EXPOSITION

DU

SYSTÈME DU MONDE.

Se trouve aussi

à BORDEAUX, chez GASSIOT, Libraire, Fossés-de-l'Intendance, n° 61.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

EXPOSITION

DU

SYSTÈME DU MONDE;

PAR

M. LE MARQUIS DE LAPLACE,

Pair de France; Grand Officier de la Légion-d'Honneur; l'un des quarante de l'Académie française; de l'Académie des Sciences; Membre du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés royales de Londres et de Gottingue; des Académies des Sciences de Russie, de Danemarck, de Suède, de Prusse, des Pays-Bas, d'Italie, etc.

SIXIÈME ÉDITION,

DANS LAQUELLE ON A RÉTABLI LES CHAPITRES XII, XVII ET XVIII QUI AVAIENT ÉTÉ SUPPRIMÉS DANS LA 5e ÉDITION.

TOME PREMIER.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1836

AVERTISSEMENT.

L'Auteur s'occupait de la réimpression de cet ouvrage, lorsqu'il fut enlevé au monde savant; plusieurs notes de sa main ont pu être recueillies dans cette nouvelle édition, dont il corrigeait encore des épreuves dans les derniers jours de sa maladie : néanmoins ce travail était peu avancé.

M. de Laplace avait plusieurs fois exprimé dans sa société particulière cette pensée, que l'on ne pouvait trop se défendre d'apporter des corrections aux ouvrages des savans, après leur mort; il disait que c'était en altérer l'origine, souvent au détriment de la pensée première de l'auteur, toujours au préjudice de l'histoire de la science. On a respecté scrupuleusement cette opinion, en reproduisant dans cette sixième édition du *Système du Monde* le texte exact et fidèle de la précédente, aux changemens près que l'auteur avait pu faire lui-même. Seulement trois chapitres du quatrième livre qu'il avait jugé à propos de supprimer dans la cinquième édition, se retrouvent dans celle-ci, savoir, le chapitre XII, *De la stabilité de l'équilibre des mers;* le chapitre XVII, *Réflexions sur la loi de la pesanteur universelle;* et enfin le chapitre XVIII, *De l'attraction moléculaire*. Dans l'avertissement qui précède cette dernière édition, M. de Laplace annonçait l'intention de réunir *ces principaux résultats de l'application de l'analyse aux phénomènes dus à* *l'action moléculaire différente de l'attraction universelle,* qui venaient de recevoir une grande extension, pour en faire le sujet d'un traité spécial, à la suite de *l'Exposition du Système du Monde.* Le temps ne lui ayant pas permis de réaliser ce projet, il était naturel de rétablir dans la nouvelle édition ces chapitres, tels qu'ils étaient dans la quatrième; c'est ainsi qu'ils forment de nouveau les chapitres XII, XVII et XVIII du quatrième livre. On a pensé que ce n'était en aucune façon déroger au principe émis par l'auteur lui-même, dont il est question plus haut, et que l'on complétait par là cet ouvrage d'une manière utile, autant qu'intéressante pour la science.

Dans cette édition, comme dans la précédente, la division décimale est appliquée à l'angle droit, et au jour dont l'origine est fixée à minuit; les mesures linéaires sont rapportées au mètre; et les températures, au thermomètre à mercure, divisé en cent degrés depuis la température de la glace fondante, jusqu'à celle de l'eau bouillante sous une pression équivalente à celle d'une colonne de mercure, haute de 76 centimètres et à zéro de température, sur le parallèle de 50 degrés.

TABLE DES CHAPITRES.

LIVRE SECOND.

LIVRE TROISIÈME.

FIN DE LA TABLE.

ÉLOGE HISTORIQUE

DE M. LE MARQUIS DE LA PLACE,

PRONONCÉ DANS LA SÉANCE PUBLIQUE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, LE 15 JUIN 1829.

PAR M. LE BARON FOURIER,
SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

MESSIEURS,

Le nom de LAPLACE a retenti dans tous les lieux du monde où les sciences sont honorées : mais sa mémoire ne pouvait recevoir un plus digne hommage que le tribut unanime de l'admiration et des regrets du corps illustre dont il a partagé les travaux et la gloire. Il a consacré sa vie à l'étude des plus grands objets qui puissent occuper l'esprit humain.

Les merveilles du ciel, les hautes questions de la philosophie naturelle, les combinaisons ingénieuses et profondes de l'analyse mathématique, toutes les lois de l'univers, ont été présentes à sa pensée pendant plus de soixante années, et ses efforts ont été couronnés par des découvertes immortelles.

On remarqua, dès ses premières études, qu'il était doué d'une mémoire prodigieuse : toutes les occupations de l'esprit lui étaient faciles. Il acquit rapidement une instruction assez étendue dans les langues anciennes, et cultiva diverses branches dans la littérature. Tout intéresse le génie naissant, tout peut le revéler. Ses premiers succès furent dans les études théologiques; il traitait avec talent et avec une sagacité extraordinaire les points de controverse les plus difficiles.

On ignore par quel heureux détour Laplace passa de la scolastique à la haute géométrie. Cette dernière science, qui n'admet guère de partage, attira et fixa son attention. Dès lors il s'abandonna sans réserve à l'impulsion de son génie, et sentit vivement que le séjour de la capitale lui était devenu nécessaire. D'Alembert jouissait alors de tout l'éclat de sa renommée. C'est lui qui venait d'avertir la cour de Turin que son Académie royale possédait un géomètre du premier ordre, Lagrange, qui, à défaut de ce noble suffrage, aurait pu rester long-temps ignoré. D'Alembert avait annoncé au roi de Prusse qu'un seul homme en Europe pouvait remplacer, à Berlin, l'illustre Euler, qui, rappelé par le gouvernement de Russie, consentit à retourner à Saint-Pétersbourg. Je trouve, dans les lettres inédites que possède l'Institut de France, les détails de cette glorieuse négociation qui fixa Lagrange à la résidence de Berlin.

C'est vers le même temps que Laplace commençait cette longue carrière qu'il devait bientôt illustrer.

Il se présenta chez D'Alembert, précédé de recommandations nombreuses, qu'on aurait pu croire très puissantes. Mais ses tentatives furent inutiles : il ne fut pas même introduit. C'est alors qu'il adressa à celui dont il venait solliciter le suffrage une lettre fort remarquable sur les principes généraux de la mécanique, et dont M. Laplace m'a plusieurs fois cité divers fragmens. Il était impossible qu'un aussi grand géomètre que D'Alembert ne fût point frappé de la profondeur singulière de cet écrit. Le jour même, il appela l'auteur de la lettre, et lui dit, ce sont ses propres paroles : « Monsieur, vous voyez que je fais assez peu de cas des recommandations; vous n'en aviez pas besoin. Vous vous êtes fait mieux connaître; cela me suffit : mon appui vous est dû. » Il obtint, peu de jours après, que Laplace fût nommé professeur de mathématiques à l'École militaire de Paris. Dès ce moment, livré sans partage à la science qu'il avait choisie, il donna à tous ses travaux une direction fixe dont il ne s'est jamais écarté: car la constance imperturbable des vues a toujours été le trait principal de son génie. Il touchait déjà aux limites connues de l'analyse mathématique, il possédait ce que cette science avait alors de plus ingénieux et de plus puissant, et personne n'était plus capable que lui d'en agrandir le domaine. Il avait résolu une question capitale de l'astronomie théorique. Il forma le projet de consacrer ses efforts à cette science sublime : il était destiné à la perfectionner, et pouvait l'embrasser dans toute son étendue. Il médita profondément son glorieux dessein ; il a passé toute sa vie à l'accomplir avec une persévérance dont l'histoire des sciences n'offre peut-être aucun autre exemple.

L'immensité du sujet flattait le juste orgueil de son génie. Il entreprit de composer l'*Almageste* de son siècle : c'est le monument qu'il nous a laissé sous le nom de *Mécanique céleste ;* et son ouvrage immortel l'emporte sur celui de Ptolémée autant que la science analytique des modernes surpasse les élémens d'Euclide.

Le temps qui seul dispense avec justice la gloire littéraire, qui livre à l'oubli toutes les médiocrités contemporaines, perpétue le souvenir des grands ouvrages. Eux seuls portent à la postérité le caractère de chaque siècle. Ainsi le nom de Laplace vivra dans tous les âges. Mais, et je me hâte de le dire, l'histoire éclairée et fidèle ne séparera point sa mémoire de celle des autres successeurs de Newton. Elle réunira les noms illustres de D'Alembert, de Clairaut, d'Euler, de Lagrange et de Laplace. Je me borne à citer ici les grands géomètres que les sciences ont perdus, et dont les recherches ont eu pour but commun la perfection de l'astronomie physique.

Pour donner une juste idée de leurs ouvrages, il est nécessaire de les comparer ; mais les bornes qui conviennent à ce discours m'obligent de réserver une partie de cette discussion pour la collection de nos Mémoires...............................

Après Euler, Lagrange a le plus contribué à fonder l'analyse mathématique. Elle est devenue, dans les écrits de ces deux grands géomètres, une science distincte, la seule des théories mathématiques dont on puisse dire qu'elle est complétement et rigoureusement démontrée. Seule, entre toutes ces théories, elle se suffit à elle-même, et elle éclaire toutes les autres; elle leur est tellement nécessaire, que, privées de son secours, elles ne pourraient que demeurer très imparfaites.

Lagrange était né pour inventer et pour agrandir toutes les sciences de calcul. Dans quelque condition que la fortune l'eût placé, ou pâtre ou prince, il aurait été grand géomètre; il le serait devenu nécessairement, et sans aucun effort : ce qu'on ne peut pas dire de tous ceux qui ont excellé dans cette science, même dans les premiers rangs.

Si Lagrange eût été contemporain d'Archimède et de Conon, il aurait partagé la gloire des plus mémorables découvertes. A Alexandrie il eût été rival de Diophantes.

Le trait distinctif de son génie consiste dans l'unité et la grandeur des vues. Il s'attachait en tout à une pensée simple, juste et très élevée. Son principal ouvrage, la *Mécanique analytique*, pourrait être nommée la Mécanique philosophique; car il ramène toutes les lois de l'équilibre et du mouvement à un seul principe; et ce qui n'est pas moins admirable, il les soumet à une seule méthode de calcul dont il est lui-même l'inventeur. Toutes ses compositions mathématiques sont remarquables par une élégance singulière, par la symétrie des formes et la généralité des méthodes, et, si l'on peut parler ainsi, par la perfection du style analytique.

Lagrange n'était pas moins philosophe que grand géomètre. Il l'a prouvé, dans tout le cours de sa vie, par la modération de ses désirs, son attachement immuable aux intérêts généraux de l'humanité, par la noble simplicité de ses mœurs et l'élévation du caractère, enfin par la justesse et la profondeur de ses travaux scientifiques.

Laplace avait reçu de la nature toute la force du génie que peut exiger une entreprise immense. Non-seulement il a réuni dans son *Almageste du* 18^e^ *siècle* ce que les sciences mathématiques et physiques avaient déjà inventé, et qui sert de fondement à l'astronomie; mais il a ajouté à cette science des découvertes capitales qui lui sont propres, et qui avaient échappé à tous ses prédécesseurs. Il a résolu, soit par ses propres méthodes, soit par celles dont Euler et Lagrange avaient indiqué les principes, les questions les plus importantes, et certainement les plus difficiles de toutes celles que l'on avait considérées avant lui. Sa constance a triomphé de tous les obstacles. Lorsque ses premières tentatives n'ont point eu de succès, il les a renouvelées sous les formes les plus ingénieuses et les plus diverses.

Ainsi l'on observait dans les mouvemens de la lune une accélération dont on n'avait pu découvrir la cause. On avait pensé que cet effet pouvait provenir de la résistance du milieu éthéré où se meuvent les corps célestes. S'il en était ainsi, la même cause, affectant le cours des planètes, tendrait à changer de plus en plus l'ordre primitif. Ces astres seraient incessamment troublés dans leur cours, et finiraient par se précipiter sur la masse du soleil. Il serait nécessaire que la puissance créatrice intervînt de nouveau pour prévenir ou pour réparer le désordre immense que le laps des temps aurait causé.

Cette question cosmologique est assurément une des plus grandes que l'intelligence humaine puisse se proposer : elle est résolue aujourd'hui. Les premières recherches de Laplace sur l'invariabilité des dimensions du système solaire, et son explication de l'équation séculaire de la lune, ont conduit à cette solution.

Il avait d'abord examiné si l'on pourrait expliquer l'accélération du mouvement lunaire, en supposant que l'action de la gravité n'est pas instantanée, mais assujettie à une transmission successive, comme celle de la lumière. Par cette voie, il ne put découvrir la véritable cause. Enfin une nouvelle recherche servit mieux son génie. Il donna, le 19 mars 1787, à l'Académie des Sciences, une solution claire et inattendue de cette difficulté capitale. Il prouve très distinctement que l'accélération observée est un effet nécessaire de la gravitation universelle.

Cette grande découverte éclaira ensuite les points les plus importans du système du monde. En effet, la même théorie lui fit connaître que, si l'action de la gravitation sur les astres n'est pas instantanée, il faut supposer qu'elle se propage plus de cinquante millions de fois plus vite que la lumière, dont la vitesse bien connue est de soixante-dix mille lieues par seconde.

Il conclut encore de sa théorie des mouvemens lunaires que le milieu dans lequel les astres se meuvent n'oppose au cours des planètes qu'une résistance, pour ainsi dire, insensible ; car cette cause affecterait surtout le mouvement de la lune, et elle n'y produit aucun effet observable.

La discussion des mouvemens de cet astre est féconde en conséquences remarquables. On en peut conclure, par exemple, que le mouvement de rotation de la terre sur son axe est invariable. La durée du jour n'a point changé de la centième partie d'une seconde depuis deux mille années. Il est remarquable qu'un astronome n'aurait pas besoin de sortir de son observatoire pour mesurer la distance de la terre au soleil. Il lui suffirait d'observer assidûment les variations du mouvement lunaire ; il en conclurait cette distance avec certitude.

Une conséquence encore plus frappante est celle qui se rapporte à la figure de la terre ; car la forme même du globe terrestre est empreinte dans certaines inégalités du cours de la lune. Ces inégalités n'auraient point lieu, si la terre était parfaitement sphérique. On peut déterminer la quantité de l'aplatissement terrestre par l'observation des seuls mouvemens lunaires, et les résultats que l'on en a déduits s'accordent avec les mesures effectives qu'ont procurées les grands voyages géodésiques à l'équateur, dans les régions boréales, dans l'Inde et dans diverses autres contrées.

C'est à Laplace surtout que l'on doit cette perfection étonnante des théories modernes.

Je ne puis entreprendre d'indiquer ici la suite de ces travaux, et les découvertes qui en ont été le fruit. Cette seule énumération, quelque rapide qu'elle pût être, excéderait les limites que j'ai dû me prescrire. Outre ses recherches sur l'équation séculaire de la lune, et la découverte non moins importante et non moins difficile de la cause des grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, on aurait à citer ses théorèmes admirables sur la libration des satellites de Jupiter. Il faudrait rappeler ses travaux analytiques sur le flux et reflux de la mer, et montrer l'étendue immense qu'il a donnée à cette question.

Il n'y a aucun point important de l'astronomie physique qui ne soit devenu pour lui l'objet d'une étude et d'une discussion approfondie, il a soumis au calcul la plupart des conditions physiques que ses prédécesseurs avaient omises. Dans la question déjà si complexe de la forme et du mouvement de rotation de la terre, il a considéré l'effet de la présence des eaux distribuées entre les terres continentales, la compression des couches intérieures, la diminution séculaire des dimensions du globe.

Dans cet ensemble de recherches, on doit remarquer surtout celles qui se rapportent à la stabilité des grands phénomènes : aucun objet n'est plus digne de la méditation des philosophes. Ainsi l'on a reconnu que les causes, ou fortuites, ou constantes, qui troublent l'équilibre des mers, sont assujetties à des limites qui ne peuvent être franchies. La pesanteur spécifique des eaux étant beaucoup moindre que celle de la terre solide, il en résulte que les oscillations de l'Océan sont toujours comprises entre des limites fort étroites; ce qui n'arriverait point si le liquide répandu sur le globe était beaucoup plus pesant. En général, la nature tient en réserve des forces conservatrices et toujours présentes, qui agissent aussitôt que le trouble commence, et d'autant plus que l'aberration est plus grande. Elles ne tardent point à rétablir l'ordre accoutumé. On trouve dans toutes les parties de l'univers cette puissance préservatrice. La forme des grandes orbites planétaires, leurs inclinaisons, varient et s'altèrent dans le cours des siècles ; mais ces changemens sont limités. Les dimensions principales subsistent, et cet immense assemblage des corps célestes oscille autour d'un état moyen vers lequel il est toujours ramené. Tout est disposé pour l'ordre, la perpétuité et l'harmonie.

Dans l'état primitif et liquide du globe terrestre, les matières les plus pesantes se sont rapprochées du centre ; et cette condition a déterminé la stabilité des mers.

Quelle que puisse être la cause physique de la formation des planètes, elle a imprimé à tous ces corps un mouvement de projection dans un même sens autour d'un globe immense : par là le système solaire est devenu stable. Le même effet se produit dans le système des satellites et des anneaux. L'ordre y est maintenu par la puissance de la masse centrale. Ce n'est donc point, comme Newton lui-même et Euler l'avaient soupçonné, une force adventice qui doit un jour réparer ou prévenir le trouble que le temps aurait causé. C'est la loi elle-même de la gravitation qui règle tout, qui suffit à tout, et maintient la variété et l'ordre. Émanée une seule fois de la sagesse suprême elle préside depuis l'origine des temps, et rend tout désordre impossible. Newton et Euler ne connaissaient point encore toutes les perfections de l'univers.

En général, toutes les fois qu'il s'est élevé quelque doute sur l'exactitude de la loi neutonienne, et que, pour expliquer les irrégularités apparentes, on a proposé l'accession d'une cause étrangère, il est toujours arrivé, après un examen approfondi, que la loi primordiale a été vérifiée. Elle explique aujourd'hui tous les phénomènes connus. Plus les observations sont précises, plus elles sont conformes à la théorie. Laplace est de tous les géomètres celui qui a le plus approfondi ces grandes questions ; il les a, pour ainsi dire, terminées.

On ne peut pas affirmer qu'il lui eût été donné de créer une science entièrement nouvelle, comme l'ont fait Archimède et Galilée; de donner aux doctrines mathématiques des principes originaux, et d'une étendue immense, comme Descartes, Newton et Leibnitz ; ou, comme Newton, de transporter le premier dans les cieux, et d'étendre à tout l'univers la dynamique terrestre de Galilée : mais Laplace était né pour tout perfectionner pour tout approfondir, pour reculer toutes les limites, pour résoudre ce que l'on aurait pu croire insoluble. Il aurait achevé la science du ciel, si cette science pouvait être achevée.

On retrouve ce même caractère dans ses recherches sur l'analyse des probabilités, science toute moderne, immense, dont l'objet souvent méconnu a donné lieu aux interprétations les plus fausses, mais dont les applications embrasseront un jour tout le champ des connaissances humaines, heureux supplément à l'imperfection de notre nature.

Cet art est né d'un seul trait du génie clair et fécond de Pascal; il a été cultivé, dès son origine, par Fermat et Huygens. Un géomètre philosophe, Jacques Bernouilli, en fut le principal fondateur. Une découverte singulièrement heureuse de Stirling, les recherches d'Euler, et surtout une application ingénieuse et importante due à Lagrange, ont perfectionné cette doctrine; elle a été éclairée par les objections même de D'Alembert et par les vues philosophiques de Condorcet: Laplace en a réuni et fixé les principes. Alors elle est devenue une science nouvelle, soumise à une seule méthode analytique, et d'une étendue prodigieuse. Féconde en applications usuelles, elle éclairera un jour d'une vive lumière toutes les branches de la philosophie naturelle. S'il nous est permis d'exprimer ici une opinion personnelle nous ajouterons que la solution d'une des questions principales, celle que l'illustre auteur a traitée dans le dixième chapitre de son ouvrage, ne nous paraît point exacte; et toutefois, considérée dans son ensemble, cet ouvrage est un des monumens les plus précieux de son génie.

Après avoir cité des découvertes aussi éclatantes, il serait inutile d'ajouter que M. Laplace appartenait à toutes les grandes académies de l'Europe.

Je pourrais aussi, je devais peut-être, rappeler les hautes dignités politiques dont il fut revêtu, mais cette énumération n'appartiendrait qu'indirectement à l'objet de ce discours. C'est le grand géomètre dont nous célébrons la mémoire. Nous avons séparé l'immortel auteur de la *Mécanique céleste* de tous les faits accidentels qui n'intéressent ni sa gloire ni son génie. En effet, Messieurs, qu'importe à la postérité, qui aura tant d'autres détails à oublier, d'apprendre ou non que Laplace fut quelques instans ministre d'un grand état. Ce qui importe, ce sont les vérités éternelles qu'il a découvertes, ce sont les lois immuables de la stabilité du monde, et non le rang qu'il occupa quelques années dans le sénat appelé *conservateur*. Ce qui importe, Messieurs, et plus encore peut-être que ses découvertes, ce sont les exemples qu'il laisse à tous ceux à qui les sciences sont chères; c'est le souvenir de cette persévérance incomparable qui a soutenu, dirigé, couronné tant de glorieux efforts.

J'omettrai donc des circonstances accidentelles, et, pour ainsi dire, fortuites, des particularités qui n'ont aucun rapport avec la perfection de ses ouvrages. Mais je dirai que, dans le premier corps de l'état, la mémoire de Laplace fut célébrée par une voix éloquente et amie, que d'importans services rendus aux sciences historiques, aux lettres et à l'état, avaient depuis long-temps illustrée (1).

Je rappellerai surtout cette solennité littéraire qui attira l'attention de la capitale. L'Académie française, réunissant ses suffrages aux acclamations de la patrie, jugea qu'elle acquerrait une gloire nouvelle, en couronnant les triomphes de l'éloquence et de la vertu politique (2).

---

(1) M. le marquis de Pastoret.

(2) M. Royer-Collard.

En même temps, elle choisit, pour répondre au successeur de Laplace, un académicien illustre à plus d'un titre (1), qui réunit, dans la littérature, dans l'histoire, dans l'administration publique, tous les genres de supériorités.

Laplace a joui d'un avantage que la fortune n'accorde pas toujours aux grands hommes. Dès sa première jeunesse, il a été dignement apprécié par des amis illustres. Nous avons sous les yeux des lettres encore inédites, qui nous apprennent tout le zèle que mit D'Alembert à l'introduire à l'École militaire de France, et à lui préparer, si cela eût été nécessaire, un meilleur établissement à Berlin. Le président Bochard de Saron fit imprimer ses premiers ouvrages. Tous les témoignages d'amitié qui lui ont été donnés rappellent de grands travaux et de grandes découvertes; mais rien ne pouvait contribuer davantage aux progrès de toutes les connaissances physiques, que ses relations avec l'illustre Lavoisier, dont le nom, consacré par l'histoire des sciences, est devenu un éternel objet de respects et de douleur.

(1) M. le comte Daru.

Ces deux hommes célèbres réunirent leurs efforts. Ils entreprirent et achevèrent des recherches fort étendues pour mesurer l'un des élémens les plus importans de la théorie physique de la chaleur. Ils firent aussi, vers ce même temps, une longue série d'expériences sur les dilatations des substances solides. Les ouvrages de Newton font assez connaître tout le prix que ce grand géomètre attachait à l'étude spéciale des sciences physiques. Laplace est de tous ses successeurs celui qui a fait le plus d'usage de sa méthode expérimentale; il fut presque aussi grand physicien que grand géomètre. Ses recherches sur les réfractions, sur les effets capillaires, les mesures barométriques, les propriétés statiques de l'électricité, la vitesse du son, les actions moléculaires, les propriétés des gaz, attestent que rien, dans l'investigation de la nature, ne pouvait lui être étranger. Il désirait surtout la perfection des instrumens; il fit construire à ses frais, par un célèbre artiste, un instrument d'astronomie très précieux, et le donna à l'observatoire de France.

Tous les genres de phénomènes lui étaient parfaitement connus. Il était lié par une ancienne amitié avec deux physiciens célèbres, dont les découvertes ont éclairé tous les arts et toutes les théories chimiques. L'histoire unira les noms de Berthollet et de Chaptal à celui de Laplace. Il se plaisait à les réunir, et leurs entretiens ont toujours eu pour but et pour résultat l'accroissement des connaissances les plus importantes et les plus difficiles à acquérir.

Les jardins de Berthollet à sa maison d'Arcueil n'étaient point séparés de ceux de Laplace. De grands souvenirs, de grands regrets, ont illustré cette enceinte. C'est là que Laplace recevait des étrangers célèbres, des hommes puissans, dont la science avait reçu ou espérait quelques bienfaits, mais surtout ceux qu'un zèle sincère attachait au sanctuaire des sciences. Les uns commençaient leur carrière, les autres devaient bientôt la finir. Il les entretenait tous avec une extrême politesse. Il la portait même si loin, qu'il aurait donné lieu de croire à ceux qui ne connaissaient point encore toute l'étendue de son génie, qu'il pouvait lui-même retirer quelque fruit de leurs entretiens.

En citant les ouvrages mathématiques de Laplace, nous avons dû surtout faire remarquer la profondeur des recherches et l'importance des découvertes. Ses ouvrages se distinguent encore par un autre caractère que tous les lecteurs ont apprécié. Je veux parler du mérite littéraire de ses compositions. Celle qui porte le titre de *Système du monde* est remarquable par l'élégante simplicité du discours et la pureté du langage. Il n'y avait point encore d'exemple de ce genre de productions; mais, on s'en formerait une idée bien inexacte, si l'on pensait que l'on peut acquérir la connaissance des phénomènes du ciel dans de semblables écrits. La suppression des signes propres à la langue du calcul ne peut pas contribuer à la clarté, et rendre la lecture plus facile. L'ouvrage est une exposition parfaitement régulière des résultats d'un étude approfondie : c'est un résumé ingénieux des découvertes principales. La précision du style, le choix des méthodes, la grandeur du sujet, donnent un intérêt singulier à ce vaste tableau; mais son utilité réelle est de rappeler aux géomètres les théorèmes dont la démonstration leur était déjà connue. C'est, à proprement parler, une table de matières d'un traité mathématique.

Les ouvrages purement historiques de Laplace ont un autre objet.

Il y présente aux géomètres avec un talent admirable la marche de l'esprit humain dans l'invention des sciences.

Les théories les plus abstraites ont, en effet, une beauté d'expression qui leur est propre : c'est ce que l'on remarque dans plusieurs traités de Descartes, dans quelques pages de Galilée, de Newton et de Lagrange. La nouveauté des vues, l'élévation des pensées, leurs rapports avec les grands objets de la nature attachent et remplissent l'esprit. Il suffit que le style soit pur et d'une noble simplicité : c'est ce genre de littérature que Laplace a choisi ; et il est certain qu'il s'y est placé dans les premiers rangs. S'il écrit l'histoire des grandes découvertes astronomiques, il devient un modèle d'élégance et de précision. Aucun trait principal ne lui échappe ; l'expression n'est jamais ni obscure ni ambitieuse. Tout ce qu'il appelle grand est grand en effet ; tout ce qu'il omet ne méritait point d'être cité.

M. Laplace a conservé dans un âge très avancé cette mémoire extraordinaire qui l'avait fait remarquer dès ses premières années ; don précieux qui n'est pas le génie, mais qui lui sert pour acquérir et pour conserver.

Il n'a point cultivé les beaux-arts; mais il les appréciait. Il aimait la musique de l'Italie et les vers de Racine, et il se plaisait souvent à citer de mémoire divers passages de ce grand poète. Les compositions de Raphael ornaient ses appartemens. On les trouvait à côté des portraits de Descartes, de François Viète, de Newton, de Galilée et d'Euler.

Laplace avait toujours eu l'habitude d'une nourriture très légère : il en diminua de plus en plus et excessivement la quantité. Sa vue très délicate exigeait des précautions continuelles; il parvint à la conserver sans aucune altération. Ces soins de lui-même n'ont jamais eu qu'un seul but, celui de réserver tout son temps et toutes ses forces pour les travaux de l'esprit. Il a vécu pour les sciences : les sciences ont rendu sa mémoire éternelle.

Il avait contracté l'habitude d'une excessive contention d'esprit, si nuisible à la santé, si nécessaire aux études profondes; et cependant il n'éprouva quelque affaiblissement sensible que dans ses deux dernières années.

Au commencement de la maladie à laquelle il a succombé, on remarqua avec effroi un instant de délire. Les sciences l'occupaient encore. Il parlait avec une ardeur inaccoutumée du mouvement des astres, et ensuite d'une expérience de physique qu'il disait être capitale, annonçant aux personnes qu'il croyait présentes qu'il irait bientôt entretenir l'Académie de ces questions. Ses forces l'abandonnèrent de plus en plus. Son médecin (1), qui méritait toute sa confiance par des talens supérieurs et par des soins que l'amitié seule peut inspirer, veillait auprès de son lit. M. Bouvard, son collaborateur et son ami, ne l'a pas quitté un seul instant.

Entouré d'une famille chérie, sous les yeux d'une épouse dont la tendresse l'avait aidé à supporter les peines inséparables de la vie, dont l'aménité et les graces lui avait fait connaître le prix du bonheur domestique, il a reçu de M. le marquis de Laplace son fils les témoignages empressés de la piété la plus touchante.

Il se montra pénétré de reconnaissance pour les marques réitérées d'intérêt que lui donnèrent le Roi et Monsieur le Dauphin.

Les personnes qui ont assisté à ses derniers instans lui rappelaient les titres de sa gloire, et ses plus éclatantes découvertes. Il répon-

---

(1) M. Magendie.

dit : « Ce que nous connaissons est peu de chose, ce que nous ignorons est immense. » C'est du moins, autant qu'on l'a pu saisir, le sens de ses dernières paroles à peine articulées. Au reste, nous l'avons entendu souvent exprimer cette pensée, et presque dans les mêmes termes. Il s'éteignit sans douleur.

Son heure suprême était arrivée : le génie puissant qui l'avait long-temps animé, se sépara de l'enveloppe mortelle, et retourna vers les cieux.

Le nom de Laplace honore une de nos provinces déjà si féconde en grands hommes, l'ancienne Normandie. Il est né le 23 mars 1749; il a succombé, dans la 78e année de son âge, le 5 mai 1827, à neuf heures du matin.

Vous rappellerai-je, Messieurs, la sombre tristesse qui se répandit dans ce palais comme un nuage, lorsque la nouvelle fatale vous fut annoncée. C'était le jour et l'heure même de vos séances accoutumées. Chacun de vous gardait un morne silence; chacun ressentait le coup funeste dont les sciences venaient d'être frappées. Tous les regards se portaient sur cette place qu'il avait si long-temps occupée parmi vous. Une seule pensée vous était présente; toute autre méditation était devenue impossible. Vous vous séparâtes par l'effet d'une résolution unanime, et cette seule fois vos travaux habituels furent interrompus.

Il est beau sans doute, il est glorieux il est digne d'une nation puissante de décerner des honneurs éclatans à la mémoire de ses hommes célèbres. Dans la patrie de Newton, les chefs de l'état ont voulu que les restes mortels de ce grand homme fussent solennellement déposés parmi les tombes royales. La France et l'Europe ont offert à la mémoire de Laplace une expression de leurs regrets moins fastueuse sans doute, mais peut-être plus touchante et plus vraie.

Il a reçu un hommage inaccoutumé; il l'a reçu des siens dans le sein d'une compagnie savante qui pouvait seule apprécier tout son génie. La voix des sciences éplorées s'est fait entendre dans tous les lieux du monde où la philosophie a pénétré. Nous avons sous les yeux des correspondances multipliées de toutes les parties de l'Allemagne; de l'Angleterre, de l'Italie, de la Nouvelle-Hollande, des possessions anglaises dans l'Inde, des deux Amériques; et nous y trouvons ces mêmes sentimens d'admiration et de regrets.

Certainement ce deuil universel des sciences si noblement et si librement exprimé, n'a pas moins de vérité et d'éclat que la pompe sépulcrale de Westminster.

Qu'il me soit permis, avant de terminer ce discours, de reproduire ici une réflexion qui se présentait d'elle-même, lorsque j'ai rappelé dans cette enceinte les grandes découvertes d'Herschel, mais qui s'applique plus directement encore à celles de Laplace.

Vos successeurs, Messieurs, verront s'accomplir les grands phénomènes dont il a découvert les lois. Ils observeront dans les mouvemens lunaires les changemens qu'il a prédits et dont lui seul a pu assigner la cause. L'observation continuelle des satellites de Jupiter perpétuera la mémoire de l'inventeur des théorèmes qui en règlent le cours. Les grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, poursuivant leurs longues périodes, et donnant à ces astres des situations nouvelles, rappelleront sans cesse une de ses plus grandes découvertes. Voilà des titres d'une gloire véritable, que rien ne peut anéantir. Le spectacle du ciel sera changé; mais à ces époques reculées, la gloire de l'inventeur subsistera toujours : les traces de son génie portent le sceau de l'immortalité.

Je vous ai présenté, Messieurs, quelques traits d'une vie illustre consacrée à la gloire des sciences : puissent vos souvenirs suppléer à d'aussi faibles accens! Que la voix de la patrie, que celle de l'humanité tout entière, s'élèvent pour célébrer les bienfaiteurs des nations, seul hommage digne de ceux qui ont pu, comme Laplace, agrandir le domaine de la pensée, et attester à l'homme la dignité de son être, en dévoilant à nos regards toute la majesté des cieux!

EXPOSITION

DU

SYSTÈME DU MONDE.

> Me verò primùm dulces ante omnia Musæ
> Quarum sacra fero, ingenti perculsus amore,
> Accipiant, cœlique vias et sidera monstrent.
> VIRG. *Georg.*, lib. II.

De toutes les sciences naturelles, l'Astronomie est celle qui présente le plus long enchaînement de découvertes. Il y a extrêmement loin de la première vue du ciel, à la vue générale par laquelle on embrasse aujourd'hui les états passés et futurs du système du monde. Pour y parvenir, il a fallu observer les astres pendant un grand nombre de siècles; reconnaître dans leurs apparences les mouvemens réels de la terre; s'élever aux lois des mouvemens planétaires, et de ces lois, au principe de la pesanteur universelle; redescendre enfin de ce principe, à l'explication complète de tous les phénomènes célestes, jusque dans leurs moindres détails. Voilà ce que l'esprit humain a fait dans l'Astronomie. L'exposition de ces découvertes et de la manière la plus simple dont elles ont pu naître et se succéder, aura le double avantage d'offrir un grand ensemble de vérités importantes, et la vraie méthode qu'il faut suivre dans la recherche des lois de la nature. C'est l'objet que je me suis proposé dans cet Ouvrage.

LIVRE PREMIER.

DES MOUVEMENS APPARENS DES CORPS CÉLESTES.

CHAPITRE PREMIER.

Du mouvement diurne du ciel.

Si pendant une belle nuit, et dans un lieu dont l'horizon soit à découvert, on suit avec attention le spectacle du ciel; on le voit changer à chaque instant. Les étoiles s'élèvent ou s'abaissent; quelques-unes commencent à se montrer vers l'orient, d'autres disparaissent vers l'occident; plusieurs, telles que l'étoile polaire, et les étoiles de la grande Ourse, n'atteignent jamais l'horizon dans nos climats. Dans ces mouvemens divers, la position respective de tous ces astres reste la même : ils décrivent des cercles d'autant plus petits, qu'ils sont plus près d'un point que l'on conçoit immobile. Ainsi le ciel paraît tourner sur deux points fixes nommés par cette raison, *pôles du monde;* et dans ce mouvement, il emporte le système entier des astres. Le pôle élevé sur notre horizon, est le pôle *boréal* ou *septentrional* : le pôle opposé que l'on imagine au-dessous de l'horizon, se nomme pôle *austral* ou *méridional*.

Déjà plusieurs questions intéressantes se présentent à résoudre. Que deviennent pendant le jour, les astres que nous voyons durant la nuit? D'où viennent ceux qui commencent à paraître? Où vont ceux qui disparaissent? L'examen attentif des phénomènes, fournit des réponses simples à ces questions. Le matin, la lumière des étoiles s'affaiblit à mesure que l'aurore augmente: le soir, elles deviennent plus brillantes à mesure que le crépuscule diminue; ce n'est donc point parce qu'elles cessent de luire, mais parce qu'elles sont effacées par la vive lumière des crépuscules et du soleil, que nous cessons de les apercevoir. L'heureuse invention du télescope nous a mis à portée de vérifier cette explication, en nous faisant voir les étoiles, au moment même où le soleil est le plus élevé. Celles qui sont assez près du pôle, pour ne jamais atteindre l'horizon, sont constamment visibles. Quant aux étoiles qui commencent à se montrer à l'orient, pour disparaître à l'occident; il est naturel de penser qu'elles continuent de décrire sous l'horizon, le cercle qu'elles ont commencé à parcourir au-dessus, et dont l'horizon nous cache la partie inférieure. Cette vérité devient sensible, quand on s'avance vers le nord : les cercles des étoiles situées vers cette partie du monde, se dégagent de plus en plus de dessous l'horizon : ces étoiles cessent enfin de disparaître, tandis que d'autres étoiles situées au midi, deviennent pour toujours invisibles. On observe le contraire en avançant vers le midi : des étoiles qui demeuraient constamment sur l'horizon, se lèvent et se couchent alternativement; et de nouvelles étoiles auparavant invisibles, commencent à paraître. La surface de la terre n'est donc pas ce qu'elle nous semble, un plan sur lequel la voûte céleste est appuyée. C'est une illusion que les premiers observateurs ne tardèrent pas à rectifier par des considérations analogues aux précédentes : ils reconnurent bientôt que le ciel enveloppe de tous côtés la terre, et que les étoiles y brillent sans cesse, en décrivant, chaque jour, leurs différens cercles. On verra dans la suite, l'astronomie souvent occupée à corriger de semblables illusions, et à reconnaître les objets réels dans leurs trompeuses apparences.

Pour se former une idée précise du mouvement des astres; on conçoit par le centre de la terre et par les deux pôles du monde, un axe autour duquel tourne la sphère céleste. Le grand cercle perpendiculaire à cet axe, s'appelle *équateur:* les petits cercles que les étoiles décrivent parallèlement à l'équateur, en vertu de leur mouvement diurne, se nomment *parallèles*. Le *zénith* d'un observateur, est le point du ciel que sa verticale va rencontrer : le *nadir* est le point directement opposé. Le *méridien* est le grand cercle qui passe par le zénith et les pôles : il partage en deux également, l'arc décrit par les étoiles sur l'horizon, et lorsqu'elles l'atteignent, elles sont à leur plus grande ou à leur plus petite hauteur. Enfin l'*horizon* est le grand cercle perpendiculaire à la verticale, ou parallèle à la surface de l'eau stagnante dans le lieu de l'observateur.

La hauteur du pôle tient le milieu entre la plus grande et la plus petite hauteur des étoiles qui ne se couchent jamais, ce qui donne un moyen facile de la déterminer;

or, en s'avançant directement vers le pôle, on le voit s'élever à fort peu près proportionnellement à l'espace parcouru ; la surface de la terre est donc convexe, et sa figure est peu différente d'une sphère. La courbure du globe terrestre est sensible à la surface des mers : le navigateur, en approchant des côtes, aperçoit d'abord leurs points les plus élevés, et découvre ensuite successivement les parties inférieures que lui dérobait la convexité de la terre. C'est encore à raison de cette courbure, que le soleil, à son lever, dore le sommet des montagnes avant que d'éclairer les plaines.

CHAPITRE II.

Du Soleil et de ses mouvemens.

Tous les astres participent au mouvement diurne de la sphère céleste; mais plusieurs ont des mouvemens propres qu'il est important de suivre, parce qu'ils peuvent seuls nous conduire à la connaissance du vrai système du monde. De même que pour mesurer l'éloignement d'un objet, on l'observe de deux positions différentes; ainsi pour découvrir le mécanisme de la nature, il faut la considérer sous divers points de vue, et observer le développement de ses lois, dans les changemens du spectacle qu'elle nous présente. Sur la terre, nous faisons varier les phénomènes par des expériences : dans le ciel, nous déterminons avec soin tous ceux que nous offrent les mouvemens célestes. En interrogeant ainsi la nature, et soumettant ses réponses à l'analyse; nous pouvons, par une suite d'inductions bien ménagées, nous élever aux phénomènes généraux dont tous les faits particuliers dérivent. C'est à découvrir ces grands phénomènes, et à les réduire au plus petit nombre possible, que doivent tendre nos efforts; car les causes premières et la nature intime des êtres nous seront éternellement inconnues.

Le soleil a un mouvement propre dirigé en sens contraire du mouvement diurne. On reconnaît ce mouvement, par le spectacle du ciel pendant les nuits, spectacle qui change et se renouvelle avec les saisons. Les étoiles situées sur la route du soleil, et qui se couchent un peu après lui, se perdent bientôt dans sa lumière, et reparaissent ensuite avant son lever; cet astre s'avance donc vers elles, d'occident en orient. C'est ainsi que l'on a suivi long-temps son mouvement propre, qui maintenant peut être déterminé avec une grande précision, en observant chaque jour, la hauteur méridienne du soleil, et le temps qui s'écoule entre son passage et ceux des étoiles, au méridien. Ces observations donnent les mouvemens propres du soleil, dans le sens du méridien et dans le sens des parallèles; et la résultante de ces mouvemens est le vrai mouvement de cet astre autour de la terre. On a trouvé de cette manière, que le soleil se meut dans un orbe que l'on nomme *écliptique*, et qui, au commencement de 1801, était incliné de 26°,073 à l'équateur.

C'est à l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur, qu'est due la différence des saisons. Lorsque le soleil atteint par son mouvement annuel, l'équateur; il le décrit à fort peu près en vertu de son mouvement diurne, et ce grand cercle étant partagé en deux également par tous les horizons, le jour est alors égal à la nuit, sur toute la terre. On a nommé par cette raison, *équinoxes*, les points d'intersection de l'équateur avec l'écliptique. A mesure que le soleil, en partant de l'équinoxe du printemps, s'avance dans son orbe, ses hauteurs méridiennes sur notre horizon, croissent de plus en plus : l'arc visible des parallèles qu'il décrit, chaque jour, augmente sans cesse, et fait croître la durée des jours, jusqu'à ce que le soleil parvienne à sa plus grande hauteur. A cette époque, le jour est le plus long de l'année; et comme vers le *maximum*, les variations de la hauteur méridienne du soleil sont insensibles, le soleil, à ne considérer que cette hauteur dont dépend la durée du jour, paraît stationnaire; ce qui a fait nommer *solstice* d'été, ce point du *maximum*. Le parallèle que le soleil décrit alors est le *tropique* d'été. Cet astre redescend ensuite vers l'équateur qu'il traverse de nouveau dans l'équinoxe d'automne; et de là, il parvient à son *minimum* de hauteur, ou au solstice d'hiver. Le parallèle décrit alors par le soleil, est le tropique d'hiver; et le jour qui lui répond est le plus court de l'année. Parvenu à ce terme, le soleil remonte vers l'équateur et revient, à l'équinoxe du printemps, recommencer la même carrière.

Telle est la marche constante du soleil et des saisons. Le printemps est l'intervalle compris entre l'équinoxe du printemps et le solstice d'été : l'intervalle de ce solstice à l'équinoxe d'automne forme l'été : l'intervalle de l'équinoxe d'automne au solstice d'hiver, forme l'automne : enfin l'hiver est l'intervalle du solstice d'hiver à l'équinoxe du printemps.

La présence du soleil sur l'horizon, étant la cause de la chaleur; il semble que la température devrait être la même en été qu'au printemps, et dans l'hiver qu'en automne. Mais la température n'est pas un effet instantané de la présence du soleil : elle est le résultat de son action long-temps continuée. Elle n'atteint son *maximum* dans le jour, qu'après la plus grande hauteur de cet astre sur l'horizon : elle n'y parvient dans l'année, qu'après la plus grande hauteur solsticiale du soleil.

Les divers climats offrent des variétés remarquables, que nous allons suivre de l'équateur aux pôles. A l'équateur, l'horizon coupe en deux parties égales, tous les parallèles; le jour y est donc constamment égal à la nuit. Le soleil s'élève à midi, jusqu'au zénith, dans les équinoxes. Les hauteurs méridiennes de cet astre dans les solstices, sont les plus petites et égales au complément de l'inclinaison de l'écliptique à l'équateur : les ombres solaires ont alors des directions opposées, ce qui n'arrive point dans nos climats où elles sont toujours, à midi, dirigées vers le nord; il y a donc, à proprement parler, deux hivers et deux étés, chaque année, sous l'équateur. Là même chose a lieu dans tous les pays où la hauteur du pôle est moindre que l'obliquité de l'écliptique. Au-delà, le soleil ne s'élevant jamais au zénith, il n'y a plus qu'un hiver et un été dans l'année :

le plus long jour augmente, et le plus court diminue, à mesure que l'on avance vers le pôle; et lorsque le zénith n'en est éloigné que d'un angle égal à l'obliquité de l'écliptique, le soleil ne se couche point au solstice d'été, il ne se lève point au solstice d'hiver. Plus près du pôle encore, le temps de sa présence et celui de son absence sur l'horizon vers les solstices, surpassent plusieurs jours et même plusieurs mois. Enfin sous le pôle, l'horizon étant l'équateur même, le soleil est toujours au-dessus, quand il est du même côté de l'équateur que le pôle: il est constamment au-dessous, quand il est de l'autre côté de l'équateur; il n'y a donc qu'un jour et une nuit dans l'année.

Suivons plus particulièrement la marche du soleil. D'abord on observe une inégalité dans les intervalles qui séparent les équinoxes et les solstices: il s'écoule environ huit jours de plus, de l'équinoxe du printemps à celui d'automne, que de ce dernier équinoxe à celui du printemps; le mouvement du soleil n'est donc pas uniforme. Des observations précises et multipliées ont fait connaître qu'il est le plus rapide dans un point de l'orbite solaire situé vers le solstice d'hiver, et qu'il est le plus lent dans le point opposé de l'orbite, vers le solstice d'été. Le soleil décrit par jour, 1°,1327 dans le premier point, et seulement 1°,0591 dans le second : ainsi pendant le cours de l'année, son mouvement journalier varie en plus et en moins, de trois cent soixante-huit dix-millièmes de sa valeur moyenne.

Cette variation produit, en s'accumulant, une inégalité très sensible dans le mouvement du soleil. Pour en déterminer la loi, et généralement pour avoir celles de toutes les inégalités périodiques, on peut considérer que les sinus et les cosinus des angles, redevenant les mêmes à chaque circonférence dont ces angles augmentent, ils sont propres à représenter ces inégalités. En exprimant donc de cette manière, toutes les inégalités des mouvemens célestes, il n'y a de difficulté qu'à les démêler entre elles, et à déterminer les angles dont elles dépendent. L'inégalité que nous considérons, se rétablissant à chaque révolution solaire; il est naturel de la faire dépendre du mouvement du soleil, et de ses multiples. On trouve ainsi qu'en l'exprimant dans une série de sinus dépendans de ce mouvement, elle se réduit à fort peu près à deux termes dont le premier est proportionnel au sinus de la distance moyenne angulaire du soleil, au point de son orbite où sa vitesse est la plus grande, et dont le second, environ quatre-vingt-quinze fois moindre que le premier, est proportionnel au sinus du double de cette distance.

Les mesures du diamètre apparent de cet astre nous prouvent que sa distance à la terre est variable, comme sa vitesse angulaire. Ce diamètre augmente et diminue suivant la même loi que cette vitesse, mais dans un rapport deux fois moindre. Lorsque la vitesse est la plus grande, ce diamètre est de 6035″,8; on ne l'observe que de 5836″,3, lorsque cette vitesse est la plus petite; ainsi sa grandeur moyenne est de 5936″,0.

La distance du soleil à la terre étant réciproque à son diamètre apparent, son accroissement suit la même loi que la diminution de ce diamètre. On nomme *périgée*, le point de l'orbite où le soleil est le plus près de la terre; et *apogée*, le point opposé où cet astre en est le plus éloigné. C'est dans le premier de ces points, que le soleil a le plus grand diamètre apparent et la plus grande vitesse : dans le second point, son diamètre apparent et sa vitesse sont à leur *minimum*.

Il suffit, pour diminuer le mouvement apparent du soleil, de l'éloigner de la terre. Mais si cette cause produisait seule la variation du mouvement solaire, et si la vitesse réelle du soleil était constante; sa vitesse apparente diminuerait dans le même rapport que son diamètre apparent. Elle diminue dans un rapport deux fois plus grand; il y a donc un ralentissement réel dans le mouvement de cet astre, lorsqu'il s'éloigne de la terre. Par l'effet composé de ce ralentissement et de l'augmentation de la distance, son mouvement angulaire diminue comme le carré de la distance augmente, en sorte que son produit par ce carré, est à fort peu près constant. Toutes les mesures du diamètre apparent du soleil, comparées aux observations de son mouvement journalier, confirment ce résultat.

Imaginons par les centres du soleil et de la terre une droite que nous nommerons *rayon vecteur* du soleil : il est facile de voir que le petit secteur ou l'aire tracée dans un jour par ce rayon, autour de la terre, est proportionnelle au produit du carré de ce rayon, par le mouvement journalier apparent du soleil. Ainsi, cette aire est constante, et l'aire entière tracée par le rayon vecteur, à partir d'un rayon fixe, croît comme le nombre des jours écoulés depuis l'époque où le soleil était sur ce rayon; *les aires décrites par son rayon vecteur sont donc proportionnelles au temps.* Un rapport aussi simple entre le mouvement du soleil et sa distance au foyer de son mouvement, doit être admis comme une loi fondamentale de sa théorie, du moins jusqu'à ce que les observations nous obligent de le modifier.

Si, d'après les données précédentes, on marque de jour en jour la position et la longueur du rayon vecteur de l'orbe solaire, et que l'on fasse passer une courbe par les extrémités de tous ces rayons; on verra que cette courbe est un peu allongée dans le sens de la droite qui, passant par le centre de la terre, joint les points de la plus grande et de la plus petite distance du soleil. Sa ressemblance avec l'ellipse ayant fait naître la pensée de les comparer entre elles, on a reconnu leur identité; d'où l'on a conclu que *l'orbe solaire est une ellipse dont le centre de la terre occupe un des foyers.*

L'ellipse est une de ces courbes fameuses dans la Géométrie ancienne et moderne, sous le nom de *sections coniques*. Il est facile de la décrire, en fixant à deux points invariables que l'on appelle *foyers*, les extrémités d'un fil tendu sur un plan, par une pointe qui glisse le long de ce fil. L'ellipse tracée par la pointe dans ce mouvement, est visiblement allongée dans le sens de la droite qui joint les foyers, et qui, prolongée de chaque côté jusqu'à la courbe, forme le grand axe dont la longueur est la même que celle du fil. Le petit axe est la droite menée par le centre, perpendiculairement au grand axe, et prolongée de chaque côté jusqu'à la courbe : la distance du centre à l'un des foyers, est l'*excentricité* de l'ellipse. Lorsque les deux foyers sont réunis au même point, l'ellipse est un cercle : en les éloignant, elle s'allonge de plus en plus; et si leur distance mutuelle devenant infinie, la distance du foyer au sommet le plus voisin de la courbe reste finie, l'ellipse devient une *parabole*.

L'ellipse solaire est peu différente d'un cercle; car l'excès de la plus grande sur la moyenne distance du soleil à la terre, n'est, comme on l'a vu, que cent soixante-huit dix-millièmes de cette distance. Cet excès est l'excentricité elle-même, dans laquelle les observations indiquent une diminution fort lente et à peine sensible dans l'intervalle d'un siècle.

Pour avoir une juste idée du mouvement elliptique du soleil, concevons un point mû uniformément sur une circonférence dont le centre soit celui de la terre, et dont le rayon soit égal à la distance périgée du soleil : supposons, de plus, que ce point et le soleil partent ensemble du périgée, et que le mouvement angulaire du point soit égal au moyen mouvement angulaire du soleil. Tandis que le rayon vecteur du point tourne uniformément autour de la terre, le rayon vecteur du soleil se meut d'une manière inégale, en formant toujours avec la distance périgée et les arcs d'ellipse, des secteurs proportionnels aux temps. Il devance d'abord le rayon vecteur du point, et fait avec lui un angle qui, après avoir augmenté jusqu'à une certaine limite, diminue et redevient nul, quand le soleil est à son apogée. Alors, les deux rayons vecteurs coïncident avec le grand axe. Dans la seconde moitié de l'ellipse, le rayon vecteur du point devance à son tour celui du soleil, et forme avec lui des angles qui sont exactement les mêmes que dans la première moitié, à la même distance du périgée où il revient coïncider avec le rayon vecteur du soleil et le grand axe de l'ellipse. L'angle dont le rayon vecteur du soleil devance celui du point, est ce que l'on nomme *équation du centre*. Son *maximum* était de $2^{\circ},13807$ au commencement du siècle actuel, c'est-à-dire, au minuit commençant le premier janvier 1801. Il diminue de $53''$ environ par siècle. Le mouvement angulaire du point autour de la terre, se conclut de la durée de la révolution du soleil dans son orbite. En ajoutant à ce mouvement l'équation du centre, on a le mouvement angulaire du soleil. La recherche de cette équation est un problème intéressant d'analyse, qui ne peut être résolu que par approximation; mais le peu d'excentricité de l'orbe solaire conduit à des séries très convergentes qu'il est facile de réduire en tables.

Le grand axe de l'ellipse solaire n'est pas fixe dans le ciel ; il a, relativement aux étoiles, un mouvement annuel d'environ 36″, et dirigé dans le même sens que celui du soleil.

L'orbe solaire se rapproche insensiblement de l'équateur : on peut évaluer à 148″ la diminution séculaire de son obliquité sur le plan de ce grand cercle.

Le mouvement elliptique du soleil ne représente pas encore exactement les observations modernes : leur grande précision a fait apercevoir de petites inégalités dont il eût été presque impossible, par les seules observations, de reconnaître les lois. Ces inégalités sont ainsi du ressort de cette branche de l'astronomie qui redescend des causes aux phénomènes, et qui sera l'objet du quatrième Livre.

La distance du soleil à la terre a intéressé, dans tous les temps, les observateurs : ils ont essayé de la déterminer par tous les moyens que l'astronomie a successivement indiqués. Le plus naturel et le plus simple est celui que les géomètres emploient pour mesurer la distance des objets terrestres. Des deux extrémités d'une base connue, on observe les angles que forment avec elle les rayons visuels de l'objet; et en retranchant leur somme, de deux angles droits, on a l'angle formé par ces rayons à leur concours : cet angle est ce que l'on nomme *parallaxe* de l'objet dont il est facile ensuite d'avoir la distance aux extrémités de la base. En transportant cette méthode au soleil, il faut choisir la base la plus étendue que l'on puisse avoir sur la terre. Imaginons deux observateurs placés sous le même méridien, et observant à midi la distance du centre du soleil au pôle boréal: la différence des deux distances observées sera l'angle sous lequel on verrait de ce centre la droite qui joint les observateurs: la différence des hauteurs du pôle donne cette droite en parties du rayon terrestre; il sera donc facile d'en conclure l'angle sous lequel on verrait du centre du soleil, le demi-diamètre de la terre. Cet angle est la *parallaxe horizontale* du soleil; mais il est trop petit, pour être déterminé avec précision par cette méthode, qui peut seulement nous faire juger que cet astre est au moins éloigné de neuf mille diamètres terrestres. Nous verrons dans la suite les découvertes astronomiques fournir des moyens beaucoup plus précis pour avoir sa parallaxe, que l'on sait maintenant être à fort peu près de 26",54 dans sa moyenne distance à la terre; d'où il résulte que cette distance est de 23984 rayons terrestres.

On observe à la surface du soleil, des taches noires d'une forme irrégulière et changeante. Quelquefois, elles sont nombreuses et fort étendues : on en a vu dont la largeur égalait quatre ou cinq fois celle de la terre. D'autres fois, mais rarement, le soleil paraît pur et sans taches pendant des années entières. Souvent les taches solaires sont entourées de pénombres environnées elles-mêmes de parties plus lumineuses que le reste du soleil, et au milieu desquelles on voit ces taches se former et disparaître. La nature des taches est encore ignorée; mais elles nous ont fait connaître un phénomène remarquable, celui de la rotation du soleil. Au travers des variations qu'elles éprouvent dans leur position et dans leur grandeur, on démêle des mouvemens réguliers, exactement les mêmes que ceux des points correspondans de la surface du soleil, en supposant à cet astre, dans le sens de son mouvement autour de la terre, une rotation sur un axe presque perpendiculaire à l'écliptique. On a conclu de l'observation suivie des taches, que la durée d'une rotation entière du soleil, est d'environ vingt-cinq jours et demi, et que l'équateur solaire est incliné de huit degrés un tiers au plan de l'écliptique.

Les grandes taches du soleil sont presque toujours comprises dans une zone de sa surface, dont la largeur mesurée sur un méridien solaire ne s'étend pas au-delà de trente-quatre degrés, de chaque côté de son équateur : on en a cependant observé à quarante-quatre degrés de distance.

On aperçoit, surtout vers l'équinoxe du printemps, une faible lumière visible avant le lever, ou après le coucher du soleil, et à laquelle on a donné le nom de *lumière zodiacale*. Sa couleur est blanche, et sa figure apparente est celle d'un fuseau dont la base s'appuie sur l'équateur solaire : tel on verrait un sphéroïde de révolution fort aplati dont le centre et le plan de l'équateur seraient les mêmes que ceux du soleil. Sa longueur paraît quelquefois sous tendre un angle de plus de cent degrés. Le fluide qui nous réfléchit cette lumière doit être extrêmement rare, puisque l'on voit les étoiles au travers. Suivant l'opinion la plus générale, ce fluide est l'atmosphère même du soleil ; mais cette atmosphère est loin de s'étendre à d'aussi grandes distances. Nous proposerons à la fin de cet Ouvrage quelques conjectures sur la cause jusqu'à présent ignorée, de cette lumière.

CHAPITRE III.

Du Temps et de sa mesure.

Le temps est pour nous, l'impression que laisse dans la mémoire une suite d'événemens dont nous sommes certains que l'existence a été successive. Le mouvement est propre à lui servir de mesure ; car un corps ne pouvant pas être dans plusieurs lieux à la fois, il ne parvient d'un endroit à un autre, qu'en passant successivement par tous les lieux intermédiaires. Si, à chaque point de la ligne qu'il décrit, il est animé de la même force ; son mouvement est uniforme, et les parties de cette ligne peuvent mesurer le temps employé à les parcourir. Quand un pendule, à la fin de chaque oscillation, se retrouve dans des circonstances parfaitement semblables ; les durées de ces oscillations sont les mêmes, et le temps peut se mesurer par leur nombre. On peut aussi employer à cette mesure les révolutions de la sphère céleste, dans lesquelles tout paraît égal : mais on est unanimement convenu de faire usage pour cet objet, du mouvement du soleil dont les retours au méridien et au même équinoxe, ou au même solstice, forment les jours et les années.

Dans la vie civile, le jour est l'intervalle de temps qui s'écoule depuis le lever jusqu'au coucher du soleil : la nuit est le temps pendant lequel le soleil reste au-dessous de l'horizon. Le jour astronomique embrasse toute la durée de la révolution diurne : c'est le temps compris entre deux midis ou entre deux minuits consécutifs. Il surpasse la durée d'une révolution du ciel, qui forme le *jour sidéral;* car si le soleil traverse le méridien au même instant qu'une étoile, le jour suivant, il y reviendra plus tard en vertu de son mouvement propre, par lequel il s'avance d'occident en orient; et dans l'espace d'une année, il passera une fois de moins que l'étoile, au méridien. On trouve ainsi qu'en prenant pour unité le jour moyen astronomique, la durée du jour sidéral est de 0,99726957.

Les jours astronomiques ne sont pas égaux : deux causes, l'inégalité du mouvement propre du soleil et l'obliquité de l'écliptique, produisent leurs différences. L'effet de la première cause est évident : ainsi au solstice d'été, vers lequel le mouvement du soleil est le plus lent, le jour astronomique approche plus du jour sidéral, qu'au solstice d'hiver, où ce mouvement est le plus rapide.

Pour concevoir l'effet de la seconde cause, il faut observer que l'excès du jour astronomique sur le jour sidéral n'est dû qu'au mouvement propre du soleil, rapporté à l'équateur. Si par les extrémités du petit arc que le soleil décrit sur l'écliptique dans un jour, et par les pôles du monde, on imagine deux grands cercles de la sphère céleste; l'arc de l'équateur, qu'ils interceptent, est le mouvement journalier du soleil rapporté à l'équateur, et le temps que cet arc met à traverser le méridien, est l'excès du jour astronomique sur le jour sidéral; or, il est visible que dans les équinoxes, l'arc de l'équateur est plus petit que l'arc correspondant de l'écliptique, dans le rapport du cosinus de l'obliquité de l'écliptique au rayon: dans les solstices, il est plus grand dans le rapport du rayon au cosinus de la même obliquité; le jour astronomique est donc diminué dans le premier cas, et augmenté dans le second.

Pour avoir un jour moyen indépendant de ces causes, on imagine un second soleil mû uniformément sur l'écliptique, et traversant toujours aux mêmes instans que le vrai soleil, le grand axe de l'orbe solaire, ce qui fait disparaître l'inégalité du mouvement propre du soleil. On fait ensuite disparaître l'effet de l'obliquité de l'écliptique, en imaginant un troisième soleil passant par les équinoxes, aux mêmes instans que le second soleil, et mû sur l'équateur, de manière que les distances angulaires de ces deux soleils, à l'équinoxe du printemps, soient constamment égales entre elles. L'intervalle compris entre deux retours consécutifs de ce troisième soleil, au méridien, forme le jour moyen astronomique. Le *temps moyen* se mesure par le nombre de ces retours, et le *temps vrai* se mesure par le nombre des retours du vrai soleil, au méridien. L'arc de l'équateur, intercepté entre deux méridiens menés par les centres du vrai soleil et du troisième soleil, et réduit en temps, à raison de la circonférence entière pour un jour, est ce que l'on nomme *équation du temps*.

Le jour se divise en vingt-quatre heures, et l'on fixe à minuit son origine. L'heure est divisée en 60 minutes, la minute en 60 secondes, la seconde en 60 tierces, etc. Mais la division du jour en dix heures, de l'heure en cent minutes, de la minute en cent secondes, est beaucoup plus commode pour les usages astronomiques, et nous l'adopterons dans cet Ouvrage.

Le second soleil que nous venons d'imaginer, détermine par ses retours à l'équateur et aux tropiques, les équinoxes et les solstices moyens. La durée de ces retours au même équinoxe ou au même solstice, forme l'*année tropique* dont la grandeur actuelle est de $365^j,2422419$. L'observation a fait connaître que le soleil met plus de temps à revenir aux mêmes étoiles : ce temps est l'année sidérale qui surpasse l'année tropique, de $0^j,014119$. Ainsi les équinoxes ont sur l'écliptique, un mouvement rétrograde ou contraire au mouvement propre du soleil, par lequel ils décrivent, chaque année, un arc égal au moyen mouvement de cet astre dans l'intervalle de $0^j,014119$, et par conséquent, de $154'',63$. Ce mouvement n'est pas exactement le même dans tous les siècles, ce qui rend un peu inégale, la longueur de l'année tropique : elle est maintenant de 13″ environ plus courte qu'au temps d'Hipparque.

C'est à l'un des équinoxes ou à l'un des solstices qu'il convient de commencer l'année. Son origine placée au solstice d'été ou à l'équinoxe d'automne, partagerait et répartirait sur deux années consécutives, les mêmes opérations et les mêmes travaux : elle aurait ainsi les inconvéniens du jour commençant à midi, suivant l'ancien usage des astronomes. L'équinoxe du printemps, époque de la renaissance de la nature, semble devoir être pareillement celle du renouvellement de l'année; mais il est aussi naturel de la faire commencer au solstice d'hiver, que l'antiquité célébra comme l'époque de la renaissance du soleil, et qui sous le pôle, est le milieu de la grande nuit de l'année.

Si l'année civile était constamment de 365 jours, son commencement anticiperait sans cesse sur celui de la véritable année tropique, et il parcourrait, en rétrogradant, les diverses saisons, dans une période d'environ 1508 ans. Mais cette année, qui fut autrefois en usage dans l'Égypte, ôte au calendrier l'avantage d'attacher les mois et les fêtes aux mêmes saisons, et d'en faire des époques remarquables pour l'agriculture. On conserverait cet avantage précieux aux habitans des campagnes, en considérant l'origine de l'année comme un phénomène astronomique que l'on fixerait par le calcul, au minuit qui précède le solstice ou l'équinoxe; et c'est ce que l'on a fait en France, à la fin du dernier siècle. Mais alors, les années bissextiles ou de 366 jours, s'intercalant suivant une loi très compliquée, il serait difficile de décomposer en jours un nombre quelconque d'années, ce qui répandrait de la confusion sur l'histoire et sur la chronologie. D'ailleurs, l'origine de l'année, que l'on a toujours besoin de connaître d'avance, deviendrait incertaine et arbitraire, lorsqu'elle approcherait de minuit, d'une quantité moindre que l'erreur des tables solaires. Enfin, l'ordre des bissextiles changerait avec les méridiens, ce qui formerait un obstacle à l'adoption si désirable d'un même calendrier par les différens peuples. En voyant, en effet, chaque peuple compter de son principal observatoire les longitudes géographiques, peut-on croire qu'ils s'accorderont tous à faire dépendre d'un même méridien le commencement de leur année? Il faut donc abandonner ici la nature, et recourir à un mode d'intercalation artificiel, mais régulier et commode. Le plus simple de tous est celui que Jules-César introduisit dans le calendrier romain, et qui consiste à intercaler une bissextile, tous les quatre ans. Mais si la courte durée de la vie suffit pour écarter sensiblement l'origine des années égyptiennes, du solstice ou de l'équinoxe, il ne faut qu'un petit nombre de siècles pour opérer le même déplacement dans l'origine des années juliennes; ce qui rend indispensable, une intercalation plus composée. Dans l'onzième siècle, les Perses en adoptèrent une, remarquable par son exactitude. Elle se réduit à rendre la quatrième année, bissextile sept fois de suite, et à ne faire ce changement la huitième fois, qu'à la cinquième année. Cela suppose la longueur de l'année tropique, de 365j $\frac{8}{33}$, plus grande seulement de 0j,0001823, que l'année déterminée par les observations; en sorte qu'il faudrait un grand nombre de siècles, pour déplacer sensiblement l'origine de l'année civile. Le mode d'intercalation du calendrier grégorien est un peu moins exact; mais il donne plus de facilité pour réduire en jours, les années et les siècles, ce qui est l'un des principaux objets du calendrier. Il consiste à intercaler une bissextile, tous les quatre ans, en supprimant la bissextile de la fin de chaque siècle, pour la rétablir à la fin du quatrième. La longueur de l'année que cela suppose est de $365^{j}\frac{97}{400}$, ou de 365j,242500, plus grande que la véritable, de 0j,0002581. Mais si, en suivant l'analogie de ce mode d'intercalation, on supprime encore une bissextile, tous les quatre mille ans, ce qui les réduit à 969 dans cet intervalle; la longueur de l'année sera de $365^{j}\frac{969}{4000}$, ou de 365j,2422500, ce qui approche tellement de la longueur 365,2422419 déterminée par les observations, que l'on peut négliger la différence, vu la petite incertitude que les observations elles-mêmes laissent sur la vraie longueur de l'année, qui d'ailleurs n'est pas rigoureusement constante.

La division de l'année en douze mois est fort ancienne et presque universelle. Quelques peuples ont supposé les mois égaux et de trente jours, et ils ont complété l'année par l'addition d'un nombre suffisant de jours complémentaires. D'autres peuples ont embrassé l'année entière dans les douze mois, en les rendant inégaux. Le système des mois de trente jours conduit naturellement à leur division en trois *décades*. Cette période donne la facilité de retrouver à chaque instant le quantième du mois. Mais à la fin de l'année, les jours complémentaires troublent l'ordre de choses attaché aux divers jours de la décade, ce qui nécessite alors des mesures administratives embarrassantes. On obvie à cet inconvénient, par l'usage d'une petite période indépendante des mois et des années : telle est la *semaine*, qui depuis la plus haute antiquité dans laquelle se perd son origine, circule sans interruption à travers les siècles, en se mêlant aux calendriers successifs des différens peuples. Il est très remarquable qu'elle se trouve identiquement la même sur toute la terre, soit relativement à la dénomination de ses jours, réglée sur le plus ancien système d'astronomie, soit par rapport à leur correspondance au même instant physique. C'est peut-être le monument le plus ancien et le plus incontestable des connaissances humaines : il paraît indiquer une source commune d'où elles se sont répandues; mais le système astronomique qui

3..

lui sert de base est une preuve de leur imperfection à cette origine.

Il était facile, lorsqu'on réforma le calendrier grégorien, de fixer au solstice d'hiver le commencement de l'année; ce qui aurait fait concourir l'origine de chaque saison avec le commencement d'un mois. Il était facile encore de rendre plus régulière la longueur des mois, en donnant vingt-neuf jours à celui de février dans les années communes, et trente jours dans les bissextiles, et en faisant les autres mois alternativement de trente-un et de trente jours : il eût été commode de les désigner tous par leur rang ordinal. En corrigeant ensuite, comme on vient de le dire, l'intercalation adoptée, le calendrier grégorien n'eût laissé presque rien à désirer. Mais convient-il de lui donner ce degré de perfection ? Il me semble qu'il n'en résulterait pas assez d'avantages, pour compenser les embarras qu'un pareil changement introduirait dans nos habitudes, dans nos rapports avec les autres peuples, et dans la chronologie déjà trop compliquée par la multitude des ères. Si l'on considère que ce calendrier est maintenant celui de presque toutes les nations d'Europe et d'Amérique, et qu'il a fallu deux siècles et toute l'influence de la religion pour lui procurer cette universalité, on sentira qu'il importe de lui conserver un aussi précieux avantage, aux dépens même d'une perfection qui ne porte pas sur des points essentiels. Car le principal objet d'un calendrier est d'offrir un moyen simple d'attacher les événemens à la série des jours; et par un mode facile d'intercalation, de fixer dans la même saison l'origine de l'année; conditions qui sont bien remplies par le calendrier grégorien.

De la réunion de cent années on a formé le *siècle*, la plus longue période employée jusqu'ici dans la mesure du temps; car l'intervalle qui nous sépare des plus anciens événemens connus n'en exige pas encore de plus grandes.

CHAPITRE IV.

Des mouvemens de la Lune, de ses phases et des éclipses.

Celui de tous les astres qui nous intéresse le plus après le soleil, est la lune, dont les phases offrent une division du temps si remarquable, qu'elle a été primitivement en usage chez tous les peuples. La lune a, comme le soleil, un mouvement propre d'occident en orient. La durée de sa révolution sidérale était de $27^j,32166142 3$, au commencement de ce siècle : cette durée n'est pas toujours la même, et la comparaison des observations modernes avec les anciennes, prouve incontestablement une accélération dans le moyen mouvement de la lune. Cette accélération encore peu sensible depuis la plus ancienne éclipse qui nous soit parvenue, se développera par la suite des temps. Mais ira-t-elle en croissant sans cesse, ou s'arrêtera-t-elle pour se changer en retardement ? C'est ce que les observations ne peuvent apprendre qu'après un très grand nombre de siècles. Heureusement, la découverte de sa cause, en les devançant, nous a fait connaître qu'elle est périodique. Au commencement de ce siècle, la distance moyenne angulaire de la lune à l'équinoxe du printemps, et comptée de cet équinoxe dans le sens du mouvement propre de cet astre, était 124°,01321, à minuit, temps moyen à l'Observatoire royal de Paris.

La lune se meut dans un orbe elliptique dont le centre de la terre occupe un des foyers. Son rayon vecteur trace autour de ce point des aires à peu près proportionnelles aux temps. La moyenne distance de cet astre à la terre étant prise pour unité, l'excentricité de son ellipse est 0,0548442, ce qui donne la plus grande équation du centre, égale à 6°,9854 : elle paraît être invariable. Le périgée lunaire a un mouvement direct, c'est-à-dire dans le sens du mouvement propre du soleil : la durée de sa révolution sidérale était, au commencement du siècle, de 3232^{j}, 575343, et sa moyenne distance angulaire à l'équinoxe du printemps était 295°,68037. Son mouvement n'est pas uniforme : il se ralentit pendant que celui de la lune s'accélère.

Les lois du mouvement elliptique sont encore loin de représenter les observations de la lune : elle est assujettie à un grand nombre d'inégalités qui ont des rapports évidens avec la position du soleil. Nous allons indiquer les trois principales.

La plus considérable et la première que l'on ait reconnue, est celle que l'on nomme *évection.* Cette inégalité, qui dans son *maximum* s'élève à $1^{\circ},4907$, est proportionnelle au sinus d'un angle égal au double de la distance de la lune au soleil, moins la distance de la lune à son périgée. Dans les oppositions et dans les conjonctions de la lune avec le soleil, elle se confond avec l'équation du centre, qu'elle diminue constamment. Par cette raison, les anciens observateurs qui ne déterminaient les élémens de la théorie lunaire qu'au moyen des éclipses et dans la vue de prédire ces phénomènes, trouvèrent l'équation du centre de la lune plus petite que la véritable, de toute la quantité de l'évection.

On observe encore dans le mouvement lunaire, une grande inégalité qui disparaît dans les conjonctions et dans les oppositions de la lune au soleil, ainsi que dans les points où ces deux astres sont éloignés entre eux du quart de la circonférence. Elle est à son *maximum* et s'élève à 0°,6611, quand leur distance mutuelle est de cinquante degrés; d'où l'on a conclu qu'elle est proportionnelle au sinus du double de la distance de la lune au soleil. Cette inégalité que l'on nomme *variation*, disparaissant dans les éclipses, elle n'a pu être reconnue par l'observation de ces phénomènes.

Enfin, le mouvement de la lune s'accélère quand celui du soleil se ralentit, et réciproquement; d'où résulte une inégalité connue sous le nom d'*équation annuelle*, et dont la loi est exactement la même que celle de l'équation du centre du soleil avec un signe contraire. Cette inégalité qui dans son *maximum* est de 0°,2074, se confond dans les éclipses, avec l'équation du centre du soleil; et dans le calcul de l'instant de ces phénomènes, il est indifférent de considérer séparément ces deux équations, ou de supprimer l'équation annuelle de la théorie lunaire, pour en accroître l'équation du centre du soleil. Par cette raison, les anciens astronomes donnèrent à l'orbe solaire une trop grande excentricité; comme ils en assignèrent une trop petite à l'orbe lunaire, à raison de l'évection.

Cet orbe est incliné de $5^\circ,7185$, à l'écliptique : ses points d'intersection avec elle, que l'on nomme *nœuds*, ne sont pas fixes dans le ciel; ils ont un mouvement rétrograde ou contraire à celui de la lune, mouvement qu'il est facile de reconnaître par la suite des étoiles que la lune rencontre en traversant l'écliptique. On appelle *nœud ascendant*, celui dans lequel la lune s'élève au-dessus de l'écliptique, vers le pôle boréal; et *nœud descendant*, celui dans lequel elle s'abaisse au-dessous, vers le pôle austral. La durée d'une révolution sidérale des nœuds était, au commencement du siècle, de $6793^j,39108$, et la distance moyenne du nœud ascendant à l'équinoxe du printemps, était $15^\circ,46117$; mais le mouvement des nœuds se ralentit de siècle en siècle. Il est assujetti à plusieurs inégalités dont la plus grande est proportionnelle au sinus du double de la distance de la lune au soleil, et s'élève à $1^\circ,8102$ dans son *maximum*. L'inclinaison de l'orbe est pareillement variable; sa plus grande inégalité, qui s'élève à $0^\circ,1627$ dans son *maximum*, est proportionnelle au cosinus du même angle dont dépend l'inégalité du mouvement des nœuds; mais l'inclinaison moyenne paraît constante dans les différens siècles, malgré les variations séculaires du plan de l'écliptique.

L'orbe lunaire, et généralement les orbes du soleil et de tous les corps célestes, n'ont pas plus de réalité, que les paraboles décrites par les projectiles, à la surface de la terre. Pour représenter le mouvement d'un corps dans l'espace, on imagine une ligne menée par toutes les positions successives de son centre : cette ligne est son orbite, dont le plan fixe ou variable est celui qui passe par deux positions consécutives du corps, et par le point autour duquel on le conçoit en mouvement.

Au lieu d'envisager ainsi le mouvement d'un corps, on peut le projeter par la pensée sur un plan fixe, et déterminer sa courbe de projection et sa hauteur au-dessus de ce plan. Cette méthode fort simple est celle que les astronomes emploient dans les tables des mouvemens célestes.

Le diamètre apparent de la lune change d'une manière analogue aux variations du mouvement lunaire : il est de 5438″, dans la plus grande distance de la lune à la terre, et de 6207″ dans sa plus petite distance.

Les mêmes moyens auxquels la parallaxe du soleil avait échappé par sa petitesse, ont donné la parallaxe moyenne de la lune, égale à 10661″. Ainsi, à la même distance où cet astre nous paraît sous un angle de 5823″, la terre serait vue sous un angle de 21332″; leurs diamètres sont donc dans le rapport de ces nombres, ou à très peu près, comme trois est à onze; et le volume du globe lunaire est quarante-neuf fois moindre que celui du globe terrestre.

Les phases de la lune sont un des phénomènes célestes les plus frappans. En se dégageant le soir des rayons du soleil, elle reparaît avec un faible croissant, qui augmente à mesure qu'elle s'en éloigne, et qui devient un cercle entier de lumière, lorsqu'elle est en opposition avec cet astre. Quand ensuite elle s'en approche, ses phases diminuent suivant le degré de leur précédente augmentation, jusqu'à ce qu'elle se plonge le matin dans les rayons solaires. Le croissant de la lune, constamment dirigé vers le soleil, indique évidemment qu'elle en emprunte sa lumière; et la loi de la variation de ses phases dont la largeur croît à très peu près proportionnellement au sinus verse de la distance angulaire de la lune au soleil, nous prouve qu'elle est sphérique.

Le retour des phases dépend de l'excès du mouvement de la lune sur celui du soleil, excès que l'on nomme mouvement *synodique* lunaire. La durée de la révolution synodique de cet astre, ou la période de ses conjonctions moyennes, est maintenant de $29^j,530588716$: elle est à l'année tropique, à très peu près dans le rapport de 19 à 235; c'est-à-dire que dix-neuf années solaires forment environ deux cent trente-cinq mois lunaires.

Les *syzygies* sont les points de l'orbite où la lune se trouve en conjonction ou en opposition avec le soleil. Dans le premier cas, la lune est nouvelle : elle est pleine dans le second. Les *quadratures* sont les points où la lune est éloignée du soleil, de cent ou de trois cents degrés comptés dans le sens de son mouvement propre. Dans ces points, que l'on nomme premier et second *quartier* de la lune, nous voyons la moitié de son hémisphère éclairé. A la rigueur, nous en apercevons un peu plus; car, lorsque l'exacte moitié se découvre à nous, la distance angulaire de la lune au soleil est un peu moindre que cent degrés. A cet instant que l'on reconnaît parce que la ligne qui sépare l'hémisphère éclairé de l'hémisphère obscur, paraît être une ligne droite; le rayon mené de l'observateur, au centre de la lune, est perpendiculaire à celui qui joint les centres de la lune et du soleil. Ainsi, dans le triangle formé par les droites qui joignent ces centres et l'œil de l'observateur, l'angle à la lune est droit, et l'observation donne l'angle à l'observateur; on peut donc déterminer la distance du soleil à la terre, en parties de la distance de la terre à la lune. La difficulté de fixer avec précision l'instant où nous voyons la moitié du disque éclairé de la lune, rend cette méthode peu rigoureuse: on lui doit cependant les premières notions justes que l'on ait eues du volume immense du soleil, et de sa grande distance à la terre.

L'explication des phases de la lune conduit à celle des éclipses, objet de la frayeur des hommes dans les temps d'ignorance, et de leur curiosité dans tous les temps. La lune ne peut s'éclipser que par l'interposition d'un corps opaque qui lui dérobe la lumière du soleil, et il est visible que ce corps est la terre, puisque les éclipses de lune n'arrivent jamais que dans ses oppositions, ou lorsque la terre est entre cet astre et le soleil. Le globe terrestre projette derrière lui, relativement au soleil, un cône d'ombre dont l'axe est sur la droite qui joint les centres du soleil et de la terre, et qui se termine au point où les diamètres apparens de ces deux corps seraient les mêmes. Ces diamètres vus du centre de la lune en opposition et dans sa moyenne distance, sont à peu près de 5920″ pour le soleil, et de 21322″ pour la terre; ainsi le cône d'ombre terrestre a une longueur au moins trois fois et demie plus grande que la distance de la lune à la terre; et sa largeur aux points où il est traversé par la lune, est environ huit tiers du diamètre lunaire. La lune serait donc éclipsée, toutes les fois qu'elle serait en opposition au soleil, si le plan de son orbe coïncidait avec l'écliptique; mais en vertu de l'inclinaison mutuelle de ces plans, la lune, dans ses oppositions, est souvent élevée au-dessus, ou abaissée au-dessous du cône d'ombre terrestre, et elle n'y pénètre que lorsqu'elle est près de ses nœuds. Si tout son disque s'enfonce dans l'ombre de la terre, l'éclipse de lune est *totale:*

elle est *partielle*, si ce disque n'y pénètre qu'en partie; et l'on conçoit que la proximité de la lune à ses nœuds, au moment de l'opposition, doit produire toutes les variétés que l'on observe dans ces éclipses.

Chaque point de la surface de la lune, avant de s'éclipser, perd successivement la lumière des diverses parties du disque solaire. Sa clarté diminue donc graduellement, et s'éteint au moment où il pénètre dans l'ombre terrestre. On a nommé *pénombre*, l'intervalle dans lequel cette diminution a lieu, et dont la largeur est égale au diamètre apparent du soleil vu du centre de la lune.

La durée moyenne d'une révolution du soleil, par rapport au nœud de l'orbe lunaire, est de $346^j,619851$; elle est à la durée d'une révolution synodique de la lune, à fort peu près dans le rapport de 223 à 19. Ainsi, après une période de 223 mois lunaires, le soleil et la lune se retrouvent à la même position relativement au nœud de l'orbe lunaire; les éclipses doivent donc revenir à peu près dans le même ordre, ce qui donne, pour les prédire, un moyen simple qui fut employé par les anciens astronomes. Mais les inégalités des mouvemens du soleil et de la lune doivent produire des différences sensibles : d'ailleurs, le retour de ces deux astres à la même position par rapport au nœud, dans l'intervalle de 223 mois, n'est pas rigoureux ; et les écarts qui en résultent, changent à la longue l'ordre des éclipses observées pendant une de ces périodes.

La forme circulaire de l'ombre terrestre, dans les éclipses de lune, rendit sensible aux premiers astronomes, la sphéricité très approchée de la terre : nous verrons dans la suite, la théorie lunaire perfectionnée offrir le moyen peut-être le plus exact, pour en déterminer l'aplatissement.

C'est uniquement dans les conjonctions du soleil et de la lune, quand ce dernier astre, en s'interposant entre le soleil et la terre, nous dérobe la lumière du soleil, que nous observons les éclipses solaires. Quoique la lune soit incomparablement plus petite que le soleil ; cependant, elle est assez près de la terre, pour que son diamètre apparent diffère peu de celui du soleil : il arrive même, à raison des changemens de ces diamètres, qu'ils se surpassent alternativement l'un l'autre. Imaginons les centres du soleil et de la lune, sur une même droite avec l'œil de l'observateur, il verra le soleil éclipsé. Si le diamètre apparent de la lune surpasse celui du soleil, l'éclipse sera totale; mais si ce diamètre est plus petit, l'observateur verra un anneau lumineux formé par la partie du soleil, qui déborde le disque de la lune, et alors l'éclipse sera *annulaire*. Si le centre de la lune n'est pas sur la droite qui joint l'observateur et le centre du soleil, la lune pourra n'éclipser qu'une partie du disque solaire, et l'éclipse sera partielle. Ainsi les variétés des distances du soleil et de la lune au centre de la terre, et celles de la proximité de la lune à ses nœuds, au moment de ses conjonctions, doivent en produire de très grandes dans les éclipses de soleil. A ces causes se joint encore l'élévation de la lune sur l'horizon, élévation qui change la grandeur de son diamètre apparent, et qui par l'effet de la parallaxe lunaire, peut augmenter ou diminuer la distance apparente des centres du soleil et de la lune, de manière que de deux observateurs éloignés entre eux, l'un peut voir une éclipse de soleil, qui n'a point lieu pour l'autre observateur. En cela, les éclipses de soleil diffèrent des éclipses de lune, qui sont les mêmes et arrivent au même instant pour tous les lieux de la terre où elles sont visibles.

On voit souvent l'ombre d'un nuage emporté par les vents, parcourir rapidement les coteaux et les plaines, et dérober aux spectateurs qu'elle atteint, la vue du soleil, dont jouissent ceux qui sont au-delà de ses limites : c'est l'image exacte des éclipses totales de soleil. On aperçoit alors autour du disque lunaire, une couronne d'une lumière pâle, et qui, probablement, est l'atmosphère même du soleil; car son étendue ne peut convenir à celle de la lune, et l'on s'est assuré par les éclipses du soleil et des étoiles, que cette dernière atmosphère est presque insensible.

L'atmosphère dont on peut concevoir la lune environnée, infléchit les rayons lumineux vers le centre de cet astre; et si, comme cela doit être, les couches atmosphériques sont plus rares, à mesure qu'elles sont plus élevées, ces rayons en y pénétrant, s'infléchissent de plus en plus, et décrivent une courbe concave vers sa surface. Un observateur placé sur la lune, ne cesserait donc de voir un astre, que lorsqu'il serait placé au-dessous de son horizon, d'un angle que l'on nomme *ré-*

4..

fraction horizontale. Les rayons émanés de cet astre vu à l'horizon, après avoir rasé la surface de la lune, continuent leur route, en décrivant une courbe semblable à celle par laquelle ils y sont parvenus. Ainsi un second observateur placé derrière la lune, relativement à l'astre, l'apercevrait encore, en vertu de l'inflexion de ses rayons dans l'atmosphère lunaire. Le diamètre de la lune n'est point sensiblement augmenté par la réfraction de son atmosphère; une étoile éclipsée par cet astre, l'est donc plus tard que si cette atmosphère n'existait point, et par la même raison, elle cesse plus tôt d'être éclipsée; en sorte que l'influence de l'atmosphère lunaire est principalement sensible sur la durée des éclipses du soleil et des étoiles par la lune. Des observations précises et multipliées ont fait à peine soupçonner cette influence; et l'on s'est assuré qu'à la surface de la lune, la réfraction horizontale n'excède pas cinq secondes. Cette réfraction sur la terre est au moins mille fois plus grande; l'atmosphère lunaire, si elle existe, est donc d'une rareté extrême et supérieure à celle du vide que nous formons dans nos meilleures machines pneumatiques. De là, nous devons conclure qu'aucun des animaux terrestres ne pourrait respirer et vivre sur la lune, et que si elle est habitée, ce ne peut être que par des animaux d'une autre espèce. Il y a lieu de penser que tout est solide à sa surface; car les grands télescopes nous la présentent comme une masse aride sur laquelle on a cru remarquer les effets et même l'explosion des volcans.

Bouguer a trouvé par l'expérience, que la lumière de la pleine lune est environ trois cent mille fois plus faible que celle du soleil: c'est la raison pour laquelle cette lumière rassemblée au foyer des plus grands miroirs, ne produit point d'effet sensible sur le thermomètre.

On distingue, surtout près des nouvelles lunes, la partie du disque lunaire, qui n'est point éclairée par le soleil. Cette faible clarté, que l'on nomme *lumière cendrée*, est due à la lumière que l'hémisphère éclairé de la terre, réfléchit sur la lune; et ce qui le prouve, c'est qu'elle est plus sensible vers la nouvelle lune, quand une plus grande partie de cet hémisphère, est dirigée vers cet astre. En effet, il est visible que la terre offrirait à un observateur placé sur la lune, des phases semblables à celles que la lune nous présente, mais accompagnées d'une plus forte lumière, à raison de la plus grande étendue de la surface terrestre.

Le disque lunaire présente un grand nombre de taches invariables que l'on a observées et décrites avec soin. Elles nous montrent que cet astre dirige toujours vers nous, à peu près le même hémisphère; il tourne donc sur lui-même, dans un temps égal à celui de sa révolution autour de la terre; car si l'on imagine un observateur placé au centre de la lune supposée transparente, il verra la terre et son rayon visuel se mouvoir autour de lui, et comme ce rayon traverse toujours au même point à peu près la surface lunaire, il est évident que ce point doit tourner en même temps et dans le même sens que la terre, autour de l'observateur.

Cependant, l'observation suivie du disque lunaire, fait apercevoir de légères variétés dans ses apparences : on voit les taches s'approcher et s'éloigner alternativement de ses bords. Celles qui en sont très voisines, disparaissent et reparaissent successivement, en faisant des oscillations périodiques que l'on a désignées sous le nom de *libration de la lune*.

Pour se former une juste idée des causes principales de ce phénomène, il faut considérer que le disque de la lune, vu du centre de la terre, est terminé par la circonférence d'un cercle du globe lunaire, perpendiculaire à son rayon vecteur : c'est sur le plan de ce cercle que se projette l'hémisphère de la lune, dirigé vers la terre, et dont les apparences sont liées au mouvement de rotation de cet astre. Si la lune était sans mouvement de rotation, son rayon vecteur tracerait à chaque révolution lunaire, la circonférence d'un grand cercle, sur sa surface, dont toutes les parties se présenteraient successivement à nous. Mais en même temps que le rayon vecteur tend à décrire cette circonférence, le globe lunaire en tournant, ramène toujours à fort peu près, le même point de sa surface, sur ce rayon, et par conséquent, le même hémisphère vers la terre. Les inégalités du mouvement de la lune, produisent de légères variétés dans ses apparences; car son mouvement de rotation ne participant point d'une manière sensible à ces inégalités, il est variable relativement à son rayon vecteur qui va rencontrer ainsi sa surface dans différens points; le globe lunaire fait donc par rapport à ce rayon, des oscillations correspondantes aux inégalités de son mouvement, et qui nous dérobent et nous découvrent alternativement quelques parties de sa surface.

Mais le globe lunaire a une autre libration *en latitude*, perpendiculaire à celle-ci, et par laquelle les régions situées vers les pôles de rotation de ce globe, disparaissent et reparaissent alternativement. Pour concevoir ce phénomène, supposons l'axe de rotation, perpendiculaire à l'écliptique. Lorsque la lune sera dans son nœud ascendant, ses deux pôles seront aux bords austral et boréal de l'hémisphère visible. A mesure qu'elle s'élèvera sur l'écliptique, le pôle boréal et les régions qui en sont très voisines disparaîtront, tandis que les régions voisines du pôle austral se découvriront de plus en plus jusqu'au moment où l'astre parvenu à sa plus grande hauteur boréale, commencera à revenir vers l'écliptique. Les phénomènes précédens se reproduiront alors dans un ordre inverse; et lorsque la lune parvenue à son nœud descendant, s'abaissera sous l'écliptique, le pôle boréal présentera les phénomènes que le pôle austral avait offerts.

L'axe de rotation de la lune n'est pas exactement perpendiculaire à l'écliptique; et son inclinaison produit des apparences que l'on peut concevoir en supposant la lune mue sur le plan même de l'écliptique, de manière que son axe de rotation reste toujours parallèle à lui-même. Il est clair qu'alors chaque pôle sera visible pendant une moitié de la révolution de la lune autour de la terre, et invisible pendant l'autre moitié, en sorte que les régions qui en sont très voisines seront alternativement découvertes et cachées.

Enfin, l'observateur n'est point au centre de la terre, mais à sa surface : c'est le rayon visuel mené de son œil au centre de la lune, qui détermine le milieu de son hémisphère apparent; et il est clair qu'à raison de la parallaxe lunaire, ce rayon coupe la surface de la lune, dans des points sensiblement différens suivant la hauteur de cet astre sur l'horizon.

Toutes ces causes ne produisent qu'une libration apparente, dans le globe lunaire; elles sont purement optiques, et n'affectent point son mouvement réel de rotation. Ce mouvement peut cependant être assujetti à de petites inégalités; mais elles sont trop peu sensibles pour avoir été observées.

Il n'en est pas de même des variations du plan de l'équateur lunaire. L'observation assidue des taches de la lune fit reconnaître à Dominique Cassini, que l'axe de cet équateur n'est point perpendiculaire à l'écliptique, comme on l'avait supposé jusques alors, et que ses positions successives ne sont point exactement parallèles. Ce grand astronome fut conduit au résultat suivant, l'une de ses plus belles découvertes, et qui renferme toute la théorie astronomique de la libration réelle de la lune. Si, par le centre de cet astre, on conçoit un premier plan perpendiculaire à son axe de rotation, plan qui se confond avec celui de son équateur; si, de plus, on imagine par le même centre, un second plan parallèle à celui de l'écliptique, et un troisième plan qui soit celui de l'orbe lunaire, en faisant abstraction des inégalités périodiques de son inclinaison et des nœuds; ces trois plans ont constamment une intersection commune; le second situé entre les deux autres, forme avec le premier un angle d'environ 1°,67, et avec le troisième, un angle de 5°,7155. Ainsi, les intersections de l'équateur lunaire avec l'écliptique, ou ses nœuds, coïncident toujours avec les nœuds moyens de l'orbe lunaire, et comme eux, ils ont un mouvement rétrograde dont la période est de 6793^{j},39108. Dans cet intervalle, les deux pôles de l'équateur, et de l'orbe lunaire, décrivent de petits cercles parallèles à l'écliptique, en comprenant son pôle entre eux, de manière que ces trois pôles soient constamment sur un grand cercle de la sphère céleste.

Des montagnes d'une grande hauteur s'élèvent à la surface de la lune : leurs ombres projetées sur les plaines, y forment des taches qui varient avec la position du soleil. Aux bords de la partie éclairée du disque lunaire, les montagnes se présentent sous la forme d'une dentelure qui s'étend au-delà de la ligne de lumière, d'une quantité dont la mesure a fait connaître que leur hauteur est au moins de trois mille mètres. On reconnaît par la direction des ombres, que la surface de la lune est parsemée de profondes cavités semblables aux bassins de nos mers. Enfin cette surface paraît offrir des traces d'éruptions volcaniques; la formation de nouvelles taches, et des étincelles observées plusieurs fois dans sa partie obscure, semblent même y indiquer des volcans en activité.

CHAPITRE V.

Des Planètes, et en particulier, de Mercure, et de Vénus.

Au milieu de ce nombre infini de points étincelans dont la voûte céleste est parsemée, et qui gardent entre eux une position à peu près constante; dix astres toujours visibles quand ils ne sont point plongés dans les rayons du soleil, se meuvent autour de lui suivant des lois fort compliquées dont la recherche est un des principaux objets de l'astronomie. Ces astres auxquels on a donné le nom de *Planètes* sont Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne, connus dans la plus haute antiquité, parce qu'on peut les apercevoir à la vue simple; ensuite, Uranus, Cérès, Pallas, Junon et Vesta, dont la découverte récente est due au télescope. Les deux premières planètes ne s'écartent point du soleil au-delà de certaines limites; les autres s'en éloignent à toutes les distances angulaires. Les mouvemens de tous ces corps sont compris dans une zone de la sphère céleste que l'on a nommée *zodiaque*, et dont la largeur est divisée en deux parties égales par l'écliptique.

Mercure ne s'éloigne jamais du soleil, au-delà de trente-deux degrés. Lorsqu'il commence à paraître le soir, on le distingue à peine dans les rayons du crépuscule : les jours suivans, il s'en dégage de plus en plus, et après s'être éloigné d'environ vingt-cinq degrés du soleil, il revient vers lui. Dans cet intervalle, le mouvement de Mercure rapporté aux étoiles, est direct; mais lorsqu'en se rapprochant du soleil, sa distance à cet astre n'est plus que de vingt degrés, il paraît stationnaire, et son mouvement devient ensuite rétrograde. Mercure continue de se rapprocher du soleil, et finit par se replonger le soir, dans ses rayons. Après y être demeuré pendant quelque temps invisible, on le revoit le matin, sortant de ces rayons et s'éloignant du soleil. Son mouvement est rétrograde, comme avant sa disparition; mais la planète parvenue à vingt degrés de distance, est de nouveau stationnaire, et reprend un mouvement direct : elle continue de s'éloigner du soleil, jusqu'à la distance de vingt-cinq degrés; ensuite elle s'en rapproche, se replonge le matin, dans les rayons de l'aurore, et reparaît bientôt le soir, pour reproduire les mêmes phénomènes.

L'étendue des plus grandes digressions de Mercure ou de ses plus grands écarts de chaque côté du soleil, varie depuis dix-huit jusqu'à trente-deux degrés. La durée de ses oscillations entières, ou de ses retours à la même position relativement au soleil, varie pareillement depuis cent six jusqu'à cent trente jours. L'arc moyen de sa rétrogradation est d'environ quinze degrés, et sa durée moyenne est de vingt-trois jours; mais il y a de grandes différences entre ces quantités, dans les diverses rétrogradations. En général, le mouvement de Mercure est très compliqué: il n'a pas lieu exactement sur le plan de l'écliptique; quelquefois la planète s'en écarte au-delà de cinq degrés.

Il a fallu sans doute, une longue suite d'observations pour reconnaître l'identité de deux astres que l'on voyait alternativement, le matin et le soir, s'éloigner et se rapprocher alternativement du soleil; mais comme l'un ne se montrait jamais, que l'autre n'eût disparu, on jugea enfin que c'était la même planète qui oscillait de chaque côté du soleil.

Le diamètre apparent de Mercure est variable, et ses changemens ont des rapports évidens à sa position par rapport au soleil et à la direction de son mouvement. Il est à son *minimum*, quand la planète se plonge le matin dans les rayons solaires, ou quand le soir elle s'en dégage : il est à son *maximum*, quand elle se plonge le soir dans ces rayons, ou quand elle s'en dégage le matin. Sa grandeur moyenne est de 21″,3.

Quelquefois, dans l'intervalle de sa disparition, le soir; à sa réapparition, le matin, on voit la planète se projeter sur le disque du soleil, sous la forme d'une tache noire qui décrit la corde de ce disque. On la reconnaît à sa position, ou à son diamètre apparent, et à son mouvement rétrograde, conformes à ceux qu'elle doit avoir. Ces passages de Mercure sont de véritables éclipses annulaires du soleil, qui nous prouvent que cette planète en emprunte sa lumière. Vue dans de fortes lunettes, elle présente des phases analogues aux phases de la lune, dirigées comme elles vers le soleil, et dont l'étendue variable suivant la position de la planète par rapport au soleil, et suivant la direction de son mouvement, répand une grande lumière sur la nature de son orbite.

La planète Vénus offre les mêmes phénomènes que Mercure, avec cette différence que ses phases sont beaucoup plus sensibles, ses oscillations plus étendues, et leur durée plus considérable. Les plus grandes digressions de Vénus varient depuis cinquante jusqu'à cinquante-trois degrés; et la durée moyenne de ses oscillations ou de son retour à la même position relativement au soleil est de cinq cent quatre-vingt-quatre jours. La rétrogradation commence ou finit, quand la planète en se rapprochant le soir, du soleil, ou en s'en éloignant le matin, en est distante d'environ trente-deux degrés. L'arc de sa rétrogradation est de dix-huit degrés à peu près, et sa durée moyenne est de quarante-deux jours. Vénus ne se meut point exactement sur le plan de l'écliptique dont elle s'écarte quelquefois de plusieurs degrés.

Les durées des passages de Vénus sur le

disque solaire, observées à de grandes distances sur la terre, sont très sensiblement différentes par la même cause qui fait différer entre elles les durées de la même éclipse du soleil dans divers pays. En vertu de la parallaxe de cette planète, les divers observateurs la rapportent à différens points de ce disque dont ils lui voient décrire des cordes plus ou moins longues. Dans le passage qui eut lieu en 1769, la différence des durées observées à Otaïti dans la mer du Sud, et à Cajanebourg dans la Laponie suédoise, surpassa quinze minutes. Ces durées pouvant être déterminées avec une grande précision, leurs différences donnent fort exactement la parallaxe de Vénus, et par conséquent sa distance à la terre, au moment de sa conjonction. Une loi remarquable que nous exposerons à la suite des découvertes qui l'ont fait connaître, lie cette parallaxe à celle du soleil et de toutes les planètes ; ce qui donne à l'observation de ces passages une grande importance dans l'astronomie. Après s'être succédé dans l'intervalle de huit ans, ils ne reviennent qu'après plus d'un siècle, pour se succéder encore dans le court intervalle de huit années, et ainsi de suite. Les deux derniers passages sont arrivés le 5 juin 1761, et le 3 juin 1769. Les astronomes se sont répandus dans les lieux où il était le plus avantageux de les observer, et c'est de l'ensemble de leurs observations que l'on a conclu la parallaxe du soleil de 26'',54 dans sa moyenne distance à la terre. Les deux prochains passages auront lieu le 8 décembre 1874 et le 6 décembre 1882.

Les grandes variations du diamètre apparent de Vénus nous prouvent que sa distance à la terre est très variable. Cette distance est la plus petite, au moment de ses passages sur le soleil, et le diamètre apparent est alors d'environ 189'': la grandeur moyenne de ce diamètre est, suivant M. Arago, de 52'',173.

Le mouvement de quelques taches observées sur cette planète, avait fait reconnaître à Dominique Cassini sa rotation dans l'intervalle d'un peu moins d'un jour. Schroëter, par l'observation suivie des variations de ses cornes, et par celle de quelques points lumineux vers les bords de sa partie non éclairée, a confirmé ce résultat sur lequel on avait élevé des doutes. Il a fixé à $0^j,973$, la durée de la rotation, et il a trouvé, comme Cassini, que l'équateur de Vénus forme un angle considérable avec l'écliptique. Enfin, il a conclu de ses observations, l'existence de très hautes montagnes à sa surface; et par la loi de la dégradation de la lumière, dans le passage de sa partie obscure à sa partie éclairée, il a jugé la planète environnée d'une atmosphère étendue dont la force réfractive est peu différente de celle de l'atmosphère terrestre. L'extrême difficulté d'apercevoir ces phénomènes dans les plus forts télescopes, en rend l'observation très délicate dans nos climats: ils méritent toute l'attention des observateurs placés au midi, sous un ciel favorable. Mais il est bien important, lorsque les impressions sont aussi légères, de se garantir des effets de l'imagination qui peut avoir sur elles une grande influence; car alors les images intérieures qu'elle fait naître, modifient et tranforment souvent celles que produit la vue des objets.

Vénus surpasse en clarté les autres planètes et les étoiles: elle est quelquefois si brillante, qu'on la voit en plein jour, à la vue simple. Ce phénomène, qui dépend du retour de la planète à sa même position par rapport au soleil, revient dans l'intervalle de dix-neuf mois à peu près, et son plus grand éclat se reproduit tous les huit ans. Quoique assez fréquent, il ne manque jamais d'exciter la surprise du vulgaire qui, dans sa crédule ignorance, le suppose toujours lié aux événemens contemporains les plus remarquables.

CHAPITRE VI.

De Mars.

Les deux planètes que nous venons de considérer, semblent accompagner le soleil, comme autant de satellites ; et leur moyen mouvement autour de la terre, est le même que celui de cet astre. Les autres planètes s'éloignent du soleil à toutes les distances angulaires ; mais leurs mouvemens ont avec le sien, des rapports qui ne permettent pas de douter de son influence sur ces mouvemens.

Mars nous paraît se mouvoir d'occident en orient, autour de la terre : la durée moyenne de sa révolution sidérale est à fort peu près de 687 jours ; celle de sa révolution synodique ou de son retour à la même position relativement au soleil, est d'environ 780 jours. Son mouvement est fort inégal : quand on commence à revoir, le matin, cette planète à sa sortie des rayons du soleil, ce mouvement est direct et le plus rapide; il se ralentit peu à peu, et devient nul lorsque la planète est à 152° de distance du soleil; ensuite il se change dans un mouvement rétrograde dont la vitesse augmente jusqu'au moment de l'opposition de Mars avec cet astre. Cette vitesse alors parvenue à son *maximum*, diminue et redevient nulle lorsque Mars, en se rapprochant du soleil, n'en est plus éloigné que de 152°. Le mouvement reprend ensuite son état direct, après avoir été rétrograde pendant soixante-treize jours; et dans cet intervalle, la planète décrit un arc de rétrogradation d'environ dix-huit degrés. En continuant de se rapprocher du soleil, elle finit par se plonger, le soir, dans ses rayons. Ces singuliers phénomènes se renouvellent dans toutes les oppositions de Mars, avec des différences assez grandes dans l'étendue et dans la durée des rétrogradations.

Mars ne se meut point exactement dans le plan de l'écliptique; il s'en écarte quelquefois de plusieurs degrés. Les variations de son diamètre apparent sont fort grandes; il est de $19'',40$ à la moyenne distance de la planète, et il augmente à mesure que la planète approche de son opposition où il s'élève à 56″,43. Alors, la parallaxe de Mars devient sensible, et à peu près double de celle du soleil. La même loi qui existe entre les parallaxes du soleil et de Vénus, a également lieu entre les parallaxes du soleil et de Mars; et l'observation de cette dernière parallaxe avait déjà fait connaître d'une manière approchée, la parallaxe solaire, avant les derniers passages de Vénus sur le soleil, qui l'ont déterminée avec plus de précision.

On voit le disque de Mars changer de forme, et devenir sensiblement ovale, suivant sa position par rapport au soleil: ces phases prouvent qu'il en reçoit sa lumière. Des taches que l'on observe à sa surface, ont fait connaître qu'il se meut sur lui-même d'occident en orient, dans une période de $1^{j},02733$, et autour d'un axe incliné de 66°,33 à l'écliptique. Son diamètre est un peu plus petit dans le sens de ses pôles, que dans celui de son équateur. Suivant les mesures de M. Arago, ces deux diamètres sont dans le rapport de 189 à 194, le diamètre dont nous venons de donner les mesures, étant moyen entre eux.

CHAPITRE VII.

De Jupiter et de ses satellites.

Jupiter se meut d'occident en orient, dans une période de $4332^j,6$ à fort peu près : la durée de sa révolution synodique est d'environ 399^j. Il est assujetti à des inégalités semblables à celles de Mars. Avant l'opposition de la planète au soleil, et lorsqu'elle est à peu près éloignée de cet astre de cent vingt-huit degrés, son mouvement devient rétrograde : il augmente de vitesse jusqu'au moment de l'opposition, se ralentit ensuite, devient nul, et reprend l'état direct lorsque la planète, en se rapprochant du soleil, n'en est plus distante que de cent vingt-huit degrés. La durée de ce mouvement rétrograde est de cent vingt-un jours, et l'arc de rétrogradation est de onze degrés; mais il y a des différences sensibles dans l'étendue et dans la durée des diverses rétrogradations de Jupiter. Le mouvement de cette planète n'a pas exactement lieu dans le plan de l'écliptique; elle s'en écarte quelquefois de trois ou quatre degrés.

On remarque à la surface de Jupiter plusieurs bandes obscures, sensiblement parallèles entre elles et à l'écliptique : on y observe encore d'autres taches dont le mouvement a fait connaître la rotation de cette planète, d'occident en orient, sur un axe presque perpendiculaire à l'écliptique, et dans une période de $0^j,41377$. Les variations de quelques-unes de ces taches, et les différences sensibles dans les durées de la rotation conclue de leurs mouvemens, donnent lieu de croire qu'elles ne sont point adhérentes à Jupiter : elles paraissent être autant de nuages que les vents transportent avec différentes vitesses dans une atmosphère très agitée.

Jupiter est, après Vénus, la plus brillante des planètes ; quelquefois même il la surpasse en clarté. Son diamètre apparent est le plus grand qu'il est possible, dans les oppositions où il s'élève à $141'',6$; sa grandeur moyenne est de $113'',4$ dans le sens de l'équateur; mais il n'est pas égal dans tous les sens. La planète est sensiblement aplatie à ses pôles de rotation, et M. Arago a trouvé par des mesures très précises, que son diamètre dans le sens des pôles, est à celui de son équateur, à fort peu près, dans le rapport de 167 à 177.

On observe autour de Jupiter, quatre petits astres qui l'accompagnent sans cesse. Leur configuration change à tout moment : ils oscillent de chaque côté de la planète, et c'est par l'étendue entière des oscillations, que l'on détermine leur rang, en nommant *premier* satellite celui dont l'oscillation est la moins étendue. On les voit quelquefois passer sur le disque de Jupiter, et y projeter leur ombre qui décrit alors une corde de ce disque; Jupiter et ses satellites sont donc des corps opaques, éclairés par le soleil. En s'interposant entre le soleil et Jupiter, les satellites forment, par leurs ombres sur cette planète, de véritables éclipses de soleil, parfaitement semblables à celles que la lune produit sur la terre.

L'ombre que Jupiter projette derrière lui relativement au soleil, donne l'explication d'un autre phénomène que les satellites nous présentent. On les voit souvent disparaître, quoique loin encore du disque de la planète : le troisième et le quatrième reparaissent quelquefois du même côté de ce disque. Ces disparitions sont entièrement semblables aux éclipses de lune, et les circonstances qui les accompagnent, ne laissent à cet égard aucun doute. On voit toujours les satellites disparaître du côté du disque de Jupiter, opposé au soleil, et par conséquent du même côté que le cône d'ombre qu'il projette; ils s'éclipsent plus près de ce disque, quand la planète est plus voisine de son opposition; enfin, la durée de leurs éclipses répond exactement au temps qu'ils doivent employer à traverser le cône d'ombre de Jupiter. Ainsi les satellites se meuvent, d'occident en orient, autour de cette planète.

L'observation de leurs éclipses est le moyen le plus sûr pour déterminer leurs mouvemens. On a d'une manière précise les durées de leurs révolutions sidérales et synodiques autour de Jupiter, en comparant des éclipses éloignées d'un grand intervalle, et observées près des oppositions de la planète. On trouve ainsi que le mouvement des satellites de Jupiter est presque circulaire et uniforme; puisque cette hypothèse satisfait d'une manière approchée aux éclipses dans lesquelles nous voyons cette planète, à la même position relativement au soleil; on peut donc déterminer à tous les instans la position des satellites vus du centre de Jupiter.

De là résulte une méthode simple et assez exacte pour comparer entre elles les distances de Jupiter et du soleil à la terre, méthode qui manquait aux anciens astronomes; car la parallaxe de Jupiter étant insensible à la précision même des observations modernes, et lorsqu'il est le plus près de nous; ils ne jugeaient de sa distance, que par la durée de sa révolution, en estimant plus éloignées, les planètes dont la révolution est plus longue.

Supposons que l'on ait observé la durée entière d'une éclipse du troisième satellite. Au milieu de l'éclipse, le satellite vu du centre de Jupiter, était à très peu près en opposition avec le soleil; sa position sidérale, telle qu'on l'eût observée de ce centre, et qu'il est facile de conclure des mouvemens de Jupiter et du satellite, était donc alors la même que celle du centre de Jupiter vu de celui du soleil. L'observation directe, ou le mouvement connu du soleil, donne la position de la terre vue du centre de cet astre; ainsi, en concevant un triangle formé par les droites qui joignent les centres du soleil, de la terre et de Jupiter, on aura l'angle au soleil; l'observation directe donnera l'angle à la terre; on aura donc à l'instant du milieu de l'éclipse, les distances rectilignes de Jupiter, à la terre et au soleil, en parties de la distance du soleil à la terre. On trouve par ce moyen, que Jupiter est au moins cinq fois plus loin de nous que le soleil, quand son diamètre apparent est de $113'',4$. Le diamètre de la terre ne paraîtrait que sous un angle de $10'',4$, à la même distance; le volume de Jupiter est donc au moins mille fois plus grand que celui de la terre.

Le diamètre apparent de ses satellites étant insensible, on ne peut pas mesurer exactement leur grosseur. On a essayé de l'apprécier par le temps qu'ils emploient à pénétrer dans l'ombre de la planète; mais les observations offrent à cet égard de grandes variétés que produisent les différences dans la force des lunettes, dans la vue des observateurs, dans l'état de l'atmosphère, dans la hauteur des satellites sur l'horizon, et dans leur distance apparente à Jupiter, enfin dans le changement des hémisphères qu'ils nous présentent.

La comparaison de l'éclat des satellites est indépendante des quatre premières causes qui ne font qu'altérer proportionnellement leur lumière; elle peut donc nous éclairer sur le retour des taches que le mouvement de rotation de ces corps doit offrir successivement à la terre, et par conséquent sur ce mouvement lui-même. Herschell, qui s'est occupé de cette recherche délicate, a observé qu'ils se surpassent alternativement en clarté, circonstance très propre à faire juger du *maximum* et du *minimum* de leur lumière; et en comparant ces *maxima* et *minima* aux positions mutuelles de ces astres, il a reconnu qu'ils tournent sur eux-mêmes comme la lune, dans un temps égal à la durée de leur révolution autour de Jupiter; résultat que Maraldi avait déjà conclu pour le quatrième satellite, des retours d'une même tache observée sur son disque, dans ses passages sur la planète. Le grand éloignement des corps célestes affaiblit les phénomènes que leurs surfaces présentent, au point de les réduire à de très légères variétés de lumière qui échappent à la première vue, et qu'un long exercice dans ce genre d'observations rend sensibles. Mais on ne doit employer ce moyen, sur lequel l'imagination a tant d'empire, qu'avec une circonspection extrême, pour ne pas se tromper sur l'existence de ces variétés, ni s'égarer sur les causes dont on les fait dépendre.

CHAPITRE VIII.

De Saturne, de ses satellites et de son anneau.

Saturne se meut d'occident en orient, dans une période de 10759 jours : la durée de sa révolution synodique est de 378 jours. Son mouvement, qui a lieu à fort peu près dans le plan de l'écliptique, est assujetti à des inégalités semblables à celles des mouvemens de Mars et de Jupiter. Il devient rétrograde ou finit de l'être, lorsque la planète, avant ou après son opposition, est distante de 121° du soleil : la durée de cette rétrogradation est à peu près de cent trente-neuf jours, et l'arc de sa rétrogradation est d'environ sept degrés. Au moment de l'opposition, le diamètre de Saturne est à son *maximum* : sa grandeur moyenne est d'environ 50″.

Saturne présente un phénomène unique dans le système du monde. On le voit souvent au milieu de deux petits corps qui semblent lui adhérer, et dont la figure et la grandeur sont très variables : quelquefois ils se transforment dans un anneau qui semble entourer la planète ; d'autres fois, ils disparaissent entièrement et Saturne alors paraît rond comme les autres planètes. En suivant avec soin ces singulières apparences, et en les combinant avec les positions de Saturne relativement au soleil et à la terre; Huyghens a reconnu qu'elles sont produites par un anneau circulaire large et mince qui environne le globe de Saturne, dont il est séparé de toutes parts et qui dans son mouvement reste parallèle à lui-même. Cet anneau incliné de 31°,85 au plan de l'écliptique, ne se présente jamais qu'obliquement à la terre, sous la forme d'une ellipse dont la largeur, lorsqu'elle est la plus grande, est à peu près la moitié de sa longueur. L'ellipse se rétrécit de plus en plus, à mesure que le rayon visuel mené de Saturne à la terre, s'abaisse sur le plan de l'anneau dont l'arc postérieur finit par se cacher derrière la planète, tandis que l'arc antérieur se confond avec elle; mais son ombre projetée sur le disque de Saturne y forme une bande obscure que l'on aperçoit dans de fortes lunettes, et qui prouve que Saturne et son anneau sont des corps opaques éclairés par le soleil. Alors on ne distingue plus que les parties de l'anneau qui s'étendent de chaque côté de Saturne : ces parties diminuent peu à peu de largeur ; elles disparaissent enfin quand la terre est dans le plan de l'anneau dont l'épaisseur est trop mince pour être aperçue. L'anneau disparaît encore quand le soleil venant à rencontrer son plan, n'éclaire que son épaisseur. Il continue d'être invisible tant que son plan se trouve entre le soleil et la terre, et il ne reparaît que lorsque le soleil et la terre se trouvent du même côté de ce plan, en vertu des mouvemens respectifs de Saturne et du soleil.

Le plan de l'anneau rencontrant l'orbe solaire à chaque demi-révolution de Saturne, les phénomènes de sa disparition et de sa réapparition se renouvellent à peu près tous les quinze ans, mais avec des circonstances souvent différentes : il peut y avoir dans la même année deux apparitions et deux réapparitions, et jamais davantage.

Dans le temps où l'anneau disparaît, son épaisseur nous renvoie la lumière du soleil, mais en trop petite quantité pour être sensible. On conçoit cependant que pour l'apercevoir, il suffit d'augmenter la force des télescopes. C'est ce qu'Herschell a éprouvé : il n'a jamais cessé de le voir, lorsqu'il avait disparu pour les autres observateurs.

L'inclinaison de l'anneau sur l'écliptique se mesure par la plus grande ouverture de l'ellipse qu'il nous présente : la position de ses nœuds avec le plan de l'écliptique, se conclut facilement de la position de Saturne, quand l'apparition ou la disparition de l'anneau dépend de la rencontre de son plan par la terre. Tous les phénomènes de ce genre, qui donnent la même position sidérale des nœuds, ont donc lieu par cette rencontre : les autres viennent de la rencontre du même plan par le soleil ; on peut ainsi reconnaître par le lieu de Saturne, lorsque l'anneau reparaît ou disparaît, si ce phénomène dépend de la rencontre de son plan, par le soleil ou par la terre. Quand ce plan passe par le soleil, la position de ses nœuds donne celle de Saturne vu du centre du soleil, et alors on peut déterminer la distance rectiligne de Saturne à la terre, comme on détermine celle de Jupiter au moyen des éclipses de ses satellites. Dans le triangle formé par les trois droites qui joignent les centres du soleil, de Saturne et de la terre, on a les angles à la terre et au soleil; d'où il est aisé de conclure la distance du soleil à Saturne, en parties du rayon de l'orbe solaire. On trouve ainsi que Saturne est environ neuf fois et demie plus éloigné de nous que le soleil, quand son diamètre apparent est de 50″.

Le diamètre apparent de l'anneau, dans la moyenne distance de la planète, est, d'après les mesures précises de M. Arago, égal à 118″,58; sa largeur apparente est de 17″,858. Sa surface n'est pas continue : une bande noire qui lui est concentrique, la sépare en deux parties qui paraissent former deux anneaux distincts dont l'extérieur est moins large que l'intérieur. Plusieurs bandes noires aperçues par quelques observateurs, semblent même indiquer un plus grand nombre d'anneaux. L'observation de quelques points brillans de l'anneau, a fait connaître à Herschell, sa rotation d'occident en orient, dans une période de 0j,437, autour d'un axe perpendiculaire à son plan, et passant par le centre de Saturne.

On voit autour de cette planète, sept satellites se mouvoir d'occident en orient dans des orbes presque circulaires. Les six premiers se meuvent à fort peu près dans le plan de l'anneau : l'orbe du septième approche davantage du plan de l'écliptique. Quand ce satellite est à l'orient de Saturne, sa lumière s'affaiblit au point de le rendre très difficile à apercevoir ; ce qui ne peut venir que des taches qui couvrent l'hémisphère qu'il nous présente. Mais pour nous offrir constamment dans la même position ce phénomène, il faut que ce satellite, en cela semblable à la lune et aux satellites de Jupiter, tourne sur lui-même dans un temps égal à celui de sa révolution autour de Saturne. Ainsi l'égalité des durées de rotation et de révolution, paraît être une loi générale du mouvement des satellites.

Les diamètres de Saturne ne sont pas égaux entre eux : celui qui est perpendiculaire au plan de l'anneau, paraît plus petit d'un onzième au moins, que le diamètre situé dans ce plan. Si l'on compare cet aplatissement à celui de Jupiter, on peut en conclure avec beaucoup de vraisemblance, que Saturne tourne rapidement autour du plus petit de ses diamètres, et que l'anneau se meut dans le plan de son équateur. Herschell vient de confirmer ce résultat, par des observations directes qui lui ont fait connaître que la rotation de Saturne a lieu, comme tous les mouvemens du système planétaire, d'occident en orient, et que sa durée est de $0^j,428$; ce qui diffère peu de la durée de la rotation de Jupiter. Il est assez remarquable que cette durée soit à peu près la même et au-dessous d'un demi-jour pour les deux plus grosses planètes, tandis que les planètes qui leur sont inférieures, tournent toutes sur elles-mêmes dans l'intervalle d'un jour à fort peu près.

Herschell a encore observé à la surface de Saturne, cinq bandes à peu près parallèles à son équateur.

CHAPITRE IX.

D'Uranus et de ses satellites.

La planète Uranus avait échappé par sa petitesse, aux anciens observateurs. Flamsteed à la fin de l'avant-dernier siècle, Mayer et Le Monnier dans le dernier, l'avaient déjà observée comme une petite étoile; mais ce n'est qu'en 1781, qu'Herschell a reconnu son mouvement, et bientôt après, en suivant cet astre avec soin, on s'est assuré qu'il est une vraie planète. Comme Mars, Jupiter et Saturne, Uranus se meut d'occident en orient autour de la terre. La durée de sa révolution sidérale est d'environ 30689 jours : son mouvement qui a lieu à fort peu près dans le plan de l'écliptique, commence à être rétrograde, lorsque avant l'opposition, la planète est à 115° de distance du soleil; il finit de l'être, quand après l'opposition, la planète en se rapprochant du soleil, n'en est plus éloignée que de 115°. La durée de sa rétrogradation est à peu près de 151 jours, et l'arc de rétrogradation est de quatre degrés.

Si l'on juge de la distance d'Uranus, par la lenteur de son mouvement; il doit être aux confins du système planétaire. Son diamètre apparent est très petit et s'élève à peine à douze secondes. Suivant Herschell, six satellites se meuvent autour de cette planète, dans des orbes presque circulaires et perpendiculaires à peu près au plan de l'écliptique. Il faut pour les apercevoir, de très forts télescopes : deux seuls d'entre eux, le second et le quatrième, ont été reconnus par d'autres observateurs. Les observations qu'Herschell a publiées sur les quatre autres, sont trop peu nombreuses pour déterminer les élémens de leurs orbes, et même pour assurer incontestablement leur existence.

CHAPITRE X.

Des planètes télescopiques Cérès, Pallas, Junon et Vesta.

Ces quatre planètes sont si petites, qu'on ne peut les voir qu'avec de fortes lunettes. Le premier jour de ce siècle est remarquable par la découverte que Piazzi fit à Palerme, de la planète Cérès. Pallas fut reconnue en 1802, par Olbers; Junon le fut par Harding en 1803; enfin Olbers en 1807, a reconnu Vesta. Les mouvemens de ces astres ont lieu, comme ceux des autres planètes, d'occident en orient: comme eux, ils sont alternativement directs et rétrogrades. Mais le peu de temps écoulé depuis la découverte de ces planètes, ne permet pas de connaître avec précision les durées de leurs révolutions, et les lois de leurs mouvemens. Seulement, on sait que les durées de leurs révolutions sidérales sont peu différentes entre elles, et que celles des trois premières sont d'environ quatre ans et deux tiers : la durée de la révolution de Vesta paraît plus courte d'une année. Pallas peut s'éloigner du plan de l'écliptique, beaucoup plus que les anciennes planètes; et pour embrasser ses écarts, il faut élargir considérablement le zodiaque.

CHAPITRE XI.

Du mouvement des Planètes autour du Soleil.

Si l'homme s'était borné à recueillir des faits, les sciences ne seraient qu'une nomenclature stérile, et jamais il n'eût connu les grandes lois de la nature. C'est en comparant les faits entre eux, en saisissant leurs rapports, et en remontant ainsi à des phénomènes de plus en plus étendus, qu'il est enfin parvenu à découvrir ces lois toujours empreintes dans leurs effets les plus variés. Alors, la nature en se dévoilant, lui a montré un petit nombre de causes donnant naissance à la foule des phénomènes qu'il avait observés : il a pu déterminer ceux qu'elles doivent faire éclore; et lorsqu'il s'est assuré que rien ne trouble l'enchaînement de ces causes à leurs effets, il a porté ses regards dans l'avenir, et la série des événemens que le temps doit développer, s'est offerte à sa vue. C'est uniquement encore dans la théorie du système du monde que l'esprit humain, par une longue suite d'efforts heureux, s'est élevé à cette hauteur. La première hypothèse qu'il a imaginée pour expliquer les apparences des mouvemens planétaires, n'a dû être qu'une ébauche imparfaite de cette théorie; mais en représentant d'une manière ingénieuse ces apparences, elle a donné le moyen de les soumettre au calcul; et l'on verra qu'en lui faisant subir les modifications que l'observation a successivement indiquées, elle se transforme dans le vrai système de l'univers.

Ce que les apparences des mouvemens planétaires offrent de plus remarquable, est leur changement de l'état direct à l'état rétrograde, changement qui ne peut être évidemment que le résultat de deux mouvemens alternativement conspirans et contraires. L'hypothèse la plus naturelle pour les expliquer, est celle qu'imaginèrent les anciens astronomes, et qui consiste à faire mouvoir dans le sens direct, les trois planètes supérieures sur des épicycles dont les centres décrivent dans le même sens, des cercles autour de la terre. Il est visible qu'alors, si l'on conçoit la planète au point de son épicycle, le plus bas ou le plus voisin de la terre; elle a dans cette position, un mouvement contraire à celui de l'épicycle qui toujours est transporté parallèlement à lui-même; en supposant donc que le premier de ces mouvemens l'emporte sur le second, le mouvement apparent de la planète sera rétrograde et à son *maximum*. Au contraire, la planète étant au point le plus élevé de son épicycle, les deux mouvemens conspirent, et le mouvement apparent est direct et le plus grand possible. En allant de la première à la seconde de ces positions, la planète continue d'avoir un mouvement apparent rétrograde qui diminue sans cesse, devient nul, et se change dans un mouvement direct. Mais l'observation fait voir que le *maximum* du mouvement rétrograde a constamment lieu, au moment de l'opposition de la planète avec le soleil; il faut donc que chaque épicycle soit décrit dans un temps égal à celui de la révolution de cet astre, et que la planète soit à son point le plus bas, lorsqu'elle est opposée au soleil. Alors on voit la raison pour laquelle le diamètre apparent de la planète en opposition, est à son *maximum*. Quant aux deux planètes inférieures qui ne s'écartent jamais du soleil au-delà de certaines limites, on peut également expliquer leurs mouvemens alternativement directs et rétrogrades, en les supposant mues dans le sens direct, sur des épicycles dont les centres décrivent, chaque année et dans le même sens, des cercles autour de la terre; et en supposant de plus, qu'au moment où la planète atteint le point le plus bas de son épicycle, elle est en conjonction avec le soleil. Telle est l'hypothèse astronomique la plus ancienne, et qui adoptée et perfectionnée par Ptolémée, a pris le nom de cet astronome.

Rien n'indique dans cette hypothèse, les grandeurs absolues des cercles et des épicycles : les apparences ne donnent que les rapports de leurs rayons. Aussi Ptolémée ne paraît pas s'être occupé de rechercher les distances respectives des planètes à la terre; seulement, il supposait plus éloignées, les planètes supérieures dont la révolution est plus longue : il plaçait ensuite au-dessous du soleil, l'épicycle de Vénus, et plus bas, celui de Mercure. Dans une hypothèse aussi indéterminée, on ne voit point pourquoi les arcs de rétrogradation des planètes supérieures sont d'autant plus petits, qu'elles sont plus éloignées; et pourquoi les rayons mobiles des épicycles supérieurs sont constamment parallèles au rayon vecteur du soleil, et aux rayons mobiles des deux cercles inférieurs. Ce parallélisme que Képler avait déjà introduit dans l'hypothèse de Ptolémée, est clairement indiqué par toutes les observations du mouvement des planètes, parallèlement et perpendiculairement à l'écliptique. Mais la cause de ces phénomènes devient évidente, si l'on conçoit ces épicycles et ces cercles égaux à l'orbe du soleil. Il est facile de s'assurer que l'hypothèse précédente ainsi modifiée, revient à faire mouvoir toutes les planètes autour du soleil qui dans sa révolution réelle ou apparente autour de la terre, emporte les centres de leurs orbites. Une disposition aussi simple du système planétaire ne laisse plus rien d'indéterminé, et montre avec évidence la relation des mouvemens directs et rétrogrades des planètes, avec le mouvement du soleil. Elle fait disparaître de l'hypothèse de Ptolémée, les cercles et les épicycles décrits annuellement par les planètes, et ceux qu'il avait introduits pour expliquer leurs mouvemens perpendiculaires à l'écliptique. Les rapports que cet astronome a déterminés entre les rayons des deux épicycles inférieurs et les rayons des cercles que leurs centres décrivent, expriment alors les moyennes distances des planètes au soleil, en parties de la distance moyenne du soleil à la terre; et ces mêmes rapports renversés pour les planètes supérieures, expriment leurs moyennes distances au soleil ou à la terre. La simplicité de cette hypothèse suffirait donc seule pour la faire admettre; mais les observations que nous devons au télescope, ne laissent aucun doute à son égard.

On a vu précédemment que les éclipses des satellites de Jupiter déterminent la distance de cette planète au soleil; et il en résulte qu'elle décrit autour de lui, un orbe presque circulaire. On a vu encore que les apparitions et les disparitions de l'anneau de Saturne, donnent sa distance à la terre, environ neuf fois et demie plus grande que celle de la terre au soleil; et suivant les déterminations de Ptolémée, ce rapport est à fort peu près celui du rayon de l'orbite de Saturne, au rayon de son épicycle; d'où il suit que cet épicycle est égal à l'orbite solaire, et qu'ainsi Saturne décrit à peu près un cercle autour du soleil. Les phases observées dans les deux planètes inférieures, prouvent évidemment qu'elles se meuvent autour du soleil. Suivons, en effet, le mouvement de Vénus, et les variations de son diamètre apparent et de ses phases. Lorsque, le matin, elle commence à se dégager des rayons du soleil, on l'aperçoit avant le lever de cet astre, sous la forme d'un croissant, et son diamètre apparent est à son *maximum;* elle est donc alors plus près de nous que du soleil, et presque en conjonction avec lui. Son croissant augmente et son diamètre apparent diminue, à mesure qu'elle s'éloigne du soleil. Parvenue à cinquante degrés environ de distance de cet astre, elle s'en rapproche en nous découvrant de plus en plus son hémisphère éclairé : son diamètre apparent continue de diminuer jusqu'au moment où elle se plonge le matin dans les rayons du soleil. A cet instant, Vénus nous paraît pleine, et son diamètre apparent est à son *minimum;* elle est donc dans cette position, plus loin de nous, que le soleil. Après avoir disparu pendant quelque temps, cette planète reparaît le soir, et reproduit dans un ordre inverse, les phénomènes qu'elle avait montrés avant sa disparition. Son hémisphère éclairé se détourne de plus en plus de la terre : ses phases diminuent, et en même temps, son diamètre apparent augmente à mesure qu'elle s'éloigne du soleil. Parvenue à cinquante degrés environ de distance de cet astre, elle revient vers lui : ses phases continuent de diminuer, et son diamètre, d'augmenter, jusqu'à ce qu'elle se plonge de nouveau dans les rayons solaires. Quelquefois, dans l'intervalle qui sépare sa disparition du soir, de sa réapparition du matin, on la voit sous la forme d'une tache, se mouvoir sur le disque du soleil. Il est clair d'après ces phénomènes, que le soleil est à peu près au centre de l'orbite de Vénus, qu'il emporte en même temps qu'il se meût autour de la terre. Mercure nous offre des phénomènes semblables à ceux de Vénus; ainsi le soleil est encore au centre de son orbite.

Nous sommes donc conduits par les apparences des mouvemens et des phases des planètes à ce résultat général, savoir : que *tous ces astres se meuvent autour du soleil qui, dans sa révolution réelle ou apparente autour de la terre, paraît emporter les foyers de leurs orbites*. Il est remarquable que ce résultat dérive de l'hypothèse de Ptolémée, en y supposant égaux à l'orbe solaire, les cercles et les épicycles décrits, chaque année, dans cette hypothèse qui cesse alors d'être purement idéale et propre uniquement à représenter à l'imagination les mouvemens célestes. Au lieu de faire tourner les planètes autour de centres imaginaires, elle place au foyer de leurs orbites, de grands corps qui, par leur action, peuvent les retenir sur ces orbites; et elle nous fait ainsi entrevoir les causes des mouvemens circulaires.

CHAPITRE XII.

Des Comètes.

Souvent on aperçoit des astres qui d'abord, très peu visibles, augmentent de grandeur et de vitesse, ensuite diminuent, et enfin disparaissent. Ces astres que l'on nomme *comètes*, sont presque toujours accompagnés d'une nébulosité qui, en croissant, se termine quelquefois dans une queue d'une grande étendue, et qui doit être d'une rareté extrême, puisque l'on voit les étoiles à travers son immense profondeur. L'apparition des comètes suivies de ces longues traînées de lumière a, pendant long-temps, effrayé les hommes, toujours frappés des événemens extraordinaires dont les causes leur sont inconnues. La lumière des sciences a dissipé ces vaines terreurs que les comètes, les éclipses et beaucoup d'autres phénomènes inspiraient dans les siècles d'ignorance.

Les comètes participent, comme tous les

astres, au mouvement diurne du ciel ; et cela joint à la petitesse de leur parallaxe, fait voir que ce ne sont point des météores engendrés dans notre atmosphère. Leurs mouvemens propres sont très compliqués : ils ont lieu dans tous les sens, et ils n'affectent point, comme ceux des planètes, la direction d'occident en orient, et des plans peu inclinés à l'écliptique.

CHAPITRE XIII.

Des Étoiles et de leurs mouvemens.

La parallaxe des étoiles est insensible; leurs disques, vus dans les plus forts télescopes, se réduisent à des points lumineux : en cela, ces astres diffèrent des planètes dont les télescopes augmentent la grandeur apparente. La petitesse du diamètre apparent des étoiles est prouvée, surtout par le peu de temps qu'elles mettent à disparaître dans leurs occultations par la lune, et qui n'étant pas d'une seconde, indique que ce diamètre est au-dessous de cinq secondes de degré. La vivacité de la lumière des plus brillantes étoiles, comparée à leur petitesse apparente, nous porte à croire qu'elles sont beaucoup plus éloignées de nous que les planètes, et qu'elles n'empruntent point comme elles leur clarté du soleil, mais qu'elles sont lumineuses par elles-mêmes; et comme les étoiles les plus petites sont assujetties aux mêmes mouvemens que les plus brillantes, et conservent entre elles une position constante, il est très vraisemblable que tous ces astres sont de la même nature, et que ce sont autant de corps lumineux, plus ou moins gros, et placés plus ou moins loin au-delà des limites du système solaire.

On observe des variations périodiques dans l'intensité de la lumière de plusieurs étoiles que l'on nomme pour cela *changeantes*. Quelquefois on a vu des étoiles se montrer presque tout à coup, et disparaître après avoir brillé du plus vif éclat. Telle fut la fameuse étoile observée en 1572, dans la constellation de Cassiopée. En peu de temps, elle surpassa la clarté des plus belles étoiles et de Jupiter même : sa lumière s'affaiblit ensuite, et elle disparut seize mois après sa découverte, sans avoir changé de place dans le ciel. Sa couleur éprouva des variations considérables : elle fut d'abord d'un blanc éclatant, ensuite d'un jaune rougeâtre, et enfin d'un blanc plombé. Quelle est la cause de ces phénomènes? Des taches très étendues que les étoiles nous présentent périodiquement, en tournant sur elles-mêmes à peu près comme le dernier satellite de Saturne, et peut-être l'interposition de grands corps opaques qui circulent autour d'elles, expliquent les variations périodiques des étoiles changeantes. Quant aux étoiles qui se sont montrées presque subitement avec une très vive lumière, pour disparaître ensuite, on peut soupçonner avec vraisemblance que de grands incendies occasionés par des causes extraordinaires, ont eu lieu à leur surface; et ce soupçon se confirme par le changement de leur couleur, analogue à celui que nous offrent sur la terre, les corps que nous voyons s'enflammer et s'éteindre.

Une lumière blanche, de figure irrégulière, et à laquelle on a donné le nom de *voie lactée*, entoure le ciel en forme de ceinture. On y découvre au moyen du télescope, un nombre prodigieux de petites étoiles qui nous paraissent assez rapprochées, pour que leur réunion forme une lumière continue. On observe encore dans diverses parties du ciel, de petites blancheurs que l'on nomme *nébuleuses*, et dont plusieurs semblent être de la même nature que la voie lactée. Vues dans le télescope, elles offrent également la réunion d'un grand nombre d'étoiles : d'autres ne présentent qu'une lumière blanche et continue :

il est très probable qu'elles sont formées d'une matière lumineuse très rare, répandue en amas divers dans l'espace céleste, et dont la condensation successive a produit les étoiles et toutes les variétés qu'elles présentent. Les changemens remarquables que l'on a observés dans quelques nébuleuses, et particulièrement dans la belle nébuleuse d'Orion, s'expliquent d'une manière heureuse dans cette hypothèse, et lui donnent une grande vraisemblance.

L'immobilité respective des étoiles a déterminé les astronomes à leur rapporter, comme à autant de points fixes, les mouvemens propres des autres corps célestes; mais pour cela, il était nécessaire de les classer, afin de les reconnaître; et c'est dans cette vue, que l'on a partagé le ciel en divers groupes d'étoiles, nommés *constellations*. Il fallait encore avoir avec précision la position des étoiles sur la sphère céleste; et voici comme on y est parvenu.

On a imaginé par les deux pôles du monde, et par le centre d'un astre quelconque, un grand cercle que l'on a nommé *cercle de déclinaison*, et qui coupe perpendiculairement l'équateur. L'arc de ce cercle, compris entre l'équateur et le centre de l'astre, mesure sa déclinaison qui est boréale ou australe, suivant la dénomination du pôle dont il est le plus près.

Tous les astres situés sur le même parallèle, ayant la même déclinaison ; il faut pour déterminer leur position, un nouvel élément. On a choisi pour cela, l'arc de l'équateur, compris entre le cercle de déclinaison et l'équinoxe du printemps. Cet arc compté de cet équinoxe, dans le sens du mouvement propre du soleil, c'est-à-dire d'occident en orient, est ce que l'on nomme *ascension droite :* ainsi, la position des astres est déterminée par leur ascension droite et par leur déclinaison.

La hauteur méridienne d'un astre, comparée à la hauteur du pôle, donne sa distance à l'équateur, ou sa déclinaison. La détermination de son ascension droite offrait plus de difficultés aux anciens astronomes, à cause de l'impossibilité où ils étaient de comparer directement les étoiles au soleil. La lune pouvant être comparée, le jour, au soleil, et la nuit, aux étoiles; ils s'en servirent comme d'un intermédiaire, pour mesurer la différence d'ascension droite du soleil et des étoiles, en ayant égard aux mouvemens propres de la lune et du soleil, dans l'intervalle des observations. La théorie du soleil donnant ensuite son ascension droite, ils en conclurent celle de quelques étoiles principales auxquelles ils rapportèrent les autres. C'est par ce moyen qu'Hipparque forma le premier catalogue d'étoiles dont nous ayons connaissance. Long-temps après, on donna plus de précision à cette méthode, en employant, au lieu de la lune, la planète Vénus que l'on peut quelquefois apercevoir en plein jour, et dont le mouvement pendant un court intervalle de temps, est plus lent et moins inégal que le mouvement lunaire. Maintenant que l'application du pendule aux horloges fournit une mesure du temps très précise, nous pouvons déterminer directement et avec une exactitude bien supérieure à celle des anciens astronomes, la différence d'ascension droite d'un astre et du soleil, par le temps écoulé entre leurs passages au méridien.

On peut, d'une manière semblable, rapporter la position des astres à l'écliptique; ce qui est principalement utile dans la théorie de la lune et des planètes. Par le centre de l'astre, on imagine un grand cercle perpendiculaire au plan de l'écliptique, et que l'on nomme cercle de *latitude*. L'arc de ce cercle, compris entre l'écliptique et l'astre, mesure sa latitude qui est boréale ou australe, suivant la dénomination du pôle situé du même côté de l'écliptique. L'arc de l'écliptique, compris entre le cercle de latitude et l'équinoxe du printemps, et compté de cet équinoxe, d'occident en orient, est ce que l'on nomme *longitude* de l'astre dont la position est ainsi déterminée par sa longitude et par sa latitude. On conçoit facilement que l'inclinaison de l'équateur à l'écliptique étant connue, la longitude et la latitude d'un astre peuvent se déduire de son ascension droite et de sa déclinaison observées.

Il ne fallut que peu d'années pour reconnaître la variation des étoiles en ascension droite et en déclinaison. Bientôt on remarqua qu'en changeant de position relativement à l'équateur, elles conservaient la même latitude, et l'on en conclut que leurs variations en ascension droite et en déclinaison, ne sont dues qu'à un mouvement commun de ces astres autour des pôles de l'écliptique. On peut encore représenter ces variations, en supposant les étoiles immobiles, et en faisant mouvoir autour de ces pôles ceux de l'équateur. Dans ce mouvement, l'inclinaison de l'équateur à l'écliptique restera la même, et ses nœuds, ou les équinoxes, rétrogradent uniformément de 154″,63 par année. On a vu précédemment que cette rétrogradation des équinoxes, rend l'année tropique un peu plus courte que l'année sidérale; ainsi la différence des deux années sidérale et tropique, et les variations des étoiles en ascension droite et en déclinaison, dépendent de ce mouvement par lequel le pôle de l'équateur décrit annuellement un arc de 154″,63 d'un petit cercle de la sphère céleste, parallèle à l'écliptique. C'est en cela que consiste le phénomène connu sous le nom de *précession des équinoxes*.

La précision dont l'astronomie moderne est redevable à l'application des lunettes aux instrumens astronomiques, et à celle du pendule aux horloges, a fait apercevoir de petites inégalités périodiques, dans l'inclinaison de l'équateur à l'écliptique et dans la précession des équinoxes. Bradley qui les a découvertes, et qui les a suivies avec un soin extrême pendant plusieurs années, en a reconnu la loi qui peut être représentée de la manière suivante.

On conçoit le pôle de l'équateur, mû sur la circonférence d'une petite ellipse tangente à la sphère céleste, et dont le centre que l'on peut regarder comme le pôle moyen de l'équateur, décrit uniformément, chaque année, 154″,63 du parallèle à l'écliptique, sur lequel il est situé. Le grand axe de cette ellipse, toujours dans le plan d'un cercle de latitude, répond à un arc de ce grand cercle, de 59″,56; et le petit axe répond à un arc de son parallèle, de 111″,30. La situation du vrai pôle de l'équateur sur cette ellipse, se détermine ainsi. On imagine sur le plan de l'ellipse, un petit cercle qui a le même centre, et dont le diamètre est égal au grand axe. On conçoit encore un rayon de ce cercle, mû d'un mouvement uniforme et rétrograde, de manière que ce rayon coïncide avec la moitié du grand axe, la plus voisine de l'écliptique; toutes les fois que le nœud moyen ascendant de l'orbite lunaire, coïncide avec l'équinoxe du printemps; enfin, de l'extrémité de ce rayon mobile, on abaisse une perpendiculaire sur le grand axe de l'ellipse. Le point où cette perpendiculaire coupe la circonférence elliptique, est le lieu du vrai pôle de l'équateur. Ce mouvement du pôle s'appelle *nutation*.

Les étoiles, en vertu des mouvemens que nous venons de décrire, conservent entre elles une position constante; mais le grand observateur à qui l'on doit la découverte de la nutation, a reconnu dans tous ces astres, un mouvement général et périodique, qui altère un peu leurs positions respectives. Pour se représenter ce mouvement, il faut imaginer que chaque étoile décrit annuellement une petite circonférence parallèle à l'écliptique, dont le centre est la position moyenne de l'étoile, et dont le diamètre vu de la terre soutend un angle de 125″; et qu'elle se meut sur cette circonférence, comme le soleil dans son orbite, de manière cependant que le soleil soit constamment plus avancé qu'elle, de cent degrés. Cette circonférence, en se projetant sur la surface du ciel, paraît sous la forme d'une ellipse plus ou moins aplatie suivant la hauteur de l'étoile au-dessus de l'écliptique; le petit axe de l'ellipse étant au grand axe, comme le sinus de cette hauteur est au rayon. De là naissent toutes les variétés de ce mouvement périodique des étoiles que l'on nomme *aberration*.

Indépendamment de ces mouvemens généraux, plusieurs étoiles ont des mouvemens particuliers, très lents, mais que la suite des temps a rendus sensibles. Ils ont été jusqu'ici principalement remarquables dans Sirius et Arcturus, deux étoiles des plus brillantes; mais tout porte à croire que les siècles suivans développeront des mouvemens semblables dans les autres étoiles.

CHAPITRE XIV.

De la figure de la Terre, de la variation de la pesanteur à sa surface, et du système décimal des poids et mesures.

Revenons du ciel sur la terre, et voyons ce que les observations nous ont appris sur ses dimensions et sur sa figure. On a déjà vu qu'elle est à très peu près sphérique : la pesanteur partout dirigée vers son centre, retient les corps à sa surface, quoique dans les lieux diamétralement opposés, ou antipodes les uns à l'égard des autres, ils aient des positions contraires. Le ciel et les étoiles paraissent toujours au-dessus de la terre ; car l'élévation et l'abaissement ne sont relatifs qu'à la direction de la pesanteur.

Du moment où l'homme eut reconnu la sphéricité du globe qu'il habite, la curiosité dut le porter à mesurer ses dimensions ; il est donc vraisemblable que les premières tentatives sur cet objet remontent à des temps bien antérieurs à ceux dont l'histoire nous a conservé le souvenir, et qu'elles ont été perdues dans les révolutions physiques et morales que la terre a éprouvées. Les rapports de plusieurs mesures de la plus haute antiquité, soit entre elles, soit avec la longueur de la circonférence terrestre, ont fait conjecturer non-seulement que dans des temps fort anciens, cette longueur a été exactement connue ; mais qu'elle a servi de base à un système complet de mesures dont on retrouve des vestiges en Égypte et dans l'Asie. Quoi qu'il en soit, la première mesure précise de la terre dont on ait une connaissance certaine, est celle que Picard exécuta en France vers la fin de l'avant-dernier siècle, et qui depuis a été vérifiée plusieurs fois. Cette opération est facile à concevoir. En s'avançant vers le nord, on voit le pôle s'élever de plus en plus : la hauteur méridienne des étoiles situées au nord augmente, et celle des étoiles situées au midi diminue ; quelques-unes même deviennent invisibles. La première notion de la courbure de la terre est due sans doute à l'observation de ces phénomènes qui ne pouvaient pas manquer de fixer l'attention des hommes dans les premiers âges des sociétés où l'on ne distinguait les saisons et leurs retours, que par le lever et par le coucher des principales étoiles, comparés à ceux du soleil. L'élévation ou la dépression des étoiles fait connaître l'angle que les verticales élevées aux extrémités de l'arc parcouru sur la terre, forment au point de leur concours; car cet angle est évidemment égal à la différence des hauteurs méridiennes d'une même étoile, moins l'angle sous lequel on verrait du centre de l'étoile l'espace parcouru, et l'on s'est assuré que ce dernier angle est insensible. Il ne s'agit plus ensuite que de mesurer cet espace. Il serait long et pénible d'appliquer nos mesures sur une aussi grande étendue; il est beaucoup plus simple d'en lier, par une suite de triangles, les extrémités à celles d'une base de douze ou quinze mille mètres; et vu la précision avec laquelle on peut déterminer les angles de ces triangles, on a très exactement sa longueur. C'est ainsi que l'on a mesuré l'arc du méridien terrestre qui traverse la France. La partie de cet arc, dont l'amplitude est la centième partie de l'angle droit, et dont le milieu répond à 50° de hauteur du pôle, est de cent mille mètres à fort peu près.

De toutes les figures rentrantes, la figure sphérique est la plus simple, puisqu'elle ne dépend que d'un seul élément, la grandeur de son rayon. Le penchant naturel à l'esprit humain de supposer aux objets, la forme qu'il conçoit le plus aisément, le porta donc à donner une forme sphérique à la terre. Mais la simplicité de la nature ne doit pas toujours se mesurer par celle de nos conceptions. Infiniment variée dans ses effets, la nature n'est simple que dans ses causes, et son économie consiste à produire un grand nombre de phénomènes souvent très compliqués, au moyen d'un petit nombre de lois générales. La figure de la terre est un résultat de ces lois qui, modifiées par mille circonstances, peuvent l'écarter sensiblement de la sphère. De petites variations observées dans la mesure des degrés en France, indiquaient ces écarts; mais les erreurs inévitables des observations laissaient des doutes sur cet intéressant phénomène, et l'Académie des Sciences, dans le sein de laquelle cette grande question fut vivement agitée, jugea avec raison que la différence des degrés terrestres, si elle est réelle, se manifesterait principalement dans la comparaison des degrés mesurés à l'équateur et vers les pôles. Elle envoya des académiciens à l'équateur même, et ils y trouvèrent le degré du méridien plus petit que celui de France. D'autres académiciens se transportèrent au nord où ils trouvèrent un degré plus grand. Ainsi l'accroissement des degrés des méridiens, de l'équateur aux pôles, fut incontestablement prouvé par ces mesures, et l'on en conclut que la terre n'est point exactement sphérique.

Ces voyages fameux des académiciens français, ayant dirigé vers cet objet, l'attention des observateurs; de nouveaux degrés des méridiens furent mesurés en Italie, en Allemagne, en Afrique, dans l'Inde et en Pensylvanie. Toutes ces mesures concourent à indiquer un accroissement dans les degrés, de l'équateur aux pôles.

Le tableau suivant présente les valeurs des degrés extrêmes mesurés, et du degré moyen entre le pôle et l'équateur. Le premier a été mesuré au Pérou par Bouguer et La Condamine. Le second est le résultat de la grande opération nouvellement exécutée pour déterminer la grandeur de l'arc qui traverse la France, de Dunkerque à Perpignan, et que l'on a prolongé au sud, jusqu'à Formentera: on l'a joint au nord avec le méridien de Greenwich, en liant par des triangles, les côtes de France à celles d'Angleterre. Cet arc immense qui embrasse la septième partie de la distance du pôle à l'équateur, a été déterminé avec une précision extrême. Les observations astronomiques et géodésiques ont été faites au moyen de cercles répétiteurs. Deux bases, chacune de plus de douze mille mètres, ont été mesurées, l'une près de Melun, l'autre près de Perpignan, par un procédé nouveau qui ne laisse aucune incertitude; et ce qui confirme la justesse de toutes les opérations, c'est que la base de Perpignan, conclue de celle de Melun, par la chaîne de triangles qui les unit, ne diffère pas d'un tiers de mètre, de sa mesure effective, quoique la distance qui sépare ces deux bases surpasse neuf cent mille mètres.

Pour ne rien laisser à désirer dans cette opération importante, on a observé sur divers points de cet arc, la hauteur du pôle, et le nombre des oscillations d'un même pendule dans un jour; d'où l'on a conclu les variations des degrés et de la pesanteur. Ainsi cette opération, la plus exacte et la plus étendue que l'on ait entreprise en ce genre, servira de monument pour constater l'état des sciences et des arts dans ce siècle de lumières. Enfin le troisième degré est celui que M. Swamberg vient de mesurer en Laponie.

Hauteur du pôle.	Longueur du degré.
0°,00.	99523m ,9
50°,08.	100004 ,3
73°,71.	100323 ,6

L'accroissement des degrés du méridien, quand la hauteur du pôle augmente, est sensible même dans les diverses parties du grand arc dont nous venons de parler. Considérons en effet ses points extrêmes, et le Panthéon à Paris, l'un des points intermédiaires. On a trouvé par les observations :

	Hauteur du pôle.	Distance à Greenwich dans le sens du méridien.
Greenwich	57°,19753. . .	0m ,0
Panthéon	54°,27431. . .	292719 ,3
Formentera	42°,96178. . .	1423636 ,1

La distance de Greenwich au Panthéon, donne 100135m.,2 pour le degré dont le milieu correspond à 55°,73592 de hauteur du pôle; et par la distance du Panthéon à Formentera, on ne trouve que 99970m.,3 pour le degré dont le milieu correspond à 48°,61804, ce qui donne 23m.,167 d'accroissement par degré, dans l'intervalle de ces deux points.

L'ellipse étant après le cercle, la plus simple des courbes rentrantes, on regarda la terre comme un solide formé par la révolution d'une ellipse autour de son petit axe. Son aplatissement dans le sens des pôles, est une suite nécessaire de l'accroissement observé des degrés des méridiens, de l'équateur aux pôles. La pesanteur étant dirigée suivant les rayons de ces degrés, ils sont par la loi de l'équilibre des fluides, perpendiculaires à la surface des mers dont la terre est, en grande partie, recouverte. Ils n'aboutissent pas, comme dans la sphère, au centre de l'ellipsoïde : ils n'ont ni la même direction, ni la même grandeur que les rayons menés de ce centre à la surface, et qui la coupent obliquement partout ailleurs qu'aux pôles et à l'équateur. La rencontre de deux verticales voisines situées sous le même méridien, est le centre du petit arc terrestre qu'elles comprennent entre elles : si cet arc était une droite, ces verticales seraient parallèles, ou ne se rencontreraient qu'à une distance infinie; mais à mesure qu'on le courbe, elles se rencontrent à une distance d'autant moindre, que sa courbure devient plus grande; ainsi l'extrémité du petit axe étant le point où l'ellipse approche le plus de se confondre avec une ligne droite, le rayon du degré du pôle, et par conséquent ce degré lui-même est le plus considérable de tous. C'est le contraire à l'extrémité du grand axe de l'ellipse, à l'équateur, où la courbure étant la plus grande, le degré dans le sens du méridien est le plus petit. En allant du second au premier de ces extrêmes, les degrés vont en augmentant; et si l'ellipse est peu aplatie, leur accroissement est à très peu près proportionnel au carré du sinus de la hauteur du pôle sur l'horizon.

On nomme *aplatissement* ou *ellipticité* d'un sphéroïde elliptique, l'excès de l'axe de l'équateur, sur celui du pôle, pris pour unité. La mesure de deux degrés dans le sens du méridien, suffit pour le déterminer. Si l'on compare entre eux les arcs mesurés en France, au Pérou et dans l'Inde, et qui par leur étendue, leur éloignement, et par les soins et la réputation des observateurs, méritent la préférence; on trouve l'aplatissement de l'ellipsoïde terrestre égal à $\frac{1}{310}$; le demi-grand axe égal à 6376606^{m}, et le demi-petit axe égal à 6356215^{m}.

Si la terre était elliptique, on devrait obtenir à peu près le même aplatissement, en comparant, deux à deux, les diverses mesures des degrés terrestres; mais leur comparaison donne à cet égard des différences qu'il est difficile d'attribuer aux seules erreurs des observations. Il paraît donc que la terre n'est pas exactement un ellipsoïde. Voyons quelle est dans l'hypothèse d'une figure quelconque, la nature des méridiens terrestres.

Le plan du méridien céleste que déterminent les observations astronomiques, passe par l'axe du monde et par le zénith de l'observateur; puisque ce plan coupe en parties égales les arcs des parallèles à l'équateur, décrits par les étoiles sur l'horizon. Tous les lieux de la terre, qui ont leur zénith sur la circonférence de ce méridien, forment le méridien terrestre correspondant. Vu l'immense distance des étoiles, les verticales élevées de chacun de ces lieux, peuvent être censées parallèles au plan du méridien céleste; on peut donc définir le méridien terrestre, une courbe formée par la jonction des pieds de toutes les verticales parallèles au plan du méridien céleste. Cette courbe est tout entière dans ce plan, lorsque la terre est un solide de révolution : dans tout autre cas, elle s'en écarte; et généralement, elle est une de ces lignes que les géomètres ont nommées *courbes à double courbure.*

Le méridien terrestre n'est pas exactement la ligne que déterminent les mesures trigonométriques dans le sens du méridien céleste. Le premier côté de la ligne mesurée, est tangent à la surface de la terre, et parallèle au plan du méridien céleste. Si l'on prolonge ce côté, jusqu'à la rencontre d'une verticale infiniment voisine, et qu'ensuite on plie ce prolongement jusqu'au pied de la verticale; on formera le second côté de la courbe, et ainsi des autres. La ligne ainsi tracée est la plus courte que l'on puisse mener sur la surface de la terre, entre deux points quelconques pris sur cette ligne : elle n'est dans le plan du méridien céleste et ne se confond avec le méridien terrestre, que dans le cas où la terre est un solide de révolution; mais la différence entre la longueur de cette ligne, et celle de l'arc correspondant du méridien terrestre, est si petite, qu'elle peut être négligée sans erreur sensible.

Il importe de multiplier les mesures de la terre, dans tous les sens et dans le plus grand nombre de lieux qu'il est possible. On peut à chaque point de sa surface, concevoir un ellipsoïde osculateur qui se confonde sensiblement avec elle, dans une petite étendue autour du point d'osculation. Les arcs terrestres mesurés dans le sens des méridiens et des perpendiculaires aux méridiens, feront connaître la nature et la position de cet ellipsoïde qui peut n'être pas un solide de révolution, et varier sensiblement à de grandes distances.

Quelle que soit la nature des méridiens terrestres, par cela seul que les degrés vont en diminuant des pôles à l'équateur; la terre est aplatie dans le sens de ses pôles, c'est-à-dire que l'axe des pôles est moindre que celui de l'équateur. Pour le faire voir, supposons que la terre soit un solide de révolution, et représentons-nous le rayon du degré du pôle boréal, et la suite de tous ces rayons depuis le pôle jusqu'à l'équateur, rayons qui par la supposition, diminuent sans cesse. Il est visible que ces rayons forment par leurs intersections consécutives, une courbe qui d'abord tangente à l'axe des pôles au-delà de l'équateur relativement au pôle boréal, tourne sa convexité vers cet axe, en s'élevant vers le plan de l'équateur, jusqu'à ce que le rayon du degré du méridien prenne une direction perpendiculaire à la première : alors il est dans ce plan. Si l'on conçoit le rayon du degré polaire, flexible et enveloppant successivement les arcs de la courbe que nous venons de considérer, son extrémité décrira le méridien terrestre, et sa partie interceptée entre le méridien et la courbe, sera le rayon correspondant du degré du méridien : cette courbe est ce que les géomètres nomment *développée* du méridien. Considérons maintenant, comme le centre de la terre, l'intersection du diamètre de l'équateur et de l'axe du pôle; la somme des deux tangentes à la développée du méridien, menées de ce centre, la première suivant l'axe du pôle, et la seconde suivant le diamètre de l'équateur, sera plus grande que l'arc de la développée qu'elles comprennent entre elles; or le rayon mené du centre de la terre au pôle boréal, est égal au rayon du degré polaire, moins la première tangente: le demi-diamètre de l'équateur est égal au rayon du degré du méridien à l'équateur, plus la seconde tangente; l'excès du demi-diamètre de l'équateur sur le rayon terrestre du pôle, est donc égal à la somme de ces tangentes, moins l'excès du rayon du degré polaire, sur le rayon du degré du méridien à l'équateur:

ce dernier excès est l'arc même de la développée, arc qui est moindre que la somme des tangentes extrêmes; donc l'excès du demi-diamètre de l'équateur, sur le rayon mené du centre de la terre au pôle boréal, est positif. On prouvera de même que l'excès de ce demi-diamètre sur le rayon mené du centre de la terre au pôle austral est positif; l'axe entier des pôles est donc moindre que le diamètre de l'équateur, ou, ce qui revient au même, la terre est aplatie dans le sens des pôles.

En considérant chaque partie du méridien, comme le développement d'un arc très petit de sa circonférence osculatrice; il est facile de voir que le rayon mené du centre de la terre, à l'extrémité de l'arc, la plus voisine du pôle, est plus petit que le rayon mené du même centre à l'autre extrémité; d'où il suit que les rayons terrestres vont en croissant, des pôles à l'équateur, si, comme toutes les observations l'indiquent, les degrés du méridien augmentent de l'équateur aux pôles.

La différence des rayons des degrés du méridien au pôle et à l'équateur, est égale à la différence des rayons terrestres correspondans, plus à l'excès du double de la développée, sur la somme des deux tangentes extrêmes, excès qui est évidemment positif ; ainsi les degrés des méridiens croissent de l'équateur aux pôles, dans un plus grand rapport que celui de la diminution des rayons terrestres. Il est clair que ces démonstrations ont encore lieu dans le cas où les deux hémisphères boréal et austral ne seraient pas égaux et semblables, et il est facile de les étendre au cas où la terre ne serait pas un solide de révolution.

On a élevé des principaux lieux de la France, sur la méridienne de l'Observatoire de Paris, des courbes tracées de la même manière que cette ligne, avec cette différence que le premier côté toujours tangent à la surface de la terre, au lieu d'être parallèle au plan du méridien céleste de l'Observatoire de Paris, lui est perpendiculaire. C'est par la longueur de ces courbes, et par les distances de l'Observatoire aux points où elles rencontrent la méridienne, que les positions de ces lieux ont été déterminées. Ce travail, le plus utile que l'on ait fait en Géographie, est un modèle que les nations éclairées s'empressent d'imiter, et qui sera bientôt étendu à l'Europe entière.

On ne peut pas fixer par des opérations géodésiques les positions respectives des lieux séparés par de vastes mers, et il faut alors recourir aux observations célestes. La connaissance de ces positions est un des plus grands avantages que l'Astronomie nous ait procurés. Pour y parvenir, on a suivi la méthode dont on avait fait usage pour former le catalogue des étoiles, en concevant sur la surface terrestre ces cercles correspondans à ceux que l'on avait imaginés dans le ciel. Ainsi l'axe de l'équateur céleste traverse la surface de la terre dans deux points diamétralement opposés, qui ont chacun à leur zénith un des pôles du monde, et que l'on peut considérer comme les pôles de la terre. L'intersection du plan de l'équateur céleste avec cette surface, est une circonférence qui peut être regardée comme l'équateur terrestre; les intersections de tous les plans des méridiens célestes avec la même surface, sont autant de lignes courbes qui se réunissent aux pôles, et qui sont les méridiens terrestres, si la terre est un solide de révolution, ce que l'on peut supposer en Géographie sans erreur sensible. Enfin, de petites circonférences tracées sur la terre, parallèlement à l'équateur, sont les parallèles terrestres, et celui d'un lieu quelconque répond au parallèle céleste qui passe à son zénith.

La position d'un lieu sur la terre, est déterminée par sa distance à l'équateur, ou par l'arc du méridien terrestre compris entre l'équateur et son parallèle, et par l'angle que forme son méridien, avec un premier méridien dont la position est arbitraire et auquel on rapporte ainsi tous les autres. Sa distance à l'équateur dépend de l'angle compris entre son zénith et l'équateur céleste, et cet angle est évidemment égal à la hauteur du pôle sur l'horizon : cette hauteur est ce que l'on nomme *latitude* en Géographie. La *longitude* est l'angle que le méridien d'un lieu fait avec le premier méridien ; c'est l'arc de l'équateur, compris entre les deux méridiens. Elle est orientale ou occidentale, suivant que le lieu est à l'orient ou à l'occident du premier méridien.

L'observation de la hauteur du pôle donne la latitude : la longitude se détermine au moyen d'un phénomène céleste observé à la fois sur les méridiens dont on cherche la position respective. Si le méridien d'où l'on compte les longitudes, est à l'orient de celui dont on cherche la longitude, le soleil y parviendra plus tôt au méridien céleste ; si, par exemple, l'angle formé par les méridiens terrestres, est le quart de la circonférence; la différence entre les instans du midi, sur ces méridiens, sera le quart du jour. Supposons donc que sur chacun d'eux, on observe un phénomène qui arrive au même instant physique pour tous les lieux de la terre, tel que le commencement ou la fin d'une éclipse de lune ou des satellites de Jupiter; la différence des heures que compteront les observateurs, au moment du phénomène, sera au jour entier, comme l'angle formé par les deux méridiens est à la circonférence. Les éclipses de soleil et les occultations des étoiles par la lune, fournissent des moyens plus exacts pour avoir les longitudes, par la précision avec laquelle on peut observer le commencement ou la fin de ces phénomènes: ils n'arrivent pas, à la vérité, au même instant physique, pour tous les lieux de la terre; mais les élémens du mouvement lunaire sont suffisamment connus, pour tenir compte exactement de cette différence.

Il n'est pas nécessaire pour déterminer la longitude d'un lieu, que le phénomène céleste observé, l'ait été sous le premier méridien : il suffit qu'on l'ait observé sous un méridien dont la position à l'égard du premier méridien soit connue. C'est ainsi qu'en liant les méridiens, les uns aux autres, on est parvenu à déterminer la position respective des points les plus éloignés de la terre.

Déjà les longitudes et les latitudes d'un grand nombre de lieux ont été déterminées par des observations astronomiques : de grandes erreurs sur la situation et l'étendue des pays anciennement connus, ont été corrigées : on a fixé la position des nouvelles contrées que l'intérêt du commerce et l'amour des sciences ont fait découvrir. Mais quoique les voyages entrepris dans ces derniers temps, aient considérablement accru nos connaissances géographiques; il reste beaucoup à découvrir encore. L'intérieur de l'Afrique et celui de la Nouvelle-Hollande, renferment des pays immenses, entièrement inconnus : nous n'avons que des relations incertaines et souvent contradictoires sur beaucoup d'autres à l'égard desquels la Géographie, livrée jusqu'ici au hasard des conjectures, attend de l'Astronomie des lumières pour fixer irrévocablement leur position.

La longitude et la latitude ne suffisent pas pour déterminer la position d'un lieu sur la terre : il faut joindre à ces deux ordonnées horizontales, une troisième ordonnée verticale, qui exprime sa hauteur au-dessus du niveau des mers. C'est ici que le baromètre trouve sa plus utile application : des observations nombreuses et précises de cet instrument, répandront sur la figure de la terre en hauteur, les mêmes lumières que l'Astronomie a déjà données sur ses deux autres dimensions.

C'est principalement au navigateur, lorsqu'au milieu des mers, il n'a pour guide que les astres et sa boussole, qu'il importe de connaître sa position, celle des lieux où il doit aborder et des écueils qui se rencontrent sur sa route. Il peut aisément connaître sa latitude, par l'observation de la hauteur des astres : les heureuses inventions de l'octant et du cercle repétiteur, ont donné à ce genre d'observations, une exactitude inespérée. Mais le ciel, en vertu de son mouvement diurne, se présentant dans un jour, à peu près de la même manière, à tous les points de son parallèle : il est difficile au navigateur, de fixer le point auquel il répond. Pour suppléer aux observations célestes, il mesure sa vitesse et la direction de son mouvement; il en conclut sa marche dans le sens des parallèles, et en la comparant avec ses latitudes observées, il détermine sa longitude relativement au lieu de son départ. L'inexactitude de cette méthode l'expose à des erreurs qui peuvent lui devenir funestes, quand il s'abandonne aux vents, pendant la nuit, près des côtes ou des bancs dont il se croit encore éloigné par son estime. C'est pour le mettre à l'abri de ces dangers, qu'aussitôt que les progrès des arts et de l'Astronomie, ont pu faire espérer des méthodes pour avoir les longitudes à la mer; les nations commerçantes se sont empressées de diriger par de puissans encouragemens, les vues des savans et des artistes, sur cet important objet. Leurs vœux ont été remplis par l'invention des montres marines, et par l'extrême précision à laquelle on a porté les tables lunaires, deux moyens bons en eux-mêmes; et qui deviennent encore meilleurs, en se prêtant un mutuel appui.

Une montre bien réglée dans un port dont la position est connue, et qui transportée sur un vaisseau, conserverait la même marche, indiquerait à chaque instant, l'heure que l'on compte dans ce port.

Cette heure étant comparée à celle que l'on observe à la mer, le rapport de leur différence, au jour entier, serait comme on l'a vu, celui de la différence des longitudes, à la circonférence. Mais il était difficile d'avoir de pareilles montres : les mouvemens irréguliers du vaisseau, les variations de la température, et les frottemens inévitables et très sensibles dans des machines aussi délicates étaient autant d'obstacles qui s'opposaient à leur exactitude. On est heureusement parvenu à les vaincre, et à exécuter des montres qui, pendant plusieurs mois, conservent une marche à très peu près uniforme, et qui donnent ainsi, le moyen le plus simple d'avoir les longitudes à la mer ; et comme ce moyen est d'autant plus précis, que le temps pendant lequel on emploie ces montres sans vérifier leur marche, est plus court ; elles sont très utiles pour déterminer la position respective des lieux fort voisins : elles ont même à cet égard, quelque avantage sur les observations astronomiques, dont la précision n'est point augmentée par le peu d'éloignement des observateurs.

Les éclipses des satellites de Jupiter, qui se renouvellent fréquemment, offriraient au navigateur un moyen facile de connaître sa longitude, s'il pouvait les observer à la mer ;

mais les tentatives que l'on a faites pour surmonter les difficultés qu'opposent à ce genre d'observations, les mouvemens du vaisseau, ont été jusqu'à présent infructueuses. La Navigation et la Géographie ont cependant retiré de grands avantages de ces éclipses et surtout de celles du premier satellite, dont on peut observer avec précision le commencement ou la fin. Le navigateur les emploie avec succès dans ses relâches : il a besoin, à la vérité, de connaître l'heure à laquelle la même éclipse qu'il observe, serait vue sous un méridien connu ; puisque la différence des heures que l'on compte sous les méridiens, est ce qui détermine la différence de leurs longitudes. Mais les tables du premier satellite de Jupiter, considérablement perfectionnées de nos jours, donnent pour le méridien de Paris, les instans de ses éclipses, avec une précision presque égale à celle des observations mêmes.

L'extrême difficulté d'observer sur mer, ces éclipses, a forcé de recourir aux autres phénomènes célestes, parmi lesquels le mouvement rapide de la lune est le seul qui puisse servir à la détermination des longitudes terrestres. La position de la lune, telle qu'on l'observerait du centre de la terre, peut aisément se conclure de la mesure de ses distances angulaires au soleil et aux étoiles : les tables de son mouvement donnent ensuite l'heure que l'on compte sous le premier méridien, lorsque l'on y observe la même position ; et le navigateur, en la comparant à l'heure qu'il compte sur le vaisseau, au moment de son observation, détermine sa longitude, par la différence de ces heures.

Pour apprécier l'exactitude de cette méthode, on doit considérer qu'en vertu de l'erreur de l'observation, le lieu de la lune, déterminé par l'observateur, ne répond pas exactement à l'heure désignée par son horloge ; et qu'en vertu de l'erreur des tables, ce même lieu ne se rapporte pas à l'heure correspondante qu'elles indiquent sous le premier méridien ; la différence de ces heures n'est donc pas celle que donneraient une observation et des tables rigoureuses. Supposons que l'erreur commise sur cette différence, soit d'une minute : dans cet intervalle, quarante minutes de l'équateur passent au méridien ; c'est l'erreur correspondante sur la longitude du vaisseau, et qui, à l'équateur, est d'environ quarante mille mètres ; mais elle est moindre sur les parallèles : d'ailleurs, elle peut être diminuée par des observations multipliées des distances de la lune au soleil et aux étoiles, et répétées pendant plusieurs jours, pour compenser et détruire les unes par les autres, les erreurs de l'observation et des tables.

Il est visible que les erreurs sur la longitude, correspondantes à celles des tables et de l'observation, sont d'autant moindres, que le mouvement de l'astre est plus rapide ; ainsi les observations de la lune périgée, sont à cet égard, préférables à celles de la lune apogée. Si l'on employait le mouvement du soleil, treize fois environ, plus lent que celui de la lune, les erreurs sur la longitude seraient treize fois plus grandes ; d'où il suit que de tous les astres, la lune est le seul dont le mouvement soit assez prompt pour servir à la détermination des longitudes à la mer ; on voit donc combien il était utile d'en perfectionner les tables.

Il est à désirer que tous les peuples de l'Europe, au lieu de rapporter au méridien de leur premier observatoire, les longitudes géographiques, s'accordent à les compter d'un même méridien donné par la nature elle-même, pour le retrouver sûrement dans tous les temps. Cet accord introduirait dans leur géographie, la même uniformité que présentent dejà leur calendrier et leur arithmétique, uniformité qui étendue aux nombreux objets de leurs relations mutuelles, formerait de ces peuples divers, une immense famille. Ptolémée avait fait passer son premier méridien, par les Canaries, comme étant la limite occidentale des pays alors connus. Cette raison de préférence ne subsiste plus depuis la découverte de l'Amérique. Mais l'une de ces îles nous offre un des points les plus remarquables de la terre, par sa hauteur et par son isolement, le sommet du pic Ténériffe. On pourrait prendre avec les Hollandais, son méridien pour origine des longitudes terrestres, en déterminant par un très grand nombre d'observations astronomiques, sa position relativement aux principaux observatoires. Mais soit que l'on convienne ou non, d'un méridien commun; il sera utile aux siècles à venir, de connaître leur position avec exactitude, par rapport au sommet de quelques montagnes toujours reconnaissables par leur hauteur et leur solidité, telles que le Mont-Blanc qui domine la charpente immense et inaltérable de la chaîne des Alpes.

Un phénomène très remarquable dont nous devons la connaissance aux voyages astronomiques, est la variation de la pesanteur à la surface de la terre. Cette force singulière anime dans le même lieu, tous les corps proportionnellement à leurs masses, et tend à leur imprimer dans le même temps, des vitesses égales. Il est impossible au moyen d'une balance, de reconnaître ses variations; puisqu'elles affectent également le corps que l'on pèse, et le poids auquel on le compare; mais on peut les déterminer en comparant ce poids, à une force constante telle que le ressort de l'air à la même température. Ainsi, en transportant dans divers lieux, un manomètre rempli d'un volume d'air dont la tension élève une colonne de mercure dans un tube intérieur; il est visible que le poids de cette colonne devant toujours faire équilibre au ressort de cet air; sa hauteur, lorsque la température sera la même, sera réciproque à la force de la pesanteur dont elle indiquera conséquemment les variations. Les observations du pendule offrent encore un moyen très précis pour les déterminer; car il est clair que ces oscillations doivent être plus lentes dans les lieux où la pesanteur est moindre.

Cet instrument dont l'application aux horloges a été l'une des principales causes des progrès de l'Astronomie moderne et de la Géographie, consiste dans un corps suspendu à l'extrémité d'un fil ou d'une verge mobile autour d'un point fixe placé à l'autre extrémité. On écarte un peu l'instrument, de sa situation verticale : en l'abandonnant ensuite à l'action de la pesanteur, il fait de petites oscillations qui sont à très peu près de la même durée, malgré la différence des arcs décrits. Cette durée dépend de la grandeur et de la figure du corps suspendu, de la masse et de la longueur de la verge ; mais les géomètres ont trouvé des règles générales pour déterminer par l'observation des oscillations d'un pendule composé, de figure quelconque, la longueur d'un pendule dont les oscillations auraient une durée connue, et dans lequel la masse de la verge serait supposée nulle par rapport à celle du corps considéré comme un point infiniment dense. C'est à ce pendule idéal, nommé *pendule simple*, que l'on a rapporté toutes les expériences du pendule, faites dans divers lieux de la terre.

Richer envoyé en 1672, à Cayenne, par l'Académie des Sciences, pour y faire des observations astronomiques, trouva que son horloge réglée à Paris sur le tems moyen, retardait, chaque jour, à Cayenne, d'une quantité sensible. Cette intéressante observation donna la première preuve directe de la diminution de la pesanteur à l'équateur. Elle a été répétée avec beaucoup de soin dans un grand nombre de lieux, en tenant compte de la résistance de l'air et de la température. Il résulte de toutes les mesures observées du pendule à secondes, qu'il augmente de l'équateur aux pôles.

En prenant pour unité, la longueur du pendule qui fait à l'Observatoire de Paris, cent mille oscillations par jour, on a trouvé sa longueur égale à 0,99669 à l'équateur au niveau des mers, tandis qu'en Laponie à 74°, 22 de hauteur du pôle, on l'a observée égale à 1,00137. Borda, par des expériences très exactes et très multipliées, a trouvé qu'à l'Observatoire de Paris, la longueur prise pour unité et réduite au vide, est de 0^{m}, 741887.

L'accroissement des longueurs du pendule, en allant de l'équateur aux pôles, est sensible même sur les divers points du grand arc du méridien qui traverse la France, comme on le voit par le tableau suivant, résultat des expériences nombreuses et précises faites par MM. Biot, Arago et Mathieu.

Lieux.	Hauteur du pôle.	Élévation au-dessus de la mer.	Longueur observée du pendule à secondes.
Formentera.	42°,96	196m	0m,7412061
Bordeaux..	49 ,82	0	0 ,7412615
Paris......	54 ,26	65	0 ,7419076
Dunkerque.	56 ,67	0	0 ,7420865

Les longueurs observées à Dunkerque et à Bordeaux, donnent par l'interpolation, 0m,7416274 pour la longueur du pendule à secondes, sur les côtes de France, au niveau de la mer, à cinquante degrés de hauteur du pôle. Cette longueur et celle du degré du méridien, dont le milieu répond au même point, serviront à retrouver nos mesures, si par la suite des temps elles viennent à s'altérer.

L'accroissement du pendule offre plus de régularité que celui des degrés du méridien : il s'écarte moins du rapport des carrés des sinus de la hauteur du pôle, soit que sa mesure plus facile que celle des degrés prête moins à l'erreur, soit que les causes perturbatrices de la régularité de la terre produisent moins d'effet sur la pesanteur. En comparant entre elles toutes les observations faites jusqu'à présent sur cet objet dans divers lieux de la terre, on trouve que si l'on prend pour unité la longueur du pendule à l'équateur, son accroissement de l'équateur aux pôles est égal au produit de cinquante-quatre dix-millièmes par le carré du sinus de la latitude.

On a remarqué encore, au moyen du pendule, une petite diminution dans la pesanteur, au sommet des hautes montagnes. Bouguer a fait sur cet objet un grand nombre d'expériences au Pérou. Il a trouvé que la pesanteur à l'équateur et au niveau de la mer, étant exprimée par l'unité, elle est 0,999249 à Quito élevé de 2857^{m} au-dessus de ce niveau, et 0,998816 sur le Pichincha, à 4744^{m} de hauteur. Cette diminution de la pesanteur, à des hauteurs toujours très petites relativement au rayon terrestre, donne lieu de penser que cette force diminue considérablement à de grandes distances du centre de la terre.

Les observations du pendule, en fournissant une longueur invariable et facile à retrouver dans tous les temps, ont fait naître l'idée de l'employer comme mesure universelle. On ne peut voir le nombre prodigieux de mesures en usage, non-seulement chez les différens peuples, mais dans la même nation; leurs divisions bizarres et incommodes pour les calculs; la difficulté de les connaître et de les comparer; enfin l'embarras et les fraudes qui en résultent dans le commerce: sans regarder comme l'un des plus grands services que les gouvernemens puissent rendre à la société, l'adoption d'un système de mesures dont les divisions uniformes se prêtent le plus facilement au calcul, et qui dérivent de la manière la moins arbitraire d'une mesure fondamentale indiquée par la nature elle-même. Un peuple qui se donnerait un semblable système, réunirait à l'avantage d'en recueillir les premiers fruits, celui de voir son exemple suivi par les autres peuples dont il deviendrait ainsi le bienfaiteur; car l'empire lent mais irrésistible de la raison, l'emporte, à la longue, sur les jalousies nationales, et surmonte tous les obstacles qui s'opposent au bien généralement senti. Tels furent les motifs qui déterminèrent l'Assemblée constituante à charger de cet important objet l'Académie des Sciences. Le nouveau système des poids et mesures est le résultat du travail des commissaires de l'Académie, secondés par le zèle et les lumières de plusieurs membres de la représentation nationale.

L'identité du calcul décimal et de celui des nombres entiers ne laisse aucun doute sur les avantages de la division de toutes les espèces de mesures, en parties décimales : il suffit, pour s'en convaincre, de comparer les difficultés des multiplications et des divisions complexes avec la facilité des mêmes opérations sur les nombres entiers, facilité qui devient plus grande encore au moyen des logarithmes dont on peut rendre, par des instrumens simples et peu coûteux, l'usage extrêmement populaire. A la vérité, notre échelle arithmétique n'est point divisible par trois et par quatre, deux diviseurs que leur simplicité rend très usuels. L'addition de deux nouveaux caractères eût suffi pour lui procurer cet avantage; mais un changement aussi considérable aurait été infailliblement rejeté avec le système de mesures qu'on lui aurait subordonné. D'ailleurs, l'échelle duodécimale a l'inconvénient d'exiger que l'on retienne les produits deux à deux des onze premiers nombres; ce qui surpasse l'ordinaire étendue de la mémoire, à laquelle l'échelle décimale est bien proportionnée. Enfin, on aurait perdu l'avantage qui probablement a donné naissance à notre arithmétique, celui de faire servir à la numération les doigts de la main. On ne balança donc point à adopter la division décimale; et pour mettre de l'uniformité dans le système entier des mesures, on résolut de les dériver toutes d'une même mesure linéaire et de ses divisions décimales. La question fut ainsi réduite au choix de cette mesure universelle à laquelle on donna le nom de *mètre*.

La longueur du pendule et celle du méridien sont les deux principaux moyens qu'offre la nature pour fixer l'unité des mesures linéaires. Indépendans, l'un et l'autre, des révolutions morales, ils ne peuvent éprouver d'altération sensible que par de très grands changemens dans la constitution physique de la terre. Le premier moyen, d'un usage facile, a l'inconvénient de faire dépendre la mesure de la distance, de deux élémens qui lui sont hétérogènes, la pesanteur et le temps dont la division est d'ailleurs arbitraire, et dont on ne pouvait pas admettre la division sexagésimale pour fondement d'un système décimal de mesures. On se détermina donc pour le second moyen qui paraît avoir été employé dans la plus haute antiquité, tant il est naturel à l'homme de rapporter les mesures itinéraires aux dimensions mêmes du globe qu'il habite; en sorte qu'en se transportant sur ce globe, il connaisse par la seule dénomination de l'espace parcouru, le rapport de cet espace au circuit entier de la terre. On trouve encore à cela l'avantage de faire correspondre les mesures nautiques avec les mesures célestes. Souvent le navigateur a besoin de déterminer l'un par l'autre le chemin qu'il décrit, et l'arc céleste compris entre les zéniths des lieux de son départ et de son arrivée; il est donc intéressant que l'une de ces mesures soit l'expression de l'autre, à la différence près de leurs unités. Mais pour cela, l'unité fondamentale des mesures linéaires doit être une partie aliquote du méridien terrestre, qui corresponde à l'une des divisions de la circonférence. Ainsi le choix du mètre fut réduit à celui de l'unité des angles.

L'angle droit est la limite des inclinaisons d'une ligne sur un plan, et de la hauteur des objets sur l'horizon : d'ailleurs, c'est dans le premier quart de la circonférence que se forment les sinus et généralement toutes les lignes que la Trigonométrie emploie, et dont les rapports avec le rayon ont été réduits en tables ; il était donc naturel de prendre l'angle droit pour l'unité des angles, et le quart de la circonférence pour l'unité de leur mesure. On le divisa en parties décimales; et pour avoir des mesures correspondantes sur la terre, on divisa dans les mêmes parties le quart du méridien terrestre, ce qui a été fait dans l'antiquité; car la mesure de la terre citée par Aristote, et dont l'origine est inconnue, donne cent mille stades au quart du méridien. Il ne s'agissait plus que d'avoir exactement sa longueur. Ici, deux questions se présentaient à résoudre. Quel est le rapport d'un arc du méridien, mesuré à une latitude donnée, au méridien entier ? Tous les méridiens sont-ils semblables ? Dans les hypothèses les plus naturelles sur la constitution du sphéroïde terrestre, la différence des méridiens est insensible, et le degré décimal dont le milieu répond à cinquante degrés de latitude, est la centième partie du quart du méridien : l'erreur de ces hypothèses ne pourrait influer que sur les distances géographiques où elle n'est d'aucune importance. On pouvait donc conclure la grandeur du quart du méridien de celle de l'arc qui traverse la France depuis Dunkerque jusqu'aux Pyrénées, et qui fut mesuré en 1740 par les académiciens français. Mais une nouvelle mesure d'un arc plus grand encore, faite avec des moyens plus exacts, devant inspirer en faveur du nouveau système des poids et mesures, un intérêt propre à le répandre; on résolut de mesurer l'arc du méridien terrestre, compris entre Dunkerque et Barcelone. Ce grand arc prolongé au sud jusqu'à Formentera, et au nord, jusqu'au parallèle de Greenwich, et dont le milieu répond à très peu près au parallèle moyen entre le pôle et l'équateur, a donné la longueur du quart du méridien, égale à 5130740 toises. On a pris la dix-millionième partie de cette longueur pour le mètre ou l'unité des mesures linéaires. La décimale au-dessus eût été trop grande; la décimale au-dessous trop petite; et le mètre dont la longueur est de $0^{\text{toi.}},513074$ remplace avec avantage la toise et l'aune, deux de nos mesures les plus usuelles.

Toutes les mesures dérivent du mètre de la manière la plus simple : les mesures linéaires en sont des multiples et des sous-multiples décimaux.

L'unité des mesures de capacité, est le cube de la dixième partie du mètre : on lui a donné le nom de *litre*.

L'unité des mesures superficielles pour le terrain, est un carré dont le côté est de dix mètres : elle se nomme *are*.

On a nommé *stère*, un volume de bois de chauffage, égal à un mètre cube.

L'unité de poids, que l'on a nommée *gramme*, est le poids de la millionième partie d'un mètre d'eau distillée dans le vide, et à son *maximum* de densité. Par une singularité remarquable, ce *maximum* ne répond point au degré de la congélation, mais au-dessus, vers quatre degrés du thermomètre. En se refroidissant au-dessous de cette température, l'eau commence à se dilater de nouveau, et se prépare ainsi à l'accroissement de volume, qu'elle reçoit dans son passage de l'état fluide à l'état solide. On a préféré l'eau comme étant une des substances les plus homogènes, et celle que l'on peut amener le plus facilement à l'état de pureté. M. Le Fevre-Gineau a déterminé le gramme, par une longue suite d'expériences délicates sur la pesanteur spécifique d'un cylindre creux de cuivre, dont il a mesuré le volume avec un soin extrême : il en résulte que la livre supposée la vingt-cinquième partie de la pile de cinquante marcs, que l'on conserve à la Monnaie de Paris, est au gramme, dans le rapport de 489,5058 à l'unité. Le poids de mille grammes, que l'on nomme *kilogramme* ou *livre décimale*, est donc égal à la livre, poids de marc, multipliée par 2,04288.

Pour conserver les mesures de longueur et de poids, des étalons du mètre et du kilogramme exécutés sous les yeux des commissaires chargés de déterminer ces mesures, et vérifiés par eux, sont déposés dans les archives nationales et à l'Observatoire de Paris. Les étalons du mètre ne le représentent qu'à un degré déterminé de température : on a choisi celui de la glace fondante, comme le plus fixe et le plus indépendant des modifications de l'atmosphère. Les étalons du kilogramme ne représentent son poids, que dans le vide, ou à une pression insensible de l'atmosphère. Pour retrouver le mètre dans tous les temps, sans être obligé de recourir à la mesure du grand arc qui l'a donné; il importait de fixer son rapport à la longueur du pendule à secondes : cet objet a été rempli par Borda, de la manière la plus précise.

Toutes les mesures étant comparées sans cesse, à la monnaie; il était surtout important de la diviser en parties décimales. On a donné à son unité, le nom de *franc* d'argent : sa dixième partie s'appelle *décime*, et sa centième partie, *centime*. On a rapporté au franc les valeurs des pièces de monnaie de cuivre et d'or.

Pour faciliter le calcul de l'or et de l'argent fin, contenus dans les pièces de monnaie; on a fixé l'alliage, au dixième de leur poids, et l'on a égalé celui du franc, à cinq grammes. Ainsi le franc étant un multiple exact de l'unité de poids, il peut servir à peser les corps, ce qui est utile au commerce.

Enfin, l'uniformité du système entier des poids et mesures, a exigé que le jour fût divisé en dix heures, l'heure en cent minutes, et la minute en cent secondes. Cette division qui va devenir nécessaire aux astronomes, est moins avantageuse dans la vie civile où l'on a peu d'occasions d'employer le temps, comme multiplicateur ou comme diviseur. La difficulté de l'adapter aux horloges et aux montres, et nos rapports commerciaux en horlogerie avec les étrangers, ont fait suspendre indéfiniment son usage. On peut croire cependant qu'à la longue, la division décimale du jour, remplacera sa division actuelle qui contraste trop avec les divisions des autres mesures, pour n'être pas abandonnée.

Tel est le nouveau système des poids et mesures, que les savans ont offert à la Convention nationale qui s'est empressée de le sanctionner. Ce système fondé sur la mesure des méridiens terrestres, convient également à tous les peuples. Il n'a de rapport avec la France, que par l'arc du méridien qui la traverse. Mais la position de cet arc est si avantageuse; que les savans de toutes les nations, réunis pour fixer la mesure universelle, n'eussent point fait un autre choix. Pour multiplier les avantages de ce système, et pour le rendre utile au monde entier; le Gouvernement français a invité les puissances étrangères, à prendre part à un objet d'un intérêt aussi général. Plusieurs ont envoyé à Paris, des savans distingués qui réunis aux commissaires de l'Institut national, ont déterminé par la discussion des observations et des expériences, les unités fondamentales de poids et de longueur ; en sorte que la fixation de ces unités, doit être regardée comme un ouvrage commun aux savans qui y ont concouru, et aux peuples qu'ils ont représentés. Il est donc permis d'espérer qu'un jour, ce système qui réduit toutes les mesures et leurs calculs, à l'échelle et aux opérations les plus simples de l'arithmétique décimale, sera aussi généralement adopté, que le système de numération dont il est le complément, et qui, sans doute, eut à surmonter les mêmes obstacles que le pouvoir de l'habitude oppose à l'introduction des nouvelles mesures; mais une fois introduites, ces mesures seront maintenues par ce même pouvoir qui joint à celui de la raison, assure aux institutions humaines, une éternelle durée.

CHAPITRE XV.

Du flux et du reflux de la mer, ou des variations diurnes de sa figure.

Quoique la terre et les fluides qui la recouvrent, aient dû prendre depuis long-temps, l'état qui convient à l'équilibre des forces qui les animent; cependant, la figure de la mer change à chaque instant du jour, par des oscillations régulières et périodiques, connues sous le nom de *flux et reflux de la mer.* C'est une chose vraiment étonnante, que de voir dans un temps calme et par un ciel serein, la vive agitation de cette grande masse fluide dont les flots viennent se briser avec impétuosité contre les rivages. Ce spectacle invite à la réflexion, et fait naître le désir d'en pénétrer la cause; mais pour ne pas s'égarer dans de vaines hypothèses, il faut avant tout, connaître les lois de ce phénomène, et le suivre dans tous ses détails. Mille causes accidentelles pouvant en altérer la marche, il faut considérer à la fois, un grand nombre d'observations; afin que les effets des causes passagères venant à se détruire mutuellement, les résultats moyens ne laissent apercevoir que les effets réguliers. Il faut encore, par une combinaison avantageuse des observations, mettre chacun de ces effets, en évidence. Mais cela ne suffit point. Les résultats des observations étant toujours susceptibles d'erreurs, il est nécessaire de connaître la probabilité que ces erreurs sont renfermées dans des limites données. On sent, il est vrai, que pour une même probabilité, ces limites sont d'autant plus rapprochées, que les observations sont plus nombreuses; et c'est ce qui, dans tous les temps a porté les observateurs à multiplier les faits et les expériences. Mais cet aperçu général ne détermine pas le degré de précision des résultats; il ne fait point connaître le nombre des observations nécessaires pour obtenir une probabilité déterminée. Quelquefois même, il a fait rechercher la cause de phénomènes qui n'étaient dus qu'au hasard. Le calcul des probabilités peut seul faire apprécier ces objets; ce qui rend son usage de la plus haute importance dans les sciences physiques et morales.

Au commencement du dernier siècle, et sur l'invitation de l'Académie des sciences, on fit dans nos ports, un grand nombre d'observations des marées : elles furent continuées, chaque jour à Brest, pendant six années consécutives. La situation de ce port est très favorable à ce genre d'observations. Il communique avec la mer, par un vaste et long canal au fond duquel le port a été construit. Les irrégularités du mouvement de la mer, ne parviennent ainsi dans ce port, que très affaiblies; à peu près comme les oscillations que les mouvemens du vaisseau impriment à la colonne de mercure d'un baromètre, sont atténuées par un étranglement du tube de cet instrument. De plus les marées étant fort grandes à Brest, les variations accidentelles n'en sont qu'une faible partie; et si l'on considère spécialement, comme je l'ai fait, les excès des hautes mers sur les basses mers voisines; les vents, cause principale des irrégularités du mouvement de la mer, ont sur les résultats peu d'influence; parce que s'ils élèvent une haute mer, ils soulèvent à peu près autant la basse mer qui la suit, ou qui la précède. Aussi l'on remarque dans ces résultats une grande régularité, pour peu que l'on multiplie les observations. Frappé de cette régularité, je priai le gouvernement d'ordonner que l'on fît dans le port de Brest une nouvelle suite d'observations des marées, pendant une période entière du mouvement des nœuds de l'orbite lunaire. C'est ce que l'on a bien voulu entreprendre. Ces observations datent de l'année 1806, et elles ont été continuées, chaque jour, sans interruption. En discutant toutes ces observations, par la méthode dont je viens de parler, je suis parvenu aux résultats suivans qui ne laissent aucun doute.

La mer s'élève et s'abaisse deux fois dans chaque intervalle de temps compris entre deux retours consécutifs de la lune au méridien supérieur. L'intervalle moyen de ces retours est de $1^{j},035050$; ainsi l'intervalle moyen entre deux pleines mers consécutives est de $0^{j},517525$, en sorte qu'il y a des jours solaires où l'on n'observe qu'une seule marée. Le moment de la basse mer divise à peu près également cet intervalle. Comme dans toutes les grandeurs susceptibles d'un *maximum* ou d'un *minimum*, l'accroissement et la diminution de la marée vers ces limites sont proportionnels aux carrés des temps écoulés depuis la haute ou la basse mer.

La hauteur de la pleine mer n'est pas constamment la même; elle varie chaque jour, et ses variations ont un rapport évident avec les phases de la lune : elle est la plus grande vers le temps des pleines et des nouvelles lunes, ensuite elle diminue et devient la plus petite vers les quadratures. La plus haute marée à Brest n'a point lieu le jour même de la syzygie, mais un jour et demi après; en sorte que si la syzygie arrive au moment d'une pleine mer, la troisième marée qui la suit est la plus grande. Pareillement, si la quadrature arrive au moment de la pleine mer, la troisième marée qui la suit est la plus petite. Ce phénomène s'observe à peu près également dans tous les ports de France, quoique les heures des marées y soient fort différentes.

Plus la mer s'élève lorsqu'elle est pleine, plus elle descend dans la basse mer suivante. Nous nommerons *marée totale* la demi-somme des hauteurs de deux pleines mers consécutives, au-dessus du niveau de la basse mer intermédiaire. La valeur moyenne de cette marée totale à Brest, dans les syzygies des équinoxes, est d'environ cinq mètres et demi: elle est de moitié plus petite dans les quadratures.

Si l'on considère avec attention ces résultats, on voit que le nombre des hautes mers étant égal à celui des passages de la lune au méridien, soit supérieur, soit inférieur, cet astre a sur ce phénomène la principale influence. Mais de ce que les marées quadratures sont plus faibles que les marées syzygies, il résulte que le soleil influe pareillement sur ce phénomène, et qu'il modifie l'influence lunaire. Il est naturel de penser que chacune de ces influences, si elles existaient séparément, produirait un système de marées dont la période serait celle du passage de l'astre au méridien, et que le mélange de ces deux systèmes produit une marée composée dans laquelle la haute mer lunaire correspond à la haute mer solaire vers les syzygies, et à la basse mer solaire vers les quadratures.

Les déclinaisons du soleil et de la lune ont une influence remarquable sur les marées; elles diminuent les marées totales des syzygies des équinoxes: elles augmentent de la même quantité les marées totales des quadratures des solstices. Ainsi l'opinion généralement répandue que les marées sont les plus grandes dans les syzygies équinoxiales, est confirmée par la discussion exacte d'un grand nombre d'observations. Cependant plusieurs savans, et spécialement Lalande, ont révoqué cette opinion en doute, parce que vers quelques solstices, la mer s'est élevée à une hauteur considérable. C'est ici que le calcul des probabilités devient nécessaire pour décider cette question importante de la théorie des marées. En appliquant aux observations ce calcul, on trouve que la supériorité des marées syzygies équinoxiales et des marées quadratures solsticiales est indiquée avec une probabilité beaucoup plus grande que celle de la plupart des faits sur lesquels on ne se permet aucun doute.

La distance de la lune à la terre influe d'une manière très sensible sur la grandeur des marées totales. Tout étant égal d'ailleurs, elles augmentent et diminuent avec le diamètre et la parallaxe lunaires, mais dans un plus grand rapport. Les variations des distances du soleil à la terre influent pareillement sur les marées, mais d'une manière beaucoup moins sensible.

C'est principalement vers les *maxima* et vers les *minima* des marées totales qu'il est intéressant de connaître la loi de leur variation. On vient de voir que l'instant de leur *maximum* à Brest suit d'un jour et demi la syzygie : la diminution des marées totales qui en sont voisines est proportionnelle au carré du temps écoulé depuis cet instant, jusqu'à celui de la basse mer intermédiaire à laquelle la marée totale se rapporte.

Près de l'instant du *minimum* qui suit d'un jour et demi la quadrature, l'accroissement des marées totales est proportionnel au carré du temps écoulé depuis cet instant : il est à fort peu près double de la diminution des marées totales vers leur *maximum*.

Les déclinaisons du soleil et de la lune influent très sensiblement sur ces variations : la diminution des marées vers les syzygies des solstices, n'est qu'environ trois cinquièmes de la diminution correspondante vers les syzygies des équinoxes : l'accroissement des marées vers les quadratures, est deux fois plus grand dans les équinoxes, que dans les solstices. Mais l'influence des distances de la lune à la terre est encore plus considérable que celle des déclinaisons. La diminution des marées syzygies est presque trois fois plus grande vers le périgée de la lune, que vers son apogée.

On observe encore entre les marées du matin et du soir, de petites différences qui dépendent des déclinaisons du soleil et de la lune, et qui disparaissent lorsque ces astres sont dans l'équateur. Pour les reconnaître, il faut comparer les marées du premier et du second jour après la syzygie ou après la quadrature : les marées très voisines alors du *maximum* ou du *minimum*, varient fort peu d'un jour à l'autre, et laissent facilement apercevoir la différence des deux marées d'un même jour. On trouve ainsi qu'à Brest, dans les syzygies des solstices d'été, les marées du matin du premier et du second jour après la syzygie, sont plus petites que celles du soir, d'un sixième de mètre à peu près : elles sont plus grandes de la même quantité, dans les syzygies des solstices d'hiver. Pareillement, dans les quadratures de l'équinoxe d'automne, les marées du matin, du premier et du second jour après la quadrature, surpassent celles du soir, d'un huitième de mètre, à peu près : elles sont plus petites de la même quantité, dans les quadratures de l'équinoxe du printemps.

Tels sont, en général, les phénomènes que les hauteurs des marées présentent dans nos ports : leurs intervalles offrent d'autres phénomènes que nous allons développer.

Quand la pleine mer a lieu à Brest, au moment de la syzygie ; elle suit l'instant de minuit, ou celui du midi vrai, de $0^j,1780$, suivant qu'elle arrive le matin ou le soir. Cet intervalle très différent dans des ports même fort voisins, est ce que l'on nomme *établissement du port*, parce qu'il détermine les heures des marées, relatives au phases de la lune. La pleine mer qui a lieu à Brest, au moment de la quadrature, suit l'instant de minuit ou celui du midi vrai, de $0^j,358$.

La marée voisine de la syzygie, avance ou retarde de $270''$, pour chaque heure dont elle précède ou suit la syzygie : la marée voisine de la quadrature, avance ou retarde de $502''$, pour chaque heure dont elle précède ou suit la quadrature.

Les heures des marées syzygies ou quadratures, varient avec les distances du soleil et de la lune à la terre, et principalement avec les distances de la lune. Dans les syzygies, chaque minute d'accroissement ou de diminution dans le demi-diamètre apparent de la lune fait avancer ou retarder l'heure de la pleine mer, de $354''$. Ce phénomène a également lieu dans les quadratures; mais il y est trois fois moindre.

Les déclinaisons du soleil et de la lune influent pareillement sur les heures des marées syzygies et quadratures. Dans les syzygies des solstices, l'heure de la pleine mer avance d'environ une minute et demie : elle retarde de la même quantité, dans les syzygies des équinoxes. Au contraire, dans les quadratures des équinoxes, l'heure de la marée avance d'environ huit minutes, et elle retarde de la même quantité, dans les quadratures des solstices.

On a vu que le retard des marées, d'un jour à l'autre, est de $0^j,3505$, dans son état moyen; en sorte que si la marée arrive à $0^j,1$ après le minuit vrai, elle arrivera le lendemain matin, à $0^j,13505$. Mais ce retard varie avec les phases de la lune. Il est le plus petit qu'il est possible, vers les syzygies, quand les marées totales sont à leur *maximum*, et alors il n'est que de $0^j,02723$. Lorsque les marées sont à leur *minimum* ou vers les quadratures il est le plus grand possible, et s'élève à 0j,05207. Ainsi la différence des heures des marées correspondantes aux momens de la syzygie et de la quadrature, et qui, par ce qui précède, est 0j,20642, augmente pour les marées qui suivent de la même manière ces deux phases, et devient à peu près égale à un quart de jour, relativement au *maximum* et au *minimum* des marées.

Les variations des distances du soleil et de la lune à la terre, et principalement celles de la lune, influent sur les retards des marées, d'un jour à l'autre. Chaque minute d'accroissement ou de diminution dans le demi-diamètre apparent de la lune, augmente ou diminue ce retard, de 258″, vers les syzygies. Ce phénomène a également lieu dans les quadratures; mais il est trois fois moindre.

Le retard journalier des marées varie encore par la déclinaison des deux astres. Dans les syzygies des solstices, il est d'environ une minute, plus grand que dans son état moyen; il est plus petit de la même quantité dans les équinoxes. Au contraire, dans les quadratures des équinoxes, il surpasse sa grandeur moyenne, de quatre minutes à peu près : il en est surpassé de la même quantité, dans les quadratures des solstices.

Les résultats que je viens d'exposer, ont été conclus des observations faites chaque jour à Brest, depuis 1807, jusqu'au moment actuel. Il était intéressant de les comparer aux résultats semblables que j'avais tirés des observations faites dans le même port, au commencement du dernier siècle. J'ai trouvé tous ces résultats à très peu près d'accord entre eux; leurs petites différences étant comprises dans les limites des erreurs dont les observations sont susceptibles. Ainsi, après un siècle d'intervalle, la nature a été sur ce point retrouvée conforme à elle-même.

Il suit de ce qui précède, que les inégalités des hauteurs et des intervalles des marées ont des périodes très différentes; les unes sont d'un demi-jour et d'un jour; d'autres d'un demi-mois, d'un mois, d'une demi-année et d'une année; d'autres enfin sont les mêmes que celles des révolutions des nœuds et du périgée de l'orbe lunaire dont la position influe sur les marées, par l'effet des déclinaisons de la lune et de ses distances à la terre.

Ces phénomènes ont également lieu dans

tous les ports et sur tous les rivages de la mer; mais les circonstances locales sans rien changer aux lois des marées, ont une grande influence sur leur grandeur et sur l'heure de l'établissement du port.

CHAPITRE XVI.

De l'atmosphère terrestre et des réfractions astronomiques.

Un fluide élastique rare et transparent enveloppe la terre et s'élève à une grande hauteur. Il pèse comme tous les corps, et son poids fait équilibre à celui du mercure dans le baromètre. Sur le parallèle de cinquante degrés, à la température de la glace fondante, et à la moyenne hauteur du baromètre au niveau des mers, hauteur qui peut être supposée de $0^m,76$, le poids de l'air est à celui d'un pareil volume de mercure, dans le rapport de l'unité à 10477,9; d'où il suit qu'en s'élevant alors, de $10^m,4779$, la hauteur du baromètre s'abaisserait à très peu près d'un millimètre, et que si la densité de l'atmosphère était partout la même, sa hauteur serait de 7963 mètres. Mais l'air est compressible : sa température étant supposée constante, sa densité, suivant une loi générale des gaz et des fluides en vapeurs, est proportionnelle au poids qui le comprime, et par conséquent, à la hauteur du baromètre. Ses couches inférieures comprimées par les couches supérieures sont donc plus denses que celles-ci qui deviennent de plus en plus rares, à mesure que l'on s'élève au-dessus de la terre. Leur hauteur croissant en progression arithmétique, leur densité diminuerait en progression géométrique, si elles avaient toutes la même température. Pour le faire voir, concevons un canal vertical traversant deux couches atmosphériques infiniment voisines. La partie de la couche la plus élevée, que renferme le canal, sera moins comprimée que la partie correspondante de la couche la plus basse, d'une quantité égale au poids de la petite colonne d'air, interceptée entre ces deux parties. La température étant supposée la même, la différence de compression des deux couches est proportionnelle à la différence de leurs densités; cette dernière différence est donc proportionnelle au poids de la petite colonne, et par conséquent au produit de sa densité par sa longueur, du moins, si l'on fait abstraction de la variation de la pesanteur, à mesure que l'on s'élève.

Les deux couches étant supposées infiniment voisines, la densité de la colonne peut être supposée la même que celle de la couche inférieure; la variation différentielle de cette dernière densité, est donc proportionnelle au produit de cette densité, par la variation de la hauteur verticale; par conséquent, si l'on fait varier cette hauteur, de quantités toujours égales, le rapport de la différentielle de la densité à la densité elle-même, sera constant; ce qui est la propriété caractéristique d'une progression géométrique décroissante, et dont tous les termes sont infiniment rapprochés. De là il suit que les hauteurs des couches, croissant en progression arithmétique, leurs densités diminuent en progression géométrique, et leurs logarithmes soit hyperboliques, soit tabulaires, décroissent en progression arithmétique.

On a tiré un parti avantageux de ces données, pour mesurer les hauteurs au moyen du baromètre. La température de l'atmosphère étant supposée partout la même; on aura par le théorème précédent, la différence en hauteur, de deux stations, en multipliant par un coefficient constant, la différence des logarithmes des hauteurs observées du baromètre, à chaque station. Une seule observation suffit pour déterminer ce coefficient. Ainsi l'on a vu qu'à zéro de température, la hauteur du baromètre étant $0^m,76000$ dans la station inférieure, et $0^m,75999$ dans la station supérieure, cette station était élevée de $0^m,104779$ au-dessus de la première. Le coefficient constant est donc égal à cette quantité divisée par la différence des logarithmes tabulaires des nombres 0, 76000 et 0, 75999, ce qui donne 18336^m pour ce coefficient. Mais cette règle pour mesurer les hauteurs par le baromètre, exige diverses modifications que nous allons développer.

La température de l'atmosphère n'est pas uniforme : elle diminue à mesure que l'on s'élève. La loi de cette diminution change à chaque instant ; mais par un résultat moyen entre beaucoup d'observations, on peut évaluer à seize ou dix-sept degrés, la diminution de la température relative à trois mille mètres de hauteur. Or l'air, comme tous les corps, se dilate par la chaleur, et se resserre par le froid, et l'on a trouvé par des expériences très précises, que son volume étant représenté par l'unité, à zéro de température, il varie comme celui de tous les gaz et de toutes les vapeurs, de 0,00375 pour chaque degré du thermomètre; il faut donc avoir égard à ces variations dans le calcul des hauteurs; car il est visible que pour obtenir le même abaissement dans le baromètre, il faut s'élever d'autant plus, que la couche d'air, que l'on traverse, est plus rare. Mais dans l'impossibilité de connaître exactement la variation de sa température, ce que l'on peut faire de plus simple, est de supposer cette température uniforme et moyenne entre les températures des deux stations que l'on considère. Le volume de la colonne d'air comprise entre elles, étant augmenté en raison de cette température moyenne, la hauteur due à l'abaissement observé du baromètre, devra être augmentée dans le même rapport; ce qui revient à multiplier le coefficient 18336^{m}, par l'unité plus la fraction 0,00375 prise autant de fois qu'il y a de degrés dans la température moyenne. Les vapeurs aqueuses répandues dans l'atmosphère, étant moins denses que l'air, à la même pression et à la même température, elles diminuent la densité de l'atmosphère; et comme, tout étant égal d'ailleurs, elles sont plus abondantes dans les grandes chaleurs; on y aura égard en partie, en augmentant un peu le nombre 0,00375 qui exprime la dilatation de l'air pour chaque degré du thermomètre. Je trouve que l'on satisfait assez bien à l'ensemble des observations, en le portant à 0,004; on pourra donc faire usage de ce dernier nombre, du moins jusqu'à ce que l'on soit parvenu par une longue suite d'observations sur l'hygromètre, à introduire cet instrument, dans la mesure des hauteurs par le baromètre.

Jusqu'ici, nous avons supposé la pesanteur constante, et l'on a vu précédemment qu'elle diminue un peu, lorsqu'on s'élève; ce qui contribue encore à augmenter la hauteur due à l'abaissement du baromètre: ainsi l'on aura égard à cette diminution de la pesanteur, si l'on augmente un peu le facteur constant. En comparant un grand nombre d'observations du baromètre faites au pied et au sommet de plusieurs montagnes dont la hauteur a été mesurée avec exactitude par les moyens trigonométriques, M. Ramond a trouvé 18393^{m}, pour ce facteur. Mais en ayant égard à la diminution de la pesanteur, les mêmes comparaisons le réduisent à 18336^{m}. Ce dernier facteur donne 10477,9 pour le rapport de la pesanteur du mercure, à celle d'un pareil volume d'air sur le parallèle de cinquante degrés, à zéro de température, et la hauteur du baromètre étant $0^m,76$. MM. Biot et Arago ont trouvé 10466,6 pour ce rapport réduit au même parallèle, en pesant avec un grand soin, des mesures connues de mercure et d'air. Mais ils ont employé de l'air très sec au lieu que celui de l'atmosphère est toujours mêlé d'une quantité plus ou moins grande de vapeur aqueuse, quantité que l'on détermine au moyen de l'hygromètre : cette vapeur est plus légère que l'air, dans le rapport de dix à dix-sept à fort peu près; les expériences directes ont dû par conséquent, donner un plus petit rapport entre la pesanteur du mercure et de l'air, que les observations barométriques. Ces expériences réduisent à $18316^m,6$ le facteur 18336^m. Pour l'élever au nombre 18393^m, que donnent les observations du baromètre, quand on n'a point égard à la variation de la pesanteur; il faudrait supposer à l'humidité moyenne de l'atmosphère, une valeur beaucoup trop grande; ainsi la diminution de la pesanteur est sensible, même dans les observations barométriques. Le facteur 18393^m corrige à très peu près, l'effet de cette diminution; mais une autre variation de la pesanteur, celle qui dépend de la latitude, doit influer encore sur ce facteur. Il a été déterminé pour une latitude que l'on peut supposer de 50°, sans erreur sensible : il doit augmenter à l'équateur où la pesanteur est moindre qu'à cette latitude. Il est visible, en effet, qu'il faut s'y élever davantage, pour parvenir d'une pression donnée de l'atmosphère, à une pression plus petite d'une quantité déterminée, puisque dans l'intervalle, la pesanteur de l'air est moindre; le coefficient 18393^m doit donc varier comme la longueur du pendule à secondes, qui se raccourcit ou s'allonge suivant que la pesanteur augmente ou diminue. Il est facile de conclure de ce que l'on a dit précédemment sur les variations de cette longueur, qu'il faut ajouter à ce coefficient, le produit de $26^m,164$, par le cosinus du double de la latitude.

Enfin, on doit appliquer aux hauteurs du baromètre, une légère correction dépendante de la différence des températures du mercure du baromètre dans les deux stations. Pour bien connaître cette différence, on enchâsse un petit thermomètre à mercure dans la monture du baromètre de manière que le mercure de ces deux instrumens soit toujours à fort peu près à la même température. Dans la station la plus froide, le mercure est plus dense et par cette cause, la colonne du mercure du baromètre est diminuée. Pour la ramener à la longueur qu'elle aurait si la température était la même qu'à la station la plus chaude, il faut l'augmenter d'autant de fois sa 5550ième partie qu'il y a de degrés de différence entre les températures du mercure dans les deux stations.

Voici donc la règle qui me paraît à la fois la plus exacte et la plus simple pour mesurer les hauteurs par le baromètre. On corrigera d'abord, comme on vient de le dire, la hauteur du baromètre dans la station la plus froide; ensuite on ajoutera au facteur 18393m, le produit de 26m,164 par le cosinus du double de la latitude. On multipliera ce facteur ainsi corrigé, par le logarithme tabulaire du rapport de la plus grande à la plus petite hauteur corrigée du baromètre. On multipliera enfin ce produit par le double de la somme des degrés du thermomètre qui indique la température de l'air à chaque station, et l'on ajoutera ce produit divisé par mille, au précédent; la somme donnera à très peu pres l'élévation de la station supérieure au-dessus de l'inférieure, surtout si l'on a soin de faire les observations du baromètre à l'instant le plus favorable du jour et qui paraît être celui de midi.

L'air est invisible en petites masses ; mais les rayons de lumière, réfléchis par toutes les couches de l'atmosphère, produisent une impression sensible. Ils le font voir avec une couleur bleue qui répand une teinte de même couleur sur tous les objets aperçus dans le lointain, et qui forme l'azur céleste : c'est ainsi que nous ne voyons le brouillard dans lequel nous sommes plongés, qu'à une distance plus ou moins grande. Cette voûte bleue, à laquelle les astres semblent attachés, est donc fort près de nous; elle n'est que l'atmosphère terrestre, et c'est à d'immenses distances au-delà que tous ces corps sont placés. Les rayons solaires que ces molécules nous renvoient en abondance, avant le lever et après le coucher du soleil, forment l'aurore et le crépuscule, qui s'étendant à plus de vingt degrés de distance de cet astre, nous prouvent que les molécules extrêmes de l'atmosphère sont élevées au moins de soixante mille mètres.

Si l'œil pouvait distinguer et rapporter à leur vraie place les points de la surface extérieure de l'atmosphère, nous verrions le ciel comme une calotte sphérique, formée par la portion de cette surface que retrancherait un plan tangent à la terre; et comme la hauteur de l'atmosphère est fort petite relativement au rayon terrestre, le ciel nous paraîtrait sous la forme d'une voûte surbaissée. Mais quoique nous ne puissions pas distinguer les limites de l'atmosphère, cependant les rayons qu'elle nous renvoie, venant d'une plus grande profondeur à l'horizon qu'au zénith, nous devons la juger plus étendue dans le premier sens. A cette cause se joint encore l'interposition des objets à l'horizon, qui contribue à augmenter la distance apparente de la partie du ciel que nous rapportons au-delà; le ciel doit donc nous paraître surbaissé tel que la calotte d'une sphère. Un astre élevé d'environ vingt-six degrés semble diviser en deux parties égales la longueur de la courbe que forme depuis l'horizon jusqu'au zénith la section de la surface du ciel par un plan vertical; d'où il suit que si cette courbe est un arc de cercle, le rayon horizontal de la voûte céleste apparente est à son rayon vertical à peu près comme trois et un quart est à l'unité; mais ce rapport varie avec les causes de cette illusion. Les grandeurs apparentes du soleil et de la lune étant proportionnelles aux angles sous lesquels on les aperçoit, et à la distance apparente du point du ciel auquel on les rapporte; ils nous paraissent plus grands à l'horizon qu'au zénith, quoiqu'ils y soient vus sous un plus petit angle.

Les rayons lumineux ne se meuvent pas en ligne droite dans l'atmosphère; ils s'infléchissent continuellement vers la terre. L'observateur qui n'aperçoit les objets que dans la direction de la tangente à la courbe qu'ils décrivent, les voit plus élevés qu'ils ne le sont réellement, et les astres paraissent sur l'horizon alors même qu'ils sont abaissés au-dessous. En infléchissant les rayons du soleil, l'atmosphère nous fait ainsi jouir plus longtemps de sa présence, et augmente la durée du jour, que prolongent encore l'aurore et le crépuscule. Il importait extrêmement aux astronomes de connaître les lois et la quantité de la réfraction de la lumière dans notre atmosphère, pour avoir la vraie position des astres. Mais avant de présenter le résultat de leurs recherches sur cet objet, je vais exposer en peu de mots les principales propriétés de la lumière.

En passant d'un milieu transparent dans un autre, un rayon lumineux s'approche ou s'éloigne de la perpendiculaire à la surface qui les sépare, de manière que les sinus des deux angles que forment ses directions, avec cette perpendiculaire, l'une avant, l'autre après son entrée dans le nouveau milieu, sont en raison constante, quels que soient ces angles. Mais la lumière en se réfractant ainsi, présente un phénomène remarquable qui nous a fait reconnaître sa nature. Un rayon de lumière solaire reçu dans une chambre obscure, après son passage à travers un prisme transparent, forme une image oblongue diversement colorée : ce rayon est un faisceau d'un nombre infini de rayons de différentes couleurs, que le prisme sépare en vertu de leur diverse réfrangibilité. Le rayon le plus réfrangible est le violet, ensuite l'indigo, le bleu, le vert, le jaune, l'orangé et le rouge. Mais quoique nous ne désignions ici que sept espèces de rayons, il en existe une infinité qui s'en rapprochent par des nuances insensibles de couleurs et de réfrangibilité. Tous ces rayons rassemblés au moyen d'une lentille, font reparaître la couleur blanche du soleil, qui n'est ainsi que le mélange de toutes les couleurs simples ou homogènes, dans des proportions déterminées.

Lorsqu'un rayon d'une couleur homogène est bien séparé des autres, il ne change ni de réfrangibilité, ni de couleur, quelles que soient les réflexions et les réfractions qu'il subit; sa couleur n'est donc point une modification de la lumière, par les milieux qu'elle traverse, mais elle tient à sa nature. Cependant, la similitude de couleur ne prouve point la similitude de lumière. En mêlant ensemble plusieurs rayons différemment colorés de l'image solaire décomposée par le prisme, on peut former une couleur semblable à l'une des couleurs simples de cette image; ainsi le mélange du rouge et du jaune homogènes, produit un orangé semblable, en apparence, à l'orangé homogène. Mais la réfraction des rayons du mélange à travers un nouveau prisme, les sépare et fait reparaître les couleurs composantes, tandis que les rayons de l'orangé homogène restent inaltérables.

Les rayons de lumière se réfléchissent à la rencontre d'un miroir, en formant avec la perpendiculaire à sa surface, des angles de réflexion égaux aux angles d'incidence.

Les réfractions et les réflexions que les rayons du soleil subissent dans les gouttes de pluie, donnent naissance à l'arc-en-ciel dont l'explication, fondée sur un calcul rigoureux qui satisfait exactement à tous les détails de ce curieux phénomène, est un des plus beaux résultats de la Physique.

La plupart des corps décomposent la lumière qu'ils reçoivent; ils en absorbent une partie, et réfléchissent l'autre sous toutes les directions: ils paraissent rouges, bleus, verts, etc., suivant les couleurs des rayons qu'ils renvoient. Ainsi la lumière blanche du soleil, en se répandant sur toute la nature, se décompose et réfléchit à nos yeux une infinie variété de couleurs.

Après cette courte digression sur la lumière, je reviens aux réfractions astronomiques. La réfraction de l'air est, au moins à très peu près, indépendante de sa température, et proportionnelle à sa densité. En passant du vide dans l'air à la température de la glace fondante, et sous une pression mesurée par une hauteur barométrique de soixante-seize centimètres, un rayon lumineux se réfracte de manière que le sinus de réfraction est au sinus d'incidence comme l'unité est à 1,000294332 1. Il suffit donc, pour déterminer la route de la lumière à travers l'atmosphère, de connaître la loi de la densité de ses couches; mais cette loi, qui dépend de leur chaleur, est très compliquée, et varie à chaque instant du jour. L'atmosphère étant supposée partout à zéro de température, on a vu que la densité des couches diminue en progression géométrique; et l'on trouve par l'analyse, que la hauteur du baromètre étant de $0^{m},76$, la réfraction est alors de 7391″ à l'horizon. Elle ne serait que de 5630″ si la densité des couches diminuait en progression arithmétique et devenait nulle à la surface. La réfraction horizontale que l'on observe d'environ 6500″, est moyenne entre ces limites. Ainsi la loi de diminution de densité des couches atmosphériques tient à peu près le milieu entre ces progressions. En adoptant une hypothèse qui participe des deux progressions, on parvient à représenter à la fois toutes les observations du baromètre et du thermomètre à mesure que l'on s'élève dans l'atmosphère et les réfractions astronomiques, sans recourir, comme quelques physiciens l'ont fait, à un fluide particulier qui, mêlé à l'air atmosphérique, réfracte la lumière.

Lorsque la hauteur apparente des astres sur l'horizon excède onze degrés, leur réfraction ne dépend sensiblement que de l'état du baromètre et du thermomètre dans le lieu de l'observateur, et elle est à fort peu près proportionnelle à la tangente de la distance apparente de l'astre au zénith, diminuée du produit de trois et un quart par la réfraction correspondante à cette distance, à la température de la glace fondante, et à la hauteur de $0^{m},76$ du baromètre. Il résulte des données précédentes sur la réfraction de la lumière en passant du vide dans l'air, qu'à cette température, et quand la hauteur du baromètre est de soixante-seize centimètres, le coefficient qui, multiplié par cette tangente, donne la réfraction astronomique, est de $187'',24$; et, ce qui est fort remarquable, la comparaison d'un grand nombre d'observations astronomiques, conduit à la même valeur que l'on doit ainsi regarder comme très exacte; mais elle varie comme la densité de l'air. Chaque degré du thermomètre augmente de 0,00375 le volume de ce fluide, pris pour unité à zéro de température; il faut donc diviser le coefficient 187″,24 par l'unité plus le produit de 0,00375 par le nombre des degrés du thermomètre. De plus, la densité de l'air est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle à la hauteur du baromètre; il faut donc multiplier ce coefficient par le rapport de cette hauteur à $0^m,76$, la colonne de mercure étant réduite à zéro de température. On aura, au moyen de ces données, une table de réfraction très précise, depuis onze degrés de hauteur apparente jusqu'au zénith, intervalle dans lequel se font presque toutes les observations astronomiques. Cette table sera indépendante de toute hypothèse sur la diminution de densité des couches atmosphériques, et elle pourra servir au sommet des plus hautes montagnes, comme au niveau des mers. Mais la pesanteur variant avec la hauteur et la latitude, il est clair qu'à la même température, des hauteurs égales du baromètre, n'indiquant point une égale densité dans l'air, cette densité doit être plus petite dans les lieux où la pesanteur est moindre. Ainsi le coefficient 187″,24 déterminé pour le parallèle de 50″, doit, à la surface de la terre, varier comme la pesanteur : il faut ainsi en retrancher le produit de 0",53 par le cosinus du double de la latitude.

La table dont on vient de parler suppose que la constitution de l'atmosphère est partout et dans tous les instans, la même : c'est ce que l'expérience a fait connaître. On sait maintenant que notre air n'est point une substance homogène, et que sur cent parties, il en contient 79 de gaz *azote* et 21 de gaz *oxigène*, gaz éminemment respirable, nécessaire à la combustion des corps et à la respiration des animaux qui n'est qu'une combustion lente, principale source de la chaleur animale : trois ou quatre parties d'acide carbonique sont répandues dans mille d'air atmosphérique. On a soumis à des analyses très précises cet air pris dans toutes les saisons, dans les climats les plus lointains, sur les plus hautes montagnes, et à des hauteurs plus grandes encore : on a trouvé constamment la même proportion des deux gaz azote et oxigène. Une légère enveloppe remplie de gaz hydrogène, le plus rare de tous les fluides élastiques, s'élève avec les corps qui y sont attachés, jusqu'à ce qu'elle rencontre une couche de l'atmosphère assez peu dense pour y demeurer en équilibre. Par ce moyen, dont on doit l'heureuse expérience aux savans français, l'homme a étendu son domaine et sa puissance: il peut s'élancer dans les airs, traverser les nuages et interroger la nature dans les hautes régions de l'atmosphère, auparavant inaccessibles. L'ascension la plus utile aux sciences a été celle de M. Gay-Lussac qui s'est élevé à sept mille seize mètres au-dessus du niveau des mers, hauteur la plus grande à laquelle on soit encore parvenu. Il a mesuré, à cette hauteur, l'intensité de la force magnétique et l'inclinaison de l'aiguille aimantée, qu'il a trouvées les mêmes qu'à la surface de la terre. Au moment de son départ de Paris, vers dix heures du matin, la hauteur du baromètre était de 0^m, 7652, le thermomètre marquait 30°,7, et l'hygromètre à cheveu, 60°. Cinq heures après, à la plus grande élévation, les mêmes instrumens indiquaient 0^m, 3288; — 9°,5 et 33°. Ayant rempli un ballon de l'air de ces couches élevées, il en a fait avec un grand soin l'analyse, et il n'a point reconnu de différence, entre cet air et celui des couches les plus basses de l'atmosphère.

Ce n'est que depuis un demi-siècle environ, que les astronomes ont fait entrer les hauteurs du baromètre et du thermomètre dans les tables de réfraction : l'extrême précision que l'on cherche maintenant à donner aux observations et aux instrumens d'Astronomie, faisait désirer de connaître l'influence de l'humidité de l'air sur sa force réfringente, et s'il est nécessaire d'avoir égard aux indications de l'hygromètre. Pour suppléer aux expériences directes qui manquaient sur cet objet, je suis parti de l'hypothèse que les actions de l'eau et de sa vapeur sur la lumière, sont proportionnelles à leurs densités ; hypothèse d'autant plus vraisemblable, que des changemens dans la constitution des corps, beaucoup plus intimes que la réduction des liquides en vapeurs, n'altèrent point d'une manière sensible le rapport de leur action sur la lumière, à leur densité. Dans cette hypothèse, le pouvoir réfringent de la vapeur aqueuse peut être conclu de la réfraction qu'éprouve un rayon lumineux en passant de l'air dans l'eau, réfraction que l'on a mesurée avec exactitude. On trouve ainsi que ce pouvoir réfringent surpasse celui de l'air réduit à la même densité que la vapeur ; mais à pressions égales, la densité de l'air surpasse celle de la vapeur à peu près dans le même rapport ;

d'où il résulte que la réfraction due à la vapeur aqueuse répandue dans l'atmosphère est à peu près la même que celle de l'air dont elle occupe la place, et qu'ainsi l'effet de l'humidité de l'air sur la réfraction est insensible. M. Biot a confirmé ce résultat par des expériences directes qui montrent de plus que la température n'influe sur la réfraction que par le changement qu'elle produit dans la densité de l'air. Enfin M. Arago, par un moyen aussi précis qu'ingénieux, s'est assuré que l'influence de l'humidité de l'air sur sa réfraction est insensible.

La théorie précédente suppose une atmosphère parfaitement calme, en sorte que la densité de l'air soit partout la même à des hauteurs égales au-dessus du niveau des mers. Mais les vents et les inégalités de température altèrent cette hypothèse et peuvent affecter d'une manière sensible les réfractions. Quelque perfection que l'on donne aux instrumens d'Astronomie, l'effet de ces causes perturbatrices, s'il est remarquable, sera toujours un obstacle à la précision extrême des observations qu'il faudra multiplier considérablement pour le faire disparaître. Heureusement nous sommes certains que cet effet ne peut s'élever qu'à un très petit nombre de secondes (1).

L'atmosphère affaiblit la lumière des astres, surtout à l'horizon où leurs rayons la traversent dans une plus grande étendue. Il suit des expériences de Bouguer, que le baromètre étant à soixante-seize centimètres de hauteur, si l'on prend pour unité l'intensité de la lumière d'un astre à son entrée dans

---

(1) Les recherches des physiciens sur les réfractions astronomiques, offrent un exemple remarquable du danger des hypothèses, quand on les réalise, au lieu de les regarder comme des moyens de soumettre les observations au calcul. Dominique Cassini, pour former une table de réfraction, était parti de la supposition très simple d'une densité constante de l'atmosphère. Cette table fort exacte aux hauteurs, où l'on observe presque toujours les astres, fut adoptée par les astronomes. La tendance naturelle à réaliser les choses dont on fait un usage habituel, fit croire généralement que, conformément à l'hypothèse de Cassini, les réfractions augmentent à mesure que l'on s'élève dans l'atmosphère. Cette croyance subsista jusqu'au moment où Bouguer prouva par un grand nombre d'observations faites à Quito, élevé de 2800 mètres au-dessus du niveau de la mer, que les réfractions, loin d'être augmentées à cette hauteur, y étaient diminuées.

l'atmosphère, son intensité, lorsqu'elle parvient à l'observateur et quand l'astre est au zénith, est réduite à 0,8123. La hauteur de l'atmosphère serait alors de 7945^m, si sa température était à zéro, et si elle était partout également dense. Or, il est naturel de penser que l'extinction d'un rayon de lumière qui la traverse est la même que dans ces hypothèses, puisqu'il rencontre le même nombre de molécules aériennes; ainsi une couche d'air de la densité précédente, et de 7945^m d'épaisseur, réduit à 0,8123 la force de la lumière. Il est facile d'en conclure l'extinction de la lumière dans une couche d'air de même densité et d'une épaisseur quelconque; car il est visible que si l'intensité de la lumière est réduite au quart en traversant une épaisseur donnée, une égale épaisseur réduira ce quart au seizième de la valeur primitive; d'où l'on voit que les épaisseurs croissant en progression arithmétique, l'intensité de la lumière diminue en progression géométrique; ses logarithmes suivent donc le rapport des épaisseurs. Ainsi, pour avoir le logarithme tabulaire de l'intensité de la lumière, lorsqu'elle a traversé une épaisseur quelconque, il faut multiplier — 0,0902835, logarithme tabulaire de 0,8123, par le rapport de cette épaisseur à 7945^m; et si la densité de l'air est plus grande ou plus petite que la précédente, il faut augmenter ou diminuer ce logarithme dans le même rapport.

Pour déterminer l'affaiblissement de la lumière des astres, relatif à leur hauteur apparente, on peut imaginer le rayon lumineux mû dans un canal, et réduire l'air renfermé dans ce canal, à la densité précédente. La longueur de la colonne d'air ainsi réduite, déterminera l'extinction de la lumière de l'astre que l'on considère; or on peut supposer depuis douze degrés de hauteur apparente jusqu'au zénith, la route de la lumière des astres, sensiblement rectiligne, et l'on peut, dans cet intervalle, considérer les couches de l'atmosphère comme étant planes et parallèles; alors l'épaisseur de chaque couche dans la direction du rayon lumineux, est à son épaisseur dans le sens vertical, comme la sécante de la distance apparente de l'astre au zénith, est au rayon. En multipliant donc cette sécante par — 0,0902835, et par le rapport de la hauteur du baromètre, à 0^m,76; en divisant ensuite le produit par l'unité plus 0,00375 multiplié par le nombre des degrés du thermomètre, on aura le logarithme de l'intensité de la lumière de l'astre. Cette règle fort simple donnera l'extinction de la lumière des astres au sommet des montagnes et au niveau des mers; ce qui peut être utile, soit pour corriger les observations des éclipses des satellites de Jupiter, soit pour évaluer l'intensité de la lumière solaire au foyer des verres ardens. Nous devons cependant observer que les vapeurs répandues dans l'air influent considérablement sur l'extinction de la lumière : la sérénité du ciel et la rareté de l'air rendent la lumière des astres plus vive sur les montagnes élevées; et si l'on transportait nos grands télescopes sur le sommet des Cordilières, il n'est pas douteux que l'on découvrirait plusieurs phénomènes célestes qu'une atmosphère plus épaisse et moins transparente rend invisibles dans nos climats.

L'intensité de la lumière des astres, à de très petites hauteurs, dépend, ainsi que leur réfraction, de la densité des couches élevées de l'atmosphère. Si sa température était partout la même, les logarithmes de l'intensité de la lumière seraient proportionnels aux réfractions astronomiques, divisées par les cosinus des hauteurs apparentes; et alors cette intensité à l'horizon serait réduite environ à la quatre-millième partie de sa valeur primitive; c'est pour cela que le soleil, dont on peut difficilement soutenir l'éclat à midi, se voit sans peine à l'horizon.

On peut au moyen de ces données, déterminer l'influence de notre atmosphère dans les éclipses. En réfractant les rayons solaires qui la traversent, elle les infléchit dans le cône d'ombre terrestre; et comme la réfraction horizontale surpasse la demi-somme des parallaxes du soleil et de la lune, le centre du disque lunaire, supposé sur l'axe de ce cône, reçoit des deux côtés de la terre, les rayons d'un même point de la surface du soleil; ce centre serait donc plus éclairé que dans la pleine lune, si l'atmosphère n'éteignait pas en grande partie, la lumière qu'elle lui fait parvenir. Il résulte de l'analyse appliquée aux données précédentes, qu'en prenant pour unité, la lumière de ce point dans la pleine lune; sa lumière est 0,02, dans les éclipses centrales apogées, et seulement 0,0036 ou six fois moindre environ, dans les éclipses centrales périgées. S'il arrive donc alors, par un concours extraordinaire de circonstances, que les vapeurs absorbent une partie considérable de cette faible lumière, quand elle traverse l'atmosphère pour arriver du soleil à la lune; ce dernier astre sera entièrement invisible. L'histoire de l'Astronomie nous offre quelques exemples, quoique très rares, de cette disparition totale de la lune dans ses éclipses. La couleur rouge du soleil et de la lune à l'horizon, nous prouve que l'atmosphère terrestre laisse un plus libre passage aux rayons de cette couleur qui, par cette raison, est celle de la lune éclipsée.

Dans les éclipses de soleil, la lumière réfléchie par l'atmosphère terrestre, diminue l'obscurité qu'elles produisent. Plaçons-nous en effet, sous l'équateur, et supposons les centres du soleil et de la lune à notre zénith. Si la lune étant périgée, le soleil est apogée; on aura à très peu près le cas de l'obscurité la plus profonde, et sa durée sera d'environ cinq minutes et demie. Le diamètre de l'ombre projetée sur la terre, sera vingt-deux millièmes de celui de la terre, et six fois et demie, moindre que le diamètre de la section de l'atmosphère par le plan de l'horizon, du moins, si l'on suppose la hauteur de l'atmosphère, égale à un centième du rayon terrestre, comme on l'a conclu de la durée du crépuscule; et il est très vraisemblable que l'atmosphère nous renvoie encore des rayons sensibles, à de plus grandes hauteurs. On voit donc que le soleil éclaire dans ses éclipses, la plus grande partie de l'atmosphère, qui est au-dessus de l'horizon. Mais elle n'est éclairée que par une portion du disque solaire, croissante à mesure que les molécules atmosphériques s'éloignent du zénith; dans ce cas, les rayons solaires traversant une plus grande étendue de l'atmosphère, pour arriver du soleil à ces molécules, et de là revenir par la réflexion, à l'observateur; ils sont assez affaiblis pour laisser apercevoir les étoiles de première et de seconde grandeur. Leur teinte participant du bleu de ciel et de la rougeur du crépuscule, répand sur tous les objets, une couleur sombre qui jointe à la disparition subite du soleil, remplit les animaux de frayeur.

LIVRE SECOND.

DES MOUVEMENS RÉELS DES CORPS CÉLESTES.

Provehimur portu, terræque urbesque recedunt.
VIRG. *Georg.*, lib. III.

Nous venons d'exposer les principales apparences des mouvemens célestes; et leur comparaison nous a conduits à mettre les planètes en mouvement autour du soleil qui, dans sa révolution autour de la terre, emporte avec lui les foyers de leurs orbites. Mais les apparences seraient les mêmes, si la terre était transportée comme toutes les planètes, autour du soleil : alors cet astre serait, au lieu de la terre, le centre de tous les mouvemens planétaires.

On sent combien il importe aux progrès de l'Astronomie, de connaître lequel de ces deux cas a lieu dans la nature. Guidés par l'induction et par l'analogie, nous allons, en comparant les apparences, déterminer les mouvemens réels qui les produisent, et nous élever aux lois de ces mouvemens.

CHAPITRE PREMIER.

Du mouvement de rotation de la Terre.

En réfléchissant sur le mouvement diurne auquel tous les corps célestes sont assujettis; on reconnaît évidemment l'existence d'une cause générale qui les entraîne ou qui paraît les entraîner autour de l'axe du monde. Si l'on considère que ces corps sont isolés entre eux, et placés loin de la terre, à des distances très différentes; que le soleil et les étoiles en sont beaucoup plus éloignés que la lune, et que les variations des diamètres apparens des planètes, indiquent de grands changemens dans leurs distances; enfin, que les comètes traversent librement le ciel dans tous les sens; il sera très difficile de concevoir qu'une même cause imprime à tous ces corps, un mouvement commun de rotation. Mais les astres se présentant à nous de la même manière, soit que le ciel les entraîne autour de la terre supposée immobile, soit que la terre tourne en sens contraire, sur elle-même, il paraît beaucoup plus naturel d'admettre ce dernier mouvement, et de regarder celui du ciel comme une apparence.

La terre est un globe dont le rayon n'est pas de sept millions de mètres : le soleil est, comme on l'a vu, incomparablement plus gros. Si son centre coïncidait avec celui de la terre, son volume embrasserait l'orbe de la lune, et s'étendrait une fois plus loin, d'où l'on peut juger de son immense grandeur : il est d'ailleurs, éloigné de nous d'environ vingt-trois mille rayons terrestres. N'est-il pas infiniment plus simple de supposer au globe que nous habitons, un mouvement de rotation sur lui-même, que d'imaginer dans une masse aussi considérable et aussi distante que le soleil, le mouvement extrêmement rapide qui lui serait nécessaire pour tourner en un jour, autour de la terre? Quelle force immense ne faudrait-il pas alors pour le contenir et balancer sa force centrifuge? Chaque astre présente des difficultés semblables, qui sont toutes levées par la rotation de la terre.

On a vu précédemment, que le pôle de

l'équateur paraît se mouvoir lentement autour de celui de l'écliptique, et que de là résulte la précession des équinoxes. Si la terre est immobile, le pôle de l'équateur est sans mouvement, puisqu'il répond toujours au même point de la surface terrestre : la sphère céleste se meut donc alors sur les pôles de l'écliptique, et dans ce mouvement elle entraîne tous les astres. Ainsi le système entier de tant de corps si différens par leurs grandeurs, leurs mouvemens et leurs distances, serait encore assujetti à un mouvement général qui disparaît et se réduit à une simple apparence, si l'on suppose l'axe terrestre se mouvoir autour des pôles de l'écliptique.

Entraînés par un mouvement commun à tout ce qui nous environne, nous ressemblons au navigateur que les vents emportent avec son vaisseau sur les mers. Il se croit immobile; et le rivage, les montagnes et tous les objets placés hors du vaisseau, lui paraissent se mouvoir. Mais en comparant l'étendue du rivage et des plaines, et la hauteur des montagnes, à la petitesse de son vaisseau; il reconnaît que leur mouvement n'est qu'une apparence produite par son mouvement réel. Les astres nombreux répandus dans l'espace céleste, sont à notre égard, ce que le rivage et les montagnes sont par rapport au navigateur; et les mêmes raisons par lesquelles il s'assure de la réalité de son mouvement, nous prouvent celui de la terre.

L'analogie vient à l'appui de ces preuves. On a observé des mouvemens de rotation dans presque toutes les planètes, et ces mouvemens sont dirigés d'occident en orient, comme celui que la révolution diurne des astres semble indiquer dans la terre. Jupiter beaucoup plus gros qu'elle, se meut sur son axe, en moins d'un demi-jour : un observateur à sa surface, verrait le ciel tourner autour de lui, dans cet intervalle; ce mouvement du ciel ne serait cependant qu'une apparence. N'est-il pas naturel de penser qu'il en est de même de celui que nous observons sur la terre? Ce qui confirme d'une manière frappante, cette analogie; c'est que la terre, ainsi que Jupiter, est aplatie à ses pôles. On conçoit, en effet, que la force centrifuge qui tend à écarter toutes les parties d'un corps, de son axe de rotation, a dû abaisser la terre aux pôles, et l'élever à l'équateur. Cette force doit encore diminuer la pesanteur à l'équateur terrestre, et cette diminution est constatée par les observations du pendule. Tout nous porte donc à penser que la terre a un mouvement de rotation sur elle-même, et que la révolution diurne du ciel, n'est qu'une illusion produite par ce mouvement, illusion semblable à celle qui nous représente le ciel, comme une voûte bleue à laquelle tous les astres sont attachés, et la surface de la terre, comme un plan sur lequel il s'appuie. Ainsi, l'Astronomie s'est élevée à travers les illusions des sens; et ce n'a été qu'après les avoir dissipées par un grand nombre d'observations et de calculs, que l'homme enfin a reconnu les mouvemens du globe qu'il habite, et sa vraie position dans l'univers.

CHAPITRE II.

Du mouvement de la Terre, autour du Soleil.

Maintenant, puisque la révolution diurne du ciel n'est qu'une illusion produite par la rotation de la terre; il est naturel de penser que la révolution annuelle du soleil emportant avec lui toutes les planètes, n'est pareillement qu'une illusion due au mouvement de translation de la terre autour du soleil. Les considérations suivantes ne laissent aucun doute à cet égard.

Les masses du soleil et de plusieurs planètes, sont considérablement plus grandes que celle de la terre; il est donc beaucoup plus simple de faire mouvoir celle-ci autour du soleil, que de mettre en mouvement autour d'elle, tout le système solaire. Quelle complication dans les mouvemens célestes, entraîne l'immobilité de la terre! Quel mouvement rapide il faut supposer alors à Jupiter, à Saturne près de dix fois plus éloigné que le soleil, à la planète Uranus plus distante encore, pour les faire mouvoir, chaque année, autour de nous, tandis qu'ils se meuvent autour du soleil! Cette complication et cette rapidité de mouvemens disparaissent par le mouvement de translation de la terre, mouvement conforme à la loi générale suivant laquelle les petits corps célestes circulent autour des grands corps dont ils sont voisins.

L'analogie de la terre avec les planètes, confirme ce mouvement. Ainsi que Jupiter, elle tourne sur elle-même, et elle est accompagnée d'un satellite. Un observateur à la surface de Jupiter, jugerait le système solaire en mouvement autour de lui; et la grosseur de la planète rendrait cette illusion moins invraisemblable que pour la terre. N'est-il pas naturel de penser que le mouvement de ce système autour de nous, n'est semblablement qu'une apparence?

Transportons-nous par la pensée, à la surface du soleil, et de là contemplons la terre et les planètes. Tous ces corps nous paraîtront se mouvoir d'occident en orient, et déjà cette identité de direction est un indice du mouvement de la terre; mais ce qui le démontre avec évidence, c'est la loi qui existe entre les temps des révolutions des planètes, et leurs distances au soleil. Elles circulent autour de lui avec d'autant plus de lenteur, qu'elles en sont plus éloignées; de manière que les carrés des temps de leurs révolutions sont comme les cubes de leurs moyennes distances à cet astre. Suivant cette loi remarquable, la durée de la révolution de la terre supposée en mouvement autour du soleil, doit être exactement celle de l'année sidérale. N'est-ce pas une preuve incontestable que la terre se meut comme toutes les planètes, et qu'elle est assujettie aux mêmes lois? D'ailleurs ne serait-il pas bizarre de supposer le globe terrestre, à peine sensible vu du soleil, immobile au milieu des planètes en mouvement autour de cet astre qui, lui-même serait emporté avec elles autour de la terre? La force, qui pour retenir les planètes dans leurs orbes respectifs autour du soleil, balance leur force centrifuge, ne doit-elle pas agir également sur la terre, et ne faut-il pas que la terre oppose à cette action, la même force centrifuge? Ainsi la considération des mouvemens planétaires observés du soleil, ne laisse aucun doute sur le mouvement réel de la terre. Mais l'observateur placé sur elle, a de plus, une preuve sensible de ce mouvement, dans le phénomène de l'aberration qui en est une suite nécessaire : c'est ce que nous allons développer.

Sur la fin du dernier siècle, Roëmer observa que les éclipses des satellites de Jupiter avancent vers les oppositions de cette planète, et retardent vers ses conjonctions, ce qui lui fit soupçonner que la lumière ne se transmet pas dans le même instant de ces astres à la terre, et qu'elle emploie un intervalle de temps sensible à parcourir le diamètre de l'orbe du soleil. En effet, Jupiter dans ses oppositions, étant plus près de nous que dans ses conjonctions, d'une quantité égale à ce diamètre ; les éclipses doivent arriver pour nous plus tôt dans le premier cas que dans le second, de tout le temps que la lumière met à traverser l'orbe solaire. La loi des retards observés de ces éclipses répond si exactement à cette hypothèse, qu'il n'est pas possible de s'y refuser. Il en résulte que la lumière emploie 571″ à venir du soleil à la terre.

Présentement, un observateur immobile verrait les astres suivant la direction de leurs rayons ; mais il n'en est pas ainsi, dans la supposition où il se meut avec la terre. Pour ramener ce cas à celui de l'observateur en repos, il suffit de transporter en sens contraire aux astres, à leur lumière, et à l'observateur lui-même, le mouvement dont il est animé, ce qui ne change point la position apparente des astres; car c'est une loi générale d'Optique, que si l'on imprime un mouvement commun à tous les corps d'un système, il n'en résulte aucun changement dans leur situation apparente. Concevons donc qu'au moment où un rayon lumineux va pénétrer dans l'atmosphère terrestre, on lui donne, ainsi qu'à l'air et à la terre, un mouvement égal et contraire à celui de l'observateur, et voyons quels phénomènes ce mouvement doit produire dans la position apparente de l'astre dont le rayon émane. On peut faire abstraction du mouvement de rotation de la terre, environ soixante fois moindre à l'équateur même, que celui de la terre autour du soleil: on peut encore supposer ici sans erreur sensible, tous les rayons lumineux que chaque point du disque d'un astre nous envoie, parallèles entre eux et au rayon qui parviendrait du centre de l'astre à celui de la terre si elle était transparente. Ainsi les phénomènes que les astres présenteraient à un observateur placé à ce dernier centre, et qui dépendent du mouvement de la lumière, combiné avec celui de la terre, sont à très peu près les mêmes pour tous les observateurs répandus sur sa surface. Enfin, nous ferons abstraction de la petite excentricité de l'orbe terrestre. Cela posé :

Dans l'intervalle de 571″, que la lumière emploie à parcourir le rayon de l'orbe terrestre, la terre décrit un petit arc de cet orbe, égal à 62″,5; or il suit des lois de la composition des mouvemens, que si par le centre d'une étoile, on imagine une petite circonférence parallèle à l'écliptique, et dont le diamètre soutende dans le ciel, un arc de 125″; la direction du mouvement de la lumière, lorsqu'on le compose avec le mouvement de la terre, appliqué en sens contraire, rencontre cette circonférence, au point où elle est coupée par un plan mené par les centres de l'étoile et de la terre, tangentiellement à l'orbe terrestre; l'étoile doit donc paraître se mouvoir sur cette circonférence, et la décrire, chaque année, de manière qu'elle y soit constamment moins avancée de cent degrés, que le soleil dans son orbite apparente.

Ce phénomène est exactement celui que nous avons expliqué dans l'onzième chapitre du premier livre, d'après les observations de Bradley à qui l'on doit sa découverte et celle de sa cause. Pour rapporter les étoiles à leur vraie position, il suffit de les placer au centre de la petite circonférence qu'elles nous semblent décrire; leur mouvement annuel n'est donc qu'une illusion produite par la combinaison du mouvement de la lumière avec celui de la terre. Ses rapports avec la position du soleil, pouvaient faire soupçonner qu'il n'est qu'apparent; mais l'explication précédente le prouve avec évidence. Elle fournit en même temps, une démonstration sensible du mouvement de la terre autour du soleil; de même que l'accroissement des degrés et de la pesanteur, en allant de l'équateur aux pôles, rend sensible son mouvement de rotation.

L'aberration de la lumière affecte les positions du soleil, des planètes, des satellites et des comètes; mais d'une manière différente, à raison de leurs mouvemens particuliers.

Pour les en dépouiller, et pour avoir la vraie position des astres; imprimons à chaque instant à tous les corps, un mouvement égal et contraire à celui de la terre qui par là devient immobile; ce qui, comme nous l'avons dit, ne change ni leurs positions respectives, ni leurs apparences. Alors il est visible qu'un astre, au moment où nous l'observons, n'est plus sur la direction du rayon lumineux qui vient frapper notre vue; il s'en est éloigné en vertu de son mouvement réel combiné avec celui de la terre, qu'on lui suppose transporté en sens contraire. La combinaison de ces deux mouvemens, observée de la terre, forme le mouvement apparent que l'on nomme *mouvement géocentrique*. On aura donc la véritable position de l'astre, en ajoutant à sa longitude et à sa latitude géocentriques observées, son mouvement géocentrique en longitude et en latitude, dans l'intervalle de temps, que la lumière emploie à parvenir de l'astre à la terre. Ainsi, le centre du soleil nous paraît constamment moins avancé de $62'',5$ dans son orbe, que si la lumière nous parvenait dans un instant.

L'aberration change les rapports apparens des phénomènes célestes soit avec l'espace, soit avec la durée. Au moment où nous les voyons encore, ils ne sont déjà plus : il y a vingt-cinq ou trente minutes, que les satellites de Jupiter ont cessé d'être éclipsés, quand nous apercevons la fin de leurs éclipses ; et les variations des étoiles changeantes précèdent de plusieurs années, les instans de leurs observations. Mais toutes ces causes d'illusion étant bien connues, nous pouvons toujours rapporter les phénomènes du système solaire, à leur vrai lieu et à leur véritable époque.

La considération des mouvemens célestes nous conduit donc à déplacer la terre, du centre du monde, où nous la supposions, trompés par les apparences et par le penchant qui porte l'homme à se regarder comme le principal objet de la nature. Le globe qu'il habite, est une planète en mouvement sur elle-même et autour du soleil. En l'envisageant sous cet aspect, tous les phénomènes s'expliquent de la manière la plus simple ; les lois des mouvemens célestes sont uniformes ; toutes les analogies sont observées. Ainsi que Jupiter, Saturne et Uranus, la terre est accompagnée d'un satellite : elle tourne sur elle-même, comme Vénus, Mars, Jupiter, Saturne et probablement toutes les autres planètes : elle emprunte comme elles sa lumière du soleil, et se meut autour de lui, dans le même sens et suivant les mêmes lois. Enfin, la pensée du mouvement de la terre, réunit en sa faveur, la simplicité, l'analogie, et généralement tout ce qui caractérise le vrai système de la nature. Nous verrons en la suivant dans ses conséquences, les phénomènes célestes ramenés jusque dans leurs plus petits détails, à une seule loi dont ils sont les développemens nécessaires. Le mouvement de la terre acquerra ainsi toute la certitude dont les vérités physiques sont susceptibles, et qui peut résulter, soit du grand nombre et de la variété des phénomènes expliqués, soit de la simplicité des lois dont on les fait dépendre. Aucune branche des sciences naturelles, ne réunit à un plus haut degré ces avantages, que la théorie du système du monde, fondée sur le mouvement de la terre.

Ce mouvement agrandit l'univers à nos yeux : il nous donne pour mesurer les distances des corps célestes, une base immense, le diamètre de l'orbe terrestre. C'est par son moyen, que l'on a exactement déterminé les dimensions des orbes planétaires. Ainsi le mouvement de la terre, qui par les illusions dont il est cause, a pendant long-temps, retardé la connaissance des mouvemens réels des planètes, nous les a fait connaître ensuite avec plus de précision, que si nous eussions été placés au foyer de ces mouvemens. Cependant, la parallaxe annuelle des étoiles, ou l'angle sous lequel on verrait de leur centre, le diamètre de l'orbe terrestre, est insensible et ne s'élève pas à six secondes, même relativement aux étoiles qui par leur vif éclat, semblent être le plus près de la terre, elles en sont donc au moins deux cent mille fois plus éloignées que le soleil. Une aussi prodigieuse distance jointe à leur vive clarté, nous prouve évidemment qu'elles n'empruntent point, comme les planètes et les satellites, leur lumière, du soleil; mais qu'elles brillent de leur propre lumière; en sorte qu'elles sont autant de soleils répandus dans l'immensité de l'espace, et qui semblables au nôtre, peuvent être les foyers d'autant de systèmes planétaires. Il suffit, en effet, de nous placer sur le plus voisin de ces astres, pour ne voir le soleil, que comme un astre lumineux dont le diamètre apparent serait au-dessous d'un trentième de seconde.

Il résulte de l'immense distance des étoiles, que leurs mouvemens en ascension droite et en déclinaison, ne sont que des apparences produites par le mouvement de l'axe de rotation de la terre. Mais quelques étoiles paraissent avoir des mouvemens propres, et il est vraisemblable qu'elles sont toutes en mouvement, ainsi que le soleil qui transporte avec lui dans l'espace, le système entier des planètes et des comètes; de même que chaque planète entraîne ses satellites dans son mouvement autour du soleil.

CHAPITRE III.

Des apparences dues au mouvement de la Terre.

Du point de vue où la comparaison des phénomènes célestes vient de nous placer, considérons les astres, et montrons la parfaite identité de leurs apparences, avec celles que l'on observe. Soit que le ciel tourne autour de l'axe du monde, soit que la terre tourne sur elle-même, en sens contraire du mouvement apparent du ciel immobile ; il est clair que tous les astres se présenteront à nous de la même manière. Il n'y a de différence, qu'en ce que dans le premier cas, ils viendraient se placer successivement au-dessus des divers méridiens terrestres qui, dans le second cas, vont se placer au-dessous d'eux.

Le mouvement de la terre étant commun à tous les corps situés à sa surface, et aux fluides qui les recouvrent; leurs mouvemens relatifs sont les mêmes que si la terre était immobile. Ainsi, dans un vaisseau transporté d'un mouvement uniforme, tout se meut comme s'il était en repos : un projectile lancé verticalement de bas en haut, retombe au point d'où il était parti : il paraît sur le vaisseau, décrire une verticale; mais vu du rivage, il se meut obliquement à l'horizon et décrit une courbe parabolique. Cependant, la vitesse réelle due à la rotation de la terre, étant un peu moindre au pied, qu'au sommet d'une tour élevée; si de ce sommet, on abandonne un corps à sa pesanteur; on conçoit qu'en vertu de l'excès de sa vitesse réelle de rotation sur celle du pied de la tour, il ne doit pas tomber exactement au point où le fil-à-plomb qui part du sommet de la tour, va rencontrer la surface de la terre, mais un peu à l'est de ce point. L'analyse fait voir qu'en effet, son écart de ce point, n'a lieu que vers l'est, qu'il est proportionnel à la racine carrée du cube de la hauteur de la tour, et au cosinus de la latitude, et qu'à l'équateur, il est de 21$^{\text{mi.}}$,952 pour cent mètres de hauteur. On peut donc par des expériences très précises sur la chute des corps, rendre sensible, le mouvement de rotation de la terre. Celles que l'on a déjà faites dans cette vue, en Allemagne et en Italie, s'accordent assez bien avec les résultats précédens, mais ces expériences qui exigent des attentions très délicates, ont besoin d'être répétées avec plus d'exactitude encore. La rotation de la terre se manifeste à sa surface, principalement par les effets de la force centrifuge qui aplatit le sphéroïde terrestre aux pôles, et diminue la pesanteur à l'équateur, deux phénomènes que les mesures du pendule et des degrés des méridiens, nous ont fait connaître.

Dans la révolution de la terre autour du soleil, son centre et tous les points de son axe de rotation étant mus avec des vitesses égales et parallèles, cet axe reste toujours parallèle à lui-même : en imprimant à chaque instant, aux corps célestes, et à toutes les parties de la terre, un mouvement égal et contraire à celui de son centre, ce point restera immobile, ainsi que l'axe de rotation; mais ce mouvement imprimé ne change point les apparences de celui du soleil; il ne fait que transporter à cet astre, en sens contraire, le mouvement réel de la terre; les apparences sont par conséquent les mêmes dans l'hypothèse de la terre en repos, et dans celle de son mouvement autour du soleil. Pour suivre plus particulièrement l'identité de ces apparences; imaginons un rayon mené du centre du soleil à celui de la terre : ce rayon est perpendiculaire au plan qui sépare l'hémisphère éclairé de la terre, de son hémisphère obscur: le point dans lequel il traverse la surface de la terre, a le soleil verticalement au-dessus de lui, et tous les points du parallèle terrestre que ce rayon rencontre successivement en vertu du mouvement diurne, ont à midi, cet astre au zénith. Or, soit que le soleil se meuve autour de la terre, soit que la terre se meuve autour du soleil et sur elle-même, son axe de rotation conservant toujours une situation parallèle; il est visible que ce rayon trace la même courbe sur la surface de la terre : il coupe dans les deux cas, les mêmes parallèles terrestres, lorsque le soleil a la même longitude apparente; cet astre s'élève donc également à midi sur l'horizon, et les jours correspondans sont d'une égale durée. Ainsi, les saisons et les jours sont les mêmes dans l'hypothèse du repos du soleil, et dans celle de son mouvement autour de la terre; et l'explication des saisons que nous avons donnée dans le livre précédent, s'applique également à la première hypothèse.

Les planètes se meuvent toutes dans le même sens autour du soleil, mais avec des vitesses différentes : les durées de leurs révolutions croissent dans un plus grand rapport, que leurs distances à cet astre : Jupiter, par exemple, emploie douze années, à peu près, à parcourir son orbe dont le rayon n'est qu'environ cinq fois plus grand que celui de l'orbe terrestre; sa vitesse réelle est donc moindre que celle de la terre. Cette diminution de vitesse dans les planètes, à mesure qu'elles sont plus distantes du soleil, a généralement lieu depuis Mercure, la plus voisine de cet astre, jusqu'à Uranus, la plus éloignée; et il résulte des lois que nous établirons bientôt, que les vitesses moyennes des planètes, sont réciproques aux racines carrées de leurs moyennes distances au soleil.

Considérons une planète dont l'orbe est embrassé par celui de la terre, et suivons-la depuis sa conjonction supérieure jusqu'à sa conjonction inférieure. Son mouvement apparent ou géocentrique est le résultat de son mouvement réel combiné avec celui de la terre, transporté en sens contraire. Dans la conjonction supérieure, le mouvement réel de la planète est contraire à celui de la terre, son mouvement géocentrique est donc alors la somme de ces deux mouvemens, et il a la même direction que le mouvement géocentrique du soleil, qui résulte du mouvement de la terre, transporté en sens contraire à cet astre; ainsi le mouvement apparent de la planète est direct. Dans la conjonction inférieure, le mouvement de la planète a la même direction que celui de la terre, et comme il est plus grand, le mouvement géocentrique conserve la même direction qui, par conséquent, est contraire au mouvement apparent du soleil; la planète est donc alors rétrograde. On conçoit facilement que dans le passage du mouvement direct au mouvement rétrograde, elle doit paraître sans mouvement ou stationnaire, et que cela doit avoir lieu entre la plus grande élongation et la conjonction inférieure, quand le mouvement géocentrique de la planète, résultant de son mouvement réel et de celui de la terre, appliqué en sens contraire, est dirigé suivant le rayon visuel de la planète. Ces phénomènes sont entièrement conformes aux mouvemens observés de Mercure et de Vénus.

Le mouvement des planètes dont les orbes embrassent l'orbe terrestre, a la même direction dans leurs oppositions, que le mouvement de la terre; mais il est plus petit, et en composant avec ce dernier mouvement transporté en sens contraire, il prend une direction opposée à sa direction primitive; le mouvement géocentrique de ces planètes est donc alors rétrograde : il est direct dans leurs conjonctions, ainsi que les mouvemens de Mercure et de Vénus dans leurs conjonctions supérieures.

En transportant en sens contraire, aux étoiles, le mouvement de la terre; elles doivent paraître décrire chaque année, une circonférence égale et parallèle à l'orbe terrestre, et dont le diamètre soutend dans le ciel, un angle égal à celui sous lequel on verrait de leur centre, le diamètre de cet orbe. Ce mouvement apparent a beaucoup de rapport avec celui qui résulte de la combinaison des mouvemens de la terre et de la lumière, et par lequel les étoiles nous semblent décrire annuellement une circonférence parallèle à l'écliptique, dont le diamètre soutend un arc de 125″; mais il en diffère en ce que les astres ont la même position que le soleil, sur la première circonférence, au lieu que sur la seconde, ils sont moins avancés que lui, de cent degrés. C'est par là que l'on peut distinguer ces deux mouvemens, et que l'on s'est assuré que le premier est au moins extrêmement petit; l'immense distance où nous sommes des étoiles, rendant presque insensible, l'angle que soutend le diamètre de l'orbe terrestre, vu de cette distance.

L'axe du monde n'étant que le prolongement de l'axe de rotation de la terre, on doit rapporter à ce dernier axe, le mouvement des pôles de l'équateur céleste, indiqué par les phénomènes de la précession et de la nutation, exposés dans le chapitre XIII du premier livre. Ainsi, en même temps que la terre se meut sur elle-même et autour du soleil, son axe de rotation se meut très lentement autour des pôles de l'écliptique, en faisant de très petites oscillations dont la période est la même que celle du mouvement des nœuds de l'orbe lunaire. Au reste, ce mouvement n'est point particulier à la terre; car on a vu dans le chapitre IV du premier livre, que l'axe de la lune se meut dans la même période, autour des pôles de l'écliptique.

CHAPITRE IV.

Des lois du mouvement des planètes autour du Soleil, et de la figure de leurs orbites.

Rien ne serait plus facile que de calculer d'après les données précédentes, la position des planètes pour un instant quelconque, si leurs mouvemens autour du soleil étaient circulaires et uniformes; mais ils sont assujettis à des inégalités très sensibles dont les lois sont un des plus importans objets de l'Astronomie, et le seul fil qui puisse nous conduire au principe général des mouvemens célestes. Pour reconnaître ces lois, dans les apparences que nous offrent les planètes; il faut dépouiller leurs mouvemens, des effets du mouvement de la terre, et rapporter au soleil, leur position observée des divers points de l'orbe terrestre; il est donc nécessaire avant tout, de déterminer les dimensions de cet orbe, et la loi du mouvement de la terre.

On a vu dans le chapitre II du premier livre, que l'orbe apparent du soleil est une ellipse dont le centre de la terre occupe un des foyers; mais le soleil étant réellement immobile, il faut le mettre au foyer de l'ellipse, et placer la terre sur sa circonférence : le mouvement du soleil sera le même, et pour avoir la position de la terre, vue du centre du soleil, il suffira d'augmenter de deux angles droits, la position de cet astre.

On a vu encore que le soleil paraît se mouvoir dans son orbe, de manière que le rayon vecteur qui joint son centre à celui de la terre, trace autour d'elle, des aires proportionnelles aux temps; mais dans la réalité, ces aires sont tracées autour du soleil. En général, tout ce que nous avons dit dans le chapitre cité, sur l'excentricité de l'orbe solaire et ses variations, sur la position et le mouvement de son périgée, doit s'appliquer à l'orbe terrestre, en observant seulement que le périgée de la terre, est à deux angles droits de distance, de celui du soleil.

La figure de l'orbe terrestre étant ainsi connue, voyons comme on a pu déterminer celles de tous les orbes planétaires. Prenons pour exemple, la planète Mars qui par la grande excentricité de son orbe, et par sa proximité de la terre, est très propre à nous faire découvrir les lois du mouvement des planètes.

L'orbe de Mars et son mouvement autour du soleil, seraient connus, si l'on avait pour un instant quelconque, l'angle que fait son rayon vecteur, avec une droite invariable passant par le centre du soleil, et la longueur de ce rayon. Pour simplifier ce problème, on choisit les positions de Mars, dans lesquelles l'une de ces quantités se montre séparément; et c'est ce qui a lieu à fort peu près dans les oppositions, où l'on voit cette planète répondre au même point de l'écliptique, auquel on la rapporterait du centre du soleil. La différence des mouvemens de Mars et de la terre, fait correspondre la planète à divers points du ciel, dans ses oppositions successives; en comparant donc entre elles un grand nombre d'oppositions observées, on pourra découvrir la loi qui existe entre le temps et le mouvement angulaire de Mars autour du soleil, mouvement que l'on nomme *héliocentrique*. L'analyse offre pour cet objet, diverses méthodes qui se simplifient dans le cas présent, par la considération que les principales inégalités de Mars, redevenant les mêmes à chacune de ses révolutions sidérales; leur ensemble peut être exprimé par une série fort convergente de sinus d'angles multiples de son mouvement, série dont il est facile de déterminer les coefficiens, au moyen de quelques observations choisies.

On aura ensuite la loi du rayon vecteur de Mars, en comparant les observations de cette planète vers ses quadratures où ce rayon se présente sous le plus grand angle. Dans le triangle formé par les droites qui joignent les centres de la terre, du soleil et de Mars, l'observation donne directement l'angle à la terre; la loi du mouvement héliocentrique de Mars donne l'angle au soleil, et l'on conclut le rayon vecteur de Mars, en parties de celui de la terre, qui lui-même est donné en parties de la distance moyenne de la terre au soleil. La comparaison d'un grand nombre de rayons vecteurs ainsi déterminés, fera connaître la loi de leurs variations correspondantes aux angles qu'ils forment avec une droite invariable, et l'on pourra tracer la figure de l'orbite.

Ce fut par une méthode à peu près semblable, que Képler reconnut l'allongement de l'orbe de Mars : il eut l'heureuse idée de comparer sa figure avec celle de l'ellipse, en plaçant le soleil à l'un des foyers ; et les observations de Ticho, exactement représentées dans l'hypothèse d'un orbe elliptique, ne lui laissèrent aucun doute sur la vérité de cette hypothèse.

On nomme *périhélie*, l'extrémité du grand axe, la plus voisine du soleil; et *aphélie*, l'extrémité la plus éloignée. C'est au périhélie, que la vitesse angulaire de Mars autour du soleil est la plus grande : elle diminue ensuite à mesure que le rayon vecteur augmente, et elle est la plus petite à l'aphélie. En comparant cette vitesse aux puissances du rayon vecteur; on trouve qu'elle est réciproque à son carré, en sorte que le produit du mouvement journalier héliocentrique de Mars, par le carré de son rayon vecteur, est toujours le même. Ce produit est le double du petit secteur que ce rayon trace, chaque jour, autour du soleil : l'aire qu'il décrit en partant d'une ligne invariable passant par le centre du soleil, croît donc comme le nombre des jours écoulés depuis l'époque où la planète était sur cette ligne; ainsi les aires décrites par le rayon vecteur de Mars, sont proportionnelles aux temps.

Ces lois du mouvement de Mars, découvertes par Képler, étant les mêmes que celles du mouvement apparent du soleil, développées dans le chapitre II du premier livre; elles ont également lieu pour la terre. Il était naturel de les étendre aux autres planètes; Képler établit donc comme lois fondamentales du mouvement de ces corps, les deux suivantes que toutes les observations ont confirmées.

Les orbes des planètes sont des ellipses dont le centre du soleil occupe un des foyers.

Les aires décrites autour de ce centre, par les rayons vecteurs des planètes, sont proportionnelles aux temps employés à les décrire.

Ces lois suffisent pour déterminer le mouvement des planètes autour du soleil; mais il est nécessaire de connaître pour chacune d'elles, sept quantités que l'on nomme *élémens du mouvement elliptique*. Cinq de ces élémens relatifs au mouvement dans l'ellipse, sont, 1°. la durée de la révolution sidérale; 2°. le demi-grand axe de l'orbite, ou la moyenne distance de la planète au soleil;

3°. l'excentricité, d'où résulte la plus grande équation du centre; 4°. la longitude moyenne de la planète à une époque donnée; 5°. la longitude du périhélie à la même époque. Les deux autres élémens se rapportent à la position de l'orbite et sont, 1°. la longitude à une époque donnée, des nœuds de l'orbite, ou de ses points d'intersection avec un plan que l'on suppose ordinairement être celui de l'écliptique; 2°. l'inclinaison de l'orbite sur ce plan. Il y a donc quarante-neuf élémens à déterminer, pour les sept planètes connues avant le siècle actuel. Le tableau suivant présente tous ces élémens pour le premier instant de ce siècle, c'est-à-dire pour le premier janvier 1801, à minuit, temps moyen à Paris.

L'examen de ce tableau nous montre que les durées des révolutions des planètes croissent avec leurs moyennes distances au soleil. Képler chercha pendant long-temps, un rapport entre ces durées et ces distances : après un grand nombre de tentatives continuées pendant dix-sept ans, il reconnut enfin, que les carrés des temps des révolutions des planètes, sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.

Telles sont les lois du mouvement des planètes, lois fondamentales qui donnant une face nouvelle à l'Astronomie, ont conduit à la découverte de la pesanteur universelle.

Les ellipses planétaires ne sont point inaltérables : leurs grands axes paraissent être toujours les mêmes ; mais leurs excentricités, leurs inclinaisons sur un plan fixe, les positions de leurs nœuds et de leurs périhélies, sont assujetties à des variations qui jusqu'à présent, semblent croître proportionnellement aux temps. Ces variations ne devenant bien sensibles que par la suite des siècles, elles ont été nommées *inégalités séculaires*. Il n'y a aucun doute sur leur existence ; mais les observations modernes ne sont pas assez éloignées entre elles, et les observations anciennes ne sont pas suffisamment exactes pour les fixer avec précision.

On remarque encore des inégalités périodiques qui troublent les mouvemens elliptiques des planètes. Celui de la terre en est un peu altéré ; car on a vu précédemment que le mouvement elliptique apparent du soleil paraît l'être. Mais ces inégalités sont principalement sensibles dans les deux plus grosses planètes, Jupiter et Saturne. En comparant les observations modernes aux anciennes, les astronomes ont remarqué une diminution dans la durée de la révolution de Jupiter, et un accroissement dans celle de la révolution de Saturne. Les observations modernes comparées entre elles, donnent un résultat contraire; ce qui semble indiquer dans le mouvement de ces planètes, de grandes inégalités dont les périodes sont fort longues. Dans le siècle précédent, la durée de la révolution de Saturne a paru différente suivant les points de l'orbite d'où l'on a compté le départ de la planète: ses retours ont été plus rapides à l'équinoxe du printemps, qu'à celui d'automne. Enfin, Jupiter et Saturne éprouvent des inégalités qui s'élèvent à plusieurs minutes, et qui paraissent dépendre de la situation de ces planètes, soit entre elles, soit à l'égard de leurs périhélies. Ainsi, tout annonce que dans le système planétaire, indépendamment de la cause principale qui fait mouvoir les planètes dans des orbes elliptiques autour du soleil; il existe des causes particulières qui troublent leurs mouvemens, et qui altèrent à la longue, les élémens de leurs ellipses.

TABLEAU

DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE DES PLANÈTES.

Durées de leurs révolutions sidérales.

Mercure...........	87jours,9692580
Vénus.............	224 ,7007869
La Terre...........	365 ,2563835
Mars..............	686 ,9796458
Jupiter............	4332 ,5848212
Saturne...........	10759 ,2198174
Uranus............	30686 ,8208296

Demi-grands axes des orbites, ou distances moyennes.

Mercure................	0,3870981
Vénus..................	0,7233316
La Terre................	1,0000000
Mars...................	1,5236923
Jupiter.................	5,202776
Saturne................	9,5387861
Uranus.................	19,182390

Rapport de l'excentricité au demi-grand axe au commencement de 1801.

Mercure................	0,20551494
Vénus..................	0,00686074

La Terre	0,0168318
Mars	0,0933070
Jupiter	0,0481621
Saturne	0,0561505
Uranus	0,0466108

Longitude moyenne pour le minuit qui sépare le 31 décembre 1800, et le premier janvier 1801, temps moyen à Paris.

Mercure	182°,15647
Vénus	11 ,93259
La Terre	111 ,28179
Mars	71 ,24071
Jupiter	124 ,68251
Saturne	150 ,35354
Uranus	197 ,55589

Longitude moyenne du périhélie, à la même époque.

Mercure	82°,6256
Vénus	143 ,0349
La Terre	110 ,5571
Mars	369 ,3323
Jupiter	12 ,3810
Saturne	99 ,0647
Uranus	186 ,1500.

Inclinaison de l'orbite à l'écliptique au commencement de 1801.

Mercure	7°,78058
Vénus	3 ,76807
La Terre	0 ,00000
Mars	2 ,05746
Jupiter	1 ,46029
Saturne	2 ,77029
Uranus	0 ,86063

Longitude du nœud ascendant au commencement de 1801.

Mercure	51°,0651
Vénus	83 ,2262
La Terre	0 ,0000
Mars	53 ,3344
Jupiter	109 ,3762
Saturne	124 ,3819
Uranus	81 ,1035

On ne peut pas encore avoir avec précision, les élémens des orbites des quatre petites planètes nouvellement découvertes: le temps depuis lequel on les observe, est trop court: d'ailleurs les perturbations considérables qu'elles éprouvent, n'ont pas encore été déterminées. Voici les élémens elliptiques qui jusqu'à présent satisfont aux observations, mais que l'on ne doit regarder que comme une première ébauche de la théorie de ces planètes.

Durées des révolutions sidérales.

Cérès	1681 jours,3931
Pallas	1686 ,5388
Junon	1592 ,6608
Vesta	1325 ,7431

Demi-grands axes des orbites.

Cérès	2,767245
Pallas	2,772886
Junon	2,669009
Vesta	2,36787

Rapport de l'excentricité au demi-grand axe.

Cérès	0,078439
Pallas	0,241648
Junon	0,257848
Vesta	0,089130

Longitude moyenne à minuit, commencement de 1820.

Cérès.....................	136°,8461
Pallas.....................	120 ,3422
Junon.....................	222 ,3989
Vesta.....................	309 ,2917

Longitude du périhélie, à la même époque.

Cérès.....................	163°,4727
Pallas.....................	134 ,5754
Junon.....................	59 ,5142
Vesta.....................	277 ,2853

Inclinaison de l'orbite à l'écliptique.

Cérès.....................	11°,8044
Pallas.....................	38 ,4244
Junon.....................	14 ,5215
Vesta.....................	7 ,9287

Longitude du nœud ascendant au commencement de 1810.

Cérès.....................	87°,6557
Pallas.....................	191 ,8416
Junon.....................	190 ,1421
Vesta.....................	114 ,6908

CHAPITRE V.

De la figure des orbites des comètes, et des lois de leur mouvement autour du Soleil.

Le soleil étant au foyer des orbes planétaires, il est naturel de le supposer pareillement au foyer des orbes des comètes. Mais ces astres disparaissant après s'être montrés pendant quelques mois au plus; leurs orbes, au lieu d'être presque circulaires comme ceux des planètes, sont très allongés, et le soleil est fort voisin de la partie dans laquelle ils sont visibles. L'ellipse, au moyen des nuances qu'elle présente depuis le cercle jusqu'à la parabole, peut représenter ces orbes divers; l'analogie nous porte donc à mettre les comètes en mouvement dans des ellipses dont le soleil occupe un des foyers, et à les y faire mouvoir suivant les mêmes lois que les planètes, en sorte que les aires tracées par leurs rayons vecteurs, soient proportionnelles aux temps.

Il est presque impossible de connaître la durée de la révolution d'une comète, et par conséquent le grand axe de son orbe, par les observations d'une seule de ses apparitions; on ne peut donc pas alors déterminer rigoureusement l'aire que trace son rayon vecteur dans un temps donné. Mais on doit considérer que la petite portion d'ellipse, décrite par la comète pendant son apparition, peut se confondre avec une parabole, et qu'ainsi l'on peut calculer son mouvement dans cet intervalle, comme s'il était parabolique.

Suivant les lois de Képler, les secteurs tracés dans le même temps par les rayons vecteurs de deux planètes, sont entre eux comme les surfaces de leurs ellipses, divisés par les temps de leurs révolutions; et les carrés de ces temps sont comme les cubes des demi-grands axes. Il est facile d'en conclure que si l'on imagine une planète mue dans un orbe circulaire dont le rayon soit égal à la distance périhélie d'une comète; le secteur décrit par le rayon vecteur de la comète, sera au secteur correspondant décrit par le rayon vecteur de la planète, dans le rapport de la racine carrée de la distance aphélie de la comète, à la racine carrée du demi-grand axe de son orbe, rapport qui, lorsque l'ellipse se change en parabole, devient celui de la racine carrée de deux, à l'unité. On a ainsi le rapport du secteur de la comète, à celui de la planète fictive; et il est aisé par ce qui précède, d'avoir le rapport de ce secteur, à celui que trace dans le même temps, le rayon vecteur de la terre. On peut donc déterminer pour un instant quelconque, à partir de l'instant du passage de la comète par le périhélie, l'aire tracée par son rayon vecteur, et fixer sa position sur la parabole qu'elle est censée décrire.

Il ne s'agit que de tirer des observations, les élémens du mouvement parabolique, c'est-à-dire, la distance périhélie de la comète, en parties de la moyenne distance du soleil à la terre, la position du périhélie, l'instant du passage par le périhélie, l'inclinaison de l'orbe à l'écliptique et la position de ses nœuds. La recherche de ces cinq élémens présente de plus grandes difficultés, que celle des élémens des planètes qui toujours visibles, peuvent être observées dans les positions les plus favorables à la détermination de ces élémens; au lieu que les comètes ne paraissent que pendant fort peu de temps, et presque toujours dans des circonstances où leur mouvement apparent est très compliqué par le mouvement réel de la terre, que nous leur transportons en sens contraire. Malgré ces difficultés, on est parvenu par diverses méthodes, à déterminer les élémens des orbes des comètes. Trois observations complètes sont suffisantes pour cet objet : toutes les autres servent à confirmer l'exactitude de ces élémens, et la vérité de la théorie que nous venons d'exposer. Plus de cent comètes dont les nombreuses observations sont exactement représentées par cette théorie, la mettent à l'abri de toute atteinte. Ainsi, les comètes que l'on a regardées pendant long-temps, comme des météores, sont des astres semblables aux planètes : leurs mouvemens et leurs retours sont réglés suivant les mêmes lois que les mouvemens planétaires.

Observons ici comment le vrai système de la nature, en se développant, se confirme de plus en plus. La simplicité des phénomènes célestes dans la supposition du mouvement de la terre, comparée à leur extrême complication dans celle de son immobilité, rend la première de ces suppositions fort vraisemblable. Les lois du mouvement elliptique, communes alors aux planètes et à la terre, augmentent beaucoup cette vraisemblance qui devient plus grande encore, par la considération du mouvement des comètes, assujetti aux mêmes lois.

Ces astres ne se meuvent pas tous dans le même sens, comme les planètes. Les uns ont un mouvement réel direct; d'autres ont un mouvement rétrograde. Les inclinaisons de leurs orbes ne sont point renfermées dans une zone étroite, comme celles des orbes planétaires : elles offrent toutes les variétés d'inclinaison, depuis l'orbe couché sur le plan de l'écliptique, jusqu'à l'orbe perpendiculaire à ce plan.

On reconnaît une comète, quand elle reparaît, par l'identité des élémens de son orbite, avec ceux de l'orbite d'une comète déjà observée. Si la distance périhélie, la position du périhélie et des nœuds, et l'inclinaison de l'orbite sont à fort peu près les mêmes; il est alors très probable que la comète qui paraît, est celle que l'on avait observée précédemment, et qui, après s'être éloignée à une distance où elle était invisible, revient dans la partie de son orbite, voisine du soleil. Les durées des révolutions des comètes étant fort longues, et ces astres n'ayant été observés avec un peu de soin, que depuis deux siècles; on ne connaît encore avec certitude, que le temps de la révolution de deux comètes (*); l'une est celle de 1759, que l'on avait déjà observée en 1682, 1607 et 1531. Cette comète emploie environ 76 ans à revenir à son périhélie; ainsi en prenant pour unité, la moyenne distance du soleil à la terre, le grand axe de son orbite, est à peu près 35,9; et comme sa distance périhélie n'est que 0,58, elle s'éloigne du soleil, au moins 35 fois plus que la terre, en parcourant une ellipse fort excentrique. Son retour au périhélie a été de treize mois plus long de 1531 à 1607, que de 1607 à 1682 : il a été de dix-huit mois plus court de 1607 à 1682, que de 1682 à 1759. Il paraît donc que des causes semblables à celles qui altèrent le mouvement elliptique des planètes, trou-

(*) Depuis l'impression de la 5e édition de cet ouvrage, en 1825, une troisième comète, qui avait été vue pour la première fois en 1772, puis en 1805, fut reconnue périodique en 1826 par MM. Gambart et Hansen. Cette comète fait sa révolution en six ans trois quarts : elle a été retrouvée et observée sur la fin de 1832 ; elle reviendra en 1839. (*Note de* M. E. Bouvard.)

16..

blent celui des comètes d'une manière encore plus sensible.

L'orbite d'une comète observée en 1818, a présenté des élémens si peu différens de ceux de l'orbite d'une comète observée en 1805, que l'on en a conclu l'identité de ces deux astres, ce qui donnerait une courte révolution de treize ans, s'il n'y avait point eu de retour intermédiaire de la comète à son périhélie; mais M. Encke, par la discussion des observations nombreuses de cet astre en 1818 et 1819, a reconnu que sa révolution est de 1203j, à fort peu près; il en a conclu qu'elle devait reparaître en 1822; et pour faciliter aux observateurs les moyens de la retrouver, il a calculé la position qu'elle devait avoir, à chaque jour de sa prochaine apparition. Les déclinaisons australes de la comète, dans cette apparition, rendaient ses observations presque impossibles en Europe. Heureusement, elle vient d'être reconnue par M. Rumker, observateur habile, attiré dans la Nouvelle-Hollande, par M. le général Brisbane, gouverneur de Botany-Bay, et qui lui-même, excellent observateur, porte aux progrès de l'Astronomie l'intérêt le plus actif et le plus éclairé. M. Rumker a observé la comète chaque jour depuis le 2 jusqu'au 23 juin 1822, et ses positions observées s'accordent si bien avec celles que M. Encke avait calculées d'avance, qu'il ne doit rester aucun doute sur ce retour de la comète, prédit par M. Encke.

La nébulosité dont ces comètes sont presque toujours environnées, paraît être formée des vapeurs que la chaleur solaire élève de leur surface. On conçoit, en effet, que la grande chaleur qu'elles éprouvent vers leur périhélie, doit raréfier les matières condensées par le froid qu'elles éprouvaient à leurs aphélies. Cette chaleur est excessive pour les comètes dont la distance périhélie est très petite. La comète de 1680 fut dans son périhélie, cent soixante et six fois plus près du soleil que la terre, et par conséquent, elle dut en éprouver une chaleur vingt-sept mille cinq cents fois plus grande que celle qu'il communique à la terre, si, comme tout porte à le penser, sa chaleur est proportionnelle à l'intensité de sa lumière. Cette grande chaleur fort supérieure à celle que nous pouvons produire, volatiliserait selon toute apparence, la plupart des substances terrestres.

En observant les comètes avec de forts télescopes, et dans des circonstances où nous ne devrions apercevoir qu'une partie de leur hémisphère éclairé, on n'y découvre point de phases. Une seule comète, celle de 1682, en a paru présenter à Hévélius et à La Hire. On verra dans la suite, que les masses des comètes sont d'une petitesse extrême; les diamètres de leurs disques doivent donc être presque insensibles, et ce qu'on nomme leur *noyau*, est selon toute apparence, formé en grande partie, des couches les plus denses de la nébulosité qui les environne: aussi Herschel, avec de très forts télescopes, est-il parvenu à reconnaître dans le noyau de la comète de 1811, un point brillant qu'il a jugé avec raison, être le disque même de la comète. Ces couches sont encore extrêmement rares, puisque l'on a quelquefois aperçu des étoiles au travers.

Les queues que les comètes traînent après elles, paraissent être composées des molécules les plus volatiles que la chaleur du soleil élève de leurs surfaces, et que l'impulsion de ses rayons en éloigne indéfiniment. Cela résulte de la direction de ces traînées de vapeurs, toujours situées au-delà de la tête des comètes relativement au soleil, et qui croissant à mesure que ces astres s'en approchent, n'atteignent leur *maximum* qu'après le passage au périhélie. L'extrême ténuité des molécules, augmentant le rapport des surfaces aux masses; l'impulsion des rayons solaires, peut devenir sensible et faire même alors décrire à peu près à chaque molécule, un orbe hyperbolique, le soleil étant au foyer de l'hyperbole conjuguée correspondante. La suite des molécules mues sur ces courbes depuis la tête de la comète, forme une traînée lumineuse opposée au soleil, et un peu inclinée au côté que la comète abandonne en s'avançant dans son orbite : c'est en effet, ce que l'observation nous montre. La promptitude avec laquelle ces queues s'accroissent, peut faire juger de la rapidité d'ascension de leurs molécules. On conçoit que les différences de volatilité, de grosseur et de densité des molécules, doivent en produire de considérables dans les courbes qu'elles décrivent; ce qui apporte de grandes variétés dans la forme, la longueur et la largeur des queues des comètes. Si l'on combine ces effets avec ceux qui peuvent résulter d'un mouvement de rotation dans ces astres, et avec les illusions de la parallaxe annuelle; on entrevoit la raison des singuliers phénomènes que leurs nébulosités et leurs queues nous présentent.

Quoique les dimensions des queues des comètes soient de plusieurs millions de myriamètres, cependant elles n'affaiblissent pas sensiblement la lumière des étoiles que l'on observe à travers; elles sont donc d'une rareté extrême, et leurs masses sont probablement inférieures à celles des plus petites montagnes de la terre; elles ne peuvent ainsi par leur rencontre avec elle, y produire aucun effet sensible. Il est très probable qu'elles l'ont plusieurs fois enveloppée, sans avoir été aperçues. L'état de l'atmosphère influe considérablement sur leur longueur et leur largeur apparentes : entre les tropiques, elles paraissent beaucoup plus grandes que dans nos climats. Pingré dit avoir observé qu'une étoile qui paraissait dans la queue de la comète de 1769, s'en éloigna dans très peu d'instans. Mais cette apparence était une illusion produite par des nuages légers de notre atmosphère, assez épais pour intercepter la faible lumière de cette queue, et cependant assez rares pour laisser apercevoir la lumière beaucoup plus vive de l'étoile. On ne peut pas attribuer aux molécules de vapeurs dont ces queues sont formées, des oscillations aussi rapides, dont l'étendue surpasserait un million de myriamètres.

Les substances évaporables d'une comète, diminuant à chacun de ses retours au périhélie; elles doivent après plusieurs retours, se dissiper entièrement dans l'espace, et la comète ne doit plus alors présenter qu'un noyau fixe; ce qui doit arriver plus promptement pour les comètes dont la révolution est plus courte. On peut conjecturer que celle de 1682, dont la révolution n'est que de soixante-seize ans, et la seule à laquelle on ait jusqu'ici soupçonné des phases, approche de cet état de fixité. Si le noyau est trop petit pour être aperçu, ou si les substances évaporables qui restent à sa surface, sont en trop petite quantité, pour former par leur évaporation, une tête de comète, sensible; l'astre deviendra pour toujours invisible. Peut-être est-ce une des causes qui rendent si rares, les réapparitions des comètes : peut-être encore cette cause a-t-elle fait disparaître pour nous, la comète de 1770, qui pendant son apparition, a décrit une ellipse dans laquelle la révolution n'est que de cinq ans et demi;

et qui, si elle a continué de la décrire, est depuis cette époque, revenue sept fois au moins à son périhélie. Peut-être enfin est-ce par la même cause, que plusieurs comètes dont on pouvait suivre la trace dans le ciel au moyen des élémens de leurs orbites, ont disparu plus tôt qu'on ne devait s'y attendre.

CHAPITRE VI.

Des lois du mouvement des satellites autour de leurs planètes.

Nous avons exposé dans le sixième chapitre du premier livre, les lois du mouvement du satellite de la terre ; il nous reste à considérer celles du mouvement des satellites de Jupiter, de Saturne et d'Uranus.

Si l'on prend pour unité, le demi-diamètre de l'équateur de Jupiter, supposé de 56″,702, à la moyenne distance de la planète au soleil ; les distances moyennes des satellites à son centre, et les durées de leurs révolutions sidérales seront :

	Distances moyennes.	Durées.
I. satellite	6,04853	1j,769137788148
II. sat....	9,62347	3 ,551181017849
III. sat....	15,35024	7 ,154552783970
IV. sat....	26,99835	16 ,688769707084

Les durées des révolutions synodiques des satellites, ou les intervalles des retours de leurs conjonctions moyennes à Jupiter, sont faciles à conclure des durées de leurs révolutions sidérales, et de celle de la révolution de Jupiter. En comparant leurs moyennes distances, aux durées de leurs révolutions; on observe entre ces quantités, le beau rapport que nous avons vu exister entre les durées des révolutions des planètes et leurs moyennes distances au soleil; c'est-à-dire que les carrés des temps des révolutions sidérales des satellites, sont entre eux comme les cubes de leurs moyennes distances au centre de Jupiter.

Les fréquentes éclipses des satellites ont fourni aux astronomes, le moyen de suivre leurs mouvemens, avec une précision que l'on ne peut pas attendre de l'observation de leur distance angulaire à Jupiter. Elles ont fait connaître les résultats suivans :

L'ellipticité de l'orbe du premier satellite est insensible : son plan coïncide à très peu près avec celui de l'équateur de Jupiter, dont l'inclinaison à l'orbe de cette planète est de 4°,4352.

L'ellipticité de l'orbe du second satellite est pareillement insensible : son inclinaison sur l'orbe de Jupiter est variable, ainsi que la position de ses nœuds. Toutes ces variations sont représentées à peu près, en supposant l'orbe du satellite, incliné d'environ 5152″ à l'équateur de Jupiter, et en donnant à ses nœuds sur ce plan, un mouvement rétrograde dont la période est de trente années juliennes.

On observe une petite ellipticité dans l'orbe du troisième satellite : l'extrémité de son grand axe, la plus voisine de Jupiter, et que l'on nomme *périjove* a un mouvement direct, mais variable ; l'excentricité de l'orbe est également assujettie à des variations très sensibles. Vers la fin du dernier siècle, l'équation du centre était à son *maximum*, et s'élevait à peu près à 2458″ : elle a ensuite diminué, et vers 1777, elle était à son *minimum* et d'environ 949″. L'inclinaison de l'orbe de ce satellite sur celui de Jupiter, et la position de ses nœuds sont variables : on représente à peu près toutes ces variations, en supposant l'orbe incliné d'environ 2284″ sur l'équateur de Jupiter et en donnant à ses nœuds, un mouvement rétrograde sur le plan de cet équateur, dans une période de 142 ans. Cependant, les astronomes qui ont déterminé par les éclipses de ce satellite, l'inclinaison de l'équateur de Jupiter sur le plan de son orbite, l'ont trouvée constamment de neuf ou dix minutes, plus petite que par les éclipses du premier et du second satellite.

L'orbe du quatrième a une ellipticité très sensible : son périjove a un mouvement annuel direct d'environ 7959″. Cet orbe est incliné de 2°,7 environ à l'orbe de Jupiter. C'est en vertu de cette inclinaison, que le quatrième satellite passe souvent derrière la planète, relativement au soleil, sans être éclipsé. Depuis la découverte des satellites, jusqu'en 1760, l'inclinaison a paru constante, et le mouvement annuel des nœuds sur l'orbite de Jupiter, a été direct et de 788″. Mais depuis 1760, l'inclinaison a augmenté et le mouvement des nœuds a diminué, de quantités sensibles. Nous reviendrons sur toutes ces variations, quand nous en développerons la cause.

Indépendamment de ces variations, les satellites sont assujettis à des inégalités qui troublent leurs mouvemens elliptiques, et qui rendent leur théorie fort compliquée. Elles sont principalement sensibles dans les trois premiers satellites dont les mouvemens offrent des rapports très remarquables.

En comparant les temps de leurs révolutions, on voit que celui de la révolution du premier satellite, n'est qu'environ la moitié de la durée de la révolution du second, qui n'est elle-même qu'environ la moitié de celle de la révolution du troisième satellite. Ainsi, les moyens mouvemens angulaires de ces trois satellites, suivent à peu près une progression sous-double. S'ils la suivaient exactement, le moyen mouvement du premier satellite, plus deux fois celui du troisième, serait rigoureusement égal à trois fois le moyen mouvement du second satellite. Mais cette égalité est incomparablement plus approchée que la progression elle-même; en sorte que l'on est porté à la regarder comme rigoureuse, et à rejeter sur les erreurs des observations, les quantités très petites dont elle s'en écarte: on peut au moins affirmer qu'elle subsistera pendant une longue suite de siècles.

Un résultat non moins singulier, et que les observations donnent avec la même précision, est que depuis la découverte des satellites, la longitude moyenne du premier, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, n'a jamais différé de deux angles droits, que de quantités presque insensibles.

Ces deux résultats subsistent également entre les moyens mouvemens et les longitudes moyennes synodiques; car le mouvement synodique d'un satellite, n'étant que l'excès de son mouvement sidéral sur celui de la planète; si l'on substitue dans les résultats précédens, les mouvemens synodiques, aux mouvemens sidéraux, le moyen mouvement de Jupiter disparaît, et ces résultats restent les mêmes. Il suit de là que d'ici à un très grand nombre d'années au moins, les trois premiers satellites de Jupiter ne seront point éclipsés à la fois; mais dans les éclipses simultanées du second et du troisième, le premier sera toujours en conjonction avec Jupiter : il sera toujours en opposition, dans les éclipses simultanées du soleil, produites sur Jupiter, par les deux autres satellites.

Les périodes et les lois des principales inégalités de ces satellites, sont les mêmes. L'inégalité du premier avance ou retarde ses éclipses, de 223″,5 en temps, dans son *maximum*. En comparant sa marche, aux positions respectives des deux premiers satellites, on a trouvé qu'elle disparaît, lorsque ces satellites vus du centre de Jupiter, sont en même temps, en opposition au soleil; qu'elle croît ensuite et devient la plus grande, lorsque le premier satellite, au moment de son opposition, est de 50° plus avancé que le second; qu'elle redevient nulle, lorsqu'il est plus avancé de 100°; qu'au-delà, elle prend un signe contraire et retarde les éclipses, et qu'elle augmente jusqu'à 150° de distance entre les satellites, où elle est à son *maximum* négatif; qu'elle diminue ensuite et disparaît à 200° de distance; enfin, que dans la seconde moitié de la circonférence, elle suit les mêmes lois que dans la première. On a conclu de là, qu'il existe dans le mouvement du premier satellite autour de Jupiter, une inégalité de 5050″,6 de degré, dans son *maximum*, et proportionnelle au sinus du double de l'excès de la longitude moyenne du premier satellite sur celle du second, excès égal à la différence des longitudes moyennes synodiques des deux satellites. La période de cette inégalité n'est pas de quatre jours : mais comment dans les éclipses du premier satellite, se transforme-t-elle dans une période de $437^j,6592$? C'est ce que nous allons expliquer.

Supposons que le premier et le second satellite partent ensemble, de leurs moyennes oppositions au soleil. A chaque circonférence que décrira le premier satellite, en vertu de son moyen mouvement synodique, il sera dans son opposition moyenne. Si l'on conçoit un astre fictif dont le mouvement angulaire soit égal à l'excès du moyen mouvement synodique du premier satellite, sur deux fois celui du second, alors le double de la différence des moyens mouvemens synodiques des deux satellites, sera dans les éclipses du premier, égal à un multiple de la circonférence, plus au mouvement de l'astre fictif; le sinus de ce dernier mouvement sera donc proportionnel à l'inégalité du premier satellite dans ses éclipses, et pourra la représenter. Sa période est égale à la durée de la révolution de l'astre fictif, durée qui d'après les moyens mouvemens synodiques des deux satellites, est de $437^{j},6592$; elle est ainsi déterminée avec une plus grande précision, que par l'observation directe.

L'inégalité du second satellite suit une loi semblable à celle du premier, avec cette différence, qu'elle est constamment de signe contraire. Elle avance ou retarde les éclipses, de $1059'',2$ en temps, dans son *maximum*. En la comparant aux positions respectives des deux satellites; on observe qu'elle disparaît, lorsqu'ils sont à la fois, en opposition au soleil; qu'elle retarde ensuite de plus en plus les éclipses du second, jusqu'à ce que les deux satellites soient éloignés entre eux de cent degrés, à l'instant de ces phénomènes; que ce retard diminue et redevient nul, lorsque la distance mutuelle des deux satellites est de deux cents degrés; enfin, qu'au-delà de ce terme, les éclipses avancent de la même manière dont elles avaient précédemment retardé. On a conclu de ces observations, qu'il existe dans le mouvement du second satellite, une inégalité de $11920'',7$ de degré dans son *maximum*, et qui est proportionnelle et affectée d'un signe contraire, au sinus de l'excès de la longitude moyenne du premier satellite, sur celle du second, excès égal à la différence des moyens mouvemens synodiques des deux satellites.

Si tous deux partent ensemble de leur opposition moyenne au soleil, le second sera dans son opposition moyenne, à chaque circonférence qu'il décrira en vertu de son moyen mouvement synodique. Si l'on conçoit, comme précédemment, un astre dont le mouvement angulaire soit égal à l'excès du moyen mouvement synodique du premier satellite, sur deux fois celui du second; alors la différence des moyens mouvemens synodiques des deux satellites, sera dans les éclipses du second, égale à un multiple de la circonférence, plus au mouvement de l'astre fictif; l'inégalité du second satellite sera donc dans ses éclipses, proportionnelle au sinus du mouvement de cet astre fictif. On voit ainsi la raison pour laquelle la période et la loi de cette inégalité sont les mêmes que celles de l'inégalité du premier satellite.

L'influence du premier satellite, sur l'inégalité du second est très vraisemblable. Mais si le troisième produit dans le mouvement du second, une inégalité pareille à celle que le second semble produire dans le mouvement du premier, c'est-à-dire proportionnelle au sinus du double de la différence des longitudes moyennes du second et du troisième satellite; cette nouvelle inégalité se confondra avec celle qui est due au premier satellite; car en vertu du rapport qu'ont entre elles, les longitudes moyennes des trois premiers satellites, et que nous avons exposé ci-dessus, la différence des longitudes moyennes des deux premiers satellites, est égale à la demi-circonférence plus au double de la différence des longitudes moyennes du second et du troisième satellite, en sorte que le sinus de la première différence, est le même que le sinus du double de la seconde différence, mais avec un signe contraire. L'inégalité produite par le troisième satellite, dans le mouvement du second, aurait ainsi le même signe et suivrait la même loi que l'inégalité observée dans ce mouvement; il est donc fort probable que cette inégalité est le résultat de deux inégalités dépendantes du premier et du troisième satellite. Si par la suite des siècles, le rapport précédent entre les longitudes moyennes de ces trois satellites, cessait d'avoir lieu; ces deux inégalités maintenant confondues se sépareraient, et l'on pourrait déterminer par les observations, leur valeur respective. Mais on a vu que ce rapport doit subsister pendant très long-temps, et nous verrons dans le quatrième livre qu'il est rigoureux.

Enfin, l'inégalité relative au troisième satellite dans ses éclipses, comparée aux positions respectives du second et du troisième, offre les mêmes rapports que l'inégalité du second, comparée aux positions respectives des deux premiers satellites. Il existe donc dans le mouvement du troisième satellite, une inégalité proportionnelle au sinus de l'excès de la longitude moyenne du second satellite, sur celle du troisième, inégalité qui dans son *maximum* est de 808″ de degré. Si l'on conçoit un astre dont le mouvement angulaire soit égal à l'excès du moyen mouvement synodique du second satellite, sur le double du moyen mouvement synodique du troisième; l'inégalité du troisième satellite, sera dans ses éclipses, proportionnelle au sinus du mouvement de cet astre fictif; or, en vertu du rapport qui existe entre les longitudes moyennes des trois satellites, le sinus de ce mouvement est, au signe près, le même que celui du mouvement du premier astre fictif que nous avons considéré. Ainsi l'inégalité du troisième satellite dans ses éclipses, a la même période et suit les mêmes lois, que les inégalités des deux premiers satellites.

Telle est la marche des principales inégalités des trois premiers satellites de Jupiter, que Bradley avait entrevues, et que Vargentin a exposées ensuite dans un grand jour.

Leur correspondance et celle des moyens mouvemens et des longitudes moyennes de ces satellites, semblent faire un système à part, de ces trois corps animés, selon toute apparence, par des forces communes, sources de leurs communs rapports.

Considérons présentement les satellites de Saturne. Si nous prenons pour unité, le demi-diamètre de l'équateur de cette planète, vu de sa moyenne distance au soleil, et supposé de 25″; les distances moyennes des satellites à son centre, et les durées de leurs révolutions sidérales sont :

	Distances moyennes.	Durées.
I.......	3,351......	0^j,94271
II.......	4,300......	1 ,37024
III.......	5,284......	1 ,88780
IV.......	6,819......	2 ,73948
V.......	9,524......	4 ,51749
VI.......	22,081......	15 ,94530
VII.......	64,359......	79 ,32960

En comparant les durées des révolutions des satellites, à leurs moyennes distances au centre de Saturne; on retrouve le beau rapport découvert par Képler, relativement aux planètes, et que nous avons vu exister dans le système des satellites de Jupiter, c'est-à-dire, que les carrés des temps des révolutions des satellites de Saturne, sont entre eux comme les cubes de leurs moyennes distances au centre de cette planète.

Le grand éloignement des satellites de Saturne, et la difficulté d'observer leur position, n'a pas permis de reconnaître l'ellipticité de leurs orbites, et encore moins, les inégalités de leurs mouvemens. Cependant, l'ellipticité de l'orbite du sixième satellite est sensible.

Prenons ici pour unité, le demi-diamètre d'Uranus, supposé de 6'' vu de la moyenne distance de la planète au soleil : les distances moyennes des satellites à son centre, et les durées de leurs révolutions sidérales sont d'après les observations d'Herschell :

	Distances moyennes.	Durées.
I.	13,120	5j ,8926
II.	17,022	8 ,7068
III.	19,845	10 ,9611
IV.	22,752	13 ,4559
V.	45,507	38 ,0750
VI.	91,008	107 ,6944

Ces durées, à l'exception de la seconde et de la quatrième, ont été conclues des plus grandes élongations observées, et de la loi suivant laquelle les carrés des temps des révolutions des satellites, sont comme les cubes de leurs moyennes distances au centre de la planète, loi que les observations confirment à l'égard du second et du quatrième satellite, les seuls qui soient bien connus; en sorte qu'elle doit être regardée comme une loi générale du mouvement d'un système de corps qui circulent autour d'un foyer commun.

Maintenant, quelles sont les forces principales qui retiennent les planètes, les satellites et les comètes, dans leurs orbes respectifs? quelles forces particulières troublent leurs mouvemens elliptiques? quelle cause fait rétrograder les équinoxes, et mouvoir les axes de rotation de la terre et de la lune? par quelles forces enfin, les eaux de la mer sont-elles soulevées deux fois par jour? la supposition d'un seul principe dont toutes ces lois dépendent, est digne de la simplicité et de la majesté de la nature. La généralité des lois que présentent les mouvemens célestes, semble en indiquer l'existence;

déjà même, on entrevoit ce principe, dans les rapports de ces phénomènes avec la position respective des corps du système solaire. Mais pour l'en faire sortir avec évidence, il faut connaître les lois du mouvement de la matière.

LIVRE TROISIÈME.

DES LOIS DU MOUVEMENT.

> At nunc per maria ac terras sublimaque coeli,
> Multa modis multis, varia ratione moveri
> Cernimus ante oculos.
>
> Lucret., lib. I.

Au milieu de l'infinie variété des phénomènes qui se succèdent continuellement dans les cieux et sur la terre, on est parvenu à reconnaître le petit nombre des lois générales que la matière suit dans ses mouvemens. Tout leur obéit dans la nature; tout en dérive aussi nécessairement que le retour des saisons; et la courbe décrite par l'atome léger que les vents semblent emporter au hasard, est réglée d'une manière aussi certaine, que les orbes planétaires. L'importance de ces lois dont nous dépendons sans cesse, aurait dû exciter la curiosité dans tous les temps; mais par une indifférence trop ordinaire à l'esprit humain, elles ont été ignorées jusqu'au commencement de l'avant-dernier siècle, époque à laquelle Galilée jeta les premiers fondemens de la science du mouvement, par ses belles découvertes sur la chute des corps. Les géomètres marchant sur ses traces, ont enfin réduit la mécanique entière, à des formules générales qui ne laissent plus à désirer que la perfection de l'analyse.

CHAPITRE PREMIER.

Des forces, de leur composition et de l'équilibre d'un point matériel.

Un corps nous paraît en mouvement, lorsqu'il change de situation par rapport à un système de corps que nous jugeons en repos. Ainsi dans un vaisseau mû d'une manière uniforme, les corps nous semblent se mouvoir, lorsqu'ils répondent successivement à ses diverses parties. Ce mouvement n'est que relatif; car le vaisseau se meut sur la surface de la mer qui tourne autour de l'axe de la terre dont le centre se meut autour du soleil qui lui-même est emporté dans l'espace, avec la terre et les planètes. Pour concevoir un terme à ces mouvemens, et pour arriver enfin à des points fixes d'où l'on puisse compter le mouvement absolu des corps; on imagine un espace sans bornes, immobile et pénétrable à la matière. C'est aux parties de cet espace réel ou idéal, que nous rapportons par la pensée, la position des corps; et nous les concevons en mouvement, lorsqu'ils répondent successivement à divers lieux de cet espace.

La nature de cette modification singulière en vertu de laquelle un corps est transporté d'un lieu dans un autre, est et sera toujours inconnue. Elle a été désignée sous le nom de *force* : ón ne peut déterminer que ses effets et la loi de son action.

L'effet d'une force agissant sur un point matériel, est de le mettre en mouvement, si rien ne s'y oppose. La direction de la force, est la droite qu'elle tend à lui faire décrire. Il est visible que si deux forces agissent dans le même sens, elles s'ajoutent l'une à l'autre; et que si elles agissent en sens contraire, le point ne se meut qu'en vertu de leur différence, en sorte qu'il resterait en repos, si elles étaient égales.

Si les directions de deux forces font entre elles un angle quelconque, leur résultante prendra une direction moyenne. On démontre par la seule Géométrie, que si, à partir du point de concours des forces, on prend sur leurs directions, des droites pour les représenter ; si l'on forme ensuite sur ces droites, un parallélogramme, sa diagonale représente pour la direction et la quantité, leur résultante.

On peut, à deux forces composantes, substituer leur résultante ; et réciproquement on peut, à une force quelconque, en substituer deux autres dont elle serait la résultante ; on peut donc décomposer une force, en deux autres parallèles à deux axes perpendiculaires entre eux et situés dans un plan qui passe par sa direction. Il suffit pour cela, de mener par la première extrémité de la droite qui représente cette force, deux lignes parallèles à ces axes, et de former sur ces lignes un rectangle dont cette droite soit la diagonale. Les deux côtés du rectangle représenteront les forces dans lesquelles la proposée peut se décomposer parallèlement aux axes.

Si la force est inclinée à un plan donné de position ; en prenant sur sa direction, à partir du point où elle rencontre le plan, une ligne pour la représenter ; la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de cette ligne sur le plan, sera la force primitive décomposée perpendiculairement à ce plan. La droite qui menée dans le plan, joint la force et la perpendiculaire, sera cette force décomposée parallèlement au plan. Cette seconde force partielle peut elle-même se décomposer en deux autres parallèles à deux axes situés dans le plan et perpendiculaires l'un à l'autre. Ainsi toute force peut être décomposée en trois autres parallèles à trois axes perpendiculaires entre eux.

De là naît un moyen simple d'avoir la résultante d'un nombre quelconque de forces qui agissent sur un point matériel; car en décomposant chacune d'elles en trois autres parallèles à trois axes donnés de position, et perpendiculaires entre eux; il est clair que toutes les forces parallèles au même axe, se réduisent à une seule, égale à la somme de celles qui agissent dans un sens, moins la somme de celles qui agissent en sens contraire. Ainsi le point sera sollicité par trois forces perpendiculaires entre elles; et si l'on prend sur chacune de leurs directions, à partir du point de concours, trois droites pour les représenter; si l'on forme ensuite sur ces droites, un parallélépipède rectangle; la diagonale de ce solide représentera pour la quantité et pour la direction, la résultante de toutes les forces qui agissent sur le point.

Quels que soient le nombre, la grandeur et la direction de ces forces; si l'on fait varier infiniment peu d'une manière quelconque, la position du point; le produit de la résultante, par la quantité dont le point s'avance suivant sa direction, est égal à la somme des produits de chaque force par la quantité correspondante. La quantité dont le point s'avance suivant la direction d'une force, est la projection de la droite qui joint les deux positions du point, sur la direction de la force : cette quantité doit être prise négativement, si le point s'avance en sens contraire de cette direction.

Dans l'état d'équilibre, la résultante de toutes les forces est nulle, si le point est libre. S'il ne l'est pas, la résultante doit être perpendiculaire à la surface ou à la courbe sur laquelle il est assujetti; et alors en changeant infiniment peu la position du point, le produit de la résultante par la quantité dont il s'avance suivant sa direction, est nul; ce produit est donc généralement nul, soit que l'on suppose le point libre, soit qu'on l'imagine assujetti sur une courbe ou sur une surface. Ainsi dans tous les cas, lorsque l'équilibre a lieu, la somme des produits de chaque force par la quantité dont le point s'avance suivant sa direction, en changeant infiniment peu de position, est nulle; et l'équilibre subsiste, si cette condition est remplie.

CHAPITRE II.

Du mouvement d'un point matériel.

Un point en repos, ne peut se donner aucun mouvement; puisqu'il ne renferme pas en soi, de raison pour se mouvoir dans un sens plutôt que dans un autre. Lorsqu'il est sollicité par une force quelconque et ensuite abandonné à lui-même, il se meut constamment d'une manière uniforme dans la direction de cette force, s'il n'éprouve aucune résistance; c'est-à-dire, qu'à chaque instant, sa force et la direction de son mouvement sont les mêmes. Cette tendance de la matière à persévérer dans son état de mouvement ou de repos, est ce que l'on nomme *inertie :* c'est la première loi du mouvement des corps.

La direction du mouvement en ligne droite, suit évidemment de ce qu'il n'y a aucune raison pour que le point s'écarte plutôt à droite, qu'à gauche de sa direction primitive; mais

18..

l'uniformité de son mouvement n'est pas de la même évidence. La nature de la force motrice étant inconnue, il est impossible de savoir *à priori*, si cette force doit se conserver sans cesse. A la vérité, un corps étant incapable de se donner aucun mouvement, il paraît également incapable d'altérer celui qu'il a reçu; en sorte que la loi d'inertie est au moins, la plus naturelle et la plus simple que l'on puisse imaginer. Elle est d'ailleurs confirmée par l'expérience : en effet, nous observons sur la terre, que les mouvemens se perpétuent plus long-temps, à mesure que les obstacles qui s'y opposent, viennent à diminuer; ce qui nous porte à croire que sans ces obstacles, ils dureraient toujours. Mais l'inertie de la matière est principalement remarquable dans les mouvemens célestes qui, depuis un grand nombre de siècles, n'ont point éprouvé d'altération sensible. Ainsi, nous regarderons l'inertie comme une loi de la nature; et lorsque nous observerons de l'altération dans le mouvement d'un corps, nous supposerons qu'elle est due à l'action d'une cause étrangère.

Dans le mouvement uniforme, les espaces parcourus sont proportionnels aux temps;

mais le temps employé à décrire un espace déterminé, est plus ou moins long, suivant la grandeur de la force motrice. Cette différence a fait naître l'idée de vitesse qui, dans le mouvement uniforme, est le rapport de l'espace au temps employé à le parcourir. Pour ne pas comparer ensemble des quantités hétérogènes, telles que l'espace et le temps; on prend un intervalle de temps, la seconde, par exemple, pour unité de temps; on choisit pareillement une unité d'espace, telle que le mètre; et alors l'espace et le temps sont des nombres abstraits qui expriment combien ils renferment d'unités de leur espèce; on peut donc les comparer l'un à l'autre. La vitesse devient ainsi le rapport de deux nombres abstraits, et son unité est la vitesse d'un corps qui parcourt un mètre dans une seconde. En réduisant de cette manière, l'espace, le temps et la vitesse, à des nombres abstraits; on voit que l'espace est égal au produit de la vitesse par le temps qui conséquemment est égal à l'espace divisé par la vitesse.

La force n'étant connue que par l'espace qu'elle fait décrire dans un temps déterminé; il est naturel de prendre cet espace pour sa mesure. Mais cela suppose que plusieurs forces agissant à la fois et dans le même sens, sur un corps, lui feront parcourir durant une unité de temps, un espace égal à la somme des espaces que chacune d'elles eût fait parcourir séparément, ou, ce qui revient au même, que la force est proportionnelle à la vitesse. C'est ce que nous ne pouvons pas savoir *à priori*, vu notre ignorance sur la nature de la force motrice : il faut donc encore sur cet objet, recourir à l'expérience ; car tout ce qui n'est pas une suite nécessaire du peu de données que nous avons sur la nature des choses, n'est pour nous qu'un résultat de l'observation.

La force peut être exprimée par une infinité de fonctions de la vitesse, qui n'impliquent pas contradiction. Il n'y en a point, par exemple, à la supposer proportionnelle au carré de la vitesse. Dans cette hypothèse, il est facile de déterminer le mouvement d'un point sollicité par un nombre quelconque de forces dont les vitesses sont connues ; car si l'on prend sur les directions de ces forces, à partir de leurs concours, des droites pour représenter les vitesses qu'elles imprimeraient séparément au point matériel; et si l'on détermine sur ces mêmes directions, en partant du même concours, de nouvelles droites qui soient entre elles, comme les carrés des premières; ces droites pourront représenter les forces elles-mêmes. En les composant ensuite par ce qui précède, on aura la direction de la résultante, ainsi que la droite qui l'exprime. On voit par là, comment on peut déterminer le mouvement d'un point, quelle que soit la fonction de la vitesse qui exprime la force. Parmi toutes les fonctions mathématiquement possibles, examinons quelle est celle de la nature.

On observe sur la terre, qu'un corps sollicité par une force quelconque, se meut de la même manière, quel que soit l'angle que la direction de cette force, fait avec la direction du mouvement commun au corps et à la partie de la surface terrestre, à laquelle il répond. Une légère différence à cet égard, ferait varier très sensiblement la durée des oscillations du pendule, suivant la position du plan vertical dans lequel il oscille; et l'expérience fait voir que dans tous les plans verticaux, cette durée est exactement la même. Dans un vaisseau dont le mouvement est uniforme, un mobile soumis à l'action d'un ressort, de la pesanteur, ou de toute autre force, se meut relativement aux parties du vaisseau, de la même manière, quelles que soient la vitesse du vaisseau et sa direction. On peut donc établir comme une loi générale des mouvemens terrestres, que si dans un système de corps emportés d'un mouvement commun, on imprime à l'un d'eux, une force quelconque; son mouvement relatif ou apparent sera le même, quel que soit le mouvement général du système, et l'angle que fait sa direction avec celle de la force imprimée.

La proportionnalité de la force à la vitesse, résulte de cette loi supposée rigoureuse; car si l'on conçoit deux corps mus sur une même droite avec des vitesses égales, et qu'en imprimant à l'un d'eux, une force qui s'ajoute à la première, sa vitesse relativement à l'autre corps, soit la même que si les deux corps étaient primitivement en repos; il est visible que l'espace décrit par le corps en vertu de sa force primitive et de celle qui lui est ajoutée, est alors égal à la somme des espaces que chacune d'elles eût fait décrire dans le même temps; ce qui suppose la force proportionnelle à la vitesse.

Réciproquement, si la force est proportionnelle à la vitesse, les mouvemens relatifs d'un système de corps animés de forces quelconques, sont les mêmes, quel que soit leur mouvement commun; car ce mouvement décomposé en trois autres parallèles à trois axes fixes, ne fait qu'accroître d'une même quantité, les vitesses partielles de chaque corps, parallèlement à ces axes; et comme la vitesse relative ne dépend que de la différence de ces vitesses partielles, elle est la même, quel que soit le mouvement commun à tous les corps. Il est donc impossible alors de juger du mouvement absolu d'un système dont on fait partie, par les apparences que l'on y observe. C'est ce qui caractérise cette loi dont l'ignorance a retardé la connaissance du vrai système du monde, par la difficulté de concevoir les mouvemens relatifs des projectiles, au-dessus de la terre emportée par un double mouvement de rotation sur elle-même, et de révolution autour du soleil.

Mais vu l'extrême petitesse des mouvemens les plus considérables que nous puissions imprimer aux corps, eu égard au mouvement qui les emporte avec la terre; il suffit, pour que les apparences d'un système de corps soient indépendantes de la direction de ce mouvement, qu'un petit accroissement dans la force dont la terre est animée, soit à l'accroissement correspondant de sa vitesse, dans le rapport de ces quantités elles-mêmes. Ainsi, nos expériences prouvent seulement la réalité de cette proportion qui, si elle avait lieu, quelle que fût la vitesse de la terre, donnerait la loi de la vitesse proportionnelle à la force. Elle donnerait encore cette loi, si la fonction de la vitesse, qui exprime la force, n'était composée que d'un seul terme. Il faudrait donc, si la vitesse n'était pas proportionnelle à la force, supposer que dans la nature, la fonction de la vitesse, qui exprime la force, est formée de plusieurs termes; ce qui est peu probable. Il faudrait supposer de plus, que la vitesse de la terre est exactement celle qui convient à la proportion précédente, ce qui est contre toute vraisemblance. D'ailleurs, la vitesse de la terre, varie dans les diverses saisons de l'année : elle est d'un trentième environ plus grande en hiver, qu'en été. Cette variation est plus considérable encore, si comme tout l'indique, le système solaire est en mouvement dans l'espace; car selon que ce mouvement progressif est contraire au mouvement terrestre, ou conspire avec lui, de grandes variations annuelles doivent en résulter dans le mouvement absolu de la terre; ce qui devrait altérer la proportion dont il s'agit, et le rapport de la force imprimée, à la vitesse relative qu'elle produit; si cette proportion et ce rapport n'étaient pas indépendans de la vitesse absolue.

Tous les phénomènes célestes viennent à l'appui de ces preuves. La vitesse de la lumière, déterminée par les éclipses des satellites de Jupiter, se compose avec celle de la terre, exactement comme dans la loi de la proportionnalité de la force à la vitesse; et tous les mouvemens du système solaire, calculés d'après cette loi, sont entièrement conformes aux observations.

Voilà donc deux lois du mouvement, savoir, la loi d'inertie et celle de la force proportionnelle à la vitesse, qui sont données par l'observation. Elles sont les plus naturelles et les plus simples que l'on puisse imaginer, et sans doute, elles dérivent de la nature même de la matière; mais cette nature étant inconnue, ces lois ne sont pour nous, que des faits observés, les seuls, au reste, que la Mécanique emprunte de l'expérience.

La vitesse étant proportionnelle à la force, ces deux quantités peuvent être représentées l'une par l'autre; on aura donc par ce qui précède, la vitesse d'un point sollicité par un nombre quelconque de forces dont on connaît les directions et les vitesses.

Si le point est sollicité par des forces agissant d'une manière continue; il décrira d'un mouvement sans cesse variable, une courbe dont la nature dépend des forces qui la font décrire. Pour la déterminer, il faut considérer la courbe dans ses élémens, voir comment ils naissent les uns des autres, et remonter de la loi d'accroissement des coordonnées, à leur expression finie. C'est précisément l'objet du calcul infinitésimal dont l'heureuse découverte a procuré tant d'avantages à la Mécanique; et l'on sent combien il est utile de perfectionner ce puissant instrument de l'esprit humain.

Nous avons dans la pesanteur, un exemple journalier d'une force qui semble agir sans interruption. A la vérité, nous ignorons si ses actions successives sont séparées par des intervalles de temps, dont la durée est insensible; mais les phénomènes étant à très peu près les mêmes, dans cette hypothèse et dans celle d'une action continue, les géomètres ont préféré celle-ci, comme étant plus commode et plus simple. Développons les lois de ces phénomènes.

La pesanteur paraît agir de la même manière sur les corps, dans l'état du repos et dans celui du mouvement. Au premier instant, un corps abandonné à son action, acquiert un degré de vitesse, infiniment petit : un nouveau degré de vitesse s'ajoute au premier, dans le second instant, et ainsi de suite; en sorte que la vitesse augmente en raison du temps.

Si l'on imagine un triangle rectangle dont un des côtés représente le temps et croisse avec lui, l'autre côté pourra représenter la vitesse. L'élément de la surface de ce triangle, étant égal au produit de l'élément du temps, par la vitesse, il représentera l'élément de l'espace que la pesanteur fait décrire; cet espace sera ainsi représenté par la surface entière du triangle qui croissant comme le carré d'un de ses côtés, fait voir que dans le mouvement accéléré par la pesanteur, les vitesses augmentent comme les temps; et les hauteurs dont le corps tombe en partant du repos, croissent comme le carré des temps ou des vitesses. En exprimant donc par l'unité l'espace dont un corps descend dans la première seconde; il descendra de quatre unités, en deux secondes; de neuf unités, en trois secondes, et ainsi du reste; en sorte qu'à chaque seconde, il décrira des espaces croissant comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, etc.

L'espace qu'un corps en vertu de la vitesse acquise à la fin de sa chute, décrirait pendant un temps égal à sa durée, serait le produit de ce temps par sa vitesse : ce produit est le double de la surface du triangle; ainsi le corps mû uniformément en vertu de sa vitesse acquise, décrirait dans un temps égal à celui de sa chute, un espace double de celui qu'il a parcouru.

Le rapport de la vitesse acquise, au temps, est constant pour une même force accélératrice : il augmente ou diminue, suivant que ces forces sont plus ou moins grandes; il peut donc servir à les exprimer. Le double de l'espace parcouru, étant le produit du temps par la vitesse; la force accélératrice est égale à ce double espace divisé par le carré du temps.

Elle est encore égale au carré de la vitesse, divisé par ce double espace. Ces trois manières d'exprimer les forces accélératrices, sont utiles dans diverses circonstances : elles ne donnent pas les valeurs absolues de ces forces, mais seulement leurs rapports entre elles ; et dans la Mécanique, on n'a besoin que de ces rapports.

Sur un plan incliné, l'action de la pesanteur se décompose en deux autres ; l'une perpendiculaire au plan, est détruite par sa résistance ; l'autre parallèle au plan, est à la pesanteur primitive, comme la hauteur du plan est à sa longueur. Le mouvement est donc uniformément accéléré sur les plans inclinés, mais les vitesses et les espaces parcourus, sont aux vitesses et aux espaces parcourus dans le même temps, suivant la verticale, dans le rapport de la hauteur du plan à sa longueur. Il suit de là que toutes les cordes d'un cercle, qui aboutissent à l'une des extrémités de son diamètre vertical, sont décrites par l'action de la pesanteur, dans le même temps que son diamètre.

Un projectile lancé suivant une droite quelconque, s'en écarte sans cesse, en décrivant une courbe concave vers l'horizon, et dont cette droite est la première tangente. Son mouvement rapporté à cette droite par des lignes verticales, est uniforme; mais il s'accélère suivant ces verticales, conformément aux lois que nous venons d'exposer; en élevant donc de chaque point de la courbe, des verticales prolongées jusqu'à la première tangente, elles seront proportionnelles aux carrés des parties correspondantes de cette tangente, propriété qui caractérise la parabole. Si la force de projection est dirigée suivant la verticale elle-même, la parabole se confond alors avec elle ; ainsi les formules du mouvement parabolique embrassent les mouvemens accélérés ou retardés dans la verticale.

Telles sont les lois de la chute des graves, découvertes par Galilée. Il nous semble aujourd'hui, qu'il était facile d'y parvenir; mais puisqu'elles avaient échappé aux recherches des philosophes, malgré les phénomènes qui les reproduisaient sans cesse; il fallait un rare génie pour les démêler dans ces phénomènes.

On a vu dans le premier livre, qu'un point matériel suspendu à l'extrémité d'une droite sans masse, et fixe à son autre extrémité, forme le pendule simple. Ce pendule écarté de la verticale, tend à y revenir par sa pesanteur, et cette tendance est à très peu près proportionnelle à cet écart, s'il est peu considérable. Imaginons deux pendules de même longueur, et partant au même instant avec des vitesses très petites, de la situation verticale. Ils décriront au premier instant, des arcs proportionnels à ces vitesses. Au commencement d'un second instant égal au premier, les vitesses seront retardées proportionnellement aux arcs décrits, et par conséquent aux vitesses primitives; les arcs décrits dans cet instant, seront donc encore proportionnels à ces vitesses. Il en sera de même des arcs décrits au troisième instant, au quatrième, etc. Ainsi à chaque instant, les vitesses et les arcs mesurés depuis la verticale, seront proportionnels aux vitesses primitives; les pendules arriveront donc au même moment, à l'état de repos. Ils reviendront ensuite vers la verticale, par un mouvement accéléré suivant les mêmes lois par lesquelles leur vitesse avait été retardée, et ils y parviendront au même instant, et avec leur vitesse primitive. Ils oscilleront de la même manière, de l'autre côté de la verticale, et ils continueraient d'osciller à l'infini, sans les résistances qu'ils éprouvent. Il est visible que

19

l'étendue de leurs oscillations est proportionnelle à leur vitesse primitive; mais la durée de ces oscillations est la même, et par conséquent indépendante de leur grandeur. La force qui accélère ou retarde le pendule, n'étant pas exactement en raison de l'arc mesuré depuis la verticale; cet isochronisme n'est qu'approché relativement aux petites oscillations d'un corps pesant, mû dans un cercle. Il est rigoureux dans la courbe sur laquelle la pesanteur décomposée parallèlement à la tangente, est proportionnelle à l'arc compté du point le plus bas; ce qui donne immédiatement son équation différentielle. Huygens à qui l'on doit l'application du pendule aux horloges, avait intérêt de connaître cette courbe, et la manière de la faire décrire au pendule. Il trouva qu'elle est une cycloïde placée verticalement, en sorte que son sommet soit le point le plus bas; et que pour la faire décrire à un corps suspendu à l'extrémité d'un fil inextensible, il suffit de fixer l'autre extrémité, à l'origine commune de deux cycloïdes égales à celles que l'on veut faire décrire, et placées verticalement en sens contraire, de manière que le fil, en oscillant, enveloppe alternativement chacune de ces courbes. Quelque ingénieuses que soient ces recherches, l'expérience a fait préférer le pendule circulaire, comme étant beaucoup plus simple, et d'une précision suffisante même à l'Astronomie. Mais la théorie des développées, qu'elles ont fait naître, est devenue très importante par ses applications au système du monde.

La durée des oscillations fort petites d'un pendule circulaire, est au temps qu'un corps pesant emploierait à tomber d'une hauteur égale au double de la longueur du pendule, comme la demi-circonférence est au diamètre. Ainsi le temps de la chute, le long d'un petit arc terminé par un diamètre vertical, est au temps de la chute, le long de ce diamètre, ou ce qui revient au même, par la corde de l'arc, comme le quart de la circonférence est au diamètre; la droite menée entre deux points donnés, n'est donc pas la ligne de la plus vite descente de l'un à l'autre. La recherche de cette ligne a excité la curiosité des géomètres; et ils ont trouvé qu'elle est une cycloïde dont l'origine est au point le plus élevé.

La longueur du pendule simple qui bat les secondes, est au double de la hauteur dont la pesanteur fait tomber les corps dans la première seconde de leur chute, comme le carré du diamètre est au carré de la circonférence. Cette longueur pouvant être mesurée avec une grande précision; on aura, au moyen de ce théorème, le temps de la chute des corps, d'une hauteur déterminée, beaucoup plus exactement que par des expériences directes. On a vu dans le premier livre, que des expériences très exactes ont donné la longueur du pendule à secondes à Paris, de $0^m,741887$; d'où il résulte que la pesanteur y fait tomber les corps de $3^m,66107$, dans la première seconde. Ce passage du mouvement d'oscillation, dont on peut observer avec une grande précision la durée, au mouvement rectiligne des graves, est une remarque ingénieuse dont on est encore redevable à Huygens.

Les durées des oscillations fort petites des pendules de longueurs différentes, et animés par la même pesanteur, sont comme les racines carrées de ces longueurs. Si les pendules sont de même longueur, et animés de pesanteurs différentes; les durées des oscillations sont réciproques aux racines carrées des pesanteurs.

C'est au moyen de ces théorèmes, que l'on a déterminé la variation de la pesanteur, à la surface de la terre et au sommet des montagnes. Les observations du pendule ont pareillement fait connaître que la pesanteur ne dépend ni de la surface, ni de la figure des corps, mais qu'elle pénètre leurs parties les plus intimes, et qu'elle tend à leur imprimer dans le même temps, des vitesses égales. Pour s'en assurer, Newton a fait osciller un grand nombre de corps de même poids, et différens soit par la figure, soit par la matière, en les plaçant dans l'intérieur d'une même surface, afin que la résistance de l'air fût la même. Quelque précision qu'il ait apportée dans ses expériences, il n'a point remarqué de différences sensibles entre les longueurs du pendule simple à secondes, conclues des durées des oscillations de ces corps; d'où il suit que dans les résistances qu'ils éprouvent, leur vitesse acquise par l'action de la pesanteur, serait la même en temps égal.

Nous avons encore dans le mouvement circulaire, l'exemple d'une force agissant d'une manière continue. Le mouvement de la matière abandonnée à elle-même, étant uniforme et rectiligne; il est clair qu'un corps mû sur une circonférence, tend sans cesse à s'éloigner du centre, par la tangente. L'effort qu'il fait pour cela, se nomme *force centrifuge ;* et l'on nomme *force centrale* ou *centripète*, toute force dirigée vers un centre. Dans le mouvement circulaire, la force centrale est égale et directement contraire à la force centrifuge : elle tend sans cesse à rapprocher le corps, du centre de la circonférence, et dans un intervalle de temps, très court, son effet est mesuré par le sinus verse du petit arc décrit.

On peut, au moyen de ce résultat, comparer à la pesanteur, la force centrifuge due au mouvement de rotation de la terre. A l'équateur, les corps décrivent en vertu de cette rotation, dans chaque seconde de temps, un arc de $40'',1095$ de la circonférence de l'équateur terrestre. Le rayon de cet équateur étant 6376606^m à fort peu près ; le sinus verse de cet arc est de $0^m,0126559$. Pendant une seconde, la pesanteur fait tomber les corps à l'équateur, de $3^m,64930$; ainsi la force centrale nécessaire pour retenir les corps à la surface de la terre, et par conséquent, la force centrifuge due à son mouvement de rotation est à la pesanteur à l'équateur, dans le rapport de l'unité à 288,4. La force centrifuge diminue la pesanteur, et les corps ne tombent à l'équateur, qu'en vertu de la différence de ces deux forces; en nommant donc *gravité*, la pesanteur entière qui aurait lieu sans la diminution qu'elle éprouve; la force centrifuge à l'équateur est à fort peu près $\frac{1}{289}$ de la gravité. Si la rotation de la terre était dix-sept fois plus rapide; l'arc décrit dans une seconde à l'équateur, serait dix-sept fois plus grand, et son sinus verse serait 289 fois plus considérable; la force centrifuge serait donc alors égale à la gravité, et les corps cesseraient de peser sur la terre à l'équateur.

En général, l'expression d'une force accélératrice constante, qui agit toujours dans le même sens, est égale au double de l'espace qu'elle fait décrire, divisé par le carré du temps : toute force accélératrice, dans un intervalle de temps, très court, peut être supposée constante et agir suivant la même direction; d'ailleurs, l'espace que la force centrale fait décrire dans le mouvement circulaire, est le sinus verse du petit arc décrit, et ce sinus est à très peu près égal au carré de l'arc, divisé par le diamètre; l'expression de cette force est donc le carré de l'arc décrit, divisé par le carré du temps et par le rayon du cercle. L'arc divisé par le temps, est la vitesse même du corps; la force centrale et la force centrifuge, sont donc égales au carré de la vitesse, divisé par le rayon.

Rapprochons ce résultat, de celui que nous avons trouvé précédemment, et suivant lequel la pesanteur est égale au carré de la vitesse acquise, divisé par le double de l'espace parcouru suivant la verticale; nous verrons que la force centrifuge est égale à la pesanteur, si la vitesse du corps qui circule, est la même que celle acquise par un corps pesant qui tomberait d'une hauteur égale à la moitié du rayon de la circonférence décrite.

Les vitesses de plusieurs corps mus circulairement, sont égales aux circonférences qu'elles décrivent, divisées par les temps de leurs révolutions: les circonférences sont comme les rayons; ainsi, les carrés des vitesses sont comme les carrés des rayons, divisés par les carrés de ces temps. Les forces centrifuges sont donc entre elles comme les rayons des circonférences, divisés par les carrés des temps des révolutions. Il suit de là, que sur divers parallèles terrestres, la force centrifuge due au mouvement de rotation de la terre, est proportionnelle aux rayons de ces parallèles.

Ces beaux théorèmes découverts par Huygens, ont conduit Newton à la théorie générale du mouvement dans les courbes, et à la loi de la pesanteur universelle.

Un corps qui décrit une courbe quelconque, tend à s'en écarter par la tangente; or on peut toujours imaginer un cercle qui passe par deux élémens contigus de la courbe, et que l'on nomme *cercle osculateur :* dans deux instans consécutifs, le corps est mû sur la circonférence de ce cercle; sa force centrifuge est donc égale au carré de sa vitesse, divisé par le rayon du cercle osculateur; mais la position et la grandeur de ce cercle varient sans cesse.

Si la courbe est décrite en vertu d'une force dirigée vers un point fixe; on peut décomposer cette force en deux, l'une suivant le rayon osculateur, l'autre suivant l'élément de la courbe. La première fait équilibre à la force centrifuge : la seconde augmente ou diminue la vitesse du corps; cette vitesse est donc continuellement variable. Mais elle est toujours telle, que *les aires décrites par le rayon vecteur, autour de l'origine de la force,* *sont proportionnelles aux temps. Réciproquement, si les aires tracées par le rayon vecteur autour d'un point fixe, croissent comme les temps; la force qui les fait décrire, est constamment dirigée vers ce point.* Ces propositions fondamentales dans la théorie du système du monde, se démontrent aisément de cette manière.

La force accélératrice peut être supposée n'agir qu'au commencement de chaque instant pendant lequel le mouvement du corps est uniforme : le rayon vecteur trace alors un petit triangle. Si la force cessait d'agir dans l'instant suivant, le rayon vecteur tracerait dans ce nouvel instant, un nouveau triangle égal au premier; puisque ces deux triangles ayant leur sommet au point fixe origine de la force, leurs bases situées sur une même droite seraient égales, comme étant décrites avec la même vitesse, pendant des instans que nous supposons égaux. Mais au commencement du nouvel instant, la force accélératrice se combine avec la force tangentielle du corps, et fait décrire la diagonale du parallélogramme dont les côtés représentent ces forces. Le triangle que le rayon vecteur décrit en vertu de cette force combinée, est égal à celui qu'il eût décrit sans l'action de la force accélératrice; car ces deux triangles ont pour base commune, le rayon vecteur de la fin du premier instant, et leurs sommets sont sur une droite parallèle à cette base; l'aire tracée par le rayon vecteur est donc égale, dans deux instans consécutifs égaux; et par conséquent le secteur décrit par ce rayon, croît comme le nombre de ces instans, ou comme les temps. Il est visible que cela n'a lieu qu'autant que la force accélératrice est dirigée vers le point fixe; autrement, les triangles que nous venons de considérer, n'auraient pas même hauteur. Ainsi, la proportionnalité des aires aux temps, démontre que la force accélératrice est dirigée constamment vers l'origine du rayon vecteur.

Dans ce cas, si l'on imagine un très petit secteur décrit pendant un intervalle de temps, fort court; que de la première extrémité de l'arc de ce secteur, on mène une tangente à la courbe, et que l'on prolonge jusqu'à cette tangente, le rayon mené de l'origine de la force, à l'autre extrémité de l'arc; la partie de ce rayon, interceptée entre la courbe et la tangente, sera visiblement l'espace que la force centrale a fait décrire. En divisant le double de cet espace, par le carré du temps, on aura l'expression de la force; or le secteur est proportionnel au temps; la force centrale est donc comme la partie du rayon vecteur, interceptée entre la courbe et la tangente, divisée par le carré du secteur. A la rigueur, la force centrale dans les divers points de la courbe, n'est pas proportionnelle à ces quotiens; mais elle approche d'autant plus de l'être que les secteurs sont plus petits, en sorte qu'elle est exactement proportionnelle à la limite de ces quotiens. L'analyse différentielle donne cette limite, en fonction du rayon vecteur, lorsque la nature de la courbe est connue; et alors on a la fonction de la distance, à laquelle la force centrale est proportionnelle.

Si la loi de la force est donnée, la recherche de la courbe qu'elle fait décrire, présente plus de difficulté. Mais quelles que soient les forces dont le corps toujours supposé libre est animé, on déterminera facilement de la manière suivante, les équations différentielles de son mouvement. Imaginons trois axes fixes perpendiculaires entre eux; la position du corps à un instant quelconque, sera déterminée par trois coordonnées parallèles à ces axes. En décomposant chacune des forces qui agissent sur le point, en trois autres dirigées parallèlement aux mêmes axes; le produit de la résultante de toutes les forces parallèles à l'une des coordonnées, par l'élément du temps pendant lequel elle agit, exprimera l'accroissement de la vitesse du corps, parallèlement à cette coordonnée; or cette vitesse peut être supposée égale à l'élément de la coordonnée, divisé par l'élément du temps; la différentielle du quotient de cette division, est donc égale au produit précédent. La considération des deux autres coordonnées fournit deux égalités semblables; ainsi la détermination du mouvement du corps devient une recherche de pure analyse, qui se réduit à l'intégration de ces équations différentielles.

En général, l'élément du temps étant supposé constant, la différence seconde de chaque coordonnée, divisée par le carré de cet élément, représente une force qui, appliquée en sens contraire au point, ferait équilibre à la force qui le sollicite suivant cette coordonnée. En multipliant la différence de ces forces, par la variation arbitraire de la coordonnée, et ajoutant les trois produits semblables relatifs aux trois coordonnées; leur somme sera nulle par la condition de l'équilibre. Si le point est libre, les variations des trois coordonnées seront toutes arbitraires, et en égalant à zéro, le coefficient de chacune d'elles, on aura les trois équations différentielles du mouvement du point. Mais si le point n'est pas libre, on aura entre les trois coordonnées, une ou deux relations qui donneront un pareil nombre d'équations entre leurs variations arbitraires. En éliminant donc à leur moyen, autant de ces variations, on égalera les coefficiens des variations restantes, à zéro; et l'on aura les équations différentielles du mouvement, équations qui, combinées avec les relations des coordonnées détermineront pour un instant quelconque, la position du point.

L'intégration de ces équations est facile, quand la force est dirigée vers un centre fixe, mais souvent, la nature des forces la rend impossible. Cependant, la considération des équations différentielles, conduit à quelques principes intéressans de mécanique, tel que le suivant. La différentielle du carré de la vitesse d'un point soumis à l'action de forces accélératrices, est égale au double de la somme des produits de chaque force, par le petit espace dont le point s'avance suivant la direction de cette force. Il est aisé d'en conclure que la vitesse acquise par un corps pesant, le long d'une ligne ou d'une surface courbe, est la même que s'il tombait verticalement de la même hauteur.

Plusieurs philosophes, frappés de l'ordre qui règne dans la nature, et de la fécondité de ses moyens dans la production des phénomènes, ont pensé qu'elle parvient toujours à son but par les voies les plus simples. En étendant cette manière de voir, à la mécanique; ils ont cherché l'économie que la nature avait eue pour objet, dans l'emploi des forces et du temps. Ptolémée avait reconnu que la lumière réfléchie parvient d'un point à un autre, par le chemin le plus court, et par conséquent, dans le moins de temps possible, en supposant la vitesse du rayon lumineux, toujours la même. Fermat, l'un des plus beaux génies dont la France s'honore, généralisa ce principe, en l'étendant à la réfraction de la lumière. Il supposa donc qu'elle parvient d'un point pris au dehors d'un milieu diaphane, à un point intérieur, dans le temps le plus court; regardant ensuite comme très vraisemblable, que sa vitesse devait être plus petite dans ce milieu, que dans le vide; il chercha dans ces hypothèses, la loi de la réfraction de la lumière. En appliquant à ce problème, sa belle méthode *de maximis* et *de minimis*, que l'on doit regarder comme le véritable germe du calcul différentiel; il trouva conformément à l'expérience, que les sinus d'incidence et de réfraction, devaient être dans un rapport constant, plus grand que l'unité. La manière heureuse dont Newton a déduit ce rapport, de l'attraction des milieux, fit voir à Maupertuis, que la vitesse de la lumière augmente dans les milieux diaphanes, et qu'ainsi ce n'est point, comme Fermat le prétendait, la somme des quotiens des espaces décrits dans le vide et dans le milieu, et divisés par les vitesses correspondantes, mais la somme des produits de ces quantités, qui doit être un *minimum*. Euler étendit cette supposition, aux mouvemens variables à chaque instant; et il prouva par divers exemples, que *parmi toutes les courbes qu'un corps peut décrire en allant d'un point à un autre, il choisit toujours celle dans laquelle l'intégrale du produit de sa masse par sa vitesse et par l'élément de la courbe, est* *un minimum*. Ainsi la vitesse d'un point mû dans une surface courbe et qui n'est sollicité par aucune force, étant constante; il parvient d'un point à un autre, par la ligne la plus courte sur cette surface. On a nommé l'intégrale précédente, *action d'un corps;* et la réunion des intégrales semblables, relatives à chaque corps d'un système, a été nommée *action du système*. Euler établit donc que cette action est toujours un *minimum*, en sorte que l'économie de la nature consiste à l'épargner : c'est là ce qui constitue *le principe de la moindre action*, dont on doit regarder Euler, comme le véritable inventeur, et que Lagrange ensuite, a dérivé des lois primordiales du mouvement. Ce principe n'est au fond, qu'un résultat curieux de ces lois qui, comme on l'a vu, sont les plus naturelles et les plus simples que l'on puisse imaginer, et qui par là, semblent découler de l'essence même de la matière. Il convient à toutes les relations mathématiquement possibles entre la force et la vitesse, pourvu que l'on substitue dans ce principe, au lieu de la vitesse, la fonction de la vitesse, par laquelle la force est exprimée. Le principe de la moindre action ne doit donc point être érigé en cause finale; et loin d'avoir donné naissance aux lois du mouvement, il n'a pas même contribué à leur découverte sans laquelle on disputerait encore sur ce qu'il faut entendre par la moindre action de la nature.

CHAPITRE III.

De l'équilibre d'un système de corps.

Le cas le plus simple de l'équilibre de plusieurs corps, est celui de deux points matériels qui se rencontrent avec des vitesses égales et directement contraires. Leur impénétrabilité mutuelle, propriété de la matière, en vertu de laquelle deux corps ne peuvent pas occuper le même lieu au même instant, anéantit évidemment leurs vitesses et les réduit à l'état du repos. Mais si deux corps de masses différentes viennent à se choquer avec des vitesses opposées, quel est le rapport des vitesses aux masses, dans le cas de l'équilibre? Pour résoudre ce problème, imaginons un système de points matériels contigus, rangés sur une même droite, et animés d'une vitesse commune dans sa direction : concevons pareillement un second système de points matériels contigus, disposés sur la même droite, et animés d'une vitesse commune et contraire à la précédente, de manière que les deux systèmes se choquent mutuellement en se faisant équilibre. Il est clair que si le premier système n'était composé que d'un seul point matériel, chaque point du second système éteindrait dans le point choquant, une partie de sa vitesse, égale à la vitesse de ce système; la vitesse du point choquant, doit donc être dans le cas de l'équilibre, égale au produit de la vitesse du second système, par le nombre de ses points, et l'on peut substituer au premier système, un seul point animé d'une vitesse égale à ce produit. On peut semblablement substituer au second système, un point matériel animé d'une vitesse égale au produit de la vitesse du premier système, par le nombre de ses points. Ainsi, au lieu des deux systèmes, on aura deux points qui se feront équilibre avec des vitesses contraires dont l'une sera le produit de la vitesse du premier système par le nombre de ses points, et dont l'autre sera le produit de la vitesse des points du second système, par leur nombre; ces produits doivent donc être égaux dans le cas de l'équilibre.

La masse d'un corps est la somme de ses

points matériels. On nomme *quantité de mouvement*, le produit de la masse par la vitesse : c'est aussi ce que l'on entend par la *force d'un corps*. Pour l'équilibre de deux corps ou de deux systèmes de points matériels qui se choquent en sens contraires, les quantités de mouvement ou les forces opposées doivent être égales, et par conséquent, les vitesses doivent être réciproques aux masses.

Deux points matériels ne peuvent évidemment agir l'un sur l'autre, que suivant la droite qui les joint : l'action que le premier exerce sur le second, lui communique une certaine quantité de mouvement; or on peut avant l'action, concevoir le second corps sollicité par cette quantité et par une autre égale et directement opposée; l'action du premier corps se réduit ainsi à détruire cette dernière quantité de mouvement; mais pour cela, il doit employer une quantité de mouvement égale et contraire, qui sera détruite. On voit donc généralement, que dans l'action mutuelle des corps, la réaction est toujours égale et contraire à l'action. On voit encore que cette égalité ne suppose point une force particulière dans la matière, elle résulte de ce qu'un corps ne peut acquérir de mouvement, par l'action d'un autre corps, sans l'en dépouiller; de même qu'un vase se remplit aux dépens d'un vase plein qui communique avec lui.

L'égalité de l'action à la réaction, se manifeste dans toutes les actions de la nature : le fer attire l'aimant comme il en est attiré; on observe la même chose dans les attractions et dans les répulsions électriques, et même dans le développement des forces animales; car quel que soit le principe moteur de l'homme et des animaux, il est constant qu'ils reçoivent par la réaction de la matière, une force égale et contraire à celles qu'ils lui communiquent, et qu'ainsi sous ce rapport, ils sont assujettis aux mêmes lois que les êtres animés.

La réciprocité des vitesses aux masses, dans le cas de l'équilibre, sert à déterminer le rapport des masses des différens corps. Celles des corps homogènes sont proportionnelles à leurs volumes que la Géométrie apprend à mesurer. Mais tous les corps ne sont pas de même nature, et les différences qui existent, soit dans leurs molécules intégrantes, soit dans le nombre et la grandeur des intervalles ou pores qui séparent ces molécules, en apportent de très grandes entre leurs masses renfermées sous le même volume. La Géométrie devient alors insuffisante pour déterminer le rapport de ces masses, et il est indispensable de recourir à la Mécanique.

Si l'on imagine deux globes de différentes matières, et que l'on fasse varier leurs diamètres, jusqu'à ce qu'en les animant de vitesses égales et directement contraires, ils se fassent équilibre; on sera sûr qu'ils renfermeront le même nombre de points matériels, et par conséquent, des masses égales. On aura donc ainsi le rapport des volumes de ces substances à égalité de masse; ensuite, à l'aide de la Géométrie, on en conclura le rapport des masses de deux volumes quelconques de mêmes substances. Mais cette méthode serait d'un usage très pénible dans les comparaisons nombreuses qu'exigent à chaque instant, les besoins du commerce. Heureusement, la nature nous offre dans la pesanteur des corps, un moyen très simple de comparer leurs masses.

On a vu dans le chapitre précédent, que chaque point matériel dans le même lieu de la terre, tend à se mouvoir avec la même vitesse par l'action de la pesanteur : la somme de ces tendances est ce qui constitue le poids d'un corps; ainsi les poids sont proportionnels aux masses. Il suit de là que si deux corps suspendus aux extrémités d'un fil qui passe sur une poulie, se font équilibre lorsque les deux parties du fil sont égales de chaque côté de la poulie; les masses de ces corps sont égales, puisque tendant à se mouvoir avec la même vitesse par l'action de la pesanteur, elles agissent l'une sur l'autre, comme si elles se choquaient avec des vitesses égales et directement contraires. On peut encore mettre les deux corps en équilibre, au moyen d'une balance dont les bras et les bassins sont parfaitement égaux, et alors on sera sûr de l'égalité de leurs masses. On aura ainsi le rapport des masses de différens corps, au moyen d'une balance exacte et sensible, et d'un grand nombre de petits poids égaux; en déterminant le nombre de ces poids, nécessaire pour tenir ces masses en équilibre.

La densité d'un corps dépend du nombre de ses points matériels renfermés sous un volume donné; elle est donc proportionnelle au rapport de la masse au volume. Une substance qui n'aurait point de pores aurait la plus grande densité possible : en lui comparant la densité des autres corps, on aurait la quantité de matière qu'ils renferment. Mais ne connaissant point de substances semblables, nous ne pouvons avoir que les densités relatives des corps. Ces densités sont en raison des poids sous un même volume, puisque les poids sont proportionnels aux masses : en prenant ainsi pour unité, la densité d'une substance quelconque, à une température constante, par exemple, le *maximum* de densité de l'eau distillée; la densité d'un corps sera le rapport de son poids à celui d'un pareil volume d'eau réduite à ce *maximum*. Ce rapport est ce que l'on nomme *pesanteur spécifique*.

Tout cela semble supposer que la matière est homogène, et que les corps ne diffèrent que par la figure et la grandeur de leurs pores et de leurs molécules intégrantes. Il est cependant possible qu'il y ait des différences essentielles dans la nature même de ces molécules; et il ne répugne point au peu de notions que nous avons de la matière, de supposer l'espace céleste plein d'un fluide dénué de pores, et cependant tel qu'il n'oppose qu'une résistance insensible, aux mouvemens planétaires. On pourrait ainsi concilier l'inaltérabilité de ces mouvemens, prouvée par les phénomènes, avec l'opinion de ceux qui regardent le vide comme impossible. Mais cela est indifférent à la Mécanique qui ne considère dans les corps, que l'étendue et le mouvement. On peut alors sans craindre aucune erreur, admettre l'homogénéité des élémens de la matière; pourvu que l'on entende par masses égales, des masses qui, animées de vitesses égales et directement contraires, se font équilibre.

Dans la théorie de l'équilibre et du mouvement des corps, on fait abstraction du nombre et de la figure des pores dont il sont parsemés. On peut avoir égard à la différence de leurs densités respectives, en les supposant formés de points matériels plus ou moins denses, parfaitement libres dans les fluides, unis entre eux par des droites sans masse, inflexibles dans les corps durs, flexibles et extensibles dans les corps élastiques et mous. Il est clair que dans ces suppositions, les corps offriraient les apparences qu'ils nous présentent.

Les conditions de l'équilibre d'un système de corps, peuvent toujours être déterminées par la loi de la composition des forces, exposée dans le premier chapitre de ce livre. Car on peut concevoir la force dont chaque point matériel est animé, appliquée au point de sa direction, où vont concourir les forces qui la détruisent, ou qui, en se composant avec elle, forment une résultante qui, dans le cas de l'équilibre, est anéantie par les points fixes du système. Considérons, par exemple, deux points matériels attachés aux extrémités d'un levier inflexible; et supposons ces points sollicités par des forces dont les directions soient dans un plan passant par le levier. En concevant ces forces réunies au point de concours de leurs directions, leur résultante doit, pour l'équilibre, passer par le point d'appui qui peut seul la détruire; et suivant la loi de la composition des forces, les deux composantes doivent être alors réciproques aux perpendiculaires menées du point d'appui, sur leurs directions.

Si l'on imagine deux corps pesans attachés aux extrémités d'un levier inflexible, dont la masse soit supposée infiniment petite par rapport à celle des corps, on pourra concevoir les directions parallèles de la pesanteur, réunies à une distance infinie : dans ce cas, les forces dont chaque corps pesant est animé, ou ce qui revient au même, leurs poids doivent pour l'équilibre, être réciproques aux perpendiculaires menées du point d'appui, sur les directions de ces forces : ces perpendiculaires sont proportionnelles aux bras du levier; ainsi les poids de deux corps en équilibre sont réciproques aux bras du levier auquel ils sont attachés.

Un très petit poids peut donc au moyen du levier et des machines qui s'y rapportent, faire équilibre à un poids très considérable, et l'on peut de cette manière, soulever un énorme fardeau, avec un léger effort; mais il faut pour cela, que le bras du levier auquel la puissance est attachée, soit fort long par rapport à celui qui soulève le fardeau, et que la puissance parcoure un grand espace, pour élever le fardeau à une petite hauteur. Alors on perd en temps, ce que l'on gagne en force, et c'est ce qui a lieu généralement dans les machines. Mais souvent on peut disposer du temps à volonté, tandis que l'on ne peut employer qu'une force limitée. Dans d'autres circonstances où il faut se procurer une grande vitesse, on peut y parvenir au moyen du levier, en appliquant la puissance au bras le plus court. C'est dans la possibilité d'augmenter suivant les besoins, la masse ou la vitesse des corps à mouvoir, que consiste le principal avantage des machines.

La considération du levier a fait naître l'idée des momens. On nomme *moment* d'une force, pour faire tourner le système autour d'un point, le produit de cette force par la distance du point à sa direction. Ainsi dans le cas de l'équilibre d'un levier aux extrémités duquel deux forces sont appliquées, les momens de ces forces par rapport au point d'appui, doivent être égaux et contraires, ou, ce qui revient au même, la somme des momens doit être nulle relativement à ce point.

La projection d'une force sur un plan mené par un point fixe, multipliée par la distance du point à cette projection, est ce que l'on nomme moment de la force pour faire tourner le système autour de l'axe qui passant par le point fixe, est perpendiculaire au plan.

Le moment de la résultante d'un nombre quelconque de forces, par rapport à un point ou à un axe quelconque, est égal à la somme des momens semblables des forces composantes.

Les forces parallèles pouvant être supposées se réunir à une distance infinie, elles sont réductibles à une résultante égale à leur somme et qui leur est parallèle ; en décomposant donc chaque force d'un système de corps, en deux, l'une située dans un plan, l'autre perpendiculaire à ce plan ; toutes les forces situées dans le plan, seront réductibles à une seule, ainsi que toutes les forces perpendiculaires au plan. Il existe toujours un plan passant par le point fixe, et tel que la résultante des forces qui lui sont perpendiculaires est nulle ou passe par ce point : dans ces deux cas, le moment de cette résultante est nul relativement aux axes qui ont ce point pour origine, et le moment des forces du système par rapport à ces axes, se réduit au moment de la résultante située dans le plan dont il s'agit. L'axe autour duquel ce moment est un *maximum*, est celui qui est perpendiculaire à ce plan, et le moment des forces du système, relatif à un axe qui, passant par le point fixe, forme un angle quelconque avec l'axe du plus grand moment, est égal au plus grand moment du système, multiplié par le cosinus de cet angle ; en sorte que ce moment est nul pour tous les axes situés dans le plan auquel l'axe du plus grand mouvement est perpendiculaire.

La somme des carrés des cosinus des angles formés par l'axe du plus grand moment, et par trois axes quelconques perpendiculaires entre eux et passant par le point fixe, étant égale à l'unité, les carrés des trois sommes des momens de forces, relativement à ces axes, sont égaux au carré du plus grand moment.

Pour l'équilibre d'un système de corps liés invariablement entre eux et pouvant se mouvoir autour d'un point fixe, la somme des momens des forces doit être nulle par rapport à un axe quelconque passant par ce point. Il suit de ce qui précède, que cela aura lieu généralement, si cette somme est nulle relativement à trois axes fixes perpendiculaires entre eux. S'il n'y a pas de point fixe dans le système; il faut de plus pour l'équilibre, que les trois sommes des forces décomposées parallèlement à ces axes, soient nulles séparément.

Considérons un système de points pesans attachés fixement ensemble, et rapportés à trois plans perpendiculaires entre eux et liés au système. En décomposant l'action de la pesanteur, parallèlement aux intersections de ces plans; toutes les forces parallèles au même plan, peuvent se réduire a une seule résultante parallèle à ce plan, et égale à leur somme. Les trois résultantes relatives aux trois plans doivent concourir au même point; puisque les actions de la pesanteur sur les divers points du système, étant parallèles, elles ont une résultante unique que l'on obtient en composant d'abord deux de ces forces; ensuite leur résultante, avec une troisième; la résultante des trois forces avec une quatrième, et ainsi du reste. La situation de ce point de concours, par rapport au système, est indépendante de l'inclinaison des plans sur la direction de la pesanteur; car une inclinaison plus ou moins grande ne fait que changer les valeurs des trois résultantes partielles, sans altérer leur position relative aux plans; en supposant donc ce point, fixe; tous les efforts des poids du système seront anéantis, dans toutes les positions qu'il peut prendre en tournant autour de ce point que l'on a nommé par cette raison, *centre de gravité* du système.

Concevons la position de ce centre, et celle des divers points du système, déterminées par les coordonnées parallèles à trois axes perpendiculaires entre eux. Les actions de la pesanteur étant égales et parallèles, et la résultante de ces actions sur le système, passant dans toutes ses positions, par son centre de gravité; si l'on suppose cette résultante successivement parallèle à chacun des trois axes, l'égalité du moment de la résultante, à la somme des momens des composantes, donne l'une quelconque des coordonnées de ce centre, multipliée par la masse entière du système, égale à la somme des produits de la masse de chaque point, par sa coordonnée corespondante. Ainsi la détermination du centre de gravité, dont la pesanteur a fait naître l'idée, en est indépendante. La considération de ce centre, étendue à un système de corps pesans ou non pesans, libres ou liés entre eux d'une manière quelconque, est très utile dans la mécanique.

En généralisant le théorème que nous avons donné à la fin du premier chapitre, sur l'équilibre d'un point; on est conduit au théorème suivant qui renferme de la manière la plus générale, les conditions de l'équilibre d'un système de points matériels animés par des forces quelconques.

Si l'on change infiniment peu la position du système, d'une manière compatible avec la liaison de ses parties, chaque point matériel s'avancera dans la direction de la force qui le sollicite, d'une quantité égale à la partie de cette direction, comprise entre la première position du point, et la perpendiculaire abaissée de la seconde position du point, sur cette direction. Cela posé : *dans l'état d'équilibre, la somme des produits de chaque force par la quantité dont le point auquel elle est appliquée, s'avance dans sa direction, est nulle ; et réciproquement, si cette somme est nulle, quelle que soit la variation du système, il est en équilibre.* C'est en cela que consiste le principe des vitesses virtuelles, principe dont on est redevable à Jean Bernouilli. Mais pour en faire usage, il faut observer de prendre négativement, les produits que nous venons d'indiquer, relatifs aux points qui, dans le changement de position du système, s'avancent en sens contraire de la direction de leurs forces : il faut se rappeler encore, que la force est le produit de la masse d'un point matériel, par la vitesse qu'elle lui ferait prendre, s'il était libre.

En concevant la position de chaque point du système, déterminée par trois coordonnées rectangles ; la somme des produits de chaque force, par la quantité dont le point qu'elle sollicite, s'avance dans sa direction, lorsqu'on fait varier infiniment peu le système, sera exprimée par une fonction linéaire des variations des coordonnées de ses différens points : ces variations ont entre elles, des rapports résultans de la liaison des parties du système; en réduisant donc au moyen de ces rapports, les variations arbitraires au plus petit nombre possible, dans la somme précédente qui doit être nulle pour l'équilibre, il faudra pour qu'il ait lieu dans tous les sens, égaler séparément à zéro, le coefficient de chacune des variations restantes, ce qui donnera autant d'équations qu'il y aura de ces variations arbitraires. Ces équations réunies à celles que donne la liaison des parties du système renfermeront toutes les conditions de son équilibre.

Il existe deux états d'équilibre, très distincts. Dans l'un, si l'on trouble un peu l'équilibre, tous les corps du système ne font que de petites oscillations autour de leur position primitive; et alors, l'équilibre est *ferme* ou *stable*. Cette stabilité est absolue, si elle a lieu quelles que soient les oscillations du système : elle n'est que relative, si elle n'a lieu que par rapport aux oscillations d'une certaine espèce. Dans l'autre état d'équilibre, les corps s'éloignent de plus en plus de leur position primitive, lorsqu'on les en écarte. On aura une juste idée de ces deux états, en considérant une ellipse placée verticalement sur un plan horizontal. Si l'ellipse est en équilibre sur son petit axe, il est clair qu'en l'écartant un peu de cette situation, par un petit mouvement sur elle-même, elle tend à y revenir en faisant des oscillations que les frottemens et la résistance de l'air auront bientôt anéanties. Mais si l'ellipse est en équilibre sur son grand axe; une fois écartée de cette situation, elle tend à s'en éloigner davantage, et finit par se renverser sur son petit axe. La stabilité de l'équilibre dépend donc de la nature des petites oscillations que le système troublé d'une manière quelconque, fait autour de cet état. Pour déterminer généralement de quelle manière les divers états d'équilibre stable ou non stable se succèdent, considérons une courbe rentrante placée verticalement dans une situation d'équilibre stable. Dérangée un peu de cet état, elle tend à y revenir : cette tendance varie à mesure que l'écartement augmente, et lorsqu'elle devient nulle, la courbe se retrouve dans une situation nouvelle d'équilibre, mais qui n'est point stable, puisque la courbe avant d'y arriver, tendait encore vers son premier état. Au-delà de cette dernière situation, la tendance vers le premier état et par conséquent vers le second, devient négative jusqu'à ce qu'elle redevienne encore nulle; et alors, la courbe est dans une situation d'équilibre stable. En continuant ainsi, on voit que les états d'équilibre stable et non stable, se succèdent alternativement, comme les *maxima* et les *minima* des ordonnées dans les courbes. Il est facile d'étendre le même raisonnement, aux divers états d'équilibre d'un système de corps.

CHAPITRE IV.

De l'équilibre des fluides.

La propriété caractéristique des fluides, soit élastiques, soit incompressibles, est l'extrême facilité avec laquelle chacune de leurs molécules obéit à la plus légère pression qu'elle éprouve d'un côté plutôt que d'un autre. Nous allons donc établir sur cette propriété, les lois de l'équilibre des fluides, en les considérant comme formés d'un nombre infini de molécules parfaitement mobiles entre elles.

Il suit d'abord de cette mobilité, que la force dont une molécule de la surface libre d'un fluide est animée, doit être perpendiculaire à cette surface; car si elle lui était inclinée, en la décomposant en deux autres, l'une perpendiculaire, et l'autre parallèle à cette surface, la molécule glisserait en vertu de cette dernière force; la pesanteur est donc perpendiculaire à la surface des eaux stagnantes, qui par conséquent est horizontale. Par la même raison, la pression que chaque molécule fluide exerce contre une surface, doit lui être perpendiculaire.

Chaque molécule intérieure d'une masse fluide, éprouve une pression qui dans l'atmosphère est mesurée par la hauteur du baromètre, et qui peut l'être d'une manière semblable pour tout autre fluide. En considérant la molécule, comme un prisme rectangle infiniment petit; la pression du fluide environnant sera perpendiculaire aux faces de ce prisme qui tendra par conséquent, à se mouvoir perpendiculairement à chaque face, en vertu de la différence des pressions que le fluide exerce sur les deux faces opposées. De ces différences de pressions, résultent trois forces perpendiculaires entre elles, qu'il faut combiner avec les autres forces qui sollicitent la molécule. Il est facile d'en conclure que la différentielle de la pression est, dans l'état d'équilibre, égale à la densité de la molécule fluide, multipliée par la somme des produits de chaque force par l'élément de sa direction; cette somme est donc une différence exacte, si le fluide est incompressible et homogène; résultat important auquel Clairaut est parvenu le premier, dans son bel ouvrage sur la figure de la terre.

Quand les forces sont produites par des attractions qui sont toujours une fonction de la distance aux centres attirans; le produit de chaque force par l'élément de sa direction, est une différentielle exacte; la densité de la molécule fluide doit donc être alors une fonction de la pression, puisque la différentielle de la pression divisée par cette densité, est égale à une différence exacte. Ainsi toutes les couches de la masse fluide dans lesquelles la pression est constante, sont de même densité dans toute leur étendue. La résultante de toutes les forces qui animent chaque molécule de la surface de ces couches est perpendiculaire à cette surface sur laquelle la molécule glisserait, si cette résultante lui était inclinée. Ces couches ont été nommées par cette raison, *couches de niveau.*

La densité d'une molécule d'air atmosphérique, est une fonction de la pression et de la chaleur : sa pesanteur est à très peu près une fonction de sa hauteur au-dessus de la surface de la terre. Si sa chaleur était pareillement une fonction de cette hauteur, l'équation de l'équilibre de l'atmosphère serait une équation différentielle entre la pression et la hauteur; et par conséquent l'équilibre serait toujours possible. Mais dans la nature, la chaleur des diverses parties de l'atmosphère, dépend encore, de la latitude, de la présence du soleil, et de mille autres causes variables ou constantes qui doivent exciter dans cette grande masse fluide, des mouvemens souvent très considérables.

En vertu de la mobilité de ses parties, un fluide pesant peut exercer une pression beaucoup plus grande que son poids : un filet d'eau, par exemple, qui se termine par une large surface horizontale, presse autant la base sur laquelle il repose, qu'un cylindre d'eau de même base et de même hauteur. Pour rendre sensible la vérité de ce paradoxe, imaginons un vase cylindrique fixe, et dont le fond horizontal soit mobile : supposons ce vase rempli d'eau, et son fond maintenu en équilibre par une force égale et contraire à la pression qu'il éprouve. Il est clair que l'équilibre subsisterait toujours, dans le cas où une partie de l'eau viendrait à se consolider et à s'unir aux parois du vase; car l'équilibre d'un système de corps n'est point troublé, en supposant que dans cet état, plusieurs d'entre eux viennent à s'unir, ou à s'attacher à des points fixes. On peut donc former ainsi une infinité de vases de figures différentes, qui tous auront même fond et même hauteur que le vase cylindrique, et dans lesquels l'eau exercera la même pression sur le fond mobile.

En général, lorsqu'un fluide n'agit que par son poids, la pression qu'il exerce contre une surface, équivaut au poids d'un prisme de ce fluide, dont la base est égale à la surface pressée, et dont la hauteur est la distance du centre de gravité de cette surface, au plan de niveau du fluide.

Un corps plongé dans un fluide, y perd une partie de son poids, égale au poids du volume de fluide déplacé ; car avant l'immersion, le fluide environnant faisait équilibre au poids de ce volume de fluide qui, sans troubler l'équilibre, pouvait être supposé former une masse solide; la résultante de toutes les actions du fluide sur cette masse, doit donc faire équilibre à son poids, et passer par son centre de gravité; or il est clair que ses actions sont les mêmes sur le corps qui en occupe la place; l'action du fluide détruit donc une partie du poids de ce corps, égale au poids du volume de fluide déplacé. Ainsi les corps pèsent moins dans l'air que dans le vide: la différence très peu sensible pour la plupart, n'est point à négliger dans des expériences délicates.

On peut, au moyen d'une balance qui porte à l'extrémité d'un de ses fléaux, un corps que l'on plonge dans un fluide, mesurer exactement la diminution de poids que le corps éprouve dans cette immersion, et déterminer sa pesanteur spécifique ou sa densité relative à celle du fluide. Cette pesanteur est le rapport du poids du corps dans le vide, à la diminution de ce poids, lorsque le corps est entièrement plongé dans le fluide. C'est ainsi que l'on a déterminé les pesanteurs spécifiques des corps, comparées au *maximum* de densité de l'eau distillée.

Pour qu'un corps plus léger qu'un fluide, soit en équilibre à sa surface; il faut que son poids soit égal à celui du volume de fluide déplacé. Il faut de plus que les centres de gravité de cette portion du fluide, et du corps, soient sur une même verticale; car la résultante des actions de la pesanteur sur toutes les molécules du corps, passe par son centre de gravité, et la résultante de toutes les actions du fluide sur ce corps, passe par le centre de gravité du volume de fluide déplacé : ces résultantes devant être sur la même ligne pour se détruire; les centres de gravité sont sur la même verticale. Mais il est nécessaire pour la stabilité de l'équilibre, de joindre d'autres conditions aux deux précédentes. On pourra toujours la déterminer par la règle suivante.

Si par le centre de gravité de la section à fleur d'eau, d'un corps flottant, on conçoit un axe horizontal, tel que la somme des produits de chaque élément de la section, par le carré de sa distance à cet axe, soit plus petite que relativement à tout autre axe horizontal mené par le même centre; l'équilibre est stable dans tous les sens, lorsque cette somme surpasse le produit du volume de fluide déplacé, par la hauteur du centre de gravité du corps, au-dessus du centre de gravité de ce volume. Cette règle est principalement utile dans la construction des vaisseaux, auxquels il importe de donner une stabilité suffisante pour résister aux efforts des vagues et des vents. Dans un vaisseau, l'axe mené de la poupe à la proue, est celui par rapport auquel la somme dont on vient de parler, est un *minimum;* il est donc facile, au moyen de la règle précédente, d'en déterminer la stabilité.

Deux fluides renfermés dans un vase, s'y disposent de manière que le plus pesant occupe le fond du vase, et que la surface qui les sépare, est horizontale.

Si deux fluides communiquent au moyen d'un tube recourbé; la surface qui les sépare dans l'état d'équilibre, est à très peu près horizontale, lorsque le tube est fort large : leurs hauteurs au-dessus de cette surface, sont réciproques à leurs pesanteurs spécifiques. En supposant donc à toute l'atmosphère, la densité de l'air à la température de la glace fondante et comprimé par une colonne de mercure de soixante-seize centimètres; sa hauteur serait de 7963^{m}. Mais, parce que la densité des couches atmosphériques diminue à mesure qu'elles sont plus élevées au-dessus du niveau des mers, la hauteur de l'atmosphère est beaucoup plus grande.

CHAPITRE V.

Du mouvement du système des corps.

Considérons d'abord l'action de deux points matériels de masses différentes, et qui, mus sur une même droite, viennent à se rencontrer. On peut concevoir immédiatement avant le choc, leurs mouvemens décomposés de manière qu'ils aient une vitesse commune, et deux vitesses contraires telles qu'en vertu d'elles seules, ils se feraient mutuellement équilibre. La vitesse commune aux deux points n'est pas altérée par leur action mutuelle; cette vitesse doit donc subsister après le choc. Pour la déterminer, nous observerons que la quantité de mouvement de deux points en vertu de cette commune vitesse, plus la somme des quantités de mouvement dues aux vitesses détruites, représente la somme des quantités de mouvement avant le choc, pourvu que l'on prenne avec des signes contraires, les quantités de mouvement dues aux vitesses contraires; mais par la condition de l'équilibre, la somme des quantités de mouvement dues aux vitesses détruites, est nulle; la quantité de mouvement due à la vitesse commune, est donc égale à celle qui existait primitivement dans les deux points; par conséquent, cette vitesse est égale à la somme des quantités de mouvement, divisée par la somme des masses.

Le choc de deux points matériels est purement idéal; mais il est facile d'y ramener celui de deux corps quelconques, en observant, que si ces corps se choquent suivant une droite passant par leurs centres de gravité, et perpendiculaire à leurs surfaces de contact, ils agissent l'un sur l'autre, comme si leurs masses étaient réunies à ces centres; le mouvement se communique donc alors entre eux, comme entre deux points matériels dont les masses seraient respectivement égales à ces corps.

La démonstration précédente suppose qu'après le choc, les deux corps doivent avoir la même vitesse. On conçoit que cela doit être pour les corps mous dans lesquels la communication du mouvement a lieu successivement et par nuances insensibles; car il est visible que dès l'instant où le corps choqué a la même vitesse que le corps choquant, toute action cesse entre eux. Mais entre deux corps d'une dureté absolue, le choc est instantané, et il ne paraît pas nécessaire qu'après, leur vitesse soit la même : leur impénétrabilité mutuelle exige seulement que la vitesse du corps choquant soit la plus petite; d'ailleurs elle est indéterminée. Cette indétermination prouve l'absurdité de l'hypothèse d'une dureté absolue. En effet, dans la nature, les corps les plus durs, s'ils ne sont pas élastiques, ont une mollesse imperceptible, qui rend leur action mutuelle, successive, quoique sa durée soit insensible.

Quand les corps sont parfaitement élastiques, il faut pour avoir leur vitesse après le choc, ajouter ou retrancher de la vitesse commune qu'ils prendraient s'ils étaient sans ressort, la vitesse qu'ils acquerraient ou qu'ils perdraient dans cette hypothèse; car l'élasticité parfaite double ces effets, par le rétablissement des ressorts que le choc comprime; on aura donc la vitesse de chaque corps après le choc, en retranchant sa vitesse avant le choc, du double de cette vitesse commune.

De là il est aisé de conclure que la somme des produits de chaque masse par le carré de sa vitesse, est la même avant et après le choc des deux corps; ce qui a lieu généralement dans le choc d'un nombre quelconque de corps parfaitement élastiques, de quelque manière qu'ils agissent les uns sur les autres.

Telles sont les lois de la communication du mouvement, lois que l'expérience confirme, et qui dérivent mathématiquement des deux lois fondamentales du mouvement, que nous avons exposées dans le second chapitre de ce livre. Plusieurs philosophes ont essayé de les déterminer par la considération des causes finales. Descartes, persuadé que la quantité de mouvement devait se conserver toujours la même dans l'univers, sans égard à sa direction, a déduit de cette fausse hypothèse, de fausses lois de la communication du mouvement, qui sont un exemple remarquable des erreurs auxquelles on s'expose en cherchant à deviner les lois de la nature, par les vues qu'on lui suppose.

Lorsqu'un corps reçoit une impulsion suivant une direction qui passe par son centre de gravité; toutes ses parties se meuvent avec une égale vitesse. Si cette direction passe à côté de ce point; les diverses parties du corps ont des vitesses inégales, et de cette inégalité, résulte un mouvement de rotation du corps autour de son centre de gravité, en même temps que ce centre est transporté avec la vitesse qu'il aurait prise, si la direction de l'impulsion eût passé par ce point. Ce cas est celui de la terre et des planètes. Ainsi pour expliquer le double mouvement de rotation et de translation de la terre, il suffit de supposer qu'elle a reçu primitivement une impulsion dont la direction a passé à une petite distance de son centre de gravité, distance qui dans l'hypothèse de l'homogénéité de cette planète, est à peu près la cent-soixantième partie de son rayon. Il est infiniment peu probable que la projection primitive des planètes, des satellites et des comètes, a passé exactement par leurs centres de gravité; tous ces corps doivent donc tourner sur eux-mêmes. Par une raison semblable, le soleil qui tourne sur lui-même, doit avoir reçu une impulsion qui, n'ayant point passé par son centre de gravité, le transporte dans l'espace, avec le système planétaire, à moins qu'une impulsion dans un sens contraire, n'ait anéanti ce mouvement, ce qui n'est pas vraisemblable.

L'impulsion donnée à une sphère homogène, suivant une direction qui ne passe point par son centre, la fait tourner constamment autour du diamètre perpendiculaire au plan mené par son centre et par la direction de la force imprimée. De nouvelles forces qui sollicitent tous ses points, et dont la résultante passe par son centre, n'altèrent point le parallélisme de son axe de rotation. C'est ainsi que l'axe de la terre reste toujours à très peu près parallèle à lui-même, dans sa révolution autour du soleil; sans qu'il soit nécessaire de supposer avec Copernic, un mouvement annuel des pôles de la terre autour de ceux de l'écliptique.

Si le corps a une figure quelconque, son axe de rotation peut varier à chaque instant : la recherche de ces variations, quelles que soient les forces qui agissent sur le corps, est le problème le plus intéressant de la mécanique des corps durs, par ses rapports avec la précession des équinoxes et avec la libration de la lune. En le résolvant, on a été conduit à ce résultat curieux et très utile, savoir que dans tout corps, il existe trois axes perpendiculaires entre eux, passant par son centre de gravité, et autour desquels il peut tourner

22..

d'une manière uniforme et invariable, quand il n'est point sollicité par des forces étrangères. Ces axes ont été pour cela, nommés *axes principaux de rotation.* Ils ont cette propriété que la somme des produits de chaque molécule du corps par le carré de sa distance à l'axe, est un *maximum* par rapport à deux de ces axes, et un *minimum* par rapport au troisième. Si l'on conçoit le corps tournant autour d'un axe fort peu incliné à l'un ou à l'autre des deux premiers; l'axe instantané de rotation du corps s'en écartera toujours d'une quantité très petite; ainsi la rotation est stable relativement à ces deux premiers axes : elle ne l'est pas relativement au troisième; et pour peu que l'axe instantané de rotation s'en écarte, il fera autour de lui, de grandes oscillations.

Un corps ou un système de corps pesans, de figure quelconque, oscillant autour d'un axe fixe et horizontal, forme un pendule composé. Il n'en existe point d'autres dans la nature, et les pendules simples dont nous avons parlé ci-dessus, ne sont que de purs concepts géométriques propres à simplifier les objets. Il est facile d'y rapporter les pendules composés dont tous les points sont attachés fixement ensemble. Si l'on multiplie la longueur du pendule simple dont les oscillations sont de même durée que celle du pendule composé, par la masse de ce dernier pendule, et par la distance de son centre de gravité à l'axe d'oscillation; le produit sera égal à la somme des produits de chaque molécule du pendule composé, par le carré de sa distance au même axe. C'est au moyen de cette règle trouvée par Huygens, que les expériences sur les pendules composés ont fait connaître la longueur du pendule simple qui bat les secondes.

Imaginons un pendule faisant de très petites oscillations dans un même plan, et supposons qu'au moment où il est le plus éloigné de la verticale, on lui imprime une petite force perpendiculaire au plan de son mouvement; il décrira une ellipse autour de la verticale. Pour se représenter son mouvement, on peut concevoir un pendule fictif qui continue d'osciller comme l'eût fait le pendule réel, sans la nouvelle force qui a été imprimée, tandis que ce pendule réel oscille en vertu de cette force, de chaque côté du pendule idéal, comme si ce pendule fictif était immobile et vertical. Ainsi le mouvement du pendule réel est le résultat de deux oscillations simples, coexistantes et perpendiculaires l'une à l'autre.

Cette manière d'envisager les petites oscillations des corps, peut être étendue à un système quelconque. Si l'on suppose le système dérangé de son état d'équilibre par de très petites impulsions, et qu'ensuite on vienne à lui en donner de nouvelles; il oscillera par rapport aux états successifs qu'il aurait pris en vertu des premières impulsions, de la même manière qu'il oscillerait par rapport à son état d'équilibre, si les nouvelles impulsions lui étaient seules imprimées dans cet état. Les oscillations très petites d'un système de corps, quelque composées qu'elles soient, peuvent donc être considérées comme étant formées d'oscillations simples, parfaitement semblables à celle du pendule. En effet, si l'on conçoit le système primitivement en repos et très peu dérangé de son état d'équilibre, en sorte que la force qui sollicite chaque corps, tende à le ramener au point qu'il occuperait dans cet état, et de plus, soit proportionnelle à la distance du corps à ce point; il est clair que cela aura lieu pendant l'oscillation du système, et qu'à chaque instant, les vitesses des différens corps seront proportionnelles à leurs distances à la position d'équilibre; ils arriveront donc tous au même instant, à cette position, et ils oscilleront de la même manière qu'un pendule simple. Mais l'état de dérangement que nous venons de supposer au système, n'est pas unique. Si l'on éloigne un des corps, de sa position d'équilibre, et que l'on cherche les situations des autres corps, qui satisfont aux conditions précédentes; on parvient à une équation d'un degré égal au nombre des corps du système, mobiles entre eux; ce qui donne pour chaque corps, autant d'espèces d'oscillations simples, qu'il y a de corps. Concevons au système, la première espèce d'oscillations; et à un instant quelconque, éloignons par la pensée, tous les corps de leur position, proportionnellement aux quantités relatives à la seconde espèce d'oscillations. En vertu de la coexistence des oscillations, le système oscillera par rapport aux états successifs qu'il aurait eus par la première espèce d'oscillations, comme il aurait oscillé par la seconde espèce seule, autour de son état d'équilibre; son mouvement sera donc formé des deux premières espèces d'oscillations. On peut semblablement combiner avec ce mouvement, la troisième espèce d'oscillations, et en continuant ainsi de combiner toutes ces espèces, de la manière la plus générale ; on peut composer par la synthèse, tous les mouvemens possibles du système, pourvu qu'ils soient très petits. Réciproquement, on peut par l'analyse, décomposer les mouvemens, en oscillations simples. De là résulte un moyen facile de reconnaître la stabilité absolue de l'équilibre d'un système de corps. Si dans toutes les positions relatives à chaque espèce d'oscillations ; les forces tendent à ramener les corps à l'état d'équilibre, cet état sera stable : il ne le sera pas, ou il n'aura qu'une stabilité relative, si dans quelqu'une de ces positions, les forces tendent à en éloigner les corps.

Il est visible que cette manière d'envisager les mouvemens très petits d'un système de corps, peut s'étendre aux fluides eux-mêmes dont les oscillations sont le résultat d'oscillations simples, existantes à la fois, et souvent en nombre infini.

On a un exemple sensible de la coexistence des oscillations très petites, dans les ondes. Quand on agite légèrement un point de la surface d'une eau stagnante, on voit des ondes circulaires se former et s'étendre autour de lui. En agitant la surface dans un autre point, de nouvelles ondes se forment et se mêlent aux premières : elles se superposent à la surface agitée par les premières ondes, comme elles se seraient disposées sur cette surface, si elle eût été tranquille; en sorte qu'on les distingue parfaitement dans leur mélange. Ce que l'œil aperçoit relativement aux ondes, l'oreille le sent par rapport aux sons ou aux vibrations de l'air, qui se propagent simultanément sans s'altérer, et font des impressions très distinctes.

Le principe de la coexistence des oscillations simples, que l'on doit à Daniel Bernouilli, est un de ces résultats généraux qui plaisent à l'imagination, par la facilité qu'ils lui donnent, de se représenter les phénomènes et leurs changemens successifs. On le déduit aisément de la théorie analytique des petites oscillations d'un système de corps. Ces oscillations dépendent d'équations différentielles linéaires, dont les intégrales complètes sont la somme des intégrales particulières. Ainsi les oscillations simples se superposent les unes aux autres, pour former le mouvement du système; comme les intégrales particulières qui les expriment, s'ajoutent ensemble pour former les intégrales complètes. Il est intéressant de suivre ainsi dans les phénomènes de la nature, les vérités intellectuelles de l'analyse. Cette correspondance dont le système du monde offrira de nombreux exemples, fait l'un des plus grands charmes attachés aux spéculations mathématiques.

Il est naturel de ramener à un principe général, les lois du mouvement des corps; comme on a renfermé dans le seul principe des vitesses virtuelles, les lois de leur équilibre. Pour y parvenir, considérons le mouvement d'un système de corps agissant les uns sur les autres, sans être sollicités par des forces accélératrices. Leurs vitesses changent à chaque instant; mais on peut concevoir chacune de ces vitesses dans un instant quelconque, comme étant composée de celle qui a lieu dans l'instant suivant, et d'une autre vitesse qui doit être détruite au commencement de ce second instant. Si cette vitesse détruite était connue, il serait facile par la loi de la décomposition des forces, d'en conclure la vitesse des corps au second instant; or il est clair que si les corps n'étaient animés que des vitesses détruites, ils se feraient mutuellement équilibre; ainsi les lois de l'équilibre donneront les rapports des vitesses perdues, et il sera aisé d'en conclure les vitesses restantes et leurs directions; on aura donc par l'analyse infinitésimale, les variations successives du mouvement du système et sa position à tous les instans.

Il est clair que si les corps sont animés de forces accélératrices, on pourra toujours employer la même décomposition de vitesses; mais alors, l'équilibre doit avoir lieu entre les vitesses détruites et ces forces.

Cette manière de ramener les lois du mouvement à celles de l'équilibre, dont on est principalement redevable à D'Alembert, est générale et très lumineuse. On aurait lieu d'être surpris qu'elle ait échappé aux géomètres qui s'étaient occupés avant lui, de dynamique: si l'on ne savait pas que les idées les plus simples sont presque toujours celles qui s'offrent les dernières à l'esprit humain.

Il restait encore à unir le principe que nous venons d'exposer, à celui des vitesses virtuelles, pour donner à la mécanique, toute la perfection dont elle paraît susceptible.

C'est ce que Lagrange a fait, et par ce moyen, il a réduit la recherche du mouvement d'un système quelconque de corps, à l'intégration des équations différentielles. Alors, l'objet de la mécanique est rempli, et c'est à l'analyse pure à achever la solution des problèmes. Voici la manière la plus simple de former les équations différentielles du mouvement d'un système quelconque.

Si l'on imagine trois axes fixes perpendiculaires entre eux, et qu'à un instant quelconque, on décompose la vitesse de chaque point matériel d'un système de corps, en trois autres parallèles à ces axes, on pourra considérer chaque vitesse partielle, comme étant uniforme pendant cet instant : on pourra ensuite concevoir à la fin de l'instant, le point animé parallèlement à l'un de ces axes, de trois vitesses, savoir, de sa vitesse dans cet instant, de la petite variation qu'elle reçoit dans l'instant suivant, et de cette même variation appliquée en sens contraire. Les deux premières de ces vitesses subsistent dans l'instant suivant ; la troisième doit donc être détruite par les forces qui sollicitent le point, et par l'action des autres points du système. Ainsi en concevant les variations instantanées des vitesses partielles de chaque point du système, appliquées à ce point en sens contraire; le système doit être en équilibre en vertu de toutes ces variations et des forces qui l'animent. On aura par le principe des vitesses virtuelles, les équations de cet équilibre; et en les combinant avec celles de la liaison des parties du système, on aura les équations différentielles du mouvement de chacun de ses points.

Il est visible que l'on peut ramener de la même manière, les lois du mouvement des fluides à celles de leur équilibre. Dans ce cas, les conditions relatives à la liaison des parties du système, se réduisent à ce que le volume d'une molécule quelconque du fluide, reste toujours le même, si le fluide est incompressible; et qu'il dépende de la pression suivant une loi donnée, si le fluide est élastique et compressible. Les équations qui expriment ces conditions et les variations du mouvement du fluide, renferment les différences partielles des coordonnées de la molécule, prises soit par rapport au temps, soit par rapport aux coordonnées primitives. L'intégration de ce genre d'équations offre de grandes difficultés, et l'on n'a pu y réussir encore que dans quelques cas particuliers relatifs au mouvement des fluides pesans dans des vases, à la théorie du son, et aux oscillations de la mer et de l'atmosphère.

La considération des équations différentielles du mouvement d'un système de corps, a fait découvrir plusieurs principes de mécanique, très utiles et qui sont une extension de ceux que nous avons présentés sur le mouvement d'un point, dans le second chapitre de ce livre.

Un point matériel se meut uniformément en ligne droite, s'il n'éprouve pas l'action de causes étrangères. Dans un système de corps agissant les uns sur les autres sans éprouver l'action de causes extérieures, le centre commun de gravité se meut uniformément en ligne droite, et son mouvement est le même que si tous les corps étant supposés réunis à ce point, toutes les forces qui les animent, lui étaient immédiatement appliquées; en sorte que la direction et la quantité de leur résultante, restent constamment les mêmes.

On a vu que le rayon vecteur d'un corps sollicité par une force dirigée vers un point fixe, décrit des aires proportionnelles aux temps. Si l'on suppose un système de corps agissant les uns sur les autres d'une manière quelconque, et sollicités par une force dirigée vers un point fixe; si de ce point on mène à chacun d'eux, des rayons vecteurs que l'on projette sur un plan invariable passant par ce point; la somme des produits de la masse de chaque corps, par l'aire que trace la projection de son rayon vecteur, est proportionnelle au temps. C'est en cela que consiste le principe de *la conservation des aires.*

S'il n'y a pas de point fixe vers lequel le système soit attiré, et qu'il ne soit soumis qu'à l'action mutuelle de ses parties; on peut prendre alors tel point que l'on veut, pour origine des rayons vecteurs.

Le produit de la masse d'un corps, par l'aire que décrit la projection de son rayon vecteur, pendant une unité de temps, est égal à la projection de la force entière de ce corps, multipliée par la perpendiculaire abaissée du point fixe, sur la direction de la force ainsi projetée : ce dernier produit est le moment de la force pour faire tourner le système autour de l'axe qui, passant par le point fixe, est perpendiculaire au plan de projection; le principe de la conservation des aires revient donc à ce que la somme des momens des forces finies pour faire tourner le système autour d'un axe quelconque, passant par le point fixe, somme qui, dans l'état d'équilibre est nulle, est constante dans l'état de mouvement. Présenté de cette manière, ce principe convient à toutes les lois possibles entre la force et la vitesse.

On nomme *force vive* d'un système, la somme des produits de la masse de chaque corps par le carré de sa vitesse. Lorsqu'un corps se meut sur une courbe ou sur une surface, sans éprouver d'action étrangère; sa force vive est toujours la même, puisque sa vitesse est constante. Si les corps d'un système n'éprouvent d'autres actions, que leurs tractions et pressions mutuelles, soit immédiatement, soit par l'entremise de verges et de fils inextensibles et sans ressort; la force vive du système est constante, dans le cas même où plusieurs de ces corps sont astreints à se mouvoir sur des lignes ou sur des surfaces courbes. Ce principe que l'on a nommé *principe de la conservation des forces vives*, s'étend à toutes les lois possibles entre la force et la vitesse; si l'on désigne par *force vive* d'un corps, le double de l'intégrale du produit de sa vitesse, par la différentielle de la force finie dont il est animé.

Dans le mouvement d'un corps sollicité par des forces quelconques, la variation de la force vive est égale à deux fois le produit de la masse du corps, par la somme des forces accélératrices multipliées respectivement par les quantités élémentaires dont le corps s'avance vers leurs origines. Dans le mouvement d'un système de corps, le double de la somme de tous ces produits, est la variation de la force vive du système.

Concevons que, dans le mouvement du système, tous les corps arrivent au même instant, dans la position où il serait en équilibre en vertu des forces accélératrices qui le sollicitent : la variation de la force vive y sera nulle par le principe des vitesses virtuelles; la force vive sera donc alors à son *maximum* ou à son *minimum*. Si le système n'était mû que par une seule espèce de ses oscillations simples; les corps en partant de la situation d'équilibre, tendraient à y revenir si l'équilibre est stable; leurs vitesses diminueraient donc à mesure qu'ils s'en éloigneraient, et par conséquent la force vive serait dans cette position, un *maximum*. Mais si l'équilibre n'était point stable, les corps en s'éloignant de cet état, tendraient à s'en écarter davantage, et leurs vitesses iraient en croissant; leur force vive serait donc alors un *minimum*. De là on peut conclure que si la force vive est constamment un *maximum*, lorsque les corps parviennent au même instant à la position d'équilibre, quelle que soit leur vitesse, l'équilibre est stable; et qu'au contraire, il n'a ni stabilité absolue, ni stabilité relative, si la force vive dans cette position du système, est constamment un *minimum*.

Enfin, on a vu dans le second chapitre, que la somme des intégrales du produit de chaque force finie du système, par l'élément de sa direction, somme qui dans l'état d'équilibre est nulle, devient un *minimum* dans l'état de mouvement. C'est en cela que consiste le principe de la moindre action, principe qui diffère de ceux du mouvement uniforme du centre de gravité, de la conservation des aires et des forces vives, en ce que ces principes sont de véritables intégrales des équations différentielles du mouvement des corps; au lieu que celui de la moindre action n'est qu'une combinaison singulière de ces mêmes équations.

La force finie d'un corps, étant le produit de sa masse par sa vitesse, et la vitesse multipliée par l'espace décrit dans un élément du temps, étant égale au produit de cet élément par le carré de la vitesse ; le principe de la moindre action peut s'énoncer ainsi. L'intégrale de la force vive d'un système, multipliée par l'élément du temps, est un *minimum;* en sorte que la véritable économie de la nature, est celle de la force vive. C'est aussi l'économie que l'on doit se proposer dans la construction des machines qui sont d'autant plus parfaites, qu'elles emploient moins de force vive, pour produire un effet donné. Si les corps ne sont sollicités par aucunes forces accélératrices, la force vive du système est constante; le système parvient donc d'une position à une autre quelconque, dans le temps le plus court.

On doit faire une remarque importante sur l'étendue de ces divers principes. Celui du mouvement uniforme du centre de gravité, et le principe de la conservation des aires, subsistent dans le cas même où par l'action mutuelle des corps, il survient des changemens brusques dans leurs mouvemens, et cela rend ces principes très utiles dans beaucoup de circonstances; mais le principe de la conservation des forces vives, et celui de la moindre action exigent que les variations du mouvement du système, se fassent par des nuances insensibles.

Si le système éprouve des changemens brusques par l'action mutuelle des corps ou par la rencontre d'obstacles, la force vive reçoit à chacun de ces changemens, une diminution égale à la somme des produits de chaque corps par le carré de sa vitesse détruite, en concevant sa vitesse avant le changement, décomposée en deux, l'une qui subsiste, l'autre qui est anéantie, et dont le carré est évidemment égal à la somme des carrés des variations que le changement fait éprouver à la vitesse décomposée parallèlement à trois axes quelconques perpendiculaires entre eux.

Tous ces principes subsisteraient encore, eu égard au mouvement relatif des corps du système, s'il était emporté d'un mouvement général et commun aux foyers des forces, que nous avons supposés fixes. Ils ont pareillement lieu dans le mouvement relatif des corps sur la terre, car il est impossible, comme nous l'avons déjà observé, de juger du mouvement absolu d'un système de corps, par les seules apparences de son mouvement relatif.

Quels que soient le mouvement du système et les variations qu'il éprouve par l'action mutuelle de ses parties; la somme des produits de chaque corps, par l'aire que sa projection trace autour du centre commun de gravité, sur un plan qui passant par ce point, reste toujours parallèle à lui-même, est constante. Le plan sur lequel cette somme est un *maximum*, conserve une situation parallèle, pendant le mouvement du système : la même somme est nulle par rapport à tout plan qui passant par le centre de gravité, est perpendiculaire à celui dont nous venons de parler; et les carrés de trois sommes semblables relatives à trois plans quelconques menés par le centre de gravité, et perpendiculaires entre eux, sont égaux au carré de la somme qui est un *maximum*. Le plan correspondant à cette somme, jouit encore de cette propriété remarquable, savoir que la somme des projections des aires tracées par les corps, les uns autour des autres, et multipliées respectivement par le produit des masses des deux corps que joint chaque rayon vecteur, est un *maximum* sur ce plan, et sur tous ceux qui lui sont parallèles. On peut donc ainsi retrouver à tous les instans, un plan qui passant par l'un quelconque des points du système, conserve toujours une situation parallèle; et comme en y rapportant le mouvement des corps, deux des constantes arbitraires de ce mouvement disparaissent; il est aussi naturel de choisir ce plan, pour celui des coordonnées, que d'en fixer l'origine, au centre de gravité du système.

FIN DU PREMIER VOLUME.