ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Guido Fubini in Torino | **Salvatore Pincherle** in Bologna
Tullio Levi-Civita in Roma | **Francesco Severi** in Roma

SERIE QUARTA - TOMO X
(LXVII DELLA RACCOLTA)

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
MCMXXXII

Bologna, Cooperativa Tipografica Azzoguidi, 1932

Sul problema preliminare di una classica questione di calcolo delle variazioni.

Memoria di GABRIELE MAMMANA (a Cagliari).

Sunto. - *L'Autore fa la trattazione rigorosa del problema preliminare relativo alla classica questione di minimizzare l'integrale* $\mathfrak{J}=\int_{x_1}^{x_2} y^{\frac{1}{n}}\sqrt{1+y'^2}\,dx$, $(n>0)$. *Fissato un punto* P_0 *del piano, determina l'insieme* E *nel quale bisognerà assegnare un secondo punto* P, *che possa essere congiunto a* P_0 *mediante un estremale* Γ *relativa a* $\mathfrak{J}$. *Dà l'equazione della frontiera* Γ^* *di* E *e ne studia l'andamento e le relazioni con le estremali uscenti da* P_0. *Dimostra che per* P_0 *e per un punto* P *di* E *passa una sola estremale (non estremante) se* P *è in* Γ^*, *ne passano due se* P *è interno a* E, *e assegna il criterio per decidere quale delle due può realizzare il minimo per* $\mathfrak{J}$.

INTRODUZIONE

La questione di calcolo delle variazioni, cui si riferisce il problema oggetto del presente lavoro, è quella, classica, di minimizzare l'integrale: $\mathfrak{J}=\int_{x_1}^{x_2} y^{\frac{1}{n}}\sqrt{1+y'^2}\,dx$ $(n>0)$, nella quale si presenta, come equazione di EULERO relativa, l'equazione:

(1) $$1+y'^2=nyy'' \qquad (n>0$$

delle curve di RIBAUCOUR.

Il menzionato problema consiste nel fissare un criterio che permetta, assegnati due punti del piano: 1°, di stabilire la esistenza o meno di estremali passanti per gli assegnati punti; 2°, nella ipotesi che per questi punti abbiano a passare più curve estremali, di determinare quella o quelle, fra queste, che potranno realizzare un estremo per l'integrale $\mathfrak{J}$.

E poichè per un qualunque punto del piano, che non appartenga all'asse delle x, passano infinite estremali, (costituenti un fascio di curve estremali) contenute tutte nel semipiano delle $y>0$, o in quello delle $y<0$, secondo che l'ordinata del punto è positiva o negativa, il suddetto problema può ricondursi a questo altro:

Fissato comunque un punto P_0 (del semipiano delle y positive ad esempio) determinare l'insieme E di punti di questo semipiano, nel quale dovrà assegnarsi un secondo punto P, che possa essere congiunto a P_0 mediante un arco di estremale della famiglia (1). E nella ipotesi, poi, che per P_0 e P avessero a passare più estremali, determinare quella e quelle che soddisfino alle condizioni necessarie per essere estremanti.

Le conclusioni cui si perviene sono le seguenti:

L'insieme E è un dominio regolare, contenuto nel semipiano delle $y \geq 0$, limitato da una curva regolare Γ^* (di cui si assegna l'equazione in termini finiti) simmetrica rispetto alla retta r normale all'asse delle x per P_0. Questa curva volge costantemente la sua concavità verso le y positive, e i suoi rami, a sinistra e a destra di r, si estendono a distanza infinita. Essa poi passa pel punto P_0', piede della perpendicolare r sull'asse delle x.

Questo punto P_0' (vertice della curva Γ^*), se $n < 1$, è singolare (angoloso) per la curva medesima; ogni altro di essa punto è invece regolare; essa, poi, ammette, in questa ipotesi, due asintoti al finito normali all'asse delle x e naturalmente simmetrici rispetto a r.

Per $n \geq 1$ la curva Γ^* è regolare in ogni suo punto, e però tocca in P_0' l'asse delle x ed è sfornita di asintoti al finito.

I risultati ottenuti relativi allo studio della curva Γ^* generalizzano quelli di MAC NESCH (« Annals of Mathematics », 1905) relativi alle catenarie, e cioè al caso particolarissimo in cui, nell'equazione (1), sia $n = 1$.

In ogni caso ($n \geq 1$ oppure $n < 1$) Γ^* rappresenta l'inviluppo del fascio di estremali uscenti da P_0.

Ogni curva del detto fascio $\mathfrak{F}$ è completamente contenuta in E.

Per un qualsivoglia punto P interno a E passano sempre due e due sole curve (distinte) di $\mathfrak{F}$, per un punto P^* della frontiera Γ^* ne passa una sola, la quale ivi (in P^*) tocca Γ^* stessa; per un punto esterno a E non passa alcuna curva di $\mathfrak{F}$ [1].

Una curva Γ di $\mathfrak{F}$ tocca o no la frontiera Γ^*, in un unico punto P^*, si-

---

[1] Nel *Cours d'Analyse* del GOURSAT, T. III, n. 622, trovasi esposta una dimostrazione, basata su considerazioni di carattere intuitivo, la quale dovrebbe valere ad assicurare la proprietà sopra enunciata, ma questa dimostrazione non può dirsi dal punto di vista dello stretto rigore analitico soddisfacente. (Cfr. pure HADAMARD, *Calcul des variations*, livre III, Cap. III, Paris, Hermann, 1910). Alla stessa conclusione si può pervenire con metodo indiretto, ma ciò richiede la conoscenza di elevata teoria. (Cfr. TONELLI, *Fondamenti del calcolo di variazioni*. Vol. II. *Alcuni problemi classici*. Bologna, Zanichelli, 1923). Per una dimostrazione diretta rigorosa cfr. G. MAMMANA, Circolo Matematico di Palermo, T. XLIX.

tuato sul ramo Γ_1^* a destra di r, (situato sul ramo Γ_2^* a sinistra di r) secondo che l'inclinazione di Γ stessa in P_0 è minore (è maggiore) di un determinato numero $\lambda \equiv \operatorname{tg} c \leq 0$ $(-\lambda \equiv \operatorname{tg}(-c) \geq 0)$ *indipendente dal centro* P_0 *del fascio.* L'estremale Γ_c, (Γ_{-c}) avente in P_0 inclinazione uguale a λ, (a $-\lambda$) tocca Γ_1^* (Γ_2^*) nel relativo punto all'infinito.

Le tangenti a una qualsivoglia curva Γ (avente in P_0 inclinazione non superiore (non inferiore) a λ (a $-\lambda$)) nel centro P_0 e nel relativo punto di contatto si segano in un medesimo punto dell'asse delle x (II). Ne segue, tenuto conto anche dell'indipendenza di λ dal centro P_0, che: se $n \geq 1$, da un punto qualunque dell'asse delle x si possono sempre condurre due e due sole tangenti a una qualsivoglia estremale γ della famiglia definita dalla (1); se invece $n < 1$, da un punto dell'asse delle x si potran condurre due tangenti a una estremale γ (di (1)) o una sola, secondo che detto punto è contenuto nell'intervallo limitato dagli asintoti di γ, o ne è esterno (III). Il ramo, a destra di r, dell'estremale Γ_c, e quello, a sinistra di r, di Γ_{-c} (IV), decompongono E in due domini: l'uno E'', avente per frontiera questi due rami, l'altro E', limitato da essi da Γ^*.

Un punto P, interno a E'', a destra di r, (a sinistra di r) può essere sempre congiunto a P_0 mediante due archi di estremali di $\mathfrak{F}$, dei quali: l'uno ha in P_0 inclinazione maggiore di λ (minore di $-\lambda$) ed è completamente interno — P_0 escluso — a E'' e quindi a E, l'altro ha in P_0 inclinazione inferiore a λ (superiore a $-\lambda$). Il primo pertanto non tocca Γ_1^* (non tocca Γ_2^*) il secondo tocca sempre Γ_1^* (Γ_2^*) in un punto ad esso arco interno (V).

Un punto P, interno a E', a destra di r o sul ramo Γ_c a destra di r (a sinistra di r o sul ramo Γ_{-c} a sinistra di r) si può congiungere a P_0 mediante due archi di estremali distinte di $\mathfrak{F}$ aventi in P_0 inclinazioni minori o uguali a λ (maggiori o uguali a $-\lambda$); ciascuna di queste estremali tocca, quindi, Γ_1^* (Γ_2^*); però: mentre il punto di contatto di quella delle due estremali che in P_0 ha inclinazione minore, (maggiore) è interno al corrispondente arco $\widehat{P_0P}$, il punto di contatto dell'altra ne è esterno (V).

(II) Cfr. Teorema di Bolza citato nella nota 12, II, n. 1 della presente Memoria,

(III) Circa l'esistenza di tangenti per un punto dell'asse delle x ecc. cfr. nota 21, II, n. 3 di questa Memoria e Picone, *Corso di Analisi superiore* (litografato), fasc. II, pag. 207, Circolo Matematico di Catania, 1922, ove alle pagg. 210 e 211, è in proposito rettificata un'erronea affermazione generalmente ripetuta.

(IV) Nell'ipotesi $n \geq 1$ questi due rami costituiscono una unica curva di $\mathfrak{F}$, quella che in P_0 ha inclinazione nulla.

(V) Cfr. le considerazioni di carattere intuitivo del Goursat, loc. cit., n. 634, con le quali la proprietà relativa alla posizione del punto di contatto sull'estremale, verrebbe dedotta.

E poichè l'eventuale punto di contatto di una estremale di $\mathfrak{J}$ riesce coniugato (secondo JACOBI) di P_0 sull'estremale medesima, segue:

1.° Il ben determinato arco di estremale, congiungente un punto P_0 con un qualsivoglia punto P^* dell'inviluppo del fascio di estremali uscenti da P_0, ha i punti estremi P_0 e P^* coniugati, e soddisfa, quindi, alla condizione necessaria di JACOBI (in senso largo) per essere estremante. Ma l'arco stesso $\widehat{P_0 P^*}$ non realizza un estremo per $\mathfrak{J}$, non essendo per esso soddisfatta l'ulteriore condizione necessaria relativa alla variazione terza.

2.° Dei due archi di estremali congiungenti un punto P_0 con un punto P (interno al dominio E relativo al fascio per P_0) quello che in P_0 ha inclinazione minore, se P è a destra di P_0 (inclinazione maggiore se P è a sinistra di P_0) ammette il coniugato di P_0 nell'interno dell'arco medesimo; esso non realizza, pertanto, la condizione di JACOBI e non può perciò essere estremante. L'altro arco, invece, realizza le condizioni di JACOBI in senso stretto oltre a quella di LEGENDRE, e poichè per esso è anche soddisfatta, come si verifica subito, l'ulteriore condizione necessaria di WEIERSTRASS, si potrà concludere che soltanto quest'arco può realizzare un estremo per l'integrale $\mathfrak{J}$.

§ 1.

1. Fascio di estremali per un punto. — L'integrale generale della equazione di EULERO (1), sotto forma parametrica, (parametro ω) è rappresentato dalle equazioni:

$$x = \beta + n\alpha \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\tau}{\cos^n \tau}, \quad y = \frac{\alpha}{\cos^n \omega}; \quad -\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

dove β è costante — arbitraria —, ed α costante, pure arbitraria, ma positiva.

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un qualsivoglia punto del semipiano delle $y > 0$. Possiamo supporre, senza ledere la generalità: $x_0 = 0$. L'insieme delle curve integrali della totalità (2) che passano per P_0 costituiscono una famiglia semplicemente infinita — un fascio — ogni componente della quale è determinata dalla relativa inclinazione in P_0, o, ciò che fa lo stesso, dalla anomalia θ che compete, in P_0, alla medesima componente.

Una curva della famiglia (2), in ogni suo punto P — corrispondente al valore ω del parametro — ha inclinazione data da $\operatorname{tg}\omega$.

Se θ è l'anomalia in P_0 di una curva $\Gamma(\theta)$ del menzionato fascio, dovrà aversi:

$$(3)\qquad 0 = \beta + n\alpha\int_{\omega_0}^{\theta}\frac{d\tau}{\cos^n\tau}, \quad y_0 = \frac{\alpha}{\cos^n\theta}.$$

Dalle (2) e (3), eliminando α e β, ricaviamo, per $\Gamma(\theta)$, le equazioni:

$$(4)\qquad x = ny_0\int_{\theta}^{\omega}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau, \quad y = y_0\left(\frac{\cos\theta}{\cos\omega}\right)^n; \quad -\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}.$$

Le (4), al variare di θ nell'intervallo, aperto agli estremi, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ci danno tutte le curve del fascio P_0; fascio che designeremo col simbolo $\mathfrak{F}$.

Osserviamo: due curve di $\mathfrak{F}$ aventi in P_0 anomalie contrarie, sono simmetriche rispetto all'asse delle y; dall'insieme, quindi, di tutte le curve di $\mathfrak{F}$, corrispondenti ai valori di θ contenute nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2} + 0,\ 0\right)$, si otterranno le rimanenti, mediante ribaltamento delle prime attorno all'asse delle y. Potremo, pertanto, nel nostro studio, limitarci a considerare di ogni curva $\Gamma(\theta)$ di $\mathfrak{F}$ la porzione che giace a destra dell'asse delle y, e cioè, considerare il parametro ω variabili nell'intervallo $\left(\theta, \frac{\pi}{2} - 0\right)$. Col simbolo $\Gamma(\theta)$ intenderemo designare da ora in poi la menzionata porzione di curva.

2. **Sugli asintoti delle curve $\Gamma(\theta)$ del fascio $\mathfrak{F}$, nell'ipotesi $n < 1$.** — Se $n < 1$, ogni estremale $\Gamma(\theta)$ di $\mathfrak{F}$ è fornita di asintoto — al finito — normale all'asse delle x. Esiste, invero, in questa ipotesi, per $\omega \to \frac{\pi}{2}$, determinato e finito, il limite dell'integrale: $I \equiv \int_{\theta}^{\omega}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau$. Si ha, per $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$:

$$\int_{0}^{\omega}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau = \int_{\theta}^{0}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau + \int_{0}^{\omega}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau \leq |\theta| +$$

$$+ \cos^n\theta\int_{\frac{\pi}{2}-\omega}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\tau}{\operatorname{sen}\tau}\right)^n\frac{d\tau}{\tau^n} < |\theta| + \frac{\pi}{2}\cos^n\theta\int_{\frac{\pi}{2}-\omega}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tau}{\tau^n},$$

da cui:

$$I < |\theta| + \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2-n}\cdot\frac{\cos^n\theta}{1-n}.$$

L' integrale: $\int\limits_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^{n} d\tau \equiv J(\theta)$ è funzione di θ limitata nell'intervallo, aperto agli estremi, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ivi essa è continua, a derivate prima e seconda continue ([1]), ed esistono, inoltre, per essa, determinati e finiti, i limiti per $\theta \to -\frac{\pi}{2}$, e per $\theta \to \frac{\pi}{2}$, e propriamente:

$$\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} J(\theta) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \cos^n\theta \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} = 0; \quad \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} J(\theta) = 0.$$

Abbiamo poi, per le derivate prima e seconda di $J(\theta)$:

$$\frac{d}{d\theta} J(\theta) = -1 - n \operatorname{tg}\theta \int\limits_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau = -1 - nJ(\theta)\operatorname{tg}\theta;$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} J(\theta) = n \operatorname{tg}\theta + n^2 \operatorname{tg}^2\theta J(\theta) - \frac{n}{\cos^2\theta} J(\theta) = n \operatorname{tg}\theta + \frac{n}{\cos^2\theta} J(\theta) \{ n \operatorname{sen}^2\theta - 1 \}.$$

La prima derivata di J è positiva in un intorno a destra di $-\frac{\pi}{2}$, negativa per ogni valore di $\theta \geq 0$; la derivata seconda è, invece, sempre negativa

---

([1]) La funzione: $I(\theta, \omega) \equiv \int\limits_{\theta}^{\omega} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau$, per ogni fissato valore di ω, $\left(0 < \omega < \frac{\pi}{2}\right)$ è funzione continua rispetto a θ in $\left(-\frac{\pi}{2}+0, \frac{\pi}{2}-0\right)$, essa inoltre, per $\omega \to \frac{\pi}{2}$, converge uniformemente al suo limite $J(\theta)$. Anche le derivate prima e seconda di $I(\theta, \omega)$ rapporto a θ, cioè: $-1 - n \operatorname{tg}\theta \int\limits_{\theta}^{\omega} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau$, e $-\frac{n}{\cos^2\theta} \int\limits_{\theta}^{\omega} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau + n \operatorname{tg}\theta + n^2 \operatorname{tg}^2\theta \int\limits_{\theta}^{\omega} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau$, per $\omega \to \frac{\pi}{2}$ hanno limiti determinati e finiti, ai quali tendono in modo uniforme relativamente a θ, in ogni intervallo interno a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Si ha invero:

$$\int\limits_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau - \int\limits_{\theta}^{\omega} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau = \int\limits_{\omega}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau = \left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}-\omega} \left(\frac{\tau}{\operatorname{sen}\tau}\right)^n \frac{d\tau}{\tau^n} \right) \cos^n\theta < \left(\frac{\frac{\pi}{2}-\omega}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)} \right)^n \frac{\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)^{1-n}}{1-n} \text{ etc.}$$

in $\left(-\frac{\pi}{2}+0,\ 0\right)$ ([2]). Ne segue: la $\frac{dJ}{d\theta}$ in tutto l'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}+0,\ \frac{\pi}{2}-0\right)$ si annulla una e una sola volta; il suo zero, inoltre, cade nell'interno dell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$. Indichiamo con $\bar{\theta}$ questo zero, la radice, cioè, della equazione seguente:

$$1+n\operatorname{tg}\theta\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^{n}d\tau=0,\quad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Il valore $\theta=\bar{\theta}$ è il punto di massimo assoluto proprio di $J(\theta)$; esso valore è anche l'unico valore di estremo relativo interno di $J(\theta)$ stessa.

La tangente t a $\Gamma(\theta)$, in un suo punto P_ω, ha per equazione:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\left\{y-y_0\left(\frac{\cos\theta}{\cos\omega}\right)^{n}\right\}=\frac{1}{\cos\omega}\left\{x-ny_0\int_{\theta}^{\omega}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^{n}d\tau\right\}.$$

La t è una retta sempre al finito, comunque vari P_ω in $\Gamma(\theta)$, e ha una posizione limite determinata e al finito (asintoto di $\Gamma(\theta)$) per $\omega\to\frac{\pi}{2}$. Questo asintoto ha per equazione:

$$x=ny_0J(\theta).$$

L'ascissa x di questo asintoto è funzione continua di θ, definita in $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, essa, nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2},\ \bar{\theta}\right)$, cresce sempre, con θ, da zero fino al suo massimo valore

$$\bar{x}=ny_0J(\bar{\theta}); \tag{5'}$$

nell'intervallo $\left(\bar{\theta},\ \frac{\pi}{2}\right)$, invece, è sempre decrescente (al crescere di θ) variando da $\bar{x}$ a zero.

Consideriamo insieme all'asintoto di $\Gamma(\bar{\theta})$ la tangente t_0 a questa curva in P_0. Quest'ultima sega l'asse delle x in un punto Q di ascissa: $\underline{x}=-y_0\cot\bar{\theta}$. Ma per essere $\bar{\theta}$ soluzione della (5), si ha: $-y_0\cot\bar{\theta}=ny_0J(\bar{\theta})$, cioè: $\underline{x}=\bar{x}$. Si può pertanto asserire che:

L'asintoto della curva $\Gamma(\bar{\theta})$ e la tangente a questa curva nel punto P_0 si segano in uno stesso punto dell'asse delle x.

Nota. Nell'ipotesi $n\geq 1$, ogni curva $\Gamma(\theta)$ di $\mathfrak{F}$ è sfornita di asintoto.

([2]) Si tenga presente che $n<1$.

3. Sulle intersezioni delle curve $\Gamma(\theta)$ e dei raggi per P_0, nella ipotesi di n qualsiasi. — Prendiamo a considerare un generico raggio r per P_0 di anomalia α, $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ determinato, quindi, dall'equazione:

$$(6_1) \qquad y - y_0 = x \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{con la limitazione} \quad x \geq 0.$$

Questo raggio sèga ogni curva $\Gamma(\theta)$, che in P_0 abbia anomalia θ minore o eguale ad α, in P_0 stesso, e ulteriormente in uno e in un solo punto P: distinto da P_0 se $\theta < \alpha$, coincidente con P_0 se $\theta = \alpha$. E invero: In un eventuale punto P, comune a r e a $\Gamma(\theta)$, dovrà aversi, pel valore di ω, $\left(\theta \leq \omega < \frac{\pi}{2}\right)$ che compete a P (cfr. le (4)):

$$(6) \qquad F(\omega) \equiv \left(\frac{\cos\theta}{\cos\omega}\right)^n - 1 - n \operatorname{tg}\alpha \int_\theta^\omega \left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau = 0.$$

Inversamente, a ogni radice ω della (6) contenuta nell'intervallo $\left(\theta, \frac{\pi}{2} - 0\right)$ è associato un determinato punto P di $\Gamma(\theta)$, che giace su r.

La (6), intanto, è verificata dal valore $\omega = \theta$; si ha poi, pel primo membro $F(\omega)$:

$$(7) \qquad F'(\omega) = n\left(\frac{\cos\theta}{\cos\omega}\right)^n \{\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\alpha\},$$

da cui deduciamo:

$$F'(\omega) < 0 \ (\text{per } \omega < \alpha), \quad F'(\alpha) = 0; \quad F'(\omega) > 0 \ (\text{per } \omega > \alpha),$$

e inoltre

$$\lim_{\omega \to \frac{\pi}{2}} F(\omega) = \lim \frac{1}{\cos^n \omega} \cdot \lim \left\{ \cos^n\theta - \cos^n\omega - n \operatorname{tg}\alpha \cos^n\theta \, \frac{\int_\theta^\omega \cos^{-n}\tau \, d\tau}{\cos^{-n}\omega} \right\} =$$

$$= \cos^n\theta \lim \frac{1}{\cos^n\omega} = +\infty \ \text{[3]}.$$

La funzione $F(\omega)$, nulla per $\omega = \theta$, decrescente a destra di θ in tutto l'intervallo (θ, α), raggiunge in α il suo minimo valore (negativo); poi, per $\omega > \alpha$,

---

[3] Il rapporto che figura dentro le parentesi graffe, per $\omega \to \frac{\pi}{2}$, tende ovviamente a zero nell'ipotesi $n < 1$; ma esso tende pure a zero nell'ipotesi $n \geq 1$, come si può immediatamente constatare mediante l'applicazione della regola di DE L'HOSPITAL.

cresce sempre con ω fino ad acquistare, nelle vicinanze di $\frac{\pi}{2}$, valori positivi comunque grandi. Essa ammette, per conseguenza, oltre allo zero $\omega=\theta$, uno e un solo altro punto di zero interno all'intervallo $\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$, zero, quest'ultimo, che coincide ovviamente con α se $\theta=\alpha$.

Indichiamo con $\omega(\theta)$ $(\theta<\alpha)$ la ben determinata radice della equazione (6) interna ad $\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$, e che corrisponde al punto P ulteriore intersezione, oltre P_0, di $\Gamma(\theta)$ e di r.

La $\omega(\theta)$ è funzione di θ definita, in $\left(-\frac{\pi}{2}+0,\ \alpha-\theta\right)$, implicitamente dalla (6) e dalla limitazione $\frac{\pi}{2}>\omega>\alpha$, continua con la sua prima derivata, *e dotata di limiti determinati e finiti: per* $\theta\to-\frac{\pi}{2}+0$ *e per* $\theta\to\alpha-0$.

Dobbiamo verificare soltanto quest'ultima asserzione.

Si ricava dalla (6), derivando rapporto a θ:

$$\left(\frac{\cos\theta}{\cos\omega}\right)^n\{\operatorname{tg}\omega-\operatorname{tg}\alpha\}\,\omega'=\operatorname{tg}\theta\left\{\left(\frac{\cos\theta}{\cos\omega}\right)^n-n\operatorname{tg}\alpha\int_\theta^\omega\left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau\right\}-\operatorname{tg}\alpha,$$

da cui, tenuto conto della (6) stessa:

$$\omega'=\left(\frac{\cos\omega}{\cos\theta}\right)^n\frac{\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\omega-\operatorname{tg}\alpha}. \tag{8}$$

Questa derivata, dato che, per $-\frac{\pi}{2}<\theta<\alpha$, si ha: $\frac{\pi}{2}>\omega>\alpha$, è sempre diversa da zero e *negativa*. La $\omega(\theta)$, dunque, si presenta come funzione monotona decrescente di θ, e pertanto riescono determinati i limiti di ω, quando θ tenda verso i suoi valori estremi. Si ha propriamente:

$$\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{2}+0}\omega=\frac{\pi}{2},\qquad \lim_{\theta\to\alpha-0}\omega=\alpha.$$

Non può, invero, il limite di ω, per $\theta\to-\frac{\pi}{2}+0$ (limite certamente maggiore di α) essere uguale a un numero $\omega<\frac{\pi}{2}$, chè in tal supposto, dalla (6) — passando al limite — dovrebbe seguire:

$$0 = -1 - n \operatorname{tg} \alpha \lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} \cos^n \theta \int_\theta^0 \frac{d\tau}{\cos^n \tau} - \tag{6'}$$

$$- n \operatorname{tg} \alpha \lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} \cos^n \theta \int_0^{\bar{\omega}} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} = -1 - n \operatorname{tg} \alpha \lim \frac{\int_\theta^0 \cos^{-n} \tau \, d\tau}{\cos^{-n} \theta} = -1, \ (^4)$$

ciò che è assurdo.

Che poi per $\theta \to \alpha - 0$, ω tenda ad α, segue dal fatto che questo limite di ω, certamente minore di $\frac{\pi}{2}$ e maggiore o eguale ad α, non può riuscire maggiore di α, poichè per valori di $\omega \gneq \alpha$ il primo membro della (6) (ove si sia posto $\theta = \alpha$) è maggiore di zero.

Le coordinate di questo punto P comune a r e a $\Gamma(\theta)$, sono rappresentate dalle formule:

$$x = n y_0 \int_\theta^{\omega(\theta)} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \tau}\right)^n d\tau, \quad y = y_0 \left(\frac{\cos \theta}{\cos \omega(\theta)}\right)^n. \tag{9}$$

Questo punto P varia in modo continuo su r al variare continuo di θ fra $-\frac{\pi}{2}$ ed α, e per la sua ascissa x si ha inoltre:

$$\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} x = 0; \qquad \lim_{\theta \to \alpha - 0} x = 0. \tag{9'}$$

La seconda delle (9′) è evidente; quanto alla prima, è immediata nell'ipotesi $n < 1$, e pel caso di $n \geq 1$ si deduce da quanto segue:

$$\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} x = n y_0 \lim \frac{\int_\theta^0 \cos^{-n} \tau \, d\tau}{\cos^{-n} \theta} + n y_0 \lim \frac{\int_0^{\omega(\theta)} \cos^{-n} \tau \, d\tau}{\cos^{-n} \theta} = - y_0 \lim \cot \theta +$$

$$+ n y_0 \lim \frac{\cos^{-n} \omega}{n \cos^{-n-1} \theta \operatorname{sen} \theta} \omega'$$

---

(4) Il rapporto che figura nel penultimo termine della (6′) tende ovviamente a zero se $n < 1$, ma si constata immediatamente, applicando la regola di DE L'HOSPITAL, che esso tende pure a zero se $n \geq 1$.

$$= y_0 \lim \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\cos^n\theta}{\cos^n\omega} \frac{\cos^n\omega}{\cos^n\theta} \frac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= - y_0 \lim \cos\theta \frac{\operatorname{sen}(\theta - \alpha)}{\operatorname{sen}(\omega - \alpha)} \frac{\cos\omega}{\cos\theta} = - y_0 \frac{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Per l'ordinata y di P, conseguentemente, avremo:

(9″) $$\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} y = y_0, \quad \lim_{\theta \to \alpha - 0} y = y_0.$$

Le due funzioni x ed y, simultaneamente definite dalle (9) nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \alpha\right)$ [5], sono ivi, con le loro derivate, continue, e agli estremi: $-\frac{\pi}{2}$ ed α, ciascuna di esse assume valori eguali. Entrambe queste due funzioni raggiungeranno, quindi, uno dei loro estremi assoluti, nell'interno di $\left(-\frac{\pi}{2}, \alpha\right)$; e precisamente: x, nell'interno di $\left(-\frac{\pi}{2}, \alpha\right)$, acquisterà il suo massimo assoluto, y il suo minimo assoluto o il suo massimo, secondo che $\alpha < 0$ oppure $\alpha > 0$.

Ma importa notare che, a causa della relazione (6_1), *le due menzionate funzioni x e y raggiungono il loro estremo assoluto interno nel medesimo punto, nel quale, poi, acquista il suo massimo valore la distanza*:

(10′) $$\delta(\theta) \equiv \overline{P_0 P} = x\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Questa distanza $\delta(\theta)$, che potremo assumere come ascissa su r (origine P_0) di P, è funzione positiva di θ, definita in $\left(-\frac{\pi}{2}, \alpha\right)$ ivi continua e a derivata continua e soddisfacente, inoltre, alle condizioni: $\delta\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\delta(\alpha) = 0$. Si può poi affermare ancora:

Il massimo assoluto di $\delta(\theta)$ è proprio, e non esistono nell'interno di $\left(-\frac{\pi}{2}, \alpha\right)$, all'infuori del punto θ^* di massimo assoluto, altri punti di massimo o minimo relativi.

Proveremo la cosa nel seguente numero.

---

(5) Come valori di queste funzioni agli estremi $-\frac{\pi}{2}$ ed α assumeremo i relativi valori limiti.

4. **La frontiera dell'insieme *E*.** — Sia θ^* un punto, interno a $\left(-\frac{\pi}{2}, \alpha\right)$, nel quale per $\delta(\theta)$, e però anche per x e y, si ha un estremo relativo. Dovremo avere in θ^* simultaneamente:

$$dx = dy = d\delta = 0,$$

e cioè:

$$(10) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\cos\theta}{\cos\omega}\right)^n d\omega - \left(1 + n \operatorname{tg}\theta \displaystyle\int_\theta^\omega \left(\dfrac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau\right) d\theta = 0 \\ \operatorname{tg}\omega\, d\omega - \operatorname{tg}\theta\, d\theta \qquad\qquad\qquad = 0 \end{cases}$$

dove θ e ω si intendono legate dalla (6) con la limitazione: $\frac{\pi}{2} > \omega > \alpha$, quando si supponga θ variabile in $\left(-\frac{\pi}{2} + 0,\ \alpha - 0\right)$.

Consegue, che: θ^* e il valore ω^* di ω che, per la (6), corrisponde a θ^* stesso devono costituire soluzione per la equazione seguente:

$$(11_1) \qquad \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\cos\theta}{\cos\omega}\right)^n & 1 + n \operatorname{tg}\theta \displaystyle\int_\theta^\omega \left(\dfrac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau \\ \operatorname{tg}\omega & \operatorname{tg}\theta \end{vmatrix} = 0.$$

E cioè: Le coordinate curvilinee θ e ω di ogni punto P di massimo o minimo interni per la funzione $\delta(\theta)$, (o per x, o per y), devono costituire soluzione pel sistema simultaneo, in θ e ω, seguente:

$$(11) \qquad \Phi(\theta, \omega) \equiv n \int_\theta^\omega \frac{d\tau}{\cos^n \tau} - \frac{\cot\omega}{\cos^n \omega} + \frac{\cot\theta}{\cos^n \theta} = 0$$

$$(6) \qquad n \int_\theta^\omega \frac{d\tau}{\cos^n \tau} - \frac{\cot\alpha}{\cos^n \omega} + \frac{\cot\alpha}{\cos^n \theta} = 0.$$

Inversamente, proveremo che, fatta eccezione della soluzione banale del sistema in parola: $\omega = \theta$, ad ogni altra sua soluzione è associato un punto P corrispondente a un estremo interno per $\delta(\theta)$. Ma si ha di più:

Il sistema formato dalle (11) *e* (6), *per ogni fissato valore di* α, *ammette* — a parte la menzionata soluzione $\omega = \theta$ — *una e una sola soluzione*, quindi si potrà concludere che *per la funzione* $\delta(\theta)$ *esiste un unico punto di estremo relativo, interno a* $\left(-\frac{\pi}{2}, \alpha\right)$, *il quale punto perciò è quello di massimo assoluto.*

Per la dimostrazione conviene scindere il caso $n < 1$ da quello $n \geq 1$. Ma premettiamo prima la

OSSERVAZIONE. Affinchè la prima delle (10) possa essere soddisfatta occorre, dato che per la (8) $d\omega$ e $d\theta$ han segno contrario e $\omega > \theta$, che sia $\theta < 0$; e perché con $\theta < 0$ si possa soddisfare anche alla seconda delle (10) è necessario che sia $\omega > 0$.

1° CASO $n < 1$. ***Studio della funzione definita dalla*** (11). — Supponiamo dapprima θ variabile nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}+0, \bar{\theta}\right)$. La (11) è simmetrica relativamente alle due variabili θ e ω; consideriamone il primo membro, per un fissato valore di θ, come funzione di ω, e designiamolo con $\psi(\omega)$.

Abbiamo:

$$\psi'(\omega) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \omega \cos^n \omega} > 0 \quad \text{in} \quad \left(-\frac{\pi}{2}+0, \, -0\right), \quad \text{e in} \quad \left(+0, \frac{\pi}{2}-0\right)$$

$$\lim_{\omega \to -\frac{\pi}{2}+0} \psi(\omega) = n\int_{\theta}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} + \frac{\cot\theta}{\cos^n \theta} = -\left[n\int_{-\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} + \frac{\cot(-\theta)}{\cos^n(-\theta)}\right] < 0$$

$$\lim_{\omega \to -0} \psi(\omega) = +\infty.$$

Nel tratto $\left(-\frac{\pi}{2}+0, \, -0\right)$ la $\psi(\omega)$ si annulla pertanto una e una sola volta, e il suo zero cade nel punto $\omega = \theta$.

Consideriamo ora, per la $\psi(\omega)$, il tratto $\left(+0, \frac{\pi}{2}-0\right)$:

$$\lim_{\omega \to +0} \psi(\omega) = -\infty;$$

$$\lim_{\omega \to \frac{\pi}{2}-0} \psi(\omega) = n\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} + \frac{\cot\theta}{\cos^n\theta} = -\frac{\cot\theta}{\cos^n\theta}\left\{-1 - n \operatorname{tg}\theta \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau\right\} > 0 \text{ [6]}.$$

Ne segue, poichè ancora abbiamo $\psi'(\omega) > 0$, che anche nell'intervallo aperto $\left(+0, \frac{\pi}{2}-0\right)$, si ha uno e un solo zero per la $\psi(\omega)$.

---

[6] La funzione di θ: $-1 - n \operatorname{tg}\theta \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau$ (cfr. n. 2) nulla per $\theta = \bar{\theta}$, a sinistra di $\bar{\theta}$ è positiva, a destra invece è negativa.

La equazione (11), quindi, associata alla condizione $\omega > 0$, definisce, nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}+0,\ \bar{\theta}-0\right)$, ω come funzione continua e a derivata continua di θ, per tale derivata avendosi: (dalla (11))

$$\frac{n}{\cos^n \omega}\,\omega' - \frac{n}{\cos^n \theta} + \frac{\omega'}{\operatorname{sen}^2 \omega \cos^n \omega} - \frac{n}{\cos^n \omega}\,\omega' - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta \cos^n \theta} + \frac{n}{\cos^n \theta} = 0$$

e cioè:

$$\omega' = \frac{\operatorname{sen}^2 \omega \cos^n \omega}{\operatorname{sen}^2 \theta \cos^n \theta}. \tag{11'}$$

Da cui, risultando $\omega' > 0$, deduciamo inoltre che detta funzione ω è monotona crescente, e perciò dotata di limiti determinati: per $\theta \to -\frac{\pi}{2}+0$, e per $\theta \to \bar{\theta}-0$.

Poniamo:

$$\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} \omega = \omega_1; \quad \lim_{\theta \to \bar{\theta}-0} \omega = \omega_2. \quad 0 \leq \omega_1 < \frac{\pi}{2}; \quad 0 < \omega_2 \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dalla (11), passando al limite, ricaviamo:

$$\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} \Phi(\theta, \omega) = n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\omega_1} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} - \lim_{\omega \to \omega_1} \frac{\cot \omega}{\cos^n \omega} = 0.$$

Ma non può essere: $\lim\limits_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} \omega \equiv \omega_1 = 0$, chè, in tale ipotesi, il secondo termine del secondo membro riescirebbe infinito, mentre il primo è finito; si dovrà quindi avere: $0 < \omega_1 < \frac{\pi}{2}$; potremo scrivere allora:

$$0 = \lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} \Phi(\theta, \omega) = n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\omega_1} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} - \frac{\cot \omega_1}{\cos^n \omega_1} =$$

$$= n\int_{-\omega_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} + \frac{\cot(-\omega_1)}{\cos^n(-\omega_1)} = \frac{\cot(-\omega_1)}{\cos^n(-\omega_1)} \left\{ 1 + n \operatorname{tg}(-\omega_1) \int_{-\omega_1}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(-\omega_1)}{\cos \tau}\right)^n d\tau \right\} = 0.$$

Il numero $-\omega_1$ è, cioè, radice della equazione (5) (cfr. n. 2), ma questa ammette un' unica soluzione: $\bar{\theta}$; sarà dunque:

$$\omega_1 = \lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} \omega = -\bar{\theta}.$$

Dalla (11) deduciamo ancora:

$$\lim_{\theta \to \bar{\theta}-0} \Phi(\theta, \omega) = \left\{ n \int_{\bar{\theta}}^{\omega_2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} + \frac{\cot \bar{\theta}}{\cos^n \bar{\theta}} \right\} - \frac{\cos^{1-n} \omega_2}{\operatorname{sen} \omega_2} = 0.$$

Il termine racchiuso tra parentesi graffe, ove si supponesse $\omega_2 < \frac{\pi}{2}$, sarebbe negativo (cfr. con la (5) del n. 2) e tale sarebbe pure il termine che segue immediatamente; la superiore eguaglianza, quindi, non potrebbe aver luogo; dovrà essere dunque:

$$\omega_2 = \lim_{\theta \to \bar{\theta}-0} \omega = \frac{\pi}{2}.$$

A causa della simmetria di $\Phi(\theta, \omega)$ rispetto ai due argomenti θ e ω, segue, quando si faccia variare θ nell' intervallo $\left(-\bar{\theta}, \frac{\pi}{2} - 0\right)$: *Ad ogni valore di* θ, *contenuto in questo intervallo, corrispondono per la* (11) *due valori di* ω, *l' uno, positivo,* $\bar{\omega}_1 = \theta$, *l'altro, negativo,* $\bar{\omega}_2$ *compreso fra* $-\frac{\pi}{2}$ *e* $\bar{\theta}$, e si ha per quest' ultima determinazione di ω:

$$\lim_{\theta \to -\bar{\theta}+0} \bar{\omega}_2 = -\frac{\pi}{2}; \quad \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \bar{\omega}_2 = \bar{\theta}.$$

Per θ variabile infine nell' intervallo $(\bar{\theta}, -\bar{\theta})$, la (11) definisce la unica funzione $\omega = \theta$. Per un qualsivoglia valore θ interno a questo intervallo si ha, infatti, supposto, ad esempio, $\theta < 0$:

$$\lim_{\omega \to +0} \psi(\omega) = -\infty, \qquad \lim_{\omega \to \frac{\pi}{2}-0} \psi(\omega) = n \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} + \frac{\cot \theta}{\cos^n \theta} < 0 \text{ (}^7\text{)}.$$

Per ogni valore di θ maggiore di $\bar{\theta}$ e minore di zero, cioè, non esiste alcun

(7) (Cfr. la (5) del n. 2) $\bar{\theta} < \theta < 0$.

valore positivo di ω che insieme al valore θ fissato verifichi la (11), quest'ultima quindi è solo verificata dal valore $\omega = \theta$.

Analogamente, si verifica subito, (e del resto ciò è conseguenza della simmetria di Φ) che se: $0 < \theta < -\bar{\theta}$, oltre alla soluzione $\omega = \theta$ la $\psi(\omega)$ non ammette altre radici.

2° CASO $n \geq 1$. Basterà qui limitarci a considerare θ variabile nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}+0,\ 0\right)$. La funzione $\psi(\omega)$ nella presente ipotesi ($n \geq 1$) è continua e a derivata continua sempre positiva in $\left(-\frac{\pi}{2}+0,\ -0\right)$, essa, pertanto, in quest'ultimo intervallo, potrà diventare zero una sola volta, e una volta effettivamente si annulla pel valore $\omega = \theta$.

Consideriamo la medesima funzione $\psi(\omega)$ nel tratto $\left(+0,\ \frac{\pi}{2}-0\right)$; anche qui: $\psi'(\omega) > 0$, e si ha, se $n > 1$:

$$\lim_{\omega \to +0} \psi(\omega) = -\infty, \qquad \lim_{\omega \to \frac{\pi}{2}-0} \psi(\omega) = \lim \frac{1}{\cos^{n-1}\omega}\left[\lim \frac{n\int_\theta^\omega \cos^{-n}\tau\, d\tau}{\cos^{1-n}\omega} - 1\right] =$$

$$= \lim \frac{1}{\cos^{n-1}\omega}\left[\lim \frac{n\cos^{-n}\omega}{(n-1)\cos^{-n}\omega \operatorname{sen}\omega} - 1\right] = \frac{1}{n-1}\lim \frac{1}{\cos^{n-1}\omega} = +\infty.$$

E se $n = 1$ ovviamente:

$$\lim_{\omega \to +0} \psi(\omega) = -\infty, \qquad \lim_{\pi \to \frac{\omega}{2}-0} \psi(\omega) = +\infty.$$

La (11), con la limitazione $\frac{\pi}{2} > \omega > 0$, per conseguenza, nell'intervallo aperto $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$, definisce ω come funzione continua di θ e a derivata continua e sempre positiva, derivata la cui espressione è data dalla (11').

Esistono perciò i limiti di questa funzione $\omega(\theta)$ per $\theta \to -\frac{\pi}{2}+0$ e per $\theta \to -0$. Poniamo:

$$\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} \omega = \omega_1; \qquad \lim_{\theta \to -0} \omega = \omega_2; \text{ sarà: } 0 \leq \omega_1 < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \omega_2 \leq \frac{\pi}{2}.$$

Se fosse $\omega > 0$, dalla (11_1), passando al limite, si dovrebbe avere, nella ipotesi $n > 1$:

$$-\operatorname{tg}\omega_1 + n \operatorname{tg}\omega_1 \lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} \frac{\int_\theta^0 \cos^{-n}\tau\, d\tau}{\cos^{1-n}\theta} + n \operatorname{tg}\omega_1 \lim \cos^{n-1}\theta \int_0^{\omega_1} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} = 0$$

da cui:

$$-\operatorname{tg}\omega_1 + n \operatorname{tg}\omega_1 \lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} \frac{-\cos^{-n}\theta}{(n-1)\cos^{-n}\theta \operatorname{sen}\theta} =$$

$$= -\operatorname{tg}\omega_1 + \frac{n}{n-1}\operatorname{tg}\omega_1 = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}\omega_1 = 0$$

ciò che è assurdo; deve essere dunque: $\lim\limits_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} \omega = 0$.

Alla stessa conclusione si perviene nella ipotesi: $n = 1$.

Quanto al limite di ω per $\theta \to -0$, dovrà aversi: $\lim\limits_{\theta \to -0} \omega \equiv \omega_2 = \frac{\pi}{2}$, chè in caso contrario, nel caso cioè che fosse: $\omega_2 < \frac{\pi}{2}$, dalla (11) seguirebbe, passando al limite:

$$n\int_0^{\omega_2} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} - \frac{\cot \omega_2}{\cos^n \omega_2} + \lim_{\theta \to -0} \cot\theta = 0,$$

il che è assurdo.

Riepilogando. *La equazione* (11) (nell'ipotesi $n \geq 1$) *definisce, nell'intervallo* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, *oltre alla funzione (identità)* $\omega = \theta$, *una ben determinata funzione* $\omega(\theta)$ *continua dappertutto salvo che nel punto* $\theta = 0$, *nel qual punto si presenta una discontinuità di prima specie; essa funzione poi: si annulla per* $\theta = -\frac{\pi}{2} + 0$, *nel tratto* $\left(-\frac{\pi}{2} + 0, -0\right)$ *è crescente con* θ, *(ivi anzi ammette derivata continua e sempre positiva); nel punto zero ha come limite a sinistra il valore* $\frac{\pi}{2}$, *e come limite a destra il valore* $-\frac{\pi}{2}$, *infine, nell'intervallo* $\left(+0, \frac{\pi}{2} - 0\right)$ *essa è ancora crescente con* θ, *dotata di derivata continua sempre positiva e per* $\theta = \frac{\pi}{2} - 0$, *assume di nuovo il valore* $\omega = 0$.

Nell'ipotesi $n < 1$. *La equazione* (11) *stessa, nell'intervallo* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, *definisce ancora la funzione (identità)* $\omega = \theta$, *e poi, nell'insieme costituito* *dai due intervalli:* $\left(-\frac{\pi}{2}, \bar{\theta}\right)$, $\left(-\bar{\theta}, \frac{\pi}{2}\right)$, *è atta a definire una seconda funzione* $\omega(\theta)$, *continua in ciascuno dei menzionati tratti, e, nell' interno dei medesimi, a derivata continua e sempre positiva, per la quale funzione* ω *si ha, inoltre:*

$$\omega\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)=-\bar{\theta};\quad \omega(\bar{\theta}-0)=\frac{\pi}{2},\quad \omega(-\bar{\theta}+0)=-\frac{\pi}{2},\quad \omega\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\bar{\theta}.$$

Siamo ora in grado di dimostrare l'unicità della soluzione del sistema formato dalle (11) e (6), (s'intende oltre alla soluzione evidente $\omega=\theta$). Ricordiamo che, per l'osservazione fatta in principio del presente numero, in un punto $P\equiv(\theta, \omega)$, distinto da $P_0\equiv(\theta, \theta)$, in cui le (11) e (6) riescono soddisfatte, dovrà aversi: $\theta<0$, $\omega>0$; e però se $n<1$, dovrà anche essere: $\theta<\bar{\theta}$, $\omega>-\bar{\theta}$.

Indichiamo per brevità con c lo zero, se $n\geq 1$, la ben determinata radice $\bar{\theta}$ della (5), se $n<1$, e con J l'insieme comune ai due intervalli $\left(-\frac{\pi}{2}+0,\ \alpha-0\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{2}+0,\ c-0\right)$.

In J la (6), con la condizione $\frac{\pi}{2}>\omega>\alpha$, definisce implicitamente una funzione $\omega=\varphi(\theta)$ continua, a derivata continua e negativa, e diversa dalla funzione (identità): $\omega=\theta$ [8]; nello stesso insieme J la (11) definisce implicitamente un'altra funzione $\omega=f(\theta)$ continua e a derivata continua sempre positiva. Ora se per due valori diversi di J: θ' e θ'', si avesse: $\varphi(\theta')=f(\theta')$ e $\varphi(\theta'')=f(\theta'')$, se, cioè, pel sistema delle (11) e (6), si avessero due soluzioni distinte fra loro, e diverse dalla soluzione $\omega=\theta$, per la derivata della differenza:

$$f(\theta)-\varphi(\theta),$$

si dovrebbe avere uno zero interno a (θ', θ'') e quindi interno a J; ciò è assurdo, tale derivata essendo, nell'interno di J, sempre positiva e diversa da zero.

Possiamo concludere, per quanto precede: *La funzione* $\delta(\theta)$, *ascissa su* r *del punto* P, *nulla agli estremi* $-\frac{\pi}{2}$ *e* α, *ammette, nell' interno di* $\left(-\frac{\pi}{2}, \alpha\right)$, *uno e un solo punto di estremo relativo, il quale è punto di massimo as-*

---

[8] Cfr. n. 3 e la (8) del medesimo numero.

soluto proprio per $\delta(\theta)$ *stessa, anzi di più, la derivata* $\delta'(\theta)$, *nell'interno del menzionato intervallo, si annulla una e una sola volta.*

Sia P^* il punto di r di ascissa (su r) $\delta(\theta)$ massima, il punto cioè corrispondente alla radice θ^* della equazione:

$$\delta'(\theta) = 0.$$

Al variare di θ (sempre crescendo) il punto P corrispondente varia su r in modo continuo, partendo da P_0 e allontanandosene costantemente fino a raggiungere, per $\theta = \theta^*$, il punto P^*; continuando θ a variare sempre crescendo da θ^* fino ad α, P partendo da P^*, ripassa per le posizioni prima occupate una e una sola volta ancora, e ritorna ad assumere la posizione di partenza P_0.

Ne segue (ciò che conferma quanto già dimostrammo nella nota menzionata in principio) il seguente

TEOREMA I. *Su ogni raggio* r, *uscente da* P_0 *e contenuto nel semipiano delle* $x \geq 0$, *esiste, ben determinato, un punto* $\mathrm{P_r}^*$ *che separa i punti* P *di* r *pei quali passano due estremali distinte del fascio* $\mathfrak{F}$ *di estremali per* P_0, *da quelli pei quali non passa alcuna estremale di* $\mathfrak{F}$.

Propriamente, i punti P pei quali passano due estremali di $\mathfrak{F}$ sono tutti quelli interni al segmento $P_0P_r^*$, e i punti pei quali non passa alcuna estremale di $\mathfrak{F}$ sono tutti quelli a destra di P^*.

Pel punto P^* *passa una sola estremale del fascio* $\mathfrak{F}$.

OSSERVAZIONE. Notiamo che delle due estremali di $\mathfrak{F}$ passanti per un punto P, interno al segmento P_0P^*, l'una ha in P_0 anomalia $\theta' < \theta^*$, l'altra anomalia $\theta'' > \theta^*$.

Il luogo descritto dal punto $\mathrm{P_r}^*$ *al variare di* r *o meglio dell'anomalia* α *di* r *fra* $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, *rappresenta una porzione di curva regolare, che designeremo col simbolo* Γ_1^*, *la quale separa la regione dei punti del semipiano delle* $x \geq 0$, *pei quali passano due estremali del fascio* $\mathfrak{F}$, *dalla regione pei punti della quale non passano estremali di* $\mathfrak{F}$. *Per ogni punto di* Γ^* *passa una e una sola estremale di* $\mathfrak{F}$.

La porzione di curva Γ_1^* *e la sua simmetrica, rispetto all'asse delle* y, Γ^*_{-1} *costituiscono la frontiera* Γ^* *dello insieme* E *oggetto del nostro studio.* Lo studio di questa curva costituirà argomento del prossimo numero.

§ II.

1. **La frontiera dell'insieme *E* e l'inviluppo del fascio di estremali per il punto P_0.** — Tutte le curve $\Gamma(\theta)$ di $\mathfrak{F}$ sono contenute nell'insieme E_1

limitato dal semiasse positivo delle y e dalla curva Γ_1^* luogo del punto P^*. Determiniamo l'equazione di questa curva e precisiamone l'andamento.

Cominciamo, intanto, coll'osservare che a ogni valore di α, contenuto nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (9), è associato uno e un solo punto P_α^*, situato nel quadrante delle coordinate positive, *le cui coordinate curvilinee* θ *e* ω *verificano la* (11) *e le condizioni seguenti:*

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq c; \quad c \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}, \tag{12}$$

essendo: $c = \bar{\theta}$ oppure $c = 0$, secondo che: $n < 1$ oppure $n \geq 1$.

Inversamente, a ogni coppia di valori θ e ω soddisfacenti alla (11) e alle condizioni (12) è associato uno e un solo valore di α contenuto in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pertanto: il punto P, di coordinate θ e ω, è un punto P^*.

La equazione (11), *con le condizioni* (12), *è quindi l'equazione, in coordinate curvilinee* θ *e* ω, *del luogo* Γ^*.

Studio della curva Γ_1^*. La curva Γ_1^* è rappresentata dalle seguenti equazioni cartesiane parametriche (parametro θ):

$$\xi = n y_0 \int_\theta^{\omega(\theta)} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau, \quad \eta = y_0 \left(\frac{\cos\theta}{\cos\omega(\theta)}\right)^n \tag{13}$$

per θ variabile nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, c\right)$, e dove $\omega(\theta)$ rappresenta la ben determinata funzione di θ implicitamente definita dalla (11) e dalle limitazioni (12).

CASO $n < 1$. Come valori di ξ e η nei punti estremi $-\frac{\pi}{2}$ e $c \equiv \bar{\theta}$ assumeremo i relativi valori limiti nei punti $-\frac{\pi}{2} + 0$ e $\bar{\theta} - 0$.

---

(9) Come punti corrispondenti ai valori estremi: $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ di α, prenderemo i punti che corrispondono alle soluzioni limiti del sistema (11) e (6) per $\alpha \to -\frac{\pi}{2}$ e per $\alpha \to +\frac{\pi}{2}$; e cioè, come si può subito verificare, rispettivamente: i punti P_1^*, di coordinate curvilinee $\left(-\frac{\pi}{2}, c\right)$, e P_2^* di coordinate curvilinee $\left(c, \frac{\pi}{2}\right)$. Il punto P_1^* è l'origine delle coordinate, il P_2^* è il punto all'infinito della curva $\Gamma(c)$. (Cfr. più avanti: studio della curva Γ^*).

Dalle relazioni (cfr. n. 4, caso $n < 1$):

$$\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} \omega(\theta) = -\theta, \qquad \lim_{\theta \to \bar{\theta}-0} \omega(\theta) = \frac{\pi}{2}$$

deduciamo:

$$\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} \xi = 0, \qquad \lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} \eta = 0; \qquad \lim_{\theta \to \bar{\theta}-0} \xi \equiv \bar{\xi} = n y_0 \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos \bar{\theta}}{\cos \tau}\right)^n d\tau, \qquad \lim_{\theta \to \bar{\theta}-0} \eta = \infty .$$

Si ha poi:

$$\frac{d\eta}{d\theta} = n y_0 \left(\frac{\cos \theta}{\cos \omega}\right)^n \operatorname{tg} \omega \cdot \omega' - n y_0 \left(\frac{\cos \theta}{\cos \omega}\right)^n \operatorname{tg} \theta = n y_0 \left(\frac{\cos \theta}{\cos \omega}\right)^n \operatorname{tg} \omega \,\{ \omega' - \operatorname{tg} \theta \cot \omega \},$$

da cui segue: per la (11′) e ricordando che $\theta < 0$,

$$\frac{d\eta}{d\theta} > 0,$$

$$\frac{d\xi}{d\theta} = - n y_0 - n^2 y_0 \operatorname{tg} \theta \int_{\theta}^{\omega} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \tau}\right)^n d\tau + n y_0 \left(\frac{\cos \theta}{\cos \omega}\right)^n,$$

e a causa della (11):

$$\frac{d\xi}{d\theta} = - n y_0 \left(\frac{\cos \theta}{\cos \omega}\right)^n \operatorname{tg} \theta \cot \omega + n y_0 \left(\frac{\cos \theta}{\cos \omega}\right)^n = n y_0 \left(\frac{\cos \theta}{\cos \omega}\right)^n \{ \omega' - \operatorname{tg} \theta \cot \omega \} > 0;$$

quindi:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \omega > 0,$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \operatorname{tg} \omega = \frac{d}{d\theta} \operatorname{tg} \omega : \frac{d\xi}{d\theta} = \frac{\omega'}{\cos^2 \omega} : \frac{d\xi}{d\theta} > 0,$$

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{d\eta}{d\xi} = \lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg}(-\bar{\theta}) > 0; \quad \lim_{\xi \to \bar{\xi}} \frac{d\eta}{d\xi} = \lim_{\theta \to \bar{\theta}-0} \operatorname{tg} \omega = \infty$$

La curva Γ_1^*, *pertanto, è una porzione di curva regolare contenuta nel quadrante delle coordinate positive; suo punto estremo al finito è l'origine degli assi da cui esce con un' inclinazione positiva uguale a* $\operatorname{tg}(-\bar{\theta})$, *l'altro estremo di essa è a distanza infinita, e propriamente nel punto di coordinate* $(\bar{\xi}, \infty)$, *ivi avendo per asintoto la retta parallela all'asse delle* y, $x = \bar{\xi}$. *L'ordinata* η *di un punto della curva è funzione sempre crescente della ascissa* ξ, *infine la curva stessa volge costantemente la sua concavità verso le* y *positive.*

CASO $n \geq 1$. In questo caso l'estremo superiore dell'intervallo di variabilità di θ è lo zero. Abbiamo:

$$\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} \xi = 0 \ (^{10}), \quad \lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} \eta = 0; \quad \lim_{\theta \to -0} \xi = +\infty, \quad \lim_{\theta \to -0} \eta = +\infty.$$

Nell'interno dell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ si ha ancora come dianzi:

$$\frac{d\eta}{d\theta} > 0, \quad \frac{d\xi}{d\theta} > 0, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \omega(\theta) > 0, \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} > 0$$

e infine:

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{d\eta}{d\xi} = \lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} \omega = 0, \quad \lim_{\xi \to \infty} \frac{d\eta}{d\xi} = +\infty.$$

La curva Γ_1^*, in questo secondo caso, è ancora una porzione di curva regolare contenuta nel quadrante delle coordinate positive; ha un estremo al finito nell'origine, da cui esce con inclinazione nulla, l'altro estremo ha coordinate ξ e η infinite e non esiste in esso asintoto al finito. L'ordinata η è funzione monotona crescente di ξ, e la curva volge costantemente la sua concavità verso le y positive.

***La frontiera completa** di E è quindi una curva regolare Γ^* contenuta nel semipiano delle $y \geq 0$, simmetrica rispetto all'asse delle y, la quale passa per l'origine e volge costantemente la sua concavità verso le y positive.*

Essa nella ipotesi $n \geq 1$ è addirittura una porzione di curva regolare, e tocca, pertanto, nell'origine l'asse delle x, ed è sfornita di asintoti.

Nella ipòtesi $n < 1$, invece, la detta curva frontiera ha nell'origine un punto singolare (angoloso) (11) *nel quale le tangenti a destra e a sinistra hanno inclinazioni date rispettivamente da* $\operatorname{tg}(-\bar{\theta})$ *e* $\operatorname{tg}(\bar{\theta})$; *essa poi è fornita di due asintoti paralleli all'asse delle y e simmetrici rispetto ad esso di ascissa $\bar{\xi}$ l'uno, $-\bar{\xi}$ l'altro.*

---

(10) Basterà, per la verifica, applicare la regola di DE L'HOSPITAL al rapporto: $\dfrac{\int_\theta^\omega \cos^{-n} \tau \, d\tau}{\cos^{-n} \theta}$ e tenere presente la (11') del n. 4, I.

(11) Il PICONE nel suo corso litografato di *Calcolo delle variazioni* edito dal Circolo Matematico di Catania, anno 1922, con considerazioni varie basate anche su quelle a carattere geometrico-intuitivo fatte dal GOURSAT nel loc. citato, intuisce la forma di questa curva, ma sfugge a lui la circostanza, nel caso di $n < 1$, della presenza della singolarità nell'origine.

L'inviluppo del fascio $\mathfrak{F}$. Insieme alla curva Γ_1^* consideriamo una curva $\Gamma(\theta)$ del fascio $\mathfrak{F}$. Se $\theta \leq c$, queste due curve hanno a comune il punto P^* di coordinate curvilinee $(\theta, \omega(\theta))$, ivi, inoltre, esse si toccano, chè le tangenti a ciascuna di esse in P^* hanno inclinazioni eguali date da $\operatorname{tg}\omega(\theta)$. Per queste curve $\Gamma(\theta)$, quindi, il relativo punto P^* è un punto caratteristico; esso per ogni curva $\Gamma(\theta)$, $(\theta \leq c)$ è unico.

Una curva $\Gamma(\theta)$ avente in P_0 anomalia $\theta > c$ è sfornita di punto caratteristico, e non ha punti in comune con Γ_1^*. La (11), invero, per valori di θ interni all'intervallo $\left(c, \frac{\pi}{2}\right)$ non è soddisfatta da alcun valore positivo di ω, fatta eccezione del valore (positivo) $\omega = \theta$.

Inversamente: se $P^* \equiv (\theta^*, \omega^*)$ è un punto qualunque di Γ_1^*, ad esso è associata una curva di $\mathfrak{F}$, la $\Gamma(\theta^*)$, la quale in P_0 ha anomalia $\theta^* \leq c$, e tocca in P^* la Γ_1^* stessa.

La porzione di curva regolare Γ_1^*, quindi, si presenta come facente parte dell'inviluppo a destra del fascio di estremali $\mathfrak{F}$. D'altra parte se noi procediamo, con gli ordinari metodi, alla costruzione della equazione dell'eventuale inviluppo della famiglia di curve (4), perverremo (la verifica è semplice) alla equazione (11), etc.

La porzione di curva Γ_1^*, dunque, e la sua simmetrica rispetto all'asse delle y, Γ_{-1}^* costituiscono, col punto P_0, l'inviluppo completo del fascio di estremali uscenti per P_0, e la (11) *ne è l'equazione relativa, in coordinate curvilinee θ e ω.*

Chiuderemo questo numero con la seguente

NOTA. *Le tangenti a una curva $\Gamma(\theta)$, nel punto P_0 e nel punto P^* in cui $\Gamma(\theta)$ stessa tocca Γ^*, si segano in uno stesso punto dell'asse delle x; questo punto, se $n < 1$, è contenuto nell'intervallo $(0, \bar{\xi})$ dell'asse delle x, essendo $\bar{\xi}$ l'ascissa dell'asintoto della curva $\Gamma(\bar{\theta})$* ([12]). La verifica, quando si tenga presente la (11), è immediata.

2. **Estremali di $\mathfrak{F}$ per un punto di E.** — Designiamo con E_1 il dominio del piano limitato da Γ^* e dal semiasse delle y positive. Consideriamo un

---

([12]) Vedremo più avanti che i punti P_0 e P^* relativi a una estremale $\Gamma(\theta)$ sono coniugati su essa rispetto alla equazione alle variazioni (di JACOBI) della equazione (1) di EULERO. La riscontrata proprietà relativa alle tangenti a $\Gamma(\theta)$ in P_0 e P^*, è allora conseguenza del noto Teorema (di BOLZA): Le tangenti a una estremale in due punti coniugati si segano in uno stesso punto dell'asse delle x.

punto qualunque P_1 di E_1, e congiungiamolo con P_0. Sia α l'anomalia in P_0 del raggio $r \equiv P_0P_1$, P^* il punto di intersezione di questo raggio con $\Gamma_1{}^*$, e $\Gamma(\theta^*)$ la curva di $\mathfrak{F}$ che tocca in P^* il luogo $\Gamma_1{}^*$.

Per quanto si vide nel precedente numero, deve aversi, comunque si prenda P_1 interno a E_1, $\theta^* < c$.

Per P_1 passano due curve di $\mathfrak{F}$, (cfr. n. 1, Teorema I) delle quali l'una $\Gamma(\theta_1)$, ha in P_0 anomalia $\theta_1 < \theta^*$ e quindi minore di c, l'altra $\Gamma(\theta_1')$, anomalia $\theta_2' > \theta^*$.

La prima di queste due curve pertanto è fornita di punto caratteristico, l'altra (cfr. n. precedente) è dotata o no di punto caratteristico secondo che, per la relativa anomalia θ_1' in P_0, risulta: $\theta_1' \leq c$, oppure $\theta_1' > c$.

Consegue: due curve distinte di $\mathfrak{F}$ aventi in P_0, ciascuna, anomalia maggiore o eguale a c, oltre a P_0, non possono avere altri punti in comune; chè, in caso contrario, per un loro eventuale punto comune P, distinto da P_0, verrebbero a passare le due curve stesse e una terza curva di $\mathfrak{F}$ avente in P_0 anomalia inferiore a c, ciò che è assurdo (cfr. Teorema I del n. 4).

Ogni curva Γ *avente in* P_0 *anomalia maggiore di* c, *quindi, è interna al dominio* E_1'', *contenuto in* E_1, *limitato dalla curva* $\Gamma(c)$ *e dal semiasse delle y positive.* Con E_1' designeremo il dominio (contenuto in E_1) limitato dalle due curve Γ^* e $\Gamma(c)$.

Due curve, invece, che in P_0 non abbiano anomalie entrambe maggiori di c, possono oltre che in P_0 ulteriormente segarsi in punti di E_1, ma non più di una volta.

E infatti: Siano $\Gamma(\theta)$ e $\Gamma(\theta_1)$ due curve di $\mathfrak{F}$, e supponiamo, per fissare le idee, $\theta_1 < \theta$; dovrà aversi, perchè le medesime curve abbiano un punto P, distinto da P_0, in comune: $\theta_1 < c$. Abbiamo per le equazioni di queste curve:

$$\Gamma(\theta), \quad x = ny_0\int_\theta^\omega \left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^k d\tau \qquad y = \left(\frac{\cos\theta}{\cos\omega}\right)^n y_0 \qquad \theta \leq \omega < \frac{\pi}{2}$$

$$\Gamma(\theta_1), \quad x_1 = ny_0\int_{\theta_1}^\omega \left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\tau}\right)^n d\tau \qquad y_1 = y_0\left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\omega}\right)^n \qquad \theta_1 \leq \omega < \frac{\pi}{2}.$$

Posto che in un punto P, interno a E_1, $\Gamma(\theta)$ e $\Gamma(\theta_1)$ si intersechino, dovrà aversi, per due valori opportuni: ω e ω_1, simultaneamente:

$$(14) \qquad \frac{\cos\omega}{\cos\theta} - \frac{\cos\omega_1}{\cos\theta_1} = 0, \qquad \int_\theta^\omega \left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau - \int_{\theta_1}^{\omega_1} \left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\tau}\right)^n d\tau = 0.$$

La prima di queste eguaglianze, al variare di ω nell'intervallo $\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right)$, definisce due funzioni $\omega_1(\omega)$, continue e a derivate continue: l'una, sempre positiva, determinata dalla condizione: $\omega_1(\theta) = -\theta_1 > 0$; l'altra, uguale e contraria alla prima, determinata dalla condizione: $\omega_1(\theta) = \theta_1 < 0$.

Per la derivata di ciascuna di queste due funzioni abbiamo:

$$(14') \qquad | \omega_1'(\omega) | = \left| \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta} \frac{\operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} \omega_1} \right|.$$

Distingueremo i due casi: $|\theta_1| > |\theta|$ e $|\theta_1| < |\theta|$.

Nel primo caso si avrà: $\cos \theta_1 < \cos \theta$, e per la prima delle (14) anche $\cos \omega_1 < \cos \omega$; da cui segue: $|\operatorname{sen} \omega_1| > |\operatorname{sen} \omega|$, e però:

$$(14'') \qquad |\omega_1'| < 1.$$

Nel secondo caso, da: $\cos \theta_1 > \cos \theta$, segue: $|\operatorname{sen} \omega_1| < |\operatorname{sen} \omega|$, e quindi:

$$(14''') \qquad |\omega_1'| > 1.$$

Ciò premesso, prendiamo a considerare il primo membro della seconda equazione (14), e sostituiamo, in esso, a ω_1 una delle due funzioni $\omega_1(\omega)$ sopra menzionate. Poniamo:

$$(15) \qquad X(\omega) = \int_{\theta_1}^{\omega_1} \left(\frac{\cos \theta_1}{\cos \tau}\right)^n d\tau - \int_{\theta}^{\omega} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \tau}\right)^n d\tau.$$

Deduciamo, derivando:

$$X'(\omega) = \left(\frac{\cos \theta_1}{\cos \omega_1}\right)^n \omega' - \left(\frac{\cos \theta}{\cos \omega}\right)^n,$$

e per la prima delle (14):

$$(15') \qquad X'(\omega) = \left(\frac{\cos \theta}{\cos \omega}\right)^n \{ \omega_1' - 1 \}.$$

Questa derivata nel primo caso: $|\theta_1| > |\theta|$ è sempre negativa; nel secondo: $|\theta_1| < |\theta|$ sempre positiva.

Ora se per ω_1 prendiamo la determinazione negativa, quella cioè per cui: $\omega_1(\theta) = \theta_1$, si ha: $X(\theta) = 0$, e quindi: sia nell'un caso: $|\theta_1| > |\theta|$, come nell'altro $|\theta_1| < |\theta|$, la $X(\omega)$ non potrà ulteriormente annullarsi, le due curve, cioè, non potranno mai intersecarsi in un punto P che sia sul ramo discendente di quella di esse che in P_0 ha anomalia più piccola.

Quando invece per ω_1 si prenda la determinazione positiva, quella cioè determinata dalla relazione: $\omega_1(\theta) = -\theta_1$, si ha:

$$X(\theta) = \int_{\theta_1}^{-\theta_1} \left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\tau}\right)^n d\tau > 0,$$

e però se: $|\theta_1| < |\theta|$ non esiste, come prima, alcun valore di ω che annulli la (15): se invece è: $|\theta_1| > |\theta|$, può esservi un valore di ω, ma uno soltanto, che renda zero la $X(\omega)$.

Possiamo dunque concludere: che *ove mai due curve di $\mathfrak{F}$ abbiano a intersecarsi ulteriormente* (oltre che in P_0) *ciò avverrà in uno e in un solo punto,* situato sul ramo ascendente di quella delle due curve che in P_0 ha anomalia inferiore ([13]).

Punti caratteristici sulle estremali del fascio $\mathfrak{F}$. Possiamo concepire le curve $\Gamma(\theta)$ di $\mathfrak{F}$ rappresentate da una equazione cartesiana del tipo ([14]):

$$y = f(x, \theta) \tag{16}$$

dove f è simbolo di funzione continua di x e di θ definita nell'insieme Λ determinato dalle limitazioni: $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $x \geq 0$ se $n \geq 1$, dalle altre:

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq x \leq n y_0 \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau \text{ se } n < 1,$$ ivi a derivata, rapporto a x, continua, e soddisfacente inoltre alle condizioni:

$$f(0, \theta) = y_0; \quad f_x'(0, \theta) = \operatorname{tg}\theta. \tag{16'}$$

Sia $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ un qualsivoglia punto di interno E_1, $\Gamma(\theta_1)$ e $\Gamma(\theta_1')$ le due curve distinte di $\mathfrak{F}$ passanti per esso, di equazioni rispettivamente:

$$y = f(x, \theta_1); \quad y = f(x, \theta_1').$$

Per fissare le idee supponiamo: $\theta_1' < \theta_1$.

Nell'intervallo Λ_1 in cui $f(x, \theta_1)$ e $f(x, \theta_1')$ riescono simultaneamente definite, intervallo che contiene nel suo interno x_1, la funzione: $\psi(x) \equiv f(x, \theta_1) - f(x, \theta_1')$ è continua con la sua derivata, e si ha:

$$\psi(0) = \psi(x_1) = 0, \quad \psi'(0) = \operatorname{tg}\theta_1 - \operatorname{tg}\theta_1' > 0.$$

([13]) Se: $\theta \leq c$, si verifica facilmente che: $\lim_{\omega \to \frac{\pi}{2}} X(\omega) < 0$, ne segue che due curve distinte aventi in P_0 anomalie minori o uguali a c si segano in P_0 e ulteriormente in uno e in un solo punto, etc..

([14]) Come chiaramente segue dalla osservazione delle (4), I, n. 1.

Pertanto $\psi(x)$ è sempre positiva nell'interno di $(0, x_1)$, negativa nel rimanente intervallo; quindi: l'arco $\widehat{P_0P_1}$ della curva $\Gamma(\theta)$ è tutto interno (gli estremi esclusi) al dominio limitato dall'asse positivo delle y, dalla curva $\Gamma(\theta_1')$ e dalla semiretta $x = x_1$, $y > 0$ [15]; e la porzione di curva di $\Gamma(\theta_1')$ che ha per estremi P_1 e il punto all'infinito di $\Gamma(\theta_1')$ stessa, è interna (P_1 escluso) al dominio limitato dalla semiretta $x = x_1$, $y > 0$, e dalla curva $\Gamma(\theta_1)$ [15]. Conseguentemente: il punto caratteristico della curva $\Gamma(\theta_1')$, certamente esistente, deve essere interno all'arco P_0P_1 di essa, chè il rimanente arco, riuscendo interno a E_1, non può avere punti di contatto con Γ_1^*.

L'eventuale punto caratteristico di $\Gamma(\theta_1)$, invece, cade fuori dell'arco P_0P_1 di $\Gamma(\theta_1)$ stessa, quest'ultimo arco essendo interno (l'estremo P_0 escluso) a E_1.

Supponiamo ora, in particolare, che P_1 sia interno a E_1'. Delle due curve: $\Gamma(\theta_1)$ e $\Gamma(\theta_1')$, la seconda ha in P_0 anomalia certamente inferiore a c, e la prima $\Gamma(\theta_1)$ ha pure in P_0 anomalia inferiore a c; chè se fosse: $\theta_1 \geq c$, $\Gamma(\theta_1)$ sarebbe interna a E_1'' oppure farebbe parte della frontiera di E_1'' stesso, e non potrebbe perciò passare per P_1.

Sia, invece, P_1 interno a E_1''. In questo caso $\Gamma(\theta_1')$ ha ancora in P_0 anomalia inferiore a c, mentre $\Gamma(\theta_1)$ ha in P_0 anomalia maggiore di c, questa è quindi completamente interna (P_0 escluso) a E_1'' e priva di punto caratteristico (a destra). Invero: non può essere ovviamente $\theta_1 = c$, ma neppure $\theta_1 < c$, chè, in tale ipotesi, $\Gamma(\theta_1)$ stessa segherebbe $\Gamma(c)$ in un punto Q interno all'arco P_0P_1; e nell'interno dell'arco di $\widehat{PQ}$ di $\Gamma(\theta_1)$, e quindi anche nell'interno dell'arco $\widehat{P_0P_1}$, dovrebbe trovarsi il punto caratteristico a essa curva relativo. Ora ciò è assurdo, dovendo l'eventuale punto caratteristico di $\Gamma(\theta_1)$ trovarsi all'esterno (su $\Gamma(\theta_1)$) dell'arco $\widehat{P_0P_1}$.

Ne segue che la $\Gamma(\theta_1)$ avendo in P_0 anomalia $\theta_1 > c$, è sfornita di punto caratteristico.

3. **Punti coniugati su un'estremale $\Gamma(\theta)$ per P_0.** — L'equazione alle variazioni della equazione (1) di EULERO, relativa a una estremale $\Gamma(\theta)$ di $\mathfrak{F}$, ha la forma seguente:

$$(17') \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x,\theta)}\right)^{\frac{2}{n}} \frac{du}{dx} + \frac{1}{n y_0^{\frac{2}{n}} (f(x,\theta))^2 \cos^2\theta}\, u = 0 \text{ [16]}.$$

[15] e quindi interno a E_1.

[16] Cfr. GOURSAT. T. III (1923), pag. 579 e segg. del *Cours d'Analyse Mathématique*.

Nella (17′) — nota col nome di equazione di Jacobi — eseguiamo la sostituzione: $x = ny_0 \int\limits_{\theta}^{\omega} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau$.

Per la trasformata avremo, quando si tenga conto delle (4):

$$\frac{d}{d\omega}\cos^{n+2}\omega\frac{du}{d\omega} + n\cos^n\omega\cdot u = 0. \tag{17}$$

Si suol dire che due punti di $\Gamma(\theta)$ son coniugati, se, rispetto alla equazione di Jacobi (17), son coniugati i valori del parametro ω che competono a questi due punti. Ricerchiamo gli eventuali punti coniugati di P_0 su $\Gamma(\theta)$, e cioè i valori di ω coniugati di θ rispetto alla (17). L'integrale di questa equazione nullo in θ, è, come si verifica subito, il seguente:

$$u = n \operatorname{tg}\omega \int\limits_{\theta}^{\omega} \frac{d\tau}{\cos^n\tau} - \frac{1}{\cos^n\omega} + \frac{\cot\theta}{\cos^n\omega}\operatorname{tg}\omega = \tag{18}$$

$$= \operatorname{tg}\omega\left[n\int\limits_{\theta}^{\omega}\frac{d\tau}{\cos^n\tau} - \frac{\cot\omega}{\cos^n\omega} + \frac{\cot\theta}{\cos^n\theta}\right],$$

esso, se $\theta \leq c$ ulteriormente si annulla (cfr. la (1) del n. 4) una e una sola volta, e propriamente pel valore ω^* che compete al punto caratteristico P^* di $\Gamma(\theta)$; se, invece, $\theta < c$ lo stesso integrale non ammette ulteriori punti di zero. Deduciamo, pertanto, tenuto conto dei risultati del precedente numero, e della circostanza che c è indipendente dal punto P_0, (cfr. la (5) del n. 2) [17] il

Teorema. *Se γ è una qualsivoglia estremale della famiglia* (2), *e* Q [18] *un punto qualunque di essa (situato ad esempio sul ramo discendente) esiste o no il coniugato a destra di θ su γ, secondo che l'angolo che l'asse tangente positivo a γ in* Q *forma con l'asse delle x è minore o uguale a* c, *oppure maggiore di* c; dove c è lo zero se $n \geq 1$, la soluzione della (5) [17] se $n < 1$.

---

[17] Il valore c quando non è zero è la radice $\left(\text{unica nell'intervallo } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ della equazione in θ (5): $1 + n\operatorname{tg}\theta \int\limits^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\tau}\right)^n d\tau = 0$, la quale è indipendente dal centro del fascio di estremali.

[18] Il punto Q possiamo sempre pensarlo centro di un fascio di estremali (2) di cui γ è una componente.

Il coniugato di Q (su γ), quando esiste, è il punto di contatto di γ e della curva Γ^* inviluppo del fascio di estremali di centro Q [18],

Il coniugato del punto c, nel quale la tangente a γ ha inclinazione uguale a $\operatorname{tg} c$, è il punto all'infinito del ramo ascendente di γ stessa*; il coniugato di un punto Q* (del ramo discendente) *giace sempre sul ramo ascendente.*

In questo teorema è contenuta anche la prova dell'affermazione del GOURSAT [19] (basata su considerazioni di carattere intuitivo, e posta poi in termini precisi dal PICONE [20]) secondo cui per un punto dell'asse dolle x si posson sempre condurre due e due sole tangenti distinte a una estremale [21] qualunque (2) (soluzione di (1)).

Invero: segnalammo già al n. 1 di questo § II (nota) la proprietà: Le tangenti a una curva $\Gamma(\theta)$, in P_0 e nel punto caratteristico P^* ad essa relativo si segano in un medesimo punto dell'asse delle x. In generale si può ora affermare (con BOLZA): Le tangenti in due punti coniugati di una estremale si segano in un medesimo punto dell'asse delle x.

Inversamente: se da un punto dell'asse delle x è possibile condurre due tangenti distinte ad una estremale γ (2), i valori θ e ω del parametro ω che competono ai punti di contatto P e Q costituiscono soluzione dell'equazione (11) [22] dell'inviluppo del fascio di estremali di centro P [23]. Questi due punti P e Q sono quindi coniugati su γ, e giacciono pertanto l'uno su un ramo (il discendente ad esempio) l'altro su l'altro (l'ascendente).

Ora si consideri la tangente t in un punto P del ramo discendente di una estremale γ (2), e designiamo con X il punto in cui t sega l'asse delle x.

L'ascissa x di questo punto varia, al variare continuo di P su γ, in modo continuo e monotonamente, propriamente quando l'ascissa curvilinea ω di P descrive crescendo l'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}+0,\, c\right)$, l'ascissa x di X varia crescendo sempre da $-\infty$ a $+\infty$, se $n \geq 1$; da ξ_1 a ξ_2 se $n < 1$; dove con ξ_1 e ξ_2

---

[19] GOURSAT, *Cours d'Analyse*, T. III (1923), pag. 591.

[20] PICONE, *Calcolo delle variazioni*, corso litografato (1922); Circolo Matematico di Catania, pag. 207.

[21] Ciò, come ebbe a osservare il PICONE (loc. citato) è vero solo se $n \geq 1$. Nella ipotesi, invece, $n < 1$, da un punto dell'asse delle x possiamo o no condurre due tangenti a un estremale γ, secondo che detto punto è contenuto o no nell'intervallo limitato dagli asintoti di γ.

[22] Questa equazione non dipende dal centro P_0 del fascio di estremali, essa pertanto si riferisce a un qualsivoglia fascio di estremali estratto dalle (2).

[23] La verifica è immediata.

abbiamo indicato le ascisse dei punti d'intersezione degli asintoti di γ con l'asse delle x ([24]) etc.

4. Sulla possibilità per una estremale congiungente due punti P e Q del semipiano delle $y > 0$ di essere estremante. — Perchè una estremale γ congiungente due punti P e Q del semipiano delle $y > 0$ riesca estremante, è necessario, come è noto, che sia soddisfatta la condizione di JACOBI, e cioè che nell'interno dell'arco PQ di γ non cada alcun coniugato degli estremi.

Ora supponiamo, per fissare le idee, che P sia a sinistra di Q, e che il punto Q si trovi nel dominio E limitato dalla curva regolare Γ^* inviluppo del fascio F di estremali uscenti da P.

Pel punto Q, come si è visto, passa una sola estremale γ del menzionato fascio se Q è su Γ^*; ne passano due distinte γ_1 e γ_2 se Q è interno a E.

Nel primo caso il coniugato di P su γ è proprio Q, ne segue: nell'interno dell'arco PQ non vi sono coniugati degli estremi, la condizione di JACOBI relativa a tale arco di estremale è pertanto soddisfatta (in senso largo, si suol

([24]) Per l'ascissa x del punto di intersezione della tangente t a una curva γ, rappresentata dalle (2), con l'asse delle x abbiamo:

$$x = -\alpha \frac{\cot \omega}{\cos^n \omega} + \alpha n \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} + \beta, \quad \text{da cui segue:} \quad x' = \frac{\alpha}{\operatorname{sen}^2 \omega \cos^n \omega}$$

e: se $n \geq 1$:

$$\lim_{\omega \to -\frac{\pi}{2}+0} x = -\infty, \qquad \lim_{\omega \to -0} x = -\infty$$

se $n < 1$:

$$\lim_{\omega \to -\frac{\pi}{2}+0} x = \beta + \alpha n \int_{\omega_0}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^n \tau},$$

$$\lim_{\omega \to c-0} x = \beta - \alpha \frac{\cot c}{\cos^n c} + \alpha n \int_{\omega_0}^{c} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} = \beta - \alpha \frac{\cot c}{\cos^n c} - \alpha n \int_{c}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} + \alpha n \int_{c}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^n \tau} + \alpha n \int_{\omega_0}^{c} \frac{d\tau}{\cos^n \tau}$$

e per la (5) del § 1 quindi:

$$\lim_{\omega \to c-0} x = \beta + \alpha n \int_{\omega_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^n \tau}.$$

dire). Ciò, come è noto, non ha come conseguenza che la detta estremale riesca anche estremante, poichè per essa non riesce soddisfatta, come è facile verificare, la condizione necessaria relativa alla variazione terza [25].

Nel secondo caso, delle due estremali γ_1 e γ_2, quella che in P ha inclinazione inferiore — la γ_1 ad esempio — tocca l'inviluppo Γ^* — come si è constatato nel precedente n.° 2 di questo § II — in un punto interno dell'arco PQ; il coniugato di P su questa estremale γ_1, cade, pertanto, nell'interno dell'arco PQ. La condizione di Jacobi, relativa a questa curva, non è dunque soddisfatta ed essa non può quindi essere estremante.

L'altra curva γ_2, invece, (cfr. n.° 2 § 2) o non tocca l'inviluppo Γ^* (ciò che ha luogo quando Q è in E''_1 o, ciò che fa lo stesso, quando l'inclinazione di γ_2 in P è maggiore di $\operatorname{tg} c$) o se lo tocca, il punto di contatto riesce esterno all'arco PQ. In questo caso dunque il coniugato di P (e quindi anche quello di Q) è esterno all'arco PQ. La condizione di Jacobi relativa a questa estremale è, pertanto, soddisfatta (in senso stretto, si suol dire), e poichè, come si verifica subito, per essa son pure soddisfatte le condizioni necessarie di Legendre e di Weierstrass, si potrà concludere che solo questa estremale potrà realizzare e realizza effettivamente, come è noto, un estremo per $\mathfrak{J}$.

(25) Cfr. ad es. Goursat, loc. citato.

Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari.

Memoria 1ª di GUIDO ASCOLI (a Torino).

Sunto. - *In questa prima Memoria si definiscono gli spazi lineari metrici (o vettoriali, secondo il* FRÉCHET) *e le loro varietà lineari; in particolare gli iperpiani e le equazioni lineari che li rappresentano. Si estende poi il concetto di corpo convesso e la sua rappresentazione secondo* MINKOWSKI; *si dimostra l'esistenza di un cono tangente in un punto del contorno. Seguono alcune osservazioni sugli spazi completi e separabili, sullo spazio duale ecc., e l'esame di numerosi esempi di spazi aventi come elementi successioni o funzioni.*

INTRODUZIONE

Sin dal 1906 M. FRÉCHET poneva con la sua classica Tesi (1) i fondamenti della teoria degli spazi astratti, in cui venivano fusi in una esposizione sistematica e generale concetti già elaborati da ARZELÀ, PINCHERLE, VOLTERRA ed altri (2) in vista di fini particolari, con nozioni nuove, e non meno importanti, a cui il FRÉCHET stesso era stato condotto dallo sviluppo logico delle sue ricerche. Sintesi dunque nata dall'Analisi, e destinata a tornarvi, secondo le esplicite intenzioni dell'Autore, per arricchirla di nuove prospettive e del soccorso di una sia pur vaga intuizione geometrica.

Nei cinque lustri da allora trascorsi le teorie del FRÉCHET hanno avuto un vasto e brillante sviluppo, di cui è documento una recente esposizione storico-critica (3). Dalla quale risulta però evidente come le direttive della

(1) FRÉCHET M., *Sur quelques points du Calcul fonctionnel* (« Rend. Circ, Mat. Palermo », t. 22, 1906; pag. 1-74).

(2) A PINCHERLE si deve in particolare l'uso della parola « spazio » per indicare complessi di funzioni; si vegga per es. il *Cenno sulla Geometria dello spazio funzionale* nei « Rend. Acc. Bologna » del 1897. Nella nomenclatura di FRÉCHET tali complessi non sarebbero però spazi, mancando in essi una definizione di limite o di distanza; si potrebbe dirli *molteplicità affini.*

(3) FRÉCHET M., *Les espaces abstraits et leur théorie, considérée comme introduction à l'Analyse générale* (Paris, Gauthier-Villars, 1928). Sarà richiamato in seguito con l'abbreviazione « E. A. ».

teoria degli aggregati abbiano ben presto preso il sopravvento su quelle di più immediato interesse per l'Analisi, sicchè quali contributi essenziali che in quest'ordine di studi possono riuscir utili all'analista rimangono forse i primi lavori del FRÉCHET e pochi altri.

Forse ciò era inevitabile, a causa della immensa generalità del concetto di spazio astratto, topologico o metrico, anche se limitato da alcune semplici determinazioni (completo, compatto, separabile...), la quale ha come contrapposto l'esiguo nucleo di proprietà comuni. E il FRÉCHET stesso lo riconosce quando consiglia lo studio di classi di spazi più particolari, allo scopo di fornire ai campi funzionali che più interessano l'Analisi « un uniforme plus ajusté » ([4]).

Quali sia tra questi « abiti più attillati » quello che promette oggi più fruttuose indagini, mi sembra evidente: è quello degli *spazi lineari* ([5]) e in modo particolare degli *spazi lineari metrici* o *vettoriali*, studiati da N. WIENER, BANACH e FRÉCHET ([6]), giacchè nei primi rientrano senz'altro tutti gli spazi funzionali e nei secondi molti, anzi i più interessanti tra essi.

Condotto a quest'ordine di idee dallo studio di una questione particolare, già trattata da F. RIESZ ([7]), ed anzi sviluppando un concetto geometrico astratto che mi era stato felice guida in quel caso, sono pervenuto a un gruppo abbastanza organico di proprietà degli spazi vettoriali *separabili*, le quali, per essere alquanto riposte e di immediata applicazione all'Analisi, mi sembrano meritevoli di essere conosciute. Esse permettono infatti di ricondurre ad un'unica origine gruppi di proposizioni riflettenti i funzionali lineari di vari spazi, che erano state ottenute dal RIESZ ([8]), valendosi di procedimenti inspirati alle proprietà particolari dei campi studiati; e di rintracciarne altre non meno notevoli.

([4]) « E. A. », pag. 123-157.

([5]) *Spazi topologicamente affini*, secondo il FRÉCHET (« E. A. », pag. 123-124).

([6]) WIENER N., *Limit in terms of continous transformations* (« Bull. Soc. Math. de France », vol. 16, 1926, pag. 51-62). BANACH S., *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales* (« Fund. Math, », III, 1922, pag. 133-181). FRÉCHET M., *Les espaces topologiques affines* (« Acta Math. », t. 47, 1926, pag. 25-52).

([7]) V. le mie Note: *Sulla rappresentazione approssimata di una funzione mediante combinazioni lineari di funzioni date* (« Rend, Acc. Lincei », 6ª, X, 2° sem., 1929); *Ancora sulla rappresentazione lineare delle funzioni continue* (id. id., 6ª, XI, 1° sem., 1930).

([8]) RIESZ F., *Sur certains systèmes d'équations fonctionnelles et l'approssimation des fonctions continues* (« Comptes rendus de l'Ac. des Sc. », 1910, t. 150, pag. 674-677; et « Annales de l'Ecole normale sup. », 1911, t. 28, pag. 33-62); *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen* (« Math. Annalen. », B. 69, 1910, S. 449-497). Richiameremo spesso queste Memorie con le indicazioni (M_1) e (M_2).

Si avvera così ancora una volta l'acuta previsione di E. H. MOORE [9] secondo la quale l'identità formale dei risultati di più teorie indica l'esistenza di una dottrina generale che partendo dai presupposti comuni di quelle giunge con i suoi proprii mezzi ai medesimi risultati.

Questo il nocciolo della presente Memoria, quale può riscontrarsi nei Cap. VI e VII; a cui però nello sviluppo della ricerca si sono aggiunti numerosi risultati preliminari e complementari che non mi è parso possibile trascurare, o menzionare solo in via di incidenza; onde il lavoro ha finito per delinearsi come una trattazione generale degli spazi lineari metrici, sotto l'aspetto metrico e affine. (Cfr. la Nota alla fine della parte 1ª).

Riassumo qui brevemente il contennto delle singole parti. Nel Cap. I, ripresa dal BANACH la definizione di spazio lineare metrico, vengono definite e studiate le *varietà lineari* e in particolare gli *iperpiani*; si presentano subito i funzionali lineari che preferisco denominare *funzioni additive continue* (f. a. c.). Nel Cap. II si trasportano agli spazi lineari i metodi di MINKOWSKI per lo studio dei corpi convessi e si riconosce in sostanza nella geometria di questi spazi l'estensione delle note *geometrie di Minkowski* in quanto le proprietà poste per la funzione *modulo*, cioè per le distanze, esprimono soltanto la *convessità della sfera* nello spazio lineare. E si studiano poi alcuni corpi speciali come i cilindri, rotondi o no; nell'ultima ricerca (cono circoscritto a un corpo convesso in un punto di contorno) si profila già quello che sarà strumento essenziale negli spazi separabili.

Abbondano in questi capitoli nozioni e deduzioni ben note, su cui abbiamo sorvolato quanto fu possibile; è da notare però che è pericoloso in questi argomenti una troppa frettolosa estensione dagli spazi ordinari, poichè la differenza topologica essenziale — la possibile mancanza di *compattezza* — può condurre facilmente in errori.

Nel Cap. III sono riunite alcune osservazioni sugli spazi completi e separabili e si introduce lo spazio *duale* o *reciproco* di cui la prima idea risale ad antichi lavori di PINCHERLE [10].

I Capitoli IV e V contengono esempi di spazi lineari metrici, in gran parte noti, per i quali si è cercato di mettere in evidenza le proprietà che meglio si prestavano alla rappresentazione geometrica, e la eventuale separabilità, preparando così il materiale per l'applicazione delle teorie svolte nei capitoli

---

(9) In « Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici » (Roma, 1904), pag. 98.

(10) PINCHERLE S., *Sul concetto di piano in uno spazio ad infinite dimensioni* (« Rend. Acc. Bologna », 1898).

seguenti. Si è fatto anche cenno di *movimenti* possibili in alcuni spazi, forse non tutti ancora osservati.

Il Capitolo VI è dedicato agli spazi separabili; dimostrato anzitutto per essi il teorema fondamentale dell'esistenza di un iperpiano (almeno) radente ad un corpo convesso in un punto del suo contorno e indagato il significato geometrico, assai semplice, del procedimento analitico, si applica il risultato a due casi elementari, i quali forniscono rapidamente il gruppo delle proprietà delle varietà lineari cui più sopra si è alluso. Viene dimostrato, tra l'altro: l'esistenza di iperpiani; la possibilità di ottenere una varietà lineare come intersezione completa di una infinità numerabile di iperpiani; la prolungabilità a tutto lo spazio di una f. a. c. definita in una varietà lineare. Viene data inoltre la condizione di risolubilità di un sistema del tipo:

$$A(x_i) = c_i$$

rispetto al simbolo A di f. a. c., problema che ha la parte principale nei citati lavori di Riesz; e vengono pure estesi altri teoremi di Riesz sulla rappresentazione approssimata di un elemento per mezzo di combinazioni lineari di elementi dati.

Le applicazioni di queste teorie a spazi particolari sono svolte nel Capitolo VII. L'esposizione è qui alquanto sommaria, in quanto l'applicazione si riduce spesso a semplici mutamenti di linguaggio ed a raffronti con sviluppi noti. Vi sarebbe certo materia in molti casi a indagini più approfondite; ma esse sarebbero uscite dal quadro, già ben vasto, della Memoria, e potranno formare oggetto di successivi lavori. Un'eccezione è stata fatta per la brevissima trattazione del problema dell'*armonica viciniore* nello spazio L_2.

Nel breve Capitolo VIII si applicano i risultati del Cap. VI alla ricerca di « basi » di uno spazio separabile dotate di una certa proprietà semplice, ma interessante, e a questioni connesse.

Chiude il lavoro il Cap. IX dove è dimostrato un teorema sull'approssimazione di certe classi di f. a. c. di uno spazio separabile mediante un'opportuno sistema numerabile di esse; dimostrazione in cui mi sembra si renda ben manifesta l'utilità della visione geometrica offerta dalle nostre teorie. Il teorema non dà forse nelle applicazioni risultati altrettanto precisi quanto generali; ad ogni modo non sembra facile ritrovarli altrimenti, e d'altra parte non è escluso che si possano trarre dallo stesso procedimento, in casi speciali, formulazioni più esatte.

Si potrà osservare che un più ristretto sviluppo della interpretazione geometrica, o la sua soppressione assoluta, come nelle mie Note citate, avrebbe dato al lavoro maggior rapidità e stringatezza. Poichè però appunto a tali vedute geometriche fu dovuto il successo della ricerca, mi è parso che per ciò stesso esse venissero ad affermare il loro valore; senza contare la naturalezza e la trasparenza che per esse è venuta ad acquistare l'esposizione.

Voglio notare finalmente che il contenuto del nostro teorema fondamentale (n.° 34) non sembra esaurito nelle conseguenze che ne abbiamo tratte; sia perchè l'applicazione ad altri corpi convessi potrebbe fornire nuovi risultati interessanti, sia perchè gli iperpiani di cui in esso viene dimostrata l'esistenza non sono solo *radenti*, ma *tangenti* al corpo convesso in esame; proprietà ben sottile che noi non abbiamo minimamente sfruttata e che potrebbe forse connettersi a qualche classificazione molto precisa dei funzionali lineari ([11]).

I. **Preliminari. Varietà lineari.**

1. Diremo *spazio lineare* ([12]) (astratto) un aggregato S di elementi (punti) dotato delle seguenti proprietà:

a) Sono definite sugli elementi di S certe operazioni dette *addizione* di due elementi, *moltiplicazione* di un elemento per un numero reale, sempre possibili, le quali danno elementi di S e godono delle ordinarie proprietà algebriche; si adotta per esse il simbolismo dell'Algebra. Esiste quindi un elemento nullo (0, punto origine) tale che $a+0=a$, $0\cdot\lambda=0$, $x\cdot 0=0$. Si pone $x\cdot(-1)=-x$, $x+(-y)=x-y$.

Lo spazio lineare S sarà detto *metrico* se inoltre:

b) Per ogni elemento x di S esiste un numero reale, il *modulo* di x ($\mathrm{mod}\, x$), tale che:

$\mathrm{mod}\, x \geq 0$; $\mathrm{mod}\, x = 0$ allora e allora soltanto che $x=0$;

$\mathrm{mod}\,(x+y) \leq \mathrm{mod}\, x + \mathrm{mod}\, y$;

$\mathrm{mod}\,(\lambda x) = |\lambda|\cdot\mathrm{mod}\, x$ se λ è un numero reale ([13]).

([11]) Un breve sunto di alcune parti della presente Memoria fece oggetto di una comunicazione nella XIX Riunione della Società per il progresso delle Scienze (Bolzano-Trento, 1930).

([12]) *Sistema lineare* secondo BURALI-FORTI e MARCOLONGO (*Analisi vettoriale* (Bologna, Zanichelli, 1929), pag. 16).

([13]) La condizione *a*) implica una lunga serie di enunciati, che sopprimiamo per brevità: si veggano i lavori citati nella nota ([7]). I nostri simboli differiscono alquanto da quelli usati

Si definisce come *distanza* di due punti x, y, il modulo di $x - y$:

$$(x, y) = \mathrm{mod}\,(x - y);$$

e quindi

$(x, y) \geq 0$; $(x, y) = 0$ allora e allora soltanto che $x = y$;
$(x, y) = (y, x)$; $(x, z) \leq (x, y) + (y, z)$; $(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\,(x, y)$;
$(0, x) = \mathrm{mod}\, x$.

Con la semplice indicazione di *spazio lineare* ci riferiremo in seguito costantemente a un siffatto spazio S. Esso è dunque una particolare *classe* (D) nel senso di Fréchet ([14]), a cui sono perciò applicabili i concetti di *limite, punto di accumulazione, insieme chiuso, isolato* ecc. e di *continuità*, sia per le funzioni numeriche che per le corrispondenze.

È evidente che S ammette uu gruppo di *movimenti*, cioè di trasformazioni che conservano le distanze; sono queste le traslazioni $x' = x + a$. Esiste pure un altro gruppo di trasformazioni bicontinue, quello delle *omotetie* $x' = \lambda x$ rispetto all'origine, nel quale le distanze vengono moltiplicate per $|\lambda|$. Dalla loro composizione nasce il gruppo

$$x' = \lambda x + a$$

che è quello formato dalle omotetie rispetto a qualunque centro, e dalle traslazioni. Spazi particolari possono ammettere anche altre trasformazioni importanti, in particolare *rotazioni*, cioè movimenti che tengono fisso un punto.

Il concetto di distanza si estende in modo noto a due aggregati arbitrari A, B di S, ponendo (A, B) eguale al limite inferiore della distanza fra un elemento di A e uno di B. Se $(A, B) = 0$ e A e B sono chiusi *non* si può affermare che A e B hanno elementi comuni ([15]); se però x è un elemento,

---

in questi lavori ove per es. è detta *norma* di x e indicato con $\|x\|$ ciò che noi scriviamo $\mathrm{mod}\, x$; Banach indica inoltre l'origine con θ; non ci sembra però che la nostra notazione possa dar luogo ad equivoci.

Il Fréchet introduce accanto ai *punti* di S anche i *vettori* determinati da coppie di punti di S; ciò non è indispensabile e seguiamo perciò in questo il Banach, con guadagno di semplicità. Senza dubbio vi sono enunciati che l'uso dei vettori renderebbe più espressivi; ma non sono molti e il lettore potrà facilmente fare da sè la sostituzione.

Il Banach introduce anche una condizione che esprime la *completezza* dello spazio; seguendo il Fréchet la omettiamo perchè quasi sempre inutile per i nostri scopi. Si vegga del resto il n.° 16.

([14]) Fréchet, loc. cit. nota ([1]) e « E. A. » passim.

([15]) Ciò sarebbe possibile ove A e B fossero *compatti*, tali cioè che in essi ogni aggregato parziale infinito ammetta almeno un punto di accumulazione. L'ipotesi della compattezza è però troppo restrittiva per le applicazioni.

A un aggregato chiuso, ed è $(x, A) = 0$, x è per definizione un elemento di accumulazione di A e quindi sta in A.

2. Come negli ordinari spazi lineari si possono definire in S *rette*, *piani* e in generale *varietà lineari* ∞^n. Così la retta passante per i punti a, b sarà il luogo degli elementi

$$x = \frac{\lambda a + \mu b}{\lambda + \mu}$$

al variare dei numeri reali λ, μ (con $\lambda + \mu \neq 0$); e se c è fuori di questa retta il piano a, b, c sarà il luogo dei punti

$$x = \frac{\lambda a + \mu b + \nu c}{\lambda + \mu + \nu}$$

con $\lambda + \mu + \nu \neq 0$; e così via. Le facili questioni che si connettono a queste definizioni, e che qui dovremmo risolvere, hanno già formato oggetto di studi esaurienti nel caso dello spazio hilbertiano ([16]); questi studi possono però trasportarsi senza alterazione a qualunque spazio lineare, onde possiamo senz'altro accettarne i risultati.

Dobbiamo invece notare esplicitamente il teorema seguente:

Una varietà lineare ∞^n è un aggregato chiuso.

Esso è immediato corollario di un lemma, interessante anche per altri riguardi, e cioè:

Le distanze di un punto x *di* S *dai punti di una varietà lineare* ∞^n *ammettono un minimo.*

Supporremo, come è lecito, che V contenga l'origine, e sia definita da questo elemento e da altri $u_1, u_2, u_3, \dots u_n$ linearmente indipendenti. Il teorema esprime allora che per x elemento fisso e $a_1, a_2, \dots a_n$ numeri reali variabili la funzione

$$f(a_1, a_2, \dots a_n) = \mathrm{mod}\,(x - \Sigma a_i u_i)$$

ammette minimo. Come si vede, è una questione di tipo noto, che compare in tutte le ricerche che si connettono ai metodi di approssimazione di TCHEBITCHEFF ([17]).

([16]) V. FRÉCHET, *Essai de Géom. analytique à une infinité de dimensions* (« Nouv. Annales », VIII, 1908) e VITALI, *Geometria dello spazio hilbertiano* (« Atti R. Istituto Veneto », t. LXXXVII, 1928 e Bologna, Zanichelli, 1929).

([17]) Cfr. i noti trattati di DE LA VALLÉE POUSSIN, BERNSTEIN, ecc.; e per le ipotesi più generali: YOUNG W. H., *General theory....* (« Trans. Am. Math. Soc. », 8°, 1907), pagine 331-344.

Si noti anzitutto cbe la $f(a_1, a_2, \ldots a_n)$ è continua, perchè

$$|f(a_1, a_2, \ldots a_n) - f(b_1, b_2, \ldots b_n)| \leq \operatorname{mod}(\Sigma a_i u_i - \Sigma b_i u_i) \leq \Sigma |a_i - b_i| \operatorname{mod} u_i.$$

Si dica poi λ il limite inferiore dei valori della f; sarà $\lambda \geq 0$. Si dimostrerà che fuori di un certo campo finito R dello spazio delle a_i è $f(a_1, a_2, \ldots a_n) > \lambda' > \lambda$; λ è perciò il limite inferiore della f in R, che è effettivamente raggiunto, perchè R è finito.

Per costruire R si osservi che le espressioni

$$\begin{gathered}\operatorname{mod}(u_1 + \xi_2 u_2 + \ldots + \xi_n u_n)\\ \operatorname{mod}(\xi_1 u_1 + u_2 + \ldots + \xi_n u_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \operatorname{mod}(\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \ldots + u_n).\end{gathered}$$

come funzioni di $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, non si annullano mai nel dominio limitato $|\xi_i| \leq 1$; hanno dunque minimi positivi, il cui minimo sia η. Allora per $a_1, a_2, \ldots a_n$ arbitrari, supposto $|a_p|$ il massimo dei loro moduli sarà:

$$\operatorname{mod} \Sigma a_i u_i = |a_p| \operatorname{mod} \Sigma \frac{a_i}{|a_p|} u_i \geq \eta\, |a_p| = \eta \max |a_i|.$$

Si ha quindi:

$$\operatorname{mod}(\Sigma a_i u_i - x) + \operatorname{mod} x \geq \operatorname{mod} \Sigma a_i u_i \geq \eta \max |a_i|$$

cioè:

$$f(a_1, a_2, \ldots a_n) \geq \eta \max |a_i| - \operatorname{mod} x$$

e basterà prendere quindi

$$\max |a_i| > \frac{\lambda' + \operatorname{mod} x}{\eta}$$

perchè sia $f(a_1, a_2, \ldots a_n) > \lambda'$. Si può dunque prendere per R il dominio quadrato

$$|a_i| \leq \frac{\lambda' + \operatorname{mod} x}{\eta}$$

e il nostro lemma è dimostrato ([18]).

Se ora si suppone, in particolare, che x sia un punto di accumulazione di V, cioè che sia $(x, V) = 0$, si potrà dedurne che esiste in V un elemento y

---

([18]) Si intende che non è assicurata in generale l'unicità del punto di V corrispondente alla minima distanza; si potranno avere anche infiniti punti siffatti ed è facile dimostrare che essi costituiscono un aggregato *convesso* (v. n.° 9). Si noti che tra i punti di questo aggregato se ne può scegliere uno con criterio determinato: quello che corrisponde ai minimi valori delle a_i.

tale che $(x, y) = 0$; sarà allora $x = y$, cioè x apparterrà a V, e resta provato così che V è un aggregato chiuso.

Lo spazio S può in certi casi coincidere con una delle sue varietà lineari, per es. con una N volte infinita; è facile definire allora ogni punto di S mediante N coordinate cartesiane, e in tal caso la sua geometria affine non differisce da quella di uno spazio euclideo ad N dimensioni. Può differirne invece la metrica, dipendendo questa dalla natura della funzione *modulo*, ma vedremo a suo luogo (n.° 20) che la topologia dello spazio (limite, continuità) ne è indipendente. Per queste ragioni questi spazi avranno per noi scarsa importanza.

Ma vi sono spazi che potremo dire *a infinite dimensioni* (senza fermarci a giustificare la locuzione in base a una teoria delle dimensioni, cosa del resto non difficile), in cui esistono varietà lineari di dimensione comunque elevata; ed esistono inoltre aggregati che senza essere varietà lineari nel senso ora fissato hanno a comune con esse le due proprietà seguenti:

a) contengono ogni retta di cui contengono due punti;

b) sono chiusi.

In forza di *a*), un aggregato siffatto contiene le varietà lineari determinate da un gruppo finito di punti dell'aggregato, le quali potranno avere dimensione comunque elevata.

Lo chiameremo ancora *varietà lineare* (a infinite dimensioni); onde *le condizioni* a) *e* b) *costituiranno la definizione delle varietà lineari*, di qualunque specie.

Lo spazio lineare S è una varietà lineare; viceversa ogni sua varietà lineare, passante per l'origine, è uno spazio lineare, con le stesse definizioni dei concetti fondamentali. L'intersezione di due o più varietà lineari (anche in numero infinito) è una varietà lineare.

Una proprietà comune a tutte le varietà lineari è pure la seguente: *la traslazione che porta un elemento* x *della varietà in un altro* x', *pure della varietà, muta la varietà in sè.* Se infatti il punto y della varietà è portato dalla traslazione in y', si ha $x' - x = y' - y$ donde

$$\frac{x' + y}{2} = \frac{x + y'}{2} = z;$$

il punto z allineato con x' e y sta nella varietà, quindi anche y', allineato con z e x. La considerazione inversa completa la dimostrazione.

3. Un aggregato I di punti di S determina sempre una varietà lineare: la minima varietà lineare che contiene I. Per costruirla si osservi anzitutto che essa deve contenere i punti delle varietà lineari a 1, 2,... n,... dimensioni determinate dai punti di I presi a due a due, a tre a tre, ecc., punti il cui complesso indichiamo con G; e i loro punti di accumulazione. Effettivamente l'aggregato così ottenuto, è una varietà lineare, che è quindi la cercata. Ed infatti esso possiede la proprietà b); per verificare la a) si osservi che se x e y appartengono a G, essi appartengono rispettivamente a due varietà lineari V, V' determinate da gruppi finiti di elementi di I, quindi alla loro varietà congiungente V'', che sarà pure determinata da un gruppo finito di elementi di I e quindi apparterrà a G. A V'' appartiene ora anche la retta xy, sicchè per questo caso la proprietà è dimostrata.

Se poi x e y sono punti di accumulazione di G, ogni punto $z = \frac{\lambda x + \mu y}{\lambda + \mu}$ dalla retta xy ha la stessa proprietà, giacchè se x' e y' sono punti di G abbastanza prossimi a x e y, il punto $z' = \frac{\lambda x' + \mu y'}{\lambda + \mu}$ della retta $x'y'$ sarà vicino quanto si vuole a z in virtù della diseguaglianza,

$$(z', z) \leq \left|\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right| (x', x) + \left|\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right| (y', y).$$

La dimostrazione è analoga se x sta in G e y è punto di accumulazione.

4. Estendendo ai nostri spazi una delle possibili definizioni degli iperpiani negli ordinari spazi lineari, diremo *iperpiano* di S *una varietà lineare* π *di* S, *diversa da* S, *che non è contenuta in un' altra varietà lineare, diversa da* π *e da* S.

Questa definizione non dimostra l'esistenza di iperpiani in qualunque spazio lineare, e non sappiamo neppure se questa possa accertarsi in generale. In seguito (Cap. VI) riusciremo però a stabilirla per la vasta e importante classe degli spazi separabili.

È proprietà fondamentale degli iperpiani di uno spazio lineare ordinario quella di essere varietà di livello di una funzione lineare omogenea delle coordinate. Vale un risultato analogo in S; per enunciarlo è necessario anzitutto definire ciò che diremo una *funzione additiva continua* (f. a. c.) dei punti di S. Daremo tal nome a una funzione numerica $A(x)$ dei punti di S, continua, e dotata della proprietà:

$$A(x + y) = A(x) + A(y).$$

Da questa segue, in modo ben noto,

$$A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

per λ razionale, e poi, per la continuità, per λ reale qualunque ([19]).

Il teorema cui alludevamo può allora enunciarsi:

Un iperpiano di S *è rappresentabile mediante un' equazione del tipo*

$$A(x) = c$$

dove A(x) *è una f. a. c.; viceversa, una tale equazione, dove* A(x) *non è identicamente nulla, rappresenta un iperpiano.*

Per dimostrare la prima parte osserveremo anzitutto che basterà limitarsi agli iperpiani passanti per l'origine, per i quali l'equazione dovrà risultare dalla forma $A(x) = 0$; chè se π è un iperpiano non passante per l'origine, e x_0 un suo punto, la traslazione $x' = x - x_0$ lo muta in un iperpiano π' passante per l'origine, e se $A(x) = 0$ è la sua equazione, sarà $A(x) = A(x_0)$ quella di π.

Passi dunque π per l'origine e sia a un punto di S esterno a π; la varietà lineare determinata da π e da a dovrà coincidere con S. Ciò val come dire che, detto G l'aggregato costituito dai punti delle varietà lineari determinate da a e da un numero finito di punti di π, ogni punto di S è punto di G o punto di accumulazione di G.

Un punto di G è generalmente rappresentato da

$$x = \frac{\lambda_0 a + \Sigma\lambda_i y_i}{\lambda_0 + \Sigma\lambda_i} = \lambda a + y$$

dove λ è un numero reale arbitrario e y un elemento, pure arbitrario, di π. Ed è facile vedere che tale decomposizione di x è unica, in quanto da $\lambda a + y = \lambda' a + y'$, ove y' è pure in π, seguirebbe $(\lambda - \lambda')a = y' - y$ ciò che è assurdo se non è $\lambda = \lambda'$, $y = y'$.

Il numero λ è dunque una determinata funzione $A(x)$ di x.

È chiaro che $A(x)$ è funzione additiva; dimostreremo ora che é anche continua. Si abbia:

$$x' = \lambda' a + y', \quad x'' = \lambda'' a + y''$$

con y' e y'' in π; sarà, se $\lambda' \neq \lambda''$

$$x' - x'' = (\lambda' - \lambda'')a + (y' - y'') = (\lambda' - \lambda'')\left(a - \frac{y'' - y'}{\lambda' - \lambda''}\right) = (\lambda' - \lambda'')(a - y''')$$

([19]) Alcuni teoremi interessanti sulle funzioni additive, in un significato generale, si trovano in Banach, loc. cit., II, § 1.

dove y''' è pure un elemento di π. Prendendo i moduli:

$$(x', x'') = |\lambda' - \lambda''|(a, y''').$$

Ora la distanza (a, y''') non è inferiore alla distanza (a, π), per ipotesi positiva; si ha dunque

$$(x', x'') \geq |\lambda' - \lambda''|(a, \pi)$$

che vale anche per $\lambda' = \lambda''$ e può scriversi

$$|A(x') - A(x'')| \leq \frac{(x', x'')}{(a, \pi)}$$

e dimostra la continuità (uniforme) di $A(x)$ in G.

Diciamo ora che G è chiuso, e quindi coincide con S. Se infatti x_0 è punto di accumulazione di G, e consideriamo i punti di G, distanti da x_0 non più di ε, o, come diremo, contenuti nella *sfera* di centro x_0 e raggio ε, l'oscillazione di $A(x)$ nella sfera non supera $\frac{2\varepsilon}{(a, \pi)}$, ed è quindi infinitesima con ε. Ne segue che il limite superiore e il limite inferiore di $A(x)$ entro la sfera tendono per $\varepsilon \to 0$ a un medesimo limite λ_0. Si vede allora facilmente che l'elemento $y_0 = x_0 - \lambda_0 a$ è punto di accumulazione di elementi del tipo $x - A(x) \cdot a$ (x essendo punto di G); e poichè questi stanno in π, e π è un aggregato chiuso, segue che y_0 sta pure in π. Vale dunque per x_0 la decomposizione

$$x_0 = \lambda_0 a + y_0$$

ove y_0 è in π, cioè x_0 appartiene a G.

Resta così provata la esistenza in tutto S della f. a. c. $A(x)$, definita dal fatto che $x - A(x) \cdot a$ sta in π; ed è chiaro che essa si annulla allora e allora soltanto che x sta in π.

In particolare, è $A(a) = 1$.

Notiamo di passaggio che la f. a. c. $A(x)$ corrispondente a un dato iperpiano π è determinata a meno di un fattore costante. Se infatti l'iperpiano π, che possiamo supporre passante per l'origine, fosse insieme rappresentato dalle equazioni $A(x) = 0$, $B(x) = 0$, detto x_0 un punto esterno a π, la f. a. c.

$$C(x) = A(x_0)B(x) - B(x_0)A(x)$$

si annullerebbe su π e in x_0, quindi in tutto S, cioè sarebbe identicamente nulla. Ne segue appunto

$$B(x) = \frac{B(x_0)}{A(x_0)} A(x).$$

Dimostriamo ora la seconda parte del nostro teorema.

È intanto evidente che l'aggregato π definito dalla condizione $A(x)=c$, dove $A(x)$ è una f. a. c. è una varietà lineare; le due proprietà a ciò necessarie (n.° 2) derivano infatti dalla identità evidente:

$$A\left(\frac{\lambda x+\mu y}{\lambda+\mu}\right)=\frac{\lambda A(x)+\mu A(y)}{\lambda+\mu}$$

e dalle continuità della $A(x)$.

Sarà provato che π è un iperpiano mostrando che π insieme con un punto a ad esso esterno definisce tutto S; chè se una varietà V diversa da π e da S contenesse π, la varietà lineare definita da π e da un punto di V non appartenente a π starebbe in V e quindi non coinciderebbe con S. Ora se x_0 è un punto di π, e x un punto qualunque di S, il punto

$$y=x-\frac{A(x)-c}{A(a)-c}(a-x_0)$$

sia in π perchè $A(y)=c$, onde si ha per x una decomposizione del tipo

$$x=\lambda(a-x_0)+y$$

dove y sta in π, la quale prova che x appartiene al piano ax_0y e quindi alla varietà lineare determinata da π e da a. Tale varietà coincide dunque con S ([20]).

6. Una proprietà notevole delle f. a. c. è la seguente:

Per ogni f. a. c. A(x) *esiste un numero positivo* K *tale che per ogni* x *è*

$$|A(x)|<K\operatorname{mod}x.$$

Ed infatti, essendo $A(x)$ continua per $x=0$, esisterà un ε tale che per ogni x tale che $\operatorname{mod}x\leq\varepsilon$ sia $|A(x)|<1$. Ora se x è un qualunque elemento non nullo, si ha

$$\operatorname{mod}\left(\frac{\varepsilon}{\operatorname{mod}x}x\right)=\varepsilon$$

e quindi

$$\left|A\left(\frac{\varepsilon}{\operatorname{mod}x}x\right)\right|<1,\quad\text{cioè}\quad|A(x)|<\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{mod}x$$

che dà la tesi.

Viceversa, dalle condizioni:

$$A(x+y)=A(x)+A(y),\quad|A(x)|<K\operatorname{mod}x$$

segue la continuità della A(x).

([20]) Il concetto di iperpiano si trova già accennato da PINCHERLE (loc. cit.).

Si ha infatti

$$|A(x') - A(x'')| = |A(x' - x'')| < K \bmod (x' - x'') = K(x', x'') \text{ [21]}.$$

Per una data f. a. c. $A(x)$ il limite inferiore, positivo o nullo, dei numeri K tali che $|A(x)| < K \bmod x$ si dirà *norma* di $A(x)$ o dell'operatore A, e si indicherà con $\operatorname{Nor} A$. Se $\operatorname{Nor} A = 0$ sarà $A(x) = 0$, identicamente. Si ha poi facilmente:

$\operatorname{Nor}(A + B) \leq \operatorname{Nor} A + \operatorname{Nor} B$, $\operatorname{Nor}(\lambda A) = |\lambda| \operatorname{Nor} A$, proprietà analoghe a quelle della funzione modulo.

Se $\operatorname{Nor} A = 1$, la $A(x)$ si dirà *uninormale* o *unitaria*.

7. Il significato geometrico della norma di una f. a. c. risulta dalle seguenti osservazioni:

a) *La distanza dell'origine dall'iperpiano* $\mathrm{A(x) = c}$ *vale* $\dfrac{|\mathrm{c}|}{\mathrm{Nor\,A}}$.

Per ogni punto dell'iperpiano si ha anzitutto $\bmod x \geq \dfrac{|A(x)|}{\operatorname{Nor} A} = \dfrac{|c|}{\operatorname{Nor} A}$.

In secondo luogo se $0 < \varepsilon < \operatorname{Nor} A$ esiste un punto y tale che

$$|A(y)| > (\operatorname{Nor} A - \varepsilon) \bmod y;$$

moltiplicando per $|c/A(y)|$ e ponendo

$$x_0 = \frac{c}{A(y)}\, y$$

si ricava

$$|c| > (\operatorname{Nor} A - \varepsilon) \bmod x_0, \quad \bmod x_0 < \frac{|c|}{\operatorname{Nor} A - \varepsilon}$$

e risulta così che x_0, che appartiene all'iperpiano perchè $A(x_0) = c$, ha dall'origine una distanza che può supporsi vicina quanto si vuole a $\dfrac{|c|}{\operatorname{Nor} A}$.

b) *La distanza del punto* $\mathrm{x_0}$ *dall'iperpiano* $\mathrm{A(x) = c}$ *è dato da* $\dfrac{|\mathrm{A(x_0) - c}|}{\mathrm{Nor\,A}}$.

Segue da a) mediante la traslazione $x' = x - x_0$.

c) *Dati gli iperpiani* π, π', *di equazioni* $\mathrm{A(x) = c}$, $\mathrm{A(x) = c'}$ *la distanza di ogni punto di* π *da* π' *e di ogni punto di* π' *da* π *(e quindi anche la distanza dei due iperpiani) vale* $\dfrac{|\mathrm{c - c'}|}{\mathrm{Nor\,A}}$.

---

[21] L'equivalenza fra le due proprietà della $A(x)$ è ben nota; cfr. per un caso speciale, ma con procedimento generale, Riesz (M_1), pag. 40-41; anche Banach, loc. cit., pag. 153.

Di qui, per $|c - c'| = \text{Nor}\, A$, risulta:

d) *La norma di una f. a. c. è il valore assoluto della differenza dei valori che essa prende su due suoi iperpiani di livello, aventi distanza unitaria.*

8. Il concetto di parallelismo tra varietà lineari si estende allo spazio S nella forma seguente: *Due varietà lineari sono parallele se mediante una traslazione è possibile portare una a contenere o ad essere contenuta nell'altra.*

In particolare: *sono paralleli due iperpiani se sono sovrapponibili per traslazione* (e sono quindi varietà di livello di una stessa f. a. c.); e *una varietà lineare* V *è parallela ad un iperpiano* π *se per* V *passa un iperpiano parallelo a* π.

Perciò i punti di V saranno equidistanti da π e situati rispetto ad esso da una stessa parte.

Quest'ultima proprietà basta del resto da sola ad assicurare il parallelismo di V e di π. Ed infatti, se π ha l'equazione $A(x) = m$, ove $A(x)$ è f. a. c., e

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1)$$

esprime il punto generico di una retta di V, $A(x)$ è su questa retta funzione lineare di t e può quindi assumere su di essa ogni valore, è in particolare valori maggiori e minori di m, purchè non si riduca ad una costante, ciò che richiede $A(x_1) = A(x_2)$. Tenendo fisso x_1 e facendo variare x_2 in V, si conclude che per ogni punto x_2 di V è $A(x_2) = \text{cost.}$, cioè che per V passa un iperpiano parallelo a π.

II. Corpi convessi.

9. Sarà per noi della massima importanza estendere a tutti gli spazi lineari i concetti di *aggregato convesso* e di *corpo convesso*. Diciamo *convesso* un aggregato *se contiene ogni segmento di cui contiene gli estremi*; cioè se, appartenendovi x e y, vi appartiene anche

$$z = \frac{\lambda x + \mu y}{\lambda + \mu}$$

per $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Sarà poi detto un *corpo* se *è chiuso e contiene una sfera* ([22]).

([22]) **Una definizione di corpo convesso che negli spazi ordinari equivarrebbe alla precedente si avrebbe sostituendo a quest'ultima condizione la seguente:** ***la minima varietà***

Si può dare di ogni corpo convesso Γ una semplice caratterizzazione analitica. Per ipotesi, Γ contiene una sfera; sia, per es., l'origine il centro di questa sfera, è r il suo raggio. Se si prende un punto $x \neq 0$ e si considera la semiretta Ox, cioè l'aggregato λx con $\lambda \geq 0$, il corpo contiene di essa una parte convessa, che si riduce almeno a un segmento di lunghezza r; quindi un segmento o tutta la semiretta. Se è un segmento, dall'origine a μx, porremo $\varphi(x) = 1/\mu$: se è l'intera semiretta, $\varphi(x) = 0$. Porremo inoltre $\varphi(0) = 0$. In altre parole, indicheremo con $\varphi(x)$ *il limite inferiore dei numeri positivi* h *tali che* x/h *appartiene a* Γ.

È facile riconoscere alcune proprietà della $\varphi(x)$:

a) $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$. Per $h > \varphi(x)$, $k > \varphi(y)$ appartengono al corpo i punti $\frac{x}{h}, \frac{y}{k}$, quindi anche il punto $\dfrac{h\frac{x}{h} + k\frac{y}{k}}{h+k} = \dfrac{x+y}{h+k}$. È dunque $\varphi(x+y) \leq h+k$ e valendo ciò per h e k comunque vicini a $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ segue la tesi.

b) $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$, per λ positivo. Infatti della semiretta $0x$ appartengono al corpo i punti $\frac{x}{k}$ per $k > \varphi(x)$, cioè i punti $\frac{\lambda x}{\lambda k}$ per $\lambda k > \lambda\varphi(x)$.

c) *Esiste un numero positivo* K *tale che per qualunque* x *è*

$$\varphi(x) \leq K \bmod x.$$

Ciò è evidente se $\varphi(x) = 0$; se $\varphi(x) \neq 0$ si osservi che $\bmod \frac{x}{\varphi(x)} \geq r$ e quindi $\varphi(x) \leq \frac{1}{r} \bmod x$.

Da *a*), *b*), *c*) segue:

d) $\varphi(x)$ *è continua*: si ha infatti:

$$\varphi(x') - \varphi(x'') \leq \varphi(x' - x'') \leq K \bmod (x' - x'') = K(x', x'')$$

ed analogamente: $\varphi(x') - \varphi(x'') \leq K(x', x'')$.

---

lineare che contiene l'aggregato è l'intero spazio S. Qui *l'equivalenza non sussiste.* Eccone un facile esempio. Nello spazio hilbertiano (n.° 22) dove $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots)$ e $\bmod x = (\Sigma x_i^2)^{1/2}$ si consideri l'aggregato I dei punti aventi coordinate non negative, evidentemente convesso. Esso determina l'intero spazio; infatti per un x qualunque esistono i punti x' e x'' di coordinate $x_i = |x_i|$ e $x_i = |x_i| - x_i$ ambedue di I, e si ha $x = x' - x''$, onde ogni punto x sta nel piano dell'origine e di due altri punti di I. Ma I non ha punti interni; infatti se x è in I vi è un $x_r < \varepsilon$, e se si pone $y = (x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}, x_r - \varepsilon, x_{r+1}, \ldots)$ esso è fuori di I ed è $(x, y) = \varepsilon$.

e) Il corpo Γ *è definito dalla condizione* $\varphi(\mathrm{x}) \leq 1$, *e precisamente un punto* x *è interno a* Γ *se* $\varphi(\mathrm{x}) < 1$, *esterno se* $\varphi(\mathrm{x}) > 1$, *di contorno se* $\varphi(\mathrm{x}) = 1$.

Se $\varphi(x) = 0$, o è $x = 0$ oppure la semiretta $0x$, e quindi x, appartengono a Γ. Se $\varphi(x) > 0$, della semiretta $0x$ è contenuta in Γ il segmento da 0 a $\dfrac{x}{\varphi(x)}$ e questo contiene o no x secondochè è $\varphi(x) \leq 1$ o $\varphi(x) > 1$.

Sia ora $\varphi(x) < 1$; per la continuità di $\varphi(x)$, esiste un $\rho > 0$ tale che per $(x, y) < \rho$ è ancora $\varphi(y) < 1$, cîoè x è centro di una sfera appartenente a Γ, ossia è interno. In modo analogo, x è esterno se $\varphi(x) > 1$. Se infine è $\varphi(x) = 1$, appartiene a Γ il segmento Ox, non vi appartiene il suo prolungamento, onde x è punto di contorno.

f) Ogni punto interno al segmento che unisce due punti di Γ, *uno almeno dei quali sia interno, è pure interno a* Γ.

Segue facilmente dalla diseguaglianza, valida per $\lambda > 0$, $\mu > 0$

$$\varphi\left(\frac{\lambda x + \mu y}{\lambda + \mu}\right) \leq \frac{\lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y)}{\lambda + \mu}.$$

g) Se un iperpiano π *non contiene punti interni a* Γ, Γ *è tutto da una parte di* π.

Se infatti i punti x, y di Γ fossero da parti opposte di π, tali sarebbero anche due punti interni x', y', abbastanza prossimi a x, y, e il segmento $x'y'$ taglierebbe π in un punto z, interno a Γ.

Tutta la teoria precedente si estende subito al caso in cui il punto dato interno a Γ sia un punto generico x_0; si ottiene per i punti di Γ una condizione della forma

$$\varphi(x - x_0) \leq 1$$

dove la $\varphi(x)$ ha ancora le proprietà *a), b), c)*.

Viceversa, data una funzione $\varphi(x)$ non negativa che soddisfi a queste condizioni, l'aggregato definito da

$$\varphi(x - x_0) \leq 1$$

é un corpo convesso di cui x_0 è punto interno; la verifica non offre difficoltà. È però da notare che, a parte le proprietà di x_0, la verifica riesce anche se si parte dalla condizione più generale

$$\varphi(x - x_0) \leq c$$

dove la $\varphi(x)$ soddisfa alla *a), b), c)* senza alcuna condizione di segno; se la $\varphi(x)$ non è mai negativa si deve solo ammettere $c > 0$ affinchè esistano punti dell'aggregato diversi da x_0.

Le funzioni che soddisfano alla condizione *a), b), c)*, e cioè

$$\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y); \quad \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) \text{ per } \lambda > 0; \quad \varphi(x) < K \operatorname{mod} x \text{ (}^{23}\text{)}$$

saranno dette *funzioni di Minkowski* (brevemente *funzioni* (M)) in ragione dell'uso che questo Matematico ne ha fatto per scopi analoghi ai nostri negli spazi ordinari ([24]). Si può dunque dire:

Se $\varphi(\mathrm{x})$ *è una funzione* (M) *ed esistono infiniti punti* x *che soddisfano alla condizione* $\varphi(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) \leq \mathrm{c}$, *essi costituiscono un corpo convesso.*

10. Possiamo dare, per tutti gli spazi lineari, esempi semplici di corpi convessi:

a) La *sfera* di centro x_0 e raggio r, definita dalla condizione $\operatorname{mod}(x - x_0) \leq r$. La funzione $\operatorname{mod} x$ è infatti una funzione (M) ([25]).

b) Il *cilindro rotondo*, di raggio r, avente per *asse* una data varietà lineare V, così indicando il luogo dei punti aventi da V distanza non maggiore di $r : (x, V) \leq r$. Per dimostrarlo, si supponga prima V passante per l'origine; si proverà allora che (x, V) è una funzione (M). Ed infatti, per x, y arbitrari e z', z'' scelti comunque in V si ha:

$$(x+y,\ z'+z'') \leq (x,\ z') + (y,\ z'').$$

Si prendano i limiti inferiori dei due membri al variare dl z', z'' in V; avendosi

$$\text{lim. inf. } (x+y,\ z'+z'') \geq (x+y,\ V)$$
$$\text{lim. inf. } (x,\ z') = (x,\ V), \quad \text{lim. inf. } (y,\ z'') = (y,\ V)$$

si deduce:

$$(x+y,\ V) \leq (x,\ V) + (y,\ V)$$

che è la condizione *a)* del n.° precedente

In secondo luogo, supposto $\lambda > 0$ e z variabili in V, anche λz è un punto

---

([23]) Si noti che per la $\varphi(x)$ si equivalgono le condizioni $\varphi(x) < K \operatorname{mod} x$ e $|\varphi(x)| < K \operatorname{mod} x$. Se vale la prima si ha infatti $\varphi(x) + \varphi(-x) \geq \varphi(0) = 0$, cioè $-\varphi(x) \leq \varphi(-x) < K \operatorname{mod}(-x) = K \operatorname{mod} x$; e l'inverso è evidente.

([24]) V. per es. MINKOWSKI, *Volumen und Oberfläche* (« Math. Ann. », B. 57, 1903), pag. 447 e seguenti; ed anche il Cap. I della *Geometrie der Zahlen* (Leipzig, Teubner, 1910).

([25]) Inversamente, dalla convessità delle sfere segue subito per il modulo la proprietà $\operatorname{mod}(x+y) \leq \operatorname{mod} x + \operatorname{mod} y$. Questa è naturalmente la base per ogni dimostrazione di convessità per i corpi di S, come ben risulta dal seguito.

generico di V e quindi:

$$(\lambda x,\ V) = \text{lim. inf.}\,(\lambda x,\ \lambda z) = \lambda\ \text{lim. inf.}\,(x,\ z) = \lambda(x,\ V)$$

che è la condizione *b)*.

Finalmente, contenendo V l'origine si ha:

$$(x,\ V) \leq (x,\ 0) = \operatorname{mod} x,$$

che è la proprietà *c)*, e completa la dimostrazione.

Se V non contiene l'origine, ed è x_0 un suo punto, dando alla figura la traslazione che porta x_0 nell'origine, si ha

$$(x - x_0,\ V - x_0) \leq r$$

e si vede allora che si può assumere $\varphi(x) = (x,\ V - x_0)$, che è una funzione (M).

c) Il corpo convesso ora considerato ha la proprietà evidente di rimanere invariato per tutte le traslazioni parallele ad una varietà lineare V. A un corpo siffatto si può dare in generale il nome di *cilindro convesso.*

Si ottengono cilindri convessi con la seguente costruzione generale.

Dato un corpo convesso Γ si diano ad esso tutte le traslazioni parallele ad una varietà lineare V: il corpo descriverà allora un aggregato che con i suoi punti di accumulazione costituisce un cilindro convesso. Se Γ è una sfera si ottiene in particolare un cilindro rotondo.

Senza fermarci ai particolari della dimostrazione, osserveremo solo che si può assegnare senz'altro la funzione (M) corrispondente nel modo seguente. Per semplicità, passi V per l'origine; e sia Γ definito da $\varphi(x) \leq c$; si ponga allora per due punti x, y arbitrari $(x,\ y)_\varphi = \varphi(x - y)$ e si definisca inoltre $(x,\ V)_\varphi$ come il limite inferiore di $(x,\ y)_\varphi$ al variare di y in V. La $(x,\ V)_\varphi$ è una funzione (M), come si vede con ragionamento identico a quello usato in *b)*, e definisce il cilindro cercato.

È chiaro che un cilindro convesso contiene un'infinità di varietà lineari tutte sovrapponibili tra loro per traslazione, e cioè quelle generate dando a un punto del cilindro tutte le traslazioni che mutano in sè il cilindro stesso. Potremo dirle varietà *generatrici.*

d) Si possono anche definire *coni convessi* aventi per vertice un punto o più generalmente una varietà lineare V; sarà tale un corpo convesso se contenendo un punto contiene anche la semivarietà lineare definita da V e da questo punto.

Di questo e di altri casi più generali non avremo in seguito ad occuparci: un caso molto notevole di coni convessi si incontrerà però al n.° 13.

11. Diremo che una varietà lineare V è *esterna* a un corpo convesso Γ se ogni punto di V è esterno a Γ e la distanza (V, Γ) è positiva; *radente* se nessun punto di V è interno a Γ e la distanza (V, Γ) è nulla. In questo secondo caso la radenza sarà *effettiva* se le due figure avranno punti comuni; nel caso opposto, che può ben avvenire, *virtuale.*

Alla definizione di radenza si può anche dare la forma: V è radente a Γ se nessun punto di V è interno a Γ, mentre si può dare a V (o a Γ) una traslazione di ampiezza comunque piccola che porti qualche punto di V interno a Γ. L'equivalenza delle due definizioni è manifesta.

Per la radenza effettiva si ha poi l'enunciato semplice: V è radente effettivamente a Γ se V ha un punto comune con Γ e nessun punto di V è interno a Γ.

È chiaro anche che un iperpiano radente a Γ lascia Γ tutto da una stessa parte.

12. Lo studio delle posizioni relative di un iperpiano e di un cilindro convesso, in particolare rotondo, presenta circostanze che sono facile estensione di ciò che avviene negli spazi ordinari. È necessario darne tuttavia un breve cenno.

Sia Γ un cilindro convesso, π un iperpiano esterno o radente a Γ e che lascia quindi Γ tutto da una parte. Ogni varietà V generatrice di Γ è situata tutta da una parte di π, quindi (n.° 8) è parallela a π. Se però π contiene un punto di V, contiene tutta V. Ossia:

Un iperpiano radente o esterno a un cilindro convesso è parallelo alle sue generatrici; e se ha comune col cilindro un punto ha comune tutta la generatrice che passa per questo punto.

In particolare, se Γ è un cilindro rotondo, di asse V_0 e raggio r, l'iperpiano π, esterno o radente a Γ, sarà parallelo a V_0; poichè a V_0 è sovrapponibile per traslazione ogni generatrice. E sarà perciò costante la distanza m di ogni punto di V_0 da π. Se sarà poi $m > r$, sarà π esterno a Γ; infatti essendo $m = (V_0, \pi)$, m è limite inferiore delle distanze dei punti di π da V_0. Ogni punto di π dista dunque da V_0 più di r e cioè è esterno a Γ. E questa proprietà si conserva dando a π una traslazione abbastanza piccola, tale cioè che per la nuova posizione π' risulti ancora $(V_0, \pi') > r$.

Se invece $m = r$, i punti di π sono, per la stessa ragione, su Γ o esterni a Γ; però esistono, per ogni $\varepsilon > 0$, traslazioni di ampiezza $< \varepsilon$ che portano π ad avere punti interni a Γ. Ed infatti esiste un punto x in V_0 e uno y in π tali che $(x, y) < r + \varepsilon$, donde $(y, V_0) < r + \varepsilon$. Preso allora nel segmento xy

il punto

$$z = \frac{ry + \varepsilon x}{r + \varepsilon}$$

si ha:

$$(z, V_0) = (z - x, V_0 - x) = \frac{r + \varepsilon}{r}(y - x, V_0 - x) = \frac{r}{r + \varepsilon}(y, V_0) < r$$

e

$$(z, y) = \frac{r}{r + \varepsilon}(x, y) < \varepsilon$$

donde $(z, \pi) < \varepsilon$. Sicchè l'iperpiano π' parallelo a π passante per z dista da π meno di ε e contiene il punto z interno a Γ.

Concludendo, *un iperpiano esterno a un cilindro rotondo è parallelo all'asse e ha da esso distanza maggiore del raggio; un iperpiano radente è parallelo all'asse e ha da esso distanza eguale al raggio; e viceversa.*

Se l'asse si riduce ad un punto, e il cilindro a una sfera valgono considerazioni analoghe ed in forma anche più semplice. Così, in particolare:

Se $\mathrm{A(x)}$ è *f. a. c. unitaria, l'iperpiano* $\mathrm{A(x) = r}$ *è radente alla sfera* $\mathrm{mod\, x = r}$ *e le è esterno l'iperpiano* $\mathrm{A(x) = m}$, *con* $\mathrm{m > r}$.

13. Se da un punto x_0 del contorno di un corpo convesso Γ, si proiettano con semirette i punti di Γ si ottiene, come è facile vedere, un aggregato convesso, e, unendo ad esso i suoi punti di accumulazione, un corpo convesso Γ_1, e precisamente un *cono convesso* (di specie 1).

Ci proponiamo qui di confermare analiticamente questo risultato determinando la funzione (M) corrispondente a Γ_1. Si ha precisamente il teorema:

Sia $\varphi(\mathrm{x})$ *una funzione* (M) *e* Γ *il corpo convesso* $\varphi(\mathrm{x}) \leq \varphi(\mathrm{x}_0)$. *Esiste il limite*

$$\varphi_1(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varphi(x_0 + \varepsilon x) - \varphi(x_0)}{\varepsilon}$$

ed è ancora una funzione (M). *Il corpo convesso* $\varphi_1(\mathrm{x}) \leq \varphi(\mathrm{x}_0)$ *è un cono di vertice* x_0 *e i suoi punti interni sono tutti e soli i punti interni alle semirette che da* x_0 *proiettano i punti interni a* Γ.

Dalle ipotesi segue infatti per $\varepsilon > 0$

$$\varphi(x_0 + \varepsilon x) \leq \varphi(x_0) + \varepsilon\varphi(x)$$
$$\varphi(x_0) \leq \varphi(x_0 + \varepsilon x) + \varepsilon\varphi(-x)$$

donde:

$$(1) \qquad -\varphi(-x) \leq R(x, \varepsilon) \leq \varphi(x)$$

avendo posto

$$R(x, \varepsilon) = \frac{\varphi(x_0 + \varepsilon x) - \varphi(x_0)}{\varepsilon}.$$

D'altra parte, al tendere di ε a zero $R(x, \varepsilon)$ non cresce mai; posto infatti $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ la diseguaglianza

$$R(x, \varepsilon') \leq R(x, \varepsilon)$$

si trasforma agevolmente nell'altra:

$$\varphi(\varepsilon x_0 + \varepsilon\varepsilon' x) \leq \varphi(\varepsilon' x_0 + \varepsilon\varepsilon' x) + \varphi(\varepsilon x_0 - \varepsilon' x_0)$$

che evidentemente sussiste. Ne segue che $R(x, \varepsilon)$, per $\varepsilon \to +0$, ha un limite $\varphi_1(x)$, come si era asserito.

Proviamo ora che $\varphi_1(x)$ è una funzione (M). Si ha la diseguaglianza:

$$R(x + y, \varepsilon) \leq R(x, 2\varepsilon) + R(y, 2\varepsilon)$$

poichè sostituendo e riducendo essa si manifesta equivalente alla seguente:

$$\varphi(2x_0 + 2\varepsilon x + 2\varepsilon y) \leq \varphi(x_0 + 2\varepsilon x) + \varphi(x_0 + 2\varepsilon y).$$

Per $\varepsilon \to +0$ si deduce:

$$\varphi_1(x + y) \leq \varphi_1(x) + \varphi_1(y).$$

In secondo luogo si ha:

$$R(\lambda x, \varepsilon) = \lambda R(x, \varepsilon\lambda)$$

da cui per $\lambda > 0$ e $\varepsilon \to +0$:

$$\varphi_1(\lambda x) = \lambda \varphi_1(x).$$

Finalmente, supposto $|\varphi(x)| \leq K \bmod x$, si ha dalla (1):

$$|R(x, \varepsilon)| \leq K \bmod x$$

e, al limite per $\varepsilon \to +0$, $|\varphi_1(x)| \leq K \bmod x$; ciò che completa la dimostrazione del secondo assunto.

Si ha subito $R(x_0, \varepsilon) = \varphi(x_0)$ e quindi $\varphi_1(x_0) = \varphi(x_0)$; perciò il corpo convesso Γ_1, definito da $\varphi_1(x) \leq \varphi(x_0)$ contiene x_0 (sul contorno). Sia ora x_1 un punto interno a Γ e y appartenga alla semiretta $x_0 x_1$. Poichè ogni punto tra x_0 e y convenientemente vicino a x_0 è interno a Γ, per ε abbastanza piccolo si ha

$$\varphi\left(\frac{x_0 + \varepsilon y}{1 + \varepsilon}\right) < \varphi(x_0)$$

che si trasforma subito in
$$R(y, \varepsilon) < \varphi(x_0).$$

Di qui, al limite per $\varepsilon \to +0$, notando che $R(y, \varepsilon)$ tende a $\varphi_1(y)$ senza mai crescere, risulta:
$$\varphi_1(y) < \varphi(x_0)$$
cioè y è interno a Γ_1.

Viceversa, se y è interno a Γ_1, cioè $\varphi_1(y) < \varphi(x_0)$ si ha per ε abbastanza piccolo
$$R(y, \varepsilon) < \varphi(x_0)$$
cioè
$$\varphi\left(\frac{x_0 + \varepsilon y}{1 + \varepsilon}\right) < \varphi(x_0)$$

ed esiste quindi tra x_0 e y qualche punto interno a Γ.

Da questa generazione di Γ_1 risulta evidente che Γ_1 è un cono; ciò verrà del resto confermato tra poco per altra via.

14. Si ha identicamente:
$$R(x + ax_0, \varepsilon) = \frac{\varphi(x_0 + \varepsilon x + \varepsilon a x_0) - \varphi(x_0)}{\varepsilon} =$$
$$= \frac{\varphi(x_0 + \varepsilon x + \varepsilon a x_0) - (1 + \varepsilon a)\varphi(x_0)}{\varepsilon} + a\varphi(x_0)$$

ed anche, se ε è abbastanza piccolo perchè sia $1 + \varepsilon a > 0$
$$R(x + ax_0, \varepsilon) = \frac{\varphi\left(x_0 + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon a} x\right) - \varphi(x_0)}{\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon a}} + a\varphi(x_0) = R\left(x, \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon a}\right) + a\varphi(x_0).$$

Al limite per $\varepsilon \to +0$ si ha perciò:
$$\varphi_1(x + ax_0) = \varphi_1(x) + a\varphi(x_0). \tag{2}$$

Di qui è facile ricavare che *se* x_1 *appartiene a* Γ_1, *anche tutta la semiretta* x_0x_1 *vi appartiene.* Ogni punto di questa semiretta è dato infatti da
$$x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_0$$
con $\lambda > 0$. Ed allora
$$\varphi_1(x) = \varphi_1(\lambda x_1) + (1 - \lambda)\varphi(x_0) = \lambda\varphi_1(x_1) + (1 - \lambda)\varphi(x_0)$$
e se $\varphi_1(x_1) \lesseqgtr \varphi(x_0)$ risulta anche $\varphi_1(x) \leq \varphi(x_0)$. E si vede anche che $\varphi_1(x)$ varia linearmente sulla semiretta.

Dalla (1) si ha, al limite per $\varepsilon \to +0$

$$\varphi_1(x) \leq \varphi(x)$$

che esprime il fatto evidente che Γ_1 contiene Γ. Di qui e dalla (2):

$$\varphi(x + ax_0) \geq \varphi_1(x) + a\varphi(x_0).$$

Ci sarà utile ricavare una relazione alquanto più generale.

Si sostituisca x con bx; si ha

$$\varphi(ax_0 + bx) \geq a\varphi(x_0) + \varphi_1(bx).$$

Ora, se $b \geq 0$ si ha $\varphi_1(bx) = b\varphi_1(x)$, mentre se $b < 0$ si ha

$$\varphi_1(bx) + \varphi_1(-bx) \geq 0 \quad \text{e quindi} \quad \varphi_1(bx) \geq -\varphi_1(-bx) = b\varphi_1(x),$$

sicchè, in ogni caso:

$$\varphi(ax_0 + bx) \geq a\varphi(x_0) + b\varphi_1(x) \tag{3}$$

che è la relazione cercata, valida per valori reali arbitrari di a e b.

15. Il cono Γ_1 di cui abbiamo dimostrato l'esistenza per ogni punto x_0 di contorno di un corpo convesso Γ si può chiamare *cono circoscritto* a Γ in x_0 e le semirette che ne formano il contorno *tangenti* al corpo in x_0. Questo concetto di tangente potrebbe essere messo in relazione con quello ordinario, e identificato cioè con quello di tangente in x_0 ad una linea situata sul contorno di Γ e passante per x_0. Ma di ciò non possiamo occuparci.

Si potrebbe anche estendere la ricerca in modo da giungere alla definizione di *piano tangente*, e più in generale di *varietà lineare tangente* a un corpo convesso. Ciò richiederebbe anzitutto lo studio accurato di certe successioni di coni circoscritti a Γ, di specie sempre più elevata, che possono dedursi l'uno dall'altro con operazioni analoghe a quella studiata. Noi ci occuperemo brevemente in seguito di questa costruzione (n.[i] 34, 35) non però per questo scopo, bensì per ottenere, nei già citati *spazi separabili*, la dimostrazione dell'esistenza di un iperpiano radente a un corpo convesso in un punto del suo contorno.

Su questo argomento basti qui la semplice osservazione che un iperpiano radente a Γ in x_0 deve essere anche radente al cono circoscritto Γ_1. Se Γ_1 si riduce a un iperpiano π, questo è radente a Γ, e poichè un altro iperpiano per x_0, traversando π, non può essere radente a Γ, esiste in x_0 un unico iperpiano radente a Γ. In altre parole: *se*

$$\varphi_1(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varphi(x_0 + \varepsilon x) - \varphi(x_0)}{\varepsilon}$$

è funzione additiva, Γ *ammette in* x_0 *uno e un solo iperpiano radente.*

III. Spazi lineari completi e separabili. Spazio duale.

16. Ricordiamo che uno spazio metrico S si dice *completo* se una successione x_i di punti di S che soddisfa al criterio di convergenza di CAUCHY ha per limite un determinato elemento di S. Se cioè, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un n tale che per n', $n'' > n$ sia

$$(x_{n'}, x_{n''}) < \varepsilon,$$

dovrà anche esistere un x tale che

$$\lim (x_n, x) = 0.$$

È stato osservato da HAUSSDORFF [26] che ogni spazio S fa parte di uno spazio completo $\bar{S}$, che è il più ristretto spazio completo che contiene S. La cosa è del resto molto semplice: basta considerare una successione x_i di elementi di S che è convergente secondo il criterio di CAUCHY ma non ha limite in S, come definizione di un nuovo elemento — elemento *integrante* — e stabilire per i nuovi elementi opportune definizioni.

Per es. se $x = (x_1 x_2 \ldots x_n \ldots) = (x_i)$, $y = (y_1 y_2 \ldots y_n \ldots) = (y_i)$ sono elementi integranti si porrà $x = y$ se (x_n, y_n) tende a zero con $\frac{1}{n}$.

Nel caso poi di spazi lineari si dimostra anzitutto che se la successione x_i converge, converge anche la successione $\operatorname{mod} x_i$, e il limite di essa si assume come valore di $\operatorname{mod} x$. In modo analogo, se $x = (x_i)$, $y = (y_i)$, dopo aver provato la convergenza di $(x_i + y_i)$, si definisce $x + y = (x_i + y_i)$.

Si constata allora facilmente che lo spazio ampliato $\bar{S}$ è ancora uno *spazio lineare* (completo).

Nei casi speciali, tale ampliamento risulterà spesso qualcosa di più di un artificio formale, in quanto ad una successione convergente di elementi di S, se non avente limite in S, si potrà talvolta far corrispondere un effettivo ente fuori di S, avente con gli elementi di S una stretta affinità. Per esempio, se S è composto di funzioni, gli elementi integranti potranno essere ancora funzioni, alle quali risulti applicabile, eventualmente modificata, la definizione di distanza adottata in S, e che, in virtù di essa, possano presentarsi come limiti di successioni di elementi di S.

17. Essendo S uno spazio vettoriale, diciamo che un aggregato B di elementi di S costituisce una *base* per S, se ogni elemento di S può essere

---

(26) HAUSDORFF F., *Grundzüge der Mengenlehre* (Leipzig, Von Veit, 1914), pag. 315.

approssimato indefinitamente mediante combinazioni lineari di elementi di B; in altre parole, se per un dato punto di x di S e un dato $\varepsilon > 0$ si possono trovare in B gli elementi $u_1, u_2, \ldots, u_n$ in numero finito e le quantità reali $a_1, a_2, \ldots a_n$, tali che sia

$$(x, \Sigma a_i u_i) < \varepsilon \text{ (27)}.$$

Ogni spazio ammette una base: lo spazio stesso; un'altra base è il contorno di una sfera di raggio 1; ma una base è naturalmente interessante solo se è di potenza minore dello spazio stesso. Dopo gli spazi a base finita, di cui abbiamo già notato lo scarso interesse, gli spazi più semplici sono quelli per i quali esiste una base *numerabile*; per i quali cioè gli elementi di B si possono ordinare in un successione $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. Si riconosce subito che essi coincidono con gli spazi lineari *separabili*, cioè con quelli che possiedono un aggregato numerabile ovunque denso. Chè infatti, se si costruiscono gli elementi $\sum_1^n r_i u_i$ dove gli r_i sono razionali, per n costante questi elementi costituiscono un aggregato numerabile H_n; e tutti gli H_n un nuovo aggregato numerabile H. Esso è ovunque denso in S, poichè dato un elemento x esiste un elemento della forma

$$y = \sum_1^N a_i u_i$$

tale che $(x, y) < \varepsilon/2$; ed esiste poi un $y' = \sum_1^N r_i u_i$ che dista da y meno di $\varepsilon/2$, come risulta dal fatto che

$$(y, y') \leq \Sigma |a_i - r_i| \bmod u_i \leq \max |a_i - r_i| \Sigma \bmod u_i.$$

Vi è quindi un elemento di H che dista da x meno di ε.

È poi senz'altro evidente che un aggregato denso in S è al tempo stesso una base.

Gli spazi separabili godono di molteplici proprietà, che costituiscono altrettanti mezzi per provare la non separabilità di uno spazio. Tra questi uno dei più semplici è il seguente, sostanzialmente noto, che applicheremo ripetutamente in seguito:

In uno spazio metrico (lineare o no) S, *separabile, un gruppo* G *di*

(27) In questa definizione di base l'origine ha una parte privilegiata; l'introduzione di vettori, e di una *base vettoriale* sarebbe qui vantaggiosa. Per ottenere una base *puntuale* basta del resto aggregare l'origine al gruppo B. Qui ci atteniamo al concetto più comodo per le applicazioni.

punti le cui mutue distanze sono tutte superiori a un numero positivo d *è finito o numerabile* [28].

Ed infatti, se $V \equiv (v_1 v_2 \dots v_n \dots)$ è una successione densa in S, per ogni elemento di G si può fissare il *primo* elemento di V che dista da esso meno di $d/2$. Si riconosce allora che due elementi distinti di G danno luogo a elementi distinti di V; chè se per i punti x, y di G fosse

$$(x, v_i) < \frac{d}{2}, \quad (y, v_i) < \frac{d}{2}$$

sarebbe anche $(x, y) < d$, contro l'ipotesi. Gli elementi di G si possono quindi riferire biunivocamente a una successione parziale di V, cioè G è finito o numerabile.

18. Secondo un teorema generale di FRÉCHET [29], ogni aggregato di uno spazio separabile è ancora separabile, cioè contiene una successione di punti densa nell'aggregato. La dimostrazione di questa proposizione fa uso però, e in modo che non sembra evitabile, del postulato di ZERMELO. Poichè tutti gli sviluppi del nostro lavoro sono indipendenti da questo principio, ci interessa osservare che in condizioni abbastanza larghe, e per noi sufficienti, si può dare una dimostrazione che non lo presuppone, e che potrebbe del resto essere ancora semplificata quando si volesse restringere la proposizione agli spazi lineari. Precisamente:

In uno spazio metrico completo separabile S *ogni aggregato chiuso* A *è separabile.*

Per la dimostrazione proveremo anzitutto che ad ogni elemento x di S è possibile coordinare un elemento $\bar{x}$ di A in modo che sia

$$(x, \bar{x}) < K(x, A)$$

dove K è una certa costante positiva. Sia infatti $c > 1$, $0 < \theta < 1$. Per la definizione di distanza esiste in A qualche elemento y tale che

$$(x, y) < c(x, A)$$

ed esiste inoltre nella successione v_i densa in S un elemento v_{n_1} tale che

$$(y, v_{n_1}) < \theta(x, A).$$

---

[28] Il teorema è incluso in teoremi più generali di FRÉCHET (cfr. *Les ensembles abstraits et le Calcul fonctionnel*, « Rend. Circ. Mat, Palermo », vol. XXX, 1910, pag. 1-26) e di HAUSDORFF (*Mengenlehre*, De Gruyter, Berlin, 1927, pag. 126-127); il procedimento dimostrativo è usato, con qualche variante, da ambedue gli Autori.

[29] FRÉCHET, loc. cit. nota (1), pag. 27.

Sarà allora
$$(x, v_{n_1}) < (c+\theta)(x, A), \quad (v_{n_1}, A) < \theta(x, A).$$

Indicheremo precisamente con v_{n_1} il *primo* dei v_i che soddisfa a queste relazioni e che è così perfettamente determinato.

In modo analogo, partendo da v_{n_1} si troverà un v_{n_2} tale che
$$(v_{n_1}, v_{n_2}) < (c+\theta)(v_{n_1}, A), \quad (v_{n_2}, A) < \theta(v_{n_1}, A)$$
e così via. Si verifica subito che è
$$(v_{n_i}, v_{n_{i+1}}) < (c+\theta)\theta^i(x, a)$$
sicchè la serie $\Sigma(v_{n_i}, v_{n_{i+1}})$ è convergente. Ne segue che la successione v_{n_i} soddisfa alla condizione di Cauchy e tende quindi a un elemento $\bar{x}$, per il quale si ha
$$(x, \bar{x}) < (x, A)(c+\theta)\sum_0^\infty \theta^i = \frac{c+\theta}{1-\theta}(x, A) = K(x, A)$$
$$(\bar{x}, A) = \lim (v_{n_i}, A) = 0.$$

Poichè A è chiuso, $\bar{x}$ appartiene ad A; ed è con ciò provato l'asserto.

Si consideri ora il gruppo $\bar{v}_i$ di elementi di A che con l'assegnata costruzione corrispondono ai v_i e che sono quindi tali che
$$(v_i, \bar{v}_i) < K(v_i, A).$$

Dico che essi sono densi in A. Infatti preso un punto y in A e un $\varepsilon > 0$ esiste un v_r tale che $(y, v_r) < \frac{\varepsilon}{1+K}$ e quindi $(v_r, A) < \frac{\varepsilon}{1+K}$; sarà allora
$$(y, \bar{v}_r) \leq (y, v_r) + (v_r, \bar{v}_r) < (y, v_r) + K(v_r, A) < \frac{\varepsilon}{1+K} + \frac{\varepsilon K}{1+K} = \varepsilon$$
e il teorema è così dimostrato.

Il teorema vale naturalmente anche per un aggregato chiuso di uno spazio non completo quando si accetti per esso una base formata eventualmente anche con elementi integranti aventi distanza nulla dall'aggregato.

Notiamo il caso particolare notevole: *le varietà lineari di uno spazio lineare completo separabile sono pure spazi lineari completi separabili.*

19. Se S è uno spazio lineare, dotato di iperpiani ossia di f. a. c., si può immaginare un altro spazio lineare Σ i cui elementi ξ_A siano in corrispondenza biunivoca con le f. a. c. $A(x)$ di S e per i quali siano poste le definizioni
$$\xi_A + \xi_B = \xi_{A+B}, \quad \lambda\xi_A = \xi_{\lambda A}$$
$$\operatorname{mod} \xi_A = \operatorname{Nor} A;$$

l'ultima è giustificata dal fatto che sono soddisfatte per la norma le proprietà richieste per il modulo in uno spazio lineare (n.° 6). Un tale spazio, che esiste sempre giacchè è per lo meno lecito assumere come suoi elementi gli operatori A stessi, può dirsi *duale* o *reciproco* del dato; e diremo anche *duale metrico* quando vi possa essere equivoco con un *duale topologico* che considereremo più avanti.

Lo spazio Σ *è sempre completo.* Se infatti gli elementi ξ_{A_i} soddisfano alla condizione di convergenza di CAUCHY, ciò significa che per ogni $\varepsilon > 0$ si può trovare un indice n in modo che per r, $s > n$ sia

$$\operatorname{Nor}(A_r - A_s) < \varepsilon;$$

sarà allora, per ogni x:

$$|A_r(x) - A_s(x)| < \varepsilon \bmod x$$

e le quantità $A_r(x)$ tenderanno per $r \to \infty$ a un limite $B(x)$. E sarà evidentemente

$$B(x+y) = B(x) + B(y).$$

Inoltre si avrà per r abbastanza grande e per ogni x:

$$|B(x) - A_r(x)| \leq \varepsilon \bmod x$$

donde

$$|B(x)| \leq (\operatorname{Nor} A_r + \varepsilon) \bmod x$$

sicchè $B(x)$ sarà una f. a. c.; ed avendosi anche, sempre per r abbastanza grande:

$$\operatorname{Nor}(B - A_r) < \varepsilon \quad \text{cioè} \quad \operatorname{mod}(\xi_B - \xi_{A_r}) < \varepsilon$$

si vede che ξ_B è il limite della successione ξ_{A_r}.

Lo spazio Σ può non essere separabile, anche se tale è S; di ciò si vedranno alcuni esempi nei capitoli seguenti.

In Σ esistono certamente f. a. c.; ed infatti il valore $A(x_0)$ di una f. a. c. di S in un punto determinato, considerato come funzione dell'operatore A, o del corrispondente elemento ξ_A, ponendo cioè

$$A(x_0) = \alpha(\xi_A),$$

è una f. a. c. in Σ. Si ha infatti:

$$\alpha(\xi_A + \xi_B) = \alpha(\xi_{A+B}) = A(x_0) + B(x_0) = \alpha(\xi_A) + \alpha(\xi_B)$$
$$\alpha(\lambda\xi_A) = \alpha(\xi_{\lambda A}) = \lambda A(x_0) = \lambda\alpha(\xi_A)$$
$$|\alpha(\xi_A)| = |A(x_0)| \leq \operatorname{Nor} A \cdot \operatorname{mod} x_0 = \operatorname{mod} \xi_A \cdot \operatorname{mod} x_0$$

donde anche $\operatorname{Nor} \alpha \leq \operatorname{mod} x_0$.

Si può anzi vedere che almeno se S è separabile, si ha precisamente:

$$\operatorname{Nor} \alpha = \operatorname{mod} x_0\,;$$

si vedrà infatti (n.° 36) che in tale ipotesi esiste sempre una f. a. c. $B(x)$ tale che

$$\operatorname{Nor} B = 1, \quad B(x_0) = \operatorname{mod} x_0$$

e per essa si ha precisamente

$$\alpha(\xi_B) = B(x_0) = \operatorname{mod} x_0 = \operatorname{mod} \xi_B \operatorname{mod} x_0 .$$

Non può affermarsi che le f. a. c. in Σ siano soltanto quelle della forma $A(x_0)$; troveremo anzi un esempio in cui è vero l'opposto. Non vi è dunque in generale perfetta reciprocità tra i due spazi; perchè ciò sia occorrono due condizioni:

a) Le f. a. c. in Σ abbiano tutte la forma $A(x_0)$.

b) Esista in S una f. a. c. $A(x)$ tale che $\dfrac{|A(x_0)|}{\operatorname{mod} A}$ è vicino quanto si vuole a $\operatorname{mod} x_0$.

Quando la condizione *a)* non è soddisfatta potrebbe darsi che essa lo divenisse con un conveniente ampliamento di S; la questione merita, ci sembra, di essere studiata, almeno in qualche caso particolare.

IV. **Alcuni esempi di spazi lineari metrici.**

20. L'esempio più semplice di spazio lineare è dato da uno spazio S a base *finita* $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Lo spazio si riduce allora all'aggregato delle combinazioni lineari degli u; poichè questo è chiuso, come si è visto al n.° 2. Si ha cioè uno spazio affine ordinario a $\nu \leq n$ dimensioni, che può avere come modello uno spazio euclideo a ν dimensioni. Supposta la base ridotta agli elementi linearmente indipendenti, in questo modello all'elemento $x = \Sigma x_i u_i$ corrisponde il punto $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$. Considerando allora la sfera ordinaria $\Sigma x_i^2 = 1$, su di essa la funzione $\operatorname{mod} \Sigma x_i u_i$ è continua, perchè

$$|\operatorname{mod} \Sigma x_i' u_i - \operatorname{mod} \Sigma x_i'' u_i| \leq \operatorname{mod} \Sigma (x_i' - x_i'')\, u_i \leq \Sigma\, |x_i' - x_i''| \cdot \operatorname{mod} u_i$$
$$\leq \sqrt{\Sigma (x_i' - x_i'')^2} \cdot \max \operatorname{mod} u_i$$

e vi è sempre positiva; onde vi ha un massimo M e un minimo m, ambedue positivi. Perciò, per x_i arbitrari (non tutti nulli) si ha

$$m \leq \operatorname{mod} \frac{\Sigma x_i u_i}{\sqrt{\Sigma x_i^2}} \leq M$$

cioè

$$m\sqrt{\Sigma x_i^2} \leq \mathrm{mod}\,\Sigma x_i u_i \leq M\sqrt{\Sigma x_i^2}.$$

Onde *il rapporto dei moduli, e quindi delle distanze corrispondenti nella metrica dello spazio* S *e nella metrica euclidea non esce da due confini positivi.* Ne segue subito che le proprietà di limite, continuità, ecc., valide in una metrica valgono nell'altra, cioè che tutti gli spazi vettoriali a ν dimensioni sono *topologicamente identici.*

Ne risulta che le varietà lineari di S sono le varietà lineari dello spazio euclideo $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ e in particolare le f. a. c. hanno la forma $\Sigma a_i x_i$. Ciò del resto era già prevedibile perchè se $A(x)$ è f. a. c. e $x = \Sigma x_i u_i$ sarà $A(x) = \Sigma A(u_i) x_i$; rimaneva solo da assicurare la continuità in S di ogni funzione lineare degli x_i (30).

21. Gli spazi precedenti appartengono alla categoria degli spazi definibili per mezzo di successioni finite o infinite di numeri reali (coordinate) in modo che la somma di due elementi e il prodotto di un elemento per un numero reale si effettuino facendo queste operazioni sulle coordinate dei singoli posti (31). In essi in generale le coordinate non sono numeri reali arbitrari ma soddisfano a determinate condizioni che intervengono di solito nella definizione del modulo.

Il caso di coordinate in numero finito è stato esaurito nel n.° precedente; diamo qui alcuni esempi di spazi con infinite coordinate.

a) Le coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ dell'elemento x siano soggette alla condizione che $\Sigma |x_i|^p$ converga, essendo $p \geq 1$; e si ponga

$$\mathrm{mod}\, x = \{\Sigma |x_i|^p\}^{1/p}.$$

La proprietà fondamentale del modulo è soddisfatta in base a una nota diseguaglianza di MINKOWSKI.

Questo spazio, che indicheremo con $\boldsymbol{N}_p$, è separabile; formano infatti una base gli elementi $u_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ dove l'unità comparisce al posto i,

---

(30) Poichè la sfera unitaria di S è rappresentata nello spazio euclideo da un corpo convesso limitato, simmetrico rispetto all'origine, le metriche qui considerate coincidono evidentemente con le così dette *geometrie di Minkowski*; v. di esse una elegante applicazione, nello stesso nostro ordine di idee, in HAAR A., *Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung der stetigen Funktionen* (« Math. Ann. », 78. 1918, pag. 294-311),

(31) Alcuni limitano a questi spazi la qualifica di *lineari*; essi possono in realtà rientrare tra gli spazi funzionali, il campo di definizione essendo la successione 1, 2, .., n.... HAUSDORFF (loc. cit. nota (18), pag. 95) estende la qualifica agli spazi funzionali definiti in un aggregato qualunque.

giacchè si ha:

$$x = \lim_{n \to \infty} (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots) = \lim \sum_1^n x_i u_i = \sum_1^\infty x_i u_i .$$

Per una f. a. c. $A(x)$ in $\boldsymbol{N}_p$ si deve avere

$$A(x) = \Sigma x_i A(u_i) = \Sigma a_i x_i \qquad \text{(posto } A(u_i) = a_i)$$

dove la serie deve risultare convergente. Distinguiamo allora i due casi $p > 1$, $p = 1$.

α) Sia $p > 1$. Da un teorema di Landau ([32]), facile conseguenza di una seconda diseguaglianza di Minkowski, segue che condizione necessaria e sufficiente per la detta convergenza è che converga la serie $\Sigma |a_i|^q$ dove $q = \frac{p}{p-1}$ $\left(\text{ossia } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. Tale condizione è anche sufficiente per la continuità della funzione additiva $\Sigma a_i x_i$ perchè dalla medesima diseguaglianza si ha pure

$$|\Sigma a_i x_i| \leq k \bmod x, \quad k = \{\Sigma |a_i|^q\}^{1/q}.$$

Si ha (l. c.) anzi l'eguaglianza per gli elementi della forma

$$x = \lambda \Sigma |a_i|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn} a_i \cdot u_i = \lambda y$$

ciò che prova anzitutto che è

$$\text{Nor } A = k = \{\Sigma |a_i|^q\}^{1/q}$$

segue anche che *su ogni iperpiano vi è un punto e uno solo che ha dall'origine la distanza minima*. Se infatti si ha l'iperpiano π di equazione $A(x) = c$, per un tal punto z deve aversi (n.° 6)

$$\bmod z = (0, \pi) = \frac{|A(z)|}{\text{Nor } A}$$

cioè $|A(z)| = \bmod z \text{ Nor } A$, e ciò richiede che sia $z = \lambda y$, dove λ si determinerà in modo unico mediante la condizione $A(z) = c$.

La cosa si può invertire: *dato un punto* z$\neq 0$ *vi è uno e un solo iperpiano* π *passante per* z *e distante dall'origine quanto ne dista* z. Scrivendo opportunamente l'equazione dell'iperpiano, tra i coefficienti a_i di essa e le coordinate z_i di z dovranno aver luogo le relazioni

$$z_i = |a_i|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn} a_i$$

([32]) Landau E., *Ueber einen Konvergenzsatz* (« Gött. Nachrichten », 1907, S. 25-27).

facilmente risolubili rispetto alle a_i perchè $\operatorname{sgn} z_i = \operatorname{sgn} a_i$ e

$$|z_i| = |a_i|^{\frac{1}{p-1}}$$

onde

$$a_i = |z_i|^{p-1} \operatorname{sgn} z_i.$$

Queste proprietà, che rendono la geometria di N_p per $p > 1$ assai analoga a quella euclidea, possono esprimersi anche nella forma: *per le sfere di* $\mathrm{N_p}$, *in ogni punto di contorno vi è uno e un solo iperpiano radente, e ogni iperpiano radente ha uno e un solo punto di radenza.*

Dai calcoli precedenti risulta anche associata ad una giacitura, cioè ad un fascio di iperpiani paralleli $A(x) = \text{cost.}$, una direzione, che è quella delle distanze dei punti dello spazio dagli iperpiani del fascio. Tale corrispondenza, analoga alla ordinaria ortogonalità, manca però di una delle proprietà di questa: se una direzione appartiene alla giacitura coniugata all'altra, questa non appartiene in generale alla giacitura coniugata alla prima. La relazione tra le due direzioni ha infatti la forma analitica

$$\Sigma x_i |y_i|^{p-1} \operatorname{sgn} y_i = 0.$$

Essa è simmetrica solo per $p = 2$, cioè per il notissimo spazio hilbertiano ([33]).

Da ciò che si è visto risulta anche che ad ogni f. a. c. $A(x) = \Sigma a_i x_i$ di N_p corrisponde un punto $\xi_A = (a_1 a_2 \ldots a_n \ldots)$ di un N_q e si ha precisamente

$$\text{Nor}\, A = \text{mod}\, \xi_A.$$

Viceversa, alla f. a. c. di N_q corrispondono gli elementi di N_p, con l'analoga relazione. Gli spazi N_p, N_q sono cioè mutualmente duali (n.° 19) e la reciprocità è perfetta. Per $p = 2$ è $q = 2$, cioè N_2 è duale di sè stesso; ciò sottolinea la particolare semplicità dello spazio hilbertiano.

22. β) Sia ora $p = 1$, ossia $\Sigma |x_i|$ convergente e $\text{mod}\, x = \Sigma |x_i|$. Si ottiene lo spazio che Fréchet chiama delle *serie assolutamente convergenti* e indica con $\boldsymbol{A}$ ([34]).

Qui la convergenza di $\Sigma a_i x_i$ richiede che le a_i siano limitate in modulo ([35]);

([33]) Cfr. nota ([16]) e anche « E. A. », pag. 83.

([34]) « E. A. », pag. 86.

([35]) Cfr. Hadamard, *Deux théorèmes d'Abel sur la convergence des séries* (« Acta Math. », 27, 1903, pag. 178).

ciò risulta del resto anche dalla condizione di continuità, secondo cui

$$|A(u_i)| \leq \text{Nor}\, A \bmod u_i = \text{Nor}\, A$$

cioè $|a_i| \leq \text{Nor}\, A$. Effettivamente, se le a_i sono limitate in modulo, convergendo $\Sigma |x_i|$, converge anche $\Sigma a_i x_i$, e si ha

$$|\Sigma a_i x_i| \leq \lim\sup |a_i| \cdot \Sigma |x_i|.$$

Si ha anzi facilmente

$$\text{Nor}\, A = \lim\sup |a_i|$$

per quanto non si possa sempre trovare un elemento y per cui si abbia precisamente

$$A(y) = \text{Nor}\, A \bmod y.$$

Qui dunque le distanze di un punto da un iperpiano non ammettono in generale un minimo, cioè le sfere posseggono iperpiani con radenza virtuale. Esiste però in ogni punto di una sfera almeno un piano radente; se infatti è $z \neq 0$ e sono z_i le coordinate di z, e si pone

$$A(x) = \Sigma\, \text{sgn}\, z_i \cdot x_i$$

l'iperpiano $A(x) = A(z)$ passa per z e la sua distanza dall'origine è $A(z) = \Sigma |z_i| = \bmod z$. Si potrebbe vedere che esso è l'unico iperpiano radente se gli z_i sono tutti $\neq 0$, mentre nel caso opposto ve ne sono infiniti.

Come spazio duale di $\boldsymbol{N}_1$ si presenta lo spazio delle successioni limitate in modulo, indicato da FRÉCHET con $\boldsymbol{D}_\omega$ [36]. Esso è un primo esempio di spazio non separabile, come ha dimostrato FRÉCHET in due modi. Noi possiamo qui dedurlo dal criterio del n.° 17: considerando l'aggregato dagli elementi le cui coordinate valgono 0 o 1, la distanza di due distinti di essi è 1, e d'altra parte l'aggregato stesso ha la potenza del continuo.

Questo aggregato è per $\boldsymbol{D}_\omega$ una base; se infatti la coordinata generica x_i si scrive in scrittura diadica

$$x_i = \Sigma \frac{\varepsilon_{ir}}{2^r} \qquad (\varepsilon_{ir} = 0 \text{ o } 1)$$

si ha facilmente:

$$x = \Sigma \frac{1}{2^r} (\varepsilon_{1r}, \varepsilon_{2r}, \ldots, \varepsilon_{nr}, \ldots)$$

dove gli elementi che compariscono nel secondo membro appartengono appunto all'aggregato.

---

(36) « E. A. », pag. 97.

Sono f. a. c. in $\boldsymbol{D}_\omega$ le espressioni $\Sigma a_i x_i$, dove $\Sigma |a_i|$ converge (n.° 19); non sembra facile decidere se vi siano, oltre queste, altre f. a. c..

23. *b)* È interessante anche il caso in cui si ammetta solo la convergenza della serie Σx_i e si ponga

$$\mathrm{mod}\, x = \limsup |s_i|, \quad s_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_i.$$

Si ottiene lo spazio $\boldsymbol{S}$ detto da Fréchet [37] delle *serie convergenti*; esso è separabile, con gli stessi elementi base u_i già considerati per gli $\boldsymbol{N}_p$ e si ha ancora

$$x = \Sigma x_i u_i.$$

Ne segue per le f. a. c. la forma

$$A(x) = \Sigma a_i x_i, \quad a_i = A(u_i);$$

le condizioni per le a_i si ricavano subito da un teorema di Hadamard [38], (che completa un noto teorema di Abel), secondo il quale, per la convergenza di $\Sigma a_i x_i$, per ogni Σx_i convergente, deve essere $\Sigma |a_i - a_{i+1}|$ convergente. Ciò potrebbe esprimersi dicendo che la successione delle a_i deve essere *a variazione limitata*; condizione che equivale a quella di essere differenza di due successioni non decrescenti limitate, e implica, in particolare, l'esistenza di $\lim a_i$.

Questa condizione porta anche la continuità della funzione additiva $\Sigma a_i x_i$, potendosi scrivere:

$$\sum_1^\infty a_i x_i = \lim_{n \to \infty} [a_1 s_1 + a_2(s_2 - s_1) + a_3(s_3 - s_2) + \ldots + a_n(s_n - s_{n-1})] =$$
$$= \lim_{n \to \infty} [(a_1 - a_2)s_1 + (a_2 - a_3)s_2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n)s_n + a_n s_n]$$

$$\left|\sum_1^\infty a_i x_i\right| \leq \limsup \left[\sum_1^{n-1} |a_i - a_{i+1}| + |a_n|\right] \cdot \limsup s_n .$$

E si ha precisamente

$$\mathrm{Nor}\, A = \limsup \left\{\sum_1^{n-1} |a_i - a_{i+1}| + |a_n|\right\}$$

come può vedersi ponendo $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = 0$ e scegliendo opportunamente $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

---

[37] « E. A. », pag. 84.

[38] Hadamard, loc. cit., pag. 179.

Le condizioni sono qui analoghe a quelle di N_1: non valendo in generale per alcun elemento y la

$$A(y) = \text{Nor}\, A \bmod y,$$

le sfere possono avere iperpiani con radenza virtuale; vi è però in ogni punto $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)$ un iperpiano radente. Formate infatti le somme parziali delle z_i se tra queste ve ne è una s_r massima in valore assoluto, si ponga

$$A(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_r,$$

altrimenti

$$A(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots;$$

si ha $A(z) = \bmod z$, $\text{Nor}\, A = 1$, donde la conclusione accennata.

Si può facilmente trasformare $\boldsymbol{S}$ nello spazio $\boldsymbol{S}'$ delle *successioni convergenti,* e considerare i duali di ambedue gli spazi, ma su ciò non insisteremo.

24. *c)* Da ciascuno degli spazi precedenti si può dedurre un altro spazio, che potrebbe dirsi *ridotto,* considerando del primo solo quegli elementi in cui da un certe punto in poi gli x sono nulli. Nel caso degli spazi $\boldsymbol{N}_p$ e $\boldsymbol{S}$ si ottengono così aggregati ovunque densi negli spazi originari, e quindi non chiusi; e perciò spazi *non completi.* E gli spazi originari sono i minimi spazi completi che li contengono.

Le f. a. c. negli spazi ridotti si possono evidentemente prolungare negli spazi da cui essi derivano, e sono quindi note.

Tutto ciò non vale per lo spazio $\boldsymbol{D}_\omega$; il suo ridotto non è denso in $\boldsymbol{D}_\omega$, ma in una sua varietà lineare, cioè quella delle successioni convergenti a zero (che è anche varietà lineare dello spazio $\boldsymbol{S}'$ considerato in *b)*); ed è questo perciò il minimo spazio completo che lo contiene.

d) Gli spazi $\boldsymbol{N}_p$, $\boldsymbol{S}'$, $\boldsymbol{D}_\omega$ e in generale tutti gli spazi definiti da coordinate, nei quali il modulo è funzione simmetrica di esse, ammettono un gruppo di *rotazioni*: le trasformazioni definite da una qualunque permutazione delle coordinate. Non è possibile distinguere queste trasformazioni in *movimenti* e *pseudomovimenti,* almeno secondo il criterio ordinario, poichè, come ha osservato VITALI [39], la distinzione delle sostituzioni in due classi secondo questo criterio non ha più luogo nel caso di infiniti elementi.

Ben inteso, non è esclusa l'esistenza di altre specie di rotazioni; per esempio

[39] VITALI G., *Sostituzioni sopra un'infinità numerabile di elementi* (« Boll. Mathesis », 1915, pag. 29-31).

nello spazio hilbertiano N_2 si definiscono rotazioni, e anzi le più generali, considerando un sistema v_i di elementi unitari a due a due ortogonali, tali da costituire una base, e facendo corrispondere all'elemento $(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots) = \Sigma x_i u_i$ l'elemento $\Sigma x_i v_i$ di cui si dimostra facilmente l'esistenza. Se i v_i non costituiscono una base, la corrispondenza non è invertibile, e può dirsi secondo la nomenclatura di PINCHERLE, rotazione *degenere di 1ª specie.*

V. Altri esempi: spazi funzionali.

25. Più importanti degli esempi precedenti di spazi lineari sono quelli forniti da veri e proprii *spazi funzionali,* ove cioè gli elementi sono funzioni numeriche di un punto P variabile in un dominio σ (più generalmente in un aggregato) di un S_ν euclideo; in particolare funzioni di una variabile t in un intervallo.

La somma e il prodotto per un numero reale hanno sempre, come si comprende, il significato usuale. Numerosissimi sono i casi degni di nota per qualche riguardo; noi ci limitiamo qui agli esempi più caratteristici.

a) Tutte le funzioni limitate $x(P)$, definite in σ, con la posizione

$$\operatorname{mod} x = \lim\sup |x(P)|$$

formano uno spazio lineare F non separabile; infatti la funzione $x_Q(P)$ nulla in tutto σ salvo nel punto Q, ove vale 1, descrive al variare di Q un aggregato che ha la potenza del continuo e tale che la distanza di due suoi elementi è sempre 1.

b) Le funzioni sommabili nel dominio limitato σ, tali ehe la potenza di esponente $p \geq 1$ del loro valore assoluto è pure sommabile in σ, con la convenzione che $x = y$ significa che è $x(P) = y(P)$ quasi ovunque in σ, e con la posizione

$$\operatorname{mod} x = \left\{ \int_\sigma |x(P)|^p \, d\sigma(P) \right\}^{1/p}$$

costituiscono uno spazio L_p, che è tra i più importanti. Esso è separabile; ciò potrebbe ricavarsi, almeno per le funzioni di una variabile, indirettamente dalle ricerche di F. RIESZ ([40]) o dagli sviluppi in serie di funzioni ortogonali di HAAR ([41]) o anche dalla teoria della serie di FOURIER; una dimostrazione diretta ed elementare è la seguente:

([40]) La Memoria (M_2) è dedicata integralmente a questo spazio, per $p > 1$.

([41]) HAAR A., *Orthogonale Funktionensysteme*, Cap. III (« Math. Annalen », B. 69, 1910).

Sia prima σ un intervallo, che senza restringere la generalità potremo supporre sia $0 \vdash\!\!\dashv 1$, e si ponga:

$$u_r^{(n)}(t) = 1 \text{ in } \frac{r}{n} \vdash\!\!\dashv \frac{r+1}{n}, \quad u_r^{(n)}(t) = 0 \text{ nel complementare.}$$

Se allora x è un elemento di L_p, la funzione

$$s_n(t) = n \sum_0^{n-1} u_r^{(n)}(t) \int_{\frac{r}{n}}^{\frac{r+1}{n}} x(\tau) d\tau$$

vale per ogni t nell'intervallo:

$$s_n(t) = n \int_{\frac{[nt]}{n}}^{\frac{[nt]+1}{n}} x(\tau) d\tau = \frac{X\left(\frac{[nt]+1}{n}\right) - X\left(\frac{[nt]}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

ove si ponga

$$X(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau.$$

Ora in generale in ogni punto ove è $X'(t) = x(t)$, cioè quasi ovunque, si ha

$$\lim_{\substack{h \to +0 \\ k \to +0}} \frac{X(t+h) - X(t-k)}{h+k} = x(t)$$

e quindi in particolare:

$$\lim s_n(t) = x(t).$$

Sia ora $x(t)$ limitata: $|x(t)| < K$; segue subito

$$\left| \int_{\frac{[nt]}{n}}^{\frac{[nt]+1}{n}} x(\tau) d\tau \right| < \frac{K}{n}, \quad |s_n(t)| < K, \quad |x(t) - s_n(t)| < 2K$$

sicchè per ogni $p \geq 1$ (anzi $p > 0$) la funzione $|x(t) - s_n(t)|^p$ tende a zero quasi ovunque rimanendo inferiore a una quantità finita. Per il teorema di Arzelà-Lebesgue si ha perciò:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 |x(t) - s_n(t)|^p dt = 0$$

cioè

$$\lim_{n \to \infty} (x, s_n) = 0 \text{ in } L_p.$$

E poichè s_n è combinazione lineare delle $u_r^{(n)}$ il teorema per questo caso è dimostrato.

Se $x(t)$ non è limitata, si dica i_m l'aggregato dei punti in cui è $|x(t)| > m$, e si ponga

$$x_m(t) = 0 \text{ in } i_m, \quad x_m(t) = x(t) \text{ nel complementare.}$$

Sarà in L_p:

$$(x, x_m) = \left\{ \int_0^1 |x(t) - x_m(t)|^p d\tau \right\}^{1/p} = \left\{ \int_{i_m} |x(t)|^p dt \right\}^{1/p}$$

che tende a zero con $1/m$ poichè $|x(t)|^p$ è sommabile. Preso un $\varepsilon > 0$ esiste dunque un x_m tale che $(x, x_m) < \varepsilon/2$.

D'altra parte $x_m(t)$, che è limitata, è approssimabile mediante combinazioni lineari delle $u_r^{(n)}$, cioè esiste una siffatta combinazione y tale che $(x_m, y) < \varepsilon/2$. E si ha allora $(x, y) < \varepsilon$, ciò che completa la dimostrazione.

Nel caso di più variabili si deve prima considerare un dominio R rettangolare, per il quale il procedimento è quasi identico: basta dividere l'intervallo di ogni variabile in n parti uguali, con che R viene diviso in domini parziali, e definire in questi funzioni $u^{(n)}_{r_1 r_2 \ldots r_\nu}$ analoghe alle $u_r^{(n)}$ prima considerate. Al teorema $X'(t) = x(t)$ dovrà sostituirsi qui il noto teorema più generale sulla derivata di una funzione additiva d'intervallo.

Quando poi σ sia un qualunque dominio limitato, lo si chiuderà in un dominio rettangolare R, nel quale si prolungherà la funzione $x(P)$ ponendola eguale a zero in $R - \sigma$; e ci si ricondurrà così al caso precedente.

26. Le f. a. c. in L_p, che converrà qui chiamare con il nome usuale di *funzionali lineari* (continui) sono stati studiati prima per $p = 2$ da FRÉCHET, poi per $p > 1$ da RIESZ ([42]), che ha assegnato loro la forma:

$$A(x) = \int_\sigma x(P)\varphi(P) d\sigma(P)$$

dove $\varphi(P)$ è una funzione di $L_{\frac{p}{p-1}} = L_q$ (della stessa classe per $p = 2$). E si ha

$$\text{Nor } A = \text{mod } \varphi \text{ (in } L_q).$$

Sicchè, come per N_p, lo spazio duale di un L_p è un L_q e la dualità è perfetta.

([42]) (M_2), § 11.

L'evidente analogia tra L_p e N_p per $p > 1$ si estende alle proprietà delle sfere e dei loro iperpiani radenti; anche in N_p ogni sfera ha in un suo punto un iperpiano radente, e uno solo; ogni iperpiano radente ha un punto di contatto e uno solo. La verifica, sulla base della diseguaglianza data da Riesz come estensione di quella di Minkowski, non offre difficoltà. Se ne desume ancora una relazione che ha qualche analogia con l'ortogonalità ma che non è reciproca che per $p = 2$, caso notissimo.

Notiamo qui incidentalmente che dalla separabilità di L_2 segue una immediata dimostrazione del teorema di Schmidt secondo cui un sistema di elementi di L_2 a due a due ortogonali è finito o numerabile. Tale sistema può infatti ridursi al modulo 1 (*sistema normale*) e allora due elementi hanno distanza costante $= \sqrt{2}$ onde, per il n.° 17, esso è finito o numerabile.

27. Occupa un posto a parte il caso $p = 1$ per il quale cioè per la $x(P)$ è richiesta soltanto la sommabilità, e si pone

$$\operatorname{mod} x = \int_\sigma |x(P)|\, d\sigma(P).$$

In questo spazio $L_1 = L$ la forma dei funzionali lineari, nel caso di una variabile, è, secondo un teorema di Steinhaus ([43]), la seguente

$$A(x) = \int_a^b x(t)\varphi(t)dt$$

dove $\varphi(t)$ è sommabile nel dato intervallo $a \vdash\!\dashv b$ e limitata, o almeno *quasi limitata* cioè equivalente a una funzione limitata. Non sappiamo se la formula sia stata estesa al caso generale, ma la sua validità non pare dubbia, nè l'estensione difficile.

Ammettendo per ogni caso la formula

$$A(x) = \int_\sigma x(P)\varphi(P)d\sigma(P)$$

con $\varphi(P)$ limitata o quasi limitata, si riconosce che la norma di A coincide con il numero M che può chiamarsi limite superiore *effettivo* di $\varphi(P)$; cioè limite superiore quando si trascurino gli aggregati di misura nulla. Si ha infatti

([43]) Steinhaus H., *Additive und stetige Funktionaloperationen* (« Math. Zeitschrift », 5, 1919, pag. 186-221).

intanto

$$|A(x)| \leq M \int |x(P)| \, d\sigma(P) = M \operatorname{mod} x.$$

In secondo luogo, preso un $\varepsilon > 0$, si avrà $|\varphi(P)| > M - \varepsilon$ in un aggregato I di misura μ non nulla; posto allora $x(P) = \frac{1}{\mu} \cdot \operatorname{sgn} \varphi(P)$ in I, $x(P) = 0$ nel complementare, si avrà

$$A(x) = \frac{1}{\mu} \int_I |\varphi(P)| \, d\sigma(P) > M - \varepsilon$$

mentre

$$\operatorname{mod} x = \frac{1}{\mu} \int_I d\sigma(P) = 1.$$

Segue $A(x) > (M - \varepsilon) \operatorname{mod} x$, e quindi la tesi.

Anche in $\boldsymbol{L}$ le sfere hanno in ogni loro punto di contorno iperpiano radente; così alla sfera $\operatorname{mod} x = \operatorname{mod} y$ è radente nel punto y l'iperpiano

$$A(x) \equiv \int_\sigma x(P) \operatorname{sgn} y(P) d\sigma(P) = \operatorname{mod} y$$

giacchè è $\operatorname{Nor} A = 1$, $A(y) = \operatorname{mod} y$. Ma non vale in generale l'inverso; si può vedere infatti che per un iperpiano generico $A(x) = \operatorname{Nor} A$ radente alla sfera $\operatorname{mod} x = 1$ esiste punto di contatto soltanto se la corrispondente $\varphi(P)$ ha quasi ovunque valore assoluto costante; e vi sono allora infiniti punti di contatto.

Lo spazio duale di $\boldsymbol{L}$ è evidentemente lo spazio delle funzioni sommabili e quasi limitate in σ, con la posizione

$$\operatorname{mod} x = \lim \sup \operatorname{eff} |x(P)| \text{ in } \sigma.$$

Tale spazio non è separabile; sia infatti $P = (t_1 t_2 \dots t_\nu)$ e a, b il massimo e il minimo di t_1. Posto allora, per ogni λ in $a \vdash\!\dashv b$:

$$x_\lambda(P) = 0 \text{ per } t_1 < \lambda, \quad x_\lambda(P) = 1 \text{ per } t_1 \geq \lambda,$$

si ha un aggregato di elementi x_λ avente la potenza del continuo e tale che la distanza di due qualunque di essi è 1. Di qui (n.° 17) segue l'asserto.

28. Tutti gli spazi $\boldsymbol{L}_p$ ammettono movimenti almeno nel caso di una variabile; basta infatti in questo caso dividere l'intervallo di definizione in un numero finito di intervalli parziali e permutare questi in un modo qualsiasi, immaginando che ciascuno di essi porti con sè i valori di ogni funzione di L_p in esso definita. Si ottiene una trasformazione biunivoca che è lineare e conserva i moduli; essa conserva quindi le distanze, cioè è un movimento.

I movimenti di L_2 corrispondono a quelli dello spazio hilbertiano, a cui L_2 è astrattamente identico, e quindi si ha per essi un' espressione generale (n.° 24, *d*). Fra questi sono notevoli quelli studiati recentemente dal sig. DELSARTE ([44]), e che si possono esprimere con formule del tipo FREDHOLM:

$$\overline{x}(P) = x(P) + \int_\sigma K(P,\ Q)x(Q)d\sigma(Q).$$

29. Si può notare in L_p una interessante varietà lineare. Diciamo che una funzione di L_p è *armonica* se è equivalente ad una funzione armonica (e quindi continua) in ogni punto interno a σ. Le funzioni armoniche di L_p costituiscono un aggregato chiuso; infatti se una successione $x_n(P)$ di funzioni armoniche converge in media di ordine $p \geq 1$ verso una funzione $x(P)$ di L_p, la convergenza è uniforme ([45]) in ogni dominio interno a σ, sicchè la $x(P)$, per teoremi noti, è pure armonica entro ogni tale dominio, e quindi entro σ. E poichè la linearità dell' aggregato è evidente, si ha appunto una varietà lineare.

Considerata in sè, questa varietà è uno spazio lineare $L_p^{(a)}$ e poichè L_p,

---

([44]) DELSARTE J, *Les rotations fonctionnelles* (« Ann. Fac. Sc. Toulouse », s. 3, t. XIX, 1927, pag. 47-127) e anche: *Mémoire sur les groupes finis de rotations fonctionnelles* (« Rend, Circ. Mat. Palermo », LIII, 1929, pag. 135-216). Si avverta che in questi lavori il nome di rotazione vien dato solo ai movimenti della forma citata, senza ulteriori avvertenze.

([45]) Crediamo che per $p = 2$ la proprietà sia da attribuirsi a ZAREMBA (« Ann, Soc. Pol. », 1908). Una dimostrazione molto semplice è la seguente. Sia σ' un dominio interno a σ, e la distanza dei due contorni superiore al numero positivo R. Se P è un punto di σ', ω la sfera di centro P e raggio R, μ la sua misura, si ha per ogni funzione armonica $x(P)$ sommabile in σ

$$x(P) = \frac{1}{\mu}\int_\omega x(Q)d\sigma(Q), \quad |x(P)| \leq \frac{1}{\mu}\int_\omega |x(Q)|\,d\sigma(Q) \leq \frac{1}{\mu}\int_\sigma |x(Q)|\,d\sigma(Q)$$

e quindi, quando si tratti di L, $\max|x|$ in $\sigma' \leq \frac{1}{\mu} \operatorname{mod} x$. Ne segue, per una successione $u_n(x)$,

$$\max|u_i - u_k| \leq \frac{1}{\mu} \operatorname{mod}(u_i - u_k)$$

e di qui il teorema, per L. Per $p > 1$ mediante la diseguaglianza di MINKOWSKI-RIESZ applicata al prodotto $x(Q)\cdot 1$ si trova

$$\max|x| \text{ in } \sigma' \leq \frac{1}{\mu}\sigma^{\frac{\mu-1}{\mu}} \operatorname{mod} x$$

e si procede analogamente.

per il teorema di FISCHER-RIESZ generalizzato [46] è completo, segue subito che anche $L_p^{(a)}$ è completo. E dal teorema del n.° 18 segue allora che esso è anche separabile. Quest'ultimo risultato, cioè *l'esistenza di una base numerabile per le funzioni armoniche di* L_p ci sembra notevole perchè non si vede modo di ottenerlo per altra via.

30. Un altro spazio di importanza fondamentale è senza dubbio quello C delle funzioni continue nel dominio limitato σ, con la posizione:

$$\mathrm{mod}\, x = \max |x(P)| \text{ in } \sigma.$$

È ben noto che esso è completo e separabile; quest'ultima proprietà, meno evidente, si prova con mezzi elementarissimi [47].

Quanto ai funzionali lineari, essi sono espressi dalla formula

$$A(x) = \int_\sigma x(P) d\Omega$$

dove Ω è funzione additiva dei domini rettangolari di σ, ed è a variazione limitata. E si ha Nor $A =$ var. tot. Ω.

In particolare se Ω è assolutamente continua,

$$\Omega(\delta) = \int_\delta \varphi(P) d\sigma(P)$$

dove $\varphi(P)$ è sommabile, si ha più semplicemente:

$$A(x) = \int_\sigma x(P)\varphi(P) d\sigma(P), \quad \mathrm{Nor}\, A = \int_\sigma |\varphi(P)|\, d\sigma(P).$$

Nel caso di una variabile t, considerata nell'intervallo $a \vdash\!\dashv b$, si hanno le formule di F. RIESZ [48]:

$$A(x) = \int_a^b x(t) d\Theta(t), \quad \mathrm{Nor}\, A = \text{var. tot. } \Theta(t)$$

ove $\Theta(t)$ è a variazione limitata in $a \vdash\!\dashv b$.

---

[46] (M_2), § 7.

[47] E cioè assumendo come base una certa successione di funzioni lineari a tratti, come fanno FRÉCHET e RIESZ (M_1) nel caso di una variabile: per due variabili si può imitare il procedimento ricoprendo il dominio σ di una rete di triangoli a lati indefinitamente decrescenti, e analogamente nel caso generale.

[48] (M_1), III.

La struttura di C è assai diversa da quella euclidea e giova notarne alcune particolarità:

α) Le funzioni di C non negative e quelle non positive costituiscono due corpi convessi $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{N} = -\mathfrak{P}$. Essi sono coni, con il vertice nell'origine, perchè se x appartiene a $\mathfrak{P}$ o ad $\mathfrak{N}$, anche λx con $\lambda > 0$, vi appartiene. Evidentemente $\mathfrak{P}$ è definito da $\min x \geq 0$, $\mathfrak{N}$ da $\max x \leq 0$; ossia le corrispondenti funzioni (M) sono $-\min x$ e $\max x$.

β) I corpi $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{N}_1$ che si ottengono da $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{N}$ con le traslazioni che portano l'origine nei punti -1, $+1$ rispettivamente (funzioni costanti di valori -1, $+1$) corrispondono alle condizioni $\min x \geq -1$, $\max x \leq 1$; la loro parte comune è definita da $\max|x| < 1$, cioè è la sfera unitaria. I loro contorni si saldano nella regione delle funzioni che variano tra -1 e $+1$ raggiungendo gli estremi.

Poichè ogni sfera di C deriva dalla sfera unitaria per traslazioni e omotetie, si può dire che le sfere di C sono tutte intersezioni di coni; la congiungente dei vertici di questi coni ha una direzione fissa.

γ) È facile provare che gli iperpiani radenti a un cono passano per il suo vertice ([49]); in particolare gli iperpiani radenti al cono $\mathfrak{P}$ (e quindi a $\mathfrak{N}$) avranno un'equazione del tipo $A(x) = 0$, dove $A(x)$ è un funzionale lineare tale da assumere valori positivi per ogni x positiva (funzionale *di tipo positivo*) ([50]). Si ha un tale funzionale prendendo nelle formule precedenti la $\Omega(\delta)$ non negativa o la $\Theta(t)$ non decrescente.

In ogni punto del contorno di $\mathfrak{P}$ diverso dal vertice vi è almeno un iperpiano radente; se infatti $y(P)$ è non negativa e si annulla nel punto Q di σ, il funzionale $x(Q)$ si annulla per $x = y$ ed è positivo o nullo per ogni funzione di $\mathfrak{P}$. E se $y(P)$ si annulla in due punti Q e R, saranno radenti tutti gli iperpiani

$$\lambda x(Q) + \mu x(R) = 0 \quad \text{con} \quad \lambda > 0, \ \mu > 0.$$

Non vale però l'inverso; un iperpiano radente a $\mathfrak{P}$ può non avere oltre l'origine altri punti di radenza; tale è il caso dell'iperpiano

$$\int_\sigma x(P) d\sigma(P) = 0,$$

giacchè una funzione non negativa non può soddisfare a questa equazione ove

---

([49]) Poichè se il vertice avesse dall'iperpiano distanza $\varepsilon > 0$, si potrebbe trovare sul cono un punto avente distanza $< \varepsilon$, e la corrispondente generatrice taglierebbe l'iperpiano.

([50]) Nelle ipotesi del testo, F. Riesz [« Atti del Congresso Internazionale dei Matematici » (Bologna, 1928), T. III, pag. 143] chiama A un'*operazione positiva*.

non sia identicamente nulla. Si prova facilmente che ciò avviene quando la funzione additiva $\Omega(\delta)$ è nulla per qualche parte di σ, o la $\Theta(t)$ ha tratti di invariabilità ([51]).

Può viceversa un iperpiano radente avere un punto di radenza diverso dall'origine, quindi una generatrice di radenza, o anche infinite, le quali formano in ogni caso un aggregato convesso. Così $x(Q) = 0$ è radente a $\mathcal{S}$, e sono punti di radenza tutte le funzioni di C, non negative, che si annullano in Q. Sull'iperpiano esse formano un aggregato convesso che non appartiene a varietà lineari inferiori perchè ogni punto x dell'iperpiano appartiene al piano dell'origine e dei punti corrispondenti alle funzioni

$$|x(P)|, \quad |x(P)| - x(P)$$

che sono tre punti dell'aggregato. Non si tratta tuttavia di un corpo convesso (dell'iperpiano) perchè nessun punto vi è interno (cfr. n.° 8, nota).

δ) Trasportando queste osservazioni ai coni $\mathcal{S}_1$, $\mathfrak{N}_1$ e quindi alla sfera unitaria si vede che a questa sono radenti anzitutto gli iperpiani

$$A(x) = \pm \operatorname{Nor} A$$

dove $A(x)$ è un funzionale di tipo positivo, con almeno un punto di radenza, nel punto $x(P) = 1$ o $x(P) = -1$. In ogni punto vi è almeno un iperpiano radente di una di queste due categorie.

Se $A(x)$ non è funzionale di tipo determinato, l'equazione precedente rappresenta ancora un iperpiano radente, ma esso può avere un punto di radenza, oppur no. Così il funzionale $x(Q) - x(R)$ ha norma 2 e si ha $x(Q) - x(R) = 2$ per ogni funzione che ha il massimo 1 nel punto Q, il minimo -1 nel punto R. Invece il funzionale

$$A(x) = \frac{1}{\operatorname{mis} \sigma} \int_\sigma x(P) d\sigma(P) - x(Q)$$

pure di norma 2, non raggiunge mai questo valore per elementi unitari, come è facile vedere.

Il risultato generale è qui il seguente: la variazione positiva della $\Omega(\delta)$, come la negativa debbono annullarsi in un dominio parziale; in particolare $\Theta(t)$ avere intervalli di non crescenza e di non decrescenza ([52]).

([51]) Sia infatti $A(x) = 0$ dove A è operazione positiva e x non è nullo; se δ è un dominio parziale dove $x(P)$ ha minimo positivo μ, è $A(x) \geq \mu\Omega(\delta)$; quindi $\Omega(\delta) = 0$.

([52]) Detti A', A'' i funzionali (positivi) corrispondenti alle variazioni positiva e negativa di Ω, si ha $A'(x) - A''(x) = A(x)$, $\operatorname{Nor} A' + \operatorname{Nor} A'' = \operatorname{Nor} A$. Segue facilmente che se $|A(x)| = \max x \operatorname{Nor} A$ sarà $A'(x) = \pm \max x \operatorname{Nor} A'$, $A''(x) = \mp \max x \operatorname{Nor} A''$, e applicando il risultato della nota precedente si trova l'enunciato del testo.

e) Anche C ammette movimenti, almeno nel caso di una variabile. Si operi infatti un cambiamento di variabile $t = \alpha(t')$, continuo e invertibile, che muti la $x(t)$ in una $x[\alpha(t')] = \bar{x}(t')$, pure continua in $a \vdash\!\dashv b$; la trasformazione è lineare e conserva i moduli, quindi le distanze.

31. *f)* Nel considerare lo spazio duale di C ci limitiamo per semplicità al caso di una variabile t. Ad ogni funzionale lineare in C corrisponde una funzione a variazione limitata in $a \vdash\!\dashv b$ che non è però perfettamente determinata. La si definisce in modo unico fissando per es. che essa sia nulla nell'estremo a e che nei punti interni all'intervallo sia regolare, ossia si abbia

$$x(t+0) + x(t-0) = 2x(t).$$

Posto allora

$$\mathrm{mod}\, x = \text{var. tot.}\, x$$

si ottiene come spazio duale di C uno spazio V *non separabile*. Ed infatti, definiti per $a < \lambda \leq b$ gli elementi

$$x_\lambda(t) = 0 \text{ in } a \vdash\!\dashv \lambda, \quad x_\lambda(t) = 1 \text{ in } \lambda \vdash\!\dashv b$$

essi formano un aggregato avente la potenza del continuo e tale che la distanza di due elementi distinti è sempre 2.

Sono funzionali lineari in V le espressioni

$$A(x) = \int_a^b \varphi(t)\, dx(t)$$

dove $\varphi(t)$ è continua in $a \vdash\!\dashv b$ (n.° 19); ma si può qui affermare che esistono altri funzionali lineari non compresi in questa forma; per esempio

$$A(x) = x(a+0).$$

Applicando infatti l'espressione integrale di $A(x)$ alle x_λ considerate poco fa si otterrebbe $\varphi(\lambda) = 0$ per ogni $\lambda \neq 0$, e quindi anche per $\lambda = 0$; onde $A(x)$ identicamente nullo.

Si riconosce subito il legame di questo fatto con una importante questione, che è stata oggetto di studi importanti di LEBESGUE, JOUNG, RADON ed altri ([53]): la estensione dell'integrale di STIELTJES a funzioni discontinue. Il funzionale $x(a+0)$ è infatti esprimibile con un integrale di STIELTJES ove la $\varphi(t)$ è discon-

([53]) Cfr. LEBESGUE (H.), *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonction primitives*, 2ª ed. (Paris, Gauthiers-Villars, 1928), Cap. XI.

tinua, e viceversa in tutti i casi in cui si è definito l'integrale

$$Ax = \int_a^b \varphi(t) dx(t)$$

in modo da aver significato per *tutte* le funzioni a variazione limitata, si ha una limitazione del tipo

$$|A(x)| \leq M \text{ var. tot. } x$$

che assicura la continuità di $A(x)$ in V. Come è noto, il massimo campo in cui sinora si può scegliere la $\varphi(t)$ è quello delle funzioni misurabili B.

Come si vede, si prospetta qui un modo di impostare la questione circa l'estensione dell'integrale di Stieltjes che è alquanto diverso da quello di Lebesgue; e cioè come rappresentazione dei funzionali lineari in V per mezzo di una funzione ausiliaria, di cui la ricerca stessa dovrebbe determinare implicitamente il campo di variabilità. Vero è che tale ricerca non si presenta agevole a causa della non separabilità di V, dimostrata più sopra.

g) Anche in C è interessante notare l'aggregato delle funzioni armoniche entro σ e, naturalmente, continue al contorno. Esse formano, per teoremi notissimi, una varietà lineare, e quindi uno *spazio lineare* $C^{(a)}$ *completo*, e inoltre, per il n.° 18, *separabile*. Quest'ultima proprietà non è evidente; non sarebbe difficile provarla per i domini per cui è risolubile il problema di Dirichlet, ma non sapremmo indicare alcuna via per una dimostrazione generale.

32. *h)* Per dare un esempio per il caso di domini illimitati, si considerino le funzioni continue e limitate nell'intervallo $-\infty \frown +\infty$ con la posizione

$$\text{mod}\, x = \lim\sup |x(t)|.$$

Esse formano uno spazio lineare completo, C_∞, *non separabile*; quest'ultima proprietà si può ricavare dall'esame delle funzioni:

$$x_\lambda(t) = \text{sen}\, \lambda t.$$

Il loro aggregato ha la potenza del continuo e due elementi di esso hanno distanza non minore di 1 ([54]).

([54]) Se infatti si considerano le funzioni sen αt, sen βt con $\alpha \neq \beta$, e si determinano i valori della seconda nei punti dove la prima assume il valore 1, si trova, posto $\beta/\alpha = \omega$, l'espressione sen $(2k\pi\omega + \omega\pi/2)$. In essa gli archi formano una progressione aritmetica, quindi se ω non è intero i loro estremi sono ovunque densi sul cerchio unitario oppure dividono questo in parti uguali (almeno due). Perciò tra i detti valori ve ne è uno ≤ 0; per esso è sen αt - sen $\beta t \geq 1$. Se ω è intero, lo scambio di α con β riconduce al caso precedente.

i) Le funzioni continue periodiche in $-\infty \frown +\infty$ non formano uno spazio lineare, ma definiscono entro lo spazio C_∞ ora considerato una varietà lineare: quella delle funzioni continue approssimabili uniformemente mediante somme di funzioni periodiche. Poichè una funzione continua di t di periodo a si approssima quanto si vuole mediante polinomi trigonometrici in $\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{a}t$ e $\cos\frac{2n\pi}{a}t$, si vede che la stessa varietà è generabile partendo dalle funzioni $\operatorname{sen}\lambda t$, $\cos\lambda t$, con λ reale qualunque. Si ottiene così lo spazio delle *funzioni continue quasi periodiche*, studiate da H. Bohr appunto sotto questo aspetto, per quanto nella esposizione della sua teoria egli abbia preferito poi assumere come definizione di queste funzioni una loro complessa proprietà (Verschiebungs-eigenschaft) che ha il carattere di una periodicità approssimativa.

Neppure questo spazio è separabile, e lo prova l'esempio stesso delle funzioni $\operatorname{sen}\lambda t$ addotto per l'intero spazio C_∞. Esso ha tuttavia una base avente la potenza del continuo, che è quella delle funzioni $\operatorname{sen}\lambda t$, $\cos\lambda t$.

l) Oltre agli spazi considerati sono degni di nota varî spazi studiati da Banach e altri; come quello delle funzioni sommabili che sono la derivata del loro integrale indefinito (funzioni *duhameliane* di Banach); delle funzioni dotate di derivate $(n-1)^{esima}$ assolutamente continua e derivata n-^{esima} sommabile, o continua, ecc.. Si potrebbero poi trattare esempi presi nel campo delle funzioni complesse di variabile reale o complessa; dei vettori funzioni di punto o di vettore ecc., casi su cui pure non possiamo fermarci ma che possono pure avere notevole importanza. Tra questi sono ancora frequenti i casi di spazi separabili, ciò che ha per noi particolare interesse, essendo dedicati ad essi i Capitoli rimanenti della presente Memoria.

NOTA

Durante la stampa della presente Memoria sono venuto a conoscenza di due importanti lavori, uno di E. Helly, *Ueber Systeme linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten* (« Monatshefte für Math. u. Physik », B. XXXI, 1921, 60-91), l'altro di H. Hahn, *Ueber linearen Gleichungsysteme in linearen Räumen* (« Journal f. reine u. ang. Math. », B. 157, 1927, 214-229), i quali offrono con essa notevoli coincidenze, specialmente per alcune proposizioni del cap. VI.

Il sig. Helly è condotto da una sua ricerca alla risoluzione rispetto all'operatore lineare A di un sistema del tipo $A(x_r) = c_r$, in uno spazio separabile, che eseguisce in modo molto ingegnoso, giungendo all'estensione del teorema di Riesz che io trovo nel n.° 41 del cap. VI. Accenna pure allo spazio *polare* che è quello da me detto *duale*.

Più completi sono i risultati ottenuti dal sig. Hahn nella sua bella Memoria, in quanto nei suoi teor. II, III, IV, V sono contenuti i miei teoremi dei n.i 33, 36, 37 sulle varietà lineari; e nel seguito si hanno sviluppi notevoli sugli spazi duali; tutto ciò ottenuto prescindendo dall'ipotesi della separabilità. Debbo però notare che questa maggiore estensione si ottiene soltanto mediante l'uso essenziale dell'induzione transfinita e del principio di ZERMELO nella sua forma più ampia.

Mi duole che contributi così importanti siano sfuggiti alla mia attenzione, l'uno a causa del suo titolo, l'altro perchè non ancora recensito dal J. f. d. F. d. M., fonte a cui sono spesso costretto ad attenermi a causa delle mie gravose occupazioni. Mi sia lecito tuttavia ritenere che, sia per il metodo particolare di deduzione delle citate proprietà, fondato sul teorema dell'iperpiano radente a un corpo convesso (che non si trova, che io sappia, in precedenti lavori), sia per lo sviluppo dato alle interpretazioni geometriche, e sia per quanto di originale può trovarsi nelle altre parti della Memoria, essa abbia conservato pienamente la sua ragione d'essere.

(G. A.)

Über die Äquivalenz und Klassifikation der dynamischen Probleme.

(Nachtrag) von ERWIN SCHUNTNER (Wien).

Wenn das dynamische Problem n-ten Freiheitsgrades

$$\frac{dx_\nu}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_\nu},\quad \frac{dp_\nu}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_\nu} \qquad (\nu=1, 2, \dots n)$$

die $2n-1$ ersten zeitfreien Integrale

$$H_\nu(x\,|\,p)=c_\nu \qquad (1, 2, \dots 2n-1)$$

hat, so gestattet seine Differentialgleichungen also die Gruppe canonischer Berührungstransformationen, die durch die inf. Transformationen

$$(H_\nu f)\equiv\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial H_\nu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial H_\nu}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\right)$$

erzeugt wird.

Die zeitfreien Integrale bilden eine Funktionengruppe mit der Struktur

$$(H_i H_k)=\sum_{s=1}^{m-1} c_{ik}^{s} H_s.$$

Es ergibt sich nun die Frage, welchen Einfluss die Wahl der ersten Integrale auf diese Funktionengruppe besitzt. Wählt man statt der angegebenen $2n-1$ ersten Integrale andere, etwa $F_\nu(x\,|\,p)=k_\nu$ $(\nu=1, 2, \dots 2n-1)$, so müssen diese ihrerseits Funktionen der $H_1, H_2, \dots H_{2n-1}$ sein. Anstatt der $2n-1$ erzeugenden inf. Transformationen hat man nun

$$(F_\nu f)=\sum_{\rho=1}^{2n-1}\frac{\partial F_\nu}{\partial H_\rho}(H_\rho f). \qquad (\nu=1, 2, \dots 2n-1)$$

Man fällt also wieder auf die ursprünglichen inf. Transformationen zurück. Ebenso, wenn man die Poissonklammern mit zwei Integralen F bildet:

$$\begin{aligned}(F_i F_k)&=\sum_{\rho\tau}\frac{\partial F_i\,\partial F_k}{\partial H_\rho\,\partial H_\sigma}(H_\rho H_\sigma)\\ &=\sum_{\rho\sigma}\frac{\partial F_i\,\partial F_k}{\partial H_\rho\,\partial H_\sigma}\sum_{s=1}^{2n-1}c_{\rho\sigma}^{s}H_s.\end{aligned}$$

Es dreht sich dabei eben immer nur um verschiedene Darstellungsformen einer und derselben Funktionengruppe. Man weiss, dass man $2n-1$ Funktionen $F_1, F_2, \ldots F_{2n-1}$ derart wählen kann, dass die Relationen $(F_i F_k)$ sehr einfach gebaut sind: indem man von der Jacob'schen Form der « canonischen Integrale » des Problems ausgeht. Es ergibt sich bekanntlich, dass dann alle $(F_i F_k)$ entweder Null oder Eins werden, dass mit anderen Worten die Funktionengruppe der Integrale ihre canonische Form erhält.

Da man nun bei *allen* dynamischen Problemen gleichen Freiheitsgrades dieselbe canonische Darstellung erzielen kann, könnte es scheinen, als ob die Funktionengruppen, d. h. also auch die dynamischen Probleme, äquivalent wären. Sie sind es auch, nach einem Satz von LIE, wenn man *canonische* Transformationen zugrunde legt. Die Aequivalenz hört sofort auf, wenn man, wie dies hier geschieht, als berechtigte Transformationen lediglich *erweiterte Punkttransformationen* zulässt. Tut man dies, so ist es möglich, dass trotz formell gleichartiger Strukturkonstanten zwei Probleme dynamisch verschieden sind.

Die wesentliche Aufgabe bei Bestimmung aller canonischen Systeme eines bestimmten Freiheitsgrades liegt also darin, Funktionengruppen zu bestimmen, die miteinander nicht durch erweiterte Punkttransformationen ähnlich sind und in denen *eine* Funktion als Hamiltonfunktion figurieren kann.

Es sei schliesslich noch bemerkt, dass man eine in gewissem Sinne einfachere Darstellung der Aequivalenzfragen erreicht, wenn man nicht wie hier die Integrale in zeitfreie und ein die Zeit enthaltendes trennt, sondern über die Art der Integrale von vornherein keine Voraussetzung macht. Die eventuell als Variable auftretende Zeit t figuriert lediglich als Parameter und man hat es statt mit $2n-1$ gliedrigen Gruppen mit $2n$-gliedrigen zu tun. Prinzipiell ändert sich dadurch gar nichts. Zur Bestimmung *aller* dynamischen Probleme n-ten Freiheitsgrades hätte man alsdann alle, nicht durch erweiterte Punkttransformationen miteinander ähnliche Funktionengruppen in den Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ und den Parameter t zu bestimmen, von der Beschaffenheit, dass mindestens eine Funktion H_1 existiert, für die, unter $H_\nu = c_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots 2n)$ die Form der Funktionengruppe (die Integrale) verstanden,

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} + (H_1 H_\nu) = 0$$

identisch besteht.

Sur l'ordre de régularité de la croissance.

par N. Podtiaguine (a Praga).

---

1. Fonctions régulières. — Dans mon Mémoire: *Sur une classe de fonctions croissantes*, publié dans les « Annali di Matematica » (Serie IV, Tomo V, 1927-1928), j'ai considéré un mode nouveau de définir l'ordre de croissance des fonctions.

Soient $y = y(x)$ et $y_1 = y_1(x)$ deux fonctions d'une variable réelle x. Supposons que ces fonctions, étant finies pour toutes les valeurs finies de x, tendent vers $+\infty$ avec x et admettent des dérivées *positives* y' et y_1'. Nous disons avec M. Bortolotti [1] que *l'ordre* de croissance de y par rapport à y_1 est égal à k si la fonction

$$\nu = \frac{y'}{y} : \frac{y_1'}{y_1}$$

tend vers une limite k finie et différente de zéro quand x tend vers l'infini. Nous disons de même que cet ordre est égal à $\omega^n k$ si toutes les fonctions

$$\nu,\ \nu_1 = \frac{\nu'}{\nu} : \frac{y_1'}{y_1},\ \nu_2 = \frac{\nu_1'}{\nu_1} : \frac{y_1'}{y_1},\ \nu_3 = \frac{\nu_2'}{\nu_2} : \frac{y_1'}{y_1}, \dots,\ \nu_{n-1} = \frac{\nu'_{n-2}}{\nu_{n-2}} : \frac{y_1'}{y_1}$$

tendent vers $+\infty$ avec x, mais la fonction

$$\nu_n = \frac{\nu'_{n-1}}{\nu_{n-1}} : \frac{y_1'}{y_1}$$

tend vers une limite k finie et différente de zéro, lorsque x augmente indéfiniment. Enfin nous disons que l'ordre de croissance de y par rapport à y_1 est égal à $k^{-1}\omega^{-n}$ si l'ordre de croissance de y_1 par rapport a y est égal à $\omega^n k$.

J'ai indiqué dans le Mémoire cité quelques propriétés assez remarquables des fonctions $\nu, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ ainsi définies.

Dans le cas $y_1 = x$, c'est-à-dire quand on compare la croissance de la

---

(1) « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », v. 17, serie 5ª, pp. 244-245.

fonction y à celle de la variable indépendante x, les fonctions ν, ν_1, $\nu_2, \ldots, \nu_n$ prennent la forme plus simple:

$$\nu = \frac{xy'}{y}, \quad \nu_1 = \frac{x\nu'}{\nu}, \quad \nu_2 = \frac{x\nu_1'}{\nu_1}, \ldots, \quad \nu_n = \frac{x\nu'_{n-1}}{\nu_{n-1}}.$$

Nous dirons que la croissance de la fonction y est *régulière*, si l'ordre de croissance de y par rapport à x est égal à k (k est un nombre positif quelconque) ou $\omega^n k$, ou encore $k\omega^{-n}$. La fonction dont la croissance est régulière sera appelée par nous aussi *régulière*.

Dans mes deux Notes publiées dans les « Comptes rendus » (t. 183, pp. 945 et 1017) j'ai indiqué quelques propriétés remarquables des ces fonctions régulières. Dans mon Mémoire cité plus haut j'ai donné leur démonstration.

2. **L'ordre de régularité de la croissance.** — En ne considérant que des fonctions régulières, nous écartons de nos recherches un très grand nombre de fonctions croissantes. Mais il me semble qu'il est bien utile et même nécessaire de faire quelques restrictions: en étudiant la croissance des fonctions, de diviser toutes ces fonctions en plusieurs classes, afin de pouvoir étudier plus profondément la croissance des fonctions dans chacune de ces classes. C'est pour cette raison que je vais ranger toutes les fonctions croissantes régulières en plusieurs catégories en tenant compte de leur croissance *plus régulière ou moins régulière*. Pour cela nous allons introduire une nouvelle notion, celle de *l'ordre de régularité de la croissance des fonctions* (1).

La régularité de la croissance définie plus haut sera appelée par nous *la régularité du premier ordre.* Nous dirons que la fonction régulière $y(x)$ est une fonction *régulière du second ordre* s'il existe une limite *déterminée* et *finie* de l'expression

$$\frac{yy''}{y'^2}$$

quand x croît indéfiniment. Cette dernière limite sera appelée par nous *l'indice de régularité du second ordre* de la fonction $y(x)$.

Nous dirons ensuite que la fonction régulière $y(x)$ est une fonction *régulière du troisième ordre,* si la dérivée $y''(x)$ est toujours *positive* et si, en outre, il existe une limite *déterminée* et *finie* de l'expression

$$\frac{y'y'''}{y''^2}$$

(1) Voir ma Note dans les « Comptes rendus » (t. 185, 1927, p. 493).

quand x tend vers l'infini. Cette dernière limite sera appelée par nous *l'indice de régularité du troisième ordre* de la fonction $y(x)$.

En général, nous dirons que la fonction régulière $y(x)$ est une fonction *régulière du $n^{ième}$ ordre*, si toutes ses dérivées y', y'', $y'''\ldots$, $y^{(n-2)}$ sont des fonctions *indéfiniment croissantes*, si la dérivéé $y^{(n-1)}$ est toujours *positive* et si, en outre, il existe une limite *déterminée* et *finie* de l'expression

$$\frac{y^{(n-2)}y^{(n)}}{[y^{(n-1)}]^2}$$

pour $x = +\infty$. Nous appelerons cette dernière limite *l'indice de régularité du $n^{ième}$ ordre* de la fonction $y(x)$.

Dans le cas où la dérivée $y'(x)$ croît indéfiniment avec x, l'indice de régularité du second ordre de la fonction $y(x)$ admet une interprétation géométrique très simple: il est une limite du rapport de la sous normale de la courbe

$$y = y(x)$$

au point (x, y) au rayon de courbure de cette courbe au même point, quand ce point s'éloigne à l'infini. On a, en effet, pour cette limite

$$\lim_{x=\infty} \frac{yy'}{\dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}} = \lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} \cdot \lim \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{y'^2}\right)^{3/2}} = \lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2},$$

car on a dans ce cas

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{y'^2} = 0.$$

D'après ce qui précède, on ne voit pas encore qu'une fonction régulière d'un ordre déterminé soit aussi régulière d'un ordre quelconque inférieur. Ce sera démontré par nous un peu plus tard. Maintenant, nous allons démontrer une propriété fondamentale des indices de régularité des fonctions.

Propriété fondamentale des indices de régularité de la croissance. — *Aucun des indices de régularité de la croissance ne peut être supérieur à un.*

En effet, supposons, par exemple, que l'indice de régularité du $n^{ième}$ ordre de la fonction $y(x)$ soit supérieur à un. Dans ce cas il existe toujours un nombre positif ε et une valeur x_0 de x telle qu'on a

$$\frac{y^{(n-2)}y^{(n)}}{[y^{(n-1)}]^2} > 1 + \varepsilon$$

pour toutes les valeurs de x supérieures à x_0. On a donc

$$\frac{y^{(n)}}{y^{(n-1)}} > (1+\varepsilon)\frac{y^{(n-1)}}{y^{(n-2)}},$$

$y^{(n-1)}$ et $y^{(n-2)}$ étant toujours supérieurs à zéro.

En intégrant cette inégalité entre deux valeurs x et x_1 ($x > x_1 > x_0$) de la variable indépendante x, on aura

$$y^{(n-1)} > a\,[y^{(n-2)}]^{1+\varepsilon}$$

où a est une constante positive. En intégrant encore une fois cette inégalité entre les mêmes valeurs x et x_1 de la variable x, on aura

$$x < \frac{1}{a}\int_{y^{(n-2)}(x_1)}^{y^{(n-2)}(x)} \frac{dy^{(n-2)}}{[y^{(n-2)}]^{1+\varepsilon}} + x_1$$

pour toutes les valeurs de x. Mais ceci est impossible, car l'intégrale du second membre de cette inégalité est finie pour $x = +\infty$.

La propriété fondamentale des indices, dont la vérité vient d'être établie, permet démontrer facilement que la fonction d'un ordre déterminé de sa régularité sera aussi régulière d'un ordre quelconque inférieur. Il suffit pour cela évidemment démontrer que de l'existence d'une limite déterminée et finie de l'expression

$$\frac{y^{(n-2)}y^{(n)}}{[y^{(n-1)}]^2}$$

pour $x = +\infty$, il suit l'existence d'une limite déterminée et finie de l'expression

$$\frac{y^{(n-3)}y^{(n-1)}}{[y^{(n-2)}]^2}.$$

Posons

$$\lim_{x=\infty}\frac{y^{(n-2)}y^{(n)}}{[y^{(n-1)}]^2} = \alpha_n$$

et cherchons la limite du rapport

$$\frac{[y^{(n-2)}]^2}{y^{(n-3)}y^{(n-1)}}. \tag{1}$$

En le mettant sous la forme

$$\frac{[y^{(n-2)}]^2}{y^{(n-1)}} : y^{(n-3)},$$

nous aurons d'après le théorème de STOLZ [1]

$$\lim_{x=\infty} \frac{\dfrac{[y^{(n-1)}]^2}{y^{(n-1)}}}{y^{(n-3)}} = \lim_{x=\infty} \frac{2y^{(n-2)} - \dfrac{[y^{(n-2)}]^2 y^{(n)}}{[y^{(n-1)}]^2}}{y^{(n-2)}} = \lim_{x\infty}\left[2 - \frac{y^{(n-2)}y^{(n)}}{[y^{(n-1)}]^2}\right] = 2 - \alpha_n.$$

Il existe donc une limite déterminée et finie du rapport (1). Puisque $\alpha_n \leq 1$, cette limite ne peut être d'ailleurs moins que un. Nous pouvons donc écrire

$$\lim_{x=\infty} \frac{y^{(n-3)}y^{(n-1)}}{[y^{(n-2)}]^2} = \frac{1}{2-\alpha_n}.$$

Notre proposition est ainsi démontrée.

En posant

$$\lim_{x=\infty} \frac{y^{(n-3)}y^{(n-1)}}{[y^{(n-2)}]^2} = \alpha_{n-1},$$

nous trouvons de l'égalité précédente

$$\alpha_{n-1} = \frac{1}{2-\alpha_n}.$$

Cette dernière égalité nous donne une relation simple entre les indices de régularité de la croissance de la fonction $y(x)$:

$$\alpha_{p-1} = \frac{1}{2-\alpha_p} \qquad (p = 3, 4, 5, ..., n).$$

Il suit de la définition de l'ordre de règularité de la croissance des fonctions que la fonction $y(x) = x$, c'est-à-dire la variable indépendante elle-même est une fonction régulière du second ordre.

Il est facile de montrer que toute fonction régulière $y(x)$, dont l'ordre de croissance est égal à $k\omega^{-n}$ [2], ne peut être régulière du second ordre. En effet, on a pour cette fonction

$$(2) \qquad \lim_{x=\infty} \nu(x) = \lim_{x=\infty} \frac{xy'}{y} = 0.$$

Or, en supposant l'existence d'une limite finie de l'expression

$$\frac{yy''}{y'^2}$$

[1] *Grundzüge der Differential-und Integralrechnung.* Erster Theil. Leipzig, 1893, p. 77.

[2] Quand nous disons simplement: « l'ordre de croissance de la fonction $y(x)$ », nous supposons toujours que la croissance de $y(x)$ est considérée par rapport à la variable indépendante x.

pour $x = +\infty$, on aura d'après le théorème de STOLZ indiqué plus haut:

$$\lim_{x=\infty} \nu(x) = \lim_{x=\infty} \frac{xy'}{y} = \lim_{x=\infty} \frac{y' + xy''}{y} = \lim_{x=\infty} \left[1 + \nu(x) \cdot \frac{yy''}{y'^2}\right] = 1,$$

ce qui est contraire à l'égalité (2).

De même, on peut démontrer que toute fonction régulière $y(x)$, dont l'ordre de croissance est égal à $\omega^n k$, est une fonction régulière au moins du second ordre. En effet, on a pour cette fonction $y(x)$

$$\lim_{x=\infty} \nu(x) = +\infty, \ \lim_{x=\infty} \nu_1(x) = +\infty, \ldots, \ \lim_{x=\infty} \nu_{n-1}(x) = +\infty, \ \lim_{x=\infty} \nu_n(x) = k.$$

Or

$$\nu_1(x) = \frac{x\nu'(x)}{\nu(x)} = 1 + \frac{xy''}{y'} - \frac{xy'}{y}$$

ou

$$\nu_1 = 1 + \left(\frac{yy''}{y'^2} - 1\right) \cdot \nu.$$

Donc

$$\frac{yy''}{y'^2} - 1 = \frac{\nu_1 - 1}{\nu} = \frac{\nu_1}{\nu} - \frac{1}{\nu}.$$

Il en suit que

$$\lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = 1,$$

puisque

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu_1}{\nu} = 0 \ (^1).$$

Donc la fonction $y(x)$ est bien une fonction régulière au moins du second ordre et son indice de régularité du second ordre est égal a un.

On peut démontrer de même, que si $n \geq 2$, la fonction $y(x)$ est une fonction régulière au moins du troisième ordre.

3. **Exemples.** — 1°) Pour la fonction

$$y = x^3 + x \log x$$

on a

$$\nu(x) = \frac{3x^2 + \log x + 1}{x^2 + \log x},$$

(1) « Annali di matematica », Serie IV, T. V., p. 208; « Comptes rendus », t. 183, p. 341.

d'où

$$\lim_{x=\infty} \nu(x) = 3.$$

Donc y est une fonction régulière et son ordre de croissance est égal à 3. Nous avons ensuite

$$y' = 3x^2 + \log x + 1; \quad y'' = 6x + \frac{1}{x}; \quad y''' = 6 - \frac{1}{x^2}; \quad y^{\text{IV}} = \frac{2}{x^3}.$$

Puisque y''' n'est déjà plus une fonction infiniment croissante, la fonction y peut être régulière du quatrième ordre au plus. Mais nous avons pour cette fonction y

$$\alpha_2 = \lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = \lim_{x=\infty} \frac{(x^3 + x\log x)\left(6x + \frac{1}{x}\right)}{(3x^2 + \log x + 1)^2} = \frac{2}{3},$$

$$\alpha_3 = \lim_{x=\infty} \frac{y'y'''}{y''^2} = \lim_{x=\infty} \frac{(3x^2 + \log x + 1)\left(6 - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(6x + \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_4 = \lim_{x=\infty} \frac{y''y^{\text{IV}}}{y'''^2} = \lim_{x=\infty} \frac{\left(6x + \frac{1}{x}\right)\cdot \frac{2}{x^3}}{\left(6 - \frac{1}{x^2}\right)^2} = 0.$$

Nous voyons ainsi que l'ordre de régularité de la fonction y est égal, en effet, à 4.

2°) Pour la fonction

$$y = \sqrt{x^5} + \sqrt[3]{x^2} + 1$$

on a

$$y' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}; \quad y'' = \frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{1}{4}}; \quad y''' = \frac{15}{8}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{8}{27}x^{-\frac{7}{3}};$$

$$y^{\text{IV}} = -\frac{15}{16}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{56}{81}x^{-\frac{10}{3}}; \quad \lim_{x=\infty} \nu(x) = \frac{\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{2}{3}} + 1} = \frac{5}{2}.$$

Donc la fonction y est régulière et son ordre de régularité peut être égal à 4 au plus, car ce ne sont que les dérivées y' et y'' qui croissent infiniment avec x. D'ailleurs, cet ordre est égal à 4, puisque on a

$$\alpha_2 = \lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = \frac{3}{5}; \quad \alpha_3 = \lim_{x=\infty} \frac{y'y'''}{y''^3} = \frac{1}{3}; \quad \alpha_4 = \lim_{x=\infty} \frac{y''y^{\text{IV}}}{y'''^2} = -1.$$

3°) En posant

$$y = x^4 - x \sin x,$$

nous aurons

$$y' = 4x^3 - x\cos x - \sin x; \quad y'' = 12x^2 + x\sin x - 2\cos x;$$
$$y''' = 24x + x\cos x + 3\sin x; \quad y^{\text{IV}} = 24 - x\sin x + 4\cos x,$$

d'où

$$\lim_{x=\infty} \nu(x) = \lim_{x=\infty} \frac{4x^3 - x\cos x - \sin x}{x^3 - \sin x} = 4,$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = \lim_{x=\infty} \frac{12x^6 + x^5\sin x - 2x^4\cos x - 12x^3\sin x - x^2\sin^2 x + x\sin 2x}{16x^6 - 8x^4\cos x - 8x^3\sin x + x^2\cos^2 x + x\sin 2x + \sin^2 x} = \frac{3}{4}.$$

Quant à l'expression $\dfrac{y'y'''}{y''^2}$, on a

$$\frac{y'y'''}{y''^2} = \frac{96 + 4\cos x + \dfrac{12\sin x}{x} - \dfrac{24\cos x + \cos^2 x}{x^2} - \dfrac{2\sin 2x + 24\sin x}{x^3} - \dfrac{3\sin^2 x}{x^4}}{144 + \dfrac{24\sin x}{x} + \dfrac{\sin^2 x - 48\cos x}{x^2} - \dfrac{2\sin 2x}{x^3} + \dfrac{4\cos^2 x}{x^4}}.$$

Elle ne tend donc à aucune limite déterminée, lorsque x augmente indéfiniment. Nous en concluons que la fonction y est une fonction régulière du second ordre.

4°) On peut montrer analoguement que la fonction

$$y = x^3 - x\cos x + \sin x$$

est une fonction régulière du premier ordre seulement.

4. Quelques propriétés des indices de régularité des fonctions. — Nous avons vu que les indices de régularité

$$\alpha_2, \ \alpha_3, \ \alpha_4, \ldots, \ \alpha_n \tag{3}$$

d'une fonction $y(x)$ régulière du $n^{\text{ième}}$ ordre vérifient l'égalité

$$\alpha_{p-1} = \frac{1}{2 - \alpha_p}. \qquad (p = 3, 4, 5, \ldots, n) \tag{4}$$

Puisque l'indice α_p ne peut être supérieur à un, nous en concluons que l'indice α_{p-1} doit être necessairement *positif.* Donc, *parmi les indice* (3) *tous, sauf le dernier, doivent être positifs; ce n'est que le dernier qui peut être négatif ou égal à zéro* [1].

---

[1] C'est ce que nous avons vu dans les deux premiers exemples du numéro précédent.

En mettant la formule (4) sous la forme

$$\alpha_p = 2 - \frac{1}{\alpha_{p-1}} \qquad (p = 3, 4, 5, \dots, n)$$

et donnant à p successivement les valeurs 3, 4, 5,..., p, nous obtenons

$$\alpha_3 = 2 - \frac{1}{\alpha_2},\ \alpha_4 = 2 - \frac{1}{\alpha_3},\ \alpha_5 = 2 - \frac{1}{\alpha_4}, \dots,\ \alpha_p = 2 - \frac{1}{\alpha_{p-1}},$$

d'où

(5) $$\alpha_3 = \frac{2\alpha_2 - 1}{\alpha_2},\ \alpha_4 = \frac{3\alpha_2 - 2}{2\alpha_2 - 1},\ \alpha_5 = \frac{4\alpha_2 - 3}{3\alpha_2 - 2}, \dots,$$

(6) $$\alpha_p = \frac{(p-1)\alpha_2 - (p-2)}{(p-2)\alpha_2 - (p-3)}.$$

La formule (6) nous donne une relation entre un indice quelconque α_p et l'indice α_2.

En multipliant les égalités (5) et (6), nous obtenons une relation entre tous les indices (3):

(7) $$\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \dots \alpha_p = (p-1)\alpha_2 - (p-2).$$

Elle est vraie pour toutes les valeurs de p égales à 2, 3, 4,..., n.

Les formules (6) et (7) nous permettent de faire quelques conclusions assez intéressantes.

En supposant dans la formule (6) $\alpha_2 = 1$, on a

$$\alpha_p = 1$$

pour toutes valeurs de p. Donc, *si la fonction est régulière du $n^{\text{ième}}$ ordre et si son indice de régularité du second ordre α_2 est égal à un, tous les indices de régularité suivants seront aussi égaux à un.*

La dérivée par rapport à p de la fonction formant le second membre de l'égalité (6) est égale à

$$-\frac{(1-\alpha_2)^2}{[(p-2)\alpha_2 - (p-3)]^2}.$$

Elle est négative pour $\alpha_2 < 1$ et n'est égale à zéro que pour $\alpha_2 = 1$. Par conséquent, *les indices $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n$ vont toujours en décroissant pour $\alpha_2 < 1$ et ne sont égaux que pour $\alpha_2 = 1$.*

Supposons maintenant que $\alpha_2 < 1$. Puisque dans ce cas l'inégalité

$$(p-1)\alpha_2 - (p-2) \leq 0$$

aura lieu pour

$$p \geq \frac{2-\alpha_2}{1-\alpha_2},$$

la formule (7) nous montre que le produit

(8) $$\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_p$$

sera égal à zéro, si

(9) $$p = \frac{2-\alpha_2}{1-\alpha_2}$$

et sera négatif, si

(10) $$p > \frac{2-\alpha_2}{1-\alpha_2}.$$

Mais nous avons déjà vu que, parmi les indices (8), ce n'est que le dernier qui peut être négatif on égal à zéro. Nous voyons ainsi que l'indice α_p sera égal à zéro, si p vérifie l'égalité (9), et est négatif, si p vérifie l'inégalité (10).

Nous arrivons donc à cette conclusion: *si l'expression*

$$\frac{2-\alpha_2}{1-\alpha_2}$$

est un nombre entier, l'ordre de régularité de la fonction y(x) *ne peut lui être supérieur; si cette expression est un nombre fractionnaire, l'ordre de régularité de la fonction* y(x) *ne peut être supérieur au nombre entier suivant.*

5. **La relation entre les indices de régularité d'une fonction et son ordre de croissance.** — Pour trouver cette relation, supposons d'abord que l'ordre de croissance d'une fonction $y(x)$ par rapport à une autre fonction $y_1(x)$ soit égal à un nombre quelconque k fini et différent de zéro et supposons, en outre, que ces fonctions $y(x)$ et $y_1(x)$ soient des fonctions réguliéres au moins du second ordre. On aura dans ce cas

$$\lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = \alpha_2, \quad \lim_{x=\infty} \frac{y_1 x_1''}{y_1'^2} = \beta_2,$$

α_2 et β_2 étant des nombres finis.

Puisque l'ordre de croissance de la fonction $y(x)$ par rapport à la fonction $y_1(x)$ est égal à k, on a

$$\lim_{x=\infty} \nu(x) = \lim_{x=\infty} \left(\frac{y'}{y} : \frac{y_1'}{y_1}\right) = k.$$

Or, le théorème de STOLZ que nous avons mentionné plus haut nous donne

$$\lim_{x=\infty} \nu(x) = \lim_{x=\infty} \frac{\frac{y'y_1}{y_1'}}{y} = \lim_{x=\infty} \frac{\frac{y''y_1 + y'y_1'}{y_1'} - \frac{y'y_1y_1''}{y_1'^2}}{y'} =$$

$$= \lim_{x=\infty} \left[1 - \frac{y_1y_1''}{y_1'^2} + \frac{yy''}{y'^2}\left(\frac{y'}{y} : \frac{y_1'}{y_1}\right)\right] = 1 - \beta_2 + k\alpha_2 .$$

Nous avons donc

$$k = 1 - \beta_2 + k\alpha_2 ,$$

d'où

(11) $$\alpha_2 = 1 + \frac{\beta_2 - 1}{k} .$$

puisque k est fini et différent de zéro.

L'égalité ci-dessus nous donne une relation entre les indices α_2 et β_2 de régularité des fonctions $y(x)$ et $y_1(x)$ et l'ordre de la croissance de la fonction $y(x)$ par rapport à la fonction $y_1(x)$. Nons l'avons trouvée en supposant l'existence de la limite déterminée et finie de la fonction $\nu(x)$. Nous allons maintenant démontrer qu'elle existe toujours, même si

$$\lim_{x=\infty} \nu(x) = +\infty .$$

Il nous faut pour cela démontrer que si

(12) $$\lim_{x=\infty} \nu(x) = +\infty$$

on a

$$\alpha_2 = 1.$$

Supposons donc qu'ait lieu l'égalité (12). Il est évident que nous avons dans ce cas

$$\nu'(x) > 0$$

pour au moins une suite de valeurs de x tendant vers l'infini.

Nous avons d'ailleurs

$$\nu'(x) = \frac{(y''y_1 + y'y_1')yy_1' - y'y_1(y'y_1' + yy_1'')}{(yy_1')^2} = \frac{y_1y'^2}{y^2y_1'}\left[\frac{yy''}{y'^2} + \frac{1}{\nu(x)} - 1 - \frac{y_1y_1''}{y_1'^2} \cdot \frac{1}{\nu(x)}\right].$$

Il résulte donc de ce que nous venons de dire que l'inégalité

$$\frac{yy''}{y'^2} > 1 - \frac{1}{\nu(x)} + \frac{y_1y_1''}{y_1'^2} \cdot \frac{1}{\nu(x)}$$

est vérifiée pour l'infinité de valeurs de x tendant vers l'infini. Mais

$$\lim_{x=\infty} \nu(x) = +\infty, \quad \lim_{x=\infty} \frac{y_1 y_1''}{y_1'^2} = \beta_2,$$

β_2 étant fini. Donc pour au moins une suite de valeurs de x tendant vers l'infini on aura

$$\frac{yy''}{y'^2} > 1 - \varepsilon.$$

quelque petit que soit le nombre positif ε.

Il en résulte que

$$\alpha_2 \geq 1,$$

car nous avons supposé que la limite de $\frac{yy''}{y'^2}$ existe et soit égale à α_2.

Mais nous savons que α_2 ne peut être supérieur à un. Donc, α_2 est bien égal à un et la formule (11) existe toutes les fois qu'il existe des limites déterminées et finies de deux expressions

$$\frac{yy''}{y'^2} \quad \text{et} \quad \frac{y_1 y_1''}{y_1'^2}.$$

Si nous posons

$$y_1(x) = x,$$

c'est-à-dire si nous considérons l'ordre de la croissance de la fonction $y(x)$ par rapport à la variable indépendante x, nous aurons $\beta_2 = 0$ et la formule (11) prend la forme plus simple

$$\alpha_2 = 1 - \frac{1}{k}. \tag{13}$$

Cette formule nous montre une relation très simple entre l'indice de régularité du second ordre de la fonction $y(x)$ et l'ordre de la croissance de cette fonction. Elle nous montre que si l'ordre de la croissance de la fonction $y(x)$ est inférieur à un, l'indice de régularité du second ordre de cette fonction est négatif. Si celui-ci est égal à un, cet indice est égal à zéro. Enfin, si l'ordre de la croissance de $y(x)$ est supérieur à un, ledit indice est positif. Quand l'ordre de la croissance de $y(x)$ croît, l'indice de sa régularité du second ordre croît aussi. Mais pendant que l'ordre de la croissance de $y(x)$ reste fini, il est toujours moindre que un.

En remplaçant dans la formule (6) α_2 par sa valeur donnée par la formule (11), nous parvenons à la formule

$$\alpha_p = 1 - \frac{1 - \beta_2}{k - (p-2)(1-\beta_2)},$$

qui donne la relation entre l'indice de régularité du $p^{ième}$ ordre de la fonction $y(x)$ et son ordre de croissance par rapport à la fonction $y_1(x)$. En posant ici $y_1(x) = x$, on trouve la formule plus simple

(14) $$\alpha_p = 1 - \frac{1}{k - p + 2}.$$

Cette formule nous montre que dans le cas où l'ordre de croissance de la fonction $y(x)$ s'exprime par un nombre entier, l'indice α_p est égal à zéro pour $p = k + 1$. Si cet ordre est fractionnaire, l'indice α_p est négatif pour $p > k + 1$. Nous en concluons que pour k entier, l'ordre de régularité de la fonction $y(x)$ ne peut être supérieur à $k + 1$, et pour k fractionnaire cet ordre ne peut être supérieur au nombre entier situé immediatement après le nombre $k + 1$.

La substitution de la valeur de l'indice α_2 donnée par la formule (11) dans la formule (7) nous donne l'égalité

$$\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ldots\ldots \alpha_p = \frac{k - (p-1)(1-\beta_2)}{k},$$

d'où nous trouvons encore une formule

$$k\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ldots\ldots \alpha_p = k - (p - 1)(1 - \beta_2)$$

qui donne l'expression pour le produit de l'ordre de croissance de la fonction $y(x)$ par rapport à la fonction $y_1(x)$ et de tous les indices $\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ldots\ldots \alpha_p$.

Pour $y_1(x) = x$ cette formule prend la forme

$$k\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ldots\ldots \alpha_p = k - p + 1.$$

Ayant indiqué les propriétés fondamentales des indices de régularité des fonctions, nous allons étudier les propriétés des fonctions régulières dont l'ordre de régularité est supérieur à un. Nous commencerons par les opérations fondamentales sur ces fonctions.

6. Les opérations fondamentales sur les fonctions régulières du second ordre (1). THÉORÈME 1. — *Soient* $\mathrm{y}_1(\mathrm{x})$ *et* $\mathrm{y}_2(\mathrm{x})$ *deux fonctions régulières du second ordre dont les ordres de croissance sont finis. Si l'ordre de croissance de la fonction* $\mathrm{y}_2(\mathrm{x})$ *par rapport à la fonction* $\mathrm{y}_1(\mathrm{x})$ *est inférieur ou égal à un, la somme de ces fonctions*

(15) $$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

(1) Voir ma Note dans les « Comptes rendus » (t. 185, 1927, p. 753).

est une fonction régulière au moins du second ordre et son indice de régularité du second ordre est égal à celui de la fonction $y_1(x)$.

Nous allons démontrer préalablement que dans ce cas l'ordre de croissance de la fonction $y(x)$ par rapport à $y_1(x)$ est égal a un.

On a, en effet,

$$y = y_1\left(1 + \frac{y_2}{y_1}\right),$$

d'où, en prenant la dérivée logarithmique, on trouve

$$\frac{y'}{y} = \frac{y_1'}{y_1} + \frac{1}{1 + \frac{y_2}{y_1}}\left[\frac{y_2'}{y_1} - \frac{y_2 y_1'}{y_1^2}\right]$$

ou

$$\frac{y'}{y} : \frac{y_1'}{y_1} = 1 + \frac{\frac{y_2'}{y_2} : \frac{y_1'}{y_1} - 1}{1 + \frac{y_1}{y_2}}. \tag{16}$$

Supposons tout d'abord que l'ordre de croissance de la fonction $y_2(x)$ par rapport à la fonction $y_1(x)$ soit inférieur à un. On a dans ce cas

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{y_2'}{y_2} : \frac{y_1'}{y_1}\right) = k < 1.$$

Il en résulte que

$$\lim_{x=\infty}\frac{\log y_2}{\log y_1} = \lim_{x=\infty}\left(\frac{y_2'}{y_2} : \frac{y_1'}{y_1}\right) = k.$$

Nous avons donc à partir d'une certaine valeur de x

$$y_1^{k-1-\varepsilon} < \frac{y_2}{y_1} < y_1^{k-1+\varepsilon}$$

quelque petit que soit le nombre positif ε.

Donc

$$\lim_{x=\infty}\frac{y_2}{y_1} = 0$$

et l'égalité (16) donne

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{y'}{y} : \frac{y_2'}{y_1}\right) = 1.$$

Supposons maintenant que

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{y_2'}{y_2} : \frac{y_1'}{y_1}\right) = 1.$$

L'égalité (16) donne dans ce cas comme dans le cas précédent

(17) $$\lim_{x=\infty}\left(\frac{y'}{y}:\frac{y_1'}{y_1}\right)=1,$$

car on a toujours

$$1+\frac{y_1}{y_2}>1.$$

Puisque la fonction $y_1(x)$ est par hypothèse une fonction régulière et son ordre de croissance est fini, il résulte de l'égalité (17)

$$\lim_{x=\infty}\frac{xy'}{y}=\lim_{x=\infty}\frac{xy_1'}{y_1}.$$

Donc la fonction $y(x)$ est une fonction régulière et son ordre de croissance est égal à celui de la fonction $y_1(x)$.

Il nous reste donc à démontrer l'existence d'une limite déterminée et finie de l'expression $\frac{yy''}{y'^2}$ et à calculer sa valeur, puisque la fonction $y(x)$ est évidemment une fonction croissante.

Posons

$$\nu(x)=\frac{y_2'}{y_2}:\frac{y_1'}{y_1};\quad \lim_{x=\infty}\frac{y_1y_1''}{y_1'^2}=\beta;\quad \lim_{x=\infty}\frac{y_2y_2''}{y_2'^2}=\gamma.$$

β et γ étant des nombres finis.

L'égalité (16) peut se mettre sous la forme

(18) $$\frac{y'}{y}=\frac{y_1'}{y_1}\left[1+\frac{\nu(x)-1}{1+\frac{y_1}{y_2}}\right].$$

De même l'égalité

$$y'=y_1'+y_2',$$

qui résulte de l'égalité (15), nous donne

(19) $$\frac{y''}{y'}=\frac{y_1''}{y_1'}\left[1+\frac{\mu(x)-1}{1+\frac{y_1'}{y_2'}}\right],$$

où

$$\mu(x)=\frac{y_2''}{y_3'}:\frac{y_1''}{y_1}.$$

En divisant maintenant l'égalité (19) par l'égalité (18), on a finalement

(20) $$\frac{yy''}{y'^2}=\frac{y_1y_1''}{y_1'^2}\left[\left(1+\frac{\mu(x)-1}{1+\frac{y_1'}{y_2'}}\right):\left(1+\frac{\nu(x)-1}{1+\frac{y_1}{y_2}}\right)\right].$$

Nous avons supposé que l'ordre de croissance de la fonction $y_2(x)$ par rapport à la fonction $y_1(x)$ est inférieur ou égal à un.

Donc

$$\lim_{x=\infty} \nu(x) = k \leq 1,$$

k pouvant être égal à zéro.

Supposons d'abord que k soit inférieur à un. Nous avons déjà vu que dans ce cas

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_1}{y_2} = \infty.$$

Il en résulte que

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_1'}{y_2'} = \infty,$$

car la limite de la fonction $\nu(x)$ est supposée finie.

D'autre part nous avons

$$\mu(x) = \frac{y_1'^2}{y_1 y_1''} \cdot \frac{y_2 y_2''}{y_1'^2} \nu(x),$$

d'où

(21) $$\lim_{x=\infty} \mu(x) = \frac{\gamma}{\beta} k.$$

Si nous supposons donc que β est différent de zéro, la fonction $\mu(x)$ a une limite déterminée et finie. L'égalité (20) nous donne alors

$$\lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = \lim_{x=\infty} \frac{y_1 y_1''}{y_1'^2} = \beta.$$

Laissons pour le moment de côté le cas où $\beta = 0$ et supposons que $k = 1$. La formule générale (11) qui prend pour nos significations nouvelles la forme

(22) $$\gamma = 1 + \frac{\beta - 1}{k}$$

nous montre que dans ce cas $\gamma = \beta$. Nous avons donc, d'après la formule (21)

$$\lim_{x=\infty} \mu(x) = 1$$

et l'égalité (20) nous donne de nouveau

$$\lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = \beta,$$

car on a toujours

$$1 + \frac{y_1}{y_2} > 1 \quad \text{et} \quad 1 + \frac{y_1'}{y_2'} > 1.$$

Il nous reste à considérer le cas $\beta = 0$. Écrivons l'égalité (20) sous la forme suivante:

$$\frac{yy''}{y'^2} = \left[\frac{y_1 y_1''}{y_1'^2} + \left(\frac{y_2 y_2''}{y_2'^2}\nu(x) - \frac{y_1 y_1''}{y_1'^2}\right) : \left(1 + \frac{y_1'}{y_2'}\right)\right] : \left[1 + \frac{\nu(x) - 1}{1 + \frac{y_1}{y_2}}\right].$$

Nous avons toujours

$$\lim_{x=\infty}\left[1 + \frac{\nu(x) - 1}{1 + \frac{y_1}{y_2}}\right] = 1.$$

Donc

$$\lim_{x=\infty}\frac{yy''}{y'^2} = \lim_{x=\infty}\left\{\left[\frac{y_2 y_2''}{y_2'^2}\nu(x)\right] : \left[1 + \frac{y_1'}{y_2'}\right]\right\} = 0,$$

car si

$$\lim_{x=\infty}\nu(x) < 1,$$

on a

$$\lim_{x=\infty}\left(1 + \frac{y_1'}{y_2'}\right) = \infty,$$

si

$$\lim_{x=\infty}\nu(x) = 1,$$

on a

$$\lim_{x=\infty}\frac{y_2 y_2''}{y_2'^2} = \gamma = \beta = 0; \quad 1 + \frac{y_1'}{y_2'} > 1.$$

Nous avons donc dans tous les cas l'égalité

$$\lim_{x=\infty}\frac{yy''}{y'^2} = \beta$$

ce qui démontre notre théorème.

THÉORÈME 2. — *Soient* $y_1(x)$ *et* $y_2(x)$ *deux fonctions régulières du second ordre dont les ordres de croissance soient finis. Si l'ordre de croissance de la fonction* $y_2(x)$ *par rapport à la fonction* $y_1(x)$ *est inférieur à un, la différence de ces fonctions*

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

est une fonction régulière au moins du second ordre et son indice de régularité du second ordre est égal à celui de la fonction $y_1(x)$.

Il est facile d'abord de montrer que la fonction $y(x)$ est une fonction infiniment croissante. On a, en effet,

$$y' = y_1'\left(1 - \frac{y_2'}{y_1'}\right).$$

D'autre part, il nous est donné que

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{y_2'}{y_2}:\frac{y_1'}{y_1}\right)=k<1.$$

Donc, comme nous avons vu plus haut,

$$\lim_{x=\infty}\frac{y_2'}{y_1'}=\lim_{x=\infty}\frac{y_2}{y_1}=0.$$

Par conséquent, la dérivée y' est positive, à partir d'une certaine valeur de x, et, d'autre part,

$$\lim_{x=\infty} y=\lim_{x=\infty}\left[y_1\left(1-\frac{y_2}{y_1}\right)\right]=+\infty.$$

L'égalité

$$y=y_1\left(1-\frac{y_2}{y_1}\right)$$

nous donne ensuite

$$\frac{y'}{y}:\frac{y_1'}{y_1}=1+\frac{1-\frac{y_2'}{y_2}:\frac{y_1'}{y_1}}{\frac{y_1}{y_2}-1},$$

d'où l'on trouve

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{y'}{y}:\frac{y_1'}{y_1}\right)=1$$

et, par conséquent,

$$\lim_{x=\infty}\frac{xy'}{y}=\lim_{y=\infty}\frac{xy_1'}{y_1}.$$

La fonction $y(x)$ est donc une fonction régulière et son ordre de croissance est égal à celui de la fonction $y_1(x)$.

Posons maintenant

$$\nu(x)=\frac{y_2'}{y_2}:\frac{y_1'}{y_1};\quad \mu(x)=\frac{y_2''}{y_2'}:\frac{y_1''}{y_1}.$$

Le calcul, analogue à celui qui était donné plus haut, donne

$$\frac{yy''}{y'^2}=\frac{y_1y_1''}{y_1'^2}\left[\left(1-\frac{\mu(x)-1}{\frac{y_1'}{y_2'}-1}\right):\left(1-\frac{\nu(x)-1}{\frac{y_1}{y_2}-1}\right)\right].$$

Mais

$$\lim_{x=\infty}\left[1-\frac{\nu(x)-1}{\frac{y_1}{y_2}-1}\right]=1.$$

Donc

$$\lim_{x=\infty}\frac{yy''}{y'^2}=\lim_{x=\infty}\frac{y_1y_1''}{y_1'^2}\left[1-\frac{\mu(x)-1}{\dfrac{y_1'}{y_2'}-1}\right]$$

si le second membre de cette égalité existe. Mais si $\beta\neq 0$, on a

$$\lim_{x=\infty}\left[1-\frac{\mu(x)-1}{\dfrac{y_1'}{y_2'}-1}\right]=1$$

et par suite

$$\lim_{x=\infty}\frac{yy''}{y'^2}=\lim_{x=\infty}\frac{y_1y_1''}{y_1'^2}=\beta.$$

Dans le cas où $\beta=0$, nous aurons

$$\lim_{x=\infty}\frac{y_1y_1''}{y_1'^2}\left[1-\frac{\mu(x)-1}{\dfrac{y_1'}{y_2'}-1}\right]=\lim_{x=\infty}\left[\frac{y_1y_1''}{y_1'^2}-\left(\frac{y_2y_2''}{y_2'^2}\nu(x)-\frac{y_1y_1''}{y_1'^2}\right):\left(\frac{y_1'}{y_2'}-1\right)\right]=0,$$

puisque

$$\lim_{x=\infty}\frac{y_1y_1''}{y_1'^2}=0;\quad \lim_{x=\infty}\left(\frac{y_1'}{y_2'}-1\right)=\infty.$$

THÉORÈME 3. — *Si* $y_1(x)$ *et* $y_2(x)$ *sont deux fonctions régulières du second ordre et si leurs ordres de croissance sont finis, le produit de ces fonctions*

(23) $$y(x)=y_1(x)\cdot y_2(x)$$

est une fonction régulière au moins du second ordre et son indice de régularité du second ordre α *est donné par la formule*

$$\alpha=\frac{1-\beta\gamma}{2-\beta-\gamma},$$

β *et* γ *étant des indices de régularité du second ordre des fonctions* $y_1(x)$ *et* $y_2(x)$.

Il est évident que la fonction $y(x)$ est une fonction infiniment croissante. Montrons maintenant qu'elle est régulière. En effet, on trouve, par l'égalité (23)

(24) $$\frac{y'}{y}=\frac{y_1'}{y_1}+\frac{y_2'}{y_2}$$

d'où

$$\lim_{x=\infty}\frac{xy'}{y}=\lim_{p=\infty}\frac{xy_1'}{y_1}+\lim_{x=\infty}\frac{xy_2'}{y_2}.$$

Il en résulte que l'ordre de croissance de la fonction $y(x)$ est égal à la somme de ceux des fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$. La fonction $y(x)$ est donc bien régulière.

Il nous faut encore montrer que l'expression $\frac{yy''}{y'^2}$ a une limite déterminée et finie pour $x = +\infty$.

En dérivant l'égalité (24), on trouve

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2\left(\frac{yy''}{y'^2}-1\right)=\left(\frac{y_1'}{y_1}\right)^2\left(\frac{y_1y_1''}{y_1'^2}-1\right)+\left(\frac{y_2'}{y_2}\right)^2\left(\frac{y_2y_2''}{y_2'^2}-1\right),$$

d'où

$$\frac{yy''}{y'^2}=1+\frac{\frac{y_1y_1''}{y_1'^2}-1}{[1+\nu(x)]^2}+\frac{\frac{y_2y_2''}{y_2'^2}-1}{\left[1+\frac{1}{\nu(x)}\right]^2}, \tag{25}$$

si nous posons

$$\nu(x)=\frac{y_2'}{y_2}:\frac{y_1'}{y_1}.$$

Or

$$\lim_{x=\infty}\nu(x)=\lim_{x=\infty}\left[\frac{xy_2'}{y_2}:\frac{xy_1'}{y_1}\right]=\frac{k_2}{k_1},$$

k_1 et k_2 étant des ordres de croissance des fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$. Puisque ces ordres sont par hypothèse finis et différents de zéro, la fonction $\nu(x)$ tend vers une limite finie et différente de zéro. Mais l'égalite (25) nous montre que dans ce cas l'expression $\frac{yy''}{y'^2}$ tend vers une limite déterminée et finie, quand x tend vers l'infini.

Tâchons maintenant de trouver la valeur exacte de cette limite. Nous avons d'après la formule (22)

$$\gamma=1+\frac{\beta-1}{\lim\limits_{x=\infty}\nu(x)},$$

d'où

$$\lim_{x=\infty}\nu(x)=\frac{1-\beta}{1-\gamma},$$

puisque l'ordre de croissance de la fonction $y_2(x)$ est fini et, par conséquent, γ est inférieur à un.

L'égalité (25) nous donne alors

$$\lim_{x=\infty}\frac{yy''}{y'^2}=1+\frac{(\beta-1)(1-\gamma)^2}{(2-\beta-\gamma)^2}+\frac{(\gamma-1)(1-\beta)^2}{(2-\beta-\gamma)^2}=\frac{1-\beta\gamma}{2-\beta-\gamma}.$$

THÉORÈME 4. — *Si* $y_1(x)$ *et* $y_2(x)$ *sont deux fonctions régulières du second ordre dont les ordres de croissance sont finis et si l'ordre de croissance de la fonction* $y_2(x)$ *est inférieur à celui de la fonction* $y_1(x)$, *le quotient de ces fonctions*

$$y(x) = \frac{y_1(x)}{y_3(x)} \tag{26}$$

est une fonction régulière au moins du second ordre et son indice de régularité du second ordre α *est donné par la formule*

$$\alpha = \frac{2\beta - \beta\gamma - 1}{\beta - \gamma},$$

θ *et* γ *étant des indices de régularité du second ordre des fonctions* $y_1(x)$ *et* $y_2(x)$.

Il est facile d'abord de montrer que la fonction $y(x)$ est une fonction infiniment croissante et régulière. On a, en effet,

$$\frac{y'}{y} = \frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_2'}{y_2}$$

d'où

$$\frac{xy'}{y} = \frac{xy_1'}{y_1} - \frac{xy_2'}{y_2}.$$

Puisque l'ordre de croissance de la fonction $y_2(x)$ est inférieur à celui de la fonction $y_1(x)$, on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{xy'}{y} = k,$$

k étant un nombre positif. Il existe donc une valeur x_0 de x, à partir de laquelle nous aurons toujours

$$\frac{y'}{y} > \frac{k - \varepsilon}{x},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε. L'intégration de cette inégalité nous donne

$$y(x) > \frac{y(x_0)}{x_0^{k-\varepsilon}} x^{k-\varepsilon},$$

et, par conséquent

$$\lim_{x=\infty} y(x) = +\infty.$$

Il nous faut maintenant montrer que l'expression $\frac{yy''}{y'^2}$ a une limite déterminée et finie quand x tend vers l'infini.

De l'égalité (26) on trouve facilement

$$\frac{yy''}{y'^2} = 1 + \frac{\frac{y_1 y_1''}{y_1'^2} - 1}{[1 - \nu(x)]^2} - \frac{\frac{y_2 y_2''}{y_2'^2} - 1}{\left[\frac{1}{\nu(x)} - 1\right]^2}.$$

Mais nous avons maintenant

$$\lim_{x=\infty} \nu(x) = \lim_{x=\infty}\left(\frac{y_2'}{y_2} : \frac{y_1'}{y_1}\right) = \lim_{x=\infty}\left(\frac{xy_2'}{y_2} : \frac{xy_1'}{y_1}\right) < 1.$$

Il en résulte que l'expression $\frac{yy''}{y'^2}$ a bien une limite finie pour $x = \infty$ et puisque, comme nous avons vu plus haut,

$$\lim_{x=\infty} \nu(x) = \frac{1-\beta}{1-\gamma},$$

nous aurons

$$\lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = 1 + \frac{(\beta-1)(1-\gamma)^2}{(\beta-\gamma)^2} + \frac{(1-\gamma)(1-\beta)^2}{(\beta-\gamma)^2} = \frac{2\beta - \beta\gamma - 1}{\beta - \gamma}.$$

THÉORÈME 5. — *Si* $y_1(x)$ *et* $y_2(x)$ *sont deux fonctions régulières du second ordre et si leurs ordres de croissance sont finis, la fonction*

$$y(x) = y_1[y_2(x)] \tag{27}$$

est une fonction régulière au moins du second ordre et son indice de régularité du second ordre α *est donné par la formule*

$$1 - \alpha = (1-\beta)(1-\gamma), \tag{28}$$

β *et* γ *étant des indices de régularité du second ordre des fonctions* $y_1(x)$ *et* $y_2(x)$.

Il est évident que la fonction $y(x)$ est une fonction infiniment croissante. Montrons qu'elle est régulière.

Posons

$$\lim_{x=\infty} \nu_1(x) = \lim_{x=\infty} \frac{xy_1'}{y_1} = k_1; \quad \lim_{x=\infty} \nu_2(x) = \lim_{x=\infty} \frac{xy_2'}{y_2} = k_2,$$

k_1 et k_2 étant deux nombres positifs. En prenant la dérivée logarithmique de l'égalité (27) et en posant

$$y_1'(y_2) = \frac{dy_1(y_2)}{dy_2}; \quad \nu(x) = \frac{xy'}{y},$$

on trouve

$$\frac{y'}{y} = \frac{y_1'(y_2)}{y_1(y_2)} \cdot y_2'(x) \tag{29}$$

d'où

$$\nu(x) = \nu_1(y_2) \cdot \nu_2(x).$$

Il en résulte que

$$\lim_{x=\infty} \nu(x) = k_1 k_2 .$$

Donc la fonction $y(x)$ est bien régulière et son ordre de croissance est égal au produit de ceux des fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$.

Nous allons voir maintenant que la régularité de la fonction $y(x)$ sera au moins du second ordre. L'égalité

$$y'(x) = y_1'[y_2(x)]y_2'(x)$$

qui est une conséquence immédiate de l'égalité (27) nous donne

$$\frac{y''(x)}{y'(x)} = \frac{y_1''(y_2)}{y_1'(y_2)} y_2'(x) + \frac{y_2''(x)}{y_2'(x)} .$$

En combinant cette dernière égalité avec l'égalité (29), on trouve

$$\frac{yy''}{y'^2} = \frac{y_1(y_2)y_1''(y_2)}{[y_1'(y_2)]^2} + \frac{y_1(y_2)}{y_1'(y_2) \cdot y_2} \cdot \frac{y_2 y_2''}{y_2'^2} .$$

Donc, si nous posons

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_1 y_1''}{y_1'^2} = \beta ; \quad \lim_{x=\infty} \frac{y_2 y_2''}{y_2'} = \gamma ,$$

nous aurons

(30) $$\lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = \beta + \frac{\gamma}{k_1} .$$

Mais k_1 est supérieur à zéro. Donc l'expression $\frac{yy''}{y'^2}$ tend vers une limite finie quand x tend vers l'infini. La fonction $y(x)$ est, par conséquent, régulière au moins du second ordre.

Or, la formule générale (13)

$$\beta = 1 - \frac{1}{k_1}$$

nous donne

$$k_1 = \frac{1}{1 - \beta} .$$

En portant cette valeur de k_1 dans l'égalité (30) et en posant

$$\lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = \alpha ,$$

on trouve ainsi

$$\alpha = \beta + \gamma - \beta\gamma,$$

d'où l'on obtient facilement la formule cherchée (28).

En généralisant ce théorème, on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 6. — *Si les fonctions* $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *sont des fonctions régulières du second ordre et si leurs ordres de croissance sont finis, la fonction*

$$y(x) = y_1 \{ y_2[y_3(\ldots y_n(x)] \}$$

est une fonction régulière au moins du second ordre et son indice de régularité du second ordre α *est déterminé par la formule*

$$1 - \alpha = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_3) \ldots (1 - \alpha_n),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ *étant des indices de régularité du second ordre des fonctions* $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x), \ldots, y_n(x)$.

7. Propriétés fondamentales des fonctions régulières du second ordre.
THÉORÈME 1. — *L'ordre de croissance de la dérivée* $y'(x)$ *d'une fonction régulière du second ordre par rapport à sa fonction primitive* $y(x)$ *est égal à l'indice de sa régularité du second ordre, si celui-ci est différent de zéro.*

Ce théorème est une conséquence immédiate de la définition même de l'indice de régularité du second ordre. En efiet, si

$$\lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = \alpha,$$

on a

$$\lim_{x=\infty} \left(\frac{y''}{y'} : \frac{y'}{y} \right) = \lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = \alpha.$$

THÉORÈME 2. — *Si l'ordre de croissance d'une fonction* $y(x)$ *par rapport à une autre fonction* $y_1(x)$ *esi égal à un nombre positif* k *et si les fonctions* $y(x)$ *et* $y_1(x)$ *sont régulières du second ordre et si, enfin, l'indice de régularité du second ordre de* $y(x)$ *est différent de zéro, l'ordre de croissance de la dérivée* $y'(x)$ *par rapport à la même fonction* $y_1(x)$ *est égal à un nombre fini* k' *qui vérifie t'égalité*

$$k' = k + \beta - 1. \tag{31}$$

β *étant l'indice de régularité du second ordre de la fonction* $y_1(x)$.

En effet, si nous posons

$$\lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = \alpha,$$

nous aurons

$$k' = \lim_{x=\infty} \left(\frac{y''}{y'} : \frac{y_1'}{y_1} \right) = \lim_{x=\infty} \left[\frac{yy''}{y'^2} \left(\frac{y'}{y} : \frac{y_1'}{y_1} \right) \right] = \alpha k,$$

d'où, en tenant compte de la formule générale

$$\alpha = 1 + \frac{\beta - 1}{k},$$

nous trouvons la relation cherchée.

COROLLAIRE 1. — *Si l'ordre de croissance de la fonction* y(x) *est égal à un nombra* k *supérieur à un ét si la fonction* y(x) *est régulière du second ordre, l'ordre de croissance de sa dérivée* y'(x) *est égal à* k — 1.

En effet, si nous considérons l'ordre de croissance de la fonction $y(x)$ par rapport à la variable indépendante x, il nous faut poser

$$y_1(x) = x.$$

Nous avons donc $\beta = 0$. L'égalité (31) nous donne alors

$$k' = k - 1.$$

COROLLAIRE 2. — *Si l'ordre de croissance de la fonction* y(x) *par rapport à la fonction* $y_1(x)$, *dont l'ordre de croissance est infini, est égal à un nombre positif et si les fonctions* y(x) *et* $y_1(x)$ *sont régulières du second ordre, l'ordre de croissance de la dérivée* y'(x) *par rapport à* $y_1(x)$ *est égal à celui de la fonction* y(x) *elle-même.*

En eflet, on a dans ce cas $\beta = 1$, et la formule (31) nous donne $k' = k$.

THÉORÈME 3. — *Soit* y(x) *une fonction régulière du second ordre. Si son ordre de croissance est supérieur à un, sa dérivée* y'(x), *à partir d'une certaine valeur de* x *croît toujours et tend vers l'infini avec* x*; si cet ordre est inférieur à un, la dérivée* y'(x), *à partir d'une certaine valeur de* x, *décroît toujours et tend vers zéro quand* x *tend vers l'infini.*

Soit, en effet,

$$\lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = \alpha.$$

k étant l'ordre de croissance de $y(x)$, on aura, en vertu de la formule (13)

$$\alpha = 1 - \frac{1}{k},$$

$\alpha > 0$ dans le cas $k > 1$ et $\alpha < 0$ dans le cas $k < 1$.

D'autre part, dans le premier cas, on aura, d'après le corollaire 1, à partir d'une certaine valeur de x,

$$\frac{xy''}{y'} > a$$

ou

$$\frac{y''}{y'} > \frac{a}{x},$$

a étant un nombre positif. Mais, en intégrant cette inégalité, nous aurons

$$y' > bx^a,$$

b étant encore un nombre positif.

Dans le second cas, on trouvera l'inégalité

$$y' < b_1 x^{-a_1},$$

a_1 et b_1 étant toujours des nombres positifs.

Théorème 4. — *Toute fonction infiniment croissante* y(x) *pour laquelle on a*

$$\lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = \alpha,$$

α étant un nombre quelconque, vérifie, à partir d'une certaine valeur de x, *les inégalités*

$$[y(x)]^{\alpha-\varepsilon} < y'(x) < [y(x)]^{\alpha+\varepsilon},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε.

Nous avons, en effet,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log y'(x)}{\log y(x)} = \lim_{x=\infty} \left(\frac{y''}{y'} : \frac{y'}{y}\right) = \lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = \alpha,$$

d'où résultent les inégalités cherchées.

Corollaire 1. — *Si la fonction* y(x) *est une fonction régulière du second ordre dont l'ordre de croissance est fini, on a toujours, à partir d'une certaine valeur de* x,

$$[y(x)]^{\alpha-\varepsilon} < y'(x) < [y(x)]^{\alpha+\varepsilon},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε, *α étant l'indice de régularité du second ordre de la fonction* y(x).

Corollaire 2. — *Si l'ordre de croissance d'une fonction* y(x) *est égal à* $\omega^n k$, n *étant un entier positif et* k *un nombre positif quelconque, on a, à partir d'une certaine valeur de* x,

$$[y(x)]^{1-\varepsilon} < y'(x) < [y(x)]^{1+\varepsilon},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε.

Nous avons vu (n.° 2), en effet, que la fonction $y(x)$ sera dans ce cas régulière au moins du second ordre et que l'indice de sa régularité du second ordre sera égal à un.

THÉORÈME 5. — *Posons*

$$z(x) = \log_p y(x),$$

p *étant un nombre entier positif. Si la fonction infiniment croissante* y(x) *est telle que*

$$\lim_{x=\infty} \frac{zz''}{z'^2} = \alpha,$$

α *étant un nombre quelconque, il existe toujours une valeur de* x, *à partir de laquelle, on a*

$$(32) \qquad y \log y \log_2 y \ldots (\log_p y)^{\alpha-\varepsilon} < y'(x) < y \log y \log_2 y \ldots (\log_p y)^{\alpha+\varepsilon},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε.

Puisque la fonction $z(x)$ est évidemment une fonction infiniment croissante, il existe, d'après le théorème 4, une valeur de x, à partir de laqnelle auront lieu les inégalités

$$[z(x)]^{\alpha-\varepsilon} < z'(x) < [z(x)]^{\alpha+\varepsilon},$$

Or, ces inégalités, après la substitution $z(x) = \log_p y$, prennent la forme

$$(\log_p y)^{\alpha-\varepsilon} < \frac{y'}{y \log y \log_2 y \ldots \log_{p-1} y} < (\log_p y)^{\alpha+\varepsilon},$$

d'où résultent les inégalités (32).

COROLLAIRE. — *Si la fonction* $\log_p$ y(x) *est une fonction régulière du second ordre et si l'ordre de croissance de la fonction* $\log_p$ y(x) *est fini, il existe toujours une valeur de* x, *à partir de laquelle auront lieu les inégalités*

$$y \log y \log_2 y \ldots (\log_p y)^{\alpha-\varepsilon} < y'(x) < y \log y \log_2 y \ldots (\log_p y)^{\alpha+\varepsilon},$$

α *étant l'indice de régularité du second ordre de la fonction* $\log_p$ y(x), *quelque petit que soit le nombre positif* ε. *Si l'ordre de croissance de la fonction* $\log_p$ y(x) *est infiniment grand, ces inégalités prennent la forme*

$$y \log y \log_2 y \ldots (\log_p y)^{1-\varepsilon} < y'(x) < y \log y \log_2 y \ldots (\log_p y)^{\alpha+\varepsilon}.$$

THÉORÈME 6. — *Si l'ordre de croissance de la fonction* y(x) *par rapport à une autre fonction* $y_1(x)$ *régulière du second ordre est égal à* ωk, k *étant un nombre positif quelconque, et si l'indice* β *de régularité du second ordre de la fonction* $y_1(x)$ *est tel que l'expression* $k - 1 + \beta$

est différente de zéro, l'ordre de croissance de la dérivée logarithmique de la fonction y(x) *par rapport à la fonction* $y_1(x)$ *est égal à* $k - 1 + \beta$.

En posant

$$\nu(x) = \frac{y'}{y} : \frac{y_1'}{y_1}, \quad \nu_1(x) = \frac{\nu'}{\nu} : \frac{y_1'}{y_1},$$

nous aurons

$$\lim_{x=\infty} \nu(x) = +\infty, \quad \lim_{x=\infty} \nu_1(x) = k.$$

L'ordre de croissance de la dérivée logarithmique de la fonction $y(x)$ par rapport à la fonction $y_1(x)$ est égal à la limite de la fonction

$$\mu(x) = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right)}{\frac{y'}{y}} : \frac{y_1'}{y_1}$$

pour $x = +\infty$, si cette limite existe et est égale à un nombre fini et différent de zéro.

Or,

$$\mu(x) = \left(\frac{y''}{y'} - \frac{y'}{y_1}\right) : \frac{y_1'}{y_1}. \tag{33}$$

D'autre part, l'égalité

$$\nu(x) = \frac{y_1 y'}{y y_1'}$$

nous donne

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{y_1'}{y_1} + \frac{y''}{y'} - \frac{y'}{y} - \frac{y_1''}{y_1'}.$$

On a, par conséquent,

$$\nu_1 = 1 + \left(\frac{y''}{y'} - \frac{y'}{y}\right) : \frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_1 y_1''}{y_1'^2},$$

d'où

$$\left(\frac{y''}{y'} - \frac{y'}{y}\right) : \frac{y_1'}{y_1} = \nu_1 - 1 + \frac{y_1 y_1''}{y_1'^2}.$$

L'égalité (33) prend donc la forme

$$\mu(x) = \nu_1 - 1 + \frac{y_1 y_1''}{y_1'^2},$$

d'où

$$\lim_{x=\infty} \mu(x) = k - 1 + \beta.$$

THÉORÈME 7. — *Si l'ordre de croissance de la fonction* y(x) *par rapport à une autre fonction* $y_1(x)$ *régulière du second ordre est égal à* *un nombre positif quelconque* k, *l'ordre de croissance de l'intégrale*

$$z(x)=\int_{x_0}^{x} y(x)dx,$$

x_0 *étant une valeur quelconque de* x, *par rapport à la fonction* $y_1(x)$ *est égal à* $k+1-\beta$, *où* β *est l'indice de régularité du second ordre de la fonction* $y_1(x)$.

En posant

$$\nu(x)=\frac{z'}{z}:\frac{y_1'}{y_1},$$

on aura d'aprés le théorème de STOLZ.

$$\lim_{x=\infty}\nu(x)=\lim_{x=\infty}\frac{\dfrac{yy_1}{y_1'}}{\int_{x_0}^{x} ydx}=\lim_{x=\infty}\frac{\dfrac{y'y_1+yy_1'}{y_1'}-\dfrac{yy_1y_1''}{y_1'^2}}{y}=\lim_{x=\infty}\left[\left(\frac{y'}{y}:\frac{y_1'}{y_1}\right)+1-\frac{y_1y_1''}{y_1'^2}\right]=k+1-\beta,$$

ce qui démontre le théorème, puisque l'expression $k+1-\beta$ ne peut être égale à zéro, k étant positif.

THÉORÈME 8. — *Si l'ordre de croissance de la fonction* y(x) *est égal à un nombre* k *vérifiant la condition* $k>-1$, *l'intégrale*

$$z(x)=\int_{x_0}^{x} y(x)dx$$

est une fonction régulière au moins du second ordre. Si, en outre, la fonction y(x) *est une fonction régulière du second ordre, l'indice* β *de régularité du second ordre de l'intégrale* z(x) *est défini par la formule*

$$\beta=\frac{1}{2-\alpha},\tag{34}$$

α *étant l'indice de régularité du second ordre de la fonction* y(x).

Montrons, tout d'abord, que l'intégrale $z(x)$ est une fonction régulière. En vertu de l'égalité

$$\lim_{x=\infty}\frac{xy'}{y}=k,$$

il existe toujours une valeur de x, à partir de laquelle on a

$$\frac{k-\varepsilon}{x}<\frac{y'(x)}{y(x)}<\frac{k+\varepsilon}{x},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε. L'intégration de ces inégalités entre des limites x_1 et x $(x > x_1)$ nous donne

$$C_1 x^{k-\varepsilon} < y(x) < C_2 x^{k+\varepsilon},$$

C_1 e C_2 étant des constantes positives. En intégrant encore une fois ces inégalités, nous aurons

$$\frac{C_1}{k+1-\varepsilon}[x^{k+1-\varepsilon} - x_1^{k+1-\varepsilon}] < \int_{x_1}^{x} y(x)dx < \frac{C_2}{k+1+\varepsilon}[x^{k+1+\varepsilon} - x_1^{k+1+\varepsilon}],$$

d'où

$$\frac{C_1}{k+1-\varepsilon}[x^{k+1-\varepsilon} - x_1^{k+1-\varepsilon}] +$$
$$+\int_{x_0}^{x_1} y(x)dx < \int_{x_0}^{x} y(x)dx < \frac{C_2}{k+1+\varepsilon}[x^{k+1+\varepsilon} - x_1^{k+1+\varepsilon}] + \int_{x_0}^{x_1} y(x)dx.$$

Il en résulte que

$$\lim_{x=\infty} \int_{x_0}^{x} y(x)dx = +\infty.$$

Nous pouvons donc utiliser le théorème de STOLZ et écrire

$$\lim_{x=\infty} \frac{xz'(x)}{z(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{xy(x)}{\int_{x_0}^{x} ydx} = \lim_{x=\infty} \frac{y(x) + xy'(x)}{y(x)} = \lim_{x=\infty}\left[1 + \frac{xy'(x)}{y(x)}\right] = 1 + k.$$

L'intégrale $z(x)$ est donc bien régulière. Nous avons, en outre,

$$\lim_{x=\infty} \frac{zz''}{z'^2} = \lim_{x=\infty}\left[\frac{xy'}{y} : \frac{xz'}{z}\right] = \frac{k}{k+1}. \tag{35}$$

Puisque $k+1$ est différent de zéro, nous en concluons que la régularité de l'intégrale $z(x)$ est au moins du second ordre. Si, de plus, la fonction $y(x)$ est une fonction réguliére du second ordre, on a de même (13)

$$\alpha = 1 - \frac{1}{k}. \tag{36}$$

Les inégalités (35) et (36) après l'élimination de k nous donnent la relation cherchée (34).

THÉORÈME 9. — *Toute fonction infiniment croissante* y(x), *pour laquelle* *on a*

$$\lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = \alpha,$$

α étant un nombre fini quelconque, vérifie l'égalité

$$\lim_{x=\infty} \frac{y\{x + [y(x)]^{1-\alpha-\eta}\}}{y(x)} = 1, \tag{37}$$

quelque petit que soit le nombre positif η.

En effet, d'après le théorème 4 nous avons toujours, à partir d'une certaine valeur x_0 de x

$$y'(x) < [y(x)]^{\alpha+\varepsilon},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε. Cette inégalité peut s'écrire sous la forme suivante:

$$[y(x)]^{-\alpha-\varepsilon} y'(x) < 1,$$

d'où, en intégrant entre des limites quelconques x et x' ($x' > x > x_0$), on trouve

$$\frac{1}{1-\alpha-\varepsilon}\{[y(x')]^{1-\alpha-\varepsilon} - [y(x)]^{1-\alpha-\varepsilon}\} < x' - x. \tag{38}$$

Or, nous savons (n.° 2) que α ne peut être supérieur à un. On a donc toujours $\alpha < 1$ on $\alpha = 1$. Supposons d'abord que $\alpha < 1$. Dans ce cas nous pouvons mettre la dernière inégalité sous la forme

$$[y(x')]^{1-\alpha-\varepsilon} - [y(x)]^{1-\alpha-\varepsilon} < (1-\alpha-\varepsilon)(x'-x),$$

en prenant ε si petit que l'expression $1-\alpha-\varepsilon$ soit positive. Donnons à cette inégalité encore la forme

$$\frac{y(x')}{y(x)} < \left\{1 + \frac{1-\alpha-\varepsilon}{[y(x)]^{1-\alpha-\varepsilon}}(x'-x)\right\}^{\frac{1}{1-\alpha-\varepsilon}}$$

et posons

$$x' = x + [y(x)]^{1-\alpha-\eta},$$

η étant un nombre positif quelconque donné à l'avance. En substituant cette valeur de x dans l'inégalité précedente, nous obtenons l'inégalité

$$\frac{y\{x + [y(x)]^{1-\alpha-\eta}\}}{y(x)} < \left[1 + \frac{1-\alpha-\varepsilon}{[y(x)]^{\eta-\varepsilon}}\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\varepsilon}}$$

qui est vérifiée à partir d'une certaine valeur de x, quelque petits que soient ε et η. Mais d'autre part, quelque petit que soit η, nous pouvons prendre ε si petit que la différence $\eta - \varepsilon$ soit positive.

Donc le second membre de la dernière inégalité tend vers un et nous avons

$$\lim_{x=\infty} \frac{y\{x + [y(x)]^{1-\alpha-\eta}\}}{y(x)} = 1,$$

puisque la fonction $y(x)$ est toujours croissante.

Supposons maintenant que $\alpha = 1$. L'égalité (37) que nous voulons démontrer prend dans ce cas la forme

$$\lim_{x=\infty} \frac{y\left\{x + \frac{1}{[y(x)]^{\eta}}\right\}}{y(x)} = 1. \tag{39}$$

Quant à l'inégalité (38), elle nous donne maintenant

$$[y(x')]^{-\varepsilon} - [y(x)]^{-\varepsilon} > -\varepsilon(x' - x),$$

d'où

$$\left[\frac{y(x')}{y(x)}\right]^{-\varepsilon} > 1 - \varepsilon(x' - x)\frac{1}{[y(x)]^{-\varepsilon}}.$$

En posant ici

$$x' = x + \frac{1}{[y(x)]^{\eta}},$$

nous arrivons à l'inégalité

$$\left[\frac{y(x')}{y(x)}\right]^{-\varepsilon} > 1 - \frac{\varepsilon}{[y(x)]^{\eta-\varepsilon}}.$$

Si nous prenons maintenant ε si petit que la différence $\eta - \varepsilon$ soit positive et x si grand que la quantité $\frac{\varepsilon}{[y(x)]^{\eta-\varepsilon}}$ soit inférieure à un, nous pouvons mettre cette inégalité sous la forme

$$\frac{y\left\{x + \frac{1}{[y(x)]^{\eta}}\right\}}{y(x)} < \left[1 - \frac{\varepsilon}{[y(x)]^{\eta-\varepsilon}}\right]^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Il en résulte l'égalité (39).

8. **Quelques proprietés des fonctions régulières d'ordre supérieur à deux.** THÉORÈME 1. — *Soient* $y_1(x)$ *et* $y_2(x)$ *deux fonctions régulières du* n^{me} *ordre dont les ordres de croissance soient finis. Si l'ordre de croissance de la fonction* $y_2(x)$ *par rapport à la fonction* $y_1(x)$ *est inférieur ou égal à un, la somme de ces fonctions*

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) \tag{40}$$

est une fonction régulière au moins du n^{me} *ordre et son indice de régularite du* n^{me} *ordre est égal à celui de la fonction* $y_1(x)$.

Nous avons déjà vu que pour $n=2$ ce théorème est vrai. Supposons qu'il soit vrai pour $n=p$ et montrons que dans ce cas il sera vrai pour $n=p+1$.

Supposons donc que la régularité des fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ soit d'ordre $p+1$. Il est évident, tout d'abord, que si toutes les dérivées $y_1', y_1'', y_1''', \ldots, y_1^{(p-1)}, y_2', y_2'', y_2''', \ldots, y_2^{(p-1)}$ sont infiniment croissantes, toutes les dérivées $y', y'', y''', \ldots, y^{(p-1)}$ seront aussi infiniment croissantes.

L'égalité (40) nous donne ensuite

$$y'(x) = y_1'(x) + y_2'(x).$$

Mais il résulte de la définition même de l'ordre de régularité des fonctions que si les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont régulières d'ordre $p+1$, leurs dérivées $y_1'(x)$ et $y_2'(x)$ sont régulières d'ordre p. Puis, si k_1 et k_2 sont respectivement les ordres de croissance des fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$, les ordres de croissance de leurs dérivées $y_1'(x)$ et $y_2'(x)$ sont égaux respectivement à k_1-1 et k_2-1 (n.° 7, Corollaire 1 du théorème 2), car les ordres de régularitè des fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ étant égaux au moins à trois, les ordres k_1 et k_2 doivent être supérieurs à un (n.° 5). Nous en concluons que si $k_2 \leq k_1$ l'ordre de croissance de la dérivée $y_2'(x)$ sera infèrieur ou égal à celui de la dérivée $y_1'(x)$. Mais par supposition le théorème est vrai pour $n=p$. Donc la fonction $y'(x)$ est une fonction régulière d'ordre p et son indice de cette régularité est égal à celui de $y_1'(x)$. Mais cela signifie que la fonction $y(x)$ est régulière d'ordre $p+1$ et son indice de cette régularité est égal à celui de la fonction $y_1(x)$.

On peut démontrer d'une manière analogue les théorèmes suivants:

THÉORÈME 2. — *Si* $y_1(x)$ *et* $y_2(x)$ *sont des fonctions régulières du* n^{me} *ordre et si leurs ordres de croissance sont finis, le produit de ces fonctions est une fonction régulière au moins du* n^{me} *ordre.*

THÉORÈME 3. — *Si* $y_1(x)$ *et* $y_2(x)$ *sont des fonctions régulières du* n^{me} *ordre et si leurs ordres de croissance sont finis, la fonction*

$$y = y_1[y_2(x)]$$

est une fonction régulière au moins du n^{me} *ordre.*

THÉORÈME 4. — *Si la fonction* $y(x)$ *est une fonction régulière du* n^{me} *ordre dont l'ordre de croissance par rapport à une autre fouction quelconque* $y_1(x)$ *réguiière du second ordre est égal à un nombre* k *fini et* *différent de zéro et si l'indice* α_n *de sa régularité du* n^{me} *ordre est différent de zéro, l'ordre de croissance de sa dérivée* $y^{(p)}(x)$ $(p = 1, 2, 3, \ldots \ldots, n-1)$ *par rapport à la fonction* $y_1(x)$ *est égal à*

$$k' = k - p(1 - \beta_2), \tag{41}$$

β_2 *étant l'indice de régularité du second ordre de la fonction* $y_1(x)$.

Puisque la fonction $y(x)$ est régulière du n^{me} ordre. on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = \alpha_2, \ \lim_{x=\infty} \frac{y'y'''}{y''^2} = \alpha_3, \ldots, \ \lim_{x=\infty} \frac{y^{(n-2)}y^{(n)}}{[y^{(n-1)}]^2} = \alpha_n,$$

$\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ étant des nombres finis. Nous avons, en outre,

$$\lim_{x=\infty} \left(\frac{y'}{y} : \frac{y_1'}{y_1} \right) = k.$$

L'ordre de croissance de la dérivée $y^{(p)}(x)$ par rapport à la fonction $y_1(x)$ est défini par la limite de la fonction

$$\mu(x) = \frac{y^{(p+1)}}{y^{(p)}} : \frac{y_1'}{y_1}$$

pour $x = +\infty$. Or, en mettant l'expression pour la fonction $\mu(x)$ sous la forme

$$\mu(x) = \left(\frac{y'}{y} : \frac{y_1'}{y_1} \right) \cdot \frac{yy''}{y'^2} \cdot \frac{y'y'''}{y''^2} \cdots \frac{y^{(p-1)}y^{(p+1)}}{[y^{(p)}]^2},$$

nous trouvons l'égalité

$$\lim_{x=\infty} \mu(x) = k\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_{p+1}.$$

Le second membre de cette égalité est différent de zéro, car parmi les indices $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n$ il n'y a que le dernier qui peut être égal à zéro. Mais, par hypothèse, il est différent de zéro.

D'autre part, nous avons vu (n.° 5) que pour chaque valeur de p inférieure à n, on a l'égalité

$$k\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ldots \alpha_{p+1} = k - p(1 - \beta_2).$$

Donc

$$\lim_{x=\infty} \mu(x) = k - p(1 - \beta_2),$$

ce qui démontre notre théorème.

Corollaire 1. — *Si l'ordre de croissance de la fonction* $y(x)$ *est égal à un nombre fini* k *supérieur à* $n-1$ *et si* $y(x)$ *est une fonction régulière du* n^{me} *ordre, la dérivée* $y^{(p)}(x)$ $(p = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$ *est une fonction régulière d'ordre* $n-p$ *et son ordre de croissance est égal à* $k-p$.

Nous avons, en effet, dans ce cas, $\beta_2 = 0$ et la formule (14)

$$\alpha_n = 1 - \frac{1}{k - n + 2}$$

nous montre que pour $k > n - 1$ l'indice α_n est supérieur à zéro.

COROLLAIRE 2. — *Si* y(x) *est une fonction régulière du* n^{me} *ordre dont l'ordre de croissance par rapport à une autre fonction* $\mathrm{y}_1(\mathrm{x})$ *régulière du seeond ordre est égal à un nombre* k *fini et différent de zéro et si, en outre, l'ordre de croissance de la fonction* $\mathrm{y}_1(\mathrm{x})$ *est infiniment grand, l'ordre de croissance de sa dérivée* $\mathrm{y}^{(\mathrm{p})}(\mathrm{x})$ $(\mathrm{p} = 1, 2, 3, \ldots, \mathrm{n} - 1)$ *par rapport à la fonction* $\mathrm{y}_1(\mathrm{x})$ *est égal toujours à* k.

En effet, nous avons dans ce cas

$$\beta_2 = 1$$

et la formule (41) nous donne $k' = k$ pour toutes les valeurs de p.

THÉORÈME 5. — *Soit* y(x) *une fonction régulière du* n^{me} *ordre. Quelque petit que soit le nombre positif* ε, *il existe toujours une valeur de* x, *à partir de laquelle on a*

$$[y(x)]^{p\alpha_2 - (p-1) - \varepsilon} < y^{(p)}(x) < [y\,x)]^{p\alpha_2 - (p-1) + \varepsilon} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots, n-1) \tag{42}$$

α_2 *étant l'indice de régularité du second ordre de la fonction* y(x).

Puisque les dérivées $y', y'', \ldots, y^{(p-1)}$ sont toutes des fonctions régulières au moins du second ordre et leurs indices de régularité du second ordre sont égaux respectivement à $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \ldots, \alpha_{p+1}$, où

$$\alpha_3 = \lim_{x=\infty} \frac{y'y'''}{y''^2},\ \alpha_4 = \lim_{x=\infty} \frac{y''y^{\mathrm{IV}}}{y'''^2}, \ldots,\ \alpha_{p+1} = \lim_{x=\infty} \frac{y^{(p-1)}y^{(p+1)}}{[y^{(p)}]^2},$$

on a d'après le théorème 4 du n.° 7

$$[y(x)]^{\alpha_2 - \varepsilon_1} < y'(x) < [y(x)]^{\alpha_2 + \varepsilon_1}$$
$$[y'(x)]^{\alpha_3 - \varepsilon_1} < y''(x) < [y'(x)]^{\alpha_3 + \varepsilon_1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[y^{(p-1)}(x)]^{\alpha_{p+1} - \varepsilon_1} < y^{(p)}(x) < [y^{(p-1)}(x)]^{\alpha_{p+1} + \varepsilon_1}$$

quelque petit que soit le nombre positif ε_1.

On déduit facilement de ces inégalités

$$[y(x)]^{(\alpha_2 - \varepsilon_1)(\alpha_3 - \varepsilon_1)\ldots(\alpha_{p+1} - \varepsilon_1)} < y^{(p)}(x) < [y(x)]^{(\alpha_2 + \varepsilon_1)(\alpha_3 + \varepsilon_1)\ldots(\alpha_{p+1} + \varepsilon_1)}. \tag{43}$$

Or, quelque petit que soit le nombre positif ε, on peut toujours prendre ε_1

si petit que

$$(\alpha_2 - \varepsilon_1)(\alpha_3 - \varepsilon_1) \dots (\alpha_{p+1} - \varepsilon_1) > \alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_{p+1} - \varepsilon$$
$$(\alpha_2 + \varepsilon_1)(\alpha_3 + \varepsilon_1) \dots (\alpha_{p+1} + \varepsilon_1) < \alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_{p+1} + \varepsilon.$$

Les inégalités (43) nous donnent alors

$$[y(x)]^{\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_{p+1}-\varepsilon} < y^{(p)}(x) < [y(x)]^{\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_{p+1}+\varepsilon}.$$

Or, nous avons eu l'égalité (7)

$$\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_{p+1} = p\alpha_2 - (p-1).$$

Les inégalités précédentes prennent donc la forme cherchée (42).

COROLLAIRE 1. — y(x) *étant une fonction régulière du* n^{me} *ordre dont l'ordre de croissance est égal à un nombre fini* k, *il existe toujours une valeur de* x, *à partir de laquelle on a constamment*

$$[y(x)]^{1-\frac{p}{k}-\varepsilon} < y^{(p)}(x) < [y(x)]^{1-\frac{p}{k}+\varepsilon}, \qquad (p = 1, 2, 3, \dots, n-1)$$

quelque petit que soit le nombre positif ε.

On obtient les inégalités cherchées en substituant dans les inégalités (42), au lien de α_2, sa valeur déterminée par la formule (13)

$$\alpha_2 = 1 - \frac{1}{k}.$$

COROLLAIRE 2. — *Toute fonction régulière du* n^{me} *ordre dont l'ordre de croissance est égal à* ω^{m}k *vérifie, à partir d'une certaine valeur de* x, *les inégalités*

$$[y(x)]^{1-\varepsilon} < y^{(p)}(x) < [y(x)]^{1+\varepsilon} \qquad (p = 1, 2, 3, \dots, n-1)$$

quelque petit que soit le nombre positif ε.

En effet, on a dans ce cas $\alpha_2 = 1$ et les inègalités (42) prennent alors la forme cherchée.

Zwei Beweise für die isoperimetrische Haupteigenschaft des Kreises.

Von K. Th. Vahlen (in Wien).

Unter der Bezeichnung Differenzengeometrie fasse ich diejenigen Sätze der endlichen Geometrie zusammen, aus denen durch Grenzübergang Sätze der Differentialgeometrie hervorgehen. Natürlich sollen diese Sätze unter Vermeidung von Grenzprozessen bewiesen werden. Indem man zum Schluss den Grenzübergang macht, erhält man einen neuen Zugang zu dem betreffenden Sätze der Differentialgeometrie. Aber wichtiger ist es, dass man auf diesem Wege zu Sätzen kommt, die von der Differentialgeometrie übersprungen werden, da sie ihren Methoden nicht zugänglich sind. In einem in der Gesellschaft für Mathematik in Wien gehaltenen Vortrage (s. Monatshefte für Math. u. Phys. 1931) habe ich das an drei Beispielen erläutert. Der Satz von Gauss, die Totalkrümmung eines Flächenstückes plus geodätische Totalkrümmung des Randes gibt 4 Rechte, wurde für polyedrische Flächenstücke bewiesen, die durch unebene Polygone begrenzt sind. Die Unverbiegbarkeit geschlossener konvexer Flächen wurde für Fachwerke bewiesen, deren Stäbe die Kanten eines Dreieckspolyeders sind; sie müssen konvex sein, wenn unendlich kleine Verbiegbarkeit ausgeschlossen wird. Dass es nicht immer angebracht ist, krumme Flächen und Linien durch Polygone und Polyeder zu ersetzen, zeigt der a. a. O. gegebene sehr einfache Beweis des Vierscheitelsatzes, bei dem ich das Oval als aus Kreisbögen zusammengesetzt annehme.

Zu den wichtigsten Desideraten auf diesem Gebiete gehört nun unstreitig der Beweis der isoperimetrischen Haupteigenschaft des Kreises [1]. Diese lässt sich bekanntlich dahin ausdrücken, dass zwischen dem Inhalt J und dem Umfang U eines ebenen nicht kreisförmigen Flächenstückes die Ungleichung besteht:

$$\frac{1}{4}U^2 - \pi J > o$$

[1] Für die Geschichte des Problems vergleiche man insbesondere: W. Blaschke. *Kreis und Kugel*, Leipzig, 1916.

oder dass die quadratische Funktion

$$J + Ux + \pi x^2$$

für geeignete Werte von x negativ wird. Das soll im Folgenden auf zwei wesentlich verschiedenen Wegen bewiesen werden.

Einige allgemeine Bemerkungen sind vorauszuschicken, um den Gang der Beweise nicht mehr unterbrechen zu müssen. Für den Umfang sei der Umlaufsinn so festgesetzt, dass das Innere links liegt. Mehrfach umlaufene Teile kann man aus dem einfach umlaufenen herausnehmen und entsprechend ihrer Vielfachheit an diesen aussen berührend ansetzen. Dabei bleiben Umfang und Inhalt erhalten. Negativ zählende Teile lässt man fort. Dadurch wird der Umfang verkleinert, der Inhalt vergrössert. Man braucht also nur einfach umlaufene Flächenstücke zu betrachten. Einspringende Teile kann man durch das Stück der zugehörigen Doppeltangente (Doppelstützgraden) ersetzen. Dadurch wird der Umfang verkleinert, der Inhalt vergrössert. Das genügt für den zweiten der beiden folgenden Beweise. Für den ersten benötigt man eine Beseitigung der einspringenden Ecken, bei der die Seiten erhalten bleiben. Sind 0123... aufeinanderfolgende Eckpunkte und ist 012 eine einspringende Ecke, so ersetzen wir sie durch 01′2, sodass 0121′0 ein Parallelogramm ist. Jetzt kann 1′23 eine einspringende Ecke sein, dann wird sie ersetzt durch 1′2′3; usw. Das muss aber schliesslich aufhören, denn die Winkel 1′23, 2′34,..., deren Schenkel 1′2, 2′3,... parallel sind, müssen bei einem geschlossene Polygon schliesslich über 2 Rechte wachsen.

Dies vorausgeschickt, wird in dem ersten Beweise die obige Ungleichung dadurch abgeleitet, dass ein Vieleck durch eine endliche Anzahl ausführbarer Umformungen in ein umfanggleiches, inhaltgrösseres regelmässiges n — Eck übergeführt wird; für ein solches ist:

$$\frac{1}{4} U^2 - n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} J = 0.$$

Von folgenden Umformungen wird Gebrauch gemacht.

1) Umkehrung eines Segmentes. Eine Sehne teilt das Flächenstück in zwei Segmente; man kann die beiden Segmente längs der gemeinsamen Sehne im umgekehrten Sinn aneinanderlegen, gleichgültig, welches man umkehrt. Kehrt man das Segment *ABCDEFG* und das Segment *CDE* um, so sind die Segmente *ABC* und *EFG* vertauscht. Man kann also den Seiten eines Vielecks jede Reihenfolge geben, ohne den Inhalt zu verändern.

2) Symmetrierung. Ein Viereck mit zwei gleichen Gegenseiten wird mit Erhaltung der Seiten vergrössert, indem man es in ein gleichschenkliges

Trapez, also in ein Kreisviereck verwandelt. Dasselbe gilt bei Segmenten, z. B. wird $ABCDEF$ mit $AB = EF$, $BC = DE$ durch Symmetrierung der Vierecke $ABEF$, $BCDE$ symmetriert.

3) Gleichmachung zweier (anstossender) Seiten. Man ersetze jede durch die halbe Summe beider, wodurch der Inhalt vergrössert wird.

4) Gleichmachung zweier Radien AO, BO mit Erhaltung der Sehne AB und des Winkels AOB. Dadurch wird das Dreieck AOB vergrössert, die Sehne mit dem zugehörigen Segment bleibt erhalten.

Dies vorausgeschickt, mache man zwei Seiten einander gleich: $(0) = (1)$. Die eine Hälfte einer dritten Seite vereinige man nach 3) mit (0) zu zwei gleichen Seiten $(00) = (01)$, die andere Hälfte mit (1) zu zwei gleichen Seiten $(10) = (11)$. Die vier gleichen Seiten $(00) = (01) = (10) = (11)$ vereinige man je mit einem Viertel einer vierten Seite zu je zwei gleichen, also im Ganzen zu acht gleichen Seiten $(000) = (001) = \ldots = (111)$. Usw. So erhält man ein dem gegebenen umfanggleiches, inhaltgrösseres n-Eck, dessen Seiten einander gleich sind und dessen Seitenzahl eine Potenz von zwei ist.

Man verbinde zwei Gegenecken durch eine Sehne, sodass also der Umfang gehälftet wird, und symmetriere nach (2) jedes der beiden Segmente. Dann verbinde man die zwei symmetrischen Gegenecken durch eine Sehne, sodass mit der ersten Sehne zusammen der Umfang geviertelt wird, und symmetriere die Segmente, die durch die zweite Sehne entstehen. Die beiden Sehnen schneiden sich senkrecht in einem Punkte o und teilen das Vieleck in vier kongruente (bzw. symmetrische) Quadranten. Deren Dreiecke mit rechtem Winkel bei o vergrössere man nach 4), während man ihre Segmente nach 2) symmetriert. Dann zerfallen die vier Quadranten in acht kongruente (bzw. symmetrische) Oktanten, mit denen man ebenso verfährt. Nach einer endlichen Anzahl von Schritten kommt man zu einem regelmässigen Vieleck, womit der Satz bewiesen ist.

Der zweite Beweis bezieht sich auf ein Vieleck P, von dem mehrere Seiten ein Tangentenvieleck T eines ihm einbeschriebenen Kreises K bilden, der keine der übrigen Seiten von P schneidet. Nicht bei jedem Vieleck ist ein solcher Kreis vorhanden, aber jedes kann in ein umfanggleiches, flächengrösseres der verlangten Art umgeformt werden. Z. B. durch die Steinersche Symmetrisierung: man hälfte den Umfang durch eine Grade G und ersetze das flächenkleinere Segment durch das Spiegelbild des flächengrösseren an G. Dasselbe wiederholt man mit einer zu G senkrechten Graden H. Man vermeide, dass G oder H einer Vieleckseite parallel sind. Dann haben die auf G und H liegenden vier Scheitel maximale Entfernungen vom Mittelpunkt

$(GH) = o$, da man etwa einspringende Scheitel nach aussen klappt. Also giebt es auf dem Umfang mindestens vier minimale Entfernungen, also einen einbeschriebenen Kreis, der mindestens vier Seiten berührt und keine Seite schneidet.

Dies vorausgeschickt, seien $CC'C''...$ die Ecken des Tangentenvielecks T, ferner J und U sein Inhalt und Umfang. Durch den Kreis K wird T zerlegt in die Kreisfläche πr^2 und die « Kappen », jede begrenzt von je zwei aufeinanderfolgenden Tangenten und dem Zwischenbogen von K. Die Inhalte dieser Kappen seien bzw. i, i', i'',... Von dem Vieleck P verläuft innerhalb der Kappe i (entsprechend bei i', i'',...) ein konvexer Streckenzug $A ... B$ bestehend aus den Seiten c_1, c_2, c_3,..., der mit den Abschnitten $CA = b$, $CB = a$ zusammen eine Kappe vom Inhalt j (j', j'',...) begrenzt. Die Abstände der Seiten c_1, c_2,... von o seien $r + h_1$, $r + h_2$,... Nun ist $Ur = 2J$, also

(1) $$J - Ur + \pi r^2 = -J + \pi r^2 = -i - i' - i'' - ...$$

Ferner ist

$$r(a + b) - \Sigma (r + h)c = 2j,$$

also

(2) $$-j + r(a + b - \Sigma c) = j + \Sigma hc.$$

Addiert man alle Gleichungen (2) zu (1) und bezeichnet mit J', U' Inhalt und Umfang von $P = ABA'B'A''B''$,..., so erhält man

(3) $$J' - U'r + \pi r^2 = -(i - j - \Sigma hc) - (i' - j' - \Sigma h'c') - ...$$

Die Parallelogramme hc liegen zwischen der betr. Seite c und der zu ihr parallelen Tangente im Abstande h. Zieht man die beiden anderen Seiten parallel einer durch C und c gehenden Graden, so überdecken sich die Parallelogramme nicht, es ist also

(4) $$j + \Sigma hc \leq i,$$

woraus mit (3) zusammen folgt

$$J' - U'r + \pi r^2 < o,$$

was zu beweisen war.

Alcune relazioni relative ai sistemi algebrici di ∞^1 curve appartenenti ad una superficie algebrica.

Memoria di ARTURO MARONI (a Firenze).

Sunto. - *Si stabiliscono alcune relazioni numeriche fra i caratteri di un sistema algebrico di ∞^1 curve, appartenente ad una superficie algebrica. Si stabilisce inoltre, una relazione funzionale che intercede fra certe curve strettamente collegate al sistema algebrico, e una curva canonica della superficie.*

Le relazioni che intercedono fra i caratteri di un sistema algebrico Γ di ∞^1 curve esistenti sopra una superficie algebrica F (indice e genere del sistema, genere e grado della curva generica, etc., etc.), non sono fino ad ora note, fatta eccezione per una formula dimostrata da R. TORELLI [la formula (I)], la quale dà il numero δ delle curve del sistema dotate di punto doppio, nel caso che la curva generica del sistema stesso non abbia punti multipli variabili.

Il presente lavoro è rivolto appunto a stabilire alcune di queste relazioni, le quali spero che potranno essere utili per lo studio ulteriore dei sistemi algebrici di curve sulle superficie. Ringrazio vivamente S. E. il prof. F. SEVERI, che mi ha indicato l'argomento di questa ricerca.

Nella prima parte del lavoro si estende la validità della formula del TORELLI, sopra ricordata, al caso di sistemi algebrici la cui curva generica abbia punti multipli variabili (ordinari), e si indica per quante unità deve valutarsi, nel numero δ fornito dalla (I), una curva del sistema che abbia punti multipli in soprannumero, in confronto di quelli posseduti dalla curva generica.

Nella seconda parte viene stabilita una relazione funzionale fra alcune curve strettamente collegate al sistema algebrico Γ (inviluppo, curva dei contatti, etc.) e una curva canonica della superficie. Da tale relazione funzionale si ottiene poi facilmente un gruppo di formule (le formule II, III, IV, V), le quali legano fra loro i caratteri del sistema algebrico. Nella V figura anche il genere lineare della superficie.

Altre formule (da VI a XII), si ottengono nella terza parte del lavoro, applicando la formula di ZEUTHEN a particolari corrispondenze che si hanno fra il sistema algebrico Γ (considerato come ente algebrico semplicemente infinito) e le curve collegate al sistema stesso.

I.

1. Sopra una superficie algebrica F (che per semplicità supporremo priva di punti multipli in uno spazio conveniente) esista un sistema algebrico irriducibile Γ, formato da ∞^1 curve algebriche, il quale sia di grado n, di indice ν, e di genere π. Supporremo che la generica curva C di Γ sia anch'essa irriducibile, e ne indicheremo con p il genere.

Nell'ipotesi che il sistema Γ non abbia punti base, e che le curve di Γ non abbiano punti multipli variabili, R. TORELLI [1] ha dimostrato che il numero δ dei punti, ciascuno dei quali è doppio per una curva di Γ, è dato dalla formula:

(1) $$\delta = \nu(I + 4) + 2(\pi_l - 1) - \tau - 4(\pi - 1)(p - 1)$$

dove I è l'invariante ZEUTHEN-SEGRE della superficie F; π_l è il genere dell'inviluppo L del sistema Γ (cioè del luogo dei punti di F, da ciascuno dei quali escono due curve di Γ infinitamente vicine), e τ è il numero dei punti della superficie, da ciascuno dei quali escono tre curve di Γ infinitamente vicine (punti che sono cuspidi della curva L).

È facile vedere che se il sistema Γ ha un punto base A, la formula (1) vale ancora, purchè si aumenti di ν unità il suo secondo membro. Si ripeta, infatti, il ragionamento del TORELLI, cioè si consideri la superficie Φ, i cui punti rappresentano le coppie, ciascuna delle quali è formata da un punto P di F e da una delle ν curve C di Γ passanti per P. Questa superficie Φ contiene un fascio Γ', del genere π, di curve C' del genere p, con δ curve dotate di punto doppio. Perciò, se I_φ è l'invariante ZEUTHEN-SEGRE della superficie Φ, abbiamo [2]:

(2) $$\delta = I_\varphi - 4(\pi - 1)(p - 1).$$

Ora, fra F e Φ intercede una corrispondenza algebrica $(1, \nu)$, la quale ha, su F, il punto A (base per il sistema Γ) come fondamentale, ad esso corri-

---

(1) *Sui sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, « Atti della Reale Accademia delle Scienze », di Torino, Vol. XLII, Nov. 1906.

(2) V. CASTELNUOVO-ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, « Annali di Matematica », serie III, t. VI (1901), n.° 6, Oss.

spondendo su Φ una curva a in corrispondenza $(\nu, 1)$ con l'intorno di A. Si ha allora [1]:

$$I_\varphi = \nu(I+4) + 2\pi_l - \tau - 6 + \nu, \tag{3}$$

e sostituendo nella formula precedente si ottiene quanto si è asserito. Se, dunque, il sistema Γ possiede σ punti base, si ha:

$$\delta = \nu(I+4+\sigma) + 2(\pi_l - 1) - \tau - 4(\pi - 1)(p-1) \text{ [2]}. \tag{I}$$

2. Supponiamo, ora, che la curva generica del sistema algebrico Γ abbia k nodi variabili, e sia Δ la curva luogo di questi k punti doppi. Questa curva Δ fa parte, come è noto, dell'inviluppo di Γ; indicheremo perciò con $\Delta + L$ questo inviluppo, e intenderemo nel seguito che π_l indichi il genere della sola curva L. Manterremo invariate le altre notazioni.

Torniamo a considerare la superficie Φ, in corrispondenza $(\nu, 1)$ con F, di cui si è detto al n.° 1, per precisare un poco questa corrispondenza.

Mentre un punto M di F descrive una certa curva C di Γ, il punto M' di Φ, rappresentante la coppia formata da M e da quella C (fissa), descrive una curva C' (del fascio Γ') in corrispondenza birazionale con la C considerata. Gli altri $\nu - 1$ punti di Φ corrispondenti ad M (immagini delle coppie formate da M e dalle altre $\nu - 1$ curve di Γ uscenti da M stesso) descrivono una curva $\overline{C}$, la quale, al variare della C entro Γ, varia, su Φ, in un sistema algebrico $\overline{\Gamma}$, di indice $\nu - 1$ e dello stesso genere π di Γ.

Se prendiamo a considerare un punto P della curva L e lo accoppiamo a quella C di Γ che tocca la L in P, si ha su Φ un punto P' corrispondente a P, il quale P', mentre P descrive la L, descrive una curva L' (in corrispondenza biunivoca con L) luogo delle coincidenze della involuzione di ordine ν esistente su Φ (involuzione i cui gruppi sono immagini dei punti di F). Se al punto P accoppiamo, invece, le altre $\nu - 2$ curve di Γ uscenti da P stesso, si hanno altri $\nu - 2$ punti di Φ corrispondenti a P e descriventi (mentre P descrive la L) una curva $\overline{L}$, in corrispondenza $(\nu - 2, 1)$ con la L medesima. Si riscontra facilmente che la curva $\overline{L}$ è l'inviluppo del sistema $\overline{\Gamma}$.

---

[1] V. Severi, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica*, « Rendiconti del R. Istituto Lombardo di sc. e lett. », serie II. vol. XXXVI (1903), n.° 11.

[2] A questa formula si perverrebbe anche trasformando la superficie F, birazionalmente, in un'altra superficie F' sulla quale i σ punti base di Γ abbiano per corrispondenti altrettante curve eccezionali. Si potrebbe allora applicare la (1) al sistema trasformato di Γ sulla F', e poi osservare che se I' è l'invariante Zeuthen-Segre di F', si ha: $I' = I + \sigma$.

Consideriamo un punto Q della curva Δ. Ad esso, accoppiato a quella curva C che ha nel punto Q un nodo [1], corrispondono due punti, Q_1' e Q_2', della C' corrispondente alla C; i quali punti non possono coincidere in un unico punto della superficie Φ, altrimenti le curve di Γ' avrebbero punti doppi variabili, il che non può avvenire essendo Γ' un fascio. Mentre Q descrive la curva Δ, i punti Q_1' e Q_2' descrivono su Φ una curva Δ', che è in corrispondenza (2, 1) con la Δ. Da ciò segue che la curva Δ non è di diramazione nella corrispondenza $(1, \nu)$ che intercede fra F e Φ: tale curva di diramazione è esaurita dalla curva L. Accoppiando il punto Q della curva Δ con le altre $\nu - 2$ curve di Γ uscenti da Q stesso (esclusa quella che in Q ha un punto doppio) si hanno altri $\nu - 2$ punti della superficie Φ, corrispondenti a Q, i quali, al variare di Q sulla curva Δ, descrivono una curva $\overline{\Delta}$, in corrispondenza $(\nu - 2, 1)$ con la Δ stessa.

Risulta immediatamente che ogni curva del fascio Γ' incontra la curva Δ' in k coppie della involuzione binaria esistente sulla Δ' (involuzione le cui coppie sono immagini dei punti della Δ); ed incontra la curva $\overline{\Delta}$ in s punti, se s è il numero delle intersezioni della C generica con la curva Δ, oltre quelle raccolte nei k punti doppi della C stessa. La curva C' e la curva $\overline{C}$, corrispondenti ad una medesima C, hanno comuni le k coppie di punti in cui la C' incontra la Δ'.

La C' e la $\overline{C}$ hanno poi, ulteriormente, altri $l = n - 2k$ punti comuni, appartenenti alla curva L', immagini degli l contatti che la C considerata ha con la curva L. Gli n punti che, complessivamente, hanno in comune la C' e la $\overline{C}$ (corrispondenti ad una medesima C), corrispondono ai punti del gruppo caratteristico della C stessa entro il sistema Γ.

Facciamo infine anche la seguente osservazione. Ogni curva C', del fascio Γ' esistente sulla superficie Φ, considerata come elemento dell'ente $\infty^1\Gamma'$, è origine *di un sol ramo*, altrimenti in quella curva coinciderebbero più curve di Γ', ciò che non è possibile perchè per ogni punto di Φ passa una sola curva del fascio Γ'.

Ora, i sistemi Γ e Γ' (considerando le loro curve come elementi) sono in corrispondenza birazionale, e perciò ad una curva C che entro Γ sia origine di i rami distinti $(i \geq 1)$, corrispondono entro Γ' i curve C' distinte; e viceversa, se ad una C corrispondono i curve C' distinte, la C è origine, entro Γ,

[1] Si suppone che da un punto generico della curva Δ esca una sola C avente in quel punto un punto doppio.

di i rami. È superfluo osservare che per ogni ramo di Γ, di cui sia origine una curva C, esiste sulla stessa C un gruppo caratteristico.

3. Consideriamo una curva C del sistema Γ, la quale entro Γ sia origine di un sol ramo; e supponiamo che essa abbia $k+1$ punti doppi: Q_1, $Q_2, \ldots Q_k$; Q_{k+1}. Di questi $k+1$ punti doppi solo k (e siano Q_1, $Q_2, \ldots Q_k$) corrispondono alle k coppie di punti che l'*unica* curva C', corrispondente alla C, ha comuni con la curva Δ'. Al $k+1^{\text{mo}}$ punto doppio, Q_{k+1}, della curva C (appartenga esso o no alla curva Δ) corrisponde un punto doppio della curva C'. E infatti, se, nella corrispondenza birazionale che intercede fra le curve C e C', al punto doppio Q_{k+1} della curva C corrispondessero due punti distinti della superficie Φ, appartenenti alla curva C', ciò vorrebbe dire che, mentre un punto Q di F si avvicina a Q_{k+1}, *due* delle ν curve di Γ passanti per Q dovrebbero tendere alla nostra C sull'unico ramo di Γ, di cui è origine la C stessa; e quindi Q_{k+1} dovrebbe far parte del gruppo caratteristico esistente sulla medesima C. Ma ciò non può avvenire perchè Q_{k+1} non corrisponde a nessuna delle k coppie di punti comuni alla C' e alla Δ'; d'altra parte non corrisponde nemmeno ad alcuno degli $l = n - 2k$ punti comuni alla C' e alla L', perchè in tal caso a Q_{k+1} dovrebbe corrispondere un sol punto della superficie Φ, appartenente alla C', contro il supposto.

Viceversa, se sulla superficie Φ una C' ha un punto doppio Q'_{k+1}, ad essa corrisponde su F una C che ha $k+1$ punti doppi, dei quali uno, Q_{k+1}, corrisponde a Q'_{k+1}; e gli altri: Q_1, $Q_2, \ldots Q_k$ corrispondono alle k coppie di punti comuni alla C' e alla Δ'.

Si conclude che *se ogni* C *di* Γ *è, entro* Γ, *origine di un sol ramo, il numero* δ, *indicante il numero dei punti doppi delle curve del fascio* Γ', *che è espresso dalla formula* (I), *indica anche il numero delle curve del sistema* Γ *possedenti* k $+ 1$ *punti doppi.*

4. Facciamo ora l'ipotesi che una curva C di Γ sia origine di i rami del sistema Γ, e che abbia $k+h$ punti doppi: Q_1, $Q_2, \ldots Q_k$, $Q_{k+1}, \ldots Q_{k+h}$. Ad essa corrisponderanno i curve: C_1', $C_2', \ldots C_i'$ del fascio Γ' (v. l'ultima osservazione del n.° 2). Siano Q_1, $Q_2, \ldots Q_k$ i k punti doppi della curva C, corrispondenti alle k coppie di punti che la C_1' ha comuni con la Δ'. Agli ulteriori h punti doppi della curva C: $Q_{k+1}, \ldots Q_{k+h}$, corrispondono allora altrettanti punti doppi della C_1'. Ciò si vede rifacendo, per ciascuno dei punti $Q_{k+1}, \ldots Q_{k+h}$, lo stesso ragionamento che si è fatto al n.° 3 per dimostrare che il punto Q'_{k+1} ivi considerato è doppio per la curva C'. Ne segue che la curva C_1' conta per h unità nel numero δ espresso dalla formula (2), e quindi anche in quello espresso dalla (I). Lo stesso può dirsi per le curve $C_2', \ldots C_i'$. Si conclude pertanto che:

Se il sistema algebrico Γ *è formato da curve aventi* k *nodi variabili, la formula* (I) *esprime il numero* δ *delle curve di* Γ *dotate di* k + 1 *punti doppi, purchè si intenda che ogni curva di* Γ *la quale abbia* k + h *punti doppi e sia origine, entro* Γ, *di* i *rami, debba contare per* hi *unità nel numero* δ *medesimo.*

5. Osservazione I. — L'esistenza o meno di curve del sistema Γ che siano origini di più rami, dipende dalla natura delle condizioni algebriche cui debbono soddisfare le curve di Γ. Per chiarir ciò, si consideri l'esempio seguente. Sia F una superficie algebrica di S_3, ed il sistema Γ sia segato su F dai piani tangenti alla F stessa nei punti di una sua curva Δ. Le curve di questo sistema hanno un punto doppio variabile. Quelle, di queste curve, dotate di 2 punti doppi sono segate dai piani bitangenti ad F che hanno uno dei punti di contatto sulla curva Δ: esse perciò sono tante quanti sono i punti comuni alla curva Δ e alla curva, Λ, luogo su F dei contatti dei piani bitangenti. Una delle curve di Γ dotate di due punti doppi è origine di due rami di Γ (e quindi conta per due unità nel numero δ) allora e solo allora che essa sia segata su F da un piano bitangente avente entrambi i punti di contatto sulla curva Δ; perciò esistono o non esistono curve di Γ origini di due rami, secondochè la curva Δ ha o non ha comuni con la curva Λ coppie della involuzione binaria determinata sulla Λ stessa dall'inviluppo dei piani bitangenti.

Se poi la curva Δ coincide con la curva Λ (e quindi la curva generica di Γ possiede due punti doppi variabili), allora ogni curva di Γ avente 3 punti doppi, cioè segata da un piano tritangente ad F, è da considerarsi come origine di 3 rami di Γ, e quindi conta per tre unità nel numero δ.

In generale, può dirsi che se il sistema continuo Γ, formato da curve aventi k punti doppi, è completo, allora ogni curva di Γ la quale abbia $k+h$ punti doppi sarà da considerarsi come multipla per il sistema secondo il numero $\binom{k+h}{k}$, e sarà generalmente origine di altrettanti rami: essa dovrà quindi contarsi, in generale, per $h \cdot \binom{k+h}{k}$ unità nel numero δ dato dalla (I). Ma se le curve di Γ, oltre alla condizione di possedere k punti doppi debbono soddisfare anche ad altre condizioni algebriche, allora una curva del sistema avente $k+h$ punti doppi potrà essere origine di un sol ramo o di più rami a seconda della natura di quelle ulteriori condizioni algebriche.

6. Osservazione II. — Una certa curva C del sistema Γ sia multipla per Γ secondo il numero j [1], e sia origine, entro Γ, di soli i rami, con $i<j$. In tal caso, alcune delle j curve C', corrispondenti a quella C sulla superficie Φ, vengono fra loro a coincidere, e quella C viene a far parte, còntata un certo numero di volte, della curva di diramazione per la corrispondenza $(1, \nu)$ esistente fra le superficie F e Φ. Si deve allora porre, nella formula (I), al posto di π_l, il genere virtuale della curva somma della L e di quella C contata quel certo numero di volte.

7. Osservazione III. — Le considerazioni dei n.i 2, 3, 4, si estendono immediatamente al caso che la curva generica del sistema Γ abbia punti multipli variabili, di molteplicità superiore a 2, purchè si tratti di punti multipli ordinari. Se la curva generica C, di Γ, ha k_1 punti di molteplicità ρ_1, k_2 di molteplicità $\rho_2, \ldots$ e k_s di molteplicità ρ_s (tutti a tangenti distinte), si vedrà, come al n.° 2, che alla curva Δ_1, luogo dei punti di molteplicità ρ_1, corrisponde sulla superficie Φ una curva Δ_1', in corrispondenza $(\rho_1, 1)$ con la Δ_1, la quale Δ_1' è incontrata da ogni C' del fascio Γ' in k_1 gruppi della involuzione di ordine ρ_1, i cui gruppi rappresentano i punti della Δ_1; etc., etc.

Se una particolare C del sistema Γ possiede k_1+h_1 punti di molteplicità ρ_1; k_2+h_2 di molteplicità $\rho_2; \ldots k_s+h_s$ di molteplicità ρ_s; e ancora h_{s+1} punti di molteplicità $\rho_{s+1}; \ldots h_{s+t}$ punti di molteplicità ρ_{s+t}; e se infine questa curva C è origine di i rami distinti entro il sistema Γ, si vedrà, come ai n.i 3 e 4, che ad essa corrispondono sulla superficie Φ i curve: C_1', $C_2', \ldots C_i'$ del fascio Γ', ciascuna delle quali possiede: h_1 punti di molteplicità ρ_1, h_2 di molteplicità $\rho_2, \ldots h_s$ di molteplicità ρ_s, h_{s+1} di molteplicità $\rho_{s+1}, \ldots h_{s+t}$ di molteplicità ρ_{s+t}. Ciascuna di queste curve C_1', $C_2', \ldots C_i'$ influisce quindi, nel numero δ delle curve di Γ' con punto doppio (espresso dalla (2)) per $\sum_{l=1}^{s+t} h_l(\rho_l-1)^2$

[1] Si dice che la curva C è multipla secondo il numero j per il sistema Γ quando, considerata una curva algebrica γ, priva di punti multipli in uno spazio conveniente, la quale sia riferita birazionalmente al sistema semplicemente infinito Γ, avviene che alla curva C di Γ corrispondono j punti di γ (distinti o infinitamente vicini). Cfr. Rosati. *Un'osservazione sugli inviluppi dei sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, *n.° 1*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XVI, seria 5ª, 1° sem., fasc. 12 (1907).

unità [1]; e quindi la nostra C va contata, nel numero δ, espresso dalla (I), delle curve di Γ aventi, oltre i h_l punti di molteplicità ρ_l ($l = 1, 2, \ldots s$), un ulteriore punto doppio, per $i \cdot \sum_{l=1}^{s+t} h_l(\rho_l - 1)^2$ unità.

Un esame più approfondito occorrerebbe nel caso che la curva generica del sistema Γ avesse punti multipli variabili straordinari. In questo caso non si potrebbe ripetere tale quale il ragionamento del n.° 3; e d'altra parte dovrebbesi anche tener conto del fatto che la curva Δ viene anch'essa a far parte della curva di diramazione per la corrispondenza $(1, \nu)$ esistente fra F e Φ.

II.

8. Passiamo ora a stabilire una relazione funzionale fra certe curve collegate al sistema algebrico Γ.

Il prof. Severi ha dimostrato che se $|C_1|$ e $|C_2|$ sono due fasci lineari di una superficie algebrica F, se T è la curva luogo dei contatti delle curve dei due fasci, e K è una curva canonica di F, si ha l'equivalenza:

$$T \equiv 2C_1 + 2C_2 + K \text{ [2]}.$$

Incominciamo con l'estendere questa relazione funzionale al caso che si abbiano, sopra la superficie algebrica F, due fasci irrazionali Γ_1 e Γ_2.

Diremo C_1 la curva generica del fascio Γ_1, e C_2 la curva generica del fascio Γ_2; e porremo: $(C_1 C_2) = m$.

Consideriamo la superficie ψ i cui punti rappresentano le coppie formate ciascuna da una curva di Γ_1 e da una di Γ_2. Fra ψ ed F intercede una corrispondenza algebrica $(1\ m)$, ad un punto M di ψ corrispondendo gli m punti d'incontro, su F, delle curve C_1 e C_2, la cui coppia ha per immagine M. Al fascio Γ_1 corrisponde su ψ un fascio Γ_1', e al fascio Γ_2 un fascio Γ_2'; ed i due fasci Γ_1' e Γ_2' sono di curve unisecanti.

Supporremo, per semplicità, ψ liberata dalle curve eccezionali. Allora la corrispondenza $(1\ m)$ che intercede fra ψ ed F non può avere punti fondamentali su F: perchè se ad un punto di F corrispondesse una curva a' su ψ, questa curva dovrebbe far parte di una curva di Γ_1' e di una di Γ_2', e sa-

[1] Cfr. C. Segre, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche*, (« Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. XXXI, 1896), n.° 3.

[2] V. Severi, « Atti del R. Istituto Veneto », 1906, pag. 629.

rebbe quindi eccezionale per ψ (1). Possono però esservi curve fondamentali per la corrispondenza sulla superficie F, e queste saranno tutte e sole le curve che fan parte di una curva di Γ_1 e di una di Γ_2. Diciamo A l'insieme delle curve (eventualmente esistenti) che sono comuni a curve dei due fasci Γ_1, Γ_2, e quindi fondamentali per la corrispondenza fra F e ψ. Indichiamo, inoltre, con T la curva delle coincidenze su F, cioè la curva luogo dei contatti delle curve di Γ_1 con quelle di Γ_2. Per un teorema del prof. Severi (2), la trasformata su F di una curva canonica della superficie ψ, aumentata della curva T e della curva A, dà una curva canonica di F aumentata delle curve eccezionali eventualmente esistenti su F stessa. Ora, una curva canonica della superficie ψ si ottiene facendo la somma di un gruppo, P_1', di curve di Γ_1' formanti un gruppo canonico entro Γ_1', e di un gruppo, P_2', di curve di Γ_2' formanti un gruppo canonico entro Γ_2' (3). A P_1' corrisponde su F un gruppo canonico, P_1, di curve di Γ_1, ed a P_2' un gruppo canonico, P_2, di curve di Γ_2. Se indichiamo con K una curva canonica di F, e con E l'insieme delle eventuali curve eccezionali di F stessa, abbiamo su F:

$$P_1 + P_2 + T + A \equiv K + E.$$

Ma si osservi che ciascuna curva eccezionale di F fa parte anch'essa di una curva di Γ_1 e di una di Γ_2; perciò la curva E è parte della A, e può eliminarsi dai due membri dell'equivalenza precedente. Posto $A = B + E$, essa diviene:

(4) $$P_1 + P_2 + T + B \equiv K$$

ove B indica l'insieme delle curve, ciascuna delle quali è comune ad una curva di Γ_1 e ad una di Γ_2, escluse le curve eccezionali della superficie.

9. Supponiamo ora che sulla superficie F esistano un fascio Γ_1 (di curve C_1); ed un sistema algebrico Γ di indice $\nu > 1$ (di curve C).

Consideriamo, come al n.° 1, la superficie Φ i cui punti rappresentano le coppie formate da un punto M di F e da una delle ν curve C passanti per M. Nella corrispondenza $(1\ \nu)$ che intercede fra F e Φ, alle curve C_1 del

---

(1) Il sistema lineare ottenuto sommando un gruppo di curve di Γ_1' con un gruppo di curve di Γ_2' avrebbe infatti la curva a' per fondamentale; e inoltre le curve residue di a' rispetto a tale sistema lineare avrebbero un sol punto comune con la a', corrispondendo a curve di F passanti semplicemente pel punto che corrisponde ad a'.

(2) Si veda la nota citata alla pag. 2; n.° 6.

(3) V. la mia nota: *Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecantisi*, (« Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », 1903).

fascio Γ_1 corrispondono le curve C_1' di un fascio Γ_1'; ogni curva C_1 essendo in corrispondenza $(1\ \nu)$ con la corrispondente C_1'. Come sappiamo (v. n.° 2), ad una curva C del sistema Γ corrisponde birazionalmente sulla superficie Φ una curva C' di un certo fascio Γ', più una curva $\bar{C}$ di un sistema algebrico $\bar{\Gamma}$, di indice $\nu - 1$; ed alla curva L inviluppo del sistema Γ corrispondono: una curva L' (in corrispondenza birazionale con L) luogo delle coincidenze dell'involuzione di ordine ν esistente su Φ, ed una curva $\bar{L}$ (in corrispondenza $(\nu - 2,\ 1)$ con L) che è l'inviluppo del sistema $\bar{\Gamma}$.

Alla curva T, di F, luogo dei contatti delle curve di Γ_1 con quelle di Γ, corrispondono su Φ: la curva T' (in corrispondenza birazionale con T) luogo dei contatti delle curve del fascio Γ_1' con quelle del fascio Γ'; e la curva $\bar{T}$, luogo dei contatti delle curve di Γ_1' con quelle del sistema $\bar{\Gamma}$ (la quale curva $\bar{T}$ è in corrispondenza $(\nu - 1,\ 1)$ con la T).

Una curva di F che sia comune ad una curva di Γ_1 e ad una di Γ, o corrisponde ad una curva di Φ comune ad una curva di Γ_1' e ad una di Γ', oppure è fondamentale nella corrispondenza fra F e Φ; e, viceversa, ogni curva di F che corrisponde ad una curva di Φ comune ad una C_1' e ad una C', oppure che sia fondamentale nella corrispondenza fra F e Φ, è comune ad una C_1 di Γ_1 e ad una C di Γ.

Se indichiamo con A' l'insieme delle curve ciascuna delle quali è comune ad una curva di Γ_1' e ad una di Γ', e se supponiamo, per semplicità, che la superficie Φ sia stata liberata dalle curve eccezionali, si ha, sulla superficie Φ, per la (4) del n.° 8:

$$P_1' + P' + T' + A' \equiv K',$$

ove si è indicato con P_1' un gruppo di curve C_1' costituenti entro Γ_1' un gruppo canonico, e con P' un gruppo di curve C' formanti un gruppo canonico entro Γ'; e dove K' è una curva canonica della superficie Φ.

Passando dalla superficie Φ alla superficie F, avremo su quest'ultima [1]:

$$\nu P_1 + P + T + A \equiv \nu K + L + \nu E$$

dove P_1 e P sono gruppi canonici di curve entro Γ_1 e Γ, rispettivamente; A è l'insieme della curva di F corrispondente ad A' e di quelle curve, di F, che sono fondamentali nella corrispondenza fra F e Φ, cioè A è l'insieme delle curve di F ciascuna delle quali è parte di una curva di Γ_1 e di una di Γ; K è una curva canonica di F; e, infine, E è l'insieme delle curve eccezionali su F.

---

[1] V. la nota citata a pag. 2, del prof. Severi, nn. 2 e 6.

Osserviamo ora che ogni curva eccezionale di F deve comparire ν volte fra le curve dell'insieme A, e perciò potremo porre:

$$A = B + \nu E$$

avendo indicato con B l'insieme delle curve, ciascuna delle quali è comune ad una C_1 e ad una C, escluse le curve eccezionali di F. Sostituendo nella precedente equivalenza, otteniamo l'altra:

$$T + \nu P_1 + P + B \equiv \nu K + L. \tag{5}$$

10. Torniamo, infine, a considerare, sulla superficie F, un solo sistema algebrico Γ, di indice $\nu > 1$, formato da ∞^1 curve C. Diremo T la curva luogo dei contatti delle curve C fra loro, ed L l'inviluppo di Γ. Supporremo esclusa, tanto da T che da L, la eventuale curva Δ, luogo dei punti multipli variabili delle curve C (1).

Consideriamo ancora la superficie Φ in corrispondenza (ν 1) con F. Ripetiamo, per chiarezza, che alle curve C di Γ corrispondono: le curve C' di un fascio Γ' (ogni C' essendo in corrispondenza birazionale con la corrispondente C), e le curve $\overline{C}$ di un sistema algebrico $\overline{\Gamma}$, di indice $\nu - 1$ (ogni C essendo in corrispondenza ($\nu - 1$, 1) con la corrispondente C). Alla curva T corrisponde su Φ la curva T'' luogo dei contatti delle curve del fascio Γ' con le curve del sistema $\overline{\Gamma}$, più la curva $\overline{T}$, luogo dei contatti delle curve $\overline{C}$ fra loro. La T'' è in corrispondenza (2 1) con la T, e la $\overline{T}$ è in corrispondenza ($\nu - 2$, 1) con la T medesima. Alla curva L (v, n.° 2) corrisponde (biunivocamente) la curva L' luogo delle coincidenze dell'involuzione di ordine ν che è su Φ, e inoltre la curva $\overline{L}$ (in corrispondenza ($\nu - 2$, 1) con L), inviluppo del sistema $\overline{\Gamma}$.

Se una curva a di F, che non sia fondamentale per la corrispondenza fra F e Φ, è comune a due curve, C_1 e C_2, di Γ, essa corrisponde a due curve di Φ, a_1' e a_2' (ciascuna in corrispondenza birazionale con a), l'una comune alle curve C_1' e $\overline{C}_2$, l'altra comune alla C_2' e alla $\overline{C}_1$. Viceversa, una curva a_1' di Φ comune ad una curva di Γ' e ad una di $\overline{\Gamma}$, ha per corrispondente su F una curva a comune a due curve di Γ, alla quale poi corrisponde su Φ, oltre a_1', anche un'altra curva a_2', comune ad una C' e ad una $\overline{C}$.

(1) Si sottintende che se le curve di Γ han punti multipli variabili, questi siano punti multipli ordinari.

Diremo A' l'insieme delle curve di Φ, ciascuna delle quali è comune ad una C' e ad una $\bar{C}$. Supporremo, inoltre, per semplicità, che Φ sia stata depurata dalle curve eccezionali. Avremo allora, su Φ, per la (5) del n.° 9:

$$T'' + (\nu - 1)P' + \bar{P} + A' \equiv (\nu - 1)K' + \bar{L}$$

ove P' e $\bar{P}$ indicano gruppi canonici di curve rispettivamente entro Γ' e entro $\bar{\Gamma}$; e K' rappresenta una curva canonica della superficie Φ.

Passando alla superficie F, la precedente equivalenza si trasforma nella seguente:

$$2T + 2(\nu - 1)P + 2A \equiv (\nu - 1)K^* + (\nu - 2)L \tag{6}$$

in cui P indica un gruppo di curve C formanti entro Γ un gruppo canonico; A è l'insieme delle curve di F comuni a due curve del sistema Γ, eccezion fatta per quelle che sono fondamentali nella corrispondenza fra F e Φ; e K^* è la curva di F trasformata di una curva canonica di Φ.

Ad una curva di F, la quale sia fondamentale nella corrispondenza fra F e Φ, corrispondono gli intorni di ν punti di Φ (¹), e quindi va contata ν volte nel numero delle curve fondamentali medesime.

Perciò, se A^* è l'insieme delle curve fondamentali su F, abbiamo:

$$K^* + \nu A^* \equiv \nu K + \nu E + L$$

K essendo una curva canonica di F, ed E l'insieme delle curve eccezionali eventualmente esistenti sulla F stessa.

Sostituendo nella (6), essa diviene:

$$2T + 2(\nu - 1)P + 2\left[A + \binom{\nu}{2}A^*\right] \equiv \nu(\nu - 1)K + (2\nu - 3)L + 2\binom{\nu}{2}E. \tag{7}$$

Ma una curva fondamentale nella corrispondenza fra F e Φ è comune a ν curve C di Γ, e quindi conta per $\binom{\nu}{2}$ curve comuni a due C: sicchè la somma $A + \binom{\nu}{2}A^*$ deve considerarsi come l'insieme di tutte le curve comuni a due curve di Γ. Fra queste sono comprese le curve eccezionali di F, cia-

(¹) Può anche avvenire che una curva di F, fondamentale per la corrispondenza fra F e Φ, abbia per corrispondenti gli intorni di soli i punti di Φ $(1 \leq i < \nu)$; ma allora ad essa corrisponderebbero ulteriormente, su Φ, $\nu - i$ curve, ciascuna delle quali comune ad una curva di Γ' e ad una di Γ, cioè appartenente alla curva A'; e rifacendo sotto queste ipotesi il ragionamento del testo, si perverrebbe al medesimo risultato.

scuna contata $\binom{\nu}{2}$ volte, perchè ciascuna curva eccezionale è pure comune a ν-curve C. Allora possiamo porre:

$$A + \binom{\nu}{2} A^* = B + \binom{\nu}{2} E$$

B essendo l'insieme delle curve di F ciascuna delle quali è comune a due curve C, escluse le curve eccezionali della superficie. Dopo ciò la (7) diviene:

$$(8) \qquad 2(T + B) + 2(\nu - 1)P \equiv \nu(\nu - 1)K + (2\nu - 3)L.$$

Questa è, finalmente, la relazione funzionale che volevamo stabilire.

Indichiamo con D l'insieme delle curve doppie di Γ ciascuna delle quali sia origine, entro Γ, di due rami distinti (le diremo *curve doppie nodali di* Γ); e indichiamo con R l'insieme delle curve doppie di Γ, ciascuna delle quali è, entro Γ, origine di un sol ramo (le diremo *curve doppie stazionarie di* Γ) (1); inoltre indichiamo con B^* l'insieme delle curve ciascuna delle quali appartiene parzialmente a due curve di Γ. Avremo allora:

$$B = B^* + D + R; \quad L = L^* + R.$$

E se poniamo:

$$T^* = T + B^*$$

possiamo scrivere la (8) sotto la forma:

$$(8') \qquad 2(T^* + D + R) + 2(\nu - 1)P \equiv \nu(\nu - 1)K + (2\nu - 3)(L^* + R).$$

Abbiamo dunque la proposizione:

Sulla superficie F *esista un sistema algebrico* Γ, *di* ∞^1 *curve* C, *il cui indice sia* ν. *Se sommiamo due volte la curva luogo dei contatti delle curve di* Γ, *aumentata delle curve doppie di* Γ *stesso (nodali e stazionarie), con* $2(\nu - 1)$ *volte un gruppo di curve* C *costituente un gruppo canonico entro* Γ, *si ottiene una curva che è equivalente alla curva somma di* $\nu(\nu - 1)$ *curve canoniche di* F, *e di* $2\nu - 3$ *volte la curva inviluppo del sistema* Γ *aumentata delle curve doppie stazionarie di* Γ *stesso.*

11. Per fare una verifica indiretta della relazione (8'), facciamo l'ipotesi che le curve del sistema Γ siano contenute totalmente in una rete lineare $|C|$.

(1) Se il sistema Γ contiene curve che siano, per Γ stesso, di molteplicità superiore a 2, s'intende che ciascuna di queste curve dovrà figurare un certo numero di volte entro D, ed un certo numero di volte entro R.

Diremo d il numero delle curve della rete che costituiscono la curva D, ed r il numero di quelle che costituiscono la curva R. Possiamo allora scrivere:

$$D \equiv dC; \quad R \equiv rC.$$

Osserviamo che se M è un punto della curva T^*, per M passano due curve C distinte, appartenenti a Γ, che si toccano in M stesso: perciò M appartiene alla jacobiana C_j della rete $|C|$. Viceversa, se M è un punto della curva C_j, tutte le curve di $|C|$ passanti per M si toccano in M, e quindi si toccano reciprocamente in M anche le ν curve di Γ uscenti da M stesso: dunque M deve essere contato $\binom{\nu}{2}$ volte come appartenente alla curva T^*. Si ha perciò:

$$T^* = \frac{\nu(\nu-1)}{2} C_j$$

ossia:

$$T^* \equiv \frac{\nu(\nu-1)}{2}(K+3C).$$

Infine, se π è il genere del sistema Γ, si ha:

$$P \equiv 2(\pi-1)C.$$

Sostituendo, la (8') si scrive:

$$2\left[\frac{\nu(\nu-1)}{2}(K+3C)+(d+r)C\right]+4(\nu-1)(\pi-1)C \equiv$$
$$\equiv \nu(\nu-1)K+(2\nu-3)(L^*+R).$$

Da questa, semplificando, si ha:

(9) $$(2\nu-3)(L^*+R) \equiv [3\nu(\nu-1)+4(\nu-1)(\pi-1)+2(d+r)]C.$$

Il numero $d+r$ si determina facilmente con la seguente considerazione. Riferiamo omograficamente le curve della rete $|C|$ alle rette di un piano ω. Fra la superficie F ed il piano ω viene così a stabilirsi una corrispondenza algebrica $(n, 1)$ (n essendo il grado della rete): in questa corrispondenza al sistema Γ corrisponderà su ω un inviluppo di rette Γ_1, il quale sarà di classe ν e di genere π come Γ. Alle $d+r$ curve doppie di Γ corrisponderanno tutte e sole le rette doppie dell'inviluppo Γ_1 (mentre le curve che costituiscono B^* saranno fondamentali nella corrispondenza fra F ed ω). Si ha allora:

$$2(d+r) = \nu(\nu-3) - 2(\pi-1).$$

Sostituendo nella (9) e semplificando, si ottiene:

$$(2\nu-3)(L^*+R) \equiv (2\nu-3)\cdot 2(\nu+\pi-1)C.$$

Ne segue che, se C_1 è una qualsiasi curva di F, la quale sega in m punti ogni C, risulta:

$$(C_1 \; L) = 2m(\nu + \pi - 1).$$

Ebbene, questa formula coincide con una formula di C. ROSATI (1), valida per ogni sistema algebrico contenuto totalmente in un sistema lineare.

12. Dalla relazione funzionale (8′) si ottengono immediatamente delle relazioni numeriche fra i caratteri del sistema Γ. Prima di scrivere queste relazioni, conviene che introduciamo le notazioni seguenti. Diremo:

x il numero delle curve di Γ che toccano una C generica;

y il numero dei punti di una generica C di Γ, fuori delle curve D ed R, da ciascuno dei quali escono altre due C che ivi si toccano ($y = 0$, se $\nu = 2$);

z il numero dei punti di una C generica, fuori della curva R, da ciascuno dei quali escono due altre C infinitamente vicine ($z = 0$, se $\nu = 2$);

χ il numero dei punti di F, fuori della curva R, da ciascuno dei quali escono due C infinitamente vicine, che ivi si toccano;

η il numero dei punti di F, fuori delle curve D ed R, da ciascuno dei quali escono due C infinitamente vicine, ed altre due C che ivi si toccano ($\eta = 0$, se $\nu < 4$);

d il numero delle curve doppie nodali di Γ (il cui insieme si è indicato con D);

r il numero delle curve doppie stazionarie di Γ (il cui insieme si è indicato con R);

d_l e π_l il grado e il genere della curva L^*;

d_t e π_t il grado e il genere della curva T^*.

Porremo inoltre:

$$(CK) = \theta_c; \quad (L^*K) = \theta_l; \quad (T^*K) = \theta_t.$$

E indicheremo con $p^{(1)}$ il genere lineare della superficie F.

13. Supporremo, per semplicità, che la superficie F sia priva di curve eccezionali, e che il sistema Γ non abbia punti base (2). Allora è:

$$\theta_c = 2p - 2 - l; \quad \theta_l = 2\pi_l - 2 - d_l; \quad \theta_t = 2\pi_t - 2 - d_t.$$

---

(1) V. C. ROSATI, *Una osservazione sugli inviluppi dei sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XVI, serie 5ª, 1° sem., fasc. 12° (1907).

(2) Sono ovvie le modificazioni che dovrebbero introdursi nelle formule successive, quando il sistema Γ avesse, sulla superficie F priva di curve eccezionali, qualche punto base. Basterebbe tener conto delle intersezioni delle varie curve fra loro, raccolte nei punti base medesimi.

E, inoltre, si vede facilmente che si ha:

$$(T^*C) = x + y$$
$$(L^*C) = 2l + z \ \text{(1)}$$
$$(L^*T^*) = \chi + \eta.$$

Segando i due membri della (8') rispettivamente con le curve C, L^*, T^* e K, otteniamo, dopo lievi trasformazioni, le relazioni seguenti:

$$\text{(II)} \qquad 2(x + y) + an = \nu(\nu - 1)\theta_c + (2\nu - 3)(2l + z)$$
$$\text{(III)} \qquad 2(\chi + \eta) + a(2l + z) = \nu(\nu - 1)\theta_l + (2\nu - 3)d_l$$
$$\text{(IV)} \qquad 2d_t + a(x + y) = \nu(\nu - 1)\theta_t + (2\nu - 3)(\chi + \eta)$$
$$\text{(V)} \qquad 2\theta_t + a\theta_c = \nu(\nu - 1)(p^{(1)} - 1) + (2\nu - 3)\theta_l$$

nelle quali si è posto, per brevità:

$$a = 4(\nu - 1)(\pi - 1) + 2d - (2\nu - 5)r.$$

È da notarsi che la (V) lega i caratteri del sistema algebrico col genere lineare della superficie.

III.

14. Altre relazioni fra i caratteri del sistema algebrico Γ, si ottengono con le considerazioni dei numeri seguenti. Prima di esporle, ricordiamo che si è indicato con:

τ il numero dei punti della superficie F, da ciascuno dei quali escono tre curve di Γ, fra loro infinitamente vicine (punti che sono cuspidi per la curva L^*).

Inoltre diremo:

α il numero dei *nodi* della curva L^*;

u il numero dei punti di F, da ciascuno dei quali escono due C che ivi si osculano ($u = 0$, se $n < 3$);

v il numero delle curve di Γ, su ciascuna delle quali esistono due punti infinitamente vicini, da ognuno dei quali escono due altre C che ivi si toccano.

Infine, se le curve di Γ hanno k nodi variabili, ed è Δ la curva luogo di questi punti doppi, diremo:

π_δ il genere della curva Δ;

s il numero delle intersezioni della C generica con la curva Δ, fuori

(1) Si ricordi che l indica il numero dei punti di contatto che la curva C generica ha con la curva L^* (v. n.° 2).

dei k punti doppi; cioè il numero dei punti di una C, ciascuno dei quali è doppio per un'altra curva di Γ;

ε il numero delle curve di Γ dotate di tacnodo, eccettuate le r curve doppie stazionarie (ciascuna delle quali ha k tacnodi);

ρ il numero delle curve di Γ aventi un regresso, fra i k punti doppi variabili;

w il numero delle curve di Γ su ciascuna delle quali esistono due punti infinitamente vicini, ciascuno dei quali è doppio per un'altra C;

ζ il numero dei punti della curva Δ, da ciascuno dei quali escono due C infinitamente vicine, distinte dalle curve doppie stazionarie di Γ, e dalla C che nello stesso punto ha un punto doppio.

Si ha:

$$\rho + \zeta = (\Delta L^*) \text{ (}^1\text{)}.$$

15. Fra una C generica, ma fissata, ed il sistema Γ nasce una corrispondenza algebrica $(n, \nu - 1)$, dicendo corrispondenti un punto della C considerata ed un'altra curva di Γ che si appartengono.

Elementi doppi di questa corrispondenza, sulla curva C, sono:

1°) gli x punti di contatto della curva C con le curve di Γ che la toccano; e

2°) gli s punti d'incontro della curva C con la curva Δ, fuori dei k punti doppi della stessa C.

Elementi di diramazione della corrispondenza, sulla curva C, sono:

1°) gli z punti della C, da ciascuno dei quali escono due altre C coincidenti, eccettuati quelli della curva R;

2°) gli nr punti in cui la C è incontrata dalle r curve doppie stazionarie di Γ;

3°) i suddetti s punti d'incontro della curva C con la Δ.

Applichiamo la formula di Zeuthen, osservando che gli s punti d'incontro della curva C con la curva Δ, i quali compariscono tanto nel gruppo degli elementi doppi che in quello degli elementi di diramazione, andrebbero contati due volte nell'uno e nell'altro gruppo (2), e quindi si eliminano. Si ottiene:

$$\text{(VI)} \qquad 2n(\pi - 1) + x = 2(\nu - 1)(p - 1) + z + nr.$$

---

(1) È facile vedere che per i punti della curva Δ ciascuno dei quali è una cuspide per una C, passa la curva L^*: infatti a queste cuspidi corrispondono, sulla superficie Φ, i punti della curva Δ' che sono doppi per l'involuzione binaria esistente su questa curva, immagine dei punti di Δ; tali punti della curva Δ' appartengono perciò alla curva L' luogo delle coincidenze della involuzione di ordine ν che sulla superficie Φ è immagine della F.

(2) V. Severi, *Trattato di Geometria algebrica*, Cap. VI, n.° 68, pag. 214.

16. Supposto che la curva L^* sia irriducibile [1], esiste su di essa una involuzione di ordine l $(= n - 2k)$, ciascun gruppo della quale è formato dai punti nei quali una C tocca la L^* stessa. I punti doppi di questa involuzione sono i χ punti della L^*, da ciascuno dei quali escono due C infinitamente vicine, che ivi si toccano. Si ha, quindi:

$$\text{(VII)} \qquad 2l(\pi - 1) + \chi = 2(\pi_l - 1) \text{ [2]}.$$

Se diciamo corrispondenti un punto M della curva L^* e le $\nu - 2$ curve di Γ uscenti da M, eccettuata quella che tocca L^* in M, si ottiene fra L^* e Γ una corrispondenza $(z, \nu - 2)$.

Sono, sulla L^*, elementi doppi di questa corrispondenza:

1°) i $2l$ punti di contatto di ciascuna delle d curve doppie nodali di Γ con la L^*. E infatti, ciascuna delle d curve doppie nodali contiene due distinti gruppi caratteristici, e tocca quindi la L^* in $2l$ punti: se la curva doppia nodale si considera come origine di un ramo di Γ, l di quei contatti appartengono al suo gruppo caratteristico, e gli altri l sono allora da considerarsi come punti doppi della nostra corrispondenza;

2°) le τ cuspidi di L^*, ciascuna da contarsi $\nu - 3$ volte (cioè tante volte quante sono le curve di Γ passanti per ciascuno di questi punti, esclusa la C che tocca ivi la L^*).

Sono, su L^*, elementi di diramazione della corrispondenza:

1°) gli α nodi della curva L^*, ciascuno da contarsi due volte;

2°) gli $z - l$ punti in cui ciascuna delle r curve doppie stazionarie di Γ incontra la L^* (eccettuati gli l punti del gruppo caratteristico, in ciascuno dei quali una tal curva ha incontro tripunto con la L^* stessa).

Applicando la formula di Zeuthen, abbiamo:

$$\text{(VIII)} \qquad 2z(\pi - 1) + 2ld + (\nu - 3)\tau = 2(\nu - 2)(\pi_l - 1) + 2\alpha + (z - l)r.$$

17. Se anche la curva T^* è irriducibile (il che implica che la curva B^* non esista) [3], diciamo corrispondenti un punto M della curva T^* e le due curve di Γ che si toccano in M. Si ha, fra T^* e Γ, una corrispondenza $(x\ 2)$. Sulla T^* sono punti doppi di questa corrispondenza gli u punti per ciascuno

---

[1] Qualora ciò non avvenisse, il ragionamento che segue, relativo alla curva L^*, si potrebbe fare invece per ogni sua parte irriducibile.

[2] Questa relazione trovasi anche nella nota di R. Torelli, citata a pag. 126 (n.° 6).

[3] In caso contrario, come si è detto per la curva L^*, si dovrebbe ripetere il successivo ragionamento del testo, per ciascuna parte irriducibile della T^*.

dei quali passano due C che ivi si osculano. E sono punti di diramazione i χ punti da ciascuno dei quali escono due C infinitamente vicine, che ivi si toccano.

Applicando la formula di ZEUTHEN, abbiamo:

(IX) $$2x(\pi - 1) + u = 4(\pi_t - 1) + \chi.$$

Se, invece, diciamo corrispondenti un punto M della curva T^*, e le $\nu - 2$ curve di Γ uscenti da M, escluse le due che si toccano in M, nasce fra T^* e Γ una corrispondenza $(y, \nu - 2)$. Sono elementi doppi di questa corrispondenza, sulla curva T^*, i punti il cui numero si è indicato con v (n.ª 14). E sono, sulla T^*, elementi di diramazione:

1°) i punti il cui numero si è indicato con η (n.° 12);

2°) gli y punti di ciascuna delle r curve doppie stazionarie di Γ, da ognuno dei quali escono altre due C che ivi si toccano.

Applicando la formula di ZEUTHEN, abbiamo:

(X) $$2y(\pi - 1) + v = 2(\nu - 2)(\pi_t - 1) + \eta + yr.$$

18. Supposto che la curva Δ sia irriducibile (1) si ha su di essa una involuzione di ordine k, ciascun gruppo della quale è formato dai k punti doppi di una medesima C. I punti doppi di questa involuzione sono gli ε tacnodi delle curve di Γ (esclusi quelli delle curve doppie stazionarie). Abbiamo perciò:

(XI) $$2k(\pi - 1) + \varepsilon = 2(\pi_\delta - 1).$$

Diciamo corrispondenti un punto M della curva Δ e le $\nu - 2$ curve di Γ uscenti da M, esclusa quella che ha in M un punto doppio. Si ha, fra Δ e Γ, una corrispondenza $(s, \nu - 2)$. Punti doppi di questa corrispondenza, sulla curva Δ, sono i punti il cui numero è stato indicato con w (n.ª 14). Sono elementi di diramazione:

1°) i punti il cui numero si è indicato con ζ (n.° 14);

2°) gli $s - 2k$ punti in cui ciascuna delle r curve doppie stazionarie incontra la curva Δ, fuori dei k tacnodi.

Applicando la formula di ZEUTHEN, abbiamo:

(XII) $$2s(\pi - 1) + w = 2(\nu - 2)(\pi_\delta - 1) + \zeta + (s - 2k)r.$$

19. Si vede facilmente che le 12 relazioni ottenute fra i caratteri del sistema Γ, e che abbiamo numerato con i simboli romani, sono fra loro in-

(1) Altrimenti le considerazioni che seguono andrebbero fatte per ciascuna sua parte irriducibile.

dipendenti. Infatti, le (I), (II), (III), (IV), (V) sono fra loro indipendenti, contenendo ciascuna un elemento che non compare nelle altre quattro [δ nella (I); n nella (II); d_l nella (III); d_t nella (IV); $p^{(1)}$ nella (V)].

La (VI) non può essere conseguenza delle precedenti, altrimenti dovrebbe contenere il numero x nella combinazione $x+y$, e il numero z nella combinazione $2l+z$. Analogamente, se la (VII) fosse conseguenza delle precedenti, dovrebbe contenere il numero χ nella combinazione $\chi+\eta$.

Nella (VIII) figura il numero α; nella (IX) il numero u; nella (X), v; nella (XI), ε; nella (XII) figurano w e ζ; ciascuno dei quali numeri non figura in nessuna delle altre formule.

Sur les variations faibles et fortes d'une fonctionnelle.

Par MICHEL KERNER (à Varsovie).

1. **Introduction.** — Le but de ce Mémoire est de développer quelques remarques et quelques formules se rattachant à la notion de la variation d'une fonctionnelle. J'ai en vue surtout la variation seconde, mais pour être plus systématique, je commence par un bref rappel de la notion de continuité, des définitions et de quelques applications de la variation première.

J'y suis forcé, car le long du travail tout entier je distingue deux genres de continuité et de variations: ce sont d'une part la continuité et les variations *faibles*, d'autre part *fortes*. Cette distinction n'est pas essentiellement nouvelle. Mais j'ai essayé de l'introduire systématiquement dès le commencement du travail, et j'ai adopté une terminologie à mon avis nouvelle, empruntée au calcul des variations, où l'on distingue depuis WEIERSTRASS des variations faibles et fortes. Dans cette terminologie diverses notions ont été rapprochées par la même épithète « faible » ou « fort », et on va saisir aisément l'élément commun dans les notions caractérisées par le même adjectif.

Les recherches de ce travail se rapportent aux fonctionnelles dans un espace abstrait, ou, en précisant, dans *l'espace $\mathfrak{D}$ (distancié) vectoriel* de M. FRÉCHET. Je ne cite pas ici la définition de cet espace, qui est devenue déjà classique. Je rappelle seulement que c'est l'espace d'éléments quelconques P, Q, R,..., pour lesquels sont définis la somme $P+Q$, le produit par un nombre réel aP et la norme (le module, la longueur, l'écart) $\|P\|$. Toutes ces notions sont assujéties à satisfaire aux axiomes, que l'on peut trouver chez M. FRÉCHET (1) ou chez M. BANACH (2).

Comme on sait, les espaces fonctionnels, considérés pour la plupart, sont des cas particuliers de l'espace $\mathfrak{D}$ vectoriel. C'est le cas de l'espace de fonctions de carré sommable dans le sens de M. LEBESGUE, que l'on appelle

(1) *Les espaces abstraits*, Paris, 1928, pp. 125-126 et 140.

(2) « Fundamenta mathematicae », tome III, 1922, pp. 134-135. Il faut tenir compte des axiomes I et II: l'axiome III, d'après lequel l'espace doit être complet, est superflu pour notre but.

souvent l'espace hilbertien, grâce à son applicabilité à l'espace de M. HILBERT proprement dit. Si le lecteur préfère se passer de la notion d'espaces abstraits, il peut supposer que les symboles P, Q, R,... désignent des fonctions de carré sommable d'une variable t (non marquée explicitement) sur un intervalle ou sur un ensemble linéaire borné et mesurable. On doit alors poser

$$\| P \| = \sqrt{\int P^2 dt}.$$

Ce cas particulier est suffisant pour les applications que nous avons en vue, et qui feront l'objet d'un mémoire consacré à l'étude d'extrema dans l'espace hilbertien ([3]).

La fonctionnelle elle-même est assujétie à ne prendre que des valeurs numériques. C'est un nombre réel dépendant des éléments d'un espace abstrait. Il est évident qu'on peut généraliser quelques résultats de ce mémoire pour les rendre valables dans le cas beaucoup plus général d'une opération fonctionnelle, qui fait correspondre les éléments d'un espace abstrait aux éléments d'un autre. On se trouverait alors dans le domaine de l'analyse générale. On peut même déduire quelques résultats intermédiaires de ce travail des théorèmes plus généraux, contenus dans le mémoire remarquable de M. FRÉCHET sur la notion de différentielles (c'est que nous appelons les variations) dans l'analyse générale ([4]). Mais j'ai préféré à me borner au domaine des fonctionnelles numériques, en tenant compte de ce que ce ne sont pas tous les thèorèmes de ce mémoire, qui sont capables de généralisation, et en ayant aussi en vue l'application à l'espace hilbertien, dont j'ai fait une mention plus haut.

Le développement de la théorie est précédé de quelques définitions, concernant les éléments de l'espace abstrait, qui dépendent d'un paramètre numérique. Elles ne sont que des généralisations immédiates des définitions adoptées dans le cas des fonctions de carré sommable ([5]). Elles peuvent d'ailleurs être considérées comme des cas particuliers des définitions adoptées par M. FRÉCHET dans la théorie générale ([4]). C'est le cas, où l'argument est une variable numérique et la fonctionnelle est abstraite.

J'ai adopté l'espace $\mathfrak{D}$ vectoriel. Mais on verra aisément que pour tout ce qui ne concerne que des notions de continuité et de variations faibles, on

---

([3]) Ce volume, p. 183.
([4]) « Annales de l'École Normale Supérieure », série 3, tome XLII, 1925, p. 293.
([5]) Cfr. VITALI, *Geometria nello spazio hilbertiano*, Bologna, 1929, pp. 75-82.

peut admettre que l'espace abstrait est un espace $\mathfrak{D}$ topologiquement affine de M. FRÉCHET [6].

2. **Les éléments dépendant d'un paramètre.** — Soit $P(u)$ un élément de l'espace abstrait, qui dépend d'un paramètre numérique u. On peut dire aussi que $P(u)$ répresente une courbe dans l'espace abstrait. Je l'appellerai *l'élément-fonction.*

Définition 1. — *L'élément* P(u) *est dit une fonction continue pour une valeur* u, *si*

$$\lim_{h \to 0} \| P(u+h) - P(u) \| = 0.$$

Définition 2. — *L'élément* P(u) *admet pour* u *une dérivée première* $\frac{dP(u)}{du} = P_u(u)$ *par rapport à* u, *si*

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{P(u+h) - P(u)}{h} - P_u(u) \right\| = 0.$$

On démontre aisément les deux théorèmes suivants:

Théorème 1. — *Si* P(u) *admet une dérivée* $P_u(u)$, *on a*

(1) $$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{P(u+h) - P(u)}{h} \right\| = \| P_u(u) \|.$$

Théorème 2. — *Si* P(u) *admet pour* u *une dérivée,* P(u) *est une fonction continue pour* u.

Définition 3. — *L'élément* P(u) *admet pour* u *une dérivée seconde* $\frac{d^2P(u)}{du^2} = P_{uu}(u)$ *par rapport à* u, *s'il admet une dérivée première dans le voisinage de* u, *et si cette dérivée admet pour dérivée première* $P_{uu}(u)$.

De la même façon on définit les dérivées d'ordre quelconque.

Dans le cas particulier de $P(u) = f(u) \cdot Q$, où Q est un élément constant et $f(u)$ est une fonction numérique, on a le

Théorème 3. — *Si* f(u) *admet pour* u *une dérivée première, on a*

(2) $$\frac{d[f(u) \cdot Q]}{du} = f_u(u) \cdot Q,$$

et de même pour les dérivées d'ordre superieur.

J'aurai encore besoin de la notion de dérivée seconde généralisée d'une

---

([6]) Loc. cit. dans la note ([1]), pp. 172-173 et 201-203.

fonction numérique et d'un élément-fonction. Je dis qu'une fonction $f(u)$ admet pour u une dérivée seconde généralisée $\frac{\tilde{d}^2 f(u)}{du^2} = f_{uu}(u)$, si elle admet pour u une dérivée première $f_u(u)$, et si

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{f(u+h) - f(u) - h f_u(u)}{h^2} - \frac{1}{2} \tilde{f}_{uu}(u) \right] = 0.$$

On peut démontrer que, si $f(u)$ admet une dérivée seconde continue, elle admet aussi une dérivée seconde généralisée, et les deux dérivées sont égales.

De même j'adopte la

Définition 3-bis. — *L'element* P(u) *admet pour* u *une dérivée seconde generalisée* $\frac{\tilde{d}^2 \mathrm{P(u)}}{\mathrm{du}^2} = \tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{uu}}(\mathrm{u})$, *s'il admet pour* u *une dérivée première* $\mathrm{P_u(u)}$, *et si*

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{P(u+h) - P(u) - h P_u(u)}{h^2} - \frac{1}{2} \tilde{P}_{uu}(u) \right\| = 0.$$

3. **La continuité faible et forte.** — Considérons maintenant une fonctionnelle d'un élément de notre espace abstrait. Nous la désignons par $f[P]$.

Définition 4. — *La fonctionnelle* f[P] *admet pour element* P *la continuité faible (est faiblement continue), si pour chaque élément* X *on a*

$$\lim_{u \to 0} f[P + uX] = f[P]. \tag{3}$$

Définition 5. — *La fonctionnelle* f[P] *admet pour élément* P *la continuité forte ou uniforme (est fortement continue), si pour chaque* $\varepsilon > 0$ *il existe un tel* $\eta > 0$, *que l'inégalité* $\|\mathrm{Y}\| < \eta$ *entraîne l'inégalité*

$$|f[P + Y] - f[P]| < \varepsilon.$$

Je cite sans démonstration quelques théorèmes immédiats:

Théorème 4. — *La continuité forte entraîne la continuite faible, mais non inversement.*

Théorème 5. — *Si* P(u) *est une fonction continue de* u *pour une valeur* u, *et si* f]P] *admet la continuité forte pour* P(u), *la fonction* $\varphi(\mathrm{u}) = \mathrm{f[P(u)]}$ *est continue pour* u, c'est à dire, on a

$$\lim_{h \to 0} f[P(u+h)] = f[P(u)]. \tag{4}$$

Cette formule est une généralisation de la formule (3).

On obtient aisément deux théorèmes suivants, dont le deuxième se trouve chez M. LÉVY [7]:

Théorème 6. — *Une fonctionnelle linéaire admet la continuité faible.*

Théorème 6-bis. — *Si une fonctionnelle lineaire admet la continuité forte pour un élément, elle l'admet pour tous les autres.*

Une fonctionnelle linéaire satisfait par définition à la condition

$$f[\lambda P + \mu Q] = \lambda f[P] + \mu f[Q].$$

4. **La variation première faible.** — Soit, comme plus haut, $f[P]$ une fonctionnelle de P. Considérons un élément quelconque X. Alors $f[P+uX]$ est une fonction de u.

Définition 6. — *Si pour tout* X *la fonction* f[P + uX] *admet pour* u = 0 *une dérivée première par rapport à* u, *qui est une fonctionnelle linéaire de* X, *nous appelons cette derivée la variation première faible ou de M. Lévy de la fonctionnelle* f[P] *pour l'élément* P.

Elle est une fonctionnelle de P et de X. Nous écrivons:

(5) $$\left\{\frac{df[P+uX]}{du}\right\}_{u=0} = \delta f[P;\ X].$$

D'après le théorème 6 elle est faiblement continue par rapport à X.

Théorème 7. — *Si la fonctionnelle* f[P] *admet la variation première faible pour* P, *elle y admet aussi la continuité faible.*

Pour la démonstration, il suffit de remarquer que d'après (5), $f[P + uX]$ est une fonction continue de n pour $u = 0$, quelque soit X, et ceci équivaut à (3).

5. **La formule des accroissements finis.** — Considérons deux éléments déterminés P et Q. Les éléments $P + uQ$, où u varie de 0 à 1, forment le segment droit, joignant les éléments P et $P + Q$. Supposons que $f[P]$ admette une variation première faible pour tous les éléments de ce segment.

La fonction $\varphi(u) = f[P + uQ]$ est dérivable pour $0 \leq u \leq 1$. Nous y appliquons la formule de LAGRANGE

(6) $$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi_u(\theta),$$

où $0 < \theta < 1$.

---

(7) *Leçons d'analyse fonctionnelle,* Paris, 1922, p. 52.

On vérifie successivement que

$$\varphi_u(\theta) = \left[\frac{\partial\varphi(\theta + v)}{\partial v}\right]_{v=0},$$

$$\varphi_u(\theta) = \left\{\frac{\partial f[P + \theta Q + vQ]}{\partial v}\right\}_{v=0},$$

$$\varphi_u(\theta) = \delta f[P + \theta Q;\ Q].$$

En définitive, en substituant $\varphi_u(\theta)$ dans (6), on obtient le

Théorème 8 (des accroissements finis). — *Si la fonctionnelle* f[P] *admet une variation première faible pour tous les éléments du segment droit joignant les éléments* P *et* P + Q, *on a*

$$f[P + Q] - f[P] = \delta f[P + \theta Q;\ Q],$$

où $0 < \theta < 1$.

6. Fonctionnelles homogènes [8]. — Nous adoptons les définitions suivantes:

Définition 7. — *Une fonctionnelle* f[P] *est dite homogène du degré* n, *si pour tout* k

$$f[kP] = k^n f[P].$$

Définition 7-bis. — *Si cette relation n'a lieu que pour* k > 0, *la fonctionnelle* f[P] *est dite positivement homogène du degré* n.

$f[P]$ étant une fonctionnelle homogène ou positivement homogène du degré n, admettant pour P une variation première faible, on a pour $|u|$ suffisamment petit

$$f[P + uP] = (1 + u)^n f[P]. \tag{7}$$

Après avoir dérivé par rapport à u et posé $u = 0$, on arrive au

Théorème 9 (d'Euler). — *Si* f[P] *est une fonctionnelle homogène ou positivement homogène du degré* n, *admettant pour* P *la variation première faible, on a*

$$\delta f[P;\ P] = n f[P]. \tag{8}$$

Il peut sembler que l'hypothèse d'existence de la variation première est superflue, car le second membre de (7) est dérivable. Mais la formule (8) n'a de sens que, si le symbole $\delta f[P;\ X]$ est défini pour tout élément X et non seulement pour $X = P$ [9].

---

[8] Cfr. FREDA, « Atti della Reale Accademia dei Lincei », série 5, tome XXIV, 1915, p. 1035.

[9] Cfr. le numéro 10.

7. **La variation première forte.** — Nous adoptons la

Définition 8. — *S'il existe une fonctionnelle* $\varphi[Y]$ *linéaire et fortement continue, telle que pour chaque* $\varepsilon > 0$ *il existe un tel* $\eta > 0$, *que l'inégalité* $\|Y\| < \eta$ *entraîne l'inégalité*

$$\left| \frac{f[P+Y] - f[P] - \varphi[Y]}{\|Y\|} \right| < \varepsilon, \tag{9}$$

nous appelons cette fonctionnelle $\varphi]Y]$ *la variation première forte ou de M. Fréchet de la fonctionnelle* f[P] *pour l'élément* P.

Elle est une fonctionnelle de P et de Y. Nous la désignons par

$$\varphi[Y] = \bar{\delta} f[P;\ Y].$$

D'après le théorème 6 bis il suffit qu'elle soit fortement continue pour un seul élément X, pour qu'elle le soit pour tous les autres.

Théorème 10. — *Si la fonctionnelle* f[P] *admet la variation première forte pour* P, *elle y admet aussi la continuité forte.*

La fonctionnelle $\varphi[Y]$ est fortement continue et $\varphi[O] = 0$. Donc, on peut choisir un tel $0 < \eta < \frac{1}{2}$, que pour $|Y\| < \eta$ on ait (9) et $\varphi[Y]| < \frac{\varepsilon}{2}$. On en conclut que

$$| f[P+Y] - f[P] | < \varepsilon.$$

ε ayant été arbitraire, le théorème 10 est démontré.

8. **Première formule fondamentale.** — Soit $P(u)$ un élément-fonction admettant pour u une dérivée première $P_u(u)$. Soit de plus $f[P]$ une fonctionnelle admettant pour $P(u)$ une variation première forte.

Posons dans la formule (9) $P = P(u)$ et $Y = P(u+h) - P(u)$. Grâce à la continuité de $P(u)$ (théorème 2) on voit que

$$\lim_{h \to 0} \| Y \| = 0.$$

Donc,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f[P(u+h)] - f[P(u)] - \delta f[P(u);\ P(u+h) - P(u)]}{\| P(u+h) - P(u) \|} = 0.$$

En multipliant cette égalité par (1), nous obtenons

$$\lim_{h \to 0} \frac{f[P(u+h)] - f[P(u)] - \bar{\delta} f[P(u);\ P(u+h) - P(u)]}{h} = 0.$$

Comme $\bar{\delta} f[P;\ Y]$ est linéaire par rapport à Y, on peut écrire:

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f[P(u+h)] - f[P(u)]}{h} - \delta f \left[P(u);\ \frac{P(u+h) - P(u)}{h} \right] \right\} = 0.$$

Mais $\bar{\delta}f[P; Y]$ est aussi fortement continu par rapport à Y. Donc, en tenant compte de (4), on en conclut que le second terme tend à $\bar{\delta}f[P(u); P_u(u)]$. On arrive donc au

Théorème 11. — *Si* P(u) *admet une derivée* $\mathrm{P_u(u)}$ *pour* u, *et si* f[P] *admet une variation première forte pour* P(u), *la fonction* f[P(u)] *est dérivable par rapport à* u *pour* u, *et on a*

$$\frac{df[P(u)]}{du} = \bar{\delta}f[P(u); P_u(u)]. \tag{10}$$

9. **Relation entre les variations premières.** — Les expressions (5) et (10) sont des généralisations des variations faibles et fortes du calcul des variations, et ceci justifie la terminologie que j'ai introduite dans ce travail.

En particulier, si l'on met dans (10) $P + uX$ au lieu de $P(u)$, on obtient, en tenant compte de (2), la formule (5). Donc, nous avons le

Théorème 12. — *Si une fonctionnelle* f[P] *admet pour* P *une variation première forte, elle y admet aussi une variation première faible, et les deux variations sont identiques.*

En particulier, les formules des accroissements finis et d'EULER restent valables pour les variations fortes.

10. **Continuité et variations partielles.** — Dans les définitions 4 et 5 de la continuité et dans les définitions 6 et 8 des variations premières on a supposé que les conditions dont il s'agit sont remplies pour tous les X ou Y, appartenant à l'espace considéré. Mais il peut arriver dans certains cas qu'il n'en est ainsi que pour X ou Y appartenant à un sous-ensemble de l'espace considéré.

Nous entendrons sous le mot *espace partiel ou sous-espace d'un espace donné* un ensemble d'éléments, qui forme lui-même un espace $\mathfrak{D}$ vectoriel. Bien entendu, les notions de somme, de produit et de norme de l'espace partiel doivent se confondre avec celles de l'espace total.

Définitions 4 bis, 5-bis, 6-bis et 8-bis. — *Si les conditions, dont il s'agit dans les définitions* 4, 5, 6 *et* 8, *n'ont lieu que pour* X *ou* Y *appartenant à un espace partiel, nous dirons que la fonctionnelle admet la continuité faible ou forte partielle, la variation première faible ou forte partielle, relative à cet espace.*

On peut, par exemple, conclure de la formule (7) qu'une fonctionnelle homogène $f[P]$ admet la variation première faible partielle, relative à l'espace d'élements $k \cdot P$, où k est un nombre réel (une droite euclidienne).

11. Les fonctionnelles de deux éléments. — Pour terminer l'étude des variations premières, il faut ajouter quelques remarques sur les fonctionnelles de deux éléments $f[P, Q]$. La considération des fonctionnelles d'un nombre d'éléments supérieur à deux n'y ajoute rien d'essentiellement nouveau.

Nous remarquons ([10]) que les couples d'éléments (P, Q) de l'espace $\mathfrak{D}$ vectoriel forment également un espace $\mathfrak{D}$ vectoriel, si l'on fait des conventions suivantes:

1°) $(P, Q) = (P_1, Q_1)$, si $P = P_1$, et $Q = Q_1$.

2°) $(P, Q) + (P_1, Q_1) = (P + P_1, Q + Q_1)$.

3°) $a(P, Q) = (aP, aQ)$.

4°) $\|(P, Q)\| = \|P\| + \|Q\|$.

Si l'on considère $f[P, Q]$, comme une fonctionnelle de (P, Q), la variation première (faible ou forte) sera une fonctionnelle de deux couples (P, Q) et (X, Y), que nous désignons par $\delta f[P, Q; X, Y]$ ou $\bar{\delta} f[P, Q; X, Y]$ et appelons *la variation première faible ou forte totale.*

Considérons deux espaces partiels de l'espace de (X, Y): l'espace de (X, O) et l'espace de (O, Y). À ces espaces correspondent deux variations partielles faibles et deux fortes, que nous désignons par

$$\delta_P f[P, Q; X],\ \delta_Q f[P, Q; Y] \quad \text{et} \quad \bar{\delta}_P f[P, Q; X],\ \bar{\delta}_Q f[P, Q; Y].$$

Nous les appelons les variations premières faibles et fortes partielles par rapport à P *et à* Q. On arrive aux mêmes notions, si l'on considère $f[P, Q]$, comme une fonctionnelle de P seulement, Q restant constant, et vice-versa ([11]).

De la définition même il résulte que l'existence de la variation totale implique l'existence des variations partielles. La réciproque n'est pas vraie. Comme $(X, Y) = (X, O) + (O, Y)$, on a dans le cas d'existence des variations

$$\delta f[P, Q; X, Y] = \delta_P f[P, Q; X] + \delta_Q f[P, Q; Y], \tag{11}$$

$$\bar{\delta} f[P, Q; X, Y] = \bar{\delta}_P f[P, Q; X] + \bar{\delta}_Q f[P, Q; Y]. \tag{12}$$

Enfin, j'énonce sans démonstration une généralisation immédiate du théorème 11, qui nous sera utile plus loin:

Théorème 11-bis. — *Si* P(u) *et* Q(u) *admettent des dérivées* $P_u(u)$ *et* $Q_u(u)$

([10]) Cfr. FRÉCHET. loc. cit. dans la note ([4]), p. 317.

([11]) Mes notations diffèrent de celles de M. FRÉCHET (loc. cit., p. 319), vu que les indices désignent d'ordinaire les variables par rapport auxquelles on différentie, et non les accroissements des variables.

pour u, *et si* f[P, Q] *admet une variation première forte totale pour* P(u), Q(u), *la fonction* f[P(u), Q(u)] *est dérivable par rapport à* u *pour* u, *et on a*

$$\frac{df[P(u),\ Q(u)]}{du} = \bar{\delta}f[P(u),\ Q(u);\ P_u(u),\ Q_u(u)]. \tag{13}$$

12. **La variation seconde faible.** — Nous adoptons la

Définition 9. — *Si la fonctionnelle* f[P] *admet la variation première faible* δf[P; X] *dans le voisinage de* P, *et si cette variation admet pour* P *la variation première faible partielle par rapport à* P, *on appelle cette dernière la variation seconde faible de* f[P] *pour* P.

On écrit:

$$\delta^2 f[P;\ X;\ Y] = \delta_P \delta f[P;\ X;\ Y].$$

C'est une fonctionnelle linéaire de Y. On voit aisément (et cela s'ensuivra aussi des recherches du numéro suivant) qu'elle est aussi linéaire par rapport à X. Donc, c'est une fonctionnelle bilinéaire de deux éléments X et Y.

On peut considérer aussi des variations secondes partielles. Il est possible que les espaces partiels, auxquels doivent appartenir X et Y, soient distincts.

13. **La symétrie de la variation seconde faible.** — Supposons que la fonctionnelle $f[P]$ admette la variation seconde faible $\delta^2 f[P;\ X;\ Y]$ dans le voisinage d'un certain élément P. Supposons de plus que cette variation admette pour P la continuité forte par rapport à P.

Soient X et Y deux éléments déterminés. Considérons la fonction de deux variables $\varphi(u, v) = f[P + uX + vY]$. Pour u et v suffisamment petits, elle admet une dérivée par rapport à u

$$\frac{\partial\varphi(u,\ v+k)}{\partial u} = \left[\frac{\partial\varphi(u+h,\ v+k)}{\partial h}\right]_{h=0} = \delta f[P + uX + vY + kY;\ X].$$

Mais cette variation admet elle-même la variation première faible par rapport au premier élément pour u et v petits. Donc,

$$\frac{\partial^2\varphi(u,\ v)}{\partial u\partial v} = \left[\frac{\partial}{\partial k}\frac{\partial\varphi(u,\ v+k)}{\partial u}\right]_{k=0} = \delta^2 f[P + uX + vY;\ X;\ Y]. \tag{14}$$

De même, si l'on intervertit l'ordre des dérivations, on obtient

$$\frac{\partial^2\varphi(u,\ v)}{\partial u\partial v} = \delta^2 f[P + uX + vY;\ Y;\ X]. \tag{15}$$

Comme la variation $\delta^2 f$ admet la continuité forte par rapport au premier élément, les fonctions (14) et (15) de u et v sont continues pour $u=v=0$ par rapport aux deux variables, prises ensemble. Par conséquent, la fonction $\varphi(u, v)$ a ses dérivées secondes continues. Il en résulte, comme on sait, qu'elles sont égales:

$$\left[\frac{\partial^2\varphi(u, v)}{\partial u\partial v}\right]_{u=v=0}=\left[\frac{\partial^2\varphi(u, v)}{\partial v\partial u}\right]_{u=v=0}. \tag{16}$$

Nous avons démontré le

Théorème 13. — *Si la fonctionnelle* f[P] *admet dans le voisinage de* P *la variation seconde faible* δ^2f[P. X; Y], *fortement continue par rapport à* P *pour l'élément* P, *cette variation est symétrique par rapport à* X *et* Y:

$$\delta^2 f[P;\ X;\ Y]=\delta^2 f[P;\ Y;\ X]. \tag{17}$$

Dans la démonstration de ce théorème, la continuité faible de $\delta^2 f$ suffirait pour assurer la continuité de $\frac{\partial^2\varphi(u, v)}{\partial u\partial v}$ par rapport à chacunes de deux variables u et v, mais serait insuffisante pour la continuité par rapport aux deux variables, prises ensemble.

Si l'on pose dans (14) $u=v=0$, on obtient *une formule, qui est une généralisation naturelle de la formule* (5):

$$\left\{\frac{\partial^2 f[P+uX+vY]}{\partial u\partial v}\right\}_{u=v=0}=\delta^2 f[P;\ X;\ Y]. \tag{18}$$

La démonstration du théorème 13 légitime un théorème un peu plus général. En effet, il suffit que la fonctionnelle $f[P]$ n'admette que des variations secondes faibles partielles $\delta^2 f[P;\ X;\ Y]$ et $\delta^2 f[P;\ Y;\ X]$, relatives à un espace partiel des X et un tel des Y, et que seulement une de ces variations admette la continuité forte. Si l'on considère X et Y, appartenant aux espaces correspondants, on peut suivre la démonstration toute entière; dans (16) une seule dérivée sera continue, mais cela suffit pour l'égalité. Donc, nous avons le

Théorème 13-bis. — *Si la fonctionnelle* f[P] *admet dans le voisinage de* P *des variation secondes faibles partielles* δ^2f[P; X; Y] *et* δ^2f[P; Y; X], *relatives à certains espaces partiels des* X *et des* Y, *si de plus une de ces variations admet la continuité forte par rapport à* P *pour* P, *l'egalité* (17) *reste valable.*

On peut même se borner au voisinage plus étroit, correspondant aux deux espaces partiels, mais je n'insisterai pas sur ces détails.

14. **La variation seconde de M. Lévy.** — Supposons que $f[P]$ admet une variation seconde faible pour P. Considérons la fonction $\varphi(u) = f[P + uX]$, où X est un élément déterminé. On a successivement

$$\frac{d\varphi(u)}{du} = \left[\frac{\partial\varphi(u+h)}{\partial h}\right]_{h=0} = \delta f[P + uX;\ X],$$

$$\left[\frac{d^2\varphi(u)}{du^2}\right]_{u=0} = \delta^2 fP;\ X;\ X],$$

ou

(19) $$\left\{\frac{d^2 f[P + uX]}{du^2}\right\}_{u=0} = \delta^2 f[P;\ X;\ X].$$

On aperçoit immédiatement que l'expression à gauche est *la variation seconde de M. Lévy* ([12]). Donc, nous avons le

Théorème 14. — *Si la fonctionnelle* f[P] *admet pour* P *la variation seconde faible, elle admet aussi la variation seconde de M. Lévy. On forme celle-ci en mettant* Y = X *dans celle-là.*

La formule (18) est una généralisation de la définition de M. LÉVY.

15. **La formule de Taylor.** — De la même façon que la variation faible seconde, on peut définir les variations faibles d'ordre quelconque d'une fonctionnelle.

Supposons que la fonctionnelle $f[P]$ admet des variations faibles de tous les ordres jusqu'à n inclusivement pour tous les éléments du segment droit, joignant P et $P + Q$. La fonction $\varphi(u) = f[P + uQ]$ admet des dérivées par rapport à u d'ordre 1, 2,... n pour $0 \leq u \leq 1$. Nous y appliquons la formule de TAYLOR:

(20) $$\varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k\varphi(u)}{du^k}\right]_{u=0} + \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n\varphi(u)}{du^n}\right]_{u=\theta},$$

où $0 < \theta < 1$.

Les formules (5), (19) et les formules analogues pour les dérivées d'ordre supérieur nous donnent pour $k = 1, 2, \ldots\ n-1$

(21) $$\left[\frac{d^k\varphi(u)}{du^k}\right]_{u=0} = \delta^k f[P;\ Q;\ Q; \ldots\ Q],$$

où Q est répété k fois, et

(22) $$\left[\frac{d^n\varphi(u)}{du^n}\right]_{u=\theta} = \left[\frac{d^n\varphi(\theta+h)}{dh^n}\right]_{h=0} = \delta^n f[P + \theta Q;\ Q;\ Q; \ldots\ Q],$$

([12]) Loc. cit., p. 79.

où Q est répété n fois. En définitive, en substituant (21) et (22) dans (20), on obtient le

Théorème 15 (de Taylor). — *Si la fonctionnelle* f[P] *admet des variations faibles d'ordre* 1, 2,... n *pour tous les éléments du segment droit joignant les éléments* P *et* P + Q, *on a*

$$f[P+Q]=f[P]+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\delta^k f[P;\ Q;\ Q;\dots\ Q]+\frac{1}{n!}\delta^n f[P+\theta Q;\ Q;\ Q;\dots\ Q],$$

où $0<\theta<1$; *le nombre d'arguments égaux à* Q *est indiqué par l'ordre de la variation.*

La démonstration de ce théorème montre qu'il est valable pour les variations de M. LÉVY.

16. **La variation seconde forte.** — Nous adoptons avec M. FRÉCHET [13] la

Définition 10. — *Si la fonctionnelle* f[P] *admet la variation première forte* $\bar{\delta}$f[P; X] *dans le voisinage de* P, *et si cette variation admet pour* P *une variation première forte partielle par rapport à* P, *on appelle la dernière la variation seconde forte de* f[P] *pour* P.

On écrit:

$$\bar{\delta}^2 f[P;\ X;\ Y]=\bar{\delta}_P\bar{\delta} f[P;\ X;\ Y] \tag{23}$$

C'est une fonctionnelle bilinéaire de X ed Y. On peut aussi considérer, comme plus haut, des variations secondes fortes partielles.

17. **Seconde formule fondamentale.** — Soit $P(u)$ un élément-fonction admettant pour u une dérivée seconde $P_{uu}(u)$. Soit de plus $f[P]$ une fonctionnelle admettant pour $P(u)$ une variation seconde forte.

D'abord, on a d'après (10) dans le voisinage de u

$$\frac{df[P(u)]}{du}=\bar{\delta} f[P(u);\ P_u(u)]. \tag{24}$$

La fonctionnelle $\bar{\delta}f[P;\ Q]$ de deux éléments admet la variation première forte partielle par rapport à P. Elle est linéaire et fortement continue par rapport à Q; donc, elle admet la variation première forte partielle par rapport à Q, et

$$\bar{\delta}_Q\bar{\delta} f[P;\ Q;\ Y]=\bar{\delta} f[P;\ Y]. \tag{25}$$

[13] Loc. cit., p. 321.

Il n'en résulte pas que $\bar{\delta}f[P;\ Q]$ admette une variation première forte totale. Donc, nous supposons expressément qu'il en est ainsi. Cette variation est d'après (12), (23) et (25)

$$\bar{\delta}\,\bar{\delta}f[P;\ Q;\ X;\ Y] = \bar{\delta}^2 f[P;\ Q;\ X] + \bar{\delta}f[P;\ Y]. \tag{26}$$

Nous différentions l'égalité (24), en tenant compte de (13):

$$\frac{d^2 f[P(u)]}{du^2} = \bar{\delta}\,\bar{\delta}f[P(u);\ P_u(u);\ P_u(u);\ P_{uu}(u)],$$

ce qui fournit, d'après (26), le

Théorème 16. — *Si* P(u) *admet une dérivée seconde* $P_{uu}(u)$ *pour* u, *si* f[P] *admet une variation seconde forte pour* P(u), *et si de plus sa variation première admet non seulement des variation premières fortes partielles, mais aussi une variation première forte totale, la fonction* f[P(u)] *admet une dérivée seconde par rapport à* u *pour* u, *et on a*

$$\frac{d^2 f[P(u)]}{du^2} = \bar{\delta}^2 f[P(u);\ P_u(u);\ P_u(u)] + \bar{\delta}f[P(u);\ P_{uu}(u)]. \tag{27}$$

On peut se débarasser de l'hypothèse relative à l'existence de la variation totale de la variation première, en supposant que $\bar{\delta}f[P;\ Q]$ admet la continuité forte par rapport à P *uniformément pour tous les éléments* Q, *dont la norme est égale à* 1. Pour le démontrer, nous posons

$$\psi[P;\ Q;\ X;\ Y] = \bar{\delta}_P\bar{\delta}f[P;\ Q;\ X] + \bar{\delta}f[P;\ Y].$$

Alors

$$\left|\frac{\bar{\delta}f[P+X;\ Q+Y] - \bar{\delta}f[P;\ Q] - \psi[P;\ Q;\ X;\ Y]}{\|X\|+\|Y\|}\right| \leq$$
$$\leq \left|\frac{\bar{\delta}f[P+X;\ Q] - \bar{\delta}f[P;\ Q] - \bar{\delta}_P\bar{\delta}f[P;\ Q;\ X]}{\|X\|}\right| +$$
$$+ \left|\bar{\delta}f\left[P+X;\ \frac{Y}{\|Y\|}\right] - \bar{\delta}f\left[P;\ \frac{Y}{\|Y\|}\right]\right|.$$

Le premier terme à droite est aussi petit que l'on veut pour $\|X\|$ suffisamment petit. Il en est de même du second, quel que soit Y, parce que la norme de $\frac{Y}{\|Y\|}$ est égale à 1. Donc, $\psi[P;\ Q;\ X;\ Y]$ est la variation totale de $\bar{\delta}f[P;\ Q]$, et la formule (26) est démontrée.

18. **Relation entre les variations secondes.** — De la définition et de la relation entre les variations premières résulte le

Théorème 17. — *Si une fonctionnelle* f[P] *admet pour* P *une variation seconde forte, elle y admet aussi une variation seconde faible, et les deux variations sont identiques.*

On a en particulier les

Théorèmes 18, 18-bis et 19. — *Les théorèmes* 13, 13-bis *et* 15 *restent valables, si l'on y remplace les variations faibles par fortes.*

Nous remarquons encore que, si l'on met dans la formule (27) $P + uX$ au lieu de $P(u)$, on obtient la formule (19) de M. Lévy. Dans ce cas particulier l'hypothèse d'existence de la variation totale de la variation première n'est pas nécessaire, car $P_u(u) = X$ dans la formule (24) reste constant.

19. **La variation seconde forte généralisée.** — On définit aussi d'une manière différente la variation seconde, correspondant à la variation première forte. C'est que M. Lévy ([14]) appelle la variation seconde au sens de M. Fréchet. Au lieu d'être une fonctionnelle bilinéaire de deux éléments elle est une fonctionnelle quadratique d'un seul élément. Sa définition correspond à celle de la dérivée seconde généralisée d'une fonction d'une variable numérique (cfr. numéro 2), et c'est pourquoi nous l'appelons la variation seconde forte généralisée. Nous adoptons la

Définition 11. — *Si la fonctionnelle* f[P] *admet pour* P *la variation première forte* $\bar{\delta}$f[P; X], *et s'il existe une fonctionnelle* φ[Y] *quadratique et fortement continue, et telle que pour chaque* $\varepsilon > 0$ *il existe un tel* $\eta > 0$, *que l'inégalité* $\|Y\| < \eta$ *entraîne l'inégalité*

$$\left| \frac{f[P+Y] - f[P] - \bar{\delta}f[P;\ Y] - \frac{1}{2}\varphi[Y]}{\|Y\|^2} \right| < \varepsilon, \tag{28}$$

nous appelons cette fonctionnelle φ[Y] *la variation seconde forte généralisée de la fonctionnelle* f[P] *pour l'élément* P.

Nous la désignons par

$$\varphi[Y] = \tilde{\bar{\delta}}^2 f[P;\ Y].$$

20. **Seconde formule fondamentale généralisée.** — Soit $P(u)$ un élément-fonction admettant pour u la dérivée seconde généralisée $\tilde{P}_{uu}(u)$. Soit de plus $f[P]$ une fonctionnelle admettant pour $P(u)$ une variation seconde forte généralisée.

([14]) Loc. cit., p. 79.

On a d'abord la formule (10)

$$\frac{df[P(u)]}{du} = \bar{\delta} f[P(u);\ P_u(u)]. \tag{29}$$

Posons dans la formule (28) $P = P(u)$ et $Y = P(u+h) - P(u)$. Grâce à la continuité de $P(u)$, on voit que

$$\lim_{h \to 0} \| Y \| = 0.$$

Donc,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f[P(u+h)] - f[P(u)] - \bar{\delta} f[P(u);\ P(u+h) - P(u)] - \frac{1}{2}\tilde{\bar{\delta}}^2 f[V(u);\ P(u+h) - P(u)]}{\| P(u+h) - P(u) \|^2} = 0.$$

En multipliant cette égalité par le carré de (1), nous obtenons

$$\lim_{h \to 0} \frac{f[P(u+h) - f[P(u)] - \bar{\delta} f[P(u);\ P(u+h) - P(u)] - \frac{1}{2}\tilde{\bar{\delta}}^2 f[P(u);\ P(u+h) - P(u)]}{h^2} = 0.$$

Comme $\bar{\delta} f[P;\ Y]$ est linéaire et $\tilde{\bar{\delta}}^2 f[P;\ Y]$ quadratique par rapport à Y, on peut écrire, en tenant compte de (29):

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f[P(u+h)] - f[P(u)] - h \dfrac{df[P(u)]}{du}}{h^2} - \right.$$

$$\left. - \bar{\delta} f\left[P(u);\ \frac{P(u+h) - P(u) - hP_u(u)}{h^2}\right] - \frac{1}{2}\tilde{\bar{\delta}}^2 f\left[P(u);\ \frac{P(u+h) - P(u)}{h}\right] \right\} = 0.$$

Les deux seconds termes ont pour limites

$$\frac{1}{2}\bar{\delta} f[P(u);\ \tilde{P}_{uu}(u)] \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\tilde{\bar{\delta}}^2 f[P(u);\ P_u(u)].$$

Donc, on a le

Théorème 20. — *Si* P(u) *admet la dérivée seconde généralisée* $\tilde{P}_{uu}(u)$ *pour* u, *et si* f[P] *admet une variation seconde forte généralisée pour* P(u), *la fonction* f[P(u)] *admet une dérivée seconde généralisée par rapport à* u *pour* u, *et on a*

$$\frac{\tilde{d}^2 f[P(u)]}{du^2} = \tilde{\bar{\delta}}^2 f[P(u);\ P_u(u)] + \bar{\delta} f[P(u);\ \tilde{P}_{uu}(u)].$$

C'est une formule analogue à (27). Elle montre plus nettement encore que la variation seconde forte généralisée correspond à la dérivée seconde généralisée.

21. **Les variations secondes d'une fonctionnelle de deux éléments.** — Dans le numéro présent et les suivants j'emploierai le symbole δ pour désigner les variations faibles et fortes, en évitant ainsi une répetition ennuyeuse.

Pour une fonctionnelle $f[P, Q]$ de deux éléments il faut distinguer la variation seconde totale et quatre variations secondes partielles. L'existence de celle-là implique l'existence de celles-ci, et on a

$$\delta^2 f[P, Q;\ X, Y;\ U, V] = \delta^2_{PP} f[P, Q;\ X;\ U] + \delta^2_{PQ} f[P, Q;\ X;\ V] + \\ + \delta^2_{QP} f[P, Q;\ Y;\ U] + \delta^2_{QQ} f[P, Q;\ Y;\ V].$$

Il faut remarquer que le symbole δ_{PQ} indique qu'il faut prendre d'abord la variation première par rapport à P et ensuite par rapport à Q.

22. **Permutabilité des variations secondes.** — Considérons la fonctionnelle $f[P, Q]$, comme une fonctionnelle d'un couple (P, Q). Supposons qu'elle admette des variations secondes partielles

$$(30_1) \qquad \delta^2 f[P, Q;\ X, O;\ O, Y] = \delta^2_{PQ} f[P, Q;\ X;\ Y],$$

$$(30_2) \qquad \delta^2 f[P, Q;\ O, Y;\ X, O] = \delta^2_{QP} f[P, Q;\ Y:\ X],$$

relatives à certains espaces partiels de l'espace de couples (P, Q): à l'espace de couples (X, O) et à celui de couples (O, Y).

Supposons de plus qu'une de variations (30_1) et (30_2) admette la continuité forte par rapport à P, Q, pris ensemble. Alors, en tenant compte du théorème 13-bis ou 18-bis, on voit que les premiers membres de (30_1) et (30_2) sont égaux. On en tire les

Théorèmes 21 et 22. — *Si la fonctionnelle* f[P, Q] *admet dans le voisinage de* P, Q *les variations secondes (faibles ou fortes) partielles* δ^2_{PQ}f[P, Q; X; Y] *et* δ^2_{QP}f[P, Q; Y; X], *si de plus une de ces variations admet la continuité forte par rapport à* P, Q, *pris ensemble, pour le couple* P, Q, *ces variations sont transposées l'une de l'autre:*

$$(31) \qquad \delta^2_{PQ} f[P, Q;\ X;\ Y] = \delta^2_{QP} f[P, Q;\ Y;\ X].$$

Ce théorème est analogue à la proposition concernant la permutabilité des dérivées secondes d'une fonction de deux variables numériques. Les variations $\delta^2_{PP} f$ et $\delta^2_{QQ} f$ peuvent ne pas exister.

23. **Digression sur la variation seconde normale.** — La forme habituelle de la variation seconde est celle d'une fonctionnelle quadratique.

Dans ce qui précède nous l'avons envisagée comme une fonctionnelle bilinéaire. Nous sommes donc forcés de donner une nouvelle convention relative *à la forme normale de la variation seconde d'une fonctionnelle dans l'espace fonctionnel.*

On appelle d'ordinaire ([15]) la variation seconde d'une fonctionnelle $F[\varphi(t)]$ ([16]) d'une fonction $\varphi(t)$ dans l'intervalle $0 \leq t \leq 1$ *normale,* si

$$\delta^2 F[\varphi(t);\ x(t)] = \int_0^1 f(t)x^2(t)dt + \int_0^1\int_0^1 g(t,\ t')x(t)x(t')dtdt'.$$

De même nous l'appelons *normale,* si

$$\delta^2 F[\varphi(t);\ x(t);\ y(t)] = \int_0^1 f(t)x(t)y(t)dt + \int_0^1\int_0^1 g(t,\ t')x(t)y(t')dtdt'. \tag{32}$$

Les fonctions $f(t)$ et $g(t,\ t')$, qui sont des fonctionnelles de $\varphi(t)$, seront appelées les dérivées secondes, et nous écrirons:

$$f(t) = F_{\varphi\varphi}[\varphi(t);\ t] = F_{\varphi^2}[\varphi(t);\ t],$$
$$g(t,\ t') = F_{\varphi\varphi'}[\varphi(t);\ t,\ t'].$$

Si $\delta^2 F[\varphi(t);\ x(t);\ y(t)]$ admet la continuité forte par rapport à $\varphi(t)$, on a d'après le théorème 13 ou 18

$$\delta^2 F[\varphi(t);\ x(t);\ y(t)] = \delta^2 F[\varphi(t);\ y(t);\ x(t)],$$

ou, en tenant compte de (32),

$$\int_0^1\int_0^1 [g(t,\ t') - g(t',\ t)]x(t)y(t)dtdt' = 0,$$

pourvu que l'on puisse intervertir l'ordre des intégrations. On peut satisfaire à cette condition, si l'on suppose $g(t,\ t')$ symétrique, c'est à dire,

$$F_{\varphi\varphi'}[\varphi(t);\ t,\ t'] = F_{\varphi\varphi'}[\varphi(t);\ t',\ t]. \tag{33}$$

Dans le cas de fonctions continues cette égalité est même nécessaire. Dans le cas de fonctions de carré sommable elle doit être satisfaite partout, excepté un ensemble de mesure superficielle nulle au plus.

([15]) Cfr. LÉVY, loc. cit., p. 84.

([16]) Je fait ici une dérogation au système des notations, d'après lequel les majuscules désignent des éléments abstraits et les minuscules, des valeurs numériques.

24. Variations secondes normales d'une fonctionnelle de deux fonctions. — Pour obtenir la forme normale des variations secondes partielles d'une fonctionnelle $F[\varphi(t), \psi(t)]$ de deux fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$, définies dans l'intervalle $0 \leq t \leq 1$, il sera naturel de la considérer comme dépendant d'une seule fonction $\xi(t)$, égale à $\varphi(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$ et à $\psi(t-1)$ pour $1 < t \leq 2$. La formule (32) prend la forme

$$\begin{aligned}\delta^2 F[\varphi(t), \psi(t);\ x(t), y(t);\ u(t), v(t)] = \\ = \int_0^1 f_1(t)x(t)u(t)dt + \int_0^1 f_2(t)y(t)v(t)dt + \\ + \int_0^1\int_0^1 g_1(t, t')x(t)u(t')dtdt' + \int_0^1\int_0^1 g_2(t, t')x(t)v(t')dtdt' + \\ + \int_0^1\int_0^1 g_3(t, t')y(t)u(t')dtdt' + \int_0^1\int_0^1 g_4(t, t')y(t)v(t')dtdt'.\end{aligned}$$

Pour obtenir les variations partielles $\delta^2_{\varphi\varphi}F$, $\delta^2_{\varphi\psi}F$, $\delta^2_{\psi\varphi}F$ et $\delta^2_{\psi\psi}F$ il faut mettre successivement $y(t) = v(t) = 0$, $y(t) = u(t) = 0$, $x(t) = v(t) = 0$ et $x(t) = u(t) = 0$. On obtient ainsi

$$(34_1) \qquad \delta^2_{\varphi\varphi}F[\varphi(t), \psi(t);\ x(t);\ u(t)] = \int_0^1 f_1(t)x(t)u(t)dt + \int_0^1\int_0^1 g_1(t, t')x(t)u(t')dtdt',$$

$$(34_2) \qquad \delta^2_{\varphi\psi}F[\varphi(t), \psi(t);\ x(t);\ v(t)] = \int_0^1\int_0^1 g_2(t, t')x(t)v(t')dtdt',$$

$$(34_3) \qquad \delta^2_{\psi\varphi}F[\varphi(t), \psi(t);\ y(t);\ u(t)] = \int_0^1\int_0^1 g_3(t, t')y(t)u(t')dtdt',$$

$$(34_4) \qquad \delta^2_{\psi\psi}F[\varphi(t), \psi(t);\ y(t);\ v(t)] = \int_0^1 f_2(t)y(t)v(t)dt + \int_0^1\int_0^1 g_4(t, t')y(t)v(t')dtdt'.$$

C'est la forme normale des variations secondes partielles. Pour les variations mixtes, l'intégrale simple manque.

On a six dérivées secondes

$$(35_1) \qquad f_1(t) = F_{\varphi^2}[\varphi(t), \psi(t);\ t],$$

$$(35_2) \qquad f_2(t) = F_{\psi^2}[\varphi(t), \psi(t);\ t],$$

$$(36_1) \qquad g_1(t, t') = F_{\varphi\varphi'}[\varphi(t), \psi(t);\ t, t'],$$

$$(36_2) \qquad g_2(t, t') = F_{\varphi\psi}[\varphi(t), \psi(t);\ t, t'],$$

$$(36_3) \qquad g_3(t, t') = F_{\psi\varphi}[\varphi(t), \psi(t);\ t, t'],$$

$$(36_4) \qquad g_4(t, t') = F_{\psi\psi'}[\varphi(t), \psi(t);\ t, t'].$$

Si la variation $\delta^2_{\varphi\psi}F$ ou $\delta^2_{\psi\varphi}F$ admet la continuité forte par rapport à $\varphi(t)$, $\psi(t)$, pris ensemble, on a d'après le théorème 21 ou 22

$$\delta^2_{\varphi\psi}F[\varphi(t),\ \psi(t);\ w(t);\ z(t)] = \delta^2_{\psi\varphi}F[\varphi(t),\ \psi(t);\ z(t);\ w(t)],$$

ou, en tenant compte de (34_2) et (34_3),

$$\int_0^1\int_0^1 [g_2(t, t') - g_3(t', t)]w(t)z(t')dtdt' = 0.$$

Comme plus haut, on peut poser

$$g_2(t, t') = g_3(t', t).$$

En définitive, si la variation partielle correspondante admet la continuité forte, on a pour les dérivées, en tenant aussi compte de (33),

$$(37_1)\qquad F_{\varphi\varphi'}[\varphi(t),\ \psi(t);\ t,\ t'] = F_{\varphi\varphi'}[\varphi(t),\ \psi(t);\ t',\ t],$$

$$(37_2)\qquad F_{\varphi\psi}[\varphi(t),\ \psi(t);\ t,\ t'] = F_{\psi\varphi}[\varphi(t),\ \psi(t);\ t',\ t],$$

$$(37_3)\qquad F_{\psi\psi'}[\varphi(t),\ \psi(t);\ t,\ t'] = F_{\psi\psi'}[\varphi(t),\ \psi(t);\ t',\ t].$$

Nous ferons usage de ces formules dans le travail sur l'extremum dans l'espace hilbertien [3].

Dal Comitato per il Congresso Internazionale dei Matematici, che si terrà a Zurigo nel 1932, riceviamo la seguente comunicazione:

« In conformità alla decisione presa dal Congresso Internazionale di Bologna (1928), il prossimo

CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI

avrà luogo in Zurigo, dal 4 al 12 Settembre 1932. Gl' inviti e le prime informazioni precise saranno spedite a far tempo dal prossimo Ottobre.

Il programma scientifico prevede una serie alquanto numerosa di conferenze generali che, nel loro insieme, dovranno dare un'immagine, completa per quanto è possibile, dello stato attuale delle matematiche; inoltre, sedute di Sezioni riservate alle Comunicazioni più brevi ed aventi per oggetto risultati di recenti ricerche.

Accanto alla parte scientifica, il programma comprenderà riunioni, ricevimenti, ed escursioni cui la Svizzera si presta in modo particolare; esse, a quanto speriamo, potranno contribuire a rafforzare i legami scientifici e le relazioni personali fra i matematici del mondo intero, riuniti a Zurigo.

Zurigo, estate 1931.

IL COMITATO ORGANIZZATORE ».

Sui diagrammi reciproci del Cremona.

Memoria di TULLIO VIOLA (a Bologna).

Sunto. - *Esistenza di un diagramma reciproco per ogni travatura triangolare semplice soggetta ad un sistema di forze esterne in equilibrio, applicate ai nodi. Esistenza di travature che ammettono diagramma reciproco o no, a seconda delle sollecitazioni esterne. Proprietà notevole di due superficie poliedriche a facce triangolari, reciproche in una qualunque reciprocità.*

1. Nella 2ª ediz. delle *Lezioni di meccanica razionale*, vol. I, di T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI (Zanichelli, 1930, pag. 633 e segg.) è dimostrata l'esistenza di un diagramma reciproco per ogni travatura triangolare semplice soggetta ad un sistema di forze esterne in equilibrio, applicate ai nodi. La dimostrazione consiste nella effettiva costruzione di due superficie poliedriche S ed S' semplicemente connesse, reciproche rispetto al sistema nullo e nelle condizioni descritte dal CREMONA nella classica Memoria *Le figure reciproche nella statica grafica* (ediz. 1872, n.i 23, 24).

In questa nota mi propongo di svolgere un'altra dimostrazione di questa proprietà, aggiungendo inoltre un esempio per mostrare l'esistenza di travature che ammettono diagramma reciproco o no, a seconda delle sollecitazioni esterne alle quali sono sottoposte. Completerò poi il risultato con un'osservazione sulle figure reciproche nello spazio.

2. Per una travatura triangolare semplice, in equilibrio sotto l'azione di un sistema di forze esterne applicate ai nodi, è possibile disegnare un diagramma degli sforzi nelle singole aste, il quale soddisfa alle seguenti condizioni:

1ª) le forze esterne sono disposte in un poligono chiuso nel quale esse si susseguono nell'ordine in cui s'incontrano percorrendo il contorno della travatura (girando in un senso oppure nel senso opposto);

2ª) ad ogni nodo della travatura corrisponde nel diagramma un poligono chiuso i cui lati sono ordinatamente paralleli alle aste e all'eventuale forza esterna che concorrono in quel nodo, ed hanno lunghezze proporzionali alle intensità degli sforzi che si trasmettono nelle singole aste e dell'eventuale forza esterna;

3a) per ogni asta della travatura vi è nel diagramma un solo segmento che ne rappresenta lo sforzo (LEVI-CIVITA e AMALDI, loc. cit., pag. 623).

Si tratta di dimostrare che un tale diagramma è reciproco dello schema della travatura.

Fissiamo all'uopo l'attenzione su un esempio che riporto dalle citate *Lezioni di Meccanica razionale,* ma conduciamo la dimostrazione per via del tutto generale.

La fig. 1 rappresenti da una parte una travatura reticolare triangolare semplice in equilibrio, dall'altra il corrispondente diagramma degli sforzi che supponiamo costruito in base alle leggi del presente numero. Innalziamo in tutti i vertici del diagramma degli sforzi (cioè nei punti $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_5 Q_6$, $T T' T'' T'''$) le perpendicolari indefinite al piano del foglio, cioè le proiettanti

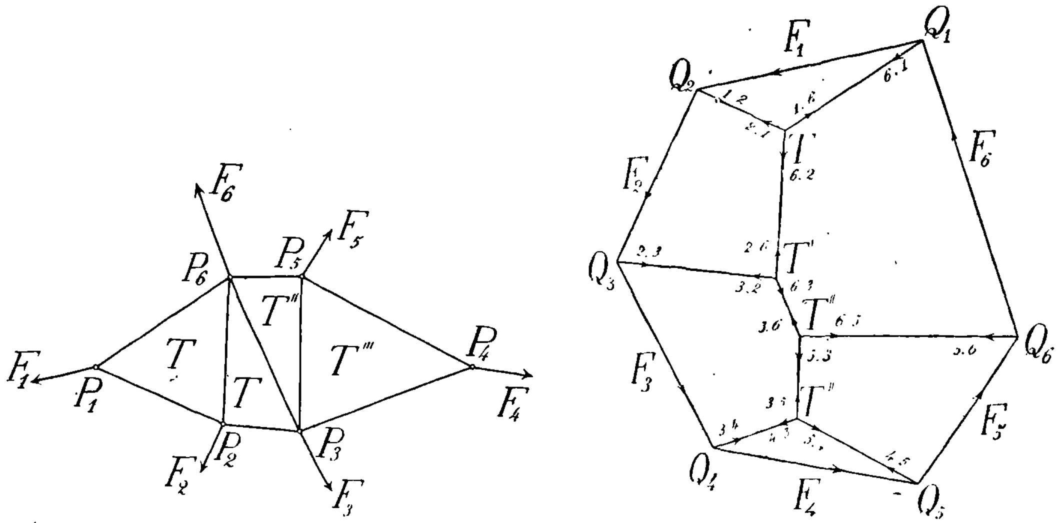


Fig. 1.

sul piano ortografico. Ci proponiamo di costruire una superficie poliedrica S semplicemente connessa, avente i vertici sulle proiettanti or ora innalzate sul piano ortografico e le cui facce abbiano per proiezioni i poligoni del diagramma degli sforzi: tale quindi che il poligono delle forze sia la proiezione del suo orlo e che gli altri segmenti del diagramma siano le proiezioni degli spigoli. La superficie S dovrà essere costruita in modo che la sua reciproca S' si proietti nello schema della travatura; alle facce di S dovranno, per la reciprocità, corrispondere i vertici di S', agli spigoli di S gli spigoli di S', all'orlo di S l'orlo di S'; e quindi, per la proiezione ortografica, ai singoli poligoni, al poligono delle forze, ai singoli lati « interni » del diagramma, dovranno corrispondere nello schema della travatura rispettivamente i singoli nodi, il sistema delle forze esterne e le aste.

Come primo spigolo della superficie poliedrica S, costruiamo quello cui deve corrispondere l'asta di parete P_1P_2 del primo triangolo T, cioè l'asta congiungente il nodo P_1 in cui concorrono due sole aste col nodo P_2 in cui concorrono tre sole aste. Tale primo spigolo dovrà essere un segmento avente gli estremi $\overline{Q}_2$, $\overline{T}$ sulle proiettanti innalzate nei punti Q_2, T. Scegliamo ad arbitrio $\overline{Q}_2$ sulla proiettante in Q_2 e lasciamo indeterminato il punto $\overline{T}$ sulla proiettante in T: abbiamo un fascio di rette (i sostegni dei segmenti $\overline{Q}_2\overline{T}$) con centro in $\overline{Q}_2$ e giacente in un piano proiettante; ad esso corrisponderà, per la reciprocità, un fascio improprio di rette che si proietterà, sul piano ortografico, ancora in un fascio improprio, anzi nel fascio improprio il cui centro è il punto improprio della retta Q_2T. Potremo dunque scegliere $\overline{T}$ sulla proiettante in T in modo che il corrispondente spigolo di S' si proietti nella retta P_1P_2. Però la posizione dei nodi P_1P_2 non sarà fissata che quando si sarà fissata la posizione delle facce di S che hanno in comune lo spigolo $\overline{Q}_2\overline{T}$. Volendo che la posizione dei nodi P_1P_2 sia proprio quella dello schema della travatura, consideriamo in modo analogo gli altri due fasci di centro $\overline{Q}_2$, quello che si appoggia alla proiettante in Q_1 e quello che si appoggia alla proiettante in Q_3: al primo corrisponde, sul piano ortografico, il fascio improprio il cui centro è il punto improprio della retta d'azione della forza F_1, al secondo il fascio improprio il cui centro è il punto improprio della retta d'azione della forza F_2. Scegliamo i punti $\overline{Q}_1$ e $\overline{Q}_3$ rispettivamente sulle proiettanti in Q_1 e in Q_3 in modo che alle rette $\overline{Q}_2\overline{Q}_1$, $\overline{Q}_2\overline{Q}_3$ corrispondano, sul piano ortografico, rette passanti, rispettivamente per P_1, P_2. Con ciò si saranno fissate le posizioni delle prime due faccie della superficie poliedrica S, la faccia triangolare $\overline{Q}_2\overline{Q}_1\overline{T}$ e la faccia quadrangolare $\overline{Q}_2\overline{T}\overline{Q}_3\overline{T}'$, in modo che ad esse corrispondono, sul piano ortografico, rispettivamente i punti P_1P_2 precisamente nella posizione dello schema della travatura.

Nel completare la costruzione della superficie poliedrica S, rimarrà arbitraria la sola scelta del punto $\overline{Q}_2$ sulla proiettante in Q_2 e ciò come accade con la soluzione data nelle citate *Lezioni*, nella quale veniva anzitutto costruita la superficie poliedrica S' permettendole un grado di libertà (cioè la traslazione in direzione normale al piano ortografico, come nella costruzione presente).

Avendo fissata la posizione delle prime due faccie, nel modo che si è indicato, risultano fissati con esse anche gli spigoli $\overline{Q}_1\overline{T}$ e $\overline{T}\overline{T}'$ ai quali corrispondono, sul piano ortografico, le aste P_1P_6, P_2P_6, cioè quelle che, insieme all'asta già considerata P_1P_2 completano la prima maglia triangolare (infatti gli spigoli $\overline{Q}_2\overline{T}$, $\overline{Q}_1\overline{T}$, $\overline{T}'\overline{T}$ hanno in comune il vertice $\overline{T}$ cui corrisponde, nella proiezione ortografica, la detta maglia triangolare). Con gli spigoli $\overline{Q}_1\overline{T}$ e $\overline{T}\overline{T}'$ risulta ulteriormente fissata la posizione della faccia di S cui corrisponde il nodo P_6 e questo non potrà evidentemente venire a cadere che nella posizione dello schema della travatura.

Avendo fissata la posizione delle facce di S alle quali corrispondono i nodi P_2 e P_6, risultano fissati con esse anche gli spigoli $\overline{Q}_3\overline{T}'$ e $\overline{T}'\overline{T}''$ ai quali corrispondono, sul piano ortografico, le aste P_2P_3, P_3P_6, cioè quelle che, insieme all'asta già considerata P_2P_6 completano la seconda maglia triangolare (infatti gli spigoli $\overline{Q}_3\overline{T}'$, $\overline{T}\overline{T}'$, $\overline{T}''\overline{T}'$ hanno in comune il vertice $\overline{T}'$ cui corrisponde, nella proiezione ortografica, la detta maglia triangolare). Con gli spigoli $\overline{Q}_3\overline{T}'$ e $\overline{T}'\overline{T}''$ risulta ulteriormente fissata la posizione della faccia di S cui corrisponde il nodo P_3 e questo non potrà evidentemente venire a cadere che nella posizione dello schema della travatura.

Così si passerà successivamente al triangolo T'' e al nodo P_5, al triangolo T''' e al nodo P_4. È chiaro che se il numero dei triangoli costituenti la travatura fosse > 4, non si avrebbe difficoltà a proseguire il procedimento fino ad aver esauriti tutti i triangoli.

Con ciò si è eseguita la costruzione della superficie poliedrica S e si è dimostrato che la proiezione della superficie poliedrica S' (reciproca di S) è proprio lo schema della travatura, com'era richiesto dal problema.

3. Si pone ora la questione di sapere se la dimostrazione può essere estesa ad altri tipi di travature e se la costruzione dei diagrammi reciproci per una data travatura sia possibile per tutte le condizioni di carico. La ricerca di una condizione necessaria e sufficiente sarebbe lunga ed inutile; qui mi propongo soltanto di mostrare con un esempio come si possono avere travature triangolari che non ammettono in generale un diagramma reciproco e come tale diagramma possa esistere per certe condizioni di carico, mancare per altre.

La fig. 2 rappresenta lo schema di una travatura triangolare non semplice di 5 nodi e di $2 \cdot 5 - 3 = 7$ aste, sottoposta ad una generica qualunque ipotesi di carico: accanto ad essa sono disegnati i poligoni di equilibrio relativi a ciascun nodo, riuniti fra loro in modo da formare un diagramma che non è più reciproco perchè in esso sono tracciati due volte i segmenti proporzionali agli sforzi nelle aste 1·2 e 3·5. Si vede per tentativi che non è possibile riunire questi poligoni in modo che non si presentino simili ripe-

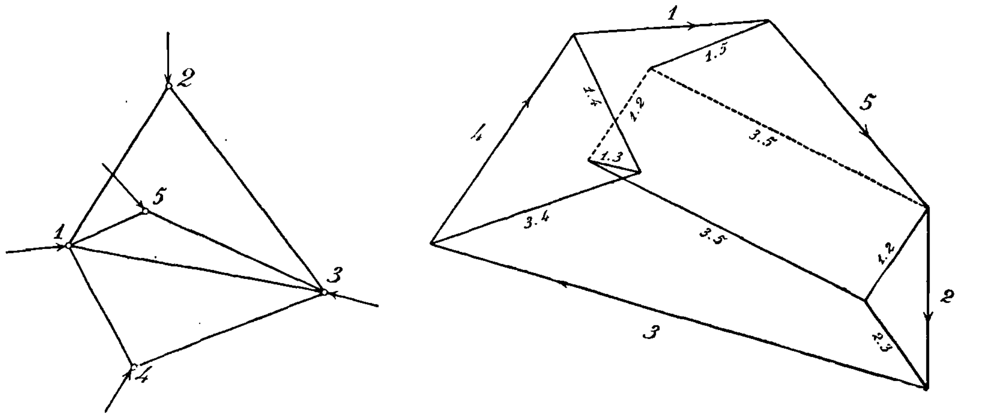


Fig. 2.

tizioni. Se la stessa travatura è invece sottoposta a un carico conveniente, come ad es. nella fig. 3, in cui le forze 4, 5 sono uguali, di segno contrario ed hanno la stessa linea d'azione, allora è possibile disegnare un diagramma

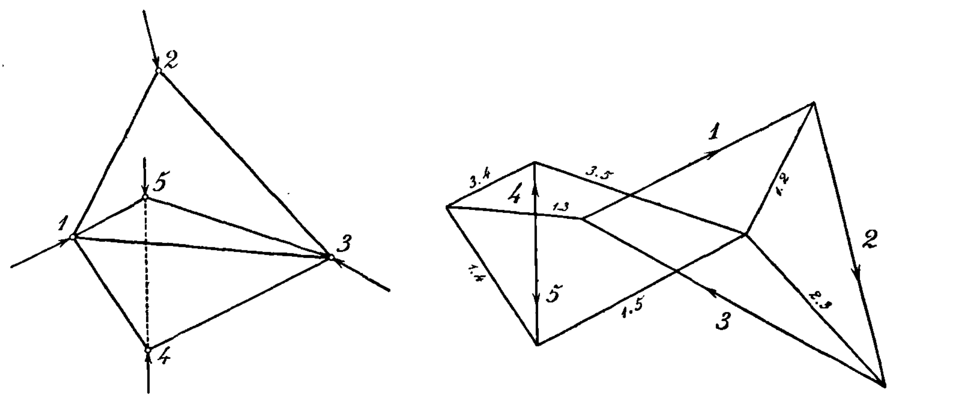


Fig. 3.

degli sforzi che soddisfa alle condizioni enunciate al n.º 2, tal quale l'abbiamo disegnato. Ripetendo su questo diagramma i ragionamenti del n.º 2 si vede che anche questo diagramma è reciproco.

4. Consideriamo ora una reciprocità qualunque e vediamo come si estendano ad essa le proprietà geometriche dimostrate al n.º 2 per il *sistema nullo*. Per una reciprocità qualunque é assai facile dimostrare la proposizione seguente, da considerarsi come una generalizzazione di quella del n.° 23 della citata Memoria del CREMONA:

Se S è una superficie poliedrica a facce triangolari, S' la superficie reciproca di S in una qualunque reciprocità Θ, se σ, σ' sono le loro proiezioni su un qualunque piano π da un punto P, qualunque purchè unito nella reciprocità Θ:

allora le due figure σ, σ' risultano riferite in modo che ad ogni triangolo di σ corrisponde un punto di σ', ad ogni lato comune a due triangoli di σ corrisponde la congiungente i punti corrispondenti ad essi e queste due rette incontrano la retta che è intersezione di π col piano reciproco di P in punti che si corrispondono in una proiettività.

Orbene, il procedimento descritto al n.° 2, ripetuto per il caso generale, permette d'invertire la proposizione ora enunciata nella forma seguente:

Dato in un piano un sistema finito od infinito di triangoli ed una corrispondenza biunivoca che faccia corrispondere a ciascun triangolo del sistema un punto del piano e ad ogni lato comune a due triangoli la congiungente i punti corrispondenti a questi; se avviene che le coppie di rette corrispondenti incontrino tutte una retta fissa r in punti corrispondenti in una proiettività:

allora si può far corrispondere ad ogni retta del sistema piano una retta dello spazio di cui essa sia proiezione da un punto fisso arbitrario P, per modo che le coppie di rette che corrispondono a coppie di rette corrispondenti nel piano siano reciproche rispetto ad una reciprocità spaziale assegnata arbitrariamente, purchè tale che in essa il punto P sia punto unito ed abbia per reciproco il piano Pr, e che la proiettività che essa subordina tra i fasci di rette sovrapposti con centro in P e sostegno il piano Pr proietti la detta proiettività sulla r.

Une remarque relative à la mécanique corpusculaire.

par F. J. de Wisniewski (Lazin-Pologne).

Dans la note suivante l'auteur tâche de démontrer qu'on peut bâtir un système de mécanique corpusculaire qui, au point de vue quantique, contient les résultats de la mécanique classique et de la mécanique ondulatoire comme cas particuliers.

On peut démontrer que la fonction φ qui rend extremum l'intégrale

$$I = \iiint \Big\{ \frac{h^2}{8\pi^2 m} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] +$$
$$+ \varphi \left(M_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + M_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} + M_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + (U - h_0)\varphi^2 \Big\} d\tau$$

est une solution de l'equation de Schrödinger:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} (h_0 - U)\varphi = 0$$

si les fonctions M_x, M_y, M_z satisfont à la relation:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} = 0.$$

On a en effet:

$$\delta I = \iiint \Big\{ \frac{h^2}{4\pi^2 m} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \frac{\partial \delta\varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \frac{\partial \delta\varphi}{\partial y} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \frac{\partial \delta\varphi}{\partial z} \right] +$$
$$+ \delta\varphi \left[M_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + M_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + M_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] +$$
$$+ \varphi \left[M_x \frac{\partial \delta\varphi}{\partial x} + M_y \frac{\partial \delta\varphi}{\partial y} + M_z \frac{\partial \delta\varphi}{\partial z} \right] + 2(U - h_0)\varphi\delta\varphi \Big\} d\tau.$$

En tenant compte des relations:

$$\varphi M_s \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}(\varphi M_s \delta\varphi) - M_s \frac{\partial \varphi}{\partial s} \delta\varphi - \varphi \frac{\partial M_s}{\partial s} \delta\varphi$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial \delta\varphi}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \delta\varphi \right) - \delta\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}$$

et en remplaçant les intégrales de volume par les intégrales de surface, on trouve:

$$\delta I = \iint \left\{ \frac{h^2}{4\pi^2 m} \partial n + M_n \varphi \right\} \delta\varphi d\sigma - \iiint \left\{ \frac{h^2}{4\pi^2 m} \nabla^2\varphi + 2\left(h_0 + \frac{1}{2} \operatorname{div} M - U\right)\varphi \right\} \delta\varphi d\tau.$$

On pourra satisfaire la condition:

$$\delta I = 0$$

pour des valeurs arbitraires de $\delta\varphi$ si l'on admet qu'en chaque point de l'espace a lieu l'équation:

$$\text{(a)} \qquad \frac{h^2}{8\pi^2 m} \cdot \nabla^2\varphi + \left(h_0 + \frac{1}{2} \operatorname{div} M - U\right)\varphi = 0$$

et qu'en chaque point de la surface environante a lieu la relation:

$$\text{(b)} \qquad \frac{h^2}{4\pi^2 m} \frac{\partial\varphi}{\partial n} + M_n \varphi = 0.$$

L'équation (a) est identique à l'équation de SCHRÔDINGER si l'on pose:

$$\text{(c)} \qquad \operatorname{div} M = 0.$$

Donc, si la relation (c) est remplie, toute fonction qui rend l'intégrale I extremum est une solution de l'équation de SCHRÖDINGER.

On obtient l'équation fondamentale de la mécanique ondulatoire quand on exprime que l'intégrale:

$$\iiint \left\{ H\left(\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x};\ \frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y};\ \frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z},\ x,\ y,\ z\right) - h_0 \right\} \varphi^2 d\tau$$

a une valeur extremale.

Par H on désigne ici la fonction de HAMILTON et par φ une fonction qui est reliée à la fonction S de JACOBI par la relation:

$$S = \frac{h}{2\pi} \log \varphi$$

h_0 désigne la constante d'énergie.

On peut aussi suivre la route inverse et poser comme fonction de HAMILTON d'une mécanique corpusculaire généralisée une fonction H telle que l'intégrale:

$$\iiint \{ H - h_0 \} \varphi^2 d\tau$$

admette comme condition d'extremum l'équation de SCHRÖDINGER.

D'après le theorème démontré plus haut, il suit que l'expression:

$$\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{1}{\varphi^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^3+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{1}{\varphi}\left(M_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+M_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+M_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+U$$

peut être considérée comme fonction de HAMILTON d'une mécanique corpusculaire généralisée.

Quand on remplace φ par S, on trouve pour la fonction H de HAMILTON l'expression:

$$H=\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]+M_x\frac{\partial S}{\partial x}+M_y\frac{\partial S}{\partial y}+M_z\frac{\partial S}{\partial z}+U$$

où M_x, M_y, M_z doivent satisfaire la condition:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_z}{\partial z}=0.$$

En désignant par p la quantité du mouvement de la masse m et en posant:

$$p=\nabla S$$

on obtient pour la fonction H de HAMILTON l'expression suivante:

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2(+\frac{2\pi}{h}(M_xp_x+M_yp_y+M_zp_z)+U.$$

On deduit les équations du mouvement de la masse m en appliquant les équations de HAMILTON:

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p};\quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q}.$$

On trouve ainsi:

$$\frac{dp_x}{dt}=-\frac{2\pi}{h}\left(p_x\frac{\partial M_x}{\partial x}+p_y\frac{\partial M_y}{\partial x}+p_z\frac{\partial M_z}{\partial x}\right)-\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$p_x=m\frac{dx}{dt}-\frac{2\pi}{h}mM_x$$

et quatre équations analogues pour p_y et p_z.

En éliminant p_x, p_y, p_z, on obtient les trois équations du mouvement du corpuscule de masse m:

$$mx''=\frac{2\pi m}{h}\left[y'\left(\frac{\partial M_x}{\partial y}-\frac{\partial M_y}{\partial x}\right)-z'\left(\frac{\partial M_z}{\partial x}-\frac{\partial M_x}{\partial z}\right)\right]+\frac{2\pi^2 m}{h^2}\frac{\partial M^2}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$my''=\frac{2\pi m}{h}\left[z'\left(\frac{\partial M_x}{\partial z}-\frac{\partial M_z}{\partial x}\right)-x'\left(\frac{\partial M_x}{\partial y}-\frac{\partial M_y}{\partial x}\right)\right]+\frac{2\pi^2 m}{h^2}\frac{\partial M^2}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$mz''=\frac{2\pi m}{h}\left[x'\left(\frac{\partial M_z}{\partial x}-\frac{\partial M_x}{\partial z}\right)-y'\left(\frac{\partial M_x}{\partial z}-\frac{\partial M_z}{\partial x}\right)\right]+\frac{2\pi^2 m}{h^2}\frac{\partial M^2}{\partial z}-\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Pour l'expression de l'énergie totale du corpuscule on trouve:

$$h_0 = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{2\pi^2 m}{h^2} M^2 + U$$

ou bien, en remplaçant les composantes de la vitesse par les composantes de la quantité de mouvement, on a pour h_0 l'expression:

$$h_0 = \frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2) + \frac{2\pi}{h}(M_x p_x + M_y p_y + M_z p_z) + U.$$

Dans ce qui suit, nous allons passer aux applications, et précisement on va traiter: 1°) l'oscillateur linéaire; 2°) le rotateur; 3°) le mouvement elliptique.

1. L'oscillateur linéaire.

Dans le cas de l'oscillateur linéaire qui oscille dans la direction de l'axe des x, la condition (c) prend la forme simple:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 0$$

d'où l'on tire que:

$$M = \text{cost.}$$

En tirant p de l'expression de l'énergie totale de l'oscillateur

$$2mh_0 = p^2 + \frac{4\pi}{h} mMp + U$$

où

$$U = 2\pi^2 m\nu^2 x^2,$$

et en appliquant la condition de SOMMERFELD-WILSON, on trouve:

$$n \cdot h = \oint p dx = -\frac{2\pi}{h} \cdot m \cdot M \oint dx \pm 2\pi m\nu \oint dx \sqrt{\frac{2mh^2 \cdot h_1 + 4\pi^2 m^2 M^2}{4\pi^2 m^2 h^2 \nu^2} - x^2}.$$

En effectuant les calculs indiqués, on a:

$$h_0 = n \cdot h\nu - \frac{2\pi^2}{h^2} m \cdot M^2.$$

On obtient de cette manière une expression de l'énergie d'un oscillateur linéaire qui contient comme cas particulier les expressions auxquelles conduisent la mécanique classique et la mécanique ondulatoire.

Si l'on pose $M = 0$, on trouve la formule donnée par la mécanique classique, et si l'on pose:

$$M = \frac{h}{2\pi}\sqrt{\frac{h\nu}{m}}$$

on trouve la formule:

$$h_0 = h\nu \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

en accord avec la mécanique ondulatoire.

2. Le rotateur.

Supposons que le rotateur soit constitué par deux masses m_1 et m_2 à distance γ l'une de l'autre, et en rotation autour de leur centre de gravité.

Soit (x, y) le plan de rotation. Les distances des masses de leur centre de gravité seront désignées par γ_1 et γ_2.

Chacune de ces masses doit remplir la condition:

$$\frac{\partial M_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial M_{iy}}{\partial y} = 0 \qquad (i = 1,\ 2)$$

qui s'écrit en coordonnées polaires comme il suit:

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_i}[M_{ix} \cos \vartheta_i + M_{iy} \sin \vartheta_i] + \frac{1}{\gamma_i}[M_{ix} \cos \vartheta_i + M_{iy} \sin \vartheta_i] +$$
$$+ \frac{1}{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial \vartheta_i}[M_{iy} \cos \vartheta_i - M_{ix} \sin \vartheta_i] = 0$$

où

$$x_i = \gamma_i \cos \vartheta_i; \quad y_i = \gamma_i \sin \vartheta_i .$$

On peut satisfaire à cette condition en posant:

$$M_{i\gamma} = M_{ix} \cos \vartheta_i + M_{iy} \sin \vartheta_i = 0$$
$$M_{i\vartheta} = M_{iy} \cos \vartheta_i - M_{ix} \sin \vartheta_i = \alpha \cdot \gamma_i .$$

Pour M_i on obtient alors:

$$M_i^2 = M_{i\gamma}^2 + M_{i\vartheta}^2 = \alpha^2 \cdot \gamma_i^2 .$$

L'energie totale h_0 du rotateur s'écrit alors, en posant

$$m_1\gamma_1^2 + m_2\gamma_2^2 = I; \quad \vartheta_1' = \vartheta_2' = \vartheta',$$
$$h_0 = \frac{1}{2} I \cdot \vartheta'^2 - \frac{2\pi^2}{h^2} \cdot \alpha^2 \cdot I.$$

Pour la quantité de mouvement p_ϑ, on obtient l'expression

$$p_\vartheta = I\cdot\vartheta' + \frac{2\pi}{h}\alpha I.$$

Les équations du mouvement de la masse m_i s'écrivent:

$$m_i x_i'' = \frac{2\pi m_i}{h} y_i'\left(\frac{\partial M_{ix}}{\partial y_i} - \frac{\partial M_{iy}}{\partial x_i}\right) + \frac{2\pi^2 m_i}{h}\frac{\partial M_i^2}{\partial x_i}$$

$$m_i y_i'' = -\frac{2\pi m_i}{h} x_i'\left(\frac{\partial M_{ix}}{\partial y_i} - \frac{\partial M_{iy}}{\partial x_i}\right) + \frac{2\pi^2 m_i}{h}\frac{\partial M_i^2}{\partial y_i}.$$

Par un calcul facile, on trouve:

$$m_i(y_i x_i'' - x_i y_i'') = -\frac{d}{dt}(m_i\gamma_i^2\vartheta') =$$

$$= \frac{2\pi m_i}{h}\left(\frac{\partial M_{ix}}{\partial y_i} - \frac{\partial M_{iy}}{\partial x_i}\right)(x_i x_i' + y_i y_i') + \frac{2\pi^2 m_i}{h}\left(y_i\frac{\partial M_i^2}{\partial x_i} - x_i\frac{\partial M_i^2}{\partial y_i}\right).$$

En tenant compte des relations:

$$M_i^2 = \alpha^2\gamma_i^2; \quad x_i^2 + y_i^2 = \gamma_i^2 = \text{const.}$$

on obtient:

$$\frac{d}{dt}(m_i\gamma_i^2\vartheta') = 0; \quad m_i\gamma_i^2\vartheta' = \text{const.}$$

d'où

$$(m_1\gamma_1^2 + m_2\gamma_2^2)\vartheta' = I\vartheta' = \Delta.$$

En appliquant la condition de SOMMERFELD-WILSON, on a

$$n\cdot h = \oint p_\vartheta d\vartheta = 2\pi(I\cdot\vartheta') + \frac{4\pi^2}{h}\alpha I$$

d'où

$$I\vartheta = \frac{h}{2\pi}\cdot n - \frac{2\pi}{k}\alpha\cdot I.$$

En introduisant cette expression de $I\vartheta'$ dans l'expression de h_0, on trouve:

$$h_0 = \frac{h^2}{8\pi^2 I^2}\cdot n^2 + \alpha\cdot n.$$

Si l'on pose dans cette formule $\alpha = 0$, on obtient le cas classique, et si l'on pose:

$$\alpha = \frac{h^2}{8\pi^2 I}$$

on a

$$h_0 = \frac{h^2}{8\pi^2 I} n(n+1)$$

conformément à la mécanique ondulatoire.

On voit donc que le résultat obtenu est plus général que ceux qui étaient donnés par la mécanique classique et par la mécanique ondulatoire et qu'il contient ces résultats comme cas particuliers.

3. Le mouvement elliptique.

Nous allons traiter le cas du mouvement elliptique d'un électron autour d'un noyau de charge Ze.

On supposera que le mouvement a lieu dans le plan (x, y).

La condition à satisfaire s'écrit en coordonnées polaires:

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\{\gamma \cdot M_\gamma\} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\{M_\vartheta\} = 0.$$

Elle sera satisfaite si l'on pose:

$$M_\vartheta = f(\gamma); \quad M_\gamma = \frac{b}{\gamma}$$

d'où il suit pour M l'expression:

$$M^2 = M_\vartheta^2 + M_\gamma = f(\gamma)^2 + \frac{b^2}{\gamma^2}$$

Les équations du mouvement de l'électron sont:

$$mx'' = + \frac{2\pi}{h} my' \left(\frac{\partial M_x}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial x}\right) + \frac{2\pi^2}{h^2} m \frac{\partial M^2}{\partial x} - \frac{Ze^2}{\gamma^3} \cdot x$$

$$my'' = - \frac{2\pi}{h} mx' \left(\frac{\partial M_x}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial x}\right) + \frac{2\pi^2}{h^2} m \frac{\partial M^2}{\partial y} - \frac{Ze^2}{\gamma^3} \cdot y.$$

Au moyen de ces équations, on trouve:

$$m(xy'' - yx'') = \frac{d}{dt}(m\gamma^2\vartheta') = - \frac{2\pi}{h} \cdot m \left(\frac{\partial M_x}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial x}\right) \cdot \gamma \cdot \gamma'.$$

Or comme

$$M_x = \frac{b}{\gamma^2} x - f(\gamma)\frac{y}{\gamma}; \quad M_y = \frac{b}{\gamma^2} y + f(\gamma)\frac{x}{\gamma}$$

et

$$\frac{\partial M_x}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial x} = - f'(\gamma) - \frac{1}{\gamma} f(\gamma)$$

on trouve que:

$$\frac{d}{dt}(m\gamma^2\vartheta_,) = \frac{2\pi}{h} mf'(\gamma)\cdot\gamma\cdot\gamma' + \frac{2\pi}{h} mf(\gamma)\gamma'$$

d'où

$$m\gamma^2\vartheta' = \frac{2\pi}{h} m\cdot\gamma\cdot f(\gamma) + \Delta.$$

En introduisant l'expression de M et de ϑ' dans l'équation de l'énergie, on trouve:

$$h_0 = \frac{m}{2}\gamma'^2 + \frac{\Delta^2}{2m}\frac{1}{\gamma^2} + \frac{2\pi\Delta}{h}\frac{f(\gamma)}{\gamma} - \frac{2\pi^2}{h^2} m \frac{b^2}{\gamma^2} - \frac{Ze^2}{\gamma}$$

d'où

$$m\gamma' = \sqrt{2mh_0 + \frac{2mZe^2}{\gamma} - \left\{\Delta^2 - \frac{4\pi^2}{h^2} m^2 b^2\right\}\frac{1}{\gamma^2} - \frac{4\pi m\Delta}{h}\frac{f(\gamma)}{\gamma}}.$$

Pour les quantités de mouvement p_γ et p_φ:

$$p_\gamma = m\gamma' - \frac{2\pi}{h} m\cdot M_\gamma; \quad p_\vartheta = m\gamma^2\vartheta' - \frac{2\pi}{h} m\cdot M_\vartheta\cdot\gamma$$

on trouve:

$$p_\vartheta = \Delta;$$

$$p_\gamma = -\frac{2\pi}{h} m \frac{b}{\gamma} + \sqrt{2mh_0 + \frac{2mZe^2}{\gamma} - \left\{\Delta^2 - \frac{4\pi^2}{h^2} m^2 b^2\right\}\frac{1}{\gamma^2} - \frac{4\pi m\Delta}{h}\frac{f(\gamma)}{\gamma}}.$$

En appliquant les conditions de SOMMERFELD-WILSON, on trouve:

$$n_\vartheta\cdot h = \oint p_\vartheta d\vartheta = 2\pi\Delta$$

$$n_\gamma\cdot h = \oint p_\gamma d\gamma = -\frac{4\pi^2}{h^2} mbki +$$

$$+ \oint d\gamma \sqrt{2mh_0 + \frac{2mZe^2}{\gamma} - \left\{\Delta^2 - \frac{4\pi^2}{h^2} m^2 b^2\right\}\frac{1}{\gamma^2} - \frac{4\pi m\Delta}{h}\frac{f(\gamma)}{\gamma}}$$

car

$$\oint \frac{d\gamma}{\gamma} = \log 1 = 2\pi ki. \qquad (k \text{ — entier})$$

Le résultat d'intégration dépend ici de l'expression de la fonction $f(\gamma)$.

Nous allons traiter le cas pour lequel $f(\gamma) = \alpha/\gamma$. En introduisant cette expression de $f(\gamma)$ et en effectuant l'intégration, on obtient pour h_0:

$$h_0 = -\frac{N\cdot h\cdot Z^2}{[n_\gamma - \varpi\cdot k + \sqrt{n_\vartheta^2 + \varpi^2 + \lambda\cdot n_\vartheta}]^2}$$

où l'on a posé

$$\tilde{\omega} = -\frac{4\pi^2 mb}{h} \cdot i; \quad \lambda = \frac{8\pi^2}{h^2} \cdot m \cdot \alpha.$$

Pour le défaut quantique σ on a alors:

$$\sigma = -\tilde{\omega} \cdot k + \sqrt{n\vartheta^2 + \tilde{\omega}^2 + \lambda \cdot n\vartheta} - n\vartheta.$$

Cette expression du défaut quantique redonne pour $\alpha = 0$ très exactement les défauts quantiques des niveaux S et s du hélium pour les nombres quantiques très grands.

Comme aux termes S et s correspond le nombre $n\vartheta = 1$, on doit avoir pour σ

$$\sigma = -\tilde{\omega} \cdot k + (\sqrt{1 + \tilde{\omega}^2} - 1),$$

car pour $\alpha = 0$ on a

$$\lambda = 0.$$

Cette expression de σ exprime très exactement les défauts quantiques observées des termes S et s du hélium si l'on pose:

$k = 1$ pour les termes S
$k = 2$ pour les termes s

et

$$\gamma = 0{,}156$$

comme on s'en rend compte par la table ci-dessous

	k	σ (calculée)	σ (observée)
S	1	$-0{,}1440$	$-0{,}144$
s	2	$-0{,}3002$	$-0{,}300.$

L'extremum dans l'espace hilbertien.

Par Michel Kerner (à Varsovie).

1. **Introduction.** — Le présent Mémoire a pour objet l'initiation d'un chapitre nouveau de la géométrie dans l'espace de M. Hilbert. Il établit une généralisation du problème fondamental du Calcul des variations, concernant l'extremum de l'intégrale curviligne dans l'espace à n dimensions.

Je me borne à la considération *des conditions premières* dans le cas de l'extremum libre aux extrémités fixes ou variables. Je traite un exemple, présentant une généralisation de l'espace riemannien. Il s'y agit d'un espace à une infinité de dimensions et à une métrique courbe. Je propose de l'appeler *l'espace de Riemann-Hilbert.*

Dans ce travail je n'emploie pas la méthode de l'infinité de coordonnées. Par espace hilbertien, j'entends celui des fonctions de carré sommable, l'espace qui plus précisément, n'est applicable qu'à celui de séries de carré convergent. J'ai suivi ainsi la terminologie de M. Vitali (1), à l'œuvre excellente duquel je renverrai le lecteur qui veut se rendre plus familière la géométrie hilbertienne.

Je fais usage ici de quelques résultats de mon Mémoire sur les variations faibles et fortes d'une fonctionnelle (2). Son but initial était de préparer les notions nécessaires pour les développements du présent travail. En particulier, je distingue ici les variations faibles et fortes, introduites dans le dit mémoire. Mais, comme les recherches y contenues sont valables pour les espaces plus généraux que celui de M. Hilbert, je n'ai pas voulu me borner au cas particulier. Le lecteur, qui ne veut pas sortir au delà de l'espace hilbertien, n'a qu'à faire une convention simple: il doit entendre sous les majuscules P, $Q, \ldots$, les fonctions $P(t)$, $Q(t), \ldots$ de carré sommable d'une variable t, et sous la norme $\| P \|$, l'expression

$$\| P(t) \| = \sqrt{\int P^2(t)dt},$$

(1) *Geometria nello spazio hilbertiano.* Bologna. 1929.

(2) Ce volume, p. 145.

où l'intégrale est étendue à un intervalle ou à un ensemble mesurable borné donné.

Comme j'aurai à citer souvent les théorèmes et les formules du mémoire mentionné, je désignerai ces citations par une parenthèse carrée, par exemple [(23)].

Il faut encore remarquer qu'une partie des résultats du présent mémoire, plus précisément les résultats des numéros 3-8, dans lesquels n'intervient pas la notion de l'intégrale étendue à la variable t, admettent une généralisation immédiate à l'espace $\mathfrak{D}$ vectoriel quelconque.

2. **L'espace hilbertien.** — Soit g un ensemble linéaire mesurable (au sens de M. LEBESGUE) borné. Comme *points de l'espace hilbertien* nous considérons toutes les fonctions de carré sommable sur l'ensemble g. Pour un point $f(t)$ l'expression

$$\| f(t) \| = \sqrt{\int_g f^2(t) dt}$$

existe et est finie. Nous l'appelons *la norme de* f(t).

La norme de la différence de deux points

$$\| f_1(t) - f_2(t) \|$$

est dite leur *distance.*

Nous disons que deux fonctions sont *équivalentes* et nous écrivons:

$$f_1(t) \backsim f_2(t),$$

si leur distance est égale à zéro. Ceci équivaut à dire qu'elles sont égales presque partout (excepté un ensemble de mesure nulle au plus). Les fonctions équivalentes ne réprésentent qu'un seul point de l'espace.

Nous disons qu'une suite $f_n(t)$ de points a pour *limite* le point $f(t)$ et nous écrivons:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t) \backsim f(t),$$

si la distance de $f_n(t)$ et $f(t)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. De même, un point $f(t, u)$, dépendant d'une variable u, ou plus brièvement, *un point-fonction* a pour limite $f(t)$, quand u tend vers u_0, et on écrit:

$$\lim_{u \to u_0} f(t, u) \backsim f(t),$$

si la distance entre $f(t, u)$ et $f(t)$ tend vers zéro avec $u - u_0$. On ajoute d'ordinaire le mot « en moyenne », mais nous l'omettons, parce qu'il n'y aura aucune occasion à un malentendu.

Le point-fonction est dit *continu* pour $u = u_0$, si

$$\lim_{u \to u_0} f(t, u) \backsim f(t, u_0).$$

On dit qu'il admet pour $u = u_0$ *une dérivée première* $f_u(t, u_0)$ et on écrit:

$$\left[\frac{df(t, u)}{du}\right]_{u=u_0} \backsim f_u(t, u_0),$$

si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t, u_0 + h) - f(t, u_0)}{h} \backsim f_u(t, u_0).$$

D'une manière analogue on définit *les dérivées d'ordre supérieur.*

Il ne faut pas confondre les symboles de limite et de dérivation avec ceux qui désignent la limite et la dérivée d'une fonction $f(t, u)$ par rapport à u, quand t reste constant.

Les notions de continuité et de dérivées, introduites dans ce numéro, ne sont qu'un cas particulier des notions générales contenues dans les définitions [1], [2] et [3]. Notre cas particulier est développé systématiquement par M. VITALI (³).

Par *voisinage* (ρ) *d'un ensemble* de l'espace hilbertien nous entendons l'ensemble de tous les points dont la distance d'un point de l'ensemble donné est inférieure à ρ.

3. **Les courbes.** — Si le paramètre u d'un point-fonction *continu* $f(t, u)$ est assujéti à varier dans un intervalle $a \leq u \leq b$, nous disons que $f(t, u)$ représente *une courbe de l'espace hilbertien.*

Si l'on substitue au paramètre u un autre paramètre v à l'aide d'une relation $u = u(v)$, où $u(v)$ est une fonction continue croissante, on obtient un nouveau point-fonction continu $f_1(t, v)$, défini dans un certain intervalle. Nous disons qu'il représente la même courbe que $f(t, u)$.

Nous disons qu'une courbe $\mathfrak{L}$ est *de la classe* C', s'il y a une représentation $f(t, u)$, admettant une dérivée première $f_u(t, u)$ continue et non équivalente à zéro pour tous les u (⁴).

Si l'on pose $u = u(v)$, où $u(v)$ est une fonction à dérivée positive et continue, on obtient une nouvelle représentation de $\mathfrak{L}$, jouissant des mêmes propriétés que $f(t, u)$.

Nous disons qu'une courbe $\mathfrak{L}$ est *de la classe* C'', s'il y a une représen-

(³) Loc. cit., pp. 75-82.
(⁴) Cfr. BOLZA, *Vorlesungen über Variationsrechnung*, Leipzig, 1909, p. 191.

tation $f(t, u)$, qui remplit les conditions de la classe C' et admet une dérivée seconde $f_{uu}(t, u)$ continue.

De même on définit des courbes des classes C''', C'''', etc.

4. **L'intégrale invariante.** — Soit $\boldsymbol{R}$ un domaine [5] de l'espace hilbertien. Soit de plus une fonctionnelle de deux points $F[\varphi(t), \psi(t)]$ définie et admettant *la continuité forte par rapport à deux points* $\varphi(t)$, $\psi(t)$, *pris ensemble* [cfr. la définition 5] pour $\varphi(t)$ appartenant à $\boldsymbol{R}$ et $\psi(t)$ arbitraire.

Considérons une courbe $\mathfrak{L}$ quelconque de la classe C', contenue dans $\boldsymbol{R}$. Soit $f(t, u)$ pour $a \leq u \leq b$ sa représentation, caractéristique pour la classe C'. On voit [théorème 5] que $F[f(t, u), f_u(t, u)]$ est une fonction continue de u pour $a \leq u \leq b$. Donc, l'intégrale

$$\int_a^b F[f(t, u), f_u(t, u)]du \tag{1}$$

existe. Nous posons la question, *à quelles conditions doit satisfaire la fonctionnelle* $F[\varphi(t), \psi(t)]$, *pour que l'intégrale* (1) *soit indépendante de la représentation de la courbe* $\mathfrak{L}$. En d'autres mots, nous cherchons des conditions pour que cette intégrale soit une fonctionnelle de la courbe $\mathfrak{L}$ dans le domaine $\boldsymbol{R}$.

Supposons qu'en effet l'intégrale (1) soit invariante par rapport au changement du paramètre u. Posons $u = u(v)$, où $u(v)$ est une fonction admettant une dérivée positive continue $\dfrac{du}{dv}$ et faisant correspondre à l'intervalle $a \leq u \leq b$ un certain intervalle $c \leq v \leq d$. La courbe $\mathfrak{L}$ admet aussi la représentation $g(t, v) \backsim f[t, u(v)]$, d'où l'on tire aisément [6]

$$g_v(t, v) \backsim f_u[t, u(v)] \cdot \frac{du}{dv}. \tag{2}$$

Pour chaque courbe $\mathfrak{L}$ dans $\boldsymbol{R}$ et pour chaque représentation, caractéristique pour la classe C', l'égalité

$$\int_a^b F[f(t, u), f_u(t, u)]du = \int_c^d F[g(t, v), g_v(t, v)]dv \tag{3}$$

(5) Nous appelons *domaine* un ensemble ouvert et d'un seul tenant.

(6) Pour obtenir cette formule, il suffit de considérer les limites en moyenne, pour h tendant à zéro, des deux membres de l'égalité

$$\frac{g(t, v+h) - g(t, v)}{h} \backsim \frac{f[t, u(v+h)] - f[t, u(v)]}{u(v+h) - u(v)} \cdot \frac{u(v+h) - u(v)}{h}.$$

doit être remplie. Donc, on a d'après (2)

$$\int_c^d F[f(t, u), f_u(t, u)] \frac{du}{dv} dv = \int_c^d F\left[f(t, u), \frac{du}{dv} f_u(t, u)\right] dv. \tag{4}$$

Considérons un $\varphi(t)$ de R quelconque et un $\psi(t)$ arbitraire. Menons de plus une courbe $f(t, u)$, ayant $\varphi(t)$ pour point initial et $\psi(t)$ pour direction initiale (par exemple la droite $f(t, u) \backsim \varphi(t) + u\psi(t)$). Comme le point $\varphi(t)$ est intérieur au domaine R (cfr. la note ([5])), la partie de la courbe correspondant à $a \leq u \leq a + k$ pour k suffisamment petit se trouve dans R. Appliquons-y l'égalité (4), en désignant par $c \leq v \leq c + h$ l'intervalle de v correspondant,

$$\int_c^{c+h} F[f(t, u), f_u(t, u)] \frac{du}{dv} dv = \int_c^{c+h} F\left[f(t, u), \frac{du}{dv} f_u(t, u)\right] dv.$$

En différentiant par rapport à h et en posant $h = 0$, on obtient

$$F[f(t, a), f_u(t, a)] \left(\frac{du}{dv}\right)_{v=c} = F\left[f(t, a), \left(\frac{du}{dv}\right)_{v=c} \cdot f_u(t, a)\right].$$

Cette égalité doit être remplie pour chaque valeur positive de $\left(\frac{du}{dv}\right)_{v=c}$. Les points $f(t, a) \backsim \varphi(t)$ et $f_u(t, a) \backsim \psi(a)$ étaient aussi arbitraires. Donc, pour chaque $\varphi(t)$ du domaine R, chaque $\psi(t)$ et toutes les valeurs positives k

$$F[\varphi(t), k\psi(t)] = kF[\varphi(t), \psi(t)]. \tag{5}$$

C'est la condition pour que la fonctionnelle $F[\varphi(t), \psi(t)]$ soit *positivement homogène de degré un* [définition 7-bis] *par rapport à* ψ(t).

On voit aisément que cette condition est aussi suffisante pour que l'égalité (3) ait lieu pour toutes les courbes de la classe C' dans le domaine R.

Donc, nous avons démontré que *la condition nécessaire et suffisante de l'invariance de l'intégrale* (1) *par rapport au changement du paramètre est que la fonctionnelle* F[φ(t), ψ(t)] *soit positivement homogène de degré un par rapport à* ψ(t).

S'il est ainsi, nous écrivons:

$$I(\mathfrak{L}) = \int_a^b F[f(t, u), f_u(t, u)] du. \tag{6}$$

5. **Propriétés de la fonctionnelle $F[\varphi(t), \psi(t)]$.** — Dans ce travail nous ne considérerons dorénavant que des fonctionnelles positivement homogènes de degré un par rapport à $\psi(t)$.

Si $F[\varphi(t), \psi(t)]$ admet une variation faible [définition 6] par rapport à $\psi(t)$, on peut y appliquer la formule d'EULER [théorème 9]

$$\delta_\psi F[\varphi(t), \psi(t); \psi(t)] = F[\varphi(t), \psi(t)]. \tag{7}$$

On sait qu'aux fonctionnelles linéaires et fortement continues dans l'espace hilbertien on peut appliquer la formule de M. FRÉCHET [7], qui prend dans le cas présent la forme

$$\delta_\psi F[\varphi(t), \psi(t); x(t)] = \int_g F_\psi[\varphi(t), \psi(t); t]x(t)dt. \tag{8}$$

Donc, la formule d'EULER peut être écrite:

$$\int_g F_\psi[\varphi(t), \psi(t); t]\psi(t)dt = F[\varphi(t), \psi(t)]. \tag{9}$$

Si l'on prend la variation de deux termes de (5) par rapport à $\psi(t)$, on obtient

$$\delta_\psi F[\varphi(t), k\psi(t); kx(t)] = k\delta_\psi F[\varphi(t), \psi(t); x(t)],$$

ou, grâce à la linéarité par rapport à $x(t)$,

$$\delta_\psi F[\varphi(t), k\psi(t); x(t)] = \delta_\psi F[\varphi(t), \psi(t); x(t)].$$

Donc, *la variation* $\delta_\psi F[\varphi(t), \psi(t); x(t)]$ *est positivement homogène de degré zéro par rapport à* $\psi(t)$.

Supposons que $F[\varphi(t), \psi(t)]$ admette une variation faible par rapport à $\varphi(t)$. On démontre aisément, en tenant compte de (5), que

$$\delta_\varphi F[\varphi(t), k\psi(t); x(t)] = k\delta_\varphi F[\varphi(t), \psi(t); x(t)].$$

Donc, *la variation* $\delta_\varphi F[\varphi(t), \psi(t); x(t)]$ *est positivement homogène de degré un par rapport à* $\psi(t)$.

Si $F[\varphi(t), \psi(t)]$ admet la variation seconde faible mixte $\delta^2_{\varphi\psi}F[\varphi(t), \psi(t); x(t); y(t)]$ [voir numéro 21], on peut appliquer à $\delta_\varphi F[\varphi(t), \psi(t); x(t)]$ la formule d'EULER:

$$\delta^2_{\varphi\psi} F[\varphi(t), \psi(t); x(t); \psi(t)] = \delta_\varphi F[\varphi(t), \psi(t); x(t)]. \tag{10}$$

De même, si $F[\varphi(t), \psi(t)]$ admet la variation seconde faible $\delta^2_{\psi\psi}F[\varphi(t), \psi(t); x(t); y(t)]$, on applique la formule d'EULER à $\delta_\psi F[\varphi(t), \psi(t); x(t)]$:

$$\delta^2_{\psi\psi} F[\varphi(t), \psi(t); x(t); \psi(t)] = 0. \tag{11}$$

[7] Cfr. LÉVY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Paris, 1922, p. 58. La formule de M. FRÉCHET reste valable, si l'on remplace l'intervalle par un ensemble g mesurable borné.

Dans le cas de forme normale de $\delta^2_{\psi\psi}F$, on a

$$\int_g F_{\psi'}[\varphi(t),\ \psi(t);\ t]x(t)\psi(t)dt + \int_g\int_g F_{\psi\psi'}[\varphi(t),\ \psi(t);\ t,\ t']x(t)\psi(t')dtdt' = 0,$$

ou, comme $x(t)$ est arbitraire,

$$F_{\psi'}[\varphi(t),\ \psi(t);\ t]\psi(t) + \int_g F_{\psi\psi'}[\varphi(t),\ \psi(t);\ t,\ t']\psi(t')dt' \backsim 0. \tag{12}$$

6. **Position du problème.** — Soit $F[\varphi(t),\ \psi(t)]$ une fonctionnelle de deux points de l'espace hilbertien, dont le premier $\varphi(t)$ est assujéti à se trouver dans un certain domaine $\boldsymbol{R}$ de cet espace, et le second $\psi(t)$ est arbitraire Nous supposons que

1°) $F[\varphi(t),\ \psi(t)]$ est positivement homogène de degré un par rapport à $\psi(t)$,

2°) $F[\varphi(t),\ \psi(t)]$ admet la continuité forte par rapport à $\varphi(t)$, $\psi(t)$, pris ensemble,

3°) $F[\varphi(t),\ \psi(t)]$ admet une variation première faible totale par rapport à $\varphi(t)$, $\psi(t)$,

4°) cette variation admet la continuité forte par rapport à $\varphi(t)$, $\psi(t)$, pris ensemble.

Soit de plus une courbe $\mathfrak{L}_0$ de la classe C', représentée par $f(t,\ u)$ pour $a \leq u \leq b$, et située dans le domaine $\boldsymbol{R}$. Elle joint les point $A = f(t,\ a)$ et $B = f(t,\ b)$.

Nous supposons que la courbe $\mathfrak{L}_0$ fournit l'extremum de l'intégrale (6) *en comparaison avec toutes les courbes de la classe* C', *joignant les points* A *et* B, *et se trouvant dans un voisinage de $\mathfrak{L}_0$ suffisamment petit.*

Nous en cherchons *des conditions nécessaires*, en nous bornant à celles du premier ordre (conditions premières).

7. **Première forme de l'équation d'Euler.** — Considérons une fonction arbitraire $\eta(u)$, définie et admettant la dérivée première continue $\eta_u(u)$ pour $a \leq u \leq b$. Supposons de plus que

$$\eta(a) = \eta(b) = 0. \tag{13}$$

Considérons encore une fonction arbitraire $\xi(t)$ de carré sommable sur g.

Désignons par $\mathfrak{L}$ une courbe, représentée par

$$f(t,\ u) + \varepsilon\eta(u)\xi(t). \tag{14}$$

Elle joint, comme $\mathfrak{L}_0$, les points A et B; elle se trouve pour ε suffisamment petit dans $\boldsymbol{R}$; elle est, enfin, de la classe C'. En effet, d'après le théorème [3] le point-fonction (14) a pour dérivée

$$f_u(t, u) + \varepsilon\eta_u(u)\xi(t),$$

c'est à dire, un point-fonction continu et non équivalent à zéro pour ε petit.

Donc, d'après les hypothèses du numéro 6, l'intégrale $J(\mathfrak{L})$, qui est une fonction de ε, doit avoir un extremum relatif pour $\varepsilon = 0$. Nous désignerons cette intégrale par

$$J_\varepsilon = \int_a^b F[f + \varepsilon\eta\xi,\ f_u + \varepsilon\eta_u\xi]du, \tag{15}$$

en omettant les arguments t et u.

Nous allons montrer que la fonction J_ε admet pour $\varepsilon = 0$ une dérivée par rapport à ε. En effet, d'après la condition 3°) du numéro 6, on a pour ε petit et pour chaque u:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} F[f + \varepsilon\eta\xi,\ f_u + \varepsilon\eta_u\xi] = \delta F[f + \varepsilon\eta\xi,\ f_u + \varepsilon\eta_u\xi;\ \eta\xi,\ \eta_u\xi],$$

et, en tenant compte de la linéarité des variations,

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} F[f + \varepsilon\eta\xi,\ f_u + \varepsilon\eta_u\xi] = \eta\cdot\delta_\varphi F[f + \varepsilon\eta\xi,\ f_u + \varepsilon\eta_u\xi;\ \xi] +$$
$$+ \eta_u\cdot\delta_\psi F[f + \varepsilon\eta\xi,\ f_u + \varepsilon\eta_u\xi;\ \xi].$$

La condition 4°) du numéro 6 nous montre que c'est une fonction continue de ε et de u [cfr. le théorème 5, qui se rattache à un cas plus simple]. Donc, l'intégrale (15) admet une dérivée par rapport à ε pour ε petit.

Notons que pour l'extremum de l'intégrale J_ε cette dérivée doit s'annuller pour $\varepsilon = 0$:

$$\int_a^b \{\eta\cdot\delta_\varphi F[f,\ f_u;\ \xi] + \eta_u\cdot\delta_\psi F[f,\ f_u;\ \xi]\}\,du = 0. \tag{16}$$

Il reste à transformer cette condition et à en tirer des conclusions.

Comme plus haut, on aperçoit que les coéfficients de η et de η_u sont des fonctions continues de u. Écrivons:

$$\zeta(u) = \int_a^u \delta_\varphi F[f,\ f_u;\ \xi]du, \tag{17}$$

et intégrons le premier terme de (16) par parties:

$$[\eta\zeta]_{u=a}^{u=b} + \int_a^b \eta_u\{-\zeta + \delta_\psi F[f,\ f_u;\ \xi]\}\,du = 0.$$

Le premier terme s'annulle, grâce aux conditions (13). Donc, le second terme doit s'annuller pour toute fonction $\eta(u)$, admettant la dérivée première continue et s'annullant pour $u=a$ et $u=b$. En appliquant le lemme de DU BOIS-REYMOND [8], on en conclut que le coéfficient de η_u reste constant, ou, en tenant compte de (17),

$$\delta_\psi F[f, f_u;\, \xi] - \int_a^u \delta_\varphi F[f, f_u;\, \xi]du = c. \tag{18}$$

Ici $\xi(t)$ est une fonction arbitraire de carré sommable, et c est une constante dépendante de $\xi(t)$.

L'intégrale dans (18) admet une dérivée. Donc, il est ainsi pour le premier terme. Nous sommes arrivés à la *première forme de l'équation d'Euler:*

$$\frac{d}{du}\delta_\psi F[f, f_u;\, \xi] - \delta_\varphi F[f, f_u;\, \xi] = 0 \tag{19}$$

pour chaque $\xi(t)$ *de carré sommable sur* g.

La courbe $\mathfrak{L}_0$, qui satisfait à cette condition, est dite *une extrémale* relative au problème posé.

On peut obtenir une forme de (19), particulière mais suffisamment générale pour caractériser les extrémales, si l'on prend pour $\xi(t)$ la fonction caractéristique d'un sous-ensemble mesurable arbitraire e de l'ensemble g. C'est-à-dire, si l'on pose $\xi(t)=1$ pour t appartenant à e, et $\xi(t)=0$ pour t appartenant à $g-e$. Employons de plus la formule de M. FRÉCHET (la formule (8) et une formule analogue pour $\delta_\varphi F$), et nous obtenons

$$\frac{d}{du}\int_e F_\psi[f, f_u;\, t]dt - \int_e F_\varphi[f, f_u;\, t]dt = 0$$

pour chaque e mesurable et appartenant à g.

8. Seconde forme de l'équation d'Euler. — Dans ce numéro et dans les deux suivants il faut supposer, outre les conditions du numéro 6, que

5°) la variation $\delta_\psi F[\varphi(t), \psi(t);\, x(t)]$ admette une variation première forte totale par rapport à $\varphi(t)$, $\psi(t)$, fortement continue par rapport aux mêmes points, pris ensemble.

Mais pour plus de commodité, nous supposerons simplement que la fonctionnelle $F[\varphi(t), \psi(t)]$ soit positivement homogène de degré un par rapport

[8] Cfr. BOLZA, loc. cit., p. 27.

à $\psi(t)$, èt qu'elle admette une variation seconde forte totale par rapport à $\varphi(t)$, $\psi(t)$, fortement continue par rapport aux mêmes points, pris ensemble. Cela suffit pour que les conditions 1°), 5°) soient satisfaites.

Nous supposerons de plus que l'extrémale $\mathfrak{L}_0$ est de la classe C''. Alors la dérivée première par rapport à u de la fonction $\bar{\delta}_\psi F[f, f_u; \xi]$ dans (19) peut être évaluée d'après le théorème [11], et nous obtenons la *seconde forme de l'équation d'Euler:*

$$\bar{\delta}^2_{\psi\psi} F[f, f_u; \xi; f_{uu}] + \bar{\delta}^2_{\psi\varphi} F[f, f_u; \xi; f_u] - \bar{\delta}_\varphi F[f, f_u; \xi] = 0$$

pour chaque $\xi(t)$ *de carré sommable sur* g.

En tenant compte de (10), on peut l'écrire pour plus de symétrie:

$$\bar{\delta}^2_{\psi\psi} F[f, f_u; \xi; f_{uu}] + \bar{\delta}^2_{\psi\varphi} F[f, f_u; \xi; f_u] - \bar{\delta}^2_{\varphi\psi} F[f, f_u; \xi; f_u] = 0. \tag{20}$$

Pour développer cette formule il faut supposer que la variation seconde de $F[\varphi(t), \psi(t)]$ a *la forme normale.* Nous entendons par là que les formules [(34)] sont valables, les fonctions [(35)] sont de carré sommable sur g et les fonctions [(36)] de deux variables t, t' sont de carré sommable sur l'ensemble plan $g \cdot g$ (l'ensemble de couples t, t', dont chaque élément appartient à g). Alors les formules [(37)] sont valables, pourvu que l'on remplace le signe $=$ par le signe $\backsim$.

La formule (20) devient

$$\begin{gathered} \int_g F_{\psi^\bullet}[f, f_u; t]\xi(t) f_{uu}(t, u)dt + \iint_{g\,g} F_{\psi\psi'}[f, f_u; t, t']\xi(t) f_{uu}(t', u)dtdt' + \\ + \iint_{g\,g} \{ F_{\psi\varphi}[f, f_u; t, t'] - F_{\varphi\psi}[f, f_u; t, t'] \} \xi(t) f_u(t, u)dtdt' = 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Comme cette formule a lieu pour chaque $\xi(t)$, on a

$$\begin{gathered} F_{\psi^\bullet}[f, f_u; t] f_{uu}(t, u) + \int_g F_{\psi\psi'}[f, f_u; t, t'] f_{uu}(t', u)dt' + \\ + \int_g \{ F_{\psi\varphi}[f, f_u; t, t'] - F_{\varphi\psi}[f, f_u; t, t'] \} f_u(t', u)dt' \backsim 0, \end{gathered} \tag{22}$$

ou l'équation d'EULER développée.

C'est *une équation fonctionnelle aux dérivées* du second ordre, rentrant dans le type général

$$\Phi[f(t, u), f_u(t, u), f_{uu}(t, u); t] \backsim 0,$$

où Φ désigne une opération fonctionnelle, qui fait correspondre une fonction de t à trois fonctions de t. Dans le cas actuel, Φ est linéaire par rapport à $f_{uu}(t, u)$. Il faut souligner que cette équation diffère essentiellement de celles considérées d'ordinaire. Les dérivées qui y figurent ne sont pas des dérivées partielles par rapport à u, mais bien celles définies au numéro 2.

On vérifie aisément que pour $\xi(t) \backsim f_u(t. u)$ l'égalité (20) est remplie identiquement. Il suffit à tenir compte de (11), de [(17)] et de [(31)]. En désignant par $\Phi[f, f_u, f_{uu}; t]$ le membre gauche de (22), et en tenant compte de (21), on obtient ainsi l'identité

$$\int_g \Phi[f, f_u, f_{uu}; t] f_u(t, u) dt \equiv 0,$$

qui doit être remplie pour chaque $f(t, u)$, même ne satisfaisant pas à l'équation (22). Cette identité nous enseigne que les équations en nombre infini, contenues dans (22), ne sont pas indépendantes: il y a entre elles une relation linéaire.

9. **Problème ordinaire.** — L'équation (22) peut être considérée, comme définissant $f(t, u)$, la valeur initiale $f(t, a)$ et la direction initiale $f_u(t, a)$ étant données, la dernière à un facteur numérique près. En d'autres mots, le problème s'impose de chercher une extrémale passant par un point donné et ayant une direction donnée. Nous n'insisterons pas sur la démonstration d'existence d'une telle extrémale, en nous bornant à quelques indications générales et à la classification des problèmes.

Nous commençons par la définition *du problème ordinaire*. Dans ce but, considérons l'équation intégrale linéaire

(23)
$$G[\varphi(t), \psi(t), x(t); t] \equiv$$
$$\equiv F_{\psi^2}[\varphi(t), \psi(t); t] x(t) + \int_g F_{\psi\psi'}[\varphi(t), \psi(t); t, t'] x(t') dt' \backsim 0$$

par rapport à l'inconnue $x(t)$. Nous remarquons que d'après (12), elle admet une solution non équivalente à zéro; c'est la fonction $\psi(t)$ (nous ne tenons pas compte du cas non intéressant, dans lequel $\psi(t) \backsim 0$). Donc, l'équation (23) est singulière.

Nous appelons le problème posé dans le numéro 6 ordinaire dans le domaine **R**, *si pour chaque point* $\varphi(t)$ *de* **R** *et pour chaque* $\psi(t)$ *non équivalent à zéro:*

1°) *la fonction* $F_{\psi^2}[\varphi, \psi; t]$ *ne s'annulle que dans un ensemble de mesure nulle au plus,* 2°) *la fonction* $\dfrac{F_{\psi\psi'}[\varphi, \psi; t, t']}{F_{\psi^2}[\varphi, \psi; t]}$ *est de carré sommable sur l'ensemble plan* g·g,

3°) *l'équation* (23) *n'admet pas des solutions orthogonales à* $\psi(t)$ *non équivalentes à zéro.*

La condition principale 3°) est une généralisation de la condition analogue dans le cas de l'espace à trois dimensions [9]. Elle exige que l'équation (23) soit simplement singulière, c'est à dire, qu'elle n'admette qu'une seule fonction fondamentale $\psi(t)$. La condition 1°) nous permet à remplacer l'équation (23) de la troisième espèce par une équation de la seconde espèce. La condition 2°) nous assure la régularité de cette équation. Les conditions 1°) et 2°) seront remplies en particulier, si la fonction $\dfrac{1}{F^2_{\psi^2}[\varphi, \psi; t]}$ est sommable sur g.

Pour un problème ordinaire on peut, comme nous allons démontrer, résoudre l'équation (22) par rapport à la dérivée seconde $f_{uu}(t, u)$.

Profitons, en effet, des conditions 1°) et 2°) et écrivons (23), où l'on a posé $\varphi(t) = f(t, u)$ et $\psi(t) = f_u(t, u)$, sous la forme:

$$x(t) + \int_g \frac{F_{\psi\psi'}[f, f_u; t, t']}{F_{\psi^2}[f, f_u; t]} x(t')dt' \backsim 0. \tag{24}$$

Dans l'équation (22) posons

$$y(t) \backsim F_{\psi^2}[f, f_u; t] f_{uu}(t, u), \tag{25}$$

$$z(t) \backsim \int_g \{ F_{\varphi\psi}[f, f_u; t, t'] - F_{\psi\varphi}[f, f_u; t, t'] \} f_u(t', u)dt'. \tag{26}$$

Elle prend la forme

$$y(t) + \int_g \frac{F_{\psi\psi'}[f, f_u; t, t']}{F_{\psi^2}[f, f_u; t']} y(t')dt' \backsim z(t). \tag{27}$$

Observons maintenant que les équations (24) et (27) ont d'après [(37_3)] des noyaux transposés l'un de l'autre, que l'équation homogène (24) admet une seule solution fondamentale $f_u(t, u)$, et que le membre droit de l'équation (27) est orthogonal à cette solution

$$\int_g f_u(t, u) z(t) dt = 0,$$

comme on le vérifie immédiatement, en tenant compte de [(37_2)]. Donc, l'équation (27) peut être résolue par rapport à $y(t)$.

---

[9] Cfr. HADAMARD, *Leçons sur le calcul des variations*. tome I. Paris, 1910, p. 96.

L'équation homogène, formée de (27) en posant $z(t) \backsim 0$, a d'après (12) pour la fonction fondamentale $F_{\psi^2}|f, f_u; t|f_u(t, u)$. Donc, la solution générale de (27) prend la forme

$$y(t) \backsim \Gamma[f(t, u), f_u(t, u), z(t); t] + k(u)F_{\psi^2}|f, f_u; t]f_u(t, u),$$

où le coefficient arbitraire de la fonction fondamentale dépend bien entendu de u. Finalement, en tenant compte de (25) et (26), on obtient

$$f_{uu}(t, u) \backsim \Psi[f(t, u), f_u(t, u); t] + k(u)f_u(t, u). \tag{28}$$

L'indétermination de $k(u)$ tient au choix libre du paramètre u. Pour résoudre le problème posé, il suffit de trouver une solution de (28) pour une détermination arbitraire de $k(u)$.

On peut dire que la courbure d'une extrémale est, d'après (28), déterminée dans chaque point par sa direction.

Les problèmes suivants s'imposent. D'abord, de savoir si le membre gauche de l'équation (22) admet des variations (différentielles) premières par rapport à $f(t, u)$ et $f_u(t, u)$, en supposant que la variation troisième forte de $F[\varphi(t), \psi(t)]$ existe. Ensuite, si cela entraîne l'existence de la variation première du membre droit de (28) pour $k(u)$ convenablement choisi. Et enfin, si dans ces conditions l'équation (28) permet de déterminer une extrémale, le point et la direction initiaux étant donnés. On ne peut pas appliquer immédiatement la méthode de M. PICARD, parce que les dérivées $f_u(t, u)$ et $f_{uu}(t, u)$ ne sont pas celles dans le sens ordinaire du mot. Il faudrait définir auparavant l'intégrale d'un point-fonction, ou plus généralement d'un élément-fonction d'un espace abstrait, étendue au paramètre u.

J'espère pouvoir consacrer à ces problèmes des recherches à part.

10. **Problème régulier.** — Considérons la fonctionnelle quadratique

$$\bar{\delta}^2_{\psi\psi}F[\varphi(t), \psi(t); x(t); x(t)] = \tag{29}$$
$$= \int_g F_{\psi^2}[\varphi(t), \psi(t); t]x^2(t)dt + \int_g\int_g F_{\psi\psi'}[\varphi(t), \psi(t); t, t']x(t)x(t')dtdt',$$

qu'on peut écrire, d'aprés (23):

$$\bar{\delta}^2_{\psi\psi}F[\varphi, \psi; x; x] = \int_g G[\varphi, \psi, x; t]x(t)dt. \tag{30}$$

On a en particulier, pour $x(t) \backsim \psi(t)$

$$\bar{\delta}^2_{\psi\psi}F[\varphi, \psi; \psi; \psi] = 0.$$

Nous appelons le problème étudié positivement (négativement) régulier, si les conditions 1°) *et* 2°) *du numéro 9 sont remplies, et si la fonctionnelle* (29) *est positive (négative) pour chaque* x(t) *orthogonal à* ψ(t) *et non équivalent à zéro.*

S'il en est ainsi, le problème est aussi ordinaire. En effet, si l'équation (23) admettait une solution orthogonale à $\psi(t)$ et non équivalente à zéro, cette solution annullerait d'après (30) la fonctionnelle $\bar{\delta}^2_{\psi\psi}F_\gamma$ et cela contredirait à la définition du problème régulier.

L'étude de $\bar{\delta}^2_{\psi\psi}F$ et la considération des problèmes réguliers seraient d'une grande importance dans les recherches sur les conditions du second ordre.

11. Une forme plus générale de la variation de l'intégrale. — Dans ce numéro, nous évaluerons la dérivée première de l'intégrale $J(\mathfrak{L})$ par rapport au paramètre ε, relative à une famille un peu plus générale que celle représentée par (14). Nous désignons cette fois par $\mathfrak{L}$ une courbe représentée par

$$f(t, u) + \eta(u)\xi(t, \varepsilon), \tag{31}$$

où $f(t, u)$ réprésente *l'extrémale* $\mathfrak{L}_0$, $\eta(u)$ est une fonction admettant une dérivée première continue (non assujétie à aucune condition pour $u = a$ et $u = b$), et $\xi(t, \varepsilon)$ est un point-fonction de ε, équivalent à zéro pour $\varepsilon = 0$ et admettant une dérivée première continue par rapport à ε pour ε suffisamment petit.

Nous supposerons maintenant que $F[\varphi(t), \psi(t)]$ admette une variation première *forte* totale, fortement continue par rapport à $\varphi(t)$, $\psi(t)$, pris ensemble.

Les mêmes calculs qu'au numéro 7 nous conduisent, au lieu de (16), à l'expression

$$\left[\frac{dJ_\varepsilon}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left\{ \eta \cdot \bar{\delta}_\varphi F\left[f, f_u; \left(\frac{d\xi(t, \varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\right] + \eta_u \cdot \bar{\delta}_\psi F\left[f, f_u; \left(\frac{d\xi(t, \varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\right] \right\} du.$$

Mais, comme la courbe initiale est une extrémale, le coëfficient de η_u est dérivable par rapport à u d'après (19). Appliquons au terme qui le contient l'intégration par parties et tenons compte de (19):

$$\begin{aligned}\left[\frac{dJ_\varepsilon}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \eta(b)\bar{\delta}_\psi F\left[f(t, b), f_u(t, b); \left(\frac{d\xi(t, \varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\right] + \\ - \eta(a)\bar{\delta}_\psi F\left[f(t, a), f_u(t, a); \left(\frac{d\xi(t, \varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\right].\end{aligned} \tag{32}$$

12. **Les extrémités variables et transversalité.** — Supposons que les extrémités A et B de la courbe $\mathfrak{L}_0$ se trouvent sur les variétés $\omega_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m)$ et $\omega_2(t, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_n)$ respectivement. Soient $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \dots \alpha_m^{(0)}$ et $\beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, \dots \beta_n^{(0)}$ les valeurs correspondantes de paramètres, c'est à dire

$$f(t, a) \backsim \omega_1(t, \alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \dots \alpha_m^{(0)})$$
$$f(t, b) \backsim \omega_2(t, \beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, \dots \beta_n^{(0)}).$$

Supposons de plus que dans le voisinage de ces valeurs de paramètres les points-fonctions admettent des dérivées premières partielles continues par rapport à tous les paramètres.

Nous cherchons des conditions premières pour que la courbe $\mathfrak{L}_0$ fournisse l'extremum relatif en comparaison avec toutes les courbes de la classe C', joignant un point de ω_1 avec un point de ω_2.

On voit d'abord que la courbe $\mathfrak{L}_0$ doit être une extrémale et on y peut appliquer la formule (32).

Formons sur la variété ω_1 une courbe passant par A, en fixant tous les α, excepté un, par exemple α_i. Posons dans (31)

$$\xi(t, \varepsilon) \backsim \omega_1(t, \alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \dots \alpha_i^{(0)} + \varepsilon, \dots \alpha_m^{(0)}) \quad \omega_1(t, \alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \dots \alpha_i^{(0)}, \dots \alpha_m^{(0)}).$$

Imposons à la fonction arbitraire $\eta(u)$ les conditions

$$\eta(a) = 1, \quad \eta(b) = 0.$$

Cela posé, on voit que toutes les conditions du numéro 11 sont remplies, et que de plus les courbes $\mathfrak{L}$, représentées par (31), joignent un point de ω_1 avec B. Donc, la dérivée (32) doit s'annuller

$$\bar{\delta}_\psi F\left[f(t, a), f_u(t, a); \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_i}\right)_A\right] = 0. \tag{33}$$

Cette égalité doit avoir lieu pour $i = 1, 2, \dots m$.

En remplaçant dans ce qu'on vient de développer la variété ω_1 par ω_2, en considérant les courbes joignant A avec les points de ω_2, on obtient d'une manière analogue

$$\bar{\delta}_\psi F\left[f(t, b), f_u(t, b); \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial \beta_i}\right)_B\right] = 0 \tag{34}$$

pour $i = 1, 2, \dots n$.

Nous appelons la direction x(t) *tranversale dans le point* φ(t) *à la direction* ψ(t), *si*

$$\bar{\delta}_\psi F[\varphi(t), \psi(t); x(t)] = 0. \tag{35}$$

A chaque $\psi(t)$ correspond une infinité de directions transversales $x(t)$. Elles sont d'après (7) distinctes de $\psi(t)$, si le problème est défini, c'est à dire, si $F[\varphi(t), \psi(t)]$ ne s'annulle que pour $\psi(t) \backsim 0$.

Les conditions (33) et (34) nous enseignent que toutes les directions des variétés linéaires tangentes à ω_1 et ω_2 dans A et B doivent être transversales aux directions de la courbe $\mathfrak{L}_0$ dans ces points. Nous l'exprimons en disant que ces variétés sont elles-mêmes transversales à l'extrémale $\mathfrak{L}_0$.

Si l'on applique à (35) la formule de M. FRÉCHET (8), on a

$$\int_g F_\psi[\varphi(t), \psi(t); t]x(t)dt = 0. \tag{36}$$

Nous appelons la direction $F_\psi[\varphi(t); \psi(t); t]$ *conjuguée* à $\psi(t)$. Donc, les directions transversales à $\psi(t)$ sont celles orthogonales à la direction conjuguée à $\psi(t)$.

En particulier, les variétés ω_1 et ω_2 doivent être orthogonales en A et B aux directions $F_\psi[f(t, a), f_u(t, a); t]$ et $F_\psi[f(t, b), f_u(t, b); t]$ respectivement.

13. **Espace de Riemann-Hilbert.** — La considération de l'intégrale invariante (6) nous permet de généraliser la métrique riemannienne au cas d'une infinité de dimensions. Il faut adopter une définition nouvelle de la distance, au moins pour les points infiniment voisins. On ne s'expose pas ainsi au danger d'une contradiction, parce que l'adoption de la norme de la différence de deux fonctions de carré sommable comme la distance ne servait que pour la considération de continuité et de variations fortes; cette définition n'intervient pas essentiellement dans les recherches purement géométriques, et on peut à chaque instant réserver le terme « distance » pour une notion nouvelle, distincte de celle-là.

Sous réserve de quelques conditions qui vont être énumérées, nous proposons à appeler le nouvel espace provisoirement *l'espace de Riemann-Hilbert*, en réunissant ainsi l'hommage du aux grands géomètres, investigateurs de l'espace courbe et de celui à une infinité de dimensions. L'espace hilbertien proprement dit serait alors appelé l'espace d'EUCLIDE-HILBERT.

Je me borne à la définition et à quelques indications générales sur les géodésiques et les angles.

Considérons une fonctionnelle

$$F[\varphi(t), \psi(t)] = \sqrt{\int_g C[\varphi(t); t]\psi^2(t)dt + \int_g\int_g D[\varphi(t); t, t']\psi(t)\psi(t')dtdt'}. \tag{37}$$

Ici $C[\varphi(t); t]$ et $D[\varphi(t); t, t']$ sont des fonctionnelles continues et admettant des différentielles premières continues par rapport à $\varphi(t)$ ([10]) pour $\varphi(t)$ appartenant à un certain domaine R. De plus $D[\varphi(t);\, t,\, t']$ est symétrique par rapport à t et t'.

Nous supposons que pour chaque $\varphi(t)$ appartenant à R

1°) *la fonction* $C[\varphi(t);\, t]$ *ne s'annulle que dans un ensemble de mesure nulle au plus,*

2°) *la fonction* $\dfrac{D[\varphi(t);\, t,\, t']}{C[\varphi(t);\, t]}$ *est de carré sommable sur l'ensemble plan* $g \cdot g$,

3°) *la fonctionnelle quadratique sous le radical dans* (37) *est positivement définie et générale* (*ne s'annulle que pour* $\psi(t) \backsim 0$).

Ces conditions remplies, la fonctionnelle (37) est réelle pour chaque $\psi(t)$. Elle satisfait de plus aux conditions 1°)-4°) du numéro 6 et à la condition 5°) du numéro 8.

Soit $\mathfrak{L}$ une courbe de la classe C' dans R. Appelons l'intégrale $J(\mathfrak{L})$, où $F[\varphi(t),\, \psi(t)]$ est donné par (37), *longueur (riemannienne)* de la courbe $\mathfrak{L}$.

La recherche de minimum de la longueur conduit à la notion de *géodésiques* (extrémales relatives à la fonction (37)). Nous allons démontrer que nous sommes dans le cas d'un problème positivement régulier, et par conséquent ordinaire. Donc, si l'on suppose les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions démontrés, on peut conclure que par chaque point dans une direction donnée on peut mener une et une seule géodésique dans le voisinage du point donné.

Nous introduisons la notation

$$H[\varphi(t),\, x(t);\, t] \equiv C[\varphi(t);\, t]x(t) + \int_g D[\varphi(t);\, t,\, t']x(t')dt'. \tag{38}$$

On peut vérifier aisément que

$$\int_g H[\varphi(t),\, x(t);\, t]y(t)dt = \int_g H[\varphi(t),\, y(t);\, t]x(t)dt, \tag{39}$$

(l'opération (38) est adjointe à elle-même), et que

$$F^2[\varphi(t),\, \psi(t)] = \int_g H[\varphi(t),\, \psi(t);\, t]\psi(t)dt, \tag{40}$$

([10]) Cfr. FRÉCHET, « Annales de l'École Normale Supérieure », série 3, tome XLII, 1925, p. 308. Dans le cas d'une fonction de deux variables il faut adopter $\int_g\int_g x^2(t,\, t')dtdt'$ comme carré de la norme.

ce qui montre d'après la condition 3°) que la fonction (38) n'est équivalente à zéro que pour $x(t) \backsim 0$.

On a successivement

$$\bar{\delta}_\psi F[\varphi, \psi; x(t)] = \frac{1}{F}\int_g H[\varphi, \psi; t]x(t)dt, \tag{41}$$

$$\bar{\delta}^2_{\psi\psi} F[\varphi, \psi; x(t); y(t)] = \frac{1}{F}\int_g H[\varphi, y(t); t]x(t)dt + \tag{42}$$

$$-\frac{1}{F^3}\int_g H[\varphi, \psi; t]x(t)dt\cdot\int_g H[\varphi, \psi; t]y(t)dt.$$

Les dérivées secondes ont les valeurs

$$F_{\psi^2}[\varphi. \psi; t] \backsim \frac{1}{F}C[\varphi; t], \tag{43}$$

$$F_{\psi\psi'}[\varphi, \psi; t, t'] \backsim \frac{1}{F}D[\varphi; t, t'] - \frac{1}{F^3}H[\varphi, \psi; t]\cdot H[\varphi, \psi; t']. \tag{44}$$

Enfin, évaluons la fonctionnelle $\bar{\delta}^2_{\psi\psi}F[\varphi, \psi; x(t); x(t)]$, en posant dans (42) $y(t) \backsim x(t)$, et en y remplaçant F^2 par (40)

$$\bar{\delta}^2_{\psi\psi} F[\varphi, \psi, x(t); x(t)] = \tag{45}$$

$$= \frac{1}{F^3}\left\{\int_g H[\varphi, \psi; t]\psi(t)dt\cdot\int_g H[\varphi, x; t]x(t)dt - \left[\int_g H[\varphi, \psi; t]x(t)dt\right]^2\right\}.$$

On aperçoit d'abord que les conditions 1°) et 2°) du numéro présent entraînent, moyennant (43) et (44), les conditions 1°) et 2°) du numéro 9. Pour achever la démonstration de la régularité du problème, il faut prouver que la fonctionnelle (45) satisfait à la condition du numéro 10.

Considérons dans ce but la forme quadratique de deux variables numériques

$$U(\alpha, \beta) = \alpha^2\int_g H[\varphi, \psi; t]\psi(t)dt + 2\alpha\beta\int_g H[\varphi, \psi; t]x(t)dt + \beta^2\int_g H[\varphi, x; t]x(t)dt.$$

En tenant compte de (39), on écrit:

$$U(\alpha, \beta) = \int_g H[\varphi, \alpha\psi + \beta x; t]\cdot[\alpha\psi(t) + \beta x(t)]dt.$$

Mais c'est la fonctionnelle quadratique sous le radical dans (37), où l'on a remplacé $\psi(t)$ par $\alpha\psi(t) + \beta x(t)$. D'après la condition 3°) du numéro présent elle s'annulle pour $\alpha\psi(t) + \beta x(t) \backsim 0$ et reste positive dans le cas contraire.

Deux cas sont à distinguer:

1) Si $x(t)$ est orthogonal à $\psi(t)$ et non équivalent à zéro, $\alpha\psi(t) + \beta x(t)$ n'est équivalent à zéro pour aucune valeur de α et β (sauf $\alpha = \beta = 0$). La forme $U(\alpha, \beta)$ est générale et positivement définie. Sa discriminante, c'est à dire l'expression entre parenthèses dans (45), est positive.

2) Si, au contraire, $x(t)$ est proportionnel à $\psi(t)$, c'est à dire, si $x(t) \backsim c \cdot \psi(t)$, nous avons $\alpha\psi(t) + \beta x(t) \backsim 0$ pour $\frac{\alpha}{\beta} = -c$. La forme $U(\alpha, \beta)$ est singulière et positivement définie. Sa discriminante est nulle.

En définitive, nous avons démontré que la fonctionnelle (45) est positive pour $x(t)$ orthogonal à $\psi(t)$ et non équivalent à zéro. Dans le cas contraire elle s'annulle. Mais c'est précisément la condition du numéro 10.

La condition de transversalité (35) devient ici, d'après (41):

$$\int_g H[\varphi(t), \psi(t); t] x(t) dt = 0.$$

C' est une relation entre $\psi(t)$ et $x(t)$, réciproque d'après (39). Nous pouvons appeler les directions $\psi(t)$ et $x(t)$ orthogonales l'une à l'autre relativement à la métrique riemannienne.

Plus généralement, on peut appeler l'angle (riemannien) de deux directions la valeur ω. définie par

$$\cos \omega = \frac{\int_g H[\varphi, \psi; t] x(t) dt}{F[\varphi, \psi] \cdot F[\varphi, x]}.$$

En effet, l'expression à droite a une valeur absolue ≤ 1, parce que la fonctionnelle (45) est toujours ≥ 0. La valeur absolue de $\cos \omega$ n'est égale à un que si (45) est nulle, c'est à dire, si $\psi(t)$ et $x(t)$ sont proportionnels l'un à l'autre: $x(t) \backsim c \cdot \psi(t)$. On aperçoit que $\omega = 0$, si $c > 0$, et $\omega = \pi$, si $c < 0$.

Un nombre immense de problèmes s'impose. Par exemple, celui de créer le calcul tensoriel à une infinité de dimensions, de définir la courbure de l'espace de RIEMANN-HILBERT, de chercher des conditions pour que l'espace soit hilbertien au sens propre du mot, et beaucoup d'autres.

Avant d'abandonner notre objet, j'ai encore quelques remarques à faire. On sait qu'un espace riemannien à n dimensions est applicable à une variété courbe d'un espace euclidien à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions au plus. En passant à la limite, on peut espérer que chaque espace de RIEMANN-HILBERT est applicable à une variété de l'espace hilbertien proprement dit. La solution stricte de ce problème conduit à l'étude d'existence des solutions et d'intégrabilité d'une équation fonctionnelle à différentielle totale, du second degré par rapport à cette différentielle. C'est un problème assez difficile, mais non inaccessible.

S'il en est ainsi, il serait intéressant de savoir quel caractère doit posséder cette variété de l'espace hilbertien. Il est très probable que c'est une variété qu'on peut former en assujétissant un point de l'espace hilbertien à une infinité dénombrable de conditions, sans que le nombre de dimensions de cette variété devienne fini. C'est un cas intermédiaire entre les variétés à n dimensions de M. VITALI (11) et les variétés à « $\omega - n$ dimensions » de M. LÉVY (12), qu'on obtient en assujétissant un point de l'espace hilbertien à un nombre fini de conditions. En généralisant la terminologie de M. LÉVY, on peut la nommer une variété à « $\omega - \omega$ dimensions ».

On peut caractériser ces variétés par la propriété suivante: elles admettent dans chaque point une infinité de directions tangentes, orthogonales l'une à l'autre, et une infinité de directions normales, jouissant de la même propriété. Dans le cas de M. VITALI, il n'y aurait qu'un nombre fini de directions tangentes, dans celui de M. LÉVY, de directions normales.

Il serait difficile d'étendre à ces variétés les développements géométriques, en suivant la marche de raisonnement de M. VITALI ou de M. LÉVY. Donc, si la dite applicabilité avait lieu en effet, l'étude de l'espace de RIEMANN-HILBERT serait un instrument pour faire connaîtres les propriétés de ces variétés.

---

(11) Loc. cit., p. 83.
(12) Loc. cit., p. 146.

Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari.

Memoria 2ª (*) di Guido Ascoli (a Torino).

Sunto. - *In questa 2ª parte si dimostra anzitutto che in ogni spazio lineare metrico separabile, ogni corpo convesso ha in ogni punto del suo contorno almeno un iperpiano radente; e se ne deduce una serie di teoremi sulla determinazione delle varietà lineari e dei corpi convessi mediante successioni di iperpiani, sulle condizioni di risolubilità di certi sistemi di equazioni, ecc. Seguono studi su particolari tipi di basi per gli spazi in discorso, e sull'approssimazione puntuale delle funzioni additive, e applicazioni delle teorie svolte a vari argomenti di Analisi.*

VI. I teoremi di esistenza negli spazi separabili.

33. Abbiamo già accennato che l'esistenza di iperpiani, e in particolare quella dell'iperpiano radente ad un corpo convesso in un suo punto, ammesse sinora quando occorresse considerare questi enti, e verificate nei cap. IV e V in casi particolari, possono essere accertate in generale per gli spazi separabili. Questo risultato, fecondo di conseguenze importanti, ci proponiamo ora di dimostrare.

È chiaro che in uno spazio separabile, avente per base la successione $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, una f. a. c. che si annulla per ogni elemento della base è identicamente nulla; donde segue che una f. a. c. è determinata dai valori che assume per gli elementi della base. Tali valori non sono però affatto arbitrari; si ha precisamente il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè esista una f. a. c. A(x) *che soddisfi alle equazioni:*

$$A(u_i) = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$$

dove gli u_i *formano una base dello spazio* S *considerato, è che al variare dell'intero* n *e dei numeri reali, non tutti nulli,* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ *l'espressione*

$$\frac{\left|\sum_1^n \lambda_i c_i\right|}{\operatorname{mod} \sum_1^n \lambda_i u_i}$$

abbia limite superiore K *finito.*

(*) V. Memoria 1ª, questo Volume, pag. 33.

La necessità della condizione è evidente; se infatti esiste la $A(x)$ richiesta, si ha per ogni x

$$|A(x)| \leq \text{Nor}\, A \cdot \text{mod}\, x$$

donde, per $x = \sum_1^n \lambda_i u_i$ segue

$$\left| \sum_1^n \lambda_i c_i \right| \leq \text{Nor}\, A \cdot \text{mod} \sum_1^n \lambda_i u_i$$

come si voleva.

Per dimostrarne la sufficienza possiamo ricondurci facilmente al teorema del n.° 4 del cap. I, nel modo seguente. Se i c_i sono tutti nulli, la f. a. c. cercata esiste ed è quella identicamente nulla; nel caso opposto, sia c_r il prlmo dei c_i che non è nullo; possiamo anzi supporre $r = 1$. Posto allora:

$$v_i = u_i - \frac{c_i}{c_1} u_1 ,$$

i v_i determinano una varietà lineare passante per l'origine (perchè $v_1 = 0$), che *non contiene* u_1. Per vederlo basterà provare che la distanza $\left(u_1, \sum_2^n \mu_i v_i\right)$ per qualunque scelta delle μ_i è superiore a un numero positivo fisso. E si ha infatti anzitutto:

$$u_1 - \sum_2^n \mu_i v_i = \left(1 + \frac{1}{c_1} \sum_2^n \mu_i c_i\right) u_1 - \sum_2^n \mu_i u_i$$

e quindi, posto

$$\lambda_1 = 1 + \frac{1}{c_1} \sum_2^n \mu_i c_i, \quad \lambda_2 = -\mu_2, \ldots, \lambda_n = -\mu_n$$

risulta dall'ipotesi:

$$\frac{|c_1|}{\text{mod}\left(u_1 - \sum_2^n \mu_i v_i\right)} \leq K$$

cioè

$$\left(u_1, \sum_2^n \mu_i v_i\right) \geq \frac{|c_1|}{K}$$

come si è affermato.

D'altra parte, la detta varietà lineare e u_1 determinano l'intero spazio S; in altre parole $v_1, v_2, v_3, \ldots$ è ancora una base. Ed infatti è chiaro che una combinazione lineare di questi elementi è anche combinazione lineare di $u_1, u_2, u_3, \ldots$ e viceversa, essendo per $i > 1$

$$v_i = u_i - \frac{c_i}{c_1} u_1 , \quad u_i = v_i + \frac{c_i}{c_1} u_1 .$$

Segue dal citato teorema del n.° 4 che la varietà considerata è un iperpiano, cioè che esiste una f. a. c. $A(x)$ che si annulla in ogni v_i, e non in u_1; potrà supporsi per esempio $A(u_1) = c_1$. E si ha allora subito $A(u_i) = c_i$ per ogni i, c. d. d.

Accenniamo anche a una dimostrazione più diretta, che segue del resto la traccia del citato teorema. Per ogni elemento x esistono infinite combinazioni lineari y delle u_i che distano da x meno di ε. Se $y' = \Sigma \lambda_i' u_i$, $y'' = \Sigma \lambda_i'' u_i$; sono due di esse, si ha dall'ipotesi

$$|\Sigma \lambda_i' c_i - \Sigma \lambda_i'' c_i| \leq K \operatorname{mod}(y' - y'') < 2K\varepsilon.$$

Ne segue che al variare di $y = \Sigma \lambda_i u_i$ entro la sfera di centro x e raggio ε, l'oscillazione di $\Sigma \lambda_i c_i$ è minore di $2K\varepsilon$; sicchè il limite superiore e l'inferiore di $\Sigma \lambda_i c_i$ hanno per $\varepsilon \to 0$ uno stesso limite $A(x)$. Si prova allora facilmente che $A(x)$ è una f. a. c. che soddisfa alle condizioni richieste.

Dall'una o dall'altra dimostrazione segue anche senza difficoltà $\operatorname{Nor} A = K$.

34. In tutto il presente capitolo, e anche nei seguenti, le nostre considerazioni si riferiranno sempre ad uno spazio lineare separabile S; ci esimeremo perciò dal ripetere ogni volta questa ipotesi.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema fondamentale:

Un corpo convesso Γ *di* S *ammette in ogni punto del suo contorno almeno un iperpiano radente.*

Daremo prima la dimostrazione in forma analitica, salvo a chiarire poi il procedimento per via geometrica. Sia u_0 un punto del contorno di Γ e Γ sia definito dalla relazione:

$$\varphi(x) \leq \varphi(u_0)$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione (M). Si è già visto (n.° 13) che il limite

$$\varphi_1(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varphi(u_0 + \varepsilon x) - \varphi(u_0)}{\varepsilon}$$

esiste e rappresenta una nuova funzione (M). Sia allora $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ una base di S; esisteranno altresì i limiti

$$\varphi_2(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varphi_1(u_1 + \varepsilon x) - \varphi_1(u_1)}{\varepsilon}$$

$$\varphi_3(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varphi_2(u_2 + \varepsilon x) - \varphi_2(u_2)}{\varepsilon}$$

. . . .

$$\varphi_{n+1}(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varphi_n(u_n + \varepsilon x) - \varphi_n(u_n)}{\varepsilon}$$

. . . .

Diciamo allora che *esiste una f. a. c. che soddisfa alle condizioni:*

$$A(u_n) = \varphi_n(u_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

e che l'iperpiano

$$A(x) = \varphi(u_0)$$

è radente a Γ *in* u_0.

Poichè ciascuna delle φ_n è una funzione (M), e il procedimento usato per dedurre φ_{n+1} da φ_n è quello già studiato nei n.[i] 13 e 14, vale per φ_n la (3) del n.° 14, che dà, per λ e μ reali qualunque, la diseguaglianza:

$$\lambda\varphi_n(u_n) + \mu\varphi_{n+1}(u_{n+1}) \leq \varphi_n(\lambda u_n + \mu u_{n+1}).$$

Questa facilmente si estende nell'altra

$$\text{(a)} \qquad \sum_0^n \lambda_i\varphi_i(u_i) \leq \varphi(\Sigma\,\lambda_i u_i)$$

dove si è posto $\varphi_0 = \varphi$. D'altronde esiste un numero positivo k tale che $|\varphi(x)| < k \operatorname{mod} x$, sicchè sarà

$$\sum_0^n \lambda_i\varphi_i(u_i) \leq k \operatorname{mod} \Sigma\,\lambda_i u_i\,.$$

Questa relazione, unita a quella che risulta mutando i λ_i nei $-\lambda_i$ dà l'altra

$$\left|\sum_0^n \lambda_i\varphi_i(u_i)\right| \leq k \operatorname{mod} \Sigma\,\lambda_i u_i$$

e questa, tenuto conto che $u_0, u_1, u_2, \ldots$ è ancora una base, prova (n.° 33) l'esistenza di una f. a. c. soddisfacente alle condizioni $A(u_n) = \varphi_n(u_n)$.

La prima di queste condizioni, $A(u_0) = \varphi(u_0)$ prova che l'iperpiano $A(x) = \varphi(u_0)$ passa per u_0; per dimostrare che esso è radente a Γ, basta provare che $A(x) \leq \varphi(x)$. Ora, per gli x che sono combinazioni lineari delle u_i:

$$x = \Sigma\,\lambda_i u_i\,,$$

avendosi

$$A(x) = \Sigma\,\lambda_i\varphi_i(u_i)$$

questa relazione coincide con la (a); e segue allora per ogni altro elemento, considerato come punto di accumulazione di siffatte combinazioni.

Il teorema è così dimostrato; ed è chiaro che il suo contenuto analitico é il seguente:

Se $\varphi(x)$ *è una funzione* (M) *definita in uno spazio separabile* S *e* u_0 *un punto qualunque di* S, *esiste una funzione additiva e continua* A(x) *tale che è per ogni* x

$$A(x) \leq \varphi(x)$$

mentre $A(u_0) = \varphi(u_0)$.

35. Per approfondire il contenuto geometrico degli sviluppi precedenti, conviene anzitutto riprendere la (2) del n.° 14, applicata alla φ_r, e cioè

(b) $$\varphi_{r+1}(x + au_r) = \varphi_{r+1}(x) + a\varphi_r(u_r)$$

ed estenderla nell'altra

(c) $$\varphi_{r+1}\left(x + \sum_0^r \lambda_i u_i\right) = \varphi_{r+1}(x) + \sum_0^r \lambda_i \varphi_i(u_i).$$

La (c) si prova per induzione; posta vera la (c) per $r = n$, si ha:

$$\varphi_{n+1}\left(x + \sum_0^n \lambda_i u_i\right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varphi_n\left(u_n + \varepsilon x + \varepsilon \sum_0^n \lambda_i u_i\right) - \varphi_n(u_n)}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varphi_n(u_n + \varepsilon(x + \lambda_n u_n)) + \varepsilon \sum_0^{n-1} \lambda_i \varphi_i(u_i) - \varphi_n(u_n)}{\varepsilon} = \varphi_{n+1}(x + \lambda_n u_n) + \sum_0^{n-1} \lambda_i \varphi_i(u_i)$$

donde, per la (b) si ha subito la (c), per $r = n + 1$.

Seguono di qui varie conseguenze:

α) *Le funzioni* $\varphi_r(x)$ *tendono per* $r \to \infty$, *senza mai crescere, alla f. a. c.* A(x). Si ha intanto dal n.° 14, $\varphi_1(x) \leq \varphi(x)$. e in generale

$$\varphi_{r+1}(x) \leq \varphi_r(x).$$

Preso poi un x_0 arbitrario, e un $\varepsilon > 0$, si prenda una combinazione lineare delle u_i, $z = \sum_0^n \lambda_i u_i$ tale che $(z, x_0) < \frac{\varepsilon}{2k}$. Sarà, dalla (c), per $N > n$:

$$\varphi_N(z) = \Sigma \lambda_i \varphi_i(u_i) = A(z).$$

D'altra parte, essendo $\varphi_N(x_0) \leq \varphi(x_0) < k \operatorname{mod} x_0$, e $\varphi_N(x)$ una funzione (M), segue

$$|\varphi_N(x_0) - \varphi_N(z)| \leq |\varphi_N(x_0 - z)| < k(x_0, z) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mentre poi, essendo pure $A(x) \leq \varphi(x) < k \operatorname{mod} x_0$, si ha anche

$$|A(x_0) - A(z)| = |A(x_0 - z)| \leq k(x_0, z) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Combinando queste relazioni risulta:

$$|\varphi_N(x_0) - A(x_0)| < \varepsilon$$

che sussiste dunque per $N > n$, e dimostra la tesi.

β) *Detto* Γ_n *il corpo convesso definito dalla relazione* $\varphi_n(x) \leq \varphi(u_0)$ *ciascuno dei corpi* $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots \Gamma_n, \dots$ *è contenuto nel successivo e tutti nel semispazio* $A(x) \leq \varphi(u_0)$; *e ogni punto interno al semispazio è interno a qualcuno dei* Γ_n *(ed ai successivi).*

La prima proprietà segue dalle diseguaglianze $\varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x)$ e $A(x) < \varphi(x)$ (quest'ultima evidente a causa di α)). Per la seconda si osservi che la $\varphi_n(x)$ tendendo a $A(x)$ senza mai crescere, se $A(x) < \varphi(u_0)$ sarà per n abbastanza grande $\varphi_n(x) < \varphi(u_0)$.

γ) *L'iperpiano* $A(x) = \varphi(u_0)$ *è radente a tutti i* Γ_n *in* u_0 *e più generalmente nei punti di una semivarietà lineare* V_n' *a* n *dimensioni definita da*

$$z = u_0 + \sum_1^n \lambda_i \left(u_i - \frac{\varphi_i(u_i)}{\varphi(u_0)} u_0 \right), \quad \text{con} \quad \lambda_n \geq 0.$$

Cominciamo a provare che questa semivarietà è formata dai punti della forma $\sum_0^n \lambda_i u_i$ con $\lambda_n \geq 0$ che appartengono al contorno di Γ_n. Se si pone infatti

$$\varphi_n \left(\sum_0^n \lambda_i u_i \right) = \varphi(u_0)$$

si ha anche, per la (c):

$$\varphi_n(\lambda_n u_n) + \sum_1^n \lambda_i \varphi_i(u_i) = \varphi(u_0)$$

ed anche, essendo $\lambda_n \geq 0$

$$\sum_0^n \lambda_i \varphi_i(u_i) = \varphi(u_0).$$

Se si ricava di qui λ_0 e si sostituisce nell'espressione $z = \sum \lambda_i u_i$ si ottiene appunto la forma indicata. E se $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ sono tutti nulli si ottiene $z = u_0$, ciò che prova che i Γ_n hanno tutti u_0 sul contorno.

La V_n' giace d'altra parte anche sull'iperpiano $A(x) = \varphi(u_0)$, in quanto si ha subito

$$A(z) = \sum_0^n \lambda_i A(u_i) = \sum_0^n \lambda_i \varphi_i(u_i) = \varphi(u_0)$$

e perciò l'iperpiano è radente a Γ_n in ogni punto della V_n'.

δ) *Il corpo* Γ_{n+1} *è il cono circoscritto a* Γ_n *in ciascun punto della* V_n' *ove non sia* $\lambda_n = 0$.

Preso un generico punto $z = \sum \lambda_i u_i$ di V_n', il cono circoscritto a Γ_n in z

è dato da $\psi(x) \leq \psi(z)$ dove

$$\psi(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varphi_n(z+\varepsilon x) - \varphi_n(z)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varphi_n\left(\sum_0^n \lambda_i u_i + \varepsilon x\right) - \varphi_n\left(\sum_0^n \lambda_i u_i\right)}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\left[\varphi_n(\lambda_n u_n + \varepsilon x) + \sum_0^{n-1} \lambda_i \varphi_i(u_i)\right] - \left[\varphi_n(\lambda_n u_n) + \sum_0^{n-1} \lambda_i \varphi_i(u_i)\right]}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varphi_n(\lambda_n u_n + \varepsilon x) - \varphi_n(\lambda_n u_n)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varphi_n\left(u_n + \frac{\varepsilon}{\lambda_n} x\right) - \varphi_n(u_n)}{\frac{\varepsilon}{\lambda_n}} = \varphi_{n+1}(x)$$

e quindi anche $\psi(z) = \varphi_{n+1}(z) = \Sigma \lambda_i \varphi_i(u_i) = \varphi(u_0)$. Segue senz'altro la tesi.

ε) *Il corpo* Γ_{n+1} *è un cono di* n^a *specie (almeno) avente come vertice la varietà lineare* V_n *a cui appartiene la* V_n'.

Ed infatti la V_n, definita da $z = \sum_0^n \lambda_i u_i$ con $\sum_0^n \lambda_i \varphi_i(u_i) = \varphi(u_0)$, senza limitazioni di segno per λ_n, appartiene al contorno di Γ_{n+1} perché è:

$$\varphi_{n+1}\left(\sum_0^n \lambda_i u_i\right) = \sum_0^n \lambda_i \varphi_i(u_i) = \varphi(u_0).$$

Se poi x è un punto di Γ_{n+1} fuori di V_n, un punto generico della semivarietà a $n+1$ dimensioni che da V_n proietta x è dato da

$$y = z + \mu(x - u_0)$$

dove $z = \sum_0^n \lambda_i u_i$ sta in V_n e $\mu \geq 0$. Si ha allora:

$$\varphi_{n+1}(y) = \varphi_{n+1}(\mu x + (\lambda_0 - \mu)u_0 + \sum_1^n \lambda_i u_i) = \mu\varphi_{n+1}(x) + (\lambda_0 - \mu)\varphi(u_0) + \sum_1^n \lambda_i \varphi_i(u_i)$$

$$= \mu[\varphi_{n+1}(x) - \varphi(u_0)] + \sum_0^n \lambda_i \varphi_i(u_i) = \mu[\varphi_{n+1}(x) - \varphi(u_0)] + \varphi(u_0)$$

sicchè se $\varphi_{n+1}(x) \leq \varphi(u_0)$ è anche $\varphi_{n+1}(y) \leq \varphi(u_0)$.

Da queste proposizioni risulta ormai chiara la costruzione che conduce all'iperpiano radente a Γ in u_0 e che è semplicemente un'estensione di una costruzione valida in un S_n euclideo e che fornisce anzi un iperpiano *tangente* (in senso esteso) ad un corpo convesso in un punto del suo contorno (onde si potrebbe per il caso attuale adottare la stessa qualifica). In breve il procedimento è il seguente. Costruito a Γ il cono circoscritto Γ_1 in u_0, si sceglie una generatrice V_1' di Γ_1 (quella che giace nel semipiano avente per origine la retta $0u_0$ e contenente u_1) e si costruisce il cono circoscritto a Γ_1 lungo V_1'. Esso è un cono di seconda specie Γ_2 avente per vertice la retta V_1, che contiene V_1'. Si sceglie in Γ_2 un semipiano generatore V_2' (quello che giace nel semispazio avente per origine il piano $0u_0u_1$ e contenente u_2) e si costruisce il cono circoscritto a Γ_2 lungo V_2', cono di terza specie Γ_3, avente per vertice il piano V_2 che contiene V_2'. E così via. I coni Γ_i così costruiti, ciascuno dei quali contiene i precedenti, costituiscono un semispazio di S (salvo al più il contorno) che è limitato dall'iperpiano radente π cercato. Ed anche: l'iperpiano π cercato è la varietà lineare determinata dalle successive generatrici V_i' o dai successivi vertici V_i dei coni circoscritti.

La costruzione esclude evidentemente che un u_{n+1} giaccia nella varietà $0u_1u_2, \dots u_n$, cioè che u_{n+1} dipenda linearmente dai precedenti elementi della base. Ma ogni siffatto elemento può senz'altro sopprimersi dalla base, ottenendosi così una nuova base i cui elementi siano linearmente indipendenti.

36. Il teorema del n. 34 consente numerose applicazioni in quanto in ogni spazio vettoriale si hanno esempi di corpi convessi notevoli per qualche riguardo. Ci limitiamo qui ai casi fondamentali.

Poichè in S le sfere sono corpi convessi si ha intanto:

In uno spazio S *separabile le sfere ammettono in ogni loro punto di contorno almeno un iperpiano radente;* ciò che include che *esistono in* S *infiniti iperpiani.*

La proposizione può anche presentarsi nel modo seguente: *se* x, y *sono punti distinti di* S, *per* x *passa un iperpiano* π *tale che* $(y, \pi) = (y, x)$; ed anche, per $x = 0$, in forma analitica: *se* $y \neq 0$, *esiste una f. a. c.* A(x) *tale che per ogni* x *è* $A(x) \leq \operatorname{mod} x$, *mentre* $A(y) = \operatorname{mod} y$; *essa è evidentemente unitaria.*

37. Più generalmente, data una varietà lineare V e un punto x_0 ad essa esterno, si consideri il cilindro rotondo di asse V avente x_0 sul contorno, e definito quindi da

$$(x, V) \leq (x_0, V).$$

Esso è (n.° 10) un corpo convesso, e ammette quindi in x_0 un iperpiano radente π, parallelo a V (n.° 12); sicchè per V passa un iperpiano π', parallelo a π, e la distanza (x_0, π') è eguale a (π, π') ossia al raggio (x_0, V) del cilindro. Ossia:

a) *Se* x_0 *è esterno alla varietà lineare* V, *per* V *passa un iperpiano* π' *tale che* $(x_0, \pi') = (x_0, V)$.

La forma analitica corrispondente è la seguente: *se* V *è una varietà lineare passante per l'origine, e* x_0 *non appartiene a* V, *esiste una f. a. c., unitaria, tale che* $|A(x)| \leq (x, V)$, *per ogni* x, *mentre* $A(x_0) = (x_0, V)$.

I risultati precedenti includono che V giace in un iperpiano π'. Ma è chiaro che se V non è un iperpiano, partendo da un punto x_1 di π', non appartenente a V, si ottiene un secondo iperpiano π diverso da π' e passante per V, e che per V passano tutti gli iperpiani del fascio determinato da π' e da π''. Cioè:

b) *Una varietà lineare che non sia un iperpiano appartiene a infiniti iperpiani.*

Si può anzi asserire che essa è intersezione *completa* degli iperpiani che la contengono; in altre parole:

c) *Un punto appartiene ad una varietà lineare se appartiene a tutti gli iperpiani che passano per essa.*

Ed infatti se x_0, punto comune a tutti gli iperpiani che passano per V, non giacesse in V, per V passerebbe, per a), un iperpiano non contenente x_0, contro l'ipotesi.

Si osservi ancora che se un punto x_0 non sta sulla varietà lineare V, la distanza di x_0 da un qualunque iperpiano passante per V non può superare (x_0, V); da ciò e da a) segue allora:

d) *La distanza di un punto* x_0 *da una varietà lineare* V *è la massima tra le distanze di* x_0 *dagli iperpiani passanti per* V.

38. Merita di essere notato il caso in cui la varietà V è definita (n.° 3) da un aggregato I; se esistono punti fuori di essa, vi è un iperpiano che la contiene. Quindi:

a) *Un aggregato di punti di* S *tale che la varietà lineare da esso definita non sia tutto* S *sta in un iperpiano.*

E supposto che l'aggregato sia formato da I e dall'origine si ha, in forma più analitica:

b) *Se un aggregato* I *di elementi di* S *è tale che esistono elementi di* S *non approssimabili mediante combinazioni lineari di elementi di* I, *esiste una f. a. c. tale che per ogni elemento* y *di* I *è* $A(y) = 0$.

E al teorema c) del n.° precedente corrisponde allora l'altro:

c) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un elemento* x_0 *si possa approssimare mediante combinazioni lineari di elementi dell'aggregato* I, *è che per ogni f. a. c.* A(x) *che si annulli in tutti i punti di* I *sia* $A(x_0) = 0$.

Finalmente, se si dà il nome di *approssimazione limite* di x_0 rispetto ad I al limite inferiore della distanza di x_0 dalle combinazioni lineari di elementi di I, e si ricorda l'espressione della distanza di un punto da un iperpiano (n.° 6), la d) del n.° precedente si può enunciare:

d) *L'approssimazione limite di un elemento* x_0 *rispetto a un aggregato* I *è il massimo dei valori che assumono per* $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$ *le f. a. c. unitarie che si annullano per tutti gli elementi di* I.

39. Il teorema del n.° 34 si può estendere nel modo seguente:

Se V *è una varietà lineare radente a un corpo convesso* Γ, *per* V *passa un iperpiano radente a* Γ.

Si consideri il cilindro Σ ottenuto, secondo il n.° 10, c), dando a Γ tutte le traslazioni parallele a V ed unendo, se occorre, all'aggregato ottenuto i suoi punti di accumulazione. Diciamo anzitutto che V appartiene a Σ. Ed infatti se y è un punto di V, e y', z' sono un punto di V e uno di Γ aventi distanza $< \varepsilon$, la traslazione che porta y' in y porta z' in un punto z di Σ, tale che $(y. z) < \varepsilon$. Ciò prova che y è punto di accumulazione di punti di Σ e quindi sta in Σ.

Inoltre y è punto di contorno di Σ, ché se fosse interno, sarebbe interno ad una posizione di Γ, ottenuta per es. con una traslazione τ parallela a V. E il punto y_1, ottenuto da y con la traslazione inversa sarebbe in V e entro Γ, ciò che è assurdo.

Per y passa dunque un iperpiano π radente a Σ, ed esso (n.° 12) contiene V. È chiaro che π non contiene punti interni a Γ e ha da Γ distanza nulla; quindi π è radente a Γ, e il teorema è dimostrato.

Si può dare anche una dimostrazione analitica valendosi della funzione $(x, V)_\varphi$ definita al n.° 10, c). Per il caso in cui Γ sia una sfera, tutto si semplifica e il ragionamento si riduce in sostanza al seguente: Se x_0 è il centro di Γ e r il raggio, è $(x_0, V) = r$; esiste perciò per V un iperpiano π tale che $(x_0, \pi) = r$, e che è quindi radente a Γ.

40. Dai risultati precedenti segue facilmente il teorema:

Se una f. a. c. B(x) *è definita in una varietà lineare* V *passante per l'origine, esistono infinite f. a. c., definite in tutto* S, *che si riducono su* V *a* B(x); *e tra questa almeno una che ha la norma stessa di* B(x) (cioè la massima possibile).

Si consideri infatti su V il luogo dei punti x per i quali $B(x) = 1$; esso è evidentemente una varietà lineare V' (varietà iperpiana rispetto a V) per la quale passano quindi infiniti iperpiani. Per ottenerne uno che non contenga V basta prendere un punto x_1 fuori di V e considerare la varietà lineare V'' definita da V' e x; per essa passerà un iperpiano che contiene V' senza contenere V.

Poichè questo iperpiano π non contiene l'origine, si può scriverne l'equazione nella forma $A(x) = 1$, dove $A(x)$ è una f. a. c.; la $A(x)$ è una possibile estensione di $B(x)$ a tutto S. Ed infatti si ha $A(x) = B(x)$ su V' e nell'origine; quindi in tutta V, che è la varietà lineare definita da V' e dall'origine.

Se si prende l'iperpiano π in modo che sia $(0, \pi) = (0, V')$, sarà (n.° 6)

$$\frac{1}{\operatorname{Nor} A} = \frac{1}{\operatorname{Nor} B}$$

cioè $\operatorname{Nor} A = \operatorname{Nor} B$.

41. Siamo ora in grado di assegnare le condizioni di risolubilità dell'importante problema: *Determinare una f. a. c.* A(x) *che soddisfi alle equazioni*

$$A(x_i) = c_i$$

essendo gli x_i *punti assegnati e le* c_i *costanti assegnate,* problema già trattato nel caso speciale che gli x_i costituiscano una base. Come in quel caso una immediata condizione necessaria è che *l'espressione*

$$\frac{|\Sigma \lambda_i c_i|}{\operatorname{mod} \Sigma \lambda_i x_i}$$

abbia, al variare delle λ_i, limite superiore finito.

Possiamo ora vedere che la condizione è anche sufficiente. Gli elementi x_i e l'origine definiscono infatti una varietà lineare V, che può considerarsi come uno spazio lineare separabile, avente le x_i come base. Sotto la condizione posta, si definisce allora in V una f. a. c. $B(x)$ che soddisfa alle equazioni $B(x_i) = c_i$ (n.° 33). Si prolunghi ora $B(x)$ in tutto S in una f. a. c. $A(x)$ (n.° 40); questa risolverà il problema.

Si aggiunga che esiste una soluzione la cui norma è quella di $B(x)$, cioè

$$\operatorname{Nor} A = \lim\sup \frac{|\Sigma \lambda_i c_i|}{\operatorname{mod} \Sigma \lambda_i x_i}.$$

42. Alla determinazione di una varietà lineare come intersezione di iperpiani si può dare un utile complemento col teorema seguente:

a) *Una varietà lineare è completa intersezione di una infinità numerabile di iperpiani.*

Si consideri infatti un aggregato numerabile ovunque denso di punti di S (n.° 17) e sia esso $v_1, v_2, \ldots v_n, \ldots$. All'elemento v_i non giacente sulla data varietà V (che supporremo, al solito, passante per l'origine) si può far corrispondere (n.° 37, a)) un iperpiano π_i di equazione $A_i(x) = 0$, passante per V, e tale che è

$$A_i(x) \leq (x, V), \quad A_i(v_i) = (v_i, V).$$

Le funzioni $A_i(x)$ sono, come si è visto, unitarie.

Diciamo che questi iperpiani hanno V come completa intersezione, cioè che un elemento y tale che sia $A_i(y) = 0$ per ogni i, appartiene a V. Ed infatti y è limite di una successione di elementi v_i; sia questa v_{n_i}. Sarà allora

$$| A_{n_i}(y) - A_{n_i}(v_{n_i}) | \leq \text{mod}\,(y - v_{n_i})$$

cioè

$$(v_{n_i}, V) \leq \text{mod}\,(y - v_{n_i})$$

e al limite $(y, V) = 0$; y appartiene a V.

Il teorema vale in particolare se V è un punto: un punto è pure completa intersezione di un'infinità numerabile di iperpiani. Esiste dunque una successione di f. a. c. $B_i(x)$ tali che se è, per ogni i, $B_i(y) = 0$ è anche $y = 0$. Di qui segue che la successione $B_i(x)$ determina completamente l'elemento x; ciò che può esprimersi nell'enunciato:

b) *Gli elementi di uno spazio* S *separabile possono rappresentarsi mediante una successione di coordinate che sono funzioni additive e continue degli elementi stessi.*

43. Il precedente teorema a) si ricollega facilmente al teorema generale: *Un corpo convesso è intersezione completa di un' infinità numerabile di semispazi.*

Sia Γ un corpo convesso che possiamo supporre contenga l'origine e sia quindi rappresentato dalla condizione $\varphi(x) \leq 1$, dove $\varphi(x)$ è una funzione (M) non negativa. Considerata anche qui la successione v_i ovunque densa in S, ed esclusi gli eventuali elementi per i quali sia $\varphi(v_i) = 0$, ad ognuno dei rimanenti corrisponderà un punto $\dfrac{v_i}{\varphi(v_i)} = w_i$ situato sul contorno di Γ; e per w_i, passerà un iperpiano π_i radente a Γ. I punti dello spazio situati rispetto ad ogni π_i dalla parte dell'origine costituiscono Γ.

Per dimostrarlo, poniamo la questione in termini analitici. L'equazione di π_i può scriversi $A_i(x) = 1$, dove è

$$| A_i(x) | \leq \varphi(x), \quad A_i(v_i) = \varphi(v_i);$$

si dovrà provare che se per un punto y è $A_i(y) \leq 1$, per ogni i, sarà

$\varphi(y) \leq 1$, e viceversa. La seconda parte essendo evidente, occupiamoci della prima. Se $\varphi(y) = 0$, è anche $\varphi(y) \leq 1$; se $\varphi(y) > 0$ esiste una successione v_{n_i} estratta dalla v_i e avente per limite y, e tale che per nessuno dei suoi termini $\varphi(v_{n_i})$ si annulli. Supposto $\varphi(x) < k \bmod x$, sarà

$$|A_{n_i}(y) - A_{n_i}(v_{n_i})| = |A_{n_i}(y - v_{n_i})| \leq \varphi(y - v_{n_i}) < k \bmod (y - v_{n_i})$$

cioè

$$|A_{n_i}(y) - \varphi(v_{n_i})| < k \bmod (y - v_{n_i}).$$

Ne segue

$$\lim A_{n_i}(y) = \lim \varphi(v_{n_i}) = \varphi(y)$$

e perciò, se $A_{n_i}(y) \leq 1$ sarà anche $\varphi(y) \leq 1$.

Questo teorema si potrà in particolare dimostrare per la sfera unitaria $\bmod x \leq 1$; si avrà così che *la condizione* $\bmod x \leq 1$ *si può sostituire con un' infinità numerabile di condizioni del tipo* $A_i(x) \leq 1$, *ove le* $A_i(x)$ *sono f.a.c.*

44. Essendo ancora S uno spazio vettoriale separabile a infinite dimensioni (tale quindi che la sua base $u_1, u_2, \ldots$ non possa ridursi a un numero finito di termini), può darsi ([55]) che ogni elemento di S sia combinazione lineare di un numero finito di elementi della base. Anticipando un risultato posteriore (n.° 52) affermiamo che S non è allora completo. Ad ogni modo, considerando il minimo spazio $\overline{S}$ completo che contiene S, in esso esisteranno elementi che non sono combinazioni lineari di un numero finito delle u_i. Se y è un tale elemento e U_n la varietà lineare definita dall'origine e da $u_1, u_2, \ldots u_n$ sarà quindi $(y, U_n) \neq 0$, per ogni valore di n.

Esiste perciò (n.° 37) una f. a. c. $A_n(x)$, unitaria, tale che

$$|A_n(x)| \leq (x, U_n), \quad A_n(y) = (y, U_n).$$

Ora ogni x è approssimabile mediante elementi delle U_n, quindi è

$$\lim (x, U_n) = 0;$$

ne segue anche per ogni x di $\overline{S}$, e quindi anche di S

$$\lim A_n(x) = 0.$$

Si ha così il singolare risultato:

([55]) Un esempio di questo caso è costituito dallo spazio P costituito dai polinomi in t, di grado qualunque, in un intervallo $a \vdash\!\dashv b$, con $\bmod x = \max |x(t)|$ in $a \vdash\!\dashv b$. Effettivamente, P non è completo ed è C il minimo spazio completo che lo contiene.

Se S *ha infinite dimensioni, esiste una successione di f. a. c. unitarie* $A_n(x)$ *tali che per ogni* x *si ha:*

$$\lim A_n(x) = 0.$$

La convergenza non può essere uniforme, neppure per gli x unitari, in quanto per ogni $A_n(x)$ esiste un x unitario tale che $A_n(x)$ è vicino ad 1 quanto si vuole.

VII. Applicazioni.

45. I teoremi precedenti sono senz'altro applicabili a tutti i numerosi spazi riconosciuti come separabili, nei cap. IV e V, dando luogo talvolta a enunciati già confermati caso per caso dalla trattazione diretta, talvolta a proprietà nuove e in generale difficili a stabilire direttamente. Così non ci dà nulla di nuovo il teorema che afferma l'esistenza di f. a. c. o quella del piano radente a una sfera in un suo punto; mentre altri risultati si rivelano degni di nota, come ora vedremo, e specialmente negli spazi funzionali.

a) Consideriamo anzitutto il teorema b) del n.° 37, completato nel n.° 42; se lo applichiamo agli spazi N_p troviamo che *una varietà lineare di* $N_p (p > 1)$ *è formata dalle soluzioni di un sistema finito o numerabile di equazioni lineari del tipo:*

$$a_{i_1}x_1 + a_{i_2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + \dots = c_i$$

con $\sum\limits_r |a_{ir}|^{\frac{p}{p-1}}$ *convergente.*

Correlativamente, in L_p le equazioni avranno la forma:

$$\int\limits_\sigma x(P)\varphi_i(P)d\sigma(P) = c_i$$

con $\varphi_i(P)$ funzione di $L_{\frac{p}{p-1}}$; in L la stessa forma con $\varphi_i(P)$ sommabile e limitata; e così via.

Considerando per es. le funzioni armoniche in L_p, che abbiamo già visto (n.° 29) costituire in L_p una varietà lineare, contenente l'elemento nullo, vediamo che *le funzioni armoniche entro un dominio* σ, *in* L_p, *sono caratterizzate dalla proprietà di essere ortogonali a una certa successione di funzioni della classe* $L_{\frac{p}{p-1}}$ *in* σ.

Analogamente per le funzioni sommabili in L (caso $p = 1$). Successioni siffatte si possono del resto ottenere direttamente ([56]); sarebbe tuttavia interessante, in qualche caso semplice, trovarne di più eleganti ed atte alle applicazioni.

Non sarebbe lecita un'applicazione dello stesso genere in uno spazio non separabile: non si può però escludere che, per es., le funzioni continue quasi periodiche (n.° 32) non si possano caratterizzare nello spazio C_∞ mediante l'annullarsi di un complesso di funzionali lineari, sia pure di potenza superiore al numerabile; e una risposta positiva ci sembrerebbe di non dubbia utilità per lo studio di questa interessante classe di funzioni.

46. *b*) È evidente l'applicazione che può farsi agli spazi funzionali del teorema c) del n.° 38. Esso è stato già incontrato per lo spazio L_2 come facile conseguenza del teorema di Fischer e Riesz; in realtà la dimostrazione per questa via si riferisce solo al caso di un sistema ortogonale normato, o se si vuole, di un aggregato numerabile.

In C il teorema è dovuto al Riesz, per il caso di una sola variabile ([57]); la deduzione sfrutta essenzialmente la rappresentazione dei funzionali lineari mediante integrali di Stieltjes ed non sembra estendibile al caso di più variabili.

In altri spazi non pare che la cosa sia stata studiata.

Non si deve dimenticare che la verifica richiesta dal teorema enunciato, anzichè farsi per *tutti* i funzionali lineari che si annullano in I può farsi soltanto per *una certa infinità numerabile di essi* (n.° 42).

47. La valutazione della distanza di un punto da una varietà lineare (n.° 37, d) e n.° 38, d)) non si trova data esplicitamente, crediamo, per nessuno spazio; però per lo spazio C, nel caso di una variabile, un enunciato equivalente viene dato da Riesz ([58]); e per L_2 un espressione semplice si ha direttamente per le varietà definite da elementi a due a due ortogonali.

Per L_2 e per l'equivalente spazio hilbertiano è notevole il teorema se-

---

([56]) Prese due sfere τ, τ' concentriche, interne a σ, la differenza dei valori medi di una funzione $x(P)$ in τ e τ' è un funzionale lineare che si annulla per ogni x armonica. Prendendo come centri i punti razionali di σ e come raggi i numeri razionali si ha un aggregato numerabile di funzionali che ha la proprietà richiesta.

([57]) (M_1), VIII.

([58]) (M_1), VIII. Nella seconda delle mie note citate si troveranno alcune semplici applicazioni di questo teorema e dei precedenti.

guente già dato da E. Schmidt ([59]) sotto condizioni più restrittive, con cui viene estesa a questi spazi un'altra proprietà degli spazi euclidei:

Se V *è una varietà lineare, per ogni punto* x *dello spazio esiste in* V *un punto* y *e uno solo tale che* (x, y) = (x, V).

Esiste infatti per V un iperpiano π tale che $(x, \pi) = (x, V)$, ed esiste anche (n.i 21 e 26) in π un punto y tale che $(x, y) = (x, \pi)$. Esso è l'intersezione di π con la perpendicolare a π condotta da x.

Dimostriamo che y giace in V. Sia z un punto di V; si ha:

$$(x, z)^2 = (x, y)^2 + (y, z)^2,$$

e prendendo i limiti inferiori al variare di z in V:

$$(x, V)^2 = (x, y)^2 + (y, V)^2$$

ma $(x, y) = (x, V)$, quindi $(y, V) = 0$, come si voleva.

Per un altro punto z di V si ha invece $(x, z) > (x, y)$ cioè $(x, z) > (x, V)$.

Se V è la varietà delle funzioni armoniche in un dominio σ, a quadrato sommabile, la y così trovata è la *armonica viciniore* di x, considerata da Levi-Civita ([60]) sotto condizioni al contorno che rendono la questione assai più difficile.

Possiamo ad ogni modo affermare:

Data una funzione x(P) *a quadrato sommabile in un dominio* σ, *tra le funzioni* z(P) *a quadrato sommabile in* σ, *armoniche entro* σ, *ve n'è una e una sola* y(P) *che ha da* x(P) *lo scarto quadratico minimo. E la differenza* x(P) — y(P) *è ortogonale a tutte le* z(P).

48. *d*) Anche la proposizione del n.° 40 ci sembra possa riuscire di qualche utilità; essa permette infatti, dovendosi rappresentare analiticamente i funzionali lineari in uno spazio S che sia varietà lineare di un altro spazio S', di partire da una rappresentazione già nota dei funzionali lineari di S'. Avverrà allora che certi funzionali non identicamente nulli in S' saranno tali in S; ciò che condurrà a ricercare una forma più opportuna, che

([59]) Schmidt E., *Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten* (« Rend. Circ. Mat. Palermo », XXV, 1908, 1° sem., pag. 53-77). Lo Schmidt considera solo varietà lineari definite da una base numerabile; definisce però le varietà lineari più generali nel nostro stesso modo, e afferma che tutte posseggono base. Noi abbiamo provato ciò al n.° 19; notiamo però che la presente deduzione del testo ne è indipendente.

([60]) Levi-Civita, *Armonica viciniore di una funzione assegnata* (« Rend. Acc. Lincei », 5ª, XXIX, 1° sem., 1920, pp. 197-206).

dia, per es. *tutti* i funzionali lineari di S, dando invece solo *una parte* di quelli di S'.

e) Circa il problema del n.° 41, avvertiamo soltanto che per lo spazio L_2 esso è stato risoluto in più modi da E. Schmidt nella Memoria citata più sopra; e da Riesz per lo spazio C e per gli L_p $(p > 1)$ in relazione alle altre ricerche citate di questo Autore [61] con lo stesso risultato finale.

f) Ci fermeremo un momento sul risultato del n.° 43, per il caso particolare in cui Γ è la sfera unitaria $\mathrm{mod}\, x = 1$.

Applicando ai vari spazi il procedimento generale, si hanno per lo più risultati banali, dei quali però non ci sembra inutile fissare il significato geometrico. Così in C, spazio delle funzioni continue in un dominio limitato σ, risulta facilmente che gli iperpiani da scegliere per inviluppare la sfera unitaria possono essere i seguenti

$$\pm x(P_n) = 1$$

dove i P_n sono punti del dominio formanti un insieme ovunque denso. Ed è evidente infatti che se $|x_0(P_n)| \leq 1$ sarà anche $\max |x_0(P)| \leq 1$. Ma potrebbero ugualmente scegliersi gli altri:

$$\pm \frac{1}{\mathrm{mis}\, \sigma_n} \int_{\sigma_n} x(P) d\sigma = 1$$

dove i σ_n sono domini parziali tali che ogni sfera comunque piccola contenuta in σ ne contiene uno.

Nello spazio $C^{(a)}$ delle funzioni armoniche in σ, continue al contorno, varietà lineare di C già considerata, la ricerca diretta fornisce iperpiani dello stesso tipo

$$\pm x(P_n) = 1$$

dove però i P_n sono tali che in essi certe funzioni armoniche assumono il massimo modulo: sono quindi punti del contorno di σ tali anzi da formarvi un aggregato ovunque denso. Si ha così il curioso risultato: in questo spazio la sfera unitaria è inviluppata da coppie di iperpiani corrispondenti biunivocamente ai punti del contorno e da questi determinata, anzi da una certa successione di

---

[61] (M_1), IV-V-VI-VII; (M_2), §§ 8, 9, 10, 11. Il Riesz procede per gradi, trattando prima un gruppo finito di equazioni, poi uno numerabile, poi un gruppo qualunque. L'ultima deduzione si appoggia al principio di Zermelo. La nostra deduzione è stata esposta per un gruppo numerabile di equazioni, in realtà è generale.

questi. Gli iperpiani $\pm x(Q) = 1$, se Q è un punto interno, sono pure radenti, ma non occorrono a determinare la sfera. Ciò suggerisce di ottenerli mediante combinazioni lineari degli altri, come i piani radenti a un poliedro mediante le facce; è ciò che si fa in ogni metodo di risoluzione del problema di Dirichlet, ed è ciò che mostreremo possibile in generale nelle ultime pagine della Memoria.

g) Daremo termine a queste sommarie osservazioni ricordando come il teorema del n.° 44 preveda fatti analitici ben noti. Nello spazio $\boldsymbol{L}_2$, per esempio, esso ci dà il teorema che se le $u_i(P)$ formano un sistema ortogonale normale, i funzionali unitari (coefficienti di Hilbert-Fourier)

$$A_i(x) = \int_\sigma x(P) u_i(P) d\sigma(P)$$

tendono a zero per $i \to \infty$, per ogni funzione $x(P)$ di $\boldsymbol{L}_2$.

E la stessa cosa vale in $\boldsymbol{L}$, per esempio, per gli integrali

$$\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} u(t) \cos nt\, dt, \qquad \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} u(t) \operatorname{sen} nt\, dt$$

funzionali unitari in $\boldsymbol{L}$, che tendono a zero per ogni funzione sommabile in $0 \vdash\!\dashv 2\pi$.

In $\boldsymbol{C}$ si verifica lo stesso fatto per i funzionali

$$A_i(x) = \frac{x(P_i) - x(Q)}{2}$$

pure unitari, se i P_i tendono a Q; ed è ben chiaro che la convergenza non può avere alcuna sorta di uniformità.

VIII. **Riduzione delle basi.**

49. Se S è uno spazio separabile, avente come base la successione $u_1, u_2, \dots u_n, \dots$ può avvenire che un elemento u_r di essa si possa approssimare mediante combinazioni lineari degli elementi rimanenti, cioè che questi ultimi, insieme con l'origine, determinino già come varietà lineare l'intero spazio S. Se ciò avviene, si potrà sopprimere u_r dalla successione senza che questa perda il suo carattere di base. L'operazione si potrà poi ripetere per un altro elemento rispetto alla nuova base, e così via, conducendo ad eliminare dalla base un qualunque numero *finito* di elementi che vi si rivelassero superflui. Si errerebbe però togliendo in una sola volta *infiniti* elementi, anche se fosse lecito togliere un numero *comunque grande* di essi.

Ecco un esempio semplice. Nello spazio C, relativo all'intervallo $0 \vdash\!\dashv 1$, formano una base le funzioni 1, t, $t^2, \ldots t^n, \ldots$. Di esse, t è approssimabile per mezzo delle rimanenti, mediante la formula:

$$t = \lim_{n \to \infty} [t - t(1-t)^n] = \lim \left(nt^2 - \binom{n}{2} t^3 + \ldots\right)$$

ed è quindi eliminabile; t^2 è esprimibile mediante le potenze residue, essendo, analogamente,

$$t^2 = \lim_{n \to \infty} [t^2 - t^2(1-t)^n] = \lim \left(nt^3 - \binom{n}{2} t^4 + \ldots\right)$$

ed è pure eliminabile; e così via. Ma se si eliminano insieme t, t^2, $t^3, \ldots$ rimane 1, che non è una base di C.

Non è dunque immediata, e presenta quindi un certo interesse la *costruzione di una base* $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots \mathrm{I}_n, \ldots$ *in cui un elemento non sia approssimabile mediante combinazioni lineari degli altri*, e che potremo dire *base ridotta.*

Si vede subito come questo problema sia legato alla esistenza di iperpiani in S; se infatti $I_1, I_2, \ldots I_n, \ldots$ formano una base ridotta, un I_n deve essere fuori della varietà lineare che l'origine determina con gli altri I_r, e con questa varietà deve definire S; quindi la varietà stessa deve essere un iperpiano. Cioè:

Se $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots \mathrm{I}_n, \ldots$ *è una base ridotta, e da essa si toglie* I_n, *gli elementi residui determinano con l'origine un iperpiano, che non contiene* I_n.

50. Per dedurre dalla base $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$, qualsiasi, una base ridotta, si può procedere nel modo seguente. Supposto anzitutto, come è lecito, che gli u_i siano linearmente indipendenti, determiniamo una f. a. c. $A_1(x)$ tale che $A_1(u_1) \neq 0$, e poniamo:

$$u_1^{(1)} = u_1, \quad u_n^{(1)} = u_n - \frac{A_1(u_n)}{A_1(u_1)} u_1 \quad \text{per} \quad n > 1.$$

Gli $u_n^{(1)}$ non saranno nulli; si determini allora una f. a. c. $A_1(x)$ tale che $A_2(u_2^{(1)}) \neq 0$, e si ponga

$$u_1^{(2)} = u_1^{(1)}, \quad u_2^{(2)} = u_2^{(1)}, \quad u_n^{(2)} = u_n^{(1)} - \frac{A_2(u_n^{(1)})}{A_2(u_2^{(1)})} u_2^{(1)} \quad \text{per} \quad n > 2;$$

e così si proceda senza fine. *Posto allora*

$$u_n^{(n)} = I_n$$

la successione $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots \mathrm{I}_n, \ldots$ *sarà una base ridotta.*

Per dimostrare che le I_r formano una base, si osservi che ogni combinazione lineare delle $u_1, u_2, \ldots u_n$ è, in virtù delle formule precedenti, combinazione lineare delle $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \ldots u_n^{(1)}$, quindi delle $u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots u_n^{(2)}$, ecc., e finalmente delle $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \ldots u_n^{(n)}$ che coincidono con le $I_1, I_2, \ldots I_n$. E vale anche la considerazione inversa.

Proviamo ora che con una opportuna combinazione lineare della $A_n(x)$ è possibile trovare una f. a. c. $B_n(x)$ che si annulli per $x = I_r$, con $r \neq n$ e non per $x = I_n$. Premettiamo l'osservazione che è identicamente, per $n > 1$,

$$A_1(u_n^{(1)}) = 0 \quad \text{quindi} \quad A_1(u_n^{(2)}) = 0, \quad A_1(u_n^{(3)}) = 0, \ldots$$

e in particolare

$$A_1(I_n) = 0 \text{ per } n > 1.$$

Analogamente:

$$A_2(I_n) = 0 \text{ per } n > 2, \quad A_3(I_n) = 0 \text{ per } n > 3,$$

e così via.

Se poniamo allora

$$B_n(x) = A_n(x) + \sum_1^{n-1} \lambda_r A_r(x)$$

e cerchiamo di soddisfare alle condizioni

$$B_n(I_r) = 0 \quad \text{per} \quad r \neq n$$

vediamo che queste sono identicamente soddisfatte per $r > n$, mentre per $r = 1, 2, \ldots n$ danno luogo ad $n - 1$ equazioni lineari nelle λ_r da cui è evidentemente possibile ricavarle una dopo l'altra, nell'ordine $\lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}, \ldots \lambda_2, \lambda_1$.

Si ha d'altra parte $B_n(I_n) = A_n(I_n) \neq 0$. Esiste dunque un iperpiano

$$B_n(x) = 0$$

che contiene l'origine e i punti I_r, ad eccezione di I_n. La base trovata è dunque ridotta.

Il procedimento svolto andrebbe precisato con la effettiva indicazione delle f. a. c. $A(x)$; ciò non offre difficoltà.

51. Notiamo due modi di determinare le $A_n(x)$ che possono essere particolarmente vantaggiosi:

a) Per ognuno degli $u_n^{(n-1)} = I_n$ si può assumere per $A_n(x)$ una f. a. c. unitaria tale che

$$A_n(u_n^{(n-1)}) = \operatorname{mod} u_n^{(n-1)} \quad (\text{n.° } 36),$$

sicchè, ridotti gli I_n unitari mediante convenienti fattori, si avrà allora

$$\operatorname{mod} I_n = 1, \quad \operatorname{Nor} A_n = 1, \quad A_n(I_n) = 1, \quad A_n(I_r) = 0 \quad \text{per} \quad r > n.$$

b) Supposte note $A_1, A_2, \ldots A_n$ e quindi costruita la successione $u_r^{(n-1)}$, consideriamo la varietà lineare U_{n-1} definita dall'origine e da $u_1^{(n-1)}, u_2^{(n-1)}, \ldots u_{n-1}^{(n-1)}$ (ossia da $I_1, I_2, \ldots I_{n-1}$) che coincide con quella definita dall'origine e da $u_1, u_2, \ldots u_n$. Essa non contiene $u_n^{(n-1)} = I_n$ e quindi esiste (n.° 37) una f. a. c. $A_n(x)$ tale che

$$|A_n(x)| \leq (x, U_{n-1}), \quad A_n(I_n) = (I_n, U_{n-1})$$

con la quale proseguiremo le operazioni.

È chiaro che sarà

$$A_n(I_1) = A_n(I_2) = \ldots = A_n(I_n) = 0$$

ed anche, dal n.° precedente,

$$A_n(I_{n+1}) = A_n(I_{n+2}) = \ldots = 0.$$

Si determinano così senz'altro gli iperpiani passanti per l'origine, che contengono tutti gli I_r meno uno; essi sono

$$A_1(x) = 0, \; A_2(x) = 0, \ldots A_n(x) = 0, \ldots.$$

Le proprietà di queste basi ridotte $I_1, I_2, \ldots I_n, \ldots$ si possono così compendiare: *esiste una successione di f. a. c. unitarie* $A_n(x)$ *tali che*

$$A_n(I_r) = 0, \; r \neq n; \quad A_n(I_n) = (I_n, U_{n-1})$$

essendo U_{n-1} *la varietà lineare definita dall'origine e da* $I_1, I_2, \ldots I_{n-1}$.

Lasciamo al lettore la facile interpretazione geometrica del risultato, che ha molta analogia con quello ottenuto da Schmidt per lo spazio L_2. Una perfetta analogia richiederebbe $A_n(I_n) = \operatorname{mod} I_n$, ciò che non sembra però facile a conseguire.

52. La riduzione della base permette di stabilire i semplici risultati seguenti:

a) *Se la serie*

$$c_1 I_1 + c_2 I_2 + \ldots + c_n I_n + \ldots$$

rappresenta l'elemento nullo, tutti i c_i *sono nulli.*

Se fosse infatti $c_r \neq 0$, si ricaverebbe per I_r un'espressione lineare in funzione di $I_1, I_2, \ldots I_{r-1}, I_{r+1}, \ldots$, contro l'ipotesi.

b) Segne l'unicità dello sviluppo, ammesso possibile, di un elemento x in serie di elementi I_r.

c) *Uno spazio vettoriale separabile a infinite dimensioni, completo, contiene elementi che non sono combinazioni lineari di un numero finito di elementi della base* (cfr. n.° 44).

Dalla base data u_1, u_2,... u_n,... si deduca la base ridotta I_1, I_2,... I_n,...; ogni combinazione lineare di un numero finito di elementi della prima base è anche combinazione lineare di un numero finito di elementi della seconda, e viceversa. Siano ε_1, ε_2,... ε_n,... numeri positivi tali che la serie $\Sigma\, \varepsilon_r \bmod I_r$ sia convergente; segue facilmente ([62]) che la serie $\Sigma\, \varepsilon_r I_r$ è pure convergente e rappresenta, per la supposta completezza, un elemento x. Esso non è combinazione lineare di un numero finito di elementi della base perchè da

$$\sum_1^\infty \varepsilon_n I_n = \sum_1^N \varepsilon'_n I_n$$

segue, per *b*), $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+2} = \ldots = 0$ contro l'ipotesi.

53. Vogliamo infine notare una trasformazione della base che estende il tipo di approssimazione che va sotto il nome di TCHEBITSCHEFF, e che potrebbe avere qualche interesse. Data la base u_1, u_2,... u_n,... ridotta agli elementi linearmente indipendenti, si sa (n.° 2) che le distanze di u_n dalle combinazioni lineari di u_1, u_2,... u_{n-1} (varietà U_{n-1}) ammettono un minimo; sia $\sum_1^{n-1} a_r^{(n-1)} u_r$ una delle combinazioni che danno il minimo, per es. quella corrispondente ai valori minimi dei coefficienti, e

$$J_n = u_n - \sum_1^{n-1} a_r^{(n-1)} u_r .$$

Sarà allora

$$(u_n,\ U_{n-1}) = \bmod J_n .$$

È chiaro che le J_n formano una base, che la varietà U_{n-1} è anche quella delle combinazioni lineari delle J_1, J_2,... J_{n-1} e che è

$$(J_n,\ U_{n-1}) = (u_n,\ U_{n-1})$$

poichè la retta $J_n u_n$ è parallela alla U_{n-1}. Ridotti gli J_n unitari, si ha dunque *una base* j_1, j_2,... j_n,... *tale che*

$$\bmod j_n = 1, \quad (j_n,\ U_{n-1}) = 1$$

essendo U_{n-1} *la varietà definita da* j_1, j_2,... j_{n-1}.

Dal n.° 37 segue allora l'esistenza dei funzionali unitari $A_n(x)$ tali che

$$|A_n(x)| \leq (x,\ U_{n-1}), \quad A_n(j_n) = 1$$

([62]) Per queste e simili ovvie estensioni di teoremi noti sui limiti e sulle serie cfr. BANACH, l. c., § 2.

da cui anche

$$A_n(j_1) = A_n(j_2) = \dots = A_n(j_{n-1}) = 0.$$

Non siamo riusciti a decidere se una siffatta base sia in generale ridotta, come indicherebbero due casi particolari: *a*) quello dello spazio $\boldsymbol{C}$ dove dalla base 1, t, $t^2, \dots$ in $-1 \vdash\!\!\dashv 1$ si deduce la successione di TCHEBITSCHEFF, $j_n(t) = \cos(n \arccos t)$; *b*) quello dello spazio $\boldsymbol{L}_2$ ove il procedimento si riduce ancora a quello di ortogonalizzazione di SCHMIDT.

IX. **Spazio duale topologico. Approssimazione delle funzioni additive continue.**

54. Nel n.° 19 si è definito e brevemente studiato uno spazio vettoriale Σ che si può dedurre da ogni spazio lineare metrico S dotato di iperpiani e che abbiamo detto spazio *duale metrico* di S. Esso esisterà in particolare se S è separabile; ma potrà avvenire che esso non sia separabile.

Nelle applicazioni il criterio di vicinanza stabilito dalla metrica di Σ può essere troppo rigido; per es. per lo spazio $\boldsymbol{C}$ i funzionali $x(P_1)$, $x(P_2)$ hanno distanza 2 (tale è la norma di $x(P_1) - x(P_2)$) qualunque sia la posizione di P_1 e P_2; mentre sarebbe lecito domandarsi che la loro distanza tendesse a zero al tendere di P_1 a P_2. La cosa si spiega pensando che la tendenza al limite di certe f. a. c. $A_n(x)$ verso un limite $A(x)$ in Σ, non esprime soltanto che per ogni x si ha

$$\lim A_n(x) = A(x)$$

ma anche che tale convergenza avviene *uniformemente per tutti gli elementi* x *unitari* (63).

Se come definizione di limite prendiamo la relazione

$$\lim A_n(x) = A(x)$$

da valere per ogni x, senz'altra condizione (convergenza *puntuale*), e rinunziamo a porre per le f. a. c. un concetto di distanza, le f. a. c. di uno spazio S ci forniscono uno spazio lineare Σ' che non può dirsi metrico, ma soltanto *topologico*. Si vede facilmente che quando S ha un numero finito di dimensioni Σ' coincide con Σ. Nel caso contrario, se S è separabile, Σ' è certamente

(63) Si ha infatti per un x unitario $|A(x) - A_n(x)| \leq \mathrm{Nor}(A - A_n)$ che tende a 0 per ipotesi. Viceversa se $A_n(x)$ tende uniformemente ad $A(x)$ per ogni x unitario, tende a zero per $n \to \infty$ il limite superiore di $|A(x) - A_n(x)|$ per gli x unitari, cioè la norma di $A - A_n$.

diverso da Σ; esistono infatti (n.° 44) successioni di f. a. c. che tendono a zero per ogni x, e quindi come elementi di Σ', mentre non tendono a zero in Σ, avendo tutte norma unitaria.

Non sembra che lo spazio duale topologico Σ' sia stato sinora considerato, neppure in casi particolari; nè intendiamo addentrarci noi qui in tale studio che sarebbe senza dubbio di un certo interesse. Noteremo soltanto una proprietà semplice di Σ': *se* S *è separabile, anche* Σ' *è separabile; in altre parole, ogni f. a. c.* A(x) *di* S *è approssimabile puntualmente mediante combinazioni lineari di una certa successione* $\mathrm{B_n(x)}$ *di f. a. c.*

Questa proprietà è solo un caso particolare di un teorema analogo relativo agli iperpiani radenti a un corpo convesso di S, che ora ci proponiamo di dimostrare.

55. Lemma 1° — *Se le condizioni lineari* $\mathrm{A_n(x)} \leq 1$ *definiscono nello spazio lineare metrico* S *un corpo convesso* Γ, *e se* $\mathrm{B(x)} = 1$ *è l'equazione di un iperpiano radente a* Γ, *sarà*

$$B(x) \leq \limsup A_n(x) \quad (^{64}).$$

Notiamo anzitutto che in un punto x_0 interno a Γ sarà, per ogni n, $A_n(x_0) < 1$; chè se fosse per es. $A_{\nu}(x_0) = 1$, in un intorno comunque piccolo di x_0 esisterebbero punti x per i quali sarebbe $A_{\nu}(x) > 1$, e che quindi non apparterrebbero a Γ.

Sia ora $\limsup A_n(x) = c > 0$, da cui $\limsup A_n\left(\frac{x}{c}\right) = 1$, e cioé, per ogni n, $A_n\left(\frac{x}{c}\right) \leq 1$. Il punto $\frac{x}{c}$ appartiene allora a Γ, ed è quindi $B\left(\frac{x}{c}\right) \leq 1$, $B(x) \leq c$.

Sia, in secondo luogo $\limsup A_n(x) = 0$; sarà, per ogni $\lambda > 0$, $\limsup A_n(\lambda x) = 0$. Ne segue $A_n(\lambda x) \leq 0 < 1$, onde λx appartiene a Γ. Perciò $B(\lambda x) \leq 1$, $B(x) \leq 1/\lambda$, e per l'arbitrarietà di λ, $B(x) \leq 0$.

---

(64) È facile dimostrare che se l'origine è interna al corpo, lim. sup. $A_n(x)$ è finito. Detta infatti δ la distanza dell'origine dal contorno essa non supera la distanza dell'origine da uno degli iperpiani $A_n(x) = 1$, cioè $1/\mathrm{Nor}\, A$. Segue $\mathrm{Nor}\, A \leq 1/\delta$, e $A_n(x) \leq \mathrm{mod}\, x/\delta$. Si dimostra pure facilmente che $\varphi(x) = \limsup A_n(x)$ è una funzione (M) e che la condizione $\varphi(x) \leq 1$ determina precisamente Γ. Il teorema del testo dice in sostanza che $\varphi(x) = \limsup B(x)$ dove $B(x)$ è una qualunque delle f. a. c. tali che $B(x) = 1$ è radente a Γ. Si ha così per ogni corpo convesso una rappresentazione « canonica » che coincide con quella del n.° 9 per i corpi limitati, ma può differirne per quelli illimitati. Per la prima infatti $\varphi(x)$ può essere negativa in punto ove la seconda le darebbe il valore 0. Si potrebbe vedere che la funzione (M) canonica è la minima tra quelle che rappresentano un dato corpo.

Sia finalmente $\limsup A_n(x) = c < 0$, da cui $\liminf A_n\left(\frac{x}{c}\right) = 1$, ossia, per ogni n, $A_n\left(\frac{x}{c}\right) \geq 1$. Si ponga $\frac{x}{c} = y$, e si dica z un punto qualunque interno a Γ, nel quale quindi è $A_n(z) < 1$. Considerata la semiretta yz, cioè i punti

$$x = y + t(z - y) \quad \text{per} \quad t > 0$$

su essa la $A_n(x)$ è funzione lineare di t, decrescente perchè $A_n(x) < A_n(y)$. Segue che per $t > 1$, cioè per i punti che seguono z sulla semiretta, sarà $A_n(x) < A_n(z) < 1$, sicchè questi punti saranno interni. Si consideri ora la $B(x)$ sulla stessa semiretta: per $t > 1$ sarà $B(x) < 1$, quindi la $B(x)$ sarà funzione costante o decrescente di t. Sarà dunque $B(y) \geq B(z)$. Ora, essendo $B(x) = 1$ l'equazione di un iperpiano radente, al variare di z in Γ il limite superiore di $B(z)$ è 1; è dunque

$$B(y) \geq 1, \quad B\left(\frac{x}{c}\right) \geq 1, \quad B(x) \leq c.$$

Il lemma è così dimostrato in tutti i casi. Si osservi che mutando x in $-x$ se ne ricava anche

$$B(x) \geq \liminf A_n(x).$$

Lemma 2° — *Sia* (F) *un aggregato di forme lineari*

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r) = \sum_1^r a_i \lambda_i$$

nelle r *variabili* $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r$ *e*

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r) = \sum_1^r b_i \lambda_i$$

un altra forma lineare nelle stesse variabili. Se è sempre

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r) \leq \limsup f(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r)$$

si potrà approssimare g *mediante combinazioni lineari di un numero finito di forme di* (F) *(anzi di non più di* r + 1 *di esse) a coefficienti positivi la cui somma sia* 1.

L'approssimazione potrà essere valutata mediante il massimo modulo della differenza tra i coefficienti corrispondenti, o in altro modo equivalente.

L'ipotesi del lemma può anche enunciarsi nel modo seguente: se la forma lineare $\Sigma \lambda_i x_i$ nelle variabili x_i assume valori $< k$ per $x_i = a_i$, per tutte le forme di (F), essa assume valori $< k$ anche per $x_i = b_i$; e ciò per qualunque valore di k. Od anche, considerando le x_i come coordinate del punto generico di uno spazio euclideo S_r: se l'iperpiano

$$\Sigma \lambda_i x_i = k$$

lascia da una stessa parte i punti $P \equiv (a_i)$, lascia anche dalla stessa parte il punto $Q \equiv (b_i)$. Risulta allora subito (65) che Q *appartiene al minimo aggregato convesso che contiene i punti* P, *od è un punto di accumulazione di detto aggregato.*

Nel primo caso, un teorema di Steinitz (66) dimostra che Q è baricentro di non più di $r+1$ tra i punti P con masse positive, ossia che esistono $l \leq r+1$ numeri positivi $c_1, c_2, \dots c_l$ aventi somma $=1$ e l punti P, $P^{(h)} = (a_i^{(h)})$ tali che

$$b_i = c_1 a_i^{(1)} + c_2 a_i^{(2)} + \dots + c_l a_i^{(l)} \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \dots r.$$

Ed è allora, dette $f^{(h)}$ le corrispondenti forme $\Sigma a_i^{(h)} \lambda_i$:

$$g = c_1 f^{(1)} + c_2 f^{(2)} + \dots + c_l f^{(l)}.$$

Nel secondo caso, Q sarà approssimabile mediante siffatti baricentri ossia g approssimabile, nel modo indicato, mediante le corrispondenti combinazioni lineari delle f.

In condizioni particolari, per es. se (F) è costituito da un numero finito di forme, o è chiuso, si potrà limitarsi alla prima eventualità, con che il teorema risulterà notevolmente precisato.

56. Sia Γ un corpo convesso dello spazio separabile S, distinto da S, contenente l'origine. Sappiamo (n.° 43) che esso si può considerare come intersezione di un'infinità numerabile di semispazi, sicchè l'appartenenza di un punto x di S a Γ si può caratterizzare mediante condizioni lineari del tipo

$$A_n(x) \leq 1, \qquad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Sia $B(x) = 1$ l'equazione di un iperpiano radente a Γ; sarà, per il lemma 1°

$$(a) \qquad B(x) \leq \lim\sup A_n(x).$$

Sia ora $u_1, u_2, \dots u_n, \dots$ una base di S, formata di elementi linearmente

(65) Per le proprietà dei minimi aggregati convessi che contengono un aggregato dato cfr. Carathéodory, *Ueber den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen* (« Math. Annalen », XXXII, 2° sem., 1911, Kap. I), ove si trova il caso degli aggregati chiusi; Steinitz, *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme*, « Crelle's Journal », B. 143, 128-175, per il caso generale; per il teorema qui applicato, Steinitz, § 11, teor. 1.

(66) Steinitz, l. c., § 10, teor. 4.

indipendenti, e U_r la varietà lineare definita dall'origine e da $u_1, u_2, \ldots u_r$ e avente quindi per elemento generico

$$x = \sum_1^r \lambda_i u_i .$$

In U_r la (a) si scriverà:

$$\sum_1^r \lambda_i B(u_i) \leq \limsup \sum_1^r \lambda_i A_n(u_i);$$

sarà quindi applicabile il lemma 2° alle forme $\Sigma \lambda_i B(u_i)$, $\Sigma \lambda_i A_n(u_i)$ e quindi in U_r la $B(x)$ sarà esprimibile nella forma

$$(b) \qquad B(x) = \sum_1^{r+1} c_i A_{n_i}(x) + \rho(x), \quad c_i > 0, \quad \Sigma c_i = 1,$$

dove $\rho(x)$, per un dato x, può supporsi piccolo a piacere, e d'altra parte, per x variabile, si dimostra facilmente essere della forma $\sigma(x) \bmod x$ dove $\sigma(x)$ è limitata (sicchè l'approssimazione è uniforme sulla sfera unitaria).

Se x è invece un punto qualunque di S, esiste (n.° 2) qualche punto y in U_r tale che $(x, y) = (x, U_r)$ e quindi

$$x = y + (x, U_r) \cdot e$$

dove e ha modulo unitario. All'elemento $y = x - (x, U_r) \cdot e$ può allora applicarsi la (b); si ottiene

$$B(x) - (x, U_n) B(e) = \Sigma c_i A_{n_i}(x) - (x, U_r) \Sigma c_i A_{n_i}(e) + \rho(y)$$

ossia:

$$B(x) = \Sigma c_i A_{n_i}(x) + (x, U_r)[B(e) + \Sigma c_i A_{n_i}(e)] + \rho(y).$$

Ora, se δ è la minima distanza dell'origine dal contorno di Γ si ha subito $\mathrm{Nor}\, A \leq 1/\delta$, $\mathrm{Nor}\, B \leq 1/\delta$ (cfr. nota ([64])), onde è:

$$\mathrm{mod}\,(B(e) + \Sigma c_i A_{n_i}(e)) \leq \mathrm{Nor}\, B + \Sigma c_i \,\mathrm{Nor}\, A_i \leq \frac{1}{\delta} + \frac{\Sigma c_i}{\delta} = \frac{2}{\delta}$$

e si conclude perciò

$$B(x) = \Sigma c_i A_{n_i}(x) + R(x)$$

dove

$$| R(x) | \leq \frac{2}{\delta} (x, U_r) + \rho(y).$$

Se si nota che (x, U_r) tende a zero per $r \to \infty$, perchè x è approssimabile mediante combinazioni lineari delle u_i, e che per un dato r, cioè per un dato y, $\rho(y)$ può supporsi comunque piccolo, si conclude che $R(x)$ può supporsi pure piccolo a piacere. Si ha così il teorema generale:

Se Γ *è un corpo convesso dello spazio separabile* S, *contenente l'origine, esiste una successione numerabile* $A_n(x)$ *di f. a. c. tale che essendo* $B(x) = 1$ *l'equazione di un iperpiano radente ad* S, $B(x)$ *si può approssimare puntualmente mediante combinazioni lineari di un numero finito delle* $A_n(x)$, *a coefficienti positivi, la cui somma è* 1.

La dimostrazione dice di più che si può ottenere un'espressione approssimata di $B(x)$ mediante non più di $r + 1$ funzioni A_n, con un errore $< 2\omega_r/\delta + \varepsilon$ essendo ω_r la migliore approssimazione di x mediante combinazioni lineari di r elementi dati $u_1, u_2, \ldots u_r$ ed ε comunque piccolo.

57. Fra le applicazioni di questo teorema indicheremo solo le due più notevoli che si ottengono assumendo come corpo Γ la sfera unitaria o un cilindro rotondo di raggio 1 avente per asse una varietà lineare V uscente dall'origine.

a) Nel primo caso $B(x)$ è una qualunque f. a. c. unitaria, giacchè per una tale funzione l'iperpiano $B(x) = 1$ è radente alla sfera unitaria. Se poi $B(x)$ non è unitaria, tale è $B(x)/\mathrm{Nor}\,B$; si ha dunque:

Nello spazio separabile S *esiste una successione di f. a. c. unitarie* $A_n(x)$ *tale che una qualunque f. a. c.* $B(x)$ *si può approssimare puntualmente mediante combinazioni lineari di un numero finito delle* $A_n(x)$ *con coefficienti positivi la cui somma è* Nor B.

Questo risultato dimostra la separabilità dello spazio duale topologico, affermata nel n.° 54, e le apporta un complemento abbastanza preciso. Si ricordi che le $A_n(x)$ possono essere un qualunque sistema di f. a. c. tali che da $A_n(x) \leq 1$ segua $\mathrm{mod}\, x \leq 1$; e che essendo qui $\delta = 1$, l'errore della rappresentazione mediante $r + 1$ termini può ridursi minore di $2\omega_r + \varepsilon$, col solito significato dei simboli.

b) Nel secondo caso si possono assumere le $A_n(x)$ in modo che gli iperpiani $A_n(x) = 1$ siano radenti al cilindro Γ (n.° 43); sappiamo allora (n.° 12) che gli iperpiani $A_n(x) = 0$ passeranno per l'asse V. Egualmente passerà per V l'iperpiano $B(x) = 0$; e le A_n e la B saranno tutte funzioni unitarie. Come in *a*) risulterà allora:

Data in S *una varietà lineare* V *passante per l'origine, si può trovare una successione di f. a. c. unitarie che si annullano su* V *tali che ogni f. a. c.* $B(x)$ *che si annulla su* V *si può approssimare puntualmente mediante combinazioni lineari di un numero finito delle* $A_n(x)$, *a coefficienti positivi la cui somma vale* Nor B.

58. Volendo scendere ad applicazioni più particolari, cioè a spazi lineari determinati, si potranno avere numerosissimi enunciati, più o meno interessanti, sui quali non intendiamo qui dilungarci. A titolo di esempio presentiamo soltanto alcune osservazioni relative allo spazio C delle funzioni continue nel dominio limitato σ di un S_ν.

a) Costituiscono un possibile sistema di funzionali $A_n(x)$ in C i funzionali

$$A_n'(x) = x(P_n), \quad A''(x) = - x(P_n)$$

dove i P_n formano un aggregato di punti di σ, ovunque denso (n.° 48, *f*)). Ne risulta che un funzionale lineare $B(x)$ in C è approssimabile mediante espressioni del tipo $\Sigma\, c_i x(P_{n_i})$, con $\Sigma \mid c_i \mid = \mathrm{Nor}\, B$, forma nella quale si intravede già la struttura dell'integrale di STIELTJES (cfr. n.° 30).

Assumendo invece per gli $A_n(x)$ le espressioni

$$A_n'(x) = \frac{1}{\mathrm{mis}\, \sigma_n} \int_{\sigma_n} x(P) d\sigma(P) \quad \text{e} \quad A_n''(x) = - A_n'(x)$$

dove i campi σ_n soddisfano alla condizione indicata al n.° 48, *f*), si ha per $B(x)$ l'espressiene approssimata

$$\Sigma \frac{c_i}{\mathrm{mis}\, \sigma_{n_i}} \int_{\sigma_{n_i}} x(P) d\sigma(P) = \int_\sigma x(P) \varphi(P) d\sigma(P)$$

dove $\varphi(P)$ risulta dotata di un numero finito di valori; precisamente è possibile dividere σ in un numero finito di domini, in ciascuno dei quali $\varphi(P)$ ha valore costante. E si ha:

$$\int_\sigma \mid \varphi(P) \mid d\sigma(P) = \mathrm{Nor}\, B.$$

Si riconosce qui un'espressione simile a quella data da un noto teorema di HADAMARD e a questa facilmente riducibile.

b) Considerato in C il cono $\mathcal{S}_1$ delle funzioni aventi il massimo ≤ 1 (n.° 30, α), γ)) per esso un sistema di funzionali $A_n(x)$ è dato dalle sole espressioni $A_n'(x)$. D'altra parte gli iperpiani radenti a $\mathcal{S}_1$ sono dati da $B(x) = 1$, dove $B(x)$ è unitario e di tipo positivo; onde vediamo che un qualunque funzionale lineare di tipo positivo si può approssimare mediante espressioni del tipo seguente:

$$\Sigma\, c_i x(P_{n_i}), \quad \int x(P) \varphi(P) d\sigma(P)$$

dove i c_i e ia $\varphi(P)$ sono positivi, e si ha

$$\Sigma c_i = \int \varphi(P) d\sigma(P) = \mathrm{Nor}\, B.$$

c) Considerata in C la varietà $C^{(a)}$ delle funzioni armoniche, che è a sua volta uno spazio lineare separabile (n.° 31, g)), per esso si possono assumere (n.° 48, f)) come funzionali $A_n(x)$ i valori $x(P_n)$ dove però ora i P_n sono punti del contorno di σ formanti su di esso un aggregato ovunque denso. Onde vale in $C^{(a)}$ il primo enunciato dato per C, con questa modificazione.

Per i funzionali di tipo positivo si ha pure il risultato analogo a quello ottenuto in C; esso può dedursi dalla considerazione del cono $\mathfrak{F}_1^{(a)}$ delle funzioni dl $C^{(a)}$ aventi massimo ≤ 1. In particolare, se Q è un punto interno a σ, $x(Q)$, funzionale unitario di tipo positivo, si potrà approssimare mediante espressioni del tipo $\Sigma c_i x(P_{n_i})$, dove i P_{n_i} sono punti del contorno e i c_i sono positivi e di somma 1. Ciò può esprimersi dicendo che *il valore che una qualunque funzione armonica in σ assume in un punto interno Q si può approssimare mediante medie ponderate di valori assunti dalla funzione in punti del contorno, con pesi positivi;* i punti e i coefficienti essendo, ben inteso, indipendenti dalla particolare funzione armonica considerata.

NOTA

Ho già segnalato alla fine della 1ª Memoria i lavori di E. Helly (1921) e H. Hahn (1927), sfuggiti prima alla mia attenzione, in cui vengono trovati per altra via alcuni dei risultati più importanti delle mie ricerche. Debbo qui aggiungere alla lista il seguente scritto, che presenta con esse coincidenze ancora più estese:

Banach (S.), *Sur les fonctionnelles linéaires* (« Studia Mathematica » [Lwow], I, 1929), pag. 211-216 e 223-239.

Nella prima parte sono dati i teoremi fondamentati sulle varietà lineari, con metodo assai simile a quello di Hahn (cfr., per la restituzione di priorità, nei medesimi *Studia*, il vol. II, pag. 247). Nella seconda parte, § 2, si ha, in forma puramente analitica, il nostro teorema sull'iperpiano radente a un corpo convesso; nel § 3 si studia, col nome di convergenza *debole*, la convergenza da noi detta *topologica* o *puntuale* delle f. a. c., e la separabilità dello spazio duale topologico di uno spazio separabile. Anche il § 1 tratta questioni inerenti allo spazio duale. (G. A.)

Condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni (*).

Memoria 1ª di SILVIO CINQUINI (a Pisa).

Sunto. - *Il presente lavoro contiene le condizioni necessarie per la semicontinuità, su una qualunque superficie definita da una funzione* $z = z(x, y)$ *assolutamente continua (nel senso del prof.* TONELLI), *degli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni.*

In una recente Memoria *Sur la semi-continuité des intégrales doubles du calcul des variations* (1) il prof. L. TONELLI ha stabilito le condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali doppi del calcolo delle variazioni.

Seguendo un Suo prezioso consiglio, del quale Gli sono profondamente grato, mi sono proposto di trovare le condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali stessi, attenendomi al metodo seguito dal prof. TONELLI, nel suo trattato *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, per stabilire le condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali curvilinei (2).

Nel presente lavoro mi occupo della semicontinuità degli integrali doppi

$$I_D[z] = \iint_D f(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y))dx\,dy$$

in tutto il campo di definizione della funzione $f(x, y, z, p, q)$ e relativamente alla classe delle funzioni $z = z(x, y)$ assolutamente continue (nel senso del prof. TONELLI).

In altro lavoro, che spero di poter prossimamente pubblicare, tratterò invece della semicontinuità degli integrali stessi su una data superficie definita da una funzione $z = z_0(x, y)$ della stessa classe.

1. **Generalità** (3). — Supposte note le definizioni di *campo aperto limitato* e di *funzione di due variabili assolutamente continua* (nel senso del prof.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa nell'anno accademico 1930-31.

(1) L. TONELLI, *Sur la semi-continuité des intégrales doubles du calcul des variations*, « Acta Mathematica », T. 53 (1929), pagg. 325-346.

(2) L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, due volumi, Zanichelli, Bologna, In particolare vol. I; Cap. VI, § 1 e Cap. X, § 1.

(3) Luogo citato in (1), n.i 1-4.

TONELLI) e supposta la funzione $f(x, y, z, p, q)$ finita e continua in ogni punto (x, y) di un campo aperto limitato D e per tutti i valori finiti di z, p, q, si considera la classe $\mathfrak{C}$ delle funzioni $z(x, y)$ definite e assolutamente continue in D e tali che esista finito l'integrale doppio

$$I_D[z] = \iint_D f(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y))dx\,dy.$$

L'integrale $I_D[z]$ dicesi *semicontinuo inferiormente*, se, essendo data una funzione qualunque $z_0(x, y)$ della classe $\mathfrak{C}$, si può far corrispondere a ogni $\varepsilon > 0$ un $\rho > 0$ tale che sia

$$I_D[z] > I_D[z_0] - \varepsilon$$

per tutte le funzioni della classe $\mathfrak{C}$ soddisfacenti, in tutto D, alla disuguaglianza

$$| z(x, y) - z_0(x, y) | < \rho.$$

Analoga definizione per la *semicontinuità superiore*.

2. **Prima condizione necessaria per la semicontinuità inferiore.** - Dimostro il seguente teorema.

Sia f(x, y, z, p, q) *una funzione finita e continua con le sue derivate parziali* f_p, f_q, f_{pp}, f_{pq}, f_{qq} *in ogni punto di un campo aperto limitato* D *del piano* (x, y) *e per tutti i valori finiti di* z, p, q. *Allora, se l'integrale* $I_D[z]$ *è una funzione semicontinua inferiormente, in tutti i punti del campo* D *e della sua frontiera e per tutti i valori finiti di* z, p, q *deve essere*

$$f_{pp}(x, y, z, p, q)f_{qq}(x, y, z, p, q) - f_{pq}^2(x, y, z, p, q) \geq 0.$$

Supponiamo invece che esista un punto $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ del campo D e una terna di valori $\overline{z}_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0$, per i quali si abbia

$$f_{pp}(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0)f_{qq}(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) - f_{pq}^2(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) < 0.$$

In tal caso è sempre possibile determinare una coppia di numeri u, v, non ambedue nulli, in modo che sia

$$u^2 f_{pp}(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) + 2uv f_{pq}(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) + \\ + v^2 f_{qq}(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) < 0.$$

Inoltre, per la continuità delle f_{pp}, f_{pq}, f_{qq} rispetto alle variabili x, y, z, p, q, considerato un numero $\zeta > 0$, comunque scelto, purchè soddisfacente alla disuguaglianza

$$u^2 f_{pp}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) + 2uv f_{pq}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) + \\ + v^2 f_{qq}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) < -\zeta,$$

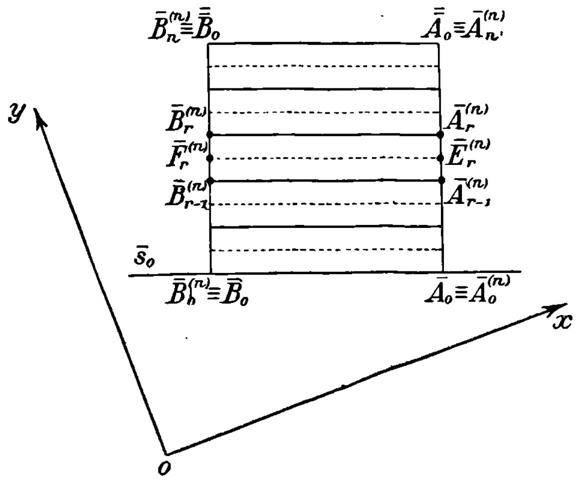
è possibile determinare un altro numero $\delta > 0$ in modo che sia

$$(1) \qquad u^2 f_{pp}(x, y, z, p, q) + 2uv f_{pq}(x, y, z, p, q) + v^2 f_{qq}(x, y, z, p, q) < -\zeta$$

ogniqualvolta risultino soddisfatte le disuguaglianze

$$(2) \qquad |x - \bar{x}_0| \leq \delta, \ |y - \bar{y}_0| \leq \delta, \ |z - \bar{z}_0| \leq \delta, \ |p - \bar{p}_0| \leq \delta, \ |q - \bar{q}_0| \leq \delta;$$

δ essendo inoltre tale che i punti (x, y) soddisfacenti alle prime due disuguaglianze appartengano al campo D.



Nel piano (x, y) considerata la retta $\bar{s}_0$, passante per il punto $\bar{A}_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ (proiezione di $A_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$) e definita da

$$u(x - \bar{x}_0) + v(y - \bar{y}_0) = 0,$$

si costruisca un quadrato $Q(\bar{A}_0, \bar{B}_0, \bar{\bar{A}}_0, \bar{B}_0)$, tale che anche il vertice $\bar{B}_0$ sia sulla retta $\bar{s}_0$, e che, indicata con l la lunghezza del suo lato, si abbia

$$(3) \qquad l\sqrt{2} < \delta$$

$$(4) \qquad \{ |\bar{p}_0| + |\bar{q}_0| \} \, l\sqrt{2} < \delta.$$

Per la (3) Q risulta interno al campo D.

Per il punto A_0 si consideri il piano Π_0, definito da

$$z = \bar{z}_0 + \bar{p}_0(x - \bar{x}_0) + \bar{q}_0(y - \bar{y}_0)$$

e in questo si costruisca il parallelogramma P, avente come proiezione ortogonale sul piano (x, y) il quadrato Q. Si assuma P come superficie S_0 definita dalla funzione

$$z = z_0(x, y).$$

In tutti i punti di P per le (3) e (4) sono verificate le prime tre delle (2) ed è inoltre

$$p_0(x, y) = \bar{p}_0; \quad q_0(x, y) = \bar{q}_0.$$

Mediante $n - 1$ rette $s_r^{(n)}$ $(r = 1, 2, \ldots n - 1)$ parallele alla $\bar{s}_0$ si divida il quadrato Q in n rettangoli uguali $Q_r^{(n)}$ $(r = 1, 2, \ldots n)$ e siano $\bar{A}_r^{(n)}, \bar{B}_r^{(n)}$ $(r = 1, 2, \ldots n - 1)$ i punti d'incontro della retta $s_r^{(n)}$ rispettivamente coi lati $\bar{A}_0\bar{\bar{A}}_0$ e $\bar{B}_0\bar{\bar{B}}_0$ del quadrato Q. Si ponga inoltre

$$\bar{A}_0 \equiv \bar{A}_0^{(n)}, \quad \bar{B}_0 \equiv \bar{B}_0^{(n)}; \quad \bar{\bar{A}}_0 \equiv \bar{A}_n^{(n)}, \quad \bar{\bar{B}}_0 \equiv \bar{B}_n^{(n)}.$$

Siano $A_r^{(n)}, B_r^{(n)}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots n)$ i punti del piano Π_0 aventi per proiezione ortogonale sul piano (x, y) rispettivamente $\bar{A}_r^{(n)}, \bar{B}_r^{(n)}$.

Le rette $A_r^{(n)}B_r^{(n)}$ $(r = 1, 2, \ldots n)$ risultano evidentemente parallele alla retta s_0, intersezione del piano Π_0 col piano verticale passante per $\bar{s}_0$; e l'equazione della s_0 è

$$\begin{cases} z = \bar{z}_0 + \bar{p}_0(x - \bar{x}_0) + \bar{q}_0(y - \bar{y}_0) \\ u(x - \bar{x}_0) + v(y - \bar{y}_0) = 0. \end{cases}$$

Si suddivida poi ogni rettangolo $Q_r^{(n)}$ in due rettangoli uguali per mezzo delle rette $t_r^{(n)}$ $(r = 1, 2, \ldots n)$ parallele alla $\bar{s}_0$; e, indicati con $\bar{E}_r^{(n)}, \bar{F}_r^{(n)}$ i punti d'intersezione della $t_r^{(n)}$ rispettivamente con $\bar{A}_0^{(n)}\bar{A}_n^{(n)}, \bar{B}_0^{(n)}\bar{B}_n^{(n)}$, questi rettangoli siano

$$\bar{Q}_r^{(n)}(\bar{A}_{r-1}^{(n)}, \bar{B}_{r-1}^{(n)}, \bar{E}_r^{(n)}, \bar{F}_r^{(n)}); \quad \bar{\bar{Q}}_r^{(n)}(\bar{E}_r^{(n)}, \bar{F}_r^{(n)}, \bar{A}_r^{(n)}, \bar{B}_r^{(n)}).$$

Fissato un numero $\lambda > 0$ tale che

(5) $$|u|\lambda < \delta, \quad |v|\lambda < \delta$$

si consideri il piano $\Omega_0^{(n)}$ passante per la retta $s_0(A_0^{(n)}, B_0^{(n)})$ e definito da

$$z = \bar{z}_0 + (\bar{p}_0 + \lambda u)(x - \bar{x}_0) + (\bar{q}_0 + \lambda v)(y - \bar{y}_0)$$

e per ciascuna delle rette $A_r^{(n)}B_r^{(n)}$ $(r = 1, 2, \ldots n - 1)$ si consideri il piano $\Omega_r^{(n)}$ parallelo a $\Omega_0^{(n)}$.

Indicati con $E_r^{(n)}$, $F_r^{(n)}$ i punti di $\Omega_{r-1}^{(n)}$ aventi per proiezione sul piano (x, y) rispettivamente $\overline{E}_r^{(n)}$, $\overline{F}_r^{(n)}$, anche le rette $E_r^{(n)}F_r^{(n)}$ $(r = 1, 2, \ldots n)$ risultano parallele alla s_0.

Si assuma la superficie costituita dai $2n$ parallelogrammi

$$H_r^{(n)}(A_{r-1}^{(n)}, B_{r-1}^{(n)}, E_r^{(n)}, F_r^{(n)}), \quad K_r^{(n)}(E_r^{(n)}, F_r^{(n)}, A_r^{(n)}, B_r^{(n)}), \quad (r = 1, 2, \ldots n)$$

come superficie S_n definita da

$$z = z_n(x, y).$$

La funzione $z_n(x, y)$ è evidentemente continua in tutto Q (contorno compreso).

Nei punti che appartengono ai parallelogrammi $H_r^{(n)}$ si ha evidentemente

$$p_n(x, y) = \overline{p}_0 + \lambda u, \quad q_n(x, y) = \overline{q}_0 + \lambda v \tag{6}$$

e in quelli che appartengono ai parallelogrammi $K_r^{(n)}$ risulta ([1])

$$p_n(x, y) = \overline{p}_0 - \lambda u, \quad q_n(x, y) = \overline{q}_0 - \lambda v. \tag{7}$$

([1]) Per dimostrare le (7) basta calcolare i coseni direttori dei piani (fra loro paralleli) a cui appartengono i parallelogrammi $K_r^{(n)}$.

Si consideri p. es. il piano Ξ a cui appartiene $K_1^{(n)}$.

Si calcolano innanzi tutto le coordinate dei punti $A_1^{(n)}$ e $E_1^{(n)}$. Il punto $\overline{A}_1^{(n)}$ (proiezione di $A_1^{(n)}$ sul piano (x, y)) appartiene alla retta del piano (x, y) perpendicolare nel punto $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ alla $\overline{s}_0$, e la distanza di $\overline{A}_1^{(n)}$ dal punto $\overline{A}_0^{(n)}$ è $\frac{l}{n}$. Le coordinate (X_A, Y_A) di $\overline{A}_1^{(n)}$ soddisfano quindi alle seguenti relazioni

$$Y_A = \overline{y}_0 + \frac{v}{u}(X_A - \overline{x}_0), \quad \sqrt{(X_A - x_0)^2 + (Y_A - \overline{y}_0)^2} = \frac{l}{n},$$

da cui si ricava

$$X_A = \overline{x}_0 + \frac{l}{n}\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad Y_A = \overline{y}_0 + \frac{l}{n}\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Tenendo presente che il punto $A_1^{(n)}$ appartiene anche al piano Π_0 si ottiene immediatamente la sua terza coordinata

$$Z_A = \overline{z}_0 + \frac{l}{n}\frac{\overline{p}_0 u + \overline{q}_0 v}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

In modo analogo si calcolano le coordinate di $E_1^{(n)}$ ricordando che esso appartiene anche al piano $\Omega_0^{(n)}$

$$X_E = \overline{x}_0 + \frac{l}{2n}\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad Y_E = \overline{y}_0 + \frac{l}{2n}\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad Z_E = \overline{z}_0 + \frac{l}{2n}\frac{(\overline{p}_0 + \lambda u)u + (\overline{q}_0 + \lambda v)v}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Il piano Ξ è parallelo alla retta s_0, i cui coseni direttori sono proporzionali ai numeri

$$v, \quad -u, \quad \overline{p}_0 v - \overline{q}_0 u;$$

quindi, per una nota proprietà di Geometria analitica, i coseni direttori del piano Ξ sono

Dalle (5), (6), (7) risulta in tutti i punti di Q (eccezione fatta per l'insieme di misura (superficiale) nulla costituito dai punti appartenenti ai $2n-1$ segmenti $\overline{E}_r^{(n)}\overline{F}_r^{(n)}$ $(r=1, 2,\dots n)$; $\overline{A}_r^{(n)}\overline{B}_r^{(n)}$ $(r=1, 2,\dots n-1)$)

$$(8) \qquad |p_n - \overline{p}_0| < \delta, \quad |q_n - \overline{q}_0| < \delta.$$

La funzione $z_n(x, y)$ è assolutamente continua in tutto il quadrato Q avendo per le (6) e (7) le derivate parziali del primo ordine (o, ove queste mancano, le derivate parziali destre e sinistre) limitate.

Facendo ora variare il numero n si ha una successione di superficie S_n definite da

$$z = z_n(x, y) \qquad (n = 1, 2,\dots)$$

che per $n \to \infty$ convergono uniformemente alla S_0 in tutto Q [5].

---

proporzionali ai minori della matrice

$$\left\{ \begin{matrix} X_A - X_E & Y_A - Y_E & Z_A - Z_E \\ v & -u & \overline{p}_0 v - \overline{q}_0 u \end{matrix} \right.$$

cioè, sostituendo e facendo le opportune semplificazioni, ai numeri

$$\overline{p}_0 - \lambda u, \quad \overline{q}_0 - \lambda v, \quad -1;$$

e ciò basta per provare le (7).

[5] Per provare tale proprietà si calcoli il massimo modulo in tutto Q della differenza

$$z_n(x, y) - z_0(x, y).$$

A tal uopo si osservi che il modulo di tale differenza raggiunge il suo massimo in tutti i punti appartenenti ai segmenti chiusi $\overline{E}_r^{(n)}\ \overline{F}_r^{(n)}$ $(r = 1, 2,\dots n)$.

Si consideri allora p. es. il punto $\overline{E}_1^{(n)}$: per quanto si è visto nella nota [4], il valore di z_n in tal punto è:

$$Z_E = \overline{z}_0 + \frac{l}{2n} \frac{(\overline{p}_0 + \lambda u)u + (\overline{q}_0 + \lambda v)v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

e il valore di z_0 in tal punto, (valore che si ottiene sostituendo nell'equazione del piano Π_0 ad x e y rispettivamente i valori X_E, Y_E) è:

$$\overline{z}_0 + \frac{l}{2n} \frac{\overline{p}_0 u + \overline{q}_0 v}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Risulta quindi in tutto Q

$$|z_n(x, y) - z_0(x, y)| \leq \frac{\lambda l \sqrt{u^2 + v^2}}{2n}$$

ove λ, l, u, v sono numeri fissi. Perciò scelto ad arbitrio un $\rho > 0$, per ogni

$$n > \frac{\lambda l \sqrt{u^2 + v^2}}{2\rho}$$

risulta in tutto Q

$$|z_n(x, y) - z_0(x, y)| < \rho.$$

Ciò premesso, dimostro che l'integrale $I_Q[z]$ non è semicontinuo inferiormente sulla superficie $z = z_0(x, y)$.

Infatti, considerata la differenza

$$f(x, y, z_n, p_n, q_n) - f(x, y, z_0, p_0, q_0)$$

risulta, ivi essendo $p_0 = \overline{p}_0$, $q_0 = \overline{q}_0$, e applicando poi lo sviluppo accorciato di TAYLOR per le funzioni di più variabili

$$\begin{aligned}
f(x, y, z_n, p_n, q_n) - f(x, y, z_0, p_0, q_0) &= f(x, y, z_n, p_n, q_n) - f(x, y, z_0, p_n, q_n) + \\
&+ f(x, y, z_0, p_n, q_n) - f(x, y, z_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) = f(x, y, z_n, p_n, q_n) - \\
&- f(x, y, z_0, p_n, q_n) + (p_n - \overline{p}_0) f_p(x, y, z_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) + (q_n - \overline{q}_0) f_q(x, y, z_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) + \\
&+ \frac{1}{2} \{ (p_n - \overline{p}_0)^2 f_{pp}(x, y, z_0, \tilde{p}, \tilde{q}) + 2(p_n - \overline{p}_0)(q_n - \overline{q}_0) f_{pq}(x, y, z_0, \tilde{p}, \tilde{q}) + \\
&+ (q_n - \overline{q}_0)^2 f_{qq}(x, y, z_0, \tilde{p}, \tilde{q}) \}
\end{aligned}$$

ove $\tilde{p}$ è compreso fra $\overline{p}_0$ e p_n, $\tilde{q}$ fra $\overline{q}_0$ e q_n.

Quindi

$$\begin{aligned}
(9) \qquad & \iint_Q \{ f(x, y, z_n, p_n, q_n) - f(x, y, z_0, p_0, q_0) \} \, dxdy = \\
&= \iint_Q \{ f(x, y, z_n, p_n, q_n) - f(x, y, z_0, p_n, q_n) \} \, dxdy + \\
&+ \iint_Q \{ (p_n - \overline{p}_0) f_p(x, y, z_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) + (q_n - \overline{q}_0) f_q(x, y, z_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) \} \, dxdy + \\
&+ \frac{1}{2} \iint_Q \{ (p_n - \overline{p}_0)^2 f_{pp}(x, y, z_0, \tilde{p}, \tilde{q}) + 2(p_n - \overline{p}_0)(q_n - \overline{q}_0) f_{pq}(x, y, z_0, \tilde{p}, \tilde{q}) + \\
&+ (q_n - \overline{q}_0)^2 f_{qq}(x, y, z_0, \tilde{p}, \tilde{q}) \} \, dxdy.
\end{aligned}$$

Esamino ora gli integrali che figurano al secondo membro.

Per la continuità della funzione f preso un ε ad arbitrio, siccome z_n, per $n \to \infty$, converge uniformemente a z_0, e p_n e q_n sono in modulo limitati, si può determinare un numero n_0 tale che per ogni $n > n_0$ sia per tutti gli (x, y) di Q

$$| f(x, y, z_n, p_n, q_n) - f(x, y, z_0, p_n, q_n) | < \frac{\varepsilon}{Q};$$

risulta quindi per ogni $n > n_0$

$$\left| \iint_Q \{ f(x, y, z_n, p_n, q_n) - f(x, y, z_0, p_n, q_n) \} \, dxdy \right| < \varepsilon.$$

Avendo già osservato che le funzioni $z_n(x, y)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sono assolutamente continue, tale risulta pure ogni differenza

$$z_n(x, y) - z_0(x, y)$$

e inoltre questa differenza per $n \to \infty$ converge uniformemente in tutto Q verso lo zero.

Preso quindi un $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, e subordinato ad esso un ρ tale che per ogni n maggiore di un certo n_1 sia in tutto Q

$$|z_n(x, y) - z_0(x, y)| < \rho,$$

avendosi inoltre, α essendo un numero maggiore di 1, per le (8)

$$\iint_Q |p_n - \overline{p}_0|^\alpha dxdy \leq \delta^\alpha Q,$$

ed essendo $f(x, y, z_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0)$ limitata in tutto Q per un lemma [6] stabilito dal prof. TONELLI, risulta per ogni $n > n_1$:

$$\left|\iint_Q (p_n - \overline{p}_0) f_p(x, y, z_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) dxdy\right| < \varepsilon.$$

In modo analogo può rendersi per ogni $n > n_2$:

$$\left|\iint_Q (q_n - \overline{q}_0) f_q(x, y, z_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) dxdy\right| < \varepsilon.$$

Si tratta ora di esaminare l'ultimo integrale che figura nel secondo membro della (9). Per le (6) e (7) risulta:

$$\frac{1}{2}\iint_Q \{ (p_n - \overline{p}_0)^2 f_{pp}(x, y, z_0, \tilde{p}, \tilde{q}) + 2(p_n - \overline{p}_0)(q_n - \overline{q}_0) f_{pq}(x, y, z_0, \tilde{p}, \tilde{q}) +$$
$$+ (q_n - \overline{q}_0)^2 f_{qq}(x, y, z_0, \tilde{p}, \tilde{q}) \} dxdy = \frac{1}{2}\lambda^2 \iint_Q [u^2 f_{pp}(x, y, z_0, \tilde{p}, \tilde{q}) +$$
$$+ 2uv f_{pq}(x, y, z_0, \tilde{p}, \tilde{q}) + v^2 f_{qq}(x, y, z_0, \tilde{p}, \tilde{q})] dxdy.$$

---

(6) Luogo citato in (1), n.° 7.

Il lemma, dimostrato dal prof. TONELLI per un quadrato avente i lati paralleli agli assi cartesiani, è valido per un campo racchiuso da una curva C qualunque, purchè incontrata da ogni parallela agli assi coordinati in un numero finito di punti, non escludendosi però che un tratto del contorno possa essere parallelo agli assi coordinati.

In particolare il lemma è applicabile a un quadrato, a un triangolo, qualunque siano le direzioni dei loro lati.

Per le (8) risulta « a fortiori »

$$|\tilde{p} - \overline{p}_0| < \delta, \quad |\tilde{q} - \overline{q}_0| < \delta,$$

e perció, tenute presenti anche le (3) e (4), è applicabile la (1).

Quindi l'espressione precedente risulta minore di

$$-\frac{1}{2}\lambda^2 Q\zeta.$$

Dunque, per ogni $n > \begin{cases} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \end{cases}$, si ha dalla (9)

$$\iint\limits_Q \{ f(x, y, z_n, p_n, q_n) - f(x, y, z_0, p_0, q_0) \} \, dxdy < 3\varepsilon - \frac{1}{2}\lambda^2 Q\zeta,$$

ove ε è ad arbitrio, mentre λ, Q, ζ sono numeri fissi. Se quindi è $\varepsilon < \frac{1}{12}\lambda^2 Q\zeta$, risulta

$$I_Q[z_n] - I_Q[z_0] < -\frac{1}{4}\lambda^2 Q\zeta$$

per tutti gli $n > \begin{cases} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \end{cases}$; e siccome per $n \to \infty$ z_n tende uniformemente a z_0 in tutto Q, ne segue che l'integrale $I_Q[z]$ non è semicontinuo inferiormente sulla superficie S_0.

Con ciò risulta provato che se l'integrale $I_D[z]$ è semicontinuo inferiormente deve essere in tutti i punti del campo D e per tutti i valori finiti di z, p, q

$$f_{pp}(x, y, z, p, q) f_{qq}(x, y, z, p, q) - f_{pq}^2(x, y, z, p, q) \geq 0.$$

Per la continuità delle f_{pp}, f_{pq}, f_{qq}, tale condizione deve essere verificata anche nei punti della frontiera di D.

3. **Prima condizione necessaria per la semicontinuità superiore.** — Se esiste un punto $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ del campo D e una terna di valori $\overline{z}_0$, $\overline{p}_0$, $\overline{q}_0$ per i quali si abbia

$$f_{pp}(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) f_{qq}(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) - f_{pq}^2(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) < 0$$

è possibile anche determinare una coppia di numeri u', v', non ambedue nulli, in modo che sia

$$u'^2 f_{pp}(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) + 2u'v' f_{pq}(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) + \\ + v'^2 f_{qq}(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) > 0$$

perciò si prova con procedimento analogo a quello del teorema precedente che *la condizione*

$$f_{pp}f_{qq} - f_{pq}^2 \geq 0$$

è necessaria anche per la semicontinuità superiore dell'integrale $\mathrm{I_D}[z]$.

In questo caso la condizione relativa alla semicontinuità superiore non si ottiene da quella relativa alla semicontinuità inferiore, cambiando il senso della disuguaglianza che in essa figura, come avviene generalmente.

4. Seconda condizione necessaria per la semicontinuità inferiore. — Dimostro il seguente teorema:

Siano ancora verificate tutte le ipotesi del teorema del n. 2, e si supponga inoltre che sia

$$f_{pp}(x, y, z, p, q)f_{qq}(x, y, z, p, q) - f_{pq}^2(x, y, z, p, q) \geq 0$$

in tutti i punti (x, y) *del campo* D *e in quelli della sua frontiera e per tutti i valori finiti di* z, p, q; *allora, se l'integrale* $\mathrm{I_D}[z]$ *è semicontinuo inferiormente, per tutti gli* x, y, z, p, q *sopracitati deve essere necessariamente:*

$$f_{pp}(x, y, z, p, q) \geq 0; \quad f_{qq}(x, y, z, p, q) \geq 0.$$

Supposto invece che esista un punto $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ del campo D e una terna di valori $\overline{z}_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0$ tali che sia

$$f_{pp}(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) < 0,$$

per la continuità della f_{pp} rispetto alle variabili x, y, z, p, q, considerato un numero $\zeta > 0$, comunque scelto, purchè soddisfacente alla disuguaglianza

$$f_{pp}(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) < -\zeta,$$

è possibile determinare un numero $\delta > 0$, in modo che sia

$$f_{pp}(x, y, z, p, q) < -\zeta$$

ogniqualvolta risultino soddisfatte le disuguaglianze

$$|x - \overline{x}_0| \leq \delta, \; |y - \overline{y}_0| \leq \delta, \; |z - \overline{z}_0| \leq \delta, \; |p - \overline{p}_0| \leq \delta, \; |q - \overline{q}_0| \leq \delta;$$

δ essendo inoltre tale che i punti (x, y) soddisfacenti alle prime due disuguaglianze appartengano al campo D.

Da questo punto in poi basta ripetere la costruzione della superficie S_0 e delle S_n e tutto il ragionamento del n. 2, avendo però l'avvertenza di attribuire ai numeri u e v rispettivamente i valori 1 e 0.

Risulta in tal modo che la disuguaglianza

$$f_{pp}(x, y, z, p, q) \geq 0$$

deve essere verificata in tutti i punti del campo D e per tutti i valori finiti di z, p, q. Per la continuità della f_{pp} la precedente disuguaglianza deve essere soddisfatta anche nei punti della frontiera del campo D.

In modo analogo si dimostra che deve essere $f_{qq}(x, y, z, p, q) \geq 0$.

5. **Seconda condizione necessaria per la semicontinuità superiore.** — Supposta verificata la disuguaglianza

$$f_{pp}(x, y, z, p, q) f_{qq}(x, y, z, p, q) - f_{pq}^2(x, y, z, p, q) \geq 0$$

si prova con procedimento analogo a quello dei numeri precedenti che *se l'integrale* $I_D[z]$ *è semicontinuo superiormente deve essere necessariamente*

$$f_{pp}(x, y, z, p, q) \leq 0; \quad f_{qq}(x, y, z, p, q) \leq 0.$$

6. **Condizione necessaria per la continuità.** — Riassumendo i precedenti risultati si ha che, supposta la funzione $f(x, y, z, p, q)$ finita e continua con le sue derivate parziali f_p, f_q, f_{pp}, f_{pq}, f_{qq}, condizione necessaria per la semicontinuità inferiore dell'integrale $I_D[z]$ è che sia in tutti i punti del campo D e in quelli della sua frontiera e per tutti i valori finiti di z, p, q

$$f_{pp} f_{qq} - f_{pq}^2 \geq 0; \quad f_{pp} \geq 0; \quad f_{qq} \geq 0;$$

e per la semicontinuità superiore

$$f_{pp} f_{qq} - f_{pq}^2 \geq 0; \quad f_{pp} \leq 0; \quad f_{qq} \leq 0.$$

Ne segue che *condizione necessaria perchè l'integrale* $I_D[z]$ *sia funzione continua è che in tutti i punti del campo* D *e in quelli della sua frontiera e per tutti i valori finiti di* z, p, q *sia:*

$$f_{pp} = f_{pq} = f_{qq} = 0;$$

cioè la funzione f *deve essere lineare nelle* p *e* q:

$$f(x, y, z, p, q) = f_1(x, y, z) + p f_2(x, y, z) + q f_3(x, y, z).$$

7. **Nuova forma della condizione necessaria per la semicontinuità inferiore.** — Le condizioni necessarie per la semicontinuità inferiore dell'integrale $I_D[z]$ stabilite nei n.^{i} 2 e 4 sono espresse per mezzo delle derivate parziali del secondo ordine rispetto a p e a q della funzione f. Nel presente numero mi propongo di trovare una forma della condizione necessaria, indi-

pendente dall'esistenza di tali derivate, ed espressa invece mediante la funzione $\mathcal{E}$ di WEIERSTRASS, la quale, come è noto, può definirsi per mezzo della funzione f e delle sue derivate parziali del primo ordine f_p, f_q nel seguente modo (7)

$$\mathcal{E}(x, y, z; p_0, q_0; p, q) = f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, p_0, q_0) - \\ - (p - p_0)f_p(x, y, z, p_0, q_0) - (q - q_0)f_q(x, y, z, p_0, q_0)$$

indipendentemente cioé dall'esistenza delle f_{pp}, f_{pq}, f_{qq}.

Dimostro quindi il seguente teorema:

Sia f(x, y, z, p, q) *una funzione finita e continua con le sue derivate parziali* $\mathrm{f_p}$, $\mathrm{f_q}$ *in ogni punto di un campo aperto limitato* D *del piano* (x, y) *e per tutti i valori finiti di* z, p, q. *Allora se l'integrale* $\mathrm{I_D[z]}$ *è semicontinuo inferiormente, in tutti i punti del campo* D *e in quelli della sua frontiera e per tutti i valori finiti di* z, $\mathrm{p_0}$, $\mathrm{q_0}$, p, q *deve essere*

$$\mathcal{E}(x, y, z; p_0, q_0; p, q) \geq 0.$$

Supponiamo invece che esista un punto $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ del campo D e una quintupla di valori $\bar{z}_0$, $\bar{p}_0$, $\bar{q}_0$, $\bar{p}$, $\bar{q}$ tali che sia

$$\mathcal{E}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0; \bar{p}_0, \bar{q}_0; \bar{p}, \bar{q}) < 0.$$

Essendo per ipotesi continue f, f_p, f_q anche la $\mathcal{E}$ è continua; preso quindi un numero $\eta > 0$, comunque scelto, purchè tale che sia

$$\mathcal{E}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0; \bar{p}_0, \bar{q}_0; \bar{p}, \bar{q}) < -\eta,$$

(ove si può sempre supporre che siano verificate entrambe le disuguaglianze $\bar{p}_0 \neq \bar{p}$, $\bar{q}_0 \neq \bar{q}$, potendosi, in caso contrario, per la continuità della funzione $\mathcal{E}$, variare il valore di uno dei numeri della coppia per la quale si ha l'uguaglianza, in modo che la $\mathcal{E}$ verifichi ancora tale disuguaglianza), è possibile determinare un numero δ positivo, in modo che sia

$$\mathcal{E}(x, y, z; \bar{p}_0, \bar{q}_0; \bar{p}, \bar{q}) < -\eta \tag{10}$$

ogniqualvolta risultino soddisfatte le disuguaglianze

$$|x - \bar{x}_0| \leq \delta, \ |y - \bar{y}_0| \leq \delta, \ |z - \bar{z}_0| \leq \delta; \tag{11}$$

δ essendo inoltre tale che i punti (x, y) soddisfacenti alle prime due disuguaglianze appartengano al campo D.

---

(7) Luogo citato in (1), n.° 3.

Per il punto $A_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ si consideri il piano Π_0 definito da

$$z - \bar{z}_0 = \bar{p}_0(x - \bar{x}_0) + \bar{q}_0(y - \bar{y}_0)$$

e il piano Ω definito da

$$z - \bar{z}_0 = \bar{p}(x - \bar{x}_0) + \bar{q}(y - \bar{y}_0)$$

e sia s_0 la loro retta d'intersezione

$$\begin{cases} z - \bar{z}_0 = \bar{p}_0(x - \bar{x}_0) + \bar{q}_0(y - \bar{y}_0) \\ z - \bar{z}_0 = \bar{p}(x - \bar{x}_0) + \bar{q}(y - \bar{y}_0). \end{cases}$$

Si indichi con $\bar{A}_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ la proiezione di A_0 sul piano (x, y), e con $\bar{s}_0$ la retta proiezione della s_0 sul piano (x, y). Evidentemente $\bar{A}_0$ appartiene ad $\bar{s}_0$.

Nel piano (x, y) si costruisca un quadrato $Q(\bar{A}_0, \bar{B}_0, \bar{\bar{A}}_0, \bar{\bar{B}}_0)$ tale che anche il vertice $\bar{B}_0$ sia sulla retta $\bar{s}_0$, e che, indicata con l la lunghezza del suo lato, si abbia

$$l\sqrt{2} < \delta \tag{3}$$

$$\{|\bar{p}_0| + |\bar{q}_0|\}\, l\sqrt{2} < \delta. \tag{4}$$

Per la (3) Q risulta interno al campo D.

Nel piano Π_0 si consideri il parallelogramma P avente per proiezione ortogonale sul piano (x, y) il quadrato Q e si assuma P come superficie S_0 definita dalla funzione

$$z = z_0(x, y).$$

Per le (3) e (4) in tutti i punti di P sono verificate le (11) ed é inoltre

$$p_0(x, y) = \bar{p}_0, \quad q_0(x, y) = \bar{q}_0.$$

Si osservi ora che per la continuità delle f_p e f_q è possibile determinare un numero $\Theta > 0$ tale che, in tutti i punti di Q e per ogni coppia p, q soddisfacente alle disuguaglianze

$$|p - \bar{p}_0| < \Theta, \quad |q - \bar{q}_0| < \Theta, \tag{12}$$

si abbia

$$\begin{cases} |f_p(x, y, z_0, p, q) - f_p(x, y, z_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0)| < \dfrac{\eta}{4\,|\bar{p}_0 - \bar{p}|} \\ |f_q(x, y, z_0, p, q) - f_q(x, y, z_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0)| < \dfrac{\eta}{4\,|\bar{q}_0 - \bar{q}|} \end{cases}. \tag{13}$$

Si proceda quindi alla suddivisione del quadrato Q, come al n. 2, avendo però l'avvertenza che le altezze dei rettangoli $\bar{Q}_r^{(n)}$, $\bar{\bar{Q}}_r^{(n)}$ $(r = 1, 2, \dots n)$ siano.

rispettivamente h_n e $\frac{l}{n} - h_n$, con h_n soddisfacente alle disuguaglianze

$$h_n < \frac{l}{2n} \tag{14}$$

$$h_n < \begin{cases} \dfrac{l}{n} \dfrac{\Theta}{|\overline{p}_0 - \overline{p}| + \Theta} \\ \dfrac{l}{n} \dfrac{\Theta}{|\overline{q}_0 - \overline{q}| + \Theta} \end{cases}. \tag{15}$$

Scelto in tal modo il numero h_n si fissi il rapporto

$$\frac{l}{nh_n} = \lambda$$

e il numero λ si manterrà fisso al variare di n.

Siano ancora $A_r^{(n)}$, $B_r^{(n)}$ i punti del piano Π_0 aventi per proiezione sul piano (x, y) rispettivamente $\overline{A}_r^{(n)}$, $\overline{B}_r^{(n)}$.

Per ognuna delle rette $A_r^{(n)}$, $B_r^{(n)}$ $(r = 1, 2, \ldots n - 1)$ si consideri il piano $\Omega_r^{(n)}$ parallelo a $\Omega_0^{(n)} \equiv \Omega$, e siano $E_r^{(n)}$, $F_r^{(n)}$ i punti di $\Omega_{r-1}^{(n)}$ aventi per proiezione sul piano (x, y) rispettivamente $\overline{E}_r^{(n)}$, $\overline{F}_r^{(n)}$.

Costruiti i $2n$ parallelogrammi

$$H_r^{(n)}(A_{r-1}^{(n)}, B_{r-1}^{(n)}, E_r^{(n)}, F_r^{(n)}), \quad K_r^{(n)}(E_r^{(n)}, F_r^{(n)}, A_r^{(n)}, B_r^{(n)}), \quad (r = 1, 2, \ldots n)$$

si assuma la superficie costituita da questi $2n$ parallelogrammi come superficie S_n definita da

$$z = z_n(x, y).$$

Si noti che $H_r^{(n)}$ e $K_r^{(n)}$ hanno per proiezione sul piano (x, y) rispettivamente $\overline{Q}_r^{(n)}$ e $\overline{\overline{Q}}_r^{(n)}$. La funzione $z_n(x, y)$ è evidentemente continua in tutto Q (contorno compreso).

Nei punti che appartengono ai parallelogrammi $H_r^{(n)}$ si ha

$$p_n(x, y) = \overline{p}, \quad q_n(x, y) = \overline{q}, \tag{16}$$

e in quelli che appartengono ai parallelogrammi $K_r^{(n)}$ risulta [8]

$$p_n(x, y) = \frac{\overline{p}_0 \dfrac{l}{n} - \overline{p} h_n}{\dfrac{l}{n} - h_n}, \quad q_n(x, y) = \frac{\overline{q}_0 \dfrac{l}{n} - \overline{q} h_n}{\dfrac{l}{n} - h_n}. \tag{17}$$

---

[8] Le (17) si calcolano con lo stesso procedimento con cui nella nota [4] si sono calcolate le (7) del n.° 2.

In tutti i punti appartenenti ai $K_r^{(n)}$ risulta dalle (17)

$$p_n - \overline{p}_0 = \frac{h_n(\overline{p}_0 - \overline{p})}{\frac{l}{n} - h_n}, \quad q_n - \overline{q}_0 = \frac{h_n(\overline{q}_0 - \overline{q})}{\frac{l}{n} - h_n}; \tag{18}$$

dalle (16) e da queste ultime, tenuta presente la (14), si deduce che è in tutto Q (eccettuati al più i punti dell'insieme di misura (superficiale) nulla costituito dai punti appartenenti ai $2n-1$ segmenti $\overline{E}_r^{(n)}\overline{F}_r^{(n)}$ $(r = 1, 2, \dots n)$; $\overline{A}_r^{(n)}\overline{B}_r^{(n)}$ $(r = 1, 2, \dots n-1)$)

$$|p_n - \overline{p}_0| \leq |\overline{p} - \overline{p}_0|, \quad |q_n - \overline{q}_0| \leq |\overline{q} - \overline{q}_0|. \tag{19}$$

Inoltre dalle (18), tenuta presente la (15), si deduce che in tutti i punti appartenenti ai parallelogrammi $K_r^{(n)}$ risulta

$$|p_n - \overline{p}_0| < \Theta, \quad |q_n - \overline{q}_0| < \Theta. \tag{20}$$

La funzione $z_n(x, y)$ è assolutamente continua in tutto Q avendo le derivate parziali del primo ordine (o, ove queste mancano, le derivate parziali destre e sinistre) limitate per le (16) e (17).

Al variare di n si ha una successione di superfici S_n definite da

$$z = z_n(x, y) \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

che per $n \to \infty$ convergono uniformemente in tutto Q verso la S_0 [9].

Ciò premesso, dimostro che l'integrale $I_D[z]$ non é semicontinuo inferiormente sulla superficie S_0.

Considerata la differenza

$$f(x, y, z_n, p_n, q_n) - f(x, y, z_0, p_0, q_0)$$

risulta in tutti i punti di Q, ivi essendo $p_0 = \overline{p}_0$, $q_0 = \overline{q}_0$, e applicando poi

---

[9] Tale proprietà si prova in modo analogo al n.° 2, vedasi nota [5], osservando che in tutto Q risulta

$$|z_n(x, y) - z_0(x, y)| \leq \sqrt{(\overline{p}_0 - \overline{p})^2 + (\overline{q}_0 - \overline{q})^2}\, h_n < \sqrt{(\overline{p}_0 - \overline{p})^2 + (\overline{q}_0 - \overline{q})^2}\, \frac{l}{2n},$$

e quindi scelto un $\rho > 0$ ad arbitrio per ogni

$$n > \frac{l\sqrt{(\overline{p}_0 - \overline{p})^2 + (\overline{q}_0 - \overline{q})^2}}{2\rho}$$

risulta in tutto Q

$$|z_n(x, y) - z_0(x, y)| < \rho.$$

la formula di definizione della funzione $\mathcal{E}$ di WEIERSTRASS

$$f(x, y, z_n, p_n, q_n) - f(x, y, z_0, p_0, q_0) = f(x, y, z_n, p_n, q_n) - f(x, y, z_0, p_n, q_n) + \\ + f(x, y, z_0, p_n, q_n) - f(x, y, z_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) = f(x, y, z_n, p_n, q_n) - \\ - f(x, y, z_0, p_n, q_n) + (p_n - \overline{p}_0) f_p(x, y, z_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) + (q_n - \overline{q}_0) f_q(x, y, z_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) + \\ + \mathcal{E}(x, y, z_0; \overline{p}_0, \overline{q}_0; p_n, q_n).$$

Quindi

$$\iint_Q \{ f(x, y, z_n, p_n, q_n) - f(x, y, z_0, p_0, q_0) \} dxdy = \tag{21}$$

$$= \iint_Q \{ f(x, y, z_n, p_n, q_n) - f(x, y, z_0, p_n, q_n) \} dxdy +$$

$$+ \iint_Q \{ (p_n - \overline{p}_0) f_p(x, y, z_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) + (q_n - \overline{q}_0) f_q(x, y, z_0, \overline{p}_0, \overline{q}_0) \} dxdy +$$

$$+ \iint_Q \mathcal{E}(x, y, z_0; \overline{p}_0, \overline{q}_0; p_n, q_n) dxdy.$$

Si tratta di esaminare i tre integrali che figurano al secondo membro: per i primi due possono farsi considerazioni analoghe a quelle del n. 2; preso quindi un $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, possono determinarsi tre numeri n_0, n_1, n_2, tali che per ogni $n > \begin{cases} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \end{cases}$ la somma dei primi due integrali del secondo membro risulti in valore assoluto minore di 3ε.

In quanto all'ultimo integrale si ha evidentemente

$$\iint_Q \mathcal{E}(x, y, z_0; \overline{p}_0, \overline{q}_0; p_n, q_n) dxdy = \tag{22}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \left[\iint_{\overline{Q}_r^{(n)}} \mathcal{E}(x, y, z_0; \overline{p}_0, \overline{q}_0; p_n, q_n) dxdy + \iint_{\overline{\overline{Q}}_r^{(n)}} \mathcal{E}(x, y, z_0; \overline{p}_0, \overline{q}_0; p_n, q_n) dxdy \right].$$

Ma in tutti i punti appartenenti ai rettangoli $\overline{Q}_r^{(n)}$ si ha $p_n = \overline{p}$, $q_n = \overline{q}$; quindi, essendo inoltre verificate le (11), è applicabile la (10) e risulta:

$$\sum_{r=1}^{n} \iint_{\overline{Q}_r^{(n)}} \mathcal{E}(x, y, z_0; \overline{p}_0, \overline{q}_0; p_n, q_n) dxdy = \tag{23}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \iint_{\overline{Q}_r^{(n)}} \mathcal{E}(x, y, z_0; \overline{p}_0, \overline{q}_0; \overline{p}, \overline{q}) dxdy < -\eta \sum_{r=1}^{n} \iint_{\overline{Q}_r^{(n)}} dxdy = -\eta n h_n l.$$

In quanto alla somma degli integrali estesi ai rettangoli $\overline{\overline{Q}}_r^{(n)}$, tenuta presente la formula di definizione della funzione $\mathcal{E}$, si applichi alla differenza

$$f(x, y, z_0, p_n, q_n) - f(x, y, z_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0)$$

lo sviluppo accorciato di TAYLOR per le funzioni di più variabili limitato ai termini contenenti le derivate del primo ordine. Risulta in tal modo:

$$\sum_{r=1}^{n} \iint_{\bar{\bar{Q}}_r^{(n)}} \mathcal{E}(x, y, z_0;\ \bar{p}_0, \bar{q}_0;\ p_n, q_n) dx dy =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \iint_{\bar{\bar{Q}}_r^{(n)}} \{ f(x, y, z_0, p_n, q_n) - f(x, y, z_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) -$$

$$- (p_n - \bar{p}_0) f_p(x, y, z_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) - (q_n - \bar{q}_0) f_q(x, y, z_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) \} dx dy =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \iint_{\bar{\bar{Q}}_r^{(n)}} [(p_n - \bar{p}_0) \{ f_p(x, y, z_0, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{q}}) - f_p(x, y, z_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) \} +$$

$$+ (q_n - \bar{q}_0) \{ f_q(x, y, z_0, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{q}}) - f_q(x, y, z_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) \}] dx dy,$$

ove $\bar{\bar{p}}$ è compreso fra $\bar{p}_0$ e p_n, $\bar{\bar{q}}$ fra $\bar{q}_0$ e q_n (p_n e q_n essendo dati dalle (17)).

Prendendo il valore assoluto si ha:

$$\left| \sum_{r=1}^{n} \iint_{\bar{\bar{Q}}_r^{(n)}} \mathcal{E}(x, y, z_0;\ \bar{p}_0, \bar{q}_0;\ p_n, q_n) dx dy \right| \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{n} \iint_{\bar{\bar{Q}}_r^{(n)}} \{ | p_n - \bar{p}_0 | \, | f_p(x, y, z_0, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{q}}) - f_p(x, y, z_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) | +$$

$$+ | q_n - \bar{q}_0 | \, | f_q(x, y, z_0, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{q}}) - f_q(x, y, z_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) | \} dx dy.$$

Dalla (20) risulta « a fortiori »

$$| \bar{\bar{p}} - \bar{p}_0 | < \Theta, \quad | \bar{\bar{q}} - \bar{q}_0 | < \Theta;$$

sono quindi applicabili le (13) e risulta poi, tenendo presente le (18):

$$\left| \sum_{r=1}^{n} \iint_{\bar{\bar{Q}}_r^{(n)}} \mathcal{E}(x, y, z_0;\ \bar{p}_0, \bar{q}_0;\ p_n, q_n) dx dy \right| <$$

$$< \frac{\eta}{4} \sum_{r=1}^{n} \iint_{\bar{\bar{Q}}_r^{(n)}} \left\{ \frac{| p_n - \bar{p}_0 |}{| \bar{p}_0 - \bar{p} |} + \frac{| q_n - \bar{q}_0 |}{| \bar{q}_0 - \bar{q} |} \right\} dx dy =$$

$$=\frac{\eta}{4}\sum_{r=1}^{n}\iint_{\overline{Q}_r^{(n)}}\left\{\frac{h_n}{\frac{l}{n}-h_n}+\frac{h_n}{\frac{l}{n}-h_n}\right\}dxdy=$$

$$=\frac{\eta}{2}\frac{h_n}{\frac{l}{n}-h_n}\sum_{r=1}^{n}\iint_{\overline{Q}_r^{(n)}}dxdy=\frac{\eta}{2}\frac{h_n}{\frac{l}{n}-h_n}\,ln\left(\frac{l}{n}-h_n\right)=\frac{\eta}{2}\,lnh_n\,.$$

Dalla (22) si deduce quindi per la (23) e per quest' ultima

$$\iint_Q \mathcal{E}(x,\,y,\,z_0;\,\overline{p}_0,\,\overline{q}_0;\,p_n,\,q_n)dxdy<-\eta lnh_n+$$

$$+\frac{\eta}{2}\,lnh_n=-\frac{\eta}{2}\,lnh_n=-\frac{\eta}{2}\frac{l^2}{\lambda}=-\frac{\eta}{2}\frac{Q}{\lambda}\,.$$

Dunque dalla (21) per quanto si è osservato e per quest' ultima risulta per ogni $n>\begin{cases}n_0\\ n_1\\ n_2\end{cases}$

$$\iint_Q\{f(x,\,y,\,z_n,\,p_n,\,q_n)-f(x,\,y,\,z_0,\,p_0,\,q_0)\}\,dxdy<3\varepsilon-\frac{\eta}{2}\frac{Q}{\lambda},$$

ove ε è ad arbitrio, mentre Q, η, λ sono numeri fissi. Quindi se è $\varepsilon<\frac{1}{12}\frac{\eta Q}{\lambda}$ risulta

$$I_Q[z_n]-I_Q[z_0]<-\frac{1}{4}\,Q\,\frac{\eta}{\lambda},$$

per tutti gli $n>\begin{cases}n_0\\ n_1\\ n_2\end{cases}$; e siccome per $n\to\infty$ z_n tende uniformemente a z_0 in tutto Q, ne segue che l' integrale $I_Q[z]$ non è semicontinuo inferiormente sulla superficie S_0.

Con ciò è provato che se l' integrale $I_D[z]$ è semicontinuo inferiormente, deve essere in tutti i punti del campo D e per tutti i valori finiti di z, p_0, q_0, p, q

$$\mathcal{E}(x,\,y,\,z;\;p_0,\,q_0;\;p,\,q)\geq 0.$$

Per la continuità della funzione $\mathcal{E}$ rispetto alle variabili x, y tale condizione deve essere soddisfatta anche nei punti della frontiera di D.

8. Nuova forma della condizione necessaria per la semicontinuità superiore. — Procedendo in modo analogo al numero precedente si trova che la condizione necessaria per la semicontinuità superiore dell' integrale $I_D[z]$ può esprimersi per mezzo della funzione $\mathcal{E}$ di WEIERSTRASS nei seguenti termini:

In tutti i punti del campo D *e della sua frontiera e per tutti i valori finiti di* z, p_0, q_0, p, q *deve essere*

$$\mathcal{E}(x, y, z;\ p_0, q_0;\ p, q) \leq 0.$$

9. **Osservazione sulle condizioni dei nn. 7 e 8.** — I due ultimi teoremi che hanno come caso particolare rispettivamente i risultati dei n.i 2 e 4 e dei n.i 3 e 5 possono anche enunciarsi nei seguenti termini:

Condizione necessaria per la semicontinuità inferiore (superiore) dell'integrale $I_D[z]$ *è che tale integrale sia quasi-regolare positivo (negativo).*

Dai teoremi dei n.i 7 e 8 si deduce ancora che se l'integrale $I_D[z]$ è funzione continua, deve essere necessariamente in tutti i punti del campo D e della sua frontiera e per tutti i valori finiti di z, p_0, q_0, p, q:

$$\mathcal{E}(x, y, z;\ p_0, q_0;\ p, q) = 0,$$

cioè, come si è già trovato al n. 6, la funzione f deve essere lineare nelle p e q.

10. **Osservazione sulle condizioni sufficienti stabilite dal prof. Tonelli e su quelle necessarie trovate. Esempio.** — *a*) Confrontando le condizioni che il prof. Tonelli ha stabilito come sufficienti per la semicontinuità inferiore dell'integrale $I_D[z]$, al n. 14 della Sua memoria *Sur la semi-continuité des intégrales doubles du calcul des variations* (10) con quelle necessarie, trovate nei numeri precedenti, si nota che, oltre all'essere verificate le condizioni necessarie, Egli suppone in più che esistano finite e continue in tutto il campo D le derivate parziali f_{px}, f_{qy}.

Come risulta dall'esempio che do nel *b*) del presente numero, se non è verificata questa ulteriore ipotesi, può mancare la semicontinuità dell'integrale $I_D[z]$.

Si potrebbe allora pensare che sia anche condizione necessaria che esistano finite e continue le f_{px}, f_{qy}; ma per togliere tale dubbio basta osservare che il prof. Tonelli dimostra, nel n. 8 della Memoria sopracitata, la semicontinuità inferiore dell'integrale quasi-regolare positivo $I_D[z]$ in tutto il campo, non facendo alcuna ipotesi sull'esistenza e continuità delle derivate f_{px}, f_{qy}, ma supponendo invece che

I) *sia sempre* $f(x, y, z, p, q) \geq N$, N *essendo un numero fisso;*

II) *a ogni numero positivo* Z *si possano far corrispondere tre numeri* $\alpha > 1$, $\mu > 0$, $\Lambda > 0$, *tali che, per ogni punto* (x, y) *di* D, *dalle disu-*

(10) Luogo citato in (1).

guaglianze

$$|z| \leq Z, \quad |p| + |q| \geq \Lambda$$

segua

$$f(x, y, z, p, q) \geq \mu \{ |p|^\alpha + |q|^\alpha \};$$

condizioni che sono completamente indipendenti dalla esistenza e finitezza delle f_{px}, f_{qy}.

b) Sia nel campo D definito da $0 < x < 1$, $0 < y < 1$

$$f(x, y, z, p, q) = pf_1(x, y, z) + qf_2(x, y, z)$$

ove

$$f_1(x, y, z) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x, y, z) = y \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

La superficie S_0 sia definita da

$$z = z_0(x, y) \equiv 0$$

in ogni punto di D, e la superficie S_n, per ogni intero positivo n, sia invece definita da

$$z = z_n(x, y),$$

con

$$z_n(x, y) \equiv 0$$

in ogni punto di D tale che $0 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{\left(k_n + \frac{1}{2}\right)\pi}}$,

$$z_n(x, y) \equiv -\frac{1}{n} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}$$

in ogni punto di D tale che $\dfrac{1}{\sqrt{\left(k_n + \frac{1}{2}\right)\pi}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$,

$$z_n(x, y) \equiv \frac{1}{n}$$

in ogni punto di D tale che $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, k_n essendo il più piccolo intero positivo che soddisfa alla

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k_n} > n. \tag{24}$$

La funzione f soddisfa a tutte le condizioni necessarie stabilite nei numeri precedenti, le superficie S_n convergono uniformemente verso la S_0, le funzioni z_0 e z_n sono assolutamente continue, e risulta

(25) $$I_D[z_0]=0$$

$$I_D[z_n]=\iint\limits_{D_n}\left(-\frac{2}{n}\frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{x^2+y^2}\right)dxdy<-\frac{1}{n}\iint\limits_{\overline{D}_n}\frac{2}{x^2+y^2}\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy,$$

D_n essendo la parte del campo D compresa fra le circonferenze di centro nella origine e raggio rispettivamente $\dfrac{1}{\sqrt{\left(k_n+\frac{1}{2}\right)\pi}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$; e $\overline{D}_n$ essendo la parte del campo D compresa fra le circonferenze concentriche alle precedenti e aventi per raggio rispettivamente $\dfrac{1}{\sqrt{k_n\pi}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Passando dalle coordinate cartesiane alle polari, tenuto presente che ρ è il valore del relativo Jacobiano, risulta

$$I_D[z_n]<-\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{k_n\pi}}}^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}\frac{2}{\rho}\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{\rho^2}\,d\rho$$

e ponendo $\rho^2=\alpha$

$$I_D[z_n]<-\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{k_n\pi}}^{\frac{1}{\pi}}\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{\alpha}\,d\alpha$$

e siccome per ogni α^{-1} compreso fra $h\pi+\frac{\pi}{4}$ e $h\pi+\frac{3}{4}\pi$, dove h è un intero positivo qualsiasi, è $\mathrm{sen}^2\frac{1}{\alpha}\geq\frac{1}{2}$, si ha:

$$I_D[z_n]<-\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}\sum_{h=1}^{k_n-1}\int_{\frac{1}{\left(h+\frac{3}{4}\right)\pi}}^{\frac{1}{\left(h+\frac{1}{4}\right)\pi}}\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{\alpha}\,d\alpha<$$

$$<-\frac{\pi}{4n}\sum_{h=1}^{k_n-1}\left(h+\frac{1}{4}\right)\pi\left[\frac{1}{\left(h+\frac{1}{4}\right)\pi}-\frac{1}{\left(h+\frac{3}{4}\right)\pi}\right]=-\frac{\pi}{8n}\sum_{h=1}^{k_n-1}\frac{1}{h+\frac{3}{4}}<-\frac{\pi}{8n}\sum_{h=1}^{k_n-1}\frac{1}{h+1},$$

da cui, tenendo presente la (24),

$$I_D[z_n] < -\frac{\pi}{8}.$$

Da questa disuguaglianza e dalla (25) risulta

$$I_D[z_n] - I_D[z_0] \leq -\frac{\pi}{8},$$

e poichè per $n \to \infty$ la superficie S_n converge uniformemente alla S_0, risulta provato che l'integrale $I_D[z]$ *non* è sulla S_0 una funzione continua.

Sulla stabilità dei movimenti di Poiseuille dei liquidi viscosi incompressibili.

Memoria di ALFREDO ROSENBLATT (Kraków - Polonia).

La questione della stabilità del movimento stazionario dei liquidi viscosi che si muovono rettilinearmente in un tubo cilindrico è stata negli ultimi tempi oggetto delle ricerche interessanti del sig. TH. SEXL [1]. Tuttavia il sig. SEXL considera solamente *perturbazioni infinitamente piccole* tralasciando i termini non lineari.

Ora io mi propongo nel presente lavoro di studiare rigorosamente *certe perturbazioni finite*. Ricordo di avere già stabilito *esattamente* l'esistenza delle perturbazioni dei moti *laminari* in lavori dei « Rendiconti dei Lincei » 1931 (moto non perturbato nullo) ed anche in un lavoro del « Philosophical Magazine » (moto non perturbato non nullo).

1. Ricordiamo anzitutto i risultati seguenti stabiliti dai signori CRUDELI, CISOTTI e CALDONAZZO e riferentisi ai moti dei liquidi viscosi *simmetrici* intorno ad un asse.

Sia z l'asse di simmetria, v_r e v_z le componenti *radiale* e *assiale* di un moto che si effettua *nei piani meridionali*.

Queste componenti possono essere espresse per mezzo della funzione Ψ, generalizzazione della funzione di STOKES

$$v_r = -\frac{1}{r}\Psi_z, \quad v_z = \frac{1}{r}\Psi_r, \tag{1}$$

Ψ_z, Ψ_r essendo le derivate. Poniamo

$$\Omega = -\frac{1}{2r}\left(\Psi_{zz} + \Psi_{rr} - \frac{1}{r}\Psi_r\right) = -\frac{1}{2r}\Delta\Psi: \tag{2}$$

[1] *Zur Stabilitätsfrage der Poiseuille'schen und Couette'schen Strömung*, « Annalen der Physik », T. 83, 1927; *Ueber dreidimensionale Störungen der Poiseuille'schen Strömung*, « Annalen der Physik », T. 84, 1927.

allora abbiamo l'equazione del moto

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \nu\left(\Delta'\Omega - \frac{\Omega}{r^2}\right) + D, \tag{3}$$

nella quale abbiamo posto

$$\Delta'\Omega = \Omega_{zz} + \Omega_{rr} + \frac{\Omega_r}{r}, \tag{4}$$

$$D = \begin{vmatrix} \Psi_z, & \dfrac{\partial\left(\frac{\Omega}{r}\right)}{\partial z} \\ \Psi_r, & \dfrac{\partial\left(\frac{\Omega}{r}\right)}{\partial r} \end{vmatrix}.$$

Ora abbiamo

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = -\frac{1}{2r}(\Delta\Psi)_t, \quad \Omega_{zz} = -\frac{1}{2r}(\Delta\Psi)_{zz}, \quad \Omega_r = \frac{1}{2r^2}\Delta\Psi - \frac{1}{2r}(\Delta\Psi)_r,$$

$$\frac{\Omega}{r} = -\frac{1}{2r^2}\Delta\Psi, \quad \frac{\partial\left(\frac{\Omega}{r}\right)}{\partial r} = \frac{1}{r^3}\Delta\Psi - \frac{1}{2r^2}(\Delta\Psi)_r,$$

$$\Omega_{rr} = -\frac{1}{r^3}\Delta\Psi + \frac{1}{r^2}(\Delta\Psi)_r - \frac{1}{2r}(\Delta\Psi)_{rr},$$

otteniamo dunque

$$\Delta'\Omega - \frac{\Omega}{r^2} = \Omega_{rr} + \Omega_{zz} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Omega}{r}\right) = -\frac{1}{2r}\Delta\Delta\Psi,$$

$$D = \begin{vmatrix} \Psi_z, & -\dfrac{1}{2r^2}(\Delta\Psi)_z \\ \Psi_r, & \dfrac{1}{r^3}\Delta\Psi - \dfrac{1}{2r^2}(\Delta\Psi)_r \end{vmatrix} = -\frac{1}{2r^2}\{\Psi_z(\Delta\Psi)_r - \Psi_r(\Delta\Psi)_z\} + \frac{1}{r^3}\Psi_z\cdot\Delta\Psi.$$

Otteniamo dunque l'equazione seguente soddisfatta da Ψ:

$$\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial t} = \nu\Delta\Delta\Psi + \frac{1}{r}[\Psi_z(\Delta\Psi)_r - \Psi_r(\Delta\Psi)_z] - \frac{2}{r^2}\Psi_z\Delta\Psi. \tag{5}$$

2. Consideriamo come *movimento fondamentale* il movimento di Poiseuille. Ora abbiamo

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad v_r = 0, \quad \Psi_z = 0, \quad \Psi = \Psi_0(r), \quad D = 0,$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = 0, \quad \Delta\Delta\Psi_0 = 0, \quad \Omega_{rr} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Omega}{r}\right) = 0.$$

Abbiamo dunque

$$\Omega = C_r + \frac{C'}{r},$$

$$\Delta\Psi_0 = c_1 r^2 + c_2 .$$

Poniamo

(6) $$v_z = \frac{1}{r}\Psi_r = W(r),$$

allora si ha

$$\Delta\Psi_0 = rW' + W - W = rW' = c_1 r^2 + c_2 ,$$

(7) $$W(r) = \frac{c_1}{2} r^2 + c_2 \log r + c_3 .$$

Supposto il movimento *finito* dovunque, $W_{max} = A$ nell'asse del tubo, a essendo il raggio del tubo, abbiamo

(8) $$W(r) = A\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = A + A_1 r^2,$$

$$\Psi_0 = \int r W(r) dr = A\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4a^2}\right) + C.$$

3. Sviluppiamo adesso Ψ in serie di potenze di un parametro ε

(9) $$\Psi = \Psi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Psi_k(r, z, t)$$

e supponiamo che le funzioni Ψ_k siano della forma

(10) $$\Psi_k(r, z, t) = e^{-k(\lambda z + \mu t)} \cdot f_k(r).$$

λ, μ saranno numeri *reali positivi*; le perturbazioni sono dunque del tipo *evanescente* all'infinito dell'asse delle z.

Si ottiene l'equazione seguente

(11) $$\nu \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Delta\Delta\Psi_k - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial \Delta\Psi_k}{\partial t} + \frac{1}{r}\left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l \frac{\partial \Psi_l}{\partial z} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \frac{\partial \Delta\Psi_m}{\partial r} - \right.$$
$$\left. - \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \frac{\partial \Psi_l}{\partial r} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \frac{\partial \Delta\Psi_m}{\partial z} \right\} - \frac{2}{r^2} \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l \frac{\partial \Psi_l}{\partial z} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \Delta\Psi_m = 0,$$

che si scinde nel sistema infinito delle equazioni a derivate parziali

(12) $$\nu\Delta\Delta\Psi_1 - \frac{\partial \Delta\Psi_1}{\partial t} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\frac{\partial \Delta\Psi_0}{\partial r} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial r}\frac{\partial \Delta\Psi_1}{\partial z}\right] - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\Delta\Psi_0 = 0,$$

. . . .

$$\nu\Delta\Delta\Psi_k - \frac{\partial\Delta\Psi_k}{\partial t} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\Psi_k}{\partial z}\frac{\partial\Delta\Psi_0}{\partial r} - \frac{\partial\Psi_0}{\partial r}\frac{\partial\Delta\Psi_k}{\partial z}\right] - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Psi_k}{\partial z}\cdot\Delta\Psi_0 = -$$

$$-\frac{1}{r}\left[\sum_{\substack{l+m=k\\ l,m=1,\dots k-1}}\frac{\partial\Psi_l}{\partial z}\frac{\partial\Delta\Psi_m}{\partial r} - \frac{\partial\Psi_l}{\partial r}\frac{\partial\Delta\Psi_m}{\partial z}\right] + \frac{2}{r^2}\sum_{\substack{l+m=k\\ l,m=1,\dots k-1}}\frac{\partial\Psi_l}{\partial z}\Delta\Psi_m, \qquad k = 1, 2, \dots$$

Abbiamo

$$\frac{\partial\Psi_0}{\partial r} = r W, \quad \Delta\Psi_0 = r W', \quad \frac{\partial\Delta\Psi_0}{\partial r} = r W'' + W';$$

abbiamo dunque le equazioni

$$\nu\Delta\Delta\Psi_1 - \frac{\partial\Delta\Psi_1}{\partial t} + \frac{\partial\Psi_1}{\partial t}\left(W'' - \frac{W'}{r}\right) - W\frac{\partial\Delta\Psi_1}{\partial z} = 0, \tag{13}$$

. . . .

$$\nu\Delta\Delta\Psi_k - \frac{\partial\Delta\Psi_k}{\partial t} + \frac{\partial\Psi_k}{\partial z}\left(W'' - \frac{W'}{r}\right) - W\frac{\partial\Delta\Psi_k}{\partial z} = -$$

$$-\frac{1}{r}\left[\sum_{\substack{l+m=k\\ l,m=1,\dots k-1}}\frac{\partial\Psi_l}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Delta\Psi_m}{\partial r} - \frac{\partial\Psi_l}{\partial r}\frac{\partial\Delta\Psi_m}{\partial z}\right], \qquad k = 1, 2, \dots$$

4. Studiamo adesso il caso del *moto iniziale nullo*. Nel caso di POISEUILLE abbiamo $W'' - \frac{1}{r}W' = 0$ e nel caso del *moto iniziale nullo* W *è nullo*. Le equazioni (13) contengono *solamente* le funzioni incognite $\Delta\Psi_k$, e nel caso $W = 0$ i primi membri sono prodotti di due fattori $\Delta\Psi$, $\nu\Delta\Psi - \frac{\partial\Psi}{\partial t}$ *permutabili*.

Poniamo

$$f_k'' - \frac{f_k'}{r} + k^2\lambda^2 f_k = \varphi_k(r). \tag{14}$$

Abbiamo

$$\Delta\Psi_k = e\left[f_k'' + k^2\lambda^2 f_k - \frac{f_k'}{r}\right] = e\cdot\varphi_k;$$

si ha dunque

$$\Delta\Delta\Psi_k = e\left[\varphi_k'' + k^2\lambda^2\varphi_k - \frac{\varphi_k'}{r}\right], \quad \frac{\partial\Delta\Psi_k}{\partial t} = -k\mu e\varphi_k, \quad \frac{\partial\Delta\Psi_k}{\partial z} = -k\lambda e\varphi_k.$$

Le equazioni a derivate parziali (13) divengono le seguenti *equazioni differenziali ordinarie* nelle funzioni φ_k

$$\nu\left[\varphi_k'' - \frac{\varphi_k'}{r} + k^2\lambda^2\varphi_k\right] + k\mu\varphi_k + k\lambda\varphi_k\cdot W = - \tag{15}$$

$$-\frac{1}{r}\Big[\sum_{\substack{l+m=k\\ l,m=1,\dots k-1}} - l\lambda f_l\varphi_m' + m\lambda f_l'\varphi_m\Big] = \frac{\lambda}{r}\sum\left[k f_l\varphi_m' - m\frac{d}{dr}(f_l\varphi_m)\right].$$

Introducendo l'espressione

$$D_k(r) = \frac{\lambda}{\nu r} \Sigma \left[k f_l \varphi_m' - m \frac{d}{dr} (f_l \varphi_m) \right]$$

possiamo scrivere le equazioni (15) sotto la forma seguente

$$(15) \qquad \varphi_k'' - \frac{\varphi_k'}{r} + \varphi_k \left[k^2\lambda^2 + \frac{k}{\nu} (\mu + W\lambda) \right] = D_k(r), \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

5. Studiamo dapprima le equazioni (14). Le equazioni *omogenee*

$$(17) \qquad f_k'' - \frac{f_k'}{r} + k^2\lambda^2 f_k = 0$$

si trasformano introducendo la funzione incognite $y(x)$ determinata dalle relazioni

$$f_k(r) = r y(x), \quad x = r k \lambda.$$

Abbiamo allora

$$f_k' = y + xy', \quad f_k'' = 2k\lambda y' + xk\lambda y''.$$

Otteniamo dunque l'equazione

$$(18) \qquad y'' + \frac{y'}{x} + y\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

che non è altro che l'equazione di BESSEL d'indice 1.

Gli integrali linearmente indipendenti delle equazioni (17) sono dunque

$$y_{1,k} = r I_1(r k \lambda), \quad y_{2,k} = Y_1(r k \lambda),$$

I_1, Y_1 essendo le funzioni di BESSEL e di NEUMANN. Si ha

$$(19) \qquad I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)},$$

$$(20) \qquad Y_\nu(x) = \frac{2}{\pi} I_\nu(x) \log \frac{x}{2} -$$

$$- \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{\pi s!\,(s+\nu)!} [\Psi(s+1) + \Psi(s+n+1)] - \sum_{s=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-s-1)!}{\pi s!} \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu-2s},$$

$\Psi(x)$ essendo la funzione di GAUSS

$$(21) \qquad \Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C - \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+s} - \frac{1}{s+1}\right),$$

C costante di EULERO.

L'integrale generale dell'equazione (14) è dunque

$$f_k(r) = A_k y_{1,k} + B_k y_{2,k} + \int_0^r \frac{y_{1,k}(\rho) y_{2,k}(r) - y_{1,k}(r) y_{2,k}(\rho)}{y_{1,k}(\rho) y'_{2,k}(\rho) - y'_{1,k}(\rho) y_{2,k}(\rho)} \varphi_k(\rho) d\rho. \tag{22}$$

Abbiamo

$$y'_{1,k}(r) = I_1(x) + x I_1', \quad y'_{2,k}(r) = Y_1 + x Y_1';$$

si ha dunque

$$y_{1,k}(\rho) y'_{2,k}(\rho) - y'_{1,k}(\rho) y_{2,k}(\rho) = \rho^2 k\lambda [I_1(\rho k\lambda) Y_1'(\rho k\lambda) - I_1'(\rho k\lambda) Y_1(\rho k\lambda)].$$

Abbiamo

$$\lim_{x=0} \frac{I_1(x)}{\frac{x}{2}} = 1, \quad \lim_{x-0} I_1'(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x=0} x Y_1(x) = -\frac{2}{\pi}, \quad \lim_{x=9} x^2 Y_1'(x) = \frac{2}{\pi},$$

dunque è

$$x(I_1 Y_1' - I_1' Y_1) = \frac{2}{\pi}. \tag{23}$$

Otteniamo dunque la formola

$$f_k(r) = A_k r I_1(rk\lambda) + B_k r Y_1(rk\lambda) + \tag{24}$$
$$+ \frac{\pi r}{2} \int_0^r [I_1(\rho k\lambda) Y_1(rk\lambda) - I_1(rh\lambda) Y_1(\rho k\lambda)] \varphi_k(\rho) d\rho.$$

6. Ci limiteremo, nel presente lavoro, al caso speciale del fluido *inizialmente in riposo, cioè al caso* $W = 0$. Allora l'equazione (16) è dello stesso tipo dell'equazione (14). Poniamo

$$k^2 \lambda_k'^2 = k^2 \lambda^2 + k \frac{\mu}{\nu}; \tag{25}$$

le φ_k saranno allora determinate dalle formole

$$\varphi_k(r) = A_k' r I_1(rk\lambda_k') + B_k' r Y_1(rk\lambda_k') + \tag{26}$$
$$+ \frac{\pi r}{2} \int_0^r [I_1(\rho k\lambda_k') Y_1(rk\lambda_k') - I_1(rk\lambda_k') Y_1(\rho k\lambda_k')] D_k(\rho) d\rho.$$

λ_k' tende al λ col crescere di k. Si ha

$$\lambda_k' = \sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{k\nu}} = \lambda \left(1 + \frac{\mu}{k\lambda^2 \nu}\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda + \frac{\mu}{2k\lambda\nu} + \left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Consideriamo adesso le condizioni ai limiti. Esse sono

$$v_r(a) = v_z(a) = 0, \quad v_r(o) = 0, \quad v_z(o) \text{ finito},$$

Abbiamo dunque le condizioni

$$\Psi_z(a) = \Psi_r(a) = 0, \quad \left(\frac{\Psi_z}{r}\right)_{r=0} = 0, \quad \left(\frac{\Psi_r}{r}\right)_{r=0} \text{finito},$$

ossia

$$f_k(\alpha) = f_k'(a) = 0, \quad \lim_{r=0} \frac{f_k(r)}{r} = 0, \quad \lim_{r=0} \frac{f_k'(r)}{r} \text{ finito}.$$

Le due ultime condizioni sono certamente soddisfatte qualora

$$B_k = B_k' = 0.$$

Effettivamente si ha in tal caso (cui ora vogliamo riferirci)

$$\varphi_1 = A_1' r I_1(r\lambda_1'),$$

$$f_1 = A_1 r I_1(r\lambda) + \frac{\pi r}{2} \int_0^r [I_1(\rho\lambda) Y_1(r\lambda) - I_1(r\lambda) Y_1(\rho\lambda)] \varphi_1(\rho) d\rho.$$

Si vede che φ_1 e quindi f_1 sono dell'ordine r^2 in vicinanza di $r = 0$. Dunque $D_2(\rho)$ è d'ordine ρ^2. Risulta che anche φ_2 et f_2 sono dello stesso ordine per $r = 0$. Supponiamo allora che tutte le funzioni f_i, φ_i, f_i', φ_i' fino al valore $k - 1$ di i siano degli ordini r^2 per le prime due e r per le ultime due e ricordiamo la formola

(27) $$C_\nu'(x) = -\frac{\nu}{x} C_\nu(x) + C_{\nu-1}(x)$$

valida per tutte le funzioni cilindriche. Allora $D_k(\rho)$ sarà dell'ordine ρ^2, e le φ_k, f_k saranno dell'ordine r^2, le φ_k', f_k' dell'ordine r.

7. Sostituiamo ad esso nelle formole (24) le φ_k dalle formole (26). Otteniamo le espressioni

(28) $$f_k(r) = A_k r I_1(rk\lambda) + \frac{\pi r}{2} \int_0^r [I_1(\rho k\lambda) Y_1(rk\lambda) - I_1(rk\lambda) Y_1(\rho k\lambda)] \cdot$$

$$\cdot \left\{ A_k' \rho I_1(\rho k\lambda_k') + \frac{\pi\rho}{2} \int_0^\rho [I_1(\tau k\lambda_k') Y_1(\rho k\lambda_k') - I_1(\rho k\lambda_k') Y_1(\tau k\lambda_k')] D_k(\tau) d\tau \right\} d\rho.$$

Cambiando l'ordine d'integrazione, si ha

$$\int_0^r \rho[I_1(\rho k\lambda)Y_1(rk\lambda) - I_1(rk\lambda)Y_1(\rho k\lambda)]\int_0^\rho [I_1(\tau k\lambda_k')Y_1(\rho k\lambda_k') -$$

$$- I_1(\rho k\lambda_k')Y_1(\tau k\lambda_k')]D_k(\tau)d\tau d\rho = \int_0^r D_k(\tau)d\tau\int_\tau^r \rho[I_1(\rho k\lambda)Y_1(rk\lambda) -$$

$$- I_1(rk\lambda)Y_1(\rho k\lambda)][I_1(\tau k\lambda_k')Y_1(\rho k\lambda_k') - I_1(\rho k\lambda_k')Y_1(\tau k\lambda_k')]d\rho.$$

Ricordiamo adesso le seguenti formole (cfr. NIELSEN: *Zylinderfunktionen*)

$$(29)\qquad (\alpha^2 - \beta^2)\int x C_\nu(\alpha x)C_\nu^1(\beta x)dx = \beta x C_\nu(\alpha x)C^1{}_{\nu-1}(\beta x) - \alpha x C_{\nu-1}(\alpha x)C_\nu^1(\beta x),$$

nelle quali C_ν, C_ν^1 sono due *arbitrarie* funzioni cilindriche d'indice ν. Abbiamo in particolare le quattro formole seguenti

$$(30)\quad \int \rho I_1(\rho k\lambda)I_1(\rho k\lambda_k')d\rho = \frac{\rho}{k(\lambda^2 - \lambda_k'^2)}[\lambda_k' I_1(\rho k\lambda)I_0(\rho k\lambda_k') - \lambda I_0(\rho k\lambda)I_1(\rho k\lambda_k')],$$

$$\int \rho I_1(\rho k\lambda)Y_1(\rho k\lambda_k')d\rho = \frac{\rho}{k(\lambda^2 - \lambda_k'^2)}[\lambda_k' I_1(\rho k\lambda)Y_0(\rho k\lambda_k') - \lambda I_0(\rho k\lambda)Y_1(\rho k\lambda_k')],$$

$$\int \rho I_1(\rho k\lambda_k')Y_1(\rho k\lambda)d\rho = \frac{\rho}{k(\lambda^2 - \lambda_k'^2)}[\lambda_k' I_0(\rho k\lambda_k')Y_1(\rho k\lambda) - \lambda I_1(\rho k\lambda_k')Y_0(\rho k\lambda)],$$

$$\int \rho Y_1(\rho k\lambda)Y_1(\rho k\lambda_k')d\rho = \frac{\rho}{k(\lambda^2 - \lambda_k'^2)}[\lambda_k' Y_1(\rho k\lambda(Y_0(\rho k\lambda_k') - \lambda Y_0(\rho k\lambda)Y_1(\rho k\lambda_k')],$$

Coll'aiuto delle formole (30) otteniamo la relazione seguente:

$$\int_\tau^r \rho[I_1(\rho k\lambda)Y_1(rk\lambda) - I_1(rk\lambda)Y_1(\rho k\lambda)][I_1(\tau k\lambda_k')Y_1(\rho k\lambda_k') - I_1(\rho k\lambda_k')Y_1(\tau k\lambda_k')]d\tau =$$

$$= \frac{1}{k(\lambda^2 - \lambda_k'^2)}\{ - I_1(rk\lambda)I_1(\tau k\lambda_k')[r\lambda_k' Y_1(rk\lambda)Y_0(rk\lambda_k') - r\lambda Y_1(rk\lambda_k')Y_0(rk\lambda) -$$

$$- \tau\lambda_k' Y_1(\tau k\lambda)Y_0(\tau k\lambda_k') + \tau\lambda Y_1(\tau k\lambda_k')Y_0(\tau k\lambda)] + Y_1(rk\lambda)I_1(\tau k\lambda_k') \cdot$$

$$\cdot [r\lambda_k' I_1(rk\lambda)Y_0(rk\lambda_k') - r\lambda I_0(rk\lambda)Y_1(rk\lambda_k') - \tau\lambda_k' I_1(\tau k\lambda)Y_0(\tau k\lambda_k') +$$

$$+ \tau\lambda I_0(\tau k\lambda)Y_1(\tau k\lambda_k')] + I_1(rk\lambda)Y_1(\tau k\lambda_k')[r\lambda_k' I_0(rk\lambda_k')Y_1(rk\lambda) -$$

$$- r\lambda I_1(rk\lambda_k')Y_0(rk\lambda) - \tau\lambda_k' I_0(\tau k\lambda_k')Y_1(\tau k\lambda) + \tau\lambda I_1(\tau k\lambda_k')Y_0(\tau k\lambda)] -$$

$$- Y_1(rk\lambda)Y_1(\tau k\lambda_k')[r\lambda_k' I_1(rk\lambda)I_0(rk\lambda_k') - r\lambda I_0(rk\lambda)I_1(rk\lambda_k') -$$

$$- \tau\lambda_k' I_1(\tau k\lambda)I_0(\tau k\lambda_k') + \tau\lambda I_0(\tau k\lambda)I_1(\tau k\lambda_k')]\}.$$

Valendosi della formola

$$(31)\qquad Y_0(x)I_1(x) - Y_1(x)I_0(x) = \frac{2}{\pi x}$$

si ottiene la seguente espressione dell'integrale precedente:

$$\frac{2}{\pi k^2(\lambda^2-\lambda_k'^2)}[I_1(rk\lambda)Y_1(\tau k\lambda)-I_1(\tau k\lambda)Y_1(rk\lambda)+I_1(\tau k\lambda_k')Y_1(rk\lambda_k')-$$
$$-I_1(rk\lambda_k')Y_1(\tau k\lambda_k')].$$

Tenendo anche conto della relazione

$$\int_0^r \rho[I_1(\rho k\lambda)Y_1(rk\lambda)-I_1(rk\lambda)Y_1(\rho k\lambda)]I_1(\rho k\lambda_k')d\rho=$$
$$=\frac{1}{k(\lambda^2-\lambda_k'^2)}\{Y_1(rk\lambda)[r\lambda_k'I_1(rk\lambda)I_0(rk\lambda_k')-r\lambda I_0(rk\lambda)I_1(rk\lambda_k')]-$$
$$-I_1(rk\lambda)[r\lambda_k'I_0(rk\lambda_k')Y_1(rk\lambda)-rk\lambda I_1(rk\lambda_k')Y_0(rk\lambda)-$$
$$-\lambda_k'\lim_{r=0} rY_1(rk\lambda)I_0(rk\lambda_k')]\}=\frac{2}{\pi k^2(\lambda^2-\lambda_k'^2)}\left[I_1(rk\lambda_k')-\frac{\lambda_k'}{\lambda}I_1(rk\lambda)\right],$$

otteniamo infine la seguente espressione per le funzioni $f_k(r)$:

$$f_k(r)=A_k rI_1(rk\lambda)+A_k'\frac{r}{k^2(\lambda^2-\lambda_k'^2)}\left[I_1(rk\lambda_k')-\frac{\lambda_k'}{\lambda}I_1(rk\lambda)\right]+\tag{32}$$
$$+\frac{\pi r}{2k^2(\lambda^2-\lambda_k'^2)}\int_0^r[I_1(rk\lambda)Y_1(\tau k\lambda)-I_1(\tau k\lambda)Y_1(rk\lambda)+I_1(\tau k\lambda_k')Y_1(rk\lambda_k')-$$
$$-I_1(rk\lambda_k')Y_1(\tau k\lambda_k')]D_k(\tau)d\tau.$$

Derivando rispetto ad r otteniamo le formole

$$f_k'(r)=A_k rk\lambda I_0(rk\lambda)+A_k'\frac{r\lambda_k'}{k(\lambda^2-\lambda_k'^2)}[I_0(rk\lambda_k')-I_0(rk\lambda)]+\tag{33}$$
$$+\frac{\pi r}{2k(\lambda^2-\lambda_k'^2)}\int_0^r[\lambda I_0(rk\lambda)Y_1(\tau k\lambda)-\lambda I_1(\tau k\lambda)Y_0(rk\lambda)+\lambda_k'I_0(\tau k\lambda_k')\cdot$$
$$\cdot Y_0(rk\lambda_k')-\lambda_k'I_0(rk\lambda_k')Y_1(\tau k\lambda_k')]D_k(\tau)d\tau.$$

8. Calcoliamo adesso i coefficienti A_k, A_k', esprimendo che anche le prime due delle condizioni ai limiti del n.° 6 sono soddisfatte. Queste condizioni ci danno le equazioni seguenti

$$A_kI_1(ak\lambda)+A_k'\frac{1}{k^2(\lambda^2-\lambda_k'^2)}\left[I_1(ak\lambda_k')-\frac{\lambda_k'}{\lambda}I_1(ak\lambda)\right]=\tag{34}$$
$$=\frac{\pi}{2k^2(\lambda^2-\lambda_k'^2)}\int_0^a[I_1(\tau k\lambda)Y_1(ak\lambda)-I_1(ak\lambda)Y_1(\tau k\lambda)+I_1(ak\lambda_k')Y_1(\tau k\lambda_k')-$$
$$-I_1(\tau k\lambda_k')Y_1(ak\lambda_k')]D_k(\tau)d\tau,$$

$$A_k\lambda I_0(ak\lambda) + A_k' \frac{\lambda_k'}{k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2)}[I_0(ak\lambda_k') - I_0(ak\lambda)] =$$

$$= \frac{\pi}{2k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2)}\int_0^a [\lambda I_1(\tau k\lambda)Y_0(ak\lambda) - \lambda I_0(ak\lambda)Y_1(\tau k\lambda) + \lambda_k' I_0(ak\lambda_k')Y_1(\tau k\lambda_k') - $$
$$- \lambda_k' I_1(\tau k\lambda_k')Y_0(ak\lambda_k')]D_k(\tau)d\tau.$$

Designiamo con Δ_k i *determinanti* dei coefficienti delle incognite A_k, A_k'

(35) $$\Delta_k = \frac{1}{k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2)}\begin{vmatrix} I_1(ak\lambda), & I_1(ak\lambda_k') \\ \lambda I_0(ak\lambda), & \lambda_k' I_0(ak\lambda_k') \end{vmatrix}.$$

Le equazioni contenenti A_1, A_1' sono *omogenee*, Δ_1 deve essere *nullo*. A_1, A_1' sono dunque dati dalle formole

(36) $$A_1 = A\left[I_1(a\lambda_1') - \frac{\lambda_1'}{\lambda}I_1(a\lambda)\right], \quad A_1' = -AI_1(a\lambda),$$

A essendo un fattore arbitrario, oppure dalle formole

(37) $$A_1 = A\frac{\lambda_1'}{\lambda}[I_0(a\lambda_1') - I_0(a\lambda)], \quad A_1' = -AI_0(a\lambda).$$

Designiamo con $\bar{\Delta}_k$ i determinanti che figurano nelle formole (35). λ, μ sono dunque radici dell'*equazione trascendente considerata già dal Sexl*

(38) $$\bar{\Delta}_1 \equiv \sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}}\, I_0\left(a\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}}\right)I_1(a\lambda) - \lambda I_0(a\lambda)I_1\left(a\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}}\right) = 0.$$

Supponendo che i determinanti $\bar{\Delta}_k$ per $k > 1$ siano *diversi da zero* possiamo calcolare i coefficienti A_k, A_k' per $k > 1$. Troviamo

(39) $$A_k = \frac{\pi}{2\Delta_k k^4(\lambda^2 - \lambda_k'^2)}\Big\{\lambda_k'[I_0(ak\lambda_k') - I_0(ak\lambda)]\int_0^a [I_1(\tau k\lambda)Y_1(ak\lambda) - $$
$$- I_1(ak\lambda)Y_1(\tau k\lambda) + I_1(ak\lambda_k')Y_1(\tau k\lambda_k') - I_1(\tau k\lambda_k')Y_1(ak\lambda_k')]D_k(\tau)d\tau - $$
$$- \left[I_1(ak\lambda_k') - \frac{\lambda_k'}{\lambda}I_1(ak\lambda)\right]\int_0^a [\lambda I_1(\tau k\lambda)Y_0(ak\lambda) - \lambda I_0(ak\lambda)Y_1(\tau k\lambda) + $$
$$+ \lambda_k' I_0(ak\lambda_k')Y_1(\tau k\lambda_k') - \lambda_k' I_1(\tau k\lambda_k')Y_0(ak\lambda_k')]D_k(\tau)d\tau\Big\},$$

$$A_k' = \frac{\pi}{2\Delta_k k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2)}\Big\{I_1(ak\lambda)\int_0^a [\lambda I_1(\tau k\lambda)Y_0(ak\lambda) - \lambda I_0(ak\lambda)Y_1(\tau k\lambda) + $$

$$+\lambda_k' I_0(ak\lambda_k')Y_1(\tau k\lambda_k') - \lambda_k' I_1(\tau k\lambda_k')Y_0(ak\lambda_k')]D_k(\tau)d\tau -$$

$$-\lambda I_0(ak\lambda)\int_0^a [I_1(\tau k\lambda)Y_1(ak\lambda) - I_1(ak\lambda)Y_1(\tau k\lambda) + I_1(ak\lambda_k')Y_1(\tau k\lambda_k') -$$

$$- I_1(\tau k\lambda_k')Y_1(ak\lambda_k')]D_k(\tau)d\tau \Big\}.$$

9. Possiamo adesso scrivere le formole definitive per le $\varphi_k(r)$ e le $f_k(r)$. Otteniamo le formole

$$\varphi_k = \frac{\pi r}{2\Delta_k \cdot k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2)} \Big\{ I_1(rk\lambda_k')I_1(ak\lambda)\int_0^a [\lambda I_1(\tau k\lambda)Y_0(ak\lambda) - \tag{40}$$

$$- \lambda I_0(ak\lambda)Y_1(\tau k\lambda) + \lambda_k' I_0(ak\lambda_k')Y_1(\tau k\lambda_k') - \lambda_k' I_1(\tau k\lambda_k')Y_0(ak\lambda_k')]D_k(\tau)d\tau -$$

$$- \lambda I_1(rk\lambda_k')I_0(ak\lambda)\int_0^a [I_1(\tau k\lambda)Y_1(ak\lambda) - I_1(ak\lambda)Y_1(\tau k\lambda) + I_1(ak\lambda_k')Y_1(\tau k\lambda_k') -$$

$$- I_1(\tau k\lambda_k')Y_1(ak\lambda_k')]D_k(\tau)d\tau + \Delta_k \cdot k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2)\int_0^r [I_1(\rho k\lambda_k')Y_1(ak\lambda_k') -$$

$$- I_1(rk\lambda_k')Y_1(\rho k\lambda_k')]D_k(\rho)d\rho \Big\}$$

che possono evidentemente semplificarsi ed essere scritte così:

$$\varphi_k = \frac{\pi r}{2\Delta_k \cdot k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2)} \Big\{ I_1(rk\lambda_k')\int_0^a \Big[\frac{2}{\pi ak} I_1(\tau k\lambda) + \Delta_k \cdot k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2)Y_1(\tau k\lambda_k') + \tag{41}$$

$$+ (\lambda I_0(ak\lambda)Y_1(ak\lambda_k') - \lambda_k' I_1(ak\lambda)Y_0(ak\lambda_k'))I_1(\tau k\lambda_k')\Big]D_k(\tau)d\tau +$$

$$+ \Delta_k \cdot k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2)\int_0^r [I_1(\rho k\lambda_k')Y_1(rk\lambda_k') - I_1(rk\lambda_k')Y_1(\rho k\lambda_k')]D_k(\rho)d\rho \Big\}.$$

Derivando secondo r, otteniamo le formole

$$\varphi_k' = \frac{\pi r\lambda_k'}{2\Delta_k \cdot k(\lambda^2 - \lambda_k'^2)} \Big\{ I_0(rk\lambda_k')\int_0^a \Big[\frac{2}{\pi ak} I_1(\tau k\lambda) + \Delta_k \cdot k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2)Y_1(\tau k\lambda_k') + \tag{42}$$

$$+ (\lambda I_0(ak\lambda)Y_1(ak\lambda_k') - \lambda_k' I_1(ak\lambda)Y_0(ak\lambda_k'))I_1(\tau k\lambda_k')\Big]D_k(\tau)d\tau +$$

$$+ \Delta_k \cdot k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2)\int_0^r [I_1(\rho k\lambda_k')Y_0(rk\lambda_k') - I_0(rk\lambda_k')Y_1(\rho k\lambda_k')]D_k(\rho)d\rho \Big\}.$$

10. Calcoliamo $f_k(r)$. Abbiamo

$$A_k I_1(rk\lambda) + A_k' \frac{1}{k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2)}\left[I_1(rk\lambda_k') - \frac{\lambda_k'}{\lambda} I_1(rk\lambda)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2\Delta_k \cdot k^4(\lambda^2 - \lambda_k'^2)^2}\Bigg\{ I_1(rk\lambda)\int_0^a \Bigg[\!\!\Bigg[I_1(\tau k\lambda)\Big[\lambda_k' Y_1(ak\lambda)(I_0(ak\lambda_k') - I_0(ak\lambda)) - \lambda Y_0(ak\lambda)\cdot$$

$$\cdot\Big(I_1(ak\lambda_k') - \frac{\lambda_k'}{\lambda} I_1(ak\lambda)\Big) - \lambda_k' I_1(ak\lambda) Y_0(ak\lambda) + \lambda_k' I_0(ak\lambda) Y_1(ak\lambda)\Big] + I_1(\tau k\lambda_k')\cdot$$

$$\cdot\Big[- \lambda_k' Y_1(ak\lambda_k')(I_0(ak\lambda_k') - I_0(ak\lambda)) + \lambda_k' Y_0(ak\lambda_k')\Big(I_1(ak\lambda_k') - \frac{\lambda_k'}{\lambda} I_1(ak\lambda)\Big) -$$

$$- \frac{\lambda_k'}{\lambda}(- \lambda_k' I_1(ak\lambda) Y_0(ak\lambda_k') + \lambda I_0(ak\lambda) Y_1(ak\lambda_k'))\Big] + Y_1(\tau k\lambda)\Big[- \lambda_k' I_1(ak\lambda)\cdot$$

$$\cdot(I_0(ak\lambda_k') - I_0(ak\lambda)) + \lambda I_0(ak\lambda)\Big(I_1(ak\lambda_k') - \frac{\lambda_k'}{\lambda} I_1(ak\lambda)\Big) - \frac{\lambda_k'}{\lambda}(- \lambda I_0(ak\lambda) I_1(ak\lambda) +$$

$$+ \lambda I_0(ak\lambda) I_1(ak\lambda))\Big] + Y_1(\tau k\lambda_k')\Big[\lambda_k' I_1(ak\lambda_k')(I_0(ak\lambda_k') - I_0(ak\lambda)) - \lambda_k' I_0(ak\lambda_k')\cdot$$

$$\cdot\Big(I_1(ak\lambda_k') - \frac{\lambda_k'}{\lambda} I_1(ak\lambda)\Big) - \frac{\lambda_k'}{\lambda}(\lambda_k' I_1(ak\lambda) I_0(ak\lambda_k') - \lambda I_0(ak\lambda) I_1(ak\lambda_k'))\Big]\Bigg]\!\!\Bigg] D_k(\tau)d\tau +$$

$$+ I_1(rk\lambda_k')\int_0^a \Big[\!\!\Big[I_1(\tau k\lambda)[\lambda I_1(ak\lambda) Y_0(ak\lambda) - \lambda I_0(ak\lambda) Y_1(ak\lambda)] + I_1(\tau k\lambda_k')\cdot$$

$$\cdot[- \lambda_k' I_1(ak\lambda) Y_0(ak\lambda_k') + \lambda I_0(ak\lambda) Y_1(ak\lambda_k')] + Y_1(\tau k\lambda)[- \lambda I_0(ak\lambda) I_1(ak\lambda) +$$

$$+ \lambda I_0(ak\lambda, I_1(ak\lambda)] + Y_1(\tau k\lambda_k')[\lambda_k' I_1(ak\lambda) I_0(ak\lambda_k') - \lambda I_0(ak\lambda) I_1(ak\lambda_k')]\Big]\!\!\Big] D_k(\tau)d\tau\Bigg\}.$$

Questa espressione può molto semplificarsi, riducendosi a

$$\frac{\pi}{2\Delta_k \cdot k^4(\lambda^2 - \lambda_k'^2)^2}\Bigg\{ I_1(rk\lambda)\int_0^a \Big[I_1(\tau k\lambda)(\lambda_k' I_0(ak\lambda_k') Y_1(ak\lambda) - \lambda I_1(ak\lambda_k') Y_0(ak\lambda)) +$$

$$+ \frac{2}{\pi ak} I_1(\tau k\lambda_k') - \Delta_k \cdot k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2) Y_1(\tau k\lambda)\Big] D_k(\tau)d\tau + I_1(rk\lambda_k')\int_0^a \Big[\frac{2}{\pi ak} I_1(\tau k\lambda) +$$

$$+ I_1(\tau k\lambda_k')(\lambda I_0(ak\lambda) Y_1(ak\lambda_k') - \lambda_k' I_1(ak\lambda) Y_0(ak\lambda_k')) +$$

$$+ \Delta_k \cdot k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2) Y_1(\tau k\lambda_k')\Big] D_k(\tau)d\tau\Bigg\}.$$

Otteniamo così la formola seguente

$$(43) \qquad f_k = \frac{\pi r}{2\Delta_k \cdot k^4(\lambda^2 - \lambda_k'^2)^2}\Bigg\{ I_1(rk\lambda)\int_0^a \Big[I_1(\tau k\lambda)(\lambda_k' I_0(ak\lambda_k') Y_1(ak\lambda) -$$

$$- \lambda I_1(ak\lambda_k')Y_0(ak\lambda)) + \frac{2}{\pi a k} I_1(\tau k\lambda_k') - \Delta_k \cdot k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2)Y_1(\tau k\lambda)\Big]D_k(\tau)d\tau +$$

$$+ I_1(rk\lambda_k')\int_0^a\Big[\frac{2}{\pi a k} I_1(\tau k\lambda) + I_1(\tau k\lambda_k')(\lambda I_0(ak\lambda)Y_1(ak\lambda_k') - \lambda_k' I_1(ak\lambda)Y_0(ak\lambda_k')) +$$

$$+ \Delta_k \cdot k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2)Y_1(\tau k\lambda_k')\Big]D_k(\tau)d\tau + \Delta_k \cdot k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2)\int_0^r[I_1(rk\lambda)Y_1(\tau k\lambda) -$$

$$- I_1(\tau k\lambda)Y_1(rk\lambda) + I_1(\tau k\lambda_k')Y_1(rk\lambda_k') - I_1(rk\lambda_k')Y_1(\tau k\lambda_k')]D_k(\tau)d\tau\Big\}.$$

La derivata f_k' è data dalla formola

$$(44) \qquad f_k' = \frac{\pi r}{2\Delta \cdot k^3(\lambda^2 - \lambda_k'^2)}\Big\{\lambda I_0(rk\lambda)\int_0^a\Big[I_1(\tau k\lambda)(\lambda_k' I_0(ak\lambda_k')Y_1(ak\lambda) -$$

$$- \lambda I_1(ak\lambda_k')Y_0(ak\lambda) + \frac{2}{\pi a k} I_1(\tau k\lambda_k') - \Delta_k \cdot k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2)Y_1(\tau k\lambda)\Big]D_k(\tau)d\tau +$$

$$+ \lambda_k' I_0(rk\lambda_k')\int_0^a\Big[\frac{2}{\pi a k} I_1(\tau k\lambda) + I_1(\tau k\lambda_k')(\lambda I_0(ak\lambda)Y_1(ak\lambda_k') - \lambda_k' I_1(ak\lambda)Y_0(ak\lambda_k')) +$$

$$+ \Delta_k \cdot k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2)Y_1(\tau k\lambda_k')\Big]D_k(\tau)d\tau + \Delta_k \cdot k^2(\lambda^2 - \lambda_k'^2)\int_0^r[\lambda I_0(rk\lambda)Y_1(\tau k\lambda) -$$

$$- \lambda I_1(\tau k\lambda)Y_0(rk\lambda) + \lambda_k' I_1(\tau k\lambda_k')Y_0(rk\lambda_k') - \lambda_k' I_0(rk\lambda_k')Y_1(\tau k\lambda_k')]D_k(\tau)d\tau\Big\}.$$

11. Consideriamo i *denominatori* nelle espressioni ottenute. Abbiamo

$$\lambda_k' = \lambda + \frac{\mu}{2k\lambda\nu} + \left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$\left(\frac{1}{k^2}\right)$ essendo un' espressione d' ordine $\frac{1}{k^2}$. Ricordiamo la formola asintotica

$$(45) \qquad I_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) + O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Abbiamo dunque asintoticamente

$$\overline{\Delta}_k = \lambda_k' I_1(ak\lambda)I_0(ak\lambda_k') - \lambda I_0(ak\lambda)I_1(ak\lambda_k') = \frac{2}{\pi a k\sqrt{\lambda\lambda_k'}} \cdot$$

$$\cdot \Big\{\Big[\lambda + \frac{\mu}{2k\lambda\nu} + \left(\frac{1}{k^2}\right)\Big]\Big[\cos\left(ak\lambda - \frac{3}{4}\pi\right) + \left(\frac{1}{k}\right)\Big]\Big[\cos\left(ak\lambda_k' - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{1}{k}\right)\Big] -$$

$$-\lambda\left[\cos\left(ak\lambda-\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{1}{k}\right)\right]\left[\cos\left(ak\lambda_k'-\frac{3}{4}\pi\right)+\left(\frac{1}{k}\right)\right]\Big\}=$$

$$=\frac{2}{\pi ak}\left[\cos\left(ak\lambda-\frac{3}{4}\pi\right)\cos\left(ak\lambda_k'-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(ak\lambda-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(ak\lambda_k'-\frac{3}{4}\pi\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{k}\right)\right]+\left(\frac{1}{k^2}\right)=\frac{2}{\pi ak}\sin ak(\lambda-\lambda_k')+\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Ora è

$$\sin ak(\lambda-\lambda_k')=-\sin\frac{\mu a}{2\lambda\nu}+\left(\frac{1}{k}\right).$$

Dunque si ha asintoticamente

$$\overline{\Delta}_k=-\frac{2}{\pi ak}\sin\frac{\mu a}{2\lambda\nu}+\left(\frac{1}{k^2}\right), \tag{46}$$

$$\Delta_k=\frac{2\nu}{\pi a\mu k^2}\sin\frac{\mu a}{2\lambda\nu}+\left(\frac{1}{k^3}\right). \tag{47}$$

Perveniamo così all'*equazione caratteristica*

$$\sin\frac{\mu a}{2\lambda\nu}=0, \tag{48}$$

la stessa che nel caso dei *moti laminari con movimento fondamentale nullo. I valori caratteristici* sono

$$\mu=2m\pi\frac{\lambda\nu}{a}, \tag{49}$$

m numero intero.

12. Possiamo adesso stabilire la *convergenza* delle serie (9) mostrando dapprima la convergenza della serie

$$\varsigma=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k e^{-k(\lambda z+\mu t)}\cdot\varphi_k(r). \tag{50}$$

Supponiamo dunque che λ, μ soddisfanno all'equazione (38), tutti i $\overline{\Delta}_k$ per $k>1$ essendo diversi da zero, e λ, μ non essendo radici dell'*equazione caratteristica* (48). Nel questo caso è evidente che esiste un numero positivo $l>0$ tale che tutti i denominatori nelle espressioni (41) con $k>1$ siano assolutamente superiori ai numeri $\frac{k}{l}$.

É anche evidente l'esistenza per ciascun valore *fissato* di k dei numeri positivi Φ_i, $i=1, 2,\dots k-1$ *maggioranti* le funzioni φ_i, $i=1, 2,\dots k-1$ nel senso seguente. Le funzioni di r

$$\Phi_i\sqrt{r},\quad i=1,\dots k-1$$

maggiorano le funzioni φ_i. Le funzioni

$$\frac{i}{a}\Phi_i\sqrt{r}, \quad i=1,\dots k-1$$

maggiorano le funzioni φ_i', $i=1,\dots k-1$. Le funzioni

$$a^2\frac{\Phi_i}{i}\sqrt{r}, \quad i=1,\dots k-1$$

maggiorano le funzioni f_i, $i=1,\dots k-1$ ed infine le funzioni

$$a\Phi_i\sqrt{r}, \quad i=1,\dots k-1$$

maggiorano le funzioni f_i', $i=1,\dots k-1$.

Questi numeri esistono certamente, tutte le funzioni considerate essendo d'ordine r^2 (almeno) nel punto $r=0$.

Ora noi proveremo l'esistenza di un *numero intero* $k_0>1$ e di un numero positivo N che godono della proprietà seguente. Se Φ_i sono i numeri maggioranti dei quali abbiamo discorso, $i=1, 2,\dots k-1$ dove k è un *numero arbitrario* non minore del numero k_0, il numero Φ_k determinato dalla *relazione ricorrente*

(51) $$\Phi_k = N\sum_{\substack{l+m=k,\\ l,m=1,\dots k-1}}\Phi_l\Phi_m$$

possiede le proprietà seguenti: Le funzioni

$$\Phi_k\sqrt{r}, \quad \frac{1}{a}k\Phi_k\sqrt{r}, \quad a^2\frac{\Phi_k}{k}\sqrt{r}, \quad a\Phi_k\sqrt{r}$$

maggiorano rispettivamente le funzioni

$$\varphi_k, \quad \varphi_k', \quad f_k, \quad f_k'.$$

Avendo provato questo, sarà poi facile dimostrare la convergenza della serie (50) e delle altre serie valendosi di un ragionamento applicato già da me nello studio dei movimenti laminari e che trovasi nelle ricerche interessanti del sig. ODQUIST sopra i problemi ai limiti della teoria dei liquidi viscosi.

13. Consideriamo a tale scopo l'espressione (41) delle funzioni φ_k. Rammentiamo la formola

(52) $$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\omega - n\omega)d\omega$$

dalla quale segue la disuguaglianza $|I_n| \leqq 1$. D'altra parte esiste evidentemente un numero positivo A tale che sussiste per $x > 0$ la disuguaglianza

$$(53) \qquad |I_n(x)| \leqq \frac{A}{\sqrt{x}}.$$

Riguardo alla funzione $Y_n(x)$, $n \geqq 0$, esiste per $x \geqq 1$ un numero positivo A tale che si abbia

$$(54) \qquad |Y_n(x)| \leqq \frac{A}{\sqrt{x}}$$

e per $0 < x \leqq 1$, $n > 0$ un numero positivo A' tale che si abbia

$$(55) \qquad |Y_n(x)| \leqq \frac{A'}{x^n}.$$

Infine esistono numeri positivi A, A' tali che si abbia

$$(56) \qquad |Y_0(x)| \leqq A \log\frac{1}{x} + A'$$

per $0 < x \leqq 1$.

Consideriamo la formola

$$(57) \qquad D_k(\rho) = \frac{\lambda}{\nu\rho}\sum_{l=1}^{k-1} l f_l \varphi_m' - m f_l' \varphi_m.$$

Esiste un numero positivo A indipendente da k tale che, se le funzioni φ_i, f_i colle loro derivate hanno le funzioni maggioranti del numero precedente, si ha la disuguaglianza

$$(58) \qquad |D_k(\rho)| \leqq Ak\sum_{l=1}^{k-1} \Phi_l \Phi_m.$$

Consideriamo l'integrale

$$(59) \qquad I_1 = \int_0^r I_1(\rho k\lambda_k') Y_1(rk\lambda_k') D_k(\rho) d\rho.$$

Per trovare una maggiorante, distinguiamo due casi:

$$1)\ rk\lambda_k' \leqq 1, \quad 2)\ rk\lambda_k' \geqq 1.$$

Nel primo caso la formola (55) ci insegna che possiamo scrivere

$$|I_1| \leqq \frac{A}{rk\lambda_k'}\int_0^r |D_k(\rho)|\, d\rho$$

donde segue la disuguaglianza

(60) $$|I_1| \leqq A \sum_{l=1}^{k-1} \Phi_l \Phi_m .$$

Nel secondo caso si ha evidentemente

$$|I_1| \leqq \frac{A}{\sqrt{r k \lambda_k'}} \int_0^r \frac{A'}{\sqrt{\rho k \lambda_k'}} | D_k(\rho) | d\rho,$$

è dunque ancora

(61) $$|I_1| \leqq A \sum_{t=1}^{k-1} \Phi_l \Phi_m .$$

L'integrale

$$\int_0^r I_1(r k \lambda_k') Y_1(\rho k \lambda_k') D_k(\rho) d\rho$$

lo considereremo insieme coll'integrale

$$\int_0^a I_1(r k \lambda_k') Y_1(\rho k \lambda_k') D_k(\rho) d\rho$$

studiando l'integrale

(62) $$I_2 = \int_r^a I_1(r k \lambda_k') Y_1(\rho k \lambda_k') D_k(\rho) d\rho .$$

Possiamo qui supporre $r > 0$. Nel caso 2) abbiamo

$$|I_2| \leqq \frac{A}{\sqrt{r k \lambda_k'}} \int_r^a \frac{A'}{\sqrt{\rho k \lambda_k'}} | D_k(\rho) | d\rho ;$$

otteniamo dunque la disuguaglianza

(63) $$|I_2| \leqq \frac{A}{\sqrt{r}} \sum_{l=1}^{k-1} \Phi_l \Phi_m .$$

Nel caso $r k \lambda_k' \leqq 1$ divideremo l'intervallo (r, a) nei due intervalli $\left(r, \frac{1}{k\lambda_k'}\right)$, $\left(\frac{1}{k\lambda_k'}, a\right)$ se è $a k \lambda_k' > 1$, mentre abbiamo un'unico intervallo (r, a) se è $a \leqq \frac{1}{k\lambda_k'}$. Nel primo intervallo abbiamo nei due casi la maggiorante

$$A \int_r^{\frac{1}{k\lambda_k'}} \frac{1}{\rho k \lambda_k'} | D_k(\rho) | d\rho \leqq \frac{A'}{k} \int_r^a \frac{1}{\rho} | D_k(\rho) | d\rho \leqq A'' \log \frac{a}{r} \sum_{l=1}^{k-1} \Phi_l \Phi_m$$

abbiamo dunque

(63) $$| I_2^1 | \leqq A'' \log \frac{a}{r} \sum_{l=1}^{k-1} \Phi_l \Phi_m .$$

Nel secondo intervallo (se esiste) è

$$| I_2 | \leqq A \cdot \frac{1}{\sqrt{r \rho} \cdot k} \int_0^a | D_k(\rho) | d\rho ;$$

si ha dunque

(64) $$| I_2^2 | \leqq A \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{l=1}^{k-1} \Phi_l \Phi_m .$$

Dunque possiamo dire che ha sempre luogo la disuguaglianza (63).

Studiamo adesso gli integrali

(65) $$I_3 = \int_0^a I_1(r k \lambda_k') I_1(\tau k \lambda) D_k(\tau) d\tau,$$

(66) $$I_4 = \int_0^a I_1(r k \lambda_k') I_1(\tau k \lambda_k') D_k(\tau) d\tau.$$

Si vede subito che essi ammettono la maggiorazione

$$A \int_0^a \frac{1}{\sqrt{r\tau} \cdot k} | D_k(\tau) | d\tau ;$$

si ha dunque

(67) $$| I_3 |, \ | I_4 | \leqq \frac{A}{\sqrt{r}} \sum_{l=1}^{k-1} \Phi_l \Phi_m .$$

Dalle considerazioni precedenti risulta l'esistenza di un numero $N > 0$ tale che il numero Φ_k determinato dalla (51) dà la funzione maggiorante delle $\varphi_k(r) : \Phi_k \sqrt{r}$ per tutti i k maggiori di un certo numero positivo fisso k_0.

14. Bisogna adesso dimostrare lo stesso comportamento per le funzioni $\varphi_k'(r)$, $f_k(r)$, $f_k'(r)$. Consideriamo la formola (42) che dà $\varphi_k'(r)$. Consideriamo l'integrale

(68) $$I_5 = \int_0^r I_1(\rho k \lambda_k') Y_0(r k \lambda_k') d\rho.$$

Nel caso secondo del numero precedente abbiamo ancora la disuguaglianza

(61). Nel primo caso si può scrivere, servendosi della disuguaglianza (56):

$$| I_5 | \leqq \left(A \log \frac{1}{r k\lambda_k'} + A'\right)\int_0^r | D_k(\rho) | \, d\rho \leqq$$

$$\leqq \left(A \log \frac{1}{r k\lambda_k'} + A'\right) r k\lambda_k' \int_0^r \frac{| D_k(\rho) |}{r k\lambda_k'} d\rho \leqq A'' \sum_{l=1}^{k-1} \Phi_l \Phi_m ,$$

si ha dunque ancora la disuguaglianza (61).

Abbiamo poi l'integrale

$$I_6 = \int_r^a I_0(r k\lambda_k') Y_1(\rho k\lambda_k') D_k(\rho) d\rho, \tag{69}$$

che nel caso 2) ci dà ancora la disuguaglianza (63). Nel primo caso divideremo ancora l'intervallo (r, a) in due intervalli $\left(r, \frac{1}{k\lambda_k'}\right)$, $\left(\frac{1}{k\lambda_k'}, a\right)$ (se è necessario) ottenendo le stesse disuguaglianze (63), (64).

Infine abbiamo gli integrali

$$I_7 = \int_0^a I_0(r k\lambda_k') I_1(\tau k\lambda) D_k(\tau) d\tau, \tag{70}$$

$$I_8 = \int_0^a I_0(r k\lambda_k') I_1(\tau k\lambda_k) D_k(\tau) d\tau \tag{71}$$

che si comportano evidentemente come gli integrali I_3, I_4 del numero precedente.

15. Consideriamo infine le espressioni che danno le f_k nonchè le f_k'. Paragonando le espressioni (43), (44) rispettivamente colle espressioni (41), (42) si vede subito l'esistenza del numero N tale che Φ_k dà anche le maggioranti delle funzioni f_k, f_k'.

Abbiamo dunque provato l'esistenza di un numero N *indipendente* da k e di un numero k_0 tale che *per tutti i* $k > k_0$ la relazione (51) ci dà le funzioni maggioranti volute. Si ottengono così maggiorazioni *per tutte le* φ_i *e* f_i.

È adesso facile di dimostrare la *convergenza uniforme e assoluta* della serie (50) ed insieme della serie

$$\bar{s} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k e^{-k(\lambda x + \mu t)} \cdot f_k(r) \tag{72}$$

con tutte le serie derivate secondo z, r, t. Le *serie maggioranti* saranno evidentemente

(73) $$S = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k E_1{}^k \Phi_k \sqrt{r}$$

e

(74) $$\bar{S} = a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k E_1{}^k \frac{\Phi_k}{r} \sqrt{r}.$$

Effettivamente si ha, grazie alle relazioni (51) di ricorrenza,

$$NS^2 = Nr \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k E_1{}^k \Phi_k \cdot \sum_{k'=1}^{\infty} \varepsilon^{k'} \cdot E_1{}^{k'} \cdot \Phi_{k'} = r \sum_{l=2}^{\infty} \varepsilon^l E_1{}^l \Phi_l = S\sqrt{r} - \varepsilon E_1 \Phi_1 r.$$

S è dunque *radice dell'equazione di secondo grado*

(75) $$NS^2 - S\sqrt{r} + \varepsilon E_1 \Phi_1 r = 0.$$

Abbiamo così

(76) $$S = \frac{1}{2N}[\sqrt{r} - \sqrt{r - 4\varepsilon E_1 \Phi_1 N r}].$$

Sviluppando il radicale, otteniamo la serie S data *indipendentemente*

(77) $$S = \frac{\sqrt{r}}{N}\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} (4N\Phi_1 E_1)^n \varepsilon^n\right].$$

Il raggio di convergenza è

(78) $$\rho = \frac{1}{4NE_1\Phi_1}.$$

Consideriamo anche le *dimensioni.* Si ha

$$[\Psi] = \left[\frac{l^3}{t}\right] = [l\nu], \quad [\varphi] = \frac{[\Psi]}{[l^2]} = \left[\frac{l}{t}\right], \quad [f] = [\Psi],$$
$$[D_k] = \left[\frac{\lambda}{\nu l}\right]\left[\frac{f^2}{l^3}\right] = \left[\frac{1}{lt}\right],$$

le Φ hanno le dimensioni $\left[\frac{\varphi}{\sqrt{l}}\right] = \left[\frac{\sqrt{l}}{t}\right]$, N ha la dimensione $\frac{1}{[\Phi]} = \left[\frac{t}{\sqrt{l}}\right]$, $[N\Phi]$ e ρ sono *senza dimensione.*

Possiamo dunque enunciare il

Teorema: « La serie (9) che dà la funzione $\Psi(r, z, t)$ è convergente *assolutamente* ed *uniformemente* con le sue derivate fino all'ordine 4° rispetto a r, z e t, pei valori $t \geqq 0$, $0 \leqq r \leqq a$, $z \geqq 0$, e soddisfa all'equazione (5), nonchè alle condizioni ai limiti. Il raggio di convergenza è dato dalla formola (78). Si suppone che λ, μ soddisfanno all'equazione $\overline{\Delta}_1 = 0$, essendo positivi, senza soddisfare all'equazione *caratteristica* (48), e senza soddisfare ad alcuna delle equazioni $\overline{\Delta}_k = 0$, $k > 1$ ».

Si potrebbe dimostrare che le convergenze sono *uniformi* in una area limitata del piano λ, μ non contenente le curve (trascendenti) $\overline{\Delta}_k = 0$, $k > 1$, e nemmeno le rette (49) (che tendono verso $\lambda = 0$ coll'aumentare del m), λ, μ supposte soddisfacenti alla relazione $\overline{\Delta}_1 = 0$.

16. Studiamo adesso un poco l'equazione (38) e le equazioni superiori. Abbiamo pei valori *piccoli* di λ

$$\overline{\Delta}_1 = \frac{a\lambda}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\nu}}\, I_0\left(a\sqrt{\frac{\mu}{\nu}}\right) - I_1\left(a\sqrt{\frac{\mu}{\nu}}\right) + (\lambda^3).$$

Ponendo

(79) $$x = a\sqrt{\frac{\mu}{\nu}}$$

abbiamo l'equazione

(80) $$\frac{x}{2} I_0(x) - I_1(x) = 0,$$

studiata già dal Sexl, che possiede, come si vede esprimendo asintoticamente $I_0(x)$ ed $I_1(x)$, *infinite* radici positive. La radice più piccola è, secondo Sexl, 5·136. Le radici sono *semplici*, perchè la derivata è

$$\frac{I_0}{2} - \frac{x}{2} I_1 - \left(-\frac{I_1}{x} + I_0\right) = -\frac{I_0}{2} + I_1\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{2}\right),$$

si avrebbe dunque

$$-\frac{x^2}{4} I_0,$$

e I_0, I_1 avrebbero una radice comune.

Sarebbe interessante di studiare il sistema $\overline{\Delta}_k = 0$ di equazioni trascendenti.

Ueber eine Anwendung der Theorie der fastperiodischen Funktionen auf das Levi-Civitasche Problem der mittleren Bewegung.

Von AUREL WINTNER (Baltimore).

Herr LEVI-CIVITA hat in seiner Arbeit über die mittlere Bewegung des Mondknotens ([1]) einen allgemeinen Satz über das Differentialsystem

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y, \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y \tag{1}$$

bewiesen, wobei die vier Koeffizienten reellwertige und stetige Funktionen des reellen Argumentes t sind, die eine gemeinsame Periode T haben (wir können $T = 2\pi$ setzen). Da bei linearen Differentialgleichungen die Lipschitzsche Bedingung stets erfüllt ist, so geht durch jeden Punkt der reellen (x, y)-Ebene nur eine Lösungskurve

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{2}$$

hindurch. Setzt man also

$$x = r \cdot \cos \vartheta, \quad y = r \cdot \sin \vartheta \tag{3}$$

und drückt man die nichtnegative Grösse r vermöge (2) als eine Funktion $r(t)$ der Zeit aus, so wird

$$r(t) > 0; \quad -\infty < t < +\infty \tag{4}$$

gelten, wenn (2) nicht die triviale Lösung

$$x(t) \equiv 0, \quad y(t) \equiv 0 \tag{5}$$

ist, die wir ausschliessen wollen. Der Azimut $\vartheta = \vartheta(t)$ wird durch (2) und (3) nur mod 2π bestimmt. Wir legen deshalb den Anfangswert $\vartheta(0)$ durch die Ungleichungen $0 \leq \vartheta(0) < 2\pi$ fest und verlangen, dass $\vartheta(t)$ eine für $-\infty < t < +\infty$ *stetige* Funktion der Zeit ist, wodurch $\vartheta(t)$ mit Rücksicht auf (4) völlig

---

([1]) T. LEVI-CIVITA, « Ann. de l'École Norm. Sup. », 28 (3). S. 325-376 (1911). Vgl. auch LIBERA TREVISANI, « Atti del R. Ist. Veneto », 71_2, S. 1089-1137 (1912).

bestimmt wird. Freilich ist $\vartheta(t)$ im allgemeinen keine beschränkte Funktion von t, da doch die Flächengeschwindigkeit des Aufpunktes in jedem Zeitpunkt positiv sein kann, so dass $\vartheta(t)$ zugleich mit t über alle Grenzen wächst. Der Levi-Civitasche Satz besagt nun, dass stets

$$\vartheta(t) = \mu t + O(1) \tag{6}$$

gilt, wobei μ eine passend zu wählende Konstante bedeutet, die auch verschwinden kann.

In den astronomischen Anwendungen dieses Satzes ist es aus dynamischen Gründen vorauszusehen, dass die Abweichung von $\vartheta(t)$ von der rein säkularen Bewegung μt nicht nur beschränkt ist, sondern auch einen mehr oder minder ausgeprägten rekurrenten Charakter haben wird und dass das Restglied

$$\omega(t) = \vartheta(t) - \mu t \tag{7}$$

einer harmonischen Analyse (mit nicht notwendig kommensurablen Partialfrequenzen) fähig ist, wie man das in den Anwendungen stets annimmt. Im Nachstehenden sollen diese Fragen untersucht werden. Dabei werden wir zwei Fälle zu unterscheiden haben, je nachdem einer der beiden charakteristischen Exponenten ρ_1, ρ_2 von (1) komplex oder reell ist.

FALL I. Ist ρ_1 komplex, d. h. $\rho_1 = \alpha + i\beta$ und $\beta \neq 0$, so ist $\rho_2 \neq \rho_1$ und genauer $\rho_2 = \alpha - i\beta$, da doch die Koeffizienten von (1) nach Voraussetzung reell sind, so dass die charakteristische Gleichung der zu einem Umlauf $t \to t + 2\pi$ gehörigen Substitutionsgruppe nur reelle Koeffizienten hat ([2]). Die allgemeine Lösung von (1) enthält wegen $\rho_1 \neq \rho_2$ gewiss keine säkularen Terme. Qualitativ sind zwei Unterfälle zu unterscheiden, je nachdem der Realteil α verschwindet oder nicht. Der Unterfall $\alpha = 0$ ist « stabil », d. h. jede Lösung von (1) verläuft in einem beschränkten Gebiete der (x, y)-Ebene. Der Unterfall $\alpha \neq 0$ ist hingegen « instabil », indem jede Bahnkurve von (1) den Ursprung $r = 0$ mit dem unendlichfernen Punkt $r = +\infty$ verbindet; wegen (4) wird dabei nicht nur $r = +\infty$, sondern auch $r = 0$ nur asymptotisch erreicht, wobei die Kurve nach unendlich vielen Windungen spiralenartig in $r = 0$ mündet.

FALL II. Ist ρ_1 reell, so ist offenbar auch ρ_2 reell, so dass der Fall $\rho_1 = \rho_2$ nicht mehr ausgeschlossen ist und daher die allgemeine Lösung von (1) auch ein säkulares Glied enthalten darf. Liegt nicht dieser singuläre Fall von mehrfachen Elementarteilern vor, ist also z. B. $\rho_1 \neq \rho_2$, und schliesst man

([2]) Um aus den Wurzeln dieser Gleichung die charakteristischen Exponenten zu erhalten. muss man zu Logarithmen übergehen, so dass ρ_1 und ρ_2 eigentlich nur mod i bestimmt sind.

ausserdem den Fall aus, dass $\rho_1 = 0$ oder $\rho_2 = 0$ gilt, so kommt jede Bahnkurve (2) von (1) aus dem unendlich fernen Punkt $r = +\infty$ der (x, y)-Ebene und kehrt dorthin zurück, sofern die beiden Integrationskonstanten, von welchen die allgemeine Lösung von (1) homogen und linear abhängt, von Null verschieden sind, während der Charakter der Bahn derselbe wie in dem instabilen Unterfall $\alpha \neq 0$ von Fall I ist, wenn man eine der beiden Integrationskonstanten gleich Null setzt. Das qualitative Verhalten der Bahn kann also im Falle II von den Integrationskonstanten abhängig sein. Dies ist freilich nicht der Fall, wenn $\rho_1 = \rho_2 = 0$ ist, ohne dass es einen mehrfachen Elementarteiler geben würde (qualitativ gehört dieser Fall eigentlich zu dem stabilen Unterfall $\alpha = 0$ von Fall I).

In früheren Arbeiten habe ich gezeigt ([3]), dass die Bohrsche Theorie der fastperiodischen Funktionen einige klassische Fragestellungen der analytischen und der Himmelsmechanik sinngemäss zu beantworten gestattet. Durch eine dieser Anwendungen bin ich zu der folgenden Vermutung geführt worden, die dann von Herrn BOHR ([4]) bewiesen wurde: Ist

(8a) $$f(t) = e^{i\vartheta(t)}; \quad |f(t)| = 1, \quad -\infty < t < +\infty$$

eine fastperiodische Funktion vom Betrage eins, so lässt ihr Azimut die additive Zerlegung

(8b) $$\vartheta(t) = \mu t + \omega(t)$$

zu, wobei μ eine reelle Konstante und $\omega(t)$ eine reellwertige fastperiodische Funktion bezeichnet. Ist umgekehrt $\omega(t)$ und daher auch $e^{i\omega(t)}$ eine fastperiodische Funktion und definiert man $\vartheta(t)$ durch die Formel (8b), so ist die Funktion (8a) als Produkt

(8c) $$e^{i\vartheta(t)} = e^{i\mu t} e^{i\omega(t)}$$

von zwei fastperiodischen Funktionen vom Betrage eins eine fastperiodische Funktion vom Betrage eins, d. h. die Umkehrung des Bohrschen Satzes ist ebenfalls richtig.

Es stellt sich nun folgendes heraus: *Der Levi-Civitasche Satz* (6) *kann im Falle II nicht allgemein dahin verschärft werden, dass das beschränkte Restglied* (7) *sogar fastperiodisch ist. Im Falle I ist hingegen das Restglied* (7) *stets fastperiodisch, unabhängig davon, ob der stabile* ($\alpha = 0$) *oder der instabile* ($\alpha \neq 0$) *Unterfall vorliegt.*

([3]) « Zeitschr. für Physik », **48**, S. 149-161 (1928); « Math. Zeitschr. », **31**, S. 434-440 (1930); « Rend. Acc. Lincei », **11** (6), S. 464-467 (1630).

([4]) H. BOHR, « Meddel. Kgl. Danske Vid. Selskab », **10**, Nr. 10 (1930).

Aus (3) folgt

$$e^{i\vartheta(t)} = \frac{x(t) + iy(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} \tag{10}$$

wobei wegen (4)

$$r(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2 > 0; \quad -\infty < t < +\infty \tag{11}$$

gilt und stets der positive Zweig des Wurzelausdruckes gemeint ist. Mit Rücksicht auf den Bohrschen Satz (8a), (8b) und seine Umkehrung genügt also folgendes zu zeigen: Im Falle I ist die Funktion (10) stets fastperiodisch, nicht aber im Falle II.

Wir behandeln zuerst den Fall I:

$$\rho_1 = \alpha + i\beta, \ \rho_2 = \alpha - i\beta; \quad \beta \neq 0, \ \alpha = \text{oder} \neq 0.$$

Da dann $\rho_1 \neq \rho_2$ gilt, so ist die allgemeine Lösung von (1) nach Fuchs und Floquet von der Form

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 P_{11}(t) e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 P_{12}(t) e^{(\alpha-i\beta)t}, \\ y(t) &= C_1 P_{21}(t) e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 P_{22}(t) e^{(\alpha-i\beta)t}, \end{aligned} \tag{12}$$

wobei die $P(t)$ vier nach 2π periodische Funktionen bezeichnen, die von den Integrationskonstanten C_1, C_2 unabhängig sind. Die allgemeinste reelle Lösung von (1) hat daher die Gestalt

$$\begin{aligned} x(t) &= \{ (c_1 \cos\beta t - c_2 \sin\beta t) p_{11}(t) + (c_1 \sin\beta t + c_2 \cos\beta t) p_{12}(t) \} e^{\alpha t}, \\ y(t) &= \{ (c_1 \cos\beta t - c_2 \sin\beta t) p_{21}(t) + (c_1 \sin\beta t + c_2 \cos\beta t) p_{22}(t) \} e^{\alpha t}, \end{aligned} \tag{13}$$

wobei die $p(t)$ vier von den reellen Integrationskonstanten c_1, c_2 unabhängige, nach 2π periodische reellwertige Funktionen bedeuten. Wir setzen

$$N(t) = e^{-\alpha t} \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \tag{14}$$

und

$$M(t) = e^{-\alpha t}[x(t) + iy(t)]. \tag{15}$$

Würde die Determinante

$$\Delta(t) = p_{11}(t) p_{22}(t) - p_{12}(t) p_{21}(t)$$

irgendwo, etwa für $t = t_0$, verschwinden, so könnte man nach (13) zwei der Bedingung $c_1^2 + c_2^2 > 0$ genügende reelle Zahlen c_1, c_2 derart bestimmen, dass $x(t_0) = y(t_0) = 0$ wird, was nach (11) nur in dem ausgeschlossenen Falle (5) möglich ist, der aber nach (13) zu $c_1 = c_2 = 0$, also gewiss nicht zu Integrationskonstanten mit $c_1^2 + c_1^2 > 0$ gehört. Folglich kann die Determinante $\Delta(t)$ nirgends verschwinden. Da sie ausserdem als Determinante der $p(t)$ eine stetige und periodische Funktion ist, so gibt es eine von t unabhängige Zahl

$\delta > 0$ derart, dass

$$[\lambda_1 p_{11}(t) + \lambda_2 p_{12}(t)]^2 + [\lambda_1 p_{21}(t) + \lambda_2 p_{22}(t)]^2 \geqq (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\delta \tag{16}$$

gilt, wobei λ_1 und λ_2 zwei beliebige reelle Zahlen bedeuten. Setzt man nun

$$\lambda_1 = c_1 \cos \beta t - c_2 \sin \beta t, \quad \lambda_2 = c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t,$$

so ist die untere Schranke

$$(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\delta = (c_1^2 + c_2^2)\delta$$

gewiss von Null verschieden, da doch $c_1^2 + c_2^2 = 0$ mit Rücksicht auf (13) zu der ausgeschlossenen Lösung (5) gehört. Aus (13), (14) und (16) folgt daher

$$N(t) \geqq \sqrt{(c_1^2 + c_2^2)\delta} > 0; \quad -\infty < t < +\infty. \tag{16a}$$

Die Funktion (14) ist nach (13) fastperiodisch, und sie bleibt nach (16a) oberhalb einer positiven unteren Schranke. Andererseits ist die Funktion (15) mit Rücksicht auf (13) ebenfalls fastperiodisch. Folglich ist der Quotient

$$\frac{M(t)}{N(t)} \tag{17}$$

nach der Bohrschen Theorie gewiss fastperiodisch. Obwohl also in dem instabilen Unterfall $\alpha \neq 0$ mit Rücksicht auf (14) und (15) weder der Zähler noch der Nenner des Ausdruckes (10) fastperiodisch sein kann, wird der Ausdruck (10) selbst, der doch nach (14) und (15) mit der fastperiodischen Funktion (17) identisch ist, in den beiden Unterfällen $\alpha \neq 0$, $\alpha = 0$ von Fall I fastperiodisch sein. Nach dem Bohrschen Satz (8b) folgt daraus nicht nur der Levi-Civitasche Satz (6), sondern auch der fastperiodische Charakter des Restgliedes (7).

Dass die beschränkte Funktion $\omega(t)$ nicht auch in dem Falle II stets fastperiodisch ist, erkennt man bereits an Hand von Differentialgleichungen (1), deren Koeffizienten $a(t)$ unabhängig von t (also gewiss periodisch) sind. Es seien etwa die beiden reellen charakteristischen Exponenten ρ_1, ρ_2 verschieden, so dass die reellen Lösungen von (1) die Form

$$x(t) = Ae^{\rho_1 t} + Be^{\rho_2 t}, \quad y(t) = Ce^{\rho_1 t} + De^{\rho_2 t}$$

haben, wobei die vier reellen Konstanten A, B, C, D bei passender Wahl der Anfangsbedingungen von Null verschieden sind. Dann ist die Funktion

$$e^{i\vartheta(t)} = \exp i \operatorname{arc\,tg} \frac{y(t)}{x(t)} = \exp i \operatorname{arc\,tg} \frac{C + De^{(\rho_2 - \rho_1)t}}{A + Be^{(\rho_2 - \rho_1)t}}$$

nicht unabhängig von t und strebt wegen $\rho_1 \neq \rho_2$ entweder für $\lim t = +\infty$

oder für $\lim t = -\infty$ der Grenze $\exp i \operatorname{arc tg} \frac{C}{A}$ zu. Nun muss aber eine fastperiodische Funktion, die für $\lim t = +\infty$ oder für $\lim t = -\infty$ einen Grenzwert hat, offenbar eine Konstante sein. Folglich ist $e^{i\vartheta(t)}$ und daher nach (8c) auch $\omega(t)$ keine fastperiodische Funktion. Dies kommt vor, auch wenn $\rho_1 = \rho_2$, aber auch der Elementarteiler mehrfach ist, d. h. wenn in (2) säkulare Glieder vorkommen, wie z. B. in der Lösung

$$x(t) = te^{-t}, \quad y(t) = (2t - 1)e^{-t}$$

der Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = x - y, \quad \frac{dy}{dt} = 4x - 3y,$$

wobei der Grenzwert

$$\lim_{t=\infty} e^{i\vartheta(t)} = \lim_{t=\infty} \exp i \operatorname{arc tg} \frac{y(t)}{x(t)} = \exp i \operatorname{arc tg} 2$$

wieder existiert, so dass $\omega(t)$ aus denselben Gründen wie vorher nicht fastperiodisch ist.

Damit ist nicht gesagt, dass $\omega(t)$ im Falle II *nie* fastperiodisch sein kann. Wenn wir zu dem Falle beliebiger periodischer Koeffizienten $a(t)$ zurückkehren und die beiden reellen charakteristischen Exponenten als verschieden voraussetzen, so hat die allgemeinste reelle Lösung von (1) gewiss die Form

$$x(t) = c_1 p_{11}(t) e^{\rho_1 t} + c_2 p_{12}(t) e^{\rho_2 t},$$
$$y(t) = c_1 p_{21}(t) e^{\rho_1 t} + c_2 p_{22}(t) e^{\rho_2 t},$$

wobei die $p(t)$ die Periode 2π haben. Wählt man nun $c_1 > 0$ und $c_2 = 0$, so folgt

$$e^{i\vartheta(t)} = \frac{x(t) + iy(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} = \frac{p_{11}(t) + ip_{21}(t)}{\sqrt{p_{11}(t)^2 + p_{21}(t)^2}},$$

wobei der Nenner mit Rücksicht auf (11) keine Nullstelle hat. Folglich ist $e^{i\vartheta(t)}$, also auch $\omega(t)$ eine fastperiodische, ja sogar periodische Funktion, obwohl der Fall II vorliegt.

Principi variazionali e trasformazioni adiabatiche.

Memoria di Giandomenico Mattioli (a Padova).

Sunto. - *L'A. istituisce un principio variazionale che collega due segmenti qualsivoglia di traiettorie trasformate adiabatiche, e vi arriva considerando i parametri adiabatici come ulteriori coordinate lagrangiane. É poi dimostrata con considerazioni statistiche, la sostituibilità di medie temporali con medie spaziali, sia nel caso quasiergodico generale che in quello dei sistemi di* Stäckel, *da cui conseguono gli invarianti adiabatici classici.*

Si consideri un sistema dinamico S, conservativo a vincoli indipendenti dal tempo, cosicchè, nei riguardi geometrici, ogni sua traiettoria é adagiata sulla superficie $H =$ cost. passante per la posizione iniziale. Supponiamo che la funzione caratteristica sia una $H(p \mid q \mid a)$, cioé contenga certi parametri, indicati con a, i quali normalmente sono costanti — ed allora si hanno i movimenti aventi il carattere geometrico anzidetto — ma che possono anche essere fatti variare con opportuni, ma qualsiasi interventi esterni. Ciò equivale a supporre nella H, le a uguali a certe funzioni del tempo, cosicchè, per i movimenti di questo secondo tipo, la H non sarà più costante, ed il sistema S si trasferirà — nell'intervallo $t_1 - t_0$ durante il quale le a variano — dall'una ad un'altra delle superficie $H =$ cost. sumenzionate. Quando la variazione delle a è lentissima, per cui esse realizzano un incremento infinitesimo δa in un intervallo finito $t_1 - t_0$ di tempo, il movimento di S subisce un'alterazione rispetto a quello che esso possedeva per le a costanti, la quale, secondo Ehrenfest [1], si dice una *trasformazione adiabatica.* Il problema capitale di questa teoria é la ricerca degli *invarianti adiabatici,* cioè di quelle quantità che conservano il loro valore in capo alla trasformazione adiabatica.

Gli invarianti adiabatici finora noti sono tutti attaccati a due particolari movimenti base (denoto così quelli nei quali le a sono costanti): periodici, o

(1) *Adiabatic invariants and the theory of quanta,* « Phil. Mag. », vol. XXXIII, 1917, pag. 500.

che soddisfano alla condizione di quasi ergodicità; e gli autori [1] che li hanno studiati lo fecero ponendosi subito nelle condizioni relative all' uno o all' altro tipo di movimento.

Valeva quindi la pena di adottare un punto di vista più generale, nel senso di ricercare l' effetto di una trasformazione adiabatica su di un generico movimento — e considerato in un qualunque intervallo $t_1 - t_0$ — e non solamente dei tipi predetti. Il criterio mi sembra vantaggioso, perchè, mentre da un lato conduce a delle formule di validità generale, dall' altro consente di affermare la neccessità di certe limitazioni da imporsi alla trasformazione adiabatica, affinchè siano verificate delle circostanze d' ordine statistico che sole conducono alla effettiva costruzione di invarianti adiabatici nei casi particolari prima indicati.

Il metodo lo ho trovato in un' applicazione dei principi variazionali della meccanica, in certi dettagli originale; come nell' impostazione iniziale dove i parametri adiabatici (le quantità a) sono introdotti quali ulteriori coordinate lagrangiane; ciò che, dal lato formale, consente di trattare con procedimenti unitari sia i moti base ($a = \text{cost.}$), che quelli di trasformazione adiabatica (a variabili).

Nei nn. 1-4 sviluppo il metodo variazionale (che credo nuovo) col quale propongo di trattare il problema generale delle trasformazioni adiabatiche, ed arrivo ad una identità, la (9), che compendia in una espressione formale concisa l' effetto della variazione lenta e lineare del parametro adiabatico. Ne dò, al n. 5, una immediata e nota applicazione al caso dei sistemi periodici. L' identità stessa formalmente modificata al n. 7, mi consente, n. 9, di indicare qualche aspetto assunto dalla teoria classica riguardante il metodo d' integrazione di HAMILTON-JACOBI nel caso in cui intervenga un parametro adiabatico; fra altro trovo una formula per l' incremento dell' energia, che, per quanto non adoperata, credo degna di menzione. Al n. 8 passo in esame i sistemi di ROUTH allo scopo, principalmente, di far rilevare in concreto l' importanza che ha la durata della trasformazlone adiabatica per la corretta costruzione di invarianti adiabatici. Al n. 10 dimostro, per n qualunque, la identità tra le medie di una funzione qualsiasi, lungo una traiet-

[1] BURGERS, « Ann. der Physik », Bd. 52 (1917), pag. 195; LEVI-CIVITA, *Drei Vorlesungen über adiabatische Invarianten*, « Abh. Math. Seminar », Hambnrg, Bd. VI (1928), pag. 323; *Sugli invarianti adiabatici*, « Atti del Congresso int. dei Fisici » (Como, 1927). Cfr. anche i trattati di BORN, *Vorlesungen über Atommechanik*; JUVET, *Mécanique analytique et théorie des quanta.*

toria dinamica che sia densa sulla superficie $H = \text{cost.}$, e sulla superficie stessa: conseguentemente ricavo l'invariante di GIBBS. Nei numeri successivi prendo in esame i sistemi di STAECKEL, e ridimostro l'invarianza adiabatica degli integrali di SOMMERFELD, rendendo anche qui rigorosa la sostituzione di medie spaziali a quelle temporali.

1. Osservazione sulla variazione asincrona della forza viva di un sistema dinamico. — Sia assegnato un sistema dinamico, S, a vincoli indipendenti dal tempo: la corrispondente forza viva è allora una funzione quadratica omogenea delle derivate $\dot{q}_i$:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n} {}_{ij} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

con le a_{ij} funzioni delle sole q. Un moto particolare è determinato dai valori iniziali delle q e delle $\dot{q}$. Consideriamo due movimenti di S corrispondenti a valori iniziali infinitamente vicini delle q, $\dot{q}$; nei rispettivi intervalli finiti di tempo $t_0 \vdash\!\dashv t_1$, e $t_0 + \delta t_0 \vdash\!\dashv t_1 + \delta t_1$ nello spazio delle coordinate q_i i due punti rappresentativi rimarranno infinitamente vicini. Facciamo corrispondere al tempo t lungo la prima traiettoria un tempo $t + \delta t$ arbitrario sulla seconda, col solo vincolo che si corrispondano gli istanti iniziali e finali prefissati: se conseguentemente si associano le posizioni q_i e $q_i + \delta q_i$ assunte dal sistema nei due moti considerati, si realizza una variazione *asincrona* (in generale, quando il δt non è identicamente nullo) dalla traiettoria base alla seconda considerata, nella quale la variazione corrispondente di forza viva è data dalla

$$\delta^* T = \delta T - 2T \frac{d\delta t}{dt}.$$

Si è convenuto di indicare con δ gli incrementi relativi a variazioni sincrone: nel nostro caso si avrebbe una siffatta variazione qualora le posizioni q_i, $q_i + \delta q_i$ fossero quelle che corrispondono allo stesso istante t. Il segno differenziale δ^* è relativo invece alla definita variazione asincrona. Indicando con M_0 e M_1 i due moti, ed adottando gli stessi indici per le grandezze relative a ciascuno, si ha pure

$$\delta^* T = T_1(t + \delta t) - T_0(t).$$

2. Interpretazione dei parametri come coordinate lagrangiane. Conseguenti identità lagrangiane. — Si abbia, dunque, un sistema meccanico olonomo nel quale intervengano, oltre a quelli propri al sistema, che diremo al solito q_i, altri parametri a_s i quali possano sia essere mantenuti costanti, sia essere fatti variare lentamente mediante opportuni interventi dall'esterno (variazione di masse, vincoli, forze, ecc.). Si ammette che dopo una qualunque loro variazione, una volta che abbiano ripreso valore costante, il tipo del sistema non sia alterato, cosicchè esso è sempre caratterizzato dai parametri lagrangiani propri: ciò che varierà con le a_s saranno le espressioni della forza viva e delle forze agenti sul sistema, in quanto le a_s sono contenute in modo determinato nelle espressioni analitiche delle quantità dette.

Il moto del sistema é, anche nella fase di variazione delle a_s, pienamente determinato dalle sole equazioni di LAGRANGE relative alle scelte coordinate, perchè si suppongono precisate le a_s quali funzioni del tempo. Nulla vieta però di scrivere anche per i parametri a_s le corrispondenti equazioni lagrangiane sotto forma di *identità*, e precisamente al modo seguente: i primi membri sono dedotti dalla forza viva $T(q \,|\, \dot{q} \,|\, a \,|\, \dot{a})$ al modo solito, i secondi membri vengono posti uguali a quello che diventano i primi quando in essi le a_s, $\dot{a}_s$ siano sostituite con le loro note espressioni in termini di t, $a_s(t)$, $\dot{a}_s(t)$; ed inoltre, supposte prima integrate le equazioni di LAGRANGE propriamente dette, si pongano per le q_i, $\dot{q}_i$, $\ddot{q}_i$, le effettive determinazioni quali funzioni di t e delle costanti introdotte nell'integrazione. In conclusione si viene così ad associare alle equazioni del moto del sistema un numero di relazioni identiche uguale a quello dei parametri a_s, i cui primi membri si presentano in modo simmetrico con gli analoghi delle equazioni lagrangiane, mentre i secondi, una volta precisati i valori delle costanti arbitrarie, cioè sia scelto un particolare moto, si possono *pensare* quali determinate funzioni del tempo. Vedremo che la conoscenza effettiva di tali funzioni non è necessaria, bastando aver riconosciuto che per ogni singolo moto di cui il sistema è capace, esse esistono in modo univocamente determinato.

Sviluppiamo ora i calcoli. Il sistema meccanico S dipenda da n coordinate lagrangiane q_i, $i = 1, 2, \dots n$; e siano inoître a_j, $j = 1, 2, \dots s$, i parametri adiabatici. Senza pregiudizio della generalità, ma al solo scopo di semplicità formale, ammettiamo la presenza di un solo parametro adiabatico, a: è ovvio come si deve procedere altrimenti. Inoltre quando a sia mantenuto costante, i vincoli del sistema siano fissi, talchè la t non interverrà esplicitamente nella forza viva T: completeremo le ipotesi ammettendo, ciò che corrisponde a casi concreti (vincoli variabili, ad es.), che, ove la T dipenda anche dalla derivata $\dot{a}$, essa sia, complessivamente nelle $\dot{q}_i$, $\dot{a}$, una funzione quadratica omogenea a coefficienti funzioni di q_i, a. Le forze, inoltre, provengano da una funzione di forza U, anch'essa dipendente dalle sole q_i, a.

Secondo quanto è stato detto più sopra, scriviamo il complesso delle relazioni

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial T}{\partial a} = Q(t). \tag{1'}$$

Le prime n sono le equazioni del moto, l'ultima, è la summenzionata identità relativa al parametro a, e nella quale abbiamo indicato con $Q(t)$ quello che diventa il primo membro nel particolare moto che si considera, cioè dopo sostituzione al posto di ogni quantità della sua espressione nel tempo.

Ripeto che le (1) bastano in ogni caso alla determinazione del moto (anche quando a varia, perchè è assegnato $a(t)$); la considerazione delle (1'), come si vedrà in seguito, oltre che consentire una impostazione simmetrica del problema, nel senso di trattare alla stessa stregua i moti ad a costante e quelli nei quali a varia (*trasformazioni adiabatiche* del sistema), ci conduce a una rapida valutazione del contributo energetico dovuto alla variazione di a.

Dal punto di vista formale possiamo considerare le (1), (1') come il sistema lagrangiano di un problema dinamico ad $n+1$ gradi di libertà, di coordinate q_i, a: la definizione di $Q(t)$, per ogni singolo moto, equivale sostanzialmente all'affermazione che nell'integrale di (1), (1') il parametro a deve risultare quella prefissata $a(t)$.

3. Impostazione variazionale del problema. — Una dimostrazione classica è quella che prova la completa equivalenza di un sistema di equazioni di LAGRANGE al principio variazionale di HAMILTON: per il nostro scopo conviene adottare l'espressione relativa agli estremi variati. Possiamo dunque compendiare le relazioni (1), (1'), (che si presentano formalmente come un sistema lagrangiano ad $n+1$ variabili) nella formula variazionale

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta T + \sum_1^n{}_i \frac{\partial U}{\partial q_i}\delta q_i + Q\delta a\right)dt = \left|\sum_1^n{}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{a}}\delta a\right|_{t_0}^{t_1} \tag{2}$$

che sussiste per una qualunque variazione *sincrona* del moto naturale anche fra estremi variati.

Introduciamo ora un *asincronismo* nel raffronto del moto variato (in generale fittizio) col moto naturale base (che può essere sia un moto ad $a = \text{cost.}$, oppure ad a variabile in modo assegnato): essendo T quadratica omogenea nelle $\dot{q}_i$, $\dot{a}$, denotando con δ^* le variazioni corrispondenti, si ha (cfr. n. 1)

$$\delta T = \delta^* T + 2T\frac{d\delta t}{dt},$$

e sostituendo nella (2) otteniamo il principio variazionale

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta^* T + 2T\frac{d\delta t}{dt} + \sum_1^n{}_i \frac{\partial U}{\partial q_i}\delta q_i + Q\delta a\right)dt = \left|\sum_1^n{}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{a}}\delta a\right|_{t_0}^{t_1} \tag{3}$$

su cui baseremo le ulteriori nostre considerazioni, e che vale per variazioni qualsiasi della traiettoria naturale, comunque asincrone, e dove beninteso, la variazione δ^* della forza viva deve essere calcolata trattando T come funzione delle a, $\dot{a}$ in modo simmetrico con le q_i, $\dot{q}_i$.

4. Applicazione della (3) al calcolo delle trasformazioni adiabatiche. — Assegniamo alla a un valore costante a_0, ed indichiamo con M_0 un moto corrispondente; determinato, cioè, da certe condizioni iniziali, che per facilitare gli ulteriori riferimenti, precisiamo così: per $t = t_0$, le q_i e le $\dot{q}_i$ siano rispettivamente q_i^0, $\dot{q}_i^0$; indicheremo comprensivamente con P_0^0 l'atto di moto iniziale ora specificato, e talvolta anche solamente la posizione allo stesso istante del sistema.

Siccome vale l'integrale delle forze vive, avremo durante M_0

$$T_0 = U_0 + E_0. \tag{4}$$

Appare dalle notazioni scelte che l'indice 0 sta ad indicare qualunque grandezza relativa ad M_0.

Allo stesso istante t_0, e a partire dall'atto di moto P_0^0, s'inizi *la trasformazione adiabatica* facendo variare *lentissimamente*, e in modo assegnato nel tempo, il parametro a con velocità infinitesima, da trattarsi come quantità di primo ordine, cioè dello stesso ordine delle δq_i, δa che intervengono in (3). Indichiamo con M il moto del sistema che prende luogo *(moto di trasformazione adiabatica,* o *moto intermedio).* Sia t_1 un valore del tempo successivo a t_0; e siano P_0^1, P^1 gli atti di moto del sistema secondochè esso ha percorso la traiettoria M_0 oppure la M. Sia inoltre δa la variazione totale del parametro nell'intervallo di tempo $t_1 - t_0$: il nuovo valore costante $a_1 = a_0 + \delta a$ dello stesso parametro, assieme con l'atto di moto P^1 determina univocamente una traiettoria M_1 percorribile dal sistema S, la quale corrispondendo ad un valore del parametro a infinitamente prossimo a quello, a_0, relativo ad M_0, sarà per ogni suo tratto finito discosta di quantità di primo ordine dalla traiettoria M_0.

Scegliamo su M_1 un punto, P_1^0, infinitamente vicino a P_0^0, ma del resto comunque; siccome il tempo t non interviene esplicitamente in T nè in U, possiamo supporre che S percorra M_1 partendo dall'atto di moto P_1^0 all'istante $t_0 + \delta t_0$ (con δt_0 arbitrario, ma infinitesimo che si considera al solo scopo di tener conto di tutta la generalità possibile). Sia $t_1 + \delta t_1$ l'istante in cui S raggiunge la posizione $P_1^1 = P^1$ dianzi considerata (atto di moto finale, all'istante t_1 del moto intermediario M). Su M_1 vale ancora l'integrale delle forze vive: sia $E_1 = E_0 + \delta E$ il valore che ivi assume la costante E: sarà su M_1

$$T_1 = U_1 + E_1 = U_1 + E_0 + \delta E. \tag{4'}$$

Applichiamo le equazioni (1), (1') al moto intermediario M. Moltiplicandole ordinatamente per $\dot{q}_i$, $\dot{a}$ e sommando, tenuto conto della forma della T, si ricava notoriamente

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma_i{}_1^n \frac{\partial U}{\partial q_i} \dot{q}_i + Q\dot{a};$$

qualora il potenziale U contenga la a, aggiungendo e sottraendo $\frac{\partial U}{\partial a}\dot{a}$, si ha pure

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt} - \left(\frac{\partial U}{\partial a} - Q\right)\dot{a},$$

ed integrando fra t_0 e t_1 lungo la traiettoria M,

$$| T |_{t_0}^{t_1} = | U |_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial U}{\partial a} - Q\right)_M \dot{a}\, dt. \tag{5}$$

L'indice M sta ad indicare che i valori della funzione integranda sono quelli assunti in funzione del tempo sui punti di M.

Sia

$$T = \frac{1}{2} \Sigma_{ij}{}_1^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \Sigma_i{}_1^n b_i \dot{q}_i \dot{a} + c\dot{a}^2 \tag{6}$$

l'espressione generale della forza viva: a_{ij}, b_i, c sono funzioni delle q_i, a, solamente. Abbiamo ammesso che gli atti di moto iniziali (per $t = t_0$) dei movimenti M_0, M, corrispondano agli stessi valori di q_i, $\dot{q}_i$, mentre: $\dot{a} = 0$ per M_0, $\dot{a} =$ quantità di primo ordine per M. Indicando con T'^0, $T_0'^0$ le forze vive iniziali di M e M_0, avremo, osservando la (6),

$$T^0 = T_0^0 + \left(\dot{a} \sum_1^n {}_i b_i \dot{q}_i\right)^0 + (c\dot{a}^2)^0$$

dove con la notazione $(...)^0$ intendiamo che entro parentesi al posto delle q_i, $\dot{q}_i$, a, $\dot{a}$ si devono porre i valori q_i^0, $\dot{q}_i^0$, a_0, $\dot{a}_0$ iniziali per M. Confrontiamo ora T^1, cioè la forza viva in M alla fine di questo moto intermediario (che abbiamo assunta all'istante t_1), con la $T_1^1 =$ forza viva in M_1 per l'atto di moto $P_1^1 = P^1$ (e relativo all'istante $t_1 + \delta t_1$). I due atti di moto coincidono riguardo alle q_i, $\dot{q}_i$; mentre si ha: $\dot{a} = \dot{a}^1 \neq 0$, in generale, per M, e $\dot{a} = 0$ in M_1. Sempre dalla (6) scende

$$T^1 = T_1^1 + \left(\dot{a} \sum_1^n {}_i b_i \dot{q}_i\right)^1 + (c\dot{a}^2)^1$$

dove la notazione $(...)^1$ ha significato analogo a quello dianzi chiarito.

Gli ultimi termini, nelle due precedenti relazioni, sono da trattarsi come quantità di secondo ordine, perchè in essi $\dot{a}$ interviene al quadrato; inoltre si può scrivere

$$\dot{a} \sum_1^n {}_i b_i \dot{q}_i = \dot{a} \frac{\partial T}{\partial \dot{a}}$$

trascurando quantità d'ordine superiore ad $\dot{a}$; allora per sottrazione ricaviamo

$$| T |_{t_0}^{t_1} = T^1 - T^0 = T_1^1 - T_0^0 + \left| \dot{a} \frac{\partial T}{\partial \dot{a}} \right|_{t_0}^{t_1} + [2]$$

dove [2] indica quantità di secondo ordine almeno rispetto ad $\dot{a}$, e la notazione $| ... |_{t_0}^{t_1}$ che della corrispondente quantità si deve fare la differenza dei valori che essa assume alla fine e all'inizio del moto M (cioè in $P^1 = P_1^1$, e in $P^0 = P_0^0$).

Evidentemente

$$| U |_{t_0}^{t_1} = U_1^1 - U_0^0$$

essendo U_1^1, U_0^0 i valori del potenziale delle forza in $P^1 = P_1^1$ e in $P^0 = P_0^0$ rispettivamente; cosicchè in definitiva la (5) può essere scritta

$$T_1^1 - T_0^0 + \left| \dot{a} \frac{\partial T}{\partial \dot{a}} \right|_{t_0}^{t_1} = U_1^1 - U_0^0 - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial U}{\partial a} - Q\right)_M \dot{a} dt + [2]. \tag{5'}$$

Applicando le (4) e (4′) rispettivamente alle configurazioni P_0^0, P_1^1 si ha

$$T_0^0 = U_0^0 + E_0,$$
$$T_1^1 = U_1^1 + E_0 + \delta E;$$

sostituendo nella (5′) si ricava in definitiva per l'incremento della costante delle forze vive nel passaggio dal moto M_0 ad M_1 (entrambi ad a costante) ed operato dalla trasformazione adiabatica M:

$$\text{(6′)} \qquad \delta E = -\left| \dot{a}\frac{\partial T}{\partial \dot{a}} \right|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial U}{\partial a} - Q \right)_M \dot{a}dt + [2].$$

Applichiamo ora due volte la formula variazionale (3), e precisamente assumendo in entrambi i casi M come moto base, e, come moti variati, rispettivamente M_0 ed M_1. Indichiamo con δ_0, δ_1 i corrispondenti simboli di variazione; avremo

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta_0{}^* T + 2T\frac{d\delta_0 t}{dt} + \sum_1^n{}_i \frac{\partial U}{\partial q_i}\delta_0 q_i + Q\delta_0 a \right)_M dt = \left| \sum_1^n{}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta_0 q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{a}}\delta_0 a \right|_{t_0}^{t_1},$$

ed un'altra analoga con δ_1 al posto di δ_0.

Sottraiamo la prima dalla seconda identità: ponendo

$$\delta = \delta_1 - \delta_0$$

con che δ è il simbolo di variazione relativo al passaggio, in generale asincrono, dalla traiettoria M_0 alla M_1, avremo

$$\text{(7)} \qquad \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta^* T + 2T\frac{d\delta t}{dt} + \sum_1^n{}_i \frac{\partial U}{\partial q_i}\delta q_i + Q\delta a \right)_M dt = \left| \sum_1^n{}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{a}}\delta a \right|_{t_0}^{t_1},$$

l'integrale e la differenza a secondo membro essendo calcolati su M.

Richiamiamo ora l'osservazione del n. 1. Se P_0, P_1 sono punti corrispondentesi agli istanti rispettivi t, $t + \delta t$ su M_0 e M_1, avremo

$$\delta^* T = T_1(t + \delta t) - T_0(t);$$

ma dalle (4), (4′)

$$T_0(t) = U_0(P_0) + E_0,$$
$$T_1(t + \delta t) = U_1(P_1) + E_0 + \delta E;$$

per cui

$$\delta^* T = U_1(P_1) - U_0(P_0) + \delta E = \delta U + \delta E.$$

Ora:

$$\delta U = \sum_1^n{}_i \frac{\partial U}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial U}{\partial a}\delta a$$

e quindi

$$\sum_1^n {}_i \frac{\partial U}{\partial q_i}\,\delta q_i = \delta^* T - \delta E - \frac{\partial U}{\partial a}\,\delta a$$

cosicchè la (7) diventa

$$(7') \qquad \int_{t_0}^{t_1}\left(2\delta^* T + 2T\frac{d\delta t}{dt} - \delta E - \left(\frac{\partial U}{\partial a} - Q\right)\delta a\right)_M dt = \left|\sum_1^n {}_i \frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\,\delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot a}\,\delta a\right|_{t_0}^{t_1}.$$

Si ponga per δE il suo valore (6′), e si tenga presente che nell'integrando, oltre al δE, anche δa è costante; avremo l'identità

$$(8) \qquad \begin{aligned} \delta^*\int_{t_0}^{t_1} 2T dt = {}^{(1)} \int_{t_0}^{t_1}\left(2\delta^* T + 2T\frac{d\delta t}{dt}\right)dt = \delta a\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial U}{\partial a} - Q\right)_M dt - \\ - (t_1 - t_0)\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial U}{\partial a} - Q\right)_M \dot a\, dt - (t_1 - t_0)\left|\dot a\,\frac{\partial T}{\partial \dot a}\right|_{t_0}^{t_1} + \left|\sum_1^n {}_i \frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\,\delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot a}\,\delta a\right|_{t_0}^{t_1} \end{aligned}$$

il cui secondo membro ci fornisce l'incremento dell'*azione* relativa al passaggio dalla porzione $P_0^0 P_0^1$ di traiettoria M_0 alla corrispondente $P_1^0 P_1^1$ di traiettoria M_1 (entrambe percorse dal sistema S con a costante e diverso di δa) e collegate fra loro dalla trasformazione adiabatica M realizzata nel corrispondente intervallo di tempo $t_1 - t_0$.

La (8) è di validità assolutamente generale: in particolare per dedurla non abbiamo dovuto fare nessuna ipotesi riguardo al modo di variare del parametro adiabatico a, se si toglie l'affermazione più volte ripetuta, che la derivata $\dot a$ è supposta una funzione regolare del tempo entro $t_1 - t_0$, e piccola tanto da poter essere trattata, nelle identità variazionali, come una quantità dello stesso ordine d'infinitesimo (primo) delle δq_i, ecc. Ma se, pure nell'ambito di questa restrizione, la forma che la $a(t)$ assume nel corso della trasformazione non viene ulteriormente precisata, la (8), pur esprimendo un'identità conseguenza della trasformazione stessa, non ci consente una conclusione espressiva, *ed inoltre indipendente dal moto intermediario* M. Ed invero nei due integrali del 2° membro è palese l'intervento essenziale di M.

Il solo modo, in generale almeno, *di rendere la* (8) *indipendente da* M, *è di porre* $\dot a = \varepsilon =$ *costante infinitesima; con chè si precisa l'andamento*

(1) Quanto alla legittimità del trasporto del segno δ^* fuori dell'integrale, v. LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale,* Vol. II$_{II}$ p. 507.

lineare nel tempo del parametro adiabatico a. È precisamente qui che appare la necessità di questa definizione che fu menzionata nell'introduzione.

La verifica è immediata, perchè in tal caso

$$(t_1 - t_0)\dot{a} = (t_1 - t_0)\varepsilon = \delta a,$$

cosicchè al secondo membro si elidono i due integrali, nonchè due altri termini, e resta

$$\delta^* \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = \left| \sum_1^n {}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_0}^{t_1} \tag{9}$$

come identità fondamentale, esprimente l'effetto di una trasformazione adiabatica δa realizzata *linearmente* e nell'intervallo di tempo $t_1 - t_0$.

5. **Caso dei sistemi periodici.** — Come semplice e immediata applicazione della (9) alla costruzione di *invarianti adiabatici*, cioè di quantità che conservano inalterato il valore in capo ad una determinata trasformazione adiabatica, consideriamo il caso in cui le due traiettorie $\dot{M}_0$ ed M_1 sono chiuse (ed i moti su di esse, quindi, periodici). Se la formula variazionale (9) è applicata con asincronismo tale che si corrispondano le due intere orbite, il secondo membro s'annulla (a rigore diventa infinitesimo di secondo ordine almeno), e si ha

$$\delta^* \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = 0.$$

Si ritrova il risultato noto, cioè l'invarianza adiabatica dell'*azione* estesa ad un periodo (per i moti periodici).

6. **Osservazione relativa al modo di variare dei parametri adiabatici.** — Appare dai calcoli svolti al n. 4, che per la traiettoria trasformata M_1, assegnato l'incremento δa del parametro adiabatico e l'intervallo di tempo in cui si svolge la trasformazione, è determinata la variazione δE dell'energia totale del sistema. Per svincolare i risultati dal moto intermediario M, abbiamo dovuto, inoltre, far ricorso all'ipotesi della linearità nel tempo del parametro a stesso durante M.

Supponiamo ora, più generalmente, che nei dati del problema: forza viva e funzione di forza, oltre al parametro a ne intervengano altri ancora: $c_1, \dots c_\alpha, \dots c_m$, i quali nel moto base e in quello trasformato siano costanti, mentre invece nel moto di trasformazione varino *in modo determinato dalla* *traiettoria base e dalla legge di variazione di* a: allora le c_α risulteranno essere, nell'intervallo $t_1 - t_0$, delle determinate $c_\alpha(t)$, *non necessariamente lineari*. Le supporremo però limitate e derivabili.

Anche quando la variazione totale delle c_α è infinitesima, non è dunque possibile di trattarle senz'altro come ulteriori parametri adiabatici accanto alla a, dovendo, per poter far questo, essere anch'esse funzioni lineari di t durante il moto di trasformazione. Senonchè in un caso importante è possibile far ciò; ed ecco come.

Assegnati la variazione δa del parametro a, e l'intervallo $t_1 - t_0$ durante il quale si svolge il moto di trasformazione, nonché il moto base e un'origine su di esso, la traiettoria trasformata è, come abbiamo visto, univocamente determinata; e corrisponderà, in particolare, a certi incrementi δE, δc_α, della costante delle forze vive e delle ulteriori costanti c_α, che supporremo pienamente determinati dalla trasformazione stessa. Supponiamo viceversa, che il problema dinamico sia tale che *i valori delle costanti* E, c_α *individuino completamente la traiettoria* (non importa la legge oraria), allora, soddisfatta una condizione riconoscibile caso per caso, è possibile considerare le c_α come parametri adiabatici, per quanto, ripeto, la loro dipendenza dal tempo non sia generalmente lineare.

Infatti, proviamo a trattare le c_α al pari della a come parametri adiabatici, sostituendo, in conseguenza, alle effettive $c_\alpha(t)$ le espressioni, valide durante la trasformazione

$$c_\alpha(t) = c_\alpha^0 + \frac{\delta c_\alpha}{t_1 - t_0}(t - t_0).$$

È chiaro che l'incremento che così risulta per c_α all'istante t_1 è uguale a quello della reale trasformazione: orbene, *se in questa fittizia trasformazione adiabatica, l'incremento della costante* E *è uguale a quello reale*, (ciò che può o no essere) *valendo l'ipotesi espressa più sopra, la traiettoria trasformata coincide con quella raggiunta nella trasformazione reale.*

Poichè nell'uno e nell'altro modo di realizzare la trasformazione possono essere fatti corrispondere gli stessi estremi sulle due traiettorie, si conclude affermando la possibilità (ai fini del calcolo della trasformazione) di trattare le c_α come ulteriori parametri adiabatici (a variazione lineare).

In sostanza, procedendo a questo modo, si sostituisce alla effettiva traiettoria di trasformazione, un'altra che sarà a quella prossima (le due espressioni di $\dot{c}_\alpha$: vera e fittizia, differiranno nei casi concreti di quantità infinitesime), ma che ne ha gli stessi estremi e perciò fa corrispondere le due stesse traiettorie base. Ora è precisamente questa corrispondenza che solamente interessa conoscere, per valutare le variazioni determinate nelle qualsiasi grandezze meccaniche dalla trasformazione δa del vero parametro adiabatico: purchè essa si conservi alterando comunque il moto intermediario, potremo calcolare quelle variazioni con referenza a questa fittizia trasformazione.

Un' osservazione in certa guisa inversa della precedente, può farsi relativamente al modo di realizzare la variazione δa del parametro. Essa nei calcoli precedenti fu supposta lineare: ora, se assumendo a non più lineare, ma determinato altrimenti, ne conseguono gli stessi δE, δc_α per un assegnato δa, e questi determinano ancora univocamente la traiettoria trasformata, è possibile, al solo scopo di opportunità analitica, di adottare per la $a(t)$ quella legge di variazione. Questa osservazione può giovare quando convenisse sostituire il tempo con un parametro non proporzionale.

7. Forme equivalenti della identità variazionale (9). — Introduciamo la funzione lagrangiana

$$L = T + U.$$

Sulla traiettoria base M_0 e su quella variata M_1 sussiste l' integrale delle forze vive

$$T - U = E$$

con i valori E_0, $E_0 + \delta E$ della costante, rispettivamente: sulle stesse traiettorie sarà dunque

$$2T = L + E.$$

Essendo la T su M_0 e M_1 una funzione quadratica omogenea delle sole $\dot{q}$ (si ricordi che $\dot{a}$, ove intervenga nella espressione generale della forza viva, è nulla sulle due menzionate traiettorie), quando si assumano le coordinate canoniche p_i, q_i, relative alla forma ridotta (con $\dot{a} = 0$) della T, avremo anche

$$2T = \sum_1^n{}_i\, p_i \dot{q}_i,$$

cosicchè alla (9) si può dare l' una o l' altra delle due forme equivalenti

$$\delta^* \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n{}_i\, p_i \dot{q}_i dt = \left| \sum_1^n{}_i\, p_i \delta q_i \right|_{t_0}^{t_1}, \tag{9'}$$

$$\delta^* \int_{t_0}^{t_1} (L + E) dt = \left| \sum_1^n{}_i\, p_i \delta q_i \right|_{t_0}^{t_1}. \tag{9''}$$

In certi casi può essere conveniente di prospettare il problema dinamico sotto l'aspetto hamiltoniano. Consideriamo dunque i moti ad a costante, e quindi la forza viva, eventualmente ridotta, T.

Posto $L = T + U$, si ha notoriamente,

$$H = \sum_1^n{}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \sum_1^n{}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \sum_1^n{}_i p_i \dot{q}_i - L.$$

Il secondo gruppo delle equazioni canoniche ci fornisce

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \tag{10}$$

inoltre nei moti considerati si ha $H = E$: si può dunque esprimere $L + E$, nota la funzione H, al modo seguente

$$L + E = \sum_1^n{}_i p_i \dot{q}_i = \sum_1^n{}_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{11}$$

che possiamo, volendo, anche trasformare sostituendo le p_i con le $\dot{q}_i$ previa risoluzione delle (10) rispetto alle p_i; ciò che è possibile fare perchè supponiamo $\neq 0$ l'hessiano della L iniziale rapporto alle $\dot{q}_i$, e quindi, come si riconosce facilmente, quello della H rispetto alle p_i.

L'osservazione da ritenere è questa: posto il problema dinamico sotto forma hamiltoniana, è possibile con calcoli algebrici ricavare la corrispondente funzione $L + E$ che interessa considerare nel principio variazionale fondamentale delle trasformazioni adiabatiche (9'').

8. **Sistemi del Routh.** — Consideriamo il caso elementare in cui alcune variabili, diremo $q_1, q_2, \ldots q_m$, sono ignorate; cioè non intervengano nella H (sempre per a costante). Si hanno allora i corrispondenti integrali primi

$$p_j = c_j, \qquad j = 1, 2, \ldots m.$$

È altresì classico che la determinazione del moto è ridotta all'integrazione del sistema canonico relativo alla nuova funzione

$$\mathcal{H} = H(q_{m+1}, \ldots q_n, p_{m+1}, \ldots p_n \,|\, c \,|\, a)$$

ed alle quadrature

$$q_j = \int \frac{\partial H}{\partial c_j} dt, \qquad j = 1, 2, \ldots m.$$

Due casi si presentano attualmente in relazione alle trasformazioni adiabatiche: nell'espressione completa della forza viva interviene la $\dot{a}$, oppure no.

Nei riguardi delle costanti c_j si riconosce che in generale (cioè quando le $q_1, \ldots q_m$ non siano ignorate anche nei termini di T contenenti $\dot{a}$), alla fine della trasformazione adiabatica: nel primo caso, le c_j restano incrementate di certe δc_j, mentre nel secondo restano costanti.

Ed infatti dalle equazioni

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \frac{\partial L(q \mid \dot{q} \mid a, \dot{a})}{\partial q_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots m,$$

applicate al moto di trasformazione, appare che: se nella espressione *completa* di T le $q_1, \ldots q_m$ sono ignorate (quindi anche nei coefficienti di $\dot{a}$), il secondo membro è per tutte $= 0$, cosicchè $p_j = \text{costante} = c_j$ anche durante tutta la trasformazione; se invece $q_1, \ldots q_m$, sono ignorate solamente nella forma *ridotta* ($\dot{a} = 0$) della T, i secondi membri non sono più nulli, ed interviene una variazione delle costanti c_j.

Comunque sia, la (11) diviene

$$L + E = \sum_{m+1}^{n}{}_r\, p_r \dot{q}_r + \sum_{1}^{m}{}_j\, c_j \dot{q}_j,$$

e quindi la (9″)

$$\delta^* \left[\int_{t_0}^{t_1} \sum_{m+1}^{n}{}_r\, p_r \dot{q}_r dt + \sum_{1}^{m}{}_j\, c_j \int_{t_0}^{t_1} \dot{q}_j dt \right] = \left| \sum_{1}^{n}{}_i\, p_i \delta q_i \right|_{t_0}^{t_1}.$$

Calcolando il secondo integrale e sviluppandone la variazione, si ha

$$\delta^* \int_{t_0}^{t_1} \sum_{m+1}^{n}{}_r\, p_r \dot{q}_r dt = \left| \sum_{1}^{m}{}_j\, c_j \delta q_j + \sum_{m+1}^{n}{}_r\, p_r \delta q_r \right|_{t_0}^{t_1} - \sum_{1}^{m}{}_j\, c_j \left| \delta q \right|_{t_0}^{t_1} - \sum_{1}^{m}{}_j\, \delta c_j \left| q_j \right|_{t_0}^{t_1}$$

e con evidente semplificazione

$$\delta^* \int_{t_0}^{t_1} \sum_{m+1}^{n}{}_r\, p_r \dot{q}_r dt = \left| \sum_{m+1}^{n}{}_r\, p_r \delta q_r - \sum_{1}^{m}{}_j\, q_j \delta c_j \right|_{t_0}^{t_1}.$$

Nell'introduzione, si è accennato all'importanza che ha in generale la durata della trasformazione adiabatica per la corretta costruzione degli invarianti adiabatici: possiamo ora dare un esempio di questa circostanza, particolarizzando il caso trattato in questo numero, e precisamente supponendo che le coordinate ignorate siano $n - 1$. Supporremo tali le prime $n - 1$, cosicchè la precedente relazione si riduce a

(12) $$\delta^* \int_{t_0}^{t_1} p_n \dot{q}_n dt = \left| p_n \delta q_n - \sum_{1}^{n-1}{}_j\, q_j \delta c_j \right|_{t_0}^{t_1}.$$

Supponiamo che $\dot{a}$ non intervenga in T; allora sappiamo che $\delta c_j = 0$; per cui ponendo $\dot{q}_n dt = dq_n$ e sostituendo nell'integrale all'integrazione temporale la corrispondente nel piano p_n, q_n dello spazio delle fasi tra le posizioni P_0, P_1 corrispondenti agli istanti t_0, t_1, avremo

$$\delta^* \int_{P_0}^{P_1} p_n dq_n = | p_n \delta q_n |_{P_0}^{P_1}.$$

Il moto sia ora periodico nei riguardi della coppia coniugata p_n, q_n, per ogni valore del parametro a: estendendo l'integrazione alla relativa orbita γ sul piano stesso, il secondo membro s'annulla, e resta, con evidente significato dell'indice apposto al segno d'integrale,

$$\delta^* \int_{\gamma} p_n dq_n = 0$$

la quale definisce l'integrale stesso come *invariante adiabatico.* Appare dunque che tale integrale è invariante purchè la trasformazione adiabatica δa a cui il sistema è assoggettato *duri anche un solo periodo relativo a* p_n, q_n.

Conservando l'ipotesi della periodicità sul piano p_n, q_n, passiamo ora all'altro caso: la T contenga effettivamente $\dot{a}$. Ammettiamo che il nostro sistema dinamico possegga la cosidetta *stabilità alla Poisson,* la quale esprime che, ove la traiettoria non sia periodica, il sistema ripassa certamente vicino quanto si vuole ad una sua qualunque posizione iniziale. Assumendo al solito in t_0 l'origine del moto base M_0, nell'identità (12) sia t_1 un valore del tempo cui corrisponde per il sistema una posizione prossima all'iniziale in modo che gli scostamenti Δp_i, Δq_i delle variabili canoniche p_i, q_i possano trattarsi come quantità di primo ordine. Abbiamo supposto il moto periodico sul piano p_n, q_n: la proiezione della traiettoria sul piano stesso sarà una curva γ chiusa, di lunghezza finita. Restringendo eventualmente il limite concesso allo scostamento or ora menzionato, si può certo far in modo che all'istante t_1 le variabili p_n, q_n siano sulla γ in un punto prossimo alla loro determinazione in t_0, cosicchè, se τ è il periodo relativo a p_n, q_n, $t_1 - t_0$ differirà di poco da un certo multiplo, $m\tau$, di τ. Per la regolarità del moto, all'istante, prossimo a t_1,

$$t_1' = t_0 + m\tau$$

il sistema potrà ancora valutarsi in una posizione scostata di quantità di primo ordine rispetto a quella in t_0. Togliendo ora l'apice apposto a t_1, assumiamo t_1 proprio eguale a $t_0 + m\tau$. Il secondo membro della (12) è allora da porsi uguale a zero, perchè, p_n, δq_n, sono eguali in t_0 e t_1, e le differenze, di primo ordine

$$q_j(t_1) - q_j(t_0) = \Delta q_j,$$

dovendo essere moltiplicate per δc_j, dànno luogo a quantità di secondo ordine, e perciò trascurabili nelle formule variazionali. Si ha ancora, adunque,

$$\delta^* \int_\gamma p_n dq_n = 0;$$

ma attualmente, affinchè l'integrale ciclico indicato sia *invariante adiabatico*, occorre che la trasformazione δa sia realizzata in un tempo che potrà essere anche uguale ad un multiplo abbastanza grande di periodi τ.

Ulteriori considerazioni possono farsi quando T non contiene $\dot{a}$, potendo in tal caso trattare le costanti d'integrazione c_j come ulteriori parametri adiabatici. Infatti, come è stato detto più sopra, il problema dinamico proposto da' luogo all'altro relativo alla funzione hamiltoniana

$$(13)\quad \mathcal{H}(q_{m+1} \dots q_n,\ p_{m+1} \dots p_n \mid c \mid a) = H(q_{m+1} \dots q_n,\ c_1 \dots c_m,\ p_{m+1} \dots p_n \mid a),$$

e inoltre le c_j conservandosi costanti nella trasformazione relativa al parametro a, sono da questo indipendenti. Nulla vieta, quindi, nel problema dinamico retto dalla (13) di considerare *una nuova trasformazione adiabatica* nella quale accanto ad a sono fatti variare, s'intende linearmente, anche le quantità c_j. Si ha ancora fra la traiettoria base e quella che prende luogo a trasformazione avvenuta (cfr. la (9') e la (11) da valutare con la (13))

$$\delta^* \int_{t_0}^{t_1} \sum_{m+1}^{n}{}_r\, p_r \dot{q}_r dt = \left| \sum_{m+1}^{n}{}_r\, p_r \delta q_r \right|_{t_0}^{t_1};$$

e nel caso di $n-1$ coordinate ignorate, e di moto periodico nella rimanente coppia p_n, q_n,

$$\delta^* \int_\gamma p_n dq_n = 0$$

di fronte alla variazione lenta (e lineare) anche delle c_j, oltre che della a, e della durata di uno (o più) periodi.

9. **Relazioni col metodo d'integrazione di Hamilton-Jacobi.** — Dalla $n+1^{esima}$ equazione lagrangiana (più propriamente, identità lagrangiana)

ricaviamo (d'ora in poi $\dot{a} = \varepsilon =$ costante)

$$\varepsilon\int_{t_0}^{t_1} Q dt = \varepsilon \left| \frac{\partial T}{\partial \dot{a}} \right|_{t_0}^{t_1} - \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial a} dt;$$

d'altronde è (cfr. la (6'))

$$\delta E = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left(Q - \frac{\partial U}{\partial a} \right) dt - \varepsilon \left| \frac{\partial T}{\partial \dot{a}} \right|_{t_0}^{t_1},$$

per cui, con la solita posizione $L = T + U$,

$$0 = \delta E + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial a} dt. \tag{14}$$

Risulta dalla successione dei calcoli che la derivata di L rapporto ad a deve essere calcolata supponendo L espressa in termini di q_i, $\dot{q}_i$, a; inoltre, mentre a rigore $\dfrac{\partial L}{\partial a}$ va presa sulla M, per la presenza del fattore infinitesimo ε, potremo, con errore trascurabile, calcolare il precedente integrale sulla traiettoria base M_0. Aggiungiame la precedente identità, moltiplicata per $t_1 - t_0$, alle (9'), (9''). Ricaviamo

$$\delta^* \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = \left| \sum_1^n {}_i\, p_i \delta q_i \right|_{t_0}^{t_1} + (t_1 - t_0)\delta E + \delta a \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial a} dt; \tag{15}$$

$$\delta^* \int_{t_0}^{t_1} (L + E) dt = \left| \sum_1^n {}_i\, p_i \delta q_i \right|_{t_0}^{t_1} + (t_1 - t_0)\delta E + \delta a \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial a} dt.$$

Ora

$$\delta^* \int_{t_0}^{t_1} E dt = (t_1 - t_0)\delta E + | E \delta t |_{t_0}^{t_1}$$

per cui la precedente identità diviene (notando che $H = E$)

$$\delta^* \int_{t_0}^{t_1} L dt = \left| \sum_1^n {}_i\, p_i \delta q_i - H \delta t \right|_{t_0}^{t_1} + \delta a \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial a} dt. \tag{15'}$$

Gli integrali ai primi membri delle (15) e (15') sono rispettivamente l'*azione* e la *funzione principale di Hamilton*: ponendo come d'ordinario

$$A = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt, \quad S = \int_{t_0}^{t_1} L dt,$$

avremo dunque per le corrispondenti variazioni nel passaggio dalla traiettoria base a quella trasformata mediante la trasformazione adiabatica δa applicata in un intervallo di tempo $t_1 - t_0$ (pari a quello per cui A ed S sono calcolati):

$$\delta^* A = \left| \sum_1^n {}_i\, p_i \delta q_i \right|_{t_0}^{t_1} + (t_1 - t_0)\delta E + \delta a \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial a}\, dt, \tag{16}$$

$$\delta^* S = \left| \sum_1^n {}_i\, p_i \delta q_i - H\delta t \right|_{t_0}^{t_1} + \delta a \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial a}\, dt. \tag{16'}$$

Pensiamo ora a costante: è noto che, sotto certe condizioni qualitative soddisfatte nei problemi dinamici, l'azione, per i moti conservativi, si può esprimere come una funzione delle coordinate estreme della traiettoria e dell'energia E; cioè, tenendo presente che nel problema attuale interviene anche un parametro a, si può scrivere

$$A = A(q_i^0 \mid q_i^1 \mid E \mid a); \tag{17}$$

mentre la funzione principale può essere espressa in termini delle variabili q^0, q^1, t_1, t_0. Notando che per $a =$ costante la H non contiene esplicitamente in tempo, S dipenderà da t solamente mediante la differenza $t_1 - t_0$; sarà dunque

$$S = S(q_i^0 \mid q_i^1 \mid t_1 - t_0 \mid a). \tag{18}$$

È noto inoltre che per le A, S espresse in siffatto modo si ha

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial q_i^1} = \frac{\partial S}{\partial q_i^1} = p_i^1, \\ &\frac{\partial A}{\partial q_i^0} = \frac{\partial S}{\partial q_i^0} = - p_i^0, \\ &\frac{\partial A}{\partial E} = t_1 - t_0, \\ &\frac{\partial S}{\partial t_1} = H_1, \quad \frac{\partial S}{\partial t_0} = - H_0. \end{aligned} \tag{19}$$

Sostituendo conformemente nei secondi membri delle (16), (16') si ricava

$$\delta^* A = \sum_1^n {}_i \frac{\partial A}{\partial q_i^1} \delta q_i^1 + \frac{\partial A}{\partial q_i^0} \delta q_i^0 + \frac{\partial A}{\partial E} \delta E + \delta a \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial a}\, dt,$$

$$\delta^* S = \sum_1^n {}_i \frac{\partial S}{\partial q_i^1} \delta q_i^1 + \frac{\partial S}{\partial q_i^0} \delta q_i^0 + \frac{\partial S}{\partial t_1} \delta t_1 + \frac{\partial S}{\partial t_0} \delta t_0 + \delta a \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial a}\, dt.$$

Ma evidentemente $\delta^* A$, $\delta^* S$ devono essere i differenziali totali delle funzioni espresse secondo le (17), (18): si ha dunque

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial a} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial a} \, dt, \tag{20}$$

la $\dfrac{\partial L}{\partial a}$ essendo calcolata dalla $L(q \mid \dot{q} \mid a)$, e l' integrale esteso alla traiettoria base M_0.

Come è noto, l'azione soddisfa all'equazione di HAMILTON-JACOBI

$$H\left(\frac{\partial A}{\partial q} \,\middle|\, q\right) = E,$$

e si dimostra che fra gli $n+1$ parametri costanti q_i^0, E che intervengono nella A, se ne possono sempre scegliere n tali che rispetto ad essi la $A(q \mid q^0 \mid E \mid a)$ sia un integrale completo della precedente equazione.

In relazione a questo procedimento classico di integrazione delle equazioni canoniche, per gli attuali problemi nei quali interviene un parametro a, si ricava immediatamente l'incremento dell'energia E conseguente alla trasformazione adiabatica δa applicata nell'intervallo di tempo $t_1 - t_0$ in capo al quale il sistema passa da q_i^0 a q_i^1.

Infatti dalla (14) e dalla prima delle (20) scende

$$\frac{\partial A}{\partial a} \varepsilon = - \delta E$$

moltiplicando per $t_1 - t_0$ e badando alla terza delle (19)

$$\frac{\partial A}{\partial a} \delta a = - \frac{\partial A}{\partial E} \delta E,$$

e quindi

$$\delta E = - \frac{\dfrac{\partial A}{\partial a}}{\dfrac{\partial A}{\partial E}} \delta a.$$

Risolto dunque il problema dinamico col metodo di HAMILTON-JACOBI, il calcolo di δE è immediato e non necessita neppure la quadratura che appare nella (14).

10. **Invariante adiabatico di Gibbs.** — La formula variazionale (9), o le equivalenti menzionate in precedenza, contengono tutto quanto ha riguardo

alla trasformabilità adiabatica di una porzione di traiettoria qualsiasi: senonchè i risultati più espressivi si realizzano, in questa teoria, relativamente alle traiettorie chiuse (periodiche) già considerate al n. 5, e a quelle altre che riempiono in modo denso, o quasi, la superficie $H=E$ nello spazio delle fasi, p_i, q_i. Consideriamo ora questo secondo caso. Due ipotesi sono da farsi: la superficie $H=E_0$, che chiameremo Σ, su cui la traiettoria base M_0 è deposta, sia chiusa, cosicchè risulti finito il volume V, $2n$-dimensionale, ch'essa racchiude nello spazio delle variabili coniugate p_i, q_i; inoltre valga l'ipotesi *quasi ergodica*, vale a dire la M_0, purchè venga considerata in un intervallo di tempo sufficientemente grande, passi vicino quanto si vuole ad un qualunque punto di Σ, talchè essa riempia *densamente* la Σ stessa.

È ovvio che una valutazione precisa della densità, δ, con cui i punti di M_0 ricoprono Σ, si otterrà solamente nel caso asintotico $t_1-t_0\to\infty$; ma non deve altresì preoccupare l'assumere precisamente la stessa densità anche quando t_1-t_0 è finito, purchè abbastanza grande, tale cioè che il corrispondente tratto di M_0 realizzi una ricopertura di Σ praticamente densa.

La determinazione della densità δ è stata fatta dal LEVI-CIVITA [1], con precise giustificazioni nei riguardi della unicità. Ecco brevemente il calcolo dell'eminente autore, che si appoggia sul teorema di LIOUVILLE il quale esprime, nello spazio delle fasi, la conservazione dei volumi trasportati dalle traiettorie dinamiche.

Sia $H(p\,|\,q)=E$ l'equazione della Σ; ed accanto consideriamo l'analoga Σ' relativa al valore $E+\delta E$ della costante (per comodità supporremo $\delta E>0$). Associamo ad ogni punto P di Σ il corrispondente P' di Σ' situato sulla normale a Σ in P. Diciamo dn la lunghezza del relativo segmento di normale, e dp_i, dq_i gli incrementi corrispondenti delle variabili. Poniamo

$$G=\left|\sqrt{\sum_1^n{}_i\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)^2}\,\right|.$$

Per la fatta ipotesi $\delta E>0$, sarà

$$\frac{dH}{dn}=\sum_1^n{}_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dn}+\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dn}=\frac{dE}{dn}>0,$$

cosicchè si ha, in valore e segno, per le componenti del segmento di normale, lungo dn,

$$dp_i=\frac{1}{G}\frac{\partial H}{\partial p_i}dn,\quad dq_i=\frac{1}{G}\frac{\partial H}{\partial q_i}dn,$$

[1] *Drei Vorlesungen über Adiabatische Invarianten*, già citate.

e in conseguenza

$$dE = G dn.$$

Se $d\sigma$ è l'elemento superficiale di Σ attorno a P, il volume corrispondente compreso tra Σ e Σ' è

$$dV = d\sigma \cdot dn,$$

e per la precedente

$$dV = \frac{d\sigma}{G} dE.$$

Ove s'immagini dV trasportato dalle traiettorie dinamiche, dV è costante: consegue dunque la costanza su Σ di

$$\frac{d\sigma}{G}$$

di fronte al trasporto operato dalle traiettorie situate su Σ stessa.

Ne viene che la densità δ cercata con cui tali traiettorie riempiono Σ è proporzionale a $\frac{1}{G}$. Tale densità vale pure per i punti di M_0 (sempre nel caso asintotico $t_1 - t_0 \to \infty$) in virtù della fatta ipotesi quasi ergodica per la quale M_0 ricopre tutta la Σ, cosicchè a essa sola può sostituire tutte le traiettorie dianzi considerate.

Il prof. LEVI-CIVITA dimostra altresì che la $\delta = \frac{1}{G}$ è l'unica densità ammissibile, quando è supposto che il sistema canonico non ammetta altro integrale uniforme oltre a $H = E$. Rimando per la dimostrazione alle memorie citate.

Alcune ulteriori considerazioni ci condurranno a riconoscere rigorosamente l'identità di certe due medie, che costituisce la chiave di volta per la dimostrazione che abbiamo in vista.

Stacchiamo su una qualunque traiettoria di Σ un segmento elementare di lunghezza (euclidea) $\Delta_0 s$: in capo ad un qualunque intervallo di tempo τ, $\Delta_0 s$ sarà trasportato in un altro elemento della stessa traiettoria di lunghezza $\Delta_1 s$ (nel senso che i due movimenti che originano simultaneamente agli estremi di $\Delta_0 s$, per $t = \tau$ sono rappresentati dagli estremi di $\Delta_1 s$). Si riconosce facilmente che

$$\frac{\Delta s}{G}$$

è invariante in relazione a tale trasporto. Ed infatti

$$G = \left| \sqrt{\sum_1^n {}_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)^2} \right| = \left| \sqrt{\sum_1^n {}_i \dot{p}_i^2 + \dot{q}_i^2} \right|$$

è anche il valore assoluto della velocità con cui il punto P, rappresentativo del sistema, si muove nello spazio euclideo delle fasi; cosicchè contando l'arco di traiettoria nel verso del moto, ed a meno di quantità di secondo ordine,

$$\Delta s = G\Delta t.$$

È ovvio, non intervenendo esplicitamente il tempo nelle equazioni del moto, che gli anzidetti elementi $\Delta_0 s$, $\Delta_1 s$ sono percorsi nello stesso tempuscolo Δt, per cui segue dalla precedente

$$\frac{\Delta_0 s}{G_0} = \frac{\Delta_1 s}{G_1}$$

(G_0, G_1 essendo i valori di G nei punti di $\Delta_0 s$, $\Delta_1 s$ rispettivamente) che esprime l'annunciata invarianza di $\frac{\Delta s}{G}$.

Consideriamo ora un numero N di elementi di traiettorie, ed abbastanza grande, per modo che essi riempiano densamente una regione elementare $\Delta_0\sigma$ di Σ: inoltre essi siano tutti di eguale lunghezza $\Delta_0 s$.

Dopo il tempo τ la loro lunghezza diverrà

$$\Delta_1 s = \frac{G_1}{G_0}\Delta_0 s,$$

ed essi occuperanno l'elemento superficiale di area

$$\Delta_1\sigma = \frac{G_1}{G_0}\Delta_0\sigma,$$

in virtù della già riconosciuta invarianza del rapporto $\frac{\Delta\sigma}{G}$. Se di ogni elemento di traiettoria, nella posizione finale, consideriamo la frazione $\frac{G_0}{G_1}$, otteniamo N elementi tutti di eguale lunghezza $\Delta_0 s$, i quali occuperanno la stessa frazione $\frac{G_0}{G_1}$ di $\Delta_1\sigma$, cioè un'area pari a $\Delta_0\sigma$, e quindi uguale a quella ricoperta dall'egual numero di segmenti di egual lunghezza nella posizione iniziale. Si può quindi affermare che: *se si dividono le traiettorie che riempiono densamente* Σ *in segmenti elementari di egual lunghezza* Δs, *e questi elementi si pensano come oggetti di una distribuzione su* Σ, *la relativa densità è invariante lungo ogni traiettoria.*

Facciamo l'ipotesi che la quantità G non si annulli mai, o, ciò che è lo stesso, non s'annullino contemporaneamente tutte le derivate $\frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{\partial H}{\partial q_i}$; allora la precedente conclusione vale senza restrizioni quanto alla lunghezza dell'arco di traiettoria lungo cui si opera il trasporto della densità. Se poi tale traiettoria è la M_0 che occupa tutta Σ, detto s l'arco contato nel verso del moto, si conclude che: *divisa* M_0 *in elementi* Δs *di lunghezza costante, questi elementi lineari riempiono* Σ *con densità superficiale costante.*

Questo risultato può, chiaramente, essere espresso anche in altro modo: si distribuisca su M_0 un aggregato, A, di punti P *equidistanti*, e sia h l'equidistanza; *al limite* $h \to 0$, $s_1 - s_0 \to \infty$, *questa distribuzione, omogenea su* M_0, *è anche (asintoticamente) omogenea su* Σ (¹).

Ciò val quanto dire che, se consideriamo l'aggregato A relativo a certi h ed $s_1 - s_0$, e sia N il numero totale dei punti di A ed r quello dei punti contenuti in una porzione di area $\Delta\sigma$, indicando ancora con Σ l'area della superficie Σ, si ha

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ s_1 - s_0 \to \infty}} \frac{N \cdot \Delta\sigma}{\Sigma \cdot r} = 1 \quad (^2)$$

qualunque sia $\Delta\sigma$.

Sia ora $F(p \mid q)$ una funzione definita su Σ ed ivi finita e continua; essa sarà pure determinata sui punti di M_0: domandiamoci di calcolare la media $\overline{F}$ della F sull'arco di M_0 di lunghezza $s_1 - s_0$. Ovviamente è, per definizione di integrale definito,

$$\overline{F} = \frac{1}{s_1 - s_0} \int_{s_0}^{s_1} F(p \mid q) ds = \frac{1}{s_1 - s_0} \lim \Sigma_j \, F(p_j \mid q_j) \Delta s_j .$$

Assumiamo tutti gli elementi d'arco Δs_j eguali ad h, e come punti P_j, dove calcolare $F(p_j \mid q_j)$, i punti dell'aggregato (omogeneo) A di equidistanza h; allora se N è il numero dei punti di A, si ha

$$\frac{1}{s_1 - s_0} \Sigma_j \, F(p_j \mid q_j) \Delta s_j = \frac{\sum_1^N {}_i \, F(p_i \mid q_i)}{N},$$

uguale cioè alla media dei valori della funzione F nei punti di A; per cui avendosi $N \to \infty$ per $h \to 0$, sarà, nell'ipotesi dell'esistenza dei due limiti

$$(\alpha) \qquad \overline{F} = \lim_{N \to \infty} \frac{\sum_1^N {}_i \, F(p_i \mid q_i)}{N}.$$

(¹) E. BOREL, *Méthodes et problèmes de la Théorie des fonctions*, 1922, pag. 30.
(²) Ibidem, pag. 31.

Calcoliamo ora la media superficiale della $F(p \mid q)$ sulla superficie chiusa $\Sigma(H=E)$, che è uguale a

$$\frac{1}{\Sigma}\int_{\Sigma} F(p \mid q)d\sigma = \frac{1}{\Sigma}\lim \Sigma_j F(p_j \mid q_j)\Delta\sigma_j .$$

Poichè i punti di A, per $h \to 0$, $s_1 - s_0 \to \infty$, finiscono per essere densi in Σ, supponiamo che in ogni $\Delta\sigma_j$ ne caschi qualcuno: precisando, $\Delta\sigma_j$ ne contenga $r_j \geq 1$, ed indichiamoli con $P_j \equiv P_j^1, P_j^2, \ldots P_j^{r_j}$. Poniamo

$$F(p_j^s \mid q_j^s) = F(p_j \mid q_j) + \varepsilon_j^s; \qquad s = 2, 3, \ldots r_j,$$

e nella somma a secondo membro della penultima relazione assumiamo per p_j, q_j, le coordinate di $P_j \equiv P_j^1$. Sommando le precedenti ed aggiungendo dalle due parti $F(p_j \mid q_j)$, avremo (posto $\varepsilon_j^1 = 0$)

$$\sum_1^{r_j}{}_s F(p_j^s \mid q_j^s) = r_j F(p_j \mid q_j) + \sum_1^{r_j}{}_s \varepsilon_j^s,$$

per cui si può anche scrivere

$$\frac{1}{\Sigma}\Sigma_j F(p_j \mid q_j)\Delta\sigma_j = \frac{1}{\Sigma}\Sigma_j \frac{1}{r_j}\sum_1^{r_j}{}_s (F(p_j^s \mid q_j^s) - \varepsilon_j^s)\Delta\sigma_j ,$$

od anche, moltiplicando e dividendo per N al secondo membro,

$$\frac{1}{\Sigma}\Sigma_j F(p_j \mid q_j)\Delta\sigma_j = \frac{1}{N}\Sigma_j \left[\sum_1^{r_j}{}_s (F(p_j^s \mid q_j^s) - \varepsilon_j^s)\right]\frac{N\Delta\sigma_j}{\Sigma \cdot r_j}.$$

Poniamo

$$\frac{N}{\Sigma}\frac{\Delta\sigma}{r_j} = 1 + \eta_j ,$$

per cui sappiamo intanto essere

$$\lim \eta_j = 0, \quad \text{per} \quad N \to \infty, \quad s_1 - s_0 \to \infty \ (^1);$$

ed osserviamo che

$$\Sigma_j \sum_1^{r_j}{}_s F(p_j^s \mid q_j^s) = \sum_1^{N}{}_i F(p_i \mid q_i)$$

non è altro se non la somma dei valori della F in tutti i punti di A. Analogamente si trasformano le altre somme dello stesso tipo. Avremo allora

$$(\beta) \qquad \frac{1}{\Sigma}\Sigma_j F(p_j \mid q_j)\Delta\sigma_j = \frac{1}{N}\sum_1^{N}{}_i F(p_i \mid q_i) + \frac{\sum_1^{N}{}_i \eta_i F(p_i \mid q_i)}{N} - \frac{1}{N}\sum_1^{N}{}_i \varepsilon_i + \frac{\sum_1^{N}{}_i \eta_i \varepsilon_i}{N},$$

(1) Il limite $N \to \infty$, anche nel seguito, è sempre legato ad $h \to 0$.

dove, nelle somme a secondo membro, potremo supporre ordinati gli N punti di A nel modo come essi si susseguono su M_0.

Facciamo $N \to \infty$, $s_1 - s_0 \to \infty$: il secondo e quarto termine del secondo membro vanno, evidentemente, a zero, in relazione al comportamento asintotico delle η_j; per cui, essendo il primo membro determinato, nell'ipotesi che esista il limite

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ s_1 - s_0 \to \infty}} \frac{1}{N} \sum_1^N {}_i F(p_i \mid q_i),$$

esisterà anche quell'altro, che diremo $\mathcal{E}$,

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ s_1 - s_0 \to \infty}} \frac{1}{N} \sum_1^N {}_i \varepsilon_i = \mathcal{E}.$$

Si faccia ora $\Delta\sigma_j \to 0$, allo scopo di realizzare al primo membro della (β) l'integrale superficiale della $F(p \mid q)$. Se supponiamo la F continua su Σ, allora le ε_i tendono a zero con le $\Delta\sigma_j$, per cui $\mathcal{E}$ potrà farsi, in modulo, minore di qualunque numero purchè si assumano le $\Delta\sigma_j$ abbastanza piccole. Resta adunque

$$\frac{1}{\Sigma} \int_\Sigma F(p \mid q) d\sigma = \lim_{\substack{N \to \infty \\ s_1 - s_0 \to \infty}} \frac{1}{N} \sum_1^N {}_i F(p_i \mid q_i),$$

e per la (α), nella quale si passi alla valutazione asintotica $s_1 - s_0 \to \infty$,

$$(\gamma) \qquad \frac{1}{\Sigma} \int_\Sigma F(p \mid q) d\sigma = \lim_{s_1 - s_0 \to \infty} \frac{1}{s_1 - s_0} \int_{s_0}^{s_1} F(p \mid q) ds,$$

la quale verifica l'identità delle due medie, superficiale e asintotica, lungo la traiettoria, con la sola ipotesi dell'esistenza del limite a secondo membro della (α) anche per $s_1 - s_0 \to \infty$.

Riprendiamo ora l'identità variazionale (9'), e mostriamo anzitutto come essa consenta una notevole estensione del modo di applicarla. La variazione δ^* ivi considerata finora, corrisponde al passaggio dalla traiettoria base M_0 (situata su Σ) a quella trasformata M_1 (situata su Σ'). La M_1 è una traiettoria ad a costante: applichiamo ad essa il *principio dell'azione variata* (¹); avremo nel passaggio dalla M_1 ad una qualunque curva γ infinitamente vicina e situata, al pari di M_1, sulla Σ':

$$\delta_0^* \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = \delta_0^* \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n {}_i p_i \dot{q}_i dt = \left| \sum_1^n {}_i p_i \delta_0 q_i \right|_{t_0}^{t_1},$$

(¹) LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Vol. IIII, pag. 545.

dove al secondo membro per le p_i si possono assumere quelle relative agli estremi di M_0, commettendo un errore di secondo ordine.

Sommando la precedente con la (9′), e indicando aucora con δ^* la variazione $\delta^* + \delta_0{}^*$, riconosciamo che la (9′) stessa (e quindi anche le altre identità equivalenti) *continua a valere nel passaggio dalla traiettoria* M_0 *ad una qualunque curva* γ *infinitamente prossima situata sulla superficie* $\Sigma'(\mathrm{H}=\mathrm{E}_0+\delta\mathrm{E})$ *trasformata adiabatica della* Σ.

La (9′) che ora applicheremo nel modo specificato dianzi, può ricevere l'aspetto puramente geometrieo

$$\delta\int_{s_0}^{s_1}\sum_1^n{}_i\, p_i dq_i = \Big|\sum_1^n{}_i\, p_i\delta q_i\Big|_{P_0}^{P_1},$$

dove l'integrale curvilineo è calcolato lungo M_0, di cui P_0, P_1 sono gli estremi, e il simbolo di variazione asincrona δ^* è sostituito dal δ, che denota appnnto l'arbitraria variazione, nell'ambito puramente geometrico, da M'_0 alla qualunque curva variata di Σ'.

Sviluppando l'operazione δ, otteniamo

$$\int_{s_0}^{s_1}\sum_1^n{}_i(\delta p_i dq_i - p_i d\delta q_i) = \Big|\sum_1^n{}_i\, p_i\delta q_i\Big|_{P_0}^{P_1},$$

poichè vale evidentemente la relazione d'invertibilità

$$\delta dq_i = d\delta q_i;$$

e con un'integrazione per parti applicata al secondo integrando

$$\int_{s_0}^{s_1}\sum_1^n{}_i(\delta p_i dq_i - \delta q_i dp_i) = 0$$

che, in virtù delle equazioni canoniche, e assumendo come variabile d'integrazione l'arco s di traiettoria, può anche scriversi

$$\int_{s_0}^{s_1}\sum_1^n{}_i\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\right)\frac{dt}{ds}\,ds \equiv \int_{s_0}^{s_1}\sum_1^n{}_i\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\right)\frac{ds}{G} = 0.$$

La traiettoria variata γ (sulla quale M_0 è portata dai δp_i, δq_i) sia ora la proiezione di M_0 su Σ' fatta secondo le normali a Σ.

Fissiamo un verso positivo su queste normali (verso l'interno o l'esterno del volume racchiuso da Σ) in modo che detto δn, in valore e segno, il relativo segmento PP' compreso fra Σ e Σ', sia

$$\delta p_i = \frac{1}{G}\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta n, \quad \delta q_i = \frac{1}{G}\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta n;$$

con che la precedente identità diventa

$$\int_{s_0}^{s_1} \delta n \, ds = 0,$$

ed esprime una circostanza geometrica relativa ad ogni arco di traiettoria. Essa conduce ad una conclusione quanto mai espressiva se la si applica ad una M_0 che soddisfa all'ipotesi quasi ergodica.

Intanto, poichè la precedente identità vale par ogni arco $s_1 - s_0$ di M_0, (cioè esprime una circostanza costante — l'annullarsi di quell'integrale — relativa ad una trasformazione adiabatica δa realizzata lungo l'arco $s_1 - s_0$ di traiettoria) è ovvio ammettere che essa valga anche al limite per $s_1 - s_0 \to \infty$; cioè l'integrale a primo membro è nullo anche per la (ideale) trasformazione adiabatica limite di trasformazioni di durata indefinitamente più grande. Ovviamente sarà pure

$$\lim_{s_1 - s_0 \to \infty} \frac{1}{s_1 - s_0} \int_{s_0}^{s_1} \delta n \, ds = 0,$$

da cui segue, per la relazione (γ),

$$\int_{\Sigma} \delta n \, d\sigma = 0.$$

L'integrale fornisce la variazione del volume V racchiuso dalla superficie Σ: si è riconosciuto quindi l'invarianza di siffatto volume di fronte alle trasformazioni adiabatiche, infinitamente lente e lineari, e di durata tale che la corrispondente M_0 ricopra con i suoi punti la superficie Σ con una densità sufficientemente prossima ad una costante. Il volume V è l'invariante adiabatico di GIBBS, che per primo, sostanzialmente, ne riconobbe la natura invariantiva.

11. Sistemi dinamici che ammettono integrali primi. — Allo scopo di adattare il metodo esposto ai nn. 1-4 alla trattazione dei problemi di invarianza adiabatica interessanti la fisica teorica, premetto alcune considerazioni relative alla presenza di integrali primi per le equazioni ad a costante.

Particolarizzo il problema, che finora ho trattato nella sua generalità, supponendo che nella espressione della forza viva non intervenga $\dot{a}$, al solo scopo di realizzare una trattazione formale più concisa; e poi perchè nelle questioni veramente interessanti in cui v'è da (o si può) considerare la trasformabilità adiabatica, i parametri che la determinano non si presentano anche con le loro derivate.

Adottiamo allora l'impostazione hamiltoniana del problema: le equazioni

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad \frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{21}$$

valgono, ovviamente, sia per i moti base ($a=$ costante) sia per quelli che realizzano la trasformazione adiabatica ($a=a_0+\varepsilon(t-t_0)$).

Supponiamo che per $a=$ costante, ma qualunque, le equazioni (21) ammettano un integrale primo

$$F(p\mid q\mid a)=c, \tag{22}$$

oltre all'integrale delle forze vive, $H=E$. Assegnato l'intervallo t_1-t_0 durante il quale si svolge la trasformazione adiabatica caratterizzata dall'incremento δa del parametro, lo stesso integrale varrà alla fine di questa con un nuovo valore della costante c.

Valutiamo il valor principale dell'incremento δc.

Indichiamo come precedentemente con M_0 un moto base, relativo ad un valore costante a_0 del parametro a, e con M il moto del sistema durante la trasformazione adiabatica associata che si svolge anch'essa nell'intervallo di tempo t_1-t_0. Durante M sarà

$$a=a_0+\varepsilon(t-t_0) \tag{23}$$

con

$$\varepsilon=\frac{\delta a}{t_1-t_0}:$$

ε è quindi da trattarsi come una quantità costante di primo ordine assieme con δa.

Seguiamo la variazione di F lungo M. Avremo

$$\frac{dF}{dt}=\sum_1^n{}_i\frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial F}{\partial a}\varepsilon,$$

e tenuto conto delle equazioni canoniche (21)

$$\frac{dF}{dt}=(F,\,H)_M+\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)_M\varepsilon,$$

dove l'indice M sta a indicare che la corrispondente quantità va calcolata nei punti di M.

Ora, (F, H) è *nulla identicamente* rispetto a tutte le variabili da cui dipende: p_i, q_i, a, perchè F è un integrale primo qualunque sia il valore di a. In particolare la parentesi stessa, che dipende da t per il tramite di a, s'annullerà nei punti di M, per cui resta

$$\frac{dF}{dt} = \varepsilon\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)_M$$

e a meno di quantità di 2° ordine potremo sostituire i valori di $\frac{\partial F}{\partial a}$ calcolati su M con quelli presi sui punti di M_0, cosicchè in questi limiti di approssimazione:

$$\frac{dF}{dt} = \varepsilon\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)_{M_0}.$$

Togliendo per semplicità l'indice M_0, avremo integrando fra t_0 e t_1 lungo la traiettoria base M_0,

$$\delta F = \delta c = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F(p \mid q \mid a)}{\partial a}\, dt, \tag{24}$$

che ci fornisce il richiesto incremento della costante d'integrazione c.

12. **Sistemi che ammettono separazione delle variabili. Caso Stäckel.** — Passiamo ora a considerare i sistemi del tipo STÄCKEL, che sono, come è noto, caratterizzati dall'ammettere n integrali primi quadratici (ivi compreso quello dell'energia), e per i quali adottiamo le espressioni seguenti

$$F_\alpha = \sum_1^n{}_\beta\, \Phi^{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2}\, p_\beta^2 - U_\beta\right) = c_\alpha; \qquad \alpha = 1, 2, \ldots n \tag{25}$$

dove le $\Phi^{\alpha\beta}$ sono i reciproci nel determinante $\| \Phi_{\alpha\beta} \| \neq 0$ degli elementi $\Phi_{\alpha\beta}$, alla lor volta funzioni solamente della coordinata q_β corrispondente al secondo indice. Anche U_β è funzione della sola q_β.

Conveniamo inoltre che ad $\alpha = n$ corrisponda l'integrale delle forze vive, cosicchè

$$H = F_n \quad \text{e} \quad E = c_n.$$

Si ricava in conseguenza dalla corrispondente (25)

$$\dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} = \Phi^{nh} p_h$$

per cui, esprimendo le p per le $\dot{q}$, risulta

$$H = F_n = \sum_1^n{}_\beta \left(\frac{\dot{q}_\beta^2}{2\Phi^{n\beta}} - \Phi^{n\beta} U_\beta \right),$$

ed appare che la forza viva possiede l'espressione

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n{}_\beta \frac{\dot{q}_\beta^2}{\Phi^{n\beta}}.$$

Poichè nei problemi dinamici T deve essere una forma definita positiva nelle $\dot{q}_\beta$, è evidente la condizione

$$\Phi^{n\beta} > 0 \tag{26}$$

da imporsi alle funzioni $\Phi^{n\beta}$ in tutto il campo di esistenza di una qualunque soluzione.

Risolvendo le (25) rapporto alle p_h, si ottiene

$$p_h = \sqrt{2\left(U_h + \sum_1^n{}_\alpha \Phi_{\alpha h} c_\alpha \right)}, \tag{25'}$$

talchè, in particolare, le p_h sono funzioni solamente della corrispondente q_h.

Ammettiamo che le equazioni

$$U_h + \sum_1^n{}_\alpha \Phi_{\alpha h} c_\alpha = 0$$

abbiamo due radici semplici $q_h = a_h$, $q_h = b_h$, tra le quali è contenuto il valor iniziale q_h^0: allora, è cosa nota, ogni variabile q_h compie, nel corso del moto del sistema, delle successive librazioni tra i corrispondenti estremi a_h, b_h, ed inoltre, poichè alla radice in (25') si deve cambiar segno ad ogni semioscillazione, sul piano p_h, q_h la curva rappresentativa di queste due variabili (che è poi la proiezione sul piano stesso della traiettoria del sistema) è una curva chiusa simmetrica rispetto all'asse q_h. La indicheremo brevemente con γ_h. La sua equazione, in forma equivalente alla (25') può anche essere scritta

$$\frac{1}{2} p_h^2 - U_h - \sum_1^n{}_\alpha \Phi_{\alpha n} c_\alpha = 0 \tag{25''}$$

e si riconosce che la γ_h è *pienamente individuata dai valori attribuiti alle costanti* c_α (ed al parametro adiabatico a presente nelle $\Phi_{\alpha\beta}$ e U_β).

Si assuma ora un moto base M_0 corrispondente ai valori c_α^0 delle costanti c_α, a_0 del parametro a e q_h^0 delle variabili q_h al tempo t_0: e lo si segua nell'intervallo $t_1 - t_0$. La corrispondente traiettoria, per quanto precede, si proietta sui piani delle variabili coniugate p_h, q_h, nelle curve chiuse γ_h^0, relative ai valori delle costanti c_α^0, a_0, e ciascuna, per t contenuto in $t_1 \vdash\!\dashv t_0$, potrà anche essere percorsa più volte. Facciamo poi intervenire il parametro adiabatico a al quale attribuiamo l'incremento δa, realizzato al solito modo nell'intervallo $t_1 \vdash\!\dashv t_0$, cioè con la legge lineare

$$a = a_0 + \frac{\delta a}{t_1 - t_0}(t - t_0) = a_0 + \varepsilon(t - t_0);$$

il relativo moto di trasformazione M che s'inizia in corrispondenza dei valori q_h^0, c_α^0, a_0, porterà il sistema in una configurazione situata su una traiettoria (ad a e c_α costanti) ben determinata M_1, sulla quale le costanti a, c_α assumeranno i valori $a_0 + \delta a$, $c_\alpha^0 + \delta c_\alpha$.

Determineremo fra poco le δc_α; per il momento notiamo che anche la M_1 si proietterà sui piani p_h, q_h su certe curve γ_h^1 *univocamente individuate* dai nuovi valori $a_0 + \delta a$, $c_\alpha^0 + \delta c_\alpha$. In questo riguardo è quindi di importanza non essenziale il punto preciso di M_1 dove il moto M trasporta il sistema alla fine della trasformazione: è solamente l'incremento delle c_α che interessa conoscere.

Valutiamo ora il δc_α, per il chè basterà applicare le (24) tenuto conto delle espressioni (25) delle c_α. Otteniamo

$$\delta c_\alpha = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \sum_{1}^{n}{}_\beta \left(\frac{\partial \Phi^{\alpha\beta}}{\partial a} \left(\frac{1}{2} p_\beta^2 - U_\beta \right) - \Phi^{\alpha\beta} \frac{\partial U_\beta}{\partial a} \right) dt, \tag{27}$$

e per le (25″)

$$\delta c_\alpha = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \sum_{1}^{n}{}_\beta \left[\sum_{1}^{n}{}_\gamma \frac{\partial \Phi^{\alpha\beta}}{\partial a} \Phi_{\gamma\beta} c_\gamma - \Phi^{\alpha\beta} \frac{\partial U_\beta}{\partial a} \right] dt;$$

e poichè dalle

$$\sum_{1}^{n}{}_\beta \Phi^{\alpha\beta} \Phi_{\gamma\beta} = \varepsilon_\gamma^\alpha = \begin{matrix} 1 & \text{per} & \alpha = \gamma \\ 0 & \text{»} & \alpha \neq \gamma \end{matrix}$$

scende

$$\sum_{1}^{n}{}_\beta \frac{\partial \Phi^{\alpha\beta}}{\partial a} \Phi_{\gamma\beta} = - \sum_{1}^{n}{}_\beta \Phi^{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi_{\gamma\beta}}{\partial a},$$

avremo in definitiva

$$c_\alpha(t_1) - c_\alpha(t_0) = \delta c_\alpha = - \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \sum_{1}^{n}{}_{\beta\gamma} \Phi^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \Phi_{\gamma\beta}}{\partial a} c_\gamma + \frac{\partial U_\beta}{\partial a} \right) dt, \tag{27'}$$

l'integrale dovendo essere calcolato ponendovi per le q_h e c_γ i valori assunti lungo la traiettoria M. Volendo l'incremento della c_α all'istante generico t compreso fra t_0 e t_1, basterà sostituire l'estremo superiore t_1 col t variabile; derivando seguono le

$$\frac{dc_\alpha}{dt} = -\,\varepsilon \sum_1^n{}_{\beta\gamma}\, \Phi^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial \Phi_{\gamma\beta}}{\partial a}\, c_\gamma + \frac{\partial U_\beta}{\partial a}\right), \tag{28}$$

le quali, ove le c_γ siano definite mediante i primi membri delle (25), sono identità verificate lungo il moto di trasformazione M.

Vale relativamente alle (27), (27') l'osservazione che, trattando ε come costante di primo ordine, gli integrali a secondo membro possono essere calcolati anche sulla traiettoria base M_0; cosicchè in definitiva, nei limiti del primo ordine, il moto base M_0 assieme con la imposta variazione δa del parametro a, determina, indipendentemente dalla effettiva conoscenza del moto intermediario, gli incrementi delle costanti c_α, e quindi, per quanto è stato detto, anche le curve $\gamma_h{}^1$ nelle quali si trasformano le iniziali $\gamma_h{}^0$.

13. **Trasformazione adiabatica degli integrali di Sommerfeld.** — Sono, come è noto, gli integrali $\int_{\gamma_h} p_h dq_h$ estesi alle curve γ_h viste or ora, che giocano un ruolo importante nei criteri di quantizzazione dei sistemi dinamici, in parte giustificato dalla loro invarianza adiabatica.

Fissiamo una qualsiasi variabile q_h, e quindi la corrispondente γ_h, e consideriamo quel problema dinamico ad un grado di libertà la cui funzione caratteristica è

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\, p_h{}^2 - U_h - \sum_1^n{}_\alpha\, \Phi_{\alpha h} c_\alpha . \tag{29}$$

Per una ragione che apparirà fra poco, indichiamo con τ la variabile temporale relativa a questo ausiliario problema dinamico. Trattiamo le c_α ed a come costanti, i cui valori, e gli iniziali di q_h, p_h al tempo τ_0 siano quelli stessi ($c_\alpha{}^0$, a_0, $p_h{}^0$, $q_h{}^0$) del moto M_0 base del sistema di STÄCKEL precedentemente considerato: sarà quindi inizialmente (cfr. la 25")

$$\mathcal{H} = 0 \tag{30}$$

e siccome la $\mathcal{H}$ non contiene il tempo, la (30) rappresenta la determinazione dell'integrale delle forze vive

$$\mathcal{H} = \mathcal{E}$$

per il moto or ora definito, e che diremo m_0 (in altre parole per esso la costante delle forze vive $\mathcal{E}$ è nulla).

Siccome il problema è ad un grado di libertà, la (30) definisce la traiettoria di m_0, che è quindi, a causa della (25″), con cui la (30) si identifica, la curva γ_h^0 più sopra considerata. Questa traiettoria sarà però percorsa con una legge oraria diversa nei due casi.

Infatti dall'ultima delle (25) si ricava per il sistema di STÄCKEL,

(30) $$\frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_h} = \Phi^{nh} p_h$$

mentre dalla (29) scende

(31′) $$\frac{dq_h}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} = p_h .$$

Con la sostituzione

(32) $$\Phi^{nh} dt = d\tau$$

in virtù delle (26), e noto che sia il moto M_0, si dà origine ad una relazione biunivoca tra le due variabili t e τ:

(33) $$\tau = f(t),$$

ed il sistema (31) si trasforma in (31′).

Ora (31′) per la (30) si scrive

(34) $$\frac{dq_h}{d\tau} = \sqrt{2\left(U_h + \sum_1^n{}_\alpha \Phi_{\alpha n} c_\alpha\right)},$$

ed avendo supposto che il radicando ammette due radici a_h, b_h, entro le quali è collocato q_h^0, il moto m_0 del sistema ausiliario sarà periodico nella variabile τ.

Lasciamo ora variare la a e le c_α, *considerandole precisamente quelle funzioni di* τ *che risultano sostituendo nelle loro rispettive espressioni in termini di* t (e valide durante il moto di trasformazione M) *la* t *stessa con la* τ *mediante la* (33). È ovvio, in generale, che la $a(\tau)$ non sarà lineare in τ. Indichiamo con m il moto che ne consegue a partire dalle stesse determinazioni iniziali (per $\tau = \tau_0$) di m_0: esso trasporterà il sistema dalla traiettoria γ_h^0 su un'altra γ_h^1, *pienamente determinata dagli incrementi che subiranno le* c_α *e la costante dell'energia* $\mathcal{E}$ dell'attuale problema. Diciamo m_1 il moto su γ_h^1.

Ora in m_0 è

$$\mathcal{H} = 0$$

mentre su m_1 sarà

$$\mathcal{H} = \mathcal{E}_1 .$$

Valutiamo l'incremento $\delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$ della costante delle forze vive. Si ha

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a} a' + \sum_1^n{}_\alpha \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial c_\alpha} c_\alpha' \text{ (1)};$$

per cui integrando lungo m, oppure, al solito, lungo m_0, dato che a' e c_α' saranno ancora infinitesimi,

$$\delta\mathcal{E} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a} a' + \sum_1^n{}_\alpha \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial c_\alpha} c_\alpha' \right) d\tau .$$

Per la (33)

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\Phi^{nh}} \frac{d}{dt};$$

cosicchè richiamando per $\dot{c}_\alpha$ l'espressione (28) e ricordando che $\dot{a} = \varepsilon$, avremo

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\left(\frac{\partial U_h}{\partial a} + \sum_1^n{}_\alpha \frac{\partial\Phi_{\alpha h}}{\partial a} c_\alpha \right) \frac{\varepsilon}{\Phi^{nh}} + \frac{\varepsilon}{\Phi^{nh}} \sum_1^n{}_{\alpha\beta\gamma} \Phi_{\alpha h} \Phi^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial U_\beta}{\partial a} + \frac{\partial \Phi_{\gamma\beta}}{\partial a} c_\gamma \right).$$

Ma $\Phi_{\alpha\beta}$, $\Phi^{\alpha\beta}$ essendo reciproci, l'ultimo termine, sviluppata la sommatoria su α, si riduce a

$$\frac{\varepsilon}{\Phi^{nh}} \left(\frac{\partial U_h}{\partial a} + \sum_1^n{}_\gamma \frac{\partial \Phi_{\gamma h}}{\partial a} c_\gamma \right);$$

che s'annulla col precedente. Resta perciò lungo m:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0;$$

onde si conclude che nel moto intermediario m, a causa della supposta legge di variazione della a e c_α, l'energia rimane costante: ed essendo nulla inizialmente, tale sarà pure alla fine di m, cioè pure nel moto trasformato m_1.

Nel passaggio dalla traiettoria γ_h^0 alla γ_h^1 si ha dunque

$$\delta\mathcal{E} = 0,$$

e quindi la γ_h^1 attuale è proprio la stessa curva che è relativa al moto M_1 del sistema di STÄCKEL.

A questo punto, applichiamo al nostro sistema ausiliario il principio variazionale (7'), *che non dipende dal modo di variare dei parametri adiab.* Attualmente il moto base m_0 e quello trasformato m_1 sono entrambi periodici: allora l'intervallo $\tau_1 - \tau_0$ sia appunto eguale al periodo di m_0, ed inoltre

(1) **Indichiamo con *apici* le derivate rapporto a τ.**

l'asincronismo nella corrispondenza dei due moti sia scelto in modo che i rispettivi periodi si corrispondano. I parametri adiabatici siano: a, c_α.

La (7'), completata dei termini relativi alle c_α, e del tutto analoghi a quello scritto per a, e ove si noti che attualmente

$$Q = -\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial a}, \quad \text{e} \quad \delta \mathfrak{S} = 0,$$

diventa

$$\delta^* \int_{\tau_0}^{\tau_1} 2\mathfrak{T} d\tau - \delta a \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a} d\tau - \sum_1^n {}_\alpha \delta c_\alpha \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial c_\alpha} d\tau = 0.$$

Si avrà invarianza dell'azione estesa ad un periodo $\tau_1 - \tau_0$, cioè dell'integrale $\int_{\gamma_h} p_h dq_h$, se e solamente

(35)
$$\delta a \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a} d\tau + \sum_1^n {}_\alpha \delta c_\alpha \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial c_\alpha} d\tau = 0.$$

Giova esplicitare il primo membro della (35), che diremo A. Abbiamo dalle (29) e (31'),

$$\mathfrak{L} = p_h q_h' - \mathcal{H} = \frac{q'^2}{2} + U_h + \sum_1^n {}_\alpha \Phi_{\alpha h} c_\alpha,$$

per cui, esprimendo l'integrale a secondo membro della (27'), che ci fornisce δc_α, mediante τ,

$$A = \delta a \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\frac{\partial U_h}{\partial a} + \sum_1^n {}_\beta \frac{\partial \Phi_{\beta h}}{\partial a} c_\beta \right) d\tau -$$

$$- \varepsilon \sum_1^n {}_{\alpha\beta} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial U_\beta}{\partial a} + \sum_1^n {}_\gamma \frac{\partial \Phi_{\gamma\beta}}{\partial a} c_\gamma \right) \frac{d\tau}{\Phi^{nh}} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi_{\alpha h} d\tau.$$

La questione di riconoscere se A sia o no zero, è tutta ridotta alla corretta valutazione dei tre integrali precedenti: vedremo che questo calcolo (asintoticamente rigoroso) è possibile solo supponendo che la traiettoria base M_0, sulla quale vanno calcolati i valori delle funzioni integrande, riempia in modo *denso* (e quindi, nell'intervallo finito di tempo $t_0 \vdash\!\dashv t_1$, in modo abbastanza denso, da poter ritenere praticamente realizzata la densità di cui parleremo poi) una regione n-dimensionale dello spazio delle q_i; cioè con la terminologia introdotta nella teoria dei quanta, nell'ipotesi che il moto base M_0 non presenti *degenerescenza*. In particolare resterà dimostrata la sostituibilità della media spaziale a quella temporale, di cui finora mancava la dimostrazione nel caso $n > 1$.

14. **Determinazione della densità dei punti di M_0.** — Come è noto, nel moto di un sistema di STÄCKEL ogni variabile q_h compie delle escursioni (in un tempo finito) fra certi estremi a_h, b_h; cosicchè nello spazio delle q_h, che supporremo poi dotato di metrica euclidea, la traiettoria è contenuta nel parallelopipedo (n-dimensionale)

$$a_h \leq q_h \leq b_h, \qquad h = 1, 2, \ldots n. \tag{36}$$

CHARLIER [1] ha dimostrato che, quando non siano verificate relazioni a coefficienti interi tra certi moduli di periodicità, la traiettoria riempie in modo denso il volume rappresentato dalle (36), e che diremo V. Orbene, qual'è la densità con cui, al crescere indefinito del tempo, i punti della traiettoria M_0 riempiono il volume V? Lasciamoci guidare dall'immagine idrodinamica. Sia P un punto qualunque di V: ivi la velocità con cui si sposta il punto della traiettoria che vi passa è

$$\frac{dq_i}{dt} = \Phi^{ni} \sqrt{2\left(U_i + \sum_{1}^{n}{}_\alpha \Phi_{\alpha i} c_\alpha\right)} = \Phi^{ni} \sqrt{(i)} \tag{37}$$

avendo posto per brevità la scrittura

$$2\left(U_i + \sum_{1}^{n}{}_\alpha \Phi_{\alpha i} c_\alpha\right) = (i)$$

che risulta essere funzione della sola q_i. Nel corso del moto il segno di $\sqrt{(i)}$ s'inverte ogni volta che q_i ha raggiunto gli estremi a_i, b_i; cosicchè per uno stesso punto P passa un numero finito, ν, di traiettorie, corrispondenti a tutte le possibili scelte del segno delle radici.

Consideriamo la nostra traiettoria base M_0, ed associamo fra loro tutti quei suoi segmenti lungo i quali le n radici $\sqrt{(i)}$ hanno lo stesso segno: otteniamo così ν sistemi di elementi di traiettoria, ognuno dei quali si può supporre ricopra in modo denso il volume V.

Infatti STÄCKEL ha dimostrato che il moto di un sistema dinamico nel quale ogni variabile q_i compie delle librazioni, è *quasi-periodico* [2], e più precisamente che il sistema ripassa tanto vicino quanto si vuole ad una sua posizione iniziale dopo *numeri interi* di librazioni per ogni coordinata. Ora

---

(1) *Mechanik des Himmels*, Bd. 1, p. 97 e ss.

(2) v. CHARLIER, l. c.

poichè il segno della $\sqrt{(i)}$ s'inverte ogni qualvolta q_i tocca i corrispondenti estremi della librazione, a_i, b_i, ne viene che dopo un numero intero di librazioni complete la stessa radice riacquista il proprio segno; cosicchè, purchè sia sufficientemente grande l'intervallo di tempo $t_1 - t_0$ nel quale è definito M_0, le porzioni di traiettoria appartenenti ad uno stesso degli anzidetti ν sistemi, sono fra loro abbastanza vicine: vale quindi l'affermazione fatta dianzi che ognuno dei ν sistemi realizza una ricopertura densa di V.

E veniamo ora a determinare la densità con cui i punti di M_0 ricoprono V.

Sia ρ_r, $r = 1, 2, \ldots \nu$, la densità relativa all'r-esimo tra gli anzidetti ν sistemi di segmenti, e sia $\Delta_0 V$ un volume qualunque entro V. I punti di $\Delta_0 V$ che appartengono ai considerati segmenti di M_0, saranno trasportati, dopo uno stesso tempo T, abbastanza piccolo perchè siano conservati i segni delle radici. in un volume $\Delta_1 V$: la conservazione del numero dei punti esige che si scriva

$$\int_{\Delta_0 V} \rho_r dV = \int_{\Delta_1 V} \rho_r dV,$$

cosicchè la funzione $\rho_r(P)$ si comporta come la densità della massa in idrodinamica. Siccome il trasporto dei punti di $\Delta_0 V$ in quelli di $\Delta_1 V$ avviene con la legge di velocità (37) — dove si assuma l'r-esimo sistema di segni dinnanzi alle radici —, ne viene che ρ_r soddisfa alla corrispondente equazione di continuità nella forma valida per i moti permanenti, in quanto il tempo non interviene esplicitamente nelle (37). Si ha dunque per ρ_r l'equazione

$$\sum_1^n {}_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\rho_r \frac{dq_i}{dt}\right) = \sum_1^n {}_i \frac{\partial}{\partial q_i}(\rho_r \Phi^{ni} \sqrt{(i)}) = 0, \qquad r = 1, 2, \ldots N. \tag{38}$$

In relazione ai ν valori di r, si possono scrivere altrettante equazioni (38): orbene, *tutte* ν *ammettono uno stesso integrale uniforme entro* V; rappresentato da

$$\rho = \frac{|D|}{\left|\prod_1^n {}_i \sqrt{(i)}\right|}, \tag{39}$$

dove D è il determinante, $\neq 0$:

$$D = \|\Phi_{hk}\|,$$

ed il denominatore è il valore assoluto del prodotto delle n radici $\sqrt{(i)}$. La funzione ρ è quindi positiva e finita entro V: solamente sul contorno diventa infinita d'ordine $\frac{1}{2}$, perchè ivi le quantità (i) hanno radici semplici. È quindi atta a rappresentare una densità.

Facciamo la verifica della precedente asserzione. Si ha:

$$\sum_1^n{}_j \Phi^{nj} \sqrt{(j)} \frac{\partial \rho}{\partial q_j} = \rho \sum_1^n{}_j \left[\sum_1^n{}_e \Phi^{ej} \frac{d\Phi_{ej}}{dq_j} - \frac{1}{2(j)} \frac{d(j)}{dq_j} \right] \Phi^{nj} \sqrt{(j)},$$

$$\rho \sum_1^n{}_j \frac{\partial}{\partial q_j} (\Phi^{nj} \sqrt{(j)}) = \rho \sum_1^n{}_j \left[\sqrt{(j)} \frac{\partial \Phi^{nj}}{\partial q_j} + \frac{\Phi^{nj}}{2\sqrt{(j)}} \frac{d(j)}{dq_j} \right];$$

sommando, gli ultimi due termini si annullano, e resta, indicando con B il primo membro della (38),

$$B = \rho \sum_1^n{}_j \sqrt{(j)} \left(\frac{\partial \Phi^{nj}}{\partial q_j} + \Phi^{nj} \sum_1^n{}_e \Phi^{ej} \frac{d\Phi_{ej}}{dq_j} \right).$$

Ora, poichè Φ^{hk} sono gli elementi reciproci di Φ_{hk} nel determinante D, si ha

$$\Phi^{nj} = \frac{\partial D}{\partial \Phi_{nj}} \frac{1}{D},$$

e quindi, ricordando che Φ_{ej} ê funzione della sola q_j, per cui $\frac{\partial D}{\partial \Phi_{nj}}$ è indipendente da q_j,

$$\frac{\partial \Phi^{nj}}{\partial q_j} = -\frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial \Phi_{nj}} \sum_1^n{}_e \Phi^{ej} \frac{d\Phi_{ej}}{dq_j} = -\Phi^{nj} \sum_1^n{}_e \Phi^{ej} \frac{d\Phi_{ej}}{dq_j}.$$

Sostituendo nella espressione di B, si vede che risulta

$$B = 0:$$

cioè la funzione ρ definita dalla (39) è un integrale della equazione (38) *scritta per ognuna delle* ν *determinazioni dei secondi membri delle* (37).

Si conclude quindi, in particolare, che assumendo $\rho_r = \rho$, la densità dell'r-esimo sistema di elementi di traiettoria M_0 è trasportata invariantemente entro V anche da ogni altro dei rimanenti $\nu - 1$ sistemi; per cui la densità totale con cui M_0 ricopre V, somma delle ν densità parziali, è anch'essa proporzionale alla ρ. Evidentemente si può fare $= 1$ il fattore di proporzionalità.

15. **Unicità della densità.** — La ρ è evidentemente un integrale uniforme della (38): è proprio quello che rappresenta la cercata densità dei punti di M_0? Si, perchè si riconosce facilmente che non possono esistere due (o più) integrali uniformi della (38). Ed invero, una ρ che soddisfi alla (38) è un *moltiplicatore* del sistema differenziale (37), ed è noto che se si conoscono due moltiplicatori (uniformi), il loro rapporto, evidentemente uniforme, è un integrale del sistema (37). Ora noi abbiamo fatto l'ipotesi che la traiettoria M_0 ricopra densamente il volume V (ipotesi *quasiergodica*); e con ciò si esclude

che, per i valori delle costanti c_α corrispondenti a M_0, il sistema (37) ammetta un integrale uniforme. La densità ρ è dunque univocamente determinata e la sua espressione è quella fornita dalla (39).

16. **Calcolo rigoroso delle medie temporali.** — È data una funzione $F(q_1 \ldots q_n)$, e le q_i siano quelle

$$q_i = q_i(t)$$

equazioni della traiettoria M_0. Si voglia calcolare la media $\overline{F}$ della F in un intervallo di tempo $t_0 \vdash\!\dashv t_1$:

$$\overline{F} = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} F[q(t)]dt. \tag{40}$$

Riprendiamo la posizione (32), con la quale si definisce una variabile τ sempre crescente con t, e sostituibile quindi alla t in ogni riguardo. In particolare se τ_0, τ_1 corrispondono agli estremi t_0, t_1 della t, si ha

$$t_1 - t_0 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d\tau}{\Phi^{nh}[q(\tau)]}, \tag{41}$$

per cui

$$\overline{F} = \frac{\displaystyle\int_{\tau_0}^{\tau_1} F[q(\tau)]\frac{d\tau}{\Phi^{nh}}}{\displaystyle\int_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{d\tau}{\Phi^{nh}}} \tag{40'}$$

dove tutte le $q(t)$ devono essere espresse in termini della nuova variabile τ.

Il calcolo di una qualunque $\overline{F}$ è così condotto a quello di integrali definiti del tipo

$$\overline{f} = \frac{1}{\tau_1 - \tau_0}\int_{\tau_0}^{\tau_1} f[q(\tau)]d\tau$$

nei quali le

$$q_i = q_i(\tau)$$

sono ancora le equazioni della traiettoria M_0.

Passiamo a calcolare questi integrali appoggiandoci sulla circostanza che i punti della traiettoria M_0 occupano il volume V con una densità tanto più prossima alla ρ quanto più grande è l'intervallo di tempo $t_1 - t_0$ (o il corrispondente $\tau_1 - \tau_0$) in cui il moto è definito: conseguentemente il procedimento adottato apparirà rigorosamente esatto quando si passi a valutazioni asintotiche per $\tau_1 - \tau_0 \to \infty$. In pratica realizzeremo per le medie in questione dei valori approssimati, ma tanto più prossimi a quelli asintotici quanto più $\tau_1 - \tau_0$ è grande; e nell'ipotesi che $\tau_1 - \tau_0$ sia tale, sostituibili qundi con le anzidette medie asintotiche.

Consideriamo un valore determinato, ma qualunque, di q_h compreso tra i limiti della rispettiva librazione

(42) $$a_h \leq q_h \leq b_h$$

e l'iperpiano, π_h,

$$q_h = \text{cost.}$$

corrispondente. Nei punti di π_h la quantità (h) (cfr. la (37)) è diversa da zero poichè s'annulla solamente per $q_h = a_h$, $q_h = b_h$, e perciò la traiettoria M_0 non è ivi mai tangente a π_h.

Fissiamo $\tau_1 - \tau_0$, e sia $2N$ il numero di volte che M_0 attraversa π_h: siccome q_h varia sempre in uno stesso senso tra a_h e b_h, e viceversa, $2N$ è uguale (a meno di 1) al numero delle semilibrazioni di q_h contenute in $\tau_1 - \tau_0$, ed è perciò anche costante (sempre a meno di un'unità) al variare di q_h entro i limiti (42), La durata T di una siffatta semilibrazione, in tempo ridotto τ, si ricava dalla (34)

$$T = \int_{a_h}^{b_h} \frac{dq_h}{\sqrt{(h)}},$$

cosicchè

(43) $$\frac{\tau_1 - \tau_0}{2N} = \int_{a_h}^{b_h} \frac{dq_h}{\sqrt{(h)}}.$$

Questa uguaglianza ha valore asintotico, per $\tau_1 - \tau_0 \to \infty$ cioè; ma basterà che ce ne ricordiamo più innanzi; per $\tau_1 - \tau_0$ finito è sufficientemente esatta quando N è molto grande.

Consideriamo accanto a π_h un analogo iperpiano π_h' infinitamente vicino, relativo cioè al valore $q_h + \delta q_h$ della coordinata q_h; π_h e π_h' tagliano sulla M_0 precisamente $2N$ segmenti infinitesimi, *per ognuno dei quali*, in base alla (34), *essendo costante* dq_h, *è costante pure il* $d\tau$, vale a dire indipendente dai valori delle altre $n - 1$ variabili q_i. Il contributo di tutti gli elementi di M_0 siffatti all'integrale

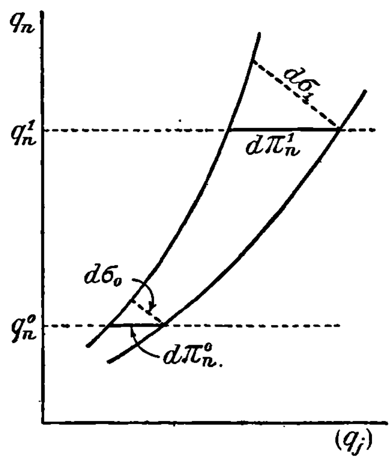
$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} f[q] d\tau$$

è quindi, anche per la (34),

(44) $$d\tau \sum_{1}^{2N}{}_{r} f[q_i^r] = \sum_{1}^{2N}{}_{r} f[q_i^r] \frac{dq_h}{\sqrt{(h)}}$$

dove le q_i^r, per $r = 1, 2, \ldots 2N$, sono i valori delle coordinate nei punti P_r dove M_0 attraversa π_h.

17. **Densità dei punti P_r su π_h.** — Siano q_h^0 e q_h^1 due valori di q_h: un tubo Σ di sezione infinitesima, di traiettorie (appartenenti ad uno dei ν sistemi più volte menzionati) intersechi i piani $q_h = q_h^0$, $q_h = q_h^1$ nei rispettivi element $d\pi_h^0$, $d\pi_h^1$. Siano inoltre: $d\sigma_0$, $d\sigma_1$ le corrispondenti sezioni normali di Σ, v_0, v_1 le velocità e ρ_0, ρ_1 le densità della massa dei punti nelle due



posizioni considerate [1]. Il trasporto dei punti operato dalle traiettorie, essendo permanente, dà luogo all'eguaglianza

(45) $$v_0\rho_0 d\sigma_0 = v_1\rho_1 d\sigma_1 .$$

La normale a $d\sigma$ è la direzione della relativa velocità v, di componenti $\dot{q}_i = \Phi^{ni} \sqrt{(i)}$, il cui coseno direttore su q_h è

$$\frac{\dot{q}_h}{\sqrt{\Sigma_i \dot{q}_i^2}} = \frac{\Phi^{nh}\sqrt{(h)}}{v}.$$

Avremo quindi

$$d\pi_h^0 = \frac{v_0}{(\Phi^{nh}\sqrt{(h)})_0} d\sigma_0, \quad d\pi_h^1 = \frac{v_1}{(\Phi^{nh}\sqrt{(h)})_1} d\sigma_1;$$

(1) Nella figura gli indici *n* sono da sostituire con *h*.

da cui, per la (45) scende

$$\frac{d\pi_h^0}{d\pi_h^1} = \frac{\rho_1 (\Phi^{nh} \sqrt{(h)})_1}{\rho_0 (\Phi^{nh} \sqrt{(h)})_0}.$$

Se δ è la densità dei punti P_r d'intersezione dell'iperpiano $q_h =$ costante con le traiettorie considerate, si ha

$$\delta_0 d\pi_h^0 = \delta_1 d\pi_h^1,$$

cosicchè, per la precedente relazione

$$\frac{\delta_1}{\delta_0} = \frac{\rho_1(\Phi^{nh} \sqrt{(h)})_1}{\rho_0(\Phi^{nh} \sqrt{(h)})_0},$$

che ci conduce a porre per la densità δ cercata

(46) $$\delta = \rho\Phi^{nh} \sqrt{(h)}.$$

Un fattore costante è evidentemente inessenziale.

Allo stesso risultato si arriva per qualunque dei ν sistemi di traiettorie; cosicchè, convenendo di assumere la radice positivamente, con che δ è pure essenzialmente positiva, la (46) vale a rappresentare la densità dei punti P_r nei quali la traiettoria M_0 attraversa il generico iperpiano $q_h =$ cost.

18. **Ritorno al problema del n. 16.** — Passiamo ora a valutare la sommatoria che interviene nella formula (44). Ci sorregge il criterio statistico che, purchè N sia abbastanza grande, i punti P_r, per quanto in numero finito, potranno essere sostituiti con una distribuzione continua su π_h fatta con densità $=\delta$; si può quindi assumere come valore approssimato dell'anzidetta sommatoria il suo valore asintotico:

$$\frac{1}{2N} \sum_{1}^{2N}{}_r f[q_i^r] = \frac{\int_{\pi_h} \delta f[q][dq]^h}{\int_{\pi_h} \delta [dq]^h},$$

dove, per brevità di scrittura, si è adottata la convenzione:

$$[dq]^h = dq_1 dq_2 \dots dq_{h-1} dq_{h+1} \dots dq_n,$$

e gli integrali sono estesi alla sezione del volume V con il piano $q_h =$ cost.; cioè alla regione $n-1$ dimensionale

$$a_i \leq q_i \leq b_i, \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \dots h-1, h+1, \dots n.$$

In definitiva si ha, riportandosi alla (44) e a ciò che è detto in precedenza,

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} f[q]d\tau = 2N\int_{a_h}^{b_h} \frac{dq_h}{\sqrt{(h)}} \frac{\int_{\pi_h} \delta f[q][dq]^h}{\int_{\pi_h} \delta[dq]^h}. \tag{47}$$

Mostriamo che l'integrale

$$\int_{\pi_h} \delta[dq]^h = \int_{\pi_h} \frac{|D|}{|\Pi_i^h \sqrt{(i)}|} \Phi^{nh}[dq]^h$$

è indipendente da q_h. (Con la notazione $\Pi_i^h \sqrt{(i)}$ intendo il prodotto delle radici $\sqrt{(i)}$ *esclusa* $\sqrt{(h)}$).

Si ha infatti

$$D\Phi^{nh} = \frac{\partial D}{\partial \Phi_{nh}},$$

e poichè il secondo membro non contiene la colonna h^{esima}, è indipendente da q_h. Il segno di frazione nella (47) può quindi essere portato sotto anche al primo integrale. Richiamando le (40), (40') potremo scrivere

$$\overline{F} = \frac{\int_V \frac{|D|}{|\Pi_i \sqrt{(i)}|} F[q][dq]}{\int_{\pi_h} \frac{|D|}{|\Pi_i^h \sqrt{(i)}|} \Phi^{nh}[dq]^h} : \frac{\int_V \frac{|D|}{|\Pi_i \sqrt{(i)}|}[dq]}{\int_{\pi_h} \frac{|D|}{|\Pi_i^h \sqrt{(i)}|} \Phi^{nh}[dq]^h},$$

e quindi in definitiva si ha la formula per il calcolo asintotico delle medie temporali

$$\overline{F} = \frac{\int_V \frac{|D|}{|\Pi_i \sqrt{(i)}|} F[q][dq]}{\int_V \frac{|D|}{|\Pi_i \sqrt{(i)}|}[dq]}. \tag{48}$$

La precedente dimostra sostituibile con tutto rigore la media temporale (*asintotica*, che quindi esiste) con la media spaziale fatta assumendo la densità $\rho = \frac{|D|}{|\Pi_i \sqrt{(i)}|}$.

Burgess aveva già ammessa questa formula, ma giustificandola con la presunzione di certi sviluppi in serie delle variabili. La conoscenza effettiva del moto non è, come risulta dal testo, affatto necessaria, poggiando il risultato su circostanze statistiche: le sole possibili nelle supposte condizioni.

19. Dimostrazione dell'invarianza adiabatica degli integrali di Sommerfeld. — E ritorniamo, finalmente, alla valutazione della quantità A del n. 13, che riscriviamo con la notazione abbreviata (cfr. la (37))

$$2A = \delta a \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\partial(h)}{\partial a} d\tau - \varepsilon \sum_{1}^{n}{}_{\alpha\beta} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi^{\alpha\beta} \frac{\partial(\beta)}{\partial a} \frac{d\tau}{\Phi^{nh}} \cdot \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi_{\alpha h} d\tau.$$

In virtù delle (47), (48) abbiamo $\left(\frac{\partial(h)}{\partial a}\right.$ e $\Phi_{\alpha h}$ sono funzioni della sola $\left.q_h\right)$,

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\partial(h)}{\partial a} d\tau = 2N \int_{a_h}^{b_h} \frac{\partial(h)}{\partial a} \frac{dq_h}{\sqrt{h}},$$

$$\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi^{\alpha\beta} \frac{\partial(\beta)}{\partial a} \frac{d\tau}{\Phi^{nh}} = \frac{\displaystyle\int_V \frac{|D|}{|\Pi_i \sqrt{(i)}|} \Phi^{\alpha\beta} \frac{\partial(\beta)}{\partial a} [dq]}{\displaystyle\int_V \frac{|D|}{|\Pi_i \sqrt{(i)}|} [dq]},$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi_{\alpha h} d\tau = 2N \int_{a_h}^{b_h} \frac{\Phi_{\alpha h}}{\sqrt{(h)}} dq_h = 2N \Omega_{\alpha h}.$$

Indichiamo con $\Omega_{\alpha h}$ l'elemento generico del determinante

$$\Omega = \| \Omega_{\alpha i} \| = \left\| \int_{a_i}^{b_i} \frac{\Phi_{\alpha i}}{\sqrt{(i)}} dq_i \right\|$$

senza dubbio $\neq$ da zero, perchè essendo il volume V interno al parallelepipedo

$$a_i \leq q_i \leq b_i$$

si ha

(49) $$\Omega = \int_V \frac{|D|}{|\Pi_i \sqrt{(i)}|} dq_1 dq_2 \dots dq_n,$$

e per essere $D \neq 0$ in V, ha ivi ovunque lo stesso segno. Notiamo che

$$|D| \Phi^{\alpha\beta} = \frac{\partial |D|}{\partial \Phi_{\alpha\beta}}$$

è indipendente da q_β, per cui possiamo scrivere

$$\int_V \frac{|D|}{|\Pi_i \sqrt{(i)}|} \Phi^{\alpha\beta} \frac{\partial(\beta)}{\partial a} [dq] = \int_{a_\beta}^{b_\beta} \frac{\partial(\beta)}{\partial a} \frac{dq_\beta}{\sqrt{(\beta)}} \int_{\pi_\beta} \frac{\partial |D|}{\partial \Phi_{\alpha\beta}} \frac{1}{|\Pi_i^\beta \sqrt{(i)}|} [dq]^\beta.$$

Ora, l'integrale esteso a π_β (cioè al campo $a_i \leq q_i \leq b_i$, per $i = 1, 2, \ldots \beta - 1, \beta + 1, \ldots n$) è uguale a

$$\frac{\partial |\Omega|}{\partial \Omega_{\alpha\beta}} = |\Omega| \, \Omega^{\alpha\beta}$$

adottando la solita notazione per gli elementi reciproci. Consegue, anche per la (49)

$$\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi^{\alpha\beta} \frac{\partial(\beta)}{\partial a} \frac{d\tau}{\Phi^{nh}} = \Omega^{\alpha\beta} \int_{a_\beta}^{b_\beta} \frac{\partial(\beta)}{\partial a} \frac{dq_\beta}{\sqrt{(\beta)}}.$$

Ricordiamo che

$$\varepsilon = \frac{\delta a}{t_1 - t_0},$$

per cui sostituendo nell'espressione di A, abbiamo

$$2A = 2N\delta a \left[\int_{a_h}^{b_h} \frac{\partial(h)}{\partial a} \frac{dq_h}{\sqrt{(h)}} - \sum_1^n{}_{\alpha\beta} \int_{a_\beta}^{b_\beta} \frac{\partial(\beta)}{\partial a} \frac{dq_\beta}{\sqrt{(\beta)}} \cdot \Omega^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha h} \right].$$

Sviluppando la somma su α, si riconosce che β non può assumere se non il valore h, talchè risulta

$$A = 0,$$

la quale — richiamandoci al n. 13 per il significato di A — esprime l'invarianza adiabatica degli integrali di SOMMERFELD.

INDICE DEL TOMO X DELLA SERIA 4ª