahre 1607 noch der früheren Ansicht war, dass aber Ende des Jahres 1616 die Frage bereits entschieden war; denn O O. III, 655 findet sich eine Studie Kepler's aus diesem Jahre (jedenfalls zweite Hälfte des Jahres, wegen der S. 4 citirten Stellen) mit der Aufschrift: „Consideratio tertiae partis aequationis temporis.“

4) Vgl. S. 211.

Grundidee (die zugleich der Grundirrthum ist) seiner Theorie von der Centralbewegung, die sich aus seinen eigenen Erklärungen so etwa zusammenstellen lässt: Die Sonne rotirt um ihre eigene Axe, weil sie, und überhaupt alle um ihre Axe rotirenden Himmelskörper, „nicht allein bei ihrer Erschaffung von der göttlichen Allmacht den Impuls zur Rotation empfingen, sondern in derselben kraft der ihnen innewohnenden bewegenden Seele zu verharren scheinen.[1]) Er bemerkt dann noch, dass sich die *„diuturnitas et perennitas"* der Bewegung sonst kaum erklären lasse. Diese Bewegung der Sonne um ihre Axe bewirkt die Centralbewegung der Planeten auf folgende Weise:[2]) „Gleichsam als Hände dient der Sonne eine von ihrem Körper ausgehende, in den Weltraum geradlinig sich ausbreitende Kraft, welche vermöge ihrer Eigenschaft als „Species" des Sonnenkörpers mit diesem rotirt, wie ein überaus reissender Wirbel,[3]) indem sie in ihrer ganzen Ausdehnung mit der gleichen Geschwindigkeit wie die verhältnissmässig kleine Sonne den Weltraum durcheilt." Diese Kraft vergleicht er in Bezug auf ihre scheinbare Fernwirkung mit der magnetischen. Er erklärt,[4]) falls die Sonne nicht rotirte, gäbe es auch keine Centralbewegung der Planeten, sondern dieselben würden theils unaufhörlich auf die Sonne lossteuern, bis sie dieselbe berührten, falls sie den verwandten Pol derselben zugekehrt hätten, theils von derselben bis zu den Fixsternen abgestossen, wenn ihr entgegengesetzter Pol gegen die Sonne hingerichtet wäre, oder diejenigen,

---

1) Epit. Astron. Copern. L. IV. P. II. (O. O. VI, 343 flg.): *„Dictum est libro primo, et hoc corpus, et si quod aliud circa suum axem volvitur, non tantum in ipso rerum exordio ab omnipotentia creatrice fuisse in gyrum actum, sed etiam videri continuare hunc motum praesidio animae motricis."*

2) L. c.: *„Pro manibus est ipsi virtus sui corporis, lineis rectis in omnem mundi amplitudinem emissa, quae eo ipso, quod est species corporis, una cum corpore Solis rotatur instar rapidissimi vorticis, totam illam circuitus amplitudinem, ad quantamcumque pertingit, aeque celeriter pervagans, atque Sol in angustissimo suo spatio circa centrum se convertit."*

3) Die „Cartesianische" Wirbeltheorie kann also nicht einmal die Originalität des Ausdruckes beanspruchen.

4) L. c. Auf die Frage: *„Ut vim turbinationis Solis rectius intelligam, dic, quid censeas futurum fuisse, si Sol non turbinaretur?"* lautet die Antwort: *„... sic cogitandum est etiam de Sole, quod si hic non convolveretur circa axem suum, nullus etiam primariorum planetarum* [im Gegensatz zu den Satelliten] *circa Solem esset circumiturus, sed pars eorum adnavigaret ad Solem perpetuo, donec uniretur ipsi ad contactum, pars, quae posticum Soli obvertit, expelleretur versus fixas, qui vero latus praebent Soli, illi haererent suo loco penitus immobiles, luctante virtute Solis tractoria cum repulsoria ... Cum* [vero] *Sol* [circa suum axem rotatus] *illa virtute sui corporis arripuerit planetam, seu trahens illum seu repellens, seu dubius inter utrumque, secum etiam circumducit illum ... Trahendo quippe et repellendo retinet, retinendo circumducit."* Damit ist auch die Nichtidentität beider Kräfte ausgesprochen.

welche sich im magnetischen Gleichgewicht befänden, würden unbeweglich in ihrer Stellung verharren. Durch die Achsendrehung der Sonne werde diese Wirkung abwechselnd auf jeden ausgeübt, und so „erhalte die Sonne die Planeten in ihrer Bahn durch wechselweise Anziehung und Abstossung, und führe sie so im Kreise herum". Nun muss noch erklärt werden, warum die Planeten nicht alle gleichzeitig einen Umlauf vollenden. Kepler giebt zu, dass dies der Fall sein müsste, wenn nicht noch ein anderer Factor[1]) in Betracht käme. „Aber es wurde bereits gesagt,[2]) dass ausser dieser bewegenden Kraft der Sonne den Planeten selbst noch eine natürliche Trägheit zur Bewegung innewohne,[3]) welche in einer Neigung besteht, nach Art der Materie überhaupt, an einem Orte zu verharren. Die bewegende Kraft der Sonne und die Unfähigkeit des Planeten, sich zu bewegen, oder die Trägheit seiner Materie liegen also mit einander im Kampfe; beide siegen theilweise, jene bewegt den Planeten, diese entzieht den Planeten in etwas den Fesseln, in welche ihn die Sonne geschlagen, so dass er immer wieder von anderen Strahlen jener kreisenden Kraft, die gleichsam eine Sonnenhülle bildet, erfasst wird, von jenen nämlich, die unmittelbar denjenigen folgen, welchen der Planet sich soeben entwunden hatte." Die verschiedene Winkelgeschwindigkeit der Planeten endlich erklärt Kepler aus zwei Ursachen: 1. Weil diese von der Sonne ausströmende Be-

---

1) Schon das dritte Element! Dies wird meistens übersehen, dass bei Kepler's Theorie eine bedeutende Zahl von Mitursachen in Betracht kommen. Vielleicht komme ich bei einer andern Gelegenheit einmal auf dieselbe ausführlicher zurück. Hier muss ich mich auf das zum Verständniss seines Standpunktes Nothwendige beschränken, weshalb ich auch alle Details auslasse und nur die Grundzüge biete. Wenn das strenge Wort Delambre's (Hist. de l'astronom.): *„J'aimerais encore mieux les sphères solides d'Aristote, que les tourbillons de Descartes. Avec ces sphères on a du moins fait des planétaires, qui représentent en gros les mouvements célestes, — on a pu trouver des règles approximatives de calcul; on n'a jamais pu tirer aucun parti des tourbillons, ni pour le calcul, ni pour les machines"*, Geltung haben soll, so ist die Wirbeltheorie Descartes', welche der Newton'schen Gravitationstheorie lange Zeit vorgezogen wurde, ohne Bedenken als eine Verschlimmbesserung der Kepler'schen zu bezeichnen; denn dieser hat gezeigt, dass er sehr wohl die Berechnung auf seine Theorie anzuwenden verstand.

2) L. c.: *„Dictum est hactenus, praeter hanc vim Solis vectoriam esse etiam naturalem inertiam in planetis ipsis ad motum, qua fit, ut inclinati sint, materiae ratione, ad manendum loco suo. Pugnant igitur inter se potentia Solis vectoria et impotentia planetae, seu inertia materialis; utraque suam partem habet victoriae, illa planetam sede sua emovet, haec suum, hoc est planetae, corpus nonnihil eripit e vinculis illis, quibus a Sole erat prehensum, ut ab alia atque alia circularis hujus virtutis et veluti circumferentiae Solaris parte apprehendatur, ab ea scilicet, quae proxime succedit illi, ex qua planeta se modo extricaverat."*

3) Bis hierher richtig; aber, um einen von Kepler oft gebrauchten Ausdruck anzuwenden: *„hic incipit error!"*

wegungskraft[1]) mit dem Abstande von der Sonne schwächer wird, da sie sich auf einen grösseren Raum vertheilt, so dass die „Vis resistentiae" der Planeten mit grösserem Erfolg sich ihrer Wirkung entzieht, je weiter der Planet von der Sonne absteht. Kepler fügt bei: *„Haec est causa potissima"*.[2]) 2. „Einigen Einfluss hat auch die Grösse der Trägheit oder des Widerstandes der Planetenkörper."[3])

Im 6. Kapitel[4]) geht Kepler auf die tägliche Rotation der Erde um ihre Axe und die Bewegung des Mondes über,[5]) und wendet die aufgestellten Grundsätze auf diese an. Er wiederholt, dass, wie alle rotirenden Körper,[6]) so auch die Erde durch ein innewohnendes Lebensprincip[7]) in der kreisenden Bewegung erhalten werde. „Eine[8]) physische und nicht scheinbare Wirkung [dieser Rotation], die allen Hauptkörpern [im Gegensatz zu Satelliten und Planeten ohne Satelliten] und sogar der Sonne selbst gemeinsam ist, ist die, dass die Hauptkörper durch die ihrem in Rotation befindlichen Körper entströmende „Species" ihre Tra-

1) Wohl zu unterscheiden von der quasi-magnetischen Anziehungs- und Abstossungskraft, welche nach Kepler allerdings die andere Kraft begleitet: *Ut „species lucis Solaris defert etiam calorem ipsum, ... ita etiam species corporis Solaris immateriata ... comitem habet speciem illius virtutis energeticae in corpore Solis, quae nititur unire sibi similia, repellere dissimilia"* (L. c.).

2) L. c. — Dühring (Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. 2. Aufl. S. 178) drückt sich also nicht tadellos aus, wenn er sagt: „Die Verschiedenheiten in den Umlaufsgeschwindigkeiten der Planeten wurden von ihm [Kepler] als Wirkungen der verschiedenen Grössen der Massenträgheit aufgefasst, die von der in der rotirenden Sonne entspringenden Umschwungskraft zu überwinden wären." Dies ist nur Nebenursache.

3) L. c. *„Aliquid etiam causae est in ipsa planetariorum globorum inertia vel renitentia majori vel minori."* Richtig ist, das Kepler die Grösse dieser *„inertia"* von der Masse abhängig macht.

4) L. c. (O. O. VI, 359 flg.)

5) Schon die Ueberschrift lautet: *„De revolutione corporis Terrae diurna circa suum axem, ejusque effectu in movenda Luna, et proportionibus inter se anni, mensis et diei."*

6) Vgl. S 7 Anm. 1.

7) *„Insito principio animali aut simili."*

8) L. c.: *„Effectus physicus et verissimus, communis omnibus primariis, ipsique adeo Soli, est iste, quod primarii per sui corporis in circumvolutione constituti speciem egressam cient suos secundarios, ut Terra Lunam, efficiuntque, ut secundarii in eandem plagam sequantur, tardius tamen, et quasi relicti post tergum."* Ein Vergleich mit den aufgestellten Grundzügen der Theorie Kepler's zeigt sofort, dass die Satellitensysteme [er wendet sie nämlich auch auf die vier Jupitertrabanten an] bei Kepler ein Miniaturbild des Sonnensystems darstellen. Kepler geht so weit, auf die Frage, warum der Mond nicht um seine Axe rotire [*„maculis id arguentibus"*; die mit dem Umlauf gleichzeitig vollendete Rotation lässt er also nicht als *„gyratio"* gelten] zu antworten: *„Cur autem hoc, nisi quia circa Lunam nullus amplius planeta circumire cernitur? Nullum igitur habet Luna planetam, cui motum inferat gyratione sui corporis; gyratio igitur in Luna, ut supervacua, fuit omissa."* (O. O. VI, 362.)

banten bewegen, so die Erde den Mond, und Ursache sind, dass die Trabanten in derselben Richtung [der Rotation] folgen, aber langsamer, und gleichsam hinter dem Rücken zurückbleibend."

Diese Theorie, so fehlervoll sie ist, hätte Kepler nicht gehindert, seinen ersten Gedanken beizubehalten und die Mondgleichung definitiv aufzustellen;[1]) auch glaube ich nicht, dass die Schwierigkeit der quantitativen Begründung derselben ihn abgeschreckt hat; er war in Beseitigung solcher Hemmnisse von unerschöpflicher Erfindungsgabe; — es scheint ihm hier seine phantastische Vorliebe für mystische Wunderlichkeiten einen bösen Streich gespielt zu haben.

Dass die Erde gerade $365^1/_4$ Rotationen[2]) im Jahre vollbringe, und nicht 360, das ging ihm nicht ein. Daher die Folgerung:[3]) „Dass das der Erde innewohnende Princip die Rotation nicht allein besorge, sondern hierbei von der Sonne unterstützt werde, folgt aus zwei Gründen: Erstens, weil die Anzahl der jährlichen Erdrotationen, $365^1/_4$, grösser ist als die wenig verschiedene typische Zahl 360. Denn wenn die innere Kraft der Erde nicht durch den beständigen Einfluss der Sonne verstärkt würde, wäre es angemessen, dass die Erde dann etwas langsamer rotirte, so dass sie in dem gleichen Zeitraum eines Jahres weniger Umdrehungen, nämlich nur 360 ausführen würde. Aus diesem Princip folgt, dass die übrigen, gleichsam überzähligen $5^1/_4$ Umdrehungen zu den 360 infolge der Einwirkung der Sonne hinzutreten".

---

1) Ich verweise nur auf eine Stelle der „Epitome" (L. IV. P. II. – O. O. VI, 362): „*Praeter proprium circuitum Lunae circa Telluris globum, de quo hactenus, movetur etiam totum coelum Lunae communi motu cum centro Telluris circa Solem sub Zodiaco ut ceteri planetae: qua ex compositione fit, ut Luna respectu quidem centri Solis semper teneat directum cursum in consequentia* [*signa*], *non tantum tunc, quando plenam illam et Sol et Terra extentis spatiis incitant in plagam eandem* [nach seiner Auffassung von der Centralbewegung], *sed etiam tunc, quando exstinctam seu vacuam* [Neumond] *Sol quidem prorsum* [direct], *Tellus vero (respectu quidem centri Solis) retrorsum* [retrograd] *impellit. Nam hic impulsus ex Terra adhuc multo est minor illo ex Sole, quare diminuit quidem hic illum in consequentia latum* [die directe heliocentrische Geschwindigkeit], *at non penitus absorbet, multo minus proficit in contrarium.*" — Ganz consequent hätte Kepler ausführen können: da die relative Kraft des Sonnenwirbels, der dem Erdwirbel entgegenwirkt, bei Sonnennähe (Winter) grösser sei, verzögere sich im Winter die Umlaufsbewegung des Mondes um die Erde.

2) Eigentlich sind es $366^1/_4$; aber nach Kepler's Auffassung (cf. S. 9 n. 8) nur $365^1/_4$.

3) L. c.: „*Id vero* [*principium animale*] *in Terra gyranda non esse solitarium, sed adjuvari a Sole, colligitur ex duobus documentis: primo, quia numerus revolutionum Terrae diurnarum in anno, qui est 365 cum quadrante, excedit vicinum archetypicum 360. Consentuneum est enim, nisi vis motrix Telluris interna vegetaretur a praesentia Solis perpetua, Terram aliquanto lentius circa suum axem incessuram fuisse, sic ut in eodem spatio annuo pauciores revolutiones, puta solas 360, factura fuerit. Hoc posito sequitur, residuas et veluti supernumerarias revolutiones quinque cum quadrante accedere illis 360 propter adjumentum ex Sole.*"

Die Art und Weise, wie er im weiteren Verlaufe diesen Gedanken ausführt, zeigt deutlich, dass er nicht etwa auf denselben durch auftauchende Schwierigkeiten hingewiesen wurde und ihn dann als rettenden Einfall aufgriff, wie Tycho dies gethan hatte, sondern dass diese mystische Beziehung das zuerst und um seiner selbst willen Gewollte war. Die Einwendung, ob nicht etwa die Sonne allein die Rotation der Erde bewirke, beantwortet er mit:[1]) „Unmöglich . . . . ., denn wenn die Zahl 365 nicht durch das Zusammenwirken zweier gesonderter Ursachen entstünde, so gäbe es keinen Grund, warum die Anzahl [der Rotationen] nicht eine der typischen Zahlen darstellte, das heisst eher eine abgerundete, als eine aus den untheilbaren, unedlen und gebrochenen."

Dieser Idee kam nun noch Tycho's resp. Longomontan's Vorgehen zu Hilfe. Als zweiten Grund für seine Theilung der Zahl $365^1/_4$ führt nämlich Kepler Tycho's Weglassung des zweiten Theils der Zeitgleichung an, welche durch sein drittes Element der Zeitgleichung gerechtfertigt werde, weil die Wirkung des zweiten durch die Wirkung des dritten Theils aufgehoben werde.[2]) Dies Verfahren war ganz consequent; denn ist die Axendrehung der Erde einmal theilweise dem Einfluss der Sonne zugeschrieben, so muss ihre Intensität auch von der Entfernung der Sonne abhängig sein.[3]) Ferner bemerkt Kepler:[4]) „Ist diese physische Zeitgleichung einmal aufgestellt, so müss-

1) L. c.: „*Repugnat ... nam, si numerus 365 non esset compositus ex duobus effectibus duarum causarum distinctarum, causa nulla esset, cur ille non sit unus ex archetypicis, id est rotundis potius, quam ex inarticulatis et ignobilibus et fractis.*"

2) Dies ist nicht schwer einzusehen. Wie in Anm. 5 zu S. 2 gezeigt wurde, hatte Kepler diese Auslassung des zweiten Theils der Zeitgleichung in den Tabellen [dies ist wohl zu beachten; ebenso, dass Tycho dies nur einseitig bei den Mondtafeln that, Kepler überall] früher mit der Mondgleichung gerechtfertigt; denselben Dienst leistet ihm dieses dritte Element der Zeitgleichung. Infolge desselben rotirt die Erde im Winter (Perihel) rascher, während infolge des zweiten Theils die Sonne einen grösseren Weg zurücklegt, also auch die Erde um einen entsprechenden Bogen mehr bis zur nächsten Culmination zu rotiren hat; diese beiden Ungleichheiten heben sich auf, vorausgesetzt, dass sie denselben Betrag haben. Dies jedoch verursachte Kepler immer Schmerzen, denn sein dritter Theil war der Theorie nach grösser als der zu compensirende zweite Theil.

3) L. c.: „*Nam quia haec temporis aequatio* [Kepler's drittes Element] *ponit revolutionem Telluris aestivam paulo tardiorem hiberna, id equidem ex insito Terrae principio nequit esse, ut quae solent perpetuo esse uniformia, sed oportet esse ex intervallis Solis et Terrae, quae sunt aestate nostri hemisphaerii longiora quam hieme.*"

4) L. c.: „*Posita aequatione temporis physica, tunc si Sol omnia faceret, integrae Telluris revolutiones diurnae proportionales essent intervallis Solis et Terrae; at postulat quantitas hujus aequationis temporariae, ut non integrae revolutiones, sed particulae saltem aliquae minutae revolutionum proportionentur illis intervallis variabilibus.*"

ten, wenn die Sonne allein Alles thäte, die vollen täglichen Umdrehungen der Erde den Entfernungen von der Sonne proportional sein; aber die Grösse dieser Zeitgleichung fordert, dass nicht die vollen Umdrehungen, sondern nur kleine Bruchtheile derselben den Entfernungen proportionirt seien."

Damit war das Schicksal der schönen Mondgleichung besiegelt. Kepler hatte die Wahl zwischen zwei Erklärungsweisen einer vorhandenen Ungleichheit; beide hatten für die Berechnung dieselbe Wirkung; beide waren für den damaligen Stand der Mechanik gleichberechtigt. Die eine streifte so nahe die Gravitationstheorie und wurde von Kepler auch in einer Weise interpretirt, dass Jemand, der nicht weiss, dass Kepler mit manchen Worten noch Begriffe von fraglichem Werthe verbindet, glauben könnte, das Exposé eines modernen Astronomen zu lesen.[1]) Die andere, für uns ungereimt, hatte für Kepler den Vorzug, dass sie seine Lieblingsidee, die absolute Proportionalität aller Verhältnisse im Weltraum, scheinbar bestätigte. Kepler wählte daher die letztere, und brachte die Mondgleichung seinem Phantasiegebilde[2]) zum Opfer.[3]) Dies ist zu bedauern; aber Eines ist sicher: Niemand vor Kepler hat die jährliche Gleichung des Mondes so genau definirt, ihren Grund mit solchem Scharfsinn bezeichnet, ihren wahren Betrag mit einer für jene Zeiten und Beobachtungsmittel so überraschenden Genauigkeit bestimmt,[4]) sie auch ausdrücklich „*annua inaequalitas Lunae*" genannt und als die seine bezeichnet wie Kepler; er kann mit Recht den Ruhm des Entdeckers für sich in Anspruch nehmen, wenn er auch später, durch einen blendenden Einfall bestochen, sich bestimmen liess, sie mit einer für den damaligen Stand der Mechanik gleichwerthigen Erklärungsweise zu vertauschen.

Im Anschlusse an diese Darlegung will ich noch kurz die gleich auf die Definition der jährlichen Gleichung folgende Stelle des Briefes vom 9.

1) Besonders vor. Jahrg. S. 210 med. (209 N. 2), S. 213 fin. (N. 2), S. 219 (218 N. 4).

2) Er selbst sagt in einem Briefe an Remus vom 31. August 1619 (O. O. II, 428): „*Si tamen abjicienda temporis aequatio mea, peribit una bona phantasia.*"

3) Es scheint, dass er sich die Scrupel darüber nicht ganz nehmen konnte; wenigstens sagt er an einer Stelle der „Epit. Astr. Cop." L. VI. P. I. (O. O. VI, 436): „*Nolim tamen cum quopiam contendere pertinacius super hac tertia causa aequationis. Nam si quis observationes Brahei in Luna conciliaverit propius per usitatam temporis aequationem, ei lubens ego palmam cedam eversae hujus partis aequationis temporis.*" Dies gelang natürlich Niemand, weil die Forderung eine unmögliche war; dies dritte Element der Zeitgleichung ging daher in die „Tabulae Rudolphinae" über (O. O. VI, 571).

4) Auch die Bestimmung aus der andern Hypothese ist ja eigentlich nichts als die jährliche Gleichung in einem andern Kostüm.

und 10. April 1599 besprechen, da dieselbe mit dem Gegenstande dieses Aufsatzes im engsten Zusammenhange steht.

Kepler weist im Briefe vom 29. Januar 1599 an Herwart[1]) auch darauf hin, dass im Laufe der Jahrhunderte eine Veränderung im Mondlauf eingetreten sei, und nimmt nur vorläufig an (bis eine genaue Untersuchung mehr Anhaltspunkte ergeben habe), dass die jetzt giltigen Elemente auch für die Zeiten des Ptolemaeus richtig seien. Diese allerdings sehr vage Anspielung auf eine Säculargleichung des Mondes veranlasste Herwart, zu versuchen, welche Differenzen sich für Zeit und Grösse der Finsternisse vor Christi Geburt ergeben, wenn man sie nach den Prutenischen (Elemente des Copernicus) und Alphonsinischen Tafeln (Elemente des Ptolemaeus) berechnet. Im Brief vom 16. März[2]) theilt er Kepler zwei solche Berechnungen mit, und bemerkt, es ergäben sich für das zweite Jahrhundert vor Christus Differenzen bis zu 3 Stunden (also viel grösser als zur Zeit Kepler's).

Hierin findet Kepler eine Bestätigung seiner neuen Mondgleichung, die auf folgendem Gedankengange basirt.[3]) Die jetzigen

---

1) Es ist dies die S. 207 vor. Jahrg. ausgelassene Stelle aus O. O. I, 412: „*Memini sane, in Ptolemaico eclipsium calculo ab Albategnio* [es ist dies der arabische Astronom Mohammed ben Geber ben Senan Abu Abdallah al. Batani, geb. um 850 zu Batan in Syrien, gest. um 929] *deprehensam anomaliam et discrepantiam abservatarum eclipsium ab iisdem calculatis, eamque aliam quam haec hodierna est. Ideo priusquam certi quid statuatur, illius etiam causa reddenda erit. Praesupponemus igitur, hanc anomaliam annuam hodiernam eclipsium perpetuum esse Prutenici calculi comitem, si is retro usurpetur.*“

2) Abgedruckt: O. O. I, 415: „*Praeterea in eclipsibus*“, und „*Consimiliter*“.

3) Zum Vergleiche setze ich Kepler's Worte hierher (U. W. C., S. 12 Z. 77 flg.) und bezeichne die Belegstellen mit Buchstaben, welche im Text wiederkehren. Die orakelhaft dunkle Stelle lautet: „*Denique allegas in genere eclipses ante Christum, quae ab utroque calculo trium fere horarum differentiâ prodantur. Id me quoque confirmat. Nam quia calculus meus observationibus hodiernis accommodatur,* [a]) [zu ergänzen: *et quia*] *observationes Alphonsino calculo propinquant,* [b]) *ergo et ego Alphonsino calculo propinquo:* [c]) *quod quo constantius facio hoc verius.* [d]) *At etiam ante Christi tempora hoc facio,* [e]) *quod sic probo. Pendet mea correctio et introducta lunationum differentia a Solis eccentricitate; illa olim major fuit,* [f]) *quare et meam differentiam majorem fuisse necesse est: plane ut et Prutenicae longius illo tempore ab Alphonsinis dissident.* [g]) *Haec dico non* ἐπιστημονικῶς *sed* στοχάζων.[h]) *Quantum enim Alphonsinis in rimanda antiquitate tribuendum sit, Reinholdus in Prutenicis testatur, qui Copernico id praecipue laudi dat, quod doceat antiquas eclipses computare, cum antea nemo id potuerit. Sed videntur tamen Alphonsini praecipue in Luna fuisse diligentes. Et respexerunt illi fortasse potissimum ad eclipses vernales, sicut Copernicus ad aestivas et hybernas. Hinc illi in aestivis et hybernis, Copernicus in vernalibus et autumnalibus errant. Erat Copernicus majoribus rebus intentus, ordinandae Solis eccentricitate, definiendae quantitati anni. Haec ut obtineret, impossibile fuit aliter de eclipsibus docere, nisi simul novam in Lunam et annuam inaequalitatem introduceret; quod cum ille abhorreret, ego facio.* [i]) *Fortasse id quoque ad rem pertinet monere, si Pto-*

Beobachtungen werden durch Kepler's verbesserte Rechnung gut dargestellt;[a]) andererseits stimmen dieselben besser mit den Alphonsinischen Tafeln überein[b]) als mit den Prutenischen;[1]) also stimmt auch Kepler's verbesserte Rechnung mit den Alphonsinischen Tafeln.[c])

Nun stellt sich heraus, dass auch für die früheren Jahrhunderte die Alphonsinischen Tafeln der Wirklichkeit näher liegen. Dies beweist Kepler so. Die Excentricität war früher grösser[f]),[2]) also mussten die Finsternisse noch mehr als jetzt sich im Frühjahr verspäten, im Herbst verfrühen,[3]) oder die Differenz der Beobachtungen und der Prutenischen Tafeln musste noch grösser sein als jetzt.[4]) Herwart findet nun in der That für die früheren Jahrhunderte bedeutend grössere Differenzen auch zwischen den Prutenischen und Alphonsinischen Tafeln, ein Zeichen, dass die Alphonsinischen Tafeln mit den Beobachtungen auch für diese entlegenen Zeiten besser übereinstimmen müssen.[5]) Dass dieser Schluss nicht ganz correct sei, scheint Kepler übersehen zu haben. Hatte er aber einmal die Ueberzeugung, dass die Alphonsinischen Tafeln allen Beobachtungen besser genügen, so war es ganz consequent, in der Uebereinstimmung mit denselben das Kriterium der allgemeinen Giltigkeit seiner Mondgleichung zu suchen.[d]) Die Frage war also dann die: Folgt auch aus der jährlichen Gleichung für diese Zeiten eine Vergrösserung der Differenz zwischen der Wirklichkeit und den Prutenischen Tafeln? Denn dann näherte sich auch für diese Zeiten die jährliche Gleichung in ihrer Wirkung den Alphonsinischen Tafeln,[g]) mithin der Wirklichkeit.[d]) Der Beweis hierfür[e]) war sehr einfach. Als Grund, warum seine jährliche Gleichung in ihrer Wirkung mit den Alphonsinischen Tafeln besser übereinstimmt als mit den Prutenischen, ist die grössere Excentricität, welche jenen zu Grunde liegt und welche nach Kepler's Ansicht in ihrer Wirkung auf die Be-

---

lemaica Solis eccentricitas retineatur, consensuras hodie observationibus eclipses Copernici.[k]) *Quam enim ego Lunae annuam inaequalitatem tribuo, id tantundem est, ac si Lunâ aequaliter currente Solis eccentricitas augeretur*".[l])

1) Zu diesem Schluss ist Kepler durch Herwart's Versuche gekommen. Vgl. d. Anmerkung: „*Quando igitur observatio*" in O. O. I, 415.

2) Im Brief vom 6. August 1599 (U. W. C., S. 73 Z. 2307) schreibt er diese Ansicht Copernicus zu mit den Worten: „*augeretur Solis eccentricitas, quam tamen Copernicus probavit esse diminutam*".

3) Vgl. O. O. I, 415: „*Ergo omnino hic error pendet ab eccentricitate, quocunque modo, quia videmus, cum aucta eccentricitate augeri et differentiam*"

4) Die Prutenischen Tafeln sind Copernicanisch, es liegt ihnen also die von Copernicus angegebene Excentricität zu Grunde; die Alphonsinischen Tafeln dagegen sind verbesserte Ptolemäische, daher auf die von Ptolemaeus angenommene Excentricität basirt.

5) Kepler antwortet auch demgemäss auf Herwart's Frage, welchen Tafeln für die früheren Zeiten mehr Glauben zu schenken sei: „*Alphonsinis existimo.*"

rechnung der Zeit der Finsternisse vollkommen gleichwerthig ist mit seiner jährlichen Gleichung,[1]) bezeichnet.[1]) Daher sei Copernicus, der, um anderen, grösseren Schwierigkeiten zu entgehen, die Excentricität verminderte, nothwendig[2]) mit dem Laufe des Mondes in Conflict gekommen, weil er den von Kepler vorgeschlagenen Ausweg nicht wählen wollte.[i]) Andererseits würden die Prutenischen Tafeln stimmen, wenn die grössere Excentricität der Alphonsinischen ihnen erhalten bliebe.[k])

Auf diese Ansicht von der Gleichwerthigkeit (für die Berechnung) der jährlichen Gleichung und der Mittelpunktsgleichung der Erdbahn gestützt, schliesst Kepler: Der Betrag meiner neuen Mondgleichung ist von der Excentricität abhängig; die Excentricität war früher grösser; also muss auch das Maximum der jährlichen Gleichung früher grösser gewesen sein; dieselbe bewirkt also im selben Sinne wie die Vergrösserung der Excentricität eine Vergrösserung der Differenz mit den Prutenischen Tafeln;[g]) die Probe ist gemacht.

Dass Kepler dies nur als Conjectur[h]) angesehen wissen will, ist bei den offenbaren Mängeln, an denen sein Exposé leidet, sehr begreiflich. Aber Kepler hat sich dabei auch an einer wichtigen Entdeckung vorbeiphilosophirt. Mit dem Princip: *„Pendet correctio cursus Lunae a Solis eccentricitate; illa olim major fuit“*, war er sehr nahe an die Grundlage der Säculargleichung des Mondes herangekommen. Auch seine Auffassung des Grundes der jährlichen Gleichung, wie wir ihn denselben formuliren sahen, wäre ganz geeignet gewesen, den richtigen Schluss zu ermöglichen. Allein hier war er einmal zu sehr von dem Gedanken der jährlichen Gleichung eingenommen; und später glaubte er selbst nicht mehr daran, dass die Excentricität der Erdbahn abgenommen habe.[3])

---

1) Vgl. O. O. I, 413: *„Si causa erroris eclipsium conferretur in cursum Solis, statuendum esset, majorem esse excentricitatem Solis duplo fere, quam a calculo asseritur.“*

2) O. O. I, 415: *„coactus“*.

3) Brief an Crüger vom 1. Mai 1626 (O. O. VI, 50). Vgl. „De motibus stellae Martis“, P. V. C. LXIX, n. III. (O. O. III, 432).

Berichtigungen.

Im vorigen Jahrg., S. 210 Z. 6 v. u. lies: folgend. Jahrg., S. 10 Anm. 1 statt S. 46 Anm 1.

S. 214 Anm. 1 ist „oben“ zu tilgen.

S. 216. Im Original steht $3^s 43^0$; $3^s 44^0$ statt $4^s 13^0$; $4^s 14^0$.

Recensionen.

Lehrbuch der Potentialtheorie und ihrer Anwendung auf Elektrostatik und Magnetismus von ENRICO BETTI. Autorisirte deutsche Ausgabe, besorgt und mit Zusätzen, sowie einem Vorwort versehen von W. FRANZ MEYER. Stuttgart 1885. Verlag von Wilhelm Kohlhammer. XV, 434 S.

Das Buch von Clausius über die Potentialtheorie ist in dritter Auflage 178 S. stark; die von Grube herausgegebenen Vorlesungen Dirichlet's füllen 183 S.; die von Hattendorf herausgegebenen Vorlesungen Riemann's (Schwere, Elektricität und Magnetismus) 358 S.; Neumann's Werk über das logarithmische und das Newton'sche Potential nimmt 368 S. in Anspruch. Der rein äusserliche Vergleich ergiebt demnach einen bedeutenden Ueberschuss des heute uns vorliegenden Bandes über jene vier Werke, deren seither deutsche Leser sich vorzugsweise bedienten, um in die genannten Lehren genauer einzudringen. In der That bietet die Potentialtheorie ein Beispiel eines Lehrgegenstandes, welcher, je nachdem man in den Anwendungen weiter oder weniger weit greift, nach Bedürfniss ausgedehnt oder eingeschränkt werden kann. Der gelehrte Italiener, dessen in seiner Heimath mit Recht hochgeschätztes Werk Herr W. F. Meyer übersetzt hat, suchte eine gewisse Vollständigkeit derjenigen Probleme zu erreichen, deren Lösung überhaupt bisher den Schriftstellern über einzelne Aufgaben gelungen ist, und darin, sowie in manchen Herrn Betti eigenthümlichen Beweisführungen liegt die Berechtigung der Uebersetzung.

Das Hauptaugenmerk richtet Herr Betti auf die charakteristischen Eigenschaften der Potentialfunction, d. h. auf diejenigen bereits von Dirichlet stark betonten Eigenschaften, welche der Potentialfunction und nur ihr zukommen, so dass es genügt, ihr Vorhandensein zu beweisen, um zugleich den Nachweis geliefert zu haben, dass der betreffende Ausdruck das gesuchte Potential sei. Es ist das die gleiche Methode, nach welcher Dirichlet (§ 10 seiner Vorlesungen) das Potential eines homogenen Ellipsoides behandelt hat. Man kannte solche charakteristische Eigenschaften der Potentialfunction von drei-, zwei- und eindimensionalen Gebilden. Herr Betti hat (§ 12, S. 48—59) auch die entsprechenden Eigenschaften der Potentialfunction einer Doppelschicht abgeleitet, d. h. eines Gebildes, welches aus zwei Oberflächen σ und σ' besteht, wo σ' den Ort der Endpunkte der um ein constantes Stück ε verlängerten Normalen zu σ ist, wo $d\sigma'$ den

Endpunkt der in $d\sigma$ gezogenen Normalen bedeutet und die in $d\sigma$ und in $d\sigma'$ vorhandenen Belegungen gleichmassig ist, während endlich $d\sigma$ eine anziehende, $d\sigma'$ eine abstossende Wirkung im reciproken Quadrate der Entfernung auf einen gegebenen Massenpunkt ausübt. Die Bedeutung dieser Annahmen für die Elektricitätslehre ist an sich einleuchtend, und Herr Betti hat demnach den Vorrath der Hilfsmittel der Potentiallehre um ein sehr brauchbares Stück vermehrt, allerdings unter der bei Anwendung charakteristischer Eigenschaften selbstverständlichen Voraussetzung, das zu behandelnde Problem sei bereits gelöst, denn die genannte Methode kann begreiflicherweise nur beweisen, nicht aber auffinden, sie ist die Synthese zu einer vorhergegangenen Analyse. Bei verschiedenen Problemen wird uns denn auch jene Analyse nicht vorenthalten, so bei der Herleitung der Potentialfunction einer Ellipse (§ 15, S. 87—97), eines homogenen geraden Cylinders (§ 18, S. 106—110) u. s. w. Auch das Princip der Thomson'schen Bilder gehört zu den von Herrn Betti benutzten Hilfsmitteln, welches Herr Neumann gleichfalls in seinem oben genannten Werke mehrfach in Anwendung gebracht hat. Herr Betti verwerthet es ähnlich wie der Erfinder insbesondere in dem II. der Elektrostatik gewidmeten Abschnitte seines Buches. Eben diesem Abschnitte gehört eine Untersuchung über die Vertheilung der Gleichgewichtselektricität auf einer leitenden Kugelhaube (§ 14, S. 269 bis 295), eben ihm die Lehre von den Condensatoren (§ 16, S. 309—325) an. Aus dem III. und letzten Abschnitte, Magnetismus, führen wir nur den von Herrn Betti ermittelten Satz (S. 341) an: „Ist die Oberfläche eines magnetischen Körpers eine einfach zusammenhängende und ist die Anzahl ihrer Pole eine endliche, so ist diese Anzahl stets eine gerade."

Was Herrn Betti's Darstellungsweise betrifft, so können wir natürlich bei einem so schwierigen Gegenstande, wie die Potentialtheorie es unzweifelhaft ist, keine absolut leichten Entwickelungen erwarten; doch dürften einem richtig vorgebildeten Leser kaum unüberwindliche Schwierigkeiten begegnen. Unserem Geschmacke nach lesen sich freilich Dirichlet's Vorlesungen von allen von uns genannten Schriften am angenehmsten, schon deshalb, weil dort auch manche in Anwendung tretende analytische Lehren mit eingeflochten sind, welche, wie z. B. die Theorie der Kugelfunctionen, bei Herrn Betti einfach als bekannt vorausgesetzt sind.

Der Herr Uebersetzer hat noch sechs Zusätze am Schlusse des Bandes beigefügt, für welche man ihm Dank wissen wird. Der erste betrifft eine von ihm selbst herrührende, einen Dirichlet'schen Gedanken erweiternde Transformation des Ausdruckes Δ. Einige andere Zusätze sind nach Vorlagen von Herrn Dini bearbeitet. Endlich ist der Beweis der Gleichung $\Delta V = -4\pi\varkappa$ in seinen Hauptzügen mitgetheilt, welchen Herr Otto Hölder 1882 als Inauguraldissertation veröffentlicht hat.

CANTOR.

Die lebendige Kraft und ihr Mass. Ein Beitrag zur Geschichte der Physik von Dr. MAX ZWERGER. München, Lindenauer'sche Buchhandlung. 1885. (291 S.).

Mathematiker und Philosophen, welche sich an dem interessanten Streit um das Maass der Kräfte betheiligt haben, werden uns vorgeführt von der Entstehung des Gegensatzes zwischen Descartes und Leibniz bis zu der Lösung der Frage durch d'Alembert und Kant. Die Arbeiten der beiden Letzteren nämlich bilden den Schlussstein, welcher die Gegensätze vereinigt; dies ist die Meinung des Verfassers, obgleich der Eine den Begriff der lebendigen Kraft als völlig unfruchtbar für die Mechanik erklärt, während der Andere diesen Begriff zwar in der Natur, nicht aber in der Mathematik zulässt. Wie sehr namentlich Kant von der heutigen Auffassung in der betreffenden Erstlingsarbeit abweicht, zeigt sich darin, dass er nur für eine gewisse Grösse der Geschwindigkeit das Beharren der letzteren gelten lässt, nicht aber für unendlich kleine Geschwindigkeit, und dass er meint, die lebendige Kraft könne zum Theil von selber entstehen und vergehen. Der Verfasser hätte das Verdienstvolle seiner Arbeit wesentlich vermehrt, wenn er das historische Material einerseits nach unseren modernen Begriffen gesichtet und andererseits bis zu dem Zeitpunkt fortgeführt hätte, da durch die Einführung des Begriffes der Arbeit und Energie der Streit thatsächlich sein Ende gefunden hat.

J. HENRICI.

Ueber die Theorie der aufeinander abwickelbaren Oberflächen. Von J. WEINGARTEN. Festschrift der Königlichen Technischen Hochschule zu Berlin, 1884, S. 1—43.

Denkt man sich eine Oberfläche dadurch gegeben, dass die Coordinaten eines veränderlichen Punktes der Fläche als Functionen von zwei reellen unabhängigen Veränderlichen p, q dargestellt sind, und bezeichnet man durch $E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$ das Quadrat des Linienelementes der gegebenen Fläche, so erfordert die Bestimmung aller derjenigen Oberflächen, deren Theile auf die Theile der gegebenen Oberfläche abwickelbar sind, die allgemeinste Ermittelung dreier reellwerthigen Functionen x, y, z der Variabeln p, q, welche die drei nachstehenden simultanen partiellen Differentialgleichungen erfüllen:

$$\text{a}')\qquad \begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2 &= E, \\ \frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial z}{\partial q} &= F, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2 &= G. \end{aligned}$$

Unter Zugrundelegung specialisirter Formen des Quadrates des Linienelementes der gegebenen Fläche hat Edmond Bour (Théorie de la déformation des surfaces. Journal de l'école polytechnique, Tome XXII, cahier 39) die Lösung dieser Aufgabe in der Weise in Angriff genommen, dass er zunächst aus den gegebenen Gleichungen a') und den aus ihnen durch partielle Differentiation entstehenden Gleichungen die Unbekannten y, z eliminirte und so eine einzige partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung ableitete, welcher die Function x zu genügen hat und an welche wegen der Symmetrie der ursprünglichen Gleichungen auch die beiden anderen Functionen y und z gebunden sind. (Die entsprechende partielle Differentialgleichung für die allgemeine Form des Quadrates des Linienelementes der gegebenen Fläche ist später von Ulisse Dini entwickelt worden: „Sull' equazione differenziale delle superficie applicabili su di una superficie data." Giornale di Matematiche, ed. d. Battaglini etc., vol. 2, 1864, p. 282—288.)

In der Einleitung (S. 1—8) der vorliegenden Abhandlung wird die eben erwähnte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung („Differentialgleichung d") für die allgemeine Form des Quadrates des Linienelementes der gegebenen Fläche aus einigen von Gauss im 11. Abschnitt der Disquisitiones generales circa superficies curvas mitgetheilten Formeln in überraschend einfacher und eleganter Weise abgeleitet. Sodann wird als erstes und wesentlich neues Hauptresultat die Erkenntniss gewonnen, dass die Differentialgleichung d) in Bezug auf die ihr genügenden reellwerthigen Functionen x einen grösseren Umfang besitzt, als das Problem der Deformation der gegebenen Fläche vorschreibt. Hat man nämlich eine reellwerthige Function x, welche der partiellen Differentialgleichung d) Genüge leistet, so folgt daraus allein noch nicht, dass diese Function geeignet sei, mit zwei anderen Functionen y, z derselben Natur combinirt, die ursprünglich gegebenen Differentialgleichungen a') zu befriedigen. Hierfür ist vielmehr noch das Bestehen einer gewissen Ungleichung erforderlich, welche ausdrückt, dass das Quadrat des Linienelementes der gegebenen Fläche niemals kleiner sein darf, als das Quadrat des vollständigen Differentials der Function x.

Der Grund dieser Erscheinung wird darin gefunden, dass die partielle Differentialgleichung d) auch dann als Eliminationsresultat auftritt, wenn die Unbekannten y, z nicht aus den Gleichungen a'), sondern aus den Gleichungen

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2=E,$$
$$\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial y}{\partial q}-\frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial z}{\partial q}=F,$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2=G$$

eliminirt werden, welch' letztere zu dem Problem der Deformation krummer Flächen in keiner Beziehung stehen. Die Differentialgleichung d) gehört somit zu zwei, für reellwerthige Functionen x, y, z wesentlich verschiedenen Transformationsproblemen, welche durch die beiden Gleichungen

$$\text{a)} \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = E dp^2 + 2F dp\, dq + G dq^2,$$

$$\text{a*)} \qquad dx^2 + dy^2 - dz^2 = E dp^2 + 2F dp\, dq + G dq^2$$

charakterisirt werden. Von diesen stellt sich das zweite in gewissem Sinne als das einfachere heraus. Weil nämlich hier x, y, z nicht mehr in symmetrischer Weise vorkommen, so erhält man bei Elimination von x und y für die Grösse z eine partielle Differentialgleichung d*), welche nicht mit d) übereinstimmt. Diese Differentialgleichung d*) erweist sich als für das zweite Transformationsproblem charakteristisch in dem Sinne, dass jedem reellwerthigen particulären Integral z der Differentialgleichung d*) zwei andere reellwerthige Functionen x, y zugehören, welche mit ihm zusammen die Gleichung a*) erfüllen.

Da die partielle Differentialgleichung d) für das Transformationsproblem a) nicht charakteristisch ist, so wird diese Differentialgleichung in der eigentlichen Abhandlung verlassen, und zur Lösung des Transformationsproblems a) ein von der Betrachtung der Differentialgleichung d) unabhängiger Weg eingeschlagen, auf dem sich zugleich eine zweite Lösung des Problems a*) ergiebt.

Hierbei bestehen die leitenden Gedanken in Folgendem.

Man denke sich die Lage eines veränderlichen Punktes P einer Fläche durch die Werthe zweier unabhängig veränderlichen Parameter p, q bestimmt, bezeichne durch x, y, z die Coordinaten des Punktes P, durch X, Y, Z die Richtungscosinus der in diesem Punkte errichteten Flächennormale und setze

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\, dp^2 + 2\, F\, dp\, dq + G\, dq^2$$

und

$$dX\, dx + dY\, dy + dZ\, dz = \mathfrak{E}\, dp^2 + 2\, \mathfrak{F}\, dp\, dq + \mathfrak{G}\, dq^2.$$

(In den Bezeichnungen von Gauss ist

$$\mathfrak{E} = -\frac{D}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \mathfrak{F} = -\frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \mathfrak{G} = -\frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}}.)$$

Nimmt man an, dass die drei Functionen E, F, G gegeben seien, so können die drei übrigen Functionen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ nicht mehr willkürlich vorgeschrieben werden. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, welche diese Functionen erfüllen müssen, damit die Form $\mathfrak{E}\, dp^2 + 2\mathfrak{F}\, dp\, dq + \mathfrak{G}\, dq^2$ geeignet sei, für eine Fläche, bei welcher das Quadrat des Linienelements durch den Ausdruck $E dp^2 + 2F dp\, dq + G dq^2$ gegeben ist, den Werth des Ausdrucks $dX\, dx + dY\, dy + dZ\, dz$ darzustellen, lassen sich durch ein System von drei Gleichungen ausdrücken, welches zwei lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und ausserdem die algebraische Gleichung

$$\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 = (EG - F^2).k$$

enthält, wo k das Krümmungsmaass der Fläche im Punkte P bedeutet.

In der vorliegenden Abhandlung ist ein solches Gleichungssystem — allerdings in anderen Bezeichnungen — auf S. 26 angegeben. Dasselbe möge als „Gleichungssystem I" bezeichnet werden. Gleichungssysteme von ähnlicher Natur, welche das System I vertreten können, sind auch schon von Bour und anderen Autoren aufgestellt worden. Nun nehme man an, dass durch Integration der Gleichungen I drei Functionen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ gefunden seien, welche diese Gleichungen befriedigen. Dann sind hiermit die Summe und das Product der beiden Hauptkrümmungen r, r' der zugehörigen Fläche im Punkte p, q bekannt, denn diese Grössen werden durch die Gleichungen

$$r + r' = \frac{E\mathfrak{G} - 2F\mathfrak{F} + G\mathfrak{E}}{EG - F^2}$$

und

$$r.r' = \frac{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}{EG - F^2}$$

geliefert.

Ferner ist die Differentialform $dX^2 + dY^2 + dZ^2$ als gegeben zu betrachten, da sie vermöge der Gleichung (S. 30)

$$rr'(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (r + r')(dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz) + dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$$

als Function von p, q, dp, dq dargestellt werden kann.

Der Ausdruck $dX^2 + dY^2 + dZ^2$ ist nun nichts Anderes, als das Quadrat des Linienelementes der durch parallele Normalen vermittelten Abbildung der gegebenen Fläche auf die Oberfläche einer Kugel vom Radius Eins, d. h. das Quadrat des Linienelementes einer Fläche von dem constanten Krümmungsmaass Eins. Infolge dessen können die Functionen X, Y, Z, wie der Herr Verfasser in früheren Abhandlungen nachgewiesen hat (Crelle's Journal, Bd. 94 S. 201 und Bd. 95 S. 326—329), durch die Integration zweier gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ermittelt werden. Sind diese Functionen gefunden, so ergeben sich die Functionen x, y, z, wie in der vorliegenden Abhandlung gezeigt wird, durch Quadraturen. Dabei hat eine Abänderung der willkürlichen Constanten, welche durch die nach Ermittelung der Functionen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ noch vorzunehmenden Integrationen und Quadraturen in die Rechnung eingeführt werden, auf die Gestalt der resultirenden Fläche keinen wesentlichen Einfluss. Die den veränderten Constanten entsprechende Fläche ist nämlich, wie nachgewiesen wird, entweder der ursprünglichen Fläche, oder dem durch Spiegelung an einer Ebene erhaltenen Abbild derselben congruent; ihre Gleichungen können einfach durch Coordinatentransformation in die der ursprünglichen Fläche zurückverwandelt werden.

Da man vermöge der Gleichung

$$\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 = (EG - F^2) . k$$

eine der unbekannten Functionen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ eliminiren kann, so wird das Transformationsproblem a) durch die angegebenen Ueberlegungen darauf zurückgeführt,

erstens ein System von zwei simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Unbekannten zu integriren,

zweitens zwei gewöhnliche lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu integriren,

drittens eine Reihe von Quadraturen auszuführen.

Die vorliegende Abhandlung geht über die bisher vorhandenen, das gleiche Ziel verfolgenden Arbeiten anderer Autoren insofern hinaus, als sie, von der allgemeinen Form des Quadrates des Linienelementes der gegebenen Fläche ausgehend, die nach der Kenntniss der Functionen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, bezw. D, D', D'' noch zurückzulegenden Schritte eingehend erörtert, dieselben auf ein geringeres Maass reducirt, als es bisher gelungen war, und alle Entwickelungen und Resultate in vollkommen symmetrischer Form darstellt.

Mit dieser Behandlung des Hauptproblems werden umfangreiche, auf die simultane Transformation binärer quadratischer Differentialformen bezügliche Ausführungen verbunden, deren Ergebnisse sich auch für die Lösung anderer Fragen der Flächentheorie als werthvoll erweisen.

Im Einzelnen haben die vier Abschnitte, in welche die Abhandlung eingetheilt ist, folgenden Inhalt:

Abschnitt I. (S. 8—17.) Unter der Voraussetzung, dass die Determinante $a = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$ der in den Differentialen dp, dq quadratischen Form

$$A = a_{11}\, dp^2 + 2 a_{12}\, dp\, dq + a_{22}\, dq^2,$$

in welcher a_{11}, a_{12}, a_{22} gegebene Functionen der reellen Veränderlichen p, q bezeichnen, von Null verschieden sei, wird ein Beweis des Satzes gegeben, dass der Ausdruck

$$k = \frac{-1}{2\sqrt{a}} \left\{ \frac{\partial \left[\dfrac{a_{12} \dfrac{\partial \log \frac{a_{22}}{a_{11}}}{2\, \partial q} + \dfrac{\partial a_{22}}{\partial p} - \dfrac{\partial a_{12}}{\partial q}}{\sqrt{a}} \right]}{\partial p} + \frac{\partial \left[\dfrac{a_{12} \dfrac{\partial \log \frac{a_{11}}{a_{22}}}{2\, \partial p} + \dfrac{\partial a_{11}}{\partial q} - \dfrac{\partial a_{12}}{\partial p}}{\sqrt{a}} \right]}{\partial q} \right\}$$

eine absolute Invariante der gegebenen Form A ist. Stellt A das Quadrat des Linienelementes einer Oberfläche dar, so ist k das Krümmungsmaass dieser Fläche, dessen Invarianz schon von Gauss nachgewiesen worden ist, aber durch geometrische Betrachtungen. Der hier gegebene Beweis hat den Vorzug, rein analytisch zu sein, und gestattet daher den Schluss, dass die Invarianz des Ausdrucks k auch für solche Formen A bestehen bleibt, welche nicht geeignet sind, das Quadrat des Linienelementes einer Fläche darzustellen.

Hierauf wendet sich der Herr Verfasser zur Entwickelung einer Reihe von später anzuwendenden Hilfsformeln, welche sich auf die simultane Transformation binärer quadratischer Differentialformen beziehen. Den Ausgangspunkt bilden zwei als gegeben betrachte Formen

$$A = a_{11}\, dp^2 + 2\, a_{12}\, dp\, dq + a_{22}\, dq^2,$$
$$C = c_{11}\, dp^2 + 2\, c_{12}\, dp\, dq + c_{22}\, dq^2,$$

deren Coefficienten sämmtlich reellwerthige Functionen der Variabeln p, q bedeuten. Von der Form A wird vorausgesetzt, dass sie geeignet sei, das Quadrat des Linienelementes einer Fläche darzustellen, während die Form C einer solchen Einschränkung nicht unterliegt. Gleichzeitig mit diesen beiden Formen werden noch zwei andere, von ihnen abhängende Formen, welche simultane Covarianten der gegebenen Formen darstellen, in Betracht gezogen, nämlich

$$B = H.C - K.A,$$

wo

$$H = \frac{a_{11}\, c_{22} - 2\, a_{12}\, c_{12} + a_{22}\, c_{11}}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2}, \quad K = \frac{c_{11}\, c_{22} - c_{12}^2}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2}$$

gesetzt ist, und

$$E = \frac{1}{\sqrt{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2}} \cdot \begin{vmatrix} dq^2 & -dp\, dq & dp^2 \\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ c_{11} & c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Diese begleitenden Formen haben eine leicht anzugebende geometrische Bedeutung. Wenn nämlich die Form A das Quadrat des Linienelementes einer Fläche und die Form C für dieselbe Fläche den Werth des Ausdrucks $dX\, dx + dY\, dy + dZ\, dz$ darstellt, wo x, y, z und X, Y, Z die früher erklärte Bedeutung haben, so wird

$$B = dX^2 + dY^2 + dZ^2,$$

während die Gleichung $E = 0$ die Differentialgleichung der beiden Schaaren von Krümmungslinien der Fläche darstellt.

Unter Ausschliessung des Falles $H^2 - 4K = 0$ (geometrisch ist dies der Fall der Kugel) wird nun Folgendes nachgewiesen:

Wenn man unter w, w' die beiden stets reellen Wurzeln der Gleichung

$$w^2 - Hw + K = 0$$

versteht, so können die vier gemeinschaftlich betrachteten Ausdrücke A, B, C, E durch Einführung von zwei neuen von einander unabhängigen Variabeln u, v an Stelle von p und q stets gleichzeitig auf folgende Formen gebracht werden:

$$A = a_{11}^*\, du^2 + a_{22}^*\, dv^2,$$
$$C = w\, a_{11}^*\, du^2 + w'\, a_{22}^*\, dv^2,$$
$$B = w^2\, a_{11}^*\, du^2 + w'^2\, a_{22}^*\, dv^2,$$
$$E = \sqrt{a_{11}^* \cdot a_{22}^*}\, (w' - w)\, du\, dv.$$

Hieran schliesst sich die Entwickelung von zwei für diese Transformation geltenden und später anzuwendenden Transformationsrelationen, in welchen ausser den Coefficienten der Formen A und C noch die partiellen Differentialquotienten einer willkürlich anzunehmenden Function Φ von p und q vorkommen.

Abschnitt II (S. 17—23) enthält eine allgemeine Methode zur Bildung solcher simultanen Invarianten der gegebenen Formen A, C, welche ausser den Coefficienten dieser Formen noch die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung dieser Coefficienten, aber keine Differentialquotienten höherer Ordnung enthalten. Zum Schluss wird die Frage erledigt: Wie müssen die Coefficienten c_{11}, c_{12}, c_{22} der Form C beschaffen sein, damit die gegebene Form A durch Einführung der im I. Abschnitt definirten Variabeln u, v die Gestalt $f(u, v)(du^2 + dv^2)$ annehme? Die Lösung dieses Problems enthält als speciellen Fall die Beantwortung der Frage: Unter welchen Bedingungen sind die Krümmungslinien einer gegebenen Fläche geeignet, dieselbe in unendlich kleine Quadrate zu theilen?

Abschnitt III (S. 23—31) behandelt das Transformationsproblem a) und zugleich mit diesem das Problem a*) in der schon oben besprochenen Weise. Unter der Voraussetzung, dass die Integration der in Frage kommenden partiellen Differentialgleichungen geleistet sei, werden die hiernach zur Kenntniss der Functionen x, y, z noch zurückzulegenden Schritte angegeben.

In Abschnitt IV (S. 31—43) werden für die drei unbekannten Functionen, welche dem Gleichungssystem I unterworfen sind, Ausdrücke angegeben, welche nur eine einzige unbekannte Function enthalten, und den Gleichungen I Genüge leisten, sobald die neu eingeführte unbekannte Function eine gewisse partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung erfüllt.

Hierdurch ist indessen, wie nachgewiesen wird, die Zurückführung der Gleichungen I auf eine einzige Differentialgleichung, deren Integration zur Erledigung des Problems a) nicht allein hinreichend, sondern auch nothwendig wäre, noch nicht geleistet, da der Inhalt der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung an reellwerthigen Integralen denjenigen übertrifft, der mit dem Problem der Abwickelbarkeit in Zusammenhang steht. Nur wenn man an Stelle des Problems a) dss Problem a*) betrachtet und für dieses die entsprechende partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung aufstellt, erweist sich deren Integration zur Erledigung des Problems als ausreichend.

In einem Falle jedoch gelingt es, auch die Erfüllung der Gleichung a) an die Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu knüpfen, deren gesammter Inhalt an reellwerthigen Integralen den durch die Erfüllung der Gleichung a) gebotenen nicht übertrifft. Es ist dies derjenige Fall, in welchem die gegebene quadratische Form

$$E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$$

das Quadrat des Linienelementes einer Fläche von constantem Krümmungsmaass darstellt.

Es wird gezeigt, dass in diesem Fall jedes reellwerthige Integral der partiellen Differentialgleichung auf drei Functionen x, y, z führt, die der Gleichung a) genügen, und dass auch umgekehrt je drei Functionen x, y, z, welche die letztere erfüllen, ein reellwerthiges Integral der Differentialgleichung bestimmen. Aus dem Beweis der letzteren Behauptung ergiebt sich beiläufig das folgende, auf die Flächen vom Krümmungsmaass Eins bezügliche Resultat:

Den Punkten einer gegebenen Fläche vom Krümmungsmaass Eins entsprechen stets die Punkte einer zweiten durch sie bestimmten Fläche vom gleichen Krümmungsmaass derart, dass das Linienelement der ersten dem Linienelement der Abbildung der zweiten auf die Gauss'sche Kugel gleich ist, und umgekehrt. Bei dieser Zusammengehörigkeit sind die Krümmungslinien beider Flächen entsprechende Linien, und die Hauptkrümmungen in entsprechenden Punkten einander gleich, jedoch in Bezug auf die zugehörigen Krümmungslinien untereinander vertauscht.

Zum Schluss werden die Elemente einer Krümmungstheorie der Flächen entwickelt, welche der Voraussetzung entspricht, dass die Cosinus der Winkel der in einem Punkte (p, q) einer Fläche errichteten Normalen mit den Coordinatenaxen als Functionen der Variabeln p, q gegeben seien.

H. v. Mangoldt.

Die analytische und die projectivische Geometrie der Ebene, die Kegelschnitte auch nach den Methoden der darstellenden und der elementarsynthetischen Geometrie, mit Uebungsaufgaben. Für höhere Lehranstalten und für den Selbstunterricht bearbeitet von Dr. Heinr. Funcke, Oberlehrer in Potsdam. Potsdam 1885, Verlag von Aug. Stein.

Diese treffliche Schrift enthält in fünf Abtheilungen und auf 107 Seiten ein reiches Material und ist, nach der Ueberzeugung des Referenten, durchaus pädagogisch brauchbar. So ist streng der Grundsatz befolgt, „das störende Nachschreiben und zeitverschwendende Ausarbeiten überflüssig zu machen, das nützliche Construiren, Nachrechnen und Repetiren aber zu befördern“.

Im Einzelnen bemerken wir Folgendes.

Der erste Theil, von S. 8—14 reichend, trägt die Ueberschrift: Der Punkt. Hier finden wir die orthogonalen und schiefwinckligen Parallelcoordinaten, die Polarcoordinaten und die Formeln der Transformation. Daran schliessen sich die Entfernung zweier Punkte, der Inhalt eines Dreiecks, die Bestimmung eines Theilpunkts der Strecke. Es ist sehr zu billigen, dass Verfasser nur die Figuren und die definitiven Resultate giebt, da die mit allen Hilfslinien vorliegende Zeichnung den fehlenden Text mehr als genügend ersetzt. Unmittelbar hieran schliesst sich der Satz über das

Doppelverhältniss der vier Punkte und Strahlen, woran sich eine ebenso kurze wie klare Darlegung der projectivisch-geometrischen Grundlagen anschliesst.

Der zweite Theil geht bis Seite 21 und behandelt die Gerade. Auch hier haben wir wieder die analytische und projectivische Behandlung.

Der dritte Theil geht bis Seite 24 und behandelt den Kreis. Hier finden wir in der analytischen Behandlung die Tangente, Normale mit ihren Gleichungen; ebenso die Längen derselben, sowie die der Subtangente und Subnormale. In der projectivischen Behandlung wird der Kreis benutzt, um den Anfänger in einfachster und zweckmässigster Weise mit der Curvenerzeugung durch Strahlbüschel und Punktreihe vertraut zu machen.

Der vierte Theil geht bis Seite 71 und behandelt die Kegelschnitte. Hier beginnt der Verfasser mit der Erzeugung am geraden Kegel und gelangt durch Zuhilfenahme der harmonischen Theilung zum Mittelpunkt, zu den Hauptaxen und zu den Asymptoten der Hyperbel. Auch die Gleichung dieser Curve, bezogen auf die Asymptoten als Axen, wird angegeben. Die Brennpunktseigenschaften werden ebenso am geraden Kegel mit Hilfe der Berührungskugeln gewonnen. Allein die Behandlung weicht von der allgemein üblichen dadurch ab, dass die für alle drei Kegelschnitte giltige Definition direct angestrebt und leicht ermittelt wird. Von den Brennpunktseigenschaften wird alsdann Gebrauch gemacht, um den Zusammenhang mit dem Tactionsproblem einerseits und zur Tangentenschaar andrerseits festzustellen. So gelangt Herr F. zu den drei Gleichungsformen, an welche sich zum Schluss die sehr elegante Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades anschliesst.

Die angeschlossenen 122 Aufgaben enthalten reichen Stoff. Dieselben zeugen von dem wissenschaftlichen Sinne des Verfassers. Unter den Aufgaben finden wir gelegentlich die Liniencoordinaten erörtert. Herr F. zeigt sich hier mit den neuesten Erscheinungen vertraut.

Den Schluss bilden einige Erörterungen aus der höheren Curvenlehre. Hier finden wir nicht nur in kurzen Zügen die Theorie entwickelt, sondern auch an vielen interessanten Beispielen die Anwendung der Grundsätze erläutert. Selbst transscendente Curven fehlen nicht.

Ein Abriss der Differentialrechnung ist angehängt.

Referent ist der Ueberzeugung, dass das Buch entschiedenes Lob verdient. Wenn dasselbe, seinem Titel nach, für höhere Lehranstalten zunächst bestimmt ist, so wird auch der Studirende an der Hochschule die Schrift mit entschiedenem Nutzen durchmachen. Wer den reichen, auf 107 Seiten zusammengedrängten Stoff in den ersten Semestern zu seinem geistigen Eigenthum gemacht hat, darf sich überzeugt halten, für seine weiteren Studien eine gediegene Grundlage zu besitzen.

Coesfeld, Februar 1886. K. Schwering.

Der Grenzbegriff in der Elementarmathematik. Von HEINRICH VOGT. Programm des Kgl. Friedrichs-Gymnasiums in Breslau. 1885.

Dieser mathematisch-philosophische Aufsatz behandelt, in zwei Haupttheile zerfallend, die geometrischen Grundgebilde und das Messen und die Irrationalzahl. Durch eingehende Analyse der Begriffe Punkt, Linie, Fläche gelangt der Verfasser zu dem Schlusse, „dass die vorstellbaren Gebilde keine Grenzen und die Grenzen nicht vorstellbar sind". Interessant sind seine Erörterungen besonders bezüglich der Zenonischen Beweise. Im zweiten Theile noch mehr als im ersten wird die Stetigkeit als Begriff einer philosophisch-mathematischen Analyse unterzogen. Hier gelangt der Verfasser zu dem Satze, dass durch einen unendlichen Process ein Punkt und ebenso eine Zahl bestimmt sei — die Grenze dieses Processes. So, glaubt er, sei die Stetigkeit der Zahlenreihe ausgesprochen und die stetige Natur der Linie dem unstetigen, messenden, zählenden Vorgehen des Verstandes erst angreifbar gemacht.

Lesenswerth, auch vom historischen Standpunkte aus, sind die Ausführungen des Verfassers, welche die Curvenrectification und die Lösung dieser Aufgabe, sowie die der verwandten, der Flächencomplanation, bei den Griechen betreffen.

Der Verfasser zeigt eine eingehende Literaturkenntniss. Referent kann die kleine Gelegenheitsschrift nicht nur als lesenswerth, sondern auch als lesbar bezeichnen. Die Sprache ist trotz philosophischen Inhalts deutsch.

Coesfeld, Februar 1886. K. SCHWERING.

Lehrbuch der Mathematik. Für den Schul- und Selbstunterricht bearbeitet von Dr. HERMANN GERLACH, Oberlehrer in Parchim. Zweiter Theil: Elemente der Planimetrie. Fünfte verbesserte und vermehrte Auflage. Dessau, Verlag von Albert Reissner. 1885. Preis 1,80 Mk.

Man kann es nicht leugnen: Die Zahl der Anhänger jener pädagogischen Lehrmeinung, die das Hauptziel des geometrischen Unterrichts im Aufgabenlösen erblickt, ist im Zunehmen begriffen. Von Petersen ist diese Richtung durch sein vom Referenten in dieser Zeitschrift besprochenes treffliches Buch vielleicht am entschiedensten und zugleich mit dem meisten Geschick vertreten worden. Als Repräsentanten einer zweiten Richtung möchten wir Spieker nennen. Er entfernt sich rücksichtlich der Anordnung und Auswahl des Stoffes nicht so weit vom Hergebrachten. Aber jedem kürzeren, in sich geschlossenen Lehrvortrage folgt eine passende Aufgabensammlung. Zweifellos lässt sich auch hierbei für den Unterricht ein schöner Erfolg erzielen, wenn der Lehrer umsichtig genug ist, die Gefahr der blos mechanischen Einübung und den Ehrgeiz zu meiden, alle Aufgaben, welche das Buch bietet, mit seinen Schülern lösen zu wollen. Dann hat es gewiss seine unleugbaren Vorzüge, dass der Uebungsstoff nicht an das Ende des Buches verwiesen und wie ein Ballast verstaut wird, sondern den Vortrag überall belebend durchdringt.

Auch der Verfasser des in der Ueberschrift bezeichneten 158 Seiten starken Büchleins hat den Stoff wie Herr Spieker bearbeitet: jedem in sich abgeschlossenen Lehrvortrage folgt unmittelbar eine Sammlung von Uebungssätzen und Aufgaben.

Im Einzelnen bemerken wir Folgendes. Die Parallelentheorie ist ganz in den Anfang gestellt und wir erhalten S. 11 als Grundsatz: „Zwei Linien, welche mit einer Transversale ungleiche Gegenwinkel bilden, convergiren nach der Seite, auf welcher die äusseren Gegenwinkel grösser als die inneren sind.“ Das ist dem Wesen nach, wie auch der Verfasser sagt, das elfte Axiom des Euklid, nur mit einer Aenderung, die uns keineswegs glücklich zu sein scheint.

S. 25flgg. findet sich eine Zusammenstellung von Grundaufgaben, denen die Lehrsätze über das Viereck, besonders das Parallelogramm S. 30 folgen. S. 35 werden wir mit den Hauptsätzen über den Höhenpunkt und Schwerpunkt bekannt. Es folgen die Vielecke und S. 41 der Kreis. Unter den Uebungssätzen bemerken wir den vom Feuerbach'schen Kreise, welcher hier uns etwas frühzeitig zu kommen scheint. Es folgt S. 57 eine Sammlung von 180 Aufgaben. Einige Hauptaufgaben sind durch Sperrdruck hervorgehoben; auch fehlen an wichtigeren Stellen nicht Andeutungen zur Lösung; doch hätte der Verfasser in beiden Beziehungen weiter gehen dürfen. Gelegentlich der Ausmessung der Figuren gelangt der Verfasser zur Bearbeitung des Begriffes der Commensurabilität. Die Behandlung ist streng; nur wirkt es auf den Leser einigermassen störend, dass gerade an der Hauptstelle § 97, 3 auf die Arithmetik des Verfassers verwiesen wird. Wir sind weit entfernt, dem Verfasser die Berechtigung zu diesem Verfahren zu bestreiten; aber es erscheint uns als didaktisch wichtig, einen dem Schüler niemals ganz leicht erscheinenden Satz gerade an der Stelle, wo er sich von selbst aufdrängt, völlig zu erledigen und den Lernenden nicht durch eine solche Verweisung bei seiner Mühe unnütz zu kränken. Der Pythagoreische Lehrsatz wird sofort durch Anwendungen auf metrische Relationen am Dreieck und Viereck fruchtbar. Es folgen Aehnlichkeit und Proportionen am Kreise; den Schluss bilden die Sätze über das Sehnenviereck von Ptolemäus und Brahmagupta. Daran schliessen sich 109 Aufgaben vermischten Inhalts, die recht zweckmässig sind.

Der Verfasser gelangt nunmehr auf S. 119 zu der Lehre von den Transversalen, den harmonischen Punkten, den Polaren und den Potenzlinien. Wir können nicht umhin, die Behandlung dieses Theiles, besonders aber die Darstellung der Lehre von den Transversalen als eine durchaus gute zu bezeichnen. Mit Recht verschmäht der Verfasser die den Schüler nur verwirrende Einführung der Vorzeichen; auch lässt er sich dadurch nicht, wie Herr Spieker, zur Darstellung der Sätze des Ceva und Menelaus in Productform drängen, sondern er gebraucht kühn das zeichenlose Theilverhältniss. Damit jedoch der Verdacht der „Unkenntniss" vermieden werde, scheint zu II die Anmerkung zu stehen, welche das Vorzeichen erwähnt. Sie hätte fehlen dürfen. Es folgt S. 133 die Kreismessung, und den Schluss des ganzen Buches bildet eine schöne Sammlung von Aufgaben aus der rechnenden Geometrie nebst Anleitung zu ihrer Lösung. Mit Recht wird diesem Theile der niederen Geometrie in neuerer Zeit mehr und mehr Aufmerksamkeit zugewandt. Diese Aufgaben können eine treffliche Vorschule der analytischen Geometrie bilden und sollten mit einiger Rücksicht auf diesen Zweck gewählt werden.

Fassen wir unser Urtheil zusammen. Der lehrende Theil ist klar und wohlgeordnet; er weicht vom Hergebrachten weder nach Aufstellung, noch Umfang bedeutend ab. Die Aufgaben sind zweckmässig gewählt und genügend zur Lösung vorbereitet. Vielleicht thut der Verfasser gelegentlich einer neuen Auflage hierin noch ein Mehreres. Besonders gelungen sind die letzten Abschnitte des Buches.

Druck, Papier und Figurenzeichnung sind angemessen.

Coesfeld, 1886. K. Schwering.

Ebene Trigonometrie zum Gebrauche an Landwirthschaftsschulen, höheren Bürgerschulen und ähnlich organisirten Anstalten, sowie zur Selbstbelehrung, von Dr. A. Grosse-Bohle. Freiburg im Breisgau, Herder'sche Verlagsbuchhandlung 1885. Preis: 0,90 Mk.

Das Büchlein ist 55 Seiten stark und entwickelt dennoch in ausführlichem Lehrvortrage den Gegenstand. Es ist ganz zweckmässig für die Erreichung der Absicht des Verfassers, dass er den Coordinatenbegriff für die Bestimmung der Winkelfunctionen in den Vordergrund stellt. Wendet er sich doch besonders an Leser, welche schon im praktischen Leben stehen oder doch in einer praktischen Berufsstellung von der Trigonometrie Gebrauch zu machen gedenken. Der aufgewandte Raum (fast 15 Seiten) scheint daher nicht unnütz verbraucht. Vielleicht hätte die directe Aussage: „Hier liegen rechtwinklige Parallelcoordinaten vor" dem Lernenden in noch schärferer Betonung vorgesagt werden sollen. Gelegentlich der „negativen" Winkel hätte Herr Grosse-Bohle sich einer grösseren Kürze befleissigen sollen. Merkwürdiger Weise fehlen überall die Klammern um die negativen Argumente. Die Entwickelung der Additions- und Subtractionstheoreme für die *tg*- und *cot*-Functionen ist kaum etwas Anderes als eine Papierverschwendung.

Die folgenden Aufgaben sind durchaus vernünftig gewählt. Man findet die vier Grundaufgaben für Dreiecksberechnung, Inhaltsberechnungen auch von Vierecken, endlich praktische Aufgaben der Feldmessung. Von der Bearbeitung solcher Aufgaben, die am Gymnasium die Hauptrolle spielen und bei ihrer geometrischen Wichtigkeit spielen müssen, sieht der Verfasser mit Recht ab. Leider verunstaltet der Verfasser seine durchgeführten Musterbeispiele dadurch, dass er bei fünfstelligen Logarithmen nicht allein Secunden, sondern sogar Zehntel, ja Hundertstel Secunden berechnet. Wenn Herr Grosse-Bohle sich einmal die Mühe nehmen will, etwa die Seite 38 stehende Aufgabe mit siebenstelligen Tafeln genau auszurechnen, so wird er nicht $\gamma = 23^0\,37'\,45,\,83''$ erhalten. Und was soll denn der praktische Trigonometer mit Bogensecunden überhaupt anfangen?

Von einigen Unebenheiten abgesehen ist das Büchlein anerkennenswerth und wird sich als praktisch brauchbar herausstellen.

Druck und Papier (Herder'scher Verlag) sind trefflich.

Coesfeld, 1886. K. SCHWERING.

Ebene Geometrie für Schulen, von Dr. GEORG RECKNAGEL, Professor für Physik und technische Mechanik, Rector der k. Industrieschule zu Kaiserslautern. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage. München, Theodor Ackermann. 1885. Preis 2,00 Mk.

Auf 202 Seiten behandelt das in der Ueberschrift bezeichnete Buch den Lehrstoff, welcher auf unseren höheren Schulen in der Geometrie bearbeitet zu werden pflegt.

Die 10 ersten Seiten sind der Erörterung der Vorbegriffe gewidmet. Hier begegnen wir dem „Lehrsatze“: Sind zwei Grössen, A und B, einer dritten Grösse C gleich, so sind sie auch unter sich gleich. Weiter zerfällt das Buch in vier Theile, von denen der erste bis S. 98 reicht und „Congruenz“ überschrieben ist. Hier finden wir in der Parallelentheorie S. 17 den Lehrsatz: „Ist die Summe von einem Paare innerer Gegenwinkel kleiner als $2R$, so schneiden sich die geschnittenen Geraden auf derjenigen Seite der schneidenden, wo dieses Winkelpaar liegt.“ Dazu bemerkt eine Fussnote, der Beweis könne vom Anfänger übergangen werden. Ferner sagt die Vorrede in Bezug auf diesen Punkt: „Infolge eines Missverständnisses ist der Nachdruck der ersten sieben Bogen schon vor mehreren Jahren veranlasst worden. Deshalb ist der Bertrand'sche Beweis in der Parallelentheorie stehen geblieben, obwohl ich heute von seiner Unzulänglichkeit überzeugt bin.“ Schade, dass Lehrer und Schüler beim Gebrauche des Buches unter diesem Missverständnisse leiden müssen.

Im Ganzen ist die Darstellung ausführlich und klar; häufig werden die Beweise der Lehrsätze nur ihrem Gange nach angedeutet, aber diese Andeutungen genügen auch wirklich für die Zwecke der Schule. Recht gut ist der auf S. 69 beginnende Anhang, welcher Constructionsaufgaben enthält. Dieselben sind durch eine genügende Anleitung dem Verständnisse nahe gebracht. Der Verfasser schickt einige Erklärungen voraus und deutet bei schwierigeren Aufgaben den Weg zur Lösung an.

Der zweite Theil: „Flächeninhalt der Figuren", geht bis S. 119. Derselbe enthält natürlich auch den Pythagoreischen Lehrsatz und Anwendungen dieses Satzes zu Berechnungsaufgaben.

Der dritte Theil führt die Ueberschrift: „Die Form der Figuren." Er wird mit einer kurzen Darstellung der Hauptsätze der Proportionenlehre ganz zweckmässig eingeleitet. Wir erhalten den Hauptsatz, welcher dann auf die Halbirungslinie des Winkels und auf die harmonische Theilung angewandt wird. Hieran schliessen sich die Sätze des Menelaus und Ceva. Referent vermag weder diese Anordnung (vor den Aehnlichkeitskriterien!), noch die Verwendung der Streckenproducte sonderlich zu rühmen. Die kurze Form der Beweise missfällt ihm gänzlich. Die Aehnlichkeitskriterien werden alsdann nebst manchen Zusätzen vorgetragen und zum Beweise der Proportionen am Kreise benutzt. Ein Anhang liefert in guter Auswahl algebraisch-geometrische Aufgaben (laut Vorrede von Herrn W. Winter herrührend), und so beginnt auf S. 172 der vierte Theil.

Derselbe ist der Cyklometrie und den damit zusammenhängenden geometrischen Dingen gewidmet. Wir bemerken die Sätze über das Sehnenviereck, Beziehungen des umgeschriebenen, sowie der vier eingeschriebenen Kreise am Dreieck. Bezüglich der Zahl π bemerkt eine Fussnote, dass sie „später ohne Nutzen bis auf 140 Stellen genau berechnet worden sei." Als Anhang finden wir „Isoperimetrische Sätze", die im Ganzen recht ansprechend vorgetragen sind; nur will dem Referenten die in § 247 gewählte Methode (durch verkappte Differentialrechnung) gerade dort nicht so sehr zweckmässig scheinen, während sie sonst, z. B. bei stereometrischen Aufgaben, häufig sehr am Platze ist. Den Schluss bildet das Apollonische Berührungsproblem, wobei man es auffallend finden kann, dass nicht auch der berühmte Geometer, welcher die mitgetheilte Lösung gegeben hat, namhaft gemacht wird.

Das Buch ist nach Stoff und Darstellung als brauchbar anzuerkennen. Das Papier und der Druck sind angemessen, die Zeichnung der Figuren ist theilweise sehr sorgfältig.

Coesfeld, 1886. K. Schwering.

Planimetrische Constructionsaufgaben nebst Anleitung zu deren Lösung. Für höhere Schulen. Methodisch bearbeitet von E. R. Müller. Oldenburg, Druck und Verlag von Gerhard Stalling. 1886.

Ein handliches Büchlein; Taschenformat; 66 Seiten. Figuren fehlen.

Der Inhalt gliedert sich in zwei Theile; der erste führt die Ueberschrift: „Aufgaben ohne Verhältnisse", während der zweite sich „Aufgaben mit Verhältnissen" betitelt.

Auf S. 10 finden wir: „Einfache Aufgaben über das Dreieck", denen S. 12 „Lösungen" nachgeschickt sind. Diese Lösungen behandeln in kurzer, jedoch vollständiger Ausführung folgende vier Aufgaben: Ein rechtwinkliges Dreieck aus einer Kathete und der zur Hypotenuse gehörenden Höhe, ein ebensolches aus einer Kathete und der zur Hypotenuse gehörenden Winkelhalbirungslinie; ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen aus der Basis und dem Winkel an der Spitze; ein Dreieck zu zeichnen aus zwei Seiten und der zu einer dieser Seiten gehörenden Höhe. Für die letzte erhalten wir „zwei" Lösungen. Es folgen nun verschiedene Aufgabengruppen, bei denen häufig zunächst einige darauf bezügliche Sätze, dann die Aufgaben und zum Schluss einige „Lösungen" angegeben sind. So sind z. B. im § 9 S. 22 „Dreiecksaufgaben über die Summe zweier Höhen oder ihre Differenz" gesammelt. Die zur Lösung führenden Sätze, welche sonst als „Anleitung zur Lösung" gegeben zu werden pflegen, gehen voraus, dann folgen 40 Aufgaben und den Schluss bildet die Darstellung des Musterbeispiels: $a+b$, h_a+h_b und β. Man kann an diesem Verfahren, je nach Geschmack, Deutlichkeit loben oder Breitspurigkeit tadeln. Von hervorragender Bedeutung ist es kaum.

Im § 20 finden wir „Vermischte Aufgaben über Punkte und Gerade". Hier finden wir Aufgaben — wir greifen ganz willkürlich hinein — wie Aufgabe 31, wo verlangt wird, eine gegebene Strecke auf eine Gerade zu projiciren. Der Verfasser sagt darüber in der Vorrede „... warum ich Aufgaben, welche im Anfange durchgenommen werden müssen, nach § 20 verwiesen habe und dergleichen mehr, das sind Dinge, über die ich mich wohl nicht zu rechtfertigen brauche." Dieser Anordnung des Verfassers an den Leser wollen wir uns fügen und darum auch im § 21, und nicht früher, lernen, wie man in einem gegebenen Punkte an einen gegebenen Kreis die Tangente legt (Aufg. 13, S. 40) oder wie man in einem Kreise eine Sehne von vorgeschriebener Länge durch einen Punkt zieht. (Aufg. 21, S. 40.)

§ 24 enthält einige geometrische Oerter und § 25 einige allgemeine Betrachtungen über geometrische Constructionsaufgaben. Unter den letzteren finden wir die Aufgabe a, c, h_c (siehe oben!) als Beispiel und mit einer halben Seite Druckschrift bedacht. Ferner finden wir dort: „Soll ein Kreis in einem ... Punkte berührt werden, so ist häufig die zugehörende Tangente als Hilfslinie zu nehmen."

Auf S. 51 beginnt mit § 26 der zweite Theil, welcher Aufgaben „mit Verhältnissen" enthält und dieselben auf den noch übrigen 15 Seiten behandelt.

Ausser Aufgaben, wie die S. 53, Nr. 13 stehende, welche aus $a:b$, $a+c$, $b+c$ ein Dreieck construiren lässt, finden wir auch manche recht interessante. So sind die Aufgaben über $a^2 + b^2$ und die über die Winkelhalbirer § 35 recht gut, aber auch meist recht gut bekannter Altväterhausrath der Aufgabensammlungen. § 37 bietet das Berührungsproblem des Apollonius von Pergä oder, wie der Verfasser schreibt, von Perga; im Inhaltsverzeichniss finden wir sogar durch einen seltsamen Streich des Setzerteufels einen „Apollinischen" Kreis und einen „Apollinius" von Perga. Die Lösung ist die bekannte ältere. Den Schluss bilden in § 37 „Vermischte Aufgaben". Dieselben, 18 an der Zahl, behandeln erstens Aufgaben „mit Verhältnissen", welche sich ergeben, wenn man durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zieht, welche die Schenkel eines Winkels schneidet; zweitens werden in gegebene Figuren wie Dreiecke, Kreisausschnitte u. s. w. Quadrate, Rechtecke u. s. w. beschrieben. Wenn der Leser hier keine rechte „Mischung" findet und auch die auf dem Titelblatt angekündigte „methodische Bearbeitung" vermisst, so hat er sich daran zu erinnern, dass der Verfasser in der Vorrede über „dergleichen mehr" „sich wohl nicht zu rechtfertigen braucht".

Referent hat zwar in dem Büchlein weder didaktisch, noch wissenschaftlich bemerkenswerthe neue Gesichtspunkte entdeckt; aber er will doch gern anerkennen, dass der Durchschnittsstoff der planimetrischen Aufgaben in demselben geboten wird. Soweit Referent sich zu überzeugen Gelegenheit fand, ist auch jede Aufgabe genügend zur Lösung vorbereitet. Und das ist immerhin ein Vorzug.

Druck, Papier und äussere Ausstattung sind gefällig.

Coesfeld, 1886. K. Schwering.

Beiträge zur analytischen Geometrie der Curven und Flächen zweiten Grades von Dr. Julius Gysel. Osterprogramm 1877 des Schaffhauser Gymnasiums. 35 S. — **Ueber die sich rechtwinklig schneidenden Normalen einer Fläche zweiten Grades** von Dr. Julius Gysel. Osterprogramm 1885 des Schaffhauser Gymnasiums. 59 S.

Die beiden sehr interessanten Programme, über welche wir berichten, beschäftigen sich mit Entwickelungen, die in engstem Zusammenhange stehen. Im I. Programme (1877) hat der Verfasser zuerst die Unicursalcurve 6. Grades untersucht, welche der Ort der Durchschnittspunkte zweier zu einander senkrecht stehenden Normalen an eine gegebene Ellipse ist. Dann in den Raum übergehend, hat er die Frage nach dem Orte der Durchschnittspunkte zweier zu einander senkrecht stehenden Normalen an ein gegebenes Ellipsoid zu behandeln angefangen, wobei die Bedingungsgleichung der Ebene zweier solcher zu einander senkrechten Normalen ermittelt wurde. Auch die Frage, ob es Raumpunkte gebe, für welche ein System von drei gegenseitig senkrechten Normalen zu dem gegebenen Ellipsoide vorhanden ist, fand bereits damals Beantwortung. Das II. Programm (1885) setzt die auf zu einander senkrechte Normalen von einem Punkte aus an ein gegebenes Ellipsoid bezüglichen Untersuchungen fort und gelangt zu den Beziehungen, welche die behandelten Fragen zur Clebsch'schen eindeutigen Abbildung gewisser Flächen auf eine Ebene besitzen. Der Ort jenes Durchschnittspunktes zu einander senkrechter Normalen ergiebt sich als eine Fläche 20. Grades (F^{20}), deren Punkte Coordinaten besitzen, welche quadrirt rationale Functionen 4. Grades zweier Parameter sind. Die Fläche F^{20} in der letzterwähnten Weise analytisch dargestellt, ist nun in der Ebene eindeutig abbildbar, wobei sechs Fundamentalpunkte der Abbildung sich ergeben, entsprechend den Durchschnittspunkten der zwei Curven 4. Ordnung, in welchen zwei Ebenen die F^{20} schneiden. Gewisse Ebenen, die Hauptebenen, schneiden F^{20} in einer Curve 6. Ordnung, die sich als Unicursalcurve zeigt. Nur in einer Hauptebene oder in der unendlich fernen Ebene giebt es Punkte, für welche eine Normale an das Ellipsoid senkrecht zu zwei anderen Normalen steht. Sollen sämmtliche drei Normale paarweise einen rechten Winkel bilden, so bildet deren Ausgangspunkt auf F^{20} eine dreifache Curve 16. Ordnung, mit welcher der Verfasser sich eingehend beschäftigt, wobei er zu Sätzen gelangt, welche theilweise schon früher durch die Herren Painvin und Geiser gefunden worden waren.

CANTOR.

Fyrställiga logaritmisk-trigonometriska Handtabeller, jemte några andra tabeller samt formler och konstanter för underlättande af sifferräkningar sammanstälda af N. EKHOLM, amanuens vid meteorologiska observatoriet i Upsala, C. V. L. CHARLIER, amanuens vid astronomiska observatoriet i Upsala, K. L. HAGSTRÖM, fil. kand. Upsala. R. Almquist & J. Wiksell. XXVIII, 69 pag.

Mathemathische Schriften bieten vermöge ihrer Formelsprache die Annehmlichkeit, theilweise auch von Solchen verstanden zu werden, welchen die Sprache des verbindenden Textes fremd ist. Bei Tabellenwerken ist solches noch in höherem Grade der Fall, und so können wir über eine schwedische Logarithmentafel berichten, während unsere Kenntniss des Schwedischen nicht über das Gemeingut aller Völker gewordene „utan svafvel och fosfor" hinausreicht. Das dünne Bändchen enthält dadurch, dass überall nur vier Decimalstellen benutzt sind, auf kleinem Raume eine beträchtliche Anzahl von Tafeln. Man findet in ihm Briggische Logarithmen und Antilogarithmen je in einer besonderen Tafel, Additions- und Subtractionslogarithmen, die natürlichen Logarithmen der Zahlen bis zu 99, Vielfache des Moduls und des reciproken Moduls der Briggischen Logarithmen, logarithmisch-trigonometrische Tabellen für von 10 zu 10 Minuten, dann von $\frac{1}{10}$ zu $\frac{1}{10}$ Grad wachsende Bögen. Daran schliessen sich Tafeln mit nur drei Decimalstellen des gleichen Inhaltes etwa wie die vorhergehenden, vermehrt um trigonometrische Antilogarithmen, die nach Decimaltheilen eines Grades zunehmen und um eine Tafel trigonometrischer Functionalwerthe auf vier Decimalstellen ausgerechnet. Quadrate, Reciproke derselben, Quadratwurzeln folgen nebst einer Anzahl von Tafeln, die in der Lehre von den elliptischen Transcendenten, von den Gammafunctionen und von den Bessel'schen Functionen von Nutzen sind. Endlich haben die Herausgeber noch eine recht ausgedehnte Sammlung von Formeln aus der Trigonometrie und der höheren Analysis, sowie physikalische Formeln und Constante beigegeben. Der Preis ist auf 1,75 Kronen, d. i. etwa 2 Mark, gestellt.

CANTOR.

Abhandlungen aus der Functionslehre von KARL WEIERSTRASS. Berlin 1886, Verlag von Julius Springer. 262 S.

Es giebt Werke, deren Titelblatt, andere, deren Inhaltsverzeichniss abzudrucken die einzige Art von Anzeige ist, deren das Werk bedarf oder welche man ihm gegenüber sich gestatten möchte. Zu Werken dieser Natur ist gewiss die Sammlung von Abhandlungen zu rechnen, welche die Ueberschrift dieses Berichtes bildet, und wir glauben deshalb keine Entschuldigung nöthig zu haben, wenn wir uns wirklich damit begnügen, anzugeben, welche Weierstrass'schen Abhandlungen es sind, die nun dem Buchhandel übergeben wurden, während bisher deren Anschaffung nicht immer gelang.

1. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen (aus den Abhandlungen der Berliner Akademie, 1876).
2. Ueber einen functionentheoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler (aus den Monatsberichten der Berliner Akademie, August 1880).
3. Zur Functionenlehre (aus den Monatsberichten der Berliner Akademie, August 1880 und Februar 1881).
4. Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze (seit 1879 lithographirt für die Zuhörer von H. Weierstrass zur Benutzung bei den Vorlesungen über die Abel'schen Transcendenten).
5. Neuer Beweis eines Hauptsatzes der Theorie der periodischen Functionen von mehreren Veränderlichen (aus den Monatsberichten der Berliner Akademie, November 1876, mit verschiedenen redactionellen Aenderungen).
6. Ueber die Theorie der analytischen Facultäten (aus Crelle's Journal, Bd. LI, 1854, mehrfach berichtigt und verbessert).

CANTOR.

Mathematische Sophismen, herausgegeben von JOHANN VIOLA. II. vermehrte Auflage. Wien, 1886. Verlag von Carl Gerold's Sohn. 23 S.

Eine anspruchslose Sammlung von Trugschlüssen, mittels deren falsche mathematische Ergebnisse erzielt werden. Die begangenen Fehler bestehen aus Divisionen durch 0, aus Quadratwurzelausziehungen, bei welchen das doppelte Vorzeichen nicht beachtet ist, aus Anwendung divigenter unendlicher Reihen. Wer diese Beispiele aufmerksam durcharbeitet, wird, auch ohne tief in mathematische Lehren einzudringen, die Ueberzeugung von der Unzulässigkeit jener Operationen gewinnen.

CANTOR.

Maxima und Minima, analytisch-geometrisch beleuchtet. Einleitung. Wissenschaftliche Beilage zum 33. Jahresbericht des Königl. Realgymnasiums zu Rawitsch, von dessen Director Dr. KARL HEINRICH LIERSEMANN. Breslau 1886.

Sei $f(x, y) = 0$ die rationalgemachte Gleichung einer algebraischen Curve vom Grade n, welche durch den Punkt ξ, η hindurchgeht. Die Tangente in ξ, η wird alsdann $y - \eta = m(x - \xi)$ heissen und den Punkt ξ, η zweimal mit der Curve gemein haben müssen. $f(x, mx + \eta - m\xi) = 0$ wird folglich durch $(x - \xi)^2$ theilbar sein müssen, und wenn die unmittelbare Division den Rest $R(m, \xi) \equiv R$ liefert, so lässt $R = 0$ das gesuchte m finden. Das ist die erste Methode zur Tangentenbestimmung, welche der Verfasser lehrt. Die zweite Methode verlegt den Coordinatenanfangspunkt des als rechtwinklig gedachten Axenkreuzes nach dem Punkte ξ, η und gewährt damit der Tangentengleichung die Form $\tau = m\mu$, wo $\tau = y - \eta$ und $\mu = x - \xi$, also auch $x = \mu + \xi$, $y = \tau + \eta = m\mu + \eta$ ist. Die Substitution dieser Werthe in $f(x, y) = 0$ bringt eine Gleichung n^{ten} Grades nach μ hervor, welche durch Anordnung des Gleichungspolynoms nach steigenden Potenzen von μ die Form

$$S + T\mu + U\mu^2 + \ldots = 0$$

annimmt. Weil ξ, η auf der Curve liegt, muss $S = 0$ sein. Die Tangente erfordert aber auch noch $T = 0$, damit in ξ, η zwei Durchschnittspunkte der Geraden mit der Curve vorhanden seien, und somit führt $T = 0$ auch zur Ermittelung von m. Rückwärts kann man auch fragen, welche Werthe ξ, η ein $m = 0$ bedingen, und erhält so die Culminationspunkte der Curve, d. h. die grössten und kleinsten Werthe ihrer Ordinaten. Die Annahme $m = \infty$ führt in ähnlicher Weise zu den grössten und kleinsten Werthen der Abscissen. Wird aus der Verbindung der beiden Gleichungen $S = 0$ und $T = 0$ kein bestimmtes μ, sondern vielmehr $\mu = \frac{0}{0}$ errechnet, so giebt es in dem Punkte ξ, η mehr als eine Tangente, er ist vielfacher Punkt der Curve. Ist ausser $S = 0$ und $T = 0$ auch noch $U = 0$, so ist $\mu = 0$ dreifache Wurzel der Curvengleichung, und so kommt der Verfasser zu den Wendepunkten. Das Verschwinden des Coefficienten des höchsten Gliedes der Curvengleichung lehrt dagegen Asymptoten erkennen. Zu diesen Untersuchungen fügt Herr Liersemann noch solche über den Krümmungskreis. Auch hier weiss er die Anwendung von Differentialrechnung zu vermeiden.

Im Ganzen erhalten seine Schüler — denn es ist ein Auszug praktisch vorgetragener Lehren aus der Oberstufe des Realgymnasiums, welcher uns geboten wird — eine genauere Kenntniss von der Lehre von den sogenannten höheren Curven, als es sonst der Fall zu sein pflegt. Wir sind daher nur um so gespannter auf die Ausführungen, welche Herr Liersemann dieser Einleitung folgen lassen zu wollen verspricht.

CANTOR.

Analytische Untersuchungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen und der Fourier'schen Integrale, von Dr. OTTO BEAU. II. verbesserte und vermehrte Auflage. Halle 1885, bei Louis Nebert. VIII, 101 S.

Wir haben Bd. XXIX, hist.-lit. Abth. S. 110—112 die fast gleich betitelte Doctordissertation des Verfassers unseren Lesern empfohlen. Ihre II. Auflage, welche uns heute vorliegt, zeigt eine wesentliche Vergrösserung. Von 84 Seiten 8° ist sie auf 101 Seiten 4° angewachsen, während der Druck nur um Weniges weitläufiger geworden ist. Damit ist schon äusserlich die Bezeichnung als vermehrte Auflage gerechtfertigt. Die Vermehrung besteht indessen weniger darin, dass ganz neue Gegenstände in Betracht gezogen wären, als in einer Erweiterung der Beispiele, an welchen die vorgetragenen Methoden erläutert und geprüft werden. Im Wesentlichen gilt für die neue Auflage somit das Gleiche, was wir der ersten nachrühmten. Der Leser wird sich mit den gewandt durchgeführten Rechnungen befreunden und auf diese Weise leicht mit der Lehre von den trigonometrischen Reihen bekannt machen, so weit der Verfasser Solches beabsichtigte. Ein Lehrbuch der trigonometrischen Reihen wollte er nicht schreiben und hat er nicht geschrieben, sonst wäre er nicht jenen subtileren Untersuchungen fern geblieben, welche auf die Giltigkeit der trigonometrischen Reihen sich beziehen, und deren Anfänge auf Heine zurückzuführen sind, während H. G. Cantor, H. Dini und Andere ihnen einen vorläufigen Abschluss gaben.

CANTOR.

Die harmonische Reihe. Ein Beitrag zur algebraischen Analysis. Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde von der philosophischen Facultät der vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg, verfasst von HEINRICH SIMON aus Berlin. Halle 1886. 44 S.

In H. Stern's Analysis (1860) ist, soviel wir wissen, zuerst in einem Lehrbuche die Unterscheidung unbedingter und bedingter Reihenconvergenz behandelt und an dem seit Dirichlet klassischen Beispiele der harmonischen Reihe mit alternirendem Vorzeichen erläutert. Andere Lehrbücher folgten der so gegebenen Anregung. Herr Pringsheim hat in den Math. Annal.

seit 1883 den Gegenstand mit Geist und Erfolg weiter geführt und, man darf vielleicht sagen, zu einem vorläufigen Abschluss gebracht. In methodischer Beziehung blieb freilich noch ein Wunsch zu erfüllen. Auch Herr Pringsheim hat sich gleich den meisten neueren Schriftstellern über Reihenconvergenz der Benutzung bestimmter Integrale nicht ganz entschlagen und hat dadurch unmöglich gemacht, dass alle seine Ergebnisse Eigenthum der algebraischen Analysis wurden, wie sie es zweifellos verdienen. Dies ist nun der Punkt, wo Herr Simon einsetzt. Er behandelt die Fragen nach dem Werthe eines Ausschnittes von beliebig vielen beliebig späten Gliedern der harmonischen Reihe mit alternirendem Vorzeichen, worauf nach Herrn Natani's richtiger Bemerkung Alles zurückkommt, in durchaus elementarer und gleichwohl strenger Weise. Es will uns scheinen, dass von jetzt an Vorlesungen wie Lehrbücher über algebraische Analysis die Pflicht haben, das Wichtigste aus diesen Untersuchungen, über welche noch Herr Stolz, Allgemeine Arithmetik I, 342 (Anmerk. 18 zum X. Abschnitt), wohlgemerkt vor Erscheinen der Simon'schen Dissertation, allzukurz hinweggeht, in sich aufzunehmen.

Cantor.

Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen, herausgegeben von Dr. Fr. Reidt, Professor am Gymnasium zu Hamm. Berlin, 1886. G. Grote'sche Verlagsbuchhandlung. X, 252 S.

Hat der junge Lehramtscandidat seine mathematische Staatsprüfung bestanden, d. h. hat er den Nachweis einer bestimmten Summe mathematischer Kenntnisse zu liefern vermocht, so wird er, sofern eine Lehrstelle frei ist, sofort zum Unterrichten verwandt. Wann oder wo hätte er aber Gelegenheit gehabt, dieses zu lernen? Nie und nirgend! ist die wahrhaft traurige Antwort, welche wir mit Herrn Reidt auf diese Frage geben müssen. Der Volksschullehrer verlässt sein Seminar zum Lehramt vorbereitet. Der Lehrer der Mathematik an der Mittelschule hat nie gelernt, wie man die Anfänge seiner Wissenschaft Anfängern gegenüber behandeln solle, es sei denn, dass der von ihm selbst früher erhaltene — mitunter erlittene — Unterricht als fruchtbares oder furchtbares, anregendes oder abschreckendes Vorbild in seiner Erinnerung fortlebe. Herr Reidt hat versucht, in dem unserer Besprechung unterbreiteten Buche die unzweifelhaft vorhandene Lücke auszufüllen, und der wissbegierige Anfänger im Unterrichten dürfte hier die meisten Zweifel, mit welchen er sicherlich sich trägt, wenn nicht gelöst, so doch zur Lösung vorbereitet finden. Herr Reidt gehört, wie man aus diesem Buche sehen kann, zu den vortrefflichsten Mittelschullehrern unseres Faches. Auf den Rath eines solchen Mannes zu hören kann nur vortheilhaft sein, und so wünschen und hoffen wir für die ungemein anregend geschriebene Untersuchung recht zahlreiche und aufmerksame Leser.

Cantor.

Bibliographie

vom 1. bis 30. November 1886.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie d. Wissensch. Jahrg. 1886, 2. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der kais. Akademie d. Wissensch. in Wien Mathem.-naturw. Classe, II. Abth. 93. Bd., 3.—5. Heft. Wien, Gerold. 11 Mk. 60 Pf.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Mittheilungen, herausgeg. v. O. Böklen. III. Jahrg. 1886. Tübingen, Fues. 2 Mk.

Die Fortschritte der Physik, redig. v. Neesen. 35. Jahrg. f. d. Jahr 1879. Abth. II u. III, enthaltend Optik, Wärmelehre, Elektricität und Pkysik der Erde. Berlin, G. Reimer. 26 Mk.

Mittheilungen der kaiserl. Normal-Aichungscommission. 1. Reihe, 1886, Nr. 2. Berlin, Springer. 50 Pf.

Astronomischer Kalender für das Jahr 1887, herausgeg. v. d. k. k. Sternwarte. Wien, Gerold. 1 Mk. 60 Pf.

Reine Mathematik.

Geometria Culmensis aus der Zeit 1393—1407, herausgeg. v. H. Mendthal. Berlin, Duncker & Humblot. 2 Mk.

Stolz, O., Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. 2. Thl.: Die complexen Zahlen. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Eichenberg, S., Ueber das quadratische Reciprocitätsgesetz und einige quadratische Zerfällungen der Primzahlen. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk 60 Pf.

Krieg v. Hochfelden, F., Ueber das Integral $\Phi(t)=\int\frac{R_1(z,w)}{R_2(z,w)-t}dz$, worin R_1 und R_2 algebraische Functionen einer und derselben Riemannschen Fläche sind. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Schirdewahn, G., Ueber das Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale 3. Gattung und 2. Ordnung. Oels, Grüneberger & Comp. 1 Mk.

Pauli, R., Anweisung zur Lösung der Textaufgaben in Bardey's Aufgabensammlung. Rastatt, Greiser. 2 Mk. 50 Pf.

Gravelius, H., Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Decimaltheilung des Quadranten. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Schwarz, A., Ueber eine ein- und zweideutige Verwandtschaft zwischen Grundgebilden zweiter Stufe. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Reuschle, C., Praxis der Curvendiscussion. 1. Thl.: Discussion in Punktcoordinaten mit Anhang über analyt.-geometr. Principien. Stuttgart, Metzler. 3 Mk. 80 Pf.

Cranz, C., Synthetisch-geometrische Theorie der Krümmung von Curven und Flächen 2. Ordnung. Ebendas. 3 Mk.

Kaiser, H., Einführung in die neuere synthetische und analytische Geometrie. Wiesbaden, Bergmann. 6 Mk. 70 Pf.

Graefe, F., Auflösungen und Beweise der Aufgaben und Lehrsätze aus d. analytischen Geometrie. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Kommerell, F., Aufgaben aus der descriptiven Geometrie. Zusammengestellt von H. Böklen. Tübingen, Fues. 1 Mk.

Angewandte Mathematik.

Bruns, H., Ueber eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung. (S. Gesellsch.) Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Müller, F. A., Das Problem der Continuität in Mathematik und Mechanik. Marburg, Elwert. 3 Mk.

Burmester, L., Lehrbuch der Kinematik. 1. Thl.: Die ebene Bewegung. 2. Lief. Leipzig, Felix. 18 Mk.

Reiff, R., Zur Kinematik der Potentialbewegung. (Diss.) Tübingen, Fues. 20 Pf.

Schmidt, A., Die elementare Behandlung des Kreiselproblems. (Dissert.) Ebendas. 40 Pf.

Miller, A., Der primäre und secundäre longitudinale Elasticitätsmodul und die thermische Constante des letzteren. (Akad.) München, Franz. 1 Mk. 80 Pf.

Romberg, H., Genäherte Oerter der Fixsterne, von welchen in Bd. 67 bis Bd. 112 der astron. Nachr. selbstständige Beobachtungen angeführt sind. Für die Epoche 1855 hergeleitet u. nach d. Rectasc. geordnet. Leipzig, Engelmann. 4 Mk.

Physik und Meteorologie.

Braun, J., Ueber Gesetz, Theorie und Hypothese in der Physik. Antrittsrede. Tübingen, Fues. 80 Pf.

Siemens, W., Das naturwissenschaftliche Zeitalter. Vortrag. Berlin, Heymann. 80 Pf.

Klein, H., Leitfaden und Repetitorium der Physik mit Einschluss der einfachen Lehren der Chemie und der mathemat. Geographie. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 60 Pf.

Sternberg, M., Geometrische Untersuchung über die Drehung der Polarisationsebene im magnetischen Felde. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Wüllner, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. 4. Bd.: Magnetismus und Elektricität. 4. Aufl. Leipzig, Teubner. 16 Mk. 80 Pf.

Günther, S., Erdkunde und Mathematik in ihren gegenseitigen Beziehungen. München, Ackermann. 1 Mk.

Historisch-literarische Abtheilung.

Die Quaestio „De proportione dyametri quadrati ad costam ejusdem“ des Albertus de Saxonia.

Von

Dr. Heinrich Suter

in Zürich.

Hierzu Taf. I Fig. 9–15.

Im 3. Hefte des XXIX. Jahrgangs dieser Zeitschrift veröffentlichte der Verfasser dieses Artikels den Tractatus „De quadratura circuli“ des Albertus de Saxonia, der sich als Manuscript in dem Codex A. 50 der Berner Stadtbibliothek befindet, und bemerkte daselbst S. 85, dass die Abhandlungen Nr. 4 und 5 des nämlichen Codex der Form und dem Inhalte nach zu urtheilen wahrscheinlich von demselben Verfasser herrühren; dabei wurde ihre Veröffentlichung in einem späteren Hefte in Aussicht gestellt, welchem Versprechen wir nun hiermit nachkommen.

Was die Abhandlung Nr. 4 (S. 52) anbetrifft, so ist kaum daran zu zweifeln, dass dieselbe nicht den Albertus de Saxonia zum Verfasser habe; sie zeigt in ihrer weitschweifigen, scholastischen Darstellungsweise, in der Form der Conclusiones und Rationes und überdies noch in einigen selteneren Wendungen eine grosse Aehnlichkeit mit dem früher veröffentlichten Tractatus des Albertus (De quadratura circuli); ich erinnere in letzterer Hinsicht nur an den Ausdruck „*est dare*“ für „es giebt“, „es muss geben“, der in beiden Abhandlungen mehrmals vorkommt,* den ich übrigens auch noch in anderen Schriften des Albertus, die ich zur Vergleichung herbeizuziehen die Gelegenheit hatte, häufig vorfand, so z. B. in seinen Commentarien zu der Physik des Aristoteles, in denjenigen „de coelo et mundo“ und „de generatione et corruptione“ desselben Verfassers, während derselbe Ausdruck bei anderen Scholastikern, wie z. B. bei Wilhelm von Occam (in Libros physicor. Aristot.) und bei Thimon (in quatuor libros meteoror. Aristot.) gar nicht, wieder bei anderen, wie bei Joh. Buridanus, nur in einzelnen Abhandlungen (wie z. B. im Commentar zu De anima des Aristot.) und auch hier nur ganz selten auftritt. — Wir werden in unserer Ansicht,

* Vergl. in der früheren Abhandlung S. 87 und 93, in der vorliegenden S. 49.

dass die frühere und die jetzige Abhandlung von Albertus de Saxonia herrühren, im Weiteren noch bestärkt durch eine Stelle des Commentars des Albertus zu der Physik des Aristoteles: in der 11. Questio des 3. Buches findet sich dieselbe Auseinandersetzung über Zerlegung von Flächen und Körpern in unendlich viele Theile und Zusammenlegung dieser Theile zu einer unendlich ausgedehnten Fläche resp. Körper, wie sie auf S. 47 u. 48 der Abhandlung über die Incommensurabilität von Seite und Diagonale des Quadrates vorkommt. Ferner findet sich in der 1. Questio des 6. Buches desselben Commentars diese Incommensurabilität erwähnt. Es heisst daselbst: *si continuum esset compositum ex indivisibilibus finitis sequeretur quod quaelibet linea cuilibet linee esset commensurabilis; consequens est falsum, nam diameter quadrati non est commensurabilis coste ejusdem cujus est illa diameter: sicut demonstratum est in geometria: diameter alicujus quadrati se habet in proportione irrationali ad suam costam*, etc. Vergl. hiermit S. 50. Ob Albertus mit dem Worte *„geometria"* ein bestimmtes Buch meint und welches, können wir nicht entscheiden; dass er seine Abhandlung nicht citirt, kann ja seinen Grund leicht in der späteren Abfassung derselben haben; in der That können wir aus einer Stelle des Commentars des Albertus zu der Aristotelischen Abhandlung De coelo et mundo mit grosser Wahrscheinlichkeit den Schluss ziehen, dass die kleineren mathematischen Abhandlungen des Albertus späteren Datums sind als die grösseren commentatorischen Arbeiten desselben: in der 13. Questio des 3. Buches wird die Frage discutirt, welche regelmässigen Vielecke die Ebene und welche regelmässigen Körper den Raum ganz ausfüllen können; in der letzteren Frage widerlegt Albertus die Ansicht des arabischen Commentators Averroes, dass zwölf Tetraeder den Raum ganz ausfüllen, und sagt am Schlusse: *Et si in aliquo numero forte hoc sunt viginti. De hoc autem alias si deo placuerit profundius perscrutabor.* — Wir könnten noch eine Reihe anderer Stellen aus den uns vorliegenden Commentarien des Albertus zu Aristotelischen Schriften anführen, um die Identität ihres Verfassers und desjenigen der veröffentlichten und der vorliegenden Abhandlung noch mehr zu erhärten; allein wir denken, dass das Vorgebrachte genügen werde.

Am Schlusse der Quaestio über die Incommensurabilität von Seite und Diagonale eines Quadrates befindet sich ein kurzer Absatz, beginnend: *dyameter quadrati ad ejus costam est proportio* etc., welcher also dieselbe Frage, aber ganz kurz und viel geometrischer behandelt; wir glaubten dies auch aufnehmen zu sollen, obgleich es höchst wahrscheinlich nicht von Albertus de Saxonia herrührt. Wir glaubten der Vollständigkeit und des Interesses der Sache wegen auch die Abhandlung Nr. 5 des Berner Codex nicht weglassen zu dürfen, welche die Heronische Lösung des Problems der zwei mittleren Proportionallinien enthält, obgleich wir sie ebenfalls nicht dem Albertus zuerkennen können. Die Abhandlung Nr. 6, betitelt: Angulo rectilineo dato equum angulum curvilineum describere et econverso, bietet so wenig Interesse dar, dass man wohl von ihrer Veröffentlichung absehen kann; die übrigen Abhandlungen des Codex sind bereits gedruckt.

*Item alia questio de proportione dyametri quadrati ad costam ejusdem.**

Utrum dyameter alicujus quadrati sit commensurabilis costae ejusdem. Et arguitur primo quod sic: Dyameter est dupla ad suam costam, igitur questio vera, consequentia tenet et antecedens probatur tribus rationibus. primo quod sit unum quadratum .a.b.c.d. (Fig. 9) *cujus dyameter sit* .c.d., *super cujus costa suprema jaceat una linea equalis sibi, super cujus uno termino sit mobile* .b. *fixum, et super alio ejus termino sit mobile* .c. (a), *et incipiat ista linea sic superposita costae descendere et descendat donec cooperiat costam inferiorem ejusdem quadrati, et interim quod ista linea sic descendit, moveatur* .c. (a) *mobile super ista linea versus* .b. *isto modo quod in fine horae mensurantis motum descripsit dyametrum istius quadrati. Tunc arguitur sic:* .c. (a) *mobile in duplo velocius est motum* .b. *mobili in hora in qua descripsit dyametrum quadrati, igitur dyameter est dupla ad suam costam ejusdem quadrati: tenet consequentia, quia velocitas motuum localium mensuratur per spatia localia in tanto vel in tanto tempore descripta, sed quod* .c. (a) *mobile in duplo velocius sit motum* .b. *mobili probatur, quia pertransit duas costas quadrati et* .b. *mobile solum unam, ut potest patere in figura. — Item secundo: confertur idem antecedens, sit unum quadratum ut prius* .a.b.c.d. (Fig. 10) *cujus dyameter sit* .a.d. *et dividatur dyameter* .a.d. *per lineam* .c.g. *in duo equalia, super qua constituatur quadratum* .c.g.d.f.; *quo facto habemus duo quadrata, scil. quadratum* .a.b.c.d. *majus, et quadratum* .c.g.d.f. *minus, tunc arguitur sic: sicut se habet quadratum majus ad suam dyametrum, igitur quadratum minus ad suam, igitur a commutata proportionalitate: sicut se habet quadratum majus ad quadratum minus, ita se habet dyameter quadrati majoris ad dyametrum quadrati minoris; sed quadratum majus est duplum ad quadratum minus, sicut potest haberi ex penultima primi Euclidis, igitur etiam dyameter quadrati majoris dupla est ad dyametrum quadrati minoris (ad quadratum dyametri minoris), sed dyameter quadrati majoris et dyameter quadrati minoris habent se sicut dyameter et costa ejusdem quadrati, sicut patet in figura, igitur etc. — 3°. confertur idem antecedens; quia dicit 18. propositio primi Euclidis: in omni triangulo latus oppositum majori angulo est majus, et si sic, tunc videtur etiam quod latus oppositum angulo in duplo majori sit in duplo majus; cum igitur dyameter cujuslibet quadrati dividat ipsum in duos triangulos, quorum quilibet habet unum rectum et duos semirectos, et cum dyameter sit latus oppositum angulo recto istius trianguli, et*

---

* Offenkundige Fehler des Textes habe ich verbessert und die unrichtige Schreibweise desselben in Klammern beigefügt.

costa sit opposita semirecto ejusdem, sequitur dyametrum in duplo esse majorem sua costa, ut patet in figura, quod fuit probandum.

In oppositum sunt omnes geometrae. In ista questione ponendae sunt aliquae descriptiones, 2°. aliquae conclusiones, 3°. aliqua corrolaria, 4°. rationum solutiones. — Quantum ad primum, est prima descriptio haec: Quadratum est figura superficialis plana rectangula atque equilatera; 2ª. descriptio: quadrangulus est figura superficialis plana rectangula, cujus tantum latera opposita adequantur; 3ª. descriptio: dyameter quadrati est linea recta dividens quadratum in duo equalia suas extremitates angulis oppositis applicatas; 4ª. descriptio: commensurabilia sunt quibus est aliqua mensura communis, quodlibet illorum equaliter vel inequaliter reddens, verbi gratia: sicut est linea trium pedum et linea quinque pedum, linea enim pedalis utramque mensurat, ter enim sumpta tripedalem reddit, et quinquies sumpta reddit quintipedalem. 5ª. descriptio: incommensurabilia sunt, quibus non potest inveniri, nec est aliqua mensura communis, quodlibet istorum praecise reddens, verbi gratia: sicut sunt illae quantitates quae sic se habent, quod si est aliqua quantitas aliquotiens sumpta, quae reddat illam praecise, eadem quantitas nunquam illam aliam praecise reddet, nec etiam potest inveniri aliqua, quae si reddat unam aliquotiens sumptam, etiam reddat aliam aliquoties sumptam: verum si invenitur aliqua quantitas, quae aliquoties sumpta reddat costam quadrati praecise, quoties sumatur nunquam reddet dyametrum ejusdem praecise, sed semper plus vel minus, ut quilibet potest reperire (reperiri) per circinum mensurans costam et dyametrum. 6ª. descriptio: proportio irrationalis est quantitatum incommensurabilium adinvicem habitudo. 7ª. descriptio: proportio rationalis est quantitatum commensurabilium adinvicem habitudo. Ex istis sequitur, scilicet ex 6ª. et 4ª. descriptionibus, quod proportio irrationalis non potest inveniri in numeris sed solum in quantitatibus continuis, et ratio quare omnes numeri sunt adinvicem commensurabiles est, quia unitas est mensura communis quemlibet istorum praecise reddens; sequitur igitur per descriptionem commensurabilium omnes numeros esse commensurabiles, sed alique quantitates continuae imo valde multae possunt esse incommensurabiles, et igitur in illis proportio irrationalis reperitur. 2°. sequitur ex 2ª., 4ª. et 5ª. descriptionibus, quod proportio rationalis potest inveniri in numeris et in continuis, quia numeri sunt adinvicem commensurabiles et etiam multae quantitates continuae. 3°. sequitur ex istis duobus quod arismeticus solum de proportione rationali habet considerare, geometra vero de rationali et irrationali indifferenter. 4°. sequitur, quod proportio rationalis immediate denominatur a numero. 5°. sequitur, quod proportio irrationalis non potest denominari immediate a numero, sed denominatur immediate a proportione quae ulterius a numero appellatur, et pro tanto (?) quia non potest a numero appellari, quia si posset nihilominus esset proportio rationalis, verbi gratia: sicut medietas quadruplae quamvis denominetur a proportione, sicut a proportione quadrupla, ex quo tamen, cum hoc potest denominari a numero, vocatur proportio rationalis et non *irrationalis, appellatur enim medietas quadruplae proportio dupla, ecce quoniam (?) a numero binario appellatur, signanter igitur dixi, quod proportio irrationalis non potest a numero appellari.*

Quantum ad secundum sit prima conclusio: Dyameter alicujus quadrati est major costa ejusdem; probatur quia dyameter alicujus quadrati dividit quadratum in duos triangulos, sicut patet in figura, quorum quilibet triangulus habet unum angulum rectum et duos angulos semirectos, et angulo recto opponitur dyameter quadrati et semirecto costa ejusdem, quare sequitur per 18. primi Euclidis dyametrum majorem esse sua costa, nam 18. primi Euclidis, quod majori angulo alicujus trianguli longius latus est oppositum. — 2ª. conclusio est ista, quod quadrangulus, cujus unum de longioribus lateribus est dyameter seu equale dyametro quadrati, est equalis quadrato, et hoc si linea longior tangit angulum quadrati; probatur sic: sit enim quadratum .a.b.c.d. (Fig. 11) *et sit quadrangulus* .f.a.d.e., *tunc probo ista esse equalia: est enim triangulus* .a.b.d. *equalis duobus triangulis* .f.a.c. *et* .c.d.e. *simul junctis, et triangulus* .a.c.d. *est communis utrique, igitur quadratum* .a.b.c.d. *est equale quadrangulo* .f.a.d.c., *et est conclusio; tenet consequentia, quia si equalibus equalia addas, quae resultant sunt equalia; antecedens probo, scilicet quod triangulus* .a.b.d. *sit equalis duobus triangulis* .f.a.c. *et* .c.d.e. *simul junctis, quia dividam angulum* .c. *per equalia per lineam* .c.g. *quod potest fieri per 9ªᵐ primi Euclidis, et erunt duo trianguli* .a.c.g. *et* .c.g.d. *equales, quia duo latera unius et duo anguli unius erunt equales duobus lateribus alterius et duobus angulis alterius, sicut potest elici ex diffinitione quadrati prius posita, igitur reliquum latus reliquo lateri et reliquus angulus reliquo angulo, et totus triangulus toti triangulo erit equalis. Ista consequentia tenet per 4ªᵐ primi Euclidis; tunc arguitur sic:* .a.c.g. *triangulus est equalis triangulo* .f.a.c. *per descriptionem quadranguli vel quadrati, et similiter triangulus* .c.g.d. *erit equalis triangulo* .c.d.e., *igitur totus triangulus* .a.c.d. *est equalis duobus triangulis* .f.a.c. *et* .c.d.e. *simul junctis, quare et triangulus* .a.b.d., *qui est equalis triangulo* .a.c.d., *erit equalis illis duobus simul junctis, quod fuit probandum. Ista ultima consequentia tenet, quia quaecunque sunt uni et eidem equalia, inter se sunt equalia, quare sequitur conclusio, quod quadrangulus cujus unum de longioribus lateribus est dyameter seu equale dyametro et unum de brevioribus est equale semidyametro ejusdem, est equalis quadrato, et talis est quadrangulus, cujus longius latus est dyameter quadrati et reliquum longius tangit angulum quadrati, igitur etc. — 3ª. conclusio: dyameter quadrati et costa ejusdem sunt quantitates incommensurabiles. Ad probandum istam conclusionem suppono primo, quod quadratum dyametri duplum est ad quadratum costae. Ista patet ex penultima primi Euclidis, nihilominus potest demonstrari sic: quia quadratum dyametri quadruplum est ad medietatem quadrati costae, igitur est duplum ad totum quadratum costae; tenet consequentia, quia quicquid est quadruplum dimidii, illud est duplum totius, cujus quidem totius illud dimidium est dimidium;*

antecedens potest haberi ex probatione conclusionis praecedentis et ex alio, quia quadrangulus .f.a.d.e. *in figura praescripta est equalis quadrato* .a.b.c.d. *per conclusionem immediate praecedentem, qui quidem quadrangulus duplus est ad quadratum costae scil.* .e.g.c.d., *igitur similiter quadratum* .a.b.c.d. *duplum erit ad idem, tenet consequentia: nam duae quantitates equales ad tertiam comparatae eandem habent differentiam vel proportionem.* 2^o. *suppono quod omnes numeri sunt commensurabiles et quod omnia commensurabilia possunt in numeris assignari; ista patet per descriptionem commensurabilium prius positam.* 3^o. *suppono, quod qualis est proportio lateris quadrati unius ad latus quadrati alterius talis est proportio quadrati ad quadratum duplicata; ista est* 2^a. *pars 18. secti Euclidis.* 4^o. *suppono, quod nullus numerus quadratus duplus est ad alium; ista patet ex commento* 6^{ti} *decimi Euclidis. Istis suppositis arguitur sic: si dyameter et costa quadrati ejusdem essent commensurabiles (commensurabilia), tunc in numeris possent assignari per secundam suppositionem. Sit igitur verbigratia dyameter quadrati sicut duo et costa ejusdem sicut unum, tunc sequitur per* 3^{am} *suppositionem quod proportio quadrati dyametri ad quadratum costae erit quadrupla, quod est contra primam suppositionem, quia debet esse praecise dupla: tenet consequentia, quia dupla duplicata resultabit quadrupla. Si ergo inter dyametrum et costam est proportio dupla, et cum proportio quadratorum sit proportio eorum duplicata, sequitur proportionem quadratorum esse quadruplam; etiam cum nullus numerus quadratus sit duplus ad alium, sicut dicit* 4^a. *suppositio, sequitur quadratum dyametri non esse duplum quadrato costae, quod est contra primam.* 2^o. *addo quintam suppositionem, et est ista: duplum numeri paris est par; sextam: duplum numeri imparis est etiam par; septimam: quadratum numeri paris est par, et quadratum numeri imparis est impar. Tunc arguo sic: si dyameter et costa ejusdem essent adinvicem commensurabiles vel comparabiles, tunc possent in numeris assignari per* 2^{am} *suppositionem, vel igitur ambo in numero pari, vel ambo in numero impari, vel unum in numero pari et reliquum in numero impari. Non primum, quia cum unus numerus quadratus non sit duplus ad alium per quartam suppositionem, sequitur quadratum dyametri non esse duplum quadrato costae, quod est contra primam suppositionem. Si autem ambo assignantur in numero impari, sequitur per* 5^{am} *suppositionem quadratum tam dyametri quam costae esse sicut numerum imparem, et cum unus numerus impar non sit duplus ad alium per* 6^{am} *suppositionem, sequitur iterum quadratum dyametri non esse duplum quadrato costae, quod est contra primam suppositionem. Si autem detur tertium, quod unum signetur in numero pari, reliquum in numero impari, vel igitur dyameter assignabitur in numero pari et costa in impari vel econtrario; si primum, tunc per primam suppos., cum quadratum dyametri sit duplum quadrato costae, sequitur unum numerum quadratum esse duplum ad alium, quod est contra* 4^{am} *suppos.; si autem dyameter signetur in numero impari et costa in numero pari, igitur quadratum dyametri erit sicut numerus* *impar et quadratum costae sicut numerus par per 7^{am} suppos., et cum nullus numerus impar sit duplus ad numerum parem per 5^{am} suppos., sequitur quadratum dyametri non esse duplum ad quadratum costae quod est contra primam suppos. — 4^a. conclusio: proportio dyametri quadrati ad costam ejusdem est proportio irrationalis; probatur sic: quia proportio quadrati dyametri ad quadratum costae (proportionem quadrati costae) est proportio dupla per primam suppos., igitur proportio dyametri quae est costa majoris quadrati ad costam minoris quadrati est medietas duplae proportionis; ista consequentia tenet per 3^{am} suppos. prius positam: nam qualis est proportio laterum talis est proportio quadratorum duplicata; sed modo ita est, quod dyameter majoris quadrati et costa minoris habent se sicut dyameter et costa ejusdem quadrati, sicut potest patere in figura praescripta; igitur dyametri quadrati ad costam ejusdem est proportio quae vocatur medietas duplae proportionis, et ista est irrationalis ex uno corollario posito post suppositiones; igitur etc. — Quantum ad tertiam: ex primis duabus conclusionibus sequitur, quod non oportet esse eandem proportionem superficierum et laterum superficies illas ambientium, quia quadratum* .a.b.c.d. *est equale quadrangulo* .f.a.c.d. *per secundam conclusionem, et tamen eorum latera non adequantur, quia alias dyameter quadrati esset equalis costae ejusdem, quod est contra primam conclusionem: ista consequentia tenet, quia dyameter quadrati est unum de longioribus lateribus quadranguli, sicut patet in figura; quare sequitur quod lineae inequales superficies equales ambire possunt. — 2^o. pono, quod aliqua superficies finita, scil. quatuor pedum, potest ambiri lineis quantumcunque longis; sit ista superficies* .a.b.c.d. *cujus quaelibet costa sit ut duo, ista est quatuor pedum; patet quia bis duo sunt quatuor; dividam istam superficiem in duas medietates et apponam unam alteri in longum, tunc adhuc ista superficies est quatuor pedum, quia longitudo est ut quatuor, latitudo ut unum, ducatur longitudo in latitudinem dicendo semel quatuor sunt quatuor, et haec est quantitas superficiei; postea dividatur illud compositum in duas medietates ut prius, et apponatur una alteri in longum, tunc longitudo erit 8 pedum, latitudo dimidii pedis, ducatur iterum longitudo in latitudinem dicendo semis 8 et resultant quatuor ut prius, et sic in infinitum semper equalis superficies lineis longioribus quam prius ambitur. — Ex quo 3^o. sequitur, quod non est dare maximam lineam nec maximas lineas quibus aliqua superficies potest ambiri, quia quibuscunque datis adhuc majoribus ambiri potest, etiam sine rarefactione. — 4^o. dico, quod minima linea qua aliqua superficies ambiri potest est circularis, quia ista inter omnes alias est capacissima. — 5^o. dico, quod omnium superficierum equalium, quanto aliqua pluribus lateribus equalibus continetur, tanto illa simul juncta sunt minora, quia tanto magis accedit ad figuram circularem; ista in libello qui vocatur de triangulo est demonstrata. — 6^o. dico, quod duo corpora equalia sine rarefactione et condensatione locis inequalibus possunt contineri; patet, si unum fieret quadratum* et aliud sphaericum, cum locus figuretur ad figuram*

* Soll wohl hiermit verstanden sein: *cubicum*.

locati, sequitur quod corpus sphaericum minorem occupet locum quam quadratum. — 7°. dico, quod corpus finitum, puta quatuor pedum, spatium infinitum potest occupare sine rarefactione; patet sic: dividatur corpus quatuor pedum in prima parte proportionali horae in duas medietates et jungatur una alteri in longum, postea in 2ª parte proportionali dividatur illud compositum in duas medietates et similiter jungantur ut prius dictum est, et sic secundum singulas partes proportionales illius horae, tunc in fine horae erit infinitum in longitudine, quia infinitae sunt partes horae et tamen non est nisi quatuor pedum. — 8°. videtur, quod possibile sit corpora infinita, quorum quodlibet est certae quantitatis datae, si essent infinitum locum occupantia, sic conjungi sine condensatione quod fierent unum corpus finitum occupans spatium finitum, quae quidem corpora aliquo modo possunt conjungi, quod constituerent corpus infinitum occupans spatium infinitum, probatur: sint talia infinita, ut poma vel quaecunque alia tale spatium infinitum complentia; sumat aliquis in prima parte proportionali alicujus horae unum illorum et sit rotundum quod sit .a., *sumatque aliud de illis et comprimat in latum taliter quod circumflectat supra primum, et sit ista superficies circumflexa certae spissitudinis quae sit* .b., *tunc in 2ª parte proportionali istius horae iterum sumat aliud circumflectendo toti* .a.b. *quod (quae) sit* .c.; *sumat iterum aliud circumflectendo illud toti* .a.b.c., *et sit illud* .d., *et continuet idem per singulas partes proportionales istius horae, tunc in fine horae conjunxit sic corpora infinita quorum quodlibet est certae quantitatis et tamen probo, quod hoc totum aggregatum in fine horae est finitum, quia ex quo* superficies 2ª circumflectitur uni majori quam prima, oportet quod sit magis tenuis quam fuit superficies primo circumflexa, et eadem ratione superficies tertio circumflexa minus spissa quam secundo circumflexa, et sic ulterius, quare videtur quod in eadem proportione in qua superficies primo circumflexa se habet ad superficiem secundo circumflexam in spissitudine, quod in eadem proportione etiam se habet superficies 2° circumflexa ad superficiem tertio circumflexam, et sic 3ª ad quartam, et quarta ad quintam et sic de aliis; et sic videtur quod spissitudines omnium istarum superficierum se habeant in proportione continua, et cum prima inter illas sit certae spissitudinis et finitae et excedat 2ªᵐ in certa proportione, sequitur quod istae superficies infinitae, sic se habentes adinvicem in spissitudine, non constituant spissitudinem infinitam, sicut nec partes proportionales alicujus continui constituunt continuum infinitum; quare sequitur quod hoc corpus in fine horae est finite spissum et cum sit sphaericum, ejus dyameter erit finita, et per consequens ipsum, quamvis ex infinitis corporibus equalibus sit compositum, et hoc fuit primo probandum. — Deinde probatur, quod taliter possunt eadem corpora applicari quae (quod) constituant corpus infinitum, quia si in prima parte proportionali horae fuisset circumflexum unum, in 2ª duo, in 3ª tres et sic in infinitum, isto modo quod superficies circumflexa in 2ª parte proportionali horae fuisset tantae spissitudinis, sicut superficies circumflexa in prima, et superficies circumflexa*

* *quo* steht an Stelle von *eo quod.*

in 3ª tantae spissitudinis sicut circumflexa in 2ª et sic ultra, tunc hoc in fine horae esset infinitum, et tamen certum est, quod tunc non plura fuissent circumflexa quam prius, cum una multitudo infinita non sit major alia. — Nono dico, quod non est dare maximam superficiem vel locum quem corpus aliquod potest replere. — Decimo dico, quod est dare minimam superficiem vel locum, quem aliquod corpus potest implere, videlicet sphaericus, et hoc semper intelligendo sine rarefactione vel condensatione.

Circa tertiam et quartam conclusionem pono propositiones sequentes ex ipsis: prima est, quod equa multiplicia dyametri et costae sunt incommensurabilia, verbi gratia duplum dyametri est incommensurabile duplo costae; patet, quia si duplum dyametri esset commensurabile duplo costae, sequeretur quod etiam duplum dyametri esset commensurabile costae; tenet consequentia, quia quaecunque sunt commensurabilia quicquid est commensurabile uni et reliquo; cum igitur duplum costae et costa sunt commensurabilia, sequitur, si duplum dyametri esset commensurabile duplo costae, etiam duplum dyametri esset commensurabile costae, et cum duplum dyametri etiam sit commensurabile dyametro, sequitur dyametrum esse commensurabilem costae, quod est contra 3ªᵐ conclusionem, igitur etc. Item dico secundo, quod si sint duo circuli .a. *et* .b. *intersecantes se in puncto* .d., *et habeat se circumferentia unius ad circumferentiam alterius sicut dyameter quadrati et costa ejusdem, et essent jam duo mobilia* .e. *et* .f. *conjuncta in puncto intersectionis* .d. *et moveatur* .e. *super circumferentiam* .a., *et* .f. *super* .b., *et equaliter moveantur; dico quod si ista in eternum moverentur, nunquam amplius in puncto* .d. *conjungerentur, quamvis bene in alio; probatur, quia, da quod aliquando in* .d. *puncto conjungantur, sit verbi gratia post mille annos, et cum non possint conjungi in eodem puncto, nisi quodlibet fecerit aliquot revolutiones completas, sequitur quod si post mille annos conjunguntur, aliquot circumferentiae circuli minoris sint equales aliquot circumferentiis circuli majoris, et sic circumferentia unius circuli erit commensurabilis circumferentiae alterius circuli, quod est contra suppositionem, quia habent se sicut dyameter et costa ejusdem quadrati. Ista ultima consequentia patet, quia quorum multiplicia sunt commensurabilia (equalia), ipsa sunt commensurabilia. Sed ista consequentia, videlicet, si post mille annos conjunguntur, quod aliquot etc. probatur sic: quia ex quo in principio fuerunt in isto puncto et continue equaliter movebantur et nunc iterum sunt in eodem, sequitur quod equalia spacia linealia pertransiverunt, et non pertransierint nisi istas circumferentias, igitur circumferentiae unius circuli in aliquo numero simul junctae erunt equales circumferentiis alterius circuli in aliquo numero simul junctis, quod fuit probandum. — 3°. dico, quod qualitercunque moveantur* .a. *et* .b. *sive equaliter sive inequaliter, dum tamen in temporibus equalibus describerent angulos incommensurabiles circa eorum centra, nunquam in eternum se invenirent in isto puncto, si jam essent in ipso, nec unquam fuerunt in ipso, si ab eterno fuissent mota isto modo: patet ex praedicto. — 4°. dico, supposito quod motus solis respectu sui centri et motus lunae respectu sui sint* *incommensurabiles, sicut est verisimile, vel ad minus ejus oppositum nondum est demonstratum, sic quod centrum solis et centrum lunae cum eisdem temporibus describerent angulos incommensurabiles circa centrum terrae, dico, si sol et luna nunc sunt conjuncti conjunctione rectissima vel oppositi oppositione rectissima, si mundus fuisset ab eterno, nunquam ita punctaliter fuerunt conjuncti vel oppositi, et si duraret in eternum, nunquam ita punctaliter conjungerentur vel opponerentur; patet sicut secundum. Ex quo etiam sequitur, quod per totum tempus eternum, si sol et luna sic hodie fuissent conjuncti conjunctione tali, consimilis eclipsis nunquam fiet, si etiam mundus duraret in eternum. Ex quo ulterius sequitur, quod possibile est, aliquam partem orbis nunc esse obumbratam, quae nunquam alias fuit obumbrata, nec erit unquam, supposita etiam eternitate mundi. Ex quo ulterius sequitur, quod aliqua res sive aliquod lumen (?) potest generari, quod durabit in eternum, et aliquod corrumpi quod fuit ab eterno. Ulterius sequitur, supposito quod tempus in quo sol facit unam revolutionem annalem sit incommensurabile diei, sicut est verisimile et etiam ignotum est an ita sit, tunc impossibile est, verum kalendarium invenire. Ulterius sequitur, supposito quod tempus in quo sol facit unam revolutionem et tempus quo luna facit unam sint incommensurabilia, et posito cum hoc, quod omnes revolutiones solis sint equales et similiter lunae, dico quod si luna oriatur punctaliter in aliquo instanti alicujus horae, ut forte in instanti medio horae tertiae alicujus diei, si mundus duraret in eternum, nunquam in instanti consimili consimilis horae oriretur; declaratio istorum patet ex declaratione secundi corrollarii illati ex conclusione 3ª et 4ª. Ex quibus sequitur quod judicia astrologorum sunt aliquando valde incerta. — Item ex tertia et quarta conclusione sequitur, quod impossibile est, continuum esse compositum ex indivisibilibus finitis, quia si dyameter et costa ex indivisibilibus finitis essent compositae, jam dyameter esset commensurabilis costae, quod est contra 3ᵃᵐ conclusionem, et etiam dyametri ad costam esset proportio rationalis: contra 4ᵃᵐ conclusionem; probatur consequentia, quia si essent compositae ex indivisibilibus finitis jam proportio unius ad reliquum esset sicut proportio numeri ad numerum, et sic esset proportio rationalis, cum omnes numeri habeant se ad invicem in proportione rationali et omnis numerus omni numero est commensurabilis per diffinitionem commensurabilium prius positam. — Item ex 3ª et 4ª conclusione potest inferri quod quaelibet quantitas potest dividi in partes non communicantes vel incommensurabiles; patet, quia quodlibet quantum potest dividi in duas partes ad quarum quamlibet se habet totum sicut dyameter ad costam ejusdem quadrati, et quaelibet iterum illarum partium in duas alias, ad quarum quamlibet iterum se habet dimidium sicut dyameter ad costam et sic in infinitum. — Ulterius infero: si aliqua linea esset divisa in duas (duo) quarum (quorum) una (unum) haberet se ad aliam (aliud) in proportione irrationali et iterum quaelibet ulterius divideretur in duas habentes (duo habentia) se in eadem proportione, et si ad ymaginationem ista linea esset sic divisa secundum omnia ista puncta super quae potest fieri divisio talis isto modo, dico quod adhuc remanebunt infinita* *puncta, super quae non fuit facta divisio, quia super nullum punctum dividens istud in duo commensurabilia adhuc fuit facta divisio, quia solum ex casu super punctum dividens dividendum in duo incommensurabilia. — Ulterius dico, si* .a. *et* .b. *essent duo subjecta, et esset* .a. *sicut dyameter et* .b. *sicut costa, et sint uniformiter calida per gradus, ita quod gradus quo* .a. *est calidum respectu gradus quo* .b. *est calidum sit sicut dyameter respectu costae, dico quod caliditas* .a. *est dupla ad caliditatem* .b.; *probatur, quia istae caliditates sunt ymaginandae sicut duae superficies quadruplae similes, quarum latera sunt extensiones subjectorum, igitur proportio caliditatum est sicut proportio subjectorum duplicata, ut patuerit ex una suppositione posita ad probandum conclusionem* 3^{am} *et* 4^{am}.

Istis visis respondeo ad rationes. Ad primam dico, quod .c. (a) *non movetur in duplo velocius* .b., *quia sicut arguebatur* .c. (a) *describit solam lineam dyametralem et non costam, sicut patet in declaratione rationis. Sed diceres contra* .c. (a) *movetur tanta velocitate ad motum lineae descendentis sicut* .b., *et cum hoc quidem est ex ejus motu proprio, super lineam sic descendentem describit adhuc unam costam; probatio: quia si* .c. (a) *conjacuisset (conjevisset?) super linea descendente et solum ad motum istius lineae sic descendentis fuisset motum, tantum spacium sicut* .b. *praecise transivisset, et tunc in fine per unam costam* .c. (a) *descendisset, igitur cum nunc sit prope* .b. *etiam ex motu proprio juvit (?) se ad pertranseundum istam costam. Pro solutione istius pono propositiones: prima, si aliquid moveatur motu proprio aliqua velocitate, et cum hoc moveatur motu alicujus alterius tanta velocitate, si est motus localis ad eandem partem, tale mobile movetur in duplo velocius, quam si unico istorum motuum praecise moveretur: sicut si unus curreret in magna navi tanta velocitate sicut navis moveretur versus eandem directionem (?) positionis. —* 2^a. *propositio: si motus illi sunt in oppositas partes et sint equales, illud nunquam mutabit locum suum nec movetur, sicut si unus moveretur tanta velocitate in navi versus oriens, quanta navis versus occidens, semper haberet eundem punctum celi in cenith (sic) capitis sui, supposito quod celum quiesceret. —* 3^a. *propositio: si unus istorum motuum esset versus aliquam partem et alter ad partem diversam, non tamen ad contrariam, sed ad latus, tunc hoc quod movebitur ad latus illis duobus motibus minus quam in duplo velocius moveretur, quam si moveretur uno istorum motuum, et sic fuit in ratione proposita. Ex istis patet solutio rationis in forma, quia si* .c. (a) *descendendo ad motum descensus illius fuisset motum tanta velocitate motu proprio, quanta linea descendebat, et cum hoc per eandem lineam, tunc fuisset in duplo velocius motum: sed ex quo movebatur ad latus motu proprio et motu descensus lineae simul versus tamen eandem directionem (?) positionis, quia deorsum, non apparet ipsum in duplo velocius fuisse motum, quam si solum uno istorum motuum fuisset motum, nec per consequens in duplo velocius* .b. *— Ad* 2^{am}. *dico, quod, quamvis latus oppositum angulo majori sit majus, falsum est tamen quod latus oppositum angulo majori in duplo sit majus. — Ad* 3^{am}. *potest* *dici, quod iste modus arguendi a commutata proportionalitate non tenet in illis quae sunt diversarum specierum, modo cum quadratum et linea non sint ejusdem speciei ratio tertia modicum probavit. — Explicit haec questio.*

Dyameter quadrati ad ejus costam est proportio medietatis duplae, probatur sic: Et supponitur primo, ut dicitur et probatur quinto elementorum Euclidis, quod omnes proportiones sunt equales quarum denominationes sunt equales. 2°. supponitur, si sunt tres termini, et primus est major 2°, et secundus major tertio, proportio primi ad 3am componitur ex proportione primi ad 2am et secundi ad 3am. 3°. supponitur: quando aliquid componitur ex duobus equalibus, illud compositum est duplum ad utrumque illorum. Tunc fundetur quadratum minus super dyametrum quadrati majoris, ut apparet in figura (Fig. 12), *et tunc proce datur sic: nam quae est proportio* .a.b. *ad* .b.c., *eadem est* .b.c. *ad* .b.d., *quia utraque est sicut dyametri ad suam costam, ergo sunt equales per primam suppositionem. Item hic sunt tres termini scil.* .a.b., .b.c., .b.d. *et primus est major 2° et secundus major tertio, visu indice; ergo proportio primi ad tertium componitur ex proportionibus primi ad secundum et secundi ad tertium, per 2am suppositionem, et componitur ex duobus equalibus, ergo ad utrumque illorum est duplum per 3am suppositionem; sed primi ad tertium est proportio dupla, quia totius ad suam medietatem, ergo proportio primi ad secundum est et dicitur medietas duplae, quae est* .a.b. *ad* .b.c. *scil. dyametri ad costam.*

Datis duabus lineis inequalibus, inter eas duas medias proportionales invenire.

Istud theorema fuit antiquitus sic introductum: quidam rex juvenis ludo talario deditus jussit sibi edificari capellam et in ea altare cubicum construi; quo facto considerans altare respectu capellae nimis parvum, jussit altare duplicari, et cum artifices latomi (latonii) artem duplicandi cubum non haberent, ad jussum regis congregati fuerunt geometrae, cumque multo tempore studuissent super duplicationem cubi, dixit tandem unus eorum, hoc nullo modo posse fieri, nisi primo inter duas lineas datas quarum una ad aliam dupla sit, inventae fuerint duae aliae mediae proportionales, eo quod cubus lineae duplae ad cubum lineae dimidiae seu subduplae octuplus esse probatur. Et cum inter unum et ejus octuplum sint duae proportiones vel media proportionalia, scil. 2 et 4, quorum primum duplum est simpliciter (?), et tales ideo lineas eandem proportionem habentes quaerere necesse est; et hoc problema inter eos cubi duplicatio (duplus) vocabatur. — Ad praedictum autem theorema concludendum tali modo venire nitebantur: sint .a.b. *et* .b.c. (Fig. 13) *duae lineae rectae inequales ad libitum datae, ad angulum rectum extremitatibus earum junctis, et utraque eorum quantumlibet in continuum et directum pertractis, et sint illae* .a.b.d. *et* .c.b.e. (d) *quatuor angulos rectos super* .b. *statuentes; deinde duos triangulos orthogonos constitue, scil.* .c.d.e. *et sit angulus* .d. *rectus, et* .d.e.a. *triangulus angulo recto* .e., *qui qualiter habeant figurari et stabiliri inferius* *docebo; palam itaque est, quod cum ab angulo recto* .d. *perpendicularis super basim insistat in triangulo* .c.d.e., *per* 8^{am} *sexti Euclidis* .b.d. *erit media proportionalis inter duas portiones basis, quae sunt* .c.b. *et* .b.e. *Similiter et per eandem in triangulo* .d.e.a. .b.e. *erit media proportionalis inter* .b.d. *et* .a.b.; *est ergo ut* .c.b. *ad* .b.d. *sic* .b.d. *ad* .b.e. *quod erat demonstrandum. Sed quia per istum modum difficile imo forte impossibile est, tales duas lineas invenire in omnibus nisi tantum in rationalibus, non tamen in omnibus rationalibus, in irrationalibus autem non (?), ideo ponitur alius modus generalis et communis tam in rationalibus quam irrationalibus qui talis est: sint* .a.b. *et* .b.g. (Fig. 14) *duae lineae rectae datae inequales ad angulum rectum jacentes super* .b. *Perfecto autem parallelogrammo* .b.d.a.g., *dyameter protrahatur per medium secta in* .e., *educanturque latera* .d.g. *et* .d.a. *in directum usque in* .z. *et* .h., *appositaque regula super punctum* .b. *contingente, totiensque moveatur ipsa regula, quod resecet* .d.h.z. *tali nempe pacto, quod et ipsa* .b. *contingente* .e.h. *et* .e.z. *sint equales, de quo circinus praebeat fiduciam; ducque perpendicularem super* .d.g. *quam ipsa dividet per medium per 30. primi addita 10. ejusdem. Quia igitur* .d.g. *per duo equalia divisa est in* .c. *et ei in longum additur* .g.z., *palam est quod illud, quod fit ex* .d.z. *in* .g.z. *cum quadrato* .g.c. *equum est quadrato lineae* .c.z. *per* 6^{am} 2^{i} *Euclidis. Igitur eodem quadrato quadrato lineae* .e.c. *addito utrobique, erit quod fit ex* .d.z. *in* .g.z. *cum quadratis linearum* .g.c. *et* .e.c., *et inde quadrato lineae* .e.g. *per penultimam primi Euclidis, equale quadratis linearum* .c.z. *et* .c.e., *hoc est quadrato* .z.e. *per eandem; quod ergo fit ex* .d.z. *in* .g.z. *cum quadrato lineae* .e.g. *equum est quadrato lineae* .e.z. *Similiter demonstrabitur, quod idem quod fit ex* .d.h. *in* .a.h. *cum quadrato* .e.a. *est equale quadrato lineae* .e.h., *intellecta perpendiculari ab* .e. *super latus* .d.a. *Et quia quadratum lineae* .e.h. *equum est quadrato lineae* .e.z., *cum* .e.h. *et* .e.z. *positae sint equales, ergo quod fit ex eis id est earum quadrata est equale ei quod fit ex mediis, id est duo quadrata duarum linearum equalium* .e.z. *et* .e.h. *sunt equalia duabus superficiebus quae fiunt ex mediis, scil. ex lineis* .d.z. *et* .g.z. *cum quadrato lineae* .e.g. *et* .d.h. *et* .a.h. *cum quadrato lineae* .e.a. *Demptis autem duobus quadratis equalibus duarum linearum equalium* .e.g. *et* .e.a. *a duabus praedictis superficiebus relinquitur, quod hae duae superficies quae fiunt ex* .d.z. *in* .g.z. *et ex* .d.h. *in* .a.h. *sint equales, quia si ab equalibus equalia demas etc. Tunc sequitur demonstrative hae duae superficies sunt equales, ergo quatuor earum latera sunt proportionalia per 15 (13) sexti, et haec quatuor latera sunt hae quatuor lineae, scil.* .d.z., .g.z. *et* .d.h. *et* .a.h. *Sequitur ergo: sicut* .d.z. *ad* .d.h. *sic* .a.h. *ad* .g.z., *et similiter sicut* .d.h. *ad* .d.z. *ita* .g.z. *ad* .a.h. *per eandem 15 sexti; sed etiam sicut* .d.z. *ad* .d.h. *sic* .a.b. *ad* .a.h. *et* .g.z. *ad* .g.b. (.g.b. *ad* .g.z.) *per* 4^{am} *sexti Euclidis. Ex his ergo concluditur principale propositum, quia, sicut* .d.z. *ad* .d.h. *sic* .a.b. *ad* .a.h. *per* 4^{am} *sexti, et* .a.b. *ad* .a.h. *sic* .a.h. *ad* .g.z., *cum eadem sit proportio* .a.b. *ad* .a.*h.* *sicut* .d.z. *ad* .d.h., *ut* *praedictum est, et eodem modo sicut* .d.h. *ad* .d.z. *sic* .g.z. *ad* .a.h. *per 4am sexti; sicut ergo sequitur, sicut* .a.b. *ad* .a.h. *sic* .a.h. *ad* .g.z., *ita sequitur, sicut* .g.b. *ad* .g.z. *ita* .g.z. *ad* .a.h., *ergo per conversam proportionalitatem: sicut* .a.h. *ad* .g.z. *sic* .g.z. *ad* .g.b., *et ergo sicut* .a.b. *ad* .a.h. *sic* .a.h. *ad* .g.z. *ita* .g.z. *ad* .g.b. *Inventae sunt igitur duae lineae mediae proportionales inter duas lineas datas, quae sunt* .a.h. *et* .g.z., *haec omnia patent in figura.*

Wir haben zu den beiden Abhandlungen noch Einiges hinzuzufügen. In der Quaestio über die Incommensurabilität von Seite und Diagonale des Quadrates fällt uns im Anfange die Plumpheit der Rationes auf, mit denen Gelehrte jener Zeit (denn die Ungebildeten haben doch wohl über solche Dinge nicht discutirt), die in Geometrie wenig oder gar nicht bewandert waren, die Commensurabilität der beiden Linien zu stützen suchten. Sie behaupteten, die Diagonale sei das Doppelte der Seite, und suchten dies auf drei Arten zu beweisen: erstens sagten sie (vergl. Fig. 9), der Punkt c brauche die doppelte Geschwindigkeit, um nach d zu gelangen, wie der Punkt b, um ebendahin zu gelangen, denn er müsse nicht nur die Höhe des Quadrates, sondern zugleich noch seine Breite durchlaufen, also sei cd doppelt so gross wie bd; zweitens sagten sie (vergl. Fig. 10), wie das Quadrat $abcd$ sich zu seiner Diagonale verhalte, so müsse sich auch das Quadrat $cgdf$ zu seiner Diagonale verhalten, mithin müssen sich die beiden Quadrate wie die beiden Diagonalen verhalten, erstere verhalten sich aber wie 2 zu 1, folglich ebenso die Diagonalen, d. h. Diagonale und Seite des grösseren Quadrates; drittens behaupteten sie, nach Euclid stehe in einem Dreieck dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber, nun sei in dem Dreieck cad (Fig. 9) der Winkel bei a doppelt so gross wie der bei c, also auch die Diagonale cd doppelt so gross als die Seite ad. — Die zweite Ratio mochte für jene Zeit noch etwas Bestechendes für sich haben; unbegreiflicher sind aber die erste und dritte, ganz unbegreiflich aber ist es, dass die blosse Betrachtung der Figur nicht die Behauptung verstummen machen konnte, die Diagonale sei doppelt so gross als die Seite. Es sind diese Rationes übrigens ein sprechender Beweis für die jeder Anschauung sich entschlagende, rein deductive, oft aber logisch-verkehrte Denkweise des scholastischen Mittelalters, aber auch ebensowohl für die höchst geringe mathematische Bildung jener Zeit; konnte doch selbst Albertus die zweite Ratio nicht anders widerlegen, als mit den Worten: *„iste modus arguendi a commutata proportionalitate non tenet in illis quae sunt diversarum specierum, modo cum quadratum et linea non sint ejusdem speciei ratio tertia modicum probavit"* (S. 52).

Von Interesse mögen ferner die zur Illustration des Wesens der Incommensurabilität von Albertus angeführten, theilweise gut gewählten Beispiele sein (vergl. S. 49 u. 50), wie dasjenige von den zwei sich schneidenden

Kreisen, deren Durchmesser oder Umfänge sich verhalten wie Diagonale und Seite eines Quadrates, also incommensurabel sind, und in deren einem Durchschnittspunkte zwei Punkte vereinigt gedacht werden, die gleichzeitig ihre gleichförmige und gleichschnelle Bewegung auf den beiden Kreisen, der eine auf dem einen, der andere auf dem andern, beginnen, so werden nach Albertus die beiden Punkte sich niemals wieder in jenem Durchschnittspunkte begegnen, so viele Umläufe sie auch machen mögen. Als zweites Beispiel führt er die Bewegung von Sonne und Mond an: Gesetzt, Sonne und Mond beschreiben in ihrer Bewegung um die Erde incommensurable Peripherien und es finde zu einer bestimmten Zeit eine Sonnenfinsterniss statt, so wird niemals wieder eine ganz gleiche Finsterniss stattfinden, so dass genau die gleichen Theile der Erde verfinstert wären. Ferner sagt er: Gesetzt, die Zeit, in welcher die Sonne einen jährlichen Umlauf macht, sei dem Tage incommensurabel *(sicut est verisimile et etiam ignotum est an ita sit)*, so ist es unmöglich, einen richtigen Kalender aufzustellen.

Betreffs dieser Abhandlung ist noch zu erwähnen, dass Albertus S. 47 einen „Libellus de triangulo“ citirt, und zwar soll sich in demselben der Satz vorfinden, dass von allen gleichseitigen Figuren von gleichem Flächeninhalt diejenige mit der grössten Seitenzahl den kleinsten Umfang hat. Ich vermuthete zuerst, es könnte dies die Abhandlung „De triangulis“ des Jordanus Nemorarius sein, deren Manuscript sich in dem Codex F. II. 33 der Basler Universitätsbibliothek befindet; allein Herr M. Curtze in Thorn, der gegenwärtig mit der Herausgabe dieser Schrift beschäftigt ist, theilte mir mit, dass sich jener Satz nicht in derselben vorfinde. Es ist übrigens leicht möglich, dass hier ein Versehen des Verfassers oder ein Fehler des Abschreibers vorliegt und dass die citirte Schrift keine andere ist, als der von Albertus auch im Tractatus „De quadratura circuli“ angeführte „Libellus de figuris isoperimetris“ des griechischen Anonymus, dessen lateinische Uebersetzung sich ebenfalls in jenem Basler Codex F. II. 33 vorfindet. Bei dieser Gelegenheit ist es vielleicht am Platze, darauf aufmerksam zu machen, dass einige der Abhandlungen des genannten Codex zu denjenigen gehören, die von den Scholastikern des Mittelalters bei ihren commentatorischen Arbeiten am meisten zu Rathe gezogen worden sind. Bei rascher Durchsicht der Commentarien des Albertus de Saxonia, des Thimon*, des Wilhelm von Occam, des Joh. Buridanus zu den Aristotelischen Schriften fand ich citirt: Libellus de figuris isoperimetris,

* Thimon ist keiner der bekannteren Scholastiker. Jöcher's Gelehrtenlexikon sagt von ihm: „War ein jüdischer Rabbi, dessen Zeit, wann er gelebt, nicht bekannt ist, hat Quest. in Aristot. libros meteorolog. geschrieben, so im Vatican in Manuscript liegen.“ — Nach der Vorrede zu der mir vorliegenden Ausgabe seines Commentars zu der Aristot. Meteor. (besorgt durch Georg Lockert, Scotus, Paris 1516) las Thimon im Anfange des 14. Jahrhunderts zu Paris über Philosophie.

Euclides De speculis, Euclides De aspectibus, Jakob Alchindi De umbris, Thideus De speculis comburentibus vel de sectione muquesi (soll also nach M. Steinschneider heissen: mukefi), Theodosius De sphaeris, Archimedes De curvis superficiebus, Ptolemeus Perspectiva, Geber ohne Angabe des Werkes, ebenso Alhazen ohne Angabe des Werkes, u. A.

Was die zweite Abhandlung über die Auffindung zweier mittlerer Proportionallinien anbetrifft, so enthält dieselbe im Anfange eine von der gewöhnlichen Darstellungsweise etwas abweichende Erzählung von der Entstehung des Problems der Würfelverdoppelung. Sie stimmt mit keiner der beiden überein, die Eratosthenes in dem Briefe an den König Ptolemaios Euergetes erwähnt, in welchem er diesem seine Construction der zwei mittleren Proportionallinien mittheilt, scheint aber aus der Verschmelzung beider in späterer Zeit hervorgegangen zu sein. — Die erste der beiden hier behandelten Lösungen des Problems ist diejenige, die Eutokios im Commentar zum 2. Buche De sphaera et cylindro des Archimedes dem Platon zuschreibt, aber mit Weglassung der Beschreibung des zur mechanischen Lösung nothwendigen Instrumentes; die zweite ist die Heron'sche Lösung, wie sie ebenfalls Eutokios in dem genannten Commentar mittheilt. Da die Figur in Thevenot's Ausgabe der Belopoeica Heron's nicht ganz mit der des Eutokios übereinstimmt (besonders ist das Perpendikel *ec* in Fig. 14 und 15 eine Zugabe des Eutokios), so dürfen wir wohl den Schluss ziehen, vorliegende Abhandlung sei einem Bruchstücke des Commentars des Eutokios entnommen, denn dass der ganze Commentar dem Verfasser bekannt gewesen sei, dürfen wir nicht annehmen, sonst wäre doch wohl die Erzählung über den Ursprung des Problems der Würfelverdoppelung anders ausgefallen. Auch müssen wir sie als eine nach einem griechischen Manuscripte gemachte Uebersetzung betrachten, wenn wir uns der von Hultsch in der Abhandlung „Der Heron'sche Lehrsatz über die Fläche des Dreiecks als Function der drei Seiten"* aufgestellten Schlussweise, betreffend die Transscription der Buchstaben bei Uebersetzungen von griechischen und arabischen Manuscripten, anschliessen wollen.

* Vergl. diese Zeitschrift, IX. Jahrg. S. 247 u. 248.

Recensionen.

Euclidis opera omnia ediderunt J. L. HEIBERG et H. MENGE. Elementa edidit et latine interpretatus est J. L. HEIBERG. Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri MDCCCLXXXIII—VI. Vol. I (X, 333), II (XXII, 437), III. (VI, 417), IV. (VI, 423).

Wir haben im XXVIII. Bande dieser Zeitschrift, hist.-lit. Abth. S. 100 bis 102, über Herrn Heiberg's literargeschichtliche Studien über Euclid berichtet und dieselben zu einer Euclid-Ausgabe in Beziehung gesetzt. Diese ganze Ausgabe, welche eine hervorragende Bereicherung der Bibliotheca Teubneriana zu werden verspricht, ist nun allerdings seitdem noch nicht vollständig erschienen. Euclid's Werke sind zahlreicher und verschiedenartiger als die der anderen griechischen Mathematiker, wenigstens soweit wir von Erhaltenem zu reden haben, und selbst ein Gelehrter von der Arbeitskraft unseres dänischen Freundes hat es nicht gewagt, die ganze Last der Herausgabe auf sich zu laden. Er hat zu diesem Zwecke vielmehr mit Herrn H. Menge in Mainz sich vereinigt, so dass die Vergleichung der Codices bald von Diesem, bald von Jenem besorgt werden sollte, die Einzelschriften alsdann so getheilt würden, dass Herr Heiberg die Elemente, die Optik und die Katoptrik, Herr Menge die Daten, die Phänomena und die musikalischen Schriften herauszugeben hätte. Die vier ersten Bände der so vorbereiteten Gesammtausgabe sind heute in unseren Händen. Sie enthalten die Elemente, mithin nur von Herrn Heiberg Herausgegebenes. Zugleich ist es das auch Laien in der Geschichte der griechischen Mathematik bestbekannte Werk, welches in dieser neuen Auflage vorliegt. Ein rühmlich bekannter Herausgeber, ein Niemand fremdes Werk, dieses Zusammentreffen erspart uns ausführlicheren Bericht. Wir dürfen getrost uns mit einem *Vivat sequens* begnügen.

CANTOR.

Die Zeitmesser der antiken Völker, von Professor Dr. G. BILFINGER. Festprogramm des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums. Stuttgart, 1886. 4°. 78 S.

Wassermaass und Schattenmaass wurden von den Alten, worunter Herr Bilfinger immer Griechen und Römer, nicht aber die älteren Culturvölker Aegyptens und Mesopotamiens versteht, zur Zeitmessung benutzt, und zwar sind nach demselben Verfasser zwei wesentlich unterschiedene Arten der Zeitmessung bemerklich. Die eine, voralexandrinische Zeitmessung begnügte sich damit, die aus einem unten durchlöcherten Gefässe ablaufende Flüssigkeit zu messen, wenn vor Gericht die Redezeit der einzelnen Sachwalter zu bestimmen war, und die Schattenlänge des menschlichen Körpers zur Fusslänge der Persönlichkeit, um deren Schatten es sich handelte, in Beziehung zu setzen, wenn es galt etwa die Zeit des Mittagessens zu bestimmen. Erst die nachalexandrinische Zeit behandelte die Aufgabe, den Tag, beziehungsweise die Nacht in je zwölf unter sich gleiche Abschnitte zu theilen, und frühestens von da an kann man von eigentlichen Schattenuhren und Wasseruhren im modernen Sinne reden. Doch diese Behauptung wäre nicht ganz richtig, wie Herr Bilfinger nachweist. Die moderne Uhr, mag sie nun geartet sein wie sie will, theilt die Zeit einer ganzen Axendrehung der Erde in 24 unter sich gleiche Abschnitte oder Stunden. Auf den bürgerlichen Tag fallen, je näher beim 21. Juni die Beobachtung angestellt wird, um so mehr, je näher beim 21. December, um so weniger Stunden. Griechen und Römer zählten, wie am 21. Juni, so am 21. December und an jedem andern Jahrestage stets 12 Stunden des bürgerlichen Tages; die einzelne Stunde war also bald länger, bald kürzer, und das musste an der Sonnenuhr durch die Herstellung derselben, musste auch an der Wasseruhr durch geeignete Vorrichtungen ablesbar erscheinen. Zur Wiederherstellung der antiken Sonnenuhr dienen neben einer Beschreibung bei Vitruvius auch in Pompeji aufgefundene wirkliche Sonnenuhren. Für die Wasseruhr stehen nur Beschreibungen zu Gebote. Herr Bilfinger hat, wie es scheint, beidemal in seiner Wiederherstellung das Richtige getroffen. Kurz schildern lässt sich aber die ziemlich verwickelte Sache kaum, insbesondere nicht ohne Zeichnungen, und so begnügen wir uns, die für Gnomonik sich interessirenden Leser unseres Berichtes auf die ungemein scharfsinnig und mit grosser Sachbeherrschung ausgearbeitete Festschrift selbst hinzuweisen.

Cantor.

Leben und Schriften Leonardo's da Pisa. Ein Beitrag zur Geschichte der Arithmetik des 13. Jahrhunderts. Von J. Giesing, Oberlehrer am königl. Realgymnasium in Döbeln. 1886. XXXV S.

Es war gewiss ein richtiges Gefühl, welches den Verfasser leitete, als er Leonardo von Pisa zum Gegenstande einer Abhandlung sich wählte. Was man über den nach Zeitalter und vielleicht auch an Bedeutung ersten italienischen Mathematiker in den besten geschichtlichen Werken findet, ist ebenso wenig allgemein bekannt, als es erschöpfend genannt zu werden verdient. In doppelter Beziehung bedarf daher die geschichtliche Würdigung Leonardo's neuer Bearbeitung. Ob Herr Giesing das letzte Wort in dieser Richtung gesprochen, ist uns allerdings zweifelhaft. Schränkt er doch selbst (S. XVI) seine Aufgabe dahin ein, dass er nicht alle wissenschaftlichen Leistungen des Pisaners, sondern nur einige wenige der Betrachtung unterzieht.

Bevor er dazu gelangt, giebt er über das Leben Leonardo's diejenigen Aufschlüsse, die man seinen Werken zu entnehmen gewusst hat. Dabei war uns neu, was (S. IX) über den bekannten Beinamen Leonardo's, Bigollo, gesagt wird. Herr Giesing sucht nämlich denselben mit dem Hospitale del Bilgallo in Verbindung zu setzen und macht Leonardo zu einem Manne, der „sich insbesondere der Pflege und Erziehung der Kinder hingegeben hat", wovon nirgend ein Sterbenswörtchen verlautet. Er hält es ferner „nicht für unmöglich, dass er (Leonardo) zugleich in Montpellier, wo eine berühmte Arzneischule existirte, Unterricht in der Mathematik ertheilt hat". Nicht unmöglich ist freilich ein sehr zweckmässig gewählter Ausdruck! Nicht unmöglich ist sehr Vieles, sogar auch dass eine Vermuthung sich als richtig erweise, die ursprünglich durchaus haltlos in der Luft zu schweben scheint.

Unter den verloren gegangenen Schriften Leonardo's erscheint (S. XV) ein Libro di merchatanti detto di minor guisa. Der Verfasser hebt in einer Anmerkung mit Recht den Gegensatz gegen eine *maior guisa* hervor, von welcher gleichfalls im Liber Abbaci die Rede ist. Worin liegt das Unterscheidende beider Methoden? Wir wissen es nicht; nur das scheint uns sicher, dass *guisa maior* bei Leonardo **nicht** Algebra bedeutet, wie Herr Giesing glaubt; denn von Algebra ist im VIII. Abschnitte des Liber Abbaci, wo eben jene *maior guisa* gelehrt wird, keine Rede, es sind vielmehr daselbst nur einfache Dreisätze abgehandelt. (Vergl. Scritti di Leonardo Pisano I, 83 sqq.) Eine andere naheliegende Vermuthung, *ad majorem guisam* heisse die directe Proportion, bei welcher dem Grösseren jedesmal ein Grösseres entspricht, ist übrigens, wie wir beiläufig bemerken, gleichfalls unrichtig.

Auf das Buch des Hamet über die Proportionen dürfte Herr Giesing (S. XXIII) zuerst im Druck aufmerksam gemacht haben. Wir bedauern in seinem Interesse, dass er es sich hat entgehen lassen, weitläufiger von jenem Buche zu reden, welches für die Geschichte der Regula sex quantitatum des Menelaos (arabisch Regula ḳaṭṭâ) und ihrer Entwickelung zum späteren Kettensatze von grosser Wichtigkeit war.

Diese wenigen Bemerkungen drängten sich uns zu den vom Verfasser behandelten Dingen auf. Von den Gegenständen zu reden, die er nicht in das Bereich seiner Abhandlung zu ziehen gewillt war, ist natürlich hier nicht der Ort.

CANTOR.

Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas (Texte Grec et traduction) par M. PAUL TANNERY. Extrait des Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Nationale etc. Tome XXXII, 1re Partie. 136 pages. Paris 1886. Imprimerie Nationale.

Seit unser unermüdlicher, geist- und kenntnissreicher Fachgenosse eine Uebersiedelung nach Paris bewerkstelligen durfte, hat er noch mehr als früher uns verwöhnt, Abhandlungen aus seiner Feder lesen zu können, durch welche er jeweils die Erforschung griechischer Mathematik wesentlich förderte. Nicht ihr Inhalt, sondern nur ihr meist unbedeutender Umfang schloss sie von besonderer Besprechung an dieser Stelle aus. Heute sind wir in Besitz einer ausführlicheren Arbeit, welche uns zugleich Gelegenheit giebt, eines Aufsatzes „Sur l'arithmétique Pythagoricienne“ zu gedenken, welchen Herr Tannery im Märzhefte 1885 des Bulletin Darboux zum Abdruck brachte.

Die grössere Veröffentlichung, welche wir in der Ueberschrift nennen, besteht bis zu S. 25 aus einer Einleitung. Dann folgt S. 26—57 der erste, S. 58—127 der zweite Brief des Nicolaus Rhabdas, auf den geraden Seiten der griechische Text, auf den gegenüberstehenden ungeraden Seiten die französische Uebersetzung. Den Schluss bilden drei Indices: ein Wortverzeichniss solcher griechischer Ausdrücke, die in dem grossen Thesaurus überhaupt fehlen; ein Verzeichniss der historischen und metrologischen Wörter; endlich ein arithmetischer Index, der also die technische Bedeutung der Wörter kennen lehrt und den selbstverständlich nur ein sprachwissenschaftlich gebildeter Mathematiker oder ein mathematisch geschulter Philolog anfertigen konnte, ein Hultsch, ein Heiberg, ein Tannery.

Wer war nun Nicolaus Rhabdas, und wodurch haben seine Briefe einen Abdruck in der unter den Männern der Wissenschaft mit höchster Achtung genannten Sammlung der sogenannten Notices et Extraits verdient? Die Geschichtschreiber der Mathematik wussten, dass Nicolaus Rhabda (wie man bisher schrieb) aus Smyrna etwa um die Zeit des Maximus Planudes in der Mitte des XIV. Jahrh. lebte, dass von ihm eine Fingerrechnung herrührte, welche wiederholt in Druck erschien, und ein noch unedirter Brief über Arithmetik, in welchem die Wortverbindung „politische Rechenkunst“ vorkommt. (Vergl. unsere Vorlesungen über Gesch. d. Math. I, 435—436.) Herr Tannery hat dieses Wissen erheblich vermehrt. Er hat gefunden, dass eine von Rhabdas herrührende Osterrechnung auf dieses Jahr 6849 byzantinischer Zeitrechnung, d. h. auf das Jahr 1341 sich bezieht, wodurch die frühere Vermuthung über seine Lebenszeit zur Gewissheit erhoben wird. Er hat ferner die sogenannte Fingerrechnung nur als Theil eines Briefes erkannt, wie auch die Aufgaben politischer Rechenkunst in einem Briefe mitgetheilt worden sind, und diese beiden Briefe hat er jetzt vollständig herausgegeben. Als Ort, von wo aus dieselben geschrieben sind, ist Constantinopel genannt. Die Bedeutung der Briefe hat Herr Tannery in seiner Einleitung erörtert.

Logistik und Arithmetik waren bei den Griechen streng geschiedene Lehrgegenstände. Die erstere war Rechenkunst, die zweite Zahlentheorie, um moderne Benennungen zu gebrauchen. Wohin gehörte die Lehre von den Gleichungen? Wir haben selbst früher (Vorlesungen I, 133) gesagt, sie sei in die griechische Arithmetik eingedrungen, und dieses ist mit Hinblick auf Diophant gewiss richtig, aber vorher gehörte sie zur Logistik. Dafür hat Herr Tannery aus einem Scholion zum Platonischen Dialoge Charmides, welches zwar längst bekannt, aber nicht verstanden war, die, wie uns scheint, sicheren Beweisgründe gefunden. In der Logistik, heisst es dort, betrachtet man *μηλίτας καὶ φιαλίτας ἀριθμούς*. Das sind Aufgaben, sagt Herr Tannery, an eine Stelle der Platonischen Gesetze (VII, 819 b) anknüpfend, in welchen von Aepfeln (nicht von Heerden, wie der Scholiast selbst und auch Anatolius missverstehend meinten) und von Trinkgefässen die Rede ist, Aufgaben, wie sie in den bekannten mathematischen Epigrammen erhalten sind, d. h. Textgleichungen. Wenn Diophant später zur Arithmetik hinzunahm, was ihr früher nicht angehörte, so hat sich eben eine Namenverschiebung vollzogen, von welcher alle Zeiten Beispiele aufweisen, wie wir beifügen möchten. Man vergleiche doch nur Cournot's Théorie des fonctions mit Dem, was man heute Functionentheorie nennt! Die so erweiterte alte Logistik stimmt aber — und das ist von höchster Bedeutung — nun vollständig mit den Rechenaufgaben des ägyptischen Uebungsbuches des Ahmes überein, während freilich für die Arithmetik ein gleicherweise als Vorbild dienendes uraltes (babylonisches?) Werk noch fehlt. Nur soviel hat Herr Tannery in dem oben erwähnten Aufsatze „Sur l'arithmétique Pythagoricienne“ dargethan, dass ein solches Muster älter als die altpythagoräische Schule sein müsste, da diese bereits eine Arithmetik gleichen Umfanges, wie das zweite nachchristliche Jahrhundert sie kannte, besass.

Die Logistik wurde häufiger durch mündlichen Unterricht, als durch Lehrbücher fortgepflanzt, wenn es auch daran nicht ganz fehlte; aber verlesen und verbraucht, wie die Bücher der Volksschule aller Zeiten, sind sie nicht auf uns gekommen. Die Briefe des Rhabdas sind geeignet, einigermassen diesen Mangel zu ersetzen, und deshalb hat Herr Tannery recht gethan, sie dem Drucke zu übergeben.

Wir führen aus ihnen nur eine Methode der angenäherten Quadratwurzelausziehung als besonders bemerkenswerth an. Sei $\sqrt{a^2+r}$ zu suchen, wo $r < 2a+1$. Näherungsweise ist $\sqrt{a^2+r} \sim a + \frac{r}{2a}$, aber auch nur näherungsweise. Denn um a^2+r zu erhalten, ist $a+\frac{r}{2a}$ nicht mit sich selbst, sondern mit $\frac{a^2+r}{a+\frac{r}{2a}} = \frac{2a^3+2ar}{2a^2+r}$ zu vervielfachen. Eine bessere

Annäherung liefert nun nach Nicolaus Rhabdas das arithmetische Mittel der beiden ungleichen Factoren. Dieses ist, in Buchstaben geschrieben,

$$\frac{1}{2}\left[\left(a+\frac{r}{2a}\right)+\left(\frac{a^2+r}{a+\frac{r}{2a}}\right)\right]=\frac{8a^4+8a^2r+r^2}{8a^3+4ar}=a+\frac{r}{2a}-\frac{r^2}{8a^3+4ar},$$

wenn auch Rhabdas diese Umformung natürlich nicht kennt. Es ist hier nicht der richtige Zeitpunkt, zu prüfen, wie sich diese überlieferte zweite Annäherung zu $\sqrt{a^2+r}$ zu den alterthümlich bekannten Zahlenbeispielen verhalten möchte.

CANTOR.

Geometria Culmensis. Ein agronomischer Tractat aus der Zeit des Hochmeisters Conrad von Jungingen (1393—1407), herausgegeben von Dr. H. MENDTHAL. Publication des Vereins für die Geschichte von Ost- und Westpreussen. Leipzig 1886, bei Duncker & Humblot. 76 S.

Die geschichtliche Darstellung entlegener Zeiten, mag sie nun den staatlichen Entwickelungen oder dem Bildungszustande gewidmet sein, zeigt mitunter Lücken, die entweder daher rühren, dass damals Nichts sich ereignete, werth der Nachwelt überliefert zu werden, oder daher, dass leider die Ueberlieferung verloren ging. So war die Zeit um das Jahr 1400 in den Geschichtswerken der Mathematik lange die Ueberschrift eines unbeschriebenen Blattes, bis man auf's Neue mit Bradwardin und Oresme bekannt wurde, welche dem Blatte einen lesenswerthen Inhalt gaben. Ebendort wird von jetzt ab auch der namenlose Verfasser der Geometria Culmensis einen Platz finden. Nicht als ob er wichtige Entdeckungen gemacht hätte; dazu war er, scheint es, nicht der Mann; aber er hielt sich in der Anweisung zum Berechnen der Felderinhalte, die er auf Befehl des Deutschordensmeisters veröffentlichte, fern von den sonst üblichen und in eine spätere Zeit sich noch hinschleppenden, theoretisch ganz unzulässigen Näherungsrechnungen. Er lehrte den Inhalt stets durch Zerlegung der zu messenden Figur in Dreiecke, in welchen jedesmal die Höhe gezogen und gemessen wurde, finden, und das war immerhin ein Fortschritt. Auch in der Geschichte der deutschen Literatur wird unser Anonymus erwähnt werden müssen, da er der bis jetzt älteste bekannte Schriftsteller ist, welcher seine Geometrie neben dem lateinischen Grundtexte auch in deutscher Sprache herausgab, dadurch Zeugniss dafür ablegend, dass es ihm darum zu thun war, auch solche Leser zu belehren, die des Lateinischen unkundig waren. Wir können Herrn Mendthal nur dankbar dafür sein, dass er in der Anordnung des Druckes von den Handschriften, welche zuerst den lateinischen, dann den deutschen Wortlaut enthalten, abweichend die beiden Texte zweispaltig nebeneinander setzen liess. Man erkennt so um so deutlicher, dass der Verfasser mit einer gewissen Freiheit schaltete, bald weglassend, bald hinzusetzend, so dass keine ganz strenge Uebereinstimmung beider Texte stattfindet. Dass die Geometria Culmensis nicht in dem, was sie giebt, sondern mehr in dem, was sie weglässt, verdienstlich ist, haben wir schon bemerkt. Auf ganz eigenen Füssen scheint ihr Verfasser aber auch in dieser Beziehung nicht gestanden zu haben. Das Muster, nach welchem er eingestandenermassen arbeitete, war eine Schrift des Dominicus Parisiensis, welche Herrn Curtze in dem Münchener Handschriftenkatalog aufzustöbern gelang, worauf Herr Mendthal sie verglich und bei der Herausgabe der Geometria Culmensis in der Weise benutzte, dass er die aus ihr entlehnten Stellen bemerklich machte. Die Persönlichkeit dieses Dominicus Parisiensis liegt noch völlig im Dunkeln, so dass auch hier es sich wieder bewährt, dass der geschichtliche Fortschritt immer zugleich auch neue Räthselfragen stellt.

CANTOR.

Die geometrischen Näherungsconstructionen Albrecht Dürer's. Von Dr. SIEGMUND GÜNTHER, k. Gymnasialprofessor. Beilage zum Jahresbericht der königl. Studienanstalt Ansbach für 1885—1886. 31 S.

Albrecht Dürer's Bedeutung für die Geschichte der Mathematik ist eine doppelte. Einmal ist durch ihn eine nicht unbedeutende Anzahl von Näherungsconstructionen gesammelt, zum Theil vielleicht auch erfunden worden, und zweitens hat er sie als das erkannt, was sie waren: als für den Praktiker meistens genügend, aber theoretisch unrichtig. Eine moderne Schilderung dieser Verfahren hat noch einen Schritt weiterzugehen und die Grenze der erreichten Genauigkeit rechnerisch nachzuweisen. Das bildet denn auch den Hauptinhalt der Abhandlung, welche Herr Günther dem Ansbacher Programm für 1886 beigegeben hat und welche dementsprechend ganz interessante, vielleicht vortheilhaft in der Schule verwerthbare Beispiele solcher Näherungsabschätzungen liefert.

CANTOR.

Ungedruckte wissenschaftliche Correspondenz zwischen Johann Kepler und Herwart von Hohenburg 1599. Ergänzung zu Kepleri Opera omnia ed. Chr. Frisch. Nach den Mss. zu München und Pulkowa edirt von C. ANSCHÜTZ. Separatabdruck aus den Sitzungsberichten der königl. Böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Prag 1886. In Commission bei Victor Dietz in Altenburg (Sachsen-A.). 118 S.

Hans Georg Herwart von Hohenburg, bayerischer Kanzler und Staatsmann, zugleich auch als Gelehrter auf den verschiedensten Gebieten thätig, war seit 1597 zu Johannes Kepler in einen Briefwechsel getreten, welcher aus einer chronologischen Frage sich entwickelte, die H. mittelbar durch den Grazer Professor der Mathematik *P.* Christoph Grienberger an K. richten liess. Am 10. März, am 16. Mai, am 20. Juli 1599 unter Anderen schrieb H. an K., und dieser beantwortete diese Briefe unter dem 9. und 10. April, unter dem 30. Mai, unter dem 6. August. Dass die drei Antwortschreiben erlassen worden sind, hatte Frisch richtig erkannt und in seiner Gesammtausgabe von Kepler's Werken betont, allein sie schienen verloren. Frisch hatte nämlich bei seinen Forschungen natürlich auf die Zuverlässigkeit der von ihm zu Rathe gezogenen Handschriftenkataloge verschiedener Bibliotheken gebaut. Der Zettelkatalog der Münchener Mss., der ihm dienen musste, da der gedruckte Katalog noch nicht vollendet war, verschwieg aber, dass der Cod. lat. 1607 auch Kepleriana enthielt, und das waren gerade die drei vermissten Briefe. Herr C. Anschütz hat nun den ersten Brief auf S. 10—33, den zweiten auf S. 34—53, den dritten auf S. 53—74 seiner uns heute vorliegenden Druckschrift veröffentlicht und hat denselben eine kurze Einleitung vorausgeschickt, zahlreiche Anmerkungen folgen lassen. In zweien dieser Anmerkungen zum ersten Briefe ist der Keim zu der umfassenden Abhandlung, welche Herr Anschütz in dieser Zeitschrift, Bd. XXXI Heft 5 und 6, Bd. XXXII Heft 1, über die Verdienste Kepler's um die jährliche Mondgleichung veröffentlicht hat. Der Inhalt der drei Briefe ist ungemein reich und gestattet eine Ausbeute für Forschungen nach den verschiedensten Richtungen. Nicht am wenigsten lehrreich sind sie für Kepler's Stellung zur Astrologie. Unzweifelhaft hat K. an diese Wissenschaft als solche geglaubt, wenn er auch die Abhängigkeit einzelner Ereignisse von der Stellung der Planeten verwarf. An der Hand der neu gedruckten Briefe können wir ferner den berüchtigten Streit zwischen Ticho Brahe und Reinmarus Ursus verfolgen. Endlich sind sie hochwichtig, insofern sie den ersten Entwurf der Harmonice mundi enthalten. Sie sind in der That das, als was der Herausgeber sie bezeichnet: eine Ergänzung zu Frisch's Opera omnia.

Cantor.

Histoire des sciences mathématiques et physiques, par M. Maximilien Marie, répétiteur de mécanique, examinateur d'admission à l'école polytechnique. Tome VIII: D'Euler à Lagrange. 259 pag. Tome IX: De Lagrange à Laplace. 321 pag. Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire. 1886.

Es ist uns unmöglich gewesen, den VII. Band bei seinem Erscheinen mit freundlichen Worten zu begrüssen. [Vergl. Bd. XXXI, hist.-lit. Abth. S. 172.] Nicht viel besser hat der VIII., hat der IX. Band auf uns gewirkt. Die gleichen Schattenseiten können naturgemäss nur in gleicher Weise den Eindruck verdunkeln, den manche lichtere Punkte hervorzurufen sich eignen würden. Um nicht fortwährend das Mangelhafte betonen zu müssen, wollen wir heute uns mit dieser allgemeinen Behauptung seines Vorhandenseins — die im Einzelnen zu rechtfertigen leicht fiele — uns begnügen und dafür bei einem von den Schriftstellern verweilen, welche Herr Marie augenscheinlich mit Vorliebe gelesen und mit entsprechender Vorliebe behandelt hat. Zu ihnen gehört nicht Euler, wiewohl der Verfasser mit Recht ihn als Grenze zweier Zeitabschnitte benutzt hat, wohl aber d'Alembert. Auf ihn wird unsere Aufmerksamkeit wiederholt gelenkt. Herr Marie hat die Gewohnheit, jedem Zeitabschnitte eine Einleitung vorauszuschicken, welche eine Uebersicht über das in diesem Zeitabschnitte von der Wissenschaft Erreichte geben soll. Wir wollen nicht darüber streiten, ob die Uebersicht nicht weit eher an den Schluss eines Abschnittes gehörte, wo der Leser dieselbe auf ihre Richtigkeit zu prüfen vermag, während er, bevor er die Einzelheiten kennen gelernt hat, darauf angewiesen ist, dem Verfasser auf seine Behauptungen hin einfach Glauben zu schenken. Herr Marie würde uns auf diesen Einwurf vermuthlich erwidern, der durch seine Einleitungen vorbereitete Leser prüfe dann die Einzelentwickelung nur um so genauer, und so dürfte in der That mehr eine Geschmacksverschiedenheit, als ein grundsätzlicher Gegensatz vorliegen. In der Einleitung zur 12. Periode also, welche von Euler bis zu Lagrange gerechnet ist, ist Bd. VIII S. 72—91 d'Alembert als im Besitz richtiger Anschauungen über negative und imaginäre Grössen, als Erfinder des nach ihm benannten Princips in der Mechanik, als Förderer der Integralrechnung gerühmt. Mit d'Alembert beschäftigt sich alsdann ein besonderes Capitel S. 172—236, und der äussere Umfang dieses Capitels lässt schon einen Schluss auf die innere Vollständigkeit zu. Insbesondere den mathematischen Philosophen und den Astronomen d'Alembert wird man hier kennen und würdigen lernen, und wir dürfen auf seine Schilderung mit dem ganzen Vergnügen hinweisen, welches sie uns bereitet hat. Im IX. Bande hat der Verfasser vorzugsweise Lagrange seine Aufmerksamkeit zugewandt. Wenn er bei der Inhaltsangabe Lagrange'scher Abhandlungen sich oftmals der von diesem selbst benutzten Ausdrücke bedient, so wird kein Historiker dagegen Einwendung erheben. Von Lagrange können wir alle lernen, wie man geschichtliche Uebersichten zu geben hat.

Cantor.

Der relative Bildungswerth der philologischen und der mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächer der höheren Schulen. Vortrag, gehalten vor der Delegirtenversammlung des deutschen Realschulmännervereins zu Dortmund am 16. April 1886 von Dr. E. Mach, Professor der Physik an der deutschen Universität zu Prag. Leipzig und Prag 1886, bei Freytag und Tempsky. 29 S.

Der Titel des Vortrags lässt die Frage deutlich erkennen, welche Herrn Mach zur Beantwortung vorgelegt war; die Stelle, an der er den Vortrag hielt, giebt zum Voraus Auskunft über die Richtung, nach welcher der Redner sich entschied. Der Bildungswerth der naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächer ist ihm ein entschieden höherer, als der des Unterrichts in den todten Sprachen, besonders im Griechischen. Die Folgerung, welche er daraus zieht, ist die einer einheitlichen Mittelschule mit mässigem Unterricht sowohl in Mathematik, als im Lateinischen bis zu den beiden höchsten Jahrgängen. Dort solle eine Gabelung eintreten und in der einen Parallelclasse Latein und Griechisch, aber keine Mathematik, in der andern Mathematik, aber weder Latein, noch Griechisch gelehrt werden. In Dänemark, sagt uns der Verfasser, sei diese Gattung von Doppelschulen schon eingeführt. Setzen wir noch hinzu, dass Herr Mach dem gemeinsamen Lateinunterricht (wenn wir ihn recht verstanden haben?) eine Sammlung von Musterstücken aus den Schriften von Galilei, Huyghens, Newton u. s. w. zu Grunde gelegt wissen will, so wäre damit wohl das Wesentliche seiner Vorschläge hervorgehoben. Zu dem Letzterwähnten bemerken wir, dass unser verstorbener Freund Unverzagt, als er an dem Wiesbadner Realgymnasium die oberen Classen in der französischen Sprache zu unterrichten hatte, die Lesestücke den Werken von Arago entnahm; in den früheren Jahrgängen wären diese ihres Inhalts wegen wohl kaum verstanden worden.

CANTOR.

Elemente der Theorie der Determinanten, mit vielen Uebungsaufgaben. Von Dr. P. MANSION, Professor an der Universität zu Gent. Zweite vermehrte Auflage. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1886. VI, 55 S.

Nachdem der Unterzeichnete (diese Zeitschr. XXI. Bd., hist.-lit. Abth. S. 167) sich für eine Verpflanzung von Mansion's „Éléments de la théorie des déterminants“ auf deutschen Boden verwendet hatte, entschloss sich der Verf., eine deutsche Ausgabe seines Werkchens zu veranstalten, über welche Herr Cantor (a. a. O., XXIV. Bd., hist.-lit. Abth. S. 33) berichtet hat. Heute liegt eine zweite Auflage der „Elemente“ vor uns, doch hat der Verf., unseres Dafürhaltens mit Recht, keine Veränderungen an dem eigentlichen Texte vorgenommen und sich vielmehr begnügt, in einem Anhang die Eliminationsprobleme etwas weiter auszuführen. Nur von diesen Zusätzen kann also hier die Rede sein.

Zunächst wird gezeigt, dass eine aus dem System linearer Gleichungen

$$F_i \equiv a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,n}x_n - l_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

beliebig herausgegriffene Gleichung $F_t = 0$ mit den Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, ..., $F_s = 0$ nur dann, dann aber auch stets verträglich ist, wenn

$$\Delta_1 F_1 + \Delta_2 F_2 + \ldots + \Delta_s F_s + \Delta_t F_t = 0$$

ist, wo Δ_1, Δ_2, ..., Δ_t die nach den Elementen der letzten Vertikalreihe der Determinante $\Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2} \ldots a_{t,t}$ genommenen Unterdeterminanten sein sollen. An zweiter Stelle wird mit Rücksicht auf die für die Eliminationstheorie sehr bedeutsamen neueren Untersuchungen von Falk in Upsala eine wichtige Eigenschaft der sogenannten Nulldeterminanten bewiesen, darin bestehend, dass, wenn $\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ den Werth Null hat, und wenn ferner die jeder einzelnen Horizontalreihe angehörigen Elemente durch eine Gleichung von der Form

$$a_{k,1} x_1 + a_{k,2} x_2 + \ldots + a_{k,n-1} x_{n-1} + a_{k,n} x_n = 0$$

verbunden gedacht werden, durchaus nicht diese sämmtlichen x gleich Null zu sein brauchen. Es bestehen zwischen mehreren derselben vielmehr wieder gewisse lineare Bedingungsgleichungen. Der dritte Anhang endlich beschäftigt sich mit der Sylvester'schen Gleichung $S = 0$, unter S die dialytische Eliminationsresultante für zwei algebraische rationale und ganze Functionen der nämlichen Veränderlichen, aber von beliebigem Grade, verstanden. Es wird nachgewiesen, dass beide Polynome nur für den Fall $S = 0$ einen gemeinsamen Theiler besitzen.

Besonders anzuerkennen ist neben dem reichen Inhalt und der nach der mathematischen Seite hin klaren und anregenden Darstellung des Werkchens der Umstand, dass der deutsche Text auch die sprachlichen und stylistischen Vorzüge des Originals angemessen zu wahren verstanden hat. Das Buch liest sich durchweg leicht und gut, nur gegen die etwas bedenkliche Neubildung „Sylvesterseliminante" möchten wir Verwahrung einlegen.

München. Dr. S. Günther.

C. Bohn, **Die Landmessung.** Mit 370 Holzschnitten und 2 Tafeln. XVI und 761 S. gr. 8°. Berlin, Springer. 1886. Preis 22 Mk.

Wenn neben unseren trefflichen deutschen Handbüchern der niederen Geodäsie, neben Hartner-Wastler, Bauernfeind, Jordan ein neues Lehrbuch erscheint, wird man zunächst wünschen, die Grundsätze kennen zu lernen, welche den Verfasser bei der Ausarbeitung geleitet haben, und die Zwecke, welchen das Buch dienen soll. Ueber Beides giebt der Verfasser im Vorwort Auskunft.

Er theilt darin mit, dass er auf zweckmässige Anordnung der Rechnungen besondere Sorgfalt verwende, dass er für dieselben ganz bestimmte Vorschriften aufstelle und dass er, um nicht einer billigen, aber unnützlichen Originalität zu verfallen, die preussischen „Anweisungen" und die bayerischen „Instructionen" (zu Katastermessungen nämlich) in den betreffenden Abschnitten seinem Buche zu Grunde lege, dass er endlich bei jeder einzelnen Aufgabe die erreichte oder erreichbare Genauigkeit discutire. Dabei findet er an manchen anderen geodätischen Büchern, dass sie über den Ausgleichungsrechnungen die Sache selbst, die Messungen, vernachlässigen. Der Methode der kleinsten Quadrate erkennt er nur Berechtigung für die grössten und wichtigsten Vermessungen zu; damit kommt er aber in Widerspruch mit den zu Grunde gelegten amtlichen Vorschriften, welche bekanntlich auch für kleinere Messungen die Methode der kleinsten Quadrate oder wenigstens darauf gegründete Näherungsmethoden voraussetzen. Ob mit Recht oder Unrecht, darüber sind allerdings Verschiedene verschiedener Meinung; in vielen Fällen ist es aber unrichtig, wenn der Verfasser die Methode der kleinsten Quadrate wegen ungebührlicher Beschwerlichkeit ablehnt.

Besonderen Werth legt der Verfasser auf möglichst vollständige Aufzählung und Beschreibung der einzelnen Formen der verschiedenen Instrumente oder besser nur gewisser Classen derselben; dabei macht aber namentlich die Auswahl der Abbildungen des Buches vielfach den Eindruck einer zufälligen statt einer systematischen Sammlung. Eine grosse Zahl von wünschenswerthen Figuren fehlt ganz. Die Untersuchung und Berichtigung der Instrumente ist nicht immer hinreichend erläutert. Ueberhaupt vermisse ich in dem Buche oft die Rücksicht auf die praktische Verwendung der Instrumente und Messmethoden, und ich muss dieses Bedenken um so mehr hervorheben, als der Verfasser ausdrücklich sagt, er habe überall „das Praktische im Auge behalten“. Noch mehr, er spricht die Absicht aus, die „persönliche Unterweisung“ am Instrument durch sein Buch ganz entbehrlich zu machen.

Ich kann mich mit dieser Absicht keineswegs einverstanden erklären, glaube vielmehr, dass ein solcher Versuch die praktische Geometrie von ihren Zielen abführen muss. Die Instrumentenlehre, ja selbst zum grossen Theil die Ausführung der Messungen sollte meiner Ansicht nach für einen Vortrag und für ein Lehrbuch über Geodäsie nicht Hauptgegenstand werden; in wenigen Stunden „persönlicher Unterweisung“ am Instrument lässt sich gewiss viel mehr erreichen, als durch viele Vorträge und Abbildungen. Vortrag oder Lehrbuch sollten sich vielmehr hauptsächlich mit der Verwerthung der elementaren Vermessungsresultate und der Discussion derselben beschäftigen. Der Verfasser wird mit seinem Buche der leider ziemlich verbreiteten Ansicht Vorschub leisten, in der Geodäsie (zumal der niederen) genüge das Kennen der Sache und es sei nicht Aufgabe der Schule, „Praktiker“ zu erziehen; das Können werde sich schon später einstellen.

Man wird das vorliegende Werk kaum als abschliessendes Handbuch der Geodäsie empfehlen können; eher scheint es mir in den meisten Capiteln als Vorbereitung auf die eigentlichen praktisch-geodätischen Aufgaben brauchbar. Der Verfasser selbst scheint dies dann und wann zuzugeben, wenn er an Stellen, wo praktisch werthvolle Dinge zu erörtern wären, auf andere Lehrbücher verweist oder wichtige Gegenstände nur flüchtig behandelt. Freilich steht wohl dem angedeuteten Zwecke der Umfang des Buches entgegen.

Auf Einzelheiten des Inhalts hier einzugehen, würde zu weit führen; es sind nicht wenige Stellen, welche zum Widerspruch herausfordern.

Ueber diesen Bedenken — freilich zum Theil principieller Natur — darf ich nicht unterlassen, die gute Anordnung des Stoffes hervorzuheben, sowie den vielen Fleiss, den der Verfasser auf sein Buch verwendet hat.

HAMMER.

C. SPITZ, **Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie.** 3., durchgesehene Auflage. Leipzig, Winter. 1886. 8⁰. VIII und 175 S. mit 42 Figuren. Preis 3 Mk. 50 Pf.

Der Verfasser schickt auf den ersten 28 Seiten einen stereometrischen Abriss der Sphärik voraus. Im trigonometrischen Theil wird vom rechtwinkligen Dreieck ausgegangen und mit dessen Hilfe werden die für das schiefwinklige Dreieck giltigen Gleichungen entwickelt; eine unabhängige Herleitung der letzteren ist nicht gegeben. Von Anwendungen der sphärischen Trigonometrie sind Aufgaben aus der Stereometrie und einfache Aufgaben aus der sphärischen Astronomie mitgetheilt. Mit der Behandlung der Zahlenbeispiele, überhaupt der Rechnungsweise, ist der Referent nicht einverstanden. Einmal benutzt der Verfasser noch durchaus siebenstellige Logarithmen und die gesuchten Stücke werden stets auf 0,01″ oder 0,001″ berechnet, selbst wenn die Daten nur auf 1′ oder weniger genau sind. Wozu dies führt, zeigen besonders einzelne Rechnungen aus der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie; man vergl. hier z. B. von S. 161 an die Beispiele 7, 11, 13 und 17 (Entfernung zwischen Paris und Peking, natürlich bei sphärisch vorausgesetzter Erde, auf 0,0001 Meile, während die geographischen Coordinaten beider Orte auf 1″ gegeben sind!) u. s. w. Sodann sind die Rechnungen selbst zum grossen Theil unnöthig umständlich geführt. Der Verf. wird mir wahrscheinlich entgegnen, dass für den Selbstunterricht Ausführlichkeit geboten sei und dass für den Schulunterricht in der Trigonometrie nicht die Aufgabe vorliege, „praktische Rechner auszubilden“; wenigstens ist mir von fast allen Seiten auf die Forderung grösserer Berücksichtigung der Einfachheit, Kürze und Uebersichtlichkeit der trigonometrischen Rechnungen in der Schule der zuletzt genannte Vorhalt gemacht worden. Allein ich bin doch der Meinung, dass man beispielsweise Dinge wie S. 65, wo zur Bestimmung der zwei unbekannten Winkel A und B, nachdem $\frac{1}{2}(A+B)$ und $\frac{1}{2}(A-B)$ gefunden sind, erst $(A+B)$ und $(A-B)$ gebildet werden, dem Leser oder Schüler selbst bei den unpraktischsten Unterrichtszielen nicht zumuthen sollte!

HAMMER.

S. GÜNTHER, **Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie.** 2. Aufl. München, Ackermann. 1886. 8⁰. XI u. 157 S. mit 52 Figuren. Preis 2 Mk.

Das vorstehende Werkchen hat in der neuen Auflage gegen die erste viel gewonnen. In zum Theil sehr knapper Form enthält es einen elementaren Abriss der sphärischen und physischen Astronomie und der mathematischen Geographie in wohldurchdachter, im Wesentlichen historischer Anordnung. Die „Ausblicke“ sind geschickt gewählt; das historische Element, so sehr es zur Belebung des Unterrichts beitragen kann, drängt sich vielleicht an einzelnen Stellen zu sehr in den Vordergrund.

Wo es mit elementaren Mitteln angeht, sind mathematische Entwickelungen und Andeutungen eingefügt. Leider finden sich gerade hier einige Versehen, die Berichtigung erfordern. Beispielsweise sollen (Anm. S. 14) bei der Curve $y = f(x)$ die Culminationspunkte in Beziehung auf die Abscissenaxe dadurch ausgezeichnet sein, dass in ihnen die Tangente der Curve drei benachbarte Punkte mit letzterer gemein hat; die Anmerkung S. 155 enthält zweckmässig eine Warnung vor Verwechselung der Mercator-Abbildung mit einer centralen Cylinderperspective, der zweite Theil dieser Anmerkung ist aber in der gegebenen Form unrichtig, u. s. f. Einzelne Figuren wären künftig wohl durch neue zu ersetzen, namentlich sollten die zweispitzigen Kreisdarstellungen fortbleiben (z. B. Fig. 7, 8, 15, 51 u. s. w.).

Referent möchte sich noch die Frage gestatten, ob für eine künftige Auflage nicht noch weitere Theile der Geophysik in das Programm des Büchleins aufgenommen werden könnten?

Hammer.

C. S. Cornelius, **Grundriss der physikalischen Geographie**. 6., verbesserte Auflage. Halle, Schmidt. 1886. 8°. VIII u. 257 S. mit Holzschnitten. Preis 2 Mk.

Das Buch verdient seine weite Verbreitung als im Ganzen gut durchgeführter Leitfaden der Geophysik. Freilich wäre eine grosse Ungleichförmigkeit in der Behandlung des Stoffes noch auszugleichen; während sich die ganze Lehre von horizontaler Gestaltung und verticalem Aufbau der Festlandsmassen mit einem Capitel von 6 Seiten begnügen muss, die ganze Hydrographie mit einem solchen von 30 Seiten, nimmt die Meteorologie 6 Capitel von über 150 Seiten ein. Am meisten der Revision bedürftig scheint mir für eine folgende Auflage das 11. Capitel, sowohl in seinem lithologischen als stratigraphischen Theil. Die wenigen beigegebenen Abbildungen sind zum Theil schlecht (vgl. z. B. Fig 19).

Hammer.

W. Jordan, **Grundzüge der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung.** Mit zahlreichen Holzschnitten. VIII, 364 u. [26] S. gr. 8°. Berlin, Springer. 1885. Preis 10 Mk.

Wie der Verfasser in der Vorrede sagt, ist das Buch theils aus praktischen Ortsbestimmungsarbeiten, theils aus Uebungsmessungen und Vorträgen an den technischen Hochschulen zu Carlsruhe und Hannover entstanden.

Der Titel deutet an, was der Verfasser mit seinem Werke bezweckt dasselbe soll sich nämlich nur mit einer „gewissen Mittelstufe von astronomischen Messungen und Berechnungen“ befassen, „bei welchen über die Beobachtungsgenauigkeit von 1 Zeitsecunde nicht hinausgegangen wird“. Man würde also Orts- und Zeitbestimmungsaufgaben, welche mit den Hilfsmitteln einer Sternwarte zu lösen sind, vergeblich in dem Buche suchen, ebenso die Besprechung der astronomisch-geodätischen Arbeiten für Gradmessungszwecke. Das Werk soll vielmehr, indem es den zahlreichen Lehrbüchern der Nautik gegenüber die Verhältnisse zu Lande bevorzugt, Anleitung zu praktisch-astronomischen Arbeiten mit Instrumenten geben, wie sie dem Forschungsreisenden oder dem Ingenieur in unerschlossenen Ländern zu Gebote stehen; als Lehr- und Handbuch für Techniker, Reisende, Geographen wird es nützliche Dienste leisten.

Auf den ersten 36 Seiten giebt der Verfasser eine „Allgemeine Vorbereitung der Zeit- und Ortsbestimmungsarbeiten“, nämlich einen Abriss der sphärischen Astronomie. Das 2. Capitel, welches den eigentlichen Gegenstand des Buches behandelt, nimmt den übrigen Raum desselben ein. In einem Anhang sind dann noch einige Hilfstafeln zusammengestellt.

Von Messinstrumenten werden zunächst drei astronomische Theodolite besprochen; die Einrichtung der Chronometer ist dagegen gar nicht beschrieben, was gewiss manchem Leser unangenehm ist. Es folgen die Messungen mit diesen Instrumenten: Zeitbestimmung aus einer einzelnen Sonnen- oder Sternhöhe, dann nach einer zweckmässigen Untersuchung über die Zulässigkeit der Mittelbildung mehrerer Beobachtungen in kleinen Intervallen die Zeit- und Meridianbestimmung aus correspondirenden Sonnenhöhen, Zeitermittelung mittels transportablen Passage-Instruments, Bestimmung der Breite aus Mittagshöhen der Sonne, der Breite und der Zeit zusammen aus Höhen eines Gestirns, des Azimuts und der Breite mit Hilfe von Polarisbeobachtungen. Es finden sich in diesem Abschnitte auch die zahlreichen populären Zeitmesser zum Theil ausführlich besprochen; die Gnomonik steht aber doch wohl mit dem Zwecke des Buches nur in losem Zusammenhang. Auch sonst geht, wie hier nebenbei bemerkt sein mag, dann und wann der Verfasser gar zu weit herunter in den Ansprüchen an seine Leser, z. B. wenn von Handbreiten am Himmel gesprochen wird, wenn die Regeln für die Mondphasen angegeben werden u. s. f.

Mit sichtlicher Vorliebe behandelt der Verfasser die Reflexionsinstrumente, unterstützt von der sehr vollständigen Sammlung der technischen Hochschule zu Hannover. Er selbst weist ausdrücklich im Vorwort auf diese Paragraphen hin: „Wir haben für die Reflexionsinstrumente eine zusammenhängende und vollständige Fehlertheorie entwickelt, an welcher es bisher gefehlt hat. Im Zusammenhang damit steht die Praxis und Theorie der Messung und Reduction von Monddistanzen, welche in einzelnen Theilen ebenfalls von uns weiter entwickelt worden ist. Eine Studie über den relativen Werth der Monddistanzen bildet das Hauptresultat dieses Abschnittes." Die Beschreibung, Fehlertheorie und Anwendung der Reflexionsinstrumente umfasst über 200 Seiten. Zu der in den §§ 31—41 entwickelten Fehlertheorie des Sextanten möchte Referent bemerken, dass ihm die Voraussetzung (S. 168) genau rechtwinkliger Stellung der Alhidadenaxe zur Limbusebene und damit constanter Neigung des grossen Spiegels nicht zulässig scheint. Bei den Reflexionsinstrumenten mit Vollkreisen ist der Vorschlag des Verfassers zu einem Doppelspiegelkreis (§§ 43, 56) höchst beachtenswerth. Das Fernrohr kann hier in zwei zum Theilungsmittelpunkte symmetrischen Lagen befestigt, also gleichsam umgelegt werden; der prismatische Fehler des grossen Spiegels wird dadurch eliminirt und man erhält auch bei nur einmaliger Messung verschiedener Winkel eine Messungsprobe. Ausserdem hat dieses Instrument (wie der Prismenkreis) vor den übrigen Reflexionsinstrumenten den Vorzug, dass man es bei Monddistanzen nie umzukehren braucht, indem der Mond durch das Fernrohr links oder rechts je nach Bedarf direct oder doppelt reflectirt anvisirt werden kann. Die wichtigsten der übrigen Instrumente, der Pistor-Martins'sche Spiegelprismenkreis, der Steinheil'sche Prismenkreis, ein neuer Prismenkreis von Wegener werden ausführlich beschrieben und untersucht. Bei dem letzteren ist das untere Prisma nebst dem Fernrohr mit dem Theilkreis fest verbunden, während bei Steinheil beide Prismen in beliebige Lage zur Visiraxe gebracht werden können; man erreicht dadurch den Vortheil, dass, wie bei den übrigen Reflexionsinstrumenten, der eine Zielpunkt direct anzuvisiren ist, während bei Steinheil das Fernrohr im Allgemeinen zwischen beide Zielpunkte zu richten ist. Der Verfasser wünscht übrigens hier die Construction von Steinheil beibehalten, indem er betont, dass der letztgenannte Umstand keineswegs wesentliche Erschwerung der Freihandmessung bedingt. Bei einer Vergleichung sämmtlicher Reflexionsinstrumente wünscht der Verfasser beim Verlassen der alten Sextantenform die Vollkreise nicht als Spiegelprismenkreise, sondern als Spiegelkreise mit Repetition nach Borda hergestellt und mit seiner Doppelspiegeleinrichtung versehen, oder aber die Aufnahme des Steinheil'schen Princips in die Praxis.

Nach kurzer Erläuterung der Höhenwinkel- und Azimutmessung mit Reflexionsinstrumenten bespricht der Verfasser die Längenbestimmung aus Monddistanzen. Hier finden sich zahlreiche praktische Vorschriften und Winke, zu welchen dem Verfasser hauptsächlich die auf der Rohlfs'schen Expedition in die libysche Wüste gesammelten Erfahrungen das Material lieferten. Als mittleren unregelmässigen Messungsfehler einer Monddistanz bei Freihandmessung findet der Verfasser für einen 12 cm-Sextanten (mangelhafter Theilung) 22″; dieser Betrag kann durch Anwendung eines Stativs auf weniger als die Hälfte herabgesetzt werden, ohne dass daraus, wie der

Verfasser mit Recht bemerkt, die unbedingte Ueberlegenheit der Stativmessung sich folgern lässt.

Den Schluss des Textes bildet die Anleitung zur Ausgleichung zwischen Monddistanzen und Uhrgang und zur Ausgleichung der auf einer Reise aus Monddistanzen erhaltenen Längen mit Hilfe des Itinerars. Das letztere ist dabei, wie gewöhnlich, durch Compasspeilung und Marschzeit hergestellt gedacht; es tritt an die Stelle der „einfachen Schiffsrechnung“, der „gegissten Oerter“ der Seeleute. Der Verfasser kommt hier an der Hand seiner libyschen Zahlen zu dem leicht einzusehenden Resultat, dass bei Landreisen astronomische Längenbestimmungen auf wenige Hauptstationen beschränkt bleiben können und dass Sorgfalt in der Führung der Wegaufnahme vereinzelte Monddistanzmessungen zwischen solchen Hauptpunkten wohl zu ersetzen vermag. In der Nautik werden die Monddistanzen zur Längenbestimmung der astronomisch zu „besteckenden“ und durch das Schiffsitinerar zu verbindenden Hauptörter mehr und mehr in den Hintergrund gedrängt durch directe Zeitübertragung mittels der Chronometer, ob schon jetzt ganz mit Recht, bleibe dahingestellt; Yvon Villarceau rechnet die Monddistanzen bereits zur „ancienne navigation“. Dabei bleibt freilich auf dem Schiffe das Reflexionsinstrument unersetzbar zur Messung der Höhenwinkel. Bei Reisen auf dem Festlande andererseits wird für gewöhnlich von Chronometerübertragung nicht viel zu erwarten sein; auf den wenigen Hauptstationen, an denen der Reisende längere Zeit verweilt und für welche überhaupt Längenbestimmungen zu machen sind, werden diese aber ebenso gut als mittels der umständlich zu untersuchenden Reflexionsinstrumente, bei welchen stets die Gefahr systematischer Fehler besteht, mit Hilfe des leicht zu rectificirenden Theodolits (Mondculminationen, Mondazimute) ausgeführt werden.* Wenn demnach auch die Bedeutung der Monddistanzen für Landreisen in Zukunft vielleicht keine grosse sein wird, so muss man doch dem Verfasser des vorliegenden Buches für die gründliche Erörterung der Methode der Monddistanzen und der zugehörigen Instrumente dankbar sein.

Hammer.

Dr. Ch. August Vogler, **Lehrbuch der praktischen Geometrie.** I. Theil: Vorstudien und Feldmessen. 1885. Braunschweig, Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. Preis 16 Mk.

Vorliegendes Werk bildet das Mittelglied zwischen dem Taschenbuche der praktischen Geometrie und dem eigentlichen Lehrbuch derselben, das für den fertigen Geometer bestimmt ist. Der Anfänger in der Geodäsie wird dasselbe lebhaft begrüssen, da es dessen Studien in jeder Beziehung fördert; denn er wird nicht nur mit den gebräuchlichsten Instrumenten und

* Das Beispiel Krusenstern's, der zur Längenbestimmung von Nagasaki über 1000 Monddistanzen mass, wird kaum mehr Nachahmung finden.

der Beseitigung ihrer Fehler bekannt gemacht, sondern er lernt auch an durchgeführten Beispielen die Verwendung der Apparate in der praktischen Geometrie kennen.

Die Einleitung des ersten Bandes stellt die Begriffe in der praktischen Geometrie fest, spricht über die Erdoberfläche, als Ellipsoid, als Kugel und als Ebene aufgefasst, und betrachtet schliesslich das Metermaass, dem die älteren Maasse gegenübergestellt werden. Der eigentliche Inhalt zerfällt in die zwei Abschnitte „Vorstudien aus der angewandten Mathematik und Physik“ und „das Feldmessen“.

Das erste Capitel über „die Brechung des Lichtes in kugelförmig begrenzten Medien“ scheint etwas zu ausführlich; denn wer sich mit Physik beschäftigt hat, findet diese Ableitungen in seinem Physikbuch; wem dagegen die physikalischen Kenntnisse fehlen, der wird diese Ableitungen nicht verstehen, weil sie für ihn wieder zu kurz sind. Der Verfasser lässt sich sogar verleiten, die Camera obscura und das menschliche Auge näher zu beschreiben. Auch das zweite Capitel, „das Fernrohr“, leidet vielfach noch an zu grosser Ausführlichkeit. An die Beschreibung der verschiedenen Fernröhre, Mikroskope und Oculare schliesst sich ein Capitel über Libellen und deren Anwendung beim Einstellen von Instrumenten an. Dem Kreise und der Alhidade ist ein besonderes Capitel gewidmet, worin auch die Excentricität und der Theilungsfehler behandelt werden; die mannigfaltigen Ablesevorrichtungen, sowie auch verschiedene Stativformen werden eingehend erörtert. Nach Besprechung der graphischen und mechanischen Hilfsmittel beim Rechnen geht der Verfasser zur Theorie der Beobachtungsfehler und deren Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate über. Diese Capitel unterscheiden sich von dem im Jahre 1883 erschienenen Buche des Verfassers: „Grundzüge der Ausgleichungsrechnung“, dadurch, dass jetzt die Kenntniss der Differential- und Integralrechnung, sowie die Determinantentheorie vorausgesetzt wird. An zahlreichen Beispielen wird die praktische Verwendung der Ausgleichungstheorie dargethan.

Nach diesen vorbereitenden Studien geht der Verfasser im zweiten Abschnitt des Buches zum eigentlichen Gegenstand, dem Feldmessen über. Der junge Geometer lernt zunächst die Hilfsmittel kennen, die zur Messung von Längen und zum Abstecken von Winkeln für Coordinatenaufnahmen dienen; sodann wird er mit den verschiedenen Anfnahmemethoden bekannt gemacht. Jedesmal werden die vielfach abgeänderten Instrumente genau beschrieben, ihre Anwendung an Beispielen durchgeführt und schliesslich die Methoden bezüglich ihrer Genauigkeit und ihrer Verwendung im praktischen Leben einander gegenübergestellt. Das folgende Capitel beschäftigt sich mit dem Entwerfen und Copiren von Plänen, ferner mit den Hilfsmitteln, die das Letztere erleichtern; daran schliesst sich die Flächenberechnung und die Flächentheilung an. Die beiden letzten Capitel sind hauptsächlich den Arbeiten der Bauingenieure gewidmet, das eine enthält das

Abstecken langer gerader Linien, das andere die Curvenabsteckung. An Beispielen, die sich theils auf das freie Feld, theils auf den Bergbau erstrecken, werden verschiedene Arten dieser Absteckungen erläutert.

Auf zehn Tafeln sind die hervorragendsten Instrumente der praktischen Geometrie in schönen Holzschnitten abgebildet, so dass sich jeder ein deutliches Bild davon machen kann.

688 Seiten theilen sich in den interessanten Stoff, der in klarer Weise behandelt ist. Der zweite und letzte Theil der praktischen Geometrie, der die Höhenmessungen behandelt, wird voraussichtlich in diesem Jahre noch erscheinen.

Nicht nur dem Anfänger, sondern auch Denen, die vielleicht nur kurzen oder mangelhaften Unterricht in der praktischen Geometrie erhalten haben, möchte dieses Werk bestens empfohlen sein.

B. Nebel.

E. Wilda, **Beitrag zur Behandlung der mechanischen Wärmelehre an höheren Maschinenfachschulen.** Mit 2 Figurentafeln. 30 S.

Veranlasst zu dieser Abhandlung, die als Beilage zum 11. Jahresbericht der k. k. Staatsgewerbeschule zu Brünn dient, wurde der Verf. durch den von Prof. G. Herrmann in Aachen in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1884, Nr. 44—46 veröffentlichten Vortrag: „Zur graphischen Behandlung der mechanischen Wärmetheorie." Verf. geht von den physikalischen Grundlehren aus, spricht über die Aequivalenz von Wärme und Arbeit, über innere und äussere Arbeit und kommt dann zur graphischen Darstellung der Wärme durch Wärmegewicht und Temperatur, nach welcher sich die wichtigen Curven der adiabatischen und isothermischen Zustandsänderungen als verticale bezw. horizontale Gerade ergeben. Leider werden die beiden Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie nicht besonders hervorgehoben. Nach der graphischen Darstellung der äusseren Arbeit behandelt der Verfasser die Zustandsänderungen der permanenten Gase; zunächst stellt er die Erfahrungssätze zusammen, geht dann vom allgemeinen Falle der Zustandsänderung zu speciellen Fällen über. — Bei der Zustandsänderung des Wasserdampfes stehen die Erfahrungsresultate für den gesättigten Wasserdampf an der Spitze, denen sich die Zustandsänderung der Dampfmischungen mit Rücksicht auf die besonderen Fälle und diejenige des überhitzten Dampfes anschliessen. Den letzten Theil bilden die Kreisprocesse, zunächst die umkehrbaren und die nicht umkehrbaren, sodann der Kreisprocess der calorischen Maschinen im Allgemeinen und schliesslich die Luft- und Dampfmaschinen. — Vielfach bezieht sich der Verf. auf seine Curvenlehre und Statik fester Körper (Verlag von Carl Winiker in Brünn) und auf seinen Aufsatz: „Die Curvenlehre und die Mechanik im Lehrplan der mechanischen Abtheilung der höheren Gewerbeschule", der im 3. Band (1885) als Supplement zum Centralblatt für das gewerbliche Unterrichtswesen in Oesterreich erschienen ist.

B. NEBEL.

G. WIEDEMANN, **Die Lehre von der Elektricität.** IV. Bd., 1. u. 2. Abth. Braunschweig, Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn. 1885.

Der vierte Band, welcher wegen seiner Grösse in zwei Abtheilungen erschienen ist, bildet den Schluss dieses Werkes, das in dieser Zeitschrift früher schon besprochen wurde. Welchen Nutzen dieses Werk nicht nur dem Physiker, sondern auch dem wissenschaftlich gebildeten Elektriker bietet, noch einmal hervorzuheben, dürfte wohl überflüssig sein.

Der vierte Band behandelt die Induction und das elektrische Verhalten der Gase. Daran schliesst sich das absolute Maasssystem und ein theoretisches Schlusscapitel, in welchem die hypothetischen Ansichten über das Wesen und die Wirkungsweise der Elektricität zusammengestellt sind. Durch die Nachträge, welche zu den früher erschienenen Bänden gemacht sind, ist die gesammte, bis zum Schluss des Jahres 1884 erschienene Literatur der Elektricitätslehre berücksichtigt. Sowohl ein ausführliches Inhaltsverzeichniss, als auch ein Sach- und Namensregister ermöglichen, sich in diesem umfangreichen Werke leicht zurecht zu finden.

B. NEBEL.

J. C. WALBERER, **Anfangsgründe der Mechanik fester Körper,** mit Uebungsaufgaben. München, Verlag von Th. Ackermann. 5. Aufl. 1885. Preis 2 Mk. 40 Pf.

Dies kleine Werkchen zeigt durch seine rasch erfolgte 5. Auflage, dass es gerne beim Unterricht verwendet wird. Der Grund hierzu liegt wohl in der einfachen Weise, wie der Stoff behandelt ist, so dass jeder aufmerksame Schüler mit einer gewissen Leichtigkeit in die Mechanik eingeführt wird. — Das Ganze zerfällt in drei Abschnitte, wovon die beiden ersten die Statik und Dynamik behandeln, während der dritte eine Sammlung von 270 hierzu geeigneten Aufgaben enthält. Die Ausstattung ist eine recht saubere zu nennen, da Druck und Figuren sich durch ihre Reinheit auszeichnen.

B. NEBEL.

SOHNCKE, **Der Ursprung der Gewitterelektricität und der gewöhnlichen Elektricität der Atmosphäre.** Jena, Verlag von G. Fischer. 1885. Preis 1 Mk. 50 Pf.

Im ersten Abschnitt zeigt der Verfasser an der Hand von Beobachtungen, dass die Isothermenfläche Null eine verhältnissmässig geringe Entfernung von der Erdoberfläche hat, ferner, dass sie sowohl jährlichen, als auch täglichen periodischen Schwankungen unterworfen ist, die sich oft in sehr kurzer Zeit vollziehen. Dass die Temperatur kurz vor einem Gewitter wesentlich eine niedrigere ist, folgt aus Beobachtungen, die zum Theil bei Luftfahrten, zum Theil an verschiedenen Höhen des Schwarzwaldes gemacht wurden. Der zweite Abschnitt behandelt die Eis- und Wasserwolken, von denen die letzteren sich unter den ersteren befinden. Wie die Beschaffenheit der Wolken beim Ausbruch eines Gewitters ist, wird im dritten Abschnitt dargethan, und zwar zunächst bei den Wärmegewittern, sodann auch bei den Wirbelgewittern; aus beiden Arten von Gewittern folgt, dass bei jedem Gewitter in der gleichen Höhe Eis- und Wasserwolken sich befinden, die mit Reibung aneinander vorüberziehen müssen. Dass aber durch die Reibung von Wassertröpfchen an Eis eine bedeutende Elektricitätsmenge entsteht, wird im vierten Abschnitt durch eine Reihe von Beobachtungen nachgewiesen. Auf Grund dieser Erscheinung wird im fünften Abschnitt als wesentliche Quelle der Gewitterelektricität angegeben die durch heftige Bewegung von Eis- und Wassertheilchen hervorgerufene Elektrisirung dieser Theilchen, woran sich eine nähere experimentelle Begründung dieser Annahme anschliesst. Auf Grund dieser Thatsache sucht der Verfasser im sechsten Abschnitt, die gewöhnliche Elektricität der Atmosphäre auch auf Reibung der Wassertröpfchen mit dem Erdboden und mit Eistheilchen in der Höhe zurückzuführen. Am Schlusse finden sich noch zwei Beilagen über Temperaturbeobachtungen bei Luftreisen und solche, die auf dem Schwarzwald ausgeführt worden sind.

B. Nebel.

Bibliographie

vom 1. December 1886 bis 31. Januar 1887.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der mathemat.-physikal. Classe der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften. 15. Bd., 3. Abth. München, Franz. 7 Mk.

Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 33. Bd. v. J. 1886. Göttingen, Dieterich. 33 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben v. Müller, Wangerin, Henoch u. Lampe. 16. Bd., Jahrg. 1884, 1. Heft. Berlin, G. Reimer. 10 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben v. Schönfeld und Seeliger. 21. Bd., 4. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Oesterreich'sche meteorologische Zeitschrift, herausgegeben v. J. Hann und W. Köppen. 4. Jahrg. 1887, 1. Heft. Berlin, Asher & Comp. compl. 20 Mk.

Astronomische Nachrichten, herausgeg. v. A. Krueger. 116. Bd. Nr. 1. Hamburg, Mauke & S. compl. 15 Mk.

Zeitschrift für mathemat. und naturwissenschaftl. Unterricht, herausgeg. v. J. C. V. Hoffmann. 18. Jahrg., 1887. 1. Heft. Leipzig, Teubner. compl. 12 Mk.

Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben v. G. Wiedemann. Jahrg. 1887, 1. Heft. Leipzig, Barth. compl. 31 Mk.

Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie, herausgeg. von G. und E. Wiedemann. 11. Bd., 1. Heft. Ebendas. compl. 16 Mk.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica, ed. R. v. Hanstein. 36. Jahrg., 1. u. 2. Heft. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 60 Pf.

Mélanges mathématiques et astronomiques, tirés du bulletin de l'Acad. de St. Petersbourg. T. VI, Livr. 4. Leipzig, Voss. 1 Mk. 20 Pf.

Mémoires de l'acad. des sc. de St. Petersbourg. 7. Série. T. 34, No. 5—7. Ebendas. 5 Mk. 50 Pf.

Connaissance des temps etc. pour l'an 1888, publ. par le bureau des longitudes. Paris, Gauthier-Villars. 4 Frs.

Geschichte der Mathematik.

Schlegel, V., Entwickelung und Stand der n-dimensionalen Geometrie. Leipzig, Engelmann. 75 Pf.

Marie, M., Histoire des sciences mathématiques. Vol. X. Paris, Gauthier-Villars. 6 Frs.

Reine Mathematik.

John, F., Ueber die Einführung der allgemeinen Zahlzeichen in die Mathematik. Wien, Pichler & S. 70 Pf.

Küpper, C., Hyperelliptische C^{3n}. (Sep.-Abdr.) Prag, Calve. 1 Mk. 44 Pf.

Pick, G., Zur Theorie der binomischen Integrale. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

—, Ueber die Abel'schen Integrale dritter Ordnung, welche zu singularitätenfreien algebraischen Curven gehören. Ebendas. 20 Pf.

—, Zur Theorie der an einer Curve dritter Ordnung hinerstreckten Integrale und der zugehörigen elliptischen Functionen. Ebendas. 15 Pf.

—, Ueber die zu einer singularitätenfreien algebraischen Curve gehörigen ϑ-Functionen. Ebendas. 20 Pf.

Skibinski, K., Der Integrator des Hrn. Prof. Zmurko. Ebendas. 3 Mk. 20 Pf.

Adler, A., Zur graphischen Auswerthung der Functionen mehrerer Veränderlichen. Ebendas. 40 Pf.

Gegenbauer, L., Zahlentheoretische Notiz. Ebendas. 20 Pf.

Küpper, C., Ueber geometrische Netze. (Sep.-Abdr.) Prag, Calve. 66 Pf.

Weyr, E., Die Elemente der projectivischen Geometrie. 2. Heft. Wien, Braumüller. 6 Mk.

Wirtinger, W., Ueber die Brennpunktscurve der räumlichen Parabel. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Lichtenfels, O. v., Ueber eine transcendente Minimalfläche. Ebendas. 30 Pf.

Schoute, H., Ein Raumcoordinatensystem der Kreise einer Ebene. Ebendas. 20 Pf.

Reinbeck, K., Ueber die Flächen, auf welchen die Flächen zweiten Grades durch parallele Normalen conform abgebildet werden. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 20 Pf.

Gallien, K., Lehrbuch der Mathematik. 3. Theil: Stereometrie und Trigonometrie. Berlin, Weidmann. 1 Mk.

Steiner, J., Sammlung von Maturitätsfragen aus der darstellenden Geometrie. Wien, Hölder. 2 Mk.

Angewandte Mathematik.

Gauss, C. F., Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate, deutsch herausgeg. v. A. Börsch u. P. Simon. Berlin, Stankiewicz. 5 Mk.

Grossmann, L., Die Mathematik im Dienste der Nationalökonomie mit Hinweis auf die Lösung transcendenter Gleichungen. 1. Lief. Wien, Michel Stern. 5 Mk.

Werner, W., Beiträge zur Theorie der Bewegung eines materiellen Punktes auf Rotationsflächen und speciell auf dem Rotationsparaboloid. Leipzig, Lorenz. 1 Mk. 50 Pf.

Samter, H., Theorie des Gauss'schen Pendels mit Rücksicht auf die Rotation der Erde. Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 60 Pf.

Seydler, A., Ausdehnung der Lagrange'schen Behandlung des Dreikörperproblems auf das Vierkörperproblem. (Sep.-Abdr.) Prag, Calve. 60 Pf.

Lothabweichungen. 1. Heft. Formeln, Tafeln und numerische Ergebnisse für Norddeutschland. Veröffentl. v. königl. preuss. geodät. Institut. Berlin, Stankiewicz. 9 Mk.

Franz, J., Anleitung zur Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss in Ost- und Westpreussen am 19. August 1887. (Sep.-Abdr.) Berlin, Friedländer & S. 30 Pf.

Die totale Sonnenfinsterniss am 19. August 1887. Berlin, Stankiewicz. 50 Pf.

Tempel, W., Ueber Nebelflecken nach Beobachtungen auf der Sternwarte zu Arcetri b. Florenz. (Sep.-Abdr.) Prag, Calve. 3 Mk.

Coluet d'Huart, Nouvelle théorie servant à calculer le mouvement de la lumière dans les cristaux biréfrigents et dans les cristaux hémiédriques non superposables. Luxemburg, Bück. 1 Mk. 60 Pf.

Physik und Meteorologie.

Hagemann, A., Studien über das Molecularvolumen einiger Körper; übersetzt von P. Knudsen. Berlin, Friedländer & S. 1 Mk. 20 Pf.

Stefan, J., Ueber die Beziehung zwischen den Theorien der Capillarität und der Verdampfung. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Struve, H., Ueber die allgemeine Beugungsfigur in Fernröhren. (Akad.) Leipzig, Voss. 70 Pf.

Exner, F., Zur Photometrie der Sonne. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Wild, H., Bestimmung des Inductionscoefficienten von Stahlmagneten. (Ak.) Leipzig, Voss. 1 Mk.

Porges, C., Ueber eine Inductionserscheinung. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Exner und P. Czermak, Ueber unipolare Induction. Ebendas. 25 Pf.

Wasmuth, A. und G. Schilling, Ueber eine experimentelle Bestimmung der Magnetisirungsarbeit. Ebendas. 45 Pf.

Klein, H. J., Ueber den praktischen Werth der auf synoptischen Karten beruhenden Wetterprognosen. Antw. an Hrn. C. Lang. Halle, Schmidt. 50 Pf.

Meutzner, P., Lehrbuch der Physik im Anschluss an Weinhold's physikal. Demonstrationen. Leipzig, Fues. 2 Mk. 40 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Die Platonische Zahl.

Von

Carl Demme,

Oberlehrer am Realgymnasium in Dresden-Altstadt.

Hierzu Taf. II Fig. 9–11.

Im achten Buche vom Staate befindet sich eine Stelle, die dadurch eine gewisse Berühmtheit erlangte, dass es den Erklärern Platonischer Werke nicht gelingen wollte, für dieselbe eine irgendwie erträgliche Deutung zu finden. Es ist diese Stelle dieselbe, auf deren Dunkelheit schon Cicero in einem Briefe an den Atticus hinzielt: „*Aenigma ... plane non intellexi. Est enim numero Platonis obscurior.*" (Ueber diesen Ausspruch dürfe man sich nun nicht gerade wundern, meint Schneider in seiner 1821 erschienenen Abhandlung De numero Platonis, denn Cicero, welcher der erste unter den Römern gewesen sei, der Plato's Schriften und Ansichten verbreitete, habe Manches nicht verstanden, wofür wir heute eine passende Erklärung besitzen.)

Während so der Eine sich ausser Stande erklärte, das Räthsel zu lösen, schien es für Andere nichts Einfacheres zu geben. In der That finden sich im Alterthum,* vornehmlich bei den Neuplatonikern, derartige Andeutungen über den Sinn der Stelle, die jedoch nach den Auffassungen aller neueren Erklärer keineswegs den Anspruch machen können, auch nur in Etwas die Dunkelheit gelichtet zu haben. Auch Aristoteles hat unsere Stelle erwähnt und kritisirt (Polit. l. V, cap. X), doch ist die Aristotelische Anführung so knapp gehalten, dass sie selbst nur für den verständlich sein wird, der vorher schon den Sinn der Platonischen Worte erfasste.

* Die Angabe des Johannes Bodinus, dass auch Philo Judaeus sich mit der Platonischen Zahl beschäftigt und in seinem Werke De vita Mosis als Lösung die Zahl 50 vorgeschlagen habe, hat sich nicht bestätigt, wie schon Schneider (Variae variorum de Platonis numero opiniones, 1821) berichtigend hervorhebt, wobei er erwähnt, dass (wie es auch in der That der Fall ist) im dritten Buche De Vita Mosis allerdings die Zahl 50 vorkomme, welche eine sehr heilige Zahl sei und die Bedeutung des rechtwinkligen Dreiecks in sich schliesse, welches der Anfang der Entstehung von Allem sei, aber eine Hindeutung auf Plato und dessen Zahl sei nirgends zu finden.

Wenn nun trotzdem diese Angaben, die ja sämmtlich sehr viel an Klarheit zu wünschen übrig lassen, im Folgenden zu einer neuen Uebersetzung und Deutung verwendet werden sollen, so wird hierbei diesen Angaben eine grundlegende Bedeutung nur insofern beigemessen werden können, als sie bezeugen, dass die den einzelnen Worten des Platonischen Textes zu gebenden Deutungen den Anschauungen der alten Griechen nicht fremd waren, sondern dass im Gegentheil auch diese schon Einzelheiten in ähnlicher Weise aufgefasst hatten, wiewohl ihnen (Aristoteles ausgenommen) die Deutung der ganzen Stelle nicht gelungen ist. Nur der Aristotelischen Anführung lässt sich eine solche Auffassung anpassen, die mit unserer Erklärung vollständig übereinstimmt.

Nachdem Plato im Anfang des achten Buches entwickelt hat, dass es ebensoviele Staatsformen, als Seelenzustände der Individuen geben müsse, bekennt er sich im weiteren Verlaufe des Gesprächs zu der Anschauung, dass die Beschaffenheit der Machthaber von massgebendem Einfluss auf die Beschaffenheit des ganzen Staatswesens sei.

Nun will er die verschiedenen Staatsformen und die diesen rücksichtlich des Seelenzustandes entsprechenden Menschen einer Betrachtung unterziehen, wobei er es für das Richtigste hält, aus der vollkommensten, in Wirklichkeit allerdings nicht vorhandenen Staatsform ihre verschiedenen Entartungen abzuleiten und dabei zu erklären, wie eine solche Entartung überhaupt möglich sei, indem er sagt (Plato ed. Hermann Bd. IV S. 235):

„So lasst uns also versuchen, anzugeben, auf welche Weise die Timokratie aus der Aristokratie entstehen könnte. Oder ist es etwa einfach, dass eine Staatsform sich infolge eines Zwiespaltes unter seinen Machthabern ändert, dagegen bei der Einigkeit derselben, mag ihre Zahl auch eine geringe sein, nicht zu erschüttern ist?“

„„So verhält es sich allerdings.““

„Wie wird nun, mein lieber Glaukon, unser Staat erschüttert werden und wie werden die Helfer und Herrscher gegen einander und gegen sich selbst in Zwiespalt gerathen? Oder willst du, dass wir, wie Homer, die Musen bitten sollen, uns anzugeben, wie denn der Zwiespalt zuerst eindrang, und sollen wir sagen, dass sie scherzend und uns wie Kinder neckend, tragisch mit grosssprecherischen Worten, als ob sie mit Ernst und Würde redeten, uns berichteten?“

„„Wie denn?““

„So etwa: Es ist schwer, dass ein so vereinter Staat erschüttert werde, aber da allem Gewordenen der Untergang bevorsteht, so kann auch eine derartige Vereinigung nicht für alle Zeiten dauern, sondern wird sich auflösen. Die Auflösung aber geschieht in folgender Weise: Nicht nur für die aus der Erde sprossenden Gewächse, sondern auch unter den auf der Erde lebenden Geschöpfen findet eine Fruchtbarkeit und Unfruchtbarkeit von Seele und Körper statt, wenn die Umwälzungen für Jeden die Kreisläufe schliessen, für die Kurzlebenden die kurzbahnigen, für die Entgegengesetzten die entgegengesetzten. Aber die Erzeugung guter Kinder bei eurem Geschlecht und die Unfruchtbarkeit desselben werden Die, welche ihr zu Führern des Staates erzogen habt, auch wenn sie weise sind, nicht in höherem Grade durch Ueberlegung, verbunden mit Gefühl, erreichen, sondern dies wird über sie hinausgehen und sie werden einmal Kinder zeugen, wenn sie nicht sollten. *ἔστι δὲ θείῳ μὲν γεννητῷ περίοδος, ἣν ἀριθμὸς περιλαμβάνει τέλειος, ἀνθρωπείῳ δὲ ἐν ᾧ πρώτῳ αὐξήσεις δυνάμεναί τε καὶ δυναστευόμεναι, τρεῖς ἀποστάσεις, τέτταρας δὲ ὅρους λαβοῦσαι ὁμοιούντων τε καὶ ἀνομοιούντων καὶ αὐξόντων καὶ φθινόντων, πάντα προσήγορα καὶ ῥητὰ πρὸς ἄλληλα ἀπέφηναν· ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχεται τρὶς αὐξηθείς, τὴν μὲν ἴσην ἰσάκις, ἑκατὸν τοσαυτάκις, τὴν δὲ ἰσομήκη μὲν τῇ, προμήκη δέ, ἑκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀῤῥήτων δὲ δυεῖν, ἑκατὸν δὲ κύβων τριάδος. ξύμπας δὲ οὗτος ἀριθμὸς γεωμετρικὸς τοιούτου κύριος, ἀμεινόνων τε καὶ χειρόνων γενέσεων, ἃς ὅταν ἀγνοήσαντες ὑμῖν οἱ φύλακες συνοικίζωσι νύμφας νυμφίοις παρὰ καιρόν, οὐκ εὐφυεῖς οὐδ᾽ εὐτυχεῖς παῖδες ἔσονται·* von diesen werden die Vorgänger zwar die besten zu Herrschern bestimmen, dieselben werden jedoch, wenn sie dessen unwürdig zur Macht ihrer Väter gelangt sind, zunächst damit anfangen, sich nicht um uns zu kümmern, indem sie die musische Kunst weniger als nöthig achten, woher auch die Jünglinge der Musik mehr und mehr entfremdet werden. Infolge dessen werden Herrscher eingesetzt werden, die nicht sehr achtsam sind in der Prüfung der auch bei euch stattfindenden Geschlechter des Hesiod, des goldenen und silbernen und ehernen und eisernen; indem sich aber das Eisen mit dem Silber und das Erz mit dem Gold vermischt, wird unter ihnen eine Ungleichheit und ungefüge Ungleichförmigkeit entstehen, welche, wo sie auftreten, immer Krieg und Feindschaft erzeugen."

„„Und wir werden, sagte er, zugeben, dass ihre Antwort die richtige ist.""

„Das ist doch auch nöthig, meinte ich, da sie doch Musen sind."

„„Was nun, fragte er, geben die Musen über die folgende Zeit an?""

„Nachdem nun die Zwietracht eingetreten ist, drängen die einen beiden Geschlechter, das eiserne und das eherne, nach Gelderwerb, nach dem Besitz von Land und Haus, von Gold und Silber, die anderen beiden aber, das goldene und das silberne Geschlecht, führen, da sie nicht bedürftig, sondern von Natur reich sind, die Seelen zur Tugend und zur alten Verfassung hin.

Indem sie aber Gewalt übten und gegen einander auftraten, verständigten sie sich darüber, Land und Häuser zu vertheilen und zum Privat-

7*

eigenthum zu machen und, indem sie Die, welche früher von ihnen als freie Freunde und Ernährer bewacht wurden, durch Unterdrückung theils zu ihren Schützlingen, theils zu Sclaven machten, für ihre eigene Person die Sorge um Krieg und die Bewachung derselben zu übernehmen."

„„Es leuchtet mir ein, sagte er, dass diese Aenderung daher entsteht.""

„Stünde aber nun, fragte ich, diese Staatsverfassung nicht etwa in der Mitte zwischen Aristokratie und Oligarchie?"

„„Allerdings.""

In Betreff des griechischen Textes wäre zunächst zu erwähnen, dass in den älteren Ausgaben allgemein *ἀποκαταστάσεις* für *ἀποστάσεις*, sowie *προμήκει* und *πεμπάδων* für *προμήκη* bezw. *πεμπάδος* gelesen wurde.

(J. Bekkeri in Platonem a se editum commentaria critica führen zwölf Codices für den Staat an. Von diesen enthalten vier *ἀποκαταστάσεις* für *ἀποστάσεις*; in zehn Codicibus ist *προμήκει* statt *προμήκη* zu lesen und fünf Codices, darunter die vier, in welchen *ἀποκαταστάσεις* steht, haben *πεμπάδων* für *πεμπάδος*.)

Wenn auch die verschiedenen Lesarten der beiden letzten Worte eine wesentliche Verschiedenheit in den Erklärungen nicht herbeiführen können, so liegt die Sache doch ganz anders bei dem ersten Worte. Wir werden uns bei unserer Erklärung für die älteren Lesarten entscheiden aus Gründen, die bei der Behandlung der betreffenden Stellen ersichtlich sind.

An der fraglichen Stelle spricht nun Plato zuerst von einer vollkommenen Zahl, von der er sagt: „Es giebt für das göttlich Erzeugte einen Kreislauf, welchen die vollkommene Zahl umschliesst."

Das Gebiet der vollkommenen Zahlen war im Alterthum ein sehr bedeutendes, da der Begriff des Vollkommenen an sich kein bestimmter war. Man nannte die verschiedenartigsten Zahlen aus den verschiedensten Gründen vollkommene, so dass man höchstens sagen könnte: die griechischen Mathematiker nannten diejenigen Zahlen vollkommene, welche irgend eine den Mathematikern besonders rühmenswerth erscheinende Eigenthümlichkeit besassen. Die Auffindung der einzelnen vollkommenen Zahlen gehört freilich ganz verschiedenen Zeiten an. So kennt Plutarch als erste vollkommene Zahl die Drei, welche Anfang, Mitte und Ende habe (Plutarchi quaest. conviv. liber IX qu. III: *Καὶ μὴν ὁ πάντων ἀριθμῶν πρῶτος τέλειος ἡ μὲν τριάς, ὡς ἀρχὴν καὶ μέσον ἔχουσα καὶ τέλος*), während nach Nikomachus Gerasenus schon die Eins, da sie — allerdings nur in übertragener Bedeutung — ihren Theilen gleich sei, als vollkommene Zahl aufgefasst werden kann (Nicomachus Gerasenus, c. 16: *ἅπαξ γὰρ ἓν μονάς. Τελεία ἄρα ἐστὶ δυνάμει ἡ μονάς· ἴση γὰρ τοῖς ἰδίοις μέρεσι κατὰ δύναμιν αὕτη, οἱ δ' ἄλλοι κατ' ἐνέργειαν.*)

Die Erklärung, auf welche hier von Nikomachus angespielt wird, ist die der vollkommenen Zahlen im Gegensatz zu den überschiessenden und mangelhaften Zahlen, wobei solche Zahlen, die gleich der Summe ihrer aliquoten Theile sind, vollkommene Zahlen, dagegen solche, die kleiner oder grösser als die Summe ihrer aliquoten Theil sind, überschiessende, bezw. mangelhafte Zahlen genannt werden. Hiernach würden z. B. $6 = 1 + 2 + 3$ als vollkommene Zahl, dagegen $12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6$ als überschiessende und $10 > 1 + 2 + 5$ als mangelhafte Zahl zu gelten haben. (Theon Smyrnaeus ed. Hiller S. 45.)

Auch die Vier, das erste Quadrat in der Zahlenreihe, wurde als vollkommene Zahl betrachtet (Johannes Protospatharius ad Hesiodi dies V. 797: *Τελέια ἄρα ἡ τετρὰς καὶ ἀξία τιμᾶσθαι καὶ ἐτιμᾶτο δὲ παρὰ τοῖς Πυθαγορείοις*), und in ähnlicher Weise hatten Andere wieder an der Sieben, der Acht, der Neun und vielen anderen Zahlen Zeichen der Vollkommenheit entdeckt. Sobald aber, zumal bei den Pythagoräern, von dem Vollkommenen oder der vollkommenen Zahl überhaupt die Rede war, hatte man keine von den ebengenannten vollkommenen Zahlen im Auge, man dachte dann vielmehr an die Zahl, die solche Summanden umfasst, deren Verhältnisse zusammen genommen nach Pythagoräischer Ansicht gewissermassen als einfaches und dabei doch charakteristisches Zahlenbild aller Vorgänge in der Natur gelten konnten, so dass sie von den Pythagoräern wohl selbst auch mit dem Namen Kosmos bezeichnet wurde. Wir meinen die Zehnzahl, die, wie Theon Smyrnaeus berichtet, die erste Tetraktys umfasst ($10 = 1 + 2 + 3 + 4$), welche von Pythagoras selbst herrühren soll. (Theon Smyrnaeus ed. Hiller, S. 93: *τὴν μὲν γὰρ τετρακτὺν συνέστησεν ἡ δεκάς. ἓν γὰρ καὶ β΄ καὶ γ΄ καὶ δ΄ ι΄· α΄β΄γ΄δ΄. ἐν δὲ τούτοις τοῖς ἀριθμοῖς ἔστιν ἥ τε διὰ τεσσάρων συμφωνία ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ καὶ ἡ διὰ πέντε ἐν ἡμιολίῳ καὶ ἡ διὰ πασῶν ἐν διπλασίῳ καὶ ἡ δὶς διὰ πασῶν ἐν τετραπλασίῳ, ἐξ ὧν συμπληροῦται τὸ ἀμετάβολον διάγραμμα. τοιαύτη μὲν ἐν μουσικῇ τετρακτὺς κατὰ σύνθεσιν οὖσα, ἐπειδὴ ἐντὸς αὐτῆς πᾶσαι αἱ συμφωνίαι εὑρίσκονται. οὐ διὰ τοῦτο δὲ μόνον πᾶσι τοῖς Πυθαγορικοῖς προτετίμηται, ἀλλ᾽ ἐπεὶ καὶ δοκεῖ τὴν τῶν ὅλων φύσιν συνέχειν· διὸ καὶ ὅρκος ἦν αὐτοῖς*

οὐ μὰ τὸν ἁμετέρᾳ ψυχᾷ παραδόντα τετρακτύν,
παγὰν ἀενάου φύσεως ῥίζωμά τ᾽ ἔχουσαν.

τὸν παραδόντα Πυθαγόραν λέγουσιν, ἐπεὶ δοκεῖ τούτου εὕρημα ὁ περὶ αὐτῆς λόγος. Man vergleiche ferner hierzu Porphyrius, Vita Pythagorae, c. 52: *διὸ καὶ τέλειον ἀριθμὸν τὸν δέκα εἶναι λέγουσιν* [sc. *οἱ Πυθαγόρειοι*] *μᾶλλον δὲ τελειότατον ἁπάντων, πᾶσαν διαφορὰν ἀριθμοῦ καὶ πᾶν εἶδος λόγου καὶ ἀναλογίαν ἐν ἑαυτῷ περιειληφότα*, sowie Theologumena arithmeticae ed. Ast, S. 59: *περὶ δεκάδος: Διόπερ τοὺς κατ᾽ αὐτὴν λόγους συμφώνους ἔχοντα τὰ ἀπ᾽ οὐρανοῦ μέχρι γῆς ὁλοσχερέστερόν τε καὶ κατὰ μέρος εὑρίσκεται καὶ διακεκοσμημένα κατ᾽ αὐτήν. Διόπερ καὶ ἐπωνόμαζον αὐτὴν θεολογοῦντες οἱ Πυθαγορικοὶ ποτὲ μὲν κόσμον ποτὲ δὲ οὐρανόν …*)

Auch Aristoteles erwähnt an mehreren Stellen der Zehn als der vollkommenen Zahl (Metaphysik A, 5; M, 8), und da uns von verschiedenen Schriftstellern ausdrücklich angegeben wird, dass Plato in vielen Dingen, nach anderen sogar in allen, den Pythagoräern folgte, so dürfte der Schluss wohl nicht gerade gewagt erscheinen, dass er unter der vollkommenen Zahl hier die ja allgemein als vollkommene Zahl angenommene Zehnzahl gemeint habe.

Zwar gab es im Alterthum auch Solche und sogar unter den Pythagoräern, die der Siebenzahl den Vorzug vor der Zehn gaben; indess kam dies doch wohl nur ganz vereinzelt vor. So schreibt Syrianus in seinen Scholien zu Aristoteles (*Συριάνου τοῦ Φιλοξένου εἰς τὸ N τῶν μετὰ τὰ φυσικά: ἐπεὶ δὲ Πρῶρος μὲν ὁ Πυθαγόρειος πολλὰ καὶ σεμνὰ καὶ θεοπρεπῆ περὶ ἑπτάδος εἰπὼν οὐδεμιᾷ τοιαύτῃ χρῆται ἀποδόσει, δείκνυσι δὲ συνετῶς ὅπως ἡ φύσις δι' ἑπτὰ ἐτῶν ἢ μηνῶν ἢ ἡμερῶν πλεῖστα τοιούτων πραγμάτων τελειοῖ ἢ μεταβάλλει, ἄλλοι δὲ περὶ δεκάδος διαλεχθέντες ἔδειξαν αὐτῆς τήν τε ἐν παντὶ τῷ θείῳ γενητῷ βασιλείαν καὶ τὴν ἐν τοῖς καθ' ἕκαστα τῶν φυσικῶν ἔργων ἐπικράτειαν* etc.) „Während aber Prorus der Pythagoräer, der vieles Ernste und eines Gottes Würdige über die Sieben gesprochen, sich keiner derartigen Erzählung bedient, aber in verständlicher Weise zeigt, wie die Natur in sieben Jahren oder Monaten oder Tagen die meisten derartigen Dinge vollbringt oder ändert, haben Andere in ihren Erwägungen über die Zehnzahl die Herrschaft derselben bei allem göttlich Erzeugten gezeigt und ihren Einfluss bei dem, was sich auf jeden Vorgang in der Natur bezieht."

Hier wird also geradezu die Zehnzahl mit dem göttlich Erzeugten in Verbindung gebracht, ein Grund mehr für uns, an der schon oben angegebenen Folgerung festzuhalten.

Im Gegensatz zu dieser vollkommenen Zahl für das göttlich Erzeugte stellt Plato in den folgenden Worten eine zweite Zahl für das menschlich Erzeugte auf. In der Beschreibung derselben heben sich deutlich zwei Theile von einander ab, deren erster die Zahl im Allgemeinen und deren zweiter Theil die Zahl im Besondern behandelt. In diesem zweiten Theile (*ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν ... τριάδος*) ist der Objectsaccusativ *δύο ἁρμονίας* von dem folgenden *παρέχεται* abhängig. Diese beiden Harmonien werden näher bezeichnet durch die einander gegenüber gestellten Ausdrücke *τὴν μέν ... τὴν δέ ...* Die zweite Harmonie wird wieder in zwei Theile getheilt, von denen der eine *ἰσομήκης*, der andere *προμήκης* genannt wird, noch deutlicher unterschieden durch die Beifügungen von *μέν* und *δέ*. Bis hierher befinden wir uns ganz in Uebereinstimmung mit den meisten Erklärern. Beachtet man nun ferner, dass diesen *μέν* und *δέ* ein zweites *μέν* und *δέ* in *ἑκατὸν μέν ... ἑκατὸν δέ ...* entspricht, so liegt wohl der Gedanke nahe, dass diese Satztheile nichts Anderes, als erläuternde Beifügungen und zwar ἑκατὸν μέν ... für die Worte ἰσομήκη μέν, und ἑκατὸν δέ ... für die Worte τῇ προμήκει δέ sind. Dann müssen aber beide ἑκατὸν Accusativ und zwar mit abhängig von παρέχεται sein.

Auch in den die erste Harmonie erläuternden Worten τὴν μὲν ἴσην ἰσάκις, ἑκατὸν τοσαυτάκις kommt die Zahl Hundert vor. Fasst man diese in ähnlicher Weise als das Resultat von τὴν μὲν ἴσην ἰσάκις, τοσαυτάκις auf, so hätte also Plato an dieser Stelle nicht mehr wie dreimal das Ergebniss Hundert angegeben.

Doch wollen wir, ehe wir weitere Schlussfolgerungen ziehen, erst den allgemeinen Theil zu erklären versuchen, der in den Worten ἀνθρωπείῳ δὲ (sc. ἔστι περίοδος ἣν ἀριθμὸς περιλαμβάνει) ἐν ᾧ πρώτῳ αὐξήσεις δυνάμεναί τε καὶ δυναστευόμεναι ... ἀπέφηναν enthalten ist.

πρώτῳ bezieht sich offenbar auf ἀριθμός, so dass also den Kreislauf für das menschlich Erzeugte die erste Zahl (in der Zahlenreihe) einschliesst, in der die nachstehend erwähnten Eigenschaften zu Tage treten.

Mit dem Worte αὔξησις bezeichnete der Grieche ein Wachsen, Zunehmen, Vermehren. In dieser Bedeutung kommt das Wort auch bei Plato wiederholt vor, z. B. Plat. Phaedon 71 B und Plat. leges 10 p. 897 A, woselbst αὔξησις und φθίσις gegenüber gestellt werden, wofür sich bei Proklus αὔξησις und μείωσις oder auch ἐλλάτωσις findet.

Im Timaeus hebt Plato von den rechtwinkligen Dreiecken zwei besonders hervor, als Grundlage bei der Bildung der körperlichen Gestalt des Feuers und der anderen Dinge, nämlich einerseits das gleichschenklige, andererseits dasjenige, bei dem die grössere Kathete immer in quadratischer Beziehung (κατὰ δύναμιν) das Dreifache der kleineren betrage.

In demselben Sinne verwendet Plutarch δυνάμενος, indem er sagt: (Plutarchi de defectu oraculorum c. 36: ... ἡ πεντὰς πρώτη δὲ ἴσον δυναμένη τοῖς πρὸ αὐτῆς δυσὶ τὸ κάλλιστον τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων συνίστησι ...), „dass die Zahl Fünf, welche als die erste in der Zahlenreihe das Gleiche vermöge wie die beiden vorhergehenden Zahlen, das schönste der rechtwinkligen Dreiecke entstehen lasse“, womit er das Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5 meint, was er an einer andern Stelle ausdrücklich hervorhebt, woselbst er berichtet (Plutarchi de Iside et Osiride, c. 54: Αἰγυπτίους δ' ἄν τις εἰκάσειε τῶν τριγώνων τὸ κάλλιστον, μάλιστα τούτῳ τὴν τοῦ παντὸς φύσιν ὁμοιοῦντας, ᾧ καὶ Πλάτων ἐν τῇ πολιτείᾳ δοκεῖ τούτῳ προσκεχρῆσθαι, τὸ γαμήλιον διάγραμμα συντάττων. ἔχει δ' ἐκεῖνο τὸ τρίγωνον τριῶν τὴν πρὸς ὀρθίαν, καὶ τεττάρων τὴν βάσιν, καὶ πέντε τὴν ὑποτείνουσαν ἴσον ταῖς περιεχούσαις δυναμένην· εἰκαστέον οὖν τὴν μὲν πρὸς ὀρθὰς ἄῤῥενι, τὴν δὲ βάσιν θηλείᾳ, τὴν δὲ ὑποτείνουσαν ἀμφοῖν ἐγγόνῳ): „Die Aegypter verglichen vermuthlich die Natur des Weltalls mit dem schönsten der Dreiecke, welches auch Plato in seinem Staate gebraucht zu haben scheint da, wo er die Hochzeitsfigur zusammenstellt. Es hat jenes Dreieck die Senkrechte 3, die Basis 4 und die Hypotenuse 5, welche das Gleiche vermag wie die beiden Katheten. Man kann nun die Senkrechte mit dem Männlichen, die Basis mit dem Weiblichen und die Hypotenuse mit dem von beiden Gezeugten vergleichen." Dass hier *δυνάμενος* auf die quadratische Beziehung hindeuten soll, ergiebt sich deutlich bei der Vergleichung unserer erstgenannten Plutarch-Stelle mit folgender Stelle in den Theologumenis arithmeticae, c. 5, *περὶ πεντάδος* (*τὸ ἀπὸ τοῦ ε πρῶτον τετράγωνον ἴσον δυσὶ τετραγώνοις, τῷ τε ἀπὸ τῶν γ' καὶ τῷ ἀπὸ τῶν δ'*), an der es heisst: Das Quadrat über der 5 ist das erste Quadrat in der Zahlenreihe, welches gleich zwei anderen Quadraten ist, nämlich dem über der Drei und dem über der Vier zusammengenommen.

Das Wort *δυναμένη* tritt an beiden oben bezeichneten Stellen bei Plutarch als Beiwort der Hypotenuse auf. (Man vergl. auch Porphyrius, Vita Pyth., c. 36: ... *ἐξευρὼν τοῦ ὀρθογωνίου τὴν ὑποτείνουσαν ἴσον δυναμένην ταῖς περιεχούσαις*). Hiermit stimmt auch überein, was Alexander Aphrodisiensis über die Fünfheit berichtet, indem er Folgendes angiebt: (Alex. Aphrod. schol. graec. in Arist. metaphys. coll. Brandis Berolini 1836, S. 561: *ἀνικίαν δέ φασιν ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων λέγεσθαι τὴν πεντάδα, τοῦτο δὲ ὅτι τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων τῶν ἐχόντων ῥητὰς τὰς πλευρὰς πρῶτόν ἐστι τῶν περιεχουσῶν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν· ἡ μὲν τριῶν, ἡ δὲ τεττάρων, ἡ δὲ ὑποτείνουσα πέντε. ἐπεὶ τοίνυν ἡ ὑποτείνουσα ἴσον δύναται ἀμφοτέραις ἅμα, διὰ τοῦτο ἡ μὲν δυναμένη καλεῖται, αἱ δὲ δυναστευόμεναι, καὶ ἔστι πέντε.*) „Man sagt, dass die Fünfheit von den Pythagoräern unbesiegbar genannt werde, deshalb, weil sie das erste von den rechtwinkligen Dreiecken mit rationalen Seiten darstellt, wobei die eine der Katheten 3, die andere 4 und die Hypotenuse 5 betrage. Da nun die Hypotenuse das Gleiche vermag, wie die beiden Katheten zusammen genommen, so heisst erstere *δυναμένη*, letztere aber werden *δυναστευόμεναι* genannt, und zwar beträgt jene 5."

Hiernach würden also *αὐξήσεις δυνάμεναί τε καὶ δυναστευόμεναι* derart zu deuten sein, dass Vermehrungen der Hypotenuse 5 und der Katheten 3 und 4 stattfinden sollen, so dass auch zwischen vermehrter Hypotenuse und vermehrten Katheten potenzielle Beziehungen bestehen bleiben.

Eine Angabe des Proklus, in welcher die Worte *δυνάμεναι καὶ δυναστευόμεναι* erwähnt werden, enthält zwar keine directe Bestätigung dieser Auffassung, doch scheint sie uns aus einem andern Grunde wichtig genug, dass wir sie hier anführen. Es heisst nämlich in der Vorrede des Commentars zum ersten Buche des Euklid: „Die Gleichheit und Ungleichheit der Verhältnisse kommt in allen mathematischen Gebieten vor, denn wir nennen die Figuren theils ähnlich, theils unähnlich und ebenso die Zahlen theils ähnlich, theils unähnlich. Und Alles, was sich in Bezug auf potenzielle Beziehungen zeigt, gehört in gleicher Weise der ganzen Mathematik an, das Vorkommen der *δυναμένων* sowohl, wie das der *δυναστευομένων*. (*καὶ ὅσα κατὰ τὰς δυνάμεις ἀναφαίνεται πᾶσιν ὁμοίως προσήκει τοῖς μαθήμασι, τῶν* μὲν δυναμένων τῶν δὲ δυναστευομένων.) Und dieses widmete Sokrates im „Staate“ den grosssprecherischen Musen, indem er das Gemeinsame der ganzen mathematischen Wissenschaften zusammenfasste und sich dasselbe in den angegebenen Zahlen vorstellte, aus denen dann die Maasse des Gedeihens und Missrathens hervorgehen.“ Wenn nun Proklus davon spricht, dass potenzielle Beziehungen in der ganzen Mathematik vorkämen, sowie dass Sokrates sich diese der Geometrie und Arithmetik gemeinsamen Beziehungen in den angegebenen Zahlen vorgestellt habe, so hat er offenbar damit andeuten wollen, dass Sokrates zunächst nur Figuren mit rationalen Seiten, zwischen denen potenzielle Beziehungen stattfänden, im Auge gehabt habe.

Die hier in Frage kommenden Beziehungen zwischen den Seiten einer Figur können aber nur die Beziehungen zwischen den Seiten rechtwinkliger Dreiecke gewesen sein, an deren Untersuchung sich auch Plato mit Erfolg betheiligt hatte. Besitzen wir doch von ihm eine Regel, um Zahlen zu finden, welche als Seiten rechtwinkliger Dreiecke gezeichnet werden könnten. Schon vor ihm hatte Pythagoras eine ähnliche Regel aufgestellt. Proklus berichtet über diese beiden Regeln Folgendes: „Die Regel des Pythagoras geht von der ungeraden Zahl aus. Er setzt nämlich die ungerade Zahl als kleinere Kathete, die Hälfte des um eine Einheit verminderten Quadrates der kleineren Kathete als grössere Kathete und findet dann die Hypotenuse durch Hinzufügung einer Einheit zur grösseren Kathete. Beginnt man z. B. mit der Zahl 3, so erhält man als Quadrat derselben 9 und als Hälfte des um eine Einheit verminderten Quadrates 4, sowie als Hypotenuse 5, mithin die Zahlen 3, 4 und 5 als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks. Im Gegensatz zu Pythagoras ging Plato von der geraden Zahl aus. Er betrachtete die gerade Zahl als die eine der Katheten, das um eine Einheit vermehrte Quadrat der halben Kathete als Hypotenuse, dagegen das um eine Einheit verminderte Quadrat der halben Kathete als andere Kathete. Geht man von der Zahl 4 aus, so erhält man als Hälfte derselben die Zahl 2 und als Quadrat dieser Hälfte die Zahl 4. Die Verminderung um eine Einheit führt auf die Zahl 3, dagegen findet man durch Vermehrung des Quadrates 4 um eine Einheit die Zahl 5 und somit dasselbe Dreieck wie vorher.“

Diese Hypotenuse 5, die hier in beiden Regeln als Zahlenbeispiel auftritt, ist die kleinste, welche bei rechtwinkligen Dreiecken mit rationalen Seiten möglich ist, zugleich diejenige, die nach Alexander Aphrodisiensis das Beiwort δυναμένη besitzt; die nächstgrössere, also die erste vermehrte Hypotenuse ist die Hypotenuse 10, welcher die Katheten 8 und 6 entsprechen. Die potenzielle Beziehung zwischen diesen vermehrten Grössen würde in moderner Weise durch die Gleichung $10^2 = 6^2 + 8^2$ dargestellt werden, bei der beide Seiten den Werth 100 besitzen. Soll aber in einer einzigen Zahl diese Beziehung zum Ausdruck gelangen, so kann diese Zahl nur die Zahl 100 sein, welche sowohl das Hypotenusenquadrat, als auch die entsprechenden Kathetenquadrate umfasst: mithin ist 100 die erste Zahl in der Zahlenreihe, in welcher sich die potenziellen Beziehungen zwischen vermehrter Hypotenuse und vermehrten Katheten, wenn man nur Dreiecke mit rationalen Seiten im Auge hat, zeigen.

Diese *αὐξήσεις δυνάμεναί τε καὶ δυναστευόμεναι* zeigen sich, nachdem sie *τρεῖς ἀποκαταστάσεις, τέσσαρας δὲ ὅρους* genommen haben.

Frühere Erklärer sahen die *αὐξήσεις δυνάμεναί τε καὶ δυναστευόμεναι* als Glieder zweier geometrischen Reihen an und zwar dachten sie dabei an die im Timaeus erwähnten Zahlenreihen (Fig. 9), welche drei Abstände (*τρεῖς ἀποστάσεις*), aber vier Glieder (*τέσσαρας δὲ ὅρους*) besitzen. Wir dagegen sehen in den Worten *τρεῖς ἀποκαταστάσεις* (wie schon oben bemerkt, enthalten vier Handschriften *ἀποκαταστάσεις* statt *ἀποστάσεις*) *τέσσαρας δὲ ὅρους λαβοῦσαι* nur eine Angabe, nach der die Vermehrungen zu bilden seien.

Die Präposition *ἀπό* deutet in Zusammensetzungen auf ein „wieder" im Sinne des Zurückgebens. So nannten die Griechen, wie uns Theon (Theon Smyrnaeus ed. Hiller, S. 38: *λέγονται δέ τινες καὶ κυκλοειδεῖς καὶ σφαιροειδεῖς καὶ ἀποκαταστατικοὶ ἀριθμοί· οὗτοι δ' εἰσὶν οἵτινες ἐν τῷ πολλαπλασιάζεσθαι ἢ ἐπιπέδως ἢ στερεῶς, τουτέστι κατὰ δύο διαστάσεις ἢ κατὰ τρεῖς, ἀφ' οὗ ἂν ἄρξωνται ἀριθμοῦ ἐπὶ τοῦτον ἀποκαθιστάμενοι. τοιοῦτον δέ ἐστι καὶ ὁ κύκλος· ἀφ οὗ ἂν ἄρξηται σημείου, ἐπὶ τοῦτο ἀποκαθίσταται· ὑπὸ γὰρ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενος ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρχεται καὶ εἰς ταὐτὸ καταλήγει. τοιαύτη δὲ καὶ ἐν στερεῷ ἡ σφαῖρα· κύκλου γὰρ κατὰ πλευρὰν περιαγομένου ἡ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἀποκατάστασις σφαῖραν γράφει*), Nikomachus und Andere berichteten, solche Zahlen, wie 1, 5, 6, welche bei ihren Quadraten und Cuben (1, 25, 36, bezw. 1, 125, 216) wieder auftreten, *ἀριθμοὶ ἀποκαταστατικοί*. In demselben Abschnitte theilt Theon mit, dass man auch bei der Darstellung des Kreises auf den Punkt, von dem man ausgegangen sei, wieder zurückkehre, sowie dass man durch einen nach der Seite herumbewegten Kreis eine Kugel beschreiben könne, wenn man bei der Darstellung wieder in die Anfangslage des Kreises zurückkehre.

ἀποκατάστασις bedeutet demnach ein Wiederzurückkehren zum Ausgangspunkt, so dass also diese in potenziellen Beziehungen stehenden Vermehrungen der Hypotenuse 5 und der entsprechenden Katheten sich zeigen, nachdem sie dreimal zum Ausgangspunkt zurückgekehrt, aber vier Glieder genommen haben oder, wie wir heute wohl sagen würden, nachdem man durch dreimaliges Zurückkehren zum Ausgangspunkt vier Glieder erhalten hat.

Den Ausgangspunkt bildete ja die potenzielle Beziehung zwischen der Hypotenuse 5 und den Katheten 3 und 4, denn diesen kam nach Alex. Aphr. das Beiwort *δυναμένη* bezw. *δυναστευόμεναι* zu. Die Zahl, welche diese Beziehung ausdrückt, würde $25 = 5^2 = 3^2 + 4^2$ sein. Erhält man nun durch dreimaliges Zurückgehen auf diese Zahl vier solcher Glieder, so würden diese zusammen $4.25 = 4.5^2 = 4(3^2 + 4^2) = 100$ betragen.

Die Worte ὁμοιούντων τε καὶ ἀνομοιούντων καὶ αὐξόντων καὶ φθινόντων πάντα προσήγορα καὶ ῥητὰ πρὸς ἄλληλα wollen wir gleich in folgender Uebersetzung anfügen: von solchen, welche ähnlich und unähnlich machen und welche wachsen und verschwinden lassen, alles einander entsprechend und im Verhältniss zu einander rational, indem wir noch dazu bemerken, dass wir die Bedeutung dieser Worte erst später erörtern wollen, nachdem wir durch die Erkläiung des besondern Theiles eine Bestätigung unserer bisherigen Dartellung gegeben haben.

In dem besondern Theile treten uns zunächst die Worte ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγεὶς ... τρὶς αὐξηθείς entgegen.

Unter πυθμήν verstanden die alten Griechen die kleinste Zahl einer Zahlengattung, bei der das Eigenthümliche der ganzen Gattung zuerst zum Vorschein kam. (Schneider, De numero Platonis, S. 14: *Sed* πυθμήν *a veteribus arithmeticis dicebatur minimus cujusque generis numerus, in quo primo conspiceretur id, quod proprium ejus generis esset.* Man vergl. hierzu: Theologumena arithmeticae, περὶ πεντάδος: ... ἐν ἄρα πρωτίστῳ τῷ θ'· οὗτος γὰρ καὶ ἀπὸ πρώτου περισσοῦ ἀριθμοῦ τοῦ γ' πυθμὴν τετράγωνος συνίσταται τρὶς τρία ὤν ...) Πυθμὴν λόγος erklärt Theon Smyrnaeus als ein Verhältniss, ausgedrückt durch relative Primzahlen, indem er sagt: „Von allen der Art nach angegebenen Verhältnissen heissen die in den kleinsten Zahlen, die zugleich im Verhältniss zu einander Primzahlen sind, ausgedrückten in Bezug auf jedes Verhältniss die ersten von denen, die dasselbe Verhältniss besitzen, und die πυθμένες der gleichartigen. So ist von den zweifachen Verhältnissen das erste und πυθμήν das von 2:1. Denn nach diesen giebt es zweifache Verhältnisse in grösseren und zusammengesetzten Zahlen, das von 4:2 und von 6:3 und so fort bis ins Unendliche. Von den dreifachen Verhältnissen ist das erste und πυθμήν das von 3:1. Die aber in grösseren und zusammengesetzten Zahlen ausgedrückten erstrecken sich bis in das Unendliche. Ebenso verhält es sich aber bei den anderen Vielfachen, in gleicher Weise aber auch bei den um einen Theil grösseren. Von den $\frac{3}{2}$-Verhältnissen ist das erste und πυθμήν das von 3:2, von den $\frac{4}{3}$-Verhältnissen das von 4:3, von den $\frac{5}{4}$-Verhältnissen das von 5:4. Die aber in grösseren und zusammengesetzten Zahlenausdrücken vorkommenden sind wieder rücksichtlich ihrer Menge unzählbar." (Theon Smyrnaeus ed. Hiller, S. 80: πάντων δὲ τῶν κατ' εἶδος εἰρημένων λόγων οἱ ἐν ἐλαχίστοις καὶ πρώτοις πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοῖς ὄντες καθ' ἕκαστον πρῶτοι λέγονται τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων καὶ πυθμένες τῶν ὁμοειδῶν. οἷον διπλασίων μὲν λόγων πρῶτος καὶ πυθμὴν ὁ τῶν β' πρὸς ἕν· μετὰ γὰρ τοῦτον ἐν μείζοσι καὶ συνθέτοις ἀριθμοῖς λόγοι εἰσὶ διπλάσιοι ὁ τῶν δ' πρὸς τὰ β' καὶ τῶν ϛ' πρὸς τὰ γ' καὶ ὁμοίως ἐπ' ἄπειρον. τριπλασίων δὲ λόγων πρῶτος καὶ πυθμὴν ὁ τῶν γ' πρὸς τὸ ἕν· οἱ δὲ ἀεὶ ἐν μείζοσι καὶ συνθέτοις ἀριθμοῖς ἐπ' ἄπειρον προάγουσιν. ὡσαύτως δὲ ἐπὶ τῶν ἄλλων πολλαπλασίων· ὁμοίως δὲ καὶ ἐν τοῖς ἐπιμορίοις. ἡμιολίων μὲν λόγων πρω-

τος καὶ πυθμὴν ὁ τῶν γ' πρὸς τὰ β', ἐπιτρίτων δὲ ὁ τῶν δ' πρὸς γ' καὶ ἐπιτετάρτων ὁ τῶν ε' πρὸς δ'· οἱ δὲ ἐν μείζοσιν ὅροις καὶ συνθέτοις πάλιν ἄπειροι τὸ πλῆθος.) Wir haben hier also unter *ἐπίτριτος πυθμήν* nichts Anderes, als zwei Grössen zu verstehen, deren Verhältniss sich in kleinsten Zahlen durch 4:3 darstellen lässt.

Mit ausdrücklicher Beziehung auf unsere Plato-Stelle hebt Aristides Quintilianus bei Gelegenheit der Besprechung der Zahl 12 hervor, dass die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Umfang 12 betrage, solche Grössen seien, die im $\frac{4}{3}$-Verhältniss stehen. (Aristid. Quintil. de musica l. III: ... *αἱ δὲ τὴν ὀρθὴν περιέχουσαι δηλοῦσι τὸν ἐπίτριτον, τούτου δὴ καὶ Πλάτων φησὶν ἐπίτριτον πυθμένα πεμπάδι συζυγέντα.)*

Das Verbinden dieser Grössen durch die Fünfheit kann dann aber nur auf ein Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5 hindeuten, zwischen denen die bekannte quadratische Beziehung $5^2 = 3^2 + 4^2$ besteht.

Auch in der schon obenerwähnten Stelle aus Plutarchi de Iside et Osiride, c. LVI, wird ja auf dieses Dreieck hingewiesen, wobei allerdings die betreffende Stelle mit einem „Es scheint" eingeleitet wird. Bestimmter drückt sich Proklus aus:

„Von den beiden Arten der rechtwinkligen Dreiecke, die theils gleichschenklig, theils ungleichseitig sind, würden wir bei den gleichschenkligen den Seiten keine Zahlen anzupassen vermögen, denn es giebt keine Quadratzahl, die das Doppelte einer andern Quadratzahl ist, man möchte denn sagen nahezu, das Quadrat über 7 ist das Doppelte des Quadrates über 5, wenn eins fehlt. Bei den ungleichseitigen aber zeigt sich uns deutlich, dass es möglich ist, das Quadrat über der Hypotenuse gleich denen über den Katheten zu nehmen. Denn derartig ist das Dreieck im Staate, dessen Katheten 3 und 4 sind. Die Hypotenuse aber beträgt 5. Das Quadrat der 5 ist nun gleich den Quadraten über jenen, denn dieses beträgt 25; von den Quadraten über jenen beträgt das Quadrat über der 3 9, das über der 4 16." (Procli Diad. in prim. Euclidis libr. elem. comm., S. 427: *διττῶν δὲ ὄντων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τῶν μὲν ἰσοσκελῶν, τῶν δὲ σκαληνῶν, ἐν μὲν τοῖς ἰσοσκελέσιν οὐκ ἄν ποτε εὕροιμεν ἀριθμοὺς ἐφαρμόσαι ταῖς πλευραῖς, οὐ γάρ ἐστι τετράγωνος ἀριθμὸς τετραγώνου διπλάσιος, εἰ μὴ λέγοι τις τὸν σύνεγγυς, ὁ γὰρ ἀπὸ τοῦ ζ' τοῦ ἀπὸ τοῦ ε' διπλάσιός ἐστιν α' δέοντος. ἐν δὲ τοῖς σκαληνοῖς δυνατὸν λαβεῖν ἐναργῶς ἡμῖν δείκνυναι τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν. τοιοῦτον γάρ ἐστι τὸ ἐν πολιτείᾳ τρίγωνον, οὗ τὴν ὀρθὴν περιέχουσιν ὅ τε τρία καὶ ὁ τέσσαρα. ὑποτείνει δὲ αὐτὴν ὁ ε'. τὸ γοῦν ἀπὸ τοῦ ε' τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπ' ἐκείνων. τοῦτο μὲν γάρ ἐστιν εἴκοσι πέντε, τὰ ἀπ' ἐκείνων δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ γ' θ', τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ δ' ἑκκαίδεκα.)*

αὐξάνεσθαι entspricht unserem „vermehrt werden". So findet sich bei Jamblichus: *κατ' ἄρτιον αὐξηθείς*, im Verhältniss einer geraden Zahl vermehrt, so dass also das Verhältniss des Resultats zu der Zahl, welche vermehrt wurde, den Werth einer geraden Zahl erhält, wofür wir sagen: mit einer geraden Zahl multiplicirt.

Aehnliche Wendungen finden sich auch bei Theon Smyrnaeus S. 95, woselbst es heisst: *πρῶτος γὰρ τῶν ἀρτίων ὁ β' καὶ αὐτὸς ἐκ μονάδος κατὰ τὸ διπλάσιον ηὐξημένος*, denn die erste der geraden Zahlen ist die 2, die selbst aus der Einheit durch Multiplication mit 2 entstanden ist; sowie *ἐπειδὴ πρῶτος τῶν περιττῶν ὁ γ' καὶ αὐτὸς ἀπὸ μονάδος κατὰ τὸ τριπλάσιον ηὐξημένος*, da die erste der ungeraden Zahlen die 3 ist, die selbst aus der Einheit durch Multiplication mit 3 entstanden ist. Hier deuten die Präpositionen *ἐκ* und *ἀπό* auf die Grössen hin, von denen die Zahlen 2 und 3 hergeleitet sind, ebenso wie im folgenden Satze, der sich gleichfalls bei Theon Smyrnaeus S. 10 findet: *λέγει δέ τινα καὶ ἑτέραν ἐμπειρίαν καὶ τέχνην, ἣν δὴ στερεομετρίαν καλεῖ, εἴ τις, φησί, τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ἐξ ὧν τὰ ἐπίπεδα εἶναι αὐξηθέντας ὁμοίους καὶ ἀνομοίους ὄντας, ὡς προεῖπον, στερεὰ ποιεῖ σώματα, τοῦτο δὲ θεῖόν τε καὶ θαυμαστόν ἐστι.* „Er erwähnt aber auch eine andere Kenntniss und Kunst, die er Stereometrie nennt, wenn einer, meint er, die aus denen, welche Flächenzahlen seien, auf drei Zahlen vermehrten Zahlen, die, wie ich schon sagte, ähnlich und unähnlich sind, als körperliche Gebilde darstellt; dieses aber ist göttlich und bewundernswerth.“

Der ebenerwähnte Satz bezieht sich bekanntlich auf Plat. Epin. p. 990 C, woselbst sich an Stelle der Theonischen Worte: *„τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ... αὐξηθέντας“* die Worte: *„τοὺς τρεῖς ηὐξημένους,“* die auf drei (Zahlen) vermehrten (Zahlen), soviel wie die durch Vermehrung entstandenen drei Zahlen, finden.

Wir können deshalb auch der Conjectur Bekker's, der *τοὺς τρὶς ηὐξημένους* vorschlägt, nicht beistimmen, denn die „dreimal vermehrten Zahlen“ scheinen uns hier nicht recht zu passen, wogegen das *τρὶς αὐξηθείς* an unserer Plato-Stelle nicht gut anders, als „dreimal vermehrt“ übersetzt werden kann.

Unser Dreieck soll also dreimal vermehrt werden. Die Frage „um was?“ können wir im Hinblick auf unsere Erklärung von *τρεῖς ἀποκαταστάσεις, τέσσαρας δὲ ὅρους λαβοῦσαι* nur durch „um sich selbst“ beantworten, so dass wir vier solcher Dreiecke erhalten. Die einfachste Zusammenstellung dieser vier rechtwinkligen Dreiecke zu einer Figur wird wohl dann stattfinden, wenn man die vier Hypotenusen, deren jede 5 beträgt, zu einem Quadrat vereinigt, in dem wir uns dann noch die beiden Diagonalen zu denken hätten, was wir aus den später folgenden Worten *διαμέτρων πεμπάδων* entnehmen können.

ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχεται: Dieses Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5 gewährt, dreimal um sich vermehrt, zwei Harmonien.

Die Deutung des Wortes Harmonie ist in vielfacher Weise unter einem Zurückgreifen auf die besonders bei den Pythagoräern beliebte Verbindung der Dinge mit bestimmten Zahlen versucht worden, aber nach unserer Auffassung vergeblich. Denn wenn auch die Ueberlieferungen nicht anzuzweifeln sind, auf welche sich die betreffenden Erklärer stützten, so ist doch zu bedenken, dass es sich bei allen diesen Angaben um die Harmonie in der Musik handelte, mit der die Harmonien, die von einer geometrischen Figur abgeleitet werden können, doch nicht übereinzustimmen brauchen. Berücksichtigt man die Thatsache, dass Philolaus (vergl. Cantor, Geschichte der Mathematik I, S. 140) den Würfel eine geometrische Harmonie nannte, weil seine Abmessungen völlig gleich unter einander und somit in vollständigem Einklang seien, so kann man wohl auch hier eine ähnliche Erklärung zu Hilfe nehmen und sagen: Unter Harmonie haben wir hier dasselbe zu verstehen, was im allgemeinen Theile die Worte *πάντα προσήγορα* bedeuten: das gegenseitige Entsprechen der aus unserer geometrischen Figur durch arithmetische Operationen abgeleiteten Ausdrücke.

Die eine Harmonie bezeichnet Plato durch *τὴν μὲν ἴσην ἰσάκις ἑκατὸν τοσαυτάκις*. Würde man diese Worte in Form eines Hauptsatzes hinschreiben unter der schon oben gemachten Voraussetzung, dass *ἑκατόν* von *παρέχεται* abhängt, und nun diesen Satz

ἡ μὲν ἴση ἰσάκις ἑκατὸν παρέχεται τοσαυτάκις

vergleichen mit

ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχεται τρὶς αὐξηθείς,

so dürfte sofort der ähnliche Satzbau bei beiden in die Augen fallen, sowie dass *τοσαυτάκις* dem *τρὶς αὐξηθείς* entspricht, so dass wir übersetzen können: die eine, eine gleiche gleichvielmal genommen giebt, ebensovielmal wie oben (dreimal) vermehrt, hundert. In einer gleichen Harmonie stehen die Seiten eines Quadrates. Verwendet man hier die Seiten des Fünfquadrates, so würden also obige Worte nichts Anderes bedeuten, als dass die Summe der vier Quadrate über den Seiten des Fünfquadrates 100 betrage oder, in Zahlen ausgedrückt:

$$4.25 = 100.$$

Plato will aber noch eine zweite Harmonie erhalten: *τὴν δὲ ἰσομήκη μὲν τῇ προμήκει δέ*. Der Dativ *τῇ προμήκει δέ* hängt von dem bei *τὴν δε* zu ergänzenden *ἁρμονίαν* ab: Die Griechen verbanden auch oft die Substantiva mit dem Casus, den die entsprechenden Verba regierten.

Das Wort *προμήκης* findet sich an mehreren Stellen bei Plato, z. B. im Theaetet, woselbst *προμήκης ἀριθμός* in demselben Sinne wie *ἑτερομήκης ἀριθμός* verwendet in einen Gegensatz zur Quadratzahl gesetzt wird, so dass *προμήκης ἀριθμός* eine in ungleiche Factoren zerlegbare Zahl bedeutet. Spätere Mathematiker, wie Theon und Jamblichus, unterscheiden bekanntlich auch noch *προμήκης ἀριθμός* und *ἑτερομήκης ἀριθμός*, wobei sie unter letzterer eine Zahl verstehen, deren Factoren um eine Einheit verschieden sind, während eine solche Zahl, deren Factoren um mehr als eine Einheit verschieden sind, *προμήκης ἀριθμός* genannt wird.

Im Timaeus tritt προμήκες als Adjectivum von τρίγωνον in einen Gegensatz zu ἰσοσκελές. An der betreffenden Stelle ist von zwei rechtwinkligen Dreiecken die Rede, von denen das eine, gleichschenklige, eine Natur erhalten habe, das andere, ungleichseitige, aber unzählige. (Platonis dialogi ex recogn. Herm., Timaeus S. 360: τοῖν δὴ δυοῖν τριγώνοιν τὸ μὲν ἰσοσκελὲς μίαν εἴληχε φύσιν, τὸ δὲ πρόμηκες ἀπεράντους.) Die im Platonischen Texte hier erwähnte μία φύσις scheint eine sehr einfache Erklärung erhalten zu können durch Herbeiziehung einer Stelle aus Jamblichi de vita Pythagorae (c. XXVII: πολιτειῶν δὲ γραμμάς τινας τοιάσδε τρεῖς συστησάμενον τοῖς ἄκροις ἀλλήλων συμψανούσας καὶ μίαν ὀρθὴν γωνίαν ποιούσας τὴν μὲν ἐπίτριτον φύσιν ἔχουσαν, τὴν δὲ πέντε τοιαῦτα δυναμένην, τὴν δὲ τούτων ἀμφοτέρων ἀνὰ μέσον. λογιζομένων δ' ἡμῶν τάς τε γραμμῶν πρὸς ἀλλήλας συμπτώσεις καὶ τὰς τῶν χωρίων τῶν ἀπὸ τούτων, βελτίστην ὑποτυποῦσθαι πολιτείας εἰκόνα. σφετερίσασθαι δὲ τὴν δόξαν Πλάτωνα, λέγοντα φανέρως ἐν τῇ πολιτείᾳ τὸν ἐπίτριτον ἐκεῖνον πυθμένα τὸν τῇ πεμπάδι συζευγνύμενον καὶ τὰς δύο παρεχόμενον ἁρμονίας), an der gesagt wird, dass die von den angegebenen drei Seiten eingeschlossene rechte Ecke (hier im Sinne des rechtwinkligen Dreiecks) einestheils die $\frac{4}{3}$-Natur habe, andererseits die 5, welche in der Potenz dasselbe vermöge, diese aber in der Mitte von jenen beiden. Betrachte man die Verbindungen der Linien miteinander und die der Quadrate über diesen, so stelle sich das schönste Bild des Staates dar. Diese Meinung habe auch Plato zu seiner eigenen gemacht u. s. w.

Hier deutet offenbar ἐπίτριτος φύσις auf den Werth des Verhältnisses der beiden Katheten hin und in gleicher Weise möchten wir auch μία φύσις als auf den Werth des Verhältnisses der Katheten des gleichschenkligen Dreiecks hinzielend betrachten, denn dieser ist ja gleich der Einheit, während das Verhältniss der Katheten beim ungleichseitigen Dreieck unzählige Werthe annehmen kann.

Dementsprechend kann man τὴν δὲ ἰσομήκη μὲν τῇ προμήκει δέ als die Beziehung gleicher Seiten zu ungleichen Seiten erklären, wobei man sich die Seiten als Katheten denkt und die Summe der Kathetenquadrate als gleich ansieht.

Diese Summen werden näher angegeben und zwar die eine durch ἑκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδων, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀῤῥήτων δὲ δυεῖν. Der Ausdruck ὁ ἀπὸ τοῦ ist die Bezeichnung für das Quadrat, wie Schneider, Nesselmann und Andere bereits erklärt und durch Beispiele hinlänglich erhärtet haben; ἀριθμοὶ ἀπὸ διαμέτρων πεμπάδων sind also nichts Anderes, als die Quadrate über den Diagonalen des aus den Fünfen gebildeten Quadrates, so dass wir als erste Summe $50+50=100$ erhalten. (Wie schon oben erwähnt, haben wir uns ja die vier rechtwinkligen Dreiecke derart zusammengesetzt gedacht, dass die vier Fünfen ein Quadrat bilden.)

Die Worte δεομένων ἑνὸς ἑκάστων beziehen sich offenbar auf ἀριθμῶν, denn nicht die um eine Einheit verminderten Diagonalen sind rational, sondern die Diagonalen werden rational, wenn ihre Quadrate je um eine Einheit vermindert werden.

Bei ἀῤῥήτων δὲ δυεῖν scheint am natürlichsten die Auffassung zu sein, wie sie in den Erklärungen von Faber, Barocius, Schneider und Anderen angegeben ist, nämlich die Ergänzung von διαμέτρων und damit die Uebersetzung: „während die zwei Diagonalen unaussprechlich sind". Man braucht sich ja nur in jene Zeit zu versetzen: der Begriff des Irrationalen war von der Pythagoräischen Schule festgestellt und man befand sich im zweiten Entwickelungsstadium, in dem man die ersten Versuche machte, Näherungswerthe einzuführen. Um nun ja nicht den Glauben zu erwecken, als ob man etwa auf sophistische Weise das Irrationale rational machen wollte, fügte hier Plato ausdrücklich hinzu, dass aber die Diagonalen selbst irrational sind und auch irrational bleiben.

Die Summe der Quadrate der ungleichen Katheten wäre dann in den Worten ἑκατὸν δὲ κύβων τριάδος enthalten. „Hundert Würfel der drei" werden dieselben von Schleiermacher übersetzt, wobei es nur zu bedauern ist, dass diese wörtliche Uebersetzung hier keinen rechten Sinn ergiebt. Nicht viel besser würde es uns mit der Uebersetzung von Fähse: „Die Zahl Hundert entsteht aus den Cuben der Dreiheit" ergehen, denn wir mögen hier τρίας als drei auffassen oder die κύβοι τριάδος als die Cuben von drei Grössen (eine Ansicht, die unter den Erklärern auch ihre Vertreter gefunden hat), die Summe Hundert wird durch keine dieser Annahmen erreicht, weshalb wir uns hier nach einer andern Erklärung umzusehen haben.

Bis hierher haben wir zur Darstellung der von Plato erwähnten Harmonien aus der oben beschriebenen geometrischen Figur die Summe der Diagonalenquadrate und die der Quadrate über den Seiten des Fünfquadrates abgeleitet; es würde also nur noch die Summe der acht Kathetenquadrate zu bilden sein, die nach unserer Deutung des allgemeinen Theiles doch auch in der Zahl für das menschlich Erzeugte erscheinen sollen. Diese acht Kathetenquadrate ergeben zusammen $9+9+9+9+16+16+16+16 = 100$.

Die vier letzten Glieder der linken Seite geben 64, eine Zahl, die die Griechen einiger Beachtung werth hielten, da sie zugleich Quadrat über dem ersten Cubus (8) und Cubus über dem ersten Quadrat ist (man vergleiche Plutarch. de animae procr. e Tim. C. XVI), und zwar ist 64 der Cubus von 4, welche schon bei dem Ausgangspunkt unserer ganzen Betrachtung in dem $\frac{4}{3}$-Verhältniss erwähnt worden ist. Nun lässt sich auch die Summe der vier ersten Kathetenquadrate mit der andern Zahl in dem ebenerwähnten Verhältnisse, nämlich der 3, in Beziehung bringen, wenn man $9+9+9+9 = 9+27 = 3^2+3^3$ setzt. Schreibt man dementsprechend unsere obige

Gleichung $9+27+64=100$, so hätten wir also die Cuben der Zahlen 3 und 4 (*ὧν ἐπίτριτος πυθμήν*), sowie das Quadrat über der 3 zur Summe 100 vereinigt. Und in der That haben wir an dieser Stelle keine andere Erklärung, als dass zwischen den Worten *κύβων* und *τριάδος* mehrere Worte ausgefallen sind, weshalb wir vorschlagen, *ἑκατὸν δὲ κύβων καὶ τοῦ ἀπὸ τριάδος* zu lesen.

Fassen wir nun in der Gleichung $100=9+27+64$ die Zahlen 27 und 9 wieder zusammen, so erhalten wir $100=36+64$ als Bedingung zwischen den Seiten eines rationalen rechtwinkligen Dreiecks, welches *προμηκες τρίγωνον* wäre. Die hierdurch gewonnene Gleichung $6^2+8^2=10^2$ giebt ausserdem die Bedingungen zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks an, das dem Dreieck ähnlich ist (*ὁμοιούντων*), von dem wir ausgingen ($3^2+4^2=5^2$), während die Gleichung $2.50=100$ die Beziehungen zwischen den Seiten eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks darstellt, das jenem erstgenannten aber unähnlich ist (*ἀνομοιούντων*). In dem ungleichseitigen Dreieck bilden die Katheten das Verhältniss $8:6$ (nach Theon etwa *ἐπιτρίτων λόγων δεύτερος*); bei dem Dreieck, von dem wir ausgingen, bildeten sie das Verhältniss $4:3$ (*ἐπίτριτος πυθμήν*): die Seiten bezw. die Glieder der Verhältnisse sind also grösser geworden (*αὐξόντων*). Die Katheten des gleichschenkligen Dreiecks mit der Hypotenuse 10 sind nur auszudrücken, wenn von jedem Quadrat derselben Etwas verschwindet (*φθινόντων*), nämlich 1, während das Verhältniss der beiden Schenkel wieder rational (*ῥητὰ πρὸς ἄλληλα*) ist, da es den Werth 1 besitzt. Alle abgeleiteten Ausdrücke entsprechen einander (*προσήγορα*): sie betragen ja sämmtlich 100.

Auf Grund unserer bisherigen Betrachtungen hätten wir dann für unsere Uebersetzung folgenden Text zu verwenden:

ἔστι δὲ ... ἀνθρωπείῳ δὲ (sc. *γεννητῷ περίοδος, ἣν ἀριθμὸς περιλαμβάνει*) *ἐν ᾧ πρώτῳ αὐξήσεις δυνάμεναί τε καὶ δυναστευόμεναι, τρεῖς ἀποκαταστάσεις, τέσσαρας δὲ ὅρους λαβοῦσαι ὁμοιούντων καὶ ἀνομοιούντων καὶ αὐξόντων καὶ φθινόντων, πάντα προσήγορα καὶ ῥητὰ προς ἄλληλα ἀπέφηναν· ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχεται τρὶς αὐξηθείς, τὴν μὲν ἴσην ἰσάκις, ἑκατὸν τοσαυτάκις, τὴν δὲ ἰσομήκη μὲν τῇ προμήκει δέ, ἑκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδων, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀῤῥήτων δέ δυεῖν, ἑκατὸν δὲ κύβων καὶ τοῦ ἀπὸ τριάδος.*

„Für das menschlich Erzeugte aber giebt es einen Kreislauf, welchen die Zahl umschliesst, in der sich zuerst potenzielle Beziehungen von Hypotenuse und Katheten nach ihrer Vermehrung zeigen, nachdem man durch dreimaliges Zurückkehren zum Ausgangspunkte vier Glieder genommen hat von solchen, die ähnlich und unähnlich machen und wachsen und verschwinden lassen, Alles einander entsprechend und im Verhältniss zu einander rational. Verbindet man mit Beziehung hierauf die Grössen, welche, in kleinsten Zahlen ausgedrückt, das Verhältniss $4:3$ besitzen, durch die Fünfheit, so erhält man durch dreimalige Vermehrung zwei gleiche Beziehungen, die eine, eine gleiche gleichvielmal genommen, giebt, ebensovielmal wie oben (dreimal um sich selbst) vermehrt, hundert. Die andere ist die Beziehung gleicher Seiten zu ungleichen Seiten, die man sich als Katheten denken kann. Man erhält nämlich einerseits hundert als Summe der Quadrate über den Diagonalen des Fünfquadrates, welche rational sind, wenn jedem Quadrat eins fehlt, während die zwei Diagonalen aber irrational sind, andererseits aber hundert als Summe von Cuben und des Dreiquadrates."

Ein neuerer Schriftsteller hätte sicherlich die arithmetische und geometrische Seite etwas mehr getrennt, er hätte vielleicht erst die geometrische Construction und dann die arithmetischen Ableitungen angegeben, etwa in folgender Weise:

Errichtet man über den Seiten eines Quadrates von der Seite 5 Dreiecke mit den Seiten 4 und 3, und zieht man die Diagonalen des Quadrates, so beträgt sowohl die Summe der zwei Diagonalenquadrate, als auch die Summe der vier Hypotenusenquadrate, sowie die Summe der acht Kathetenquadrate eine Zahl, die selbst wieder eine Quadratzahl ist. Nun hätte er hieran wohl die weiteren Betrachtungen, die Plato im allgemeinen Theil vorausschickt, angefügt. Dem Griechen aber, der daran gewöhnt war, bei arithmetischen Betrachtungen in seinem Geiste zugleich geometrische einhergehen zu lassen (man vergl. hierzu Procli Diad. in prim. Eucl. libr. comm., S. 39: *τῆς δὲ ἀριθμητικῆς ὡσαύτως ἡ διαίρεσις εἴς τε τὴν τῶν γραμμικῶν ἀριθμῶν θεωρίαν καὶ τὴν τῶν ἐπιπέδων καὶ τὴν τῶν στερεῶν.* In der Arithmetik findet in gleicher Weise die Eintheilung in die Betrachtung der Linienzahlen, in die der Flächenzahlen und in die der Körperzahlen statt) erschien es dementsprechend auch natürlicher, beide Betrachtungen miteinander zu verknüpfen, wodurch für uns freilich die ganze Stelle an Klarheit und Verständlichkeit verlor.

Werden bei der eben beschriebenen Figur die über den Seiten des Fünfquadrates errichteten rechtwinkligen Dreiecke in demselben Sinne gezeichnet, so dass also jedesmal die Katheten 3 und 4 zusammentreffen (Fig. 10), so bildet die ganze Figur ein Quadrat über der Seite 7, welche zugleich die rationale Diagonale des Fünfquadrates in dem von Plato angegebenen Sinne darstellt.

Es ist nicht uninteressant, diese Figur mit einer andern, ähnlichen zu vergleichen, welche im Plat. Menon beschrieben wird. (Fig. 11.)

Dort lässt nämlich Sokrates ein Quadrat suchen, welches das Doppelte eines andern Quadrates betragen soll, von dem die Seitenlänge 2 gegeben ist. Es werden hierbei vier solcher Quadrate so zusammengelegt, dass ein Quadrat über der Seite 4 entsteht, und nun in jedem einzelnen Quadrat über der Seite 2 die Diagonalen gezogen, so dass die vier Diagonalen ein Viereck bilden, welches die Hälfte des vierfachen Quadrates, also das Doppelte des ursprünglichen sei.

Man sollte fast denken, eine Vergleichung gerade dieser beiden Figuren habe auch Proklus vor Augen gehabt, wenn er in seiner Vorrede zu dem Commentar des I. Buches des Euklid S. 61 angiebt: „Von Resultaten angeregt, gehen wir dem, was ihnen zu Grunde liegt, auch bei den Zahlen nach und betrachten bald unverändert eben dieselben Ergebnisse, wie dass jedes Vieleck in Dreiecke zerlegbar ist, bald begnügen wir uns mit einer Annäherung, z. B. nachdem wir in der Geometrie ein Quadrat als das Doppelte eines andern gefunden, während wir im Zahlengebiet kein solches besitzen, sagen wir, dass das eine als das Doppelte des andern gelte, wenn eins fehlt, wie des Quadrat über 7 das Doppelte des Quadrates über 5 ist, wenn eins fehlt."

Die Figur im Menon würde hier also das Quadrat darstellen, das wirklich gleich dem doppelten gegebenen ist, demnach der Geometrie angehören, während die in Rede stehende Figur im Staate nur die Grundlage für die oben angegebene arithmetische Betrachtung abzugeben hätte, „denn auch den Zahlen liegen ja Figuren zu Grunde" (*καὶ γάρ ἐν τοῖς ἀριϑμοῖς σχήματα κατ' αἰτίαν ἐστίν.* Procl. ibid.)

(Schluss folgt.)

Verzeichniss von Druckfehlern in den Gauss'schen Abhandlungen über die hypergeometrische Reihe.

Von

HEINRICH SIMON

in Berlin.

Die Vorbereitung einer deutschen Ausgabe der in der Ueberschrift genannten Arbeiten, welche voraussichtlich in Bälde erscheinen wird, scheuchte eine ganze Rotte jener heillosen Kobolde aus ihren Schlupfwinkeln auf, die ihr wahrheitsfeindliches Wesen nur allzugern im Reiche der Mathematik treiben, wo sie nach Herzenslust Plus in Minus verkehren, Klammern durcheinanderwerfen, Indices verschwinden lassen und nicht einmal die hohe Stellung der Exponenten respectiren.

Mit einer Uebersicht solcher Entstellungen, die jene klassischen Arbeiten verunzieren, dürfte den Besitzern und Lesern derselben gedient sein. Zuvor seien noch einige Bemerkungen gestattet.

Gauss hat unter dem Titel „Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+$ etc." bekanntlich nur den ersten Theil seiner Untersuchungen veröffentlicht, und zwar im 2. Bande der „Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Gottingae 1813.“ Dem Abdrucke dieser Abhandlung in der von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1863—1874 veranstalteten grossen Ausgabe von Gauss' Werken hat Herr Schering die Fortsetzung beigefügt, die sich unter der Ueberschrift „Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem etc.“ im Nachlass vorfand. Der 3. Band der „Werke“, der die beiden Arbeiten enthält, erschien 1866 in erster, zehn Jahre darauf in zweiter Auflage. Beim ersten Abdruck der Disquisitiones aus den Göttinger Commentationes sind nun zwar neue Druckfehler nicht hinzugekommen,* aber es ist auch fast keiner der schon vorhandenen verbessert worden, so dass die nachstehend unter Nr. 1—12 aufgeführten Fehler den Comment. und der ersten Auflage des 3. Bandes der Werke gemeinsam sind. Dagegen sind im Abdruck von 1876 die Fehler 2—5 berichtigt. Die Nummern 13—23 betreffen die zweite Abhandlung und gelten für beide Abdrücke derselben.**

I. Disquisitiones generales etc. Werke III, S. 123 flgg.

1. Art. 6 S. 128 Z. 3 v. u. Ergänze + etc.
2. und 3. Art. 7 Formel [4] und [11]. Im letzten Gliede ergänze den Factor x.
4. Art. 7 Formel [11]. Vor dem letzten Gliede setze + statt —.
5. Art. 11 Formel [23]. Die linke Seite muss lauten:
$$F(\alpha, \beta+1, \gamma) - F(\alpha+1, \beta, \gamma),$$
wie sich unmittelbar aus [17] und [18] durch Subtraction ergiebt.
6. Art. 16 Abschnitt V S. 142 Z. 7 v. u. In der zweiten Ungleichung setze N statt N'.
7. Art. 33 Z. 5. In $\cos\varphi = \cos(n+1)\varphi = \cos(n+2)\varphi$ muss das letzte Glied $\cos(2n+1)\varphi$ heissen.
8. Art. 33 Formel [73]. Statt $\Psi\left(-\frac{n-m}{m}\right)$ setze $\Psi\left(-\frac{n-m}{n}\right)$.
9. und 10. Art. 35 S. 159 Z. 1 und 4. Statt $(1-z)^{\frac{1}{k}}$ setze $\left(1-z^{\frac{1}{k}}\right)$.
11. Art. 36 Z. 5. Statt *formula* setze *formulae*.
12. Art. 37 Z. 12 vom Ende. Statt $c.u^{\alpha\lambda+\alpha-1}$ setze $\alpha.u^{\alpha\lambda+\alpha-1}$.

II. Determinatio seriei per aequat. diff. etc. S. 207 flgg.

13. Art. 40 2 Zeilen vor [82]. Statt $\frac{\alpha\beta}{\gamma}-\mu$ lies $\frac{\alpha\beta}{\gamma}+\mu$.
14. Art. 46 Z. 3 vom Ende. Statt $x^{\gamma-1}$ setze $x^{1-\gamma}$. (Vergl. die zweite Formel des Art. 42 S. 210.)

* Denn dass S. 161 im Kopf hinter $\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}$ der Factor x fehlt, ist nur typographisch erwähnenswerth.

** In Art. 45 Formel I hat die erste Auflage $(\Pi(-\gamma)$; in der zweiten ist die überflüssige Klammer vor Π getilgt.

15. Art. 47 S. 218 Z. 7. Statt $0 = P'\{\alpha\beta - \mu(\gamma + (\alpha+\beta-1-\gamma)y + \ldots\}$ setze $0 = P'\{\alpha\beta - \mu(\gamma + (\alpha+\beta-1-\gamma)y) + \ldots\}$.
16. Art. 47 vorletzte Zeile. Statt *reducitur* lies *reducuntur*.
17. Art. 48 S. 219 Z. 4. Statt IV setze V.
18. Art. 48 S. 219 Z. 5. Statt IX setze X.

Da nach der Bemerkung Herrn Schering's (S. 230) Art. 48 in der Handschrift „vielfache Durchstreichungen von Worten und ganzen Sätzen" aufweist, ist hier die Möglichkeit eines Schreibfehlers nicht ausgeschlossen. Für die nach Schering von Gauss noch beabsichtigte Fortlassung der Worte *„e solo theoremate binomiali"* ist ein innerer Grund nicht ersichtlich.
19. Art. 49. Die Nummer I gehört, statt zur zweiten Gleichung des Artikels, zur ersten, wie aus der Anführung S. 220 Z. 1 hervorgeht.
20. Art. 52. In der zweiten Gleichung muss der letzte Nenner nicht dx^2, sondern dx^3 heissen.
21. Art. 53 S. 224. In der vorletzten Gleichung vor I ist statt

$$-2y(2-y)(1+y)) \text{ zu setzen } +2y(2-y))(1+y).$$

22. Art. 56 letzte Zeile. Hinter dem ersten = ergänze —.
23. Art. 57 Formel [110]. Links fehlt der Factor 4, da in [109]

$$2B = 2 \cdot \frac{\alpha - \frac{1}{2} . \beta - \frac{1}{2}}{\alpha + \beta - \frac{1}{2} . - \frac{1}{2}} A$$

wird. Auch unabhängig von [109] lässt sich leicht bestätigen dass, die linke Seite von [110] mit 4 multiplicirt werden muss. Denn setzt man z. B. $\alpha = \beta = 1$, $x = \cos^2 t = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, so wird nach Art. 5, XIV

$$\frac{\alpha - \frac{1}{2} . \beta - \frac{1}{2}}{\alpha + \beta - \frac{1}{2}} A \sqrt{x} . F(\alpha, \beta, \tfrac{3}{2}, x) = \frac{1}{4} \frac{\pi - 2t}{\sin t},$$

dagegen die rechte Seite gleich $\frac{\pi - t}{\sin t} - \frac{t}{\sin t}$. Hier scheint übrigens mehr als ein blosser Druck- oder Schreibfehler vorzuliegen, denn Gauss hätte sicher nicht $4 . \alpha - \frac{1}{2} . \beta - \frac{1}{2}$ geschrieben, sondern $2\alpha - 1 . 2\beta - 1$, um so mehr, als auch auf der rechten Seite der Formel die Grössen $2\alpha - 1$ und $2\beta - 1$ auftreten.

Recensionen.

Berichtigung

zu der

Recension von E. R. Müller's Planimetrischen Constructionsaufgaben,

S. 31.

Den Satz in meiner Vorrede: „,... warum ich Aufgaben, welche im Anfange durchgenommen werden müssen, ..." hat Herr Schwering-Coesfeld nicht verstanden. Ich habe damit gesagt, dass jeder Mathematiker wissen muss, dass man das Leichteste zuerst durchnimmt. Ich für meine Person fange mit den ersten Nummern des § 24 in Quarta an und nehme dann dazu passende Aufgaben aus § 20, dann erst gehe ich zu § 3 über etc.

§ 25 S. 48, „Soll ein Kreis ..." würde Herr Schw. vielleicht verstanden haben, wenn er die betreffenden Aufgaben § 23 angesehen hätte.

Die Schreibweise Perga ist richtig; die von Herrn Schw. gewünschte Pergä findet sich allerdings gewöhnlich in mathematischen Büchern, ist aber falsch.

Zum Schluss erlaube ich mir, Herrn Schw. noch auf einen Widerspruch in seiner Recension aufmerksam zu machen. Er sagt an einer Stelle, dass er „methodische Bearbeitung" in meinem Buche vermisse, während er 7 Zeilen tiefer ausdrücklich hervorhebt, dass „jede Aufgabe genügend zur Lösung vorbereitet ist".

E. R. Müller.

E. Wrobel, **Die Physik in elementar-mathematischer Behandlung.** I. Mechanik (Statik und Dynamik der festen Körper, der Flüssigkeiten und der Gase). Rostock, Verlag von W. Werther. 1885. Preis 4 Mk. 50 Pf.

Dieses Buch ist mehr für den reiferen Schüler bestimmt, da es einestheils die Kenntnisse der Trigonometrie voraussetzt, anderntheils auch öfters über die Grenzen der Elementarmechanik hinausgeht, indem es z. B. die Momentankräfte behandelt. Um die theoretischen Ableitungen gleich praktisch verwerthen zu können, sind zahlreiche Beispiele eingeflochten, wodurch eine gute Grundlage bei den Schülern erreicht wird.

Der erste Theil beschäftigt sich mit der Statik fester Körper, dem die Dynamik fester Körper im zweiten Theil gegenübersteht, während der dritte

Theil die Statik und Dynamik der Flüssigkeiten und Gase umfasst. Im letzten Abschnitt wird auch die Meteorologie noch etwas hereingezogen.

Der Verf. sagt in seiner Vorrede, dass der dritte Theil durch eine grössere Zahl Holzschnitte das Buch etwas vertheuern wird; gewiss hätten die Leser auch noch mehr bezahlt, wenn das Papier besser wäre, denn das Lesen wird durch das Durchschlagen der Rückseite sehr erschwert. Das Aeussere trägt überhaupt keinen einheitlichen Charakter; so ist der dritte Theil in Druck und Papier ganz verschieden von den beiden ersten Theilen; und vollends was die Holzschnitte betrifft, so findet man dreierlei Arten, von denen die mit kräftigen Strichen auf schwarzem Grund weitaus die besten sind.

B. Nebel.

G. Albrecht, **Geschichte der Elektricität.** Elektrotechnische Bibliothek Band 28. Verlag von A. Hartleben (Wien, Pest, Leipzig). Preis 3 Mk.

Durch das unaufhaltsame Streben nach Vorwärts hat sich die Elektricität in den letzten Jahren nach allen Richtungen weithin ausgebreitet, so dass man bei der Fülle des Stoffes leicht den Entwickelungsgang aus dem Auge verlieren könnte. Am deutlichsten zeigt dies die bis auf 27 Bände angewachsene elektrotechnische Bibliothek von Hartleben, wovon jeder Band die einzelnen Zweige der Elektricität bis ins Detail behandelt. Die Uebersicht darüber bildet der vorliegende Band, der wohl die summarische Inhaltsangabe der vorhergehenden Bände in geschichtlicher Darstellung genannt werden darf.

Der Verf. ist sich bewusst, dass in einem so engen Rahmen sich dieser Stoff nicht erschöpfend behandeln lässt, hat aber den Entwickelungsgang nicht gleichmässig dargestellt, sondern ist mit der neueren Zeit etwas stiefmütterlich umgegangen. Vielleicht giebt dies den Anlass, die neuere Entwickelung der Elektricität später in einem besondern Bändchen zu berücksichtigen.

Nicht nur die zahlreichen Abbildungen von Instrumenten, sondern auch die Bildnisse der bedeutendsten Forscher auf dem Gebiete der Elektricität werden wesentlich dazu beitragen, dass diese Geschichte der Elektricität in den weitesten Kreisen Eingang findet. Die Abbildungen elektrischer Forscher sind grösstentheils schon in dem Bericht der Wiener elektrischen Ausstellung vom Jahre 1883 (Verlag von Hartleben) enthalten.

B. Nebel.

M. Wildermann, **Die Grundlehren der Elektricität und ihre wichtigsten Anwendungen.** Herder'sche Verlagshandlung, Freiburg i. B. 1885. Preis 7 Mk.

Nicht für den Gelehrten, sondern für den Laien, der sich mit den Fortschritten der Elektricität bekannt machen will, ist das vorliegende Buch geschrieben. Es ist deshalb keinerlei Kenntniss von Mathematik vorausgesetzt, nur für die Vorgeschritteneren finden sich in Anmerkungen hier und da einige Formeln angegeben. Da keine weiteren Vorkenntnisse verlangt werden, so wird der Leser im ersten Buche mit der Elektricität und ihrer Erregung bekannt gemacht, während die Verwendungen der Elektricität in dem zweiten Buche zusammengestellt sind. — Es wird wohl kein Capitel der Elektricität genannt werden können, das hier nicht berücksichtigt worden wäre; überall findet der Laie Aufschluss, namentlich in dem Gebiet der Elektrotechnik, da insbesondere zahlreiche Maschinen- und Lampentypen angegeben sind. Somit wäre es überflüssig, die einzelnen hier behandelten Zweige der Elektricität aufzuzählen. — Was die Behandlung des Stoffes betrifft, so bekommt man beim Lesen des Buches den Eindruck, als ob der Verf. zum Theil ältere Werke der Physik benützt, dagegen neuere Bestimmungen nicht immer berücksichtigt habe, z. B. wenn er auf S. 4 von „freundlichen und feindlichen Polen“ spricht, oder S. 119 das Ohm gleich 1,0493 Siemens-Einheiten statt 1,060 angiebt u. dgl. m. Einiges ist nicht scharf hervorgehoben oder gar unrichtig ausgedrückt; als Beleg hierfür sei z. B. der § 29 angeführt. Hätte der Verf. S. 71 angegeben, dass der Reductionsfactor einer Bussole von dem variabeln Erdmagnetismus abhängig und somit selbst variabel ist, so würde der Leser den Grund einsehen, warum er den Reductionsfactor „bei einer älteren Bussole, die lange (!) Jahre nicht gebraucht worden ist, vor neuem Gebrauch wieder festzustellen hat“; denn sonst sucht er den Grund hierzu in der Veränderlichkeit des Nadelmagnetismus, während doch hiervon der Reductionsfactor unabhängig ist. Die Definition eines Spiegelgalvanometers ist geradezu unrichtig, so dass man annehmen darf, dass der Verf. den Zweck des Spiegels an den Spiegelgalvanometern nicht kennt. Die wenigen hier angeführten Aussetzungen mögen genügen, um darzuthun, dass Manches in diesem Buche mit Vorsicht aufzunehmen ist.

B. Nebel.

Die Gay-Lussac'sche Formel, von Prof. Hullmann. Oldenburg, 1886. 39 S.

Von den 39 Seiten der Abhandlung sind 7 dem Gegenstand des Titels gewidmet, der Rest beschäftigt sich mit einer Anzahl Kritiken über eine früher geschriebene Abhandlung „Der Raum und seine Erfüllung“, mit denen der Verfasser nicht zufrieden ist.

An die Stelle der Gay-Lussac'schen Formel

$$v = v_0(1 + \alpha t)$$

setzt der Verfasser den Exponentialausdruck

$$v = v_0 e^{a t},$$

welcher für kleine Werthe von a mit dem ersteren übereinstimmt. Dass dies nichts Neues ist, zeigt z. B. das Lehrbuch der Physik von Mousson, 2. Band Nr. 476 der 3. Auflage.

Der Verfasser ereifert sich ferner dagegen, dass in dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze

$$pv = RT$$

die Physiker R als eine Constante, also als eine absolute unbenannte Zahl betrachten! und zeigt damit, dass er keinen Begriff von dem hat, was der Mathematiker Constante nennt. Wenn er ferner sagt, der erste Hauptsatz der Wärmetheorie solle

$$dQ = dU + A\,p\,dv \quad \text{und nicht} \quad dQ = dU + p\,dv$$

geschrieben werden, so wird ihm jeder Kundige zustimmen, aber auch sich die Frage erlauben, bei welcher Autorität die zweite Gleichung zu finden ist, wenn die Buchstaben ihre gewöhnliche Bedeutung haben.

Die Besprechung der Antikritiken überlassen wir den Herren Kritikern, wenn sie es übernehmen wollen.

P. Zech.

Theoretische Optik, von Dr. Ketteler, Professor in Bonn. Braunschweig, 1885. 652 S.

In den zwanziger Jahren unseres Jahrhunderts hat Fresnel den ersten Versuch gemacht, auf mechanische Grundsätze sich stützend mathematische Ausdrücke für die Intensität des zurückgeworfenen und gebrochenen Lichtes und für die Bewegung der Lichtstrahlen in krystallinischen Mitteln zu geben. In Deutschland war es insbesondere Fr. Neumann, welcher die Grundsätze der Elasticitätstheorie auf dieselben Erscheinungen anwandte. Ueber die Definition der Polarisationsebene waren die zwei Physiker bekanntlich entgegengesetzter Ansicht. Lamé's Theorie stimmte mit der von Neumann, Cauchy suchte die Dispersion zu erklären, aber ohne zu einem klaren Ziele zu kommen. Einen kräftigen Anstoss zur Ausbildung der Theorie der Optik gab erst in den siebziger Jahren die Entdeckung der anomalen Dispersion. Es handelte sich jetzt darum, allgemeinere Differentialgleichungen aufzustellen, von der Annahme des Mitschwingens der Körpertheilchen ausgehend. In den letzten 15 Jahren finden sich in Wiedemann's Annalen eine Reihe von Abhandlungen aus diesem Gebiete, insbesondere von Ketteler, Lommel und Voigt. Lommel ist im Begriffe, seine Anschauung im Zusammenhang darzustellen. Ketteler hat es im vorliegenden Werke gethan.

Ketteler hat es sich zur Aufgabe gemacht, Differentialgleichungen aufzustellen, welche im Gegensatz zu den früher benützten auch die Dispersion und die Absorption erklären, und welche ausserdem die Erscheinungen der Metallreflexion und der circular und elliptisch polarisirenden Mittel umfassen. Selbstverständlich ist damit eine Kritik anderer Versuche verbunden, so dass eine Art Geschichte der neueren Bestrebungen für Ausdehnung der theoretischen Optik vorliegt. Die allgemeinsten Bewegungsgleichungen werden erhalten, indem die für die einzelnen besonderen Erscheinungen nöthigen Zusatzglieder zu den alten Differentialgleichungen hinzugesetzt werden.

Dem theoretischen Theile folgt ein experimenteller, der sich in erster Linie mit der Dispersion des Lichtes in Gasen beschäftigt, die, früher meist geleugnet, nun von Ketteler experimentell festgestellt wurde, dann mit der Dispersion einer Reihe durchsichtiger, undurchsichtiger und halbdurchsichtiger Mittel und mit dem Zusammenhang von Absorption und Refraction.

Wir haben somit ein erstes Werk vor uns, das die Theorie aller Lichterscheinungen, insbesondere der in neuerer Zeit bekannt gewordenen, nach einem Gesichtspunkte dargestellt zusammenfasst.

P. Zech.

Der Atomaufbau in den chemischen Verbindungen, von L. Mann. Berlin, 1884. 90 S.

„Wenn eine Menge unelastischer Uratome in eine Röhre mit festen, unelastischen Wänden einströmt, so wird bei gleicher Geschwindigkeit, aber divergenter Bewegungsrichtung die radiale Bewegungscomponente durch den Gegendruck an der Röhrenwand vernichtet, die Tangentialbewegung der Partikel durch gegenseitigen Anprall aber ausgeglichen, so dass eine Spiralbewegung mit unveränderter axparalleler Geschwindigkeit resultiren würde und für deren Rotationsrichtung die arithmetische Summe der Tangentialbewegungsgrössen entscheidend wäre."

Das ist ein Satz der Einleitung in diese Abhandlung. Die Tangentialbewegung wird aufgehoben, ist aber ein Maass für die Rotationsbewegung, welche parallel der Axe vor sich geht.

„Die Wirbelbewegung bedingt die Continuität des Stoffes; ein dauernd leerer Raum ist nur im Innern der engsten Strahlen möglich." Also Continuität des Stoffes, aber zeitweise auch leerer Raum?

Wir kamen über die Einleitung nicht hinaus, da wir der Ansicht sind, man müsse die Einleitung verstehen, um ein Buch mit Nutzen zu lesen.

P. Zech.

Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers. Von Dr. Franz Neumann, herausgegeben von Dr. O. E. Meyer. Leipzig, 1885. 374 S.

Ein weiterer Band der Sammlung von Vorträgen über mathematische Physik, welche von den ehemaligen Schülern des Königsberger Physikers herausgegeben werden. In demselben werden zunächst die Sätze über Druckkräfte und Verrückungen in einem elastischen System und die Beziehungen beider entwickelt. Historisch hat sich die Theorie anders entwickelt, nämlich aus der Einwirkung der Molekel aufeinander, wovon bei Betrachtung der Druckkräfte und Verrückungen ganz abgesehen werden kann. Navier hat zuerst die Moleculartheorie aufgestellt und daraus die Verrückungen bestimmt; die Druckkräfte entwickelten Poisson und Cauchy. Carl Neumann hat die Elasticitätsgleichungen aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten abgeleitet, seine Theorie giebt zugleich die Grenzbedingungen an der Oberfläche der Mittel. Nach Auseinandersetzung derselben werden die Temperaturänderungen als Ursache der Verrückungen betrachtet und die Sätze von Kirchhoff bewiesen, dass es eine eindeutige Lösung ist, welche aus den aufgestellten Differentialgleichungen folgt.

Es werden dann die allgemeinen Gleichungen auf einige besondere Aufgaben angewandt, die Ausdehnung eines prismatischen Körpers durch Zug, die dabei erfolgende Querzusammenziehung, eine Hohlkugel unter dem Einfluss von innerem und äusserem Druck, dann die Torsion eines Cylinders und die Biegung eines Stabes. Daran knüpft sich eine Betrachtung über das Verhältniss der Elasticitätsconstanten λ und μ.

Es folgen nun die Gleichungen für krystallinische Mittel aus den Symmetrieverhältnissen der Structur und der Annahme abgeleitet, dass der Moleculardruck nur von den relativen Verrückungen an jeder Stelle abhänge. Die Gleichungen enthalten 36 Constanten, deren Zahl sich erheblich vermindert, wenn der Krystall in Bezug auf eine oder mehrere Ebenen symmetrisch gebildet ist. Es wird als Anwendung der Gleichungen die Zusammendrückung eines Krystalls durch allseitigen oder einseitigen Druck und die Aenderung der Winkel hierbei auseinandergesetzt.

Nun folgen die Gesetze der Fortpflanzung ebener Wellen, der Doppelbrechung und Polarisation: die Fortsetzung dieser Untersuchungen ist in den „Vorlesungen über theoretische Optik von Fr. Neumann“ zu suchen. Dagegen werden die Differentialgleichungen noch weiter entwickelt unter der Bedingung, dass der Lichtäther unzusammendrückbar sei, wobei die Longitudinalwellen wegfallen. Wenn hierbei die Fresnel'schen Gesetze gefunden werden, so geschieht es nur unter der Voraussetzung einer Existenz von drei aufeinander senkrechten symmetrischen Ebenen; da aber jene Gesetze allgemeiner gelten, wie die Erfahrung zeigt, so wird Lamé's Verfahren auseinandergesetzt, wobei nicht die Symmetrie vorausgesetzt wird, sondern nur die Eigenschaft, ebene Wellen durchzulassen.

Zum Schlusse der optischen Betrachtungen folgt die Dispersionstheorie nach Cauchy und nach Neumann, und zum Schlusse der Elasticitätstheorie überhaupt die Schwingung gespannter Saiten und Membranen, sowie dünner Stäbe.

P. Zech.

Untersuchungen über Elektricität. Von Gaston Planté, übersetzt von Prof. Dr. Wallentin. Wien 1886. 262 S.

Die Accumulatoren, welche heutzutage eine grosse Rolle spielen als Regulatoren elektrischer Anlagen und als einfachste Apparate, um Elektricität zu liefern, wo ein Motor zur Erzeugnng der Elektricität für kurze Zeit oder überhaupt nicht vorhanden ist, sind von Planté zuerst studirt worden. Vorliegendes Werk giebt in seinem ersten Theile die vielfachen Erfahrungen des Verfassers über die Secundärbatterien und die ihnen zu gebende Einrichtung, damit sie als Accumulatoren zu benützen sind, d. h. als Apparate, welche, einmal geladen, längere Zeit hindurch gleichbleibende elektrische Ströme zu geben im Stande sind. Es ist im Einzelnen nachgewiesen, wie man dazu getrieben wurde, Bleiplatten anzuwenden und zwar „formirte“ Bleiplatten, d. h. durch den galvanischen Strom umgewandelte gewöhnliche Bleiplatten, an deren Oberfläche das Blei in feiner Zertheilung angesammelt wird. Alle neueren Accumulatoren suchen denselben Zweck durch besondere Herstellung von Bleiplatten zu erreichen, das Princip ist aber immer noch das von Planté zuerst angewandte.

Die folgenden Theile geben eine Darstellung der verschiedenen Anwendungen von Secundärbatterien, insbesondere für die Ströme hoher Spannung, die man mit denselben erhalten kann. Die verschiedenen Versuche, welche angeführt werden, mussten zu Analogien mit den Erscheinungen des Blitzes führen, wie sie im vierten Theil angeführt werden. Auch der Hagel, die Tromben, die Polarlichter, die Sonnenflecken werden hereingezogen, um ihre Analogie mit den Wirkungen einer hochgespannten Secundärbatterie nachzuweisen. Die Anlage einer solchen Batterie — rheostatische Maschine — wird im fünften Theil im Einzelnen besprochen, und im sechsten Theil endlich werden Schlussfolgerungen über die Natur der Elektricität gezogen.

Es ist von hohem Interesse, diese Studien auf einem Specialgebiet zu verfolgen und zu sehen, wie der Verfasser durch seine Versuche hingeleitet wurde auf die räthselhaften elektrischen Vorgänge in unserer Atmosphäre.

Leider kann die Uebersetzung als gute nicht charakterisirt werden. Es kommen Satzverbindungen vor, die das Gegentheil von französischer klarer Darstellung sind (z. B. S. 16: „Aber ebenso“ u. s. w.), Anwendung französischer Worte, die sich leicht durch deutsche hätten geben lassen (z. B. „decapiert“ S. 18 und 19), es wird von „geringen“ Kugeln gesprochen (S. 50), von „veritabeln“ Ladungen (S. 58), von „variierten“ Widerständen (S. 64), von einem „Uebersetzen des Bastilleplatzes“ (S. 164) u. s. w. Das sind wenige Beispiele von Uebersetzungssünden, die beim Lesen des Buches unangenehm stören.

P. Zech.

Lehrbuch der Geophysik und physikalischen Geographie. Von Dr. S. Günther. Zwei Bände. II. Bd. mit 118 in den Text gedruckten Abbildungen. Stuttgart, Verlag von Ferd. Enke. 1885. 8⁰. XII, 670 S.

Die Grundsätze, nach welchen dieser II. Band der Geophysik gearbeitet ist, sind in allem Wesentlichen die gleichen wie für den I. Band, welcher früher in dieser Zeitschrift (Bd. 29 S. 226 flgg.) seine Besprechung fand. Auch in dem vorliegenden, im Vergleich zum früheren mehr als anderthalbfach so starken Bande hat die geschichtliche Entwickelung der darzustellenden Lehren und die genaue Angabe der behufs weiterer Studien etwa aufzusuchenden Quellenwerke eine äusserst ausgiebige und konsequente Berücksichtigung erfahren: das Letztere ergiebt sich daraus, dass zusammen über 3000 Verweisungen und Belegstellen, je auf den Schluss der einzelnen Abschnitte vertheilt, beigefügt sind, und die Beachtung des ersteren zeigt, dass das jetzt abgeschlossene Werk auf seinen über 1000 Seiten Grossoktav der Hauptsache nach auch eine Geschichte der physikalischen Geographie oder wenigstens ihrer einzelnen Kapitel in sich fasst.

Der I. Band hatte ja die kosmische Stellung der Erde, die allgemeinen mathematischen und physikalischen Verhältnisse unseres Planeten und die Geophysik im engeren Sinne behandelt; zu diesen drei fügt der neue Band die a. a. O. S. 229 in Aussicht gestellten weiteren sechs Abtheilungen.

Die erste derselben, also des ganzen Werkes vierte Abtheilung (S. 1—67) bespricht die magnetischen und elektrischen Erdkräfte. Ausgehend (1. Kap.) vom magnetischen und elektrischen Verhalten der oberflächlichen Erdschichten und (2. Kap.) von der magnetischen Richtkraft des gesammten Erdkörpers, insbesondere von den drei den Erdmagnetismus bestimmenden Elementen, ihrer Geschichte und praktischen Verwendung, giebt dann (3. Kap.) der Verf. die Theorien des Erdmagnetismus, hauptsächlich die Gauss'sche, und widmet sein 4. Kapitel den Polarlichtern, deren Erscheinung, den Versuchen ihrer Erklärung und den in neuester Zeit versuchten Nachbildungen derselben.

Der Atmosphärologie ist die fünfte Abtheilung gewidmet, begreiflicherweise viel Platz, fast ein Drittel des Buches einnehmend (S. 67—308), zum deutlichen Beweis, wie Vielerlei und wie Interessantes „vom Wetter" zu sagen ist. Die allgemeinen Eigenschaften der Lufthülle, ihre chemische, physikalische und morphologische Beschaffenheit und die Methoden zu deren Erkennung (1. Kap.), sowie die Beobachtungs- und Berechnungsmethoden der Meteorologie (2. Kap.) machen den Anfang, und es haben hierselbst auch die Methode der kleinsten Quadrate und die Bessel'sche Formel ihre Aufnahme gefunden. An die Besprechung des umfassenden Gebietes der meteorologischen Optik (3. Kap.) und des an Erklärungsversuchen so reichen Gebietes der atmosphärischen Elektricität (4. Kap.) reiht sich naturgemäss die kosmische Meteorologie (5. Kap.) an, wo dann der Einfluss des Mondes auf die Witterung in vorsichtigster Weise zum Ausdruck gelangt, zugleich aber auch neuere Arten des Prophezeiens ihre Abfertigung finden. Das folgende 6. Kapitel, die dynamische Meteorologie, d. i. die Lehre von den Störungen des atmosphärischen Gleichgewichtszustandes enthaltend, giebt die Grundlagen der heutigen Meteorologie (die also hier im Gegensatze z. B. zu Supan als wirklich der Geographie gehörig aufgefasst wird) und bildet den naturgemässen Uebergang zum zweiten Theile der vorliegenden Abtheilung, zur Klimatologie, die als allgemeine (7. Kap.) und specielle (8. Kap.) und säculare (9. Kap.) abgehandelt wird. Den Beschluss macht, als praktische Verwendung des vorstehend dargelegten Wissensgebietes, die angewandte Meteorologie (10. Kap.) sowohl als Wetterprognose, wie als agrare, litorale, maritime und selbst medicinische Meteorologie.

Die sechste Abtheilung (S. 308—442) behandelt die Oceanographie und oceanische Physik, nämlich die geometrischen, physikalischen und chemischen Eigenschaften des Meeres (1., 2. und 3. Kap.), hierauf seine Bewegungen, nämlich dessen Wellen und die Gezeiten und ihre Erklärung (4. Kap.), und die Strömungen im Allgemeinen und im Besondern für die einzelnen Meere (5. Kap.). Als Anhangskapitel kann das sechste gelten, welches das Eis des Meeres, seine Entstehung, Eigenschaften, Arten und seine Vertheilung bespricht, sowie die Meinungen über ein offenes Polarmeer darlegt.

Vom Meere führt uns der Verfasser auf das Festland, nicht ohne in der vorangehenden siebenten Abtheilung (S. 442—497) die dynamische Wechselwirkung zwischen Meer und Land behandelt zu haben. Hier werden (1. Kap.) die Niveauschwankungen im Allgemeinen und in ihrer geographischen Vertheilung dargelegt, sowie die zu ihrer Erklärung aufgestellten Theorien, wobei die blos Seespiegelschwankungen zulassende Meinung von Suess nicht rundweg gebilligt wird. Die Besprechung der Küstenbildung, sowie die Charakteristik und Klassification der Inseln bilden den Inhalt des 2. und 3. Kapitels.

Die achte Abtheilung (S. 497—648) beschäftigt sich, wie gesagt, mit dem Festlande und seiner Süsswasserbedeckung. Im Anschlusse an das der Kosmogonie gewidmete 1. Kapitel der ersten Abtheilung werden hier zunächst die speciell geogonischen Speculationen skizzirt und die Grundthatsachen der Geognosie kurz hervorgehoben; der stereometrischen Geognosie und ihrer Ausbildung durch Humboldt und Sonklar, also den Oberflächenformen im Allgemeinen, der Gebirgsgliederung und den gestaltlichen Verhältnissen der Thäler, der Orometrie und der Beziehung zwischen der Physiognomik eines Gebirges und seinem geognostischen Aufbau ist das 2. Kapitel, der in neuerer Zeit so sehr entwickelten Gletscherkunde das 3. Kapitel gewidmet, während das 4. die stehenden und fliessenden Gewässer studirt. Dem so überaus mannigfaltigen Stoffe der vorliegenden Abtheilung lässt dann der Verfasser zum Schlusse noch (im 5. Kap.) eine zusammenfassende und vertiefende Betrachtung zu Theil werden, indem er, an die Kant-Laplace'sche Kosmogonie anknüpfend, übersichtlich all' das zusammenträgt, was einer genetischen Erklärung der gegenwärtigen Oberflächenbeschaffenheit unseres Erdkörpers, also einer allgemeinen Morphologie des Antlitzes der Erde zu dienen vermag.

Diese Erde nun trägt Lebewesen verschiedenster Art, und deren mehr oder minder günstige Entwickelung ist im Wesentlichen durch die geophysikalischen Verhältnisse bedingt; so interessant darum auch die Beziehungen zwischen der Biologie und der Geophysik sind, so gehört eine Darlegung jener doch nicht in das Gebiet der letztgenannten Wissenschaft, und so begnügt sich denn auch der Verfasser unseres Buches mit einem die neunte Abtheilung vertretenden Anhang (S. 648—657), welcher in kurzer Andeutung über die Anwendung geographischer Forschungsergebnisse auf die Organismenlehre die Grundgedanken der Pflanzen-, Thier- und Menschengeographie skizzirt.

Wir sind zu Ende mit unserer gedrängten Inhaltsübersicht des in der Ueberschrift genannten Buches, und es erübrigt ein kurzes zusammenfassendes Urtheil über dasselbe. Nun, vor Allem kann man nicht genug staunen über die ungewöhnliche Belesenheit des Verfassers, der seinen schier unendlichen Stoff überallher mit unendlichem Fleisse zusammenträgt; man bewundert stets auf's Neue die ausdauernde Kraft, welche der Stofffülle nicht erliegt, vielmehr bis zum Schluss letztere zu sichten, zu vertheilen und im Ganzen genommen vollauf zu beherrschen vermag; man freut sich an der Art der Darstellung, welche meistens die schöne Mitte hält zwischen strenger Wissenschaft und glücklicher Popularisirung. Wer vermöchte freilich Alle zu befriedigen? Das ungeheure Material, welches bewältigt werden musste, lässt es begreiflich erscheinen, dass bei der erstmaligen Durcharbeitung desselben der eine und andere Abschnitt nicht so wohlgeordnet und übersichtlich ausgefallen ist, wie ein Specialist ihn wohl wünschen möchte. So liesse sich wohl die erste Hälfte der sechsten Abtheilung (S. 308—370) geordneter darstellen oder, um ein Beispiel eines einzelnen Paragraphen zu nehmen, die vom Verf. in sechs Gruppen untergebrachten Hypothesen über den Ursprung der Luft-, insbesondere Gewitterelektricität würden in ihren gegenseitigen Beziehungen klarer hervortreten, wenn dieselben vorerst in solche geschieden würden, welche nur der Erde angehörige physikalische Vorgänge zur Erklärung zu Hilfe nehmen, also so zu sagen in tellurische Theorien und in kosmische. Die ersteren verwenden zur Erklärung die Reibung (Winkler, Nollet, Dove, Spring, Gerland, Hoppe, Sohncke), den Wechsel im Aggregatzustande des Wassers und zwar dessen Verdampfung (Franklin, Saussure, Lavoisier und Laplace, Volta) oder die Dampfverdichtung (Wettstein, Palmieri, Gerland), ferner besteht eine chemische Theorie (Berthollet), sowie eine physiologische (Pouillet); die kosmischen Theorien aber lassen entweder die Erde selbst elektrisch sein (Peltier, Lamont), oder lassen ihr Elektricität zukommen infolge von Bestrahlung durch die Sonne (Mühry, Giordano) oder gar durch unmittelbare Mittheilung von der Sonne her (Becquerel, Faye, W. Siemens). Eine zweite Auflage, die wir dem Werke sehr wünschen, wird so an manchen Stellen die bessernde Hand erkennen lassen können.

Aber auch so, wie es uns vorliegt, ist das Werk eine treffliche Bereicherung unserer Literatur, ein recht empfehlenswerthes Lehr- oder eher Handbuch der Geophysik. Dem Verfasser gilt unser Dank, dass er sich der gewaltigen Arbeit unterzogen, aber auch der so regen Verlagshandlung, dass sie das Werk übernommen und so gut ausgeführt hat.

P. TREUTLEIN.

TH. SANIO, **Die Abbildung des Aeusseren eines Kreisbogen-Polygons auf eine Kreisfläche.** Inaugural-Dissertation der Königsberger Universität. Greifswald, Druck von Kuncke. 1885.

Die Aufgabe, das Innere des Kreises eindeutig und conform auf das Innere des Kreisbogenpolygons zu übertragen, ist bereits von H. A. Schwarz gelöst worden.

Unterwirft man letztere Figur einer Transformation durch reciproke Radien, deren Centrum im Innern liegt, so entsteht ein neues Kreisbogenpolygon, und das Innere des ersteren entspricht dem Aeusseren des letzteren.

Durch diese Ueberlegung, die man als eine synthetische bezeichnen kann, ergiebt sich die Möglichkeit der Lösung des vom Verfasser behandelten Problems ohne Weiteres. Gleichzeitig erkennt man, dass die Abbildung der Kreisfläche auf das Innere oder das Aeussere des Kreisbogenpolygons auf Functionen führen muss, die nicht wesentlich von einander verschieden sind.

Letzteres ist insofern bemerkenswerth, als Christoffel gezeigt hat, dass bei dem geradlinigen Polygon beide Aufgaben ganz verschiedene Analysen erfordern, die auch auf verschiedene Functionen führen.

Die grosse Wichtigkeit der Schwarz'schen Methoden ist bekannt. Obwohl also das Resultat der obigen Aufgabe leicht vorauszusehen war, muss es doch als ein verdienstliches und dankenswerthes Unternehmen bezeichnet werden, dasselbe auf dem Wege der Schwarz'schen Analyse abzuleiten und auch die Constantenbestimmungen möglichst vollständig durchzuführen.

Von Interesse war es ferner, das geradlinige Polygon als Specialfall des Kreisbogenpolygons zu betrachten und so den Nachweis zu liefern, dass die beiden Christoffel'schen Lösungen sich auf dem Schwarz'schen Wege finden lassen und also functionentheoretisch eng mit einander zusammenhängen.

So kommt das Problem von verschiedenen Gesichtspunkten aus in lehrreicher Weise zur Behandlung und bringt den Leser mit einer reichhaltigen Literatur — wir nennen noch Schlaefli, Wedekind, Pochhammer, Kummer, Gauss, Riemann, Kirchhoff, Fuchs, Frobenius, Poincaré — in Berührung.

Die vollständige Constantenbestimmung für das n-Eck scheint vorläufig noch unmöglich zu sein. Verfasser führt sie vollständig durch für den Fall des Kreisbogendreiecks, wobei man auf die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe geführt wird. Für die allgemeine Durchführung wird aber in § 8 ein neuer Weg angedeutet. Es wird nämlich versucht, aus der Differentialgleichung für das Innenproblem die des Aussenproblems dadurch herzuleiten, dass erstens die Form beider Gleichungen dieselbe ist, und dass man aus den Parametern der ersteren auf die der anderen schliesst.

Für das Bogendreieck ist dies leicht, für das n-Eck schwieriger. Benützt werden die beiden Haupteigenschaften der Kreisverwandtschaft, dass nämlich bei der Abbildung durch reciproke Radien die Winkel und die Doppelverhältnisse von je vier Punkten unverändert bleiben.

Für die Eckpunkte des n-Ecks lassen sich im Ganzen $n(n-1)(n-2)(n-3)$ solcher Doppelverhältnisse bilden, von denen aber nur $n-3$ von einander unabhängig sind. Bei den Winkeln ist nur zu beachten, dass an Stelle des inneren Winkels $\lambda\pi$ jedesmal $(2-\lambda)\pi$, der äussere Winkel, zu setzen ist.

Mit Hilfe dieser Invarianten lassen sich die $3n-3$ Parameter der der Differentialgleichung des Aussenproblems aus denen der Gleichung des Innenproblems bis auf zwei oder drei bestimmen, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Auf diesem Wege gelingt es dem Verfasser, die Lösung des letztgenannten Problems wenigstens im Princip zu geben.

Aus dieser Inhaltsangabe wird man entnehmen können, dass es sich um eine sehr verdienstliche Arbeit handelt, die übrigens auf Anregung des Herrn Professor Lindemann unternommen wurde.

Referent erlaubt sich, beiläufig auf einen weiteren Punkt hinzuweisen. Bei der Abbildung mittels ganzer rationaler Functionen und ihrer Umkehrungen entsprechen den Doppelverhältnissen

$$\frac{r-p}{r-q}\cdot\frac{s-q}{s-p}$$

der einen Ebene in der andern Doppelverhältnisse von der Form

$$\frac{r_1 r_2 \dots r_n - p_1 p_2 \dots p_n}{r_1 r_2 \dots r_n - q_1 q_2 \dots q_n}\cdot\frac{s_1 s_2 \dots s_n - q_1 q_2 \dots q_n}{s_1 s_2 \dots s_n - p_1 p_2 \dots p_n},$$

während die Doppelverhältnisse

$$\frac{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\delta-\beta)}{\sin(\gamma-\beta)\sin(\delta-\alpha)}$$

in solche von der Form

$$\frac{\sin(\Sigma\gamma-\Sigma\alpha)\sin(\Sigma\delta-\Sigma\beta)}{\sin(\Sigma\gamma-\Sigma\beta)\sin(\Sigma\delta-\Sigma\alpha)}$$

übergehen. Diese sind bei einer gewissen Gruppe von Verwandtschaften ebenfalls Invarianten. Bei gebrochenen Functionen rationaler Art findet Aehnliches statt. (Vergl. Journal f. d. reine u. angew. Mathem., Bd. 83. Progr. d. Gewerbeschule Hagen 1880, und Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften.) Es liegt nahe, zu vermuthen, dass diese Invarianten in analoger Weise, wie die einfacheren, zur Lösung complicirterer Probleme verwendet werden können. Wäre dies der Fall, so würden sich wahrscheinlich auch die citirten Untersuchungen von Poincaré noch verallgemeinern lassen.

Hagen i. W., den 15. October 1886. Dr. G. Holzmüller.

Artzt, **Untersuchungen über ähnliche Dreiecke, die einem festen Dreieck umschrieben sind,** nebst einer Anwendung auf die Gerade der zwölf harmonischen Punktreihen und ihre beiden Gegenbilder, die Ellipse und den Kreis der zwölf harmonischen Punktsysteme (Kreis Brocard's). Recklinghausen, Progr. d. Gymn. 1886.

Der Herr Verfasser hat in einer früheren Abhandlung: Untersuchungen über ähnliche Punktreihen auf den Seiten eines Dreiecks und auf deren Mittelsenkrechten, sowie über congruente Strahlenbüschel aus den Ecken desselben (Progr. v. 1884) (vergl. Hoffmann, Zeitschrift f. mathem. u. naturwissensch. Unterricht, Jahrg. XV S. 460) ein Verfahren angewendet, mit dessen Hilfe die in neuerer Zeit zahlreich gefundenen Sätze über die Segmentärpunkte eines Dreiecks, den Grebe'schen Punkt und den Brocard'schen Kreis einer einheitlichen Darstellung fähig sind und sich zum Theil als specielle Fälle von allgemeineren Sätzen ergeben. Diese Untersuchungen, welche sich auf drei Gruppen von ähnlichen Punktreihen beziehen, von denen die erste (a), (b), (c) auf den Seiten des Dreiecks ABC liegend der Relation $Ba:Cb:Ac=BC:CA:AB$, die zweite (a), (b), (c) auf den Mittelsenkrechten der Gleichung $a_0a:b_0b:c_0c=BC:CA:AB$ (a_0, b_0, c_0 sind die Mitten von BC, CA und AB) genügt und die dritte (a_0), (b_0), (c_0) auf den Seiten des Dreiecks durch $\frac{Ba_0}{Ca_0}=\frac{Cb_0}{Ab_0}=\frac{Ac_0}{Bc_0}$ bestimmt wird, werden in der vorliegenden Abhandlung fortgeführt, und zwar wendet sich der Herr Verfasser zunächst zu zwei Gruppen congruenter gleichlaufender Strahlenbüschel aus den Ecken des Dreiecks, die den behandelten ähnlichen Punktreihen auf den Seiten des Dreiecks gegenüberstehen.

Die Untersuchung dieser Strahlenbüschel führt zu zwei Schaaren von Dreiecken, die dem ursprünglichen Dreieck umschrieben und gleichwendig ähnlich sind und deren Nulldreiecke bezüglich die beiden Segmentärpunkte von ABC sind. Lässt man aber den Strahl AB nicht dem Strahle BC, sondern einem beliebigen Strahl BX und diesen einem beliebigen Strahl CY entsprechen, so gelangt man zu einer Schaar dem Dreieck ABC umschriebener einander gleichwendig ähnlicher Dreiecke $\alpha\beta\gamma$. Drehen sich die Seiten $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ und $\alpha\beta$ eines solchen Dreiecks um A, B, C in demselben Sinne und um denselben Winkel λ, so entsteht, wenn λ alle möglichen

Werthe annimmt, eine Schaar gleichwendig ähnlicher Dreiecke, die ABC in demselben Sinne umschrieben sind. Die Ermittelung der Eigenschaften einer solchen Schaar führt zu zwei Arten der Umschreibung, die sich darin gleichen, dass ihre homologen Seiten durch dieselbe Ecke von ABC gehen und ihre homologen Winkel je demselben Winkel in ABC entsprechen; aber während die eine Umschreibung $\alpha\beta\gamma$ mit ABC gleichwendig ähnlich liegt, ist die andere $\alpha'\beta'\gamma'$ gegenwendig ähnlich. Zwei derartige Dreiecke werden Zwillingsdreiecke, ihre Nulldreiecke O und O' Zwillingspunkte genannt, und zwar lassen sich sechs Paare von Zwillingsdreiecken um ABC beschreiben. Die Ermittelung eines Merkmals für die Gleich- oder Gegenwendigkeit von ABC mit den Dreiecken einer Schaar, deren Nulldreieck O ist, führt zu der Bestimmung der drei Lagen von O und daraus ergiebt sich, dass die Dreiecke einer Schaar ABC gleich oder gegenwendig sind, je nachdem das Product der trimetrischen Coordinaten von O für ABC positiv oder negativ ist. Auch lässt sich umgekehrt aus den gegebenen Winkeln und der gegebenen Zuordnung die Lage der bezüglichen Nulldreiecke festsetzen.

Die Discussion wendet sich nun zu der Bestimmung des Inhalts eines Zwillingspaares von Maximumdreiecken $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ und führt zu mehreren merkwürdigen Sätzen über die Summen von bestimmten Maximumdreiecken. Hieran schliesst sich eine Entwickelung der Eigenschaften der Zwillingspunkte O und O', welche theils in trigonometrischen Beziehungen zwischen den Winkeln, unter denen die Seiten des Dreiecks ABC von O und O' aus erscheinen, bestehen, theils geometrischer Natur sind. Den Schluss dieses ersten Theils der Abhandlung bilden Untersuchungen über Dreiecke mit gemeinschaftlichem Nullpunkte, welche zu der Betrachtung der Dreiecksketten führen, die entstehen, wenn die beiden Segmentärpunkte der Umschreibung zu Grunde gelegt werden.

In dem zweiten Theile finden wir eine äusserst interessante Anwendung der gefundenen allgemeinen Resultate auf die 48 ausgezeichneten Punkte des Dreiecks ABC, welche sich aus der Betrachtung der möglichen Umschreibungen zweier Dreiecke um ABC ergeben. Von diesen Dreiecken ist das eine ABC, das andere einem Dreieck ähnlich, welches sich aus den Schwerlinien von ABC bilden lässt. Diese 48 Punkte liegen zu je zwölf auf vier Linien (der Geraden, auf welcher die Seiten von ABC von den in ihren Gegenecken an den Kreis ABC gelegten Tangenten geschnitten werden; dem Kreise, dessen einer Durchmesser den Mittelpunkt M des Kreises um ABC mit dem Winkelgegenpunkte K vom Schwerpunkte S verbindet; der Ellipse, welche dem Dreieck ABC umschrieben ist und den Schwerpunkt S als Mittelpunkt hat; der Curve C^4, deren Punkte die Winkelgegenpunkte des obigen Kreises sind) und bilden auf denselben harmonische Punktsysteme.

Diese beiden Abhandlungen des Herrn Verfassers bilden eine reiche Fundgrube von vielen neuen Sätzen, welche in Beziehungen zu einem allgemeineren Problem, wie am Schlusse angedeutet wird, stehen, und verdienen daher in weiteren Kreisen bekannt zu werden.

Waren. C. Müsebeck.

Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Von Dr. Adolf Hochheim, Professor. Heft III: Die Kegelschnitte. Abtheilung II. A. Aufgaben, 67 S.; B. Auflösungen, 94 S. Leipzig 1886, bei B. G. Teubner.

Wir müssen wieder damit beginnen, auf Bd. XXIX dieser Zeitschrift, hist.-lit. Abth. S. 231 zurückzuverweisen, wo wir über das vorausgegangene II. Heft berichteten. In dessen Vorrede versprach Herr Hochheim für das III. Heft Aufgaben aus der projectivischen Geometrie, sowie solche aus der Behandlung der Kegelschnitte mit Hilfe trimetrischer Coordinaten zum Gebrauche für Studirende. Dieses Versprechen löst er gegenwärtig ein. Ein Vorwort hat er nicht vorausgeschickt, wir glauben, mit Unrecht. Aufgabensammlungen, die ausgesprochenermassen dem Universitätsstudirenden gewidmet sind, die also ohne Leitung eines Lehrers durchgearbeitet werden sollen, bedürfen unserer Meinung nach eines Vorwortes, in welchem der Leser aufmerksam gemacht wird, wo er sich nach der Ansicht des Verfassers den unter Umständen doch sehr nöthigen Rath suchen soll, wenn nicht gar in dem Hefte selbst bei einzelnen Gruppen von Aufgaben die betreffenden Abschnitte z. B. von Salmon-Fiedler's Kegelschnitten genannt werden sollen. Es ist freilich nur eine kleine, formelle Ausstellung, die wir uns damit gestatten, aber wir legen ihr doch eine gewisse Wichtigkeit bei. Die Aufgaben selbst scheinen gut gewählt zu sein, wenn auch selbstverständlich der Referent nicht in der Lage ist, von sich sagen zu können, er habe sie sämmtlich oder auch nur der grössten Zahl nach durchgerechnet.

Cantor.

Vittorio Grünwald, **Dei sistemi numerici a base imaginaria.** Compendio della Memoria letta all' Ateneo di Brescia il 7 Febraio 1886. Brescia 1886. 14 pag.

Bd. XXX dieser Zeitschrift, hist.-lit. Abth. S. 33, haben wir einer Abhandlung gedacht, in welcher Herr Grünwald über Zahlen handelte, die nach einem andern, als dem gewöhnlichen dekadischen Zahlensystem geordnet erschienen. Inzwischen hat der gleiche Verfasser den Gedanken in dem 1885er Jahrgange von Battaglini's Giornale di Matematica dahin erweitert, dass er eine negative Zahl als Grundzahl wählte, und heute benutzt er dazu die rein imaginäre Zahl $b = \beta i$. Was damit praktisch oder theoretisch erreicht sei? Diese Frage bitten wir keinen unserer Leser an uns zu richten! Wir wüssten wenigstens nicht darauf zu antworten. Der

Gegenstand eignet sich ja gewiss zu einer einmaligen kleinen Untersuchung, aber zu immer wiederholten Malen zu ihm zurückzukehren, dazu dürfte er denn doch allzu unfruchtbar sein.

CANTOR.

Zahlentheorie von Adrien-Marie Legendre, nach der 3. Auflage ins Deutsche übertragen von H. MASER. Leipzig 1886, bei B. G. Teubner. Bd. I u. II XVIII, 442 und XII, 453 S.

Legendre, Gauss, Dirichlet sind die drei grossen Klassiker der Zahlentheorie im XIX. Jahrhundert gewesen. Der Erstgenannte gab ihr die Form eines Lehrbuchs und den Namen; der Zweite zeigte ihre Verwendung auch in solchen Gebieten, welche mit Zahlentheorie Nichts gemein zu haben schienen; der Dritte erweiterte sie dadurch, dass er ungleich seinen Vorgängern sich auch nichtelementarer Hilfsmittel bedienen lehrte. Legendre hat in drei Auflagen das von ihm verfasste Werk an dem Wachsthum des Gegenstandes theilnehmen lassen. Gauss hat nicht einmal sein Versprechen, eine Sectio octava zu schreiben, eingelöst, geschweige denn dass er zu einer zweiten Auflage des Disquisitiones Arithmeticae sich hätte bewegen lassen. Dirichlet's Vorlesungen endlich sind überhaupt nicht durch ihn selbst der Oeffentlichkeit übergeben, wiewohl er sich mit einem solchen Plane trug. Jedermann weiss, wie Herr Dedekind es verstanden hat, den Wunsch des verstorbenen Lehrers und Freundes zu verwirklichen. Dirichlet's Vorlesungen sind durchaus originell in den Beweisführungen, enthalten aber fast den gesammten Stoff, der allmälig in Büchern und Abhandlungen zu Tage getreten war. Will man die Abhängigkeit von seinen beiden grossen Vorgängern insbesondere vergleichen, so wird man Dirichlet unzweifelhaft häufiger auf den Spuren von Gauss, als auf denen von Legendre begegnen, und wenn auch klassische Werke nie vollständig entbehrlich werden, nachdem ihr Inhalt in anderen Werken moderner verarbeitet worden, so kann man doch innerhalb dieser Grenze die Vorlesungen Dirichlet's gewissermassen als Ersatz für das Studium der ungleich schwerer geschriebenen Disquisitiones arithmeticae betrachten, aber nicht für das der Théorie des nombres. In diesem Sinne, glauben wir, hat Herr H. Maser sehr recht gethan, die Uebersetzung der im Originale äusserst selten gewordenen letzten Auflage des Legendre'schen Lehrbuches sich als Aufgabe zu stellen. Als geschickten Uebersetzer der Euler'schen Analysis kennt ihn der mathematische Leserkreis bereits. Die neue Uebersetzung wird, so weit wir uns bisher mit ihr bekannt gemacht haben, die Gewandtheit des Herausgebers abermals bestätigen.

CANTOR.

Bibliographie

vom 1. Februar bis 31. März 1887.

Periodische Schriften.

Mathematische und naturwissenschaftliche Mittheilungen aus den Sitzungsberichten der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1887, 1. Heft. Berlin, G. Reimer. compl. 8 Mk.

Sitzungsberichte der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften, mathem.-physikal. Classe. Jahrg. 1886, 3. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Berichte über die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathem.-physikal. Classe. 1886, Supplem. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Sitzungsanzeiger der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem.-naturwissenschaftl. Classe. Jahrg. 1887, Nr. 1—3. Wien, Gerold. compl. 3 Mk.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien, mathem.-naturwissenschaftl. Classe. 52. Bd. (Inh. Canon d. Finsternisse, von Th. v. Oppolzer.) Ebendas. 85 Mk.

Mémoires de l'Acad. imp. de St. Petersbourg. 7. série, tome 34, No. 8—13. Leipzig, Voss. 13 Mk. 15 Pf.

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1885, herausgegeben vom königl. preuss. meteorolog. Institut durch W. v. Bezold. Berlin, Asher. 20 Mk.

Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam. Nr. 21. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Bericht über die Thätigkeit des königl. sächs. meteorolog. Instituts im Jahre 1885. Von P. Schreiber. Chemnitz, Bülz. 5 Mk

Jahrbuch des königl. sächs. meteorolog. Instituts. 3. Jahrg. Ebendas. 20 Mk.

Annalen des physikal. Centralobservatoriums in Petersburg, herausgeg. v. H. Wild. Jahrg. 1885, I u. II. Leipzig, 24 Mk.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1881, dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 27. Jahrg., 2. u. 3. Abth. Berlin, G. Reimer. 34 Mk.

Archiv der Mathematik und Physik, begründet v. Grunert, fortgesetzt v. R. Hoppe. 2. Reihe, 5. Theil, 1. Heft. Leipzig, Koch. compl. 10 Mk. 50 Pf.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica, ed. R. v. Hanstein. 36. Jahrg., 3. Heft, Juli-September 1886. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 20 Pf.

Geschichte der Mathematik und Physik.

GÜNTHER, S., Simon l'Huilier. (Sep.-Abdr.) Tübingen, Fues. 20 Pf.

HELLMANN, G., Geschichte des königl. preuss. meteorolog. Instituts von seiner Gründung im Jahre 1847 bis zu seiner Reorganisation im Jahre 1885. Berlin, Asher. 4 Mk.

Eudoxi ars astronomica qualis in charta aegyptiaca superest. Ed. F. BLASS. Kiel, Univers.-Buchhdlg. 1 Mk.

Reine Mathematik.

BIERMANN, O., Theorie der analytischen Functionen. Leipzig, Teubner. 12 Mk. 80 Pf.

FRISCHAUF, J., Die Convergenz der Kugelfunction-Reihen. Graz, Leuschner & Lubensky. 1 Mk. 25 Pf.

GEIGENMÜLLER, R., Elemente der höheren Mathematik. I. Algebr. Analysis. Mittweida, Schulze. 2 Mk.

WERTHEIM, G., Elemente der Zahlentheorie. Leipzig, Teubner. 8 Mk. 40 Pf.

KÜHL, H., Grundriss der Geometrie. I. Planimetrie. Hamburg, Nestler & Melle. 1 Mk. 50 Pf.

BAUR, M., Ueber den Schnitt eines Ellipsoids und einer concentrischen Kugel. (Sep.-Abdr.) Tübingen, Fues. 20 Pf.

FINK, K., Ueber windschiefe Flächen besonders des 6. Grades. (Sep.-Abdr.) Ebendas. 20 Pf.

ŠOUREK, A., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie für Gymnas. (Bulgarisch.) Plowdiw, Danow. 2 L.

——, Lehrbuch der Stereometrie für Gymnas. (Bulgarisch.) Ebendas. 2 L.

STUDNICKA, Logarithmische Tafeln, bulgarische Ausg. mit Einleitung von ŠOUREK. Prag, Selbstverlag. 2 L.

Angewandte Mathematik.

HERR, J., Lehrbuch der sphärischen Astronomie in ihrer Anwendung auf geographische Ortsbestimmung. Nach dem Tode des Verf. vollendet von W. TINTER. Wien, Seidel & S. 16 Mk.

HARZER, P., Ueber einen speciellen Fall des Problems der drei Körper. (Akad.) Petersburg und Leipzig, Voss. 4 Mk. 50 Pf.

POINSOT, L., Elemente der Statik, deutsch von H. SERVUS. Berlin, Springer. 6 Mk.

KLEIN, H., Sternatlas. 3. Lief. Leipzig, Mayer. 1 Mk. 20 Pf.

ENGELHARDT, B. DE, Observations astronomiques faites dans son observatoire à Dresde. 1. partie. Dresden, Bänsch. 20 Mk.

BREDICHIN, TH., Sur les grandes comètes de 1886. Moskau und Leipzig, Voss. 1 Mk.

Backlund, O., Der Encke'sche Comet von 1865—1885. (Akad.) Petersburg und Leipzig, Voss. 1 Mk. 30 Pf.

Wild, H., Der magnetische Bifilar-Theodolith. (Akad.) Ebendas. 1 Mk. 85 Pf.

Zech, P., Elementare Behandlung von Linsensystemen. (Sep.-Abdr.) Tübingen, Fues. 30 Pf.

Januschke, H., Das Princip der Erhaltung der Energie in der elementaren Elektricitätslehre. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Physik und Meteorologie.

Stein, Th., Die optische Projectionskunst. Halle, Knapp. 3 Mk.

Grosse, W., Die gebräuchlichen Polarisationsprismen und ihre Anwendung in Photometern. Clausthal, Grosse. 1 Mk. 60 Pf.

Naumann, E., Die Erscheinungen des Erdmagnetismus in ihrer Abhängigkeit vom Bau der Erdrinde. Stuttgart, Enke. 3 Mk. 60 Pf.

Berichtigungen.

Hist.-lit. Abthlg. S. 41 in der 9. Textzeile v. o. ist statt „(S. 52)" zu lesen: „(S. 43—52)".

S. 81 in der 6. Textzeile v. o. ist statt *„obscurior"* zu lesen: *„obscurius"*.

Historisch-literarische Abtheilung.

Die Platonische Zahl.

Von

CARL DEMME,

Oberlehrer am Realgymnasium in Dresden-Altstadt.

(Schluss.)

Ehe wir uns jedoch zu dem nun folgenden Satze des Platonischen Textes wenden, wollen wir erst festzustellen versuchen, was wir uns unter dem *θεῖον γεννητόν* zu denken haben. Schon im Alterthum war man nicht ganz einig darüber, ob *θεῖον γεννητόν* die Seele oder den Kosmos, oder Beides bedeute. So erklärt uns der Scholiast: [*θεῖον γεννητὸν οὐ τὸν ὅλον φησὶ κόσμον, εἰ καὶ προηγουμένως τοῦτον, οὔτε τὸν ἐν οὐρανῷ μόνον οὔτε τὸν ὑπὸ σελήνην, ἀλλὰ πᾶν τὸ ἀεικίνητον καὶ περιφερόμενον, εἴτ' ἐν οὐρανῷ εἴθ' ὑπὸ σελήνην, ὡς μὲν σωματικὸν γεννητὸν καλούμενον (οὐδὲν γὰρ σῶμα αὐθυπόστατον), ὡς δ' ἀεικίνητον, θεῖον· μιμεῖται γὰρ τὰ θειότατα τῶν ὄντων ἄγρυπνον ἔχοντα ζωήν· τὸν τέλειον δ' ἀριθμὸν οὐ μόνον χρὴ νοεῖν ἐπὶ δακτύλων τιθέντας (οὗτος γάρ ἐστιν ἀριθμητὸν μᾶλλον ἢ ἀριθμός, καὶ τελειούμενος καὶ οὐδέποτε τέλειος ἀεὶ γιγνόμενος), ἀλλὰ τὴν αἰτίαν τούτου νοερὰν μὲν οὖσαν, περιέχουσαν δὲ τὸν πεπερασμένον ὅρον τῆς τοῦ κόσμου πάσης περιόδου.*] „Mit dem göttlich Erzeugten meint er (Plato) nicht den ganzen Kosmos, wenn auch diesen vorzugsweise, weder den im Himmel allein, noch den unter dem Monde, sondern jedes immer in geschlossenen Bahnen Bewegliche, sei es im Himmel oder unter dem Monde, und zwar wird es, insofern es eine Form besitzt, erzeugt (denn keine Form entsteht von selbst), insofern es immer beweglich ist, göttlich genannt. Denn es ahmt von dem Bestehenden das Göttlichste nach, welches ein schlafloses Leben hat. Man muss aber bei der vollkommenen Zahl nicht nur an Die denken, welche dieselbe an den Fingern herzählen (denn diese ist mehr etwas Arithmetisches als eine Zahl, und vollkommen werdend und nicht etwa als immer vollkommen entstehend), sondern man muss sich dieselbe als Grundlage hiervon denken, die zwar geistig aufzufassen ist, aber den begrenzten Zahlenausdruck des ganzen Kreislaufs des Kosmos in sich schliesst.“

Plutarch hingegen meint in seinem *περὶ τῆς ἐν Τιμαίῳ ψυχογονίας* c. X: (*ἐν τῇ πολιτείᾳ περὶ τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν γάμον ἔνιοι καλοῦσιν, ὁ Σω-*

κράτης ἀρχόμενος λέγειν· Ἔστι δὲ, φησὶ, θείῳ μὲν γεννητῷ περίοδος, ἣν ἀριθμὸς περιλαμβάνει τέλειος· οὐκ ἄλλο καλῶν θεῖον γεννητὸν ἢ τὸν κόσμον.) „In dem Staate beginnt Sokrates die Stelle, an der er über die sogenannte Hochzeitszahl spricht, mit den Worten: Für das göttlich Erzeugte giebt es einen Kreislauf, welchen die vollkommene Zahl einschliesst, unter dem göttlich Erzeugten nichts Anderes, als den Kosmos verstehend."

Zu dieser Ansicht glaubte sich Plutarch deshalb genöthigt, weil im Phaedrus die Seele *ἀγέννητον*, im Timaeus *γιγνομένη* genannt werde, während der Kosmos stets *γεννητός*, aber niemals *ἀγέννητον* heisse. Nun sind zwar diese Thatsachen richtig, allein Plutarch hat bei seiner Begründung nicht berücksichtigt, dass der Ausdruck *θεῖον γεννητόν* von Plato den Musen in den Mund gelegt wird, dass derselbe also gewissermassen als ein dichterischer aufzufassen ist, während an der Phaedrusstelle Plato selbst einen Unsterblichkeitsbeweis der Seele zu liefern beabsichtigt, ohne irgendwelche dichterische Anschauungen zu Hilfe zu nehmen, denn derartige Anschauungen treten erst im weiteren Verlauf, in den Gleichnissen und den Darstellungen der Seele vor und nach dem Tode auf. Daraus, dass die Seele etwas Ungezeugtes sei (*ἀγέννητον*), wird gefolgert, dass sie auch etwas Unsterbliches (*ἀθάνατον*) sei. In dem in C. XIII des Timaeus dargestellten Mythus wird aber ausdrücklich angegeben, dass das Unsterbliche das Göttliche zu nennen sei, welches die Führung im Leben übernehme, und im folgenden Capitel wird die Darstellung der unsterblichen Seele und der für dieselbe geltenden Gesetze in Bezug auf den Eintritt in das menschliche Leben ausgeführt. Werden doch selbst die unsterblichen Götter *γενόμενοι* genannt und wird doch bei der Bildung der Menschen nur das *θεῖον* vom Höchsten der Götter gewährt, während das Sterbliche von niederen Gottheiten dazugefügt wird. *θεῖον γεννητόν* kann hier nach unserer Auffassung sehr wohl auf die Seele bezogen werden, zumal im Gegensatz zu dem *ἀνθρωπεῖον γεννητόν*, das dann den menschlichen Körper bedeuten würde.

Seele und Leib sind es also, deren Beziehungen zu einander mit dem Walten des Schicksals in Verbindung gebracht werden, Seele und Leib sind es, deren Beziehungen Plato hier in Zahlenausdrücken darzustellen sucht, wie sie sich auch in den Ausführungen über das Leben der Seele vor und nach dem Tode finden, die im Phaedrus und noch abgerundeter im zehnten Buche vom Staate enthalten sind.

Hier kann uns Plato freilich nicht mehr Reflexionen, gepaart mit Resultaten, die er mit Hilfe seiner scharfen Beobachtungsgabe gewonnen, bieten, hier fügt er nur mit ahnungsvollem Geiste alte und neue Sagen zu einem Ganzen zusammen, dem er den Gedanken der vollkommensten Ausgleichung der Schicksale der Menschen mit ihrem sittlichen Lebenswandel zu Grunde legt. Und dementsprechend trägt er dieses Alles in der Erzählung eines kühnen Helden namens Er, des Sohnes des Armenios, eines

Pamphyliers dem Geschlecht nach, vor, der einst im Kriege gefallen, aber am zwölften Tage nach seinem Tode, gerade als er begraben werden sollte, wieder in das Leben zurückgekehrt sei und nun berichtet habe, was er im Jenseits gesehen. (Platonis dialogi ex recogn. C. F. Herm., Bd. VI S. 310 flg.)

„Nachdem aber die Seele den Körper verlassen", berichtet derselbe, „sei er mit Vielen fortgezogen und sie seien an einen wunderbaren Ort gekommen, an dem sich in der Erde zwei aneinanderstossende Oeffnungen befänden und in gleicher Weise oben am Himmel andere diesen gegenüberstehende; zwischen diesen sässen Richter, welche, nachdem sie das Urtheil gesprochen, den Gerechten befehlen, den Weg nach rechts und durch den Himmel hindurch zu wandern, nachdem sie ihnen an ihrer Vorderseite Zeichen der Urtheilssprüche angeheftet, den Ungerechten aber, den Weg nach links und abwärts zu gehen, nachdem auch sie auf ihrer Rückseite Zeichen von Allem, was sie gethan, erhalten hatten. Als er aber hinzugetreten sei, hätten sie ihm gesagt, dass er bestimmt sei, den Menschen von dem, was dort sich ereigne, Nachricht zu bringen, und sie hätten ihm befohlen, Alles an diesem Orte zu hören und zu sehen. Hier sehe man nun durch die einen beiden Oeffnungen des Himmels und der Erde die Seelen sich entfernen, nachdem sie ihr Urtheil empfangen, an den beiden anderen Oeffnungen aber, und zwar aus der Erde Seelen voll Schmutz und Staub heraufsteigen, aus der des Himmels aber andere rein herabkommen, und die jedesmal Eintreffenden sähen aus, als ob sie von einer weiten Reise kämen. Und nachdem sie fröhlich nach einer Wiese gezogen, hätten sie sich, wie in einer Festversammlung, niedergelassen und Alle, die einander gekannt, hätten sich gegenseitig begrüsst und die aus der Erde Kommenden hätten von den Anderen das dort Erlebte erfahren und die aus dem Himmel Kommenden das bei Jenen Vorgekommene; und sie hätten einander erzählt, die Einen wehklagend und weinend, indem sie sich daran erinnerten, an Alles, was und wieviel sie erduldet und gesehen hätten auf ihrer Reise unter der Erde — diese Reise dauere aber tausend Jahre —, die Anderen aber wiederum, die aus dem Himmel kamen, hätten von ihrem Wohlleben erzählt und von dem grossartig herrlichen Anblick.

Sovieles wieder zu erzählen, o Glaukon, würde viel Zeit erfordern; dieses aber, sagte er, sei das Hauptsächlichste, dass Jegliche, soviel und gegen soviele sie sich vergangen, für Alles der Reihe nach büssten, für Jedes zehnfach; dies aber geschehe während eines jeden Jahrhunderts, soviel betrage nämlich die Dauer des menschlichen Lebens, damit sie eine zehnfache Strafe des Unrechts erlitten und damit, wenn Einige etwa den Tod Vieler verursacht, oder Städte oder Heere verrathen und in Knechtschaft gebracht, oder sonst eine Missethat begangen hatten, sie für jedes von allen diesen zehnfache Qualen zu ertragen hatten und andererseits, wenn sie irgendwelche Wohlthaten erzeigt und gerecht und fromm gewesen, in demselben Verhältniss ihren Lohn empfingen. Von Denen, welche eben geboren und nur kurze Zeit gelebt, erzählte er weiter nichts der Erwähnung Werthes. Von noch grösserer Vergeltung aber erzählte er für Verachtung und Verehrung den Göttern und Eltern gegenüber, sowie für mit eigener Hand begangenen Mord. Er erzählte nämlich, dass er zugegen gewesen sei, als Einer von einem Andern gefragt wurde, wo sich Ardiaeus der Grosse befinde. Dieser Ardiaeus war damals vor tausend Jahren Tyrann in einer Stadt Pamphyliens gewesen, hatte seinen greisen Vater und seinen älteren Bruder ermordet und vieles andere Gottlose vollführt, wie erzählt wurde. Er berichtete ferner, dass der Befragte gesagt habe: der kommt nicht und wird wohl auch fernerhin nicht kommen.

Denn unter dem Schrecklichen, was hier zu sehen, sahen wir auch dieses. Da wir im Begriff aufzusteigen nach Ueberwindung von allem Uebrigen in der Nähe des Erdschlundes waren, sahen wir plötzlich auch Jenen und Andere, und zwar unter ihnen beinahe die meisten Tyrannen, es waren aber auch einige mit schwerem Frevel behaftete Privatleute darunter. Diesen, welche glaubten schon aufsteigen zu können, erlaubte es der Erdschlund nicht, sondern er brüllte, so oft einer von Denen, die so gottlos sich zur Schlechtigkeit gewendet, oder von Denen, welche nicht hinreichend gebüsst hatten, aufzusteigen versuchte. Dort nun standen, wie er erzählte, wilde Männer, ganz feurig anzusehen, welche, als sie das Getöse vernahmen, die Einen unter sich vertheilten und abführten, den Ardiaeus und Andere aber an Händen, Füssen und Kopf knebelten, niederwarfen, durchbläuten und dann neben dem Wege aussen her an dornigen Gesträuchen zerfleischten und den immer Vorübergehenden zeigten, weshalb dies geschehe und wohin diese dem Tartarus Anheimgefallenen gebracht würden. Obwohl nun dort vieles und mannigfaches Grausige ihnen begegne, so überwiege doch dieses bei Jedem, dass das Getöse sich hören lassen möchte, wenn er hinaufstiege, und fröhlich steige Jeder empor, wenn es schweige. Und derartig seien einige von den Strafen und Martern und wiederum die diesen entgegengesetzten Belohnungen. Nachdem nun Jeder auf der Wiese sieben Tage zugebracht, hätten sie sich am achten erheben und weiter wandern müssen."

(Hier fügt Plato in dem Berichte des Pamphyliers seine Vorstellungen vom Weltgebäude ein, über welches ein unwandelbares, zwingendes Naturgesetz bestehe, welches namentlich in dem Bilde der über allen Himmeln thronenden Nothwendigkeit und ihrer Töchter, der die Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft verkündenden Moiren, der Lachesis, Klotho und Atropos hervortritt.)

„Nachdem sie angekommen, fährt hierauf der Pamphylier fort, hätten sie sofort zur Lachesis gehen müssen. Ein Götterdolmetsch habe sie zuerst in Reihen aufgestellt, dann aus der Lachesis Schoss Loose und der Lebensweisen Proben entnommen und dann, nachdem er einen hohen Stuhl bestiegen, gesagt: Der Nothwendigkeit Tochter, die jungfräuliche Lachesis, lässt euch verkünden: Kurzlebige Seelen, es beginnt ein anderer Kreislauf eines sterblichen, dem Tode geweihten Geschlechts. Nicht euch wird das Geschick ergreifen, sondern ihr werdet das Geschick wählen; wer aber zuerst zu wählen hat, der wähle sich zuerst eine Lebensweise, an die er nothwendig gebunden sein wird. Die Tugend ist aber etwas nicht der Herrschaft Unterworfenes; von ihr wird Jeder, je nachdem er sie hoch oder gering achtet, mehr oder weniger erhalten. Die Schuld trägt Der, welcher gewählt hat. Die Gottheit ist unschuldig. Nachdem er dieses gesagt, habe er vor Alle Loose hingeworfen, Jeder habe das bei ihm hingefallene aufgehoben, ihn jedoch ausgenommen, ihm habe er es nicht erlaubt; Der aber, welcher aufgenommen hatte, erfuhr, als wievielster er zu wählen hatte. Hierauf habe er wiederum Proben der Lebensweisen vor sie hingelegt, viel grösser an Zahl, als Anwesende da waren; es waren aber von allerlei Art vorhanden; denn es befanden sich da die Lebensweisen von allen Thieren, sowie alle menschlichen; es seien aber Gewaltherrschaften unter ihnen, theils ausdauernde, theils im Verlauf unterbrochene und in Armuth, Verbannung und gänzlichem Elend endigende; es seien auch die Lebensweisen von Männern dabei, die zu hohem Ansehen gelangen theils rücksichtlich ihrer Gestalt und Schönheit oder in Bezug auf irgend einen andern Vorzug oder Gegenstand des Wetteifers, theils durch ihre Geburt und die Tugenden ihrer Vorfahren, sowie auch von Männern, die in dieser Beziehung ohne Ruhm waren, in gleicher Weise aber auch von Frauen. Eine Rangordnung der Seele aber liege nicht darin, weil nothwendig die Seele, je nachdem sie diese oder jene Lebensweise gewählt, andersartig werden muss; die übrigen Lebensweisen aber seien durcheinander theils mit Reichthum und Armuth, theils mit Krankheit und Gesundheit vermischt gewesen, theils hatten sie auch in der Mitte gelegen.

Da besteht nun, wie es scheint, o lieber Glaukon, jegliche Gefahr für den Menschen, und deshalb muss man hauptsächlich dafür sorgen, dass jeder von uns, unbekümmert um die übrigen Kenntnisse, der Kenntniss nachstrebt und sich dieselbe zu eigen macht (wenn irgendwoher er im Stande sein sollte, zu lernen und zu suchen), wer ihn fähig und verständig machen wird, sowohl die nützliche, als auch die schlechte Lebensweise wohl zu unterscheiden und die bessere von den möglichen stets überall zu wählen und, indem er das jetzt Gesagte überlegt, miteinander vergleicht und untersucht, wie es sich zur Tugend der Lebensweise verhält, zu wissen, was Schönheit mit Armuth und Reichthum verknüpft nach sich zieht und mit welcher Haltung der Seele verbunden sie Schlechtes oder Gutes bewirkt, und was hohe und niedere Herkunft und Privatleben und Herrschergewalt und körperliche Vorzüge und Mängel und grosses und geringes Fassungsvermögen und alles Derartige von dem von Natur mit der Seele Vorhandenen und dazu Erworbenen miteinander verbunden, bewirken, so dass es möglich ist, mit Ueberlegung von allem diesen zu wählen, indem man auf die Beschaffenheit der Seele Rücksicht nimmt und auf die schlechtere und bessere Lebensweise, indem man die schlechtere die nennt, welche die Seele dahin bringt, ungerechter zu werden, die bessere aber die, welche sie dahin bringt, gerechter zu werden und die Freude an allem Andern fahren zu lassen. Denn wir haben gesehen, dass für den Lebenden und Sterbenden diese Wahl die beste ist.

Diese Ansicht festhaltend muss er zum Hades wandern, damit er auch dort ungerührt von Reichthümern und derartigen Uebeln nicht auf Gewaltherrschaften und derartige Unternehmungen verfallend vieles und heilloses Uebel bewirken wird, selbst aber noch grösseres erduldet, sondern lernt, immer die mittlere Lebensweise von diesen zu wählen und das nach beiden Seiten das Maass Ueberschreitende nach Möglichkeit sowohl in diesem Leben, als auch in dem ganzen späteren zu meiden, denn so wird der Mensch am glücklichsten.

Und auch damals habe, so verkündete der von dort Nachricht Bringende, der Götterdolmetsch so gesprochen: Auch Dem, der zuletzt herantritt, steht, wenn er mit Ueberlegung gewählt hat und dementsprechend lebt, ein zufriedenstellendes nicht schlechtes Lebensloos bevor, es verfahre weder Der, welcher anfängt, sorglos, noch der Letzte muthlos. Nachdem er dies gesagt, habe der erste zur Wahl Bestimmte sogleich beim Hinzutreten die grösste Gewaltherrschaft gewählt, und zwar habe er gewählt, ohne aus Unverstand und Genusssucht alles Andere genügend geprüft zu haben; es sei ihm aber die Sünde, die in ihr liege, entgangen und das Verschlingen der eigenen Kinder und anderes Unheil. Nachher habe er aber die Wahl aufmerksam betrachtet, sich geschlagen und geklagt, dass er nicht auf das gehört habe, was vom Dolmetscher vorausgesagt worden, denn nicht sich selbst messe er die Schuld an dem Unglück bei, sondern dem Geschick und den Dämonen und Allem mehr als sich selbst. Es war aber einer von Denen, die vom Himmel gekommen waren, der in seinem früheren Leben in einem geordneten Staate gelebt hatte, in welchem er durch Gewohnheit ohne Weisheitsstreben der Tugend theilhaftig geworden war.

Es waren unter den Derartigen Die, welche vom Himmel gekommen, so zu sagen in nicht geringer Anzahl enttäuscht, da sie nicht geübt waren, durch Anstrengung Etwas zu erlangen; von Denen, die aus der Erde kommen, träfen die meisten, da sie sowohl selbst Mühsale ertragen, als auch Andere haben ertragen sehen, nicht im ersten Anlauf die Wahl. Deshalb und durch des Looses Geschick entstehe bei sehr vielen Seelen ein Wechsel zwischen Glück und Unglück."

Im weiteren Bericht des Pamphyliers werden noch die Wahlen der Lebensloose einiger bekannter Personen aus der griechischen Sage erwähnt, woran sich dann die Beschreibung, wie die Seelen zum Flusse Sorgenfreiheit geführt und durch das Trinken seines Wassers alles vergessen, sowie die Darstellung über die Versetzung der Seelen durch die Zeugung in ihre Erdenlaufbahn anschliesst.

Zwei Stellen in diesem Mythus möchten wir noch einmal ganz besonders hervorheben. Die eine befindet sich in der Anrede des Götterdolmetsch an die nach Vollendung ihrer tausendjährigen Reise unter der Erde bezw. durch den Himmel zu einem neuen Erdenleben bestimmten Seelen: ψυχαὶ ἐφήμεροι, ἀρχὴ ἄλλης περιόδου θνητοῦ γένους θανατηφόρου etc. Es beginnt ein neuer Kreislauf eines sterblichen dem Tode geweihten Geschlechts, wobei er unter dem Kreislauf eines sterblichen Geschlechts offenbar die Dauer eines Erdenlebens meint.

Als zweite Stelle nennen wir die, an der der Pamphylier erwähnt, dass alle Seelen für das Unrecht, soviel sie dessen und gegen soviele sie es begangen, für alles der Reihe nach gebüsst haben, für jegliches in zehnfachem Maasse, τοῦτο δ' εἶναι κατὰ ἑκατονταετηρίδα ἑκάστην, ὡς βίου ὄντος τοσούτου τοῦ ἀνθρωπίνου, „dieses aber geschehe während eines jeden Jahrhunderts, soviel betrage nämlich die Dauer eines Menschenlebens," worin wir eine weitere Bestätigung unserer Deutung zu finden glauben, dass der Kreislauf für das menschlich Erzeugte von der Zahl 100 eingeschlossen werde.

Aber nicht nur die Zahl für das menschlich Erzeugte, auch die Zahl, die nach unserer Auffassung als die vollkommene zu gelten hat, wird hier erwähnt in dem zehnfachen Maasse, nach dem die ungerechten Seelen zu büssen hätten, die gerechten aber belohnt würden, so dass die Seelen nach Vollendung einer Erdenlaufbahn, für welche die Zahl 100 massgebend sei, die zehnfache Zahl von dieser als Zeitdauer gerechnet im Himmel und unter der Erde zuzubringen hätten, ehe sie sich wieder ein neues Lebensloos wählen könnten.

Welches Lebensloos aber die Seele, die durch Zeugung in ihre Erdenlaufbahn versetzt wird, sich gewählt hat, kann natürlich der Wähler trotz aller Weisheit nicht berechnen und Plato führt ja selbst im Mythus ein Beispiel an, dass eine in ihrem früheren Erdenleben in einem geordneten Staatsleben mehr durch Gewohnheit, als durch Weisheitsstreben der Tugend theilhaftig gewordene Seele, die ihre tausendjährige Reise durch den Himmel vollendet hatte, aus Unverstand und Genusssucht sich eine Tyrannis erwählt habe, ohne das zu beachten, was nothwendig mit derselben verbunden war. Wird nun eine solche Seele durch Zeugung in ihre Erdenlaufbahn versetzt, so hat natürlich die Vermählung zur Unzeit stattgefunden, da sie ja der Hoffnung, welche man auf die Vermählung gesetzt, nämlich gute Kinder zu erzeugen, nicht entsprochen. Freilich würde, wenn der ebenerwähnte besondere Fall eintreten würde, aus der Aristokratie nicht erst die Timokratie, sondern gleich die Tyrannis entstehen, und ebenso gut könnte unter anderen Umständen auch jede andere Staatsform ohne Uebergangsformen auftreten.

Ein Wechsel der Staatsform ist aber anzunehmen, da nach Plato's Ansicht die aus dem Himmel kommenden Seelen ihre Lebensloose sehr oft leichtsinnig wählen, wogegen diejenigen, welche während ihrer tausendjährigen Reise unter der Erde verweilten, durch Mühsale aller Art gewitzigt, in der Regel nicht im ersten Ansturm zu wählen pflegen, so dass bei vielen Seelen ein Wechsel zwischen Glück und Unglück stattfände und damit möglicherweise auch ein Wechsel der Regierungsform in den Staaten, in welche diese Seelen durch Zeugung zur Vollendung ihrer Erdenlaufbahn versetzt werden.

Allerdings bleiben in dieser Darstellung noch eine ganze Anzahl offener Fragen übrig, deren Beantwortung Plato unterlassen hat, was wiederum den Aristoteles veranlasste, an der bekannten Stelle im fünften Buche der Politika (Cap. X) die Platonische Darstellung einer abfälligen Kritik zu unterziehen, indem er sagt: [*ἐν δὲ τῇ πολιτείᾳ λέγεται μὲν περὶ τῶν μεταβολῶν ὑπὸ τοῦ Σωκράτους, οὐ μέντοι λέγεται καλῶς. — τῆς τε γὰρ ἀρίστης πολιτείας καὶ πρώτης οὔσης οὐ λέγει τὴν μεταβολὴν ἰδίως. φησὶ γὰρ αἴτιον εἶναι τὸ μὴ μένειν μηδὲν ἀλλ᾽ ἔν τινι περιόδῳ μεταβάλλειν, ἀρχὴν δ᾽εἶναι τούτων ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχεται, λέγων ὅταν ὁ τοῦ διαγράμματος ἀριθμὸς τούτου στερεὸς γένηται, ὡς τῆς φύσεώς ποτε φυούσης φαύλους καὶ κρείττους τῆς παιδείας, τοῦτο μὲν οὖν αὐτὸ λέγων ἴσως οὐ κακῶς (ἐνδέχεται γὰρ εἶναί τινας οὓς παιδευθῆναι καὶ γενέσθαι σπουδαίους ἄνδρας ἀδύνατον), ἀλλ᾽ αὕτη τι ἂν ἴδιος εἴη μεταβολὴ τῆς ὑπ᾽ ἐκείνου λεγομένης ἀρίστης πολιτείας μᾶλλον ἢ τῶν ἄλλων πασῶν καὶ τῶν γιγνομένων πάντων; καὶ διά γε τοῦ χρόνου, δι᾽ ὃν λέγει πάντα μεταβάλλειν, καὶ τὰ μὴ ἅμα ἀρξάμενα γίνεσθαι ἅμα μεταβάλλει, οἷον εἰ τῇ προτέρᾳ ἡμέρᾳ ἐγένετο τῆς τροπῆς, ἅμα ἄρα μεταβάλλει; πρὸς δὲ τούτοις διὰ τίν᾽ αἰτίαν ἐκ ταύτης εἰς τὴν Λακωνικὴν μεταβάλλει; πλεονάκις γὰρ εἰς τὴν ἐναντίαν μεταβάλλουσι πᾶσαι αἱ πολιτεῖαι ἢ τὴν σύνεγγυς. — ὁ δ᾽ αὐτὸς λόγος καὶ περὶ τῶν ἄλλων μεταβολῶν. ἐκ γὰρ τῆς Λακωνικῆς, φησί, μεταβάλλει εἰς τὴν ὀλιγαρχίαν, ἐκ δὲ ταύτης εἰς δημοκρατίαν, εἰς τυραννίδα δὲ ἐκ δημοκρατίας. καίτοι καὶ ἀνάπαλιν μεταβάλλουσιν, οἷον ἐκ δήμου εἰς ὀλιγαρχίαν, καὶ μᾶλλον ἢ εἰς μοναρχίαν. ἔτι δὲ τυραννίδος οὐ λέγει οὔτ᾽ εἰ ἔσται μεταβολὴ οὔτ᾽ εἰ μὴ ἔσται διὰ τίν᾽ αἰτίαν καὶ εἰς ποίαν πολιτείαν. τούτου δ᾽αἴτιον ὅτι οὐ ῥᾳδίως ἂν εἶχε λέγειν· ἀόριστον γάρ, ἐπεὶ κατ᾽ ἐκεῖνον δεῖ εἰς τὴν πρώτην καὶ τὴν ἀρίστην· οὕτως γὰρ ἂν ἐγίνετο συνεχὲς καὶ κύκλος. ἀλλὰ μεταβάλλει καὶ εἰς τυραννίδα τυραννίς, ὥσπερ ἡ … καὶ εἰς ὀλιγαρχίαν, ὥσπερ ἡ … καὶ εἰς δημοκρατίαν, ὥσπερ ἡ … καὶ εἰς ἀριστοκρατίαν, ὥσπερ ἡ … καὶ εἰς τυραννίδα μεταβάλλει ἐξ ὀλιγαρχίας, ὥσπερ …*] „In dem „Staate“ wird von Sokrates über die Veränderungen der Staatsformen, jedoch in einer nicht zutreffenden Weise gesprochen. Denn die Aenderung der besten Staatsform, die zugleich die erste ist, giebt er nicht besonders an. Er sagt nämlich, die Ursache der Aenderung sei die, weil Nichts immer bestehe, sondern Alles sich in einem gewissen Kreislauf ändere; es beginne aber mit dem, worauf die unter Anwendung von möglichst kleinen Zahlen im Verhältniss 4:3 stehenden Grössen zu beziehen sind, die, durch die Fünfheit verbunden, zwei Harmonien gewähren u. s. w., indem er hinzufügt, wenn die Zahl dieses Diagramms eine körperliche geworden ist, sobald etwa die Natur untaugliche und durch die Erziehung nicht zu bändigende Kinder hervorbringt. Dieses gerade hebt er in gleicher Weise nicht unzutreffend hervor; denn es kommt vor, dass einige vorhanden sind, die unmöglich tüchtige Männer werden, aber warum war diese Aenderung der von Jenem sogenannten besten Staatsform dieser in höherem Grade eigenthümlich, als allem Andern und allem Entstehenden?

Und was den Zeitraum betrifft, nach dem sich Alles ändere, ändert sich auch das, was nicht zugleich seinen Anfang genommen, zu gleicher Zeit? Wenn z. B. Etwas am Tage vorher sich einer Aenderung unterzog, ändert sich das nun auch zugleich mit? Ferner weshalb findet eine Aenderung dieser (besten Staatsform) in die lakonische statt? Denn öfter ändern sich doch alle Staatsformen in die entgegengesetzte, als in die zunächst stehende. Ebendasselbe gilt auch über die anderen Veränderungen: aus der lakonischen ändert sich die Staatsform in die Oligarchie, aus dieser in die Demokratie, aus dieser aber in die Tyrannis. Und es kommt doch gerade im Gegentheil eine Aenderung z. B. aus der Demokratie in die Oligarchie öfter vor, als in die Alleinherrschaft. Ferner bei der Tyrannis giebt er nicht an, weder, wenn eine Aenderung eintreten wird, in welche Staatsform, noch, wenn keine Aenderung stattfinden wird, den Grund hiervon. Es geschieht dies aber deshalb nicht, weil es ihm bedenklich schien, Etwas hierüber zu sagen, denn es ist unbestimmt. Nach Jenes Meinung nämlich müsste die Aenderung in die erste und beste Staatsform stattfinden, denn so entstünde etwas Stetiges und ein Kreis. Aber es geht auch eine Tyrannis in eine andere über, wie zu Sikyon die Tyrannis vom Myron auf den Kleisthenes überging, und in eine Oligarchie, wie in Chalkis die des Antileon, und in eine Demokratie, wie in Syrakus die des Gelon, und in eine Aristokratie, wie die des Charilaos in Lacedaemon und die in Karthago. Auch geht die Staatsform aus einer Oligarchie in eine Tyrannis über: so gingen in Sicilien beinahe die meisten alten Oligarchien, z. B. die bei den Leontinern in die Tyrannis des Panaetius, die in Gela in die Tyrannis des Kleander und die in Rhegium in die Tyrannis des Anaxilaus über. Ebenso fand auch in vielen anderen Staaten ein gleicher Uebergang statt."

Wir können hier die weiteren Ausstellungen des Aristoteles, da sich dieselben nicht direct auf unsere Zahl beziehen, übergehen. Ehe wir jedoch die Einwände einzeln vornehmen, wollen wir unsere Auffassung der Worte „*ἀρχὴν δ' εἶναι τούτων ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχεται, λέγων ὅταν ὁ τοῦ διαγράμματος ἀριθμὸς τούτου στερεὸς γένηται*" noch etwas bestimmter darlegen, als dies in der Uebersetzung geschehen konnte.

In der schon oben erwähnten Stelle aus Jamblichi De vita Pythagorae C. XXVII wird am Schlusse hervorgehoben „*σφετερίσασθαι δὲ τὴν δόξαν Πλάτωνα λέγοντα φανέρως ἐν τῇ πολιτείᾳ τὸν ἐπίτριτον ἐκεῖνον πυθμένα τὸν τῇ πεμπάδι συζευγνύμενον καὶ τὰς δύο παρεχόμενον ἁρμονίας*". Nun gewährt aber nicht ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγείς zwei Harmonien, sondern hierzu gehört noch τρὶς αὐξηθείς. Es muss also nothwendiger Weise in jenen Worten ein Hinweis auf die ganze Stelle enthalten sein, so dass wir uns hinter den angegebenen Worten ein u. s. w. zu denken haben. Ganz ähnlich verhält es sich hier bei Aristoteles: die Aenderung beginne mit dem dem menschlich Erzeugten Zukommenden, indem er hinzufügt, wenn aus der dem menschlich Erzeugten zukommenden Zahl eine Körperzahl abgeleitet werde. Offenbar kann aber hier nur an die aus der dem menschlich Erzeugten zukommenden Quadratzahl 100 abgeleitete Kubikzahl 1000 gedacht sein, so dass also die Aenderung beginne, wenn nach der tausendjährigen Wanderung durch den Himmel bezw. unter der Erde die Seelen von Neuem durch die Zeugung in ihre Erdenlaufbahn versetzt würden, sobald nämlich diese Seelen ein dahin bezügliches schlechtes Lebensloos gewählt hätten.

Diese Idee an sich sei gar nicht so übel, meint Aristoteles ferner, aber dies wäre denn doch der eigentliche Grund für alle Aenderungen der Staatsform, warum nimmt ihn Sokrates nur für die Aenderung der besten in Anspruch? Sodann bemängelt Aristoteles die Zeitangabe: Die Menschen werden doch nicht nur zu ganz bestimmten Zeiten geboren, wessen Eintritt in das Menschenleben ist nun für die Aenderung massgebend? Und was diese selbst betreffe, so sei die Angabe der Platonischen Uebergangsformen den Ergebnissen der Geschichtsforschung gegenüber hinfällig; denn abgesehen davon, dass auch in Bezug auf die Aenderungen der Staatsform sehr oft die Gegensätze einander berührten, beweise die Geschichte, dass die Staatsformen sich in bunter Reihe änderten und ineinander übergingen, eine Angabe, die Aristoteles dann mit Einzelbeispielen belegt. Bei diesem letzten Einwurf möchten wir daran erinnern, dass wir durch ein von Plato selbst angeführtes Beispiel bei der Wahl des Lebenslooses zu ganz denselben Folgerungen gekommen waren.

Die Worte des Aristoteles, dass Plato hinzugefügt, „wenn die Zahl dieses Diagramms eine Körperzahl geworden“, deuteten wir in dem Sinne, dass hiermit eine Cubikzahl (1000) gemeint sei als Zeitangabe für den Anfang der Aenderung im Staatsleben. Soll nun im Platonischen Text die Bildung dieser Cubikzahl erwähnt sein, so kann diese nur in dem noch zu erklärenden Satze „ξύμπας δὲ οὗτος ἀριθμὸς γεωμετρικὸς τοιούτου κύριος ἀμεινόνων τε καὶ χειρόνων γενέσεων, ἃς ὅταν ἀγνοήσαντες ὑμῖν οἱ φύλακες συνοικίζωσι νύμφας νυμφίοις παρὰ καιρόν, οὐκ εὐφυεῖς οὐδ' εὐτυχεῖς παῖδες ἔσονται“ enthalten sein.

Gerade bei der Erklärung dieses Satzes scheinen die Neuplatoniker gestrauchelt zu sein, wenigstens passt das, was sie über die Bedeutung der ganzen Stelle mittheilen, sehr wenig zu der eben angegebenen Aristotelischen Kritik. Ihre Erklärung klammert sich vielmehr an das von ihnen wahrscheinlich ganz falsch aufgefasste γεωμετρικός an.

Nach Mittheilungen altgriechischer Schriftsteller nannte man diese Plato-Stelle (*γαμός*) Hochzeit oder man sprach auch von einer Hochzeitszahl, die hier vorkomme, während Proklus diese Zahl als sogenannte geometrische anführt. Nach seiner Ansicht ist es offenbar Sache der ganzen Mathematik, das Verständniss dieser sogenannten geometrischen Zahl zu vermitteln und nicht nur eines Theiles derselben, etwa der Arithmetik oder Geometrie, denn durch die ganze Mathematik ziehen sich die Maasse des Gedeihens und Missrathens hindurch. (Procli diad. in prim. Euclid. elem. libr. comm. ex recogn. Friedlein Prol. I, p. 23: *ὅτι γὰρ τῆς ὅλης ἐστι μαθηματικῆς ἐπιστήμην παραδοῦναι τοῦ λεγουμένου τούτου γεωμετρικοῦ ἀριθμοῦ καὶ οὐ μιᾶς τινὸς οἷον ἀριθμητικῆς ἢ γεωμετρίας παντί που δῆλον· διὰ πάντων γὰρ τῶν μαθημάτων οἱ λόγοι τῆς τε εὐγονίας καὶ τῆς ἀγονίας διήκουσι.*) Nach Jamblichus meinte der „göttlichste“ Plato, dass die Herrscher und Herrscherinnen, sei es infolge davon, dass sie in der Mathematik nicht unterrichtet sind, oder wenn sie darin unterrichtet, infolge der Vernachlässigung derselben es überlassen, die Ehen durcheinander zu schliessen, so dass die hieraus hervorgehenden ungeeigneten Sprösslinge den Anfang des Zwiespalts und des Rückgangs im ganzen Staate herbeiführen werden.

Es scheint uns diese Deutung auch sehr wenig zu der Angabe des Plato zu passen, nach der die Wächter bei aller Weisheit nicht im Stande sein werden, die Erzeugung guter Kinder und Unfruchtbarkeit herbeizuführen, sondern dass dieses über ihre Kräfte gehe. Höchst wahrscheinlich wurde Jamblichus zu seiner Auffassung durch ein Missverständniss veranlasst, dem wohl auch neuere Erklärer bei der Uebertragung des Satzes „*ξύμπας δὲ* etc.“ erlegen sind. Löst man hier *ἀγνοήσαντες* in einen Bedingungssatz auf, so kann man allerdings unter Umständen auf die Deutung des Jamblichus kommen, wobei man sich freilich, wie eben hervorgehoben wurde, in einen Widerspruch mit Platos eigenen Angaben setzen würde.

Dieser Widerspruch lässt sich dadurch beseitigen, dass man *ἀγνοήσαντες* in einen Causalsatz auflöst: wenn die Wächter, da sie die besseren und schlechteren Geburten nicht kennen, die Jungfrauen den Jünglingen zur Unzeit vermählen, so werden die Kinder weder von der Natur, noch vom Glück begünstigt sein.

Ob also der Zeitpunkt der Vermählung ein günstiger oder ungünstiger gewesen ist, zeigt sich erst an den Kindern; der Wächter kann bei aller Weisheit und Ueberlegung nur die im fünften Buche vom Staate angegebenen Vorschriften beachten, nach denen jedesmal die Besten in ihrer Blüthezeit vermählt werden sollten. Damit hat er Alles gethan, was er nach menschlichem Ermessen thun konnte. Das Weitere muss er der Zukunft anheimstellen und abwarten, was das Schicksal bringen wird, mit dessen Walten die Zahl 1000 in gewissen Beziehungen verknüpft sei.

Die Zahl 1000 ist es also, die auf die besseren und schlechteren Geburten einen Einfluss besitzt und von Plato mit den Worten „*ξύμπας δὲ* οὗτος ἀριθμὸς γεωμετρικὸς τοιούτου" bezeichnet wird. Diese Zahl soll durch ein Zusammenfassen der vollkommenen Zahl und der Zahl für das menschlich Erzeugte gebildet werden und zwar als γεωμετρικὸς τοιούτου. γεωμετρικός kann hier, wenn es überhaupt einen Sinn haben soll, nur auf eine geometrische Analogie zu beziehen sein, denn in dem oben angeführten Sinne des Proklus stünde es zum Mindesten überflüssig, da sich etwas Derartiges für eine arithmetische Betrachtung zu Plato's Zeiten von selbst verstand.

In einer geometrischen Analogie stehen aber die Zahlen 1000, 100 und 10, und zwar im zehnfachen Verhältniss, wie etwa Theon sagen würde. (Man vergl. hierzu Theon Smyrnaeus ed. Hiller, p. 106: τῶν δὲ κυρίως λεγομένων ἀναλογίων, τουτέστι τῶν γεωμετρικῶν, αἳ μέν εἰσιν ἐν ῥητοῖς ὅροις τε καὶ λόγοις, ὡς ιβ' ϛ' γ', εἰσὶ γὰρ ἐν λόγοις διπλασίοις ...)

Die Zahl 10 liegt dem Kreislauf der Seele zu Grunde, die Zahl 100 dem des Leibes, aber zusammen hat diese Zahl, die nach der geometrischen Analogie aus einer derartigen gebildet ist, einen Einfluss auf die besseren und schlechteren Geburten, und wenn euch die Wächter bei ihrer Unkenntniss derselben die Jünglinge den Jungfrauen zur Unzeit vermählen, so werden weder von der Natur, noch vom Glücke begünstigte Kinder entstehen.

Und insofern ist auch die Zahl 1000 massgebend für die Dauer der Staatsform (sobald nämlich Seelen mit darauf bezüglichen unglücklichen Lebensloosen bei der durch die Wächter herbeigeführten Vermählung durch Zeugung in die Erdenlaufbahn versetzt werden), allerdings auf Grund eines Mythus, wie man ihn nur den Musen nacherzählen darf, weshalb sich Plato an dieselben wendet, wie vor ihm schon Homer, der auch von seinen Helden aus der Unterwelt berichten lässt.

Von diesem Gesichtspunkte aus finden wir auch den tragischen Ton ganz in der Ordnung, den Plato hier in einem Mythus anschlägt, von dem offenbar dasselbe gilt, was Plato den Sokrates bei dem ganz ähnlichen Mythus im Phaedon aussprechen lässt:

„Steif und fest zu behaupten, dass es sich so verhalte, wie ich es geschildert habe, geziemt sich nicht für einen verständigen Menschen; dass es aber entweder so oder irgend derartig um unsere Seelen und ihre Aufenthaltsorte bestellt ist, da sich unsere Seele als etwas Unsterbliches ergiebt, dieser Glaube scheint mir angemessen zu sein und werth, dass man ihn wage."

Recensionen.

Handbuch der statischen Elektricität von Mascart. Uebersetzt von Wallentin. I. Bd. 921 S. Wien, Pichler's Wittwe & Sohn. 1883—85.

Von dem schon früher kurz angezeigten Werke ist nun der erste Band vollständig. Mascart hat sich die Aufgabe gesetzt, die elektrische Spannung, wie sie Volta in die Wissenschaft eingeführt hat, oder die Potentialdifferenz, wie die Mathematiker sagen, zu behandeln und alle Umstände zu besprechen, welche Spannungs- oder Potentialdifferenzen zwischen zwei Körpern veranlassen. Das Werk enthält darnach ungefähr das, was die Reibungselektricität von Ries seinerzeit behandelt hat, natürlich vom heutigen Standpunkte aus weiter geführt. Der Uebersetzer hat dem Werke verschiedene Zusätze beigefügt, insbesondere über das Potential (z. B. in den Nummern 233—255). Diese Einschiebung meist rein mathematischer Sätze ohne Rücksicht auf Experiment scheint uns kein Vortheil gegenüber dem Original zu sein und die Einheitlichkeit des Werkes zu stören oder eine Erweiterung des Titels nöthig zu machen. Ausserdem hat die Uebersetzung die Theorie der Dielektricität aufgenommen (8. Capitel). Das 9. Capitel bespricht die Instrumente zur Beobachtung und Messung, das 10. Versuche über Influenz und Condensation.

Der Gedanke dieser Anordnung scheint zu sein, dass der Anfang des Werkes eigentlich geschichtliche Einleitung sein soll, der die heutige Theorie und ihre Anwendung auf die früheren Arbeiten folgt. Es wird aber dem Leser schwer gemacht, sich zu orientiren; es zeigt sich dies besonders an dem so häufigen Ausdruck: „wie wir später noch sehen werden“, ohne dass eine Andeutung über das „Wo“ gegeben wird.

Der zweite Band wird uns jedenfalls noch weiteren Aufschluss über den Plan des Ganzen geben; was schon jetzt feststeht, ist, dass in dem Werke eine vollständige Sammlung von Allem gegeben ist, was sich auf statische Elektricität und elektrisches Potential bezieht, so ausführlich und klar behandelt, dass man nicht genöthigt wird, noch auf das Studium der Quellen zurückzugehen, obgleich dieselben überall angegeben sind. Zum Schlusse können wir den Wunsch nicht unterdrücken, am Schlusse des ganzen Werkes ein ausführliches Register zu erhalten.

P. Zech.

Wüllner, **Lehrbuch der Experimentalphysik.** III. Band: Wärme. 825 S. Leipzig, B. G. Teubner. 1885.

Der Inhalt des vorliegenden Bandes und die Anordnung desselben ist derselbe wie in der letzten Auflage, unter Hinzufügung der neuesten Arbeiten auf dem Gebiete der Wärme. Bei der Thermometrie ist neu die Betrachtung der Zustandsgleichung der Gase nach Waals, welche den Beobachtungen von Andrews nicht genügt und daher durch die Modification jener Gleichung durch Clausius ersetzt wird. Bei der Strahlung der Wärme sind die neueren Versuche von Langley über das Wärmespectrum hinzugekommen, bei der Leitung die Versuche von Kundt, Warburg und Winckelmann über Wärmeleitung der Gase. Das Capitel über mechanische Theorie der Wärme ist unverändert geblieben. Bei der specifischen Wärme sind die neueren Bestimmungen beim Wasser erwähnt, die immer noch kein definitives Resultat geben. Im 5. Capitel wird die Aenderung des Aggregatzustandes betrachtet, neu hinzugekommen ist die Behandlung der kritischen Temperatur und die Anführung der Arbeiten von Wroblewsky über Condensation der früher sogenannten permanenten Gase.

Nach dem Ausspruch des Verfassers — schon im Vorwort zur zweiten Auflage — hat derselbe versucht, die ganze Lehre von der Wärme auf Grundlage der mechanischen Auffassung der Wärme durchzuführen. Die Anordnung des Stoffes: Ausdehnung, Aenderung des Aggregatzustandes, specifische Wärme, Leitung und Strahlung, ist im Wesentlichen nicht verschieden von der in anderen Lehrbüchern vorkommenden, nur dass Leitung und Strahlung gleich nach der Ausdehnung gesetzt ist, um den Schluss ziehen zu können, dass das Wesen der Wärme in einer Molecularbewegung bestehe. Es wäre wohl an der Zeit, die Lehre von der Wärme in besserer Anordnung zu geben, wobei sich die Sätze über Dämpfe, kritische Temperatur, kritischen Druck und Anderes ganz naturgemäss ergeben und dem Studirenden viel klarer werden. Zu diesem Zwecke hat man nur von der Ritter'schen Zustandsfläche auszugehen und die Aufgabe der Wärmelehre als Bestimmung dieser Fläche zu fassen. Man würde dann zunächst bei constanter Pressung die Zustandscurve betrachten, Ausdehnung des starren Körpers, Schmelzung, Ausdehnung des flüssigen, Verdampfung und Ausdehnung des Dampfes bis zum Gaszustand, oder auch umgekehrt. Dann würde man die Aenderung dieser Zustandscurve bei anderer Pressung behandeln. Dabei ergiebt sich ganz von selbst die Einreihung der einzelnen Beobachtungen. Strahlung und Leitung gehören dann in das allgemeine Capitel der Schwingungen, das der Lehre vom Ton, von der Wärme und vom Lichte, mit der Zeit vielleicht auch von der Elektricität gleichmässig dient.

Die Ausstattung des Werkes lässt nichts zu wünschen übrig; bei der Ausdehnung, die es jetzt erhalten, und bei der Ausführlichkeit der Mittheilung besonders neuerer Arbeiten wäre es künftighin wohl passender, den Titel „Lehrbuch" in „Handbuch" umzuändern.

P. Zech.

Traité de la lumière, avec un discours sur la cause de la pesanteur par HUYGHENS, neu herausgegeben von W. BURKHARDT. Leipzig, Gressner & Schramm. 132 S.

Das berühmte Werk von Huyghens, worin er die doppelte Brechung des Lichts im Kalkspath ableitet, ist im Buchhandel kaum mehr zu haben. Es ist ein Verdienst des Herausgebers, einen Neudruck veranstaltet zu haben. Angehängt ist die Abhandlung über die Ursache der Schwerkraft, die von weniger Bedeutung ist, aber bei allen früheren Ausgaben der Abhandlung über die Doppelbrechung beigefügt war.

P. ZECH.

LEITZMANN, **Wärmevertheilung auf einem Meridiankreis, auf thermoelektrischem Wege ermittelt.** Dissertation. Magdeburg 1885, Hänel. 31 S.

Es werden die Gleichungen von Franz Neumann über Wärmevertheilung im Innern und an der Oberfläche eines Körpers auf die Temperaturvertheilung in einer kreisförmigen Platte und in einem Kreisring mit Speichen angewendet; am Schlusse werden Temperaturbestimmungen, welche auf thermoelektrischem Wege gemacht worden sind, daraufhin untersucht, wie weit sie den gemachten Voraussetzungen entsprechen.

P. ZECH.

VERDET, **Wellentheorie des Lichts.** Deutsche Bearbeitung von EXNER. Zweiter Band. Braunschweig, Vieweg. 1885. 192 S.

Auch dieser Band theilt sich in zwei Abtheilungen. Die erste giebt die Dispersion und beginnt mit der Theorie von Cauchy. Die anomale Dispersion von Körpern mit Oberflächenfarben zeigt, dass hier bestimmte Lichtstrahlen sich wie bei durchsichtigen Mitteln, andere wie bei Metallen verhalten, dass die Absorption ihre Ursache ist, und sie führte zu der neueren Dispersionstheorie, welche in der Art gegeben wird, wie Helmholtz die Theorie von Sellmeier ausgebildet hat. Dann folgt die sogenannte chromatische Polarisation, die circuläre und elliptische Polarisation, das natürliche und partiell polarisirte Licht. Für convergentes Licht erhält man die Farbenringe, deren Theorie nebst der Bibliographie den Schluss der Abtheilung bildet.

In der zweiten Abtheilung wird die Rotationspolarisation und die accidentelle Doppelbrechung behandelt. Nach Anführung der durch das Experiment gefundenen Werthe für den Quarz folgt die Theorie von Fresnel und Airy. Es folgen dann die Rotationspolarisation in Flüssigkeiten, die Beschreibung der Apparate zu ihrer Messung und die Glimmercombinationen von Reusch. Es folgen die Differentialgleichungen der Rotation und die sehr vollständig gehaltene Bibliographie.

Bei der accidentellen Doppelbrechung werden die bei Zug und Druck, durch rasche Abkühlung und durch Schwingungen hervorgebrachten Polarisationserscheinungen erörtert und theoretische Andeutungen hinzugefügt.

Das Ganze ist sehr knapp in der Ausführung gehalten; es ist, könnte man sagen, nur ein historischer Abriss, ein Wegweiser für die folgende Bibliographie. Die Vollständigkeit dieser ist ein grosser Vorzug des Werkes.

P. Zech.

Ueber eine in der Wärmeleitungstheorie auftretende, nach den Wurzeln einer transcendenten Gleichung fortschreitende unendliche Reihe. Fudzisawa aus Japan. Dissertation. Strassburg, Schultz & Comp. 24 S.

Fourier behandelt die Aufgabe: Die Temperatur im Innern einer festen homogenen Kugel hängt zur Zeit $t=0$ nur vom Abstand r vom Mittelpunkt ab und ist gegeben. Gesucht ist die Temperatur u zur spätern Zeit unter der Voraussetzung, dass an der Oberfläche stets die Bedingung

$$\frac{du}{dr}+hu=0$$

erfüllt wird, wo h eine positive Constante bedeutet. Ob die Lösung der Aufgabe von Fourier der Anfangsbedingung entspricht, ist bis jetzt nicht nachgewiesen. Dies geschieht in der vorliegenden Dissertation.

P. Zech.

Examen des objections faites par M. Hirn à la théorie cinétique des Gaz, par Clausius. Bruxelles, Hayez. 23 S.

Versuche von Hirn über den Ausfluss von Gasen führten ihn zu dem Ausspruch, dass dieselben der kinetischen Theorie der Gase widersprechen. Clausius sucht nachzuweisen, dass Hirn gewisse vereinfachende Hypothesen in zu ausgedehntem Maasse angewendet habe; er habe angenommen, dass die Massentheilchen sich nur nach drei zu einander senkrechten Richtungen bewegen, und erhalte damit eine Totalgeschwindigkeit der Massentheilchen in Richtung des Stromes, welche der Wirklichkeit nicht entspricht.

P. Zech.

Optische Häresien von Robert Schellwien. Halle, Pfeffer. 1886. 98 S.

Der Verfasser will nachweisen, dass Licht und Farbe den bewegten und thätigen Körpern eigen ist, nicht blos um sie herum, in sie hinein, durch sie hindurch spielt oder gar erst im Subject eine Existenz erlangt. Die Einleitung nimmt über die Hälfte des Werkchens ein, sie ist eine Kritik der naturwissenschaftlichen Methode, wie sie z. B. von Du Bois-Reymond und Helmholtz vertreten ist. Als Physiker folgen wir dem

Rathe des Verfassers, sie zu überschlagen, da wir eine Anzahl von Ausdrücken, wie: „die Innerlichkeit des schlechthin auf sich zurückbezogenen Raumes“, „ein Continuum, das sich zur Discontinuität entfaltet und aus dieser immer auch wieder in die Continuität zurückgeht“, oder: „die Ursache der Wirksamkeit des einzelnen Dinges ist es selbst von innen heraus durch seine positive Kraft als relatives Ding an sich“, schlechthin nicht verstehen.

Die Versuche mit dem Nörrenberg'schen Polarisationsapparat kommen im Wesentlichen alle darauf hinaus, dass bei Bedeckung des untern Spiegels mit einer weissen Fläche die Polarisation sich ändert, was der Verfasser dem Körperlicht des Papiers zuschreibt, während der Physiker sagt: das von dem Papier zurückgeworfene polarisirte Licht verliert diese Eigenschaft bei diffuser Zurückwerfung, was sich daraus ergiebt, dass ein heller Fleck, welcher auf einem Schirm durch ein polarisirtes Lichtbündel entsteht, durch einen Nicol betrachtet beim Drehen dieses seine Intensität nicht ändert. Dass bei des Verfassers Versuch doch Polarisation sich zeigt, rührt daher, dass das vom Papier ausgehende Licht durch die schiefe Glasplatte geht und dabei polarisirt wird. Damit fällt die Nothwendigkeit der Aufstellung eines besondern Körperlichts.

Ob die Versuche über Contrastfarben, die dem Physiker ferner liegen, für eine objective Grundlage von Farbe und Licht sprechen, mag dem Physiologen zur Beurtheilung überlassen bleiben.

P. Zech.

Kant's Theorie der Erfahrung. Von Hermann Cohen, Professor an der Universität Marburg. Zweite, neubearbeitete Auflage. Berlin, Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung Harwitz & Gossmann. 1885. 8°. XXIV, 616 S. Preis 12 Mk.

Nach der Würdigung, welche Cohen's Schrift „Das Princip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte (1885)“ in dieser Zeitschrift gefunden hat, dürfte es angemessen sein, auch auf das jetzt vorliegende grössere Werk desselben Philosophen hinzuweisen, in welchem derselbe die Resultate jener kleineren Schrift in sein System des „erkenntnisskritischen Idealismus“ hineingearbeitet hat. Obwohl als zweite Auflage der 1871 unter demselben Titel erschienenen Schrift bezeichnet, stellt sich das Buch doch als ein in vieler Hinsicht ganz neues Werk dar, das den von dem Verfasser eingenommenen Standpunkt durch erweiterte Begründung verstärkt. Es ist nicht angänglich, den im strengsten Sinne philosophischen Inhalt des Buches hier auch nur im Umrisse zu skizziren; derselbe erfordert ein eingehendes Studium und setzt eine angelegentliche Beschäftigung mit dem Kant'schen Gedankenkreise voraus. Wer sich diesem Studium unterzieht, der wird den erfreulichen Gewinn haben, die vielfach angezweifelten

Positionen der Transcendentalphilosophie von Missverständnissen gereinigt und mit sicherem, einheitlichen Fundament versehen zu erblicken.

Dem Mathematiker und Naturforscher, welcher den systematischen Zusammenhang seiner Wissenschaften mit dem Ganzen der menschlichen Erkenntniss zu durchschauen sich bestrebt, wird das Buch von ganz besonderem Nutzen und Interesse sein. Denn es ist gerade das Wesen der mathematischen und der naturwissenschaftlichen Erkenntniss, auf welche das ganze System des kritischen Idealismus sich stützt. Die mathematischen Begriffe sind die zweifellose Unterlage, dass es eine gesicherte Erkenntniss giebt, weshalb sie schon Platon das Weckmittel (ἐγερτικόν) der Vernunft nannte: „Die Geometrie ist die Erkenntniss des beständig Seienden." Deswegen hat auch die Erkenntnisskritik von der unumstösslichen Erfahrungsthatsache, welche in der mathematischen Naturwissenschaft vorliegt, auszugehen und von hier aus die Frage zu stellen, worauf sich die Möglichkeit dieser Erfahrung gründe. Dadurch werden die irreführenden psychologischen Untersuchungen über die Entstehung der Raum- und Zeitvorstellung, der Denkformen u. dergl. ausgeschlossen, und es wird statt dessen gefragt, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit die Objecte der mathematischen Naturwissenschaft zu Stande kommen. Die Natur wird dann nicht aufgefasst als etwas dem Menschen fertig Gegenübergestelltes, das er sich subjectiv anzueignen hätte, sondern als das Erzeugniss des denkenden Verstandes im Zusammenwirken mit der Sinnlichkeit. Raum und Zeit sind nicht subjective Vorstellungen, sondern sie sind Werkzeuge zur Bildung und Fixirung von Vorstellungen, Bedingungen der Erfahrung überhaupt. Als solche gehören sie zum Bewusstseinsinhalt, aber der Bewusstseinsinhalt ist Weltinhalt. Der Gegensatz von subjectiv und objectiv löst sich auf; an seine Stelle tritt der klarere Gegensatz von sinnlich und intellectuell.

Die Bedeutung der „Grundsätze des Verstandes", insbesondere des Grundsatzes der intensiven Grösse für die Erzeugung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Erkenntniss, wie sie in der 2. Auflage des vorliegenden Buches durchgeführt ist, giebt eine willkommene Erläuterung zu den Andeutungen des „Princips der Infinitesimalmethode". Als neu mag noch besonders die Rolle hervorgehoben werden, welche Cohen die „Idee" in Bezug auf die Naturbeschreibung spielen lässt. Zu dieser soll sie in einem ähnlichen Verhältnisse stehen, wie der Verstand zur Naturlehre. Indem sie die Forderung enthält, dass es eine Gesetzlichkeit der Erfahrung giebt, liefert sie den Zweckbegriff, nicht als ein ausreichendes Erkenntnissmittel, aber als eine Directive, welche auf das Erkenntnissmittel der Causalität hinweist und dadurch zur Erklärung der Thatsachen im Reiche des Organischen dient.

Gotha. K. Lasswitz.

Geometrische Optik. Eine mathematische Behandlung der einfachsten Erscheinungen auf dem Gebiete der Lehre vom Licht, von FERDINAND MEISEL. Halle a. S., 1886. VI u. 171 S.

Der Inhalt des vorliegenden Werkes ist eine Darstellung der Erscheinungen, welche durch die Gesetze der geometrischen Schattengebung, Reflexion und Brechung des Lichts bedingt sind. Der Schwerpunkt der Darstellung liegt dabei durchaus auf der mathematischen, d. h. geometrischen Seite; es wird nur von den genannten Elementargesetzen Gebrauch gemacht, von den Vorstellungen der physikalischen Optik grundsätzlich abgesehen. Ebenso wenig liegt ein Eingehen auf die Anwendung der geometrischen Optik, die optische Instrumentenkunde in dem hier gesteckten Rahmen.

Das Werk kann daher auch als eine interessante Anwendung der Geometrie und Infinitesimalrechnung betrachtet werden, welche letztere aber nur in dem Umfange vorausgesetzt wird, den der erste elementare Kurs einer Universität oder eines Polytechnikums zu haben pflegt. Studirenden, welche in diesem Stadium sich befinden und nach einer naturgemässen Uebung ihrer neuerlangten Kräfte Bedürfniss haben, kann Ref. Meisel's Optik auf das Wärmste empfehlen.

Die Darstellung ist klar, übersichtlich und bündig. Mit Vorliebe benutzt der Verf. die anschaulichen Operationen des constructiven Zeichnens zur Lösung specieller Probleme. Neben diesen werden in jedem Abschnitt die Gleichungen für die allgemeine Lösung aufgestellt.

Gerade an der Auswahl und Behandlung der Paradigmata erkennt man, dass dem Verf. — trotz dem vorwiegend mathematischen Charakter der gesammten Discussion — doch die geometrische Optik vornehmlich als natürliches Erscheinungsgebiet am Herzen lag, und er weiss sein lebhaftes Interesse an der Sache dem Leser gefällig mitzutheilen.

Diese Erscheinungen sind so bequem, wie kaum irgendwelche anderen der Physik, von Jedem ohne viele Apparate experimentell hervorzurufen, so dass man sich sofort überzeugen kann, wie weit die geometrische Optik im Stande ist, sie getreu darzustellen, und wo deren Grenzen liegen, d. h. auf die Vorstellungen der Undulationstheorie zurückgegangen werden muss. Die so gegebene Anregung zur Vertiefung der physikalischen Begriffe möchte Ref. als einen besondern Vorzug, den das Werk für Anfänger hat, bezeichnen.

Im Einzelnen sind einige Ausstellungen zu machen: Erstens, dass sehr viele störende Druckfehler stehen geblieben sind. Ferner durfte in einem für Anfänger bestimmten Werke, wie dem vorliegenden, nicht unterlassen werden, die Gauss-Helmholtz'schen Grundgleichungen der Dioptrik centrirter Kugelflächen in explicirter Form anzugeben. Die Beschränkung auf reelle Objecte für Spiegelung und Brechung scheint dem Ref. ebenso wenig gerechtfertigt. Auch die Gleichungen für die Katoptrik und Dioptrik schiefer Elementarbüschel hätten ganz in dem Rahmen des Werkes gelegen.

Betreffs der Diffusion des Lichtes macht Ref. den Verf. auf die Untersuchungen Wiener's und K. Angström's, betreffs des Lambert'schen Gesetzes für selbstleuchtende Körper auf die Dissertation von Möller aufmerksam.

Dr. S. Czapski.

Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie, bearbeitet von Dr. K. Uth, Prorector am königl. Realgymnasium in Wiesbaden. Mit vielen in den Text gedruckten Figuren. Dritte vermehrte und verbesserte Auflage. Cassel und Berlin, Verlag von Theodor Fischer. 1886. 8°. 111 S. Preis 1 Mk. 50 Pf.

Klares Denken und gesunde Logik soll man in den Lehrbüchern der Mathematik gewiss nicht vergebens suchen. Leider aber giebt es eine gewisse Art „Logik", der man in den Schulbüchern mit geringer Freude begegnet.

Wenn Herr Uth S. 1 behauptet, dass „der Raum begrenzt und unbegrenzt gedacht werden kann", wenn er S. 2 in einer Anmerkung sagt, dass „ein mathematischer Punkt sich nicht bewegen lässt und nicht bewegt gedacht werden kann", so sind wir weit entfernt, mit ihm darüber zu streiten. Schlimmer ist es schon, dass Verf. die Theorie der Parallelen auf den „Richtungsunterschied" baut. Wie wir schon an anderer Stelle zu bemerken Gelegenheit hatten, ist dieses Verfahren darum ganz verwerflich, weil dadurch die wirklich vorliegende Schwierigkeit verdeckt wird. Auch die Fassung des „dritten" Congruenzsatzes S. 17 ist wenig glücklich. Endlich ist es ganz und gar zu tadeln, dass der „Kreis" bis hinter die Aehnlichkeitslehre und die Lehre vom Flächeninhalt zurückgestellt ist. Der Verf. bemerkt dazu in der Vorrede S. VI: „Insbesondere habe ich mich nicht entschliessen können, die strenge Trennung des Kreises von der geraden Linie infolge (vielleicht „trotz"?) einer mir von sehr hochgeschätzter Seite gemachten Bemerkung aufzugeben." Es folgen einige Begründungsversuche. Mit prächtiger Selbstironie macht Herr Uth ganz zu Anfang seiner Constructionsaufgaben in einer Fussnote die Bemerkung: „Die mit dem Stern bezeichneten Aufgaben erfordern Kreissätze, ordnen sich aber hier am besten ein."

Das Buch schliesst mit Constructionsaufgaben und Uebungssätzen. Die Anzahl der ersteren ist 1000, die der letzteren 250.

Coesfeld, 1886. K. Schwering.

Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene, mit den Resultaten. Für höhere Lehranstalten und für den Selbstunterricht von Dr. Oskar Janisch, weil. Director des Realgymnasiums zu Landeshut i. Schl. Herausgegeben von Dr. H. Funcke, Oberlehrer an der Oberrealschule in Potsdam. Potsdam 1886, Verlag von Aug. Stein. 8°. 200 S.

Vorliegendes Buch bietet einen reichen Inhalt. Ausser einer Einleitung, welche zur Auflösung analytischer Aufgaben gewissermassen die Musterbeispiele bringt, finden wir Aufgaben für Gerade, Kreis, Parabel, Ellipse und Hyperbel. Der Verfasser oder Herausgeber hat ganz recht, wenn er die Aufsuchung des geometrischen Ortes für den Kernpunkt aller analytisch-geometrischen Forschung ansieht und demgemäss in seinem Buche mit entschiedenster Betonung in den Vordergrund stellt. Aber mit der blossen Angabe einer Gleichung und dem Zusatze: „Dies ist der gesuchte geometrische Ort" ist doch nicht gerade Alles gethan. Und dieser zweiten Hauptaufgabe, welche die Ablesung geometrischer Eigenschaften aus der Gleichung verlangt, ist nach unserem Eindrucke die sonst treffliche Sammlung nicht hinreichend gerecht geworden.

Vielleicht hat die Pietät der Arbeit eines Verstorbenen gegenüber den Herausgeber auch an solchen Stellen einzugreifen verhindert, wo dies nach der Ueberzeugung des Referenten geboten gewesen wäre.

Coesfeld, 1886. K. Schwering.

Die Grundlehren der ebenen Geometrie, von A. Stegmann. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage, herausgegeben von J. Langauer, Studienlehrer am k. Ludwigsgymnasium in München. Kempten, Verlag der Jos. Kösel'schen Buchhandlung. 1886. 8°. 217 S. Preis 2 Mk. 25 Pf.

Der Inhalt des vorliegenden Buches ist der hergebrachte. Auch die Anordnung des Stoffes geht nicht nach „logischen", „neuen", „einzig richtigen" Grundsätzen vor sich, sondern ist die herkömmliche und wahrscheinlich natürliche. Wo eine Abweichung sich findet, da ist sie eine recht unglückliche. Der Verfasser hat es z. B. auch für angezeigt gehalten, den Kreis hinter die Lehre von der Aehnlichkeit und hinter die Lehre von der Flächenausmessung zurückzuschieben. Das wird ja wohl zum Theil Modesache sein, zum Theil aber auch von der offenbar tiefsinnigen Erwägung herrühren, dass die Linie eine Curve erster Ordnung, der Kreis dagegen eine Curve zweiter Ordnung ist.

Uebrigens ist dem Buche auch Gutes nachzusagen. Die Parallelentheorie enthält den Grundsatz, dass durch einen Punkt zu einer Geraden nur eine Parallele gezogen werden kann. Auf die Sammlung von Aufgaben ist, wie auch in der Vorrede bemerkt wird, Petersen's klassisches Werk: „Methoden und Theorien" nicht ohne Einfluss geblieben. Ebenso ist die Darstellung der algebraischen Lösungen geometrischer Aufgaben eine recht gute und die Darlegung des isoperimetrischen Satzes geradezu schön.

Coesfeld, 1886. K. Schwering.

Uebungen und Aufgaben für den propädeutischen Unterricht in der Geometrie. Zusammengestellt von Dr. Josef Diekmann, Rector des Realprogymnasiums zu Viersen. Erster Theil: Vorübungen zur Euklidischen Geometrie. Zweiter Theil: Vorübungen zur synthetischen Geometrie. Breslau, Ferdinand Hirt. 1886. 8°. 43, bez. 32 S. Preis 75, bez. 50 Pf.

„Jeder erfahrene Lehrer wird darin Schopenhauer beistimmen, dass für einen zwölfjährigen Knaben die anschaulich erkannte Wahrheit überzeugender wirkt, als die logisch abstrahirte.“ So heisst es in der Vorrede. In der That, die hiermit behauptete Wahrheit ist so selbstverständlich, dass die Anrufung des genialen Frankfurter Griesgrams eine fast abschwächende Wirkung hat. Man kann die neuere Pädagogik aufrichtig zu dem Streben beglückwünschen, der Anschauung endlich auch in den Lehrbüchern den Platz anzuweisen, welcher ihr von jeher in der Wirklichkeit tüchtigen Lernens und Lehrens eingeräumt worden ist. Und in diesem Sinne ist Referent in der angenehmen Lage, beiden Theilen seine Anerkennung aussprechen zu können. Besonders ist der zweite Theil gewissermassen eine praktische Einführung in die Methoden, Begriffe und Anschauungen der neueren Geometrie. Mit den einfachsten Mitteln wird dem Schüler hier eine so gediegene Kenntniss des ganzen Handwerkszeugs der allgemeinen Collineation, Affinität u. s. w. vermittelt, dass es dem Autodidakten sogar möglich sein wird, nach Durcharbeitung dieser 32 Seiten getrost an das Studium eines grösseren Werkes heranzugehen.

Der erste Theil entfernt sich von den Methoden Euklid's in ziemlich beträchtlichem Maasse. Referent steht nicht an, dem gegenüber seinen abweichenden, ja entgegengesetzten Standpunkt hervorzuheben. Es heisst in der Vorrede: „Mit einer solchen Lagenveränderung im Sinne Euklid's wird aber der Quartaner keine rechte Vorstellung verbinden können, es sei denn, dass er sich die Figur etwa ausgeschnitten denkt.“ Dieser Satz wäre schon richtig, wenn man es beim „Sich denken“ bewenden liesse. Ein vernünftiger Lehrer lässt es aber zum Ausschneiden wirklich kommen, da er dem „Sich denken“ des Quartaners nur wenig Vertrauen schenkt.

Coesfeld, 1886. K. Schwering.

Sammlung geometrischer Constructions-Aufgaben zum Gebrauche an Seminarien sowie zum Selbstunterricht. Von B. Wiese und W. Lichtblau, königl. Seminarlehrern. Hannover, Verlag von Carl Meyer. 1885. 8°. 220 S. Preis 2 Mk. 80 Pf.

Es ist erfreulich zu sehen, wie der Erkenntniss, dass der Schwerpunkt des geometrischen Unterrichts in der Aufgabe und ihrer Lösung liegt, sich immer weitere Kreise erschliessen. Auch an den Lehrerseminarien hat der geometrische Unterricht in den letzten Jahrzehnten anscheinend bedeutend an Umfang und noch mehr an Vertiefung gewonnen; und da konnte unmöglich die Forderung einer gediegenen Aufgabensammlung unerfüllt bleiben. Referent war unlängst in der Lage, über die Lehrmittel, welche an einigen Seminarien in Gebrauch sind, sich ein Urtheil bilden zu müssen, und er gesteht, dass das vorliegende Buch den ihm bekannt gewordenen Bestrebungen ähnlicher Art in mancher Beziehung überlegen ist. Leider ist der reiche, fast zu reiche Inhalt vielfach nach äusserer Schablone (Dreiecksaufgaben, Vierecksaufgaben, Construction von Punkten, Linien und Winkeln an und im Kreise), nicht nach Methoden geordnet. Dagegen verdient es unbedingte Anerkennung, dass ein stufenweiser Fortschritt vom Leichteren zum Schwereren überall bemerkt werden kann. Ein fernerer Vorzug des Büchleins ist die beharrliche Durchführung des Gedankens, dass keine bisher unbezwungene Schwierigkeit ohne ausführliche Nachhilfe dem Lernenden in den Weg kommen darf und daher dem Studirenden jedesmal wirkliche Aufgaben, nicht Räthsel vorgelegt werden. Wesentliche Unterstützung findet der Lernende ferner an den zahlreichen, stets sauberen, oft ungemein feinen Figuren.

Dem Büchlein wird die verdiente Anerkennung nicht fehlen.

Coesfeld, 1886. K. Schwering.

Die Hauptsätze der Elementarmathematik. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten. Bearbeitet von A. F. G. Th. Gauss, Professor am Gymnasium zu Bunzlau. Erster Theil: Arithmetik und Planimetrie. Zweite verbesserte Auflage. Preis 2 Mk. 75 Pf. — Zweiter Theil: Stereometrie und Trigonometrie. Zweite verbesserte Auflage. Preis 1 Mk. 40 Pf. Bunzlau, Verlag von G. Kretschmer. 1885.

Es muss zunächst auffallen und zwar nichts weniger als angenehm auffallen, dass wir hier Lehrbücher ohne Beigabe von Uebungsstoff vor uns haben. Freilich sagt der Verfasser in der Vorrede: „Material zu Uebungen, die selbstverständlich nicht oft genug sowohl an zu beweisenden Lehrsätzen, als auch an Aufgaben angestellt werden können, dem Buche beizugeben, habe ich für überflüssig gehalten, da es vortreffliche Sammlungen der Art in hinreichender Auswahl giebt.“ Sollte dieser Behauptung gegenüber nicht die Frage Berechtigung haben: „Sind die vorhandenen Aufgabensammlungen so vortrefflich und die vorhandenen Lehrbücher nicht?“

Doch zur Sache. Der Verfasser ist bemüht, überall strenge Beweisführung zu geben und in der Fülle des Stoffes bis an die äussersten durch die bestehenden Vorschriften gezogenen Grenzen zu gehen, ohne diese Grenzen zu verletzen. So ist in der Arithmetik mit Recht der Moivre'sche Lehrsatz vorgetragen und zur Auflösung der binomischen Gleichungen verwandt worden. Ebenso ist in der Planimetrie der Potenz am

Kreise eine eingehende und gediegene Darlegung gewidmet. Leider hat der Verfasser es nicht über sich gewinnen können, in der Anordnung der Lehrsätze, welche Proportion und Aehnlichkeit betreffen, dem Herkommen zu folgen. Wie es didaktisch zu rechtfertigen ist, dass die Aehnlichkeitskriterien hinter die Sätze z. B. des Menelaus, hinter die Sätze vom Pol und der Polare zurückgestellt werden, — Referent gesteht, es nicht zu begreifen. Leider aber ist in der Didaktik Falstaff's Wort von den Gründen wahr; sie sind dort noch immer so billig wie Brombeeren. In der Trigonometrie fällt der Ballast von Formeln, unter denen die Additionstheoreme dem Erstickungsthode rettungslos preisgegeben sind, dem Lernenden centnerschwer in den Weg. Offenbar kennt der Verfasser die Methode der Definitionserweiterung, wie seine Ableitung des Subtractionstheorems zeigt. Allein er verfährt nach der Methode der Projectionen mit Vorzeichenertheilung. Hiermit steht es natürlich im Zusammenhange, dass wir auch beim Menelaischen und Ceva'schen Satze die leidigen Vorzeichen uns gefallen lassen müssen. Möge die Verwirrung, welche diese Darstellung in den meisten Schülerköpfen anrichtet, endlich das Mitleid unserer Lehrbücherväter erregen!

Die Stereometrie zeichnet sich durch geschickte und eingehende Behandlung der Sphärik aus. Ebenso ist die Methode der Cubatur durch Zerschneidung in unendlich dünne Scheiben recht klar vorgetragen. Die sphärische Trigonometrie leidet etwas an Formelübersättigung.

Coesfeld, 1886. K. Schwering.

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, mit zahlreichen Aufgaben und einem Anhange, der systematisch geordnete Gleichungen enthält; für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht von F. Henrich, Oberlehrer am Realgymnasium zu Wiesbaden. Zweite umgearbeitete und erweiterte Auflage. Wiesbaden, Verlag von Chr. Limbarth. 1886. 8°. 288 S.

Wie in der Lehre von den Parallelen eine didaktische Schwierigkeit vorliegt, welcher die Verfasser der Lehrbücher der Planimetrie in verschiedener Weise gerecht zu werden versuchen, so liegt eine vielleicht noch bedeutendere Unbequemlichkeit in den ersten Elementen der Algebra. Die entschiedene Klarheit, welche dank Forschern ersten Ranges über die Grundlehren der Algebra jetzt in weiteren Kreisen herrscht, dringt sichtlich, wenn auch langsam, in die Schulbücher ein. Man nimmt mit Genugthuung wahr, dass den Herren Verfassern wenigstens einige jener Resultate der neueren Forschung bekannt sind.

Dem Herrn Verfasser des vorliegenden Buches muss ein ernstes wissenschaftliches Bemühen und klares Erkennen der vorhandenen Schwierigkeiten zugestanden werden. Referent schickt diese Anerkennung mit um so stärkerer

Betonung voraus, als er sachlich sich zu dem vom Verfasser befolgten Lehrgange im scharfen Gegensatze befindet. Der Verfasser fasst die Zahl als eine nach einer bestimmten Einheit gemessene gerade Linie auf. Hierdurch dringt ein geometrisches Element in die Darstellung ein, wodurch die Einführung der negativen Zahl erleichtert und die der Lateralzahlen eingeleitet ist. Dem gegenüber muss vom wissenschaftlichen Standpunkt aus betont werden, dass die Fernhaltung geometrischer Anschauungen aus den Grundlagen der Algebra gerade die Klarheit auf letzterem Gebiete vorbedingt, und für den Unterricht dürfte die historische Entwickelung und stufenweise Vertiefung des Zahlbegriffes doch einen bedeutsamen Hinweis enthalten. Referent hält es für möglich, dass der einzelne Mensch fast genau in derselben Folge rechnen lernt, wie die Geschichte der Mathematik uns den Fortschritt der Menschheit berichtet.

Bezüglich der Irrationalzahl macht sich der Verfasser die Sache etwas leicht. „Lässt sich aber die Wurzel weder durch eine ganze Zahl, noch durch einen Bruch genau angeben, so nennt man die Wurzel eine irrationale Zahl.“ Es wird dann ohne Beweis behauptet, dass $\sqrt{3}$ eine irrationale Zahl sei, und eine Construction von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ gegeben. Wir sind weit entfernt, einem Schulbuche „Tifteleien“ über die Rechnung mit Irrationalzahlen abzuverlangen; aber so über Schwierigkeiten wegzueilen, wie es der Verfasser thut, ist niemals gestattet.

In der Theorie der Logarithmen begegnen wir dem langweiligen Symbol $^{m}\!\log a$. Da der Schüler doch nur mit dekadischen Logarithmen rechnet, so verschone man ihn auch mit dem lästigen Anbau des m. Eine kleine Anmerkung würde hier vollkommen ausreichen, den Lernenden vor falschen Schlüssen zu hüten.

Die Behandlung der Reihen, der Combinatorik, der Kettenbrüche u. s. w. ist gediegen und gut. Eine Sterblichkeitstabelle liefert Stoff für ansprechende Aufgaben.

In der Lehre von den Gleichungen könnte die trigonometrische Lösung der Gleichungen zweiten Grades ohne Schaden fehlen. Den „Richtungszahlen“ ist ein besonderer Abschnitt gewidmet. Giebt man die Zulässigkeit pädagogisch zu, so kann man die Darstellung des Verfassers nur anerkennen.

Die Aufgabensammlung ist reichhaltig und anregend.

Coesfeld, 1886. K. Schwering.

Erster Cursus der Planimetrie. Für Gymnasien, Real- und Bürgerschulen und zum Gebrauche für Hauslehrer bearbeitet von Dr. August Wiegand. Dreizehnte verbesserte Auflage. Halle a. S., Druck und Verlag von H. W. Schmidt. 1886. 8°. 99 S. Preis 1 Mk.

Das Buch hat die Probe bestanden, wie nicht allein die zahlreichen Auflagen darthun. Ein wohlthuender Hauch gesunder Praxis, ein Anschliessen an die dem Anfänger aus dem Leben geläufigen Anschauungen und ein Festhalten am Herkommen, wo nicht bessere Erkenntniss ein Abweichen gebietet, — das sind die Vorzüge, welche Referent lobend hervorheben möchte.

Die Definition des Kreises darf das Merkmal „in sich zurücklaufend“ nicht aufführen; auch ist es dem Referenten nicht gelungen, den Verfasser S. 13 zu verstehen, wo er behauptet: Man nennt den Winkel eine intensive Grösse, während alle anderen geometrischen Grössen extensiv sind.

Coesfeld, 1886. K. SCHWERING.

Lehrbuch der Stereometrie. Für das Selbststudium bearbeitet von W. BURCKHARDT, Verfasser der mathematischen Unterrichtsbriefe. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig, Gressner & Schramm. gr. 8°. 133 S.

Das Buch unterscheidet sich von den an unseren höheren Lehranstalten gebräuchlichen Schulbüchern nicht erheblich durch Umfang oder Behandlung des Gegenstandes. Seine Besonderheit liegt darin, dass der Vortrag der Lehrsätze ein bei Weitem ausführlicherer ist, als in den Schulbüchern. Das ist für die Erreichung des dem Buche gesteckten Zieles offenbar unerlässlich; aber auch mancher Lehrer an einer öffentlichen Schule wird das Buch nicht ohne Nutzen aus der Hand legen.

Coesfeld, 1887. K. SCHWERING.

Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der krummen Oberflächen und geradlinigen Strahlensysteme. Von Dr. REINHOLD VON LILIENTHAL, Docent an der Universität Bonn. Bonn, Eduard Weber. 1886. 8°. 111 S. Preis 4 Mk.

Der Verfasser knüpft an die Untersuchungen, welche Lipschitz über die Theorie der krummen Flächen angestellt hat, in folgender Weise an. Die Richtungscosinus X, Y, Z der einzelnen Normalen werden als Functionen der unabhängigen Veränderlichen p und q betrachtet. Hierdurch entsteht auf der Einheitskugel ein System von Curven $p = const.$, $q = const.$ und die Lage der Krümmungslinien auf einem Flächenelement lässt sich durch Angabe eines Winkels bestimmen, welchen die Tangente einer der beiden Krümmungslinien mit der Tangente einer der beiden Curven $p = const.$, $q = const.$ auf dem dem Flächenelement parallelen Kugeloberflächenelement bildet. Ein solcher Winkel wird nach dem Vorgange des Herrn Lipschitz Stellungswinkel genannt. Die partiellen Ableitungen der Coordinaten lassen sich nun durch die Richtungscosinus der Normalen, durch die beiden Hauptkrümmungshalbmesser ϱ_1, ϱ_2 und durch den Stellungswinkel σ darstellen. Denkt man sich jetzt umgekehrt diese Stücke als Functionen der unabhängigen Variablen p und q gegeben, so lassen sich die den einzelnen

Werthepaaren p, q entsprechenden Flächenelemente im Raume zu einer Fläche zusammenfügen oder nicht, je nachdem die Integrabilitätsbedingungen der in den Grössen X, Y, Z, ϱ_1, ϱ_2, σ gebildeten Ausdrücke für die Ableitungen der Coordinaten bestehen oder nicht bestehen. Diese Integrabilitätsbedingungen bilden ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen.

So ungefähr legt der Herr Verfasser selbst das Problem in der Vorrede dar. Ein umfassenderes Problem ergiebt sich für die Theorie der Strahlensysteme. Wir wollen uns in unserem Referat besonders mit dem Falle der krummen Flächen beschäftigen.

Nach einer sehr klaren und gründlichen Einleitung, welche alle einschlägigen Formeln, auch die bekanntesten, dem Leser bequem unter die Augen rückt, stellt der Verfasser unter Benutzung eines Weierstrassschen Satzes ϱ in der Form

$$\varrho = \frac{\varrho_1 \vartheta_1 + \varrho_2 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2}$$

dar, wo ϑ_1 und ϑ_2 Quadrate linearer Functionen von dp und dq sind. Diese Functionen ergeben sich nun mit Hilfe des Stellungswinkels in verhältnissmässig einfacher Gestalt. Eine sorgfältig ausgearbeitete Tabelle weist das geometrische Verhalten in den einzelnen Fällen nach. S. 16 bildet nun der Verfasser die Ausdrücke dx, dy, dz und stellt auf der folgenden die Integrabilitätsgleichungen in Form von drei Gleichungen dar. Es ergiebt sich, was ja auch *a priori* klar ist, dass eine derselben Folge der andern ist. Und nun ertheilt der Verfasser dem Resultat durch Multiplication mit geeigneten Factoren eine schliessliche Form, welche wahrscheinlich das Erreichbare in der Vereinfachung unter den hier gegebenen Umständen darstellt. Nachdem nun die Beziehung des gewonnenen Resultates zu den Sätzen des Herrn Lipschitz festgestellt ist, schreitet Herr v. L. zu einigen Anwendungen. Hier kommen zunächst die Krümmungslinien, dann die Asymptotenlinien und die Minimalflächen in Betracht.

Möge vorstehendes Referat dem Leser etwa die Hauptpunkte der interessanten und klaren Abhandlung angedeutet haben.

Im dritten Theil wendet sich der Verfasser specielleren Untersuchungen zu. Hier finden wir wieder diejenigen Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass ihre Coordinaten sich durch die reellen Theile dreier Functionen einer complexen Variablen $p + qi$ darstellen lassen. Es werden die Bedingungen aufgesucht, welche zwischen den sechs (s. o.) Grössen obwalten müssen, damit einer nicht abwickelbaren Fläche diese Eigenschaft zukommt. Auch ein geometrisches Beispiel fehlt nicht.

Coesfeld, 1887. K. Schwering.

Die arithmetischen und geometrischen Verhältnisse, Proportionen und Progressionen mit Anwendung auf die Zinseszins- und Rentenrechnung. [Cursus der Obersecunda des Gymnasii *(sic).*] Für den Schulgebrauch bearbeitet von Dr. E. Wrobel, Gymnasiallehrer in Rostock. Rostock, W. Werther. 1885. 8°. 44 S. Preis 80 Pf.

Durch den Titel ist der Inhalt angegeben. Die Behandlung des Stoffes bewegt sich in ziemlich ausgefahrenen Geleisen. Die Bescheidenheit des Verfassers, welche ihn in der Vorrede sagen lässt, dass das Buch „zunächst als Repetitionsbuch für die eigenen Schüler bestimmt" sei, ist löblich und auch wohl berechtigt.

Coesfeld, 1887. K. Schwering.

Wegweiser in der Arithmetik, Algebra und niederen Analysis, bestehend in einer geordneten Sammlung von Begriffen, Formeln und Lehrsätzen in diesen Disciplinen. Von W. Fuhrmann, Oberlehrer am Realgymnasium auf der Burg in Königsberg, O.-Pr. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner. 1886. 8°. 62 S.

Ein handliches, inhaltsreiches, wohlgeordnetes Büchlein. Man findet dort wohl Alles, was auch der weitestgehende elementare Unterricht in seine Kreise zieht, ja Vieles, was nach dem Urtheil des Referenten nur der höheren Analysis zuzuweisen ist. Doch soll hiermit gewiss kein Tadel ausgesprochen sein. S. 34, Formel 102 und 103 steht fehlerhaft x statt x^n.

Ein gutes Sachregister (in deutschen Werken leider noch häufig fehlend) ist dem Büchlein beigegeben.

Druck und Ausstattung sind vortrefflich.

Coesfeld, 1887. K. Schwering.

Les Intégraphes, la courbe intégrale et ses applications. Étude sur un nouveau système d'intégrateurs mécaniques, par Br. Abdank-Abakanowicz. Paris 1886, Gauthier-Villars. 8°. 10 Bogen. 94 Textfiguren.

Nachdem im Jahre 1872 Josef M. Šolin in Prag eine rein geometrische Methode zur Ermittelung der Curve mit der Gleichung $y = f(x) + c$, wenn deren Derivationscurve mit der Gleichung $y' = f'(x)$ bekannt ist, veröffentlicht hatte, wurde bald darauf versucht, Instrumente von solcher Beschaffenheit zu construiren, dass ein an demselben befindlicher Stift die Integralcurve verzeichnet, wenn ein Stilet desselben die gegebene zugehörige Derivationscurve beschreibt. Die Theorie dieser Intrumente, der sogenannten Integratoren, gründet sich auf die gegenseitige Beziehung der gegebenen und der zu suchenden Curve, darauf, dass durch die Ordinatenstrecke Y'

der Derivationscurve in Verbindung mit der jeweils der Zeichnung zu Grunde gelegten Einheitsstrecke λ, durch $Y':\lambda$, das Richtungsverhältniss der Berührungsgeraden der Curve der Urfunction in demjenigen Punkte derselben gegeben ist, welcher auf dem mit Y' zusammenfallenden Ordinatenstrahle liegt, wie dem sein muss. Der Herr Verfasser, welcher zuerst einen Integrator baute und dieses Instrument mehr und mehr zu vervollkommnen bestrebt ist, bezweckt durch das vorliegende Werkchen seine und Anderer Erfindungen in dieser Hinsicht und deren Nutzen in weiteren Kreisen bekannt zu machen, nachdem er bereits im Jahre 1880 einen Integrator beschrieben hatte (L'Intégrateur, la courbe intégrale et ses applications. Varsovie 1880). Gleichzeitig mit Herrn Abakanowicz, welcher seine ersten Modelle in den Jahren 1878 und 1879 ausführte, verfolgte ein Engländer, Herr Boys, unabhängig von Ersterem dasselbe Ziel und veröffentlichte 1881 sein Resultat (An integrating machine. Philosophical Magazin, 1881). Späterhin wurde Herr Abakanowicz von Herrn Napoli, Oberinspector der französischen Ostbahn, in seinen Bemühungen wesentlich unterstützt, wodurch es gelang, verbesserte Integraphen zu bauen, und versuchten es auch noch Andere, Integrirmaschinen zu erfinden.

Folgen wir der Abhandlung des Herrn Verfassers.

Nachdem derselbe die Integralcurve $y=f(x)+c$ definirt und das Šolin-sche geometrische Integrationsverfahren in Kürze erläutert hat, zeigt er, wie mittels Schraubenbewegung die Curve $y=f(x)+c$ aus der Curve $y'=f'(x)$ abgeleitet werden kann, und bespricht Grundmechanismen, durch welche die erforderliche Bewegung des die Integralcurve zeichnenden Stiftes hervorgebracht werden kann, wenn ein Stilet der Maschine mit seiner Spitze die gegebene Derivationscurve beschreibt. Daran schliesst er die Erklärung seiner beiden ersten, 1878 und 1879 gebauten Instrumente. Beim ersten Apparate wird die Schraubenbewegung hervorgebracht mittels eines um eine horizontale Axe drehbaren und auf dieser Axe verschiebbaren Kreiscylinders und einer den Cylinder berührenden Rolle, welche um eine horizontale und eine verticale, die erstere in ihrer Mitte schneidende Axe drehbar ist, wobei die verticale Drehaxe der Rolle gegen die Axe des Cylinders fest liegt. Diese Rolle wird durch ein Gewicht auf den Cylinder gepresst, kann aber auch von unten mit demselben in Contact gebracht werden. Die Axe des Kreiscylinders und der Support der Rolle sind mit einer horizontalen Platte fest verbunden, welcher eine Translation parallel zur Abscissenaxe des Coordinatensystems gestattet ist. Diese Platte trägt ferner einen zur Cylinderaxe parallelen, dem Stilet zur Führung dienenden Rundstab, dessen Abstand von der Cylinderaxe unveränderlich ist. Von dem Stilet führt eine Stange nach der verticalen Axe der Rolle; Stilet und Stange sind so verbunden, dass ersterem eine Translation in der Richtung der Stangenaxe möglich ist. Beschreibt das Stilet die Derivationscurve, dann erhält zunächst der Cylinder dieselbe Bewegung parallel zur Abscissenaxe, sodann durch die Rolle noch eine um seine Axe und parallel zu dieser. Ein geeigneter Mechanismus führt von dem einen Ende des Cylinders nach dem die Integralcurve beschreibenden Stifte, welcher die Translationsbewegung des Cylinders, parallel zu seiner Axe, auf diesen Stift überträgt; dadurch wird die Bewegung des Schreibstiftes parallel zur Y-Axe in der Weise modificirt, wie dieses zur richtigen Erzeugung der Integralcurve nöthig ist. — Beim zweiten Modell wird die Rolle durch ein Lineal vertreten, welches den Cylinder von unten berührt. — Hieran schliesst sich die Beschreibung von Integratoren, bei denen sich die verticale Drehaxe der Rolle parallel zur Axe des Cylinders bewegt. Mit der Axe des Cylinders, auf welcher er festsitzt, ist ein Zählwerk verbunden, das Kenntniss von seiner Tourenzahl giebt, wenn das Stilet den Umfang einer ebenen Fläche beschreibt. Diese Tourenzahl ist proportional dem Inhalt der Fläche, so dass das Instrument zu Inhaltsbestimmungen dienen kann. — Nachdem weitere zweckdienliche Mechanismen besprochen worden sind, wendet sich der Herr Verfasser zur Erläuterung eines von Herrn Napoli sehr sinnreich combinirten Integraphen. Er bediente sich hierbei ebenfalls eines Cylinders und einer Rolle. Dieser Apparat hat den Zweck, continuirliche Tracen auf einem Papierstreifen zu erhalten, welcher von dem Cylinder sich abwickelt. Hierauf construirten die Herren Abakanowicz und Napoli gemeinschaftlich ein neues Modell eines Integrators, wobei auch die Idee des Herrn Boys berücksichtigt wurde; jedoch beruht er auf demselben Grundprincip. Ein um eine horizontale Axe drehbarer Cylinder ist hier nicht mehr direct vorhanden, dessen Radius ist unendlich gross. Die richtige Bewegung des die Integralcurve zeichnenden Stiftes, wenn das Stilet ihre Derivationscurve beschreibt, wird mittels eines Systems von Rollen, um welche ein endloser Faden geschlungen ist, bewirkt. Die Ebengenannten construirten überdies noch einen zweiten Apparat, ein System von Winkelrädern an Stelle des Cylinders und der Rolle verwendend. Der Herr Verfasser hat diese Instrumente mit Zuhilfenahme der nöthigen Figuren eingehend beschrieben. Des Weiteren gedenkt derselbe der Integrirmaschine des Herrn C. V. Boys, welcher bereits 1882 auf dem Congress der Britischen Association zu Southampton die Bemühungen des Herrn Abakanowicz in sehr anerkennenswerther Weise besprach, des Integraphen von Zmurko (Kosmos 1884, Nr. 5, S. 185, Skibinsky, Lwow [Lemberg]), dessen Theorie er entwickelt. Als letztes Instrument wird der Integrator und Derivator von Herrn Mestre (1885) vorgeführt, ein durch geschickte Combination zweier Pantographen erzielter Apparat. Am Schlusse der Erläuterung der Integraphen wird noch die Derivation mit Hilfe derselben besprochen. Im IV. Capitel wendet sich der Herr Verfasser den charakteristischen Eigenschaften des neuen Systems seiner Integratoren zu, aber an keiner Stelle ist eine Notiz über den Genauigkeitsgrad der Arbeit derselben zu finden, was für die Beurtheilung ihrer Brauchbarkeit gerade wesentlich ist. Das Šolin'sche Integrationsverfahren versagt, wenn die Derivationscurve zur Ordinatenaxe parallele Asymptoten hat, so dass man die mit diesen Strahlen zusammenfallenden Ordinaten der Integralcurve in der gewöhnlichen Weise berechnen muss, wenn man ein exactes Resultat haben will. Dieses thun mithin auch die Integratoren, wie in der Natur der Sache liegt, so dass sie also nur dann das Resultat vollständig geben, wenn die Derivationscurve ganz im Endlichen gelegen ist.

Es ist nun an sich klar, dass die Integratoren in allen den Fällen Verwendung finden können, wo die Curve $y = f(x) + c$ zu zeichnen ist, wenn ihre Derivationscurve $y' = f'(x)$ gegeben ist; die Construction der letzteren lehrt die Theorie des graphischen Rechnens. Um die vielfache Verwendbarkeit der Integratoren, welche durch vorstehenden Satz bereits genügend ausgesprochen ist, recht eingehend zu erörtern, ist ein V. Capitel, welches die Hälfte des Werkchens in Anspruch nimmt, verschiedenen Fällen gewidmet, in denen die graphische Integration Platz greifen kann. Diese Fälle sind: *a)* die Berechnung des Inhalts ebener Flächen; *b)* die Construction ebener Curven, wenn ihre Derivationscurven gegeben sind; *c)* die Construction der parabolischen Curven $y = \sum_m^0 {}_k\, a_k x^k$ durch successive Integration und die Bestimmung der reellen Wurzeln der Gleichungen $\sum_m^0 {}_k\, a_k x^k = 0$; *d)* die Ermittelung von statischen Momenten, Schwerpunkten und quadratischen Momenten ebener Flächen; *e)* die Bestimmung des Massennivellements von Bruckner; *f)* die Aufsuchung der Gestalt der elastischen Linie bei belasteten stabförmigen Körpern; *g)* die Elementartheorie der Stabilität von Tonnengewölben; *h)* Probleme bei Schiffsconstructionen; *i)* die einfachsten Bewegungsprobleme; *k)* einschlägige Probleme aus der Elektricitätslehre. In einem Appendix wird erörtert: eine Construction der logarithmischen Spiralen, der Exponentialcurve $y = a e^{bx}$, die Quadratur der Diagramme, welche erhalten werden durch den Trägheitsdynamometer von M. Desduits, die mechanische Lösung einiger einfacher Differentialgleichungen. Bei allen diesen Beispielen setzt natürlich der Herr Verfasser voraus, dass die betreffende Theorie bereits bekannt sei, sich in dieser Hinsicht nur auf das Wesentlichste beschränkend, zweckdienlich nur die dabei vorkommende mechanische Integration im Auge habend.

In allen diesen Fällen handelt es sich um Curven in rechtwinkligen Coordinaten. Ein Integrator für Curven in Polarcoordinaten — das geometrische Integrationsverfahren unter diesen Verhältnissen ist mir seit etwa zwei Jahren bekannt — wurde meines Wissens bis jetzt noch nicht construirt.

Die Bestrebungen der Herren Abakanowicz und Napoli, einen mehr und mehr vollkommenen Integrator zu beschaffen und einen solchen auf den Constructionsbureaux einzubürgern, sind höchst anerkennenswerth;

mögen ihre Arbeiten in dieser Richtung mit dem von ihnen gewünschten Erfolge gekrönt werden. Die Entwickelung des Ganges der Erfindung der Integraphen ist nicht nur für den Ingenieur von Interesse, sondern auch lehrreich für den Mathematiker. Denjenigen, welche sich rasch von der Fruchtbarkeit des Šolin'schen Integrationsverfahrens überzeugen wollen, ist das Lesen des letzten Capitels des vorliegenden, durch gute Figuren reich ausgestatteten Werkchens insbesondere zu empfehlen, namentlich wenn sie der Technik fern stehen, zumal die ganze Abhandlung in präciser Weise geschrieben ist.

Gern hätte ich die Construction der neuen Integratoren der Herren Abakanowicz und Napoli, sowie diejenigen der anderen Erfinder eingehender besprochen; ohne Figuren war dieses aber nicht möglich. Immerhin hoffe ich durch das Wenige, was ich darüber bemerkte, weitergehendes Interesse für die Sache erweckt zu haben.

Oberstrass-Zürich, im März 1887. Ferdinand Kraft,
Privatdocent am Eidgen. Polytechnikum.

A Synopsis of elementary results in Pure Mathematics: containing propositions, formulae, and methods of analysis, with abridged demonstrations. Supplemented by an Index to the Papers on Pure Mathematics which are to be found in the principal Journals and Transactions of learned Societies, both englisch and foreign, of the present century, by G. S. Carr, M. A. London: Francis Hodgson. Cambridge: Macmillan & Bowes. 1886. XXXVI, 935 pages, 20 plates.

Das in der Ueberschrift genannte Werk ist eines der eigenartigsten Erzeugnisse wissenschaftlichen Fleisses, welches uns jemals zu Gesicht gekommen ist. Welchem Mathematiker, jung oder alt, in den Jahren des Lernens oder des Lehrens, des Sichaneignens oder des Schaffens, wäre es nicht schon vorgekommen, dass er einen Satz, eine Formel, den Grundgedanken eines Beweises nöthig hat, der seinem Gedächtnisse entschlüpfte, oder von welchem er sich vergewissern möchte, inwiefern er neu ist? Bisher blieb ihm Nichts übrig, als in so und so vielen Handbüchern sich umzusehen und ausserdem etwa in den Abhandlungsregistern, welche in dieser Zeitschrift alljährlich zweimal veröffentlicht werden, zu vergleichen, ob und in welchen Zeitschriften oder Akademieberichten der ihn beschäftigende Gegenstand behandelt sei. Diese zeitraubende Mühe des Nachschlagens will Herr Carr durch seine Synopsis wesentlich erleichtern. Erstens liefert er in dem Texte seines fast unhandlich starken Bandes die wichtigsten landläufigen Formeln und Sätze der gesammten reinen Mathematik, mit Ausschluss der Functionentheorie. Jeder Satz ist mit einer fortlaufenden Nummer 1 bis 6165 versehen, woraus man annähernd die Reichhaltigkeit des Inhalts abschätzen kann, allerdings nur annähernd; denn in dieser Numerirung sind nicht wenige Lücken, deren Bestimmung es ist, in künftigen Auflagen durch bis dahin neu hinzutretendes Material ausgefüllt zu werden, ohne die Nummern der in der heutigen ersten Auflage schon vorhandenen Sätze abändern zu müssen. Von dem Capitel der Variationsrechnung zu dem der Differentialgleichungen ist beispielsweise ein Sprung von 3091 auf 3150, wofür leider durch einen sich 13 Seiten hindurch fortsetzenden Irrthum 3050 flgg. gedruckt ist, so dass dann auf S. 473 nach 3111 (eigentlich 3211) sofort 3212 erscheint. Man wird gut thun, diese Druckfehler vor dem Gebrauche zu verbessern, um nicht beim Nachschlagen fehlzugehen. Bezüglich der Beweise ist Gleichförmigkeit nicht vorhanden. Bald ist einem Satze eine Andeutung zum Beweise beigefügt, bald nicht, selten ist er ausführlich; die Synopsis will eben und soll kein Lehrbuch sein. Nach einigen Stichproben, welche wir anstellten, genügen übrigens die Beweisandeutungen, um den, der die Sachen versteht und nur vergessen hatte, auf die richtige Spur zu leiten; ein vollgiltiges Urtheil wird erst nach längerem Gebrauche des Werkes sich ergeben. Soviel erscheint uns schon heute ersichtlich, dass die geometrischen Abschnitte den analytischen gegenüber bevorzugt sind. Wenn wir seither nur vom Texte sprachen, so hat Herr Carr zweitens ein Inhaltsverzeichniss beigefügt, welches neben den Gegenständen, über welche man sich in der Synopsis selbst Auskunft verschaffen kann, und die durch ein Sternchen äusserlich bemerkbar gemacht sind, auch zahlreiche andere Namen enthält, bei welchen auf Zeitschriften und Akademieberichten soweit verwiesen ist, dass der betreffende Band (freilich ohne Seitenzahl, die man selbst suchen muss) angegeben ist, wo der Gegenstand zur Behandlung kam. In diesem Inhaltsverzeichnisse ist die Functionentheorie wenigstens nicht ausgeschlossen. Vollständigkeit in der ersten Auflage eines solchen Werkes zu erreichen dürfte unmöglich sein, und kein billig Denkender wird seine Anforderungen gleich darauf stellen. Eine der Vollständigkeit nahe Reichhaltigkeit zeichnet aber jedenfalls auch das Inhaltsverzeichniss aus, wie uns gleichfalls zu dem Zwecke der Prüfung angestellte Stichproben überzeugt haben. Somit glauben wir mit gutem Gewissen das Werk empfehlen zu können, für welches man dem Herausgeber, wie der Verlagshandlung Dank wissen muss.

Cantor.

Tables d'Antilogarithmes par H. Prytz, capitaine. Édition stéréotype publiée sous les auspices de l'Académie royale des sciences à Copenhague. Copenhague, Lehmann & Stage, libraires éditeurs. 27 pag.

Die Tabellen der Antilogarithmen sind nach den dreistelligen Logarithmen anfangend mit 0,001 und bis zu 0,999 sich erstreckend geordnet und gestatten, zu jedem derselben die zugehörige Zahl — das ist eben der

Antilogarithmus — unmittelbar abzulesen, und zwar sind diese Zahlen auf 15, auf 10 und auf 5 Stellen in drei Tabellen vereinigt. Um den Antilogarithmus zu solchen Logarithmen zu finden, welche nicht in den Tabellen stehen, bedarf es einer Hilfsrechnung, zu welcher weitere Tabellen dienen, welche die Logarithmen von $1+10^{-L}$ liefern, wo L irgend eine der um Tausendstel zunehmenden Zahlen von 0,001 bis zu 1 bedeutet. Jede Zahl T kann nämlich in Factoren von der Form $10^L.(1+10^{-L_1}).(1+10^{-L_2})\ldots$ zerlegt gedacht werden, oder, indem man die Multiplication ausführt, als aus den Theilen $10^L+10^{L-L_1}+10^{L-L_2}+10^{L-L_1-L_2}+\ldots$ bestehend. Alsdann ist $\log T=L+\log(1+10^{-L_1})+\log(1+10^{-L_2})+\ldots$ und diese einzelnen Theile von $\log T$ liefert die Antilogarithmentabelle in Verbindung mit den Hilfstabellen.

Sei beispielsweise T aus der Angabe

$$\log T=6{,}50397\ 16428\ 98988$$

zu ermitteln.

Unter den Antilogarithmen findet sich

$$L=6{,}503=\log 3184197{,}52172612$$

und damit der erste Theil von $\log T$.

Nun sucht man die nächstkleinere Zahl zu

$$\log T-L=0{,}00097\ 16428\ 98988$$

in der Hilfstabelle und findet daselbst

$$0{,}00097\ 11775\ 44316=\log(1+10^{-2{,}65})=\log(1+10^{-L_1}).$$

Man zieht diesen neuen Theil von $\log T-L$ ab und erhält:

$$\log T-L-\log(1+10^{-L_1})=0{,}00000\ 04653\ 54672.$$

Erneuertes Aufschlagen der Hilfstabelle zeigt

$$0{,}00000\ 04653\ 54672=\log(1+10^{-5{,}97})=\log(1+10^{-L_2}).$$

Mithin ist in diesem Falle

$$\log T=L+\log(1+10^{-L_1})+\log(1+10^{-L_2}),$$

und daraus folgt, wie oben bereits bemerkt,

$$T=10^L+10^{L-L_1}+10^{L-L_2}+10^{L-L_1-L_2}.$$

Jetzt tritt wieder Benutzung der Antilogrithmen ein, aus welchen man entnimmt:

$$\begin{array}{lll}
Num.\log L & =Num.\log 6{,}503 & =3184197{,}52172612\\
Num.\log(L-L_1) & =Num.\log 3{,}853 & =\quad 7128{,}53030126\\
Num.\log(L-L_2) & =Num.\log 0{,}533 & =\quad 3{,}41192911\\
Num.\log(L-L_1-L_2) & =Num.\log 0{,}883-3 & =\quad 0{,}00763835\\
\hline
 & & T=3191329{,}47159484
\end{array}$$

Die so erreichte Genauigkeit dürfte der Weitschweifigkeit des Verfahrens einigermassen das Gleichgewicht halten, wenn auch nicht verschwiegen werden darf, dass die Rechnung naturgemäss noch bedeutend länger wird, wenn bei der allmäligen Zerlegung von $\log T$ noch weitere Theile $\log(1+10^{-L_3})$ u. s. w. berücksichtigt werden müssen.

In der Einleitung zu den Tabellen ist auch gezeigt, wie man sie anwenden kann, um die entgegengesetzte Aufgabe zu lösen, d. h. $\log T$ zu finden, wenn T gegeben ist.

CANTOR.

Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Decimaltheilung des Quadranten, mit ausführlichen Tafeln zum Uebergang von der neuen Theilung des Quadranten in die alte und umgekehrt; nebst vierstelligen Tafeln der Zahlenwerthe der trigonometrischen Functionen, sowie gewöhnlichen Logarithmentafeln und Quadrattafeln herausgegeben von H. GRAVELIUS, mit einem Vorwort von W. FOERSTER, geh. Regierungsrath, Director der königl. Sternwarte und Professor an der Universität zu Berlin. Berlin 1886, Georg Reimer. XV, 203 S.

War es übertriebene Folgerichtigkeit oder war es wirkliche Einsicht, wenn die Metercommission am Ende des XVIII. Jahrh. verlangte, auch den Winkel in die decimal getheilten Grössen einzubegreifen? Diese Frage ist bald mit ja, bald mit nein, dann wieder mit ja beantwortet worden, und die Sache der Bejahenden konnte kaum einen bessern Anwalt, als Herrn Wilh. Foerster finden, der mit gewohnter Beherrschung des Gegenstandes und der Sprache in dem Vorworte des uns vorliegenden Bandes für sie eintritt. Aber wenn die decimale Theilung bei dem Winkel Platz greifen soll, wenn also künftig der rechte Winkel in 100 Centigrade zu je 100 Centiminuten zu je 100 Centisecunden zerfallen soll, so ist dreierlei nothwendig. Es müssen erstens neue Winkelmessinstrumente nach dieser Decimaltheilung hergestellt werden; es müssen zweitens der neuen Eintheilung entsprechende handliche Tabellenwerke bearbeitet werden; es müssen endlich drittens für die voraussichtlich lange Zwischenzeit, während welcher alt und neu getheilte Apparate, zunächst jene, später muthmasslich diese in der Mehrzahl, nebeneinander in Gebrauch sein werden, Hilfstabellen beschafft werden, welche die Umrechnung von alten Winkeln in neue und rückwärts die von neuen Winkeln in alte leicht und sicher ermöglichen. Die Lösung der ersten Aufgabe fällt der mechanischen Werkstätte, die der zweiten und dritten der Druckerei anheim, und ihr hat Herr Gravelius Zeit und Mühe gewidmet, ihr die Reimer'sche Verlagshandlung ihre Pressen zur Verfügung gestellt. Der Anfertiger der Tafeln, Herr Gravelius, hat sich nicht vor der Arbeit gescheut, die Logarithmen der Kreisfunctionen auf zwölf Stellen zu berechnen, wenn er auch jetzt nur fünf Stellen im Druck veröffentlichte. Er behält sich vor, in einer späteren Veröffentlichung noch weitere Stellen dem Publicum mitzutheilen und alsdann auf die Euler-schen Formeln hinzuweisen, welche er seiner Rechnung zu Grunde legte. Nach vollendeter Rechnungsarbeit wurden die Ergebnisse mit den seit 1799 in Druck vorhandenen, ungemein selten gewordenen „Neuen trigonometrischen Tafeln für die Decimaltheilung des Quadranten von Hobert und Ideler“ verglichen und in voller Uebereinstimmung befunden. Da ausserdem bei der Correctur keine Vorsichtsmassregel ausser Acht gelassen worden zu sein scheint, so dürfte die Zuverlässigkeit der Tafeln hinlänglich gewährleistet sein. Druck und Ausstattung entsprechen den Anforderungen, zu welchen man der Verlagshandlung gegenüber berechtigt ist.

CANTOR.

Erdkunde und Mathematik in ihren gegenseitigen Beziehungen. Von Dr. SIEGMUND GÜNTHER, Professor an der K. technischen Hochschule zu München. München 1887, Theodor Ackermann. 30 S.

Der Verfasser dieser Abhandlung ist ausgegangen von einem mathematischen Lehrgange: er ist im Verlauf der Zeit zu geographischen Studien übergeschritten; er hat den letzteren es zu verdanken, wenn er von der immerhin eingeengten Lehrthätigkeit an einer Mittelschule zu dem Katheder einer Hochschule gelangte, dem Platze, welchen er auszufüllen durch Kenntnisse und nicht gewöhnliche Beredsamkeit, wir können sagen, durch die Natur hingewiesen war. Wir persönlich wissen, dass Herr Günther der Mathematik und ihrer geschichtlichen Erforschung nicht untreu geworden ist, wenn er jetzt auch Professor der Geographie ist. Diese als Programm seiner künftigen Thätigkeit aufzufassende Antrittsabhandlung macht es auch dem lesenden Publikum offenbar. Die Geographie, oder besser gesagt die Erdkunde hat ja eine ähnliche Geschichte, wie Herrn Günther's äussere Entwickelung war. Die ältesten Geographen waren zugleich die ältesten Geometer. Allmälig erst zweigte die Erdkunde von der Feldmessung sich ab und wurde immer handwerksmässiger. In eine neue, kaum erst wenige Jahrzehnte alte Entwickelung trat die Erdkunde und wurde dabei wieder zur Wissenschaft, als sie zu einem Zweige der angewandten Mathematik zu werden den Anlauf nahm. Diese hier in gedrängter Kürze angedeuteten Gedanken sind es, welche Herr Günther geistvoll und durch zahlreiche Beispiele belegt erörtert. Er liefert dadurch den deutlichsten Beweis, dass er an dieser fortschreitenden Rückbildung der Erdkunde auch künftig kräftig weiter arbeiten wird, wie er durch seine Geophysik sich schon hervorragende Verdienste um dieselbe erworben hat.

CANTOR.

Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert. Abhandlung zu dem Programm des Gymnasiums zu Zwickau, von Oberlehrer Dr. WAPPLER. Zwickau 1887. 32 S.

Im XXVIII. Bande dieser Zeitschrift, hist.-lit. Abth. S. 1—13, hat sich unser Freund Curtze mit der für Mathematiker ungemein reichhaltigen Sammelhandschrift Db. 86 der königl. öffentlichen Bibliothek zu Dresden beschäftigt. Die gleiche Bibliothek besitzt unter dem Zeichen C. 80 eine vielleicht noch interessantere Handschrift, welche Herr Wappler einer erfolgreichen Untersuchung unterzog. Er entdeckte in ihr insbesondere auf Bl. 350—365′ eine lateinisch geschriebene Algebra, welche in unserer Vorlage zum Abdruck gebracht ist. Mehrfache Umstände lassen den Abdruck als durchaus gerechtfertigt erkennen: handelt es sich doch um ein Schriftstück, welches einst im Besitz von Johann Widmann von Eger war, welches später von Adam Riese benutzt wurde. Die erstere Thatsache beweist Herr Wappler durch eigenhändige Notizen Widmann's, aus welchen überdies folgt, dass Widmann Vorlesungen über Algebra hielt und dass ebenderselbe wahrscheinlich Verfasser des Algorithmus linealis ist, auf welchen Friedlein zuerst hinwies. Nicht minder gesichert ist das in Bezug auf Riese Behauptete. Riese beruft sich bekanntlich in seiner Coss auf ein altes lateinisches Buch, dessen Text er eine Reihe von Aufgaben entlehne, während er andere Aufgaben als auf dem Rande jenes Buches aufgeschrieben bezeichnet; endlich will er wieder andere Aufgaben „im lateinischen buch an einer anderen stel gefundenn“ haben. Alles das stimmt buchstäblich mit der Handschrift C. 80 überein. Die andere Stelle ist die Schrift „De numeris datis“ des Jordanus Nemorarius, welche gleichfalls in dem Sammelbande enthalten ist. Somit haben wir in der nunmehr gedruckten Algebra von freilich noch unbekanntem Verfasser ein Schriftstück vor uns, welches um 1490 bereits in Deutschland algebraischen Vorlesungen an der Universität Leipzig zu Grunde lag und welches einige Jahrzehnte später durch Adam Riese in einer Weise benutzt wurde, welche ihre Entschuldigung eben noch in der ehrlichen Anführung des Musterwerkes findet. Diese Thatsachen machen jede weitere Empfehlung entbehrlich. Ganz gewiss hat aber auch Herr Wappler durch die Herausgabe der alten Algebra und durch die Bemerkungen, zu welchen sie ihm Anlass gab, sich selbst bei allen Fachgenossen bestens empfohlen.

Cantor.

Histoire des sciences mathématiques et physiques, par M. Maximilien Marie, répétiteur de mécanique, examinateur d'admission à l'école polytechnique. Tome X: De Laplace à Fourier. Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire. 1886. 229 pages.

Vier Biographien etwa mögen in diesem Bande den mathematischen Leser zu fesseln geeignet erscheinen: die von Monge, von Laplace, von Legendre, von Carnot. In ihnen findet man interessante Punkte aus der Lebensgeschichte jener Persönlichkeiten erzählt und Auszüge aus manchen ihrer Schriften gegeben. Besonders das Legendre'sche Werk über die elliptischen Functionen ist in dieser Beziehung gut weggekommen. Weniger zufrieden dürfte der Calcul des probabilités von Laplace mit der ihm gewordenen Würdigung sein. Herr Marie besitzt, wie er S. 54 sagt, nur eine in verhältnissmässigen Grenzen sich haltende Zuneigung *(un intérêt relatif)* zu diesem Theile unserer Wissenschaft, glaubt indessen doch einige Worte ihm widmen zu müssen. Diese „einige Worte" beschränken sich auf eine Ableitung der elementarsten Sätze, welche acht Seiten füllen, und auf eine auf einer Seite abgehandelte Darstellung des Petersburger Problems. Ein Name irgend eines der Schriftsteller, die sich mit Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt haben, ist nirgend erwähnt. Worin die Verdienste von Laplace selbst bestehen, sieht der Leser auch nicht. Das analytisch so ungemein interessante Hilfsmittel der Fonctions génératrices ist nicht einmal genannt. Auch in der Darstellung der Mécanique céleste und des Système du monde vermissen wir die Erwähnung der sogenannten Laplace-schen Ebene; Namen, welche geradezu Kunstausdrücke geworden sind, dürften doch in einem geschichtlichen Werke nicht fehlen! Eine kennzeichnende Lücke findet sich insbesondere bei der Erörterung der Laplace'schen Annahme der Weltenbildung. Davon nämlich, dass es einmal einen gewissen Immanuel Kant gegeben habe, der zwar keineswegs die gleiche, aber doch eine verwandte Hypothese aufgestellt hatte, ist nicht mit einem Worte die Rede! Ob Herr Marie Kant selbst nicht kennt oder ob er ihn nur nicht kennen will, vermögen wir natürlich nicht zu entscheiden. Den Namen des deutschen Mathematikers Pfaff finden wir auf S. 214; von seinen bahnbrechenden Leistungen im Gebiete der Differentialgleichungen ist nicht die leiseste Andeutung gegeben.

CANTOR.

Bibliographie

vom 1. April bis 31. Mai 1887.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien, mathem.-naturwissenschaftl. Cl. II. Abth. 94. Bd. Nr. 1—5. Wien, Gerold. 18 Mk. 60 Pf.

Denkschriften der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien, mathem.-naturwissenschaftl. Cl. 51. Bd. Ebendas. 46 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Ohrtmann, herausgeg. v. M. Henoch u. E. Lampe. 16. Bd., Jahr 1884. 2. Heft. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Bibliotheca mathematica (Zeitschr. f. Geschichte d. Math.), herausgeg. von G. Eneström. Jahrg. 1887, Nr. 1. Berlin, Mayer & Müller. compl. 4 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgeg. v. E. Schönfeld u. H. Seeliger. 22. Jahrg., 1887, 1. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Astronomische Beobachtungen auf der Universitätssternwarte zu Königsberg. 37. Abth., II. Thl., herausgegeben von E. Luther. Königsberg, Koch & Reimer. 10 Mk. 70 Pf.

Astronomisch-nautische Ephemeriden für das Jahr 1888. Deutsche Ausg., redig. v. F. Anton. Triest, Schimpff. 2 Mk. 70 Pf.

Die veränderlichen Tafeln des preuss. Normalkalenders f. 1888, herausgeg. v. W. Foerster. Nebst einem statist. Beitrag von E. Blenck. Berlin, statist. Bureau. 5 Mk.

Publicationen des astro-physikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 17. Leipzig, Engelmann. 10 Mk.

Beobachtungen des astro-physikalischen Observatoriums zu O-Gyalla. 8. Bd., 1. Thl.: Beobachtungen vom Jahre 1885, herausgeg. v. N. v. Konkoly. Halle, Schmidt. 6 Mk. 50 Pf.

Reine Mathematik.

Bolza, O., Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale 1. Ordnung und 1. Gattung. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 80 Pf.

Schlesinger, L., Ueber lineare homogene Differentialgleichungen 4. Ordn. (Dissert.) Berlin, Mayer & Müller. 2 Mk. 40 Pf.

Geigenmüller, R., Elemente der höheren Mathematik. V. Integralrechn., 1. Curs. Mittweida, Schulze. 2 Mk.

Kindel, P., Eine reciproke Zuordnung der räumlichen Elemente. (Dissert.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Hespe, W., Ueber windschiefe Flächen mit einer Directorebene. (Dissert.) Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 60 Pf.

Angewandte Mathematik.

Woelfer, H., Die praktische Geometrie für techn. Lehranstalten. Berlin, Springer. 3 Mk.

Voss, A., Elementare Darstellung der mechanischen Wärmetheorie für Gase. Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Israel-Holtzwart, K., Supplement zu den Elementen der theoretischen Astronomie. Wiesbaden, Bergmann. 1 Mk. 60 Pf.

Weiss, E., Bilderatlas der Sternenwelt. 1. Lief. Esslingen, Schreiber. 1 Mk.

Physik und Meteorologie.

Weinhold, A., Physikalische Demonstrationen. 2. Aufl., 1. Lief. Leipzig, Quandt & Händel. 7 Mk 50 Pf.

Kiewiet, J., Untersuchungen über die Biegungselasticität verschiedener Metalle. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk.

Hagemann, A., Ueber Wärme- und Volumänderung bei chemischen Vorgängen. Aus dem Dänischen v. P. Knudsen. Berlin, Friedländer. 60 Pf.

Wittwer, C., Die thermischen Verhältnisse der Gase, insbesondere der Kohlensäure. Stuttgart, Wittwer. 1 Mk. 80 Pf.

Mache, J., Ueber die Abhängigkeit der Helligkeit der Sterne von der Pupillenöffnung. Halle, Schmidt. 40 Pf.

Verdet, E., Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichts. Deutsch von K. Exner. 2. Bd., 3. Abth. (Schluss.) Braunschweig, Vieweg. 5 Mk. 30 Pf.

Kiesel, G., Ueber atmosphär. Elektricität. (Dissert.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Zenger, W., Die Meteorologie der Sonne und die Wetterprognose des Jahres 1886. Prag, Rivnac. 1 Mk. 44 Pf.

Busch, F., Ueber die Dämmerung, insbesondere über die glänzenden Erscheinungen des Winters 1883/84, über den Bishop'schen Ring und das erste Purpurlicht. Arnsberg, Stein. 1 Mk. 50 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Quelques lettres inédites de René Descartes et de Constantyn Huygens.

Par

Dr. D. Bierens de Haan.

Ces lettres ont rapport à une polémique entre Jan Jansz. Stampioen[1]) et Jacobus a Waessenaer[2]) au sujet de l'extraction de la racine cubique d'un binôme irrationnel.

Le premier avait publié en 1639 son „Algebra oft Nieuwe Stel-Regel"[3]), et à cette fin avait érigé une propre imprimerie à la Haye, sous le nom de Sphaera Mundi. L'autre l'avait attaqué dans ses „Aenmerckingen op den nieuwen Stelregel, 1639."[4])

Il en resulta une série de pamphlets polémiques[5]) et une gageure pour fl. 600, soumise à trois arbitres, Jac. Golius[6]) et Fr. van Schooten[7]), professeurs de mathématiques à l'université de Leiden, et Andr. van Berlicom,[8]) Secrétaire de Rotterdam. Ce furent les deux premiers, qui le 24 Mai 1640 prononcèrent une sentence[9]), que Stampioen avait perdu ses fl. 600 aux pauvres de Leiden.

Une recherche, dont j'ai donné le résultat dans mes Bouwstoffen etc. [Matériaux pour l'histoire des sciences mathématiques et physiques dans les Pays-Bas] No. XXX, a prouvé que dans cette dispute Descartes[10]) a joué un rôle important, qu'il jugea qu'il y allait de son propre honneur, et qu'il fournit à Waessenaer les argumentations nécessaires, dont celui-ci faisait un usage très-juste et censé. Aussi on en trouve les résultats dans des ouvrages scientifiques de ce temps-là[11]).

Constantyn Huygens[12]) joua plutôt le rôle de médiateur.

Cet apperçu suffira pour faire comprendre les lettres suivantes.

I. Constantyn Huygens à Descartes.
28 décembre 1639.

(La minute se trouve à Amsterdam, Acad. Roy. des Sciences, Fonds Huygens.)

Monsieur!

Apres la remise de quelques iours, dont j'advoue que moy ou mes occupations sont coupables j'ay enuoyé querir Stampioen pour luy faire signer le Compromis. Mais bien loin de là il m'a dit qu'il contenoit des choses, ou il trouuoit à redire. de quoy m'estant formalisé comme je debuois pas (car ie confesse qu'un peu de cholere me le fit mener d'un air qui n'est pas de ma coustume) j'ay refusé de lire seulement ce qu'il dit auoir conceu pour y adiouster sur les formes de l'arbitrage et en somme luy ay promis de ne me mesler plus de son affaire la *(sic)* voyant chicaneur impertinent et injuste, qui venoit se retracter 15 iours apres la ratification d'un Acte qui se pouuoit concerter entre gens d'honneur en une heure, et sur la deliberation du quel il n'auoit esté pressé ni precipité. Confus de ceste honte il s'est rendu à Leiden des le lendemain ou ayant entretenu M. Golius sur lesd[i]tes formes d'arbitrer, il m'est venu rediro qu'il ne faisoit plus difficulté de signer le Compromis; mais quenfin nous disposions des juges plus auant quils ne se trouueroyent contents de s'entremettre en l'affaire. C'est ce qu'il m'a voulu specifier en beaucoup de circonstances mais j'ay persisté en ce qu'il me semble que la cholere ne m'a pas faict resoudre mal à propos et par conclusion lay enuoyé vers sa partie ou au moins encor vers Leiden pour y accorder, et arrester de bouche ce dont je voyois bien qu'on ne viendroit point à bout aueq luy par escrit. Pour moy que depuis la frasque qu'il m'auoit faicte je me tenois aussj detaché de luy que j'en estoy desgoustez etc. Vous voyez, Monsieur ou nous en sommes, et s'il vous plaist d'entendre mon aduis dessus ie vous rediray qu'asseurement il sera necessaire que les parties ou bien leurs amiz autorisez s'entendent de bouche sur ces formes, en quoy comme par les discours que St.[ampioen] dit que Golius luy auroit tenuz j'apperçois qu'apres beaucoup d'allées et venues on pourroit auoir compté sans l'hoste. j'estime que ceste concertations se pourroit faire en presence ou aueq communication de Golius et mesmes de Schooten, le reste n'ayant à faire gueres de difficulté de se conformer à leurs sentiments. C'en sont, tant y a les miens. Je les soubsmets aux v[ost]res; et pour le reste quelque renonciation que j'ay faicte à St.[ampioen]: si vous continuez à me recoignoistre capable de vous seruir en cette brouillerie, je vous prie de croire que quod dictum indictum erit et que je suis trescontent de vous y tesmoigner; comme en toute autre chose plus digne de vous, que je suis sans reserue.

Monsieur V[ost]re

A la Haye ce 28 de Decembre 1639.

aubout du quel Dieu vous donne l'entrée d'une année tres heureuse.

Monsieur! Je me trouue extremement edifié de l'approbation que vous donnez à mes defences contre M. de Saumaise[13]) faisant le mesme fondement sur v[ost]re probité que sur v[ost]re jugement apres lequel et celuy de mad[am]e conscience je n'en considere point d'autres. Je vous renuoye sa lettre, ou il continue de poser contre la Verité que j'auroy prins parti; mais le desplaisir que j'ay de ce costé la s'adoucit tout a faict par l'ingenuité de sa confession en v[ost]re endroit lors que submittende fasces tibi, comme il debuoit, il aduoüe, combien il y a à dire entre v[ost]re Philosophie et sa Literature. Il est grand personage en son mestier et pour tel je le reputeray tousjours, mais depuis ceste modestie si franche je m'estime obligé de l'honorer encor plus que je n'ay tousiours faict.

Au Sr. Descartes.

II. René Descartes à J. van Waessenaer.

1er février 1640.

(La lettre se trouve à Londres, British Museum, Bibliotheca Harleiana 4936, p. 179.)

Monsieur J. a Waessenaer!

Ick bidde u willen drie brieven schrijven, 2 aen de twee professors math. van Leyden Mynheer Golius en Myr. Schooten, en de derde aen de Heer Berlekom, om haer vriendeliic te bidden haer opinie willen binnen een maend schrifteliic geven, ick sende u de copie van de brief aen de Heer Berlecom so als ick meint dat goed sal wesen dat ghy schriive, ghy mach de twee andere van u selfs wel maecken, ende ick bidde u dese drie brieven met u eygen handt geschreven ende onderteyckent, doch ongesloten toekomende diensdag wesende den 7 Feb. nieuwen stijle willen bestellen aen Mynheer van Hoogelande,[14]) welcke sal bij die van de H. Berlicom alle schriften daertoe hoorende by setten ende hem door een bekende schipper senden. ende om u de moeyte van ons leste schriift copieeren te spaeren ick hebbe over acht daegen het selfde te Leyden gesonden om te laeten lesen aen Mr. Golius en Schooten, so dat men sal hetselfde ooc aen de H. Berlicom senden. ghy moet die brieven also schriiven indien ghy binnen maendaeg geen schriift van St.[ampioen] ontfang, geliic wij gelooven dat hy sal niet veel se schriiven hebben om te bewiisen dat siin regel goed is, maer indien ghy iet van hem ontfang aen welc men moet antwoorden soo moet ghy hetselfde hier senden cito cito. Ick sal ooc geerne hebben u solutie op de twee questie van St.[ampioen] so haest als sie gereed siin, ende ick sal hier byvoegen het bewiis van onsen regel om den teerling wortel te trecken uyt tweenaemige getallen.

(ick laet u ooc de sorge om Mynheer Schotanus te bidden siine sententie te willen geven etc. Ende ghy moet alle de arbiters bidden te antwoorden [op de][15]) selfde 3 pointen die siin in de [brief][15]) aen de H. Berlicom.)[16])

Premierement je prouve que lorsqu'on a soustrait les quarrez des parties l'un de l'autre, si ce qui reste, nest pas un nombre cubique la racine cherchee, n'est pas un simple binome en faisant voir que toutes et quantes fois que cete racine est un simple binome la difference qui est entre les quarrez des parties de son cube est un nombre cubique. Soit $x+\sqrt{y}$ la racine cherchée le cube donné est égal à $x^3+3xy+3xx\sqrt{y}+y\sqrt{y}$ et le quarré de x^3+3xy qui est la partie rationelle de ce cube est $x^6+6x^4y+9xxyy$ puis le quarré de l'autre partie $3xx\sqrt{y}+y\sqrt{y}$ est $9x^4y+6xxyy+y^3$, et ostant ces quarréz l'un de l'autre il reste $x^6-3x^4y+3xxyy-y^3$ ou bien $-x^6+3x^4y-3xxyy\pm y^3$ qui est nombre cubique ainsy qu'il faloit demonstrer.

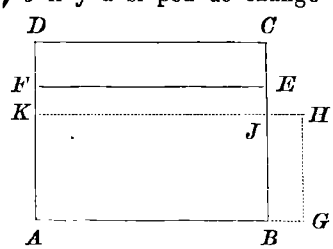
Et il est a noter que la racine cubique de ce nombre est $xx-y$ ou bien $y-xx$ c'est a dire la difference qui est entre les quarrez des parties de la racine $x+\sqrt{y}$, en sorte que sans connoistre cete racine si on me donne seulement son cube que je nôme $a+\sqrt{b}$ ie tire la racine cubique de $aa-b$ ou $b-aa$ que ie nome c et j'ay c egal à $xx-y$ ou bien $y-xx$.

Or la cause pourquoy, lorsque apres auoir soustrait les quarrez des parties l'un de l'autre on trouve que le reste n'est pas nombre cubique, ie fais multiplier le cube donné par ce reste, est affin d'avoir un binome qui soit tel que la difference des quarrez de ses parties soit un nombre cubique, et ainsy que si sa racine est un binome ce ne soit qu'un simple binome ce que ie demonstre en cete sorte. Soit $a+\sqrt{b}$ le cube donné et que $aa-b$ ou $b-aa$ ne soit pas nombre cubique, ie multiplie $a+\sqrt{b}$ par $aa-b$ il vient $a^3-ab+aa\sqrt{b}-b\sqrt{b}$ et du quarré de a^3-ab qui est $a^6-2a^4b+aabb$ ayant soustrait le quarré de $aa\sqrt{b}-b\sqrt{b}$ qui est $a^4b-2aabb+b^3$ il vient $a^6-3a^4b+3aabb-b^3$ qui est nôtre cubique ainsi qu'il faloit demonstrer et sa racine est $aa-b$.

Maintenant pour venir a la demonstration de la regle je prens $a+\sqrt{b}$ pour le binome donné, et ie suppose que la racine cubique de $aa-b$ se peut tirer et ie la nomme c, puis posant $x+\sqrt{y}$ pour la racine cubique de $a+\sqrt{b}$. J'ay son cube $x^3+3xy+3xx\sqrt{y}+y\sqrt{y} \propto a+\sqrt{b}$ et par consequent la partie rationelle de ce cube $x^3+3xy \propto a$. Et pourceque cest egal à $xx-y$ ainsy qu'il a esté dit cy devant iay $y \propto xx-c$ et $3xy \propto 3x^3-3cx$, a quoy adioustant x^3 i'ay $4x^3-3cx \propto a$ ou bien $4x^3 \propto 3cx+a$; ou bien $8x^3 \propto 6cx+2a$ et faisant $z \propto 2x$ i ay $z^3 \propto 3cz+2a$. Or si la racine de cete de[uxième][15]) equation, n'est pas un nombre rationel il est evident que la racine cubique $a+\sqrt{b}$ ne peut estre exprime par aucun binome, et si elle est nombre rationel ce doit estre necessairement un nombre entier a cause que $3c$ et $2a$ sont nombres entiers. Et par consequent x

qui est la moitié de z est necessairement aussi nombre entier ou la moitié d'un nombre entier.

De plus posant n pour toute la racine cubique de $a+\sqrt{b}$, et ayant c pour la difference qui est entre les quarrez de ses parties, i'ay $\frac{1}{2}n+\frac{c}{2n}$ pour la plus grande de ces parties et $\frac{1}{2}n-\frac{c}{2n}$ pour la moindre car le quarré de $\frac{1}{2}n-\frac{c}{2n}$ qui est $\frac{1}{4}nn-\frac{1}{2}c+\frac{cc}{4nn}$ estant ostó du quarré de $\frac{1}{2}n+\frac{c}{2n}$ qui est $\frac{1}{4}nn+\frac{1}{2}c+\frac{cc}{4nn}$ il reste c et $n+\frac{c}{n}$ est egal a z. Mais pourceque le nombre n m'est inconnu et est le binome que ie doy trouver, la principale subtilité de la regle consiste en ce que au lieu de n ie prens une racine cubique rationelle que ie nommeray icy m un peu plus grande que n mais qui ne l'excède pas de $\frac{1}{2}$, et que à m i'adiouste c divisé par ce mesme m car dautant l'exces de $\frac{c}{n}$ par dessus $\frac{c}{m}$ est tousiours moindre que celuy de m par dessus n il est certain que $m+\frac{c}{m}$ est un nombre rationel plus grand que z d'une quantité qui est moindre qu'une unité; et ainsy que z ou bien $n+\frac{c}{n}$ estant necessairement un nombre entier en cas que la racine cherchée soit un binome, ce nombre entier est le plus grand qui soit compris dans le nombre rompu $m+\frac{c}{m}$. Ensuite de qu[oi][15]) tout le reste est clair, car ayant ainsy trouvé le nombre qui doit estre égal à z, pour scavoir si la racine de $z^3 \propto 3cz+2a$ se peut tirer ie divise par ce nombre het dobbel van 't ledige deel [le double de la partie rationnelle], c'est a dire $2a$ tot het komende ick [voege][15]) [divisé par z, et j'y joins] $3c$ et si $3c+\frac{2a}{z}$ n'est pas égal à zz il est evident que le nombre pris pour z ne luy est pas égal et ainsy que la racine de $z^3 \propto 3cz+2a$ n'est pas rationelle, mais s'il est egal la moitié de z et x l'une des parties de la racine cherchée, du quarré de laquelle ostant c i ay y qui est le quarre de l'autre partie. Et en tout cecy i'ay supposé a plus grand que $\sqrt{b}$ ensuite du quoy x est aussy plus grand que $\sqrt{y}$ mais quand a est moindre que $\sqrt{b}$ il y a si peu de changement que ce n'est pas la peine de l'escrire.



Il reste seulement encore icy a prouver que l'excez de $\frac{c}{n}$ par dessus $\frac{c}{m}$ est moindre que celuy de m par dessus n, et pour ce faire ie prends AB égal à n dont le quarré $ABCD$ est necessairement plus grand que c, pourceque c n'est que la difference qui est entre les quarrez des parties de n. Je prends donc le rectangle $ABEF$ pour c et ainsy AF est $\frac{c}{n}$ puis ie prens AG pour m en sorte que BG est moindre que $\frac{1}{2}$ et faisant $AGHK$ egal à c le rectangle $BGHJ$ est egal au rectangle $JEFK$ et pourceque JK est plus grand que JB, FK est moindre que BG et ainsy AK qui est $\frac{c}{m}$ est moindre que AF ou $\frac{c}{n}$ d'une quantité moindre que celle dont m surpasse n, qui est tout ce qu'il falloit demonstrer.

Ick sal hier noch byvoegen een generael regel om allerley andere wortels te trecken uyt binomische getallen.

Bereydinge.

Treckt de quadraeten der deelen van malkanderen en de wortel der reste. indien sie een rationael getal is, maer indien sie is een surdische getal so menichvaldig het gegeven binomium door 't selfde reste als ghy den cubicwortel wilt trecken, ende door het quadraet van 't selfde reste als ghy wil den sursolid wortel trecken, ende door den cubus van 't selfde reste als ghy wil den Bisursolid wortel trecken ende so voorts van de andere.

Regel.

Treckt een rationael wortel uyt het heele binomium wat grooter als de waere is dat geen helfte en scheele, aen hem addeert den wortel van 't onderscheyt tusschen de quadraeten der deelen gedivideert door den selfden rationael wortel, als het ledige deel van 't gegeven binomium is grooter als het andere deel, maer als 't kleinder is substraheert denselfden. De helfde van 't grootste heele getal begrepen in dat aggregat, of in die reste is het ledige deel van de wortel, uyt wiens quadraet substraheert of aen 't selfde addeert, de wortel van 't onderscheyt tusschen de quadraten der deelen, ende komt het quadraet van 't ander deel. Wel verstaende als de wortel een binomisch getal is 't welc men kan altiid weeten door de multiplicatie van 't gevonden binomium, want het komende moet wesen geliic het gegeven getal of anders dee wortel is geen binomium.

Merckt dat hier overal als ick spreek van de wortel sonder te seggen wat wortel is ick verstae den sursolid wortel als ick wil den sursolid wortel trecken, ende alsoo van de andere maer ghy moet dit alles wat beter schicken als ick geschreven hebbe ende twee of 3 kleine exempels byvoegen. Ick ben

Ul. zeer dienstwilligen vriendt

den eersten Feb. 1640. Descartes.

A monsieur

Monsieur J. A. Waessenaer

Landmeter woonende

voor Claerenbergh

poort is betaelt tot Amsterdam. tot Utrecht.

Traduction de la première partie hollandaise de cette lettre
dd. 1er février 1640.

Monsieur J. A. Waessenaer!

Je vous prie de vouloir écrire trois lettres, 2 aux deux Professeurs de mathématiques à Leiden, Mrs. Golius et Schooten, et la troisième à Mr. Berlekom pour les prier humblement de vouloir donner leur opinion par écrit dans un mois; je vous envoie la copie de la lettre à Mr. Berlicom comme je la crois être bonne pour écrire: les deux autres vous pourrez les faire vous-même. Et je vous prie de vouloir écrire et signer ces trois lettres de votre propre main, et de les envoyer ouvertes, mardi prochain, le 7 février, Nouveau Style, à M. van Hoogelande, qui ajoutera à celle pour M. van Berlicom tous les écrits nécessaires, et l'enverra par un batelier connu. Et pour vous épargner la peine de copier notre dernier écrit, je l'ai envoyé il y a huit jours pour le faire lire à Mrs. Golius et Schooten, de sorte qu'on l'enverra encore à Mr. Berlicom.

Il faut écrire ces lettres de cette manière, pourvu qu'avant lundi vous ne receviez pas quelque écrit de Stampioen, parce que nous croyons qu'il n'aura pas beaucoup à écrire pour démontrer que sa règle est bonne: mais dans le cas que vous recevriez quelque chose de lui, à laquelle il faudrait répondre, il faut l'envoyer ici cito, cito. J'aimerai aussi avoir votre solution sur les deux questions de Stampioen aussitôt qu'elles seront prêtes.

Et j'ajouterai ici la démonstration de notre règle pour tirer la racine cubique d'un binôme.

Traduction de la dernière partie hollandaise de cette lettre.

J'ajouterai ici encore une règle générale pour tirer toutes sortes de racines d'un nombre binôme.

Préparation.

Cherchez la différence entre les carrés des parties du binôme: tirez la racine carrée de cette différence, quand elle est un carré: quand elle ne l'est pas, multipliez le binôme par la dite différence, quand vous voulez tirer la racine cubique; mais par le carré de la même différence quand vous voulez tirer la racine sursolide, et par le cube de cette différence, quand il s'agit de la racine bisursolide, et ainsi de suite pour les autres.

Règle.

Tirez la racine de la partie rationnelle du binôme, un peu plus grande que la vraie, mais qui n'en diffère pas d'une moitié; ajoutez-y la racine de la différence entre les carrés des parties; divisé par la même racine rationnelle, quand la partie rationnelle du binôme donné est plus grande que l'autre, irrationnelle; mais si elle est moindre, il faut prendre la différence. La moitié du plus grand nombre entier contenu dans cette somme (ou dans cette différence) est la partie rationnelle de la racine. Le carré de ce résultat doit être augmenté (ou diminué) de la racine de la différence entre les carrés des parties du binôme: le résultat est le carré de l'autre partie irrationnelle de la racine cherchée. Bien entendu: quand cette racine est aussi binôme: ce que l'on peut toujours savoir par la multiplication du binôme trouvé, puisque le résultat doit donner le binôme donné: si non, la racine ne saurait être un binôme.

Remarquez que partout ici, quand je parle de racine, sans dire quelle racine c'est, j'entends la racine sursolide, quand je veux tirer la racine sursolide: et de même des autres. Mais il faut arranger tout cela un peu mieux que je ne l'ai écrit, et y ajouter deux ou 3 petits exemples.

Je suis

votre ami tres-empressé

Descartes.

Le 1er février 1640.

à Monsieur

Monsieur J. A. Waessenaer

Arpenteur, demeurant

devant Clarenbergh

à Utrecht.

franc de port
jusqu'à Amsterdam.

III. Constantyn Huygens à Descartes.
14 août 1640.

(La minute se trouve à Amsterdam, Acad. Roy. des Sciences, Fonds Huygens.)

Monsieur!

Je ne responds pas si tard qu'il semble; car v[ost]re pacquet auoit vielli de 12 jours auant que m'estre rendu. Apres ceste justification, qui est fondée sur verité et au default de la quelle toute fois vous estes prié de vouloir suppléer par la consideration de mes occupations très assiduelees [*sic*] j'adjousteray que venant de lire la Preface qui se va publier soubs le nom de Waessenaer elle me semble un discours veritable, judicieux et discret et portant des coups aueq les quels on prendra congé de bonne grace de ces petites noises; pour enfin ne respondre plus au fol selon sa folie; qui ne prendroit point de fin. J'estime que vous n'aurez pas voulu prendre la peine de l'escrire en flamen; et de là vous juge heureux d'auoir trouué de si bons interpretes qui veritablement vous suiuent de si bonne façon et en termes si propres que la traduction seulem[en]t n'y paroist pas qui n'est pas un don commun à touts Translateurs M. van Surck[17]) qui est poli en tout vous y pourra auoir presté de sa diligence qui que ce soit vous luy en auez un peu bien d'obligation.

Je vous supplie de me pardonneer si je vous ay compté sabinorum somma de ce que vous auriez soubs la presse de Metaphysique. mes raporteurs l'auront tres souhaitté ainsi et moy de mesme, affamé que je suis sans cesse de voz escrits. Ainsi mons[ieu]r jaduoue que les Jesuites se mettant en posture de gaigner mon amitié en ce qu'ils vont vous tailler de la besoigne et en fin j'attendraij et toute raison le requiert que tant d'autres objections qui vous ont esté faictes paroissent un jour en ordre aueq voz solutions, ne se pouuant dire combien tout le publiq s'en tiendrat obligé à vostre amitié. Le perpetuel mouuement de ceste Armée m'a fait negliger de vous envoyer de certaines Theses Philosophiques et pour la plus part mathematiques que le P. Mersenne[18]) me mande auoir disputees à Paris, ou on s'en prend aussi à v[ost]re matiere subtile et autres positions; et maintenant quil seroit temps de vous les communiquer, je les trouue esgarées, mes gens me faisant croire que parmi d'autres pacquets de reserve je les auroy enuoyéez dans mon Bateau. Elles paroistront en quelque endroit, et vous les aurez, si tanti est, et n'aymez mieux d'attendre à les veoir a v[ost]re arrivée à Paris; ou le P. Mersenne vous en cornera bien d'autres. mais, monsieur, ce sera à mon tres-grand regret, car en me nommant le dessein de ce voyage il m'a semblé d'un coup de Tonnerre qui me frappast. et vous dis franchem[en]t bien que ce me soit praeuisum telum, qu'il me touche par trop viuement. Ce que je pense y auoir preueu est le desplaisir que ce sot garçon vous aura donné, comme souuent de mauuais objects particuliers sont capables de donner un desgoust universel de quelque pais. Mais si j'ay bien deuiné! ie vous prie que le soleil ne se couche pas dessus v[ost]re ire, et voyez si ces affaires domestiques ne se pourroyent commettre à ceux qui les ont signées si longtemps. Si ma conjecture est faulse au moins ranimez nous de ceste asseurance que vous n'auez rien veu de si hideux en ma Patrie, qui vous la puisse faire abhorrer pour tousjours et sachons quel terme d'exil passif vous nous donnez. J'en vivray en inquietude jusques à ce qu'aurez prins la peine de m'en esclaircir, car veritablem[en]t et sans couleur de Court, qui sont indignes de v[ost]re entretien vous ne laissez personne icy, qui se ressente plus de v[ost]re absence, ni qui regrette plus viuement de n'auoir jamais eu moyen de vous tesmoigner d'effect, comme il est d'entiere affection.

Monsieur!

V[ost]re etc.

Mon[sieu]r! maintenant que nous sommes sur la communication des discours flamens je vous supplie d'aggreer que j'en soubsmette un à v[ost]re censure que j'escriuis l'hiver passé (non pas de jour mais de nuict, car vous sçauez, que le soleil ne me void gueres à moy) sur le subject de l'usage des orgues en l'Eglise[19]) Mons[ieu]r de Wicquefort[20]) en est presentem[en]t en possession; s'il vous valoit la peine de le luy demander par lettre, estant si proche d'Amsterdam, l'adresse en seroit plus seure et courte, que si je le faisoy r'envoyer à mon frere[21]), pour vous le faire tenir. vous m'obligerez extremem[en]t. de perdre une couple d'Heures à le visiter, et de m'en dire franchement v[ost]re opinion, en mesme temps vous pourrez s'il vous plaist renvoyer l'exemplaire manuscript a mon frere; car il n'y en a point que cestuy là, et je pretends le faire imprimer pour introduire ce que je croy utile ou faire abroger ce qui est scandaleux sans doubte.

A M. Descartes.

Rhynberch, le 14e d'Aoust 1640.

Notes.

1) Jan Jansz. Stampioen, dont le père avait même nom, naquit à Rotterdam en 1610, et il agît comme expert encore en 1689. En 1639 il habita la Haye, où il donnait des leçons en mathématique: en 1660 il était arpenteur juré et a construit des cartes.

2) Jacobus a Waessenaer, de famille flamande, habita Utrecht.

3) ALGEBRA ‖ Ofte ‖ NIEUWE STEL-REGEL, ‖ Waer door alles ghevonden wordt inde | WIS-KONST, wat vindtbaer is. ‖ *Noyt voor desen bekendt.* | Gevonden, ende beschreven | *Door* JOHAN STAMPIOEN d' onghe, | *Mathematicus.* ‖ Residerende in 's GRAVEN-HAGE. ‖ *Matth.*: 10. ‖ Want daer en is niet bedeckt, | het welck niet en sal ontdeckt worden: ‖ ende verborgen, 't welck niet en sal gewêten worden. ‖ [Vignette: une sphaera armillaria.] ‖ 's GRAVEN-HAGE, ‖ Ghedruckt ten Huyse vanden Autheur. ‖ in *Sphaera Mundi.* 1639. | 4°.

Il y a un faux titre gravé: puis in-verso du titre cité un bon portrait de l'auteur par Cr. Queborn: *A. Dni. 1638. Aetate 28,* avec un vers latin en 7 lignes par Adrianus Cocquius, pasteur. Suivent la Dedicace à Prins Frederick Henrick (4 pp.), le Privilege (1 p.), le *„Aen den Leser"* (3 pp.) et 15 vers (28 pp.). Puis l'ouvrage *B — Aaa.* pp. 1—366.

4) IACOBI A WASSENAER, ‖ Aenmerckingen op den Nieuwen ‖ STEL-REGEL ‖ *VAN* ‖ JOHAN STAMPIOEN, D'JONGE. | *Cortelick vervattende ende uytleggende alle 't gene te* ‖ *leeren is uyt den voorseyde nieuwe* STEL-REGEL ‖ *ende alle andere Schriften door den selven* ‖ STAMPIOEN *tot nu toe uytgegeven.* | [Vignette: un laboureur qui travaille, avec la dévise FAC ET SPERA] ‖ TOT LEYDEN ‖ By JAN MAIRE, 1639. 4°.

A—H. pp. 1—59.

5) Ces pamphlets constituent la série suivante:

a) SOLUTIE ‖ *Op de Quaestie* | Aen de Batavische Ingenieurs ‖ *voorghestelt.* ‖ Door JOHAN BAPTISTA Antverpiensis. [1638.]

b) Questie aen de Batavische Ingenieurs, Voor-gestelt DOOR JOHAN BAPTISTA Antwerpiensis. **Volghens het spreeck-woordt:** *Laet konst blijcken, Met goet bewys.* [1638].

Contient deux problèmes sur l'attaque d'un Bastion.

c) WISKONSTIGE ONTBINDING. ‖ Over het Antwerpsch Vraegh-stuck ‖ *toe-ge-eyghendt* ‖ ALLE LIEF-HEBBERS DER WIS-CONST: ‖ door JOHAN STAMPIOEN d'Jonge; *Mathematicus.* Plano.

A la fin on lit:

Aldus ontbonden, door *Iohan Stampioen,* d'Jonghe: Eertijts *Professor Matheseos* inde *Illustre* | Schole tot Rotterdam. Teghenwoordigh Residerende in 's Graven-Hage, in *Sphaera Mundi.* ‖ Ghedruct ten Huyse van den Autheur, ‖ ANNO 1638. Plano.

d) OPENBAERINGE || der Valscher || PRACTYCKEN || *Ghepleeght door* || JACOBUS A. WAESSENAER Land-meter || 's Hooffs Provinciael van Utrecht || OVER || *Het on-wis-constigh nae-bootsen der Solutie,* || *ghedaen door* Johan Stampioen de Jonghe, *op het* || *Antwerpsch Vraegh-stuck* anno 1638. || *Judicum 15.* || Nisi vitula mea aravissetis, meum *aenigma* non pervestigassetis. || [Vignette: sphaera armillaria.] || 's GRAVENHAGE. || Ghedruckt ten Huyse vanden Autheur. || in *Sphaera Mundi, 1638* || 12 pp. 4°.

e) QUAESTIEN || de Liefhebbers voor ghestelt te solveeren, || WISKONSTICH. Plano.

Etait signé „JACOBUS A. WAESSENAER || Mathematicus."

f) *Problema astronomicum & Geometricum* voorghestelt door JOHAN STAMPIOEN d'Jonge, *Mathematicus,* residerende in 's Graven-Hage, aen de uytgevers van het Antwerpsche Vraegh-stuck [1638].

Il s'agit de l'ombre de trois batons inégaux.

g) DAGH-VAERD-BRIEF, Gesonden aen den Student van PADUA. Anders genaemt *IACOB A WAESSENAER.* Eensdeels: op dat hy sijn beloften maintineert. Ten anderen: op dat hy bewijst het gene van hem geschreven is, tegen den nieuwen STEL-REGEL van Johan Stampioen de Jonge. 2 pp. 4°.

La lettre était signée:

„*Mevrouwe de Waerheyt haren vriendt, ende onderdanighsten Dienaer JOHAN STAMPIOEN de JONGE.*"

h) Tweeden || DAGH-VAERD || BRIEF. || Gezonden aenden || Student van PADUA. || Anders ghenoumt || *Iacob A: Waessenaer.* || Eens-deels etc. Comme ci-devant. 4 pp. 4°.

i) ANTWOORDE IACOBI à WAESSENAER, op den Dagh-vaerd-Brief van *Ian Stampioen de Jonge.* 5 pp. 4°.

j) Derde dagh-vaerd Brief, etc. 4°.

k) Tijt-Raeminge. In plano.

l) I. I. STAMPIOENII || WIS-KONSTIGH || Ende || REDEN-MAETIGH || BEWIJS. || Op den Reghel Fol: 25, 26 en 27. || *Van sijn* BOECK *ghenaemt den* || NIEUWEN STEL-REGEL. || [Ornament.] || 's GRAVEN-HAGE, || Ten Huyse vanden AUTHEUR in *Sphaera Mundi,* || naest de Remonstransche Kerck. 1640. 4°.

[IV], pp. 1—30. Puis suit le titre:

m) AEN-HANGH || op dit || REDEN-MAETIGH || BEWIJS. || *Waer in ghetoont wordt, het gene* WAESSE- || NAER *op den zelfden Regel gheschreven heeft,* || *niet anders, als Rechte Beuselinghen zijn.*

Pp. 31—58. ensemble *A—H.*

n) *I. I. STAMPIOENII* || VERVOLGH || Op zijn Reden-maetigh Bewijs, *Waer mede betoont wordt, dat den Regel Fol: 25 in het* || *Boeck, ghenaemt den Nieuwen-Stel-Regel, van* || *sich selven bestandigh is.*

8 pp. 4°.

o) VERCLARINGE || Over het Gevoelen by de E: H: || PROFESSOREN || MATHESEOS || DER || UNIVERSITEYT tot LEYDEN || uyt-ghesproken, || NOPENDE || *Den Regel Fol. 25. van* J. Stampioen, || *ende 't ghene op de naem van een* Waessenaer || *daer teghens is uyt-ghecomen.* || Welcke dese Verclaeringhe soodanigh ghestelt is, || dat yeder een daer uyt can oordeelen dat den Regel fol. 25. be- || schreven van *Johan Stampioen de Jonge* in sijnen Nieuwen Stel-Regel, || seer licht, generael, ende de waerheydt conform is, om daer || door den Teerling-wortel te trecken uyt twee- || naemighe ghetallen. || *'S GRAVEN-HAGE,* || Inde Druckerye vanden Autheur in || *Sphaera Mundi.* Anno 1640. 28 pp. 4°.

p) DEN || On-wissen Wis-konstenaer || I. I. STAMPIOENIVS || *ONTDECKT* || Door sijne ongegronde Weddinge ende || mis-lucte Solutien van sijne eygene || *QVESTIEN.* || MIDTSGADERS || Eenen generalen Regel om de Cubic-wortelen ende alle || andere te trecken uyt twee-namighe ghetallen: || dewelcke voor desen niet bekent en is geweest. || NOCH || *De Solutien van twee sware Geometrische Questien door de* Algebra: || *dienstich om alle andere te leeren ontbinden.* || DOOR || IACOBVM à WAESSENAER, || *Land-meeter tot Vytrecht.* || [Ornament.] || TOT LEYDEN, || Gedruct by *Willem Christiaens.* voor *Johannes Maire.* || ANNO 1640. 4⁰.

A—L. 88 pp.

6) Jacob Gool (= Golius), fils de Dirk Gool, Maître des Registres de Hollande, naquit en 1596 à la Haye et mourut à Leiden le 28 septembre 1667, comme professeur d'arabe et de mathématiques. Il fit plusieurs voyages au Levant, et en rapporta quantité de livres et de manuscrits arabes, et encore une bonne renommée.

7) Frans van Schooten était fils du professeur de mathématiques de même nom [1587 — le 11 décembre 1696] à l'École des Ingénieurs, adjointe à l'Université de Leiden. Il succèda à son père et mourut à Leiden en 1661 à l'âge de 46 ans.

8) Andreas van Berlicom, Secrétaire de Rotterdam, se voua aux sciences mathématiques et physiques et a écrit quelques ouvrages.

9) Cette sentence se trouve dans les ouvrages cités sous les lettres *o*) et *p*) dans la note 5.

10) Réné des Cartes, Seigneur du Perron (= Renatus Cartesius), né le 31 mars 1596 à la Haye (Touraine) et mort le 12 février 1650 à Stockholm, vécut de 1617 à 1619, de 1621 à 1622 et de 1629 à 1649 dans les Pays-Bas.

11) GEOMETRIA || à || RENATO DES CARTES || Anno 1637 Gallicè Edita; nunc autem || CUM NOTIS FLORIMONDI DE BEAUNE, || *In Curiâ Blaesensi Consiliarii Regii.* || In linguam Latinam versa, & Commenta- || riis illustrata, || operâ atque studio || FRANCISCI à SCHOOTEN, || Leydensis, in Academiâ Lugduno-Batavâ, Matheseos || Professoris, Belgicè docentis. || [Vignette: Le laboureur à l'ouvrage avec la devise: FAC ET SPERA.] || LVGDVNI BATAVORVM || Ex officinâ JOANNIS MAIRE || CIↃIↃCXLIX. [XII], 336 pp. in 4⁰.

Une deuxième édition est de 1659: Amstelodami Apud Ludovicum et Danielem Elzevirios. II Vol. [XII], 520 — [XIV], 424 pp. in 4⁰.

Une troisième édition aussi en II Volumes est de 1683: Amstelodami, Ex Typographia BLAVIANA.

12) Constantyn Huygens, Seigneur de Zuylichem, Zeelhem et Monnikenland, second fils de Christiaan Huygens, naquit à la Haye le 4 septembre 1596; et y mourut le 16 mars 1687; il était le père du savant renommé Christiaan Huygens. Il était grand poète et musicien, et fut le Secrétaire des Stadhouders Frederik Hendrik, Willem II et Willem III.

13) Claude Saumaise (= Salmasius), né le 13 avril 1588 à Sémur-en-Auxois, et mort le 3 septembre 1653 à Spa, avait des parents catholiques, mais était lui-même protestant. Il fut nommé professeur à Leiden en 1632, comme successeur de Scaliger.

14) Cornelius ab Hooghelande fut professeur de médecine à Leiden: il était ami intime de Descartes.

15) Ici la lettre est déchirée.

16) Cet alinea se trouve écrit en marge.

17) Antonius Studler van Sureck van Bergen était ami intime de Descartes, et plusieurs fois lui fournit de l'argent.

18) Marin Mersenne, Père des Minorites, né le 8 septembre 1588 à Soultière (Maine), et mort le 1er septembre 1648 à Paris, entretenait une correspondance suivie avec Descartes et Constantyn Huygens.

19) GHEBRUIK, en ONGHEBRUIK || VAN 'T || ORGHEL || *In de Kerken der Vereenighde Nederlanden.* || Beschreven door || CONSTANTYN HUIGENS, || Ridder. || *Heere van Zuy-*

lichem, Zeelhem ende Mo- || *nickeland. Eerste Raad, en Re-* || *kenmeester van zijn Hoogheidt,* || *den Heere Prince van* | *Oranje.* || Verrijkt met eenighe Zanghen. || [Ornament.] || T'AMSTERDAM, || By ARENT GERRITSZ. vanden HEUVEL, || Boek-verkooper inde Pieter Jacob-straet. || ANNO 1660. [10], 180 pp. 8°.

Un titre gravé précède avec un portrait de „Constanter". A la fin de l'ouvrage on lit:

T' AMSTERDAM, || By PIETER DIRCKSZ. BOETEMAN, Boeck- || drucker, op de Egelantiers-gracht. 1660.

20) Abraham van Wicquefort, né à Amsterdam en 1598, et mort à Zelle le 23 février 1682, passa sa vie à la cour de Paris jusques à 1660, puis retourna aux Pays-Bas, où il devint partisan de Johan de Witt.

21) David le Leu de Wilhem, né à Hambourg le 15 mai 1598, et mort à la Haye le 27 janvier 1658, épousa en 1638 Constantia Huygens, soeur de Constantyn Huygens. Il devint Conseiller du Prince.

Ueber eine neue Ausgabe von Galilei's sämmtlichen Werken.

Unter den Auspicien Sr. Majestät des Königs von Italien und auf Kosten des Staates wird die Veröffentlichung einer neuen und vollständigen Ausgabe der Werke Galileo Galilei's stattfinden. Mit der Redaction derselben betraut, richte ich an die Vorsteher von Archiven wie von öffentlichen und Privatbibliotheken, an Autographensammler wie an alle Gelehrten die höflichste Bitte, mich durch den Nachweis von Galilei herrührender oder auf ihn bezüglicher Documente in der Ausführung des schwierigen Unternehmens unterstützen zu wollen.

Im Besondern kommen für die neue Ausgabe in Betracht: neben den Schriften Galilei's, von ihm geschriebene und an ihn gerichtete Briefe, sowie von anderen Zeitgenossen gewechselte Briefe, die in irgendwelcher Weise seine Person und seine Lehren berühren, sowie Documente jeder Art, die auf sein Leben und seine Werke Bezug haben.

Sehr erwünscht wird in erster Linie der Nachweis von ungedrucktem Material sein, aber nicht minder dankenswerth jede Mittheilung über Originalmanuscripte oder aus der Zeit Galilei's stammende Abschriften später gedruckter Texte, da auch diese insgesammt nicht ohne vorgängige sorgsame Vergleichung in der neuen Ausgabe reproducirt werden sollen.

Dr. ANTONIO FAVARO,
Professor an der königl. Universität zu Padua.

Recensionen.

Miscellanea Galileiana inedita. Studi e ricerche di Antonio Favaro. Venezia 1887, Tipografia di Giuseppe Antonelli. 340 pag.

In diesem stattlichen Bande grössten Formates hat Herr Favaro zwölf Abhandlungen vereinigt, deren Inhalt wir in aller Kürze andeuten wollen.

1. Der Geburtstag Galilei's war früher meistens falsch angegeben, weil man ihn gern auf den Todestag Michel Angelo's zu legen liebte, in ähnlicher Weise, wie man unter Ausübung eines noch grösseren Zwanges den Todestag Galilei's zum Geburtstage Newton's zu machen wünschte. In Anlehnung an Herrn Campori hat Herr Favaro aus Horoskopen Galilei's unzweifelhaft festgestellt, dass derselbe am 15. Februar 1564 geboren ist.

2. In der „Isographie des hommes célèbres", Paris 1828—1830, T. II, ist ein von Galilei's Biographen unbeachtet gebliebenes Brieffragment desselben veröffentlicht. Herr Favaro hat den Adressaten des Briefes ermittelt.

3. Galilei studirte die Archimedischen Bücher von der Kugel und dem Cylinder, die Feder in der Hand. Ein junger, 19jähriger Seminarist, Vincenzio Santini, schickte 1671 an Viviani eine Abschrift der von Galilei herrührenden Randbemerkungen, und ihr Abdruck bildet die dritte Abhandlung.

4. Die Entdeckung der Sonnenflecken wurde von vier verschiedenen Seiten in Anspruch genommen, wenn auch diese Ansprüche selbst zu sehr verschiedenen Zeiten hervortraten. Herr Favaro führt nun den Nachweis, dass Galilei im Juli 1610 Sonnenflecken bemerkte, seit November 1610 sie beobachtete. Harriot's Entdeckung fiel auf den 8. (18.) December 1610. Fabricius datirte die Vorrede der Schrift, in welcher die erste gedruckte Nachricht von den Sonnenflecken enthalten ist, vom 13. Juni 1611. Scheiner will im April 1611 die Sonnenflecken entdeckt haben. Wir können diesen Angaben gegenüber der Auffassung nur beipflichten, dass, wenn Fabricius die Priorität gedruckter Veröffentlichung zukommt, Galilei ebenso gewiss die erste Beobachtungsreihe anstellte und die volle Bedeutung der Entdeckung für die Bekämpfung der peripatetischen Weltanschauung zuerst erkannte.

5. Urtheil und Abschwörungsformel in Galilei's Process waren bekanntlich in italienischer Sprache abgefasst und wurden erst nachträglich

ins Lateinische übersetzt, wie Herr Favaro neuerdings erweist. Weniger bekannt waren die Versuche Viviani's, eine wenn auch späte Umstossung des Urtheils und die Erlaubniss zur erneuten Veröffentlichung der Gespräche über die beiden Weltsysteme zu erwirken, letztere selbstverständlich unter der Voraussetzung einer Ausmerzung oder Veränderung der als anstössig bezeichneten Stellen. Die Verhandlungen spielten im Jahre 1678 zwischen Viviani und einem Mitgliede des Jesuitenordens, P. Baldigiani. Die Veröffentlichung dieser seither ungedruckten Briefe ist somit von einem ganz besondern Interesse.

6. Elias Diodati, geboren in Genf anfangs Mai 1576, gestorben in Paris 23. December 1661 infolge von Brandwunden, war in vieljährigem Briefwechsel mit Galilei. Die Abschrift eines Briefes Galilei's vom 25. Juli 1634 wurde durch Libri in Carpentras unter dem Peiresc'schen Nachlasse entdeckt und veröffentlicht (Hist. scienc. math. Italie IV, 478 bis 483). Es ist der Brief, in welchem Galilei aus Arcetri meldet, der Tag vollständiger Freiheit werde für ihn nie mehr anbrechen. Herr Favaro discutirt neuerdings die Echtheit dieses Briefes und weiss dieselbe gegen jeden Zweifel sicher zu stellen.

7. Dass die Galilei'schen Processacten von Rom nach Paris wanderten und erst nach jahrelangem Aufenthalt daselbst nach Rom zurückkehrten, ist hinlänglich bekannt. Herr Favaro veröffentlicht nun nicht weniger als 43 bisher meistens ungedruckte Schriftstücke, welche auf die Verhandlungen zwischen Rom und Paris über Rückgabe des werthvollen Actenbandes sich beziehen. Merkwürdigerweise bleibt der Schluss der Verhandlungen räthselhaft wie er war. Wo die Acten sich schliesslich in Paris vorfanden und durch wen sie nach Rom zurückgebracht wurden, hat nämlich nicht ermittelt werden können. Doch wie dem auch sei, ein Eindruck wird dem Leser dieses Briefwechsels sicherlich bleiben, der der höchsten Achtung vor der Zähigkeit Marino Marini's, der, unzähligemal abgewiesen, immer wieder mit seinen Forderungen an anderer Stelle anklopfte und kein Mittel unversucht liess, der werthvollen Acten habhaft zu werden.

8. Diese Abhandlung beschäftigt sich mit einer 1884 durch Herrn Favaro dem Druck übergebenen mechanischen Jugendarbeit Galilei's und deren Beziehungen zur Entwickelung des Trägheitsgesetzes und zu anderen späteren Galilei'schen Gedankengängen.

9. Als Mitglied der Accademia dei Lincei besass Galilei einen Siegelring aus Smaragd in Gold gefasst mit eingeschnittenem Luchse, welchen er vom Fürsten Cesi mit einem hier zum ersten Male gedruckten Begleitschreiben vom 22. März 1612 erhielt. Die Geschichte des Ringes lässt sich bis gegen Ende des XVIII. S. verfolgen, wo er im Besitze Nelli's war. Von dessen am 25. December 1793 erfolgten Tode an ist jede Spur verloren.

10. Aus der Hinterlassenschaft des Ritters Tosi-Galilei, welcher die von Herrn Campori herausgegebenen wichtigen Briefe entstammen [vergl.

Bd. XXVIII, hist.-lit. Abth. S. 24—30], wurden die Personalacten vieler Glieder der Familie Galilei vom Staatsarchiv in Florenz für 500 Lire erworben. Mit ihrer Hilfe ist ein vollständigerer Stammbaum der Familie hergestellt, als man ihn bisher besass.

11. Derselben Hinterlassenschaft entstammt auch der Legitimationsact des Vincenzio Galilei, des Sohnes jener Marina Gamba, mit welcher Galilei viele Jahre hindurch in Padua lebte. Herr Favaro hat das mehrfach merkwürdige Gesuch Galilei's zur Erwirkung dieser Legitimation zum Abdruck gebracht. Ein nicht uninteressantes Nachspiel ergab sich in einem Processe der Steuerbehörde gegen Vincenzio, der bei Antritt der väterlichen Erbschaft die Steuerfreiheit ehelich geborener Kinder in Anspruch nahm, ohne damit bei Gericht durchdringen zu können.

12. Galilei sei, so behaupten Viviani und Andere, die zu ihm in naher Beziehung standen, bei seinen Arbeiten stets nur durch wenige literarische Hilfsmittel unterstützt worden. Das entspricht unzweifelhaft der Wahrheit für jene ganze Reihe von Jahren, in welchen er augenleidend, zuletzt erblindet auf das Sehvermögen Anderer angewiesen war. Früher dagegen benutzte Galilei vielfach die reichhaltige Büchersammlung, die er vereinigt hatte, und manche Randbemerkung aus seiner Feder ist schon entdeckt worden. Zur Auffindung anderer kann es wenigstens führen, wenn man weiss, welche Bücher Galilei einst besass. So ist eine dankenswerthe Mühe gewesen, welcher Herr Favaro sich unterzog, indem er aus den verschiedensten Quellen ein solches Bücherverzeichniss herstellte.

So der Inhalt des uns vorliegenden Bandes, der zu laut für den Werth seiner Veröffentlichung spricht, als dass wir nöthig hätten, ein weiteres Wort der Empfehlung beizufügen.

Cantor.

Tychonis Brahei et ad eum doctorum virorum epistolae ab anno 1568 ad annum 1587 nunc primum collectae et editae a F. R. Friis. Havniae, Lipsiae, Londini, Parisiis 1876—1886. V, 112 pag. cum effigie Tychonis Brahei et exemplo ipsius manus.

Seit wir im XXII. Bande dieser Zeitschrift, hist.-lit. Abth. S. 150—154, das erste Heft des Brahe'schen Briefwechsels anzeigten und Wünsche aussprachen, welche wir für die Fortsetzung hegten, ist eine Reihe von Jahren verstrichen. Der Herausgeber hat in dieser Zwischenzeit seinen Plan wesentlich eingeengt, denn während das erste Heft die Jugend- und Wanderjahre Brahe's bis Mitte 1576 durch Briefe illustrirte, führen die drei folgenden Hefte, welche den Band vollenden, nur bis 1587, mithin nicht weiter, als bis zur Mitte seines Aufenthalts auf der Insel Hueen. Wenn unsere oben erwähnte Anzeige Brahe's Leben bis zur Belehnung mit jener Insel vorführte, so sind heute interessante weitere Schicksale nicht beizufügen. Das Leben auf Hueen war eben einförmig und nur durch die Erbauung der Sternwarte Uranienborg und durch wissenschaftliche Arbeiten auf derselben erfüllt. Ueber Anderes können wir daher auch in damals geschriebenen und empfangenen Briefen eine Auskunft nicht erwarten. Einige Punkte allgemeineren Interesses mögen hervorgehoben werden.

Zu Anfang des Jahres 1583 erhob sich in Augsburg ein Streit über Einführung oder Nichteinführung des neuen Kalenders. Die meisten städtischen Beamten, auch Protestanten darunter, waren für die Einführung, da es nicht um Religion, sondern darum sich handle, mit den vor den Thoren der Stadt wohnenden bayerischen Unterthanen und dem Bischof von Augsburg selbst nicht in Datumsverschiedenheit zu leben, woraus für Handel und Wandel Unzuträglichkeiten fliessen müssten. Einige wenige Beamte widersprachen; es sei eine päpstliche Einrichtung, auf ihre Nichtbefolgung sei von Rom aus Excommunication gedroht, eine protestantische Stadt dürfe nicht den Anschein haben, dieser Drohung nachzugeben. Im März 1583 gelangte die Streitfrage an das Reichskammergericht, im Mai 1584 wurde sie zu Gunsten der Kalendereinführung entschieden. Der Führer der Gegenpartei sollte aus der Stadt entfernt werden, wobei eine stürmische Volksbewegung entstand. Ueber alle diese Ereignisse berichtet Johannes Major in einem Briefe von Pfingsten 1584. Brahe antwortet Mitte Juli, er begreife den Widerstand nicht. Die Protestanten hätten doch die Fest-eintheilung des alten Nicäanischen Concils beibehalten; wäre schon Regiomontan vor Luther mit der Kalenderverbesserung fertig geworden, so hätte Luther ohne jeden Zweifel die Verbesserung, denn das sei sie, unangetastet gelassen. Wie könne man sich jetzt gegen dieselbe sträuben, blos weil Lilius erst sie zu Stande gebracht habe?

In einem Briefe an Thaddaeus Hayek, Leibarzt des Kaisers Maximilian II., vom 25. August 1585 nimmt Brahe Gelegenheit, über die Alchymisten seiner Zeit ein Urtheil zu fällen. Er beschuldigt sie geradezu des Betrugs.

Einem zweiten Aberglauben seiner Zeit, der Sterndeutung, steht dagegen der Astronom Brahe ganz anders gegenüber, und das darf uns um so weniger wundern, als wir ihn hier in bester Gesellschaft sehen. Koppernigk, Galilei, Kepler huldigten gleich Brahe mehr oder weniger der Astrologie, so dass als eine dankbare Aufgabe erscheint, die Beweise für diese Behauptung und die Gründe, welche zu der behaupteten Thatsache führten, einmal zusammenzustellen. Für Brahe ist besonders die Weistritz'sche Lebensbeschreibung I, 92—101 und 198 zu vergleichen, und der uns vorliegende Briefwechsel S. 84, 85, 92, woselbst Henr. Brucaeus gegen Brahe's astrologische Neigungen ebenso freundschaftlich als scharf sich wendet. Leider sind Brahe's Antworten nicht vorhanden.

CANTOR.

Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Von Dr. Wilhelm Fiedler. Dritte erweiterte Auflage. II. Theil: Die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen. Leipzig 1885, B. G. Teubner. (Vergl. die Recension des ersten Theils, diese Zeitschr. Bd. XXX S. 103.)

Der Inhalt zerfällt, wie in der früheren Auflage, in drei Capitel:

A. Von den Curven und den entwickelbaren Flächen.

B. Von den krummen Flächen im Allgemeinen und den Flächen zweiten Grades insbesondere.

C. Die Familien der technisch wichtigsten Flächen:

a) Windschiefe Regelflächen;

b) Rotations- und (als neu hinzugetreten) Schraubungsflächen.

Die regelmässigen Singularitäten der Raumcurven, nämlich der stationäre Punkt, die stationäre Tangente und die stationäre Schmiegungsebene, werden eingehender als früher untersucht durch Heranziehung der zugehörigen Projectionen, sowie der Spurcurven der Tangenten und Schmiegungsebenen.*

Im Capitel der Kegelflächen zweiten Grades möge die ausführliche Behandlung des Rotationskegels als Constructionselement bei verschiedenen Winkelbestimmungen hervorgehoben werden.

Bei der Untersuchung der Durchdringungscurve zweier Kegel wird vollständiger auf die Bestimmung der Asymptoten des Bildes und der Bilder der Asymptoten eingegangen. Vielleicht entschliesst sich der Verfasser zur Beigabe einer Figur mit einigen reellen Asymptoten; die neue Auflage enthält, wie die alte, nur eine Figur, bei der sich die parallel verschobenen Kegel mit gleicher Spitze, deren Schnittlinien die Asymptotenrichtungen angeben, in vier imaginären Linien durchsetzen.

Bei der Discussion der Curve vierter Ordnung erster Species werden, nach Feststellung der Entstehung scheinbarer Doppelpunkte in der Projection, diese Doppelpunkte als Bilder derjenigen Punkte erkannt, in welche die Schnittlinie der Polarebene des Projectionscentrums in Bezug auf die sich durchdringenden Kegelflächen diese Flächen trifft. Wird demnach besagte Schnittlinie unbestimmt, d. h. haben beide Kegel in Bezug auf das Centrum dieselbe Polarebene, so hat die Projection unendlich viele scheinbare Doppelpunkte, oder vom Centrum lässt sich der Curve ein Kegel doppelt umschreiben. Hiermit ist die Bestimmung dieser vier Kegel angebahnt. Im Falle der eigentlichen Durchdringung erweisen sich alle vier, im Falle der Eindringung nur zwei als reell.

Die Projection der obigen Raumcurve aus einem ihrer Punkte ergiebt die allgemeine ebene Curve dritter Ordnung als Erzeugniss von projectivi-

* In den beigegebenen Figuren 7a, b, c sind b und c irrthümlich miteinander vertauscht.

schen involutorischen Büscheln mit sich selbst entsprechendem Scheitelstrahle.

In die Theorie der krummen Flächen ist anfangs eine Betrachtung der topographischen Flächen eingeflochten. Die Darstellung durch Niveaucurven ist in der That sehr geeignet, den Verlauf einer Fläche, die Construction von Tangentenebenen, sowie die Entstehung der Doppelpunkte ihrer Schnittcurven (bei Jochübergängen) klar zu machen. Uebrigens werden auch sofort Schattenconstructionen bei Anwendung dieser Darstellungsweise vorgenommen.

Natürlich ist bei der jetzt folgenden Theorie der geradlinigen Flächen zweiten Grades die cyklographische Darstellung der gleichseitigen Netzhyperboloide eingehend erörtert. Der Fall ihrer ebenen Durchdringung wird in diesem Sinne behandelt, und damit findet die Entstehung eines reellen Kegelschnittes aus zwei ihn doppelt berührenden Kreisen und der constanten Länge der Summe bez. Differenz der von einem Curvenpunkte an die Kreise gezogenen Tangenten, wie sie Steiner ohne Beweis gab, ihre natürliche geometrische Aufklärung. Durch eine grosse Anzahl einschlägiger Uebungsaufgaben und Sätze werden die Lehren des betreffenden Paragraphen weiter durchgebildet. Unmittelbar hieran schliesst sich die Theorie der Kugelsysteme, d. h. der Büschel, Bündel und Netze, unterschieden als solche mit Diagonalkugel und Orthogonalkugel. Die eine oder mehrere gegebene Kugeln gleichwinklig schneidenden Kugeln, sowie die sich auf einer Kugel unter gleichen Winkeln schneidenden Kreise finden ihre Erledigung. Unter den gelösten Aufgaben möge die Construction der 16 Kugeln, welche vier Kugelpaare gleichwinklig schneiden, sowie die Lösung des räumlichen Analogons zum Apollonischen Berührungsproblem: die Construction einer Kugel, welche vier gegebene berührt, angeführt werden. Die Transformation durch reciproke Radien bildet hier überall die Grundlage. Diese Partie schliesst mit der conformen Abbildung der Kugel auf die Ebene insbesondere der stereographischen Projection.

Bei der Untersuchung der allgemeinen Flächen zweiten Grades mit hyperbolischen Punkten sind das Schröter'sche orthogonale Hyperboloid und Paraboloid hereingezogen.

Mit grosser Sorgfalt ist die Durchdringungscurve der allgemeinen Flächen zweiten Grades behandelt. Vollständig neu hinzugekommen ist der § 46 über die Projectionskegel dieser Curve in Verbindung mit den Projectionskegeln der einzelnen Flächen des Büschels, welche die Curve je vierpunktig berühren — nach Zeuthen's Darstellung. Je zwei Gruppen solcher ausgezeichneter Berührungsstrahlen liegen auf einem Kegel zweiter Ordnung. Viele der früher gefundenen Eigenschaften dieser wichtigen Curven treten dadurch in ein neues Licht, z. B. erhellt die Existenz ihrer beiden scheinbaren Doppelpunkte aus dem Umstande, dass durch das Centrum der Projection C eine Fläche des Büschels geht und also zwei Gerade d_1, d_2, die Erzeugenden

14*

dieser Fläche durch C, die Curve doppelt treffen; denn d_1, d_2 zählen als Umriss der Fläche doppelt.

Ein Abzählen der Constanten verschiedener zur Construction von F^2 benutzter Elemente führt auf die Vermuthung, dass eine solche Fläche durch neun, ein Büschel derselben durch acht Constanten bestimmt sei. Die Richtigkeit dieser Vermuthung wird dann erhärtet durch Angabe der Steiner'schen Construction aus neun Punkten und noch einer zweiten linearen von Beyel.

Die Beispiele zu den Regelflächen höherer Ordnung sind um das Plücker-Ball'sche orthogonale Cylindroid der Mechanik (nicht zu verwechseln mit dem Cylindroid auf S. 407 der zweiten Auflage) derjenigen Regelfläche dritter Ordnung, deren Leitlinien 1. eine Gerade z, 2. eine Ellipse, deren Nebenaxe z trifft und deren Ebene mit z den Winkel von 45^0 einschliesst, und 3. die Stellung der Normalebene von z sind.

Mit den Rotationsflächen sind die Schraubenflächen verbunden worden, indem die Rotation als Schraubung von der Ganghöhe Null aufgefasst wurde. Als Constructionselemente für die Schraubungsflächen bei Berührungsproblemen sind entweder die aufgeschriebenen developpablen Schraubenflächen benutzt, oder die Fläche ist als Hüllfläche einer einfachen, wie z. B. die Serpentine als Hüllfläche einer Kugel betrachtet. Von Dingen, die mit dieser Erweiterung nicht zusammenhängen, seien die Brennpunktsbestimmungen der Umrisse von Rotationsflächen zweiter Ordnung und dann auch der allgemeinen Flächen in der von Pelz in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie 1877/78 gegebenen Ableitung angeführt.

In einer zusammenfassenden Schlussbetrachtung wird auf die Aequivalenz der Bewegung eines starren Systems aus einer ersten Lage in eine zweite, mit einer Schraubenbewegung aufmerksam gemacht. Dann folgen vergleichende Betrachtungen über die verschiedenen benutzten Erzeugungsarten von Flächen, sowie ihrer Umformungen durch Projection und Inversion; Ausblicke auf neue Anwendungen dieser Transformation werden eröffnet.

Eine Vermehrung der Figuren des Textes, sowie die Hinzufügung von vier neuen Tafeln:

Taf. V. Construction der Kreise auf einer Kugel, welche drei gegebene Kreise derselben — worunter einer rein imaginär ist — unter Winkeln von vorgeschriebenen Cosinuswerthen schneiden. Orthogonale und stereographische Projection;

Taf. XIII. Die Curve vierter Ordnung und zweiter Species mit zwei stationären Tangenten als Durchdringung des orthogonalen Cylindroids mit einem einfachen Hyperboloid, in orthogonaler Parallelprojection mit einem Bilde;

Taf. XIV. Centralprojection des Berührungskegels von gegebener Spitze für das Rotationsparaboloid. Centralprojection einer glockenförmigen Fläche;

Taf. XVI. Die Lichtgleichen für das Schlangenrohr nebst den Schlagschatten der Fläche auf die Projectionsebenen und auf sich selbst, — darf zur Charakterisirung des Neugebotenen nicht unerwähnt bleiben.

Hannover. Dr. C. RODENBERG.

Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung. Von Dr. ARTHUR SCHÖNFLIES, Privatdocent an der Universität Göttingen. Leipzig, B. G. Teubner. 1886.

Neben dem augenblicklich im Erscheinen begriffenen Werke über Kinematik von Burmester, in dem selbstredend der Geometrie der Bewegung als abstracte Wissenschaft eine Reihe von Capiteln gewidmet ist, nimmt das vorliegende Buch in Bezug auf die Behandlung des Gegenstandes insofern eine Sonderstellung ein, als die Untersuchungen rein geometrischer Natur sind. Damit soll gesagt sein, dass auch von den Begriffen der Mechanik, namentlich der Geschwindigkeit, nirgends Gebrauch gemacht wird, und dementsprechend die Geometrie der Bewegung als ein Theil der reinen synthetischen Geometrie erscheint.

Nur starre Systeme werden behandelt.

Das Buch zerfällt in die drei Capitel:

Die Bewegung eines Systems in seiner Ebene;
Die Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt;
Die Bewegung eines räumlichen Systems.

Nachdem der Begriff des Drehungscentrums festgestellt ist, wird gezeigt, dass jede Bewegung als eine Summe unendlich kleiner Drehungen um die Punkte einer Curve, d. h. als das Rollen einer Curve des beweglichen auf einer andern des festen Systems angesehen werden kann, dann wird auf die Vertauschbarkeit dieser Polcurven hingewiesen. Aus drei verschiedenen Lagen σ_0, σ_1, σ_2 entspringt die specielle quadratische Verwandtschaft zwischen den Systempunkten A_0 einerseits und den Schnittpunkten der Normalstrahlen in den Mitten von A_0A_1 und A_1A_2 andererseits; mit den drei Drehungscentren als Hauptpunkte und dem ihnen umschriebenen Kreise als Wendekreis. Dieser Kreis ist der Ort der Punkte A_0, für welche A_0, A_1, A_2 auf einer Geraden liegen. Für vier Lagen giebt es dann noch einen einzigen Punkt, der in allen vier Lagen auf einer Geraden liegt, während eine Curve dritter Ordnung existirt, für welche die vier Lagen einem Kreise angehören. Diese Sätze kann man als vorbereitende zu dem folgenden Studium der Wendepunkte und Krümmungskreise der von Systempunkten bei continuirlicher Bewegung beschriebenen Curven, bez. von Systemcurven umhüllten Enveloppen ansehen.

Der auf S. 46 mitgetheilte schöne Satz erscheint mir neu: Wenn in einem Augenblick der Bewegung die beiden Polcurven sich von innen berühren und gleichzeitig die Differenz ihrer Krümmungsradien das Vorzeichen wechselt, so beschreiben alle Punkte beider Systeme Rückkehrpunkte ihrer Bahnen.*

Der Inhalt des zweiten Capitels steht dem des ersten in mancher Hinsicht reciprok gegenüber, wenn man die Drehungsaxen als Projectionsstrahlen der Pole betrachtet, und die Eintheilung ist in diesem Sinn dieselbe. Die Unterschiede sind scharf hervorgehoben; während im Strahlenbündel die Bewegungserzeugnisse der Strahlen denen der Ebenen vollkommen dual entsprechen, ist für Punkte und Gerade der Ebene dieser Dualismus gestört durch den Umstand, dass die Maassbestimmung auf der Punktreihe von der im Büschel verschieden ist. Während z. B. die Punkte, die in einem Moment gerade Wendepunkte ihrer Bahnen beschreiben, auf einer Curve zweiter Ordnung, dem Wendekreise, liegen, bilden die Strahlen, welche Rückkehrtangenten ihrer Enveloppen sind, einen Büschel erster Ordnung.

Das dritte Capitel ist das reichhaltigste und enthält viel Neues.

Der Gang der Entwickelung ist insofern dem der beiden früheren analog, als zunächst zwei, drei und mehr Lagen der Systeme betrachtet werden, welche später bei continuirlicher Bewegung consecutiv zu denken sind. Die Grundlage bildet der Nachweis für die Möglichkeit der Ueberführung eines Systems aus einer Lage in eine beliebige zweite durch eine Schraubenbewegung. Aus zwei Lagen entspringt das Nullsystem mit den Sehnenmittelpunkten und Polarebenen als Pole und Polaren, aus dreien der tetraedrale Complex der Mittelpunktsaxen, d. h. der Geraden, welche in den Mittelpunkten der um drei Lagen eines Punktes beschriebenen Kreise auf den Ebenen derselben senkrecht stehen; der späteren Krümmungsaxen. Die Punkte, welche in allen Lagen auf einer Geraden liegen, gehören einer cubischen Hyperbel an, deren unendlich ferne Punkte diejenigen der drei zugehörigen Schraubenaxen sind. Für drei consecutive Lagen einer Bewegung wird jene Curve zur cubischen Wendeparabel Everett's.

Vier Lagen führen zur speciellen cubischen Verwandtschaft zwischen den Systempunkten und den Schnittpunkten der Normalebenen. Die Resultate gipfeln unter Heranziehung von fünf und sechs Lagen in dem bemerkenswerthen Satze: Bewegt sich ein System Σ beliebig im Raume, so existiren in jedem Augenblicke unendlich viele Punkte desselben, deren Punkte vierpunktig berührende Schmiegungsebenen besitzen. Dieselben bilden eine Fläche dritter Ordnung F^3, welche die Wendecurve enthält. Auf dieser Fläche giebt es eine Curve sechster Ordnung C^6, deren Punkte Bahnen mit fünfpunktig berührenden Schmiegungsebenen besitzen, und endlich sind zehn Punkte dieser Curve dadurch ausgezeichnet, dass ihre Bahnen von den Schmiegungsebenen sogar sechspunktig berührt werden. Andererseits giebt es eine Fläche vierter Ordnung der Punkte, deren Schmiegungskugeln fünfpunktig berühren etc.

* Ausgenommen ist der Berührungspunkt der beiden Polcurven, welcher gerade jetzt keinen Rückkehrpunkt, sondern einen Wendepunkt beschreibt.

Hierauf folgen Untersuchungen über zwangläufige Bewegungen nach den Graden ihrer Bewegungsfreiheit, metrische Beziehungen und einige Beispiele.

Die Reichhaltigkeit dürfte sich aus den vorstehenden Inhaltsangaben genügend erkennen lassen; rühmend hervorgehoben zu werden verdient die klare, leicht verständliche, aber keineswegs breite Schreibweise, welche das Studium des Buches zu einem sehr genussreichen macht.

Hannover. Dr. C. RODENBERG.

Genetische Stereometrie. Von Dr. KARL HEINZE, weil. Professor in Köthen, bearbeitet von FRANZ LUCKE, Gymnasiallehrer in Zerbst. Leipzig, Teubner. 1886.

Das System, um welches es sich in dem vorliegenden Werke handelt, ist bereits durch einen Vortrag, den der Herausgeber auf der 37. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner hielt, welche 1884 in Dessau tagte, bekannt.*

Die Erklärung des Ausdrucks „genetisch“ liegt in dem Umstande begründet, dass sämmtliche Elementarkörper aus einem allgemeinen, dem „Centralkörper“, einer Erweiterung des Wittstein'schen Prismatoids, hervorgehen. § 2 enthält die Definition: „Der Centralkörper hat zwei parallele ebene Flächen als Grundflächen; jeder Eckpunkt der einen Grundfläche ist entweder nur mit dem correspondirenden Eckpunkte der andern, oder sowohl mit dem correspondirenden, als auch mit einem (etwa dem rechts benachbarten) verbunden; die Seitenflächen entstehen dadurch, dass sich an je zwei benachbarte Seitenkanten Gerade parallel zu den Grundflächen fortbewegen. Die Seitenkanten (oder Seiten) sind Gerade oder solche krumme Linien, die ein bestimmtes geometrisches Bildungsgesetz haben.“

Der Werth derartiger Definitionen hängt immer wesentlich davon ab, was in der Folge mit den durch dieselben abgegrenzten Begriffen zu leisten ist. Findet man nun mit dem Verfasser die Hauptaufgabe der Stereometrie in der Bestimmung von körperlichen Inhalten, so ist die obige Definition zweckmässig, weil der Inhalt des Centralkörpers leicht gefunden werden kann und sich dem Begriffe neben den Körpern der Elementargeometrie eine grosse Anzahl anderer, von allgemeinen Flächen zweiter Ordnung, ja von Regelflächen noch höherer Ordnung einreihen lassen.

Für diese Gruppe wäre damit eine einheitliche Methode der Inhaltsbestimmung gewonnen. Es mag aber hier gleich hervorgehoben werden, dass es zuweilen ohne unendliche Summen nicht abgeht und so gewissermassen versteckt Integralrechnung getrieben wird.

---

* Ein Abdruck desselben befindet sich in Hoffmann's Zeitschr. f. math. etc. Unterricht Bd. XVI, 1—16.

Zwar sind, wie im Vorwort gesagt wird, Oberflächenbestimmungen und die Behandlung sonstiger geometrischer Gebilde, wie Schnittcurven u. dergl., nicht vernachlässigt. Die als „erste Methode“ auf S. 60 gegebene Mantelbestimmung eines Cylinders aus dem Volumen desselben, auf die im Vorwort hingewiesen wird, mag interessant genannt werden, aber sie ist für eine abwickelbare Fläche unnatürlich und unzweckmässig, während sie für andere Flächen, z. B. die Kugel, zweckmässig erscheint. Dass die verschiedenen Behandlungsweisen, wie sie den einzelnen Flächengruppen: abwickelbaren Flächen, Rotationsflächen etc., anzupassen sind, nicht zum Ausdruck kommen, hat seinen Grund darin, dass nicht die Eigenthümlichkeiten der Fläche, sondern zwei derselben aufgeschriebene ebene Curven, die Grenzlinien der Grundflächen des Centralkörpers, also ganz fremdartige Dinge zur Definition verwandt werden. So kommt es denn auch, dass zwei dem Charakter nach ganz verschiedene Körper, wie Abschnitte einer Kugel und eines Rotationshyperboloids, wenn nur bei jedem die Grundflächen gleich sind, zu einer und derselben Gruppe, andererseits zwei Kugelzonen, von denen die eine gleiche, die andere ungleiche Grundflächen hat, zu verschiedenen Gruppen gerechnet werden. Als man noch nicht gelernt hatte, Geometrie auf krummen Flächen zu treiben, und man ausser Inhalts- und Oberflächenberechnungen nicht viel leisten konnte, hätte auch eine Erzeugung derjenigen Körper, deren Inhaltsbestimmung nach der Prismatoidformel

$$V=\tfrac{1}{6}h(f_0+4f_1+f_2)$$

möglich ist, und diesem Titel entspricht der Plan des Buches, als Lehrgegenstand in den Schulen Aufnahme finden mögen; heute jedoch würde der Schüler nach Ansicht des Referenten auf dieser Grundlage nicht weiter bauen können.

Bei der Bestimmung von Schnittcurven ist übrigens zuweilen die nöthige Strenge zu vermissen, z. B. werden in den §§ 130 – 132 die Schnitte der Ellipsoide ohne Weiteres als Ellipsen aufgeführt, während man nur einsieht, dass geschlossene Curven entstehen, welche zwei Symmetrieaxen haben. —

Gehen wir nun zu Einzelheiten des Inhalts über.

Da die Grundflächen f_0 und f_2 und die Gesetze, nach denen die Seitenkanten zu ziehen sind, stets vorliegen, ist nur die Bestimmung der mittleren Durchschnittsfläche f_1 zur Ermittelung des Inhalts nothwendig; hierauf bezieht sich also der grösste Theil aller Untersuchungen. Bei Betrachtung derjenigen Körper, welche durch Verdrehung der Grundflächen eines Prismas oder einer Pyramide erzeugt werden, dem Paraprisma und der Parapyramide, ist in geschickter Weise f_1 als Function des Drehungswinkels dargestellt. Ebenso werden Paracylinder und Parakegelstutz, Körper, welche durch Kreisschnitte begrenzte Theile des einschaligen Hyperboloids sind, behandelt. Ein weiterer Körper, dessen Grundflächen nicht ähnliche Ellipsen sind, wird als „Wanne“, ein Abschnitt des Kreis- oder Ellipsenconids* wird als Glocke bezeichnet und berechnet. Merkwürdiger Weise ist zur „Wanne“ nicht die abwickelbare Fläche, sondern eine Regelfläche achter Ordnung gewählt, da eigentlich nur jene als Obelisk mit Grundflächen von unendlich grosser Seitenzahl angesehen werden kann.

Um Oberflächen mit elliptischer Krümmung zu erhalten, muss man Centralkörper mit krummlinigen Seitenkanten zulassen. Hier wächst das Künstliche des Systems in hohem Maasse durch den Umstand, dass die Grundflächen nicht mehr unabhängig von einander sein dürfen. Eine bündige Erklärung des Centralkörpers ist überhaupt zu vermissen und würde auch kaum einfach ausfallen, da die krumme Seitenkante nicht mehr als Verbindungslinie von zwei Punkten der Grundflächenränder ihrer Lage nach bestimmt ist. Die Erklärung des § 115: Wenn alle Seitenkanten des Centralkörpers in congruente Viertelkreise übergehen, die eine Grundfläche zum Kreise von gleichem Halbmesser, die andere verschwindend klein wird, so entsteht ein Körper, welcher Halbkugel heisst, — ist aus dem genannten Grunde nicht exact; es müsste mindestens gesagt sein, dass die Ebene der Seitenkante senkrecht zum Grundkreise stehen soll; aber auch dann ist noch die Hohlkehle möglich. Als Seitenkanten dürfen, wie später gefordert wird, nur Kegelschnitte auftreten; an der Hand weiterer Forderungen werden dann mit grossem Geschick allerlei Körper, unter ihnen die Abschnitte der Flächen zweiter Ordnung, construirt, deren Volumenbestimmung nach dem früheren Schema möglich ist; man kann nicht eigentlich von einem Nachweise reden, dass die frühere Formel giltig sei.

Wir wollen auf Einzelheiten nicht näher eingehen, sondern nur hervorheben, dass zum Schlusse unter dem Titel „zusammengesetzte Körper“ noch die regulären und halbregulären Körper, sowie einige technische Rotationskörper berechnet werden. Bei vielen dieser führt allerdings die Guldin'sche Regel viel besser zum Ziele, man sehe z. B. die Behandlung der Ringfläche.

Ein erster Anhang bringt dann noch die Berechnung einer grossen Reihe von Gewölben, ein zweiter Anhang eine sehr ansprechende Zusammenstellung der im Buche benutzten Kegelschnittsätze in analytischer Behandlung.

Dem Verfasser ist für die grosse Liebe und Hingebung, mit welcher er den spröden Stoff bearbeitet hat, volle Anerkennung zu zollen, und ein Fachmann wird sich gewiss über die Gewandtheit, mit der die Rechnungen ohne höhere Mathematik durchgeführt sind, freuen, aber seine Schüler möchte er mit denselben nicht quälen. Referent wenigstens würde sich damit begnügen, wenn die Abiturienten die Sätze über die Lage von Linien und Ebenen im Raume gründlich, namentlich in der Vorstellung beherrschten

* Im vorliegenden Buche werden Abschnitte von Kugeln, Ellipsoide als Kegel mit krummen Seitenlinien und daher als „Conoide“ bezeichnet. Es scheint uns sehr bedenklich, ohne zwingenden Grund eine solche, von der heutigen gänzlich abweichende Terminologie einzuführen.

und noch Cylinder, Kegel und Kugel berechnen könnten; gerade in jenen Sätzen liegt der Schwerpunkt des Unterrichts an Mittelschulen, denn sie bilden das Fundament für den Bau der heutigen Raumgeometrie, sowohl der synthetischen als der analytischen.

Hannover. Dr. C. RODENBERG.

Bibliographie

vom 1. Juni bis 31. Juli 1887.

Periodische Schriften.

Physikalische Abhandlungen d. königl. preuss. Akademie d. Wissensch. Aus dem J. 1886. Berlin, G. Reimer. 4 Mk 50 Pf.

Abhandlungen der mathem.-physikal. Classe der königl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 13. Bd. Leipzig, Hirzel. 30 Mk.

Acta mathematica, herausgeg. v. G. MITTAG-LEFFLER. 10. Bd., 1. Heft. Berlin, Mayer & Müller. compl. 12 Mk.

Astronomische Nachrichten, herausgeg. v. A. KRUEGER. 117. Bd., Nr. 1—4. Hamburg, Mauke & S. compl. 15 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft, herausgeg. v. E. SCHÖNFELD u. H. SEELIGER. 22. Jahrg. 1887, 2. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Astronom. Jahrbuch f. 1889, herausgeg. v. F. TIETJEN. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Sternephemeriden f. d. Jahr 1888. Ebendas. 6 Mk.

Nautische Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1890, herausgegeben vom Reichsamt des Innern. Berlin, Heymann. 1 Mk. 50 Pf.

Veröffentlichungen des königl. preuss. geodät. Instituts. Telegraph. Längenbestimmungen i. d. J. 1885 u. 1886. Berlin, Stankiewicz. 14 Mk.

Repertorium der Physik, herausgeg. v. F. EXNER. 23. Bd. (12 Hefte). 1. Heft. München, Oldenbourg. compl. 24 Mk.

Fortschritte der Physik. Nr. 10, 1886. (Sep.-Abdr.) Leipzig, Mayer. 2 Mk.

Beobachtungen der meteorolog. Stationen im Königr. Bayern, herausgeg. durch C. LANG u. F. ERK. 9. Jahrg. 1887 (4 Hefte). 1. Heft. München, Ackermann. compl. 18 Mk.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica. Herausgeg. v. R. v. HANSTEIN. 36. Jahrg., 4. Heft, Oct.-Decbr. 1886. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 60 Pf.

Mathematische und naturwissenschaftl. Berichte aus Ungarn, red. v. J. FRÖHLICH. 4. Bd. Berlin, Friedländer & S. 6 Mk.

Mélanges physiques et chimiques, tirées du bulletin de l'acad. de Pétersbourg. Tome XII, livr. 5. Leipzig, Voss. 1 Mk. 50 Pf.

Geschichte der Mathematik.

Reiff, R., D. Anfänge d. Variationsrechnung. (Sep.-Abdr.) Tübingen, Fues. 20 Pf.

Ofterdinger, C. Joh. Tob. Mayer. (Sep.-Abdr.) Ebendas. 20 Pf.

Reine Mathematik.

Neumann, C., Ueb. die Methode des arithmetischen Mittels. 1. Abh. (Sächs. Ges. d. Wiss.) Leipzig, Hirzel. 3 Mk. 20 Pf.

Lüroth, J., Ueber die canonischen Perioden der Abel'schen Integrale. 2. Abh. (Akad.) München, Franz. 1 Mk. 30 Pf.

Reichardt, W., Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche durch hyperelliptische Functionen. Leipzig, Engelmann. 5 Mk.

Braumühl, A. v., Untersuchungen über p-reihige Charakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, und die Additionstheoreme der zugehörigen Thetafunctionen. (Dissert.) München, Franz. 1 Mk. 50 Pf.

Durège, H., Theorie d. ellipt. Functionen. 4. Aufl. Leipzig, Teubner. 9 Mk.

Arnoldt, C., Einige Untersuchungen über quadratische Strahlencomplexe. Strassburg i. E., Trübner. 80 Pf.

Bardey, E., Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebraischer Aufgaben. 1. Thl. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 50 Pf.

Hengel, J. v., Lehrbuch der Algebra. Freiburg i. B., Herder. 5 Mk.

Koch, Ueb. reguläre u. halbreguläre Sternpolyeder. (Sep.-Abdr.) Ebdas. 30 Pf.

Voss, A., Ueber die projective Centralfläche einer algebr. Fläche n^{ter} Ordn. (Akad.) München, Franz. 2 Mk. 40 Pf.

Brill, A., Ueber die Modellsammlung des mathematischen Seminars der Universität Tübingen. (Sep.-Abdr.) Tübingen, Fues. 20 Pf.

Angewandte Mathematik.

Selling, E., Eine neue Rechenmaschine. Berlin, Springer. 1 Mk. 20 Pf.

Doergens, R., Die Berechnung und Theilung geradlinig begrenzter Grundstücke. Berlin, polytechn. Buchhandl. (Seydel). 2 Mk.

Schoenfeld, E., Bonner Sternkarten, 2. Serie. Atlas der Himmelszone zwischen 1° u. 23° südl. Declin. f. Anf. 1885. Bonn, Marcus. 12 Mk.

Klein, H., Sternatlas. 6. Lief. Leipzig, H. Mayer. 1 Mk. 20 Pf.

Schurig, R., Karte d. Sonnenfinsterniss am 19. Aug. 1887. Leipzig, Pfau. 40 Pf.

Bennecke, F., Untersuchung d. stationären elektrischen Strömung in einer unendl. Ebene f. ein. bes. Fall. (Sep.-Abdr.) Leipzig, Engelmann. 6 Mk.

Clifford, K., Elements of dynamics. Part. I: Kinematic. Book 4. London, Macmillan. 6 Sh.

Physik und Meteorologie.

Kaeuffer, P., Ist die Cohäsion der Gase wirklich gleich Null? Ableit. aus Experimenten üb. d. specif. Wärme derselben. Mainz, v. Zabern. 50 Pf.

Wilk, E., Grundbegriffe d. Meteorol. f. höh. Schulen. Iserlohn, Bädeker. 1 Mk.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1886.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Abbildung.

1. Conforme perspective Projection der Flächen auf einander. R. Hoppe. Grun. Archiv 2 R. IV, 328.
2. Sur la représentation des figures tracées sur une surface. Applications aux cartes de géographie. M. du Chatenet. N. ann. math. Ser. 3, V, 142.
3. Détermination des systèmes de cartes de géographie dans lesquels tous les cercles de la sphère sont représentés par des cercles. M. du Chatenet. N. ann. math. Ser. 3, V, 168.

Analytische Geometrie der Ebene.

4. Logische Einführung der Liniencoordinaten in der Ebene. C. Reuschle. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 371.
5. Sur les rayons de courbure d'une classe de courbes géométriques. R. Godefroy. N. ann. math. Ser. 3, V, 272.
6. Sur les courbes dans lesquelles la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est avec lui dans un rapport constant. M. du Chatenet. N. ann. math. Ser. 3, V, 233. — H. Brocard ibid. 397.
7. Sur les développées successives. G. Pirondini. N. ann. math. Ser. 3, V, 460.
8. Sur une condition définissant des familles de courbes. E. Cesaro. Mathesis VI, 33.
9. Sur la parabole cubique $x^3 = 2p^2y$. Bastin & Gillet. Mathesis VI, 138.
10. Ueber die Abstände eines Punktes von drei Geraden. O. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 64. — R. Heger ibid. 191.
11. Sur des séries de droites tirées chacune par les points qui divisent les droites de la série précédente dans un rapport donné. Alph. Lambert. Mathesis VI, 159. — J. Neuberg ibid. 160.
12. Sur les trois symétriques d'une droite donnée par rapport aux côtés d'un triangle donné. Deprez & Boedt. Mathesis VI, 142.
13. Sur certains lieux géométriques se rapportant à un triangle variable tournant autour d'un point donné. Pisani. Mathesis VI, 259.
14. Enveloppe des côtés d'un carré invariable dont deux sommets décrivent deux droites rectangulaires. J. B. Pomey. N. ann. math. Ser. 3, V, 520.
15. Sur la potentielle triangulaire. G. de Longchamps. Mathesis VI, 246.
16. Sur les courbes $x^2y + a^2x = \lambda$. J. Neuberg. Mathesis VI, 226.
17. Sur les lignes de poursuite. E. Cesaro. N. ann. math. Ser. 3, V, 65. — M. d'Ocagne ibid. 300.
18. Sur une courbe de poursuite. Keelhoff. Mathesis VI, 135.
19. Les lignes barycentriques. E. Cesaro. N. ann. math. Ser. 3, V, 511.
20. Ueber die Pascal'sche Spirale. Ant. Sucharda. Grun. Archiv 2. R. IV, 197.
21. Sur le limaçon de Pascal. Jerabek, Liénard, Verniory. Mathesis VI, 229.
22. Sur la strophoïde. V. Jamet. Mathesis VI, 162. — Jerabek ibid. 164.
23. Sur la strophoïde. J. Neuberg. Mathesis VI, 219.
24. Tangente et foyer de la focale de Quételet. E. Dewulf. Mathesis VI, 217.
25. Division d'un angle en parties égales. Lazzeri. Mathesis VI, 122. — Habich ibid. 123.
26. Sur une généralisation de la quadratrice. G. Fouret. N. ann. math. Ser. 3, V, 39.
27. Sur une courbe plus générale que la quadratrice de Dinostrate. H. Brocard. Mathesis VI, 125.

Vergl. Elliptische Transcendenten 69. Geschichte der Mathematik 117. Gleichungen 145. Kegelschnitte. Kreis. Quadratur.

Analytische Geometrie des Raumes.

28. Sur l'emploi des coordonnées intrinsèques. E. Cesaro. N. ann. math. Ser. 3, V, 127.
    Vergl. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

29. Zur geometrischen Theorie der Dämmerung. H. Cranz. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 158.
30. Untersuchung über die Convergenz der Reihen, welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet werden. H. Gylden Acta math. IX, 185.
31. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. G. W. Hill. Acta math. VIII, 1.
32. Ueber ein Theorem des Herrn Tisserand aus der Störungstheorie. And. Lindstedt. Acta math. IX, 381.
    Vergl. Geschichte der Mathematik 112, 114.

B.

Bernoulli'sche Zahlen.

33. Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler. E. Cesaro. N. ann. math. Ser. 3, V, 305.

Bestimmte Integrale.

34. Sur un développement de l'intégrale $\int\limits_0^a e^{x^2}\,dx$. T. J. Stieltjes. Acta math. XI, 167.
35. Sur la représentation des valeurs limites des intégrales par des résidus intégraux. P. Tchebycheff. Acta math. IX, 35.
36. Sur les résidus des intégrales doubles. H. Poincaré. Acta math. IX, 321.
37. Sur les sommes composées des coéfficients des séries à termes positifs. P. Tchebycheff. Acta math. IX, 182.
38. Sur la limite de $\sum\limits_1^n \frac{1}{p} - \sum\limits_1^m \frac{1}{q}$. J. B. Pomey. N. ann. math. Ser. 3, V, 348.
    Vergl. Gammafunctionen.

C.

Chronologie.

39. Kalenderformeln. Chr. Zeller. Acta math. IX, 131.

Combinatorik.

40. Sur les combinaisons avec répétition. Gelin. Mathesis VI, 175.
41. Sur les arrangements de m nombres pris n à n et dans lesquels aucun élément n'occupe la place assignée par sa valeur. J. Neuberg. Mathesis VI, 253.
42. Carré magique fait avec les dés d'un jeu de dominos. Mathesis VI, 43.
43. Sur la marche du cavalier. Fr. Hofmann. N. ann. math. Ser. 3, V, 224.
    Vergl. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Cubatur.

44. Zur Theorie der Volumsbestimmungen. F. Rogel. Grun. Archiv 2. R. IV, 218.
45. Volume de la surface des centres de courbure de toutes les lignes d'une surface donnée passant par un point donné. Timmerhans. Mathesis VI, 180.

D.

Determinanten.

46. Ueber orthogonale Substitutionen. E. Netto. Acta math. IX, 295.
47. Évaluation d'un déterminant cyclosymmétrique. Gillet etc. Mathesis VI, 60.
48. Le déterminant de Smith et Mansion. E. Cesaro. N. ann. math. Ser. 3, V, 44.
49. Évaluation du déterminant $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin 2\beta \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin 2\gamma \end{vmatrix}$. Gillet. Mathesis VI, 88. — Allersma ibid. 89.
    Vergl. Maxima und Minima 192.

Differentialgleichungen.

50. Berichtigung einer Mittheilung im XXIV. Bande der Zeitschr. Math. Phys. W. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 127. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 35.]
51. Ueber singuläre Punkte der gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades. C. F. E. Björling. Grun. Archiv 2. R. IV, 358.

52. Sur les équations différentielles linéaires E. Jaggi. N. ann. math. Ser. 3, V, 86.
53. Sur les équations différentielles linéaires sans second membre. E. Jaggi. N. ann. math. Ser. 3, V, 83.
54. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. H. Poincaré. Acta math. VIII, 295.
55. Einige Eigenschaften der linearen und homogenen Differentialgleichungen. E. A. Stenberg. Acta math. VIII, 119.
56. Ueber einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengleichungen. H. J. Mellin. Acta math. IX, 137.
57. Intégrer l'équation $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0$. H. Brocard. Mathesis VI, 250.
58. Intégrer l'équation $(y+z)\frac{\partial z}{\partial x} + (x+z)\frac{\partial z}{\partial y} = (x+y)$. H. Brocard. Mathesis VI, 79.

Vergl. Gleichungen 131. Hyperbel 148.

Differenzenrechnung.

59. Transformations algébriques par le calcul des différences. E. Cesaro. N. ann. math. Ser. 3, V, 489.

Vergl. Differentialgleichungen 56.

E.

Elektricität.

60. Sur les unités électriques. J. Bertrand. Acta math. VIII, 387.

Ellipse.

61. De la déviation dans l'ellipse. M. d'Ocagne. N. ann. math. Ser. 3, V, 370, 534.
62. Propriété des anomalies excentriques des extrémités d'une corde normale à une ellipse. Brocard etc. Mathesis VI, 68.
63. Zur Construction der Ellipse mit Benutzung von Krümmungskreisen. Fr. Schiffner. Grun Archiv 2. R. IV, 331.
64. Der Krümmungskreis der Ellipse. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. IV, 443.
65. Sur les centres de courbure de l'ellipse et de la parabole. R. Godefroy. N. ann. math. Ser. 3, V, 237.
66. Théorème sur la moyenne arithmétique des p^{iemes} puissances de tous les diamètres d'une ellipse. E. Cesaro. Mathesis VI, 182.
67. On considère deux points donnés comme les extrémités de l'un des diamètres conjugués égaux d'une ellipse. Trouver le lieu des sommets et celui des foyers de cette courbe variable. Servais etc. Mathesis VI, 112. — Farisano ibid. 112.
68. Lieu des projections des points d'une ellipse sur la tangente menée au point diamétralement opposé. Keelhoff. Mathesis VI, 16. — J. Neuberg ibid. 17.

Elliptische Transcendenten.

69. Transformationen der elliptischen Integrale und Functionen in Verbindung mit der Theorie der Kettenlinie. Em. Oekinghaus. Grun. Archiv 2. R IV, 225. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 385.]
70. Elliptische Integralfunctionen und ihre geometrische, analytische und dynamische Bedeutung. Em. Oekinghaus. Grun. Archiv 2. R. IV, 279. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 600.]
71. Ueber die Inversion der vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung für ihre reellen Moduln. C. Isenkrahe. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 34.
72. Ueber die Inversion der von Legendre definirten vollständigen elliptischen Integrale zweiter Gattung für ihre reellen Moduln. C. Isenkrahe. Ztschr. Math. Phys. XXXI, 178.
73. Inversion des von Weierstrass definirten vollständigen elliptischen Integrals zweiter Gattung. C. Isenkrahe. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 241.

F.

Formen.

74. Eine einfache Darstellung der Resultante von zwei quadratischen Formen. Fr. Hofmann. Grun. Archiv 2. R. IV, 325.
75. Zur Theorie der binären quadratischen Formen von positiver Determinante. J. Vivanti. Zeitschr. Math Phys. XXXI, 273.

76. Sur la décomposition d'une forme quadratique à m variables en une somme de $m-n$ carrés. Benoit. N. ann. math. Ser. 3, V, 30.

Functionen.

77. Théorie nouvelle des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire. P. Mansion. Mathesis VI, Supplément
78. Les fonctions d'une seule variable à un nombre quelconque de périodes. F. Casorati. Acta math. VIII, 345.
79. Sur une fonction qui a une ligne d'infinis J. B. Pomey. N. ann. math. Ser. 3, V, 530.
80. Ueber den functionentheoretischen Zusammenhang zwischen den Lamé'schen, Laplace'schen und Bessel'schen Functionen. E. Haentzschel. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 25.
81. Les lieux fondamentaux des fonctions inverses des intégrales Abéliennes et en particulier des fonctions inverses des intégrales elliptiques de 2me et 3me espèce. F. Casorati. Acta math. VIII, 360.
82. Sur une formule d'analyse. G. Teixeira. N. ann. math. Ser. 3, V, 36.

Vergl. Abbildung. Bernoulli'sche Zahlen. Bestimmte Integrale. Differentialgleichungen. Elliptische Transcendenten. Formen Gammafunctionen. Geschichte der Mathematik 118. Gleichungen. Hyperbolische Functionen. Invariantentheorie Kettenbrüche. Modulargleichungen. Taylor's Reihe. Thetafunctionen. Trigonometrie 273, 274. Ultraelliptische Transcendenten.

G.

Gammafunctionen.

83. Zur Theorie der Gammafunctionen. H. J. Mellin. Acta math. VIII, 37.

Geometrie (descriptive).

84. Construction des points doubles de la projection de la courbe d'intersection de deux cones ou cylindres du second degré. Considérations sur le théorème de Désargues. H. Picquet. N. ann. math. Ser. 3, V, 163, 281. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 639.]

Geometrie (höhere).

85. Ueber eine Involution von Punkten auf einer Geraden. B. Sporer. Grun. Archiv 2. R. IV, 323.
86. Sur les figures semblables associées. G. Tarry. Mathesis VI, 97, 148, 196.
87. Propriétés relatives à deux points du plan d'un triangle qui se déduisent d'un point quelconque du plan comme les points de Brocard se déduisent du point de Lemoine. Em. Lemoine. Mathesis VI, Supplément.
88. Théorème sur deux polygones homothétiques. Choisis & Deprez. Mathesis VI, 119.
89. Ueber die reductibeln algebraischen Curven. M. Noether. Acta math. VIII, 161.
90. Ueber die Wendepunkte einer algebraischen Curve. Fr. Hofmann. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 374.
91. Ueber die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten. P. H. Schoute. Grun. Archiv 2. R. IV, 308. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 441.]
92. Ueber die Realitätsverhältnisse der Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung. C. Hossfeld. Zeitschr. Math Phys XXXI, 1.
93. Construction einer Curve 6. Ordnung aus 7 Doppelpunkten und 6 einfachen Punkten. R. Heger. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 296.
94. Zusammenstellung von Constructionen an Curven höherer Ordnung. R. Heger. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 88.
95. Die reguläre Eintheilung des Raumes bei elliptischer Maassbestimmung. C. Hossfeld. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 310.
96. Einige Beiträge zur Theorie der allgemeinen rationalen quadratischen Transformation. Fr. Hofmann. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 283.
97. Ueber eine ebene Reciprocität und ihre Anwendung auf die Curventheorie. C. Beyer. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 147.
98. Die Erzeugung polarer Elemente für Flächen und Curven durch die projectivische Verallgemeinerung des Schwerpunktes. L. Geisenheimer. Ztschr. Math. Phys. XXXI, 193
99. Eine elementare Betrachtung über Strahlencongruenzen. A. Weiler. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 18.

100. Ueber die Beziehung des Nullsystems und linearen Strahlencomplexes zum Polarsystem des Rotationsparaboloids. G Hauck. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 362.

Vergl. Geschichte der Mathematik 110. Kegelschnitte. Kreis. Oberflächen zweiter Ordnung 209.

Geometrie (kinematische).

101. Sur l'enveloppe de certaines droites variables. M. d'Ocagne. N. ann. math. Ser. 3, V, 88. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 658.]

Geschichte der Mathematik.

102. Bemerkungen zu den Regeln des Ahmes und des Baudhâyana über die Quadratur des Kreises. C. Demme. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, hist.-lit. Abth. 132.
103. Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes und Hero. C. Demme. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, hist.-lit. Abth. 1.
104. Seiten- und Diametralzahlen bei den Griechen. P. Bergh. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, hist.-lit. Abth. 135.
105. Sur la représentation des fractions chez les Grecs. P. Tannery. Biblioth. math. 1886, 235.
106. Euklid bei den Arabern. M. Steinschneider. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, hist.-lit. Abth. 81.
107. Sur une formule d'approximation des racines carrées donnée par Alkalsadi. G. Eneström. Biblioth. math. 1886, 236.
108. Zur talmudischen Mathematik. Ed. Mahler. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, hist.-lit. Abth. 121.
109. Ueber die Originalausgabe von Chr. Rudolff: „Behend und hübsch Rechnung u. s. w.“ A. Pringsheim. Biblioth. math. 1886, 239.
110. Albrecht Dürer, einer der Begründer der neueren Curventheorie. S. Günther. Biblioth. math. 1886, 137.
111. Sull' ortografia del nome del matematico messinese Maurolicio. Biblioth. math. 1886, 90.
112. Ueber die Entdeckung der Variation und der jährlichen Gleichung des Mondes. C. Anschütz. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, hist.-lit. Abth. 161, 201.
113. Sur quelques théorèmes de Sluse. Ph. Gilbert. Mathesis VI, 241. — J. Massau ibid. 245, 273.
114. Y a't-il une deuxième édition de la théorie de la lune de Melanderhjelm et Frisi? P. Riccardi. Biblioth. math. 1886, 95.
115. Sur la formule générale d'interpolation de Newton. P. Mansion. Biblioth. math. 1886, 141. — G. Eneström ibid. 142.
116. Sur un théorème empirique de Goldbach. Eneström. Mathesis VI, 133.
117. Le système des coordonnées dit de Schwering et le Mémoire de Chasles sur le principe de dualité. F. Dumont. N. ann. math. Ser. 3, V, 300.
118. Sur la théorie des nombres incommensurables. E. Catalan. Mathesis VI, 151.
119. Wilhelm Unverzagt. Aug. Schmidt. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, hist.-lit. Abth. 41.
120. Zur Erinnerung an Ludwig Scheeffer. W. Dyck. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, hist.-lit. Abth. 50.
121. Savin Realis † 20. II. 1886. E. Catalan. N. ann. math. Ser. 3, V, 200.
122. Moret-Blanc † 20. III. 1886. N. ann. math. Ser. 3, V, 160.
123. Discours de Jos. Bertrand aux obsèques de Edm. Laguerre † 13. VIII. 1886. N. ann. math. Ser. 3, V, 494.
124. Sur les écrits mathématiques d'auteurs étrangers publiés en Suède ou traduits en Suédois. G. Eneström. Biblioth. math. 1886, 45, 92, 140. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 468.]
125. Sur l'histoire des sciences mathématiques et physiques de M. Maximilien Marie. B. Boncompagni. Biblioth. math. 1886, 43, 87.
126. Questions historiques. Biblioth. math. 1886, 47, 96, 144, 244.

Vergl. Gleichungen 127.

Gleichungen.

127. Beweis des Satzes, dass eine jede algebraische Gleichung eine Wurzel hat. E. Holst. Acta math. VIII, 155. — G. Loria ibid. IX, 71.
128. Theorie der Abel'schen Zahlkörper. H. Weber. Acta math. VIII, 193; IX, 105.
129. Zur Theorie der symmetrischen Functionen. L. Schendel. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 316.
130. Sur une formule de Newton. E. Cesaro. Mathesis VI, 172.

131. Ueber die Auflösung gewisser algebraischer Gleichungen mittels Integration von Differentialgleichungen. W. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 102, 129.
132. Ueber die Bestimmung der reellen Wurzeln trinomischer Gleichungen. Th. Baumgardt. Grun. Archiv 2. R. IV, 103. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 497.]
133. Ueber die Auflösung der allgemeinen trinomischen Gleichung $t^n + at^{n-s} + b = 0$. W. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 223.
134. Die Berechnung der reellen Wurzeln der quartinomischen Gleichungen. Alfr. Wiener. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 65, 192.
135. Sur les valeurs réelles à donner à a et b pour que l'équation $3t^4 + 8at^3 - 12bt^2 + 4b = 0$ admette une racine double. J. Derousseau. Mathesis VI, 35. — J. Neuberg ibid. 37.
136. Sur les racines de l'équation $X_n = 0$. P. J. Stieltjes. Acta math. IX, 385.
137. Zur graphisch-mechanischen Auflösung numerischer Gleichungen. C. Reuschle. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 12.
138. Sur les équivalences algébriques et l'élimination. H. Laurent. N. ann. math. Ser. 3, V, 432, 456.
139. Zur Theorie der Elimination. C. Schmidt. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 214.
140. Système d'équations ayant toutes leurs racines réelles. E. Cesaro. Mathesis VI, 193.
141. Auflösung linearer Gleichungen. W. Veltmann. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 257.
142. Résoudre le système $(x+2y)(x+2z) = a^2$, $(y+2x)(y+2z) = b^2$, $(z+2x)(z+2y) = c^2$. Beyens. Mathesis VI, 69. — Jane ibid. 69.
143. Dépendance réciproque de trois équations cubiques à trois inconnues. Deprez. Mathesis VI, 67. — De Ceunynck ibid. 68. — Choisis ibid. 68. — Thiré ibid. 68.
144. Résoudre le système $x^3 - a = y^3 - b = z^3 - c = xyz$. Béjot etc. Mathesis VI, 45.
145. Système de deux équations du triosième degré vérifié par des valeurs réelles des inconnues. P. Mansion. Mathesis VI, 255.
146. Système de trois équations du 4. degré. E. Cesaro. Mathesis VI, 263.
147. Sur deux équations du 9. degré. E. Cesaro etc. Mathesis VI, 278.
Vergl. Determinanten.

H.

Hyperbel.

148. Sur l'équation différentielle de toutes les hyperboles équilatères tracées dans un plan et ayant leur centre dans un point donné. H. Brocard. Mathesis VI, 12.
149. Système d'hyperboles équilatères circonscrites à un triangle rectangle. Mathesis VI, 157.
150. Sur la circonférence $x^2 + y^2 = 1$ et l'hyperbole équilatère $y^2 - x^2 - 2xy + 2y + 1 = 0$. Beyens & A. Thiré. Mathesis VI, 232.
151. Sur deux hyperboles équilatères dont les asymptotes sont parallèles. N. ann. math. Ser. 3, V, 401.
152. Sur deux hyperboles équilatères ayant leurs asymptotes parallèles aux côtés d'un rectangle donné. H. Brocard. Mathesis VI, 205.
153. Sur trois hyperboles se coupant en un point d'une circonférence. P. le Cointe. Mathesis VI, 183.
154. Le lieu des points tels que les extrémités des trois droites limitées aux côtés des angles d'un triangle donné et ayant leur milieu en ce point soient situées sur une hyperbole équilatère, est l'axe d'homologie de ce triangle et du triangle des pieds des hauteurs. V. Jamet. Mathesis VI, 18.

Hyperbolische Functionen.

155. Sur quelques relations nouvelles entre les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires. S. Realis. Mathesis VI, 7.

I.

Integration (unbestimmte).

156. Sur l'intégrale $\int \frac{dz}{(1+z^2)^2}$. V. de Strékalof. N. ann. math. Ser. 3, V, 533 [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 105.]

Interpolation.

157. Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss. J. Bendixson. Acta math. IX, 1.
Vergl. Geschichte der Mathematik 115.

Invariantentheorie.

158. Beweis für das Verschwinden der Summe der numerischen Coefficienten einer Invariante. Fr. Hofmann. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 369.

K.

Kegelschnitte.

159. En chaque point d'une conique, on mène un diamètre et la normale. Trouver le lieu du point d'intersection de ce diamètre et de la tangente à l'autre extrémité de la normale. Falisse & Deprez. Mathesis VI, 87.
160. Sur le point de Tarry. J. Neuberg. Mathesis VI, 1.
161. Conique décrite par le centre des symédianes d'un triangle dont deux sommets et l'angle opposé sont donnés. Deprez. Mathesis VI, 136.
162. Sur un système de coniques dont l'équation a ses coefficients fonctions linéaires de deux paramètres. A. Rémond. N. ann. math. Ser. 3, V, 424.
163. Ueber die Systeme, welche durch Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Polardreieck, bez. durch Flächen zweiten Grades mit einem gemeinsamen Polartetraeder gebildet werden. K. Meister. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 321.
164. Conique enveloppée par la ligne des centres de certains cercles variables. Deprez & Pisani. Mathesis VI, 237.
165. Sur le cercle orthoptique. M. d'Ocagne. N. ann. math. Ser. 3, V, 97.
166. Sur le système d'une conique et d'un cercle. R. Godefroy. N. ann. math. Ser. 3, V, 155.
167. Sur un théorème de Steiner. Genese. N. ann. math. Ser. 3, V, 493. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 717.]
168. Centre d'une conique inscrite à un triangle. J. Neuberg. Mathesis VI, 31.
169. Beweis eines Steiner'schen Lehrsatzes vom eingeschriebenen Viereck. H. E. M. O. Zimmermann. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 121.
170. Les sommets B, C du triangle ABC sont fixes, et le troisième parcourt une droite. Les sommets du carré inscrit dont un côté repose sur BA décrivent des coniques. Deprez. Mathesis VI, 91. — Jerabek ibid. 92.
171. Lieu des sommets des coniques circonscrites à un parallélogramme donné. Gob. Mathesis VI, 257. — J. Neuberg ibid. 259.
Vergl. Ellipse. Formen 74. Hyperbel. Parabel.

Kettenbrüche.

172. Principe fondamental de la théorie des fractions continues périodiques. P. Mansion. Mathesis VI, 80.

Kreis.

173. Sur les droites de Simson. Verniory. Mathesis VI, 32.
174. Ueber gewisse merkwürdige Punkte des Dreiecks. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 251.
175. Geometrische Sätze. B. Sporer. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 43.
176. Triangles inscrits dans un cercle et ayant pour centre de gravité un point donné. Mathesis VI, 156.
177. Sur le cercle des neuf points. Em. Lemoine. N. ann. math. Ser. 3, V, 122.
178. Zur Figur des Feuerbach'schen Kreises. W. Godt. Grun. Archiv 2. R. IV, 436.
179. Sur le cercle de neuf points. Cl. Thiry. Mathesis VI, 106.
180. Lieu décrit par le centre de similitude de deux figures semblables. Pleyers & Beyens. Mathesis VI, 236. Deprez & Pisani ibid. 237.
181. Sur un problème de potentiel. J. B. Pomey. N. ann. math. Ser. 3, V, 483.
182. Sur deux cordes rectangulaires passant par un point donné intérieur d'une circonférence. J. Neuberg. Mathesis VI, 228.
183. Sur les segments déterminés sur les côtés d'un triangle équilatéral par les perpendiculaires abaissées d'un point de la circonférence circonscrite. Gob. Mathesis VI, 189.
184. Circonférences circonscrites à un triangle donné et aux trois triangles ayant pour sommets deux sommets du premier triangle et le centre de la première circonférence. Verniory & Gob. Mathesis VI, 164. — Laurens ibid. 165.

185. Tangente à une circonférence donnée rencontrant deux autres circonférences données à distance égale. H. Brocard. Mathesis VI, 228.
186. Intersections d'une courbe algébrique et d'un cercle à rayon variable mais de centre fixe. M. d'Ocagne. N. ann. math. Ser. 3, V, 295.
187. Sur les couples de deux cercles tangents entre eux et tangents à un cercle donné en deux points donnés. Mathesis VI, 154.
188. Circonférence tangente à trois circonférences et sphère tangente à quatre sphères. N. ann. math. Ser. 3, V, 539.
189. Sur cinq circonférences tangentes entre elles. H. Brocard & J. Neuberg. Mathesis VI, 208.
190. Sur une couronne de cercles tangents à une circonférence donnée. S. B. Mathesis VI, 139.
191. Sur une couronne composée de $2n$ cercles tangents à une circonférence donnée et alternativement des deux rayons r_1 et r_2. S. B. Mathesis VI, 140.
Vergl. Geschichte der Mathematik 102. Rectification 249.

M.

Maxima und Minima.

192. Sur une question de maximum et de minimum proposée par M. Tchebycheff. A. Markoff. Acta math. IX, 57.
193. Ein Maximum-Problem. O. Bermann. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 49, 381.
Vergl. Sphärik 262. Stereometrie 268.

Mechanik.

194. Ueber Körperketten. F. August. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 348.
195. Sur les polygones fermés. E. Collignon. N. ann. math. Ser. 3, V, 497.
196. Analytisch-specifische Grössen des Vierecks. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. IV, 224, 330. — F. August ibid. 330.
197. Sur la balance de Roberval. H. Resal. N. ann. math. Ser. 3, V, 161.
198. Sur la détermination géométrique des brachistochrones. De Saint-Germain. N. ann. math. Ser. 3, V, 177.
199. Theorie des Gauss'schen Pendels mit Rücksicht auf die Rotation der Erde. H. Samter. Grun. Archiv 2. R. IV, 1.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 17, 18. Astronomie. Elektricität. Elliptische Transcendenten 70. Mehrdimensionale Geometrie 200. Potential.

Mehrdimensionale Geometrie.

200. Anziehung eines der Kugel analogen Gebildes von n Dimensionen auf einen Punkt. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. IV, 185.
201. Anzahlbestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension. H. Schubert. Acta math. VIII, 97.

Modulargleichungen.

202. Die Modulargleichungen der Galois'schen Moduln der 2. bis 5. Stufe. G. Friedrich. Grun. Archiv 2. R. IV, 113.

O.

Oberflächen.

203. Sur les sections planes des surfaces. Théorie nouvelle des plans cycliques et des ombilics. V. Lac de Bosredon. N. ann. math. Ser. 3, V, 186, 214.
204. Sur une question de roulettes en connexion avec les surfaces de révolution de courbure moyenne constante. E. Habich. Mathesis VI, 103.
205. Trouver le lieu des points de vue M qui donnent pour perspective sur un plan fixe P, d'un segment AB de droite fixe de longueur donnée, un autre segment $A'B'$ de longueur constante l. H. Brocard. Mathesis VI, 43.
206. Lignes de plus grande pente de la surface $z = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}$. H. Brocard. Mathesis VI, 251.
207. Sur la surface $zx^2 = ay^2$. H. Brocard. Mathesis VI, 126.
Vergl. Abbildung. Cubatur. Maxima und Minima 193. Thetafunctionen 272.

Oberflächen zweiter Ordnung.

208. Axes des sections planes des surfaces du second ordre. Barbarin. Mathesis VI, 25, 49.
209. Synthetische Theorie der Krümmung der Flächen zweiter Ordnung. C. Cranz. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 56.

210. Zur Entartung einer Fläche zweiter Ordnung. A. Thaer. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 382.
211. Sur l'hyperboloïde. Mangeot. N. ann. math. Ser. 3, V, 480.
212. Condition pour que quatre droites soient les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde. N. ann. math. Ser. 3, V, 158.

Optik.

213. Ueber Refractionscurven. E. Oekinghaus. Grun. Archiv 2. R. IV, 429.

P.

Parabel.

214. Théorèmes sur la parabole. C. Bergmans. Mathesis VI, 169. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 160.]
215. Génération d'une parabole au moyen d'une circonférence avec une tangente fixe et une tangente mobile. Mineur etc. Mathesis VI, 213.
216. Trouver l'enveloppe de l'axe d'une parabole, de grandeur constante, passant par un point fixe et tangente à une droite fixe. Deprez. Mathesis VI, 86.
217. Sur les normales à une courbe enveloppe qui sont en même temps tangentes à une même parabole. Verniory. Mathesis VI, 214.
218. Lieu des points M tels que le cercle passant par les points de contact des tangentes à une parabole donnée issues de M et par le sommet de la parabole ait un rayon constant. Mathesis VI, 157.

Vergl. Ellipse 65.

Paraboloid.

219. Sur une propriété du paraboloïde hyperbolique. H. Novarese. Mathesis VI, 75.

Planimetrie.

220. Theilung einer Geraden nach dem goldenen Schnitt. M. Weidenholzer. Grun. Archiv 2. R. IV, 106.
221. Sur quatre couples de lignes symétriques par rapport à un axe donné. Verniory & De Hondt. Mathesis VI, 141.
222. Sur trois couples de parallèles dans un plan. Bartier etc. Mathesis VI, 134.
223. Trois droites se coupant dans un seul point. J. Collin & Laurens. Mathesis VI, 66.
224. Génération d'une droite. Verniory, D'Hondt etc. Mathesis VI, 190.
225. Les sommets B, C du triangle ABC sont fixes, et le troisième se meut sur une droite. Démontrer que les sommets et le centre du carré inscrit dont un côté repose sur BC décrivent des droites. Pisani. Mathesis VI, 89. — Verniory ibid. 90. — Jerabek ibid. 90. — J. Neuberg ibid. 91.
226. Construire un triangle ABC, connaissant le côté a, l'angle opposé A et sachant que la bissectrice de l'angle A, la médiane issue de B et la hauteur partant de C se coupent en un même point. Pisani, Boedt etc. Mathesis VI, 167.
227. Construire un triangle ABC, connaissant BC, la longueur de la médiane BB' et celle de la symédiane CC'. Fr. Falisse & Deprez. Mathesis VI, 95.
228. Théorème sur les médianes d'un triangle. Beyens, Deprez & D'Hondt. Mathesis VI, 46.
229. Sur le triangle formé par des perpendiculaires aux côtés d'un triangle donné aux points où ils sont rencontrés par une transversale. Boedt etc. Mathesis VI, 116.
230. Sur les perpendiculaires au milieu des droites qui coupent des longueurs égales sur deux côtés d'un triangle à partir de leur intersection avec le troisième côté. Mathesis VI, 155.
231. Droites dans un triangle qui concourent en un même point. Beyens etc. Mathesis VI, 166.
232. Notes sur la géométrie du triangle. Lemoine & Neuberg. Mathesis VI, 55, 73.
233. Sur la droite qui joint les points de Brocard d'un triangle. E. Lemoine. Mathesis VI, 115.
234. Triangle entouré d'une série de triangles semblables à un triangle donné. Boedt & De Hondt. Mathesis VI, 211.

235. Propriétés d'un triangle quelconque sur les côtés duquel on construit extérieurement les carrés. A. Lambert. Mathesis VI, 39.
236. Sur un problème de limite. M. d'Ocagne. Mathesis VI, 76.
237. Construction d'un carré au moyen d'un compas à ouverture fixe. A. Knops. Mathesis VI, 133.
238. Lehrsätze vom Sehnenviereck. Fr. Schiffner. Grun. Archiv 2. R. IV, 325.
239. Inscriptibilité de certains quadrilatères. Bertrand etc. Mathesis VI, 93. — J. Neuberg ibid. 94.
240. Ueber zwei einander gleichzeitig ein- und umbeschriebene Fünfecke. M. Klose. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 61.

Vergl. Kreis.

Potential.

241. Ueber die sprungweise Aenderung des Differentialquotienten der Potentialfunction beim Durchgange des beeinflussten Punktes durch eine Fläche. J. Frischauf. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 252.
242. Sur quelques applications de la fonction $Z(x, y, z)$ à la physique mathématique. P. Appell. Acta math. VIII, 265.
243. Bemerkungen zu Besser: „Ueber die Vertheilung der Elektricität auf einem Cylinder." E. Häntzschel. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 54. — Erwiderung. R. Besser. Ebenda, hist.-lit. Abth. 56. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 47.]
244. Ueber Vertheilung und Strömung der Elektricität auf dem Parallelepipedon. H. Niebour. Grun. Archiv 2. R. IV, 337.

Vergl. Elektricität.

Q.

Quadratur.

245. Sur la théorie du planimètre d'Amsler. A. Thiré. N. ann. math. Ser. 3, V, 353.
246. Différentes formules pour l'aire du triangle. M. Baker. Mathesis VI, 203.
247. On projette un point quelconque M d'une ellipse sur la bissectrice de l'angle formé par le rayon OM avec le grand axe OA. Trouver l'aire de la courbe lieu de cette projection. Gillet & Poilvache. Mathesis VI, 65.
248. Aire de la courbe $x = R\cos\alpha(1+\sin\alpha^2)$, $y = R\sin\alpha^3$. Pisani & Verniory. Mathesis VI, 234.

Vergl. Geschichte der Mathematik 102.

R.

Rectification.

249. Méthode élémentaire pour calculer le rapport de la circonférence au diamètre. L. Maleyx. N. ann. math. Ser. 3, V, 5.
250. Trouver la longueur de la boucle de la strophoide. P. Mansion. Mathesis VI, 108.
251. Rapport existant entre trois arcs de courbes. H. Brocard. Mathesis VI, 80.

Reihen.

252. Principes généraux de la théorie des limites. P. Mansion. Mathesis VI, 265.
253. Sur la théorie des séries. E. Cahen. N. ann. math. Ser. 3, V, 535.
254. Sur l'évaluation approchée de certaines séries. E. Cesaro. N. ann. math. Ser. 3, V, 449.
255. Source d'identités. E. Cesaro. Mathesis VI, 126.
256. Sur la série de Lambert. E. Cesaro. N. ann. math. Ser. 3, V, 106.
257. Sur la série de Lamé. Catalan. Mathesis VI, 100.
258. Zur Summation endlicher Reihen von der Form $\Sigma k u_k$. H. Simon. Grun. Archiv 2. R. IV, 107.
259. Sur un quotient dont le dénominateur est la série binomiale tandisque le numérateur est la somme de membres équidistants de cette même série. E. Cesaro. Mathesis VI, 161.
260. Sur l'algorithme $[abc\ldots l]^{(n)}$. M. d'Ocagne. N. ann. math. Ser. 3, V, 257. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 197.]
261. Sur la somme des produits k à k des nombres naturels. V. Mollame. N. ann. math. Ser. 3, V, 364.

Vergl. Astronomie 30. Bestimmte Integrale 37, 38. Differentialgleichungen 54. Taylor's Reihe.

S.

Sphärik.

262. Détermination du nombre maximum de sphères égales qui peuvent toucher à la fois une autre sphère de même rayon. E. Fauquembergue. Mathesis VI, 124.
263. Sur trois sphères égales circonscrits à trois faces d'un tétraèdre. Beyens & Laurent. Mathesis VI, 233.
264. Sur les arcs joignant un point quelconque de la sphère aux sommets et au point de rencontre des médianes d'un triangle sphérique. Beyens. Mathesis VI, 238.

Stereometrie.

265. Théorèmes de Descartes et d'Euler. P. Mansion. Mathesis VI, 121.
266. Zwei Sätze von regelmässigen Pyramiden und Polyedern. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. IV, 441.
267. Tout plan parallèle à une face d'un octaèdre régulier coupe la surface de ce solide suivant un hexagone de périmètre constant. Beyens etc. Mathesis VI, 117.
268. Trouver sur un plan donné le point dont la somme des distances à deux droites données soit un minimum. Boedt etc. Mathesis VI, 117.
269. Quadrilatère gauche ayant pour sommets les sommets d'un triangle et un point variable sur une droite. Mathesis VI, 155.

T.

Taylor'sche Reihe.

270. Sur une forme du reste dans la formule de Taylor, pour les fonctions d'une variable imaginaire. P. Mansion. Mathesis VI, 101.

Thetafunctionen.

271. Theorie der Thetafunctionen einer Veränderlichen, deren Charakteristiken sich aus gebrochenen Zahlen zusammensetzen lassen. R. Voss. Grun. Archiv 2. R. IV, 385.
272. Die Flächen constanter Krümmung mit einem System sphärischer Krümmungslinien dargestellt mit Hilfe von Thetafunctionen zweier Variabeln. Herm. Dobriner. Acta math. IX, 73.

Trigonometrie.

273. Construire la formule pour $cos(A+B)$ par la méthode d'Abel. Fr. Hofmann. N. ann. math. Ser. 3, V, 279.
274. Sur une nouvelle relation trigonométrique. L. Saalschütz. N. ann. math. Ser. 3, V, 47.
275. Démonstration de certaines formules trigonométriques. J. Gillet & Falisse. Mathesis VI, 67.
276. Angle dont la tangente est égale au produit des tangentes des trois angles d'un triangle. Boedt. Mathesis VI, 20. — Choisis ibid. 21.
277. Condition satisfaite par deux racines d'une équation en fonctions trigonométriques. Beyens, Thiré & Verniory. Mathesis VI, 70.
278. Relation entre les côtés du triangle dont les angles sont α, $90^0+\alpha$, $90^0-2\alpha$. Béjot & Costa. Mathesis VI, 21. — Verniory ibid. 22.
279. Sur un triangle sur les côtés duquel on construit extérieurement les carrés. Deprez. Mathesis VI, 84.
280. Théorème sur les antiparallèles aux 3 côtés d'un triangle menées par un point donné. Falisse, Gob & A. Lambert. Mathesis VI, 114.
281. Trouver les diagonales d'un quadrilatère connaissant leur produit et les quatre côtés. E. Fauquembergue. Mathesis VI, 42. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 443.]
282. Angles sous lesquels on voit d'un point quelconque d'une circonférence les diamètres qui passent par les sommets opposés d'un polygone régulier circonscrit d'un nombre pair de côtés. Beyens, Deprez & De Ceuninck. Mathesis VI, 118.
283. Théorème de trigonométrie sphèrique dû à Steiner. Deprez. Mathesis VI, 111.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

284. Ueber hyperelliptische Integrale 2. und 3. Gattung. O. Staude. Acta math. VIII, 81.

W.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

285. Zur mathematischen Statistik. W. Küttner. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 246. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 197.]
286. Sur les paris de courses. Du Chatenet. N. ann. math. Ser. 3, V, 327, 380, 408.
287. Probabilité que la cime d'un arbre brisé par le vent atteigne le sol. E. Cesaro. Mathesis VI, 14.

Z.

Zahlentheorie.

288. Symmetrische und complementäre Vertheilung der Indexsummenreste $\mathfrak{r}$ für Primzahlen von der Form $p = 2^{2^\mu}+1$. J. Hermes. Grun. Archiv 2. R. IV, 207.
289. Déduction de quelques formules analytiques d'un théorème élémentaire de la théorie des nombres. A. Berger. Acta math. IX, 301.
290. Sur les nombres 111 ... 1. H. Brocard. Mathesis VI, 153. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 487.]
291. Sur un théorème de M. Hermite relatif à la fonction $E(x)$. M. A. Stern. Acta math. VIII, 93. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 904.]
292. Einige Sätze über Summen von Divisoren. J. Hacks. Acta math. IX, 177.
293. Die neunte vollkommene Zahl. P. Seelhoff. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 174, 320.
294. Sur les nombres parfaits. Ed. Lucas. Mathesis VI, 145.
295. Sur les nombres parfaits. M. A. Stern. Mathesis VI, 248. — Ed. Lucas ibid. 250.
296. Ueber vollkommene Zahlen. G. Valentin. Grun. Archiv 2. R. IV, 100.
297. Sur la distribution mutuelle des nombres polygones. E. Cesaro. N. ann. math. Ser. 3, V, 209.
298. Ein Rechenfehler von J. Bernoulli. P. Seelhoff. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 63.
299. Die Auflösung grosser Zahlen in ihre Factoren. P. Seelhoff. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 166.
300. Ein neues Kennzeichen für die Primzahlen. P. Seelhoff. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 306.
301. Développements nouveaux sur quelques propositions de Fermat. S. Realis. N. ann. math. Ser. 3, V, 113.
302. De la divisibilité du nombre combinatoire $\binom{2n}{n}$ par un nombre premier p. Van den Broeck. Mathesis VI, 179.
303. Le nombre combinatoire $\binom{10000}{4356}$ est divisible par 17. Van den Broeck. Mathesis VI, 179.
304. L'expression $(x+1)^p - x^p - 1$ est divisible par $(x^2+x+1)^2$, lorsque $p = 6m+1$. Rochetti & Beyens. Mathesis VI, 215.
305. Divisibilité de $10^{3^n}-1$ par 3^{n+2}. Heurard. Mathesis VI, 235. — Brasseur ibid. 235.
306. Ueber Producte aus ganzen Zahlen. B. Sporer. Grun. Archiv 2. R. IV, 332, 434.
307. $a(a+1)(a+2)(a+3)$ augmenté de 1 est un carré, augmenté de 2 n'est jamais une puissance exacte. E. Catalan. Mathesis VI, 101.
308. Sur une question de Diophante. Fauquembergue. Mathesis VI, 132. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 497.]
309. Caractères d'indivisibilité. Fauquembergue. Mathesis VI, 59.
310. Sur l'identité $4a^2 + (2b+1)^2 + 1 = (a+b)^2 + (a-b)^2 + (a+b+1)^2 + (a-b-1)^2$. Rochetti etc. Mathesis VI, 215.
311. Polygones dont le nombre des diagonales est un carré. Jamet, Brocard & Even. Mathesis VI, 162.

312. Auflösung der Congruenz $x^2 \equiv r \,(mod\, N)$. P. Seelhoff. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 378.
313. L'expression $\dfrac{(\sqrt{2}+1)^{2n-1}+(\sqrt{2}-1)^{2n-1}}{2\sqrt{2}}$ est la somme de deux carrés entiers, si n est entier. Brocard, Gillet & Falisse. Mathesis VI, 62. — E. Cesaro ibid. 63. — E. Lucas ibid. 133.
314. a et b étant des nombres entiers et n un nombre entier supérieur à 1; étant en sus $\alpha = a + \sqrt{a^2+b^2}$, $\beta = -a + \sqrt{a^2+b^2}$ la quantité $\dfrac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{\alpha+\beta}$ est la somme de deux carrés et de trois carrés. Gillet & Mineur. Mathesis VI, 65.
315. Décomposer en somme de deux carrés l'expression $24(1^5+2^5+\ldots+n^5)+1$. Jamet etc. Mathesis VI, 262.
316. Trouver n nombres entiers consécutifs dont la somme soit le double d'un carré. Jamet etc. Mathesis VI, 277.
317. Applications des formules générales qui donnent la solution complète, en nombres entiers, de l'équation homogène du second degré contenant un nombre quelconque d'inconnues. Desboves. N. ann. math. Ser. 3, V, 226. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 912.]
318. Résolution, en nombres entiers et sous sa forme la plus générale, de l'équation cubique, homogène, à trois inconnues. Desboves. N. ann. math. Ser. 3, V, 545.
319. Die Zahlen von der Form $k.2^n+1$. P. Seelhoff. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 380. Vergl. Formen. Geschichte der Mathematik 116.

Historisch-literarische Abtheilung.

Bemerkung zu einer Stelle im Almagest.

Von

Dr. Armin Wittstein

in Leipzig.

Hierzu Taf. V Fig. 10 u. 11.

In meinem kleinen Aufsatze über arabische Sternnamen,* der lediglich dazu dienen sollte, dem bescheidenen Maasse etymologischer Wünsche, zu denen unsere modernen astronomischen Ephemeriden durchschnittlich Veranlassung geben können, in der einfachsten und kürzesten Form gerecht zu werden, habe ich bereits einige Nachrichten von einer arabischen Himmelskugel aus dem 13. Jahrhundert beigebracht, die seit 1790 in der Sammlung des Cardinals Stefano Borgia in Velletri war, dann nach Rom wanderte und sich jetzt im königl. Museum zu Neapel befindet. Ich habe gleichfalls dort mitgetheilt, dass jener Globus mehrere Male Gegenstand wissenschaftlicher Beschreibung gewesen sei, so von Assemani (1790), Lach (1796—1797), Fraehn (Antiquitatis Muhammedanae monumenta varia; Petropoli, 1820), und zwei Aufschriften (wie alles Uebrige, in kufischen Schriftzeichen, sogenannt nach der Stadt أَلْكُوفَة al-Kûfa, in der Nähe des alten Babylon), die über seine Entstehung und Anlage berichten, trage.

Auf diese beiden Inscriptionen muss ich nun hier noch einmal und etwas ausführlicher zurückkommen, weil sie den Ausgangspunkt der, in den obigen Titelworten zusammengefassten, historischen Betrachtung bilden, die ich im Folgenden niedergelegt habe und, begleitet von dem Wunsche, dass sie sich der wohlwollenden Aufnahme von Seite des einen oder andern meiner Fachgenossen erfreuen möchte, hiermit der Oeffentlichkeit übergebe.

Die erste, im Grunde auf die im Orient übliche Glorification des Herrschers hinauslaufende Inschrift sagt aus, dass der Globus für den damaligen Sultan von Aegypten, Muhammed ben abî Bekr ben Ajûb, angefertigt wurde.

* Hist.-lit. Abthlg. d. Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXIX, 1884.

Wenn ich nicht irre, ist dieser Sultan derselbe, der im Jahre 1232 dem Kaiser Friedrich II. ein Zelt schenkte, dessen oberer Theil sich durch ein Wasser-Uhrwerk in Bewegung setzen liess.* Die zweite, wichtigere lautet:

يرسم** قيصر بن ابى القسم بن مسافر الابرقى الحنفى بسنة ٦٢٢ هجرية بزيادة يو درجة مو دقيقة على ما فى المجسطى.

„Entwarf Kaiṣar ben abî'l Kasem ben Musafer al-Abraḳî al-Ḥanafî im Jahre 622 der Heǵra mit Hinzufügung von 16 Graden 46 Minuten zu Demjenigen, was im Almagest.“

Unter der, sehr wahrscheinlich zutreffenden Voraussetzung, dass Kaiṣar, der Verfertiger, der zu seiner Zeit noch in voller Kraft bestehenden Auctorität des Al-Battânî gefolgt sei und auf 66 synodische Mondjahre 1^0 Veränderung in der Länge der Gestirne gerechnet habe, würde er somit die Epoche des ganzen Ptolemaeus'schen Verzeichnisses in das Jahr 151 nach Christus, oder in keinen früheren Zeitpunkt, als den des Anfanges des zweiten Drittels des in Rede stehenden Jahres, verlegt haben, weil das Jahr 622 der Heǵra mit dem 13. Januar 1225 (Julian. Kal.) begann. Giebt man zu, dass es mit der eben angeführten Voraussetzung seine Richtigkeit habe — und ich befürchte keinen triftigen Einwand gegen dieselbe —, so wüsste ich mir die Frage, wie Ḳ. zu seinem Präcessionswerthe von $16^0 46'$ gekommen sein mag, nicht anders zu erklären, als dass er über die angezogene Epoche falsch unterrichtet war. Denn, meines Wissens, spielt das Jahr 151 weder in dem Zeitabschnitte der astronomischen Thätigkeit des Ptolemaeus, noch sonst in seinem Leben, eine hervorragende Rolle; auch ist mir nicht bekannt, dass in dasselbe die Vollendung der *Φάσεις ἀπλανῶν ἀστέρων* (die später als der Almagest abgefasst sind) vielleicht fallen könne. Seine Beobachtungen, von denen er im Almagest spricht, gehören dem Zeitraum von 126 bis 141 an, die Epoche, auf welche er seine Fixstern-Oerter bezieht, entspricht der zweiten Hälfte des Jahres 137, als das Jahr seines Todes endlich kann man mit einiger Wahrscheinlichkeit das 165. gelten lassen. Nun könnte man noch eine andere Conjectur versuchen, so gewagt sie auch erscheint, wie ich gern zugebe, nämlich die, Ḳ. habe sich nach dem Vorgange des berühmten, im 10. Jahrhundert lebenden, per-

* Obwohl durchaus ohne Bezug auf diesen speciellen Fall, dagegen aber überhaupt sehr nützlich zur Kenntniss alter Uhren und einschlägiger Bewegungsmechanismen ist die kürzlich erschienene Schrift von Prof. Bilfinger über „Die Zeitmesser der antiken Völker (Programm des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums, Stuttgart, 1886; 4°, 78 S.)“, die ich hier vielleicht nicht ganz am unrechten Orte der Beachtung meiner verehrten Leser empfehle.

** Es scheint, als habe er sich möglichst bestimmt ausdrücken wollen, nämlich im Sinne: (für Jemand) ein Instrument aufreissen. Sonst heisst es gewöhnlich, صنعه hat ihn verfertigt. Vermuthlich gehörte Ḳ. zu den Gelehrten, die der Regent an seinem Hofe unterhielt.

sischen Astronomen ʿAbd ar-Raḥman aṣ-Ṣûfî (عبد الرحمن الصوفي) gerichtet, der die Präcession in 66 persischen Jahren zu 1° festsetzte. Diese würde uns auf den Anfang des Jahres 119 nach Christus führen, und damit wäre uns ebenso wenig, wie mit der vorher gefundenen Ausgangsepoche geholfen; ich halte deshalb an meiner Vermuthung, Ḳ. sei über den fraglichen Zeitpunkt nicht im Klaren gewesen, fest. Zugleich erhellt aus der vorstehenden einfachen Ueberlegung, dass das Vertrauen, welches man in die von seinem Verfertiger gewiss beabsichtigte Uebereinstimmung des Ḳaiṣar'schen Globus mit dem Himmel im Jahre 1225 etwa setzen dürfte, auf ein sehr geringes Maass herabsinkt; ich sage: beabsichtigte — weil von einem Einhalten der angestrebten Genauigkeit bei so grober Darstellung auf kleiner Kugeloberfläche ohnehin keine Rede sein kann. Wir werden jedoch später sehen, dass Ḳ., wenigstens in Einem Falle, dank der glücklichen Compensation von Irrthümern, der Wahrheit verhältnissmässig ziemlich nahe kommt.

Zu einem grossen Theile ergiebt sich die nähere Entscheidung über die Brauchbarkeit jener alten ägyptischen Himmelskugel aus der Prüfung der Zuverlässigkeit der Positionen des Ptolemaeus, die ihre unmittelbare Grundlage bilden, von selbst. Auf das Ergebniss letzterer wird somit Alles ankommen, und diese ist daher als die eigentliche Aufgabe zu betrachten, die zu behandeln ich mir hier vorgenommen habe. Indem ich mich ihr ohne weitere Abschweifung zuwende, schicke ich die Bemerkung vorauf, dass es nur Ein Beispiel ist, auf welches sich meine Untersuchung stützt, das aber, wie ich hoffe, zur Illustration des Ganzen um so mehr ausreichen wird, als ich hierfür den, der 1.3ten Grössenclasse angehörenden Stern 32 α Leonis (Regulus) gewählt habe, den Ptolemaeus selbst mit der Sonne und dem Monde verglichen hat; Ḳaiṣar nennt ihn, in wörtlicher Uebersetzung der Ptolemaeus'schen Bezeichnung, قلب الاسد Ḳalb al-asad, Herz des Löwen.

Entnimmt man den mittleren Ort für 1875,0 nebst der eigenen Bewegung aus der „Reduction des Auwers'schen Fundamentalkataloges auf die Le-Verrier'schen Präcessionscoëfficienten. Von Dr. Norbert Herz und Josef Strobl (Denkschr. d. mathem.-naturwissenschaftl. Classe d. kaiserl. Akad. d. W.. XLVI. Bd., Wien, 1883. gr. 4°.)", so finden sich zunächst folgende, auf das mittlere Aequinoctium des tropischen Jahresanfanges für das beigesetzte Jahr bezogene, geocentrische Positionen des

Regulus:

Jahr.	α.	δ.	Mittl. ε.	λ.	β.
1875	10h 1m 42,785s	+12° 34′ 38,15″	23° 27′ 19,93″	148° 5′ 29,9″	+0° 27′ 38,4″
1225	9 26 39,274	+15 34 48,91	23 32 28,23	139 4 34,7	+0 26 6,3
140	8 26 14,090	+19 48 4,12	23 40 51,29	124 5 10,6	+0 22 59,7
130	8 25 39,985	+19 50 4,42	23 40 55,82	123 56 54,5	+0 22 57,9

Dieselben wurden durch Anwendung der strengen Formeln erhalten, die Th. von Oppolzer in seinem „Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten (I. Bd., 2. Aufl., Leipzig, 1882; kl. 4⁰)" für solche Zwecke entwickelt hat; sie gelten für

1875	+	Januar	0,2584	m.	Zt.	Greenwich.
1225	−	„	0,1833	„	„	„
140	+	„	0,7054	„	„	„
130	+	„	0,2824	„	„	„

Dio Daten für den Ort des Regulus im Almagest sind:*

Α. Μόρφωσις.	Β. Μήκους μοῖραι.	Γ. Πλάτους μοῖραι.	Δ Μέγεθος.
Λέοντος ἀστερισμός: ὁ ἐπὶ τῆς καρδίας καλούμενος βασιλίσκος.	λέοντος β ς".	Β ō ς".	α.

Als Erläuterung der zweiten Columne ist hinzuzufügen: ἐν δὲ τοῖς δευτέροις τὰς κατὰ μῆκος τῶν δωδεκατημορίων ἐποχὰς, τὰς εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς Ἀντωνίνου βασιλείας ἐκ τῶν τηρήσεων συναγομένας, ὡς τῆς ἀρχῆς τῶν τεταρτημορίων ἀπὸ τῶν τροπικῶν καὶ ἰσημερινῶν σημείων πάλιν συνισταμένης. Von den Breiten heisst es kurz darauf, dass sie stets dieselben bleiben und nur die Längen der Sterne in 100 ägyptischen Jahren (zu je 365 Tagen) eine Veränderung von 1⁰ erfahren.

Somit haben wir nach unserer Ausdrucksweise anzusetzen:

137 Juli 20, Mittag zu Alexandria (jul.):	Länge	Nördl. Breite	Grösse
Herz des Löwen, genannt Regulus	122⁰ 30′	0⁰ 10′	1

Unter dem Mittag ist der wahre zu verstehen.

Damit der Leser eine genaue Information von der Art und Weise gewinne, wie Ptolemaeus bei seiner Vergleichung des Regulus mit der Sonne und dem Monde, von der ich weiter oben bereits gesprochen habe, zu Werke gegangen ist, theile ich aus dem 2. Capitel des 7. Buches den sich auf jene beziehenden Abschnitt unverkürzt hier mit:

Ὡς γὰρ ἐφ' ἑνὸς ὑποδείγματος, ἐτηρήσαμεν, τῷ δευτέρῳ ἔτει Ἀντωνίνου,

„Nun zu einem Beispiel: Im 2. Jahre Antonin's, am 9. des ägypti-

* ΚΛΑΥΔΙΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΤΑΞΙΣ. Composition mathématique de Claude Ptolémée, ou astronomie ancienne, traduite pour la première fois du grec en français sur les manuscrits de la bibliothèque du Roi, par M. l'abbé Halma; et suivie des notes de M. Delambre. Paris, 1813 und 1816; 2 Bände in gr. 4⁰.

κατ' Αἰγυπτίους Φαρμουθὶ Θ̅ʹ ⁿ, μέλλοντος μὲν δύνειν ἐν Ἀλεξανδρείᾳ τοῦ ἡλίου, μεσουρανοῦντος δὲ τοῦ τελευταίου τμήματος τοῦ ταύρου, τουτέστι μετὰ ε̅ϛ″ ὥρας ἰσημερινὰς τῆς ἐν τῇ Θ̅ʹ ⁿ μεσημβρίας, τὴν φαινομένην σελήνην ἀπέχουσαν τοῦ ἡλίου περὶ τὰς γ̅ μοίρας τῶν ἰχθύων, διοπτευομένου τμήματος ϟβ̅ καὶ η″· μετὰ δὲ ἡμιώριον καταδεδυκότος ἤδη τοῦ ἡλίου, καὶ μεσουρανοῦντος τοῦ τετάρτου μέρους τῶν διδύμων, τῆς φαινομένης σελήνης κατὰ τὴν αὐτὴν θέσιν διοπτευομένης, ὁ ἐπὶ τῆς καρδίας τοῦ λέοντος ἐφαίνετο διὰ τοῦ ἑτέρου τῶν ἀστρολάβων ἀπέχων τῆς σελήνης εἰς τὰ ἑπόμενα πάλιν μοίρας, ἐπὶ τοῦ διὰ μέσων τῶν ζωδίων, νζ̅ϛ″. Ἀλλὰ τὸ μὲν πρῶτον ἐπεῖχεν ὁ ἥλιος ἀκριβῶς ἰχθύων μοίρας γ̅ καὶ κ″ ἔγγιστα μιᾶς μοίρας μέρος, ὥστε καὶ τὴν σελήνην τὴν φαινομένην ἐπέχειν τότε, διὰ τὴν τῶν ϟβ̅ καὶ η″ μοιρῶν εἰς τὰ ἑπόμενα διάστασιν, τῶν διδύμων μοίρας ε̅ καὶ ϛʹ ἔγγιστα, ὅσας καὶ κατὰ τὰς ὑποθέσεις ἡμῶν ὤφειλεν ἐπέχειν· μετὰ δὲ τὸ ἡμιώριον ἡ σελήνη ἐπικινηθῆναι μὲν ὤφειλεν εἰς τὰ ἑπόμενα δ″ ἔγγιστα μιᾶς μοίρας, παραλλάξαι δὲ εἰς τὰ προηγούμενα παρὰ τὴν πρώτην θέσιν ιβ″ ἔγγιστα μιᾶς μοίρας. Ἐπεῖχεν οὖν καὶ μετὰ τὸ ἡμιώριον ἡ φαινομένη σελήνη διδύμων μοίρας ε̅γ″, ὥστε καὶ ὁ ἐπὶ τῆς καρδίας, ἐπειδήπερ ἀπέχων αὐτῆς ἐφαίνετο εἰς τὰ ἑπόμενα μοίρας νζ̅ϛ″, ἐπεῖχε μὲν τοῦ λέοντος μοίρας β̅ϛ″, διειστήκει δὲ τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ σημείου μοίρας λβ̅ϛ″.

schen Monats Pharmuthí, haben wir in Alexandria zur Zeit des Sonnenunterganges, als gerade noch das letzte Stück des Stieres culminirte, d. h. $5\frac{1}{2}$ Aequinoctialstunden nach dem Mittag des 9., die scheinbare Entfernung des Mondes von der Sonne, die damals im 3. Grade des Zeichens der Fische stand, gemessen und dafür $92\frac{1}{8}$ Grade gefunden. Eine halbe Stunde später — die Sonne war bereits untergegangen, und ein Viertel der Zwillinge erschien im Meridian — ergab sich, bei unveränderter Richtung nach dem Monde, mit Hilfe des andern Kreises des Instrumentes [wir würden sagen: erster Kreis geklemmt], die Distanz des Herzens des Löwen vom Monde zu $57\frac{1}{6}$ Graden nach Osten hin, gemessen auf der Ekliptik. Allein zuerst war die Sonne genau $3\frac{1}{20}$ Grade in den Fischen und damals der Mond in einem östlichen Abstande von $92\frac{1}{8}$ Graden von ihr beobachtet, also letzterer in $5\frac{1}{6}$ Graden ($5^0\ 10{,}5'$) der Zwillinge, welche Position er nach unseren theoretischen Grundlagen einnehmen musste. In einer halben Stunde musste der Mond $\frac{1}{4}^0$ nach Westen zwar bewegt worden sein, aber er irrte ins Voraufgegangene, nach der ersten Stellung hin, um $\frac{1}{12}^0$ ab. Also nahm der Mond nach einer halben Stunde ($5\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=$) $5\frac{1}{3}$ Grade in den Zwillingen ein, so dass das Herz des Löwen, von dem er ja westlich $57\frac{1}{6}$ Grade entfernt war, sich in $2^0\ 30'$ des Löwen befand, vom Punkte der Sommersonnenwende um $32^0\ 30'$ getrennt."

(Soweit es anging, habe ich wörtlich übersetzt.)

Für das Uebrige genügt eine auszugsweise Reproduction:

Zu Hipparch's Zeit, sagt Ptolemaeus, stand derselbe Stern $29\frac{5}{6}{}^0$ östlich vom Punkte der Sommersonnenwende, gegenwärtig $32\frac{1}{2}{}^0$; im Laufe der inzwischen verflossenen 265 Jahre sei er somit $2\frac{2}{3}{}^0$ weiter nach Osten gerückt, was ganz mit der Vermuthung des Hipparch harmonire, wonach die Präcession in 100 Jahren etwa 1^0 betrage. Deshalb habe er an alle Längen des Hipparch $2\frac{2}{3}{}^0$ angebracht, um sie auf seine Epoche zu reduciren, „und der zufolge wir überwiegend die meisten Vorbeiwege der Fixsterne bewahrt haben".* Dass seine Beobachtung noch einer merklichen Reduction auf die Zeit des Regierungsantritts des Antoninus Pius bedarf, scheint er zu ignoriren. Weiter hätte er sagen sollen: Die Durchschnittspunkte von Aequator und Ekliptik schreiten auf letzterer fort, und zwar in der Richtung gegen die Bewegung der Sonne — statt dessen glaubte er, dass die Sterne im Sinne der Länge fortschreiten und die Aequinoctialpunkte fest seien.

Das benützte Instrument veranschaulicht Fig. 10. Es war eine sogenannte Armillarsphäre mit zwei festen Kreisen, MM (Meridian), EE (Ekliptik), und dem System der drei beweglichen, BB, CC, DD; Alles aus Kupfer gefertigt. Das bewegliche System liess sich vermittelst zweier Zapfen, welche M, B, C unveränderlich mit einander verbanden, um die Polaraxe PP der Ekliptik, dabei jedoch B und C unabhängig von einander, drehen, repräsentirte also in jeder Stellung von B oder C einen Breitenkreis. Der Ring D endlich trug zwei, diametral einander gegenüberstehende Diopter und vollführte auf dem innern Rande von C eine gleitende Bewegung; er diente zur Bestimmung der Breiten. M, E, C waren in Grade und, „soweit möglich", in deren Unterabtheilungen eingetheilt. Die Neigung der Ebene E gegen die Verticale beträgt für Alexandria etwas über 7^0; Ptolemaeus nimmt $30^0\,58'$ für die Breite von Alexandria und $23^0\,51'\,20''$ für die Schiefe der Ekliptik, somit $7^0\,7'$ für jenen Neigungswinkel an.

Die andere Figur (Fig. 11), in der GE einen Gnomon und GK, GZ, GN auf der Mittagslinie GN die Schattenlängen zur Zeit der Sommersonnenwende, der Tag- und Nachtgleichen und der Wintersonnenwende bedeuten, denen der Reihe nach die Winkel $GEK = 7^0\,6'\,40''$, $GEZ = 30^0\,58'$, $GEN = 54^0\,49'\,20''$ entsprechen, zeigt, wie Ptolemaeus zur Haupteintheilung des Jahres gelangte. Betrug, beispielsweise, die Höhe GE 60 Fuss, so waren K, Z, N resp. 7,5, 36,0, 85,1 Fuss von G entfernt. Dies ist so ziemlich Alles, was sich im Almagest von der Methode der Zeitbestimmung im engeren Sinne findet, und hat es fast den Anschein, als ob Ptolemaeus nur im Allgemeinen das befolgte Princip habe erläutern wollen. Man möchte sich beinahe darüber wundern, dass er gerade dieser einfach-

* So lautet, wenn auch die deutsche Sprache dabei arg maltraitirt wird, die Uebersetzung von καθ' ἣν μάλιστα καὶ ἡμεῖς τὰς πλείστας τῶν ἀπλανῶν παρόδους τετηρήκαμεν. Die Halma'sche entspricht dem Sinne derselben nicht unzweideutig genug.

sten Vorrichtung, deren Beschreibung füglich entbehrt werden konnte, gedenkt, ohne sonst auf Uhren einzugehen — und zwar um so mehr, als er, wenigstens in der geschilderten Weise, von jener allgemeinen Regel schwerlich Gebrauch gemacht, sondern sich wahrscheinlich der Construction einer Sonnenuhr bedient hat, die uns unter dem Namen des Hemicycliums überliefert ist, und dessen Erfindung dem im 3. Jahrhundert vor Chr. lebenden Chaldäer Berosus zugeschrieben wird. Es bestand aus einer aus Stein ausgehöhlten Halbkugel, die in der Richtung eines Radius und der Polaraxe einen Stift trug, der im Kugelmittelpunkte in ein Kügelchen endete, dessen Schatten im Laufe des Jahres und der einzelnen Tage auf der Kugelfläche entsprechende Eintheilungen durch Curven beschrieb* (Näheres darüber ist in der angeführten Schrift von Bilfinger zu lesen). Damit hatte er aber nur sogenannte Hemerinzeit, für die Eintheilung der Nachtstunden war noch immer eine mechanische Vorrichtung nothwendig. Seine Stunden anlangend, wäre noch hinzuzufügen, dass die ὧραι ἰσημεριναί gleichwerthig mit den unserigen, zu $\frac{1}{24}$ des täglichen scheinbaren Sonnenumlaufs, sind; sie hiessen wahrscheinlich so, weil sie um die Zeit der Tag- und Nachtgleiche (ἰσημερία) den veränderlichen bürgerlichen Tag- und Nachtstunden (ὧραι καιρικαί) gleich sind. Die Dauer des tropischen Jahres nahm Ptolemaeus um $6^m 26^s$ zu lang an, die mittlere Bewegung der Sonne in 365 Tagen um $15{,}9''$ zu klein. Nach einer kleinen, von Ideler (Historische Untersuchungen über die astronomischen Beobachtungen der Alten; Berlin, 1806, in 8°) mitgetheilten Tafel muss man um die Zeit herum, um die es sich hier handelt, an die mittlere Länge der Sonne des Ptolemaeus eine Correction von etwa $+1^0$ anbringen, und weiter wird dort gesagt (S. 304 u. 305): „Aus einer fehlerhaften Bestimmung der Jahreslänge mussten unrichtige Sonnentafeln entstehen, und wirklich gaben ihm seine Tafeln die mittleren Längen der Sonne für seine Zeiten um beinahe 1^0 zu klein. Da er nun von den Oertern der Sonne bei seinen Untersuchungen über die Längen der Fixsterne ausging, so musste er auch diese um 1^0 zu klein finden.“ Ideler bezog sich auf die neueste Ausgabe (von 1804) der Sonnentafeln des Freiherrn von Zach, die, neben den 1806 erschienenen Delambre-Bürg'schen (Sonnen- und Mondtafeln), bis zur zweiten Hälfte unseres Jahrhunderts gebraucht wurden.

Wie man erkennt, verfuhr Ptolemaeus, soweit es ihm seine Theorie und die daraus gezogenen Schlussfolgerungen gestatteten, bei der Reduction

* Es beruhte diese Sonnenuhr auf der Eintheilung des jeweiligen Tagebogens der Sonne in zwölf gleiche Theile. Der Stein musste so aufgestellt sein, dass die Tangentialebene im tiefsten Punkte der Halbkugel dem Horizont parallel war. Den Augenblick des wahren Mittags fixirte die Uhr richtig; den Zeitabschnitt zwischen ihm und dem darauf folgenden in 24 gleiche Theile einzutheilen, dazu bedurfte es noch eines Hilfsmittels, das die Uhr nicht gewährte. Die Zeitgleichung kannte Ptolemaeus, er spricht davon im 8. Capitel des 3. Buches.

der oben mitgetheilten Beobachtung, die am 23. Februar 139 (jul.) angestellt war, ganz correct, nur drückte er sich, wenigstens für meine Auffassung, insofern etwas unbestimmt aus, als er, hinsichtlich des Mondes, nicht Alles lediglich der ersten Beobachtung zuweist. Wenn er weiter die erhaltene (scheinbare) Länge von α Leonis unverändert in seinem Fixstern-Verzeichnisse, dessen Epoche über $1\frac{1}{2}$ Jahre zurück liegt, beibehält, so hat er dies wohl nur deshalb gethan, weil ihm eine Grösse von noch nicht ganz einer Bogenminute, in Ansehung der Beobachtungsfehler, vielleicht bedeutungslos erschien.

Die Länge von α Leonis auf dem Kaiṣar'schen Globus würde $139^0 16'$ betragen, differirt also von der mittleren Länge dieses Sternes für den Jahresanfang von 1225 nur um etwa 11,4'.

Für die Epoche des Almagest-Kataloges endlich wird der mittlere Ort des Regulus:

$$\lambda = 124^0\,3'8{,}9'', \quad \beta = +0^0\,22'59{,}3''.$$

Wie schon bemerkt, würde man die Sonnenlänge des Ptolemaeus um $1^0\,1'$ zu vergrössern haben, wenn man sich mit der einfachen Proportion, auf der dies beruht, begnügen will. Nach Untersuchungen von Newcomb* finden sich die Vergrösserungen der Sonnenlängen, die man an drei Almagest-Angaben anbringen muss, zu

$1^0\,5{,}1'$	im	Jahre	134	nach	Christus.
0 56,5	„	„	133	„	„
0 25,0	„	„	136	„	„

* Researches on the motion of the moon. Part I. Washington, 1878, gr. 4°.

Recensionen.

Berichtigung. Von Herrn Prytz, dessen Antilogarithmentafel wir S. 153—155 besprochen haben, werden wir auf einen Irrthum aufmerksam gemacht. Die L genannten Zahlen nehmen um Hundertstel, nicht um Tausendstel zu. Ebenso bemerkt Herr Prytz — was wir vielleicht hätten betonen können —, dass bei dem von uns vorgeführten Beispiele einige der Aufschlagungen auf der gleichen Tabellenseite vollzogen werden. Mittelbar haben wir es allerdings gesagt, indem wir nur zweimal, S. 154 Z. 16 u. 31, von der Benutzung der Antilogarithmen sprachen, d. h. eben von einem eigentlichen Aufschlagen der Haupttabelle. Der Verfasser ist indessen der Meinung, bei einem Tabellenwerke seien gerade solche Momente hervorzuheben, und wir haben nicht die mindeste Veranlassung, seinen Wünschen in dieser Beziehung nicht zu entsprechen.

Cantor.

Die Constructionen doppelt berührender Kegelschnitte mit imaginären Bestimmungsstücken. Eine Wanderung durch die Theorie der Kegelschnitte in doppelter Berührung an der Hand anschaulicher Methoden von Fritz Hoffmann. Leipzig, B. G. Teubner. 1886.

Der Verfasser trägt den Stoff, wie er sich in den verschiedenen Lehrbüchern der synthetischen Geometrie vertheilt findet, im Zusammenhange in ansprechender Weise vor. Die metrischen Specialisirungen, welche das allgemeine Problem: Einen Kegelschnitt zu construiren, welcher durch einen reellen und zwei conjugirt imaginäre Punkte geht und einen andern Kegelschnitt doppelt berührt, — erfahren kann, werden ausführlich berücksichtigt, und ein Studium des Buches ist daher sehr geeignet, Gewandtheit im Uebersetzen von Constructionen der Geometrie der Lage in die des Maasses zu erlangen und die Einheit dieser Constructionen in das richtige Licht zu setzen.

Die Grundlage für die Lösung einer grossen Reihe von Aufgaben bildet ein Satz aus der Raumgeometrie: Der Umriss einer F^2 in Centralprojection und das Bild eines ihr aufgeschriebenen Kegelschnittes sind zwei Kegelschnitte in doppelter Berührung. Die Construction eines solchen Kegelschnittes bleibt dann dieselbe, einerlei, ob die Berührungspunkte reell, d. h. der Kegelschnitt sich von der sichtbaren Seite über den Rand auf die unsichtbare Seite erstreckt, oder ob jene Punkte imaginär sind, d. h. der Kegelschnitt auf einer und derselben Seite bleibt. Diese Idee ist alt, sie wurde von Niemtschick in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie, Bd. 52 mitgetheilt; auch Peschka verwerthet sie im dritten Bande seiner Darstellenden Geometrie zur Lösung einer grossen Reihe von Aufgaben.

Am Schlusse des Buches werden die höheren Berührungen behandelt, insbesondere Krümmungskreise construirt.

Aufgefallen ist uns im Vorwort die Ansicht des Verfassers, dass Betrachtungen, in denen das Imaginäre eine Rolle spielt, immer im Zusammenhange mit der metrischen Kreisgeometrie stehen sollen, was doch nicht der Fall ist.

Hannover. Dr. C. Rodenberg.

Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaaren. Von Jos. Heller, k. k. Professor an der k. k. Staats-Oberrealschule in Linz. Selbstverlag. 1886.

Ein klar geschriebenes Buch, sehr zur Einführung in die Theorie geeignet.

Zunächst werden Büschel und Schaar gemeinschaftlich analytisch behandelt. Die Wahl dieser Methode geschah, um Ausnahmefällen bezüglich imaginärer Elemente aus dem Wege zu gehen.

Dann werden die Polareigenschaften entwickelt und die geometrischen Oerter der Pole und Polaren für gewisse Bedingungen, insbesondere die Oerter der Mittelpunkte untersucht.

Bei der Bestimmung der Berührungspunkte aller Curven eines C^2-Büschels mit den Strahlen eines Strahlenbüschels und, wie auch in Zukunft, der dualen Aufgabe treten die erzeugten Gebilde dritten Grades in den Kreis der Untersuchungen. Es folgen dann projectivische Betrachtungen, insbesondere der Involution der Schnittpunkte der Curve eines Büschels mit einer Geraden etc., sowie die Erzeugung der Büschel durch projectivische Drehung. Schliesslich werden die Arten der Kegelschnitte, welche in einem Büschel vorkommen, angegeben unter Berücksichtigung der Verschiedenheiten in der Realität der Basiselemente.

Die Erzeugung der allgemeinen Curven dritter Ordnung durch Büschel hätte unseres Erachtens wohl noch in den Plan des vorliegenden Buches hinein gehört. Ferner wäre ein Inhaltsverzeichniss willkommen.

Hannover. Dr. C. Rodenberg.

Eine neue Rechenmaschine. Von Dr. Eduard Selling, Professor für Mathematik und Astronomie an der Universität Würzburg. Mit zwei lithogr. Tafeln. Berlin, Verlag von Julius Springer. 1887. 51 S.

In technischen Kreisen war schon viel von dem neuen, überaus sinnreichen Mechanismus die Rede, welchen Professor Selling an die Stelle der bisherigen complicirten Rechenmaschine gesetzt hat, und die vorliegende Schrift ermöglicht es nun einem Jeden, sich mit den Grundsätzen des neuen Apparates bekannt zu machen. Der Verf. wirft zunächst einen Rückblick auf die Geschichte der Rechenmaschinen, schildert die Abzählvorrichtungen der orientalischen Völker, die genialen, aber über das Modellstadium nicht hinausgekommenen Mechanismen von Pascal und Leibniz, und verweilt ausführlicher bei den modernen Erfindungen, welche durch die Namen Babbage, Thomas und Scheutz gekennzeichnet sind. In kinematischer Beziehung die grossartigste Leistung war unter diesen die Additionsmaschine jenes englischen Mathematikers, welche auch für automatische Kopirung eingerichtet ist, dafür aber mit ihren 2054 Schrauben und 364 Kettengliedern als ein viel zu zarter Organismus erscheint, um allgemeinerer Anwendung in der Praxis theilhaftig werden zu können. Verringerung der Widerstände und die Erreichung einer gleichzeitigen Bewegung aller Maschinentheile war der Hauptzweck, welchem der Verf. zustrebte, und es gelang auch, durch Einfügung eines gewissen kinematischen Elementes von doppelter Bewegung, auf dessen Beschreibung ohne Figur einzugehen sich natürlich von selbst verbietet, jenes Ziel zu erreichen. Bequem, wenn schon nicht unbedingt nothwendig ist es, keine Theilproducte > 25 zu bekommen, und damit dies geschehe, wählt man statt der Zahlen 6, 7, 8, 9 deren dekadische Ergänzungen; der Verf. schreibt für $10-4$, $10-3$, $10-2$, $10-1$ resp. $\rotatebox{180}{4}$, $\rotatebox{180}{3}$, $\rotatebox{180}{2}$, $\rotatebox{180}{1}$ und schlägt auch dafür gewisse Wortbildungen vor, welche wir allerdings noch nicht für endgiltig angenommen erachten. Neben 5 ist $10-5 = \rotatebox{180}{5}$ nicht unbedingt erforderlich, wird aber vom Verf. gleichwohl aus Zweckmässigkeitsgründen ebenfalls beibehalten. Die Bildung der Theilproducte erfolgt mit Hilfe eines Scheiner'schen Pantographen oder Storchschnabels; 10 Paar geradliniger Stäbe sind durch Charniere miteinander verbunden, ihre Kreuzungspunkte seien resp. durch die Zahlen $0, 1 \ldots 9$ bezeichnet, und wenn dann der Kreuzungspunkt 1 längs der die Kreuzungspunkte verbindenden Geraden um den Weg w verschoben wird, so beschreibt der Punkt n den Punkt nw. Ist demnach n eine Ziffer des Multiplicandus und w eine solche des Multiplicators, so hat man unmittelbar das Product nw durch die Bewegung der Stangenverbindung dargestellt. Hat man aber neben den Ziffern von 1 bis 5 noch die fünf umgekehrten, so kürzt sich die Verschiebung um die Hälfte ab, während jetzt allerdings zwischen einer rechtläufigen und rückläufigen Bewegung unterschieden werden muss. Ferner ist dafür Sorge getragen, dass durch eine Rädercombination der Multiplicator, durch eine zweite das Product automatisch gedruckt wird, während für den Multiplicanden dies nicht nothwendig zu geschehen braucht, durch einen einfachen Griff jedoch gleichfalls bewerkstelligt werden kann. Schliesslich giebt der Verf. nähere Ausführungen hinsichtlich der Handhabung seiner Maschine bei den arithmetischen Grundoperationen, wobei auch das Wurzelausziehen nicht ausgeschlossen ist, und deutet gewisse Verbesserungen an, die sich an jener, wenn sie in den Dienst besonderer Probleme gestellt wird, allenfalls noch anbringen lassen.

Die Idee zu seiner Reform des maschinellen Rechnens hat sich Herrn Selling aufgedrängt, als derselbe die ihm übertragene Revision der rechnerischen Grundlagen der für die Töchter der bayerischen Beamten eingerichteten Versorgungscasse durchführte, eine Arbeit, von deren hoher Bedeutung für die staatswissenschaftliche Rechenkunst wohl nicht überall genügend Notiz genommen wurde (vergl. übrigens des Berichterstatters eingehende Besprechung der Selling'schen Arbeit im XII. Jahrgang der „Zeitschr. f. mathem. u. naturwissenschaftl. Unterricht“). Damals wurde die Thomas'sche Maschine zur Bewältigung des unermesslichen Zahlencalculs verwendet und erwies sich als nicht vollkommen zureichend. So hofft denn auch der Verf., dass der Nutzen seiner Erfindung sich nicht nur an physikalischen und kaufmännischen Aufgaben erproben werde, sondern mehr noch an den „zahlreichen politischen und socialen Fragen, in welchen man, vor der allzugrossen Mühe der rechnenden Lösung erschreckend, sich auf schwankende Schätzungen einliess“. — Referent hat die Maschine bei der Wiesbadener Naturforscher-Versammlung in Action gesehen und ist von deren Leistungsfähigkeit überzeugt.

München. Dr. S. Günther.

A. Steinhauser, **Grundzüge der mathematischen Geographie und der Landkartenprojection.** Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 186 Holzschnitten. Wien 1887, Verlag von Fr. Beck. V, 155 S.

Im XXVII. Bande dieser Zeitschrift ward von uns die zweite Auflage dieses originellen, seiner ganzen Anlage nach von den anderen bekannten Lehrbüchern der astronomischen Geographie abweichenden Werkes besprochen, und es gereicht uns zum Vergnügen, heute constatiren zu können, dass dem trotz hohen Alters mit jugendlicher Rüstigkeit fortarbeitenden Verfasser die Freude vergönnt war, nach verhältnissmässig kurzer Frist diese neue Ausgabe veranstalten zu dürfen. Die beiden ersten Abtheilungen, die mathematisch-technischen Vorbegriffe und die Stellung der Erde im Weltenraum behandelnd, sind allerdings so gut wie unverändert geblieben; dafür aber sind dem dritten Abschnitte, der Kartenentwurfslehre, ziemlich bedeutende Erweiterungen und Verbesserungen zu Theil geworden, für welche hauptsächlich die Arbeiten von Tissot und Zoeppritz das Material geliefert haben. Um die Unterschiede beider Auflagen richtig zu würdigen, stellen wir fest, dass die vier ersten Paragraphen ebenso wie die auf Flächenberechnung, Ländergliederung und Verfertigung der Globussegmente bezüglichen Bemerkungen wesentlich unverändert geblieben sind; im Uebrigen ist, wenn die deutschen Ziffern der zweiten, die römischen der dritten Auflage entsprechen, § 6 = V, § 7 = XI, § 8 = VI, § 9 = VII, § 10 = XII, § 11 = XIII, § 12 = XIV, § 13 = XV, § 14 = IX, § 15 = XVII, §§ 16 und 17 gänzlich umgeformt, § 18 = XXV, § 19 = XXVI, § 20 = XXVII, § 21 = XXVIII, § 22 = XXIX, § 23 = XXX, § 24 = XXXI, § 25 = XXXIII, § 26 = XXXIV, § 30 = XXXVI. Diese Verschiebungen erfolgten theilweise der Methode wegen, theilweise, um neue Paragraphen für die Berücksichtigung solchen Stoffes zu gewinnen, dessen früher nicht gedacht war oder auch wohl noch gar nicht gedacht werden konnte. So sind nunmehr die „externen“ Abbildungen (De la Hire, James, Fischer-Nell) als gleichberechtigt neben die stereographische und orthographische Projection einerseits, neben die gnomonische andererseits gestellt, die „flächentreuen“ Projectionen wurden eingehender abgehandelt, indem nun auch die herzförmige Manier von Stabius und Lambert's Modification der stereographischen Projection neben derjenigen von Mollweide-Babinet zu grösserer Geltung kamen, sowohl die ältere „Globularprojection“ (von Glarean-Nicolosi), als auch die neuere (von Nell-Debes) wurden mit besonderen Paragraphen bedacht, und vor Allem ward die so vielgestaltige conische Abbildung, welche früher nur etwas stiefmütterlich weggekommen war, gründlich erörtert. Nicht blos die älteren Halbsternbilder, sondern auch die von Herrn Steinhauser selbst erfundene „conopterische Projection“ und Arnd's Abbildungsmethode mit ihrem die Kugel in zwei Parallelkreisen durchstossenden Kegelmantel sind aufgenommen; endlich gilt ein Gleiches auch für jene Projection, welche Tissot der von ihm erfolgreich bekämpften Bonne'schen Karte mit krummen Meridianen und krummen Parallelen substituirte. Die „polyedrischen“ Karten, die man aber doch besser durch „polyconische“ ersetzt, werden zum Schlusse gleichfalls erwähnt.

Die bekannte Sauberkeit und Klarheit der Darstellung, welche dem Verf. eigenthümlich ist, wird der Leser auch in den neu hinzugekommenen, schwierigeren Partien nirgends vermissen; die Ausstattung ist die gleiche, schöne, wie früher. Nur zu einer Angabe auf S. 8 müssen wir uns eine Gegenbemerkung gestatten: Für die Unmöglichkeit, π exact darzustellen, ist wohl nicht die „Incommensurabilität“ dieser Zahl massgebend, wie es hier heisst, sondern ein ganz anderer Umstand, über welchen gewisse Untersuchungen des letzten Jahrzehntes wohl genügend Licht verbreitet haben.

München. Dr. S. Günther.

J. van Bebber, **Handbuch der ausübenden Witterungskunde.** II. Theil: Gegenwärtiger Zustand der Wetterprognose. Mit einem Vorwort von Buys-Ballot. 503 S. nebst einer Wolkentafel und 66 Holzschnitten. Stuttgart, Verlag von Ferd. Enke. 1886.

Durch den II. Theil des oben bezeichneten Handbuches hat die meteorologische Literatur eine neue wesentliche Bereicherung erfahren. Es ist aber in diesem Werke nicht blos eine Vermehrung des allgemeinen Wissens geboten, sondern vor Allem einem Bedürfniss der Praxis Genüge geleistet worden. Und wir können hier das Wort Praxis wohl im allgemeinsten Sinne gebrauchen. Mit vollem Rechte kann man behaupten, dass das Interesse für Meteorologie sich in immer weitere Kreise verbreitet. Zahlreiche Kräfte reichen sich die Hände, um in lehrender Thätigkeit diese Ausbreitung zu fördern. So wünschenswerth es nun vor Allem für den Lehrer sein muss, den, wenn auch in den Hauptzügen übereinstimmenden, im Einzelnen doch verschiedenen technischen Betrieb, mit welchem die ausübende Witterungskunde in den einzelnen Ländern arbeitet, kennen zu lernen und die Resultate zu überblicken, welche bis jetzt erreicht wurden, so ist diese Kenntniss bisher doch nur Demjenigen vergönnt gewesen, dem der Besuch grösserer meteorologischer Institute und reicher Bibliotheken möglich ist. Van Bebber bietet nun in seinem Werke, wir möchten wohl sagen, fast Alles, was erwähnenswerth ist, dem Lehrenden zur weiteren Verwendung dar. Aber auch Derjenige, der nur lernend an diese Lecture herantritt, wird das Erscheinen dieser Arbeit mit lebhafter Freude begrüssen müssen, indem die treffliche Systematik des Buches ihn in kürzester Zeit einen Ueberblick über die praktische Meteorologie gewinnen lässt.

Das erste Capitel schildert den gegenwärtigen Zustand der Wettertelegraphie. Wir lernen zunächst die drei Hauptsysteme des telegraphischen Wetterdienstes kennen. Die Ausdehnung des betreffenden Netzes, die mehr oder minder freie Verfügbarkeit des Telegraphen, die Wahl der Beobachtungstermine, welche theils durch wissenschaftliche Gründe, theils durch Rücksichten auf die praktischen Verhältnisse des täglichen Lebens beeinflusst ist, alle diese in einander eingreifenden Factoren bringen schon von vornherein wesentliche Unterschiede in den Grundlagen des Wetterdienstes hervor. Bestimmt sich durch diese Gründe schon das beschaffbare Material, so erfährt die Entwickelung des wettertelegraphischen Dienstes weiter noch wesentliche Aenderungen nach Massgabe der staatlichen oder privaten Mittel, welche für die Ausbeutung des täglichen Materials geboten sind. Hierdurch ist natürlich ebensowohl das Sturmwarnungswesen an der Küste beeinflusst, als besonders der eigentliche tägliche Prognosendienst für grössere Gebiete. Von höchster Bedeutung ist für den letzteren die Betheiligung der Presse, deren Mithilfe bei Verbreitung der täglichen Witterungsnachrichten in den einzelnen Ländern sehr verschieden ist. Ausführliche Mittheilungen über alle diese Punkte, sowie über die Wetterberichte der meteorologischen Centralanstalten, von denen einige reproducirt werden, gestatten dem Leser, sich rasch eingehende Kenntniss dieser Verhältnisse zu verschaffen, wobei der Autor selbst eine Reihe von Vorschlägen zur Verbesserung des wettertelegraphischen Verkehrs bringt.

Nach dieser Schilderung des technischen Betriebes wendet sich der Verfasser der Frage nach der physikalischen Erklärung der Witterungsvorgänge zu. Auch für die Meteorologie im engeren Sinne, also für die Lehre vom Wetter als einer Reihe von Vorgängen, ist die erste wissenschaftliche Grundlage die Kenntniss der mittleren durchschnittlichen Verhältnisse in der Vertheilung der meteorologischen Elemente nach Raum und Zeit. Der Verfasser giebt daher einen Abriss der Klimatologie. Wir möchten gerade diesen Theil als besonders gelungen bezeichnen, indem der Verfasser hier die schwierige Aufgabe löste, in scharf markirten Zügen aus der grossen Menge des vorhandenen Materials alles das zu geben, was für den vorliegenden Zweck nöthig ist, ohne einerseits zu flüchtig zu werden oder andererseits zu weit zu gehen. Von wesentlicher Bedeutung ist für diesen Abschnitt auch das reiche und sorgfältig behandelte Literaturverzeichniss, auf welches wir noch zurückkommen werden.

Mit den beiden nächsten Abschnitten, der Darlegung der physikalischen Verhältnisse innerhalb der barometrischen Maxima und Minima und deren Wechselwirkung geht nun der Verfasser auf die wissenschaftliche Grundlage der praktischen Meteorologie über. Sorgfältiges Studium und Kenntniss der Literatur verbinden sich mit langjähriger Praxis und den Erfahrungen specieller eigener Forschung, um dem Verfasser mehr wie jedem Andern die Fähigkeit zu geben, hier eine erschöpfende Zusammenfassung des bisher Bekannten zu bieten. Wir müssen es uns versagen, hier auf die erschöpfende Ausbeute einzugehen, welche aus der früheren Literatur gezogen wurde, und weisen nur auf jene Theile hin, welche die „typischen Witterungserscheinungen“ und die „Zugstrassen der Depressionen“ behandeln. Es sind ja gerade die hier einschlägigen Untersuchungen so recht das eigentliche Arbeitsfeld wissenschaftlicher Forschung, auf dem der Autor persönlich Hervorragendes geleistet hat. Das Verständniss der an dieser Stelle gebotenen Theorien und Erfahrungssätze wird durch die ausserordentlich reiche Ausstattung an kartographischen Beilagen, welche das Werk überhaupt und besonders dieser Theil gefunden hat, wesentlich erleichtert.

Auf Grund des Vorangehenden giebt dann der Autor eine Anleitung zur Aufstellung der Prognosen auf Grund der Wetterkarten. Wir möchten im Ganzen und Grossen dem Herrn Verfasser auch in diesem Punkte zustimmen, halten es aber doch immerhin für gefährlich, für die Prognosenstellung einen Schematismus zu geben, wie es hier geschehen ist. Für Norddeutschland mag dies noch eher angehen, da dasselbe den Hauptdepressionsstrassen näher liegt und damit auch die Vorgänge sich dort viel charakteristischer entwickeln. Für Süddeutschland und besonders für das alpine Gebiet liegt die Sache viel schwieriger. Häufig springt vom Südwesten her ein Ausläufer eines barometrischen Maximums keilförmig über das Alpengebiet vor, wie ihn auch van Bebber mehrfach zeichnet. Allein dessen Umgestaltung kann bis zum nächsten Morgen in der verschiedenartigsten Weise vor sich gehen; er kann sich wieder nach dem Südwesten zurückziehen, kann abreissen und als selbstständige Insel hohen Druckes über den Alpen bestehen bleiben, oder kann am nächsten Morgen mit einem östlich gelegenen Maximum in Fühlung treten und sich als Sattel höheren Druckes über Centraleuropa hinziehen. Je nachdem die eine oder die andere dieser Formen eintritt oder sich auch nur die Axe des Ausläufers ein wenig nördlich oder südlich vom Hauptkamme der Alpen verschiebt, ist die Wetterlage für Süddeutschland und speciell für das Alpenvorland eine wesentlich andere. Ebenso wird durch secundäre Barometermaxima in der Poebene und am Südabhang der Alpen, oder im Gegensatz dazu durch Depressionen, die vom Mittelmeerbecken über die Alpen übergreifen, die Witterung für das alpine Gebiet und die schwäbisch-bayerische Hochebene wesentlich beeinflusst, so dass in diesen Landestheilen völlig andere Witterung herrscht, als bereits nördlich der Donau. Wir möchten natürlich mit dieser Bemerkung dem Verfasser durchaus keinen generellen Vorwurf machen und wollten nur durch Beispiele auf die Schwierigkeit einer allgemeinen Prognosenstellung für grössere Gebiete hinweisen, welche die Aufstellung eines schematischen Schlüssels für dieselbe etwas weitgehend erscheinen lässt. Doch werfen wir noch einen Blick auf die letzten Theile des reichen Handbuchs. Zuvörderst treffen wir noch einen Bericht über ähnliche Bestrebungen zur Förderung der Wetterprognosen in Frankreich, Grossbritannien und Italien, und über die Anwendung localer Beobachtungen auf die Wetterprognose. Bezüglich letzterer wird besonders die vielbesprochene Nachtfrostprognose sorgfältig behandelt. Eingehend wird noch die Frage nach der Möglichkeit von Wetterprognosen auf längere Zeit discutirt, woran sich noch eine Besprechung der Aufeinanderfolge von unperiodischen Witterungserscheinungen, sowie der Prognosenbezirke schliesst. Im Anhange werden noch die Regeln mitgetheilt, welche die maritime Meteorologie für das Manövriren der Seeschiffe gegeben hat, sowie eine Reihe nützlicher Hilfstafeln. Ein ausführlicher Nachweis über die benützte Literatur erhöht die praktische Bedeutung des Handbuchs für Lehr- und Lernzwecke. Ein sorgfältiges Sach- und Namenregister für beide Bände bildet den Schluss.

Wir möchten das Werk, welches von der Verlagsbuchhandlung in freigebiger Weise ausgestattet wurde, jedem Freunde der Meteorologie bestens empfehlen.

Fritz Erk.

Erdprofil der Zone von 31° bis 65° n. Br. im Maassverhältniss 1:1 Million. Von Ferdinand Lingg. Verlag und Ausführung von der k. b. priv. Kunstanstalt von Piloty & Loehle in München. 1886.

Eine hervorragende Leistung, die von gleicher Originalität in der Anlage wie von Sorgfalt in der Durchführung ist, liegt in Lingg's Erdprofil vor uns.

Der Gedanke, aus welchem dieses Werk entsprang, ist der, eine graphische Darstellung zu schaffen, welche uns ein möglichst richtiges Bild der Erde gewährt und also sowohl die Krümmung der Erdoberfläche, wie auch das Relief derselben im richtigen Verhältniss der einzelnen Theile unter sich und zum Ganzen erkennen lässt. Dieser Gedanke ist ja an und für sich höchst einfach, seiner Ausführung stellen sich aber enorme Schwierigkeiten entgegen. Die sogenannten Reliefkarten oder gar die Reliefgloben, welche eine Annäherung an die gestellte Aufgabe anstreben, sind völlig ausser Stande, dieser Forderung gerecht zu werden, weil bei ihnen allen der Maassstab, in welchem die vertikalen Erstreckungen dargestellt werden, aus technischen Gründen ein ganz anderer sein muss als jener, der für horizontale Dimensionen benützt wird. Das Gleiche gilt bei den Profilen, welche für einzelne Landes- und Gebirgstheile angefertigt werden. Wir wollen ganz absehen von jenen unvergesslichen Bildern von „Zuckerhutvorräthen“, die wir leider auch heutzutage noch als Gebirgsprofile in den Lehrmittelsammlungen der Elementar- und Mittelschulen treffen und die nach unserer Ansicht eher angethan sind, eine richtige Vorstellung zu verhindern als sie zu gewähren, auch die Profile, welche in fachmännischen geographischen und geologischen Werken enthalten sind, fordern ein bedeutendes Maass von Ueberlegung, wenn nicht durch die dort nöthige Verzerrung des Horizontal- und Vertikalmaassstabes die richtige Erkenntniss gestört werden soll. Natürlich soll durch diese Worte nicht etwa der hohe Werth dieser letzteren Profile verringert werden; sie entspringen vielmehr nur aus der Befriedigung, mit der wir Lingg's Profil begrüssen. Wir legen auf dasselbe schon darum einen ganz besondern Werth, weil es uns die geistige Reduction der verzerrten Profile auf die richtigen Verhältnisse wesentlich erleichtert.

Lingg giebt in seinem Profil einen Vertikaldurchschnitt durch die Erde und ihre Atmosphäre und sucht in demselben die sämmtlichen geophysikalischen Verhältnisse, soweit es nur immer möglich ist, zur graphischen Darstellung zu bringen. Die räumliche Erstreckung des entstehenden Bildes legt dem Autor die Mässigung auf, sich auf das Profil eines Theils von einem Meridianbogen zu beschränken. Der gleiche technische Grund bestimmt auch die Verjüngung, welche als 1 : 1 Million angenommen wurde, so dass also 1 km der Wirklichkeit durch 1 mm im Tableau wiedergegeben ist.

Das Tableau, das eine Höhe von 51 cm und eine Länge von 375 cm hat, giebt zunächst einen meridionalen Schnitt durch Centraleuropa. Das Ganze erstreckt sich von 31^0 bis 65^0 n. Br. und verbindet die Schnittlinie Tripolis an der afrikanischen Küste mit Drontheim in Norwegen. Um die Lage der durch das Tableau dargestellten Durchschnittsfläche zu dem Erdganzen, sowie den Zusammenhang mit den verschiedenen Linien und Punkten, welche in der mathematischen Geographie unterschieden werden, anschaulich zu machen, ist dem Tableau ein schematischer Durchschnitt der Erdkugel in 1 : 50 Millionen beigegeben.

Das Tableau schliesst in seiner Gesammtheit nun folgende Hauptbestandtheile ein:

A. Die mathematisch-geographischen Verhältnisse;

B. das Relief der Erdoberfläche, zunächst speciell dargestellt nach der schon bezeichneten Durchschnittslinie. Dasselbe findet aber dann noch eine Ergänzung durch eine Art von Panorama. Denkt man sich nämlich die Erde rotirend, den ursprünglichen Durchschnittsmeridian aber festgehalten, so kommen nach und nach alle Theile der Erde, welche in der Zone vom 31. bis 65. Gr. n. Br. liegen, durch den Meridian hindurch. Die bedeutenderen Berge, sowie die beträchtlicheren Einsenkungen des Meeresbodens rings um den ganzen Gürtel sind dann in richtiger Position eingetragen, wobei die Feinheit der Zeichnung noch immer völlige Uebersichtlichkeit gestattet;

C. geologische Verhältnisse;

D. die Constitution der Atmosphäre mit einigen Witterungsvorgängen und der optischen Erscheinungen;

E. erdmagnetische Verhältnisse und die Nordlichtserscheinungen.

Wir müssen es uns versagen, hier auf die Details einzugehen, und möchten nur darauf hinweisen, dass das Profil uns eine klare Vorstellung von dem Betrage der Erdabplattung gewährt, sowie von dem Unterschiede der geographischen und geocentrischen Breite. Bei den geologischen Verhältnissen erscheint besonders die Einzeichnung der wichtigsten Erdbebencentren hoch interessant. Man erstaunt, wie nahe diese Punkte der Erdoberfläche liegen im Verhältniss zur gesammten Wölbung der Erde. In jenen Theilen, welche der Physik der Atmosphäre gewidmet sind, findet man Linien eingetragen, welche als „Linien gleicher Bruchtheile der Atmosphäre“ bezeichnet sind. Der Autor bestimmt nämlich die Höhen, über welchen noch bestimmte Bruchtheile der ganzen Atmosphärensäule dem Gewichte nach liegen. Diese Curven sind als Ellipsen concentrisch mit jener des Erddurchschnitts eingezeichnet. Wenn auch neuere Forschungen nachgewiesen haben, dass dies am Rande der Atmosphäre nicht mehr zulässig ist, so dürfte es wohl noch innerhalb der Grenzen giltig sein, bis zu welchen sich das Lingg'sche Profil erstreckt, also bis zu einer Höhe von 200 km. Es lässt sich vielleicht über die völlige Richtigkeit dieser Linien Manches sagen, aber sie bezwecken ja zunächst nur, uns eine Vorstellung von den allgemeinsten Verhältnissen zu geben. Bei der enormen Sorgfalt, mit der das Profil gezeichnet ist, liegt ein nicht zu unterschätzender Werth desselben auch in dem Umstande, dass es gerade für solche Fragen von dem Fachmanne sofort als Basis für weitere graphische Constructionen benützt werden kann. Nach Art von Diagrammen finden wir auch noch die Abnahme des Luftdruckes, der Temperatur und des Dunstdruckes mit der Höhe eingezeichnet. Den Bewölkungserscheinungen ist insofern Rechnung getragen, als Repräsentanten der wichtigsten Wolkenformen an einzelnen

Punkten in jenen Höhen eingezeichnet sind, in welchen sie gewöhnlich auftreten, wodurch auch die neutrale Zwischenregion zwischen den oberen und unteren Wolken, welche meist verschiedene Zugsrichtung haben, gekennzeichnet ist. Auch der Zusammenhang zwischen Gewitter und Wetterleuchten findet eine interessante Darstellung. In der Uebersichtstafel ist auch noch das grosse Nordlicht vom 25. October 1870 eingezeichnet, sowie ein schematischer Durchschnitt der Nordlichtringe nach Nordenskjöld.

Dem Profil ist noch eine Karte von Europa, sowie eine Mercator-Karte der Erde beigegeben, in welch' letzterer die dargestellte Zone klar hervorgehoben ist. Diese Karten in Verbindung mit einem sorgfältigen alphabetischen Register ergeben die Möglichkeit, alle die vielen Einzelheiten des ganzen Werkes rasch aufzusuchen.

Wir können diese Arbeit wirklich nur als eine Musterleistung in jeder Hinsicht begrüssen. Die moderne Geographie hat durch sie ein ebenso originelles wie praktisches neues Anschauungsmittel erhalten, dessen Kenntnissnahme wir dem Geographen von Fach wie dem Freunde der Wissenschaft bestens empfehlen wollen.

FRITZ ERK.

Elektricität und Magnetismus als kosmotellurische Kräfte. Von Dr. THEODOR HOH, Professor der Physik am k. Lyceum zu Bamberg. 18 Bogen in 8°. A. Hartleben's Verlag in Wien.

Das dunkelste Capitel auf dem Gebiete der Physik ist ohne Zweifel die Lehre von der Elektricität und von dem Magnetismus, insofern diese ohne Zuthun des Menschen in der freien Natur als kosmotellurische Agentien auftreten. Sie bietet in der unendlichen Zahl von zusammenwirkenden Factoren die Schwierigkeiten der Meteorologie; während aber letztere wenigstens so lange, als sie sich nur mit Luftdruck, Wärme, Condensation der Wasserdämpfe u. s. w. befasst, einen in theoretischer Beziehung ziemlich geebneten Boden hat, kommt bei dem Magnetismus und der Elektricität noch die Schwierigkeit hinzu, dass wir über das Wesen beider vollständig im Unklaren sind.

Sicherlich kann man den Physikern keine Schuld an dem unfertigen Zustande der in Rede stehenden Doctrin beimessen, im Gegentheil, sie haben sich eben des Räthselhaften darin wegen und um der Allgegenwart der Erscheinungen willen redlich bemüht, das Dunkel aufzuhellen, und die einschlägige Literatur ist darum nicht nur eine sehr grosse, sie ist auch eine sehr zerstreute. Wie die Erscheinungen überall in der Natur, so sind die Arbeiten darüber allenthalben in der Literatur zu finden. In alten und neuen Büchern, in astronomischen und rein physikalischen Werken, in den Schriften der Akademien und anderer wissenschaftlichen Vereine, überall findet man Arbeiten darüber, und wie allenthalben, je unerklärbarer ein

Gegenstand ist, um so üppiger die verschiedensten Theorien aufwuchern, so auch hier.

Bei diesem Gewirr von Beobachtungen und Theorien ist es nun für Denjenigen, welcher sich mit denselben Gegenständen befassen will, von grossem Werthe, ein Buch zu besitzen, in dem alle diese Sachen bis zu den Arbeiten der neuesten Zeit in möglichster Vollständigkeit besprochen sind, weil man sich dabei jedenfalls die Mühe des selbstständigen Aufsuchens erspart, und in dieser Beziehung dürfte auf das oben angeführte Buch aufmerksam zu machen sein. Es ist nichts wesentlich Neues darin, aber das Alte ist mit grossem Fleisse zusammengestellt.

W. C. WITTWER.

Die Physik Plato's, eine Studie auf Grund seiner Werke. Programm zur Schlussfeier des Schuljahres 1886—87 an der königl. Kreis-Realschule. Von Dr. BENEDIKT ROTHLAUF, k. Reallehrer. 51 S. München 1887.

Wenn wir diesen Titel eines uns freundlich zugeschickten Programms mit Vergnügen zum Abdruck bringen, so müssen wir leider hinzusetzen, dass die Münze eine Kehrseite besitzt. Auf der letzten Seite finden sich nämlich die verhängnissvollen Worte: „Hiermit ist der vom königl. Rectorate dem Verfasser zur Verfügung gestellte Raum erschöpft; Fortsetzung folgt in einem späteren Programme.“ Wir brauchen freilich diese Worte nicht mit *Lasciate ogni speranza* als gleichbedeutend aufzufassen, denn brieflicher Mittheilung des Herrn Verfassers zufolge wäre möglicherweise schon im nächsten Jahre die Fortsetzung und in ihr der Schluss der Abhandlung zu gewärtigen, welche selbst, wenn nicht zeitlich, doch inhaltlich an das Programm von 1878 sich anschliesst, mit der wir Bd. XXIII, hist.-lit. Abth. S. 169—170 unsere Leser bekannt machten. Jedenfalls aber — und darauf bezieht sich unser oben gebrauchtes „leider“ — ist das diesjährige Programm nur Bruchstück, das unmöglich den vollen Eindruck hervorbringen kann, welcher von der vollendeten Arbeit zu erwarten ist. Es ist von folgenden Dingen die Rede: von der Unmöglichkeit eines leeren Raumes, von der Gestalt der Elementarkörper, von ihrer leichteren und schwereren Beschaffenheit, von der Statik, vom Stosse, von den Flüssigkeiten mit Einschluss der Luft, vom Luftdrucke, von der Verwandlung der Stoffe in einander, von Elektricität und Magnetismus, von Musik.

In Ausstand bleibt, soviel wir sehen, die eigentliche Schalllehre, die Lehre vom Lichte und dem Sehen, die Wärmelehre, die Lehre von den Himmelskörpern und ihren Bewegungen, mithin Gegenstände genug für ein Programm von mindestens gleichem Umfange mit dem diesjährigen.

Wir haben die behandelten Dinge flüchtig genannt. Bei ihrer Bearbeitung hat Herr Rothlauf grundsätzlich keinerlei Literatur zu Rathe gezogen, sondern sich auf die Schriften Plato's als alleinige Quelle beschränkt. Das ähnliche Verfahren in der Abhandlung von 1878 haben wir entschuldigt. Herr Rothlauf wusste damals nicht, dass sein Gegenstand schon Bearbeitung gefunden hatte; er konnte mithin nicht prüfen, von dessen Vorhandensein er in Unkenntniss war. Auf die Vorarbeiten insbesondere Martin's in seiner Timäus-Ausgabe ausdrücklich hingewiesen, musste er unseres Dafürhaltens vor der eigentlichen Niederschrift seiner auf persönlicher Forschung fussenden Ansichten die anderer Bearbeiter prüfend vergleichen, und wir hoffen, er werde bei den noch ausstehenden Capiteln sich zu dieser allgemeinen Gelehrtensitte bequemen, deren absichtliche Vermeidung denn doch den Schein einer Selbsteingenommenheit gewinnt, welche wir dem Verfasser in Wahrheit nicht zutrauen. Ausser auf Martin möchten wir Herrn Rothlauf auch auf Heller's Geschichte der Physik aufmerksam machen, in deren erstem Bande gerade Plato mit grosser Vorliebe handelt ist.

Von Einzelheiten heben wir nur Eines hervor, um Verwahrung dagegen einzulegen. Die Erfindung der Schraube durch Archimed wird S. 19 angezweifelt und der Anspruch des Archytas von Tarent auf diese Erfindung für begründeter gehalten, weil Plato sich des Wortes ἕλιξ bedient. Auf diese Beweisführung hin könnte man Homer als Schraubenerfinder rühmen, bei welchem ἕλιξ für Armband bereits vorkommt! ἕλιξ heisst eben jeder in Windungen verlaufende Gegenstand und hat die Bedeutung „Schraube" gewiss erst nachträglich angenommen. Die Erfinderfrage selbst wollen wir hiermit nicht entschieden haben, nur die Entscheidung von der Wortbenutzung abwälzen.

Cantor.

Leibniz' Bedeutung in der Geschichte der Mathematik. Rede zur Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Königs, gehalten in der Aula des Polytechnikums zu Dresden von Dr. Axel Harnack, o. Professor der Mathematik, o. Mitglied der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. 26 S. Dresden 1887, v. Zahn & Jaensch.

In einer Rede, welche in einer Stunde etwa gehalten werden musste, deren Ausdehnung also in sehr enge Grenzen eingeschlossen war, einen Leibniz zu schildern, wenn auch nur den Mathematiker Leibniz, unter Beiseiteschiebung aller sonstigen Verdienste des in so vielen Fächern bahnbrechenden Mannes, ist ein Ding der Unmöglichkeit, und Herr Harnack selbst theilt gewiss diese unsere Ansicht; dass es aber keine Unmöglichkeit ist, innerhalb jener Zeitgrenzen die Umrisse der Gestalt auch eines Geistesriesen so zu zeichnen, dass eine erkennbare Form der einzelnen Körpertheile hervortrete, ähnlich genug, um einer genauen Ausführung als unveränderte Grundlage zu dienen, das hat Herr Harnack gezeigt. In diesem

Sinne können wir die kleine uns vorliegende Schrift auf's Beste empfehlen, können wir den Wunsch anknüpfen, es möge Herr Harnack Lust und Zeit finden, aus der Skizze ein wirkliches Bild zu vollenden. Guhrauer's mehr als 40 Jahre alte Biographie ist weit überholt. Andere, neuere zusammenhängende Schilderungen leiden an dem auch Guhrauer anhaftenden Mangel allzugeringer mathematischer Bildung der Verfasser. Leibniz als Mathematiker, von einem Mathematiker, für Mathematiker, ganz und ausführlich, das wäre, was wir von Herrn Harnack uns wünschen. In diesem Wunsche aber wird gewiss jeder mathematische Leser der Festrede mit uns übereinstimmen.

CANTOR.

Histoire des sciences mathématiques et physiques. Par M. MAXIMILIEN MARIE, répétiteur de mécanique, examinateur d'admission à l'école polytechnique. Tome XI: De Fourier à Arago. Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire. 1887. 257 pages.

„Die bedeutendsten Männer dieser Periode“ — so beginnt Herr Marie den neuen Band — „sind Fourier und Gauss für die Analysis; Poinsot für die Mechanik; Young, Biot und Malus für die Optik; Ampère für die Elektricität; Humphry Davy, Thénard, Gay-Lussac, Berzelius und Dulong für die Chemie und verschiedene Zweige der Physik; endlich Cuvier für die Naturgeschichte.“

In den (S. 5—10) folgenden Uebersichten über einzelne Zweige der Wissenschaft erörtert er des Weiteren die Fortschritte der Geometrie: „Hachette dehnt auf alle Oberflächen zweiter Ordnung die Bestimmung der von d'Alembert am Ellipsoid bemerkten Kreisschnitte aus. Poinsot erläutert die fremdartigen Wurzeln der Gleichung für das Archimedische Problem der Theilung einer Halbkugel in gegebenem Verhältnisse durch Betrachtung der Abschnitte innerhalb des gleichseitigen Umdrehungshyperboloids mit zwei Mantelflächen, welches die Kugel an den Endpunkten des zur Schnittebene senkrechten Durchmessers berührt. Dupin ersinnt die Indicatrix. Brianchon beweist, dass die Diagonalen eines einem Kegelschnitt umbeschriebenen Sechsecks einen gemeinsamen Durchschnittspunkt besitzen. Gauss beweist die Möglichkeit, nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal regelmässige Vielecke in den Kreis einzuzeichnen, deren Seitenzahl in der Formel 2^n+1 enthalten ist.“

Wir versuchten nun einmal an den Band so heranzutreten, dass wir ausschliesslich auf die Schilderung der vom Verfasser selbst hervorgehobenen mathematischen Schriftsteller achteten. Bei Fourier (S. 11—42) fanden wir vorzugsweise einen Auszug aus dessen Wärmetheorie, daneben eine aus wenigen Zeilen bestehende Andeutung von seinen Leistungen aus der Theorie der Gleichungen, kein Wort von seiner geordneten Division. In dem Auszuge aus der Wärmetheorie heisst es gegen den Schluss hin: „Fourier behandelt vollständig die Frage der Entwickelung einer willkürlichen Function in eine trigonometrische Reihe, d. h. er entwickelt die Ordinate eines bestimmten, aus beliebigen geraden und krummen Linien bestehenden Zuges als trigonometrische Function der Abscisse. Aber wir wollen ihn in dieser Lehre nicht begleiten." Kennt man Fourier, wenn man diese zwei Druckbogen gelesen hat? — Ungefähr der gleiche Raum (S. 108—138) ist Gauss gewidmet. Nichts von seinen Untersuchungen über Reihenconvergenz, Nichts über die angenäherten Quadraturen, Nichts über das arithmetisch-geometrische Mittel, Nichts über winkeltreue Abbildung, Nichts über Oberflächencoordinaten, Nichts über das Potential, Nichts über den elektrischen Telegraphen, dagegen eine keineswegs erschöpfende Darstellung der Kreistheilungsgleichungen. Kennt man Gaus, wenn man das gelesen hat? Es wäre uns leicht, auch an Poinsot, Ampère, Dupin, Brianchon den gleichen Maassstab anzulegen. Ueberall würden noch weitaus unzulänglichere Darstellungen uns begegnen.

Man missverstehe uns nicht. Wir wollen nicht tadeln, was Herr Marie giebt. Es ist meistens ganz gut. Nur darüber sind wir mit jedem Bande mehr im Unklaren, was seine Auslassungen bedeuten? Hält er das Weggelassene wirklich für unwichtig bei seinem Bestreben, eine Geschichte der mathematischen Ideen zu schreiben, oder ist ihm dieses Bestreben selbst schon lange abhanden gekommen?

Cantor.

Carl Friedrich Gauss, **Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate**, in deutscher Sprache herausgegeben von Dr. A. Börsch und Dr. P. Simon, mit einem Vorworte von Prof. Helmert. Berlin 1887, bei P. Stankiewicz. V, 208 S.

Vor 90 Jahren hat Gauss jedenfalls selbstständig diejenige Methode der Inbetrachtnahme von Beobachtungen erfunden, welcher Legendre, ebenfalls selbstständig dazu gelangt, wie ja noch einige andere Gelehrte in den Wettbewerb um die Erfindung einzutreten berechtigt sind, den Namen der Methode der kleinsten Quadrate beilegte. Ungeschmälert und ohne Wettbewerb bleibt sicherlich Gauss der Ruhm, die Begründung der neuen Methode von den verschiedensten Seiten her unternommen zu haben, und ebenso wird ihm ungeschmälert der Ruhm verbleiben, dass Alles, was er der Oeffentlichkeit übergab, den Stempel klassischer Vollendung trug. Gauss'sche Abhandlungen können darum altern, aber nie veralten, und gerade bezüglich solcher Theile der Mathematik, welche, wie die functionentheoretischen Betrachtungen, erst nachgauss'scher Entwickelung der Hauptsache nach sich erfreuten, erkennt der Leser Gauss'scher Schriften oft staunend Hinweise, welche die Zeitgenossen nicht verstanden haben können. Die Werke von Gauss zu studiren, ist darum eine Pflicht, der kein Mathematiker sich entziehen darf, mag er auch keinerlei geschichtliches Interesse dabei empfinden. Um so angenehmer, wenn die Erfüllung dieser Pflicht dadurch erleichtert wird, dass die lateinischen Texte in moderne Sprache Uebertragung finden. So hat Herr Josef Bertrand in den fünfziger Jahren eine französische Bearbeitung der Schriften über die Methode der kleinsten Quadrate veröffentlicht, und aufgemuntert durch Herrn Helmert haben heute zwei Assistenten am königl. preussischen geodätischen Institut die Herausgabe in deutscher Sprache sich zur Aufgabe gestellt. Selbstverständlich sind dabei die ursprünglich deutsch geschriebenen Abhandlungen, soweit sie auf den Gegenstand sich beziehen, gleichfalls zum Abdruck gebracht, auch die 1828 in Göttingen gedruckte Abhandlung: „Bestimmung des Breitenunterschieds zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona durch Beobachtungen am Ramsden'schen Zenithsector", welche Herr Bertrand seiner Sammlung nicht einverleibte. Die Sprache der Uebersetzung liest sich so glatt, als es die Schwierigkeit des Inhaltes überhaupt zulässt; Gauss hat nun ein für alle Mal nicht leicht geschrieben. Die Ausstattung lässt Nichts zu wünschen übrig.

CANTOR.

Maxima und Minima, analytisch-geometrisch beleuchtet. Abhandlung. Wissenschaftliche Beilage zum 34. Jahresbericht des königl. Realgymnasiums zu Rawitsch. Von dessen Director Dr. KARL HEINRICH LIERSEMANN. Breslau 1887. 59 S. 7 Figurentafeln.

Die Einleitung zu dieser Abhandlung hat Herr Liersemann dem 33. Jahresberichte seiner Anstalt beigegeben, und wir haben in diesem Bande hist.-lit. Abth. S. 36—37 ihren Hauptinhalt in Kürze angegeben. Noch kürzer können wir in dem Berichte über die gegenwärtige Abhandlung uns fassen, indem wir nur bemerken, dass in ihr die dort angegebenen Methoden an zahlreichen Beispielen geprüft worden, dass die Beispiele von sehr anschaulichen, schön gezeichneten Figuren begleitet sind und dass die mitunter überaus verwickelten Rechnungen den Anlass zu Bemerkungen bieten, aus welchen recht viel zur Anstellung solcher Rechnungen zu lernen ist. Einen Auszug aus solchen Beispielen zu geben halten wir nicht für geeignet.

CANTOR.

Bibliographie

vom 1. August bis 30. September 1887.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie d. Wissensch. 16. Bd., 1. Abth. München, Franz. 7 Mk.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie d. Wissensch. 1887, 1. Heft. Ebendas. 1 Mk. 20 Pf.

Abhandlungen der königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen. 34. Bd. Göttingen, Dieterich. 48 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe, Abth. II. 95. Bd. 1., 2. u. 3. Heft. Wien, Gerold. 14 Mk.

Journal f. reine u. angewandte Mathematik (begr. v. Crelle), herausgeg. von L. Kronecker u. K. Weierstrass. 102. Bd., 1. Heft. Berlin, G. Reimer. compl. 12 Mk.

——, Inhalt und Namensverzeichniss der Bände 1—100, 1826—1887. Ebendas. 12 Mk.

Mathematische Annalen, herausgeg. v. F. Klein u. A. Mayer. 30. Bd., 1. Heft. Leipzig, Teubner. compl. 20 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet v. Ohrtmann, herausgeg. v. M. Henoch u. E. Lampe. 16. Bd., Jahrg. 1884. 3. Heft. Berlin, G. Reimer. 10 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft, herausgeg. v. E. Schönfeld u. H. Seeliger. 22. Jahrg., 3. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Annalen der Physik und Chemie, begründet v. Poggendorff, herausgeg. v. G. Wiedemann. Jahrg. 1887, Nr. 8^b. Leipzig, Barth. 5 Mk. 40 Pf.

Beobachtungen des astrophysikalischen Observatoriums zu O Gyalla, herausgegeben von N. v. Konkoly. 8. Bd., 2. Thl. Halle, Schmidt. 4 Mk.

Mémoires de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg. VII. série, tome 35, Nr. 3. Leipzig, Voss. 1 Mk.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Günther, S., Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum J. 1525 (3. Bd. der Monumenta Germaniae paedagogica, herausgeg. v. K. Kehrbach. Berlin, Hofmann & Comp. 12 Mk.

Harnack, A., Leibniz' Bedeutung in der Geschichte der Mathematik. Rede. Dresden, v. Zahn & Jänsch. 1 Mk.

SCHERING, E., Carl Friedr. Gauss und die Erforschung des Erdmagnetismus. (Gött. Ges. d. W.) Göttingen, Dieterich. 4 Mk.

ROSENBERGER, F., Die Geschichte der Physik. 3. Thl. (Die Physik in den letzten 100 Jahren). 1. Abth. Braunschweig, Vieweg. 6 Mk. 50 Pf.

Reine Mathematik.

SCHAPIRA, H., Ueber ein allgemeines Princip algebraischer Iterationen. Vortrag. Heidelberg, Winter. 80 Pf.

GORDAN, P., Vorlesungen über die Invariantentheorie, herausgeg. v. G. KERSCHENSTEINER. 2. Bd.: Binäre Formen. Leipzig, Teubner. 11 Mk. 60 Pf.

IGEL, B., Zur Theorie der Combinanten und der Jerrard'schen Transformation. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 60 Pf.

MERTENS, F., Ueber invariante Gebilde ternärer Formen. Ebendas. 80 Pf.

WINCKLER, A., Ueber den Multiplicator der allgem. ellipt. Differentialgleichung. (Akad.) Ebendas. 25 Pf.

STOLZ, O., Ueber die Lambert'sche Reihe. Ebendas. 45 Pf.

MANDL, M., Ueber die Summirung einiger Reihen. Ebendas. 20 Pf.

BLÄTER, J., Tafel der Viertelquadrate aller ganzen Zahlen v. 1 b. 200000. Wien, Hölder. 12 Mk.

REX, W., Vierstellige Logarithmentafeln. Stuttgart, Metzler. 60 Pf.

KOCH, W., Die conforme Abbildung des hyperbolischen Paraboloids auf einer Ebene. (Dissert.) Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 20 Pf.

LONDON, F., Ueber polare Fünfflache und Sechsflache räumlicher Reciprocitäten. (Dissert.) Breslau, Köhler. 1 Mk.

BOBEK, K., Ueber hyperelliptische Curven. 2. u. 3. Mittheilung. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

——, Ueber Curven 4. Ordnung vom Geschlecht 2. Ebendas. 1 Mk. 80 Pf.

——, Ueber Raumcurven m^{ter} Ordnung mit $(m-2)$-fachen Secanten. Ebendas. 20 Pf.

KOHN, G., Ueber die zu einer allgemeinen Curve 4. Ordn. adjungirten Curven 9. Cl. Ebendas. 25 Pf.

——, Zur Theorie der rationalen Curven 4. Ordn. Ebendas. 40 Pf.

BIERMANN, O., Ueber die regelmässigen Punktgruppen in Räumen höherer Dimension und die zugehörigen linearen Substitutionen. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

——, Das algebraische Gebilde n^{ter} Stufe im Gebiete von $n+1$ Grössen. Ebendas. 45 Pf.

WAELSCH, E., Ueber eine Strahlencongruenz beim Hyperboloid. Ebendas. 40 Pf.

SCHWARZ, H., Ueber specielle zweifach zusammenhängende Flächenstücke, welche kleineren Flächeninhalt besitzen, als alle benachbarten, von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücke. (Gött. Ges. d. W.) Göttingen, Dieterich. 3 Mk.

WIENER, CHR., Lehrbuch d. darstell. Geometrie. 2. Bd. Leipzig, Teubner. 18 Mk.

BEYEL, CH., Axonometrie und Perspective, im systematischen Zusammenhang dargestellt. Stuttgart, Metzler. 2 Mk. 40 Pf.

TISSOT, A., Netzentwürfe für geographische Karten nebst Aufgaben über Abbildung beliebiger Flächen aufeinander. Deutsch mit Zusätzen von E. HAMMER. Ebendas. 5 Mk

JUST, K., Ueber einen neuen Ellipsenzirkel. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

JORDAN, M., Cours d'analyse. Tome III, Calcul intégral. Paris, Gauthier-Villars. 17 Fr.

BOUSSINESQ, J., Cours d'analyse infinités. en vue de ses applications. Fasc. 1 et 2. Ebendas. 17 Fr.

D'ARBOUX, G., Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géom. du calcul infinités. 1. Partie. Ebendas. 15 Fr.

Angewandte Mathematik.

DIRICHLET, LEJEUNE, Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrates der Entfernung wirkenden Kräfte. Herausgeg. v. F. GRUBE. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

PETERSEN, J., Lehrbuch der Dynamik fester Körper. Deutsch von E. v. FISCHER-BENZON. Kopenhagen, Höst & S. 5 Mk. 50 Pf.

PETROFF, N., Neue Theorie der Reibung, übersetzt v. L. WURZEL. Hamburg. Leop. Voss. 5 Mk.

PLANCK, M., Das Princip der Erhaltung der Energie. (Gekr. Preisschr.) Leipzig, Teubner. 6 Mk.

KOERBER, F., Ueber den Cometen 1865, I. (Dissert.) Breslau, Köhler. 1 Mk.

HOLETSCHEK, J., Ueber die Richtungen der grossen Axen der Cometenbahnen. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

BIDSCHOF, F., Bestimmung der Bahn des Cometen 1848, I. Ebendas. 40 Pf.

SCHRAM, R., Tafeln zur Berechnung der näheren Umstände der Sonnenfinsternisse. Ebendas. 10 Mk.

STRUVE, L., Bestimmung der Constante der Präcession und der eigenen Bewegung des Sonnensystems. (Petersb. Akad.) Leipzig, Voss. 1 Mk.

CLEBSCH, A., Principien der mathematischen Optik. Herausgeg. v. A. KURZ. Augsburg, Rieger. 1 Mk.

OHM, S., Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet. Neudruck mit einem Vorwort von J. MOSER. Wien, Toeplitz & Deutike. 3 Mk.

Physik und Meteorologie.

TUMLIRZ, O., Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

PULUJ, J., Objective Darstellung der Gestalt einer schwingenden Saite. Ebendas. 15 Pf.

Halsch, F., Versuche über die Reflexion des Schalles in Röhren. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Liznar, J., Ueber die 26tägige Schwankungsperiode der erdmagnetischen Elemente. Ebendas. 25 Pf.

——, Ueber die 26tägige Periode in hohen magnetischen Breiten. Ebendas. 50 Pf.

Boltzmann, L., Zur Theorie des von Hall entdeckten elektromagnetischen Phänomens. Ebendas. 60 Pf.

Peukert, W., Ueber die Erklärung des Waltenhofen'schen Phänomens der anomalen Magnetisirung. Ebendas. 20 Pf.

Ettingshausen, A. v., Ueber die Messung der Hall'schen Wirkung mittels des Differentialgalvanometers. Ebendas. 40 Pf.

Edlund, E., Ueber unipolare Induction. Ebendas. 20 Pf.

Streintz, F., Experimentaluntersuchungen über die galvanische Polarisation. (2. Abhdlg.) Ebendas. 30 Pf.

Lang, V. v., Messung der elektromotorischen Kraft des elektrischen Lichtbogens. Ebendas. 20 Pf.

Miesler, J., Elektromotorische Verdünnungsconstanten. Ebendas. 35 Pf.

Stefan, J., Ueber veränderliche elektrische Ströme in dicken Leitungsdrähten. Ebendas. 40 Pf.

Tumlirz, O. u. A. Krug, Ueber die Aenderung des Widerstands galvanisch glühender Drähte mit der Stromstärke. Ebendas. 60 Pf.

Wähner, Th., Bestimmung der Magnetisirungszahlen von Flüssigkeiten. Ebendas. 25 Pf.

Lecher, E., Ueber die Convection der Elektricität durch Verdampfen. Ebendas. 20 Pf.

Puschl, C., Ueber den höchsten Siedepunkt d. Flüssigkeiten. Ebdas. 15 Pf.

——, Ueber das Verhalten der Gase zu den Gesetzen von Mariotte und Gay-Lussac. Ebendas. 25 Pf.

Lecher, E., Neue Versuche über den elektr. Lichtbogen. Ebendas. 40 Pf.

Knoblauch, H., Ueber die elliptische Polarisation der Wärmestrahlen bei der Reflexion von Metallen. Leipzig, Engelmann. 12 Mk.

Hellmann, H., Die Quecksilberpumpe in ihren wichtigsten Formen. Riga, Kymmel. 1 Mk.

Exner, F., Ueber transportable Apparate zur Beobachtung der atmosphärischen Elektricität. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Bebber, J. van, Die Ergebnisse der Wetterprognosen im Jahre 1886. Hamburg, Friederichsen & Comp. 50 Pf.

Faye, M., Sur les tempêtes; théories et discussions nouvelles. Paris, Gauthier-Villars. 2 Fr. 50 C.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1886.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Abbildung.

320. On a quasi-stereographic projection due to Gauss. R. A. Forsyth. Quart. Journ. math. XXI, 376.

Aerodynamik.

321. Sur la propagation du mouvement dans les corps, et spécialement dans les gaz parfaits. Hugoniot. Compt. rend. CI, 794.
322. Zur Theorie der Bewegung einer elastischen Flüssigkeit. R. Lipschitz. Crelle C, 89.

Vergl Wärmelehre.

Analytische Geometrie der Ebene.

323. Ueber gewisse Linien im Dreieck. Franke. Crelle XCIX, 161. — H. Schroeter ibid. 233.

Vergl. Kegelschnitte. Quadratur.

Analytische Geometrie des Raumes.

324. Sur quelques formules de la théorie des courbes gauches. Ph. Gilbert. Compt. rend. CI, 52. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 283.]
325. Zusatz zu einer früheren Note über Raumcurven. A Hurwitz. Mathem. Annal. XXVII, 162. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 272.]
326. Das allgemeine Sechsflach. O. Hermes. Crelle C, 258.
327. Zur Theorie gewisser abhängiger Punktgruppen im Raume. J. Rosanes. Crelle C, 311.
328. On the foci of spherical curves of the fourth order. H. M. Jeffery. Quart. Journ. math. XXI, 130.
329. Ueber ein Analogon im Raume zu einer speciellen Hypocykloidenbewegung. E. Lampe. Crelle C, 359.
330. Sur l'homographie de deux corps solides. Sylvester. Compt. rend. CI, 35, 139.

Vergl. Ellipsoid. Mehrdimensionale Geometrie. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Stereometrie.

Astronomie.

331. Méthodes nouvelles pour la détermination des coordonnées absolues des polaires, sans qu'il soit nécessaire de connaître les constantes instrumentales. Loewy. Compt. rend. CI, 5, 105.
332. Application des nouvelles méthodes de M. Loewy pour la détermination des coordonnées absolues des étoiles circompolaires sans qu'il soit nécessaire de connaître les constantes instrumentales (distances polaires). H. Renan. Compt. rend. CI, 802, 935.
333. Sur la construction des grands cercles méridiens doubles. Gruey. Compt. rend. CI, 1236.
334. Sur une méthode unique pour déterminer les constantes de l'altazimut et de la lunette méridienne à grand champ. Gruey. Compt. rend. C, 1470.
335. Sur le mouvement de rotation de la Terre autour de son centre de gravité. F. Tisserand. Compt. rend. CI, 195.
336. Sur les moments d'inertie principaux de la Terre. F. Tisserand. Compt. Rend. CI, 409.

337. Sur l'orbite intermédiaire de la Lune. H. Gylden. Compt. rend. CI, 223.
338. Sur la libration de la Lune. F. Tisserand. Compt. Rend. CI, 625.
339. Tables numériques destinées à faciliter le calcul des éphémérides des petites planètes. O. Callandreau & L. Fabry. Compt. rend. CI, 598.
340. Sur des tables numériques destinées à faciliter les transformations de coordonnées. Vinot. Compt. rend. CI, 938.
Vergl. Geschichte der Mathematik 474, 475.

Attraction.

341. Eine neue Methode zur Bestimmung der Gravitationsconstante. A. König & F. Richarz. Berl. Akad.-Ber. 1884, 1203.

B.

Bernoulli'sche Zahlen.

342. Sur les nombres de Bernoulli. A. Genocchi. Crelle XCIX, 315.

Bestimmte Integrale.

343. On a theorem in integration. H. W. Watson. Quart. Journ. math. XXI, 225.
344. Some theorems in integration and their representation by the method of equivalent points. E. J. Routh. Quart. Journ. math. XXI, 281.
345. Beweis einer Jacobi'schen Integralformel. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1884, 539.
346. Ueber eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1885, 841.
347. Ueber das Dirichlet'sche Integral. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1885, 641.
348. Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. K. Weierstrass. Berl. Akad.-Ber. 1885, 633, 789.
349. Zur Theorie des Doppelintegrales. A. Harnack. Mathem. Annal. XXVI, 566. [Vergl. Nr. 420.]
Vergl. Functionen 417, 420. Gammafunctionen. Gleichungen 489. Quadratur.

C.

Crystallographie.

350. Ueber die Ein- und Mehrdeutigkeit der Fundamental-Bogen-Complexe für die Elemente monoklinischer Krystallgattungen. M. Websky. Berl. Akad.-Ber. 1884, 371.

Cylinderfunctionen.

351. Bessel's functions of the second order. C. V. Coates. Quart. Journ. math. XXI, 183. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 542.]

D.

Determinanten.

352. Ueber die Subdeterminanten symmetrischer Systeme. R. Mehmke. Mathem. Annal. XXVI, 209.
353. On a geometrical representation of alternants of the third order and of their quotients when divided by $\Delta(0, 1, 2)$. W. W. Johnson. Quart. Journ. math. XXI, 217.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 330. Differentialgleichungen 375. Geschichte der Mathematik 477. Kegelschnitte 508.

Differentialgleichungen.

354. Ueber die Definitionsgleichungen der continuirlichen Transformationsgruppen. Fr. Engel. Mathem. Annal. XXVII, 1.
355. Sur les conditions d'holomorphisme des intégrales de l'équation itérative, et de quelques autres équations fonctionnelles. G. Königs. Compt. rend. CI, 1137.
356. Ueber Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen. L. Fuchs. Berl. Akad.-Ber. 1884, 699.
357. Ueber eine Form, in welche sich das allgemeine Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung bringen lässt, wenn dasselbe algebraisch ist. L. Fuchs. Berl. Akad.-Ber. 1884, 1171.
358. Ueber den Charakter der Integrale von Differentialgleichungen zwischen complexen Variabeln. L. Fuchs. Berl. Akad.-Ber. 1885, 5.

359. Ueber die Werthe, welche die Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung in singulären Punkten annehmen können. L. Fuchs. Berl. Akad.-Ber. 1886, 279.
360. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. H. Poincaré. Compt. rend. CI, 939, 990.
361. Zur Abhandlung von Herrn Grünfeld über lineare Differentialgleichungen. L. W. Thomé. Crelle XCIX, 88. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 32.]
362. Ueber eine Classe linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. L. Fuchs. Crelle C, 189.
363. On theory of linear differential equations. A. Cayley. Crelle C, 286.
364. On linear differential equations. A. Cayley. Quart. Journ. math. XXI, 321.
365. Ueber einige besondere homogene lineare Differentialgleichungen. A. Hurwitz. Mathem. Annal. XXVI, 117. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 337.]
366. Ueber Eigenschaften der durch Quadraturen algebraischer Functionen darstellbaren Integrale linearer nicht homogener Differentialgleichungen. L. Königsberger. Crelle XCIX, 10.
367. Sur une nouvelle classe d'équations différentielles linéaires intégrables. Halphen. Compt. rend. CI, 1238.
368. Ueber die Erniedrigung der Ordnung einer Differentialgleichung. L. Königsberger. Mathem. Annal. XXVI, 110.
369. Équations différentielles générales qui se ramènent aux quadratures. W. Maximovitch. Compt. rend. CI, 809.
370. Ueber die Integration der vollständigen Differentiale. G. Morera. Math. Annal. XXVII, 403.
371. De generali quadam aequatione differentiali tertii ordinis. E. E. Kummer. Crelle C, 1.
372. Sur quelques équations différentielles. F. Brioschi. Mathem. Annal. XXVI, 106.
373. Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique. A. Markoff. Mathem. Annal. XXVIII, 586.
374. Ueber die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} + A_m \frac{d^m y}{d(lx)^m} + A_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{d(lx)^{m-1}} + \cdots + A_1 \frac{dy}{d(lx)} + A_0 y = 0$$

mit Anwendung auf die Theorie der trinomischen Gleichungen. W. Heymann. Mathem. Annal. XXVI, 534.
375. Anwendung einer gewissen Determinantenrelation auf die Integration partieller Differentialgleichungen. Hamburger. Crelle C, 390.
376. Sur les solutions communes à plusieurs équations linéaires aux dérivées partielles. R. Liouville. Compt. rend. CI, 1134.

Vergl. Formen 409, 412. Functionen 431. Geschichte der Mathematik 480. Invariantentheorie 504.

Differentialquotient.

377. Ausdehnung eines Dirichlet'schen Verfahrens auf die Transformation von Differentialausdrücken, wie $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$, in allgemeine krummlinige Coordinaten. Fr. Meyer. Mathem. Annal. XXVI, 509.
378. Bildungsgesetz der höheren Differentiale einer Function von Functionen. L. Königsberger. Mathem. Annal. XXVII, 473.
379. Sur les différentielles des fonctions de plusieurs variables indépendantes. E. Goursat. Compt. rend. CI, 309.

E.

Elasticität.

380. Ueber die Formänderung, die ein fester elastischer Körper erfährt, wenn er magnetisch oder dielektrisch polarisirt wird. G. Kirchhoff. Berl. Akad.-Ber. 1884, 137, 1155.
381. Two or more distinct elastic solid media in contact separated by parallel planes, exposed to purely surface forces specially when normal. Complete solution of an elastic solid continuously varying with the depth but of constant rigidity. C. Chree. Quart. Journ. math. XXI, 107.
382. Solid sphere or spherical shell of varying elasticity under purely normal surface forces. C. Chree. Quart. Journ. math. XXI, 193.
383. Longitudinal vibrations of a circular bar. C. Chree. Quart. Journ. math XXI, 287.

384. Zur Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Körper. V. Hausmaninger. Berl. Akad.-Ber. 1885, 49.
385. Réflexion, sans frottement, sur un plan, des déplacements élastiques dans un corps de forme et de contexture quelconques. N. Kretz. Compt. rend. CI, 366.

Elektricität.

386. Expériences de transmission de la force par l'électricité entre Paris et Creil. M. Deprez. Compt. rend. CI, 791.
387. Eine Bestimmung des Ohms. F. Himstedt. Berl. Akad.-Ber. 1885, 753.
388. The distribution of electricity on the circular disc and spherical bowl. E. G. Gallop. Quart. Journ. math. XXI, 229.
389. Zur Theorie der Gleichgewichtsvertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln. G. Kirchhoff. Berl. Akad.-Ber. 1885, 1007.
390. Die Selbstinduction bifilar gewickelter Drahtspiralen. H. F. Weber. Berl. Akad.-Ber. 1886, 511.

Vergl. Elasticität 380.

Ellipsoid.

391. Ueber die Fadenconstruction des Ellipsoides. S. Finsterwalder. Mathem. Annal. XXVI, 546.
392. Eine katoptrische Eigenschaft des Ellipsoides. O. Staude. Mathem. Annal. XXVII, 412.

Vergl. Potential 572.

Elliptische Transcendenten.

393. Ueber einen Fundamentalsatz der elliptischen Functionen. A. Pringsheim. Mathem. Annal. XXVII, 151. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 380.]
394. Zur Theorie der elliptischen Functionen. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1885, 761; ibid. 1886, 701. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 649.]
395. Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen. G. Pick. Mathem. Annal. XXVI, 219. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 381.]
396. Ueber Theilung und Transformation der elliptischen Functionen L. Kiepert. Mathem. Annal. XXVI, 369.
397. Neue Untersuchungen im Gebiete der elliptischen Functionen. F. Klein. Mathem. Annal. XXVI, 455.
398. Zur Theorie der elliptischen Functionen. G. Pick. Mathem. Annal. XXVIII, 309.
399. On elliptic functions. Asutosh Mukhopadhyay. Quart. Journ. math. XXI, 212. — Cayley ibid. 217.
400. Sur une relation de récurrence qui se présente dans la théorie des fonctions elliptiques. De Jonquières. Compt. rend. CI, 415.
401. Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung. H. Bruns. Mathem. Annal. XXVII, 234.
402 Ueber endliche Gruppen linearer Substitutionen, welche in der Theorie der elliptischen Transcendenten auftreten. A. Hurwitz. Mathem. Annal. XXVII, 183.
403 Remarques arithmétiques sur quelques formules de la théorie des fonctions elliptiques. Ch. Hermite. Crelle C, 51.
404. On the coefficients in the q-series for $\frac{\pi}{2K}$ and $\frac{2G}{\pi}$. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XXI, 60. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 599.]
405. Some doubly-infinite converging series. A. R. Forsyth. Quart. Journ. math. XXI, 261.

Vergl. Modulargleichungen. Oberflächen 546. Oberflächen zweiter Ordnung 557. Thetafunctionen.

F.

Formen.

406. Sur une nouvelle théorie de formes algébriques. Sylvester. Compt. rend. CI, 1042, 1110, 1225, 1461.
407. Ueber den arithmetischen Begriff der Aequivalenz und über die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen. H. Minkowski. Crelle C, 449.
408. Ueber die nothwendigen und hinreichenden covarianten Bedingungen für die Darstellbarkeit einer binären Form als vollständiger Potenz. D. Hilbert. Mathem. Annal. XXVII, 158.
409. Zur Theorie der binären Formen. S. Gundelfinger. Crelle C, 413.

410. Zur Theorie der orthogonalen Substitutionen. S. Gundelfinger. Crelle XCIX, 147.
411. Ueber positive quadratische Formen. H. Minkowski. Crelle XCIX, 1.
412. Sur les formes quadratiques dans la théorie des équations différentielles linéaires. Halphen. Compt. rend. CI, 664.
413. Sur la décomposition des formes quadratiques. Benoit. Compt. rend. CI, 869.
414. Ueber eine Eigenschaft der cubischen Formen mit beliebig vielen Veränderlichen. A. Voss. Mathem. Annal. XXVII, 515.

Vergl. Invariantentheorie. Oberflächen zweiter Ordnung 560.

Functionen.

415. Bemerkungen zu Liouville's Classificirung der Transcendenten. L. Königsberger. Mathem. Annal. XXVIII, 483.
416. Beweis des Puiseux'schen Satzes. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1884, 543.
417. Ueber den Cauchy'schen Satz. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1885, 785.
418. Ueber analytische Ausdrücke mit hebbaren Unstetigkeiten. A, Pringsheim. Mathem. Annal. XXVI, 167.
419. Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen A. Voss. Mathem. Annal. XXVII, 527.
420. Die gleichmässige Convergenz von Functionen mehrerer Veränderlichen zu den dadurch sich ergebenden Grenzwerthen, dass einige derselben constanten Werthen sich nähern. O. Stolz. Mathem. Annal. XXVI, 83.
421. Beweis von der Unmöglichkeit der Existenz eines andern Functionaltheorems als des Abel'schen. L. Königsberger. Crelle C, 121.
422. Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eine Involution zulassen. L. Fuchs. Berl. Akad.-Ber. 1886, 797.
423. Die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1884, 1071.
424. Zur Theorie der Gattungen rationaler Functionen von mehreren Variabeln. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1886, 251.
425. Ueber die conjugirten Werthe einer rationalen Function von n Veränderlichen. E. Netto. Crelle C, 436.
426. Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Appell. Compt. rend. CI, 1478.
427. Ueber verwandte s-Functionen. E. Papperitz. Mathem. Annal. XXVI, 97. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 420.]
428. Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen F. Klein. Mathem. Annal. XXVII, 431.
429. Propriétés nouvelles du paramètre différentiel du second ordre des fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes. Haton de la Goupilière. Compt. rend. CI, 18.
430. Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe cubique Cremona. Autonne. Compt. rend. CI, 53. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 414.]
431. Ueber die algebraischen Transformationen der hypergeometrischen Functionen. E. Papperitz. Mathem. Annal. XXVII, 315.
432. Sur certaines fonctions hyperfuchsiennes. E. Picard. Compt. rend. CI, 1127.
433. Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce. E. Picard. Compt. rend. CI, 734.
434. Zu Lindemann's Abhandlung über die Ludolph'sche Zahl. K. Weierstrass. Berl. Akad.-Ber. 1885, 1067.
435. Sur une fonction uniforme. Stieltjes. Compt. rend. CI, 153.
436. Sur une fonction uniforme introduite par Riemann. Hermite. Compt. rend. CI, 112.
437. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Bourguet. Compt. rend. CI, 304.

Vergl. Bernoulli'sche Zahlen. Bestimmte Integrale. Cylinderfunctionen. Determinanten. Differentialgleichungen. Differentialquotient. Elliptische Transcendenten. Formen. Gammafunctionen. Geometrie (höhere) 445–450. Gleichungen. Interpolation. Invariantentheorie. Maxima und Minima. Modulargleichungen. Reihen. Thetafunctionen. Ultraelliptische Transcendenten. Variationsrechnung. Zahlentheorie.

G.

Gammafunctionen.

438. Ueber die Eigenschaft der Gammafunction, keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen. O. Hölder. Mathem. Annal. XXVIII, 1.

Geometrie (descriptive).

439. Ableitung der Polareigenschaften algebraischer Mannigfaltigkeiten auf darstellend-geometrischem Wege. C. Rodenberg. Math. Annal. XXVI, 557.
440. Ueber Construction flacher Zonenbögen beim Gebrauch der stereographischen Kugelprojection. M. Websky. Berl. Akad.-Ber. 1886, 33.
441. Note on projection applied to problems and to solid geometry. R. J. Dallas. Quart. Journ. math. XXI, 89.
442. On the geometrical theory of perspective. A Larmor. Quart. Journ. math. XXI, 339.

Vergl. Abbildung.

Geometrie (höhere).

443. Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip. A. Hurwitz. Mathem. Annal. XXVIII, 561.
444. On a theorem in higher algebra. R. Russell. Quart. Journ. math. XXI, 373.
445. Sur les transformations géométriques birationnelles d'ordre n. De Jonquières. Compt. rend. CI, 720.
446. Solution d'une question d'analyse indéterminée, qui est fondamentale dans la théorie des transformations Cremona. De Jonquières. Compt. rend. CI, 857.
447. Sur les dérivations des solutions dans la théorie des transformations Cremona. De Jonquières. Compt. rend. CI, 921.
448. Sur les transformations géométriques planes birationnelles. G. B. Guccia. Compt. rend. CI, 808.
449. Sur les transformations Cremona dans le plan. G. B. Guccia. Compt. rend. CI, 866.
450. Beispiele zu den Cremona'schen ebenen Transformationen. R. Sturm. Math. Annal. XXVI, 304.
451. Ueber Collineationen und Correlationen, welche Flächen zweiten Grades oder cubische Raumcurven in sich selbst transformiren. R. Sturm. Mathem. Annal. XXVI, 465.
452. Ueber gleiche Punktreihen, Ebenenbüschel, Strahlenbüschel bei collinearen Räumen. R. Sturm. Mathem. Annal. XXVIII, 261.
453. Zur Theorie der Collineation und Correlation. R. Sturm. Mathem. Annal. XXVIII, 268.
454. Ueber den Cayley'schen Schnittpunktsatz. J. Bacharach. Mathem. Annal. XXVI, 275.
455. Ueber Viereck, Vierseit und projective Verwandtschaft in der Ebene. M. Pasch. Mathem. Annal. XXVI, 211.
456. Das Clebsch'sche Sechseck. H. Schroeter. Mathem. Annal. XXVIII, 457.
457. Zur Theorie der mehrfach perspectiven Dreiecke und Tetraeder. E. Hess. Mathem. Annal. XXVIII, 167.
458. Zur Theorie der Doppelpunkte und Doppeltangenten der ebenen rationalen Curven. C. Weltzien. Mathem. Annal. XXVI, 516.
459. Ueber die Beziehungen zwischen den 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung. G. Frobenius. Crelle XCIX, 275.
460. Zu dem Aufsatze des Herrn Hermes über eine gewisse Curve dritten Grades. P. H. Schoute. Crelle XCIX, 98. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 516.]
461. Questions qui se rapportent à un faisceau de cubiques planes. P. H. Schoute. Compt. rend. CI, 736, 805.
462. Ueber Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt. Fr. Dingeldey. Mathem. Annal. XXVII, 272.
463. Zur Construction der Hesse'schen Curve der rationalen Curven dritter Ordnung. Fr. Dingeldey. Mathem. Annal. XXVIII, 81.
464. Sur les homographies binaires et leurs faisceaux. C. Segre. Crelle C, 317.
465. Sur un nouveau mode de génération des courbes algébriques unicursales. G. Fouret. Compt. rend. CI, 1241
466. Ueber eine gewisse Gattung von Raumcurven. W. Stahl. Crelle XCIX, 154.
467. Ueber die Normalcurven für $p=5, 6, 7$. M. Nöther. Math. Annal. XXVI, 143.
468. Ueber die Normirung der Borchardt'schen Moduln der hyperelliptischen Functionen vom Geschlecht $p=2$. W. Reichardt. Mathem. Annal. XXVIII, 84.
469. Ueber höhere räumliche Nullsysteme. R. Sturm. Mathem. Annal. XXVIII, 277.
470. Ueber das Fünfflach und Sechsflach und die damit zusammenhängende Kummer'sche Configuration. H. Schroeter. Crelle C, 231.

471. Ueber quadratische Kugelncomplexe und Kugelncongruenzen, ihre Kreise und ihre Cykliden. Th. Reye. Crelle XCIX, 205.
Vergl. Determinanten 353. Gleichungen 482. Kegelschnitte. Mechanik 518. Mehrdimensionale Geometrie.

Geometrie (kinematische).

472. Ueber die Erzeugung algebraischer Raumcurven durch veränderliche Figuren. F. Caspary. Crelle C, 405.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 329 Mechanik.

Geschichte der Mathematik.

473. Sur l'optique de Ptolémée. G. Govi. Compt. rend. CI, 989.
474. Ueber einige historische, besonders in altspanischen Geschichtsquellen erwähnte Sonnenfinsternisse. F. K. Ginzel. Berl. Akad.-Ber. 1886, 963.
475. Ueber Herrmann von Marienfeld aus Münster. W. Wattenbach. Berl. Akad.-Ber. 1884, 93.
476. Document inédit relatif à l'invention et à la théorie de la lunette d'approche G. Govi. Compt. rend. CI, 634.
477. A supplementary list of writings on determinants. Th. Muir. Quart. Journ. math. XXI, 299. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 555.]
478. Discours prononcés aux obsèques de M. Bouquet 11. IX. 1885. J. Bertrand. Compt. rend. CI, 585. — Hermite ibid. 586.
479. Sur le but théorique des principaux travaux de Henri Tresca. De Saint-Venant. Compt. rend. CI, 119.
480. Aufnahme von L. Fuchs in die Berliner Akademie. L. Fuchs. Berl. Akad.-Ber. 1884, 744. — A. Auwers ibid. 747.
481. Vorwort zum hundertsten Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik. L. Kronecker & K. Weierstrass. Crelle C.
Vergl. Hydrodynamik 494. Optik 566.

Gleichungen.

482. Démonstration du théorème fondamental de l'algèbre. J. Perott. Crelle XCIX, 141.
483. Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1884, 1179, 1271.
484. Ueber die Zerlegung ganzer ganzzahliger Functionen in irreductible Factoren. C. Runge. Crelle XCIX, 89.
485. Die Monodromiegruppe einer algebraischen Gleichung bei linearen Transformationen der Variabeln. A. Kneser. Mathem. Annal. XXVIII, 125.
486. Ein Satz über Discriminantenformen. L. Kronecker. Crelle C, 79.
487. Neuer Beweis des Sylow'schen Satzes. G. Frobenius. Crelle C, 179.
488. Sur les racines de certaines équations. A. Markoff. Mathem. Annal. XXVII, 143, 177.
489. Theorie der trinomischen Gleichungen. W. Heymann. Mathem. Annal. XXVIII, 61.
490. On the so-called Tschirnhausen transformation. J. J. Sylvester. Crelle C, 465.
491. Zur Reduction der allgemeinen Gleichung fünften Grades auf die Jerrard'sche Form — eine Weiterführung des von Hermite eingeschlagenen Weges. J. Rahts. Mathem. Annal. XXVIII, 34.
492. Ueber Gleichungen fünften Grades. P. Gordan. Math. Annal. XXVIII, 152.
493. Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades. F. Klein. Mathem. Annal. XXVIII, 499.
Vergl. Differentialgleichungen 374. Functionen 416. Invariantentheorie.

H.

Hydrodynamik.

494. Ueber die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen. K. von der Mühl nach Joh. Rud. Merian. Mathem. Annal. XXVII, 575.
495. Sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini. Hugoniot. Compt. rend. CI, 1118, 1229.
496. On the motion, in an infinite liquid, of a cylinder whose cross-section is the inverse of an ellipse with respect to its centre. A. B. Basset. Quart. Journ. math. XXI, 336.
497. Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen. W. Voigt. Math. Annal. XXVIII, 14.

498. Mouvements des molécules de l'onde dite solitaire, propagée à la surface de l'eau d'un canal. De Saint-Venant. Compt. rend. CI, 1101, 1215, 1445.
499. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. H. Poincaré. Compt. rend. CI, 307. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 518.]

I.

Interpolation.

500. Sur la formule d'interpolation de Lagrange. Bendixson. Compt. rend. CI, 1050, 1129.
501. Sur un théorème de M. Hermite relatif à l'interpolation. F. Gomes-Teixeira. Crelle C, 83.

Invariantentheorie.

502. Beweis, dass alle Invarianten und Covarianten eines Systems binärer Formen ganze Functionen einer endlichen Anzahl von Gebilden dieser Art sind. F. Mertens. Crelle C, 223.
503. On the theory of seminvariants. Cayley. Quart. Journ. math. XXI, 92.
504. On the invariants of a linear differential equation. Cayley. Quart. Journ. math. XXI, 257.
505. Ueber einen allgemeinen Gesichtspunkt für invariantentheoretische Untersuchungen im binären Formengebiete. D. Hilbert. Math. Annal. XXVIII, 381.

Vergl. Analytische Theorie des Raumes 328. Formen. Gleichungen.

K.

Kegelschnitte.

506. Ueber die Geometrie der Kegelschnitte, insbesondere deren Charakteristikenproblem. E. Study. Mathem. Annal. XXVII, 58.
507. Ueber die Cremona'sche Charakteristikenformel. E. Study. Mathem. Annal. XXVII, 102.
508. Ueber Poncelet-Zeuthen'sche Polygone, welche einem Gebilde zweiten Grades eingeschrieben sind. A. Voss. Mathem. Annal. XXVI, 231. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 532.]

Kreis.

509. On the properties of a triangle formed by coplanar circles. R. Lachlan. Quart. Journ. math. XXI, 1.
510. On some geometrical proofs of theorems connected with the inscription of a triangle of constant form in a given triangle. Jenkins. Quart. Journ. math. XXI, 84.

M.

Magnetismus.

511. Beiträge zur Theorie des Magnetismus. W. Siemens. Berl. Akad.-Ber. 1884, 965.

Vergl. Elasticität 380.

Maxima und Minima.

512. Sur une certaine question de minimum. C. Possé. Math. Annal. XXVI, 593.

Vergl. Planimetrie.

Mechanik.

513. Ueber ein Theorem der analytischen Mechanik. A. Voss. Mathem. Annal. XXVII, 569.
514. Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung. H. v. Helmholtz. Crelle C, 137, 213.
515. Ueber eine einfache Methode zur Begründung des Princips der virtuellen Verrückungen. C. Neumann. Mathem. Annal. XXVII, 502.
516. Sur le théorème de König relatif à la force vive d'un système. Ph. Gilbert. Compt. rend. CI, 1054, 1140. — Resal ibid. 1140.
517. Sur une expression nouvelle du moment mutuel de deux complexes linéaires. C. Segre. Crelle XCIX, 169.
518. Ueber die reciproken Figuren der graphischen Statik. G. Hauck. Crelle C, 365.
519. Ueber Gruppen von Bewegungen. A. Schönflies. Math. Annal. XXVIII, 319.
520. Ueber die Bewegung dreier Punkte in einer Geraden. F. Rudio. Crelle C, 442.
521. Sur le mouvement d'un point dans un plan et sur le temps imaginaire. L. Lecornu. Compt. rend. CI, 1244.
522. Ueber die rollende Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Horizontalebene unter dem Einfluss der Schwere. C. Neumann. Mathem. Annal. XXVII, 478.

523. Sur diverses propositions relatives au mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. G. Darboux. Compt. rend. CI, 199. — De Sparre ibid. 370. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 554.]
524. Ueber die Herpolodie. W. Hess. Mathem. Annal. XXVII, 465, 568.
525. Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution, fixé par un point de son Axe. G. Darboux. Compt. rend. CI, 11, 115.
526. Sur la torsion des prismes. M. Brillouin. Compt. rend. CI, 739.
527. Effects dynamiques produits par le passage des roues des locomotives et des wagons aux joints des rails. A. Considère. Compt. rend. CI, 992.
528. Locomotion humaine, mécanisme du saut. Marey & G. Demeny. Compt. rend. CI, 489.
529. Mesure du travail mécanique effectué dans la locomotion de l'homme. Marey & G. Demeny. Compt. rend. CI, 905.
530. Variations du travail mécanique dépensé dans les différentes allures de l'homme. Marey & G. Demeny. Compt. rend. CI, 910.
531. Analyse cinématique de la locomotion du cheval. Pagès. Compt. rend. CI, 680, 702.

Vergl. Aerodynamik. Astronomie. Attraction. Elasticität. Elektricität. Geometrie (höhere) 465. Geschichte der Mathematik 479. Hydrodynamik. Magnetismus. Optik. Potential. Wärmelehre.

Mehrdimensionale Geometrie.

532. Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes. H. Schubert. Mathem. Annal. XXVI, 26.
533. Die n-dimensionale Verallgemeinerung der Anzahlen für die vielpunktig berührenden Tangenten einer punktallgemeinen Fläche m^{ten} Grades. H. Schubert. Mathem. Annal. XXVI, 52.
534. Ueber die Deformation der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses. Fr. Schur. Mathem. Annal. XXVII, 163.
535. Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen. Fr. Schur. Mathem. Annal. XXVII, 537.
536. Ueber die Deformation eines dreidimensionalen Raumes in einem ebenen vierdimensionalen Raume. Fr. Schur. Mathem. Annal. XXVIII, 343.
537. Sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-même. C. Segre. Mathem. Annal. XXVII, 296.
538. Ueber die elliptische Curve fünfter Ordnung des Raumes von vier Dimensionen. Fr. Meyer. Mathem. Annal. XXVI, 154.

Vergl. Oberflächen 545.

Modulargleichungen.

539. Ueber die Galois'sche Gruppe der Modulargleichungen, wenn der Transformationsgrad die Potenz einer Primzahl >2 ist. Jos. Gierster. Mathem. Annal. XXVI, 309.
540. Ueber Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrad. Jos. Gierster. Mathem. Annal. XXVI, 590.
541. Ueber die Substitutionsgruppen, welche zu den aus dem Legendre'schen Integralmodul $k^2(\omega)$ gezogenen Wurzeln gehören. R. Fricke. Mathem. Annal. XXVIII, 99.
542. Ueber gewisse ganzzahlige lineare Substitutionen, welche sich nicht durch algebraische Congruenzen erklären lassen. G. Pick. Mathem. Annal. XXVIII, 119.

O.

Oberflächen.

543. Ueber die unendlich kleinen Deformationen einer biegsamen, unausdehnbaren Fläche. J. Weingarten. Berl. Akad.-Ber. 1886, 83.
544. Ueber die Deformationen einer biegsamen unausdehnbaren Fläche. J. Weingarten. Crelle C, 296.
545. Zur Abhandlung: Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenem Ausdruck des Linearelementes. R. Lipschitz. Berl. Akad.-Ber. 1884, 649. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 837.]
546. Ueber Minimalflächen, welche durch elliptische Integrale darstellbar sind. v. Lilienthal. Crelle XCIX, 179.

547. Ueber pseudosphärische Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen. A. Brill. Mathem. Annal. XXVI, 300.
548. Beiträge zur Theorie der algebraischen Flächen. A. Voss. Mathem. Annal. XXVII, 357.
549. Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales. Em. Picard. Crelle C, 71.
550. Die Flächen dritter Ordnung als Ordnungsflächen von Polarsystemen. H. Thieme. Mathem. Annal. XXVIII, 133.
551. Sur certaines surfaces du troisième ordre qui ont une infinité d'ombilics. A. de Saint-Germain. Compt. rend. CI, 1246.
552. Ueber Configurationen, welche der Kummer'schen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind. F. Klein. Mathem. Annal. XXVII, 106.
553. Die verschiedenen Arten der Regelflächen vierter Ordnung. K. Rohn. Math. Annal. XXVIII, 284.
554. Ueber Gruppen gerader Linien auf Flächen höherer Ordnung. G. Affolter. Mathem. Annal. XXVII, 277.

Vergl. Mehrdimensionale Geometrie.

Oberflächen zweiter Ordnung.

555. Sur trois problèmes fondamentaux relatifs aux surfaces du second degré. H. Picquet. Crelle XCIX, 225.
556. Ueber neue Focaleigenschaften der Flächen zweiten Grades. O. Staude. Mathem. Annal. XXVII, 253.
557. Ueber geodätische Linien auf den dreiaxigen Flächen zweiten Grades, welche sich durch elliptische Functionen darstellen lassen. A. v. Braunmühl. Mathem. Annal. XXVI, 151.
558. Ueber diejenigen Flächen zweiten Grades, welche durch gleichwinkelige reciproke Strahlenbündel erzeugt werden. A. Schönflies. Crelle XCIX, 195.
559. Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre. H. G. Zeuthen. Mathem. Annal. XXVI, 247. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 454.]
560. Ueber die linearen homogenen Substitutionen, durch welche die Summe der Quadrate von vier Variabeln transformirt wird in die Summe der Quadrate der vier substituirten Variabeln. O. Hesse. Crelle XCIX, 110.
561. Zur Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung. F. Caspary. Crelle XCIX, 128.
562. Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung, von denen sieben gemeinschaftliche Punkte willkürlich und unabhängig von einander gegeben sind. H. Schroeter. Crelle XCIX, 131.
563. Ueber den achten Schnittpunkt dreier Flächen zweiter Ordnung. R. Sturm. Crelle XCIX, 317.
564. Constructions du huitième point commun aux surfaces du second ordre qui passent par sept points donnés. H. G. Zeuthen. Crelle XCIX, 320.
565. Lineare Construction des achten Schnittpunktes von drei Flächen zweiter Ordnung. Th. Reye. Crelle C, 487.

Vergl. Ellipsoid. Geometrie (höhere) 466. Mechanik 523.

Optik.

566. Ueber Green's Theorie der Reflexion und Brechung des Lichtes. K. von der Mühl. Mathem. Annal. XXVII, 506.
567. Expériences sur la double réfraction. D. S. Stroumbo. Compt. rend. CI, 505.
568. On geometrical optics. E. J. Routh. Quart. Journ. math. XXI, 179.
569. Sur la théorie des miroirs tournants. Gouy. Compt. rend. CI, 502.

Vergl. Ellipsoid 392. Geschichte der Mathematik 473, 476.

P.

Planimetrie.

570. Angenäherte Trisection eines Winkels mit Zirkel und Lineal. E. Lampe. Crelle C, 364.

Vergl. Kreis.

Potential.

571. Ueber die Erhaltung der Kraft im Luftmeere der Erde. W. Siemens. Berl. Akad.-Ber. 1886, 261.
572. Énergie potentielle de deux ellipsoides qui s'attirent. O. Callandreau. Compt. rend. CI, 1476.

Vergl. Elektricität. Functionen 429.

Q.

Quadratur.

573. Sur un nouveau modèle d'intégraphe. Napoli & Abdank-Abakanowicz. Compt. rend. CI, 592. — Mestre ibid. 633, 663. — Jordan ibid. 1465.

R.

Reihen.

574. Ueber Convergenz und Divergenz der Potenzreihe auf dem Convergenzkreis. L. W. Thomé. Crelle C, 167.
575. Ueber eine Eigenschaft unendlicher Reihen. L. Königsberger. Mathem. Annal. XXVII, 397.
576. Ueber die Integration der Reihen. P. du Bois-Reymond. Berl. Akad.-Ber. 1886, 359.
577. Ueber den Convergenzgrad der variabeln Reihen und den Stetigkeitsgrad der Functionen zweier Argumente. P. du Bois-Reymond. Crelle C, 331.
578. Ueber die Multiplication trigonometrischer Reihen. A. Pringsheim. Math. Annal. XXVI, 157. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 417.]
579. Sur les séries trigonométriques. H. Poincaré. Compt. rend. CI, 1131.
580. Ueber eine neue hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Function durch die Fourier'sche Reihe. O. Hölder. Berl. Akad.-Ber. 1885, 419.

Vergl. Differentialgleichungen 373. Elliptische Transcendenten 404, 405. Functionen 416, 418. Zahlentheorie 613, 625.

S.

Stereometrie.

581. Sur les seize réseaux des plans de l'icosaèdre régulier convexe. E. Hénard. Compt. rend. CI, 232. — Em. Barbier ibid. 304.
582. Tableau des principaux éléments des dix figures polyédriques regulières. Em. Barbier. Compt. rend. CI, 562.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 326, 327. Crystallographie.

T.

Thetafunctionen.

583. Ueber die Verwendung algebraischer Identitäten zur Aufstellung von Relationen für Thetafunctionen einer Variabeln. F. Caspary. Math. Ann. XXVIII, 493.
584. Ueber einige Differentialbeziehungen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen. M. Krause. Mathem. Annal. XXVI, 1, 15.
585. Ueber Fourier'sche Entwickelungen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen. M. Krause. Mathem. Annal. XXVII, 419.
586. Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen sind. M. Krause. Mathem. Annal. XXVI, 569.
587. Ueber Thetafunctionen, die nach einer Transformation in ein Product von Thetafunctionen zerfallen. Ed. Wiltheiss. Mathem. Annal. XXVI, 127.
588. Ueber die partiellen Differentialgleichungen zwischen den Ableitungen der hyperelliptischen Thetafunctionen nach den Parametern und nach den Argumenten. Ed. Wiltheiss. Crelle XCIX, 236.
589. A verification in regard to the linear transformation of the theta-functions. A. Cayley. Quart. Journ. math. XXI, 77.
590. On the transformation of the double theta-functions. A. Cayley. Quart. Journ. math. XXI, 142.
591. On a formula relating to the zero-value of a theta-function. A. Cayley. Crelle C, 87.
592. Sur une formule de M. Hermite. R. Lipschitz. Crelle C, 66.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

593. Zur geometrischen Deutung des Abel'schen Theorems der hyperelliptischen Integrale. F. Klein. Mathem. Annal. XXVIII, 533.
594. Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale erster Ordnung und erster Gattung auf elliptische durch eine Transformation vierten Grades. O. Bolza. Mathem. Annal. XXVIII, 447.
595. Zur Transformation dritten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Fr. Brioschi. Math. Annal. XXVIII, 594. — M. Krause ibid. 597.

Vergl. Geometrie (höhere) 468.

Umkehrungsproblem.

596. Zum Umkehrproblem in der Theorie der Abel'schen Functionen. M. Nöther. Mathem. Annal. XXVIII, 354.

V.

Variationsrechnung.

597. Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung. A. Mayer. Mathem. Annal. XXVI, 74.
598. Ueber die Bedeutung der Begriffe „Maximum und Minimum" in der Variationsrechnung. L. Scheeffer. Mathem. Annal. XXVI, 197.

W.

Wärmelehre.

599. Studien zur Statik monocyklischer Systeme. H. v. Helmholtz. Berl. Akad.-Ber. 1884, 159, 311, 755, 1197. — R. Clausius ibid. 663.
600. Sur la théorie de M. Helmholtz relative à la conservation de la chaleur solaire. Ph. Gilbert. Compt. rend CI, 872.
601. Ueber die mechanischen Analogien des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. L. Boltzmann. Crelle C, 201.
602. Remarques au sujet des récentes expériences de M. Hirn sur la vitesse d'écoulement des gaz. Faye. Compt. rend. CI, 849.
603. Écoulement des gaz; lignes adiabatiques. M. Langlois. Compt. rend. CI, 998.
604. Recherches théoriques sur la distribution de la chaleur à la surface du globe. A. Angot. Compt. rend. CI, 837, 876.
605. Théorie des melanges réfrigérants. A. Portier. Compt. rend. CI, 998.
606. Sur la compressibilité des fluides. E. Sarrau. Compt. rend. CI, 941.
607. Sur la tension des vapeurs saturées. E. Sarrau. Compt. rend. CI, 994.
608. Sur l'équation caractéristique de l'acide carbonique. E. Sarrau. Compt. rend. CI, 1145.

Vergl. Aerodynamik.

Z.

Zahlentheorie.

609. Ueber einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen. L. Kronecker. Crelle XCIX, 329.
610. Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik. L. Kronecker. Crelle C, 490.
611. Die absolut kleinsten Reste reeller Grössen. L. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1885, 383, 1045.
612. Ueber ganzzahlige Lösungen von Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen. C. Runge. Crelle C, 425.
613. Darstellung der zahlentheoretischen Function $E(x)$ durch eine unendliche Reihe. A. Pringsheim. Mathem. Annal. XXVI, 193.
614. Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions numériques. Ch. Hermite. Crelle XCIX, 324.
615. Ueber eine Formel des Herrn Hermite. E. Busche. Crelle C, 459.
616. Zwei Beweise der allgemeinen Reciprocitätsgesetze unter den Resten u. Nichtresten der Potenzen, deren Grad eine Primzahl ist. E. E. Kummer. Crelle C, 10.
617. Sur une démonstration de la loi de réciprocité. A. Genocchi. Compt. rend. CI, 425.
618. Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. L. Kronecker. Berl. Ak.-Ber 1884, 519, 645; ibid. 1885, 117. — E Schering ibid. 1885, 113.
619. Arithmetischer Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die biquadratischen Reste. E. Busche. Crelle XCIX, 261.
620. Zur Theorie der Congruenzen höheren Grades. G. Rados. Crelle XCIX, 258.
621. Zur Congruenz $\frac{r^p - r}{p} \equiv a \ (mod\, p)$. M. A. Stern. Crelle C, 182.
622. Zahlentheoretische Bemerkung. E. Schering. Crelle C, 447.
623. Beweis, dass der zweite Factor der Classenanzahl für die aus den elften und dreizehnten Einheitswurzeln gebildeten Zahlen gleich Eins ist. P. Wolfskehl. Crelle XCIX, 173.
624. Certain special partitions of numbers. P. A. Mac Mahon. Quart. Journ. math. XXI, 367.
625. Sur une loi asymptotique dans la théorie des nombres. Stieltjes. Compt. rend. CI, 368. [Vergl. Nr. 435]

Vergl. Elliptische Transcendenten 403. Formen. Geometrie (höhere) 446, 447. Modulargleichungen. Thetafunctionen 592.

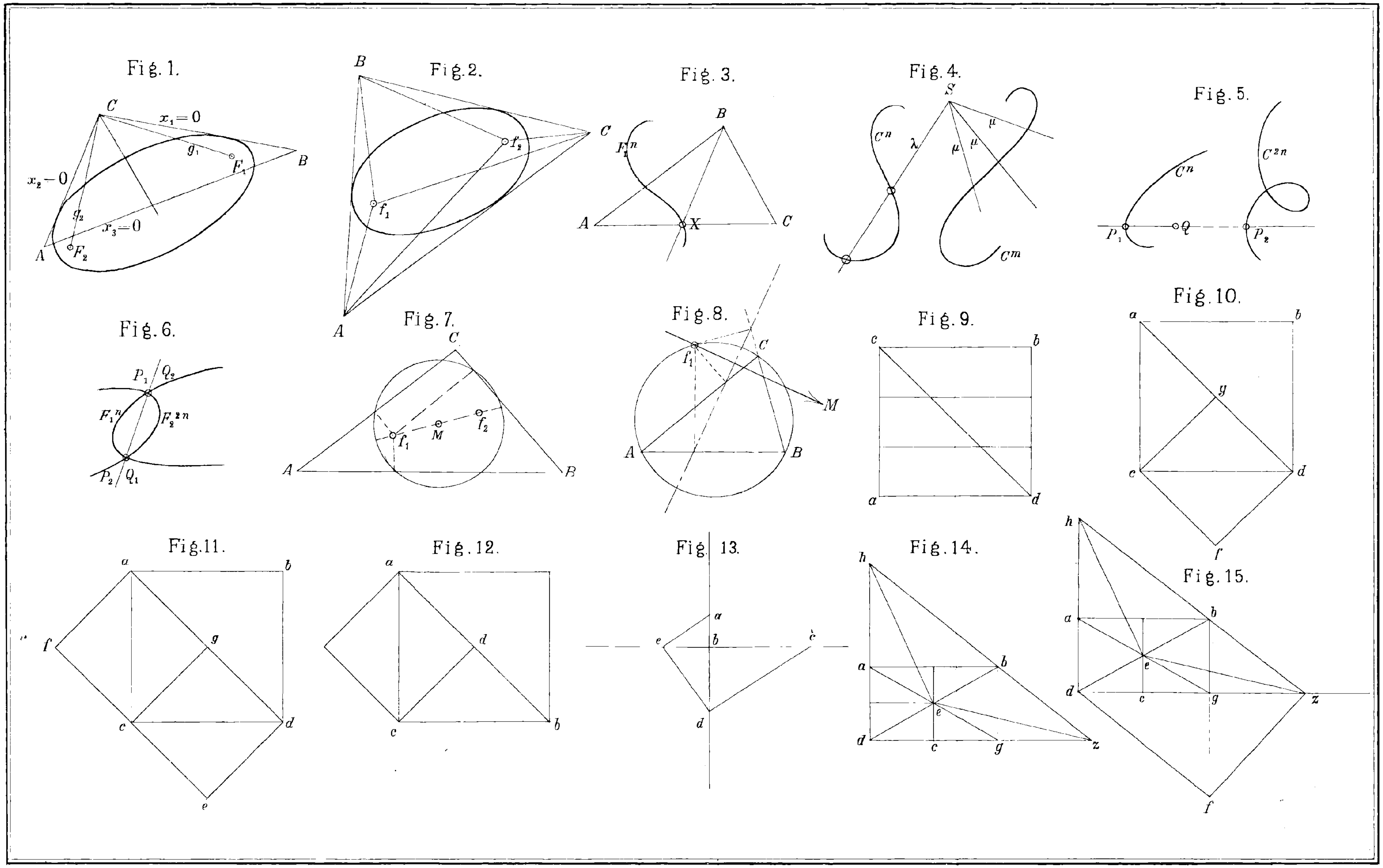


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.

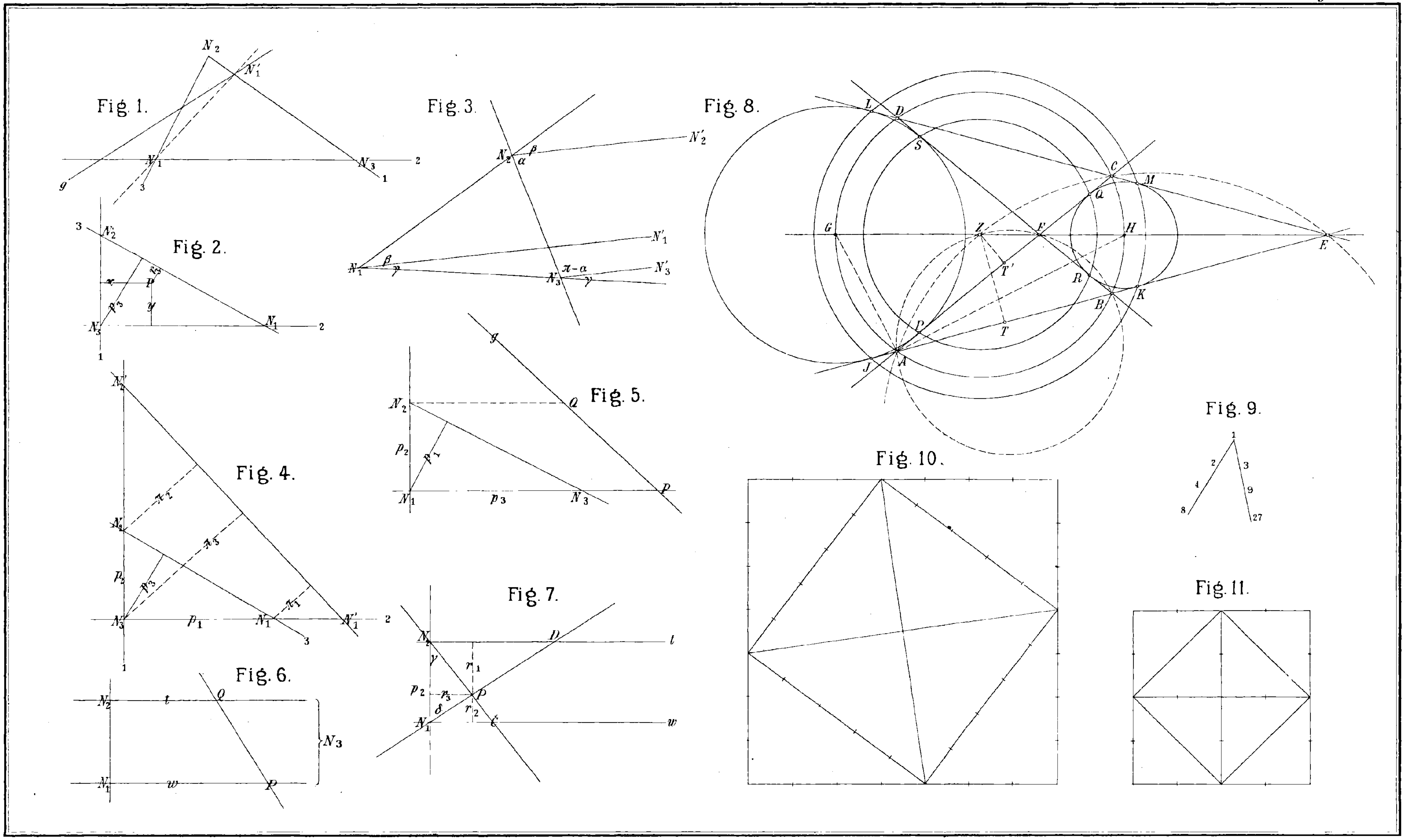


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.

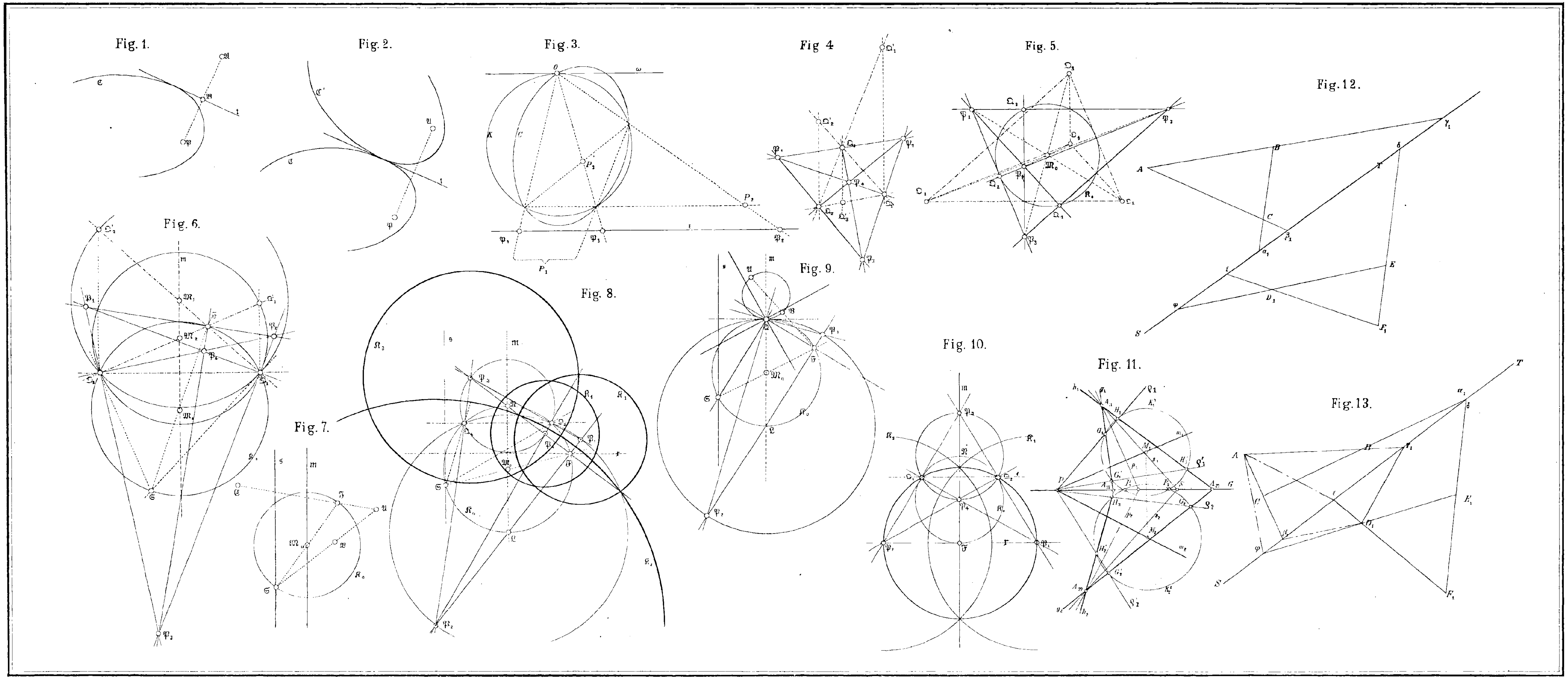


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.

Fig. 1.

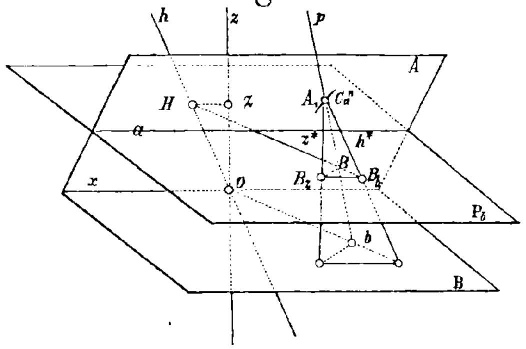


Fig. 2.

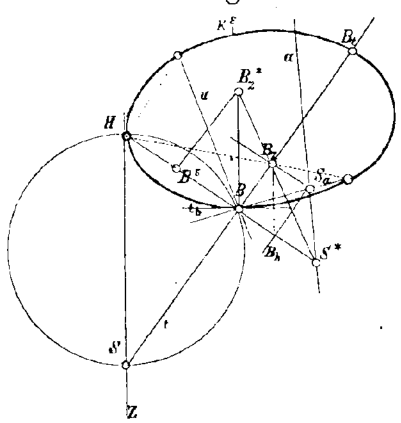


Fig. 3.

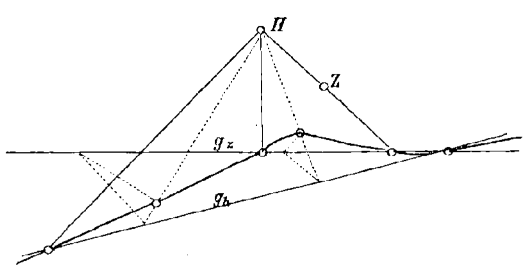


Fig. 4.

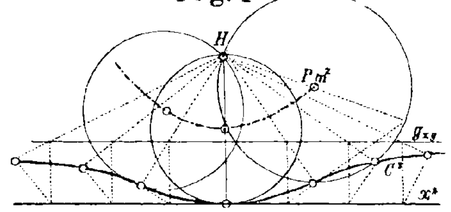


Fig. 5.

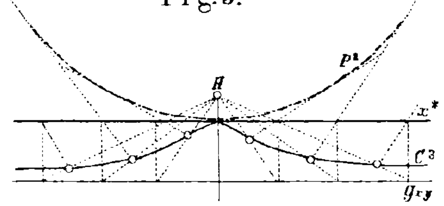


Fig. 6.

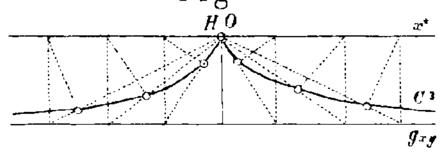


Fig. 7.

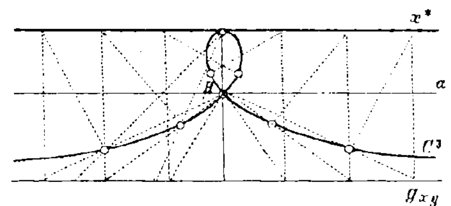


Fig. 8.

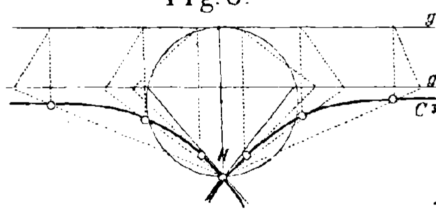


Fig. 9.

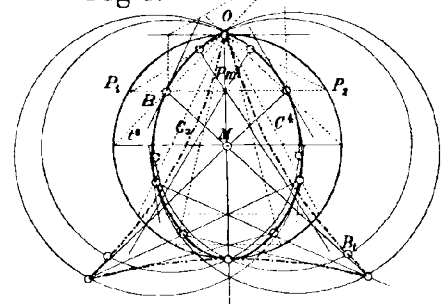


Fig. 10.

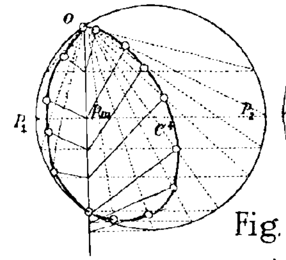


Fig. 11.

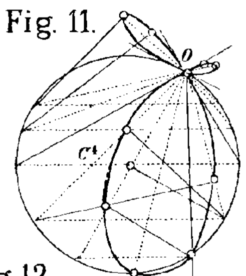


Fig. 12.

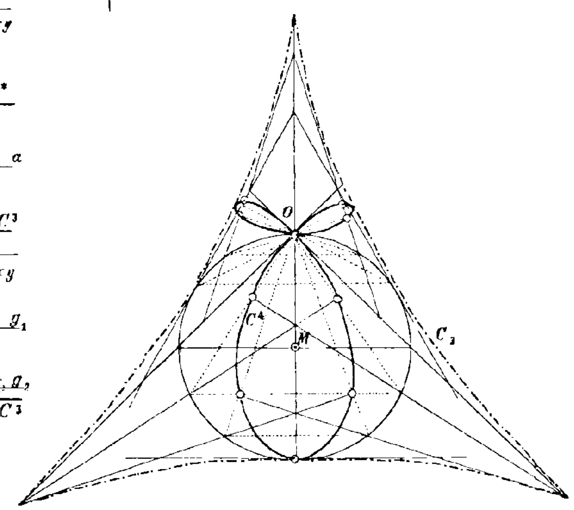


Fig. 13.

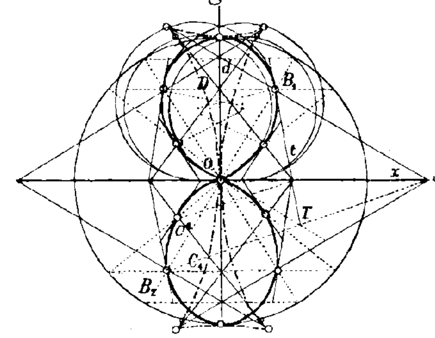


Fig. 14.

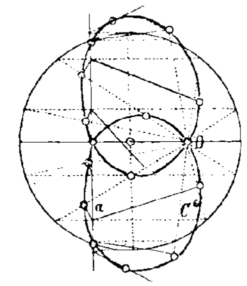


Fig. 15.

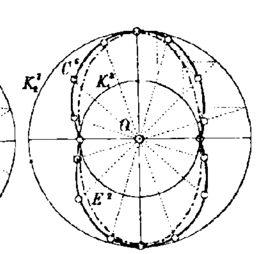
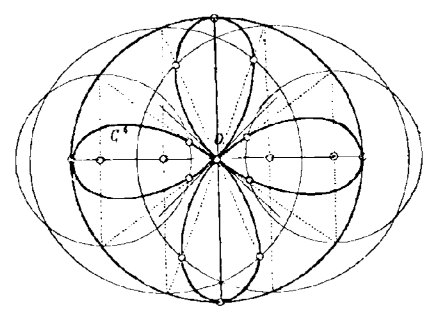


Fig. 16.



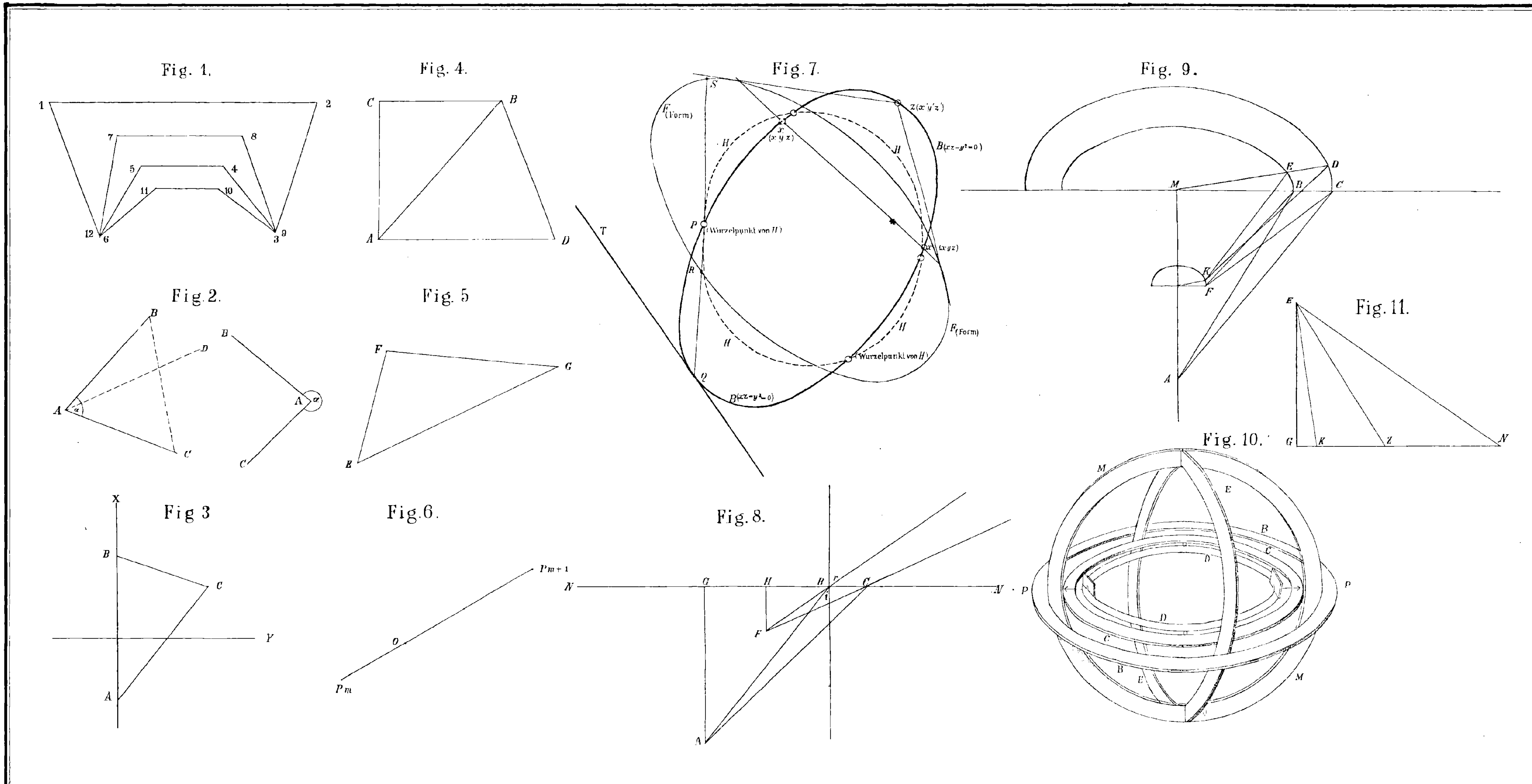


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig 3
Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 7.
F (Form)
(Wurzelpunkt von H)
B (xz−y²=0)
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.