ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DAL

prof. Francesco Brioschi

IN MILANO

colla cooperazione dei professori:

Luigi Cremona *in Roma* — **Eugenio Beltrami** *in Roma*
Ulisse Dini *in Pisa.*

SERIE II - TOMO XXII
(dal gennaio al dicembre dell'anno 1894).

MILANO

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico.

(*Di* E. Bertini, *a Pisa.*)

La geometria sopra una curva algebrica è argomento di capitale importanza e dovrebbe avere fra i geometri italiani maggior numero di cultori. La sua origine è da ricercare, per le curve di genere $p \geqq 1$, nella teoria riemanniana delle funzioni algebriche, che ne fornì in forma trascendente i primi e fondamentali teoremi; mentre la geometria sopra una curva di genere $p = 0$ nacque, si può dire, coll'introduzione e coll'applicazione del principio di corrispondenza.

È uno dei grandi meriti di Clebsch l'aver dato veste geometrica ad alcuno dei teoremi riemanniani e l'averne fatte varie e utili applicazioni. La *Theorie der Abelschen Functionen* di Clebsch e Gordan (*), non solo si giova dei concetti e dei metodi della geometria analitica delle curve, ma presenta già proposizioni di geometria sopra una curva piana, ottenute principalmente per mezzo di trasformazioni birazionali. Come validi contributi ed ajuti alla geometria sopra una curva sono da considerare anche il principio di corrispondenza Cayley-Brill e l'importante relazione di Zeuthen fra i generi di due curve in corrispondenza $(\alpha\alpha')$; e, come caso particolare notevole, lo studio della geometria sopra una cubica $(p = 1)$ fatto da Sylvester.

Ma il problema di esporre con dimostrazioni puramente algebriche e con metodo uniforme le principali verità conseguite per via trascendente sulle funzioni o curve algebriche di genere qualsivoglia, trovò una soluzione, per alcuni lati completa, soltanto nella classica Memoria di Brill e Noether: *Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie* (Math. Ann., t. 7); da cui emana la maggior parte dei lavori pubblicati di poi su quel-

(*) Al ricordo della quale Opera deve associarsi quello delle due belle pubblicazioni di Cremona: *Sugli integrali a differenziale algebrico* (Mem. dell'Accad. delle Sc. di Bologna, 1869); *Sulla trasformazione delle curve iperellittiche* (Rend. del R. Ist. lomb., 1869).

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XXII.° (SERIE II.ª)

ERRATA-CORRIGE

delle pagine 1 a 142 del Tomo XXII.

Pag. 7, lin. 15 e 17, invece di « ordine » leggasi « dimensione ».

» 7, lin. 9 da sotto, invece di « ... *una serie* g_n^ϱ $(\rho \geqq 0)$ *esistono in una serie* $g_n^{r+r'-\varrho}$ (questa avendo la dimensione minima se quella ha la massima) » leggasi « ... *una serie* g_n^ϱ $(\rho \geqq 0)$, *e non una* $g_n^{\varrho+1}$, *esistono in una serie* $g_n^{r+r'-\varrho}$ ».

» 9, lin. 21, invece di n leggasi m.

» 9, lin. 22, invece di $g_{(m+1)n}$ leggasi $g_{m(n+1)}$.

» 11, lin. 9, dopo « *comune* » aggiungasi « (*e non una* $g_\nu^{\varrho+1}$) ».

» 17, lin. 9, invece di r leggasi n.

» 19, lin. 10, invece di φ_{n-3} leggasi φ_{m-3}.

» 21, lin. 21, invece di « $g_{n+1}^{r+1} + P_2 = g_n^r + P_1 + P_2$ » leggasi « $g_{n+1}^{r+1} + P_2$ che contiene la $g_n^r + P_1 + P_2$ ».

» 21, lin. 2 da sotto, invece di n leggasi r.

» 25, lin. 9, invece di 8 leggasi s.

» 28, lin. 3 e 4 da sotto, invece di « $\frac{p(p-4)}{2}$ » leggasi « $\frac{p(p-4)}{4}$ ».

» 31, lin. 19, invece di « spezzantesi » leggasi « spezzantisi ».

» 32, lin. 19, invece di « $m-1$ » leggasi « $m-i$ ».

» 34, lin. 5 da sotto, invece di « della rete » leggasi « del sistema ».

» 35, lin. 10 da sotto, invece di « $K-1$ » leggasi « $1-K$ ».

» 58, lin. 3 da sotto, invece che « ad una M_{d-1} generica » leggasi « a $k-1$ M_{d-1} generiche ».

» 62, lin. 8, dopo « *altre serie* » aggiungasi « *lineari* ».

» 62, lin. 9 da sotto, invece che « degl'iperpiani » leggasi « dagl'iperpiani ».

» 63, lin. 2 delle note, invece di « avranno comune un $S_{r-r'-1}$ » leggasi « staranno in un $S_{r-r'+1}$ ».

» 63, lin. 6 delle note, invece di $S_{r-r'-1}$ leggasi $S_{r-r'+1}$.

» 71, lin. 11, invece che « della 2.ª » leggasi « dalla 2.ª ».

» 91, lin. 5 da sotto, si cancellino le parole « dei gradi α, α' ».

» 126, lin. 13 da sotto, invece di g_n^0 leggasi $g_{n'}^0$.

» 136 alla fine aggiungasi « (contata tante volte quanta è la classe di quella ∞^1 di spazi) ».

» 137, lin. 4, dopo « $k+1$ » aggiungasi « punti ».

» 140, lin. 2, dopo « S_{r-3} » aggiungasi « (cfr. la nota (*) a pag. 126) ».

---

l'argomento. Fra i quali meritano particolare menzione quelli che estendono ed applicano la teoria alle curve dello spazio a tre e a più dimensioni. La geometria degli iperspazi offre grande semplicità di locuzioni e poderosi mezzi di dimostrazione e di ricerca. In questa direzione i maggiori progressi sono dovuti a NOETHER, SEGRE e CASTELNUOVO.

Il pensiero che possa contribuire a rendere più famigliare fra noi la geometria sopra una curva, l'esporne, secondo il primitivo concetto di BRILL e NOETHER, colle aggiunte e i perfezionamenti posteriori, quella parte che si riferisce alle serie lineari, mi ha indotto alla presente pubblicazione. Il mio valoroso collega e caro amico prof. SEGRE, nel lavoro che esce insieme a questo, appunto basandosi su teoremi degli iperspazi, presenta la teoria sotto altra luce (*).

Suppongo nel lettore la conoscenza delle trasformazioni cremoniane e multiple fra due piani e delle trasformazioni birazionali fra due curve.

INDICE.

(*) È mio debito dichiarare che, nella presente esposizione, mi sono giovato (per il teorema diretto ed inverso di riduzione e per il teorema di RIEMANN-ROCH) di alcune brevi notizie favoritemi dal NOETHER su' suoi corsi in una lettera del 1889; e che mi sono giovato altresì in vari punti (ad es. nei n.i 21, 22) di comunicazioni fattemi dal SEGRE, col quale ebbi frequente scambio di idee, specialmente in relazione alle ricordate notizie di NOETHER. Delle cose di maggior rilievo dovute a SEGRE faccio ciascuna volta espresso cenno.

§ 1. Definizioni. Proposizioni preliminari.

1. Sieno $f=0$ una curva piana algebrica irriduttibile e $\psi=0$ una curva generica (*) (irriduttibile o no) di un sistema lineare qualsivoglia ∞^s. Suppongasi che le curve f, ψ sieno dotate di soli punti multipli ordinarii e presentino in ogni punto comune il caso semplice (cioè non abbiano ivi tangenti comuni), il che, come è noto, si può sempre ottenere, eseguendo una trasformazione cremoniana.

Dei punti d'intersezione di f, ψ si consideri il gruppo formato da tutti i punti variabili, ovvero da questi e da alcuni (anche tutti) punti semplici fissi che f, ψ abbiano eventualmente comuni. Al variare di ψ si ha una totalità di tali gruppi che dicesi *serie lineare* sopra $f=0$. *L'ordine* di una serie è il numero dei punti di un gruppo (compresi quelli fissi). Due gruppi A, B di una serie lineare si chiamano *equivalenti* (o *corresiduali*), il che si rappresenterà qualche volta scrivendo $A \equiv B$ (**).

2. Segue subito che, *togliendo o aggiungendo punti fissi ai gruppi di una serie lineare, si ha una nuova serie lineare;* bastando, per aggiungere punti fissi, considerare un nuovo sistema lineare proveniente dal dato coll'aggiungere a questo una curva arbitraria (fissa) passante per i detti punti fissi. Adunque, *se A, A', B sono gruppi di punti di f, delle due relazioni $A\equiv A'$, $A+B\equiv A'+B$, una qualunque è conseguenza dell'altra.*

3. Se per un gruppo della serie lineare passano infinite curve ψ del sistema lineare che dà la serie, due di queste curve determinano un fascio, di cui la curva generica non sega f in punti variabili; onde apparterrà al fascio e quindi al sistema lineare ψ la curva f insieme forse ad un'altra curva θ e reciprocamente. Se $\psi_0=0$, $\psi'_0=0$ sono due curve per un gruppo si ha quindi identicamente $\psi_0-\psi'_0=\theta f$, introducendo opportuna costante in ψ_0 o ψ'_0.

L'infinità o *dimensione* di una serie lineare è adunque l'infinità stessa s del sistema lineare che la determina, se l'ordine della sua curva generica ψ è minore dell'ordine di f.

(*) Curva *generica* significa curva non *eccezionale*, mentre curva *arbitraria* è una curva qualsiasi. Analogamente si concepiscano in seguito gli elementi (punti, gruppi, ecc.) *eccezionali, generici, arbitrari* di una varietà qualunque.

(**) Prendo questa notazione ed alcune osservazioni dal n.° 1 del lavoro di Castelnuovo: *Le corrispondenze univoche tra gruppi di p punti sopra una curva di genere p* (Rendiconti del R. Ist. lomb., 1892): ove sono enunciati vari teoremi, di cui si troveranno in appresso le dimostrazioni.

Se l'ordine di ψ non è minore di quello di f e la curva f insieme ad una curva variabile in un sistema lineare ∞^σ dà un sistema contenuto in ψ o, come dicesi, *se per f passa una ∞^σ di curve del sistema ψ*, per ogni gruppo della serie lineare passano $\infty^{\sigma+1}$ curve del sistema stesso. Infatti due tali curve ψ_0, ψ'_0 dànno, come vedemmo, un fascio a cui appartiene una curva del sistema ∞^σ e però ψ'_0 (ad es.) appartiene al sistema lineare dato dal sistema ∞^σ e da ψ_0. Adunque, nel presente caso, la dimensione della serie lineare è $r = s - \sigma - 1$. All'equazione del sistema lineare ψ si può sempre dare la forma:

$$h_0\psi_0 + h_1\psi_1 + \cdots + h_r\psi_r + f(\mu_0\theta_0 + \mu_1\theta_1 + \cdots + \mu_\sigma\theta_\sigma) = 0$$

e il sistema stesso potrà essere sostituito, per la determinazione della serie lineare, dall'altro sistema (non passante per f);

$$h_0\psi_0 + h_1\psi_1 + \cdots h_r\psi_r = 0, \tag{1}$$

di cui una ed una sola curva passa per ogni gruppo, e nel quale per $\psi_0 = 0$ (ad es.) si può prendere qualunque altra curva $\psi'_0 = 0$ del sistema primitivo che contenga lo stesso gruppo (in virtù della relazione identica già notata $\psi_0 - \psi'_0 = \theta f$).

4. Una serie lineare di ordine n e di dimensione r si indicherà col simbolo g_n^r (o anche g^r, ovvero g_n, o semplicemente g, se non occorra alcuna indicazione di ordine o di dimensione) e si intenderà sempre segnata sopra f da un sistema (1). Una serie g_n^0 è un gruppo di n punti.

Manifestamente per una g_n^r si ha $r \leqq n$. Se $r = n$, $r - 1$ punti generici di f staccano dal sistema (1) un fascio che dà i punti della curva uno ad uno, cioè f è razionale (*).

(*) Una serie lineare g_n^r si dice anche *serie involutoria* o *involuzione*, perchè r punti generici della curva appartengono ad uno e ad un solo gruppo. Si può domandare: Questa proprietà e l'algebricità delle relazioni che definiscano comunque una serie di gruppi di punti sopra una curva f, sono sufficienti a stabilire la linearità della serie, cioè il potersi essa ottenere con un sistema lineare di curve?

Se la serie è semplicemente infinita, le dette due proprietà non sono sufficienti (occorre inoltre e basta, come si vedrà (n.° 42), che i gruppi della serie corrispondano univocamente ai valori di un parametro o ai punti di una curva razionale). Ad es., in una trasformazione n^{upla} fra due piani, ad una curva arbitraria di genere $p > 0$ del piano n^{uplo} corrisponde nel piano semplice una curva sulla quale esiste una serie di gruppi, di n punti (trasformati di un punto del piano n^{uplo}), avente quelle due proprietà e tuttavia non lineare, altrimenti la curva primitiva sarebbe razionale. È una serie che si dice *irrazio-*

§ 2. Curve aggiunte. Teorema del resto.

5. Una curva (irriducibile o no) di ordine qualsivoglia avente in ogni punto s^{uplo} di f una moltiplicità $s-1$ (almeno), dicesi *aggiunta* ad f. Si ha il seguente teorema fondamentale (*):

Ogni curva aggiunta, che passi per un gruppo di una serie g_n^r, fa parte di un sistema lineare di curve aggiunte, il quale segna la serie.

Sia la serie g_n^r data dal sistema (1) e G' un suo gruppo dato dalla curva $\psi' = 0$ del sistema stesso; e passi per G' una curva aggiunta $\varphi' = 0$ (il che si può ottenere in infiniti modi scegliendo opportunamente alto l'ordine di questa curva; ad es., in modo molto particolare, componendola di rette in numero sufficiente per i punti di G' e per i punti multipli di f). Sia G un altro gruppo (generico) di g_n^r dato dalla curva $\psi = 0$ di (1). Per un teorema noto (**) la forma $\psi\varphi'$ può ottenersi come combinazione lineare di f, ψ': perchè, per le ipotesi fatte, ogni punto s^{uplo} di $f=0$ ed r^{uplo} di $\psi'=0$ è appunto almeno $(s+r-1)^{\text{uplo}}$ per $\psi\varphi'=0$ (anche per $s=1$, $r=1$). Si ha adunque identicamente

$$\psi\varphi' = \psi'\varphi + \theta f,$$

dovendo la curva $\varphi = 0$ essere dello stesso ordine di $\varphi' = 0$ ed avere in ogni punto s^{uplo} di f una moltiplicità $s-1$: onde $\varphi = 0$ è curva aggiunta. Tale curva passa inoltre per i punti di G. Infatti un punto di G è sopra $\psi = 0$ ed $f = 0$ e quindi, se non è sopra $\psi' = 0$ (cioè non è punto fisso della serie g_n^r),

---

nale (chiamando per contrario *razionale* una g_n^1) e di genere eguale al genere della curva primitiva. Parimenti le dette due condizioni sono soddisfatte per la serie composta di tutti i gruppi di r punti di una curva di genere >0 e pure la serie non è lineare, perchè, come vedemmo sopra, una curva sulla quale esiste una g_r^r, è razionale: e nemmeno è lineare la serie che si ottiene riunendo in tutti i modi possibili r gruppi di una serie *semplicemente infinita irrazionale* γ (di che il precedente è caso particolare), altrimenti dal sistema lineare si separerebbe un fascio (per $r-1$ gruppi generici di γ) che darebbe γ.

Esclusi i casi ora considerati, la suddetta domanda ha risposta affermativa. Questa importante proprietà fu dimostrata da Castelnuovo, con considerazioni trascendenti, nella recente Nota: *Sulla linearità delle involuzioni più volte infinite*, ecc. (Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, 1893).

(*) Noether, *Rationale Ausführung*, ecc. (Math. Ann., tom. 23) n.° 27.

(**) Cfr. ad es. il n.° 13 della mia Nota: *Rappresentazione di una forma ternaria per combinazione lineare di due altre* (Rend. del R. Ist. lomb., 1891).

deve appartenere a $\varphi = 0$: mentre, se è anche sopra $\psi' = 0$ e quindi sopra $\varphi' = 0$, essendo doppio per la $\psi\varphi' = 0$, deve pure appartenere a $\varphi = 0$ (*). Scrivendo l'identità precedente per $r + 1$ posizioni indipendenti $\psi_0 = 0$, $\psi_1 = 0, \ldots \psi_r = 0$ di $\psi = 0$, si trova:

$$\varphi'(h_0\psi_0 + h_1\psi_1 + \cdots + h_r\psi_r) = \psi'(h_0\varphi_0 + h_1\varphi_1 + \cdots + h_r\varphi_r) + \theta^* f;$$

(ove φ_0 (ad es.) può essere la φ' di dianzi, prendendo per una delle dette identità la $\varphi'\psi' = \varphi'\psi'$): e, per la determinazione dei gruppi di g_n^r, si potrà prendere, invece di (1), il sistema di curve aggiunte:

$$h_0\varphi_0 + h_1\varphi_1 + \cdots + h_r\varphi_r = 0. \tag{1'}$$

In vero, per la dimostrazione fatta, le curve (1), (1') passano per lo stesso gruppo di g_n^r e la curva (1') non può avere fuori di quel gruppo punti variabili d'intersezione con f (che dovrebbero trovarsi sopra $\varphi' = 0$).

Due gruppi di punti che formino insieme la completa intersezione di f e di una sua curva aggiunta, astraendo dalle $\Sigma s(s-1)$ intersezioni raccolte nei punti multipli di f per il carattere della aggiunta, si dicono *resto* o *residuo* l'uno dell'altro. Dal teorema dimostrato risulta che qualunque curva aggiunta per un gruppo di una serie g_n^r sega $f = 0$ in un gruppo di punti (fissi, diversi dalle suddette $\Sigma s(s-1)$ intersezioni e dai punti del gruppo considerato), che è resto di ogni gruppo della serie. In altre parole: *qualunque resto di un gruppo di una serie è resto di ogni altro gruppo di essa.* In ciò sta il cosidetto *teorema del resto* e la ragione delle denominazioni di *gruppi corresiduali* a due gruppi di una g_n^r e di *resto di una serie* ad un resto di un suo gruppo (resto che può anche mancare affatto). Una serie ha infiniti resti.

6. Le cose precedenti possono estendersi considerando, non tutti i punti multipli di f, ma una parte soltanto di essi, che diremo formare il gruppo A. Allora curva aggiunta ad f rispetto ad A è ogni curva che ha la proprietà di aggiunta nei punti multipli di A (cioè in ogni tale punto s^{uplo} un punto $(s-1)^{\text{uplo}}$). Si dimostra come dianzi che, se per un gruppo di una serie data da un qualsivoglia sistema lineare di curve, che non abbia punti base in punti multipli di f esterni al gruppo A, passa una curva aggiunta rispetto ad A,

---

(*) Ciò per l'osservazione generale, da aggiungersi al secondo comma del n.° 13 della mia Nota citata, che, se $F = 0$ ha in un punto comune una moltiplicità $l + \lambda$ almeno, $A = 0$, $B = 0$ devono avere in quel punto rispettivamente moltiplicità λ, l: per che vale la stessa dimostrazione ivi indicata.

quella serie può sempre essere ottenuta mediante un sistema lineare di curve aggiunte rispetto ad A, del qual sistema essa curva aggiunta fa parte. In generale le dimostrazioni e i teoremi più importanti che si esporranno in seguito valgono anche nel caso accennato; solo introducendo nei ragionamenti e negli enunciati « rispetto al gruppo A » (*).

Maggiore estensione ha dato Noether ai suddetti concetti nella Memoria: *Ueber die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curve mit nicht-adjungirten Curven* (Math. Ann., tom. 15), nella quale sono necessarie due forme diverse per il teorema del resto.

7. Se R è resto di g_n^r e (1') il sistema lineare di curve aggiunte per R che dà la serie, una curva $\varphi_0 = 0$ (ad es.) può essere sostituita da ogni altra curva aggiunta $\varphi'_0 = 0$ dello stesso ordine che passa per lo stesso gruppo e per R (valendo l'osservazione fatta nel n.° 3, cioè essendo $\varphi_0 - \varphi'_0 = \theta f$).

Di una serie g_n^r $r+1$ gruppi si dicono *indipendenti* se non appartengono a serie di ordine inferiore. Tali sono quelli segnati da $r+1$ curve indipendenti del sistema (1') (o del sistema (1)), ad es. dalle $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0, \ldots \varphi_r = 0$ (altrimenti queste curve dovrebbero appartenere ad un sistema di ordine $< r$). Viceversa, se si hanno $r+1$ gruppi indipendenti di una serie g_n^r ed R è resto della serie ottenuto con curve aggiunte di un certo ordine, facendo passare $r+1$ *qualunque* di queste per gli $r+1$ gruppi e per R si ha un sistema (1'). Se $r+1$ gruppi indipendenti di una g_n^r hanno punti comuni, questi sono punti fissi della serie. Due gruppi distinti di una g_n^1 sono indipendenti.

Adunque se una serie g_n^r è contenuta in un'altra serie $g_n^{r'}$ (cioè ogni gruppo di quella è di questa) si potrà in primo luogo prendere per le due serie uno stesso resto (il che si può sempre fare per due serie che abbiano un gruppo comune) e poi determinare le due serie g_n^r, $g_n^{r'}$ con due sistemi lineari (1'), di cui il primo sia contenuto nel secondo. Ne risulta il seguente teorema.

8. *Due serie g_n^r, $g_n^{r'}$ che hanno comune una serie g_n^ρ ($\rho \geq 0$) esistono in una serie $g_n^{r+r'-\rho}$* (questa avendo la dimensione minima se quella ha la massima).

Basterà segare sopra f le tre serie con tre sistemi lineari (1') ∞^r, $\infty^{r'}$, ∞^ρ, di cui il terzo sia contenuto nei primi due. Questi ultimi, per un teorema noto (**), esistono in un sistema lineare $\infty^{r+r'-\rho}$: e però ecc.

(*) Cfr. Castelnuovo, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* (Mem. della R. Accad. delle Sc. di Torino, 1891): nota al n.° 11, *b*).

(**) Eccone la dimostrazione. Sia:

$$h_0\varphi_0 + h_1\varphi_1 + \cdots + h_\rho\varphi_\rho = 0 \tag{1}$$

Come caso particolare si ha che *due gruppi equivalenti ad un terzo sono equivalenti fra loro,* giacchè i due gruppi apparterranno a due serie aventi almeno il terzo gruppo (cioè una serie g^0) comune. Segue, tenendo presente il n.° 2, che, rappresentando A, A', B, B' gruppi di punti, delle tre relazioni

$$A \equiv A', \qquad B \equiv B', \qquad A + B \equiv A' + B',$$

una qualunque è conseguenza delle due rimanenti.

§ 3. Serie complete. Serie residue.

9. Una serie g_n^r dicesi *completa* quando non è contenuta in una serie di dimensione superiore (e dello stesso ordine).

Un gruppo di n punti (comunque dati) individua una serie completa. Infatti se due serie di ordine n, a cui appartenga quel gruppo, non giacciono una nell'altra, sono contenute in una stessa serie di quell'ordine e di dimensione superiore a ciascuna (n.° 8): sicchè fra le serie di ordine n contenenti il detto gruppo esisterà una ed una sola (quella di dimensione massima $\leq n$)

---

il sistema comune è

$$h_0 \varphi_0 + h_1 \varphi_1 + \cdots + h_\varrho \varphi_\varrho + h_{\varrho+1} \varphi_{\varrho+1} + \cdots + h_r \varphi_r = 0 \tag{2}$$

$$h_0 \varphi_0 + h_1 \varphi_1 + \cdots + h_\varrho \varphi_\varrho + h_{\varrho+1} \varphi'_{\varrho+1} + \cdots + h_{r'} \varphi'_{r'} = 0, \tag{3}$$

i due sistemi che lo contengono. Questi esistono allora nel sistema

$$h_0 \varphi_0 + \cdots + h_\varrho \varphi_\varrho + h_{\varrho+1} \varphi_{\varrho+1} + \cdots + h_r \varphi_r + h_{r+1} \varphi'_{\varrho+1} + \cdots + h_{r+r'-\varrho} \varphi'_{r'} = 0, \tag{4}$$

che è al più $\infty^{r+r'-\varrho}$. Che se (1) è il sistema di dimensione massima comune a (2), (3) o, ciò che è lo stesso, se non esiste fuori di (1) alcuna curva appartenente a (2), (3) [altrimenti tale curva con (1) darebbe un sistema $\infty^{\varrho+1}$ comune a (2), (3)], il sistema (4) è quello di dimensione minima che li contiene. Basta provare che $\varphi_0, \ldots \varphi_\varrho$, $\varphi_{\varrho+1}, \ldots \varphi_r$, $\varphi'_{\varrho+1}, \ldots \varphi'_{r'}$ sono $r + r' - \rho + 1$ funzioni linearmente indipendenti, cioè che fra esse non sussiste una relazione lineare identica a coefficienti costanti. Se la (4), ove le h sieno ora numeri dati (non più parametri), potesse essere una cosifatta relazione, la curva

$$h_0 \varphi_0 + \cdots + h_\varrho \varphi_\varrho + h_{\varrho+1} \varphi_{\varrho+1} + \cdots + h_r \varphi_r = 0 = - h_{r+1} \varphi'_{\varrho+1} - \cdots - h_{r+r'-\varrho} \varphi'_{r'},$$

sarebbe evidentemente curva comune ai due sistemi e quindi apparterrebbe ad (1), cioè sarebbe rappresentabile anche nella forma $\mu_0 \varphi_0 + \mu_1 \varphi_1 + \cdots + \mu_\varrho \varphi_\varrho = 0$. Si avrebbe dunque identicamente $\mu_0 \varphi_0 + \mu_1 \varphi_1 + \cdots + \mu_\varrho \varphi_\varrho + h_{r+1} \varphi'_{\varrho+1} + \cdots + h_{r+r'-\varrho} \varphi'_{r'} = 0$ (racchiudendo nei numeri μ o h un fattore di proporzionalità): il che contraddice all'essere il sistema (3) un sistema $\infty^{r'}$. (Questa dimostrazione è di SEGRE.)

che le conterrà tutte. E ne risulta che *ogni serie che ha con una serie completa un gruppo comune giace in essa.*

Una serie non completa dicesi *parziale* o *incompleta.*

10. *Il sistema lineare di tutte le curve aggiunte di un dato ordine, passanti o no per punti semplici qualsiansi della curva f, segnano su questa una serie completa,* perchè ogni altra serie che abbia con essa un gruppo comune deve essere data, per il teorema del resto (n.° 5) o da quel sistema lineare o da un suo subordinato. Viceversa una serie completa è sempre data da un sistema di curve aggiunte definite soltanto dal passaggio per punti fissi di f.

Ad es. una serie completa si ottiene fissando che curve aggiunte di dato ordine abbiano in un punto A s^{uplo} di f (o in più) pure un punto s^{uplo}; perchè, avendo esse già in A un punto $(s-1)^{\text{uplo}}$, acquistano ivi la moltiplicità s, facendole passare per gli s punti di f successivi ad A sugli s rami, cioè imponendo condizioni consistenti soltanto in passaggi per punti di f (*).

11. *Se una serie completa ha punti fissi, tralasciando questi punti (in tutto o in parte) si ha ancora una serie completa.* Non può infatti la nuova serie essere contenuta in un'altra (dello stesso ordine), chè, aggiungendo i punti fissi tralasciati, si avrebbe una nuova serie (n.° 2) nella quale la proposta sarebbe contenuta. *La reciproca non è vera* (**). Ad es., se f è di ordine m e priva di singolarità, tutte le curve (aggiunte) di ordine $n < m-1$ segnano una serie $g_{mn}^{\frac{n(n+3)}{2}}$ che è completa (n.° 10 e cfr. n.° 3): aggiungendo n punti fissi in linea retta si ha la serie $g_{(m+1)n}^{\frac{n(n+3)}{2}}$ contenuta nella $g_{(m+1)n}^{\frac{(n+1)(n+4)}{2}}$, pure completa, data da tutte le curve di ordine $n+1$. Un altro esempio si incontra alla fine del numero seguente.

12. Di una serie completa $g^{\varrho}_{n+n'}$ si considerino tutti quei gruppi che hanno n punti (comunque dati) comuni. *I loro gruppi residui (cioè esclusi questi n punti) formano una serie completa $g^{r'}_{n'}$*: giacchè, se $g^{r'}_{n'}$ fosse contenuta in un'altra serie, aggiungendo gli n punti esclusi, si avrebbe una serie di ordine $n+n'$ non contenuta nella $g^{\varrho}_{n+n'}$ e avente con essa infiniti gruppi comuni. Quanto alla dimensione r' della serie $g^{r'}_{n'}$ occorre conoscere un altro elemento, cioè il numero delle nuove condizioni a cui deve soddisfare la curva generica di un sistema lineare (qualunque) che dà $g^{\varrho}_{n+n'}$ affine di contenere i

(*) Un'applicazione di questa osservazione si troverà nel n.° 49.

(**) La risposta al quesito: Quand'è che aggiungendo punti fissi ad una serie completa si ha ancora una serie completa? sarà data dal teorema di riduzione (n.° 20).

detti n punti; o, come dicesi brevemente, *il numero delle condizioni che questi n punti presentano alla detta curva, o alla serie $g^0_{n+n'}$ (o ad un suo gruppo generico).* Detto ν questo numero, deve aversi manifestamente $\nu \leqq \rho$, $\nu \leqq n$ ed $r' = \rho - \nu$.

Se si aggiungono a $g^{r'}_{n'}$ gli n punti esclusi, cioè di una serie $g^0_{n+n'}$ completa si considerano i gruppi con n punti comuni (che non sieno tutti fissi per essa) si ha una serie incompleta, cioè contenuta nella stessa $g^0_{n+n'}$.

13. Due serie g^r_n, $g^{r'}_{n'}$ si dicono *residue l'una dell'altra rispetto ad una terza serie $g^0_{n+n'}$*, se due gruppi qualunque, uno di una, l'altra dell'altra serie formano sempre insieme un gruppo della terza serie. Il resto di una serie, ottenuta con curve aggiunte di un certo ordine (n.° 5), è una serie g^0 residua di quella rispetto alla serie segnata da tutte le curve aggiunte di quell'ordine.

Il teorema del n.° 12 è (per $r = 0$) caso particolare del seguente: *Una serie g^r_n (completa o no) contenuta* (*) *in una serie completa $g^0_{n+n'}$ ha, rispetto a questa, una serie residua $g^{r'}_{n'}$ completa.* La serie $g^{r'}_{n'}$ è la serie completa residua di un gruppo G di g^r_n (appunto secondo il teorema del n.° 12). Basta dimostrare che $g^{r'}_{n'}$ è residua di ogni altro gruppo G' di g^r_n. Indichi Γ un gruppo di $g^{r'}_{n'}$ ed Ω un gruppo di $g^0_{n+n'}$: si ha:

$$G \equiv G', \qquad G + \Gamma \equiv \Omega$$

e quindi:

$$G' + \Gamma \equiv G + \Gamma \equiv \Omega:$$

onde $G' + \Gamma$ appartiene alla serie completa $g^0_{n+n'}$, come doveva dimostrarsi.

Se un gruppo di g^r_n presenta ν condizioni alla serie $g^0_{n+n'}$, sarà (n.° 12) $r' = \rho - \nu$. Inoltre, osservando che g^r_n è residua di ciascun gruppo di $g^{r'}_{n'}$ rispetto a $g^0_{n+n'}$ sarà $r \leqq \rho - \nu'$ se ν' è il numero di condizioni che presenta un gruppo di $g^{r'}_{n'}$ alla $g^0_{n+n'}$ ($r = \rho - \nu'$, se anche g^r_n è completa).

Infine notisi che la curva generica di un sistema lineare che dà $g^0_{n+n'}$, la quale passi per un gruppo di g^r_n deve soddisfare precisamente ad r' condizioni onde contenere un gruppo di $g^{r'}_{n'}$; mentre, se non passa per quel gruppo (o contiene soltanto alcuni punti di esso), il detto numero di condizioni potrà crescere. Dunque deve essere $\nu' \geqq r'$ e analogamente $\nu \geqq r$.

(*) Il concetto di serie *contenuta* in un'altra, adoperato precedentemente nel caso che le serie sieno dello stesso ordine, è allargato qui e in seguito a serie di ordine differente, una dicendosi *contenuta* in un'altra quando ogni gruppo di quella fa parte di un gruppo (o di infiniti) di questa.

14. Due serie qualsiansi g_n^r, $g_{n'}^{r'}$ si possono sempre considerare come residue l'una dell'altra rispetto alla serie completa $g_{n+n'}^{\varrho}$ individuata (n.° 9) dagli $n+n'$ punti di due gruppi G, G' appartenenti rispettivamente alle due serie. Giacchè il gruppo G (ad es.) ha rispetto alla $g_{n+n'}^{\varrho}$ una serie residua completa (n.° 13), che, avendo con $g_{n'}^{r'}$ il gruppo G' comune, coincide con essa o la contiene (n.° 9) (*).

15. Il concetto di serie residue permette una estensione del teorema del n.° 8, dovuta a Segre.

Se due serie g_n^r, $g_{n'}^{r'}$ hanno una serie g_ν^ϱ comune e se questa ha serie residua rispetto a ciascuna di quelle, le due serie g_n^r, $g_{n'}^{r'}$ stanno in una $g_{n+n'-\nu}^{r+r'-\varrho}$. Infatti se i gruppi $G_{n-\nu}$, $G_{n'-\nu}$ sono residui di g_ν^ϱ rispetto a g_n^r, $g_{n'}^{r'}$, la serie $g_{n+n'-\nu}^r \equiv g_n^r + G_{n'-\nu}$ (cioè ottenuta coll'aggiungere a g_n^r i punti di $G_{n'-\nu}$) e la $g_{n+n'-\nu}^{r'} \equiv g_{n'}^{r'} + G_{n-\nu}$ hanno comune la serie $g_{n+n'-\nu}^{\varrho} \equiv g_\nu^\varrho + G_{n-\nu} + G_{n'-\nu}$ e però (n.° 8) esisteranno in una serie $g_{n+n'-\nu}^{r+r'-\varrho}$, la quale adunque contiene le g_n^r, $g_{n'}^{r'}$. Se queste serie sono complete, la condizione di avere g_ν^ϱ serie residua rispetto a ciascuna è già soddisfatta per sè (n.° 13).

§ 4. Serie complete in relazione alle curve aggiunte. Serie canonica. Sistema aggiunto puro.

16. Si calcola facilmente la dimensione e l'ordine di una serie (completa) data dal sistema di tutte le curve aggiunte di ordine m'.

Se $m' \geqq m$ (ordine di f), a quel sistema appartiene il sistema lineare formato dalla f e da tutte le curve di ordine $m'-m$. Segue (n.° 3) che la

(*) La serie $g_{n+n'}^{\varrho}$ può non essere quella di minima dimensione rispetto a cui le serie sono residue. Quella di minima dimensione dicesi *somma* delle due serie. Veggansi le ingegnose considerazioni collegate a questo e ad altri concetti nel lavoro di Castelnuovo: *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (Rendiconti del Circ. mat. di Palermo, 1893): applicate anche a trovare un limite superiore per il genere p di una curva contenente una g_n^r [limite già dato nell'altro lavoro di Castelnuovo: *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (Atti della R. Accad. delle sc. di Torino, 1889). Cfr. anche Bertini: *Intorno ad alcuni teoremi della geometria sopra una curva algebrica* (Atti suddetti, 1890, § 3)]. Il limite è $p \leqq \chi\left[n-r-\frac{\chi-1}{2}(r-1)\right]$ essendo χ intero definito dalle diseguaglianze $\frac{n-1}{r-1}-1 \leqq \chi < \frac{n-1}{r-1}$.

dimensione della serie considerata è

$$r \geqq \frac{m'(m'+3)}{2} - \Sigma \frac{s_i(s_i-1)}{2} - \frac{(m'-m)(m'-m+3)}{2} - 1,$$

se le moltiplicità (ordinarie) di f sono s_1, $s_2, \ldots$ e valendo il segno di eguaglianza se il sistema di curve aggiunte è *regolare* (*) rispetto ai punti multipli di f (cioè le condizioni a cui soddisfa la curva generica del sistema in questi punti sono tutte indipendenti).

Se $m' < m$ si ha invece:

$$r \geqq \frac{m'(m'+3)}{2} - \Sigma \frac{s_i(s_i-1)}{2},$$

che è come prima se $m' = m-1$, $m-2$ (e solo per questi valori).

Adunque, introducendo il genere

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \Sigma \frac{s_i(s_i-1)}{2},$$

si ha:

$$\begin{array}{llll} \text{se} & m' = m-3+\alpha & (\alpha \geqq 1), & r \geqq p-2+m\alpha \\ \text{»} & m' = m-3-\alpha & (\alpha \geqq 0), & r \geqq p-1-m\alpha+\dfrac{\alpha(\alpha+3)}{2}. \end{array}$$

L'ordine n della serie in ciascun caso si ha pure immediatamente, escludendo le $\Sigma s_i(s_i-1)$ intersezioni date dai punti multipli comuni, ed è:

$$\begin{array}{llll} \text{se} & m' = m-3+\alpha & (\alpha \geqq 1), & n = 2p-2+m\alpha \\ \text{»} & m' = m-3-\alpha & (\alpha \geqq 0), & n = 2p-2-m\alpha. \end{array}$$

Inoltre si ha nel 1.° caso $n-r \leqq p$ e nel 2.° $n-r \leqq p-1-\dfrac{\alpha(\alpha+3)}{2}$; diseguaglianze notevoli che esprimono *essere al più p il numero dei punti di intersezione di una curva aggiunta determinati dai rimanenti.*

Una serie completa qualsiasi si ottiene da una serie precedente (n.° 10) facendo passare le curve aggiunte per un certo numero di punti di f (onde n, r decrescono dello stesso numero od anche r decresce meno di n). *Si ha adunque per qualsiasi serie completa* g_n^r, $n-r \leqq p$: mentre *se la serie non e completa* (dovendosi le curve aggiunte sottoporre a condizioni non consistenti in passaggi per punti di f) può avvenire che risulti $n-r > p$.

(*) Denominazione di Castelnuovo. Cfr. *Ricerche generali*, ecc. (Mem. della R. Accad. delle Sc. di Torino, 1891), n.° 2.

17. Una curva aggiunta d'ordine m' si indicherà sempre con $\varphi_{m'}$. Tutte le φ_{m-3} dànno, per ciò che precede, una serie di ordine $2p-2$ e di dimensione $\geqq p-1$, che è detta *serie canonica* (*). In seguito si mostrerà che la dimensione di questa serie è precisamente $p-1$: cioè che la serie canonica è g_{2p-2}^{p-1} [n.° 22 *a*)]. Si mostrerà altresì che la serie data da tutte le curve aggiunte di ordine $m-3+\alpha$, che dal calcolo del n.° 16 risulterebbe essere d'ordine $2p-2+m\alpha$ e di dimensione non inferiore a $p-2+m\alpha$, ha esattamente questa dimensione [n.° 22 *c*)]. Se ne conclude (cfr. n.° 16) *che il sistema lineare delle curve aggiunte di ordine $\geqq m-3$ è regolare rispetto al gruppo dei punti multipli di f.*

Questo teorema in generale non sussiste per le curve aggiunte $\varphi_{m-3-\alpha}$ $(\alpha \geqq 1)$. Se dicasi ρ la sovrabbondanza (**) del sistema di queste curve nei punti multipli di f si ha pure, come conseguenza del calcolo del n.° 16, che la serie segnata da esse è una

$$g_{2p-2-m\alpha}^{p-1-m\alpha+\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}+\rho}; \qquad (A)$$

e che, per l'esistenza delle $\varphi_{m-3-\alpha}$, è condizione necessaria e sufficiente la

$$p-1-m\alpha+\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}+\rho \geqq 0,$$

e quindi condizione sufficiente la

$$p-1-m\alpha+\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} \geqq 0.$$

Può essere utile in qualche particolare questione di considerare direttamente la serie (A) e le curve aggiunte $\varphi_{m-3-\alpha}$ $(\alpha \geqq 1)$: ma i principali teoremi relativi alle φ_{m-3} e alla serie canonica si estendono immediatamente (come si accennerà in seguito, nelle note ai n.i 20, 24, 26) alle $\varphi_{m-3-\alpha}$ e alla serie (A), aggiungendo una curva fissa arbitraria di ordine α (***).

(*) Questa denominazione è stata introdotta dal SEGRE.

(**) Anche questa denominazione è introdotta dal CASTELNUOVO (nello stesso n.° 2 delle *Ricerche* precedentemente citate) a significare il numero delle condizioni che per una curva generica del sistema sono, nei detti punti, conseguenza delle rimanenti.

(***) Sicchè non giova riprodurre per la serie (A) le dimostrazioni che si esporranno in appresso per la serie canonica, come ha fatto il sig. AMODEO nella Nota: *Serie residue nella serie canonica delle curve aggiunte di ordine $m-3-\alpha$* (Rendic. della R. Accad. dei Lincei, 1893): nella quale sono appunto riportate le dette dimostrazioni, che egli aveva ascoltato nelle lezioni del prof. SEGRE e che già da qualche anno erano esposte anche

18. Al sistema lineare delle φ_{m-3} $(p > 1)$, quando si tralascino tutte le curve fisse (se esistono) che entrano a formarlo, si dà il nome di *sistema aggiunto puro.* L'importanza di questo sistema [oltrechè da una proprietà che si dimostrerà in seguito n.° 22 b')] deriva da ciò che il *sistema aggiunto puro è invariantivo per trasformazioni cremoniane* (*). Basta dimostrare che è invariantivo per una trasformazione quadratica. Sia f' la curva trasformata di f; A_1, A_2, A_3 i tre punti fondamentali della trasformazione quadratica nel piano di f ed A'_1, A'_2, A'_3 quelli nel piano di f'. Se i punti A_1, A_2, A_3 sono rispettivamente s_1^{uplo}, s_2^{uplo}, s_3^{uplo} per f, l'ordine di f' è:

$$m' = 2m - s_1 - s_2 - s_3$$

---

nelle mie; dimostrazioni composte dal SEGRE e da me su alcune brevi indicazioni di NOETHER, come accennai in una nota della prefazione. Di nuovo nella Nota del sig. AMODEO c'è il teorema del § 4: ma è questo un teorema illusorio. Perchè, nella relazione

$$\rho \leq \frac{\alpha}{2}(m-3-\alpha),$$

dedotta col teorema di CLIFFORD, il segno di eguaglianza vale solo (n.° 38) per la serie canonica e per le serie complete delle curve iperellittiche [per le quali non esistono φ_{m-4} (n.° 45)]; onde, dando a ρ il valore massimo, si deve porre insieme necessariamente $\alpha = 0$.

La Nota ora ricordata fa seguito all'altra dello stesso autore: *Curve aggiunte minime* (Rendiconti citati, 1893), alla quale pure si possono fare vari appunti. Ad es.° si può osservare: che, per la stessa ragione detta avanti, nell'ultimo teorema del § 3 deve porsi $\alpha = 0$; che nelle proposizioni prima del § 1, seconda del § 3 e prima del § 4 le curve ivi indicate non sono *projezione* l'una dell'altra, ma soltanto *in corrispondenza univoca* fra loro (e che, pure così modificata, non si vede come la condizione del primo teorema del § 1 sia anche sufficiente); che delle due condizioni a principio del § 3 (sulla coesistenza delle quali l'autore ritorna poco dopo) la seconda deve includere la prima, come difatti si verifica per la relazione $\rho \leq \frac{\alpha}{2}(m-3-\alpha)$; che la dimostrazione della nota allo stesso § 3 è di BOBEK, il quale la espone per $\alpha = 2$ e aggiunge in nota «auf analoge Art....» per α qualunque; ecc.

L'ultima proposizione del § 1 di questo medesimo lavoro è la prima parte del teorema del n.° 14 di una mia Nota già citata (Atti della R. Accad. delle Sc. di Torino, 1890), ove si faccia $r = \rho + 2$. La seconda parte del qual teorema dà un limite inferiore per ρ: si ha cioè $\rho > \rho_1 \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$, dicendo ρ_1 la sovrabbondanza per una φ_{m-4} nei punti multipli di f. Combinando colla $\rho < \frac{\alpha}{2}(m-3-\alpha)$, $(\alpha > 0)$, si ottiene la relazione notevole $\rho_1 < \frac{m-3-\alpha}{\alpha+1}$. Ad es. se $m \leq 2\alpha + 4$ si ha $\rho_1 = 0$.

(*) Cfr. i n.[i] 7, 27 delle *Ricerche* più volte citate (Mem. della R. Accad. delle Sc. di Torino, 1891) di CASTELNUOVO.

e le sue moltiplicità nei punti A'_1, A'_2, A'_3 sono:

$$s'_1 = m - s_2 - s_3, \qquad s'_2 = m - s_3 - s_1, \qquad s'_3 = m - s_1 - s_2;$$

mentre ogni altro punto s_i^{uplo} ($i = 4, 5, \ldots$) di f si trasforma in un punto pure s_i^{uplo} di f'. La trasformata φ' di una curva aggiunta φ_{m-3} ha l'ordine:

$$2(m-3) - (s_1 - 1 + \varepsilon_1) - (s_2 - 1 + \varepsilon_2) - (s_1 - 1 + \varepsilon_3) =$$
$$= m' - 3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3,$$

ove $\varepsilon_i = 0$ se $s_i \geqq 1$ ed $\varepsilon_i = 1$ se $s_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$): e nei punti A'_1, A'_2, A'_3 le moltiplicità:

$$m - 3 - (s_2 - 1 + \varepsilon_2) - (s_3 - 1 + \varepsilon_3) = s'_1 - 1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3,$$
$$s'_2 - 1 - \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \qquad s'_3 - 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$

mentre in un punto s_i^{uplo} ($i = 4, 5, \ldots$) di f' ha la moltiplicità $s_i - 1$ come la curva aggiunta $\varphi_{m'-3}$ di essa curva. Ora si osservi che le moltiplicità di questa curva aggiunta in A'_1, A'_2, A'_3 sono $s'_1 - 1$, $s'_2 - 1$, $s'_3 - 1$ e che (ad es.) $s'_1 - 1 + s'_2 - 1 = m' - s_3 - 2$, il qual numero è maggiore di $m' - 3$ se $s_3 = 0$ (e però $\varepsilon_3 = 1$): onde, in tal caso, $A'_1A'_2$ fa parte di $\varphi_{m'-3}$. Segue facilmente che $\varphi_{m'-3}$ è costituita da φ' e dai lati del triangolo $A'_1A'_2A'_3$ corrispondenti a punti di moltiplicità 0 per f. Adunque la parte variabile di φ_{m-3} si trasforma nella parte variabile di $\varphi_{m'-3}$; come asserimmo.

§ 5. Serie speciali e non speciali. Teorema di riduzione. Teorema delle serie speciali e sue conseguenze.

19. Serie *speciale* è una serie lineare che può ottenersi con un sistema lineare di φ_{m-3}; *non speciale* nel caso contrario. Una serie speciale è quindi la serie canonica o contenuta in essa e però ha l'ordine non superiore a $2p-2$ (n.° 17). Una serie è certamente non speciale se il suo ordine è $> 2p - 2$.

20. Teorema di riduzione (*). *Se g_n^r è una serie speciale completa e P un*

(*) Per questo teorema che, sebbene non esplicitamente formulato nella Memoria di Brill e Noether, tuttavia vi appare nel corso delle argomentazioni (cfr. ad es. il ragionamento a pag. 279), veggansi due lavori di Noether nel tom. 97 del Crelle (pag. 224) e nel tom. 37 dei Math. Ann. (pag. 424).

punto fisso che non si trovi sopra tutte le φ_{m-3} passanti per un suo gruppo G (*), la serie g^r_{n+1}, ottenuta aggiungendo P a g^r_n, è completa.

Infatti conducasi per P una retta arbitraria A e per G una φ_{m-3} non passante per P. Esse formano insieme una φ_{m-2} per un gruppo di g^r_{n+1}, che dà un resto R di questa serie costituito dai rimanenti $m-1$ punti d'intersezione della A con f, e da un resto di g^r_n. Tutte le φ_{m-2} per R segnano una serie completa; ma evidentemente si spezzano nella A e nelle φ_{m-3} per il detto resto di g^r_n; dunque segnano precisamente la serie formata dall'aggiungere P a ciascun gruppo di g^r_n.

Quando la φ_{m-3} per G passi anche per P, questo punto fa parte di R anzi del resto di g^r_n e, siccome P esiste sopra A, le φ_{m-3} (che insieme ad A compongono le φ_{m-2} per R) non sono obbligate a passare per esso. Tutte non vi passano diffatti, cioè la g^r_{n+1} non è completa, quando ogni φ_{m-3} per G passa per P (n.° 27) (**).

21. Teorema delle serie speciali. Vedemmo nel n.° 16 che per una serie g^r_n completa speciale si ha $n-r \leq p-1$. Si può ora dimostrare che *una serie (completa o no) per la quale si ha $n-r \leq p-1$, è speciale.*

Basta considerare il caso di g^r_n completa; perchè, se non fosse, la serie completa in cui è contenuta, soddisfa pure alla $n-r \leq p-1$. E basta dimostrare, in virtù del teorema del resto (n.° 5), che per un gruppo di g^r_n passa una φ_{m-3}. Se $r=0$ e quindi $n \leq p-1$, la proprietà è evidente, essendo (almeno) $p-1$ l' ∞ delle φ_{m-3} (n.° 17); ed ora si procede per induzione, cioè, ammesso che tutte le g^{r-1}_{n-1}, per le quali si ha $(n-1)-(r-1) \leq p-1$, sieno speciali, si conclude che ogni g^r_n (che soddisfa già, per la precedente, alla $n-r \leq p-1$) è pure speciale. A tal fine si consideri la serie completa g^{r-1}_{n-1} residua, rispetto a g^r_n di un punto P qualunque (n.° 13), che non sia punto fisso di quest'ultima serie. Per l'ipotesi, sarà g^{r-1}_{n-1} serie speciale e tutte le φ_{m-3} per un gruppo di g^{r-1}_{n-1} dovranno passare per P (cioè complessivamente per un gruppo di g^r_n), giacchè, altrimenti, per il teorema di riduzione (n.° 20), la serie $g^{r-1}_n = g^{r-1}_{n-1} + P$ sarebbe completa, mentre è contenuta nella g^r_n.

(*) Il che ha luogo certamente se P è punto generico di f.

(**) Se una g^r_n completa (speciale) è segnata da un sistema di $\varphi_{m-3-\alpha}$ e tutte le $\varphi_{m-3-\alpha}$ che passano per un suo gruppo, non passano per un punto P, aggiungendo una curva fissa di ordine α, si è nelle stesse ipotesi del teorema dimostrato: e quindi si conclude, senz'altro, che $g^r_n + P$ è completa (cioè il teorema del § 2 della Nota: *Serie residue,* ecc.; del sig. Amodeo).

Il concetto di serie speciale è adunque identico a quello di serie, la cui completa g_n^r soddisfa alla relazione $n - r \leqq p - 1$.

22. Sono numerose ed importanti le conseguenze del precedente teorema:

a) La serie canonica ha la dimensione $p - 1$: cioè le curve aggiunte φ_{m-3} sono ∞^{p-1} (onde il numero p si può definire il numero delle φ_{m-3} linearmente indipendenti). Infatti se l'∞ delle φ_{m-3} che dimostrammo $\geqq p - 1$ (n.° 17), superasse $p - 1$, esisterebbe almeno una g_{2p-2}^p e quindi, aggiungendo un punto fisso, anche una g_{2p-1}^p, la quale, per essere $n - r \leqq p - 1$, sarebbe speciale, il che è assurdo, essendo $r > 2p - 2$ (n.° 19).

b) La serie canonica è l'unica g_{2p-2}^{p-1} esistente sulla curva f. Infatti una g_{2p-2}^{p-1} è (n.° 21) una serie speciale, onde deve essere contenuta e quindi [per a)] coincidente colla serie canonica.

La serie canonica non ha punti fissi: perchè se avesse un punto fisso A, astraendo da esso, si avrebbe una g_{2p-3}^{p-1} e, a questa aggiungendo un punto diverso da A, una g_{2p-2}^{p-1} diversa dalla serie canonica, contrariamente a ciò che ora si è dimostrato (*).

b') Quando le φ_{m-3} si spezzano in una parte fissa e una variabile, non può adunque la parte fissa avere con f intersezioni, fuori di quelle che nei punti multipli di f devono cadere per essere le φ_{m-3} aggiunte; in particolare *non può segare f in punti semplici. La serie g_{2p-2}^{p-1} è data dal sistema aggiunto puro* (n.° 18).

c) Se g_n^r è una serie completa non speciale si ha $n - r = p$. Deve essere (n.° 16) $n - r \leqq p$: ma, la serie non essendo speciale, non può aver luogo che il segno di eguaglianza. La serie $g_{2p-2+m\alpha}^r$ data da tutte le curve aggiunte di ordine $m - 3 + \alpha$ ($\alpha \geqq 1$), essendo l'ordine $2p - 2 + m\alpha > 2p - 2$ (n.° 19) è non speciale e quindi $r = p - 2 + m\alpha$. Anzi la proprietà del n.° 17 può essere qui completata colla osservazione che se una serie g_n^r, completa non speciale, è ottenuta facendo passare le $\varphi_{m-3+\alpha}$ per k punti semplici di f (costituenti adunque un resto di g_n^r), *rispetto a questi punti semplici e ai punti multipli di f il sistema delle $\varphi_{m-3+\alpha}$ è regolare.* Se infatti le condizioni espresse

(*) Le φ_{m-3} possono però avere punti comuni esterni ad f: tali sono, ad es., le $\varphi_{m-3} = \varphi_3$ di una curva di 6.° ordine con otto punti doppi.

Le $\varphi_{m-3-\alpha}$ ($\alpha > 0$) possono avere punti comuni anche su f: cioè la serie data da esse avere punti fissi. Ad es. le φ_{m-4} (ciascuna composta di $m - 4$ rette) di una f di ordine m con un punto $(m - 3)^{\text{uplo}}$ e σ punti doppi, dànno una serie con σ punti fissi che sono le ulteriori intersezioni di f colle rette che congiungono il punto $(m - 3)^{\text{uplo}}$ ai punti doppi.

dai k punti semplici per $\varphi_{m-3+\alpha}$ non fossero k nuove condizioni ma meno, si staccherebbe dalla serie $g_{2p-2+m\alpha}^{p-2+m\alpha}$ una serie speciale per essere $n-r \leqq p-1$ (*).

d) Se $p+k$ punti $(k \geqq 0)$ non esistono sopra una φ_{m-3}, ad es. sono punti generici di f, individuano una serie completa che è non speciale e però, per *c*), una g_{p+k}^{k}; mentre se giacciono sopra una φ_{m-3} appartengono ad una serie g_{p+k}^{r} completa speciale per la quale $p+k-r \leqq p-1$, cioè $r \geqq k+1$.

e) Se due gruppi composti di $n \leqq p$ punti sono equivalenti, essi o coincidono o appartengono ad una stessa serie speciale. Infatti, se non coincidono, appartengono ad una serie g_n^r, per la quale $r \geqq 1$, $n \leqq p$, onde $n-r \leqq p-1$.

f) Anche *l'eguaglianza dei generi p, p' di due curve riferite biunivocamente* discende subito dalle cose esposte. È evidente anzitutto che ad una serie g_n^r di una curva corrisponde una serie g_n^r dell'altra e che le due serie sono insieme complete o no. Prendansi sopra una curva n punti e sia n abbastanza grande da superare amendue i numeri $2p-2$, $2p'-2$. Ne segue (n.° 19) che la serie g_n^r completa individuata da quegli n punti e la sua corrispondente (pure completa) sull'altra curva sono non speciali: quindi, per *c*), $n-r=p$, $n-r=p'$ e però $p=p'$.

g) In due curve riferite biunivocamente ad una serie speciale corrisponde una serie speciale, cioè *l'essere una serie speciale è proprietà invariantiva per trasformazioni birazionali;* perchè, per la serie completa di una g_n^r speciale, è $n-r \leqq p-1$ e i numeri n, r, p, restano invariati per trasformazione birazionale.

§ 6. Teoremi di Riemann-Roch e di Brill-Noether. Teorema di Clifford. Teorema inverso a quello di riduzione.

23. Teorema di Riemann-Roch. *Se g_n^r è una serie speciale completa, per un suo gruppo passano $\infty^{p-1-n+r}$ curve aggiunte φ_{m-3}.*

Se le φ_{m-3} che passano per un gruppo G di g_n^r sono $\infty^{r'}$, per G e per r'

(*) Notevole esempio è quello del n.° 55.

Serie complete non speciali possono ottenersi anche così. Per un punto s^{uplo} di f si tiri una retta e per gli $m-s$ punti residui d'intersezione con f si conduca una φ_{m-2}. Questa, avendo sulla retta $m-1$ punti si spezza nella retta stessa e in una φ_{m-3}^{*}, aggiunta in tutti i multipli di f tranne nel detto punto, ove ha una moltiplicità $s-2$: onde la φ_{m-3}^{*} proviene dall'aggiunta φ_{m-3} rendendo libere precisamente $s-1$ condizioni (cfr. n.° 17). Adunque le φ_{m-3}^{*} segnano una serie completa $g_{2p-2+s}^{p-1+s-1}$ (che ha per resto i suddetti $m-s$ punti) e questa serie è non speciale (perchè $n-r=p$).

(e non per $r'+1$) punti *generici* di f passa una φ_{m-3}. Per trovare il valore di r' si applichi successivamente il teorema di riduzione (n.° 20). Per il quale, aggiungendo a g_n^r un punto fisso generico P_1, si ha una g_{n+1}^r completa ed inoltre, per ipotesi, speciale. Analogamente, aggiungendo a g_{n+1}^r un altro punto fisso generico P_2, si ha una g_{n+2}^r completa speciale e così fino a $g_{n+r'+1}^r$, che sarà completa, ma non speciale, perchè G e gli $r'+1$ punti generici P_1, $P_2, \ldots P_{r'+1}$ non sono sopra una φ_{m-3}. Adunque [22, c)] $n+r'+1-r=p$, donde $r'=p-1-n+r$ (*).

Si può dire in generale che *per un gruppo di una serie completa qualunque g_n^r passano $p-n+r$ φ_{n-3} linearmente indipendenti*, perchè, se la serie è non speciale, e però $n-r=p$, quel numero è zero.

Le φ_{m-3} essendo ∞^{p-1}, segue dal teorema che *una φ_{m-3}, per contenere un gruppo di una serie speciale completa, deve soddisfare precisamente ad $n-r$ condizioni:* o anche che *un gruppo di una serie speciale completa presenta $n-r$ condizioni alla serie (canonica) g_{2p-2}^{p-1}* (cfr. n.° 12).

Se la serie speciale g_n^r non è completa, il detto numero di condizioni è $< n-r$ (essendo, se g_n^r è contenuta nella serie completa $g_n^{r'}$, $r<r'$ e quindi $n-r>n-r'$).

k punti, che presentano h condizioni alle φ_{m-3} (onde le φ_{m-3} per essi sono ∞^{p-1-h}), per il teorema precedente, costituiscono un gruppo di una serie speciale completa g_k^{k-h}.

24. È sostanzialmente un'altra forma dello stesso teorema quello che si denomina di Brill-Noether; cioè: *Ogni serie speciale completa ha, rispetto alla serie canonica, una serie residua completa $g_{n'}^{r'}$ tale che $n+n'=2p-2$, $2(r'-r)=n'-n$.* Si ricordi infatti (n.° 13) che g_n^r ha rispetto a g_{2p-2}^{p-1} una serie residua $g_{n'}^{r'}$ completa data da tutte le φ_{m-3} per un gruppo di g_n^r. Queste sono, per il teorema suddetto, $\infty^{p-1-n+r}$; dunque, oltre ad essere $n'=2p-2-n$, si ha $r'=p-1-n+r$: e però ecc. (**).

(*) La dimostrazione è di Noether.

(**) La serie (n.° 17):

$$g_{2p-2-m\alpha}^{p-1-m\alpha+\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}+\rho}, \tag{A}$$

(quando esiste) ha quindi per serie residua completa (rispetto a g_{2p-2}^{p-1}) una

$$g_{m\alpha}^{\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}+\rho}, \tag{B}$$

nella quale è contenuta la

$$g_{m\alpha}^{\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}}, \tag{C}$$

25. Teorema di Clifford. *Se g_n^r è una serie speciale, si ha $n \geqq 2r$.*

Il teorema è conseguenza immediata del teorema di Riemann-Roch e di una osservazione generale già fatta (*) (ultimo comma del n.° 13). Cioè, se g_n^r è completa, un suo gruppo presenta ad una φ_{m-3} qualsiasi $n-r$ condizioni, mentre alle φ_{m-3} che passano per un resto di g_n^r r condizioni. Dunque deve essere $n - r \geqq r$. Se la serie non è completa, si ha sempre $n > 2r$, essendo, quando $g_n^{r'}$ indichi la sua serie completa, $r < r' \leqq n - r' < n - r$.

26. Altra immediata conseguenza del teorema di Riemann-Roch è la seguente proposizione (**): *Se g_ν^ϱ è speciale completa, ogni serie g_n^r tale che $n - r \leqq \rho$ è contenuta in essa.* Basta supporre g_n^r completa (chè, quando non fosse, l'ipotesi resterebbe per la sua serie completa). Ora un gruppo della g_n^r presenta $n - r$ condizioni ad una φ_{m-3} che debba contenerlo; quindi, per essere $n - r \leqq \rho$, esiste sopra una almeno delle ∞^ρ φ_{m-3} che segano la g_ν^ϱ; e però ecc.

27. Teorema inverso a quello di riduzione. *Se una serie g_{n+1}^r, ottenuta aggiungendo un punto fisso P ad un'altra serie g_n^r, è completa, la g_n^r è speciale*

data da tutte le curve di ordine α del piano. Osservisi che una φ_{m-3}, che passi per un gruppo di (A), deve soddisfare ad $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} + \rho$ condizioni per contenere un dato gruppo di (B) o di (C); mentre, se non passa per quel gruppo o ne contiene solo alcuni punti, il numero di tali condizioni può crescere (cfr. ultimo comma del n.° 13). Ora se una serie completa (speciale) g_n^r è data dalle $\varphi_{m-3-\alpha}$, sarà la serie (A) o contenuta in essa [nel qual caso ogni suo gruppo sarà parte di un gruppo di (A)]. Le φ_{m-3} che passano per un gruppo di g_n^r sono $\infty^{p-1-n+r}$ (n.° 23) e, se si obbligano inoltre a passare per un gruppo di (C), cioè a spezzarsi in una $\varphi_{m-3-\alpha}$ e in una curva d'ordine α, per l'osservazione precedente, devono soddisfare ad altre $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} + \rho$ condizioni almeno. Adunque, detta r' l'infinità delle $\varphi_{m-3-\alpha}$ per un gruppo di g_n^r, si ha:

$$r' \leqq p - 1 - n + r - \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - \rho,$$

che è il teorema del § 3 della Nota: *Serie residue,* ecc. del sig. Amodeo.

Applicando alla (A) o alla (B) il teorema del numero seguente, si ha la relazione già ricordata (nota seconda al n.° 17):

$$\rho \leqq \frac{\alpha}{2}(m - 3 - \alpha).$$

(*) Osservazione di cui pure si è fatto uso nella nota precedente.

(**) Della quale è un caso particolare quella del § 5 della Nota: *Serie residue,* ecc., del sig. Amodeo, quando si prenda per g_ν^ϱ la serie (A) della nota al n.° 24.

completa e le φ_{m-3} per un suo gruppo non passano tutte per P. Essendo g^r_{n+1} completa, lo è pure g^r_n (n.° 11) e inoltre si ha (n.° 16) $n+1-r \leqq p$, donde $n-r \leqq p-1$, il che significa essere g^r_n speciale (n.° 21). Infine, se tutte le φ_{m-3} per un gruppo di g^r_n passassero per P, la g^r_{n+1} sarebbe speciale e di più il numero delle condizioni a cui dovrebbero soddisfare le φ_{m-3} per contenere un gruppo di g^r_n sarebbe lo stesso che per contenere un gruppo di g^r_{n+1}, contrariamente al teorema di Riemann-Roch (per il quale il detto numero di condizioni è $n-r$ per l'una ed $n+1-r$ per l'altra).

28. Dalle proposizioni dei n.i 20, 27 si trae che, se g^r_n è speciale completa e $g^r_n + P_1$ (cioè la serie che si ottiene aggiungendo a g^r_n il punto fisso P_1) è incompleta, tutte le φ_{m-3} per un gruppo di g^r_n devono passare per P_1 e però P_1 deve appartenere a tutti i gruppi della serie completa $g^{r'}_{n'}$ residua di g^r_n rispetto alla g^{p-1}_{2p-2}; e reciprocamente. Ossia: *se g^r_n, $g^{r'}_{n'}$ sono due serie speciali complete residue rispetto alla g^{p-1}_{2p-2}, condizione necessaria e sufficiente affinchè la $g^r_n + P_1$ sia incompleta, cioè contenuta in una g^{r+1}_{n+1}, è che il punto P_1 appartenga come punto fisso alla $g^{r'}_{n'}$.*

Aggiungasi che, essendo $g^{r'}_{n'} = g^{r'}_{n'-1} + P_1$ completa, le φ_{m-3} per un gruppo di $g^{r'}_{n'-1}$ non passano tutte per P_1 (n.° 27): esse determinano manifestamente la g^{r+1}_{n+1}, la quale è adunque speciale completa. Si può quindi alle serie residue (rispetto a g^{p-1}_{2p-2}) g^{r+1}_{n+1}, $g^{r'}_{n'-1}$ applicare il teorema precedente e si troverà che condizione necessaria e sufficiente affinchè la $g^{r+1}_{n+1} + P_2 = g^r_n + P_1 + P_2$ sia incompleta, cioè contenuta in una g^{r+2}_{n+2}, è che il punto P_2 appartenga come punto fisso alla $g^{r'}_{n'-1}$; cioè i punti P_1, P_2 sieno punti fissi della $g^{r'}_{n'}$. Così continuando, si arriva alla seguente estensione dell'ultimo teorema:

Se g^r_n, $g^{r'}_{n'}$ sono due serie speciali complete residue rispetto a g^{p-1}_{2p-2}, condizione necessaria e sufficiente affinchè $g^r_n + P_1 + P_2 + \cdots + P_s$ sia incompleta e precisamente contenuta in una g^{r+s}_{n+s}, è che si abbia $g^{r'}_{n'} = g^{r'}_{n'-s} + P_1 + P_2 + \cdots + P_s$. Le g^{r+s}_{n+s}, $g^{r'}_{n'-s}$ sono speciali complete residue rispetto a g^{p-1}_{2p-2}.

§ 7. Serie composte. Curve iperellittiche. Teorema sulla composizione di una serie e sue conseguenze. Maggiore determinazione del teorema di Clifford. Teorema di Noether.

29. Una serie g^r_n $(r > 1)$ sia tale che i gruppi aventi un punto generico A_1 comune abbiano altri $\rho - 1$ punti comuni $A_2, A_3, \ldots A_\rho$ $(1 < \rho < n)$. I gruppi di g^r_n determinati da uno A_2 di questi punti avranno a comune i rimanenti

A_1, A_3,... A_ρ e null'altro; chè, per l'ipotesi, devono avere almeno $\rho - 1$ altri punti comuni e questi non possono essere diversi dai precedenti (altrimenti i gruppi, determinati da A_1, passando per A_2, avrebbero più che $\rho - 1$ altri punti comuni). Adunque i ρ punti A_1, A_2,... A_ρ sono tali che, dato uno, sono individuati gli altri e quindi (al variare di A_1) formano una involuzione semplicemente infinita γ. È chiaro che ogni gruppo di g_n^r (supposta priva di punti fissi) sarà formato di un certo numero k (>1) di gruppi di γ, ossia g_n^r sarà una involuzione nella serie che ha per elementi i gruppi di γ e che dovrà essere $n = k\rho$ e $k \geqq r$. Si avverta però che l'involuzione γ può essere una g_ϱ^1 o no, cioè essere ottenibile con un fascio di curve, ovvero no (*). Ad es.: se si ha una trasformazione ρ^{upla} fra due piani π, π', quello ρ^{uplo}, questo semplice, ad una curva C di π su cui giaccia una g_k^r corrisponde una C' di π' su cui giace una $g_{k\varrho}^r$, formata di k gruppi di una involuzione γ non razionale se C è di genere >0.

Una serie g_n^r ($r \geqq 1$), di cui ogni gruppo sia formato di k gruppi di una involuzione semplicemente infinita γ, si dice *composta* con questa involuzione (**).

30. Sia g_n^r completa non speciale. Si ha $n - r = p$, la quale, insieme alle $n = k\rho$, $k \geqq r$, dà $n \geqq \rho\,(n - p)$; da cui, essendo $\rho \geqq 2$, discende $n \leqq 2p$. Adunque *una serie g_n^r completa non speciale, per la quale $n > 2p$, non può essere composta.*

31. *Se una serie qualunque g_{2r}^r ($r > 1$) è composta con una involuzione γ di gruppi di ρ punti, deve essere $\rho = 2$ e γ razionale, cioè una g_2^1.* Infatti dalle $2r = k\rho$, $k \geqq r$ (n.° 29), segue $\rho = 2$, $k = r$. Poi una aggiunta φ del sistema che dà la serie g_{2r}^r, condotta per $r - 1$ punti fissi (generici) di f, varia in un fascio e, dovendo contenere le $2(r - 1)$ coppie di γ determinate da quei punti, sega f in una sola coppia variabile. In particolare: *la serie canonica non può essere composta che mediante una g_2^1.*

Dicesi *ellittica* una curva di genere *1* [e quindi contenente g_2^1 (22, d) e cfr. n.° 46)]: e curva *iperellittica* una curva di genere >1 che contenga

---

(*) Cfr. nota al n.° 4.

(**) Esempio. Una involuzione ∞^1 di ordine r_1 nella serie razionale dei gruppi di una g_k^1 dà una $g_{kr_1}^1$: parimenti una involuzione ∞^1 di ordine r_2 in quest'ultima dà una $g_{kr_1r}^1$ (e così si può continuare). Ora se nella involuzione razionale dei gruppi di $g_{kr_1r_2}^1$ si considera una involuzione ∞^s di ordine r_3 si ottiene una $g_{kr_1r_2r_3}^s$. Delle g_k^1, $g_{kr_1}^1$, $g_{kr_1r_2}^1$, $g_{kr_1r_2r_3}^s$ ciascuna è *composta* colle precedenti.

una g_2^1. *Ogni curva di genere 2 è iperellittica perchè la sua serie canonica è appunto una* g_2^1. Per ciò che si è dimostrato, una curva che possegga una g_{2r}^r ($r>1$) composta è iperellittica, ellittica o razionale.

32. Abbiasi reciprocamente una curva iperellittica. La g_2^1 che essa contiene (*) è speciale (n.° 21) e quindi (n.° 23) le φ_{m-3} che passano per un punto di una coppia della g_2^1 devono passare di conseguenza anche per l'altro punto. Ne risulta che *una serie speciale completa di una curva iperellittica, in particolare la serie canonica, è una* g_{2r}^r *composta colla* g_2^1 *esistente sulla curva* (sarà formata da tutti i gruppi di r coppie della g_2^1, ovvero data dalle φ_{m-3} per $p-1-r$ coppie fisse di essa).

Inoltre *l'unica serie composta, di dimensione* >1, *non speciale e completa di una curva iperellittica è una* g_{2p}^p *composta colla* g_2^1 (riunendo in tutti i modi possibili p gruppi di questa serie). Infatti, avendosi una serie completa e composta, i suoi gruppi che passano per un punto passano di conseguenza per altri $\rho-1$ ($\rho>1$) punti e quindi [cfr. 22 c)] la serie residua di questi ρ punti rispetto a quella serie è speciale completa, cioè una g_{2r}^r composta colla g_2^1. Ne segue facilmente che anche la serie considerata è una g_{2r}^r composta colla g_2^1 ed è una g_{2p}^p (perchè, essendo non speciale, deve essere $2r-r=p$).

Si noti ancora che una g_{p+1}^1 non speciale sopra una curva iperellittica è una serie di ordine minimo non composta colla g_2^1 (perchè una serie d'ordine $\leq p$ è speciale). Adunque una curva che contiene una g_2^1 e una g_k^1 ($k>2$), come serie di ordine minimo non composta con quella, è una curva iperellittica di genere $k-1$.

33. *Se il sistema aggiunto puro di una curva f si spezza, la curva f è iperellittica (non reciprocamente)* (**). Infatti il sistema aggiunto puro [cfr. n.i 18, 22 b')] non contenendo parti fisse, essendo ∞^{p-1} e definito soltanto da passaggi per punti, per un teorema noto (***), deve spezzarsi in $p-1$ curve di un fascio. Ciascuna di queste dovrà adunque segare f in due punti: onde sopra f esiste una g_2^1.

34. Teorema sulla composizione di una serie. Escluse le serie composte con involuzioni semplicemente infinite (n.° 29), *non può essere che i gruppi*

(*) Dal n.° 44, h) risulta che una curva iperellittica contiene una sola g_2^1.

(**) Castelnuovo, *Ricerche* citate (Mem. della R. Accad. delle Sc. di Torino, 1891), n.° 28 a).

(***) Bertini, *Sui sistemi lineari* (Rendiconti del R. Ist. Lomb., 1882). — Luroth, *Beweis eines Satzes*, ecc. (Math. Ann., tom. 42, pag. 457).

di una g_n^r, *aventi* s *punti generici di* f *comuni* $(1 < s < r)$, *abbiano necessariamente altri* σ *punti comuni* $(0 < \sigma < n - s)$: cioè non può essere che una curva φ del sistema lineare ∞^r che dà g_n^r, la quale passi per s punti arbitrari, passi necessariamente per altri σ punti. Suppongasi che ciò sia e che sia s il più piccolo numero per il quale ciò accade. Le φ per $s - 2$ punti generici di f formano un sistema Σ lineare ∞^{r-s+2}, cioè almeno ∞^3, tale che quelle di esse passanti per un punto generico (cioè in tutto per $s - 1$ punti cosifatti), essendo s minimo, non passano necessariamente per altri punti; mentre quelle che passano per due punti, passano per altri σ. Un sistema lineare generico di Σ, ∞^3 (Σ stesso, se $r - s + 2 = 3$), potrà adunque servire a trasformare birazionalmente la nostra curva C in una curva C' gobba dello spazio ordinario, facendo corrispondere omograficamente alle curve del sistema ∞^3 i piani dello spazio (*). La C' avrà la proprietà che tutti i piani per due suoi punti passano per altri σ punti, cioè ogni sua corda è almeno trisecante. Ora una tal curva non esiste. Perchè se X, Y sono due punti qualunque di C' e Z un terzo punto che XY ha sopra C', questa curva è projettata da Z doppiamente mediante un cono al quale appartiene XY, e nel piano tangente al cono lungo questa generatrice giacciono le tangenti a C' in X, Y. Adunque due tangenti qualunque di C' si incontrano e quindi (C' non essendo piana) passano tutte per un punto, il che non può essere (altrimenti lo stesso accadrebbe di una sua projezione piana) (**).

35. Nel caso particolare della serie canonica si ha adunque (cfr. n.[i] 31, 32): *Escluse le curve iperellittiche, non può essere che le* φ_{m-3} *per* l *punti generici di* f $(l < p - 1)$ *passino di conseguenza per altri punti.* È quindi pienamente giustificata *la riduzione, per trasformazione birazionale, di una curva non iperellittica, ad una curva di ordine* $p + 1$ (***). Perchè le φ_{m-3} per $p - 3$ punti generici di f formeranno una rete tale che quelle condotte per un punto generico della curva non passano tutte per altri punti di essa. Con questa rete si trasforma birazionalmente la curva in un'altra di ordine

---

(*) La C' è gobba perchè il sistema lineare ∞^3 non passa per C (cfr. i n.[i] 3, 4).

(**) Questa dimostrazione è di CASTELNUOVO. Cfr. la mia Nota citata degli Atti della R. Accad. delle Sc. di Torino, 1891, n.° 2. Cfr. anche DEL PEZZO, *Sulle projezioni di una superficie e di una varietà dello spazio ad n dimensioni* (Rend. della R. Accad. delle Sc. di Napoli, 1886) n.° 1.

(***) Nell'ordinaria trattazione trovavasi qui una lacuna, come ha osservato giustamente il sig. PICARD (*Traité d'Analyse,* tom. 2, pag. 445).

$2p-2-(p-3)=p+1$ e dotata di $\frac{p(p-1)}{2}-p=\frac{p(p-3)}{2}$ punti doppi (o punti multipli equivalenti).

36. Dal teorema del n.° 34 si traggono varie conseguenze.

Ne discende dapprima che *in una serie g_n^r, non composta, r punti,* COMUNQUE PRESI, *di un gruppo generico individuano il gruppo, cioè appartengono a quel solo gruppo.* Infatti se in un gruppo generico G di g_n^r esistesse un gruppo Γ di $s+\sigma$ punti tali che i gruppi di g_n^r per s ($<r$) punti passassero di conseguenza per i σ rimanenti, onde Γ appartenesse ad ∞^{r-s} gruppi della serie, è chiaro che Γ (al variare di G) descriverebbe una totalità $\infty^{r-(r-s)}=\infty^s$ e quindi per s punti *generici* di f passerebbe (almeno) un gruppo Γ, cioè i gruppi di g_n^r per s punti generici di f passerebbero per altri σ punti, contrariamente al teorema del n.° 34.

37. Segue che, *in una serie speciale completa g_n^r, $n-r$ punti,* COMUNQUE PRESI, *di un gruppo generico presentano alle φ_{m-3} condizioni tutte indipendenti.* In vero, se esistessero in un gruppo generico G, $n-r$ punti che presentassero soltanto $n-r-\delta$ ($\delta>0$) condizioni alle φ_{m-3}, questi $n-r$ punti formerebbero (n.° 23) un gruppo di una serie speciale completa g_{n-r}^δ. Aggiungendo gli r punti residui di G si avrebbe una g_n^δ contenuta (n.° 9) nella g_n^r: e però questi r punti apparterrebbero ad ∞^δ gruppi di g_n^r, il che non può essere (n.° 36).

38. Un'altra importante conseguenza del teorema del n.° 34, anzi del caso particolare del n.° 35, è una maggiore determinazione del teorema di CLIFFORD. Se g_n^r è speciale, si ha $n \geqq 2r$: quando può aver luogo il segno di eguaglianza? Già vedemmo (n.° 25) che ciò è possibile solo per una serie completa; ma, in tal caso, quando $n-r=r$, r punti generici individuano un gruppo e le φ_{m-3} per essi devono passare per i rimanenti punti del gruppo (n.° 23). Ora, se $r<p-1$, ciò non può accadere che per il caso iperellittico (n.° 35). Adunque, *se g_n^r è speciale, ma non è la serie canonica, ovvero una serie speciale completa (senza punti fissi) di una curva iperellittica, si ha sempre $n>2r$* (*).

39. È utile osservare che una tale limitazione, anzi maggiore, sta anche per una serie g_n^r non speciale, per la quale sia $n \leqq 2p-2$. Infatti, da questa e dalla $n-r \geqq p$, segue $n \geqq 2(r+1)$. Per conseguenza, *se $n<2r$, non solo*

(*) Ne risulta, ad es., che, *sopra una curva non iperellittica, non esiste una g_{2r}^r quando* $r<p-1$, perchè, in questa ipotesi, la g_{2r}^r è speciale e però ecc.

la g_n^r è non speciale, ma deve essere $n > 2p - 2$ e si ha inoltre (per la $n - r \geqq p$) $r > p$. Donde si ricava anche che, *se $r \leqq p$, deve essere $n \geqq 2r$.*

40. Un ultima conseguenza del teorema del n.° 34 si collega alle considerazioni seguenti.

Di una g_n^r completa non speciale, *che non sia data,* si possono assegnare in qualunque modo tutti gli n punti di un gruppo (n.° 9): mentre invece di una g_n^r completa speciale, *pure non data,* si possono prendere al più $n - r$ punti generici come appartenenti ad un gruppo, perchè tutte le φ_{m-3} per essi devono passare (n.° 23) per gli stessi r punti (i rimanenti del gruppo), che risultano quindi determinati da quelli. Anzi, se la serie g_n^r speciale da determinarsi è incompleta, non si possono certo assegnare ad un gruppo $n - r$ punti generici, perchè se si indica con $g_n^{r'}$ la sua completa (sempre per il n.° 23) le φ_{m-3} per $n - r' < n - r$ punti devono passare per i rimanenti $r' - r$ (> 0).

Quand'è che di un gruppo di una serie g_n^r speciale (completa) da determinarsi si potranno appunto prendere $n - r$ punti generici? Il teorema del n.° 35, in congiunzione con quello del n.° 23, dice che, solamente quando sia $n - r = p - 1$, cioè (prescindendo dal caso iperellittico) quando la serie è la g_{2p-2}^{p-1} ovvero è dedotta da essa col fissare ed escludere k punti che presentino alle φ_{m-3} condizioni tutte indipendenti (ad es. k punti generici). Adunque (*) (escluse le curve iperellittiche) *una serie speciale g_n^r, di cui si dieno $n - r$ punti generici di un gruppo, è la serie canonica o la serie residua, rispetto ad essa, di una g_k^0 completa* ($k \leqq p - 1$) (**).

(*) La proposizione è di Noether (*Raumcurven,* Berlin, 1883, teorema III″ del I Abschnitt): ma è qui meglio precisata. Cfr. anche Küpper, *Ueber die Curven C_p^n* ecc. (Abhandl. der math. Classe der k. böhm. Gesell. der Wiss., 1889-90) n.° 2.

(**) Ometto di trattare il problema della determinazione dei gruppi o serie speciali, perchè la soluzione ha ancora bisogno di essere completata e perfezionata. Su questo punto rimando quindi ai § 9, 10, 11, 12 della Memoria di Brill e Noether (cfr. anche Picard, *Traité d'Analyse,* tom. 2, pag. 451 e seg.[1]). Così pure rimando al § 15 della stessa Memoria per la dimostrazione algebrica della esistenza di $3p - 3$ invarianti di una funzione di genere p, per una trasformazione birazionale, detti moduli della funzione (che si riducono a $2p - 1$ nel caso iperellittico); dimostrazione che, come è noto, non è esente da objezioni. Finora la determinazione dei moduli non si fa rigorosamente che col metodo riemanniano, appoggiandosi al cosidetto *teorema di esistenza.*

Ricorderò soltanto che, dal citato § 9, risulta che, *per una curva a moduli generali,* esistono $\infty^{p+(r+1)(n-r-p)}$ serie speciali complete g_n^r, quando sia

$$n \geqq \frac{r(r+p+1)}{r+1} = p - \pi + r + \frac{\rho}{r+1},$$

§ 8. Curve contenenti serie g_i^1. Curve i-gonali. Curve ellittiche e razionali.

41. *Una curva f contenente due serie g_n^1, $g_{n'}^1$, non aventi alcuna serie comune [razionale o non* (*)], *può trasformarsi univocamente in una curva di ordine $n+n'-k$ ($k \geqq 1$), con due punti $(n-k)^{uplo}$, $(n'-k)^{uplo}$, centri di fasci di rette che segnano le serie trasformate di g_n^1, $g_{n'}^1$* (**). Il numero k dipende dall'esistenza di due gruppi delle due serie con k punti comuni. Se le due serie hanno inoltre α_i coppie di gruppi con i punti comuni, la curva trasformata ha α_i punti i^{pli} ($i=2, 3,\ldots$) e il genere comune delle due curve è

$$p=(n-1)(n'-1)-\frac{k(k-1)}{2}-\Sigma\alpha_i\frac{i(i-1)}{2}.$$

La dimostrazione si ottiene facilmente riferendo projettivamente le due serie g_n^1 $g_{n'}^1$ a due fasci di rette, così che al raggio comune ai due fasci corrispondano i due gruppi con k punti comuni. Prendendo poi come corrispon-

posto $p=(r+1)\pi+\rho$ e $\rho<r+1$. [La stessa infinità è quella delle serie non speciali qualunque, essendo ora l'esponente sempre positivo, perchè $n-r \geqq p$ (cfr. Segre, *Recherches générales sur le courbes,* ecc., 1.ª Partie (Math. Ann., tom. 30) n.° 2)]. Il valore minimo di n (intero) è quindi $n=p-\pi+r$ [e in corrispondenza $\tau=n(r+1)-r(r+p+1)=\rho$. Cfr. lo specchio del citato § 10].

Ricorderò anche che, se $n(r+1)-r(r+p+1)=0$, si ha, per una curva a moduli generali, un numero finito di serie speciali complete g_n^r e che il loro numero fu dato in generale da Castelnuovo (nella Nota: *Numero delle involuzioni razionali,* ecc. Rendic. della R. Accad. dei Lincei, 1889) nella forma $\frac{1!\,2!\ldots r!\,1!\,2!\ldots r'!\,p!}{1!\,2!\ldots(r+r'+1)!}$, essendo $r'=p-1-n+r$. Questo notevole risultato, a cui si arriva con un concetto di geometria enumerativa, è confermato nel caso particolare $r=1$ (caso già considerato nel § 11 della Memoria di Brill e Noether) in una trattazione algebrica di Brill (Math. Ann., tom. 36, pag. 321). Cfr. anche Klein, *Riemann'sche Flächen,* II (lezioni litografate) pag. 110 e segg.

(*) Ad es. da due serie qualunque di una curva nascono per trasformazione multipla (sulla curva trasformata del piano semplice) due serie con una serie comune, razionale o non, secondochè quella curva è o non di genere zero.

Una serie semplicemente infinita è manifestamente composta con ogni serie in essa contenuta; e quindi di due serie semplicemente infinite con una serie comune ciascuna è composta con questa.

(**) Cfr. Riemann, *Gesammelte Werke,* 2.ª ediz., pag. 114 (n.° 7) e Castelnuovo, *Ricerche di geometria,* ecc. (Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, 1889), n.° 4.

denti due rette dei due fasci che corrispondono in quelle projettività a due gruppi con un punto comune, si ha evidentemente fra quei due fasci una corrispondenza $(n\ n')$; e quindi il luogo del punto comune a due rette corrispondenti è una curva di ordine $n+n'$ con punti n^{uplo} ed n'^{uplo} nei centri dei due fasci. La quale curva ha punto i^{plo} in ciascun punto comune a due rette corrispondenti a due gruppi con i punti comuni e contiene k volte la retta congiungente i centri dei due fasci; e però ecc. (*).

42. Per la dimostrazione precedente basta avere sopra una curva due serie semplicemente infinite, definite da relazioni algebriche, e tali che i gruppi di ciascuna serie corrispondano univocamente ai valori di un parametro. Segue che *una serie di gruppi di punti così definita è sempre lineare, cioè segnata da un fascio di curve.* Basta associare alla serie un'altra nelle condizioni esposte (ad es. una g_m^1 data da un fascio di rette). Applicando il teorema del n.° 41 si trova che alla serie data corrisponde nella curva trasformata una serie segnata da un fascio di rette. Il fascio di curve corrispondente a questo (in una trasformazione multipla, nella quale giaccia la trasformazione birazionale fra le due curve) segna adunque quella serie sulla curva primitiva.

43. *Una curva che contiene una serie g_i^1 è riducibile ad una curva d'ordine $p+2$ con un punto $(p-i+2)^{\text{uplo}}$ $(i \leq p+2)$* (**). Si prendano $i-1$ punti di un gruppo G di g_i^1 e sia P il punto escluso dal gruppo. Quegli $i-1$ punti ed altri qualsivogliano $p-i+2$ punti (tutti diversi da P), cioè in tutto

---

(*) Il teorema può servire a dare di una curva di genere p forme normali diverse da quella del n.° 35. Applicandolo a due g_{p+1}^1 [n.° 22 *d*)], si ha (per qualunque curva anche iperellittica) una curva normale di ordine $2p+1$ con due punti p^{upli} [e $p(p-1)$ punti doppi]. Se $p>1$, trasformando quadraticamente, si ha una curva normale di ordine $2p$ con due punti $(p-1)^{\text{upli}}$ e $p(p-1)-1$ punti doppi. Questa nasce, pure per trasformazione quadratica, dalla curva normale data dal Segre nel n.° 17 delle citate *Recherches* (Math. Ann., tom. 30). Anche la cosidetta forma normale riemanniana (§ 13 della Memoria di Brill e Noether) si ottiene subito. Ad es., se p è pari, si considerino (per una curva a moduli generali) due $g_{\frac{p+2}{2}}^1$ (cfr. nota seconda al n.° 40) e si avrà per curva normale una curva d'ordine $\frac{p+2}{2}+\frac{p+2}{2}-1=p+1$ con due punti $\left(\frac{p}{2}\right)^{\text{upli}}$ e $\frac{p(p-4)}{2}$ punti doppi. Se $p>4$, si trasformi quadraticamente e si arriva ad una curva di ordine p con due punti $\left(\frac{p-2}{2}\right)^{\text{upli}}$ e $\frac{p(p-4)}{2}-1$ punti doppi; ecc., ecc. Altra forma normale è data dal teorema del n.° 43.

(**) Teorema di Segre (n.° 19 delle citate *Recherches*).

$p+1$ punti formano un gruppo Γ di una g^1_{p+1} [almeno, cfr. d) del n.° 22]. Siccome Γ non contiene P, questo punto individuerà un nuovo gruppo Γ_1 di g^1_{p+1}, il qual gruppo potrà avere altri punti comuni con G, ma questi altri punti comuni, appartenendo anche a Γ, saranno fissi per la serie g^1_{p+1} (n.° 7). Tali punti fissi sieno k e si escludano dalle serie g^1_{p+1}. Ne risulterà una g^1_{p+1-k}, di cui il gruppo determinato da P avrà con G questo solo punto comune (e però lo stesso accadrà di due gruppi, uno di quella serie e uno della g^1_i, determinati da un punto generico), mentre il gruppo che nasce da Γ (togliendo i detti k punti fissi) avrà $i-1-k$ punti comuni con G. Applicando il teorema del n.° 41 alle g^1_i, g^1_{p+1-k}, si conclude che la curva è riducibile ad una di ordine $i+p+1-k-(i-1-k)=p+2$ con punti multipli secondo $i-(i-1-k)=k+1$, $p+1-k-(i-1-k)=p-i+2$.

44. Ecco alcune proprietà delle curve contenenti una g^1_i, nel supposto che questa serie non abbia punti fissi e inoltre sia $i \leq p$, onde la serie è speciale (*):

a) *Se esiste una curva aggiunta φ_{m-i-1}, i punti di ciascun gruppo sono in linea retta.* Sieno P_1, P_2,... P_i i punti di un gruppo. Aggiungansi alla φ_{m-i-1} $i-2$ rette, di cui una P_1P_2 passi per due punti del gruppo e ciascuna delle altre per un punto solo, ad es. rispettivamente per P_3, P_4,..., P_{i-1}. Si ha una φ_{m-3} che, contenendo $i-1$ punti del gruppo, deve (n.° 23) passare per il punto rimanente P_i. Dunque P_1P_2 deve passare per P_i, ecc.

Se $p > \alpha m - \frac{1}{2}\alpha(\alpha+3)$ esiste certamente (almeno) una $\varphi_{m-3-\alpha}$ (n.° 17). Dunque *se $p > (i-2)m - \frac{1}{2}(i-2)(i+1)$ esiste (almeno) una φ_{m-i-1} e i punti di ciascun gruppo sono in linea retta.*

(*) Qualunque curva (irriducibile) contiene g^1_i se $i \geq p$ [n.° 22 d)]. Una curva a moduli generali contiene g^1_i se $i \geq \frac{p+2}{2}$ (cfr. nota seconda al n.° 40), cioè se $p \leq 2i-2$, alla quale deve aggiungersi la $p > 2i-4$ (onde $p=2i-2$, $2i-3$) quando la curva è i-gonale cioè non contiene g^1_{i-1} (cfr. n.° 45). Noi supponiamo che una g^1_i esista sulla curva anche eccezionalmente (cioè non si trovi sopra una curva dello stesso genere a moduli generali), come una g^1_2 sopra una curva iperellittica per la quale $p > 2$. Le proprietà esposte sono facili estensioni di alcune dovute a Bobek (*Ueber Dreischaarcurven*, Sitz. der k. Akad. der Wiss., Wien, 1889) e a Küpper (luogo citato: Abhandl. der math. Classe der k. böhm. Gesell. der Wiss., 1889-90); estensioni svolte anche in un lavoro di Amodeo (*Curve k-gonali*, in questi Annali, tom. 21, pag. 221), venuto a mia conoscenza dopo aver redatto il presente paragrafo; lavoro che deve essere emendato in parecchi punti (a pag. 222, 223, 224, 229, 231, 232).

b) *Se esistono* ∞ φ_{m-i-1}, oltre la proprietà precedente, *si ha che le* φ_{m-i-1} *per un punto di ciascun gruppo passano per tutti i rimanenti punti del gruppo;* onde la g_i^1 è data da un fascio di φ_{m-i-1}. Sieno, come prima, $P_1, P_2, \ldots, P_i$ i punti di un gruppo. Alla φ_{m-i-1} per P_1 si aggiungano $i-2$ rette passanti rispettivamente (ad es.) per $P_2, \ldots, P_{i-1}$, e non per P_i. Si ha di nuovo una φ_{m-3} che deve contenere P_i: e però ecc. Segue che:

c) *Se esiste una* g_i^1, *non può esistere una* φ_{m-i-2} [e quindi *la serie segnata da tutte le curve d'ordine* $i-1$ *(o maggiore) non è speciale*]; perchè una φ_{m-i-2} e una retta passante per un (solo) punto di un gruppo di g_i^1 formerebbero una g_{m-i-1} non soddisfacente alla proprietà *b*).

E, poichè una φ_{m-i-2} esiste certamente se $p > (i-1)m - \frac{1}{2}(i-1)(i+2)$ (n.° 17), si ha anche che, *se esiste una* g_i^1, *deve essere* $p \leq (i-1)m - \frac{1}{2}(i-1)(i+2)$.

d) Dalla formola di Zeuthen relativa ad una corrispondenza $(\alpha\ \alpha')$, fra due varietà algebriche semplicemente infinite dei generi p, p',

$$y - y' = 2\alpha'(p-1) - 2\alpha(p'-1) \quad (*),$$

si ha, ponendo $\alpha = i$, $\alpha' = 1$, $y' = 0$, $p' = 0$, che *il numero degli elementi doppi di una* g_i^1 *è* $y = 2i + 2p - 2$.

e) Coll'uso del principio di corrispondenza, per le varietà semplicemente infinite razionali, si trova che le rette che congiungono i punti corrispondenti di una corrispondenza $(\alpha\ \alpha')$ sopra una curva inviluppano una linea di classe $m(\alpha + \alpha') - y$, se y è il numero dei punti uniti della corrispondenza. Se la corrispondenza è simmetrica, onde $\alpha = \alpha'$, la classe è $m\alpha - \frac{y}{2}$. Quindi, ponendo $\alpha = i-1$ e per y il valore trovato in *d*), si trova che *l'inviluppo delle rette che congiungono a due a due i punti di un gruppo variabile di una* g_i^1, *è di classe* $m(i-1) - i - p + 1 = (m-1)(i-1) - p$. Se si pone

$$p = (i-1)m - \frac{1}{2}(i-1)(i+2) - \delta \qquad [\delta \geq 0, \text{ per } c)],$$

si ha la classe $= \frac{i(i-1)}{2} + \delta$.

(*) Cfr. ad es. Clebsch-Lindemann, I, pag. 459.

Dal detto inviluppo si stacca ciascun punto multiplo $\frac{j(j-1)}{2}$ volte se ivi cadono, sopra j rami diversi, j punti di un gruppo. Dicendo σ la diminuzione totale prodotta da questa circostanza (*), si può aggiungere che, quando i punti di ciascun gruppo sono in linea retta, k gruppi per ogni retta, la classe si ottiene dividendo

$$\frac{i(i-1)}{2}+\delta-\sigma \quad \text{per} \quad k\frac{i(i-1)}{2},$$

e l'inviluppo è razionale.

f) Se p *assume il valore massimo, cioè, per c), se* $p=(i-1)m-\frac{(i-1)(i+2)}{2}$ *ed è* $m>i$, *la curva* f *possiede un punto* $(m-i)^{uplo}$ *centro di un fascio di rette che dà la* g_i^1 *(e non altri punti multipli) e reciprocamente.* Infatti il detto valore di p, essendo $m>i$, soddisfa, come si verifica subito, alla condizione espressa in a) e quindi i punti di ciascun gruppo sono in linea retta. Per e) (essendo ora $\delta=0$) la classe dell'inviluppo di tali rette è $\frac{1}{k}-\frac{2\sigma}{ki(i-1)}$: e però deve essere $k=1$, $\sigma=0$ e la classe stessa $=1$: onde ecc.

g) Se tutte le curve d'ordine $i-2$ *segnano sopra* f *una serie speciale completa, la* g_i^1 *si ottiene pure con un fascio di rette il cui centro è punto* $(m-i)^{uplo}$ *di* f $(m>i>2)$. Se la serie $g_{m(i-2)}^{\frac{(i-2)(i+1)}{2}}$, data da tutte le curve d'ordine $i-2$, è speciale, per ogni suo gruppo passeranno φ_{m-3} spezzantesi in una curva d'ordine $i-2$ e in una φ_{m-i-1}; e quindi, per a), i punti di ciascun gruppo di g_i^1 saranno in linea retta. Di più, essendo quella serie completa, qualsiasi φ_{m-3} per il gruppo di punti comuni a f e ad una φ_{m-i-1} (resto di essa serie) deve spezzarsi nella φ_{m-i-1} e in una curva di ordine $i-2$. Ciò premesso, si associ ad una curva fissa φ_{m-i-1} e ad un'altra curva fissa generica di ordine $i-3$, una retta contenente un gruppo di g_i^1; si ha una φ_{m-3} per questo gruppo, la quale dà un resto della g_i^1: onde passerà per questo resto un fascio di φ_{m-3} segante la g_i^1 stessa. Ma di quel resto fanno parte i gruppi di punti determinati su f dalle suddette due curve fisse; dunque il fascio deve

(*) Se $i=3$, Bobek (l. c. § 2) dimostra che, quando esistono $\infty\ \varphi_{m-i-1}$, il numero σ è quello dei punti semplici fissi di f comuni a quelle curve. Si può, e come, estendere questa proprietà al caso di i qualunque?

spezzarsi in queste curve e in una retta residua variabile intorno ad un punto, che sarà $(m-i)^{uplo}$ per f (*).

h) Se una curva possiede due g_i^1, che non abbiano alcuna serie razionale o irrazionale comune, è riducibile, per il teorema del n.° 41, ad una curva di genere $\leq (i-1)^2$. Si noti che, quando abbia luogo il caso escluso, ciascuna delle due serie è composta colla terza serie: onde, se i è numero primo e $p > (i-1)^2$, una curva non può contenere che una g_i^1. Ad es. una curva di genere $p > 1$ non può contenere che una g_2^1: una di genere $p > 4$, che una g_3^1: ecc. (**).

45. Le proprietà precedenti valgono in particolare per le cosidette curve *i-gonali*, cioè contenenti una g_i^1 e non una g_{i-1}^1, poichè in una g_i^1 non ponno allora esistere punti fissi (altrimenti, togliendoli, si avrebbe una serie di ordine inferiore) ed è inoltre $i \leq p$ [n.° 22 *d*)].

Delle curve i-gonali sono caso particolare le iperellittiche (n.° 31). Per queste la forma normale è una curva d'ordine $p+2$ con un punto p^{uplo} (n.° 43) (***); non esistono φ_{m-4} e deve essere $p \leq m-2$ [44 *c*)]; il numero

---

(*) Nella stessa ipotesi, che la $g_{m(i-2)}^{\frac{(i-2)(i+1)}{2}}$ sia speciale completa, si può notare che, *se f possiede altri punti multipli, questi devono essere doppi, ovvero essere allineati (almeno due) col punto* $(m-1)^{uplo}$. Abbia infatti f, oltre questo punto, α_s punti s^{upli} $(s = 2, 3 \dots)$, di cui due qualunque non sieno allineati col punto stesso. Delle $m-i-1$ rette che compongono le φ_{m-i-1} saranno allora $\Sigma(s-1)\alpha_s$ fisse, e però il numero di quelle mobili, cioè l'infinità delle φ_{m-i-1}, sarà $r = m - i - 1 - \Sigma(s-1)\alpha_s$. Di qui, introdotto il valore di $p = (i-1)m - \frac{1}{2}(i-1)(i+2) - \Sigma \frac{s(s-1)}{2}\alpha_s$, si ricava:

$$r = p - 1 - (i-2)m + \frac{(i-2)(i+1)}{2} + \Sigma \frac{(s-1)(s-2)}{2}\alpha_s.$$

Quindi la sovrabbondanza delle φ_{m-i-1} rispetto ai punti multipli di f è $\rho = \Sigma \frac{(s-1)(s-2)}{2}\alpha_s$ (cfr. la nota al n.° 24, ove si faccia $\alpha = i-2$); la quale sovrabbondanza deve essere nulla perchè la suddetta $g_{m(i-2)}^{\frac{(i-2)(i+1)}{2}}$ è completa. Adunque è ammissibile il solo valore $s = 2$.

(**) Qual è il numero massimo (finito) delle g_i^1 che può giacere sopra una curva di dato genere? Se la curva è a moduli generali, deve essere $p = 2i-2$ e la questione è risoluta dalla formola $\frac{(2i-2)!}{(i-1)!\,i!}$ (cfr. nota seconda al n.° 40 e Math. Ann., tom. 36, pag. 358).

(***) E si può dimostrare che sono riducibili a curve omologico-armoniche o dotate di centro (cfr. Cremona, loc. cit., e Clebsch-Lindemann, I, pag. 717-720); la cui equazione mette in evidenza i $2p-1$ moduli della curva iperellittica.

degli elementi doppi della g_2^1 è $2p+2$ [44 *d*)]; l'inviluppo delle rette contenenti le coppie della g_2^1 è di classe $m-p-1-\sigma$ [44, *e*)]; e, quando m ha il valor minimo $p+2$, si ha la suddetta forma normale [44, *f*)].

46. Se una curva contiene due g_2^1 deve essere $p \leq 1$, e si ha $p=0$ ovvero $p=1$ secondochè le due g_2^1 hanno o no coppia comune (n.° 41).

Una curva razionale è riducibile ad una conica (n.° 43). Sopra questa le g_2^1 sono date tutte da fasci di rette; e quindi per una curva razionale esistono ∞^2 g_2^1, due qualunque delle quali hanno una coppia comune e una qualunque è individuata da due coppie.

Una curva ellittica ($p=1$) è riducibile ad una cubica senza punti doppi (n.° 43). Sopra una tale cubica esistono ∞^1 g_2^1 date dai fasci di rette intorno ai suoi punti *e non ne esistono altre.* Infatti se A, A' formano una coppia di una g_2^1 e B è la terza intersezione della AA' colla cubica, la g_2^1 data dalle rette intorno a B, se non fosse la precedente, avrebbe con questa una coppia comune, e però dovrebbe essere $p=0$. Segue che sopra una curva ellittica esistono ∞^1 g_2^1, due delle quali non hanno coppia comune e una è individuata da una coppia.

Se una cubica è trasformata univocamente in sè stessa, una sua g_2^1 lo è in un'altra g_2^1. I centri dei fasci di rette che dànno due g_2^1 corrispondenti si dicono *centri omologhi* per la considerata trasformazione: ecc. (*).

47. Il *modulo* di una curva ellittica è il valore costante del rapporto anarmonico dei quattro punti doppi di una g_2^1, nella varietà razionale delle coppie di questa. Che quel valore sia costante, al variare di g_2^1, si può dimostrare così (**). Sieno A, B, C, D i quattro elementi doppi di una g_2^1, e A', B', C', D' quelli di un'altra g_2^1: la terza g_2^1, individuata (ad es.) dai punti A, A', dà una trasformazione univoca della curva in sè stessa, per la quale la prima g_2^1 si trasforma projettivamente nella seconda. Quindi, se ai punti doppi B, C, D corrispondono rispettivamente B', C', D', la quaderna $ABCD$ (cioè la quaderna di coppie AA, BB, CC, DD entro la prima g_2^1) è projettiva alla quaderna $A'B'C'D'$.

(*) Cfr. la bella Nota di SEGRE: *Le corrispondenze univoche nelle curve ellittiche* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 1889). Cfr. anche S. KANTOR, *Les correspondances dans les courbes elliptiques déduites géométriquement* (ivi, 1893).

(**) Dimostrazione di SEGRE.

§ 9. Applicazione ai sistemi lineari di curve irriducibili. Sistemi lineari di curve iperellittiche. Sistemi lineari sovrabbondanti definiti da nove o meno punti base (*).

48. Consideriamo un sistema lineare $[C]$ di curve irriducibili, definito soltanto da passaggi per punti fissi del piano; e supponiamo che la curva generica C del sistema abbia (come è sempre possibile eseguendo una trasformazione cremoniana) in tutti *i punti base* del sistema, quelli dati e quelli che potrebbero provenire di conseguenza da essi, moltiplicità ordinarie con rami tutti variabili. Se $s_1, s_2, \ldots$ sono queste moltiplicità (oltre le quali C non può averne altre) ed m è l'ordine di C o, come si dice, del sistema, la *dimensione effettiva* di questo è il numero k dei punti (generici) del piano pei quali passa una ed una sola curva del sistema, mentre *dimensione virtuale* è il numero

$$\mathbf{k} = \frac{m(m+3)}{2} - \Sigma \frac{s_i(s_i+1)}{2}. \tag{1}$$

Se delle condizioni espresse dai punti base alcune sono conseguenza delle rimanenti è $k > \mathbf{k}$. Il numero positivo o nullo $s = k - \mathbf{k}$ dicesi *sovrabbondanza* del sistema. Se $s = 0$, il sistema si dice *regolare;* se $s > 0$, *sovrabbondante.* Il *grado* D del sistema è il numero delle intersezioni variabili di due curve, cioè:

$$D = n^2 - \Sigma s_i^2. \tag{2}$$

Il genere

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \Sigma \frac{s_i(s_i-1)}{2} \tag{3}$$

di C dicesi anche *genere del sistema.*

49. *Serie caratteristica* di un sistema lineare è la serie g_D^{k-1} (cfr. n.° 3, essendo ora $s = k$, $\sigma = 0$) che sopra una curva generica C del sistema segnano le altre curve del sistema.

La serie caratteristica è una serie completa. Infatti le curve della rete

(*) Traggo questo paragrafo, con alcune aggiunte e varianti dal Cap. II, della Memoria di Castelnuovo: *Ricerche generali* ecc., già citata (Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1891) non solo per invogliare alla lettura di questo importante lavoro, ma per mostrare quanto la Geometria sopra una curva algebrica sia feconda di applicazioni.

sono, rispetto ad una di esse, curve aggiunte che in ogni punto s^{uplo} hanno pure un punto s^{uplo} (n.° 10).

50. La serie caratteristica g_D^{k-1} essendo completa, deve aversi (n.° 16):

$$D-k+1 \leqq p.$$

Questa segue anche dalla $k \geqq \mathbf{k}$ e dalla

$$D=\mathbf{k}+p-1, \tag{4}$$

che nasce dalle (1), (2), (3) eliminando m, s_i. Ma v'ha di più. Se $D-k+1<p$, deve essere, per la (4), $k>\mathbf{k}$; se eguale, eguale: si ha adunque (n.° 21) il notevole teorema:

Un sistema lineare è regolare o sovrabbondante secondo chè è non speciale o speciale la sua serie caratteristica.

51. Ricordando che per una serie speciale g_n^r è $n \leqq 2p-2$, $r \leqq p-1$, segue subito che, *se $D>2p-2$ o $k>p$, il sistema lineare è regolare.* In particolare ogni sistema lineare, definito da soli punti fissi, che sia di genere 0 è regolare ed è pur regolare quando sia di genere 1 se $D>0$: essendo nei due casi rispettivamente $k=D+1$, $k=D$ (*).

Segue inoltre che, *se $D>2p$ o $k>p+1$, non solo il sistema è regolare, ma le curve del sistema che passano per un punto non passano di conseguenza per altri punti del piano.* Infatti, essendo il sistema regolare, si ha $k=\mathbf{k}$ e quindi, per la (4), se $D>2p$ è $k>p+1$ e reciprocamente. Ora, se avvenisse che le curve per un punto passassero di conseguenza per altri punti, queste formerebbero un sistema lineare ∞^{k-1} sovrabbondante e quindi (n.° 50) avente la serie caratteristica speciale, mentre la dimensione di questa serie sarebbe $k-2 \geqq p$ (**).

52. Se il sistema $[C]$ è un fascio si ha $D=0$, $k=1$ e però, dalla (4), $s=\mathbf{k}-1=p$, cioè la sovrabbondanza è eguale al genere.

Escluso questo caso, cioè supposto $k \geqq 2$, se il sistema è sovrabbondante si ha la serie caratteristica g_D^{k-1} speciale e quindi $D \geqq 2(k-1)$, valendo il segno di eguaglianza solo se quella serie è canonica o appartiene ad una curva iperellittica (n.° 38). La precedente disuguaglianza, per la (4), può scriversi $\mathbf{k}+p-1 \geqq 2(k-1)$ ossia $s \leqq p-k+1$. Dunque, raccogliendo:

(*) Cfr. Guccia: *Generalizzazione di un teorema di Noether* (Rend. del Circ. mat. di Palermo, tom. I): *Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche*, ecc. (ivi).

(**) I due teoremi generali di questo numero sono dovuti a Segre (*Sui sistemi lineari*, ecc. — Rendic. del Circ. mat. di Palermo, tom. 1, pag. 217).

a) Un sistema lineare sovrabbondante ∞^k *di curve non iperellittiche, per il quale sia* $1 < k < p$, *ha la sovrabbondanza* $s \leq p - k$. *Se* $k = 1$ *si ha* $s = p$: *se* $k = p$ *si ha* $s = 1$.

b) Un sistema lineare sovrabbondante ∞^k *di curve iperellittiche ha la sovrabbondanza* $s = p - k + 1$; *e inoltre le curve per un punto generico del piano passano necessariamente per un altro punto e per questo solo.* Quest'ultima proprietà discende dall'osservare che, preso un punto A nel piano e per esso una C, tutte le altre curve del sistema lineare $[C]$ passanti per A devono contenere il punto A' che con A forma una coppia della g_2^1 esistente su C, per essere la serie caratteristica formata di coppie della g_2^1; e non possono tutte contenere alcun altro punto di C, perchè la serie caratteristica, essendo speciale completa, non può essere composta che colla g_2^1 (n.i 31, 32).

53. *Se un sistema lineare* $[C]$ ∞^k $(k > 2)$ *di curve iperellittiche è regolare, le curve per un punto generico non possono passare di conseguenza che per un altro punto: e, quando ciò accade, la serie caratteristica sopra una curva generica è una* g_{2p}^p *composta colla* g_2^1 *esistente su essa.* Infatti, se le curve per un punto generico passano tutte per altri punti, la serie caratteristica (di dimensione $k - 1 > 1$) sopra C, oltre ad essere completa e non speciale, è composta e quindi (n.i 31, 32) una g_{2p}^p composta colla g_2^1 di C e non con serie di ordine superiore: onde tutte le curve per un punto generico non possono passare che per un altro punto.

Reciprocamente è evidente che *se la serie caratteristica sopra una curva generica di un sistema lineare di curve iperellittiche è una* g_{2p}^p *composta colla* g_2^1 *esistente su essa, il sistema è regolare e le curve per un punto generico passano di conseguenza per un altro (solo) punto.* Anzi si osservi che in questa proposizione l'ipotesi è certamente verificata se un dato gruppo qualsiasi della g_{2p}^p è formato di p coppie della g_2^1, giacchè una di tali coppie stacca dalla g_{2p}^p una g_{2p-2} che, essendo completa ed avendo un gruppo comune colla serie canonica, deve essere questa stessa serie e però ecc. Ad es. $[C]$ sia il sistema delle curve di 6.° ordine con otto punti doppi base qualunque $(p = 2)$. Qui l'ipotesi è verificata, perchè le cubiche per gli otto punti doppi segnano sopra C la g_2^1 e due di esse formano insieme una curva del sistema. Dunque *il sistema* ∞^3 *delle sestiche con otto punti doppi comuni è tale che le curve che passano per un punto passano di conseguenza per un altro punto* (*).

(*) Cfr. le mie *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie* (Annali di Matematica, serie 2.a, tom. 8) n.° 35.

54. Si definiscono *curva aggiunta* e *sistema aggiunto puro* di un sistema lineare $[C]$ quelli di una curva generica di C.

Vedemmo già (n.° 33) che, se il sistema aggiunto puro è riduttibile, la curva generica di C è iperellittica. Ora si può aggiungere che *in un sistema* $[C]$ *di curve iperellittiche, di genere* $p>2$, *tale che le curve che passano per un punto non passino di conseguenza per un altro punto* [*ad es. se* $D>2p$ *o* $k>p+1$ (n.° 51)] (*), *il sistema aggiunto puro è riduttibile* (**). In vero, sopra una curva generica C si consideri un punto generico A e il suo conjugato A' della g_2^1 esistente su C. Siccome, per ipotesi, le curve di $[C]$ passanti per A non passano di conseguenza per un altro punto, se C varia intorno ad A, A' pure varierà, ma dovrà sempre trovarsi su tutte le ∞^{p-2} curve del sistema aggiunto puro condotte per A, perchè A' appartiene, per ogni posizione di C, a tutti i gruppi della serie canonica determinati dal punto A (n.° 32). Per conseguenza il punto A' descriverà una curva che dovrà far parte di quelle ∞^{p-2} curve. Variando A sopra C, se ne ricava che *ogni* curva del sistema aggiunto puro è riduttibile; e ciò basta per concludere che questo sistema si compone di $p-1$ curve di un fascio, ciascuna delle quali sega C in due punti variabili costituenti una coppia di g_2^1 (cfr. la dimostraz. del n.° 33 e la nota ivi).

Quest'ultima proprietà sta anche per $p=2$ (n.° 31). Inoltre i punti di una curva del fascio, che dà, in ogni caso, g_2^1, si possono ottenere uno ad uno con un fascio di curve di $[C]$ (ad es. determinato da due curve di $[C]$ passanti per uno stesso solo punto di quella curva): cioè il detto fascio è di curve razionali, e quindi riducibile per trasformazione cremoniana ad un fascio di rette. Si ha adunque quest'altra proprietà: *Un sistema di curve iperellittiche, di cui le curve per un punto non passano per un altro punto, si può ridurre, per trasformazione cremoniana, ad un sistema di curve di un certo ordine* ν *con un punto base* $(\nu-2)^{\text{uplo}}$ *(e forse altri punti base).*

55. Si vuole ora considerare sotto una particolare ipotesi un sistema lineare $[C]$ sovrabbondante (di curve irriducibili, definito da soli passaggi per punti).

Il sistema sia *definito* dall'avere i punti $A_1, A_2, \dots, A_h$ multipli secondo $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_h$, le condizioni espresse da questi punti essendo o no tutte indi-

(*) Il sistema dovrà essere necessariamente regolare per il n.° 52, *b*).

(**) Questo teorema e il successivo sono contenuti nel n.° 7 e nota del lavoro di Castelnuovo: *Massima dimensione*, ecc. (Annali di Matem., tom. 18).

pendenti. Potrà accadere che il sistema abbia altri punti base $A_{h+1},\ldots$ multipli secondo $\nu_{h+1},\ldots$; le condizioni espresse da questi punti essendo *interamente* conseguenza delle rimanenti. Per chiarezza indicheremo il sistema con

$$[C]=(A_1^{\nu_1}\ A_2^{\nu_2}\ldots\ A_h^{\nu_h} : A_{h+1}^{\nu_{h+1}}\ldots)_m^k,$$

e faremo l'ipotesi che *i punti* A_1, $A_2,\ldots$, A_h *esistano sopra una cubica* Γ. La curva generica [di ordine $m-3$, aggiunta rispetto al gruppo A_1, $A_2,\ldots$, A_h (cfr. n.° 6)]:

$$C'=(A_1^{\nu_1-1}\ A_2^{\nu_2-1}\ldots\ A_h^{\nu_h-1})_{m-3},$$

non passerà affatto per i punti A_{h+i} ($i=1,\ 2,\ldots$). Ciò segue, se $\nu_{h+i}>1$, dall'essere per una φ_{m-3} aggiunta a C, tutte indipendenti le condizioni nei punti multipli di C (n.° 17) e, se $\nu_{h+i}=1$, dalla seconda proprietà *b*) del n.° 22. Di più, una φ_{m-3} segando C (fuori dei punti multipli) in $2p-2$ punti, sarà $\geqq 2p-2$ il numero delle intersezioni (fuori del gruppo A_1, $A_2,\ldots$, A_h) di C, C'; valendo il segno di eguaglianza solo se tutti i punti A_{h+i} sono semplici o non esistono. Ora la curva composta di C', Γ, soddisfacendo alle condizioni che definiscono una C, appartiene al sistema $[C]$, e quindi deve (Γ contenere i punti A_{h+i} e inoltre) la stessa curva composta segare C in un gruppo della serie caratteristica g_D^{k-1} (speciale, per essere il sistema sovrabbondante), cioè in $2p-2$ punti o meno. Dunque superiormente deve valere il segno di eguaglianza e Γ non incontrare affatto C fuori dei punti base del sistema, o, come dicesi, deve essere *fondamentale* per il sistema (*). E si conclude, nelle ipotesi fatte, che *la serie caratteristica* g_D^{k-1} *è la serie canonica e però* [52 *a*)] *la sovrabbondanza* $s=1$; sicchè *dei punti* A_{h+i} *può esistere uno solo semplice giacente sopra* Γ.

56. Applichiamo il teorema al caso di $h\leqq 9$. Allora è soddisfatta senz'altro l'ipotesi che i punti A_1, $A_2,\ldots$, A_h sieno sopra una cubica Γ.

Premettasi che, *se esistono infinite curve fondamentali di un sistema* $[C]$, *irriduttibile, questo deve essere un fascio di curve (di ordine non superiore a quello delle curve fondamentali).* Poichè una curva fondamentale, condotta per un punto di C (essendo C irriduttibile) deve contenere questa curva; cioè

(*) Veggansi nella Memoria del Castelnuovo varie proprietà delle curve fondamentali; in particolare il teorema del n.° 23: *Il genere di una curva fondamentale, che insieme ad una curva residua fa parte di* $[C]$, *non può superare la sovrabbondanza s del sistema.*

ogni curva C è fondamentale per il sistema stesso; il che esige che sia il grado $D=0$ e però $[C]$ un fascio.

Ciò posto, se $h \leq 8$, esistono appunto infinite cubiche fondamentali: e però $[C]$ deve essere un fascio di curve di ordine ≤ 3. Ma $h < 8$ punti non determinano alcun tale fascio sovrabbondante: mentre $h = 8$ punti determinano un solo fascio sovrabbondante (di cubiche per gli otto punti). Dunque *un sistema di curve irriduttibili (definito da passaggi per punti), se è sovrabbondante, deve essere definito da $h \geq 8$ punti. Se $h = 8$ si ha soltanto il fascio di cubiche.* Quindi *un sistema sovrabbondante ha almeno nove punti base.*

Consideriamo quelli definiti da nove punti: il sistema può essere sovrabbondante senza ulteriori punti base: ovvero può esserci un altro punto base semplice (n.° 55).

Nel primo caso il sistema è

$$[C] = (A_1^{\nu_1}\ A_2^{\nu_2} \ldots\ A_9^{\nu_9})_m^k,$$

ove (escluso che $[C]$ sia un fascio di cubiche) i nove punti $A_1, A_2, \ldots, A_9$ sono sopra una *sola* cubica. Se dei numeri $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_9$ potessero esistere tre la cui somma fosse $> m$, con una trasformazione quadratica si potrebbe abbassare l'ordine, pur conservando al sistema le stesse proprietà; e così di seguito. Si giungerebbe infine ad un sistema in cui la somma di tre ν è $\leq m$: e ne seguirebbe, essendo la cubica pei nove punti base fondamentale e quindi essendo,

$$3m = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_9,$$

che (come è facile dimostrare) dovrebbero aversi le ν tutte eguali fra loro. Ma si osservi che, rifacendo in senso inverso le dette trasformazioni quadratiche, l'eguaglianza delle ν resta. Onde si vede che il supposto anteriormente fatto non è possibile e insieme che *un sistema lineare sovrabbondante di curve irriduttibili con nove punti base deve essere un fascio di curve (ellittiche) di ordine 3ν con moltiplicità ν in ciascuno di quei punti base.*

Nel secondo caso il sistema è

$$[C] = (A_1^{\nu_1}\ A_2^{\nu_2} \ldots\ A_9^{\nu_9} : A_{10})_m^k,$$

i punti $A_1, A_2, \ldots A_9, A_{10}$ essendo sopra una cubica. Di nuovo, se la somma di tre ν è $> m$, si trasformerà quadraticamente e così via, via. Quando si è giunti ad un sistema in cui la somma di tre ν qualunque è $\leq m$, dalla relazione

$$3m = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_9 + 1$$

(che deve aver luogo per essere la cubica fondamentale) si trae facilmente che una delle ν è $\frac{m}{3} - 1$ e le altre eguali fra loro e ad $\frac{m}{3}$. Cosicchè, notando che una curva con tali moltiplicità è di genere $\frac{m}{3}$, si conclude che *un sistema di curve irriduttibili di genere p, il quale sia determinato da nove de' suoi punti base e possegga tuttavia altri punti base, si può ridurre con trasformazione cremoniana al tipo*

$$[C] = (A_1^p \; A_2^p \dots \; A_8^p \; A_9^{p-1} \; A_{10})_{3p}^p$$

di curve di genere p, i dieci punti base giacendo sopra una cubica (fondamentale) (*).

Pisa, Novembre, 1893.

(*) In amendue i casi si è supposto che questa cubica non si spezzi. Il supposto contrario richiede esame più minuto.

Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito.

(*Di* Corrado Segre, *a Torino.*)

La *geometria sopra una varietà algebrica,* semplicemente infinita (curva), doppiamente infinita (superficie), ecc., cioè quella che studia le proprietà invariabili per trasformazioni birazionali della varietà (v. § 3), conduce naturalmente (§ 4) a considerare su questa delle *serie lineari* (di gruppi di punti, di curve, ecc.). Una tal serie è definita sulla varietà da un'equazione che contenga linearmente uno o più parametri. In altri termini se la serie è ∞^1 ogni suo elemento si compone di tutti quei punti della varietà nei quali una determinata *funzione razionale* delle coordinate prende uno stesso valore. Geometricamente si rappresenta con vantaggio una serie lineare ricorrendo ad una particolare varietà su cui essa vien segata dagl'iperpiani del suo spazio: ad es. una serie lineare di gruppi di punti sull'ente algebrico semplicemente infinito mediante una curva, una serie lineare di curve (di dimensione > 1) di un dato piano o di una superficie qualunque mediante una superficie, ecc.

La geometria sull'ente algebrico semplicemente infinito, ed in particolare lo studio delle funzioni razionali dell'ente ossia delle serie lineari di suoi gruppi di punti, fondata dal Riemann (*), si è poi svolta secondo vari indirizzi: quello funzionale che deriva appunto da quel sommo matematico; quello algebrico-geometrico che è dovuto principalmente all'importante lavoro dei sig.[i] Brill e Noether (**); quello algebrico-aritmetico seguito dal Kronecker (***) da un

(*) *Theorie der Abel'schen Functionen* (Journal für Math., tom. 54, 1857).

(**) *Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie* (Mathematische Annalen, tom. 7, 1873). Qui è fondamento il considerare la *curva piana* come imagine dell'ente algebrico, come pure l'applicazione di un teorema del sig. Noether relativo alle condizioni perchè una curva si possa rappresentare con $A\varphi + B\psi$, ove φ e ψ son curve date.

(***) Specialmente nelle sue lezioni. V. la Nota: *Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln* (Journal für Math., tom. 91, 1881).

lato e dai sig.[i] DEDEKIND e WEBER (*) da un altro. — Ora, nel fare, son già vari anni, delle ricerche sulle rigate algebriche, e in generale sulle varietà composte di ∞^1 spazi, avendo io avuto bisogno di valermi delle proprietà delle serie lineari studiate nella Memoria BRILL-NOETHER, mi accorsi come ricorrendo invece alle rigate ed alle dette varietà di spazi, e rappresentando quelle serie lineari mediante curve iperspaziali nel senso già accennato, si potessero ritrovare (almeno in parte) quelle proprietà mediante semplici ragionamenti geometrici, evitando i calcoli algebrici o le considerazioni funzionali che occorrono per stabilire il teorema del NOETHER fondamentale per quella Memoria. Così dalla considerazione di due curve in corrispondenza univoca (imagini di due serie lineari di uno stesso ente algebrico) e della rigata delle congiungenti i loro punti omologhi, giungevo a qualche caso particolare del *Restsatz* di BRILL e NOETHER, vale a dire dei teoremi sulle serie complete, residue, ecc. (§ 14) (**). E poi da una formola fondamentale relativa ad una varietà algebrica composta di ∞^1 spazi e ad una curva segnata su essa (§ 13) (***) ottenevo qualche proposizione che si collega al teorema RIEMANN-ROCH (§ 19), come il teorema di CLIFFORD, ecc. (****). Poco dopo il mio amico sig. CASTELNUOVO, entrando più di proposito nell'argomento, esponeva in modo assai più completo e sistematico una trattazione geometrica delle serie lineari sopra una curva algebrica (*****).

Nella Memoria attuale io espongo appunto il metodo geometrico che si è formato mediante questi lavori, quale è stato poi elaborato per un corso di lezioni di geometria sull'ente algebrico semplicemente infinito svolto nel-

---

(*) *Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen* (Journal für Math., tom. 92, 1882).

(**) V. le *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine* (Atti della R. Acc. di Torino, tom. 21, 1886), ad es. i n.[i] 3, 8; le *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques* (1.[e] Partie, Math. Ann., tom. 30, 1887; 2.[e] Partie, Math. Ann., tom. 34, 1889), ad es. i n.[i] 6 e seg. della 1.[a] Parte.

(***) *Intorno alla geometria su una rigata algebrica. Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi* (Rendic. della R. Acc. dei Lincei, luglio e ottobre 1887).

(****) *Sulle curve normali di genere p dei vari spazi* (Rendic. del R. Istit. Lombardo, aprile 1888).

(*****) *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (Atti della R. Acc. di Torino, tom. 24, 1889). V. anche il lavoro, di poco anteriore, *Geometria sulle curve ellittiche* (ibid., 1888).

l'anno 1890-91 (*). In questo metodo non occorrono considerazioni funzionali, nè sviluppi algebrici: unico modo con cui compare l'algebricità degli enti è col principio di corrispondenza per le forme semplici razionali. L'esposizione verrà fatta principalmente con la mira di divulgare certe considerazioni geometriche che, se anche non sono più nuove, pure non sono abbastanza diffuse; sebbene in questi ultimi tempi, specialmente per opera del sig. CASTELNUOVO e di qualche altro giovane valoroso, abbiano dato alla scienza risultati essenzialmente nuovi ed importanti. Tali considerazioni e mezzi di ricerca possono ancora rendere grandi servigi, e non solo per la geometria sull'ente algebrico semplicemente infinito, ma anche per la geometria sopra una superficie, ecc. È in vista di ciò che nel 1.° dei tre capitoli in cui questo lavoro si può dividere si dànno le generalità spettanti alla geometria su una varietà di qualunque dimensione, anzi che limitarsi a quelle relative agli enti semplicemente infiniti (**). Nel 2.° Cap. si espongono varie proprietà e formole relative a

(*) In quelle lezioni, a lato del metodo geometrico qui esposto, furono pure svolti il metodo Riemanniano e quello di BRILL e NOETHER. L'argomento in fatti è tale che non è ben trattato se non si sviluppa sotto più aspetti. Ond'è che l'aver io qui preso ad esporlo dal punto di vista geometrico non va interpretato nel senso di una preferenza che a mio avviso si debba dare a questo metodo rispetto agli altri. Tutti meritano di essere studiati; ognuno ha i suoi pregi speciali; per ciascuno vi sono questioni in cui esso va più in là, od almeno riesce più luminoso degli altri. Ma il metodo geometrico sul quale mi permetto di richiamare l'attenzione è appunto quello meno conosciuto finora. Quanto agli altri, oltre che nei lavori originali, qualcuno fu nuovamente esposto assai recentemente nel 1.° vol. (1890) delle *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen* del KLEIN (e FRICKE), non che nelle Lezioni litografate dello stesso KLEIN (1892) sulle RIEMANN'*sche Flächen;* e nel 2.° vol. (1893) del *Traité d'Analyse* del sig. PICARD. In particolare il metodo algebrico-geometrico fondato da BRILL e NOETHER viene ora di nuovo svolto con opportuni ampliamenti e modificazioni dal chiar. prof. BERTINI (i cui amichevoli eccitamenti hanno pure influito nel risolvermi all'attuale publicazione), in una Memoria che uscirà in questi *Annali* insieme con questa mia. Grazie a tale combinazione, da noi espressamente desiderata, ed accolta gentilmente dal chiar. Direttore degli *Annali*, i lettori di questi potranno vedere in pari tempo un argomento trattato con due metodi ben diversi. Ma affinchè ciascuno dei due scritti si possa studiare indipendentemente dall'altro, non abbiam creduto di dover rimandare dall'uno all'altro per quelle cose — poche del resto — che occorrevano ad entrambi: ognuno di noi ha esposto per proprio conto ciò che gli poteva servire.

(**) Ond'è che il lettore il quale avesse urgenza di veder trattati in particolare gli enti ∞^1 potrebbe sorvolare su quel 1.° Cap.: nel quale poi vi sono talune cose forse troppo note, ma che conveniva presentare riunite con altre meno conosciute. — Valgano alcune di queste ultime (specialmente il § 1) a richiamar l'attenzione di qualche geometra questi enti: anche qui alcune cose, come il § 11 sui punti multipli di una serie lineare ed il § 12 sul principio di corrispondenza Cayley-Brill, pur riguardando questioni di lor natura importantissime, non sarebbero necessarie pel seguito. Nel 3.° Cap. si ricorre anzitutto (§ 15) alle curve aggiunte di una curva piana per la costruzione effettiva delle diverse serie lineari sull'ente algebrico ∞^1 di genere p e per ottenere il noto limite minimo $n-p$ della dimensione di una serie lineare completa d'ordine n. In base poi a due proposizioni fondamentali (§§ 13 e 14) del 2.° Cap. si possono ottenere tutte le principali proprietà delle serie lineari (v. specialmente i §§ 17 e 19).

L'indice seguente servirà a dar subito un'idea più precisa dell'ordinamento del lavoro.

Torino, autunno 1893.

INDICE.

CAPITOLO I.

CAPITOLO II.

CAPITOLO III.

su certi lavori aritmetico-algebrici, sulla teoria generale dell'eliminazione, ecc. del Kronecker e della sua scuola; i quali lavori mi pajono d'importanza capitale per fondare solidamente l'edifizio geometrico (degli enti algebrici).

CAPITOLO I.

§ 1. Le varietà algebriche.

1\. Per ben definire il nostro argomento occorre stabilire: 1.° quali sono gli enti di cui ci occuperemo; 2.° quali sono le trasformazioni di essi che fissiamo come *fondamentali;* cosicchè le proprietà degli enti stessi che intenderemo studiare siano quelle che non mutano per tali trasformazioni (*).

2\. Gli *elementi* delle varietà che considereremo saranno rappresentabili mediante *gruppi di numeri* (numeri complessi), e potranno ricevere, oltre all'interpretazione puramente *analitica* (aritmetica) che così se ne ha, infinite forme d'interpretazioni *geometriche,* se quei gruppi di numeri si assumono come *coordinate* (**) di enti geometrici, punti, rette,..., curve, superficie, ecc. Noi prescindiamo in generale da ogni scelta speciale d'interpretazione. Solo, per comodità, adotteremo il linguaggio geometrico degl'iperspazi; sicchè ad esempio in luogo di *elemento* diremo *punto,* ecc. Ma così facendo non intendiamo escludere l'interpretazione puramente analitica della parola « *punto* »; e pur accogliendo d'altra parte tutte le possibili interpretazioni geometriche, ci asteniamo dal far dipendere l'essenza delle nostre ricerche dai postulati della geometria.

3\. Per *varietà algebriche* si potrebbe pensar di definire quelle composte di tutti i punti le cui coordinate sono date *funzioni algebriche* di uno o più parametri variabili indipendenti. Ma questa definizione non sarebbe abbastanza generale, cioè non darebbe tutte le varietà che si soglion chiamare algebriche; ed inoltre non sarebbe invariantiva per trasformazione di coordinate (***). Si dovrebbe modificarla aggiungendo che i valori da assumersi per quelle fun-

(*) Cfr. il Programma del sig. F. Klein: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Erlangen, 1872; ristampato nei Mathem. Annalen, tom. 43); o la traduzione italiana del sig. Fano nel tom. 17, ser. 2.ª (1890) degli Annali di Matematica.

(**) Alle volte considereremo anche coordinate *omogenee:* ciò si capirà sempre dal discorso.

(***) Si pensi ad esempio ad una curva sghemba dello spazio ordinario. Se essa fosse definita dal dare per le coordinate dei suoi punti tre funzioni algebriche, non tutte razionali, di un parametro, vi sarebbe almeno un punto fondamentale dal quale la curva sarebbe projettata *più volte;* cioè la curva ammetterebbe almeno un *cono di corde* (o trisecanti, ecc.).

zioni algebriche in corrispondenza ad ogni gruppo di valori di parametri siano legati da una o più equazioni algebriche date.

Il modo più generale di definire le varietà algebriche (*) consiste invece nel considerar come tale *l'insieme dei punti le cui coordinate soddisfanno ad un numero qualunque di date equazioni algebriche, nelle quali possono anche comparire razionalmente dei parametri indeterminati* (**).

Rientrano evidentemente in questa definizione generale, oltre a quella accennata da prima, le due seguenti definizioni particolari. 1.° Come *intersezione* di varietà rappresentate ognuna da un'equazione algebrica fra le sole coordinate; vale a dire, se è S_d (di dimensione d) lo spazio che si considera, di varietà algebriche M_{d-1} di dimensione $d-1$. 2.° Come luogo dei punti le cui coordinate sono date funzioni razionali di un certo numero di parametri legati fra loro da un'equazione algebrica.

4. Data una varietà algebrica definita nel modo più generale suddetto, essa può comporsi di *parti* aventi diverse dimensioni (***). Con opportune trasformazioni appartenenti alla teoria generale dell'eliminazione si riesce (****) a rappresentare staccatamente quelle parti (*****). Si dimostra allora (******) che una tal parte, cioè una varietà algebrica di dimensione determinata, quando questa sia $= d-1$, cioè inferiore di un'unità a quella dello spazio ambiente, si può rappresentare con un'equazione unica fra le coordinate; ed in gene-

(*) Suggeritomi dallo studio del *Festschrift* del Kronecker: *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* (Journal für Math., tom. 92, pag. 1-122, 1881). V. anche Molk: *Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination* (Acta Mathematica, tom. 6, pag. 1-165, 1885).

(**) Questa definizione ha evidentemente carattere invariantivo per trasformazione di coordinate. — Inoltre da essa segue che *projettando* una varietà algebrica da un punto (ad es. un punto fondamentale) si ha ancora una varietà algebrica (rappresentata dalle stesse equazioni, nelle quali però una coordinata — quella corrispondente al detto punto fondamentale — non si consideri più come *coordinata*, ma come *parametro*). — E segue pure che l'*intersezione* di due o più varietà algebriche è (se esiste) una varietà algebrica.

(***) Non occorre avvertire che il concetto di *dimensione* a cui noi alludiamo è quello che derivò dalle ricerche di G. Cantor; che si basa non solo sul numero dei parametri che determinano gli elementi, ma anche sulla *continuità* della corrispondenza fra questi e quelli.

(****) V. Kronecker, loc. cit., pag. 28; e Molk, pag. 447.

(*****) Nel seguito una varietà (sottint. *algebrica*) di dimensione determinata k s'indicherà brevemente con M_k. Così M_0 potrà indicare un gruppo (di un numero finito) di punti.

(******) Cfr. Kronecker, pag. 30; Molk, pag. 163.

rale quando la dimensione ha un valore qualsiasi si può rappresentare come l'intersezione *completa* di $d+1$ varietà M_{d-1} rappresentate da singole equazioni (*). — Così pure, sempre con procedimenti algebrici della stessa natura, si dimostra che una M_k algebrica si può rappresentare, *e ciò ha la massima importanza per noi,* come la trasformata *birazionalmente* (cfr. il § 2) di una M_k di S_{k+1} (la 2.ª delle definizioni particolari con cui finiva il num. prec.) (**). Ciò si può effettuare geometricamente, per esempio, con una projezione della M_k da un S_{d-k-2} (fondamentale) su un S_{k+1} (lo spazio fondamentale opposto), sicchè i punti $(x_1\, x_2 \ldots x_d)$ della M_k vengono ad esser legati da equazioni della forma

$$f(x_1 \ldots x_{k+1}) = 0 \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{k+2} = \psi_{k+2}(x_1 \ldots x_{k+1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_d \quad = \psi_d(x_1 \ldots x_{k+1}), \end{array}\right\} \tag{2}$$

(*) Si può ad esempio rappresentare una curva dello spazio ordinario come l'intersezione completa di 4 suoi coni projettanti. Ed in generale *una M_k di S_d con $k < d-1$ è l'intersezione completa di $d+1$ coni M_{d-1} che la projettino da spazi S_{d-k-2}, purchè questi siano presi in posizione conveniente (generale).* In fatti suppongasi che già si abbiano i di siffatti coni projettanti, i quali si taglino, oltre che nella data M_k, in una o più varietà irriduttibili M_{d-i}: come già si ha subito per $i=1$. Un nuovo cono projettante la M_k avrà comuni coi precedenti, oltre la M_k, delle M_{d-i-1}, *a meno che* contenga una di quelle M_{d-i}. Perciò sarebbe necessario che un punto A fissato ad arbitrio su questa (fuori della M_k) stesse in uno spazio S_{d-k-1} generatore del cono; sicchè l'*asse* S_{d-k-2} del cono conterrebbe allora un punto della retta che congiunge il punto A a quel punto della M_k che è projettato dal detto spazio generatore; ossia l'asse S_{d-k-2} incontrerebbe il cono M_{k+1} che da A projetta la M_k: il che si può evitare. Procedendo in questo modo si finirà dunque per avere $d+1$ coni che all'infuori della M_k non avranno altri punti comuni.

È facile vedere che *meno* di $d+1$ varietà M_{d-1} non basterebbero in generale per determinare, come loro intersezione *completa,* una M_k. Veggasi ad es. per le curve sghembe dello spazio ordinario Vahlen: *Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischer Raumcurven* (Journal für Math., tom. 108, 1891). —

Dal teorema del Kronecker sopra riferito si può trarre che il numero dei punti d'incontro di una M_k (algebrica) di S_d con un S_{d-k} non muta (in generale, cioè finchè rimane finito) al mutare di questo spazio. Ciò si può anche stabilire per induzione completa osservando che è vero per una M_k di S_{k+1} (come mostra l'equazione); e che la proposizione stessa vale per la M_k di S_d e precisamente pei suoi incontri con due S_{d-k} aventi un punto comune, se ha luogo per la M_k projezione di quella su un S_{d-1} dal detto punto. Il numero, ben determinato, dei punti d'incontro di una M_k di S_d con un S_{d-k} generico si chiama *ordine* della M_k.

(**) Cfr. Kronecker, pag. 31; Molk, pag. 155.

dove f è funzione *intera*, e le ψ funzioni *razionali* (*). Si possono allora riguardare le (1) e (2) come equazioni di $d-k$ varietà M_{d-1} (la prima *cono*, le altre *monoidi*) che si tagliano secondo la M_k (**). Ma si può anche dire che le (2) fanno corrispondere birazionalmente la M_k primitiva a quella (projezione) che in S_{k+1} è definita dalla (1).

Introducendo coordinate omogenee ($x_0\, x_1 \dots x_d$ pei punti di S_d e $y_0\, y_1 \dots y_{k+1}$ per quelli di S_{k+1}) si può dare ad una tal rappresentazione di una M_k di S_d la forma:

$$x_0 : x_1 : \dots : x_d = \psi_0(y) : \psi_1(y) : \dots : \psi_d(y)$$

con

$$f(y_0\, y_1 \dots y_{k+1}) = 0,$$

essendo le ψ ed f *forme* (algebriche intere) nelle y, tali che ogni punto x corrisponda in generale ad un solo punto y.

5. Fra le varietà algebriche son da distinguere le varietà *razionali* od *omaloidi*. Chiameremo così quelle per le quali le coordinate dei punti son funzioni *razionali* di un certo numero k di parametri indipendenti, *con la condizione* che vi sia corrispondenza univoca in ambi i sensi fra i punti della varietà ed i gruppi di valori di quei k parametri. Vedremo poi (n.° 24) che questa condizione, almeno nel caso di $k=1$, è superflua.

§ 2. Le corrispondenze algebriche.

6. La nozione di *corrispondenza algebrica* fra due varietà X, Y rientra in quella già definita di *varietà algebrica:* concetto noto, importante e fecondo. Se cioè si considera la *coppia di punti* x, y presi su X, Y come *elemento*,

(*) Estensione della nota rappresentazione *monoidale* delle curve sghembe dovuta al Cayley: v. Halphen: *Recherches de géomètrie à n dimensions* (Bulletin de la Soc. math. de France, 1873, tom. 2, pag. 34-52). Ivi si troverà pure, dedotto da questa rappresentazione, il teorema che il numero delle intersezioni di una M_k ed una M_{d-k} di S_d è dato dal prodotto dei loro ordini.

(**) La M_k però non è l'intersezione *completa* di quelle varietà (sicchè non vi è contraddizione con un asserto precedente): esse hanno anche comuni tutti quei punti che verificano la (1) e rendono indeterminate le ψ, i quali punti possono non giacere sulla M_k. — È facile vedere che si può render *completa* la rappresentazione in discorso ponendo insieme colle *equazioni* (1) e (2) una *disuguaglianza* a cui debbano soddisfare le coordinate (cfr. Molk, pag. 153).

una varietà algebrica di tali elementi darà origine a ciò che diremo appunto una *corrispondenza algebrica* fra X, Y. Questa è dunque definita da un sistema di equazioni algebriche fra le coordinate dei punti x, y, sistema che abbraccia anche le equazioni che definiscono rispettivamente X ed Y. La definizione della corrispondenza può esser tale che nelle sue equazioni compajano (razionalmente) oltre ai punti x, y, anche dei parametri variabili. Ma per quanto sopra (n.° 4) s'è detto si potranno sempre eliminare tali parametri.

Se ad ogni punto y di Y corrisponde un numero finito $\alpha > 0$ di punti x su X, si potrà dal sistema dato di equazioni ricavare le coordinate di x come funzioni algebriche ad α valori delle coordinate di y, vale a dire si potrà ottenere per ciascuna coordinata di x un'equazione di grado α i cui coefficienti son funzioni razionali delle y: e ciò con semplici eliminazioni (operazioni di massimo comun divisore). Invero se il campo X è determinato da *una* variabile x (X è una *retta*) avremo per definire la corrispondenza un certo numero di equazioni fra x e le y; ed è noto che da esse si trae razionalmente (appunto con l'operazione del massimo comun divisore) un'equazione unica di grado α in x, la quale determina appunto nel modo detto tutti i punti x di X corrispondenti ad uno stesso punto y. Se poi i punti x hanno *più* coordinate $x_1\ x_2\ x_3 \ldots$, basta che nel sistema delle equazioni che definiscono la nostra corrispondenza fra i punti x, y di X, Y si riguardino $x_2\ x_3 \ldots$ come *parametri*, per avere una corrispondenza fra l'unica variabile x_1 ed il punto y di Y, sì che ad ogni tal punto y corrispondono α valori di x_1: laonde x_1 sarà funzione algebrica ad α valori delle coordinate y; ed analogamente $x_2, x_3 \ldots$

7. Segue da ciò che una corrispondenza algebrica fra due varietà è *univoca* in un senso, solo quando essa in quel senso è *razionale*, vale a dire quando le coordinate dei punti dell'una varietà si possono esprimere come funzioni algebriche ad un valore, cioè *razionali* di quelle dei punti omologhi dell'altra; sicchè chiamando x ed y le coordinate omogenee dei punti omologhi delle due varietà si possa porre (le ψ essendo forme):

$$x_0 : x_1 : \ldots = \psi_0(y) : \psi_1(y) : \ldots$$

Sarà *biunivoca* solo se è *birazionale*, sicchè oltre a queste equazioni si possan scrivere le analoghe:

$$y_0 : y_1 : \ldots = \varphi_0(x) : \varphi_1(x) : \ldots$$

Due varietà in corrispondenza birazionale con una terza sono pure in corrispondenza birazionale fra loro.

La definizione algebrica data precedentemente (n.° 5) delle varietà razionali equivale a dire che sono quelle che corrispondono (algebricamente e) biunivocamente a *spazi*. Segue che se una varietà corrisponde biunivocamente ad una razionale sarà essa stessa razionale; e che due M_k razionali sono riferibili fra loro biunivocamente in infiniti modi.

8. Considerando *tra due varietà semplicemente infinite* (M_1) *razionali* una corrispondenza (α, α') (*), risulta dal n.° 6 che essa si può rappresentare con un'equazione di gradi α, α' fra i *parametri* x, x' degli elementi omologhi delle due forme; in particolare che una corrispondenza (1, 1) si può rappresentare con un'equazione *bilineare*, sicchè si riduce ad una *projettività* nel caso che si tratti di due forme fondamentali (mentre se si tratta di forme non fondamentali si può assumere l'univocità — sempre, s'intende, con l'algebricità, — oppure l'equazione bilineare, come *definizione* delle corrispondenze *projettive*). Se nell'equazione di una corrispondenza (α, α') fra gli elementi di una M_1 razionale si suppone che gli elementi omologhi x, x' coincidano si ottengono $\alpha + \alpha'$ *elementi uniti:* noto *principio di corrispondenza* formulato dallo Chasles (**). È nell'applicazione di questo principio che comparirà nei punti più essenziali del nostro studio l'algebricità degli enti e quindi il *teorema fondamentale dell'algebra.*

(*) Nel seguito dicendo una corrispondenza (α, α') fra due varietà s'intenderà una tal corrispondenza che ad ogni punto della *1.ª varietà* corrispondano α' punti nella *2.ª varietà,* e ad ogni punto della 2.ª α punti nella 1.ª.

(**) Cfr. su esso i miei Appunti storici nella *Biblioteca mathematica,* tom. 6 (1892) p. 33.

Come si sa, nell'applicare questo principio si deve badare alla *multiplicità* da attribuire ai vari elementi uniti: ed appunto nello stabilire quella multiplicità sta qualche volta il difficile. Un caso semplice noto è il seguente: quando un elemento è tale che, in qualunque delle due varietà sovrapposte lo si consideri, sempre *due* dei suoi omologhi dell'altra varietà cadano in esso, allora lo si deve contare *due* volte (almeno) nel numero complessivo $\alpha + \alpha'$ degli elementi uniti. La proposizione (che non sarebbe più vera se in luogo di *due* si ponesse un numero maggiore) si verifica subito sulle equazioni, ad es. ponendo che l'elemento di cui si tratta corrisponda al valore $x = 0$ del parametro. Essa si può invertire quando la corrispondenza è *involutoria* o *simmetrica;* sicchè è condizione necessaria e sufficiente affinchè un elemento unito di una corrispondenza involutoria conti due volte nel numero complessivo degli elementi uniti, che due dei suoi elementi omologhi coincidano con esso.

Una proposizione generale sulla multiplicità degli elementi uniti è stata data dal sig. Zeuthen nella *Note sur le principe de correspondance* (Bulletin des sciences math., tom. 5, 1873, pag. 186).

§ 3. La geometria sopra una varietà algebrica.

9. Possiamo ora (cfr. n.° 1) definire semplicemente l'oggetto della *geometria sopra una varietà M_k*. Essa è *la geometria che studia le proprietà della M_k invariabili per trasformazioni birazionali della varietà stessa* (*).

Le proprietà *projettive* della M_k, cioè quelle che non mutano per trasformazioni projettive o lineari, mutano generalmente per trasformazioni birazionali qualunque della M_k: quindi è solo una parte di esse che costituisce la geometria sulla M_k. Così mutano in generale per trasformazioni birazionali la dimensione dello spazio cui appartiene la M_k, l'ordine di questa, le sue singolarità, ecc.

Si può profittare di ciò, prendendo come rappresentante delle M_k, o meglio di un *corpo* o *classe* di M_k composto di varietà tutte riferibili birazionalmente fra loro, una che stia in uno spazio di opportuna dimensione (abbastanza elevata od abbastanza bassa); o che abbia un ordine conveniente, ad es. minimo; o che abbia singolarità opportune; ecc.

10. Riguardo alla *dimensione dello spazio* della M_k possiamo già enunciare questa proposizione importante (n.° 4): *per la geometria su una M_k di un S_d, ove $d > k+1$, si può sostituire a quella una M_k di un S_{k+1}*. E se la M_k è razionale, cioè trasformazione birazionale di un S_k, le si può addirittura sostituire un S_k.

In particolare per la geometria su una curva si può assumere la *curva piana;* e la *retta* se si tratta di curva razionale. Per la geometria sopra una superficie si può assumere la *superficie dello spazio ordinario;* e il *piano* se la superficie è razionale. Ecc.

11. Riguardo alle *singolarità* di una M_k, esse nella geometria sopra la varietà vanno considerate come *decomposte* o *risolte* in *elementi.* Questa risoluzione si effettua geometricamente mediante trasformazioni birazionali della varietà, che la riducano ad altra in cui quella singolarità sia scomparsa (cfr. la

(*) A vero dire si usa spesso chiamare «geometria *sulla varietà*» quella che studia gli enti *contenuti* nella varietà, senza preoccuparsi delle trasformazioni che si assumono come fondamentali: così quando si chiama *geometria sulla superficie* la teoria di GAUSS, ecc., delle linee tracciate su questa. Però per brevità di linguaggio, quando si è nel campo algebrico-geometrico ho creduto opportuno (anche in lavori precedenti) di fissare per quella locuzione il senso più ristretto sopra enunciato.

nota al n.° 20). Analiticamente la stessa risoluzione trova la sua espressione in opportuni *sviluppi in serie* delle coordinate dei punti della varietà negl'intorni dei punti singolari. Si dimostra che nell'intorno di un punto qualunque della M_k le coordinate dei punti di questa si posson esprimere mediante *uno o più* gruppi di serie di potenze intere di k parametri: ognuno di questi gruppi di serie rappresenta un *elemento* della M_k; e l'intorno di un punto qualunque, singolare o no, di questa varietà è un insieme di siffatti elementi. Nel caso di una curva piana $f(x\ y) = 0$ gli elementi che contengono un suo punto $(x_0\ y_0)$ sono tanti quanti gli sviluppi di $y - y_0$ in serie di potenze di $x - x_0$: la loro considerazione trae origine, come si sa, da (Cauchy e) Puiseux; essi furono poi più ampiamente studiati dal Weierstrass (nelle sue lezioni sulle funzioni abeliane) appunto col nome di *elementi*, dal Cayley che li chiamò *rami, lineari e superlineari*, dall'Halphen col nome di *cicli* (corrispondenti ai *sistemi ciclici* del Puiseux di valori della funzione y di x intorno al punto $x_0\ y_0$), e da tanti altri geometri (*). Analogamente in un punto qualunque di una superficie si hanno uno o più *elementi*, o *falde* superiori, o *cicli di falde* secondo una denominazione dell'Halphen (**). — È chiaro che in seguito a trasformazioni birazionali un elemento si muta in un elemento, ma posson diventare staccati fra loro gli elementi che dapprima avevan comune (come origine) uno stesso punto singolare. Quindi allorquando studiando la geometria su una varietà si ha in questa un punto (singolare) pel quale passano più *elementi* (rami, falde, ecc.) si dirà che ivi si considera un punto *ben determinato*, solo quando sia fissato *l'elemento* su cui lo si vuol considerare.

(*) Nel seguito avremo occasione di fare qualche citazione più precisa.

(**) *Sur les lignes singulières des surfaces algébriques* (1877) (Annali di Mat., ser. 2.ª tom. 9). I lavori sulle singolarità superiori delle superficie e varietà di maggior dimensione sono finora assai scarsi rispetto a quelli relativi alle singolarità delle curve. Per la scomposizione in elementi (sviluppi in serie) delle superficie e varietà superiori va citato specialmente: G. Kobb: *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (Journal de Mathématiques, 4.ª sér., tom. 8, 1892), a cui si collega la Nota dello stesso autore: *Sur un point de la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (Bulletin de la Soc. math. de France, tom. 21, juin 1893). Veggasi pure il § III del lavoro del sig. Del Pezzo: *Intorno ai punti singolari delle superficie algebriche* (Rendic. del Circolo mat. di Palermo, tom. 6, 1892).

§ 4. Le serie lineari e le involuzioni. Varietà imagini.

12. Una grande classe di proprietà relative alla geometria su una varietà X di dimensione k contenuta in S_d si legano alla considerazione delle *serie o sistemi lineari* di M_{k-1} giacenti in X. Chiameremo così la serie di M_{k-1} che su questa M_k si ottiene come sezione con un sistema lineare di M_{d-1}

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0;$$

con l'avvertenza che ove questo sistema di varietà avesse su X una M_{k-1} *base,* la quale così verrebbe a comparire come *parte* in tutte le M_{k-1} della serie, si possa ad arbitrio toglierla da tutte, ovvero conservarla in tutte. — Così allorquando una curva C^n (d'ordine n) di S_d si sega con un sistema lineare di M^{ν}_{d-1} il quale abbia l punti base su essa, si ottiene una *serie lineare di gruppi* di $n\nu$ punti con quegli l punti fissi; ovvero, togliendo $1, 2, \ldots, l$ di questi punti, delle serie lineari di gruppi di $n\nu - 1$, $n\nu - 2, \ldots, n\nu - l$ punti.

In particolare è una serie lineare quella segata su una varietà dagl'iperpiani del suo spazio.

Una serie lineare su X può anche comporsi di *un solo* elemento (M_{k-1}), come il sistema lineare di M_{d-1} che la definisce. Una M_{k-1} qualunque di X costituisce su questa una *serie lineare di dimensione zero.*

13. In generale la *dimensione della serie lineare* che si considera sulla varietà X si collega semplicemente alla *dimensione h del sistema lineare di M_{d-1}* ed al *numero delle varietà di questo sistema le quali passano per X.* Se due M_{d-1} segano su X lo stesso elemento M_{k-1} della serie, la varietà del loro fascio che passerà per un punto di X esterno a quella M_{k-1} ed alla base del sistema lineare conterrà X (*). Se dunque per X non passa alcuna M_{d-1} del sistema lineare, ogni M_{k-1} della serie lineare sarà segata su X da *una sola* varietà del sistema; sicchè la dimensione della serie lineare sarà evidentemente quella stessa, h, del sistema di M_{d-1}. Se invece per X passano ∞^t varietà M_{d-1} del sistema ($t \geqq 0$), esse formeranno un sistema lineare; e questo, con un'altra M_{d-1} del sistema primitivo ∞^h, determinerà un sistema lineare ∞^{t+1} composto di *tutte* le M_{d-1} che passano per la M_{k-1} segata su X da quella.

(*) A partir di qui supponiamo X (ed in generale ogni varietà su cui studiamo la geometria) *irriducibile,* cioè non composta di due o più distinte varietà della stessa dimensione.

Prendendo allora entro al sistema ∞^h un sistema lineare ∞^r, ove $r = h - t - 1$, che non abbia alcun elemento M_{d-1} comune col sistema ∞^t, esso avrà comune con ogni sistema lineare ∞^{t+1} passante per questo una sola varietà, sempre diversa quando è diverso il sistema ∞^{t+1}; ed è chiaro che *questo nuovo sistema lineare ∞^r di M_{d-1} darà da se su X tutta quanta la serie lineare di M_{k-1}, ogni elemento una volta sola* (*). La serie sarà dunque di dimensione r.

Da r punti *generici* di X sarà individuato un elemento M_{k-1} della serie lineare. Basterà prendere il 1.° punto fuori dei punti base del sistema lineare ∞^r di M_{d-1}, onde le varietà di questo sistema passanti per esso formeranno un sistema ∞^{r-1}; poi il 2.° punto fuori dei punti base di questo, onde le M_{d-1} passanti per questi 2 punti formeranno un sistema ∞^{r-2}; poi il 3.° punto fuori dei punti base di questo, ecc. ecc.: e ciò si potrà continuare fino alla fine, perchè mai i punti base dei successivi sistemi invaderanno tutta X, essendo che X non sta in alcuna M_{d-1} del sistema ∞^r.

14. La nozione di *serie lineari* spetta giustamente alla geometria sulla varietà. Trasformando *razionalmente* (non occorre *birazionalmente*, cioè l'*invertibilità*) la varietà X in un'altra varietà X' mediante le formole:

$$x_l = f_l(x'),$$

la serie lineare che su X è segata dalle varietà

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0,$$

avrà per corrispondenti su X' le varietà che vi sono staccate dall'equazione trasformata:

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i [f(x')] = 0,$$

equazione della forma:

$$\Sigma \lambda_i \Phi_i(x') = 0,$$

ove le Φ sono forme nelle x': equazione dunque di un sistema lineare. La serie lineare di X si muta dunque in una serie lineare di X'. Riguardo ai punti fissi, o punti base, della prima serie, cioè punti x di X pei quali le $\varphi_i(x)$ si annullano, essi si mutano in punti x' di X' per cui le $\Phi_i(x')$ son nulle, cioè in punti base della seconda serie: ma l'inverso esigerebbe qualche considerazione ulteriore (che pel seguito non occorre) nel caso di un punto x' di X'

(*) Nel seguito si potrà sempre intendere che al sistema primitivo ∞^h di M_{d-1} si sia sostituito un sistema ∞^r così fatto.

che fosse *fondamentale* per la trasformazione, cioè tale da annullare tutte le $f_l(x')$.

15. Per tal modo le serie lineari vengono a presentarsi spontaneamente nello studio delle trasformazioni birazionali della varietà. Ad esempio alle sezioni iperplanari di questa corrispondono nella varietà trasformata le varietà di una serie lineare.

Viceversa supponiamo data sulla varietà X di dimensione k una serie lineare infinita di M_{k-1}

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0,$$

nella quale non vi siano (si sian tolte) *parti* (di dimensione $k-1$) fisse; e si consideri la varietà Y dei punti y di coordinate

$$y_i = \varphi_i(x),$$

ove le x son legate dalle equazioni che definiscono X. Essa sarà in corrispondenza razionale (in un senso) con X, per modo che a quella data serie lineare di X corrisponde su Y quella costituita dalle sue sezioni iperplanari. La serie lineare data su X determina dunque una trasformazione razionale di questa varietà in un'altra Y su cui la serie corrispondente è segata dagl'iperpiani.

Si può anche dire che quella trasformazione viene eseguita ponendo una corrispondenza lineare o projettiva fra le varietà che costituiscono la serie lineare $\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0$ e gl'iperpiani $\Sigma \lambda_i y_i = 0$ di uno spazio d'ugual dimensione: allora a quelle varietà che passano per un punto generico x di X corrisponderanno iperpiani passanti pure per un determinato punto y; ed il luogo generato da y sarà appunto la varietà Y.

16. È importante di riconoscere sulla serie lineare data su X quando è che la trasformazione che essa definisce è univoca, ossia razionale, *in ambi i sensi* (birazionale). Se un punto y della varietà trasformata Y corrisponde a *due* punti x', x'' di X, sarà (n.° 15)

$$\varphi_i(x') = \varphi_i(x''),$$

a meno di un fattore. Ciò equivale a dire che le due equazioni:

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x') = 0,$$
$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x'') = 0,$$

fra i parametri indipendenti λ sono equivalenti fra loro: ossia che il passaggio di una varietà della serie:

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0,$$

per l'uno dei due punti x' x'' trae di conseguenza il passaggio per l'altro. Dunque: la serie lineare data su X definirà una trasformazione biunivoca, cioè birazionale, di X in una nuova varietà (nel senso spiegato, cioè che a quella serie corrispondano le sezioni iperplanari della nuova varietà), solo quando essa sia tale che il passaggio di un suo elemento per un punto generico di X *non* tragga di conseguenza il passaggio per altri punti mobili.

Il fatto che così si esclude avverrebbe *necessariamente* quando la dimensione r della serie lineare fosse minore di quella k della varietà X: giacchè allora le ∞^{r-1} varietà M_{d-1} passanti per un punto di X taglierebbero questa secondo una M_{k-r} variabile. Ma può accadere anche se $r \geqq k$; quantunque se $r > k$ esso sia da considerarsi come eccezionale, cioè esiga che le varietà φ si prendano in modo particolare rispetto ad X.

17. Se su X il passaggio di un elemento M_{k-1} della serie lineare per un punto mobile trae il passaggio per altri *in numero finito,* $\mu - 1$, i punti di X vengono a raggrupparsi a μ a μ in un particolare aggruppamento tale che ogni punto di X individua il gruppo di μ punti di cui fa parte. Un siffatto aggruppamento lo diremo un'*involuzione di grado* μ fra i punti di X. La serie lineare si dirà *composta* mediante l'involuzione, perchè ogni suo elemento è tutto composto di gruppi dell'involuzione. Quando una serie lineare è composta con un'involuzione di grado μ la varietà Y rappresentante la serie ha la stessa dimensione k di X ed è con questa in corrispondenza $(1, \mu)$.

Data su X un'involuzione qualunque di grado μ si costruiscono subito delle serie composte mediante quell'involuzione. Si rappresentino cioè i gruppi di questa coi punti di una nuova varietà X' di dimensione k (*). Fra X' e X vi sarà corrispondenza $(1, \mu)$, e quindi alle serie lineari su X' corrisponderanno (n.° 14 applicato con lo scambio di X e X') su X serie lineari, le quali evidentemente saran composte con la data involuzione (**). —

Non vi sono differenze sostanziali quando in luogo dell'involuzione, cioè dei *gruppi* di un numero finito μ di punti, si abbiano su X infinite *varietà* M_i

(*) Come ben si sa, un gruppo di μ punti $x, y, \ldots$ di S_d si può determinare simmetricamente ad es. mediante i valori delle somme (funzioni simmetriche) $a_{il\ldots} = \Sigma x_i y_l \ldots$ (in cui la somma s'intende fatta tenendo fissi gl'indici e permutando le lettere $x\ y \ldots$): il che equivale a considerare quel gruppo come un inviluppo di classe μ d'iperpiani. Assunte quelle $a_{il\ldots}$ come coordinate di punti si ha che un'involuzione di grado μ su una M_k di S_d vien rappresentata da una M_k del nuovo spazio.

(**) Da una proposizione che stabiliremo al n.° 27 (v. anche una nota ivi) seguirebbe poi subito che in tal modo si ottengono su X *tutte* le serie composte con la data involuzione.

tali che per un punto generico di X ne passi una sola, e gli elementi M_{k-1} della serie lineare su X sian composti con quelle M_i per modo che quelli che passano per un punto contengano tutta la M_i passante per quel punto. Data su X un'infinità di varietà M_i così fatta, cioè tale che per ogni punto ne passi una sola (sicchè saranno ∞^{k-i}), si costruiscon subito nel modo anzi detto delle serie lineari composte con esse. — Si noti però che una varietà Y rappresentata da una serie lineare così composta avrà ogni suo punto per imagine di tutti i punti di X situati su una di quelle M_i, sicchè sarà solo di dimensione $k-i$. Si è dunque nel caso in cui una varietà X si trasformi razionalmente in una Y *di dimensione minore.*

18. Se X è uno spazio S_k (e $x_0 \ldots x_k$ le coordinate in questo), una serie lineare di M_{k-1} in esso sarà data senz'altro dall'equazione:

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0,$$

sarà cioè un ordinario sistema lineare di varietà dell' S_k. Essa definirà una trasformazione razionale

$$y_i = \varphi_i(x)$$

di quello spazio in una nuova varietà Y. Se la dimensione r di quel sistema lineare è $\geqq k$, la Y sarà in corrispondenza *birazionale* coll' S_k e quindi sarà una varietà razionale, se le M_{k-1} passanti per un punto non passano di conseguenza per altri. Nel caso di $r = k$ la Y è pure un S_k e la corrispondenza fra i due spazi X, Y è birazionale o *Cremoniana* se il sistema lineare considerato di X è *omaloidico,* cioè tale che k varietà generiche di esso si taglino in un sol punto variabile. — Data nello spazio X un'involuzione qualunque di grado μ (oppure un sistema di varietà M_i tale che per un punto generico ne passi una sola) si costruiranno subito, nel modo detto superiormente (n.° 17) infiniti sistemi lineari di M_{k-1} composti con essa (o col sistema di M_i).

§ 5. Seguito. Varietà multiple.

19. Abbiam visto come una serie lineare ∞^r di M_{k-1} su una varietà X di dimensione k si possa sempre rappresentare con una varietà Y di S_r, la cui dimensione sarà pure k nel caso che $r \geqq k$ e che la serie non sia composta mediante M_i ($i > 0$) nel senso esposto (n.° 17). Questa rappresentazione è molto importante, servendo la varietà Y per lo studio della serie lineare di X, e viceversa questa serie lineare su X per lo studio di Y. Naturalmente,

come già avvertimmo (n.° 15), in questa rappresentazione la serie lineare di M_{k-1} si suppone priva di *parti* fisse. Se no, per averne l'imagine, si dovrà considerare, insieme con la varietà Y le cui sezioni iperplanari corrispondono alla serie lineare di X privata della parte fissa, l'imagine di questa su Y.

20. I caratteri della varietà imagine dànno caratteri della serie lineare, e viceversa. Così abbiam già notato come la dimensione della serie lineare sia pur quella dello spazio cui *appartiene* (o in cui *è immersa*) la varietà imagine Y. Vediamo ora che cosa sia per la serie lineare l'ordine della varietà Y. Quest'ordine è il numero dei punti d'incontro di k sezioni iperplanari indipendenti di Y. A questi punti corrispondono — biunivocamente, se, almeno pel momento, supponiamo che la serie lineare non sia in alcun modo composta, sicchè la corrispondenza fra X e Y sia biunivoca — i punti variabili di X in cui s'incontrano k elementi (M_{k-1}) indipendenti della serie lineare. Onde l'ordine di Y è uguale al numero, che diremo n, di questi punti variabili. Nel caso più semplice di $k = 1$, l'ordine della curva Y imagine di una serie lineare sulla curva X è il numero dei punti (variabili) di ciascun gruppo di questa serie.

Se sulla varietà X vi sono μ punti (non fissi per la serie) tali che il passaggio per essi sia *una* sola condizione per gli elementi M_{k-1} della serie (cioè tali che il passaggio per l'uno abbia come conseguenza il passaggio per gli altri), si potranno i k elementi indipendenti su nominati assumere in guisa che passino tutti per quei μ punti: sicchè si taglieranno solo più in $n-\mu$ altri punti. Per tal modo si vede che a quei μ punti corrisponderà su Y *un* solo punto, il quale però conterà come μ intersezioni di k sezioni iperplanari qualunque passanti per esso: onde il punto stesso sarà *multiplo*, μ-plo, per Y (*).

(*) Lo stesso fatto accade, almeno in generale, se X ha un punto μ-plo x che non sia punto base per la serie lineare ossia pel sistema lineare di M_{d-1} che la definisce: generalmente gli corrisponderà ancora e per ragioni analoghe un punto μ-plo di Y. Ma se x è punto base, non si hanno immediatamente punti omologhi su Y: per averne bisogna considerare i punti di X che sono infinitamente vicini ad x, vale a dire le *tangenti* ad X in x. Ognuna di queste, quando non sia tangente comune a tutte le M_{d-1} del sistema, ha un determinato punto come corrispondente su Y. E se le M_{d-1} che toccano in x una tangente generica di X non ne toccano di conseguenza altre, avverrà che a tangenti diverse corrisponderanno su Y punti diversi: cosicchè allora le imagini su Y dei punti di X infinitamente vicini ad x formeranno una M_{k-1}. L'ordine di questa sarà il numero delle tangenti variabili in x ad X che son pure tangenti ad una M_{d-1} generica: quindi in generale, se il sistema di M_{d-1} passa *semplicemente* pel punto x, sarà uguale alla multiplicità μ di x per X. Ecc., ecc.

Ora se questo fatto accade *sempre*, per ogni punto di Y, cioè se la serie lineare data su X è *composta* mediante un'involuzione di grado μ, ogni punto di Y verrà ad essere μ-plo, e quindi Y non sarà più d'ordine n come nel caso della serie semplice, ma solo d'ordine $n:\mu$. Però, volendo evitare la distinzione fra serie lineari semplici e composte, potremo dire che sempre l'ordine di Y è n, ma che Y può ridursi ad una *varietà multipla*, doppia, tripla,... μ-pla, cioè ad una varietà d'ordine $n:\mu$ da contarsi μ volte.

21. *La considerazione delle varietà multiple è utilissima.* Essa permette di riguardare come *biunivoca* anche nel caso che prima si escludeva la corrispondenza razionale fra le due varietà X e Y. Se Y è μ-pla, ogni suo punto va considerato come un gruppo di μ punti generalmente distinti; e la corrispondenza con X viene ad essere biunivoca in quanto i μ punti di X che prima corrispondevano ad uno stesso punto di Y ora invece si considerano come corrispondenti rispettivamente ai μ punti di Y sovrapposti in quello. — Così quando la dimensione r della serie lineare data su X è $=k$, la Y coincide con S_k, ma continua ad essere una M_k d'ordine n ($=\mu$ nel caso attuale): *uno spazio S_k (retta, piano...) n-plo.* Invece di assumere come limite minimo dello spazio che può contenere una M_k^n l' S_{k+1}, possiamo ora prendere l' S_k e così parlare di curva d'ordine n distesa sulla retta, di superficie d'ordine n distesa sul piano, ecc. Ed invece di prendere come rappresentanti delle M_k nella geometria su queste varietà le M_k di S_{k+1} (v. n.° 10) possiamo anche assumere le M_k di S_k, ossia gli S_k multipli (che si otterrebbero ad es. projettando su un S_k le M_k qualunque che son date) (*).

Riguardo alle varietà multiple aggiungiamo che col loro mezzo si può riguardare come biunivoca una corrispondenza *d'indici qualunque* (μ, μ') fra due varietà: basta che queste si considerino come multiple risp. secondo μ' e μ. Ciò si rende sensibile ad es. considerando come intermediaria la varietà delle rette che congiungono i punti omologhi delle due varietà date (o semplicemente la varietà delle coppie di punti omologhi): ad essa è riferita biunivocamente la 1.ª di queste se i suoi punti si contano μ' volte, e la 2.ª se se ne contano μ volte i punti. — Si avverta poi in generale che quando s'introduce nello studio una varietà multipla, per potersene valere, anzi perchè la cosa

(*) Com'è noto, alla rappresentazione delle curve mediante una retta multipla si collega subito la rappresentazione *reale* con *superficie di* RIEMANN: i punti complessi della retta si rappresentano coi punti reali del piano o della sfera reale; ed all'esser la retta n-pla corrisponde il sovrapporsi di n fogli sulla superficie, ecc.

abbia un senso ben definito, bisogna che sia sempre data una varietà semplice con cui quella varietà multipla sia in corrispondenza biunivoca determinata: come nell'esempio citato, in cui i μ punti di una varietà μ-pla che occupano uno stesso luogo son rappresentati da μ rette distinte uscenti da questo. —

Si potrebbero anche considerare varietà multiple in cui ogni punto va contato *infinite volte.* Così abbiam visto (n.° 17) che quando la varietà X si trasforma razionalmente mediante una sua serie lineare composta di varietà M_i ($i > 0$) tali che per un punto generico di X ne passi una sola, la trasformata Y ha i suoi punti che sono imagini ognuno di tutti i punti di X costituenti una M_i; ciascun punto di Y si dovrebbe dunque contare ∞^i volte per poter concepire come biunivoca la corrispondenza fra X e Y. Anche qui può soccorrere la rappresentazione mediante la varietà delle coppie di punti omologhi di X ed Y. —

22. Meritano un cenno speciale le *varietà doppie.* Quando una varietà Y di dimensione k si considera come *doppia,* ciò vuol dire che si pensa ad una altra varietà X con un'*involuzione di 2.° grado* riferita biunivocamente ad Y, ogni punto di Y rappresentando una coppia di punti di quell'involuzione su X e viceversa. Mentre le coordinate dei punti y di Y son funzioni razionali di quelle dei punti omologhi x di X, le coordinate di un punto x di X son funzioni algebriche a due valori di quelle del punto omologo y, e quindi del tipo

$$x_i = A_i(y) + B_i(y)\sqrt{R(y)},$$

ove le funzioni A_i, B_i, R son razionali e si possono anzi, introducendo coordinate omogenee, supporre intere. La $R(y)$ si può supporre priva di fattori multipli; e si può ammettere che sia una stessa funzione per tutti i valori di i, sicchè anche x_k contenga solo il radicale che compare in x_i: giacchè è chiaro che in generale x_k è funzione algebrica ad un valore delle y e della x_i, cioè delle y e di $\sqrt{R(y)}$, e però si esprimerà razionalmente con queste. — L'equazione:

$$R(y) = 0$$

determina sulla varietà Y una varietà M_{k-1} composta di quei punti y [all'infuori eventualmente di punti eccezionali che annullino anche le $A_i(y)$] pei quali coincidono i due omologhi su X: *la varietà limite* o *varietà di diramazione* della varietà doppia Y, o della corrispondenza (1, 2) fra Y ed X. Ad essa corrisponde univocamente su X la M_{k-1} *doppia* dell'involuzione di 2.° grado.

Abbiansi due varietà X, X' che si rappresentino sulla varietà doppia Y con la stessa varietà M_{k-1} di diramazione $R(y)=0$; per modo che si possan definire risp. con le equazioni:

$$x_i = A_i(y) + B_i(y)\sqrt{R(y)}$$

$$x'_l = A'_l(y) + B'_l(y)\sqrt{R(y)}.$$

È chiaro che esse saranno in corrispondenza algebrica biunivoca, se si considerano come omologhi due loro punti x, x' quando corrispondano agli stessi valori delle y e di $\sqrt{R(y)}$ [oppure anche a valori opposti per $\sqrt{R(y)}$; sicchè si hanno *due* corrispondenze biunivoche]. Dunque le varietà semplici che rappresentano una data M_k doppia con una determinata M_{k-1} limite sono tutte equivalenti fra loro (per trasformazioni birazionali) (*). Ha quindi un senso pienamente determinato il dire: la M_k doppia con una data varietà limite. Due varietà X, X' di dimensione k, riferite biunivocamente a due varietà *doppie* Y, Y' determinate risp. da due M_{k-1} limiti, si potranno riferire biunivocamente fra loro se si posson riferire biunivocamente le varietà *semplici* Y, Y' in modo che si corrispondano quelle due M_{k-1} (**).

È così che si può parlare della retta doppia con $2p+2$ dati punti di diramazione come rappresentante di una classe ben determinata di curve (*iperellittiche;* cfr. § 16); del piano doppio con conica limite e di quello con quartica limite (***); ecc. —

Tutto ciò non si potrebbe estendere senz'altro a varietà μ-ple per $\mu > 2$. Non possiamo cioè asserire che sia ben determinata una tal varietà quando si assegni su essa la varietà limite.

(*) Almeno finchè la loro rappresentazione analitica si può far dipendere da un radicale quadratico il cui annullamento non stacchi dalla M_k alcun'altra M_{k-1} che la varietà limite. Questa restrizione vale anche per le linee seguenti.

(**) Se dunque una varietà X ammette un'involuzione di 2.° grado riferibile nel modo detto alla varietà Y, ma non più involuzioni trasformabili birazionalmente fra loro, i suoi *moduli* (cioè numeri che non mutano per trasformazioni birazionali della varietà X) saranno precisamente i moduli che la M_{k-1} $R(y)=0$ ha *sopra la* Y (cioè numeri relativi alla detta M_{k-1} i quali non mutano per trasformazioni birazionali di Y).

(***) Così dal fatto che queste due specie di piani doppi si posson sempre ottenere come imagini (projezioni) di una quadrica (da un punto esterno) o di una superficie cubica (da un suo punto semplice), e dall'essere queste superficie rappresentabili biunivocamente sul piano, cioè razionali (escluso il cono cubico), segue che quei due piani doppi (il 2.° se la quartica limite non si spezza in 4 rette concorrenti) son riferibili biunivocamente al piano, cioè che son razionali tutte le superficie rappresentabili su quei due piani doppi.

§ 6. Serie lineari contenute in una data.

23. Data sulla varietà X di dimensione k dello spazio S_d una serie lineare ∞^r di M_{k-1}, che possiam supporre vi sia segata da un dato sistema lineare ∞^r di M_{d-1}, i sistemi lineari minori che son contenuti in questo quando $r > 1$ segano su X delle serie lineari di M_{k-1} contenute nella ∞^r. Rappresentando questa con la varietà Y (di dimensione $\leq k$) di S_r, le serie lineari minori che così si ottengono saran segate su Y dalle forme fondamentali d'iperpiani di S_r. *E la serie lineare ∞^r non contiene altre serie minori che queste.* E più in generale possiamo osservare che: *se entro una serie lineare di dimensione $r > 1$ di M_{k-1} su X si ha una serie algebrica infinita tale che per r' punti generici di X* (*) *passi una sola di queste M_{k-1}, questa serie sarà una serie lineare di quelle già considerate entro la data.* In fatti rappresentando la serie lineare ∞^r su Y, quella serie algebrica di M_{k-1} di X avrà per imagine una serie di sezioni iperplanari di Y tale che per r' punti generici di Y ne passerà una sola (**): donde segue (***) che gl'iperpiani di quelle se-

(*) E quindi per i gruppi di punti (o le M_i) collegati ad essi, nel caso che la serie lineare ∞^r sia composta con un'involuzione (o con un sistema di M_i).

(**) Anche se Y fosse *multipla*, sicchè a quegli r' punti corrispondessero su X altrettanti gruppi di punti, od M_i (v. la nota preced.).

(***) Si ha in S_r una serie algebrica $\infty^{r'}$ d'iperpiani tale che per r' punti generici di Y passa un solo iperpiano. Si tratta di dimostrare che la serie si compone degl'iperpiani passanti per un $S_{r-r'-1}$.

Sia anzitutto $r' = 1$. Allora se gli ∞^1 iperpiani non formassero un fascio, per un punto generico di S_r ne passerebbe più di uno, onde essi avrebbero un *inviluppo* M_{r-1}; e su questo dovrebbe stare Y, perchè per ogni suo punto coincidono gl'iperpiani che lo contengono. Dunque gli ∞^1 iperpiani sarebbero *tangenti* ad Y nei punti in cui l'incontrano; sicchè le varietà d'incontro sarebbero *varietà di contatto* (come sarebbero ad es. quelle determinate su un ordinario cono quadrico dai suoi piani tangenti), a differenza di quelle segate su Y degl'iperpiani generici di S. Invece l'ipotesi che sopra si ammette è che la serie algebrica $\infty^{r'}$ stia in quella lineare ∞^r *semplicemente*, cioè senza contar come *multiple* le sue varietà. Segue che veramente per $r' = 1$ si hanno gl'iperpiani di un fascio.

Ed ora suppongasi $r' > 1$ e che si sia dimostrato l'asserto per serie (algebriche) d'iperpiani di dimensione $< r'$, sicchè per es. si abbia che una $\infty^{r'-1}$ d'iperpiani tale che per $r'-1$ punti generici di Y ne passi un solo si componga degl'iperpiani uscenti da un $S_{r-r'}$. Data la $\infty^{r'}$ d'iperpiani tale che per r' punti generici di Y ne passi un solo, e preso su Y un punto A (non comune alla $\infty^{r'}$), gl'iperpiani di quella serie i quali passano per A passeranno per un $S_{r-r'}$; mentre gl'iperpiani della stessa serie i quali passano per un nuovo zioni costituiscono appunto una forma fondamentale, cioè passano per uno stesso $S_{r-r'-1}$ (*).

24. L'ultima proposizione, generale, trova un'applicazione immediata alle *varietà razionali.* Se X è una M_k razionale e su essa si ha una serie infinita algebrica di M_{k-1}, nella rappresentazione birazionale di X su un S_k a quelle varietà corrisponderanno M_{k-1} di un certo ordine: contenute dunque nella serie lineare composta di tutte le M_{k-1} di quell'ordine dell' S_k. Dunque anche la serie algebrica di M_{k-1} di X è contenuta in una serie lineare di M_{k-1}; e però le si può applicare quella proposizione generale, sicchè: *sopra una M_k razionale una serie infinita algebrica di M_{k-1} tale che per un certo numero di punti generici ne passi una sola è una serie lineare.*

Così per $k = 1$ si ha che sopra una curva razionale una serie (algebrica) di gruppi di punti tale che da alcuni punti generici sia individuato un gruppo è *lineare,* ossia un'*involuzione* ordinaria. — Se una curva si può rappresentare ponendo per le coordinate delle funzioni razionali di un parametro λ, e ad ogni punto della curva corrispondono n valori di λ, in altri termini se la curva è in corrispondenza $(1, n)$ con una retta (su cui si distende il parametro λ), gli ∞^1 gruppi di n punti di questa che corrispondono ai singoli punti della curva saranno tali che ogni punto della retta farà parte di un solo gruppo. Dunque formeranno un'involuzione, cioè una varietà semplicemente infinita razionale, alla quale sarà riferita biunivocamente la curva: sicchè questa sarà *razionale.* Cfr. la definizione del n.° 5 (**).

---

punto B di Y non situato su questo spazio passeranno per un secondo $S_{r-r'}$; e questi due spazi avranno comune un $S_{r-r'-1}$ per cui debbon passare gl'iperpiani della serie che contengono in pari tempo A e B. Gl'iperpiani della serie uscenti da un nuovo punto C di Y non posto sull'$S_{r-r'+1}$ congiungente i due $S_{r-r'}$ avranno comune un terzo $S_{r-r'}$ che incontrerà quei due secondo spazi $S_{r-r'-1}$ necessariamente coincidenti (col primo $S_{r-r'-1}$), giacchè altrimenti l'$S_{r-r'}$ relativo a C starebbe nell'$S_{r-r'-1}$ congiungente i primi due. Dunque movendosi C su Y gl'iperpiani della serie $\infty^{r'}$ passanti per esso passano sempre per un $S_{r-r'-1}$ fisso: come si voleva dimostrare.

(*) Questa proposizione, essenziale pel seguito, fu da me esposta già da alcuni anni pel caso che la varietà X sia una curva. Essa va confrontata con quella, più recente, che esporremo al n. 27 (v. anche la relativa nota a pie' di pag.).

(**) Appunto ora il sig. Castelnuovo è riuscito a dimostrare l'analoga proposizione per le superficie: ogni superficie il cui punto generico abbia le coordinate funzioni razionali di due parametri è rappresentabile biunivocamente sul piano; ossia ogni serie algebrica di gruppi di punti del piano tale che un punto generico stia in un sol gruppo *(involuzione piana)* è razionale: *Sulla razionalità delle involuzioni piane* (Rendic. della R. Accad. dei Lincei, ottobre 1893).

25. Da quella proposizione del n.° 23 che si riferisce alle serie lineari contenute in una data ∞^r di X, segue che se si cambia (com'è possibile) il sistema lineare di M_{d-1}

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0$$

che sega su X la serie lineare ∞^r di M_{k-1} senza che questa muti, con che cambieranno anche i sistemi lineari di M_{d-1} contenuti in quello, non muteranno però le serie lineari minori di M_{k-1} che questi staccano su X. Cosicchè le relazioni fra le serie lineari minori contenute nella serie lineare ∞^r (riguardo agli elementi M_{k-1} con cui si posson determinare o che esse hanno di comune, ecc.) son le stesse che quelle esistenti fra i sistemi lineari minori contenuti in un sistema lineare ∞^r di M_{d-1}, ossia quelle esistenti fra gli spazi contenuti in un S_r. Inoltre, mutando il sistema lineare di M_{d-1} che stacca su X la data serie, cioè mutando le φ, la varietà Y definita dalle formole:

$$y_i = \varphi_i(x),$$

rimarrà sempre *collineare* a sè stessa (sicchè, projettivamente parlando, non muta); giacchè due tali varietà Y saranno dalla corrispondenza con la X riferite fra loro in una corrispondenza algebrica univoca tale che alle sezioni iperplanari dell'una corrispondono le sezioni iperplanari dell'altra, e agl'iperpiani di una forma fondamentale gl'iperpiani di una forma fondamentale: donde una collineazione fra i due S_r e le rispettive varietà Y. Trasformando *birazionalmente* X in una nuova varietà X', e quindi (n.° 14) la serie lineare ∞^r di X in una serie lineare ∞^r di X', avremo che le varietà Y, Y' imagini di queste due serie saranno *collineari* fra loro. *La geometria sulla varietà X (geometria delle trasformazioni birazionali) quando su questa si fissi una serie lineare ∞^r di M_{k-1} equivale alla geometria projettiva della varietà Y imagine della serie.*

26. Se la serie lineare ∞^r considerata su X contiene una serie lineare $\infty^{r'}$, esse si potranno (pel n.° preced.) supporre date su X dalle equazioni

$$\sum_0^r \lambda_i \varphi_i(x) = 0$$

$$\sum_0^{r'} \lambda_l \varphi_l(x) = 0,$$

e quindi le varietà imagini Y, Y' si potranno rappresentare con

$$y_i = \varphi_i(x) \qquad (i = 0, \ldots, r)$$

$$y'_l = \varphi_l(x) \qquad (l = 0, \ldots, r')$$

(le x essendo legate dalle equazioni che definiscono X). Ora da queste formole riesce evidente che Y' si può riguardare come projezione di Y (dallo spazio $S_{r-r'-1}$ che congiunge i punti fondamentali $r'+1, \ldots, r$ di S_r). D'altra parte è chiaro che viceversa se una varietà Y' è projezione di un'altra Y, la serie lineare rappresentata da Y' ha per omologa (è projezione di) quella serie che su Y vien segata dagl'iperpiani passanti per lo spazio centrale di projezione, e quindi è contenuta nella serie rappresentata da Y. *È dunque la stessa cosa dire che una serie lineare è contenuta in un'altra e dire che la varietà imagine della 1.ª serie è projezione della varietà imagine dell'altra* (*).

Riguardo a ciò conviene osservare che la serie lineare $\infty^{r'}$ potrebbe avere dei punti fissi i quali non fossero tali per la serie lineare ∞^r: si ottiene una tal serie lineare contenuta nella ∞^r se si considerano gli elementi M_{k-1} di questa i quali passano per 1, 2,... punti dati di X (in modo che esistano elementi siffatti). Questi punti che son fissi per la serie $\infty^{r'}$ e non per la ∞^r possono anche (per $k>1$) essere infiniti, in guisa da formare una o più varietà; e possono addirittura costituire una M_{k-1} che farà parte di tutte le M_{k-1} elementi della serie $\infty^{r'}$. In tali casi la serie $\infty^{r'}$ è segata su Y da una forma fondamentale $\infty^{r'}$ d'iperpiani il cui sostegno $S_{r-r'-1}$ incontra Y nei punti fissi speciali per quella serie: la varietà Y', essendo la projezione di Y da quel sostegno su un $S_{r'}$, avrà dunque in tal caso un ordine minore di quello di Y, — s'intende finchè sussiste la nozione di *ordine*, cioè finchè $r' \geq k$. — Saranno uguali gli ordini di Y, Y' se lo spazio centrale di projezione $S_{r-r'-1}$ non incontra Y, vale a dire se non vi sono punti su X che sian fissi per la serie $\infty^{r'}$ e non per la ∞^r. Allora (cfr. n.º 20) il numero dei punti d'incontro variabili di k elementi generici della serie ∞^r è lo stesso che il numero dei punti variabili d'incontro di k elementi generici della serie $\infty^{r'}$.

Una serie lineare ∞^r di M_{k-1} sulla varietà X di dimensione $k \leq r$ si può chiamare *completa* (« *Vollschaar* ») se non è contenuta in una serie lineare

(*) Così, per fare sin da ora qualche esempio, dal fatto che sopra una M_1 razionale (o retta) una serie lineare di gruppi di n punti è contenuta in quella ∞^n composta da *tutti* i gruppi di n punti segue che una curva razionale d'ordine n (o minore) è sempre projezione della curva d'ordine n appartenente ad S_n. Similmente si vede che le superficie razionali rappresentate sul piano da sistemi lineari di curve d'ordine n sono projezioni di quella superficie, d'ordine n^2, appartenente allo spazio di dimensione $\frac{n(n+3)}{2}$, che è rappresentata dal sistema di *tutte* le curve piane d'ordine n. Ecc., ecc. Cfr. VERONESE: *Behandlung der projectivischen Verhältnisse*, ecc. (Math. Ann., tom. 19, 1881).

di maggior dimensione (dello stesso ordine) con lo stesso numero di punti d'incontro variabili di k elementi generici; *parziale* nel caso opposto. D'altra parte dicesi *normale* una varietà M_k di S_r se non è projezione di una varietà dello stesso ordine appartenente ad uno spazio superiore (*). Noi possiamo dunque dire che: *una serie lineare completa ha per imagine una varietà normale, e viceversa.*

27. Credo opportuno di non chiudere questo paragrafo senza prima esporre una proposizione più completa che quella generale del n.° 23: *Sulla varietà X di dimensione $k > 1$ una serie algebrica ∞^r di M_{k-1} irriducibili tale che $r > 1$ e che per r punti generici di X passi una sola M_{k-1} è certamente una serie lineare* (**).

Consideriamo anzitutto il caso di $r = 2$, sicchè su X si abbia una ∞^2 di M_{k-1} tali che per due punti generici ne passi una sola, o, come diremo più brevemente, una *rete* di M_{k-1}. Per un punto A di X (non fisso per la rete) ne passeranno ∞^1 formanti ciò che diremo un *fascio.* Presa una M_{k-1} nella rete ma non in questo fascio, per ogni punto generico B di essa passerà *un* elemento del fascio; sicchè quella M_{k-1} (non potendo, in causa della supposta irriducibilità, incontrare secondo *parti* M_{k-1} di sè stessa qualche elemento del fascio) dovrà comporsi di ∞^1 varietà M_{k-2} d'intersezione di essa risp. con gli ∞^1 elementi del fascio A. Una tale M_{k-2} d'intersezione di due M_{k-1} della rete ha tutti i suoi punti C su tutte le ∞^1 M_{k-1} della rete che passano per uno di essi, B: giacchè per B e C passano per ipotesi *due* elementi M_{k-1} della rete, e quindi infiniti. Adunque dalle mutue intersezioni degli elementi

(*) Si dice pure che una data M_k ha per *spazio normale* un S_r quando la varietà *normale* dello stesso ordine di cui essa è projezione appartiene ad S_r.

(**) Essa è dovuta al sig. ENRIQUES, di cui riproduco pure, un po' modificata, la dimostrazione; v. *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Rendic. della R. Accad. dei Lincei, luglio 1893). — Quasi simultaneamente il sig. CASTELNUOVO ha trattato il caso di $k = 1$ dimostrando che: *sopra una curva algebrica una serie ∞^r, ove $r > 1$, di gruppi di punti tale che r punti generici stiano in un sol gruppo è lineare, tolto il caso che i suoi gruppi si compongano raggruppando ad r ad r i gruppi di un'involuzione semplicemente infinita non razionale* (*di grado* $\geqq 1$): v. la Nota *Sulla linearità delle involuzioni più volte infinite appartenenti ad una curva algebrica* (Atti della R. Acc. di Torino, giugno 1893). La dimostrazione è meno semplice che quella relativa al caso $k > 1$ (caso che si potrebbe far derivare, come i due Autori citati hanno osservato, da quello $k = 1$): essa vien basata dal sig. CASTELNUOVO sulla rappresentazione per mezzo d'integrali Abeliani delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva (rappresentazione già abilmente adoperata dal sig. HURWITZ in lavori che avremo da citare più tardi).

della rete si ottengono su X infinite M_{k-2} tali che un punto generico di X sta su *una* di esse (l'intersezione di due M_{k-1} passanti per esso) e che le M_{k-1} della rete si *compongono* mediante le M_{k-2}, nel senso in cui alla fine del n.° 17 abbiam parlato di serie di M_{k-1} composte di M_i. Due M_{k-1} della rete si tagliano in *una* M_{k-2}; per due M_{k-2} passa *una* M_{k-1}. Rappresentando per semplicità queste ∞^2 M_{k-2} biunivocamente sui punti di una superficie F, alle M_{k-1} della rete corrisponderanno su F una ∞^2 *algebrica* di linee tali che due di esse si tagliano in *un* punto e che per due punti ne passa *una*. In particolare dunque (supponendo questi due punti infinitamente vicini) le linee uscenti da un punto generico di F (fascio) corrispondono biunivocamente (ed algebricamente) alle loro tangenti in quel punto e quindi costituiscono una ∞^1 *razionale.* I punti di F potendosi determinare come intersezioni delle linee di due tali fasci, se ne trae subito — come nell'ordinaria costruzione delle collineazioni piane mediante due coppie di fasci omologhi di raggi — che F si può riferire birazionalmente ad un piano in modo che le ∞^2 linee corrispondono alle rette del piano (potendosi anzi prendere ad arbitrio di 4 linee date di F le 4 rette omologhe sul piano). Si può dunque ottenere la rete di M_{k-1} di X trasformando razionalmente la serie delle rette del piano: donde segue (n.° 14) che essa è una serie lineare.

Se poi si ha su X una ∞^r (con $r > 2$) di M_{k-1} irriducibili tale che per r punti generici ne passi una sola, suppongasi già dimostrato per valori di r minori del dato che una serie siffatta è lineare, sicchè si può riferire univocamente agl'iperpiani di uno spazio in guisa che agli elementi della serie passanti per un punto generico di X corrispondano gl'iperpiani di una forma fondamentale (di modo che questo riferimento sarà determinato dando di $r+2$ elementi della serie gli $r+2$ iperpiani omologhi). Si fissino poi su X due punti A, B ed in uno spazio S_r due punti A', B'; e si riferiscano le due serie lineari ∞^{r-1} delle M_{k-1} passanti risp. per A e per B agl'iperpiani di S_r passanti risp. per A', B' in guisa che alle M_{k-1} di quelle due serie passanti per un punto generico di X corrispondano risp. gl'iperpiani di quelle *stelle* passanti risp. per due rette delle stelle stesse; ma di più si faccia in modo che ad ogni M_{k-1} comune alle due serie, cioè passante per A e per B, corrisponda sempre uno stesso iperpiano (per A' e B') in ambe le stelle. Allora accadrà che le due rette delle stelle A', B' che corrispondono nel modo detto ad un punto qualunque P di X s'incontreranno in un punto P', cioè staranno in ∞^{r-3} iperpiani: quelli che in entrambe le stelle corrispondono alle ∞^{r-3} M_{k-1} passanti per A, B e P; sicchè per ogni punto P di X si ha un punto P' in S_r. D'altra parte segando una

M_{k-1} fissa non passante per A nè per B con la serie lineare ∞^{r-1} delle M_{k-1} che passano per A (o per B) si ha, come subito si vede, sulla M_{k-1} una *serie lineare* ∞^{r-1} di M_{k-2}: e si posson riferire le due serie lineari ∞^{r-1} delle M_{k-1} passanti risp. per A e per B *prospettivamente* fra loro, riguardando come omologhi due elementi che determinino una stessa M_{k-2} sulla M_{k-1} fissa. La corrispondenza sarà tale che si corrisponderanno pure fra loro le serie lineari minori contenute in quelle due, e che saranno omologhe di sè stesse le M_{k-1} comuni alle due serie, cioè passanti per A e per B. Ne deriverà fra le stelle d'iperpiani A' e B' una collineazione in cui saranno uniti tutti gl'iperpiani comuni alle due stelle, cioè una *prospettività*. L'iperpiano in cui si tagliano allora gli elementi omologhi delle due stelle si faccia corrispondere alla M_{k-1} che s'era fissata su X. È chiaro che se questa passa pel punto P prima considerato, l'iperpiano corrispondente passerà per P'. Si saran dunque riferiti univocamente i punti P di X ai punti P' di una varietà di S_r per modo che ai punti di una M_{k-1} della serie ∞^r data su X corrispondono i punti di quella varietà posti in un iperpiano. Dunque (n.° 14) la serie ∞^r è lineare. —

Mettendo a riscontro la proposizione ora dimostrata con quelle dei n.i 23 e 24 si vede che in quelle avevamo imposto alla serie che si considerava la condizione di esser *contenuta in una serie lineare* (n.° 23), od in particolare (n.° 24) di stare su una varietà X razionale: ed in tali casi esse valevano anche per serie ∞^1. Qui invece abbiam dovuto porre la condizione dell'*irriducibilità* degli elementi M_{k-1} generici della serie; ed oltre a ciò abbiam dovuto escludere le serie ∞^1: esclusione necessaria poichè è chiaro che si può con una ∞^1 di M_{k-1} generare una M_k per modo che ogni punto di questa stia su una sola M_{k-1} e che quella ∞^1 non sia razionale, e quindi non sia una serie lineare.

CAPITOLO II.

§ 7. L'ente algebrico semplicemente infinito. Le serie lineari ∞^1 e le funzioni razionali dell'ente.

28. D'or innanzi il nostro argomento si restringerà alla geometria su una M_1, o varietà algebrica semplicemente infinita, o, come diremo pure brevemente, *ente algebrico* (*) (sottintendendo « semplicemente infinito »). Questo

(*) *Algebraische Gebilde* secondo WEIERSTRASS.

ente sarà di solito rappresentato con una *curva* (*); e perciò parleremo dei *punti* dell'ente, considerando però sempre come diversi i punti che stanno in *elementi* diversi nel senso del n.° 11, sicchè ad es. in un ordinario punto s-plo di una curva piana (imagine dell'ente algebrico) noi avremo s punti ben distinti dell'ente.

Una serie lineare di gruppi di n punti dell'ente algebrico dicesi di *ordine* n, e s'indica brevemente (coi sig.i Brill e Noether) con g_n; e con g_n^r se r è la sua dimensione. Così una g_n^0 sarà un gruppo di n punti. — Se una g_n^r non ha punti fissi, sicchè $r > 0$, essa avrà per imagine (n.° 20) una curva d'ordine n appartenente ad S_r (sulla quale la serie stessa sarà segata dagl'iperpiani di questo spazio): però questa curva sarà multipla, cioè si ridurrà ad una d'ordine $n:\mu$ contata μ volte, se la serie è composta mediante un'involuzione di grado μ. Se poi la g_n^r (con $r > 0$) ha k punti fissi, la sua imagine sarà una curva d'ordine $n-k$ appartenente ad S_r e sulla quale son fissati k punti; ed ancora questa curva potrà esser semplice o multipla.

I caratteri, le singolarità della serie lineare sono i caratteri, le singolarità della curva imagine (e dei punti fissi della serie). Così ad un gruppo della g_n^r dotato di punti (non fissi) *multipli* secondo $a, b, \ldots$ corrisponderà per la curva imagine un iperpiano avente con essa *contatti* a-punto, b-punto,...: ad es. ai gruppi che hanno punti (mobili) r-pli gl'iperpiani *osculatori* alla curva nei vari punti, ai gruppi con punti $(r+1)$-pli gl'iperpiani *iperosculatori* o *stazionari* della curva. D'altra parte μ punti dell'ente algebrico i quali ai gruppi della g_n^r che si costringano a contenerli presentino non μ, ma un numero minore h di condizioni ($< r$), sicchè quei gruppi siano ∞^{r-h} (dei μ

(*) Ad onta di ciò adotto la denominazione più vaga di «*ente algebrico*», affinchè si pensi simultaneamente a tutta la *classe* di varietà ∞^1 equivalenti per trasformazioni birazionali, e non si ponga mente invece alle singolarità *projettive* che può avere una *curva* della classe.

Ci accadrà pure qualche volta che l'ente algebrico sia rappresentato da una *rigata* (come varietà ∞^1 di rette). Allora una *serie lineare di generatrici della rigata* può esser data direttamente (mediante la definizione della rigata con coordinate di retta); oppure anche può esser ottenuta come corrispondente prospettivamente ad una serie lineare di gruppi di punti di una qualunque curva *direttrice* della rigata (chiamando così una linea che sia incontrata in un sol punto da ogni generatrice: ad es. il resto di una sezione iperplanare della rigata condotta per 0, 1, 2,... generatrici). Così, se per una particolare direttrice passano degl'iperpiani, questi segano ulteriormente la rigata in gruppi di generatrici di una serie lineare (come appare considerando gl'incontri di questi gruppi di generatrici con un'altra direttrice).

punti si dice che hanno un certo grado di *neutralità* rispetto alla serie), avranno per imagini μ punti della curva giacenti in un S_{h-1}, *spazio* μ*-secante:* ad es. per $h=1$, se cioè i μ punti impongono *una* sola condizione, le loro imagini sulla curva si sovrappongono in un *punto* μ*-plo* di questa (cfr. n.° 20); per $h=2$ cioè quando i μ punti contano come *due* condizioni, si ha in corrispondenza una *retta* μ*-secante* della curva; ecc. In particolare se i μ punti considerati dell'ente algebrico coincidono (nel senso ricordato della geometria sull'ente), anche sulla curva imagine si avranno μ punti coincidenti, *in un sol ramo (od elemento o ciclo) della curva;* e per $h=1$ si avrà così sulla curva un punto μ-plo (ramo od elemento o ciclo d'ordine μ); per $h=2$ una tangente che incontra in quel punto μ volte la curva; per h qualunque, quando cioè i gruppi della g_n^r per cui un dato punto è μ-plo sono ∞^{r-h} invece che $\infty^{r-\mu}$, la curva imagine avrà nel punto corrispondente un S_{h-1} osculatore che la incontra ivi μ volte.

Le formole di Plücker, di Cayley, di Veronese, che legano i caratteri di una curva piana, sghemba (di S_3), iperspaziale (di S_r), si possono considerare come relazioni fra caratteri di una serie lineare di gruppi di punti ∞^2, ∞^3, ∞^r.

29. Su ciò avremo occasione di ritornare. Intanto è bene rilevar subito una limitazione per la dimensione e l'ordine di una serie lineare, la quale deriva immediatamente dalla definizione di quei due caratteri. Poichè (n.° 13) si posson prendere ad arbitrio sull'ente algebrico r punti per determinare un gruppo di una g_n^r, sarà sempre

$$n \geqq r,$$

ossia

$$n - r \geqq 0;$$

il numero $n-r$ è quello dei punti di un gruppo che rimangon determinati in generale dai rimanenti (r). — Se la g_n^r ha k punti fissi, e se poi la g_{n-k}^r che da essa rimane togliendo questi punti è composta con un'involuzione di grado μ, allora dando r punti generici per un gruppo della g_n^r si vengono ad avere immediatamente $\mu r + k$ punti del gruppo; sicchè sarà

$$n \geqq \mu r + k.$$

Nel caso particolare che sia $n=r$ si trae da quest'ultima relazione: $k=0$, $\mu=1$; cioè che la serie data non ha punti fissi e non è composta. Inoltre fissando $n-1$ punti e considerando i gruppi della serie che li contengono, il punto residuo di quei gruppi descriverà una g_1^1, varietà *razionale*, che non sarà altro che la serie dei punti dell'ente algebrico. Dunque: *se un ente algebrico contiene una serie lineare il cui ordine è eguale alla dimensione, l'ente è razionale. Per una g_n^r sopra un ente non razionale è sempre $n > r$.*

30. Conviene considerare anzitutto in modo particolare *le serie lineari semplicemente infinite.* Si può dire che esse sono le più importanti, in quanto che dalle loro proprietà si posson trarre quelle delle serie più ampie.

Esse son caratterizzate come infinità di gruppi di n punti (se n ne è l'ordine) dell'ente algebrico dalle due proprietà: 1.° di esser razionali, 2.° che un punto generico (cioè non comune a tutti i gruppi) individua il gruppo che lo contiene. Invero dalla 1.ª proprietà segue che gl'infiniti gruppi corrispondono algebricamente e biunivocamente ai valori di un parametro z; e della 2.ª che se x è il punto dell'ente, la corrispondenza fra i gruppi ed i punti che li compongono dà z come funzione algebrica univoca, e quindi (n.° 7) razionale, delle coordinate x, ossia

$$z = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \tag{1}$$

ove le φ, ψ son forme dello stesso grado nelle x. Se ne trae

$$\varphi(x) - z\psi(x) = 0,$$

equazione lineare nel parametro z, la quale prova appunto che la serie di gruppi è lineare.

Per tal modo si vede anche come le *funzioni razionali dell'ente algebrico,* vale a dire le funzioni razionali delle coordinate dei punti dell'ente, ossia della forma (1) (dove le x son legate dalle equazioni che definiscono l'ente) (*), corrispondano alle serie lineari ∞^1: essendo gruppi di una tal serie i gruppi dei punti in cui una data funzione razionale z dell'ente assume uno stesso valore (**). L'ordine n della serie lineare, ossia il numero dei punti di

(*) La denominazione « *funzioni razionali* dell'ente » è quella usata dal Weierstrass nelle già citate Lezioni; mentre altri autori dicono « funzioni *algebriche* dell'ente ». — In ogni punto *ben determinato* dell'ente una data funzione razionale z prende un valore *ben determinato,* o direttamente [per semplice sostituzione delle coordinate del punto nell'espressione (1) della funzione] o come *limite* (quando la detta sostituzione annullasse numeratore e denominatore di quell'espressione).

(**) Secondo l'osservazione fatta nella nota preced. si ottengono così nei vari gruppi della serie i soli punti che variano da un gruppo all'altro, e non i punti *fissi:* sicchè propriamente le funzioni razionali dell'ente non sono atte a rappresentare le serie lineari dotate di punti fissi; o meglio possono rappresentarle solo in parte, cioè astraendo da questi punti.

ciascun gruppo, in particolare il numero degli *zeri* $[\varphi(x)=0]$ o degl'*infiniti* $[\psi(x)=0]$ della funzione razionale z, dicesi *grado* (*) od *ordine* di z.

Data una g^1_n (senza punti fissi, come tutte le serie che consideriamo nel seguito di questo paragrafo)

$$\varphi(x)-z\psi(x)=0,$$

è chiaro che essa sarà rappresentata nel senso spiegato non solo dalla funzione razionale

$$z=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

ma anche dalle trasformazioni lineari a coefficienti costanti

$$\frac{az+b}{cz+d} \quad \text{ossia} \quad \frac{a\varphi(x)+b\psi(x)}{c\varphi(x)+d\psi(x)}$$

di quella (**). Ed anzi queste saranno *tutte* le funzioni razionali dell'ente che corrispondono a quella g^1_n, giacchè se

$$Z=\frac{\Phi(x)}{\Psi(x)}$$

indica una funzione razionale corrispondente a quella serie, fra i valori di z e Z che corrispondono ad uno stesso punto x dell'ente vi sarà una corrispondenza algebrica *biunivoca,* e quindi *bilineare.* (***)

(*) Secondo WEIERSTRASS. Il KLEIN invece lo chiama *valenza (Werthigkeit).*

(**) Da ciò segue che due gruppi *qualunque* della g^1_n si possono assumere come gruppi degli zeri e degl'infiniti di una funzione razionale dell'ente. Si può dunque esprimere che due gruppi (ben distinti) di n punti stanno in una stessa g_n (infinita), e per conseguenza in una g^1_n, dicendo che sono gli zeri e gl'infiniti di una stessa funzione razionale dell'ente: come appunto soglion fare gli analisti (chiamando *equivalenti* due tali gruppi). — Così pure si può dire che le g^1_n contenenti un dato gruppo di n punti si posson rappresentare mediante le funzioni razionali dell'ente che hanno i loro infiniti in quegli n punti (funzioni di grado n). Convien però tener presente (v. sopra) che con ciò si vengono ad escludere fra le dette g^1_n quelle che hanno punti fissi (fra gli n dati). Volendo evitare tale esclusione si dovrà dire che le g^1_n contenenti il dato gruppo di n punti son rappresentate dalle funzioni razionali dell'ente che hanno i loro infiniti FRA quegli n punti (funzioni di grado $\leqq n$): allora quelle fra tali funzioni che *non sono* infinite in uno di quei punti rappresenteranno serie g^1_n per cui questo è un punto fisso.

(***) Le considerazioni di questo n.° 30 si applicherebbero evidentemente, quasi senza modificazioni, alle serie lineari ∞^1 di M_{k-1} su una M_k, e alle *funzioni razionali della M_k.*

31. Consideriamo ora due funzioni razionali qualunque

$$z = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \qquad s = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}, \tag{2}$$

dei gradi risp. n, m, dell'ente algebrico; tali però che non ogni gruppo di punti $z = \text{cost.}$ abbia più di un punto comune con qualche gruppo $s = \text{cost.}$, vale a dire tali che le serie g^1_n, g^1_m rappresentate da quelle funzioni non abbiano infinite *coppie comuni* (cioè coppie di punti che stiano in gruppi delle due serie). Fra z ed s, considerando come omologhi i valori che assumono in uno stesso punto dell'ente, vi sarà una corrispondenza algebrica (m, n), e quindi (n.° 8) un'equazione:

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0, \tag{3}$$

la quale risulterebbe dall'eliminazione delle x fra le (2) e le equazioni che definiscono l'ente algebrico. Le coordinate x saranno poi esprimibili come funzioni razionali di s e z: i punti dell'ente essendo in corrispondenza biunivoca coi gruppi di valori (s, z) soddisfacenti all'equazione (3). Sicchè per la geometria sull'ente si potrà assumere a rappresentante di questo quell'equazione. Vale a dire si può in generale rappresentare un ente algebrico mediante l'equazione che lega due sue funzioni razionali qualunque (con la detta restrizione), cioè con la varietà ∞^1 costituita dalle soluzioni di quell'equazione. — È noto come questa varietà si possa rappresentare in modo sensibile distendendo ad es. la variabile complessa z sul piano o sulla sfera reale e deponendo su ogni valor di z gli n corrispondenti valori di s: donde nasce una *superficie di* Riemann ad n fogli (cfr. la nota al n.° 21). —

Qui si presenta un nuovo modo analitico di considerare l'ente algebrico (*). In luogo di definirlo assumendo particolari coordinate e quindi particolari equazioni fra queste, si pensino simultaneamente per ciascun punto dell'ente i valori che in esso prendono *tutte* quante quelle variabili s, z, le x,... che finora chiamavamo « funzioni razionali dell'ente ». Il *punto* dell'ente è precisamente un insieme, una coesistenza di valori di quelle variabili. Due qualunque di queste verificano in tutti i punti un'equazione algebrica; e se non vi sono infinite coppie di punti nei quali ognuna delle due prenda lo stesso valore, ogni altra variabile si potrà esprimere come funzione razionale di quelle due.

(*) Veggasi per maggiori schiarimenti la memoria Dedekind-Weber.

32. L'equazione (3) si può rappresentare geometricamente in più modi, prendendo z, s come coordinate di elementi geometrici. Così assumendole risp. per coordinate degli elementi di due fasci di raggi S, S' in uno stesso piano, quella sarà l'equazione di una curva piana, generata nel seguente modo: Le due serie lineari g_n^1, g_m^1 dell'ente algebrico, considerate come varietà ∞^1 razionali, si riferiscono biunivocamente risp. ai due fasci di raggi S, S': considerando come omologhi nelle due serie due gruppi che contengano uno stesso punto dell'ente, ne deriva una corrispondenza (m, n) fra i raggi di quei due fasci; ed il luogo dei punti d'incontro dei raggi omologhi è la curva γ rappresentata dall'equazione (3). Su γ, considerata come imagine dell'ente algebrico, la serie g_n^1 è quella staccata dalle rette del fascio S (fuori del centro del fascio stesso), e così la g_m^1 è staccata dal fascio S'. La curva è in generale d'ordine $m+n$ ed ha S per punto m-plo, S' per punto n-plo. Ma se ad es. nel riferire le due serie dell'ente algebrico ai fasci S, S' si fa corrispondere la retta SS' comune a questi a due gruppi che abbiano un punto comune, sicchè quella retta corrisponda a sè stessa nella corrispondenza (m, n) tra i due fasci, essa si staccherà dal luogo generato da questi, e la curva γ si ridurrà all'ordine $m+n-1$ avendo i punti S, S' come multipli secondo $m-1$, $n-1$; ecc. — Un punto μ-plo di γ fuori di S, S' corrisponderà in generale a μ punti dell'ente posti in un gruppo della g_n^1 ed in un gruppo della g_m^1; e viceversa. — (*)

§ 8. Genere dell'ente algebrico.

33. Per una serie lineare ∞^1 oltre all'*ordine* si può considerare un altro carattere: il numero degli *elementi* (gruppi di punti; o valori di una corrispondente funzione razionale z dell'ente) *di diramazione,* ossia dei gruppi della serie che contengono due punti coincidenti (punti *doppi* della serie). Nella rappresentazione dell'ente algebrico con l'equazione

$$F(s, z) = 0,$$

e quindi con la curva γ generata dai due fasci S, S' (n.° 32), gli elementi di

(*) Si può similmente rappresentare un ente algebrico contenente k serie lineari ∞^1 date, mediante una curva di S_k generata da k fasci d'iperpiani riferiti tra loro (e seganti poi sulla curva risp. quelle serie). Ecc., ecc.

diramazione per la serie $z = \text{cost.}$, segata dalle rette del fascio S, corrispondono alle tangenti condotte da S a toccar γ fuori di S ed inoltre, nel caso che γ abbia cuspidi, alle rette passanti per queste: i punti doppi della serie stessa essendo quei punti di contatto e queste cuspidi (non i *nodi* di γ perchè ognuno di essi rappresenta due punti distinti dell'ente).

Con l'ordine di una serie lineare ∞^1 e col numero dei suoi elementi di diramazione ossia dei suoi punti doppi si forma un'espressione, la quale non muta valore cambiando la serie sull'ente algebrico: il *genere*.

Si considerino in fatti sull'ente algebrico due serie g^1_m, g^1_n dotate risp. di μ, ν punti doppi. Riguardando nella g^1_n come omologhi due elementi (gruppi) quando contengono due punti di uno stesso gruppo della g^1_m, avremo fra gli elementi di quella serie una corrispondenza simmetrica d'indice $n(m-1)$; ed in questa saranno elementi uniti quei μ gruppi che contengono risp. i μ punti doppi della g^1_m, ed inoltre quei d gruppi che hanno *coppie* di punti comuni con gruppi della g^1_m. Applicando dunque il principio di corrispondenza (n.° 8) entro la g^1_n, forma razionale, con l'avvertenza di contare due volte ciascuno degli ultimi d elementi uniti perchè su esso cadono *due* degli elementi omologhi (v. una nota al detto n.°), avremo:

$$2n(m-1) = \mu + 2d. \tag{1}$$

Similmente scambiando le due serie si ha:

$$2m(n-1) = \nu + 2d. \tag{1'}$$

Sottraendo l'una dall'altra queste due relazioni viene:

$$\nu - 2n = \mu - 2m. \tag{2}$$

Dunque la differenza fra il numero ν dei punti doppi ed il doppio dell'ordine n di una serie lineare ∞^1 non muta al mutar di questa. Si osservi poi che in forza della (1') il numero ν è sempre pari. Sarà quindi intero ed invariabile al variar della serie il numero $\frac{\nu}{2} - n + 1$; ed è questo numero che noi chiameremo il *genere dell'ente algebrico* (*). Lo indicheremo con p, sicchè

$$p = \frac{\nu}{2} - n + 1, \tag{3}$$

(*) Questa definizione del genere, sotto forma più analitica, si trova già in altri autori: v. ad es. NOETHER, Math. Ann., tom. 8, pag. 497; DEDEKIND-WEBER, pag. 264. Nella *Theorie der Abel'schen Functionen* del RIEMANN — ove, com'è noto, il numero p è introossia:

$$\nu = 2(n + p - 1). \tag{4}$$

34. Osserviamo subito, nel caso che l'ente sia *razionale,* che una g_n^1 definisce fra i punti dell'ente una corrispondenza simmetrica d'indice $n-1$, considerando come omologhi i punti di uno stesso gruppo: e quindi applicando il principio di corrispondenza (il che si può fare nell'ipotesi della razionalità dell'ente) la serie stessa avrà $2(n-1)$ punti doppi. Sostituendo questo valore a ν nella formola (3) si ha $p=0$. Dunque *gli enti razionali hanno il genere* $p=0$.

Rileviamo anche subito come la definizione data del genere renda evidente che questo carattere spetta veramente alla geometria sull'ente: vale a dire *per trasformazioni birazionali dell'ente il genere non muta.* In fatti per una tal trasformazione una serie lineare ∞^1 si muta in altra dello stesso ordine e con lo stesso numero di punti doppi.

35. Ritornando al ragionamento generale del n.° 33, osserviamo che rappresentando l'ente algebrico, nel modo ricordato da principio, con la curva γ su cui le serie g_n^1, g_m^1 vengon staccate dai fasci di rette S, S', la corrispondenza che si considerò fra i gruppi della g_n^1 si potrebbe sostituire con una corrispondenza fra le rette del fascio S; ecc. Allora il numero d che s'è incontrato delle coppie di punti comuni alle due serie non è altro (v. la fine del n.° 32) che il numero dei punti doppi che γ ha, fuori di S, S'.

Si può, introducendo appunto quel numero d relativo alle due serie g_m^1, g_n^1 [numero che prima avevamo eliminato dalle relazioni (1), (1')], ed eliminando invece ν fra le (3) e (1'), ricavare quest'altra espressione del genere (pure invariantiva per trasformazioni birazionali)

$$p = (m-1)(n-1) - d, \tag{5}$$

che definisce il genere dell'ente algebrico in funzione degli ordini di *due* serie lineari semplicemente infinite esistenti su esso e del numero delle coppie di punti che esse hanno comuni. Così si ha dalla (5) che se l'ente contiene due g_2^1

---

dotto per la prima volta, partendo dalla *connessione* dell'ente algebrico, cioè della superficie reale che lo rappresenta — s'incontra non solo la formola (3) (nel § 7), ma anche la (1) (nel § 6).

Come fu già notato, sarebbe forse stato opportuno dare un nome speciale all'espressione $\frac{\nu}{2} - n$, cioè $p-1$, anzi che a p: poichè appunto quell'espressione, $p-1$, compare di solito nelle formole.

il suo genere sarà 1 oppure 0, secondo che queste serie non hanno ovvero hanno una coppia comune. Ecc. (*) —

36. Nelle applicazioni particolari tanto della definizione primitiva (3) del genere quanto della (5) può accadere di dover badare a *multiplicità* di soluzioni che compajano nei numeri ν e d. Dalla possibilità, su cui ritorneremo in seguito, di rappresentare l'ente algebrico con una curva piana dotata di soli punti multipli *ordinari*, od anzi di soli *nodi*, si trae subito l'esistenza d'infinite serie lineari g_n^1 che hanno i ν elementi di diramazione tutti *semplici*, ossia che non hanno altri punti multipli che punti doppi; non che l'esistenza d'infinite coppie di serie lineari g_n^1, g_m^1 che hanno in comune solo *coppie* di punti, non terne, ecc. Se però avvenisse che le due serie considerate g_n^1, g_m^1 avessero comune una s-pla di punti distinti — cioè se vi fossero sull'ente s punti comuni ad un gruppo dell'una serie e ad un gruppo dell'altra (il che significa che la curva γ avrebbe un punto s-plo) — è chiaro che quella s-pla darebbe $\frac{s(s-1)}{2}$ coppie di punti comuni alle due serie, e quindi di tanto influirebbe nel numero d $\left(\text{allo stesso modo che un ordinario punto } s\text{-plo di } \gamma \text{ equivale ad } \frac{s(s-1)}{2} \text{ punti doppi}\right)$. — Se invece nel n.° 33 si avesse una g_n^1 dotata di un punto i-plo, si vede facilmente con noti procedimenti analitici che questo andrebbe contato come $i-1$ punti doppi nel numero complessivo ν, vale a dire che il gruppo (il valor corrispondente della funzione razionale z rappresentante la g_n^1) dotato di punto i-plo è un elemento di diramazione *d'ordine* $i-1$, che conta come $i-1$ elementi di diramazione *semplici*. Si può rappresentare l'ente algebrico con la curva γ in modo che quel punto sia semplice per questa: allora l'essere quel punto i-plo per la g_n^1 staccata su γ dal fascio di rette S significa che una retta di questo fascio ha in quel punto un contatto i-punto con γ: ed è ovvio che essa conterà precisamente come $i-1$ tangenti semplici condotte da S a γ (**). — Da ultimo si osservi come

(*) La (5) si trova alla fine del § 7 della citata Memoria del Riemann. — Si confronti anche, per quella formola, come per la rappresentazione contenuta nel precedente n.° 32, il n.° 4 delle *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* del Castelnuovo.

(**) Del resto, basandosi su un teorema già citato (in nota al n.° 8) del sig. Zeuthen relativo alla multiplicità degli elementi uniti in una corrispondenza, si può nel ragionamento col principio di corrispondenza fatto al n.° 33 tener conto direttamente dei punti *multipli* (non solo *doppi*) delle due serie, ed allora in quelle formole viene a comparire dalla formola (3) appaja che se la si volesse applicare anche a serie g_n^1 dotate di punti fissi, ognuno di questi dovrebbe contare nel numero ν come *due* punti doppi.

§ 9. Genere di una curva piana.

37. La formola (5) del paragrafo prec. dà il genere di una curva piana, d'ordine $m+n$ con un punto m-plo ed uno n-plo, ovvero d'ordine $m+n-1$ con un punto $(m-1)$-plo ed uno $(n-1)$-plo, ecc.: d indica il numero dei rimanenti punti doppi, ovvero la somma $\Sigma \frac{s(s-1)}{2}$ estesa ai rimanenti punti multipli.

Si può anche determinare il genere di una curva piana qualunque γ ricorrendo alla definizione del n.° 33, applicata alla serie lineare che è segata su essa da un fascio di rette col centro in un punto O del piano esterno a γ. Se n è l'ordine, n' la classe di questa curva, quella serie lineare sarà una g_n^1 ed avrà per elementi di diramazione quelli che corrispondono alle n' tangenti di γ che escono da O. E non ne avrà altri se la curva non ha altre singolarità che punti multipli *ordinari,* cioè a tangenti distinte. In tal caso dunque la formola (3) del n.° 33 darà il genere di γ se per n si mette l'ordine e per ν la classe n' della curva.

Poniamo invece che γ abbia anche *singolarità superiori* (come cuspidi ecc.) (*). Abbiamo già ricordato (n.° 11) che un punto singolare $P(x_0\, y_0)$ di una curva piana algebrica γ è origine di uno o più rami o cicli od elementi che corrispondono ai vari sviluppi che in prossimità di esso si posson fare di $y-y_0$ in serie di potenze di $x-x_0$. Si consideri uno di questi rami e la corrispondente serie di potenze: il minimo denominator comune i degli esponenti fratti (ridotti ai minimi termini) di quella serie dicesi grado di moltiplicità od *ordine* del ramo (con la sola restrizione che la retta $x=0$ non

---

in luogo di ν la somma $\Sigma(i-1)$ estesa a tutti i punti multipli (secondo i) della g_n^1, ecc. Qualche cosa di equivalente vien fatto appunto dal sig. ZEUTHEN nel n.° 4 della *Note sur les singularités des courbes planes* (Math. Ann., tom. 10, 1876).

(*) Queste singolarità sono ampiamente trattate dal punto di vista che qui accenniamo nell'*Etude sur les points singuliers des courbes algébriques planes* che l'HALPHEN fece seguire all'edizione francese del trattato delle curve piane del SALMON (Paris, 1884). Ivi si trovano anche citati gl'importanti lavori precedenti di CAYLEY, STOLZ, SMITH, ecc. — Altri abbiamo già nominati prima, o citeremo tosto.

sia parallela alla retta t tangente in P al ramo stesso): esso non è altro che il numero delle intersezioni (infinitamente vicine a P) del ramo con una retta infinitamente vicina a P (ma faciente un angolo finito con t); o, come si suol dire più brevemente, il numero delle intersezioni che in P si hanno fra il ramo stesso ed una retta generica (diversa da t) passante per P. Considerando la curva γ, e quindi il ramo di essa, come inviluppo, si ha il carattere duale all'ordine i: la *classe* i' del ramo; cioè il numero delle tangenti al ramo (infinitamente vicine a t) che escono da un punto infinitamente vicino a t (ma a distanza finita da P); o più brevemente la multiplicità che ha la tangente t pel ramo considerato. Si sa (*) che il numero delle intersezioni coincidenti in P del ramo stesso con la sua tangente t, come pure il numero delle tangenti al ramo coincidenti in t che escono da P, sono uguali alla somma $i_1 = i + i'$ dell'ordine e della classe del ramo (**).

Come origine del ramo considerato d'ordine i il punto P rappresenterà un punto i-plo per la g_n^1 segata su γ dal fascio di rette O (mentre come origine di un *altro* ramo rappresenterebbe un *altro* punto dell'ente: v. n.° 11), e quindi (n.° 36) equivarrà ad $i-1$ punti doppi di quella serie. L'influenza della retta OP nel numero complessivo ν degli elementi di diramazione della g_n^1 sarà dunque rappresentata da una somma di tante espressioni $(i-1)$ quanti sono i rami di γ che passano per P. Estendendo ciò a tutte le singolarità superiori di γ, cioè a tutti i suoi rami superlineari, si ha che in generale

$$\nu = n' + \Sigma(i-1). \qquad (1)$$

E sostituendo questo valore nella formola (3) del n.° 33 si ha:

$$p = \frac{n'}{2} - n + 1 + \frac{1}{2}\Sigma(i-1), \qquad (2)$$

oppure:

$$n' = 2(n+p-1) - \Sigma(i-1). \qquad (3)$$

38. Considerando le singolarità di una curva piana da un punto di vista un po' differente si può esprimere il genere p sotto una forma diversa dalla (2), facendo cioè comparire invece della classe n' di γ e degli ordini dei suoi punti di diramazione altri caratteri relativi ai punti singolari di γ.

(*) V. ad es. il n.° 1 della Memoria del sig. ZEUTHEN citata al n. 36, ed il n.° 7 del citato studio dell'HALPHEN.

(**) Per un ordinario punto semplice i caratteri i, i' sono (1, 1); per un flesso (1, 2); per una cuspide (2, 1); per un regresso di 2.ª specie (2, 2); ecc.

Dall'applicazione di successive trasformazioni quadratiche piane a γ e dall'esame dell'effetto che esse hanno su un punto singolare qualunque di questa curva, il sig. NOETHER dedusse (*) che una singolarità superiore di γ si può riguardare come la riunione (in un senso preciso) di un certo numero di punti singolari *ordinari* a cui s'aggiunge pure un certo numero di *punti di diramazione* di γ [nel senso che si trova chiarito nei lavori citati, e che viene a coincidere col significato delle espressioni $(i-1)$ del n.° preced.]. Dicendo s la moltiplicità di uno dei punti singolari ordinari di cui la singolarità superiore è composta, l'abbassamento che questa produce nella classe è dato dalla somma di tutte le corrispondenti espressioni $s(s-1)$ e del numero dei punti di diramazione di γ che cadono in quella singolarità (**). Segue che la classe di γ sarà data da

$$n' = n(n-1) - \Sigma s(s-1) - \Sigma(i-1), \tag{4}$$

ove le somme si estendono a tutte le singolarità ordinarie ed a tutti i punti di diramazione che compongono i vari punti singolari di γ.

Ritornando dunque alla determinazione del genere, noi avremo sostituendo nella (1)

$$\nu = n(n-1) - \Sigma s(s-1), \tag{5}$$

e quindi per la definizione (n.° 33) del genere p applicata alla g_n^1 del n.° 37:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \Sigma\, \frac{s(s-1)}{2}. \tag{6}$$

In particolare se γ ha per soli punti multipli d nodi ed r cuspidi, sarà:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r. \tag{7}$$

39. Ritornando alla formola (3) del n.° 37

$$n' = 2(n+p-1) - \Sigma(i-1), \tag{3}$$

(*) *Ueber die algebraischen Functionen einer und zweier Variabeln.* Note 2 (Götting. Nachrichten, 1871). — *Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve* (Math. Ann., tom. 9). — *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen* (Math. Ann., tom. 23).

Veggasi pure l'importante Nota, d'indole più sintetica, del sig. BERTINI: *Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve piane algebriche* (Rendic. del R. Ist. Lomb. (2), tom. 21, 1888).

(**) Cfr. NOETHER, Math. Ann., tom. 9, § 7 e Math. Ann., tom. 23, § 17.

da essa si trae per dualità

$$n = 2(n' + p - 1) - \Sigma(i' - 1),$$

ed eliminando n' fra le due:

$$\Sigma(2i + i' - 3) = 3(n + 2p - 2), \tag{8}$$

od anche introducendo il numero $i_1 = i + i'$ (n.° 37) dei punti d'incontro che nel punto singolare hanno luogo fra il ramo $(i,\ i')$ e la sua tangente

$$\Sigma(i + i_1 - 3) = 3(n + 2p - 2). \tag{8'}$$

Se la curva γ non ha punti multipli che ordinari (cioè sempre $i = 1$) alla somma che compare nel 1.° membro della (8) od (8') contribuiscono i soli flessi. Vediamo così che il numero r' dei flessi per una curva piana di genere p e d'ordine n è *in generale*

$$r' = 3(n + 2p - 2); \tag{9}$$

ma in pari tempo vediamo che un ramo singolare qualunque che la curva venga ad avere contribuirà all'espressione del 2.° membro per $2i + i' - 3$, ossia $i + i_1 - 3$ unità, conta cioè per altrettante unità nel numero complessivo r' dei flessi quale sarebbe dato dalla (9).

La formola (7) del n.° prec. dà per dualità, chiamando d' il numero delle tangenti doppie non stazionarie:

$$d' = \frac{(n' - 1)(n' - 2)}{2} - r' - p.$$

Suppongasi γ dotata solo di d nodi senz'altri punti multipli (*generale* nel suo ordine e genere), sicchè la (3) si ridurrà a

$$n' = 2(n + p - 1),$$

e si sostituisca questo valore di n' e quello di r' dato dalla (9). Verrà:

$$d' = 2(n + p - 2)(n + p - 3) - 4p. \tag{10}$$

Aggiungasi che in tal caso (essendo $r = 0$) la (7) diventa

$$d = \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} - p. \tag{11}$$

Tutte queste formole si possono interpretare in un modo più generale del consueto, considerando la curva piana come imagine di una g_n^2 qualunque *non composta* (perchè la curva γ si suppose che non fosse *multipla*) dell'ente algebrico di genere p (v. n.° 28). Così la (11) dà *il numero delle coppie neutre della* g_n^2 (coppie di punti per cui passano infiniti gruppi); la (10) *il numero dei gruppi della* g_n^2 *dotati di due punti doppi distinti;* la (9) *il numero dei punti tripli della* g_n^2. Ciò per una g_n^2 *generale* dell'ente algebrico di genere p: ma se la serie ha singolarità speciali si dovrà tenerne conto in quei numeri. Così se un punto dell'ente algebrico è i-plo per gli ∞^1 gruppi della g_n^2 che lo contengono, ma per uno di essi è multiplo secondo $i_1 (> i)$, allora per avere i punti tripli della g_n^2 che cadono fuori di quello, si dovrà togliere $i + i_1 - 3$ unità dall'espressione (9). Ecc.

Estenderemo ora successivamente alcuni risultati degli ultimi due paragrafi.

§ 10. Formola di Zeuthen (*).

40. Nel § 8 la definizione del genere di un ente algebrico ci permise di concludere subito l'invariabilità di esso per trasformazioni birazionali, perchè queste mutano una serie lineare ∞^1 in una serie lineare ∞^1. Ora questo fatto vale anche (n.° 14) per una trasformazione, che sia razionale *in un senso* solo. Vediamo di profittarne.

Sia fra due enti algebrici γ, γ' dei generi p, p' una corrispondenza algebrica $(1, \mu)$, sicchè le coordinate dei punti di γ sian funzioni razionali di quelle dei punti omologhi di γ'; e sianvi su γ y punti di diramazione, cioè punti per ognun dei quali due fra i μ punti omologhi di γ' coincidono. Ad una g_n^1 di γ con ν punti doppi corrisponderà su γ' una $g_{\mu n}^1$ composta (con l'involuzione dei gruppi di μ punti corrispondenti ai singoli punti di γ), la quale avrà per punti doppi i $\mu\nu$ punti omologhi di quei ν ed inoltre gli y punti nominati prima, che corrispondono, contati due volte, ai punti di diramazione di γ (**). Applicando dunque a queste due serie ∞^1 sugli enti γ, γ' dei generi p, p' la definizione del genere, ossia la formola (4) del n.° 33,

(*) V. *Nouvelle démonstration de théorèmes sur des séries de points correspondants sur deux courbes* (Math. Ann., tom. 3, pag. 150; 1871).

(**) Se un punto di diramazione di γ è tale che, non solo due, ma i fra i suoi μ omologhi su γ' coincidono in un punto, questo sarà i-plo per la $g_{\mu n}^1$, cioè (n.° 36) conterà come $i-1$ punti doppi. Dunque quel punto di diramazione si dovrà riguardare come multiplo secondo $i-1$, cioè conterà come $i-1$ nel numero complessivo y.

avremo:

$$\nu = 2n + 2(p-1)$$
$$y + \mu\nu = 2\mu n + 2(p'-1).$$

Di qui si eliminano simultaneamente n e ν e si ha:

$$y = 2(p'-1) - 2\mu(p-1). \tag{1}$$

Questa formola è molto importante. Da essa segue:

$$p'-1 \geqq \mu(p-1),$$

sicchè ad es. se fosse $p = p' > 1$ dovrebb'essere $\mu = 1$, cioè la corrispondenza fra i due enti sarebbe *biunivoca* (*). Si può anche dire che la (1) dà il *numero y dei punti doppi di un'involuzione di grado μ e di genere p sopra un ente algebrico di genere p'.* Oppure anche il *numero y dei punti di diramazione che un ente algebrico di genere p ha quando, contandolo μ volte, lo si riguarda come un ente algebrico di genere p'.*

41. Si può subito dedurre dalla (1) la *formola di* Zeuthen più generale. Abbiasi fra i due enti algebrici γ, γ' dei generi p, p' una corrispondenza (x, x') con y, y' punti di diramazione (tenendo conto delle loro moltiplicità: v. n.° preced., in nota); e consideriamo l'ente algebrico ausiliario Γ di genere π costituito dalle coppie di punti omologhi di γ, γ': rappresentato ad es. se γ, γ' son curve dalle rette congiungenti i punti omologhi (cfr. n.° 21). Sarà γ con Γ in corrispondenza $(1, x')$ con y punti di diramazione su γ; sicchè applicando la (1) avremo:

$$y = 2(\pi - 1) - 2x'(p-1).$$

Similmente da γ' e Γ in corrispondenza $(1, x)$ con y' punti di diramazione si ha

$$y' = 2(\pi-1) - 2x(p'-1).$$

E sottraendo si ottiene appunto la detta formola generale

$$y - y' = 2x(p'-1) - 2x'(p-1) \text{ (**)}. \tag{2}$$

(*) Nota osservazione del sig. Weber (Journal für Math., tom. 76, 1873, pag. 345).

(**) La si poteva anche stabilire senza passare per la (1), che ne è un caso particolare, considerando su γ e γ' due serie g^1_n, $g^1_{n'}$, alle quali corrisponderanno su Γ due serie $g^1_{nx'}$, $g^1_{n'x}$; ed applicando a queste il teorema espresso dalla formola (2) del n.° 33. Od anzi, più direttamente ancora, nello stesso modo con cui si dimostrò quel teorema, Come si vede, questo ragionamento equivale a supporre che nel n.° 40, ove fra i due enti γ, γ' dei generi p, p' si considerava una corrispondenza $(1, \mu)$, l'ente γ' sia *multiplo,* ad es. secondo μ_1, sicchè propriamente si riduca ad un ente γ_1 di un certo genere p_1 da contarsi μ_1 volte. La formola (1) naturalmente rimane ancora applicabile (potendosi ad es. imaginare che γ' si sostituisca con un ente di genere p', equivalente a γ' ma *semplice*); ma di più si può applicare alla corrispondenza $(1, \mu_1)$ fra γ_1 e γ'; e così si ottiene la (2) per la corrispondenza (μ, μ_1) fra γ_1 e γ.

§ 11. Punti $(r+1)$-pli di una serie lineare ∞^r.

42. Il numero dei punti doppi di una g_n^1 sopra un ente algebrico di genere p è dato (n.° 33) da

$$2(n+p-1).$$

Il numero dei punti tripli di una g_n^2 (n.° 39) da

$$3(n+2p-2).$$

In generale, indicando con N_r il numero dei punti $(r+1)$-pli di una g_n^r, dimostreremo facilmente che il suo valore è

$$N_r = (r+1)(n+rp-r).$$

Per comodità rappresentiamo la g_n^r (supposta priva di punti fissi) con una

---

vale a dire applicando il principio di corrispondenza entro la g_n^1 o la $g_{n'}^1$ a determinare il numero d dei gruppi dell'una serie che contengono due punti di cui risp. due punti omologhi sono in un gruppo dell'altra serie. Ciò dà per d due valori, dalla cui uguaglianza si trae una relazione, che per $x = x' = 1$ coincide colla (2) del n.° 33, ed in generale, posta la definizione del genere, diventa appunto la formola (2) di sopra.

Avverto che il concetto comune a questi ragionamenti si trova già nella Nota del sig. Schubert *Ueber die Erhaltung des Geschlechts bei zwei ein-eindeutig auf einander bezogenen Plancurven* (Math. Ann., tom. 16), ove in sostanza le g_n^1, $g_{n'}^1$ son segate su due curve piane in corrispondenza biunivoca mediante due fasci di rette. Nelle dimostrazioni più antiche dei sig.[i] Bertini (Giornale di Mat., tom. 7, 1869) e Zeuthen dell'invariabilità del genere le serie stesse erano trasportate sopra un ente ausiliario: la curva generata da quei due fasci di rette. In quelle dei sig.[i] Cremona (Memorie della R. Acc. di Bologna, 1866, *Preliminari,* ecc., n.° 54) e Voss (Gött. Nachr., 1873, pag. 414) l'ente ausiliario è invece risp. la rigata o l'inviluppo piano delle rette congiungenti i punti omologhi delle due curve piane.

curva C d'ordine n di S_r. Allora (cfr. n.° 28) il numero cercato N_r sarà quello degl'iperpiani a contatto $(r+1)$-punto, cioè stazionari od iperosculatori, di C; mentre N_{r-1} sarà il numero degl'iperpiani osculatori (a contatto r-punto) uscenti da un punto dato (cioè il numero dei punti r-pli della g_n^{r-1} segata su C dagl'iperpiani che passano per quel punto), ossia la *classe* di C; N_{r-2} sarà il numero degl'iperpiani a contatto $(r-1)$-punto uscenti da una data retta, cioè l'ordine della varietà M_{r-1} costituita dagli ∞^1 S_{r-2} osculatori a C nei suoi vari punti; ecc. — Consideriamo come imagine dell'ente algebrico di genere p la ∞^1 degl'iperpiani osculatori a C. I gruppi degli N_{r-1} iperpiani osculatori che escono dai singoli punti di una retta a fissata ad arbitrio formeranno una serie lineare ∞^1; nella quale, come facilmente si vede, sono elementi doppi gli N_r iperpiani stazionari, non che gl'iperpiani osculatori a C in quegli N_{r-2} punti i cui S_{r-2} osculatori incontrano a (giacchè ogni S_{r-2} osculatore si può riguardare come l'intersezione di due iperpiani osculatori infinitamente vicini). Dunque, applicando la formola ricordata che dà il numero dei punti doppi di una serie lineare ∞^1, sarà:

$$N_r + N_{r-2} = 2(N_{r-1} + p - 1),$$

ossia

$$N_r = 2N_{r-1} - N_{r-2} + 2p - 2. \tag{1}$$

Da questa formola ricorrente, basandosi sui valori già ottenuti per N_r nei casi di $r = 1,\ 2$, si trae appunto

$$N_r = (r+1)(n + rp - r)\ (*). \tag{2}$$

(*) Questa dimostrazione semplicissima della formola (2) non ricorre ad altro, in sostanza, che alla definizione del genere (poichè anche il caso prima trattato di $r=2$ derivava dallo stesso concetto). Una dimostrazione, pure assai semplice, e basata sulla ricerca successiva delle tangenti stazionarie di una curva piana, dei piani stazionari di una curva sghemba, ecc., è stata data dal sig. Brill al principio della Nota: *Ueber zwei Berührungsprobleme* (Math. Ann., tom. 4, 1871). E la stessa formola si ritrova (ancora come numero degl'iperpiani stazionari di una curva) fra quelle del Veronese (Math. Ann., tom. 19, v. pag. 201); e poi al n.° 7 delle *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* del Castelnuovo (ove è ottenuta segando con un piano fisso, anzi che con la retta a); ecc. — Essa non è che un caso particolare di quella generalissima del sig. De Jonquières (*Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque,* etc., Journal für Math., tom. 66, 1866) che dà il numero dei gruppi di una g_n^r aventi un punto multiplo secondo k_1, uno multiplo secondo $k_2, \ldots$, ove $\Sigma(k-1) = r$ (v. nel seguito il n.° 49; cfr. anche Cayley, *On the Curves wich satisfy given conditions,* Phil. Trans., tom. 158, 1867, n.i 74 e seguenti).

43. La stessa formola ricorrente (1) può servire a determinare l'abbassamento che nel valore generale (2) di N_r produce un punto singolare qualunque di C, cioè un punto dell'ente che sia comunque singolare per la g^r_n. Per un punto P della curva C di S_r, considerato su un determinato *ramo* o *ciclo* di questa curva (cioè come imagine di un determinato elemento dell'ente algebrico), si hanno r caratteri analoghi a quelli definiti al n.° 37 pei rami di curve piane (*): cioè l'ordine i di multiplicità del punto (ossia del ramo), il numero i_1 $(> i)$ dei punti d'incontro coincidenti in P del ramo con la retta tangente in P, il numero i_2 $(> i_1)$ dei punti d'incontro coincidenti in P del ramo col piano osculatore in $P, \ldots$, infine i numeri i_{r-2} $(> i_{r-3})$, i_{r-1} $(> i_{r-2})$ dei punti d'incontro in P del ramo con l' S_{r-2} e con l'iperpiano osculatore in P. Riferendosi all'ente algebrico qualunque ed alla g^r_n, il punto P rappresenta la singolarità seguente (cfr. n.° 28): *un punto dell'ente che è i-plo per gli ∞^{r-1} gruppi (generici) della g^r_n che lo contengono, è i_1-plo per ∞^{r-2} gruppi, i_2-plo per ∞^{r-3} gruppi, ..., i_{r-2}-plo per ∞^1 gruppi, e i_{r-1}-plo per un gruppo.* — Ora l'abbassamento che una tal singolarità produce nel valore (2) di N_r sappiamo già (n.[i] 36 e 39) che per $r = 1$ è $i - 1$, e per $r = 2$ è $i + i_1 - 3$. Dico che in generale esso è

$$i + i_1 + \cdots + i_{r-1} - \frac{r(r+1)}{2}. \tag{3}$$

Ammetteremo che ciò valga per valori minori di r, e dimostreremo che è vero per r.

A questo fine osserviamo che i caratteri introdotti si possono anche interpretare in quest'altro modo. Come il punto P è i-plo per la curva C (o meglio pel ramo considerato), così la tangente considerata in P è multipla secondo $i_1 - i$ nella superficie sviluppabile luogo delle tangenti a C (o meglio nella falda di questa sviluppabile che proviene da quel ramo); il piano osculatore in P è multiplo secondo $i_2 - i_1$ nella M_3 luogo dei piani osculatori a $C; \ldots$; l' S_{r-2} osculatore in P è multiplo secondo $i_{r-2} - i_{r-3}$ nella M_{r-1} luogo

(*) Essi corrispondono a caratteri degli sviluppi in serie che rappresentano il ramo di curva considerato; e compajono già ad esempio (v. n.° 87) nel *Lückensatz* del Weierstrass. Cfr. anche i lavori citati al n.° 11, e: Fine, *On the Singularities of Curves of Double Curvature*, American Journal, tom. 8, 1886; Fine, *A Theorem respecting the Singularities of Curves of Multiple Curvature*, ibid., tom. 9, 1887; Del Pezzo, *Intorno ai punti singolari delle curve algebriche*, Rend. della R. Accad. di Napoli, 1893. — I numeri i, $i_1 - i$, $i_2 - i_1, \ldots$, $i_{r-2} - i_{r-3}$, $i_{r-1} - i_{r-2}$ nominati poi nel seguito son da considerarsi come i successivi *ranghi* del ramo o ciclo: il primo e l'ultimo sono l'*ordine* e la *classe*.

degli S_{r-2} osculatori; infine l'iperpiano osculatore in P è multiplo secondo $i_{r-1} - i_{r-2}$ per la ∞^1 degl'iperpiani osculatori di C, cioè conta $i_{r-1} - i_{r-2}$ volte nel numero complessivo degl'iperpiani osculatori uscenti da un suo punto, vale a dire assorbe $i_{r-1} - i_{r-2}$ degl'iperpiani osculatori di C uscenti da un punto generico di S_r, quando questo punto vada a cadere su quell'iperpiano. Ciò risulta in modo intuitivo se si considera uno spazio osculatore in P, S_k, come congiungente lo spazio osculatore immediatamente inferiore, S_{k-1}, ad un punto di C infinitamente vicino a P: quell' S_k apparirà multiplo secondo $i_k - i_{k-1}$, perchè tanti sono i punti infinitamente vicini a P che esso congiunge all' S_{k-1}. Ma possiamo vedere la cosa in modo più rigoroso, ad es. per quanto si riferisce all'iperpiano osculatore, considerando la curva C' projezione di C da un punto generico O sopra un iperpiano S_{r-1}: gli S_{r-2} stazionari di C' son le tracce degl'iperpiani osculatori a C uscenti da O. In generale la curva C' avrà nel punto P' projezione di P una singolarità di caratteri $i, i_1, \dots, i_{r-2}$; e ne deriva un abbassamento nel numero dei suoi S_{r-2} stazionari espresso dalla formola (3) dove in luogo di r si ponga $r-1$. Ma se il centro O di projezione va sull'iperpiano osculatore in P a C, l'ultimo carattere della singolarità P' di C' si muta in i_{r-1}; e per conseguenza quell'abbassamento s'accresce di $i_{r-1} - i_{r-2}$ unità. Dunque tanti sono appunto gl'iperpiani osculatori a C uscenti da O che vengono a coincidere nell'iperpiano osculatore in P.

Ciò premesso, rifacciamoci al ragionamento con cui nel n.° prec. si ottenne la formola (1), cioè alla considerazione della serie lineare ∞^1 dei gruppi d'iperpiani osculatori a C uscenti dai singoli punti della retta fissa a. Noi abbiamo per ipotesi che la singolarità P di C produce nell'ordine N_{r-1} della detta serie lineare un abbassamento espresso da (3) ove r si muti in $r-1$. Così pure nel computo degli elementi doppi di quella serie noi abbiamo un analogo abbassamento nel numero N_{r-2} di quelli che provenivano dagli S_{r-2} osculatori a C che incontravano la retta a (poichè l' S_{r-2} osculatore in P non incontrerà in generale a, e deve quindi esser sottratto). Fatte queste riduzioni nel 2.° membro della (1), il numero N_r così modificato esprimerà il numero dei rimanenti elementi doppi di quella serie lineare: elementi doppi che non erano altro che gl'iperpiani stazionari di C. Ora l'iperpiano osculatore in P assorbe, come abbiam visto, $i_{r-1} - i_{r-2}$ degl'iperpiani osculatori uscenti dal suo punto d'incontro con a, ossia è multiplo secondo $i_{r-1} - i_{r-2}$ per la serie lineare: e però (n.° 36) assorbirà $i_{r-1} - i_{r-2} - 1$ elementi doppi della serie stessa. Dunque concludiamo che per effetto della singolarità P il numero degl'iperpiani stazionari quale sarebbe espresso dalla (2), subisce, *se si vuol togliere l'iperpiano osculatore in P*, la riduzione complessiva

$$\left[i_{r-1} - i_{r-2} - 1\right] + 2\left[i + i_1 + \cdots + i_{r-2} - \frac{(r-1)r}{2}\right]$$

$$-\left[i + i_1 + \cdots + i_{r-3} - \frac{(r-2)(r-1)}{2}\right] = i + i_1 + \cdots + i_{r-1} - \frac{r(r+1)}{2},$$

che è appunto l'espressione (3) (*).

Quando il punto P stesse su più di un ramo della curva C, per ciascun ramo la formola (3) darebbe l'influenza che esso ha sul numero complessivo degl'iperpiani stazionari; sicchè si dovrebbero sommare gli abbassamenti che così sarebbero prodotti dai vari rami. — Se invece si considera la questione in modo più astratto, cioè come relativa ad un ente algebrico ed ai punti $(r+1)$-pli di una g_n^r di questo, l'influenza di un punto dell'ente, singolare per quella serie, sul numero di quei punti multipli sarà data dalla (3) *senz'altro*, perchè al punto dell'ente corrisponde un ramo ben determinato della curva C.

44. Nella dimostrazione (n.° 42) della formola (2) per il numero dei punti $(r+1)$-pli di una g_n^r sull'ente algebrico di genere p si è supposto che la serie stessa non fosse composta (cioè che la curva imagine C non fosse multipla). È facile vedere però che la stessa formola sussiste anche quando la g_n^r è composta mediante un'involuzione, purchè si computi nel modo indicato dalla (3) del n.° prec. l'influenza dei punti doppi di quell'involuzione sul numero che si cerca.

Sia μ il grado e π il genere dell'involuzione con cui è composta la g_n^r; sicchè, posto $n = m\mu$, si avrà entro l'ente γ_1 i cui elementi sono i gruppi di μ punti di quell'involuzione, una serie lineare g_m^r i cui gruppi formano

(*) Nella citata formola del Veronese, che dà il numero degl'iperpiani stazionari, si tien conto dell'influenza che su quel numero hanno le tangenti stazionarie, i piani stazionari,...; sicchè si hanno casi particolari dell'abbassamento generale espresso dalla (3). — Questo abbassamento generale si trova poi calcolato, pel caso della *serie canonica* (di cui diremo in seguito) sull'ente di genere p, nella Memoria del sig. Hurwitz: *Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich* (Math. Ann., tom. 41, 1892; v. pag. 408-9, da confrontarsi col n.° 87 del presente scritto): mentre pel caso $p = 0$, come influenza di una singolarità data nel numero dei punti $(r+1)$-pli di un'involuzione ∞^r fra i punti di una retta, è dato dal sig. Guccia nella Nota: *Due proposizioni relative alle involuzioni di specie qualunque, dotate di singolarità ordinarie* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 1893: v. il Lemma II).

appunto i gruppi di punti della serie g_n^r dell'ente algebrico primitivo γ. Il numero degli elementi $(r+1)$-pli di quella g_m^r (che possiam supporre semplice) sull'ente γ_1 di genere π sarà, per la (2):

$$(r+1)(m+r\pi-r),$$

ed ognuno di essi si comporrà di μ punti di γ $(r+1)$-pli per un gruppo della g_n^r. Se poi consideriamo in questo ente un punto P che sia doppio per l'involuzione ed i gruppi della g_m^r di γ_1 che contengono l'elemento passante per P (che è un gruppo di μ punti di γ di cui due coincidenti in P) $1, 2, \ldots, r-1, r$ volte, noi vediamo che P è multiplo secondo $2, 4, \ldots, 2(r-1), 2r$ per $\infty^{r-1}, \infty^{r-2}, \ldots, \infty^1, \infty^0$ ossia 1, gruppi della g_n^r; sicchè stando alla formola (3) dovrebbe influire nel numero dei punti $(r+1)$-pli di questa serie per

$$2+4+\cdots+2(r-1)+2r-\frac{r(r+1)}{2}=\frac{r(r+1)}{2}.$$

Ora questi punti P doppi per l'involuzione di grado μ e genere π sono, per la formola di Zeuthen (n.° 40)

$$2(p-1)-2\mu(\pi-1).$$

Dunque in complesso troviamo come numero dei punti $(r+1)$-pli della g_n^r

$$\mu(r+1)(m+r\pi-r)+\frac{r(r+1)}{2}[2(p-1)-2\mu(\pi-1)]$$
$$=\mu m(r+1)+r(r+1)(p-1)=(r+1)(n+rp-r),$$

sicchè riman valida la (2) del n.° 42.

45. La detta formola del n.° 42, completata con le osservazioni precedenti, assegna tutti i successivi *ranghi* di una curva di qualsiasi spazio, dati l'ordine ed il genere (e i caratteri dei punti singolari): o dualmente, dati il genere e la classe. Più in generale essa dà immediatamente il numero dei punti in cui una data curva ha il contatto più elevato possibile con varietà di un dato sistema lineare.

Come esempio consideriamo i *punti sestattici* di una curva piana γ di genere p e d'ordine n, cioè i punti in ognun dei quali γ ha contatto sipunto con una conica. Le ∞^5 coniche del piano segano su γ (supposto $n>2$) una serie lineare g_{2n}^5: i punti in discorso sono punti sestupli di questa serie. Il loro numero sarebbe quindi (n.° 42)

$$12n+30(p-1). \tag{4}$$

Ma si posson fare delle riduzioni, se si voglion togliere i punti singolari (flessi, cuspidi, ecc.) di γ: ed il n.° 43 ci permette di determinare queste riduzioni. La curva abbia in un punto P un ramo o ciclo d'ordine i e classe i (incontrato dunque dalla tangente t in $i+i'$ punti coincidenti in P). Le ∞^4 coniche passanti per P dànno in quella serie lineare gruppi per cui P è i-plo. Se poi consideriamo una conica tangente in P a t, delle $2n$ intersezioni sue con γ cadranno in P $i+i'$ se $i' \leq i$, e $2i$ se $i' \geq i$ (*). Se $i' < i$ abbiamo dunque nella g^5_{2n} ∞^3 gruppi con P multiplo secondo $i_1 = i + i'$: fra questi poi gli ∞^2 gruppi che son dati dalle coppie di rette uscenti da P hanno in questo punto la multiplicità superiore $i_2 = 2i$; e se una retta della coppia è t (∞^1 gruppi) si ha in P la multiplicità $i_3 = 2i + i'$; e finalmente pel gruppo dato dalla conica ridotta a t contata due volte, P è multiplo secondo $i_4 = 2i + 2i'$. — Se invece $i' > i$ avremo nella g^5_{2n} ∞^3 gruppi per cui P è multiplo secondo $i_1 = 2i$: e poi ∞^2 gruppi dati dalle coniche spezzate in t ed un'altra retta qualunque, pei quali P avrà la maggior multiplicità $i_2 = i + i'$; e se la seconda retta passa per P (∞^1 gruppi), o se coincide addirittura con t (un gruppo), ancora come prima avremo in P le multiplicità $i_3 = 2i + i'$, e $i_4 = 2i + 2i'$. — Se finalmente $i' = i > 1$, le coniche tangenti in P a t dànno ancora nella g^5_{2n} ∞^3 gruppi per cui P ha la multiplicità $i_1 = 2i$; ma le ∞^2 coniche degeneri che, dopo quelle, si consideravano nei casi precedenti, non darebbero multiplicità maggiori: si devon dunque considerare le ∞^2 coniche che toccano t in P ed inoltre passano per un punto di γ (del ramo) infinitamente vicino a P. La multiplicità di P per gli ∞^2 gruppi che così si hanno sarà *in generale:* $i_2 = 2i + 1$. Dopo ciò le coniche spezzate in t ed una retta passante per P (∞^1), od in particolare coincidente con t daranno ancora le multiplicità ordinatamente superiori $i_3 = 3i$, $i_4 = 4i$. — Ed ora sostituendo i valori trovati nella (3), cioè:

$$i + i_1 + \cdots + i_4 - 15,$$

si ha che: un ramo d'ordine i e classe i' diversi fra loro abbassa il numero (4) dei punti sestattici di

$$8i + 4i' - 15$$

(*) Ciò si verifica immediatamente sostituendo nel 1.° membro dell'equazione della conica (o curva qualunque) tangente in P a t le serie di potenze che danno le coordinate del ramo considerato di γ ed osservando qual è l'esponente minimo che comparirà nel risultato della sostituzione.

unità (ad es. un flesso di 1 unità, una cuspide di 5); mentre un ramo d'ordine e classe uguali fra loro $i > 1$ lo abbassa *in generale* di $12i - 14$. — Naturalmente si avranno altri valori per questi abbassamenti se la formola (4) si modifica eliminandone il genere mediante la (2) del n.° 37 o la duale (*).

È chiaro poi che si posson determinare in modo analogo i punti in cui una curva piana o sghemba ha contatti superiori con cerchi, sfere, curve o superficie del 3.° ordine, ecc.

§ 12. Formola di corrispondenza di Cayley e Brill.

46. Possiamo applicare il risultato del n.° 42 a ritrovare per una via nuova e semplice la nota formola del sig. Cayley che dà il numero dei punti uniti di una corrispondenza algebrica (α, α') sopra un ente algebrico di genere p, nel caso *particolare* che questa corrispondenza si possa rappresentare con una (**) equazione:

$$f(x, x') = 0,$$

(*) Indicando con M il numero dei rami d'ordine uguale alla classe, e supposto che questi rami non presentino particolarità (v. sopra) alle ∞^2 coniche che li osculano, abbiamo ottenuto pel numero dei punti sestattici che cadono fuori dei punti singolari:

$$12n + 30(p-1) - \Sigma(8i + 4i' - 15) - M,$$

ove la somma si estende a tutti i rami pei quali i ed i' non sono entrambi uguali ad 1. Sostituendo la (2) del n.° 37 quel numero diventa (n' essendo la classe di γ)

$$15n' - 18n + \Sigma(7i - 4i') - M;$$

e sotto questa forma in sostanza il numero dei punti sestattici si trova (ottenuto per mezzo dell'invariante differenziale che caratterizza le coniche) nel n.° 32 del citato *Étude sur les points singuliers* etc. dell'Halphen; v. anche il precedente lavoro dello stesso Autore *Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du 3.e dégré* (Bulletin de la Soc. Math. de France, tom. 4, 1875).

(**) Dal n.° 6 si trae che una corrispondenza (α, α') fra due enti algebrici (distinti o no) si può sempre rappresentare con due equazioni fra le coordinate dei punti omologhi. Ad es. se si tratta di due curve piane e si projettano i punti omologhi risp. mediante i raggi x, x' di due fasci, questi saran legati da un'equazione $f(x, x') = 0$ dei gradi α, α'; e similmente con altri due fasci di raggi y, y' si ha un'altra equazione $\varphi(y, y') = 0$. E si può sempre supporre (mutando eventualmente i fasci, cioè le coordinate), come subito si vede, che due punti $(x\ y)$, $(x'\ y')$ delle due curve i quali verifichino quelle due equazioni (oltre quelle delle curve stesse) siano in generale omologhi nella data corrispondenza, fra le coordinate dei punti omologhi x, x', la quale, dato x non sia soddisfatta da altri punti dell'ente algebrico che dagli α' corrispondenti punti x' ed eventualmente da punti fissi dell'ente e dallo stesso punto x contato un certo numero γ ($\geqq 0$) di volte. Considerando un sistema lineare di varietà che comprenda tutte quelle rappresentate (nelle coordinate variabili x') dalla detta equazione quando per x si pongono successivamente i vari punti del dato ente, si vede subito che il detto caso particolare di corrispondenza (α, α') è quello in cui *i gruppi composti degli* α' *punti* x' *corrispondenti ad uno stesso punto* x *dell'ente e di questo punto* x *contato* γ ($\geqq 0$) *volte sono* ∞^1 *gruppi di una serie lineare d'ordine* $\alpha' + \gamma$. Dimostreremo che il numero U dei punti uniti è dato da

$$U = \alpha + \alpha' + 2\gamma p \quad (*).$$

La minima serie lineare contenente quei gruppi di $n' = \alpha' + \gamma$ punti sia una $g^r_{n'}$, che supporremo *semplice*. Allora l'ente algebrico si potrà rappresentare con una curva semplice C di genere p e d'ordine n' appartenente ad S_r; e per ogni punto x di C gli α' punti x' omologhi saranno le ulteriori intersezioni di C con un iperpiano determinato avente in x un contatto γ-punto con C, vale a dire passante per l' $S_{\gamma-1}$ osculatore in x a C (donde appare che $\gamma \leqq r$). Si hanno così ∞^1 iperpiani passanti risp. per gli ∞^1 $S_{\gamma-1}$ osculatori di C. Poichè ad ogni punto x' corrispondono α punti x, per ogni punto P di C — considerato come punto x' — passeranno α iperpiani di quella ∞^1; mentre per lo stesso P — considerato come punto x — passerà (se $\gamma > 0$) l'iperpiano inerente all' $S_{\gamma-1}$ osculatore in P: però siccome i punti di C si posson riguardare come intersezioni di γ spazi $S_{\gamma-1}$ osculatori infinitamente vicini (ossia sono γ-pli per la M_γ luogo di quegli ∞^1 $S_{\gamma-1}$), così si può dire che in quell'ultimo iperpiano cadono γ iperpiani del sistema infinitamente vicini (**);

(*) Questa formola è stata data per la prima volta dal sig. Cayley: *Note sur la correspondance de deux points sur une courbe* (Comptes rendus, tom. 62, 1866; v. anche i Proceedings Lond. Math. Soc. dello stesso anno). Il sig. Brill ne diede poi dimostrazioni complete nelle Note: *Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve* (Götting. Nachrichten, 1871; e Math. Ann., tom. 6, 1872); *Ueber die Correspondenzformel* (Math. Ann., tom. 7, 1874). V. anche quella più recente dello stesso sig. Brill: *Ueber algebraische Correspondenzen* (Math. Ann., tom. 31, 1888). — Lo studio generale delle corrispondenze algebriche *d'ogni specie* sopra un ente algebrico qualunque, ed il calcolo del numero dei loro punti uniti, furon poi fatti dal sig. Hurwitz nella Nota: *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip* (Berichte sächs. Ges. d. W., 1886; e Math. Ann., tom. 28).

(**) La considerazione duale riescirà forse più intuitiva a qualche lettore.

onde si conchiude che per P (e quindi anche per un punto qualunque di S_r) passano in tutto $\alpha+\gamma$ iperpiani del sistema, ossia che questo è di classe $n=\alpha+\gamma$. Questo sistema ∞^1 d'iperpiani essendo in corrispondenza biunivoca coi punti x di C sarà un ente di genere p, che si potrà anche assumere in luogo di C come rappresentante dell'ente algebrico dato. Allora l'ultima considerazione svolta ci fa vedere che *il gruppo degli α punti x dell'ente corrispondenti ad un dato punto x', preso insieme con questo punto x' contato γ volte, dà un gruppo variabile entro una serie lineare d'ordine $n=\alpha+\gamma$ e di dimensione r*: la serie lineare che entro quel sistema ∞^1 d'iperpiani è staccata dai punti di S_r (vale a dire è costituita dai gruppi degl'iperpiani del sistema passanti pei vari punti di S_r) (*).

Se, riferendoci al detto sistema di classe n d'iperpiani, diciamo che un punto, retta,..., S_i,... è *del sistema* quando si può determinare come l'intersezione dell'opportuno numero ($r-i$ nel caso dell' S_i) d'iperpiani del sistema infinitamente vicini fra loro, avremo nei vari spazi del sistema gli analoghi (duali) dei successivi spazi osculatori di una curva. Ed è chiaro ad es. che gli ordini delle ∞^1 di $S_{r-\gamma}$ e di $S_{r-\gamma-1}$ del sistema saranno risp. i numeri degli elementi γ-pli, $(\gamma+1)$-pli di una g_n di dimensione $\gamma-1$, o γ contenuta entro la g_n^r che nel sistema d'iperpiani di classe n e genere p è staccata dai punti di S_r: ossia i numeri $N_{\gamma-1}$, N_γ, adoperando ancora il simbolo del n.° 42.

Ogni punto P di C sta, come già rilevammo, su γ iperpiani infinitamente vicini del sistema, cioè su un $S_{r-\gamma}$ del sistema. Ed un punto unito della corrispondenza fra x e x' sarà un punto pel quale accade che uno degli α iperpiani del sistema uscenti da esso e distinti in generale da quelli (v. sopra) viene pure a coincidere con essi: ossia un punto che sta su ($\gamma+1$ iperpiani infinitamente vicini cioè su) un $S_{r-\gamma-1}$ del sistema. Ogni $S_{r-\gamma}$ del sistema contiene un determinato punto P di C ed un determinato $S_{r-\gamma-1}$ del sistema: la questione che ci occupa consisterà nel trovare quante volte quel punto e quell' $S_{r-\gamma-1}$ sono incidenti. A tal fine da uno spazio fisso O_γ di dimensione γ projettiamo ogni punto P di C sul corrispondente $S_{r-\gamma-1}$ del sistema: avremo un punto P_1 che descriverà una curva C_1, e si tratterà di trovare le coincidenze di P e P_1, cioè i punti d'incontro delle due curve C e C_1. Consideriamo la

(*) Tale serie è certo di dimensione r e non minore; perchè l'ipotesi contraria significherebbe che tutti quegli ∞^1 iperpiani passano per un punto (od uno spazio): dal che seguirebbe che avrebbe dimensione minore di r la serie lineare d'ordine n' prima considerata contenente ogni punto x contato γ volte ed i suoi α' punti x' omologhi.

rigata descritta dalla retta PP_1: essa incontra O_γ secondo una curva C_2 che è il luogo delle traccie su questo spazio degli ∞^1 $S_{r-\gamma}$ del sistema, e quindi d'ordine $N_{\gamma-1}$; dunque l'ordine di quella rigata, per la quale C e C_2 sono direttrici (semplici) prive di punti comuni (se lo spazio O_γ non incontra C), sarà la somma degli ordini di queste, cioè $n' + N_{\gamma-1}$ (*). Per avere invece l'ordine della curva C_1, osserviamo che essa è incontrata da un iperpiano passante per O_γ in tanti punti P_1 mobili quante sono in quell'iperpiano le generatrici della rigata ovvero i punti P di C, cioè n'; e di più nei punti fissi che C_1 ha su O_γ, i quali sono i punti d'incontro di questo spazio con la varietà degli ∞^1 $S_{r-\gamma-1}$ del sistema, e quindi sono N_γ. Dunque l'ordine di C_1 sarà $n' + N_\gamma$. Segue (*) che sulla rigata d'ordine $n' + N_{\gamma-1}$ il numero dei punti d'incontro (punti *uniti*) delle due curve direttrici C e C_1 sarà:

$$U = n' + (n' + N_\gamma) - (n' + N_{\gamma-1}) = n' + N_\gamma - N_{\gamma-1}.$$

Ponendo qui per N_γ e $N_{\gamma-1}$ i valori assegnati dal n.° 42 e rimettendo poi per n, n' i loro valori attuali $\alpha + \gamma$, $\alpha' + \gamma$, quel numero diventa:

$$U = n' + (\gamma + 1)(n + \gamma p - \gamma) - \gamma(n + \gamma p - p - \gamma + 1)$$
$$= n + n' + 2\gamma p - 2\gamma = \alpha + \alpha' + 2\gamma p,$$

come appunto si voleva dimostrare.

47. Il ragionamento precedente fu esposto con l'ipotesi $\gamma > 0$. Nel caso $\gamma = 0$, senza modificarsi pel concetto, si abbrevia alquanto nello sviluppo. Ogni punto P di C viene allora projettato dal centro fisso O sull'iperpiano corrispondente del sistema in un punto P_1. Il cono projettante sarà dell'ordine n' (di C); la curva C_1 luogo di P_1 sarà dell'ordine $n + n'$ (con O punto n-plo, corrispondentemente agli n iperpiani del sistema uscenti da esso); per conseguenza le direttrici C e C_1 di quel cono s'incontreranno in $n' + (n + n') - n' = n + n'$ punti, cioè (essendo $\gamma = 0$) $\alpha + \alpha'$, come darebbe la formola generale.

Si osservi pure che la projezione che in generale si faceva dei punti P sui corrispondenti $S_{r-\gamma-1}$ del sistema da uno spazio fisso O_γ ha senso ed è utile finchè $\gamma < r - 1$. Quando $\gamma = r - 1$ una projezione non occorre più: l'$S_{r-\gamma-1}$ del sistema è un punto P_1, che genera una curva C_1; mentre gli $S_{r-\gamma}$

(*) Com'è ben noto, e risulta del resto dall'applicazione del principio di corrispondenza in un fascio d'iperpiani, l'ordine della rigata luogo delle congiungenti i punti omologhi di due curve in corrispondenza univoca è la somma degli ordini di queste diminuita del numero dei loro punti uniti.

del sistema son le generatrici di una rigata. L'ordine di questa è $N_{\gamma-1}$; l'ordine di C_1 è N_γ; quindi le intersezioni delle direttrici C e C_1 della rigata sono $n'+N_\gamma-N_{\gamma-1}$, come sopra.

Nel caso estremo $\gamma=r$ il ragionamento basato sugli $S_{r-\gamma-1}$ del sistema non si applicherebbe più. Si noti però che in tal caso gl'iperpiani del sistema avrebbero con C contatto r-punto, cioè sarebbero gl'iperpiani osculatori di C: sicchè la classe del sistema sarebbe (n.° 42) $n=r(n'+rp-p-r+1)$; mentre i punti uniti della corrispondenza su C sarebbero i punti ove l'iperpiano osculatore è stazionario, i quali sono in numero di $(r+1)(n'+rp-r)$. Quest'espressione, tenendo conto di quel valore di n, si può metter sotto la forma $n+n'+2rp-2r$, che equivale nel caso attuale ad $\alpha+\alpha'+2\gamma p$.

48. Si è pure supposto nella dimostrazione del n.° 46 che la serie lineare $g^r_{n'}$ contenente ogni punto x dell'ente algebrico contato γ volte ed i suoi α' punti omologhi x' non fosse composta. Ma il lettore potrà verificare (in modo analogo a quello tenuto nel n.° 44) come nel caso che la detta serie fosse composta coi gruppi di un'involuzione di grado μ e genere π, il teorema rimanga vero, perchè la ricerca dei punti uniti della data corrispondenza si riduce a cercare gli elementi uniti di una nuova corrispondenza entro quell'ente di genere π (la detta involuzione): e vi sarà solo da ammettere che a quest'ultima corrispondenza la formola del n.° 46 sia applicabile. Ai punti uniti che così proverranno dai gruppi uniti della corrispondenza entro l'involuzione saranno da aggiungere nel caso che $\gamma>0$ i punti doppi dell'involuzione stessa, ognuno contato γ volte se si vuol che rimanga valida anche in questo caso l'espressione generale del numero dei punti uniti.

E qui osserviamo in generale che un punto unito può contare più volte nel numero U trovato per due cause diverse. Può cioè accadere nel ragionamento del n.° 46 che un punto equivalga a più intersezioni (sia punto di contatto, ecc.) delle due curve C e C_1, vale a dire della curva C e della varietà costituita dagli ∞^1 $S_{r-\gamma-1}$ del sistema. E può avvenire invece (se $\gamma>0$) che un punto *(singolare)* produca un abbassamento nei numeri N_γ, $N_{\gamma-1}$ che colà compajono, e quindi anche una riduzione nel numero $U=n'+N_\gamma-N_{\gamma-1}$. Limitandoci a questo secondo caso, la proposizione del n.° 43 applicata al caso attuale dà subito (applicando la legge di dualità) il risultato seguente: Nel numero complessivo $\alpha+\alpha'+2\gamma p$ dei punti uniti un punto unito singolare conterà k volte se (condizione *sufficiente,* ma non necessaria) l' $S_{\gamma-1}$ osculatore in esso alla curva C la incontra in $\gamma+k$ punti coincidenti in quello: o, riferendoci all'ente algebrico astratto, se per la serie lineare minima $g^r_{\alpha'+\gamma}$ contenente ogni punto x γ volte coi suoi α' punti omologhi x' vi sono $\infty^{r-\gamma}$ gruppi pei quali quel punto è multiplo secondo $\gamma + k$. Così ad esempio per una corrispondenza fra i punti di una curva piana per la quale sia $\gamma = 1$, un punto singolare che sia origine di un ramo superlineare d'ordine i e che non stia su tutte le curve che segano su quella la data corrispondenza sarà da contarsi in generale $i - 1$ volte fra i punti uniti; ecc. (*).

49. Alla formola del n.° 46 lo stesso sig. Cayley ha dato (loc. cit.) una forma più generale, che si applica alla soluzione dei *problemi di contatto* (**).

Suppongasi che nella corrispondenza (α, α') da noi considerata tra i punti x, x' dell'ente algebrico il gruppo degli α' punti x' corrispondenti ad un punto x si scomponga in un certo numero a'_1 di punti A'_1 multipli secondo λ_1, a'_2 punti A'_2 multipli secondo $\lambda_2, \ldots$, cosicchè sarà:

$$\alpha' = a'_1\lambda_1 + a'_2\lambda_2 + \cdots$$

Rappresentando come al n.° 46 l'ente algebrico con la curva C avremo che gl'iperpiani del sistema ∞^1 che ivi si consideravano avranno con C un contatto γ-punto in x, λ_1-punto in ogni punto A'_1, λ_2-punto in ogni $A'_2, \ldots$ Quindi se si contano gl'iperpiani del sistema uscenti da un punto P di C, — fra i quali già s'era visto che γ si dovevan considerare come coincidenti nell'iperpiano inerente a quel punto considerato come punto x, — si vede che per ragioni analoghe ogni iperpiano pel quale P sia un punto A'_1, o $A'_2, \ldots$ sarà da contarsi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ volte fra gl'iperpiani del sistema uscenti da P. In altri termini si rappresenti un punto dell'ente con A_1, o $A_2, \ldots$ secondo che riguardandolo come punto x si voglion considerare come suoi omologhi (punti x') gli A'_1, od $A'_2, \ldots$: ad A_1 corrisponderanno a'_1 punti A'_1 (distinti da esso), e suppongasi che viceversa ad A'_1 corrispondano a_1 punti A_1; e similmente ad A'_2 corrispondano a_2 punti A_2, ecc. Allora gli α punti x corrispondenti ad un dato punto x' e distinti da esso si scindono in a_1 punti A_1 multipli secondo λ_1, a_2 punti A_2 multipli secondo $\lambda_2, \ldots$, sicchè:

$$\alpha = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots$$

Ciò posto diciamo u_1 il numero dei punti uniti della corrispondenza (a_1, a'_1) fra i punti A_1, A'_1; u_2 il numero dei punti uniti della corrispondenza (a_2, a'_2) fra A_2, A'_2; ecc. È facile vedere che ognuno di quegli u_1 punti conterà λ_1

(*) Cfr. specialmente la citata Nota del sig. Brill, Math. Ann., tom. 31.

(**) V. anche i citati lavori del sig. Brill (Math. Ann., tom. 6, 7 e 31).

volte nel numero complessivo U dei punti uniti della corrispondenza (α, α') fra x, x'; e similmente gli u_2 punti saranno λ_2-pli nel numero U; ecc. Sarà dunque:

$$U = u_1\lambda_1 + u_2\lambda_2 + \cdots$$

Ponendo questi valori di α, α', U nella formola:

$$U = \alpha + \alpha' + 2\gamma p,$$

essa diventa:

$$(u_1 - a_1 - a'_1)\lambda_1 + (u_2 - a_2 - a'_2)\lambda_2 + \cdots = 2\gamma p.$$

Questa relazione generale serve a determinare il numero dei punti uniti (u_1, o $u_2,\ldots$) di una delle corrispondenze parziali (a_1, a'_1), $(a_2, a'_2),\ldots$ quando si conoscano i numeri di punti uniti di tutte le altre.

È appunto questo caso che si presenta nel problema dei contatti, ossia in generale nel problema di determinare il numero dei gruppi di una g_n^r aventi un punto multiplo secondo k_1, uno multiplo secondo $k_2,\ldots$, ove $\Sigma(k-1)=r$. Nella citata Nota del sig. Brill (Math. Ann., tom. 6; v. pag. 46) si vedrà come, seguendo quel concetto e tenendo conto della natura delle corrispondenze che così si presentano (la quale deriva dal lavoro dello stesso scienziato citato in nota al n.° 42), si possan subito ricavare due formole ricorrenti mediante cui si stabilisce la formola generale del sig. De Jonquières (citata nella stessa nota al n.° 42) che risolve il detto problema.

§ 13. Una formola generale per le involuzioni sopra un ente algebrico.

50. Abbiasi sopra una curva C d'ordine n appartenente allo spazio S_r una semplice infinità di gruppi di m punti tale che ogni punto stia in un sol gruppo, ossia un'involuzione di grado m. Siano di dimensione k, ossia degli S_k, gli spazi a cui appartengono i gruppi generici: sicchè sarà $k \leq r$. S'indichi con ν finchè $k \leq r-1$ il numero di quegli S_k che incontrano un S_{r-k-1} arbitrario, ossia l'ordine della varietà M_{k+1} costituita da quegli ∞^1 S_k (per $k=r-1$ la classe della ∞^1 d'iperpiani). Vedremo di esprimere in funzione di tutti questi numeri il numero y dei punti doppi di quell'involuzione (*).

(*) Il procedimento che seguiremo, come la formola a cui esso ci condurrà, son dovuti al sig. Schubert. Veggasi, anche per il seguito, la mia Nota: *Sulle varietà algebriche*, ecc., citata nell'Introduzione.

A tal fine introduciamo gli ordini x_1, $x_2, \ldots$, $x_i, \ldots$ delle varietà costituite risp. dalle rette, piani,..., $S_i, \ldots$ congiungenti 2, 3,..., $i+1, \ldots$ punti di un gruppo. Come ultimo di questi numeri si può assumere x_{k-1}; od anzi x_k, se $k \leqq r-1$, ed allora sarà da porre (come apparirà poi) $x_k = \binom{m}{k+1}\nu$. Similmente si potrà cominciare col numero (corrispondente a $i=0$) $x_0 = n$.

Applicando il principio di corrispondenza (*) ad un fascio d'iperpiani projettanti le coppie di punti che fan parte di uno stesso gruppo del sistema, — il che dà in quel fascio una corrispondenza simmetrica d'indice $(m-1)n$, si ha anzitutto

$$2(m-1)n = 2x_1 + y.$$

Però se vi son dei punti doppi di C, ognun dei quali rappresenti due punti di uno stesso gruppo dell'involuzione, il loro numero raddoppiato si dovrà aggiungere al 2.° membro di quell'equazione, poichè ognuno di essi dà origine ad una coincidenza (doppia) che non conta in generale fra le y.

Più generalmente si considerino due S_i (per $i = 1, 2, \ldots, k-1$) i quali congiungano sempre i punti $P_1 \ldots P_i$ di un gruppo risp. a due ulteriori punti A, A' del gruppo medesimo; e fissato ad arbitrio un fascio di S_{r-i-1} (cioè l' S_{r-i} che li contiene e l' S_{r-i-2} per cui essi passano), si riguardino in esso come omologhi due spazi che siano incidenti a due tali S_i. Applicando a questo fascio ed alla corrispondenza che così si avrà fra i suoi elementi il principio di corrispondenza, si otterranno (pei suddetti valori di i) $k-1$ relazioni. L'ultima, cioè quella che si ha per $i=k-1$, quando fosse $k=r$ proverrebbe dal segare con una retta una corrispondenza fra iperpiani. — In generale, qualunque sia i, la corrispondenza fra gli S_i che formino coppia nel senso spiegato è simmetrica e d'indice $(i+1)(m-i-1)$: quindi quella che si ha fra gli S_{r-i-1} del fascio sarà pure simmetrica e d'indice $(i+1)(m-i-1)x_i$, ed avrà perciò

$$2(i+1)(m-i-1)x_i$$

coincidenze. Ora queste si possono avere nei 4 modi seguenti:

1.° Essendo i due S_i *distinti,* ma incidenti all' S_{r-i} del fascio in *uno* stesso punto: che sarà dunque nello spazio S_{i-1} $(P_1 \ldots P_i)$ comune a quelli. Si hanno così x_{i-1} coincidenze, di cui ognuna, per l'arbitrio che rimane nella

(*) V. n.° 8, anche per le coincidenze che contiamo come *doppie.*

scelta di A, A' fra gli $m-i$ punti di un gruppo che restano togliendo $P_1 \dots P_i$, conta per $(m-i)(m-i-1)$ (*).

2.° Essendo i due S_i *distinti* ed incidenti all' S_{r-i} in *due* punti distinti: i quali dunque saranno in un S_{r-i-1} (unito) del fascio, sicchè la retta che li congiunge incontrerà il sostegno S_{r-i-2} di questo; ossia l' S_{i+1} $(P_1 \dots P_i\, A A')$ di quei due S_i sarà incidente all' S_{r-i-2}. Si hanno dunque x_{i+1} coincidenze siffatte, ognuna multipla secondo $(i+1)(i+2)$. Ciò finchè i non arriva a $k-1$. Quando $i=k-1$, allora (se $k \leq r-1$) ognuno dei ν S_k (gli S_{i+1} del caso attuale) che incontrano l' S_{r-k-1} (l' S_{r-i-2}) dà $\binom{m}{k+1} \cdot k(k+1)$ aggruppamenti $(P_1 \dots P_{k-1}\, A A')$, sicchè vale ancora la determinazione precedente del numero delle coincidenze, purchè si ponga $x_k = \binom{m}{k+1}\nu$. Solo se $k=r$ questa specie di coincidenze pel caso estremo $i=k-1$ non si presenta evidentemente più: ma siccome appunto allora il simbolo ν non ha significato, converremo di porre $\nu = 0$ se $k=r$, e con ciò rimarrà vero anche allora quanto s'è detto.

3.° *Coincidendo* i due S_i *pel coincidere* di A e A': ciò dà $\binom{m-2}{i} y$ coincidenze nel fascio.

4.° *Coincidendo* i due S_i *senza* che coincidano A e A', cioè essendovi un S_i con $i+2$ punti di un gruppo. Ogni elemento unito del fascio ottenuto in questo modo conterebbe per $(i+1)(i+2)$. Però l'esistenza in un gruppo dell'involuzione (appartenente quindi ad un S_k) di $i+2$ punti situati in un S_i impone al gruppo $k-i$ condizioni; sicchè si può dire che in generale essa ha luogo solo nel caso estremo $i=k-1$, cioè che vi sono solo dei gruppi nei quali $k+1$ punti appartengono ad un S_{k-1}. Sia z il loro numero.

Sommando insieme tutte le coincidenze si ha la relazione generica, che per $i=1, 2, \dots, k-2, k-1$ dà il gruppo seguente:

(*) Qui e nel seguito siamo nel caso di coincidenze multiple nell'applicazione del principio di corrispondenza, ma senza le difficoltà che altre volte si hanno per la determinazione delle multiplicità. Si osservi in fatti che qui il problema algebrico, dal fascio di S_{r-i-1} si può riportare di nuovo ai particolari aggruppamenti $P_1 \dots P_i A A'$ di punti di C: donde segue che un elemento unito di quel fascio dovrà contare sempre tante volte quanti sono i particolari aggruppamenti da cui proviene. — Un' osservazione analoga si può fare spesso.

$$\left.\begin{array}{lll}
2(m-1)n = & 1\cdot 2x_1 & +y \\
2\cdot 2(m-2)x_1 = (m-1)(m-2)n & +2\cdot 3x_2 & +(m-2)y \\
\dots\dots\dots & & \\
2(i+1)(m-i-1)x_i = (m-i)(m-i-1)x_{i-1} & +(i+1)(i+2)x_{i+1} & +\binom{m-2}{i}y \\
\dots\dots\dots & & \\
2(k-1)(m-k+1)x_{k-2} = (m-k+2)(m-k+1)x_{k-3} & +(k-1)kx_{k-1} & +\binom{m-2}{k-2}y \\
2k(m-k)x_{k-1} = (m-k+1)(m-k)x_{k-2} & +k(k+1)\left[\binom{m}{k+1}\nu+z\right] & +\binom{m-2}{k-1}y.
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Da esse si trae successivamente:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 = (m-1)n - \frac{1}{2}y \\
x_2 = \binom{m-1}{2}n - \frac{1}{2}(m-2)y \\
\dots\dots\dots \\
x_i = \binom{m-1}{i}n - \frac{1}{2}\binom{m-2}{i-1}y \\
\dots\dots\dots
\end{array}\right\} \quad (1')$$

e per ultima (*):

$$\binom{m}{k+1}\nu + z = \binom{m-1}{k}n - \frac{1}{2}\binom{m-2}{k-1}y, \tag{2}$$

che è appunto la formola cercata, la quale può servire a determinare y in funzione degli altri caratteri n, m, k, ν, z.

Riguardo agli ultimi due converrà tener presente che quando fosse $k=r$, cioè i gruppi dell'involuzione non stessero in spazi inferiori allo spazio di C, si dovrebbe porre $\nu=0$; e che il simbolo z rappresenta il numero di quei gruppi che sono *singolari* pel fatto di contenere $k+1$ punti appartenenti ad un S_{k-1}. Se vi fossero *(eccezionalmente)* dei gruppi più particolari, nei quali un numero $<k+1$ di punti fossero già legati linearmente, il modo come abbiamo proceduto prova che la relazione (2) varrebbe ancora, dando a z il

(*) Direttamente si trarrebbe la (2) dalle (1) moltiplicandole risp. pei fattori $k.(m-2)\dots(m-k)$; $(k-1).(m-3)\dots(m-k)$; ...; $(k-i)i!\,(m-i-2)\dots(m-k)$; ...; $2(k-2)!\,(m-k)$; $(k-1)!$; e poi sommandole e dividendo per $(k+1)!$

significato di una *somma* nella quale entrerebbero con determinati coefficienti i numeri di quei gruppi particolari dell'involuzione. In altri termini si può ritener sempre valida quella formola conservando a z il significato primitivo come numero dei gruppi *singolari* prima nominati, purchè in esso si computino convenientemente, cioè con le debite multiplicità, i gruppi eccezionali suddetti.

Si osservi anche, riandando il ragionamento fatto, che esso non esige che la ∞^1 dei gruppi di m punti su C sia un'involuzione, vale a dire che un punto individui il gruppo che lo contiene. Se ogni punto di C fosse su μ gruppi non vi sarebbe evidentemente altro da modificare che la 1.ª e la 2.ª delle relazioni (1), nelle quali i termini contenenti n dovrebbero essere moltiplicati per μ (sarebbe cioè da porsi $x_0 = n\mu$). Dunque anche nelle (1') e nella (2) vi sarà solo da scrivere $n\mu$ in luogo di n. Ma invece di far ciò, a noi converrà rilevare questo: che la formola (2) vale anche per un'involuzione su una curva C *multipla,* purchè con n s'intenda l'ordine di questa curva tenuto conto della sua multiplicità (cioè moltiplicato per μ nel caso che C sia μ-pla).

51. Introducendo il genere p della curva C ed il genere π dell'involuzione, cioè della ∞^1 di gruppi di m punti di C, noi abbiamo pel numero y dei punti doppi l'espressione (n.° 40):

$$y = 2(p-1) - 2m(\pi - 1), \tag{3}$$

valida anche nel caso che C sia multipla, purchè allora p ne rappresenti il genere come curva multipla.

Dalle (2) e (3) eliminando y si trae la formola generale

$$z = \binom{m-1}{k}(n-k) - \binom{m}{k+1}\nu - \binom{m-2}{k-1}(p - m\pi), \tag{4}$$

nella quale pure converrà ricordare che n e p indicano l'ordine ed il genere della curva C tenuto conto della sua multiplicità.

52. Questa formola (4) è molto importante e dà luogo a vari corollari fecondi. Rileviamo subito il caso particolare che è essenziale per la teoria delle serie lineari, quale sarà svolta nel seguito; cioè quello in cui i gruppi di m punti dell'involuzione si compongono in generale di punti linearmente indipendenti, vale a dire appartengono in generale a spazi S_{m-1}. Sarà allora $k = m - 1$; sicchè la (4) diventa:

$$n - p = \nu - m\pi + m - 1 + z. \tag{5}$$

In particolare se quell'involuzione è *razionale,* ossia è una serie lineare g_m^1 sarà:

$$n - p = \nu + m - 1 + z. \tag{6}$$

53. Quando i gruppi dell'involuzione considerata su C non stiano in generale in spazi inferiori a quello di questa curva, cioè $k = r$, si deve porre (n.° 50) $\nu = 0$. Con ciò la (4) diventa:

$$z = \binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1}(p - m\pi), \tag{7}$$

ed esprime il numero dei gruppi dell'involuzione che contengono $r+1$ punti posti in un iperpiano.

Ora s'imagini che la curva C rappresenti una serie lineare qualunque g_n^r di un ente algebrico di genere p sul quale esiste l'involuzione di grado m e genere π. I gruppi dell'involuzione di C che contengono $r+1$ punti posti in un iperpiano sono i gruppi che hanno $r+1$ punti posti in un gruppo della g_n^r. Dunque la formola (7) dà *il numero dei gruppi di $r+1$ punti dell'ente algebrico di genere p comuni ad una g_n^r* (cioè a gruppi di questa) *e ad un'involuzione di grado m ($> r$) e genere π*: s'intende, nel caso (generale) che il numero di quei gruppi non sia infinito. — Per $\pi = 0$ la (7) diventa:

$$z = \binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1}p, \tag{8}$$

la quale assegnerà *il numero dei gruppi di $r+1$ punti comuni ad una g_n^r ed una g_m^1*. — (*)

Si noti che il teorema ora enunciato relativo alla formola (7) abbraccia a sua volta quello espresso dalla formola più generale (4). Basta applicarlo sostituendo alla g_n^r la g_n^k che sulla curva C è segata dagl'iperpiani passanti per un S_{r-k-1}: allora il numero dei gruppi di $k+1$ punti comuni a quella g_n^k ed all'involuzione di grado m sarà rappresentato da $\binom{m}{k+1}\nu + z$, ove a ν e z si dia di nuovo il significato generale che avevano nel n.° 51.

(*) Nelle *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (n.° 8) il sig. Castelnuovo ritrova per altra via (servendosi della formola data qui al n.° 42) la formola (8). — Nella Nota: *Un'applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche* (Rendic. del Circolo Mat. di Palermo, tom. 3, 1889) egli assegnò più in generale il numero dei gruppi di $r + r'$ punti comuni ad una g_n^r ed una $g_{n'}^{r'}$.

§ 14. Serie complete e curve normali. Serie residue.

54. Un altro teorema fondamentale sulle serie lineari, d'indole più elementare che quello del paragrafo preced., è il seguente: *Se sopra un ente algebrico due serie lineari d'ordine n hanno un gruppo (di n punti) comune, esse son contenute in una stessa serie lineare d'ordine n.*

Il concetto della dimostrazione consiste nel rappresentare l'ente algebrico con due curve, in corrispondenza univoca, imagini delle due serie (*), e quindi con la rigata luogo delle rette congiungenti i punti omologhi di quelle curve: dalla quale poi si deduce una terza curva che rappresenta una serie lineare contenente le due date.

Consideriamo anzitutto il caso di due serie g_n^r, $g_n^{r'}$ prive di punti fissi. Saran rappresentate da due curve (semplici o multiple) γ, γ' d'ordine n, appartenenti risp. ad S_r, $S_{r'}$, e in corrispondenza biunivoca fra loro. Supporremo quei due spazi indipendenti, cioè congiunti da un $S_{r+r'+1}$. Il gruppo di n punti comune alle due serie lineari sarà rappresentato su γ, γ' da due gruppi omologhi di n punti posti risp. in un S_{r-1} ed in un $S_{r'-1}$. Condotto per questi due spazi un iperpiano ($S_{r+r'}$), che non contenga nè l' S_r nè l' $S_{r'}$, esso segherà la rigata d'ordine $2n$ luogo delle congiungenti i punti omologhi di γ, γ' in n generatrici (le congiungenti quei due gruppi omologhi di punti) e poi ancora in una curva direttrice d'ordine n, γ''. Sulla rigata, considerata come imagine dell'ente algebrico (cfr. la seconda nota al n.° 28) le due serie g_n^r, $g_n^{r'}$ (serie di gruppi di generatrici) son segate dagl'iperpiani passanti risp. per $S_{r'}$, S_r: quindi anche sulla curva γ'' le stesse serie (di gruppi di punti) son segate da quegl'iperpiani; e però saran contenute nella serie lineare d'ordine n che è rappresentata da γ'', cioè che è segata su questa curva dal sistema di tutti gl'iperpiani.

Poniamo ora che una almeno delle due serie abbia punti fissi. Possiam supporre per brevità che nessuno di questi sia fisso per entrambe: altrimenti, dimostrato il teorema per le serie che si avrebbero dalle date astraendo dai punti fissi comuni, rimarrebbe evidentemente provato anche per le serie primitive. Siano k i punti fissi della serie g_n^r e k' quelli della $g_n^{r'}$. Le due serie saran rappresentate da una curva γ d'ordine $n-k$ di S_r con k punti fissi A

(*) Le serie si posson supporre entrambe infinite: in caso opposto la proposizione sarebbe evidente.

e da una curva γ' d'ordine $n-k'$ di $S_{r'}$ (spazio che assumeremo di nuovo indipendente da S_r) con k' punti fissi B'; gli omologhi A' dei punti A su γ' saran distinti dai punti B', e così gli omologhi B su γ dei B' saran distinti dai punti A. Il gruppo di n punti che si suppon comune alle due date serie lineari si comporrà dei $k+k'$ punti fissi rispettivi e di altri $n-k-k'$ punti: siano C e C' i punti imagini di questi ultimi risp. su γ e γ'; per essere quel gruppo di n punti nella $g_n^{r'}$ dovranno i punti B e C, che coi punti fissi A ne costituiscono l'imagine su γ, essere in un S_{r-1}, e similmente i punti A' e C' di γ' saranno in un $S_{r'-1}$. Indichiamo risp. con a, b, c le rette congiungenti i punti omologhi A e A', B e B', C e C' delle due curve γ e γ', vale a dire le rette che sono imagini dei tre gruppi di punti dell'ente algebrico sulla rigata luogo delle rette congiungenti i punti omologhi di γ, γ'. Questa rigata è d'ordine $2n-k-k'$; e su essa la serie g_n^r si compone delle k generatrici a fisse insieme coi gruppi di $n-k$ generatrici variabili poste negl'iperpiani che passano per $S_{r'}$; e la serie $g_n^{r'}$ si compone delle k' generatrici b fisse insieme coi gruppi di $n-k'$ generatrici degl'iperpiani passanti per S_r. Ora un iperpiano passante per l' S_{r-1} dei punti B e C e per l' $S_{r'-1}$ degli A' e C' (ma non per S_r nè per $S_{r'}$) sega la rigata secondo le $n-k-k'$ generatrici c e secondo una curva direttrice d'ordine n, γ'', passante per i punti B ed A'; e su questa nuova curva quelle due serie saranno segate completamente da quegl'iperpiani passanti risp. per $S_{r'}$ (e quindi pei punti fissi A') e per S_r (e quindi pei punti fissi B): sicchè le serie g_n^r, $g_n^{r'}$ staranno nella serie d'ordine n che su γ'' è segata da tutti gl'iperpiani (*).

55. Dal teorema fondamentale così dimostrato seguono immediatamente corollari importanti.

(*) Sapendo che le due serie son contenute in una stessa serie lineare si può subito, grazie ad un'osservazione fatta al n.° 25 intorno alle serie lineari contenute in una serie lineare, e basandosi su una nota proposizione relativa alle intersezioni di spazi, ecc., precisare di più il nostro teorema così: Se una g_n^r ed una $g_n^{r'}$ hanno comuni *precisamente* ∞^i gruppi di n punti, cioè una g_n^i $(i \geqq 0)$, e son contenute in una serie d'ordine n e dimensione t e *non minore* di t, si ha $t+i=r+r'$.

Qui rileviamo come lo stesso concetto che ha servito a dimostrare il teorema fondamentale di questo n.° 54 possa servire per stabilire l'analogo teorema relativo a due serie lineari di M_{k-1} sopra una M_k, qualunque sia k: si ricorrerà cioè ancora alla varietà delle rette congiungenti i punti omologhi di due M_k in corrispondenza biunivoca fra loro. Così pure le conseguenze che da quel teorema fondamentale trarremo nei n.[i] successivi hanno le analoghe nella geometria su una M_k qualunque.

Se due serie lineari d'ordine n hanno un gruppo (di n punti) comune, o l'una di esse starà nell'altra, o entrambe staranno in una serie lineare d'ordine n di maggior dimensione. Segue che se chiamiamo (come al n.° 26) *completa* (o *normale*) una serie lineare d'ordine n quando *non* sta in una (dello stesso ordine e) di maggior dimensione, e *parziale* od *incompleta* nel caso opposto; sarà certo parziale una serie che abbia comune un gruppo con un'altra senza contenerla tutta quanta; in altri termini *una serie completa contiene ogni serie con cui abbia un gruppo comune.* In particolare *due serie complete aventi un gruppo comune* (e quindi dello stesso ordine) *coincidono.*

Se un gruppo di n punti, o più in generale una serie g_n, non costituisce una serie completa (in particolare una g_n^0 completa), starà in serie lineari d'ordine n di maggior dimensione. Ma siccome questa dimensione non può essere maggiore di n (n.° 29), fra quelle serie contenenti la data ve ne sarà *almeno* una che non è più contenuta in una serie di maggior dimensione, ossia che è completa. La proposizione ultima ci prova che ve ne sarà *una* sola. Vale a dire *è ben determinata ed unica la serie completa d'ordine n che contiene un dato gruppo di n punti, o una data serie lineare d'ordine n:* s'intende che quella serie completa potrebbe anche ridursi ad un sol gruppo, cioè ad una g_n^0.

56. *Se una serie lineare g_n^r è completa, è tale anche la serie dei resti* (se ne esistono) *di k punti fissi rispetto ad essa:* vale a dire se k punti fissi A stanno precisamente in ∞^ρ gruppi ($\rho \geqq 0$) cioè in una g_n^ρ della g_n^r (sicchè $\rho \geqq r-k$), la serie lineare g_{n-k}^ρ costituita da quei gruppi dai quali si tolgano i k punti A è completa (*). Invero, posto che quest'ultima serie stia in una $g_{n-k}^{\rho'}$, ove $\rho' \geqq \rho$, aggiungendo a questa i k punti A come punti fissi si avrà una $g_n^{\rho'}$ che ha comune colla g_n^r la g_n^ρ su nominata; e quindi, poichè la g_n^r si suppone completa, essa conterrà (n.° 55) la $g_n^{\rho'}$. Dunque nella g_n^r vi sono $\infty^{\rho'}$ gruppi contenenti i punti A, sicchè $\rho' \leqq \rho$; onde $\rho' = \rho$: sicchè la serie g_{n-k}^ρ non è contenuta in una di maggior dimensione.

Non è escluso che sia $\rho = r$, cioè che i k punti A sian comuni a *tutti* i gruppi della serie data.

57. I teoremi precedenti (n.[i] 55 e 56) si possono enunciare in altro modo,

(*) Debbo quest'osservazione, come pure l'applicazione che ne faremo al n.° 77, al sig. Castelnuovo; il quale nell'autunno del 1890 mi comunicò gentilmente, per uso del mio corso, qualche aggiunta o perfezionamento alle sue *Ricerche di geometria sulle curve algebriche.*

considerando in luogo delle serie lineari le curve imagini, le quali son *normali* se le serie son complete (n.° 26). Avremo (*):

Due curve d'ordine n in corrispondenza biunivoca tale che ad una particolare sezione iperplanare (gruppo di n punti) dell'una corrisponda una sezione iperplanare dell'altra son projezioni di una stessa curva d'ordine n. Se le due curve date son normali, la corrispondenza nominata sarà projettiva (una collineazione).

Le curve normali d'ordine n di cui una data curva qualsiasi del medesimo ordine è projezione sono tutte projettive (collineari) fra loro. —

Projettando una curva normale d'ordine n appartenente ad S_r da k suoi punti qualunque, cioè dallo spazio che li congiunge (la cui dimensione sarà $h \leq k-1$), sopra uno spazio duale di questo (cioè di dimensione $\rho = r - h - 1$), si ottiene una curva (d'ordine $n-k$) normale.

58. Sia data sull'ente algebrico una serie lineare completa g_N^R. I resti (supposto che ne esistano) di un dato gruppo di n punti G_n rispetto ad essa formano (n.° 56) una serie lineare completa $g_{n'}^{r'}$, ove $n + n' = N$. E similmente i resti di *qualunque* gruppo $G'_{n'}$ di quest'ultima serie rispetto alla g_N^R formeranno una g_n^r completa; la quale dovrà contenere G_n e però sarà sempre *la* serie completa individuata (n.° 55) da questo gruppo. Se ora consideriamo i resti (sempre rispetto alla g_N^R) di un altro *qualunque* gruppo di questa g_n^r, essi formano una $g_{n'}$ completa che contiene il gruppo $G'_{n'}$ e quindi coincide colla $g_{n'}^{r'}$. Dunque non solo ogni gruppo della g_n^r ed ogni gruppo della $g_{n'}^{r'}$ saranno resti l'un dell'altro rispetto alla g_N^R; ma ciascuna delle due serie abbraccia *tutti* i resti di un gruppo qualunque dell'altra, rispetto alla g_N^R. Le due serie g_n^r, $g_{n'}^{r'}$ si dicono *residue* rispetto alla g_N^R. Fra gli ordini passa la relazione $n + n' = N$; e quanto alle dimensioni quella di ciascuna delle due serie dà l'indice d'infinità dei gruppi della g_N^R che contengono un dato gruppo qualsiasi dell'altra.

Se la g_N^R è rappresentata da una curva normale d'ordine N di S_R, abbiamo che su questa curva i gruppi della g_n^r appartengono a spazi $S_{R-r'-1}$ e

(*) Si noti che queste proposizioni, e così altre che incontreremo in seguito, valgono anche, pel modo come son dedotte (cioè trasportando risultati relativi a serie lineari, che possono essere *composte*), per *curve multiple.* Così quando si projetta una curva su uno spazio inferiore può darsi che essa sia projettata *più volte,* cioè che la projezione sia una curva multipla. Le nostre proposizioni varranno anche allora, purchè, al solito, si tenga il debito conto della multiplicità nel valutar l'ordine della curva, nella considerazione delle corrispondenze, ecc.

quelli della g_n^r a spazi S_{R-r-1}, e che due spazi determinati risp. da gruppi delle due serie stanno sempre in un iperpiano S_{R-1}.

59. Una questione inversa, almeno in parte, a quella delle *serie residue* è quella della *serie somma* (*). Siano date sull'ente algebrico due serie lineari qualunque g_n^r, $g_{n'}^{r'}$. Presi in esse risp. due gruppi G_n, $G'_{n'}$, si consideri la serie completa g_N^R d'ordine $N = n + n'$ che è individuata dal gruppo *somma* (cioè insieme) di quei due. Rispetto a questa nuova serie saranno residue (n.° 58) le due serie complete d'ordini n, n' individuate risp. dai gruppi G_n, $G'_{n'}$: serie che contengono risp. g_n^r e $g_{n'}^{r'}$. Dunque ogni gruppo di g_n^r ed ogni gruppo di $g_{n'}^{r'}$ presi insieme dànno sempre un gruppo di N punti della g_N^R. *Esiste quindi una serie lineare d'ordine $N = n + n'$ che contiene tutti i gruppi somma di un gruppo della g_n^r con un gruppo della $g_{n'}^{r'}$.* — La minima serie lineare d'ordine N così fatta è quella che il sig. Castelnuovo (loc. cit.) chiama *serie somma* di g_n^r e $g_{n'}^{r'}$. I gruppi somme dei gruppi di queste due sono $\infty^{r+r'}$: ma essi non costituiscono in generale una serie lineare. La dimensione della serie somma sarà dunque $\geqq r + r'$.

Dalla definizione della somma di *due* serie si passa subito a quella della somma di *più* serie lineari, come pure delle *serie multiple* di una serie lineare data: nozione fondamentale per alcune importanti ricerche (**).

CAPITOLO III.

§ 15. Le serie segate su una curva piana dalle curve aggiunte.

60. Nel Cap. preced. abbiamo studiato delle proprietà generali delle serie lineari, indipendentemente dalla costruzione effettiva di queste. Per tale costruzione, da cui poi faremo discendere l'esistenza di serie con dati caratteri, conviene ora che ricorriamo alla rappresentazione dell'ente algebrico con una *curva piana semplice.* Questa curva potremo supporla dotata di sole *singolarità or-*

(*) Cfr. Castelnuovo: *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica* (Rendic. Circ. mat. di Palermo, 1893), n.° 1.

(**) V. specialmente il lavoro citato nella nota preced. — Cfr. anche, per la questione del *massimo genere* di un ente algebrico contenente una g_n^r (questione che si tratta appunto considerando i successivi multipli di questa serie) l'ultima parte delle *Ricerche,* ecc., del Castelnuovo è la Nota del prof. Bertini: *Intorno ad alcuni teoremi della geometria sopra una curva algebrica* (Atti della R. Acc. di Torino, tom. 26, 1890).

dinarie (punti multipli a tangenti distinte); poichè, se già non fosse, si può render tale con un numero finito di trasformazioni quadratiche del piano (*).

Indichiamo con s in generale la multiplicità di un punto singolare per la curva piana γ d'ordine m (cosicchè le somme rispetto ad s che avremo da considerare si estenderanno a tutti i punti multipli di γ). Dicesi *curva aggiunta* (**) di γ ogni curva che in ciascun punto multiplo, s-plo, di γ abbia la multiplicità $s-1$ almeno. È chiaro che una serie lineare segata su γ da un sistema lineare *qualunque* di curve si può intendere staccata da un sistema *di curve aggiunte,* bastando aggiungere a tutte le curve del sistema primitivo una curva aggiunta fissa (ad es. la 1.ª polare di un punto rispetto a γ) per mutarlo in un sistema di curve aggiunte, che all'infuori di nuovi punti fissi segherà su γ la serie lineare primitiva.

61. Le curve aggiunte di γ d'un dato ordine l (abbastanza grande) formano un sistema lineare che sega su γ una serie lineare g_n^r di cui vogliamo determinare (per quanto si può) i caratteri.

Anzitutto la dimensione h di quel sistema lineare di curve aggiunte sarà:

$$h \geqq \frac{l(l+3)}{2} - \Sigma \frac{s(s-1)}{2}, \tag{1}$$

ossia, introducendo il genere p di γ che vale (n.° 38)

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \Sigma \frac{s(s-1)}{2}, \tag{2}$$

sarà:

$$h \geqq \frac{l(l+3)}{2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2} + p. \tag{1'}$$

Nella (1), e quindi anche nella (1'), il segno d'uguaglianza varrebbe se le condizioni che i singoli punti multipli di γ impongono alle aggiunte d'ordine l, pel fatto che in un punto s-plo di γ queste curve devon avere un punto

(*) V. i lavori citati al n.° 38 del sig. Noether (Math. Ann., tom. 9 e 23); e del sig. Bertini (la cui dimostrazione geometrica è di una notevole semplicità).

Si potrebbe anzi — ma ciò non occorre per noi — riferire biunivocamente l'ente algebrico o la curva piana ad una curva piana che non abbia altri punti multipli che *nodi.* Anche di questa proposizione è stata data una dimostrazione geometrica semplicissima dal sig. Bertini (*Dimostrazione di un teorema sulla trasformazione delle curve algebriche,* Rivista di Mat., tom. 1, 1891).

(**) Cfr., anche pel seguito, la Memoria Brill-Noether.

$(s-1)$-plo, fossero tutte distinte $\left(\text{e quindi in numero di } \Sigma \frac{s(s-1)}{2}\right)$. In caso opposto la differenza fra il 1.° membro h ed il 2.° di quelle disuguaglianze esprimerà quante fra quelle $\left(\Sigma \frac{s(s-1)}{2}\right)$ condizioni sono conseguenza delle rimanenti (indipendenti fra loro). — Ponendo

$$l = m - 3 + \alpha,$$

la (1') si potrà anche scrivere così:

$$h \geqq m\alpha + \frac{\alpha(\alpha-3)}{2} + p - 1. \qquad (1'')$$

Se $l < m$, ossia $\alpha < 3$, non vi saranno nel detto sistema lineare d'ordine l curve che contengano γ; sicchè la dimensione r della serie segata su γ da quel sistema sarà (n.° 13) la stessa che quella del sistema, vale a dire $r = h$. Se invece $l \geqq m$, ossia $\alpha \geqq 3$, vi saranno curve aggiunte d'ordine l, cioè curve del sistema, spezzate nella curva γ ed in una curva (qualunque) d'ordine $l - m$, ossia $\alpha - 3$; e saranno (quante le curve piane di tal ordine, cioè) ∞^t, ove $t = \frac{\alpha(\alpha-3)}{2}$. Dunque (n.° cit.) la dimensione r della serie lineare sarà in tal caso

$$r = h - t - 1,$$

espressione che coincide con $r = h$ per $\alpha = 1, 2$, cioè per $l = m - 2,\ m - 1$. In conseguenza introducendo r nella (1'') potremo dire che: *la dimensione r della serie lineare segata su γ dalle curve aggiunte d'ordine $l = m - 3 + \alpha$, quando quest'ordine è $l \leqq m - 3$ è*

$$r \geqq m\alpha + \frac{\alpha(\alpha-3)}{2} + p - 1, \qquad (3\,a)$$

e quando invece è $l > m - 3$

$$r \geqq m\alpha + p - 2. \qquad (3\,b)$$

Quanto poi all'*ordine n della serie medesima* si ha sempre evidentemente (togliendo le intersezioni che cadono necessariamente nei punti multipli di γ):

$$n = ml - \Sigma s(s-1);$$

ossia, introducendo p con la (2):

$$n = m\alpha + 2p - 2. \qquad (4)$$

62. Dalle (3 a), (3 b) e (4) segue che per la g_n^r segata su γ dal sistema di tutte le sue aggiunte d'ordine l si ha:

$$n-r<p \quad \text{se} \quad l \leqq m-3 \tag{5 a}$$

$$n-r \leqq p \quad \text{se} \quad l>m-3. \tag{5 b}$$

63. Dall'esistenza che così è provata di serie lineari g_n^r per le quali $n-r \leqq p$, osservando (n.° 29) che $n-r \geqq 0$, si trae $p \geqq 0$: ossia *il genere di un ente algebrico (irriduttibile) è sempre* $\geqq 0$.

Se poi è precisamente $p=0$, si trae $n-r=0$, e quindi (n.° cit.) che γ è razionale: proposizione inversa di quella del n.° 34. Dunque *gli enti algebrici di genere zero sono gli enti razionali.*

64. La formola (1″) per h prova che *curve aggiunte a* γ *di un dato ordine* $l>m-3$ *esistono sempre* (se $m>2$).

Quanto alle *aggiunte d'ordine* $m-3$, per esse quella formola (1″) dà $h \geqq p-1$, sicchè *ne esisteranno certo* se $p \geqq 1$. Per $p=0$ *non ve ne sono,* giacchè altrimenti renderebbero negativo il valore di n dato dalla (4). Per $p=1$ ve n'è *una sola,* perchè la (4) dà $n=0$, e però quelle aggiunte (cioè i gruppi che esse segano su γ) non posson essere infinite. — In generale le curve aggiunte d'ordine $m-3$, o, come diremo più brevemente (secondo l'uso), « le φ » di γ segano su questa curva una serie lineare d'ordine $2p-2$ e di dimensione $r \geqq p-1$; la quale, se $p>1$, sarà rappresentata da una particolare curva (d'ordine $2p-2$ appartenente ad S_r ove $r \geqq p-1$). Vedremo poi che è precisamente $r=p-1$.

65. *Ogni serie lineare* $g_{n'}^{r'}$ si può staccare su γ mediante curve aggiunte di un certo ordine l (n.° 60): vale a dire i suoi gruppi sono *resti* di certi k punti fissi rispetto alla g_n^r che è segata su γ da *tutte* le aggiunte d'ordine l. Si ha dunque:

$$n'=n-k;$$

e, supposto che *la* $g_{n'}^{r'}$ *sia completa,* e quindi comprenda *tutti* quei resti,

$$r' \geqq r-k.$$

Dunque:

$$n'-r' \leqq n-r.$$

In base al n.° 62 otteniamo così la seguente proposizione. *Per ogni* g_n^r *completa di un ente algebrico di genere* p *si ha:*

$$n-r \leqq p, \quad \textit{ossia} \quad r \geqq n-p;$$

e se poi, riferito l'ente ad una curva piana d'ordine m, la serie si può staccare su questa mediante un sistema lineare di curve φ *(aggiunte d'ordine* $m-3$), *sarà:*

$$n - r < p, \quad \textit{ossia} \quad r > n - p.$$

Al n.° 55 abbiam visto che un gruppo di n punti dell'ente algebrico, od in generale una serie lineare d'ordine n, sta sempre in una serie completa ben determinata. Ora potremo aggiungere che la dimensione di questa serie completa è $\geqq n-p$; sicchè la serie completa d'ordine n determinata da un dato gruppo di n punti sarà certo infinita quando $n > p$.

Il teorema precedente ci dà pure che: *per le curve normali d'ordine* n *e genere* p *appartenenti ad* S_r *si ha* $n - r \leqq p$, *ossia* $r \geqq n - p$.

Sia che ci riferiamo alle g_n^r *complete*, ovvero alle curve d'ordine n di S_r *normali*, avremo in particolare che: se $p = 0$ sarà $r = n$; se $p = 1$ sarà $r = n - 1$, non potendo essere $r > n - 1$, cioè $r = n$, altrimenti (n.° 29) l'ente sarebbe razionale.

66. Una serie lineare d'ordine n e dimensione $> n - p$ presenta, come vedremo, delle particolarità che riguardano anche i suoi gruppi, e quindi le serie lineari minori d'ordine n in essa contenute. Perciò noi chiameremo *speciali* tutte le serie lineari d'ordine n (in particolare i gruppi di n punti) contenute in serie d'ordine n e dimensione $> n - p$. Se una serie speciale è completa, la sua dimensione sarà certo $> n - p$.

I resti di k punti qualunque rispetto ad una serie speciale completa g_n^r (anche se fra quei k punti vi sono dei punti fissi di questa) formano una serie completa (n.° 56), che è ancora speciale, perchè d'ordine $n - k$ e dimensione $\geqq r - k > n - k - p$. Ne deriva che se una serie speciale (completa o no) ha punti fissi, sarà speciale anche la serie che rimane astraendo da questi.

Diremo anche *speciali* le curve imagini di serie speciali. Le curve speciali d'ordine n e genere p saranno dunque quelle che hanno spazi normali di dimensione $> n - p$.

Per una g_n^r *completa non speciale,* od una curva *normale non speciale* d'ordine n appartenente ad S_r, sarà $r = n - p$. —

Per $p = 0$ e $p = 1$ non vi sono serie lineari speciali o curve speciali (v. la fine del n.° 65). Per $p > 1$ invece abbiam visto (n.° cit.) che si ottengono serie lineari speciali staccandole su una curva piana mediante sistemi lineari di curve φ. Dimostreremo presto (§ 17) che in questo modo si posson ottenere *tutte* le serie speciali. — Prima però sarà utile che esaminiamo la cosa per una classe speciale di enti: quelli *iperellittici.*

§ 16. Digressione sugli enti ellittici ed iperellittici.

67. Gli enti algebrici sui quali esiste una serie lineare g_2^1, vale a dire (n.° 30) un'involuzione razionale di 2.° grado, diconsi *iperellittici* (*). Chiamando λ il parametro (o funzione razionale dell'ente algebrico) che è in corrispondenza biunivoca con le singole coppie dell'involuzione (parametro che è determinato, a meno di una trasformazione lineare), la corrispondenza (1, 2) che si avrà fra λ ed i corrispondenti punti dell'ente trae (n.° 22) che le coordinate di questi punti si potranno esprimere sotto la forma:

$$x_i = A_i(\lambda) + B_i(\lambda)\sqrt{R(\lambda)}, \tag{1}$$

essendo le A_i, B_i ed R polinomi in λ. Si può supporre che $R(\lambda)$ non abbia radici doppie: allora l'equazione

$$R(\lambda) = 0, \tag{2}$$

darà gli elementi di diramazione della g_2^1 ossia i punti doppi di questa. Se l'ente algebrico ha il genere p, i punti doppi della g_2^1 sono (n.° 33) $2p+2$; e tale sarà dunque il grado del polinomio $R(\lambda)$, supposto che $\lambda = \infty$ non corrisponda ad un elemento di diramazione, nel qual caso invece il grado di R si ridurrebbe a $2p+1$.

Viceversa sian date comunque delle espressioni della forma (1). Da esse sarà definito un ente iperellittico nel quale le singole coppie di una g_2^1 (coppie provenienti dalla bivalenza del radicale quadratico che compare in quelle espressioni) corrispondono biunivocamente ai valori del parametro λ; purchè però, nel caso particolare in cui un gruppo generico di valori delle x_i si ottenga dalle (1) non per *un* sol valore di λ, ma per m valori, si consideri come *punto dell'ente* non il solo insieme delle x_i ma l'insieme di queste e di *un* valor corrispondente di λ (cioè si conti m volte, ossia come m-plo, l'ente descritto dal gruppo delle x_i) (**).

(*) Ad esempio per $p=2$ esiste sempre una g_2^1: la serie staccata sulla curva piana dalle φ (v. n.° 64); sicchè *ogni ente di genere 2 è iperellittico.*

(**) Del resto è facile vedere che nel caso particolare in cui le (1) definiscano non una corrispondenza (1, 2) ma invece una corrispondenza (m, 2), con $m>1$, fra il parametro λ (ossia un ente razionale) ed il punto x di un ente algebrico, questo (non più contato m volte, come sopra, ma riguardato come semplice) sarà *razionale:* vale a dire è razionale un aggruppamento dei punti λ (di un ente razionale) ad m ad m quando ogni

Dalla rappresentazione (1) degli enti iperellittici segue subito (n.° 22) che per l'equivalenza di due enti iperellittici di genere p, cioè perchè si possa stabilire fra essi una corrispondenza biunivoca, è *sufficiente* che entro le rispettive involuzioni g_2^1 abbiano gli stessi birapporti i $2p+2$ elementi di diramazione, cioè che abbiano gli stessi birapporti le radici delle corrispondenti equazioni (2). E questa condizione è anche *necessaria* se $p>1$, perchè allora ognuno dei due enti contiene una sola g_2^1 (n.° 35), e la corrispondenza biunivoca fra gli enti dovrà pure riferire biunivocamente le loro g_2^1 facendo corrispondere gli elementi di diramazione. Di qui, e dalla possibilità di scegliere *ad arbitrio* nelle (1) il polinomio $R(\lambda)$ di grado $2p+2$, segue che *i moduli (indipendenti) dell'ente iperellittico di genere $p>1$ sono* $2p-1$: i birapporti indipendenti dei $2p+2$ elementi di diramazione della g_2^1. — Se poi si suppone che i due enti iperellittici a cui si riferivano le osservazioni precedenti coincidano, si vede che condizione necessaria e sufficiente perchè *un ente iperellittico di genere $p>1$ ammetta una corrispondenza biunivoca fra i suoi punti* diversa da quella che è data dalla g_2^1 è che entro questa serie si possa fare una trasformazione biunivoca, vale a dire bilineare, che muti in sè il gruppo dei $2p+2$ elementi di diramazione; ossia che ammetta una trasformazione bilineare in sè l'equazione (2). Ecc. ecc.

68. L'ente algebrico di genere $p=1$ dicesi *ellittico*. Esso contiene (pel n.° 65) infinite g_2^1 (serie complete), le quali son tali che da una coppia di punti dell'ente è individuata una tal serie: in particolare sarà individuata una g_2^1 dandone un punto doppio (dei 4 che essa ha). Ora se A, A' sono punti doppi di due g_2^1, la corrispondenza univoca involutoria che è determinata fra i punti dell'ente che forman coppie in quella g_2^1 che contiene la coppia AA' muterà l'una nell'altra quelle prime due g_2^1: donde segue che i birapporti delle due quaterne dei loro elementi di diramazione sono uguali. Dunque le infinite g_2^1 di un ente ellittico hanno le quaterne dei loro elementi di diramazione

---

punto sta in 2 gruppi dell'aggruppamento. Invero rappresentando λ sui punti di una curva razionale normale d'ordine m di S_m, quei gruppi di m punti saranno segati su quella curva da una ∞^1 d'iperpiani tale che per ogni punto della curva (e quindi di S_m) passano 2 iperpiani: questa varietà sarà dunque di 2.ª classe (l'insieme degl'iperpiani tangenti di un cono di 2.° ordine); e quindi *razionale.*

Quest'osservazione (il cui sviluppo è in qualche relazione col n.° 23) è il risultato di una conversazione avuta col sig. ENRIQUES. il quale pure rilevò con me che essa si può notevolmente estendere.

tutte projettive, cioè con lo stesso birapporto: e questo dicesi *birapporto dell' ente ellittico*.

Ciò premesso, il ragionamento che si faceva al n.° prec. per $p > 1$ si potrà ancora applicare al caso di $p = 1$. Avremo di nuovo che condizione non solo *sufficiente*, ma anche *necessaria* perchè fra due enti ellittici si possa stabilire una corrispondenza biunivoca (e quindi infinite) è che essi abbiano lo stesso birapporto. Questo è dunque *il modulo* di un ente ellittico. Vale la formola $2p - 1$ anche per $p = 1$.

69. Possiam determinare facilmente nel caso dell' ente iperellittico di genere $p > 1$ la costituzione delle *serie speciali* (n.° 66: come ivi notammo le serie speciali esistono solo per $p > 1$).

Abbiasi su quell'ente una serie lineare g_n^r priva di punti fissi, la quale non sia composta mediante la serie g_2^1. Sarà rappresentata da una curva d'ordine n di S_r, semplice o multipla, ma tale sempre che le coppie della g_2^1 son rappresentate su essa da coppie di punti essenzialmente distinti, eccetto solo i $2p + 2$ punti doppi della g_2^1. La rigata delle congiungenti queste coppie di punti sarà dunque (applicando il principio di corrispondenza ad un fascio d'iperpiani projettanti le coppie stesse; cfr. del resto la prima formola del n.° 50) d'ordine

$$\frac{1}{2}[2n - (2p + 2)],$$

ossia $n - p - 1$. Ora siccome questa rigata appartiene ad S_r il suo ordine dev'essere $\geqq r - 1$. Dunque:

$$n - p - 1 \geqq r - 1, \quad \text{ossia} \quad r \leqq n - p \ (*).$$

Ma una serie speciale d'ordine n o ha dimensione $> n - p$, o è contenuta in una serie di tal dimensione. Dunque *sull' ente iperellittico di genere p una serie lineare speciale priva di punti fissi è necessariamente composta mediante la g_2^1*: e quindi, se si tratta di una g_n^r, essa non è altro che un'involuzione di dimensione r e di grado $\frac{n}{2}$ entro l'ente razionale che ha per elementi le coppie della g_2^1.

(*) Segue che una curva *semplice* iperellittica di genere p ha sempre l'ordine ($\geqq p + r$ se r è la dimensione dello spazio a cui essa appartiene, e quindi) $\geqq p + 2$; e che se il suo ordine è precisamente $p + 2$ la curva è piana e le rette contenenti le coppie della g_2^1 formano una rigata di 1.° grado, ossia un fascio, cioè concorrono in un punto il quale dunque sarà multiplo secondo p per la curva. Se la curva è sghemba ed il suo ordine ha il valor minimo $p + 3$, essa starà su una quadrica; ecc.

Se una serie lineare g_n^r così composta è *completa,* essa deve abbracciare *tutti* i gruppi di $\frac{n}{2}$ elementi di quest'ente razionale, cioè dev'essere $r = \frac{n}{2}$,

$$n = 2r. \tag{3}$$

E riprendendo l'ipotesi che sia speciale, e quindi (perchè completa)

$$r > n - p, \tag{4}$$

dalla (3) e da questa si trae:

$$r \leq p - 1, \qquad n \leq 2p - 2 \text{ (*)}. \tag{5}$$

Queste relazioni (5), le quali *limitano la dimensione e l'ordine delle serie speciali,* varranno poi anche nel caso che queste non siano complete; perchè valgono per le serie complete (dello stess'ordine e di maggior dimensione) che le contengono.

Possiamo applicarle subito alla serie lineare speciale che su una curva piana iperellittica di genere p è segata dalle φ: serie lineare che abbiam visto (n.° 64) essere d'ordine $n = 2p - 2$ e dimensione $r \geq p - 1$. Da quest'ultima relazione confrontata con la prima delle (5) si deduce che è precisamente $r = p - 1$. Quella stessa (5), oppure la (3), ci prova che la detta serie non è contenuta in una di pari ordine e maggior dimensione: vale a dire che la serie è completa. Inoltre essa non ha punti fissi, perchè altrimenti la serie che si avrebbe prescindendo da questi dovrebbe ancora verificare la (3) e quindi avere l'ordine $2p - 2$. Si vede dunque, nel caso iperellittico, che le φ sono precisamente ∞^{p-1} e staccano sulla curva fondamentale una serie lineare completa priva di punti fissi: la quale è composta con la g_2^1, vale a dire non è altro che *la* g_{2p-2}^{p-1} *costituita da tutti gli* ∞^{p-1} *gruppi di* $p - 1$ *coppie della* g_2^1.

§ 17. Le serie speciali sopra un ente qualunque.

70. Il procedimento che abbiam seguito nel n.° prec. per gli enti iperellittici si può estendere ad enti algebrici qualunque: solo, in luogo della rigata costituita dalle rette congiungenti le coppie di punti della g_2^1 su una curva

(*) Volendo considerare anche le serie *non speciali* complete composte con la g_2^1, per esse si avrà in luogo della (4): $r = n - p$; e quindi combinando con la (3) si ha, invece delle (5): $r = p$, $n = 2p$.

iperellittica, si dovrà considerare la varietà degli spazi che contengono i gruppi di una g_m^1 sopra una curva qualunque, ricorrendo ad una formola generale del § 13.

Suppongasi dunque che sull'ente algebrico di genere p esistano simultaneamente due serie g_n^r, g_m^1 prive di punti fissi, tali che sulla curva C (semplice o multipla) d'ordine n di S_r imagine della g_n^r i gruppi della g_m^1 appartengano in generale a spazi S_{m-1}, cioè si compongano di punti linearmente indipendenti (sicchè $m-1 \leq r$). Abbiamo allora (n.° 52):

$$n-p=\nu+m-1+z; \tag{1}$$

ove nel caso di $m-1=r$ si deve porre $\nu=0$, mentre quando $m-1<r$ il simbolo ν rappresenta l'ordine della varietà di dimensione m costituita dagli ∞^1 spazi S_{m-1}. Ora la massima dimensione che possa avere lo spazio cui appartiene una varietà irriduttibile di dimensione m e d'ordine ν è appunto, come si sa, $\nu+m-1$. Sarà dunque:

$$\nu+m-1 \geq r,$$

relazione valida anche nel primo caso. Si ha poi sempre $z \geq 0$. In conseguenza la formola fondamentale (1) ci dà:

$$n-p \geq r.$$

Segue che *quando $n-r<p$ i gruppi di punti di una g_m^1 sopra la curva di genere p, ordine n, appartenente ad S_r appartengono a spazi di dimensione $\leq m-2$* (*).

71. Abbiasi ora sulla stessa curva C rappresentante la g_n^r, sempre coll'ipotesi $n-r<p$, una serie lineare qualunque g_Q^q: dimostreremo che i suoi gruppi G_Q appartengono a spazi di dimensione $\leq Q-q-1$. Invero se di un gruppo G_Q di quella serie si fissano $q-1$ punti generici, i rimanenti

(*) Così sopra una curva di genere p dello spazio ordinario, la quale abbia l'ordine $<p+3$ se è sghemba, $<p+2$ se è piana, le terne di punti di una g_3^1 stanno su rette (formanti una rigata razionale); ecc. —

Se si applica la formola più generale del n.° 52, relativa ad un'involuzione di grado m e di genere qualunque π, anzi che quella sopra adoperata che si riferisce al caso di $\pi=0$, si avrà il seguente risultato più generale: *quando $n-r<p-m\pi$ i gruppi di punti di un'involuzione di grado m e genere π sopra una curva d'ordine n e genere p appartenente ad S_r stanno in spazi di dimensione $\leq m-2$*. V. Castelnuovo: *Alcune osservazioni sopra le serie irrazionali di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1891).

$Q-q+1$ formano un gruppo di una serie lineare ∞^1; e quindi, per la proposizione precedente (n.° 70), appartengono ad un $S_{Q-q-1-\delta}$, ove $\delta \geqq 0$. Se potesse il numero δ mutare con la scelta dei primi $q-1$ punti entro al G_Q, si prenda per δ il minimo valor possibile. Indi fra quei $Q-q+1$ punti che appartengono all' $S_{Q-q-1-\delta}$ se ne prendano $Q-q$ tali che anch'essi determinino questo spazio, cioè non stiano in uno spazio minore (cosa che si vede subito esser possibile). Allora ogni altro punto di G_Q insieme con quei $Q-q$ ne darà $Q-q+1$ i quali apparterranno ad un $S_{Q-q-1-\delta'}$ con $\delta' \geqq \delta$, e questo spazio dovrà coincidere con quello, di dimensione non minore, determinato dai $Q-q$ punti. Dunque quest'ultimo spazio, $S_{Q-q-1-\delta}$, contiene tutti i punti del gruppo G_Q.

Osservando poi che una curva speciale di genere p e d'ordine n è sempre projezione di una appartenente ad un S_r con $n-r<p$; e d'altra parte che la proposizione dimostrata vale anche nel caso che la g_Q^q avesse punti fissi, come si vede applicandola alla serie che rimarrebbe astraendo da questi; possiamo enunciarla così: *Sopra una curva speciale i gruppi di punti di una serie lineare qualunque g_Q^q stanno in spazi di dimensione $\leqq Q-q-1$.*

È questo il *lemma* da cui dedurremo tutte le principali proprietà delle serie speciali: esso è dovuto al sig. Castelnuovo (*).

72. Anzitutto applichiamolo al caso che la serie g_Q^q non sia altro che la g_n^r *speciale* segata su una curva speciale di genere p, ordine n, di S_r, dagl'iperpiani S_{r-1}. I suoi gruppi dovranno stare in spazi di dimensione $\leqq n-r-1$; mentre *appartengono* a quegli S_{r-1}. Dunque sarà $n-r-1 \geqq r-1$, ossia $n \geqq 2r$. *Per una serie lineare speciale g_n^r, o per una curva speciale d'ordine n di S_r, si ha sempre*

$$n \geqq 2r. \tag{1}$$

Se la serie lineare speciale avesse punti fissi, la (1) varrebbe per quella che se ne otterrebbe astraendo da questi; e quindi, a maggior ragione, per la serie primitiva.

73. Da questo teorema segue che *la serie speciale segata su una curva piana dalle sue φ* (n.° 64) *è precisamente di dimensione $p-1$, coi $2p-2$ punti tutti variabili, e completa.* Poichè, se, astraendo da x punti fissi, essa

(*) *Ricerche di geom.*, ecc., n.° 14. Fra i perfezionamenti di quel lavoro (accennati qui nella nota al n.° 56) pensati poi dal Castelnuovo vi era appunto l'uso più sistematico di quella proposizione.

si riducesse ad una serie speciale d'ordine $2p-2-x$, e di dimensione $p-1+y$, ovvero contenuta in una dello stesso ordine e di tal dimensione; applicando la (1) si avrebbe:

$$2p-2-x \geqq 2(p-1+y),$$

donde:

$$x=0, \qquad y=0.$$

74. La stessa formola (1), applicata ad una serie g_n^r speciale *completa*, per la quale dunque:

$$r \geqq n-p+1,$$

ci dà (sommandola con questa, tal quale, oppure raddoppiata):

$$r \leqq p-1, \qquad n \leqq 2p-2; \tag{2}$$

precisamente come al n.° 69 per gli enti iperellittici. Ed anche qui potremo dire che queste due relazioni (2) varranno pure, a maggior ragione, per le g_n^r speciali *parziali*. Valgon dunque per tutte le g_n^r speciali, o le curve speciali d'ordine n di S_r.

Ne segue che *se $r>p-1$, o se $n>2p-2$, la g_n^r, oppure la curva d'ordine n di S_r, son certo non speciali; sicchè ove la serie sia completa, o la curva sia normale, sarà $r=n-p$.*

Quindi una superficie a sezioni iperplanari di genere p, d'ordine $n>2p-2$, appartiene al più ad S_{n-p+1}; ecc. ecc.

75. Applicando il lemma del n.° 71 ad una g_{2p-2}^{p-1} situata su una curva C di genere $p>1$ e d'ordine $2p-2$ che appartenga ad S_{p-1}, si ha che i suoi gruppi di $2p-2$ punti dovranno stare in spazi S_{p-2}, e però saranno i gruppi di punti segati su C dagl'iperpiani. Ora una curva quale la C si ha come imagine della g_{2p-2}^{p-1} (n.° 73) che sopra la curva piana è segata dalle sue φ: noi vediamo dunque che sull'ente non esisterà un'altra g_{2p-2}^{p-1} che quella rappresentata dalla C. *Sopra un ente algebrico di genere $p>1$ esiste una sola serie g_{2p-2}^{p-1}.*

Questa serie lineare speciale si può chiamare *la serie canonica,* e *canonici* i suoi gruppi di $2p-2$ punti. Così pure si posson chiamare *curve canoniche* del genere p quelle d'ordine $2p-2$ appartenenti ad S_{p-1}: le quali curve, quando rappresentano uno stesso ente algebrico, cioè quando sono in corrispondenza biunivoca, sono fra loro projettive (perchè rappresentano una medesima serie lineare). *La geometria sull'ente algebrico di genere $p>1$* (geometria delle trasformazioni *birazionali* dell'ente) *equivale alla geometria projettiva delle curve canoniche di genere p.*

La rappresentazione algebrica delle curve canoniche si ha, ad es., considerando una curva piana d'ordine m

$$f(x)=0, \tag{3}$$

p sue aggiunte d'ordine $m-3$ linearmente indipendenti $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots \varphi_{p-1}(x)$; e ponendo:

$$y_0 : y_1 : \ldots : y_{p-1} = \varphi_0(x) : \varphi_1(x) : \ldots : \varphi_{p-1}(x), \tag{4}$$

per definire, con la (3), i punti y della curva canonica. Questa viene anche chiamata *la curva delle* φ (*).

Nel caso iperellittico (n.° 69) la serie canonica è *composta* con la g_2^1; la curva canonica si riduce ad una curva *doppia,* la curva (razionale normale) d'ordine $p-1$ di S_{p-1} contata due volte. In nessun altro modo una curva d'ordine $2p-2$ di S_{p-1} può esser *multipla:* e però in un ente che non sia iperellittico la serie canonica non sarà mai composta, le curve canoniche son semplici, le φ che passano per un punto generico della curva piana non passano di conseguenza per altri.

§ 18. Digressione. Applicazione alle curve aggiunte ed al *Restsatz*.

76. Gli ultimi risultati ci permettono di completare quelli del § 15 relativi alle curve aggiunte. Colà avevamo ottenuto (n.° 61) per la dimensione della serie lineare g_n^r segata su una curva piana d'ordine m e genere p da tutte le aggiunte di un dato ordine $m-3+\alpha$ maggiore di $m-3$:

$$r \geqq m\alpha + p - 2, \tag{1}$$

e per l'ordine della serie stessa:

$$n = m\alpha + 2p - 2. \tag{2}$$

Poichè quest'ordine è $> 2p-2$ (o quella dimensione è $> p-1$) la serie *non* sarà speciale (n.° 74); e per conseguenza

$$r \leqq n - p. \tag{3}$$

Di qui e dalla (2) si trae subito, confrontando con la (1), che in questa come nella (3) vale il segno d'uguaglianza.

(*) Com'è noto, le forme $\varphi(x)$ si posson anche definire come i *differenziali di 1.ª specie* esistenti sull'ente algebrico (p dei quali sono linearmente indipendenti).

Questo fatto, per quanto si riferisce alla (3), ci prova (tenuto conto che la serie non è speciale) che: *la serie lineare segata sulla curva piana d'ordine m da tutte le sue aggiunte di un dato ordine* $> m - 3$ *è completa;* come già s'era visto (n.° 73) per la serie segata dalle aggiunte d'ordine $m - 3$.

Il valere poi il segno d'uguaglianza nella (1), ossia nella ($3\,b$) del n.° 61 per $l > m - 3$, — come pure nella ($3\,a$) dello stesso n.° per $l = m - 3$ (quest'ultimo fatto in forza del n.° 73), — dimostra [v. l'osservazione che nel n.° 61 fa seguito alla relazione (1')] che: *per le curve aggiunte d'ordine* $\geqq m - 3$ *di una curva piana d'ordine m i passaggi pei punti multipli di questa* ($s - 1$ *volte per un punto* s-plo) *costituiscono condizioni tutte distinte.* — Ciò non varrebbe più per curve aggiunte d'ordine $< m - 3$ (cfr. n.° 85).

77. *Le aggiunte di un dato ordine qualunque (ove esistano) segano sulla curva piana d'ordine m una serie lineare completa.* Ciò è dimostrato (n.ⁱ 73 e 76) per le aggiunte di un dato ordine $\geqq m - 3$. Ora dall'esser vero per le aggiunte di un dato ordine minore di m, ad es. per le aggiunte d'ordine $m - 1$, si trae facilmente che vale anche per le aggiunte di un ordine minore, $m - 1 - a$, se esistono. Invero queste ultime curve, insieme con una curva α d'ordine a, fissata ad arbitrio purchè irriduttibile e non passante pei punti multipli della curva fondamentale γ, dànno curve aggiunte d'ordine $m - 1$: sicchè la serie lineare che esse segano su γ si compone di resti degli am punti d'incontro di α con γ rispetto alla serie lineare segata su γ dalle aggiunte d'ordine $m - 1$. Ed abbraccia *tutti* questi resti, poichè ogni aggiunta d'ordine $m - 1$ che passi per quegli am punti dovrà contenere in conseguenza tutta la curva α d'ordine a, e quindi spezzarsi in questa ed in curve aggiunte d'ordine $m - 1 - a$. Applicando dunque il teorema del n.° 56 avremo che, essendo completa la serie data dalle aggiunte d'ordine $m - 1$, è pure completa quella segata dalle aggiunte d'ordine $m - 1 - a$.

78. Applicando lo stesso teorema del n.° 56 ai resti di k punti qualunque rispetto alla serie completa (n.° 77) segata sulla curva piana γ dalle sue aggiunte di un dato ordine avremo: *Le aggiunte di un dato ordine passanti per dati punti di* γ *vi segano, fuori di questi (e dei punti multipli di* γ*) una serie lineare completa.*

Di qui si trae un modo per costruire la serie completa d'ordine n che su γ è individuata da un dato gruppo qualunque di punti G_n. Si conduca per questo una curva aggiunta ψ (il che si può sempre fare, prendendola d'ordine abbastanza elevato), e sia $G_{n'}$ il resto (fuori dei punti multipli di γ) della sua intersezione con γ. Le aggiunte, dello stesso ordine di ψ, passanti per $G_{n'}$, segheranno ulteriormente γ secondo una serie lineare completa che comprende il gruppo G_n: cioè secondo la serie voluta. — Mutando la curva aggiunta ψ muterà $G_{n'}$, anzi muterà anche n' se cambia l'ordine di ψ: ma si otterrà sempre come risultato la stessa serie completa d'ordine n. Si ha così (almeno in parte) quello che i sig.i Brill e Noether chiamano *Restsatz* (*), cioè: *se due gruppi di n punti sono resti o corresiduali rispetto ad un gruppo di n' punti nel senso che formino con questo l'intersezione di γ (fuori dei punti multipli) e di due curve aggiunte, essi sono pure tali rispetto ad ogni altro resto dell'uno dei due.*

Si vede come in sostanza questo teorema derivi dalla proprietà fondamentale che presentano rispetto ad una curva piana γ le sue aggiunte di un dato ordine di segarla secondo una serie lineare *completa:* proprietà che qui s'è dedotta, in ultima analisi, dalla formola (6) del § 13. Da essa poi s'è tratto il *teorema del resto* applicando un altro fatto essenziale (di carattere più semplice) stabilito nel § 14. Il teorema fondamentale $A\varphi + B\psi$ del Noether (v. la prefazione) da cui Brill e Noether traggono quel *Restsatz* è più complesso, ed adempie insieme per questo scopo ai due uffici dei §§ 13 e 14.

79. La proprietà fondamentale suddetta, di segare su γ una serie completa non spetta in generale al sistema di *tutte* le curve di un dato ordine. È facile verificare, scrivendo (analogamente al § 15) la dimensione e l'ordine della serie g_n^r e imponendo la condizione (n.° 65) $n - r \leq p$, che il modo più naturale per avere un sistema lineare di curve di dato ordine l che seghi su γ una serie *completa* consiste nell'assoggettare le curve d'ordine l ad avere in ogni punto s-plo di γ un punto $(s-1)$-plo (**). Ma anche se si considerano curve aggiunte per cui un punto s-plo P di γ sia, non solo $(s-1)$-plo, ma s-plo, esse daranno fuori dei punti multipli di γ una serie lineare completa: giacchè l'imporre ad una curva aggiunta che abbia in P un punto s-plo anzi

(*) Mem. cit., pag. 273.

(**) Anche un'altra considerazione può indurre fin da principio a dar la preferenza alle curve aggiunte di γ per la *geometria su* γ. Se su questa curva si sega una serie lineare di dimensione abbastanza elevata mediante un sistema lineare di curve che in un punto P s-plo per γ o non passino o abbiano un punto semplice, doppio, ... $(s-2)$-plo, il passaggio di un gruppo della serie lineare per gli s punti di γ che cadono in P si avrà imponendo alle curve del sistema un nuovo passaggio per P, e quindi importerà solo 1 condizione, o 2, o 3,... o $(s-1)$: sicchè quegli s punti di γ presentano particolarità per la serie: formano un gruppo *neutro*. Perchè ciò non accada deve P essere almeno $(s-1)$-plo per le curve del sistema.

che solo $(s-1)$-plo equivale ad imporle il passaggio per gli s punti di γ che cadono in P; e quindi si è ridotti ad applicare il principio del n.° 78.

Ne segue che dato un *sistema lineare* ∞^k *di curve piane (irriduttibili) del genere p determinato dai punti base* e con n intersezioni variabili delle curve del sistema (ossia del *grado* n, seguendo la denominazione introdotta dal sig. Jung), su ognuna di queste le altre segano una serie lineare g_n^{k-1} *completa*. Sarà dunque (n.° 65)

$$k \geqq n-p+1;$$

ed avrà luogo il segno d'uguaglianza se la serie non è speciale, ad es. se $n>2p-2$, oppure $k>p$; il segno d'inuguaglianza se la serie è speciale. — Ora una superficie razionale d'ordine n (semplice o multipla), la quale sia *normale*, è appunto rappresentata sul piano da un sistema lineare di curve che non sta in uno dello stesso ordine e grado e di maggior dimensione (n.° 26), e che per conseguenza è determinato dai punti base (*). In conseguenza potremo dire che *una superficie razionale normale ha per sezioni iperplanari delle curve normali.* Se n è l'ordine e p il genere di queste curve, la superficie appartiene ad S_{n-p+1} od a spazi superiori secondo che le curve non sono ovvero sono speciali. Ecc. (**).

§ 19. Il teorema Riemann-Roch.

80. Ritornando al § 17 ed al lemma (n.° 71) che ivi avevamo stabilito e cominciato ad applicare, noi possiamo dedurne per le serie lineari *speciali* una proprietà caratteristica che dà ragione del loro nome.

Applichiamolo in fatti al caso di una serie lineare g_n^r sopra la curva canonica (n.° 75), d'ordine $2p-2$ appartenente ad S_{p-1}: esso ci dice che *i gruppi di quella serie stanno in spazi di dimensione* $\leqq n-r-1$. Ora poichè quei gruppi stanno in S_{p-1}, ciò non avrà alcun significato se $n-r \geqq p$. Ma se invece $n-r<p$, ad es. se la serie è speciale e completa, e se inoltre si

(*) Viceversa è facile vedere, in forza del n.° 26, che una superficie rappresentata da un tal sistema lineare è certo normale; perchè non può accadere che il sistema sia tale che, aggiungendogli una curva fissa, venga a stare entro un sistema lineare di maggior dimensione (ed ordine) ma dello stesso grado del primitivo.

(**) V. la mia Nota: *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p* (Rendic. del Circ. mat. di Palermo, tom. 1, 1887).

suppone $r > 0$, quel fatto costituirà una *particolarità* per i gruppi della serie; giacchè lo spazio determinato da n punti *qualunque* della curva è l' S_{p-1} se $n \geq p$, se no un S_{n-1}: in ambi i casi uno spazio la cui dimensione *non* è nelle ipotesi attuali $\leq n - r - 1$. Dunque *i gruppi di una serie lineare speciale infinita d'ordine n sono veramente speciali, nel senso che un gruppo qualunque di n punti dell'ente algebrico* NON *sta in generale in una tal serie* (*).

Di un gruppo di n punti che debba far parte di una g_n^r speciale completa si potranno prendere ad arbitrio sull'ente *al più* $n - r$ punti; giacchè sulla curva canonica i rimanenti r punti dovranno stare sull' S_{n-r-1} che congiunge quegli $n - r$.

81. La proprietà dei gruppi di una g_n^r sopra la curva canonica di stare in spazi di dimensione $\leq n - r - 1$ si può anche enunciare dicendo che per essi passano $\infty^{r'}$ iperpiani S_{p-2}, ove $r' \geq p - 1 - (n - r)$, ossia:

$$r' \geq p - 1 - n + r, \qquad (1)$$

mentre per un gruppo generico di n punti ne passerebbero ∞^{p-1-n}. S'intende che quest'esponente, od anche r', potrebb'essere negativo e così *svanirebbe* la corrispondente infinità. — Possiamo anche dire che ogni gruppo della g_n^r sta in $\infty^{r'}$ gruppi canonici, od in $\infty^{r'}$ curve φ (sulla curva piana γ), valendo la relazione (1); ossia che esso impone *al più* $n - r$ condizioni (invece di n) agl'iperpiani di S_{p-1}, o ai gruppi canonici, o alle φ, che lo debbano contenere. Tali gruppi canonici, o φ, ecc., esisteranno certo, vale a dire sarà per la (1) $r' \geq 0$, nel caso che $n - r < p$, ad es. nel caso delle serie speciali complete.

82. Il risultato ottenuto si può precisare meglio. Per stabilirlo avevamo fatto uso del lemma del n.° 71, ossia, in ultima analisi, di una formola del § 13. Lo completeremo ricorrendo al § 14: appunto come per il *Restsatz* (n.° 78) avevamo adoperato elementi di quei due paragrafi.

Fissiamo come ipotesi che la serie lineare g_n^r dei n.i prec.i sia completa, cioè che r significhi la dimensione della serie *completa* determinata da un gruppo G_n di n punti; ed inoltre che essa sia *speciale,* sicchè $n - r < p$. *Esisteranno* allora (n.° prec.) $\infty^{r'}$ resti $G_{n'}$ di G_n rispetto alla serie canonica e formeranno (n.° 56) una serie *completa* $g_{n'}^{r'}$; ove han luogo la (1) e

$$n + n' = 2p - 2. \qquad (2)$$

(*) Così la serie lineare *completa* determinata da un gruppo di n punti presi in modo generico, se $n > p$ sarà una g_n^{n-p} (non speciale), se $n \leq p$ sarà la g_n^0 che si riduce a quel solo gruppo.

Ma, per le relazioni esistenti fra le due serie complete g_n^r, $g_{n'}^{r'}$ residue rispetto alla serie canonica (n.° 58), ogni gruppo $G_{n'}$ della seconda starà su ∞^r gruppi canonici, e quindi applicando alla $g_{n'}^{r'}$ la (1) si avrà:

$$r \geqq p - 1 - n' + r'. \tag{1'}$$

Sommando queste due formole (1) e (1'), e tenendo conto della (2), si vede che in quelle varrà il segno $=$. Restano dunque pienamente precisate le cose precedenti col seguente teorema, al quale secondo l'uso (v. n.° seg.) daremo il nome di *teorema* Riemann-Roch:

Se un gruppo G_n determina una serie completa di dimensione r e sta in $\infty^{r'}$ gruppi canonici (o curve φ) si ha:

$$r' = p - n + r - 1, \tag{3}$$

sicchè G_n starà certo in gruppi canonici ($r' \geqq 0$) se è speciale (cioè $n - r \leqq p - 1$), e viceversa (*). *In altri termini G_n impone precisamente $n - r$ condizioni (anzi che n) ai gruppi canonici (od alle φ) che vengano obbligati a contenerlo* (**).

Possiamo anche enunciarlo sotto quest'altra forma (dovuta ai sig.i Brill e Noether, ed alla quale il sig. Klein dà il nome di *teorema di reciprocità*): *se due gruppi risp. di n ed n' punti formano, presi insieme, un gruppo canonico, sicchè:*

$$n + n' = 2p - 2, \tag{2}$$

e se le serie complete d'ordini n, n' da essi determinate (serie residue rispetto alla serie canonica) hanno le dimensioni r, r', avrà luogo la relazione (3), *oppure:*

$$n - n' = 2(r - r'), \tag{4}$$

che si trae dalla (3) raddoppiandola e sottraendone la (2).

83. Si può porre il teorema Riemann-Roch sotto un'altra forma, più analitica, che ci dà ragione del suo nome. Proponiamoci cioè di cercare il nu-

---

(*) Invece di dire che G_n sta in $\infty^{r'}$ gruppi canonici, o φ, si dica che *sta in* $(r'+1)$ *gruppi canonici*, o φ, *linearmente indipendenti.* Allora il caso che *non* stia in tali gruppi corrisponderà ad $(r'+1) = 0$, $r' = -1$; ed anche allora varrà la (3) poichè essendo la g_n^r completa non speciale è $r = n - p$.

(**) Ad esempio se una coppia di punti impone *una* sola condizione ai gruppi canonici, essa determina una g_2^1, e quindi l'ente è *iperellittico:* in altri termini se la curva canonica ha un punto doppio essa è una curva doppia.

mero delle costanti da cui dipende una funzione razionale dell'ente algebrico la quale debba avere tutti i suoi infiniti (semplici) *fra* i punti di un dato gruppo G_n. Se la serie lineare completa g_n^r determinata da questo gruppo si può staccare dall'ente mediante l'equazione:

$$\lambda_0 \psi_0(x) + \lambda_1 \psi_1(x) + \cdots + \lambda_r \psi_r(x) = 0, \tag{5}$$

ed in particolare il gruppo G_n è dato da

$$\psi_0(x) = 0, \tag{6}$$

la detta funzione razionale dell'ente si avrà (n.° 30) dividendo una forma generica (5) per la (6), cioè sarà:

$$\lambda_0 + \lambda_1 \frac{\psi_1(x)}{\psi_0(x)} + \cdots + \lambda_r \frac{\psi_r(x)}{\psi_0(x)};$$

cosicchè conterrà linearmente $r+1$ costanti arbitrarie $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$. In conseguenza il risultato del n.° preced. si potrà enunciare così:

Le funzioni razionali dell'ente algebrico di genere p, i cui infiniti (semplici) sono fra gli n punti di un dato gruppo, dipendono linearmente da $n-p+2+r'$ costanti, se per quel gruppo passano $\infty^{r'}$ gruppi canonici (od iperpiani di S_{p-1}; o se in esso s'annullano $r'+1$ funzioni φ, o differenziali di 1.ª specie, linearmente indipendenti).

Nel n.° 5 della *Theorie der Abel'schen Functionen* il RIEMANN pel caso di $n > p$ ottiene in generale (dalla rappresentazione delle funzioni razionali dell'ente mediante integrali di 2.ª specie) che quelle funzioni razionali dipendono da $n-p+1$ costanti (il che corrisponde all'ipotesi che per gli n punti non passi alcuna φ, ossia $r'+1=0$), ed inizia il calcolo per $n \leq p$. Questo calcolo, con l'introduzione delle φ che passano pei dati punti, fu poi fatto completamente dal ROCH (*); il quale così ottenne la proposizione generale ora esposta. Ciò spiega la denominazione di *teorema* RIEMANN-ROCH (n.° 82) introdotta per iniziativa dei sig.i BRILL e NOETHER. Non è però inutile rilevare in pari tempo che il ROCH, invece di parlare di funzioni razionali i cui infiniti *sono fra* i punti di G_n, dice che gl'infiniti *sono* i punti di G_n: il che costituisce un'inesattezza, poichè se la g_n^r completa determinata da G_n (e quindi ogni g_n^1 contenente G_n) avesse qualche punto fisso non esisterebbero funzioni razionali aventi n soli infiniti risp. nei punti di G_n; le funzioni razionali i cui

(*) *Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen* (Journal für Math., tom. 64, 1864).

infiniti sono *fra* i punti di G_n sarebbero tutte quante *finite* (n.° 30) in quei punti che son fissi per la g_n^r (cfr. il n.° 87).

84. Il teorema Riemann-Roch abbraccia tutte quante le proprietà viste precedentemente (§ 17) delle serie speciali, e permette di precisar meglio qualcuna di esse. Così dal fatto (v. la fine del n.° 80) che di un gruppo G_n che debba far parte di una g_n^r speciale si posson prendere ad arbitrio sull'ente *non più* di $n-r$ punti, mentre quando la g_n^r è data si posson prendere ad arbitrio r punti per determinare un suo gruppo, si trae che $r \leqq n-r$, ossia

$$n \geqq 2r:$$

cioè la proposizione del n.° 72, dalla quale poi nei n.i 73 e 74 abbiam dedotto varie conseguenze.

Osserviamo inoltre, appunto in relazione colla fine del n.° 80, che se per avere un gruppo G_n che determini una g_n^r speciale completa ed infinita si posson prendere ad arbitrio *precisamente* $n-r$ punti della curva canonica C, deve lo spazio S_{n-r-1} che congiunge $n-r$ punti qualunque di C incontrare ulteriormente questa curva in r punti. Ora si vede facilmente che se C è curva *semplice*, cioè (v. la fine del n.° 75) se l'ente non è iperellittico, la cosa non è possibile se non quando quello spazio sia un iperpiano (*), cioè:

$$n-r=p-1.$$

In tal caso la (3) ci dà $r'=0$; sicchè i gruppi G_n saranno i resti rispetto alla serie canonica di $n'=2p-2-n$ punti indipendenti rispetto a questa, cioè formanti una g_n^0 completa. Dunque: tolto il caso che l'ente sia iperellittico; e tolto il caso delle g_n^r complete che son residue rispetto alla serie canonica di un numero qualunque di punti indipendenti rispetto a questa, supposto cioè:

$$n-r<p-1,$$

saranno *meno* di $n-r$ i punti dell'ente che si posson assumere ad arbitrio per formare un gruppo di una g_n^r speciale completa (**). Con tali restrizioni

(*) V. il principio della Memoria del sig. Del Pezzo, *Sulle projezioni di una superficie e di una varietà dello spazio ad n dimensioni* (Rendic. della R. Accad. di Napoli, 1886); non che il n.° 2 della Nota del sig. Bertini, *Intorno ad alcuni teoremi*, ecc., citata alla fine del n.° 59 (ed il ragionamento del sig. Castelnuovo riferito in quella Nota).

(**) V. Noether, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven* (Abhandl. d. k. Akad. zu Berlin, 1882), teor. III''.

sarà dunque $r < n - r$ ossia

$$n > 2r.$$

In questo modo viene ulteriormente precisato il cit. n.° 72. Il segno d'uguaglianza, cioè la

$$n = 2r$$

potrà valere solo, oltre che nel caso iperellittico (n.° 69), per g_n^r le quali diano

$$n - r \geqq p - 1,$$

donde (combinando con quella) $r \geqq p - 1$; e quindi per nessun'altra serie *speciale* che la serie canonica g_{2p-2}^{p-1}.

§ 20. Alcune applicazioni note.

85. Un'ovvia applicazione del teorema Riemann-Roch serve per rispondere alla questione se una curva piana γ di genere p e d'ordine n sia projezione di una curva dello stesso ordine appartenente allo spazio ordinario o ad uno spazio superiore (*). Ciò equivale a dire (v. n.° 26) che la g_n^2 staccata su γ dalle rette del suo piano è contenuta in una g_n^r con $r > 2$. La cosa si decide subito se la curva, ossia la g_n^2, *non è speciale*: γ avrà per spazio normale S_{n-p}. In caso contrario, ad esempio se $n < p + 2$, si esprimerà che la serie *completa* contenente la g_n^2, cioè contenente un gruppo di questa, è di dimensione r, dicendo (teorema Riemann-Roch) che quel gruppo sta in $\infty^{p-n+r-1}$ curve φ, cioè aggiunte d'ordine $n - 3$ di γ. Ora siccome quel gruppo si compone di n punti in linea retta, le aggiunte d'ordine $n - 3$ che lo contengono saranno quelle che si spezzano nella retta stessa ed in aggiunte d'ordine $n - 4$. Sicchè quel fatto si esprimerà dicendo che γ ammette $\infty^{p-n+r-1}$ curve aggiunte d'ordine $n - 4$. Se si contano come *distinte* le condizioni che i punti multipli di γ impongono alle aggiunte d'ordine $n - 4$ si trova (n.° 61) che queste curve sono ∞^{p-n+1}: l'essere invece $\infty^{p-n+r-1}$ significa che $r - 2$ di quelle condizioni sono conseguenza delle rimanenti. Dunque: *condizione necessaria e sufficiente perchè una curva piana di genere p e d'ordine n, la quale sia speciale (ad esempio tale che $n < p + 2$), sia projezione di una*

(*) Per lo spazio ordinario veggasi ad es. Noether, loc. cit., § 3; per uno spazio qualunque il § 4 della Nota del sig. Bertini, *Intorno ad alcuni teoremi*, ecc.

curva normale dello stesso ordine di S_r è che precisamente $r-2$ fra le condizioni che i passaggi pei suoi punti multipli impongono alle sue curve aggiunte d'ordine $n-4$ siano conseguenza delle rimanenti (*). (Cfr. la fine del n.° 76.)

Con ciò si ha pure un modo per riconoscere se una data curva di uno spazio qualunque S_k sia projezione di una curva dello stesso ordine di uno spazio superiore S_r. Basterà applicare il teorema precedente alla curva γ d'ordine n projezione della curva data da un S_{k-3} sopra un piano; oppure applicarlo a dirittura alla data parlando (anzi che di curve aggiunte a γ) di *coni aggiunti* d'ordine $n-4$ uscenti da un S_{k-3}, e (anzi che di punti s-pli di γ) di spazi S_{k-2} s-secanti della curva data uscenti pure dall'S_{k-3}, ecc. —

Si osservi anche come si possan subito trasportare con la legge di dualità le considerazioni precedenti. Così il fatto che una curva piana di genere p e d'ordine $n > p+2$ è sempre projezione di una curva sghemba dello stesso ordine dà, per dualità (nello spazio ordinario, sostituendo prima alla curva piana il cono projettante), quest'altro: *una curva piana di genere p e di classe $n' > p+2$ sta sempre su una superficie sviluppabile, non conica, della stessa classe.* Ecc.

86. La questione trattata nel n.° prec. conduce naturalmente a pensare quest'altra: se una curva d'ordine n (di uno spazio qualunque) sia projezione di una curva d'ordine $n+1$, $n+2$,... da uno spazio che ne contenga 1, 2,... punti. Basterà che ci limitiamo a vedere se una curva C d'ordine n di S_r sia projezione di un'altra C' d'ordine $n+1$ di S_{r+1} da un punto P' di C'. Indicando con P la traccia su C della retta tangente in P' a C', ciò equivale a vedere se la serie lineare g_n^r che è segata su C dagli S_{r-1} del suo spazio S_r, quando ai suoi gruppi si aggiunga il punto fisso P, dia origine ad una g_{n+1}^r *parziale* (perchè projezione della g_{n+1}^r che su C' è segata dagl'iperpiani passanti per P', la quale è contenuta nella g_{n+1}^{r+1} segata da *tutti* gl'iperpiani), oppure *completa*.

Domandiamo dunque se aggiungendo ai gruppi di una g_n^r sopra un ente di genere p un punto fisso P si può ottenere una g_{n+1}^r *completa.* Perchè ciò accada occorre anzitutto, evidentemente, che già la g_n^r sia completa. Inoltre

(*) Si noti che l'esistenza di curve aggiunte d'ordine $n-4$ trae già di conseguenza che la curva è speciale (perchè i suoi gruppi di n punti in linea retta staranno su aggiunte d'ordine $n-3$). — Il teorema esposto si può completare considerando anche le curve aggiunte d'ordine $< n-4$: v. i lavori citati.

questa serie dev' essere speciale, altrimenti sarebbe $n-r=p$, e quindi $(n+1)-r>p$, sicchè (n.° 65) la g^r_{n+1} *non* sarebbe certo completa. Supposto che sian soddisfatte quelle due condizioni, cioè che la g^r_n sia speciale e completa, un suo gruppo G_n imporrà, pel teorema Riemann-Roch, $n-r$ condizioni ai gruppi canonici obbligati a contenerlo; e per esprimere che anche la g^r_{n+1} è completa si dovrà similmente dire che il suo gruppo costituito da G_n con P impone ai gruppi canonici $(n+1)-r$ condizioni, cioè una condizione di più: vale a dire che non tutti i gruppi canonici passanti per G_n passano anche per P. Dunque *la condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie completa d'ordine $n+1$ che contiene un dato gruppo di $n+1$ punti abbia un punto P (di questo gruppo) per punto fisso è che i rimanenti n punti del gruppo stiano in gruppi canonici (uno almeno) nei quali non stia P.* Questa proposizione è dovuta al sig. Noether (*), che le dà il nome di *teorema di riduzione (Reductionssatz).*

Ed ora, in base ad essa, possiamo rispondere così alla domanda postaci da principio. *Una curva di genere p e d'ordine n* NON *è projezione di una curva d'ordine $n+1$ di uno spazio superiore solo quando essa è speciale e tale che i gruppi canonici passanti per gli n punti in cui essa è segata da un dato iperpiano non abbiano altri punti comuni.* — Ad esempio una curva piana d'ordine n è projezione di una curva sghemba d'ordine $n+1$ da un punto di questa solo quando essa non è speciale, cioè non ammette delle curve aggiunte d'ordine $n-4$; e quando, essendo speciale, queste curve aggiunte hanno sulla data curva (fuori dei punti multipli) dei punti fissi comuni (ognun dei quali si potrà poi assumere come traccia della tangente alla curva sghemba nel centro di projezione).

87. Il *teorema di riduzione* si può (col sig. Noether, loc. cit.) enunciare sotto forma più analitica così: *La condizione necessaria e sufficiente affinchè le funzioni razionali di un ente algebrico i cui infiniti (semplici) sono fra $n+1$ punti dati siano tutte finite in uno, P, di questi, è che esista almeno un gruppo canonico (una φ) che contenga i rimanenti n punti ma non P.* (Cfr. la fine del n.° 83.)

(*) V. il n.° 3 della Nota *Beweis und Erweiterung eines algebraisch-functionentheoretischen Satzes des Herrn* Weierstrass (Journal für Math., tom. 97, 1884); cfr. anche Math. Ann., tom. 37, pag. 424. — Questo teorema di riduzione si può pure, seguendo il sig. Noether, mettere al principio (dopo il teorema del resto) di una trattazione algebrico-geometrica delle serie lineari: veggasi la Memoria del sig. Bertini pubblicata con questa.

Da esso si trae facilmente, seguendo il sig. Noether (*), un elegante teorema del Weierstrass, anzi una generalizzazione di esso. Abbiansi sull'ente algebrico n punti *qualunque*, in tal numero però che per essi non passi alcun gruppo canonico (alcuna φ): li ordineremo convenientemente, e chiamandoli $P_1\ P_2 \ldots\ P_n$ considereremo i gruppi di punti che si ottengono da

$$G_m = (P_1\ P_2 \ldots\ P_m),$$

ponendo $m = 1, 2, \ldots, n$; e li assumeremo come gruppi dei punti infiniti di funzioni razionali dell'ente: ossia considereremo delle g^1_m contenenti quei gruppi G_m. Anzitutto prendiamo tanti degli n punti dati da avere un gruppo $G_{\mu+1} = (P_1\ P_2 \ldots\ P_{\mu+1})$ il quale determini una serie completa, priva di punti fissi, e di dimensione 1: sicchè i gruppi minori G_m per $m = 1, 2, \ldots, \mu$ *non* staranno in serie g^1_m. Pel teorema di riduzione i punti $P_1, P_2, \ldots P_\mu$ imporranno μ condizioni distinte ai gruppi canonici obbligati a contenerli; e questi gruppi passeranno tutti per $P_{\mu+1}$. Se fra gli n punti dati ve ne sono ancora altri pei quali passino tutti quei gruppi, indichiamoli con $P_{\mu+2}, P_{\mu+3}, \ldots P_{\mu_1-1}$ e poi indichiamo con P_{μ_1} un nuovo punto (degli n). La serie completa determinata da $G_{\mu+2}$ *non* avrà (pel teorema di riduzione) il punto $P_{\mu+2}$ come punto fisso, e quindi sarà ∞^2 (perchè deve contenere la $g^1_{\mu+2}$ che si ha aggiungendo $P_{\mu+2}$ ai gruppi della $g^1_{\mu+1}$ determinata da $G_{\mu+1}$) e non avrà nemmeno punti fissi nei punti precedenti (perchè non ne ha la $g^1_{\mu+1}$ nominata). Similmente non avranno punti fissi le serie determinate da $G_{\mu+3}, \ldots, G_{\mu_1-1}$. Invece la serie completa determinata da G_{μ_1} avrà P_{μ_1} per punto fisso. Ai gruppi canonici che li devon contenere i punti $P_1 \ldots P_{\mu_1}$ impongono $\mu + 1$ condizioni distinte. Se quei gruppi passano ancora per altri punti degli n dati li indicheremo con $P_{\mu_1+1}, P_{\mu_1+2}, \ldots P_{\mu_2-1}$; e con P_{μ_2} indicheremo un nuovo punto. La serie completa determinata da G_{μ_1+1} non avrà per punti fissi nè P_{μ_1} nè P_{μ_1+1}, perchè ogni gruppo canonico che passa per G_{μ_1-1} e per uno di questi due punti passa pure per l'altro; nè ha punti fissi nei punti di G_{μ_1-1}, perchè non ne ha la serie determinata da questo gruppo. Similmente non hanno punti fissi le serie complete determinate da $G_{\mu_1+2}, \ldots, G_{\mu_2-1}$; mentre quella determinata da G_{μ_2} avrà P_{μ_2} per punto fisso. Ed ora si continui, considerando i gruppi canonici passanti per G_{μ_2} — ai quali gruppi canonici sono con ciò imposte $\mu + 2$ condizioni distinte —, e quei nuovi punti fra gli n dati che son comuni ad essi; ecc. Si arriverà fino ad aver un gruppo G_{μ_t} che imporrà

(*) Nota citata (Journal für Math., tom. 97).

$p-1$ condizioni distinte ai gruppi canonici, vale a dire che starà in un solo gruppo canonico: sarà evidentemente $l=p-\mu-1$. S'indicheranno allora con $P_{\mu_l+1},\ldots, P_{\mu_{l+1}-1}$ i nuovi punti fra gli n dati, che stanno in quel gruppo canonico; e finalmente con $P_{\mu_{l+1}},\ldots, P_n$ i rimanenti.

Allora fra i gruppi di punti G_m i soli che determinino serie complete dotate di punti fissi saranno quelli che corrispondono ai valori seguenti di m:

$$1,\ 2,\ldots,\ \mu,\ \mu_1,\ \mu_2,\ldots,\ \mu_{l+1},$$

(ognun dei quali imponeva ai gruppi canonici una nuova condizione, rispetto al gruppo precedente), i quali complessivamenté sono in numero di p. Possiamo esprimer ciò in altro modo dicendo che: *tra le funzioni razionali dell'ente che sono infinite risp. nei soli punti dei vari gruppi* G_m $(m=1,\ 2,\ldots)$ *mancano solo quelle corrispondenti a* p *valori di* m.

È questa la proposizione con cui il sig. NOETHER generalizza un teorema del WEIERSTRASS. Questo (che nelle Lezioni del sommo analista si trova distinto col nome di *Lückensatz*) si deduce supponendo che gli n punti considerati coincidano: *Tra le funzioni razionali dell'ente i cui infiniti coincidono tutti (e siano m) in un dato punto* (*) *mancano solo quelle che corrispondono a p distinti valori del grado m, ossia dell'ordine d'infinità di quel punto.* In altri termini se si considerano le serie lineari complete d'ordine m che hanno un dato punto P come m-plo, i valori di m che corrispondono a serie per cui P è punto fisso sono sempre in numero di p. — Rappresentando l'ente di genere $p>1$ con la curva canonica C di S_{p-1}, mancheranno le funzioni razionali di grado m che sono infinite solo in P, vale a dire la g_m completa determinata dal punto m-plo P avrà questo punto come punto fisso, se (pel teorema di riduzione) esistono iperpiani che in P incontrino $m-1$ volte, e non m volte la curva C. Ciò accade in un punto *generico* di C pei valori (**)

$$m=1,\ 2,\ldots,\ p;$$

in un ordinario punto d'iperosculazione (di contatto con iperpiani stazionari) per

$$m=1,\ 2,\ldots,\ p-1,\ p+1;$$

ed in generale in un punto singolare qualsiasi di C (v. n.° 43), il quale sia

(*) Cotali funzioni hanno un'importanza particolare in quelle Lezioni.

(**) Su questo cfr. anche NOETHER: *Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen* (Journal für Math., tom. 92, 1882).

multiplo secondo i ($\geqq 1$) per la curva (*) e conti $i_1, i_2, \ldots, i_{p-2}$ volte come punto comune a questa ed alla retta tangente, al piano osculatore,..., all'iperpiano osculatore, per

$$m=1, \quad i+1, \quad i_1+1, \quad i_2+1, \ldots, \quad i_{p-2}+1 \text{ (**)}.$$

§ 21. Sulle corrispondenze univoche e sui moduli di un ente algebrico.

88. La determinazione delle serie lineari esistenti sopra un dato ente algebrico si fa in modo noto, basandosi sulle proprietà fondamentali stabilite nei paragrafi preced., specialmente sul teorema Riemann-Roch: possiamo limitarci a rimandare per essa alla Memoria Brill-Noether (***). —

Vogliamo invece fare ancora un cenno sulla questione della possibilità di riferire biunivocamente fra loro due enti algebrici di genere p: il che ci condurrà in pari tempo al numero dei *moduli,* ed alla determinazione degli enti algebrici con infinite trasformazioni biunivoche in sè.

Se $p=0$, cioè se gli enti son *razionali,* esistono sempre ∞^3 corrispondenze biunivoche fra essi: le corrispondenze bilineari. Non vi son moduli.

Se $p=1$, cioè se gli enti sono *ellittici,* vi è (n.° 68) *un* modulo; e vi sono ∞^1 corrispondenze biunivoche fra i punti di un ente, ossia fra quelli di due enti che abbian lo stesso modulo. —

In quei due casi di $p=0$ e $p=1$ ogni punto dell'ente si può, con una trasformazione biunivoca di questo, mutare in ogni altro; non vi sono sull'ente punti *particolari* (dal punto di vista della geometria sull'ente). Quando invece si abbia $p>1$ vi saranno sull'ente dei punti particolari, a cui potremo

---

(*) Tolto il caso iperellittico si ha sempre $i=1$: v. la 2ª nota al n.° 82.

(**) Su questi punti singolari dell'ente algebrico ed i valori di m nel *Lückensatz* è ritornato recentemente il sig. Hurwitz nella Memoria citata al n.° 43 (Math. Ann., tom. 41, 1892). Nel numero complessivo dei punti d'iperosculazione della curva canonica quale risulta dal n.° 42 egli determina l'influenza di un punto singolare qualunque (v. n.° 43); e giunge al notevole risultato che i punti singolari *distinti* sono sempre in numero $>2p+2$, tolto il caso iperellittico nel quale sono appunto $2p+2$.

(***) Ed anche, per il numero delle serie minime (quando questo numero è finito), alla Nota del sig. Castelnuovo: *Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere* (Rendic. della R. Acc. dei Lincei, settembre 1889).

ricorrere per la nostra questione. Tali sono i punti p-pli della serie canonica, i quali sono in generale (n.° 42, per $n = 2p - 2$, $r = p - 1$) in numero di $(p-1)p(p+1)$ (*). Per un punto siffatto P indichiamo con m il minimo numero tale che esista una g_m^1 di cui P sia punto m-plo: la g_m^1 non avrà punti fissi e sarà *unica,* perchè se vi fosse una g_m^2 avente P per punto m-plo, il resto di P rispetto ad essa sarebbe una g_{m-1}^1 avente P per $(m-1)$-plo. Sarà $m \leqq p$; m sarà il primo dei gradi *non* mancanti di funzioni razionali infinite nel solo punto P, del *Lückensatz* del Weierstrass (v. la fine del n.° 87). — Ciò posto la g_m^1 che si sarà in tal modo determinata avrà in tutto $2(m+p-1)$ elementi di diramazione o punti doppi. Di questi possono coincidere in uno stesso punto al più $m-1$ (n.° 36): così appunto accade pel punto m-plo P. Ma siccome $m \leqq p$ sarà $2(m+p-1) > 4(m-1)$, e quindi la g_m^1 avrà più di 4 elementi di diramazione *distinti.* Ora se fra due enti γ, γ' vi è una corrispondenza biunivoca, al punto particolare P di γ dovrà corrispondere uno degli analoghi punti (in numero finito), P', di γ', alla g_m^1 determinata da P la g_m^1 determinata da P': e la corrispondenza biunivoca fra queste due g_m^1 dovrà far corrispondere agli elementi di diramazione dell'una quelli dell'altra. Essendo *più di* 2 questi elementi distinti in ogni g_m^1, le corrispondenze siffatte, possibili fra queste, (corrispondenze projettive o bilineari), saranno in numero finito. Fissata poi una corrispondenza fra le due g_m^1 le corrispondenze biunivoche possibili fra γ e γ' che dànno origine a quella saranno pure in numero finito: anzi non ve ne potrà essere più di una, quando per quelle coppie di gruppi di diramazione omologhi che contengono più punti doppi si sia fissata anche la corrispondenza tra questi (**). Concludiamo dunque che: *fra due enti di genere $p > 1$, o sopra un*

(*) Il ragionamento che segue si può riferire alle curve canoniche del genere p. Allora le corrispondenze biunivoche di cui si parla diventano (n.° 75) *collineazioni.*

(**) Ciò si può dimostrare geometricamente, riducendosi a provare che *una corrispondenza biunivoca fra i punti di γ la quale abbia per punti uniti tutti i $2(m+p-1)$ punti doppi di una g_m^1 $(m > 2)$ è un' identità.* Ed invero *una corrispondenza biunivoca non identica fra i punti di un ente del genere p non può avere più di $2p+2$ punti uniti:* giacchè determina fra i gruppi di una g_{p+1}^1 (che non sia trasformata in sè stessa dalla corrispondenza), quando si considerino come omologhi due gruppi che contengano 2 punti omologhi, una corrispondenza $(p+1, p+1)$ la quale avrà $2p+2$ elementi uniti.

Quest' ultima proposizione si trova al principio del lavoro del sig. Hurwitz (Math. Ann., tom. 41) citato in nota al n.° 87: da essa e dall' altro risultato ivi ricordato sul numero dei punti singolari *distinti* dell' ente algebrico l'A. trae una nuova dimostrazione del fatto che il numero delle corrispondenze biunivoche fra i punti dell' ente è finito.

ente di tal genere, non vi può essere che un numero finito di corrispondenze biunivoche (*).

Di qui segue poi che sopra un ente di genere $p > 1$ una corrispondenza biunivoca è sempre *periodica* (**), ecc.

89. Dal ragionamento precedente si trae anche subito il numero dei moduli. In generale dei $2(m+p-1)$ elementi di diramazione della g_m^1 di γ ve ne saranno $m-1$ coincidenti in quello che contiene il punto P e poi altri $m+2p-1$: in tutto $2p+m$ elementi distinti; e quindi $2p+m-3$ birapporti. Per tutti gli enti equivalenti (per trasformazioni birazionali) a γ questi birapporti avranno gli stessi valori (sebbene non siano individuati questi valori, non essendo il punto P su γ *individuato,* ma solo *determinato* in un numero finito di modi). Viceversa dati questi birapporti, comunque, un *teorema d'esistenza per le funzioni algebriche,* del RIEMANN (***) ci assicura che esistono degli

(*) Come si sa, è dovuto al sig. SCHWARZ il teorema che un ente di genere $p > 1$ non può ammettere un'infinità *continua* (analitica) di corrispondenze birazionali: v. *Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler, eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen* (Journal für Math., tom. 87, 1879). Che ciò valga anche per un'infinità qualunque, *discontinua,* sembra esser stato dimostrato per la prima volta dal sig. KLEIN in una lettera del 1882 al sig. POINCARÉ (v. pag. 16 della Nota di quest'ultimo: *Sur un théorème de* M. FUCHS, Acta math., tom. 7, 1884). Del resto la seconda delle due Note (Math. Ann., tom.i 20 e 21, 1882-83) che il sig. NOETHER ha dedicato al teorema del sig. SCHWARZ contiene una dimostrazione che si può estendere al caso di un'infinità discontinua di corrispondenze: ed è appunto quella dimostrazione opportunamente modificata che sopra si è esposta.

Nuovi importanti risultati sulle corrispondenze biunivoche che possono esistere sopra un ente algebrico si trovano poi nel lavoro del sig. HURWITZ: *Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen* (Gött. Nachr., 1887, Math. Ann., tom. 32), e nell'altro più recente (Math. Ann., tom. 41) già citato.

(**) Cfr. i citati lavori del sig. HURWITZ. V. anche una mia Nota (Rend. del R. Ist. Lomb., 1888) citata nella prefazione, per la convenienza di rappresentare l'ente mediante la curva canonica, e quindi le corrispondenze biunivoche sull'ente mediante collineazioni (cicliche) che mutano in sè questa curva (ad es. pel caso delle corrispondenze *involutorie,* cioè degli enti che considereremo al n.° 90).

(***) *Th. d. Abel'sche Funct.,* n.i 3 e 5: il teorema consiste in questo, che si posson fissare *ad arbitrio* i $2(m+p-1)$ punti di diramazione della superficie ad m fogli distesa sul piano xy per determinare un sistema di funzioni algebriche di $x+iy$ diramate come questa superficie; e questo sistema risulta bene individuato quando si sia fissato per ciascun punto di diramazione quali sono i fogli che esso congiunge. Cfr. anche la determinazione del numero dei moduli, fatta nel n.° 12 di quella Memoria.

Non sembra che finora si sia riusciti a stabilire per via geometrica, od algebrica, il enti di genere p contenenti una g_m^1 con un elemento di diramazione $(m-1)$-plo e $2p+m-1$ elementi di diramazione semplici, i quali abbiano precisamente quei dati birapporti: e ci dice anzi che quegli enti costituiscono un numero finito di *classi* di enti equivalenti (per trasformazioni birazionali). Dunque quei birapporti, nel senso spiegato, si posson riguardare come moduli dell'ente algebrico: *i moduli sono* $2p+m-3$. Se l'ente è *generale* di genere $p>1$, sarà $m=p$ (P sarà un punto p-plo della serie canonica) e quindi *i moduli dell'ente generale di genere* $p>1$ *sono* $3p-3$. Se l'ente è iperellittico, P sarà un punto doppio della g_2^1; si avrà $m=2$, ed il numero dei moduli si ridurrà a $2p-1$ come al n.° 67.

90. Possiamo determinare il numero dei moduli in un altro caso, che pure abbraccia il caso iperellittico: quello di un *ente del genere p che contenga una ed una sola involuzione di 2.° grado del genere* π, vale a dire di un ente che equivalga ad una curva di genere p tracciata sopra una rigata del genere π in guisa da incontrarne due volte le generatrici (e da esser semplice per la rigata): come la curva d'intersezione della rigata con una quadrica. Dal n.° 22 (nota) segue (salva la restrizione ivi indicata) che i moduli di un ente così fatto saranno i moduli dell'ente di genere π costituito dall'involuzione di 2.° grado, più i moduli od invarianti per trasformazioni birazionali che su quest'ente hanno gli elementi di diramazione dell'involuzione, i quali sono (n.° 40) in numero di $2(p-2\pi+1)$. È chiaro che ognuno di questi elementi ha un modulo: tolti i casi di $\pi=0$, 1, nei quali corrispondentemente alle ∞^3, ∞^1 trasformazioni biunivoche ammesse dall'ente di genere π si diminuisce di 3 o di 1 unità il numero complessivo $2(p-2\pi+1)$ dei moduli di quegli elementi. Ma in quei casi aumenta risp. di 3 o di 1 il numero dei moduli di quell'ente, che per $\pi>1$ sarebbe $3\pi-3$. Dunque in tutti i casi *il numero dei moduli dell'ente di genere p considerato* sarà:

$$(3\pi-3)+2(p-2\pi+1)=2p-\pi-1.$$

Quest'espressione, tanto minore quanto maggiore è π, fa vedere che per un ente di genere p il contenere un'involuzione di 2.° grado costituisce una particolarità tanto maggiore quanto più grande è il genere di tale involuzione.

---

teorema di RIEMANN relativo al numero dei moduli, in modo pienamente soddisfacente. Nella Memoria BRILL-NOETHER esso è dimostrato in vari modi (l'uno dei quali adopera appunto, come sopra si fa, una g_p^1 con punto p-plo): i quali però presuppongono tutti, in sostanza, il suddetto teorema d'esistenza (o qualcosa di equivalente) per completare i conti di costanti con cui si stabilisce l'esistenza di certe curve (ad es. di curve per cui si sono assegnati *ad arbitrio* i birapporti degli elementi di diramazione di una g_m^1, ecc.).

§ 22. Sulle rigate algebriche.

91. Termineremo questo lavoro con qualche applicazione alle rigate e varietà costituite da ∞^1 spazi (*).

Nel § 13 abbiamo ottenuto, per una varietà M_{k+1} d'ordine ν luogo di una ∞^1 del genere π di spazi S_k, ognun dei quali contenga $k+1$ punti di una curva d'ordine n e genere p, la formola (n.° 52):

$$n-p=\nu-(k+1)\pi+k+z; \tag{1}$$

e questa (per $\pi=0$) è poi stata fondamentale in questo 3.° Cap. per ottenere le proprietà essenziali delle serie lineari speciali sopra la curva di genere p. Ora da essa possiamo inversamente, valendoci di queste proprietà, dedurre risultati importanti per la varietà M_{k+1}.

Si osservi in fatti che, data ad arbitrio in S_r la varietà M_{k+1}, si posson sempre tracciare su essa infinite curve γ ognuna delle quali incontri gli S_k generatori della M_{k+1} in $k+1$ punti, per modo che sempre, senz'eccezione, il gruppo di $k+1$ punti di ogni S_k si componga di punti linearmente indipendenti, cioè non situati in uno spazio minore, sicchè, pel significato di z nella formola (1) applicata ad una tal curva,

$$z=0.$$

Si ottiene, ad esempio, una tal curva segando la M_{k+1} con un cono M_{r-k} projettante da un S_{r-k-2} (che non incontri la M_{k+1}) una curva razionale normale d'ordine $k+1$ (**): giacchè un tal cono è segato da un S_k generatore della M_{k+1} secondo $k+1$ punti, che si posson riguardare come situati su una curva razionale normale d'ordine $k+1$, e quindi non possono giacere in uno spazio inferiore. Ciò posto, se n è l'ordine e p il genere di una curva γ della detta specie, varrà la (1) con $z=0$. Se γ è projezione di una curva γ' dello stesso ordine n appartenente ad uno spazio superiore ad S_r, la M_{k+1} data sarà projezione di una M_{k+1} appartenente a questo spazio superiore, luogo degli S_k contenenti i gruppi di punti di γ' che han per projezioni i gruppi di $k+1$

(*) V. i miei lavori sulle rigate e in generale sulle varietà composte di ∞^1 spazi, citati nella prefazione.

(**) Se $r=k+1$, cioè se si tratta di una ∞^1 di spazi S_k in S_{k+1}, per la curva che si vuol costrurre si potrà a dirittura assumere una curva razionale normale d'ordine $k+1$.

punti di γ posti negli spazi generatori della varietà data. L'ordine della nuova M_{k+1} sarà ancora ν: poichè in caso opposto dovrebbe qualcuno dei suoi S_k incontrare lo spazio centrale di projezione, donde deriverebbero su γ dei gruppi di $k+1$ posti in spazi inferiori ad S_k, il che è contrario all'ipotesi fatta su γ. Adunque la M_{k+1} data è o non è projezione di una varietà dello stesso ordine appartenente ad uno spazio superiore secondo che la stessa proprietà ha o no una qualunque delle curve γ tracciate su essa nel modo detto. Applicando a queste curve un risultato del n.° 65, e tenendo conto della (1) avremo che: *Una varietà M_{k+1} luogo di una ∞^1 del genere π e d'ordine ν di spazi S_k ha per spazio normale uno di dimensione*

$$\nu-(k+1)\pi+k,$$

oppure maggiore: ciò a seconda che le dette curve γ tracciate su essa sono *non speciali* oppure *speciali.* Corrispondentemente a ciò si potrebbe chiamar *speciale* la varietà M_{k+1} nel 2.° caso.

Se $\pi=0$, visto che una M_{k+1}^{ν} non può appartenere ad uno spazio superiore di $S_{\nu+k}$, sarà precisamente questo lo spazio normale: cioè *le M_{k+1}^{ν} luoghi di una ∞^1 razionale di S_k son projezioni di quelle (dello stesso ordine) appartenenti ad $S_{\nu+k}$.* —

Si avverta che queste proposizioni valgono anche per le varietà ∞^1 di S_k contenute nello spazio S_{k+1}: ν indicherà allora la *classe* della varietà (come già si osservò al n.° 50) (*). — Ed anche si noti come applicando ad una curva γ della M_{k+1}, invece che il n.° 65, una proposizione del n.° 86, si

(*) In conseguenza, posto $k=1$, i risultati che nei miei lavori sulle rigate sono stabiliti mediante projezione delle rigate *normali* (v. specialmente, per quelli più generali relativi al genere p, il lavoro dei Math. Ann., tom. 34), in particolare le proposizioni sulle *direttrici* dei vari ordini (ad es. su quelle *d'ordine minimo*) di una rigata, valgono anche per le rigate *piane*, vale a dire per gl'inviluppi piani di rette; dànno cioè le varie curve (punteggiate) che con una data ∞^1 di rette del piano sono in corrispondenza biunivoca e *prospettiva,* ossia tale che ogni punto sta sulla retta omologa; e forniscono così le generazioni di una curva piana algebrica come inviluppo delle rette congiungenti i punti omologhi di due curve in corrispondenza biunivoca. — Similmente si può procedere per $k=2$, ed applicando metodi analoghi a quelli dei citati lavori sulle rigate si possono ottenere facilmente (*e sarebbe bene che fosse fatto*) dei risultati sulle curve (e rigate) direttrici di una varietà ∞^1 di piani, anche nel caso che questa stia nello spazio ordinario, vale a dire che si tratti dei piani di una sviluppabile ordinaria. Si avranno così le curve (e rigate) riferite prospettivamente ad una ∞^1 di piani, e quindi le generazioni di questa varietà mediante i piani congiungenti i punti omologhi di tre curve in corrispondenza uni-possa riconoscere se la M_{k+1} sia projezione di varietà appartenenti a spazi superiori e di ordini *superiori:* il che può anche esser utile.

92. Limitiamoci ora al caso di $k=1$, cioè delle rigate. Avremo, come caso particolare, dal n.° prec., che *una rigata di genere p e d'ordine ν ha per spazio normale un $S_{\nu-2p+1}$, od uno spazio superiore.*

Poniamo che la rigata sia *piana,* cioè si riduca al sistema delle tangenti di una curva piana di genere p e *classe* ν. Avremo che se $\nu \geqq 2p+2$ la curva, e precisamente la serie delle sue tangenti, si può sempre ottenere come projezione (contorno apparente) di una rigata (appartenente ad $S_{\nu-2p+1}$ e quindi *non* piana) d'ordine ν. Indicando con n l'ordine e con r il numero delle cuspidi (o più in generale dei punti di diramazione) della curva piana, la relazione (n.° 37) $\nu+r=2(n+p-1)$ riduce la condizione $\nu \geqq 2p+2$ a

$$r \leqq 2n-4.$$

Dunque: *una curva piana (non retta) di genere p e di classe $\nu \geqq 2p+2$, ossia d'ordine n e con un numero di cuspidi (punti di diramazione) $\leqq 2n-4$, ad esempio una curva priva di tali singolarità, è sempre il contorno apparente di una rigata non piana (di genere p e d'ordine ν) da un punto esterno* (*).

---

voca (o mediante i piani congiungenti le rette ed i punti omologhi di una rigata ed una curva in corrispondenza univoca).

Nel caso che la varietà di piani sia *razionale* la cosa è già effettuata nella mia Nota: *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani* (Atti della R. Acc. di Torino, tom. 21, 1885), ed in quella simultanea del sig. Brill: *Ueber rationale Curven und Regelflächen* (Sitzber. bay. Akad., 1885; ristampata nei Math. Ann., tom. 36, 1890). E quelle stesse quistioni, o le duali, relative ad una curva razionale, piana o sghemba, si ritrovano in lavori più recenti del sig. W. Stahl (*Zur Erzeugung der ebenen rationalen Curven,* Math. Ann., tom. 38, 1891; *Zur Erzeugung der rationalen Raumcurven,* Math. Ann., tom. 40, 1892; ecc.) e d'altri; senza che nessuno abbia avvertito come esse sian risolte dai miei lavori sulle rigate, e varietà di piani, razionali. Richiamo l'attenzione su ciò non per la questione di priorità, ma per rilevare come i metodi geometrici da me adoperati diano molto di più che quelli algebrici usati da quegli Autori: diano cioè la risoluzione degli stessi problemi pel genere p *qualunque* (v. ad es. il cit. lavoro Math. Ann., tom. 34).

(*) Sappiamo poi che quando ad es. è $n \geqq p+3$ la curva è projezione di una curva sghemba dello stesso ordine; sicchè la rigata d'ordine ν su nominata si potrà assumere sviluppabile se la curva piana non ha cuspidi (in caso contrario queste potrebbero esigere che il centro di projezione giaccia sulla sviluppabile). — Osservazione duale (v. n.° 85) per la proposizione duale.

Trasportando per dualità (nello spazio) si ha quest'altro teorema: *una curva piana di genere p e d'ordine $n \geqq 2p+2$, ossia una curva piana di classe ν con un numero di flessi (tangenti di diramazione) $\leqq 2\nu - 4$, sta sempre su una rigata non cono dello stesso ordine.* —

In questi enunciati le condizioni che abbiamo imposte alla curva piana son *sufficienti,* ma non *necessarie.* Per riconoscere in qualunque caso se essi valgano anche non verificandosi le dette condizioni si farà così (v. n.° 91). Si costruisca una curva γ, semplice o multipla, in tal corrispondenza con la serie delle tangenti della data curva piana C che ogni tangente di questa abbia due punti omologhi su γ e li contenga, mentre ogni punto di γ abbia per omologa una sola tangente di C (passante per esso); e che la coincidenza dei due punti di γ corrispondenti ad una stessa tangente di C abbia solo luogo per *contatti,* non in punti doppi di γ. Così γ potrà essere (secondo il metodo generale del n.° 91) la curva d'intersezione di una conica con la rigata delle tangenti di C, vale a dire una curva d'ordine 2ν composta di quella conica riguardata come ν-pla; oppure il luogo delle intersezioni delle tangenti di C cogli elementi omologhi di un sistema ∞^1 di coniche in corrispondenza biunivoca con quelle tangenti. In ogni caso si veda se la curva γ così ottenuta è speciale o no. Se non è speciale, le condizioni che sopra abbiam poste per la 1.ª proposizione, cioè $\nu \geqq 2p+2$ od $r \leqq 2n-4$, saranno necessarie. Se invece γ è speciale sarà C il contorno apparente di una rigata non piana d'ordine ν anche se $\nu = 2p+1$ ossia $r = 2n-3$; e potrà esserlo anzi per valori minori di ν. — Dualmente si opera per la proposizione duale.

93. Le rigate che al n.° 91 abbiam detto potersi chiamare speciali, quelle cioè d'ordine n e genere p che hanno per spazi normali spazi superiori ad S_{n-2p+1} (sicchè $p > 0$), presentano delle proprietà particolari che vogliamo ancora esaminare.

Anzitutto possiam subito vedere che *una rigata d'ordine n e genere $p > 0$ che abbia per sezioni iperplanari delle curve normali è un cono.* Invero sia S_r il suo spazio: due S_{r-1} generici taglieranno la rigata secondo due curve normali d'ordine n, le quali dalle generatrici della rigata son riferite univocamente, con un gruppo di n punti uniti nei punti d'incontro della rigata coll'S_{r-2} comune ai due S_{r-1}. La corrispondenza fra le due curve sarà dunque (n.° 57) contenuta in una *collineazione* tra i loro spazi: e questa avendo n punti uniti su un S_{r-2}, con $n \geqq (r-2)+2$ (ossia $n \geqq r$, perchè quelle curve d'ordine n degli S_{r-1} sono di genere >0 e quindi appartengono a spazi inferiori ad S_n), mentre $r-1$ qualunque di quei punti non stanno in un S_{r-3}, avrà tutti i punti dell'S_{r-2} per punti uniti, cioè sarà una *prospettività:* le rette congiungenti i punti omologhi, in particolare le generatrici della rigata, passeranno per uno stesso punto. La rigata è dunque un cono.

Così ad esempio *se una rigata di genere $p>0$ e d'ordine $n>2p-2$ appartiene ad un S_{n-p+1}, ovvero ha un tale spazio per spazio normale, essa è un cono.* — Si noti che con quelle ipotesi, $p>0$ e $n>2p-2$, gli spazi normali per le rigate speciali vanno da S_{n-2p+2} ad S_{n-p+1} (v. la fine del n.° 74): sicchè la proposizione ora enunciata si riferisce alle rigate speciali *estreme.*

94. Proposizioni molto più generali potremo ottenere per un'altra via, basata sul teorema Riemann-Roch.

Sia F una rigata di genere $p>0$ e d'ordine n appartenente ad S_r. Per un numero $i+1$ di generatrici arbitrarie, ove $i \geqq 0$ ed inoltre, per ciò che diremo poi, $i \leqq p-1$, conduciamo un iperpiano S_{r-1}: ciò sarà sempre possibile se

$$r \geqq 2i+2. \tag{1}$$

L'intersezione residua di quell'iperpiano con F sarà una curva d'ordine $n-i-1$, la quale potrà spezzarsi ulteriormente. Comunque però essa sia, non potrà stare in un S_{r-2} nell'ipotesi già fissata di $i \leqq p-1$, altrimenti gl'iperpiani passanti per questo spazio segherebbero F (oltre che in quella curva) in una serie lineare g_{i+1} di generatrici, di cui farebbe parte il gruppo di $i+1$ ($\leqq p$) generatrici che s'era *scelto ad arbitrio,* il che contraddirebbe al teorema Riemann-Roch.

Supposto dunque, per maggior generalità, che quella curva d'ordine $n-i-1$ si spezzi in una curva γ^m d'ordine m *direttrice* irriduttibile, semplice o multipla, ed in $(n-m-i-1)$ generatrici (numero $\geqq 0$), dovrà lo spazio S_h a cui *appartiene* γ essere di dimensione

$$h \geqq r-n+m+i: \tag{2}$$

altrimenti esso, insieme con quelle generatrici (che si appoggiano a γ, e quindi ad S_h), determinerebbe uno spazio di dimensione $r-2$, o minore, che conterrebbe la curva complessiva.

La curva γ^m di S_h è certo *speciale* se

$$h \geqq m-p+1,$$

condizione che è sicuramente soddisfatta, grazie alla relazione (2), se poniamo la seguente condizione

$$i \geqq n - p - r + 1. \tag{3}$$

Siccome $i \leqq p - 1$, questa nuova condizione ha per conseguenza

$$r \geqq n - 2p + 2, \tag{4}$$

e quindi esige che F sia una *rigata speciale.* Supposto che così sia, siccome lo spazio normale della rigata sarà S_{n-2p+2} od uno spazio superiore, potremo anche supporre soddisfatta la (4); ed allora la (3) ci darà per i un limite minimo che riescirà $\leqq p - 1$, cosicchè la si potrà soddisfare con un valore di i tale che $0 \leqq i \leqq p - 1$. Se si può fare in modo che quel valore di i verifichi anche l'altra condizione (1), potremo asserire che la curva γ^m da noi costruita è speciale. Ora la (1) varrà certo se $r \geqq 2p$ (poichè $p \geqq i + 1$); od anche se $n \geqq 4p - 2$, perchè da questa e dalla (4) segue $r \geqq 2p$. Possiamo dunque dire che *una rigata di genere $p > 0$ e d'ordine n la quale sia speciale, cioè abbia per spazio normale un S_r ove $r \geqq n - 2p + 2$, contiene sempre una curva direttrice speciale (se esiste un valore di i compreso tra 0 e $p - 1$, i limiti inclusi, il quale verifichi le condizioni* (1) *e* (3); *ed in particolare) se è $r \geqq 2p$, od anche se è $n \geqq 4p - 2$.* S'intende che quella curva potrà esser *semplice* o *multipla.*

95. Il fatto che la curva γ di genere p, d'ordine m, di S_h è speciale ci dà (n.i 74 e 72)

$$h \leqq p - 1, \qquad m \leqq 2p - 2,$$
$$m \geqq 2h.$$

Ma possiamo ottenere pei numeri h ed m delle limitazioni ulteriori, considerando la serie lineare g_{n-m}^{r-h-1} che sulla rigata F è segata dagl'iperpiani passanti per S_h, e supponendo che questa serie *non* sia speciale. *Basta* perciò che la sua dimensione sia $\geqq p$, vale a dire:

$$r \geqq p + h + 1;$$

oppure che il suo ordine sia $\geqq 2p - 1$, vale a dire:

$$n \geqq 2p + m - 1.$$

La 1.a condizione si verifica certo, in causa della $h \leqq p - 1$, se poniamo:

$$r \geqq 2p;$$

la 2.ª invece, in causa della $m \leq 2p - 2$, se poniamo:

$$n \geq 4p - 3.$$

Allora dal fatto che quella serie non è speciale seguirà

$$(n - m) - (r - h - 1) \geq p,$$

ossia:

$$m - h \leq n - p - r + 1. \tag{5}$$

Questa confrontata con la (3) dà:

$$m - h \leq i. \tag{6}$$

E d'altra parte la (5) stessa, o la (6), in forza della $m \geq 2h$ dànno pure

$$h \leq n - p - r + 1 \tag{7}$$

$$h \leq i. \tag{8}$$

Ora s'indichi di nuovo con S_r lo spazio normale per la rigata, e nella costruzione della curva γ fatta nel n.º prec. si prenda per i il valor minimo, cioè, per la (3),

$$i = n - p - r + 1,$$

sicchè la condizione (1) diventa:

$$n \geq p + 3i + 1.$$

Potremo allora completare l'enunciato con cui finiva il n.º prec. così: *Se si pone* $r = n - p - i + 1$, $(0 \leq i \leq p - 1)$, *la rigata contiene una curva direttrice speciale (se* $n \geq p + 3i + 1$ *ed in particolare) se* $n \geq 4p - 2$, *oppure se* $r \geq 2p$ *(vale a dire* $n \geq 3p + i - 1$*); e sotto l'una o l'altra di queste due condizioni lo spazio normale per quella curva sarà di dimensione* $h \leq i$, *mentre l'ordine* m *della curva stessa sarà tale che* $2h \leq m \leq h + i$.

Dando ad i i valori 0, 1, 2,... (il primo dei quali riporterà al teorema del n.º 93); ovvero a p i valori 1, 2,...; si otterranno come casi particolari una serie di proposizioni notevoli relative alle rigate speciali.

Sui sistemi simmetrici di equazioni a derivate parziali.

(*Di* Carlo Somigliana, *a Pavia*.)

In una Nota pubblicata nel vol. 24, serie 2.ª dei *Rendiconti* del Reale Istituto Lombardo ho chiamato *simmetrici* certi sistemi di equazioni lineari, a derivate parziali, di 2.° ordine, i quali sono i più generali, per cui esiste un teorema di reciprocità analogo a quello di Green, per l'equazione di Laplace, e di Betti per le equazioni della elasticità, ed ho cercato di estendere a questi sistemi i metodi classici di integrazione per serie, nel caso in cui il campo di integrazione è limitato da una superficie di 2.° ordine.

Ora mi propongo di dare l'estensione di una altra parte della teoria dell'equazione di Laplace, la rappresentazione per mezzo di integrali definiti, che può, come è noto, dedursi dal teorema di reciprocità, limitandomi però al caso in cui si hanno due sole variabili indipendenti. Quando queste sono in numero maggiore si incontrano difficoltà più gravi, sebbene, in casi speciali, la estensione sia ancora possibile, ad esempio per le equazioni della isotropia elastica.

La formola di Green, e le affini, derivano dalla esistenza di certi integrali speciali (che chiamerò *caratteristici,* come già in un'altra occasione) i quali hanno un punto isolato di singolarità, nel quale essi, o le loro derivate, diventano infiniti secondo una legge determinata. Nel caso nostro dei sistemi simmetrici, non è difficile trovare integrali particolari che soddisfacciano alle condizioni richieste rispetto al punto singolare, ma essi risultano polidromi, e questa proprietà rende generalmente inapplicabili gli ordinari procedimenti. Vi è però un caso di eccezione, quando i diversi rami di questi integrali polidromi si riattaccano fra loro soltanto nel punto di singolarità (ed, al più, anche nel punto all'infinito), poichè allora uno qualunque di questi rami, preso isolatamente, può essere considerato come monodromo, senza che si perda la continuità. Un esempio semplicissimo si ha nella funzione $\lg \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, l'integrale caratteristico ben noto della equazione:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Gli integrali, di cui mi servo nel presente lavoro appartengono a questa categoria; infatti, sebbene formati con funzioni polidrome, essi contengono delle costanti arbitrarie, le quali possono sempre essere determinate in modo che si verifichi il fatto particolare, poc'anzi accennato.

La ricerca di questi integrali ci conduce alla risoluzione di un altro problema, la determinazione, cioè, dell'integrale caratteristico per l'equazione lineare, a coefficienti costanti, con due variabili indipendenti, di un ordine pari qualsiasi; anzi, come è facile vedere, l'un problema coincide coll'altro. Ne viene quindi ovviamente la estensione (che però qui non sviluppo) ad un'equazione di ordine pari qualunque di quelle ricerche che ho esposto in una Memoria pubblicata nel tom. 18 degli *Annali di Matematica* e relativa all'equazione di 4.° ordine.

§ 1. Forma generale degli integrali.

Si abbia un sistema simmetrico di equazioni a derivate parziali con n funzioni $u_1, u_2, \dots u_n$ di due variabili indipendenti x, y, ed i secondi membri nulli, cioè un sistema della forma:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_{11} u_1 + \Delta_{12} u_2 + \cdots + \Delta_{1n} u_n = 0 \\ \Delta_{21} u_1 + \Delta_{22} u_2 + \cdots + \Delta_{2n} u_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta_{n1} u_1 + \Delta_{n2} u_2 + \cdots + \Delta_{nn} u_n = 0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

dove

$$\Delta_{hs} = \Delta_{sh} = a_{hs} D_x^2 + 2 b_{hs} D_x D_y + c_{hs} D_y^2,$$

e le a_{hs}, b_{hs}, c_{hs} sono costanti reali. Introduciamo un nuovo simbolo di operazione, ponendo:

$$\Delta(D_x, D_y) = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \dots & \Delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} \dots & \Delta_{nn} \end{vmatrix},$$

e intendendo che esso indichi l'operazione rappresentata simbolicamente dallo sviluppo, colle regole ordinarie, del determinante del 2.° membro, sviluppo che supporremo non identicamente nullo.

Similmente porremo:

$$\nabla_{hs} = \frac{\partial \Delta}{\partial \Delta_{hs}},$$

ove nella derivazione Δ_{hs} e Δ_{sh} devono essere considerati come distinti.

Siano ora Φ_1, $\Phi_2, \ldots \Phi_n$ n nuove funzioni delle variabili x, y e formiamo per le u_1, $u_2, \ldots u_n$ le seguenti espressioni:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = \nabla_{11}\Phi_1 + \nabla_{21}\Phi_2 + \cdots + \nabla_{n1}\Phi_n \\ u_2 = \nabla_{12}\Phi_1 + \nabla_{22}\Phi_2 + \cdots + \nabla_{n2}\Phi_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n = \nabla_{1n}\Phi_1 + \nabla_{2n}\Phi_2 + \cdots + \nabla_{nn}\Phi_n. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Esse daranno un sistema di integrali per le equazioni (1), se ciascuna delle funzioni Φ_h soddisfa all'equazione a derivate parziali di ordine $2n$ (l'equazione caratteristica di Cauchy)

$$\Delta(D_x, D_y)\Phi = 0. \tag{3}$$

Difatti l'espressione simbolica

$$\Delta_{h1}\nabla_{s1} + \Delta_{h2}\nabla_{s2} + \cdots + \Delta_{hn}\nabla_{sn},$$

è uguale a Δ od a zero secondo che h è uguale o differente da s.

Se poi nei secondi membri delle (1) invece dello zero si avessero n funzioni note X_1, $X_2, \ldots X_n$, le (2) darebbero ancora un sistema di integrali, qualora le funzioni Φ_1, $\Phi_2, \ldots \Phi_n$ soddisfacessero rispettivamente alle equazioni:

$$\Delta\Phi_1 = X_1, \qquad \Delta\Phi_2 = X_2, \ldots \qquad \Delta\Phi_n = X_n, \tag{4}$$

invece che alla (3).

Se si hanno due sistemi integrali delle (1) u_1, $u_2, \ldots u_n$ e v_1, $v_2, \ldots v_n$, il teorema di reciprocità è espresso da una relazione della forma:

$$\sum_{s=1}^{n} \int (u_s M_s - v_s L_s)\, dl = 0,$$

dove le L_s ed M_s sono funzioni lineari delle derivate prime delle u_s e delle v_s rispetttivamente, e l'integrazione è estesa al contorno l di un campo S nel quale le u_s, v_s sono regolari. Perchè si possano da questo teorema dedurre formole di rappresentazione per le funzioni u_1, $u_2, \ldots u_n$, quando le v_1, $v_2, \ldots v_n$ hanno un punto isolato di singolarità, le derivate di 1.° ordine di queste dovranno avere un infinito di 1.° ordine nel punto singolare (*). Ora i secondi membri delle (2) sono funzioni lineari delle derivate di ordine $2n-2$ delle funzioni Φ_s; noi potremo quindi avere un sistema di integrali che possiedono la richiesta singolarità, quando una delle Φ_s sia tale che le sue derivate di ordine $2n-1$ diventino infinite di 1.° ordine.

Osserviamo ora che anche per la equazione (3) si può stabilire un teorema di reciprocità, poichè mediante note formole di trasformazione d'integrali si ha:

$$\int (U\Delta V - U\Delta V)\,dS = \int F(U,\ V)\,dl,$$

dove $F(U, V)$ contiene linearmente le derivate di U e V fino a quelle di ordine $2n-1$. Quindi se U e V soddisfanno la equazione (3) si ha:

$$\int F(U,\ V)\,dl = 0.$$

Ora perchè si possa da quésta relazione dedurre una espressione di U mediante un integrale definito [cioè V sia un integrale caratteristico della (3)], dovranno le derivate di V, di ordine $2n-1$, avere un punto di infinito isolato di 1.° ordine.

La determinazione degli integrali caratteristici del sistema (1) si riduce quindi alla determinazione dell'integrale caratteristico della equazione (3).

§ 2. Integrale caratteristico per una equazione di ordine pari.

Consideriamo la funzione $\Delta(x, y)$ che si ottiene sostituendo le variabili x, y ai simboli D_x, D_y nella espressione simbolica $\Delta(D_x, D_y)$; essa sarà omogenea, di grado $2n$, e potremo porre quindi:

$$\Delta(x,\ y) = a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} y + \cdots + a_n y^{2n}.$$

Noi supporremo che essa non possa mai annullarsi per valori reali di x, y non contemporaneamente nulli. L'equazione:

$$\Delta\left(\frac{x}{y},\ 1\right) = 0,$$

avrà allora $2n$ radici complesse, coniugate a due a due, quando si consideri

(*) Cioè diventare infinite come $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, per $x=0$, $y=0$.

il rapporto $\frac{x}{y}$, come incognita. Noi rappresenteremo queste radici con

$$\Pi_1, \quad \Pi_2, \ldots \quad \Pi_n$$
$$\Pi'_1, \quad \Pi'_2, \ldots \quad \Pi'_n,$$

ponendo:

$$\Pi_s = p_s + iq_s \qquad i = \sqrt{-1}$$
$$\Pi'_s = p_s - iq_s \qquad q_s \neq 0,$$

e supporremo, dapprima, che siano tutte distinte.

Avremo allora:

$$\Delta(x, y) = a_0(x - \Pi_1 y)(x - \Pi'_1 y) \cdots (x - \Pi'_n y),$$

e quindi anche:

$$\Delta(D_x, D_y) = a_0(D_x - \Pi_1 D_y)(D_x - \Pi'_1 D_y) \cdots (D_x - \Pi'_n D_y),$$

e perciò l'integrale generale della (3) sarà:

$$\Phi = f_1(\Pi_1 x + y) + g_1(\Pi'_1 x + y) + \cdots + g_n(\Pi'_n(\Pi'_n x + y),$$

cioè sarà la somma di $2n$ funzioni arbitrarie dei $2n$ fattori lineari della forma binaria:

$$\Delta(y, -x) = a_0 y^{2n} - a_1 y^{2n-1} x + \cdots + a_{2n} x^{2n}.$$

Ciò posto, consideriamo il seguente integrale della nostra equazione:

$$Z = \sum_{s=1}^{n} (\lambda_s + i\mu_s)(\Pi_s x + y)^{2n-2} \lg(\Pi_s x + y), \tag{5}$$

ove le λ_s, μ_s sono $2n$ costanti reali, per ora, arbitrarie. Si ha:

$$\lg(\Pi_s x + y) = \lg\sqrt{(p_s x + y)^2 + q_s^2 x^2} + i \operatorname{arco\,tg} \frac{q_s x}{p_s x + y},$$

quindi se poniamo:

$$(p_s x + y + iq_s x)^{2n-2} = \varphi_s + i\psi_s \qquad Z = Z_1 + iZ_2,$$

saranno φ_s, ψ_s due funzioni omogenee di grado $2n$ delle x, y, e avremo:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{s=1}^{n} (\lambda_s\varphi_s - \mu_s\psi_s)\lg\sqrt{(p_s x + y)^2 + q_s^2 x^2} - \sum_{s=1}^{n} (\mu_s\varphi_s + \lambda_s\psi_s) \operatorname{arco\,tg} \frac{q_s x}{p_s x + y} \\ Z_2 &= \sum_{s=1}^{n} (\mu_s\varphi_s + \lambda_s\psi_s)\lg\sqrt{(p_s x + y)^2 + q_s^2 x^2} + \sum_{s=1}^{n} (\lambda_s\varphi_s - \mu_s\psi_s) \operatorname{arco\,tg} \frac{q_s x}{p_s x + y}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Queste due funzioni sono due integrali particolari della nostra equazione, in cui non vi sono più espressioni immaginarie, e sono in generale polidrome. Difatti quando noi, nel piano delle variabili x, y, compiamo un giro positivo attorno al punto comune di singolarità per le funzioni *arco tangente*, che è l'origine $x = y = 0$, i valori di Z_1 e Z_2 aumentano rispettivamente di

$$-2\pi \sum_{s=1}^{n} (\mu_s \varphi_s + \lambda_s \psi_s) \quad \text{e} \quad 2\pi \sum_{s=1}^{n} (\lambda_s \varphi_s - \mu_s \psi_s),$$

quantità generalmente non nulle, e funzioni delle coordinate del punto di partenza.

Però, se le costanti λ_s, μ_s possono determinarsi in modo che l'una, o l'altra, di queste quantità sia identicamente nulla (cioè nulla qualunque siano i valori di x, y) la Z_1, o la Z_2, potrà essere considerata come monodroma, quando ne sia fissato il valore in un punto, che non sia il punto $x = y = 0$. Ora le φ_s, ψ_s sono $2n$ forme binarie differenti di grado $2n - 2$, ed è noto che fra m forme binarie di grado $m - 2$ esiste sempre almeno una relazione lineare a coefficienti non tutti nulli. Basterà quindi prendere per le costanti

$$\mu_1, \quad \lambda_1, \quad \mu_2, \quad \lambda_2, \ldots \quad \mu_n, \quad \lambda_n,$$

oppure per le costanti

$$\lambda_1, \quad -\mu_1, \quad \lambda_2, \quad -\mu_2, \ldots \quad \lambda_n, \quad -\mu_n,$$

delle quantità proporzionali a questi coefficienti, perchè si abbia:

$$\sum_{s=1}^{n} (\mu_s \varphi_s + \lambda_s \psi_s) = 0,$$

oppure:

$$\sum_{s=1}^{n} (\lambda_s \varphi_s - \mu_s \psi_s) = 0.$$

Per determinare quale sia la forma di questa relazione identica, che è il risultato della eliminazione di x^{2n-2}, $x^{2n-1} y, \ldots, y^{2n-2}$ fra le φ_s, ψ_s, poniamo:

$$\Pi_s = \rho_s e^{i\omega_s}.$$

Avremo allora:

$$\varphi_s + i\psi_s = (\rho_s e^{i\omega_s} x + y)^{2n-2} = \sum_{h=0}^{2n-2} \binom{2n-2}{h} \rho^{2n-h-2} e^{i(2n-h-2)\omega_s} x^{2n-h-2} y^h,$$

e quindi:

$$\varphi_s = \rho_s^{2n-2} \cos(2n-2)\omega_s \cdot x^{2n-2} + \binom{2n-2}{1} \rho_s^{2n-3} \cos(2n-3)\omega_s \cdot x^{2n-3} y + \cdots$$
$$+ \binom{2n-2}{2n-3} \rho_s \cos\omega_s x y^{2n-3} + y^{2n-2}$$

$$\psi_s = \rho_s^{2n-2} \operatorname{sen}(2n-2)\omega_s \cdot x^{2n-2} + \binom{2n-2}{1} \rho_s^{2n-3} \operatorname{sen}(2n-3)\omega_s \cdot x^{2n-3} y + \cdots$$
$$+ \binom{2n-2}{2n-3} \rho_s \operatorname{sen}\omega_s x y^{2n-3}.$$

La relazione fra le φ_s, ψ_s si ottiene formando la matrice (di $2n$ righe e $2n-1$ colonne) dei coefficienti delle φ_s, ψ_s e ponendo uguale a zero il determinante che si ottiene da questa matrice coll'aggiungere una colonna formata colle φ_s, ψ_s, nello stesso ordine con cui ne sono stati presi i coefficienti. Questa relazione è perciò la seguente:

$$\begin{vmatrix} \rho_1^{2n-2}\cos(2n-2)\omega_1 & \rho_1^{2n-3}\cos(2n-3)\omega_1 \ldots & \rho_1\cos\omega_1 & 1 & \varphi_1 \\ \rho_1^{2n-2}\operatorname{sen}(2n-2)\omega_1 & \rho_1^{2n-3}\operatorname{sen}(2n-3)\omega_1 \ldots & \rho_1\operatorname{sen}\omega_1 & 0 & \psi_1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_n^{2n-2}\cos(2n-2)\omega_n & \rho_n^{2n-3}\cos(2n-3)\omega_1 \ldots & \rho_n\cos\omega_n & 1 & \varphi_n \\ \rho_n^{2n-2}\operatorname{sen}(2n-2)\omega_n & \rho_n^{2n-3}\operatorname{sen}(2n-3)\omega_1 \ldots & \rho_n\operatorname{sen}\omega_n & 0 & \psi_n \end{vmatrix} = 0.$$

Se tutti i minori di ordine $2n-1$ della matrice considerata fossero nulli, i coefficienti della relazione fra le funzioni date sarebbero formati coi minori di ordine massimo che non sono tutti nulli.

Noi supporremo che sia la Z_1 la funzione che si vuol rendere monodroma, e quindi scriveremo la relazione considerata sotto la forma:

$$\sum_{s=1}^{n}(\mu_s\varphi_s + \lambda_s\psi_s) = 0. \tag{7}$$

I coefficienti μ_s, λ_s si potranno poi esprimere facilmente in funzione delle p_s, q_s mediante le formole di moltiplicazione per le funzioni seno e coseno, poichè si ha:

$$p_s = \rho_s\cos\omega_s \qquad q_s = \rho_s\operatorname{sen}\omega_s.$$

Osserviamo ora che, quando sia verificata la (7), non solo la funzione Z_1 potrà essere considerata come monodroma, quando ne sia fissato il valore in un punto, che non sia il punto $x = y = 0$, ma tali potranno considerarsi anche tutte le sue derivate. Difatti le derivate della funzione *arco tangente* sono monodrome, e quindi la polidromia delle derivate di Z_1 non può derivare che dalle funzioni *arco tangente*, in esse contenute. Per una derivata di ordine h rispetto ad x, e t rispetto ad y si avrà quindi:

$$\frac{\partial^{h+t} Z_1}{\partial x^h \partial y^t} = -\sum_{s=1}^{n}\left(\mu_s\frac{\partial^{h+t}\varphi_s}{\partial x^h\partial y^t} + \lambda_s\frac{\partial^{h+t}\psi_s}{\partial x^h\partial y^t}\right)\operatorname{arco\,tg}\frac{q_s x}{p_s x + y} + \cdots,$$

ove la parte scritta è la sola che può essere polidroma. Ma dalla (7) si ha:

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\mu_s\frac{\partial^{h+t}\varphi}{\partial x^h\partial y^t} + \lambda_s\frac{\partial^{h+t}\psi_s}{\partial x^h\partial y^t}\right) = 0,$$

e questa relazione ha rispetto alla derivata considerata lo stesso significato che la (7) per la Z_1; perciò anche questa derivata gode delle stesse proprietà della Z_1.

Passiamo ora a considerare il caso in cui l'equazione:

$$\Delta\left(\frac{x}{y},\ 1\right) = 0,$$

ha delle radici multiple. Basterà considerare il caso che una delle radici, ad esempio Π_1, sia multipla secondo il numero m. L'integrale generale della equazione:

$$\Delta(D_x,\ D_y)\Phi = 0,$$

si può allora rappresentare nel modo seguente:

$$\Phi = \sum_{h=1}^{m} (\Pi'_1 x + y)^{h-1} f_h(\Pi_1 x + y) + \sum_{h=1}^{m} (\Pi_1 x + y)^{h-1} g_h(\Pi'_1 x + y)$$
$$+ \sum_{h=m+1}^{n} f_h(\Pi_{h-m+1} x + y) + \sum_{h=m+1}^{n} g_h(\Pi_{h-m+1} x + y).$$

Questa espressione contiene infatti $2n$ funzioni arbitrarie, ed inoltre posto:

$$F_h = (\Pi'_1 x + y)^{h-1} f_h(\Pi_1 x + y),$$

si ha, per $s \leqq h-1$,

$$(D_x - \Pi_1 D_y)^s F_h = (h-1)\cdots(h-s)(\Pi'_1 - \Pi_1)^s (\Pi'_1 x + y)^{h-s-1} f_h(\Pi_1 x + y),$$

e quindi:

$$(D_x - \Pi_1 D_y)^h F_h = 0.$$

Ora siccome h può assumere i valori $1, 2, \ldots m$, l'espressione $\Delta(D_x,\ D_y)$ contiene certamente il fattore $(D_x - \Pi_1 D_y)^h$, e quindi si avrà:

$$\Delta F_h = 0.$$

Potremo dunque prendere invece della funzione Z, data dalla (5), la seguente:

$$\left.\begin{aligned} Z = \sum_{h=1}^{m} (\lambda_h + i\mu_h)(\Pi'_1 x + y)^{h-1} (\Pi_1 x + y)^{2n-h-1} \lg(\Pi_1 x + y) \\ + \sum_{s=m+1}^{n} (\lambda_s + i\mu_s)(\Pi_{s-m+1} x + y)^{2n-2} \lg(\Pi_{s-m+1} x + y), \end{aligned}\right\} \quad (5')$$

ove compaiono ancora $2n$ costanti arbitrarie.

Per vedere come possano essere determinate queste costanti allo scopo di ottenere la monodromia per la parte reale di Z, poniamo:

$$\overline{\varphi_h} + i\overline{\psi_h} = (\Pi'_1 x + y)^{h-1} (\Pi_1 x + y)^{2n-h-1} \qquad Z = Z_1 + i Z_2,$$

ed avremo:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 = \lg\sqrt{(p_1 x + y)^2 + q_1^2 x^2}\cdot\sum_{h=1}^{m}(\lambda_h\overline{\varphi_h} - \mu_h\overline{\psi_h}) - \operatorname{arco\,tg}\frac{q_1 x}{p_1 x + y}\cdot\sum_{h=1}^{m}(\mu_h\overline{\varphi_h} + \lambda_h\overline{\psi_h}) \\ + \sum_{s=m+1}^{n}(\lambda_s\varphi_s - \mu_s\psi_s)\lg\sqrt{(p_s x + y)^2 + q_s^2 x^2} - \sum_{s=m+1}^{n}(\mu_s\varphi_s + \lambda_s\psi_s)\operatorname{arco\,tg}\frac{q_s x}{p_s x + y}\,. \end{aligned}\right\} \quad (6')$$

Ora perchè questa espressione possa essere considerata come monodroma basta che si abbia identicamente

$$\sum_{h=1}^{m}(\mu_h\overline{\varphi_h} + \lambda_h\overline{\psi_h}) + \sum_{s=m+1}^{n}(\mu_s\varphi_s + \lambda_s\psi_s) = 0. \quad (7')$$

Ora le $2n$ forme, di grado $2n-2$, $\overline{\varphi_h}$, $\overline{\psi_h}$, φ_s, ψ_s sono in generale legate da una relazione lineare, e quindi si potranno determinare le costanti λ_h, μ_h, λ_s, μ_s, come nel caso, in cui non esistevano radici multiple.

Merita speciale menzione il caso in cui tutte le radici si riducono a due sole coniugate, cioè quando $m = n$. La (7') diviene allora:

$$\sum_{h=1}^{n}(\mu_h\overline{\varphi_h} + \lambda_h\overline{\psi_h}) = 0,$$

e la (6') ci dà:

$$Z_1 = \lg\sqrt{(p_1 x + y)^2 + q_1^2 x^2}\cdot\sum_{h=1}^{n}(\lambda_h\overline{\varphi_h} - \mu_h\overline{\psi_h}),$$

quindi scompaiono le funzioni *arco tangente* dalla espressione di Z_1. È facile vedere quale è in tal caso la funzione di grado $2n-2$ che moltiplica il logaritmo. Difatti la funzione

$$Z = (\Pi'_1 x + y)^{n-1}(\Pi_1 x + y)^{n-1}\lg(\Pi_1 x + y),$$

è, per quanto si è visto, un integrale dell'equazione:

$$(D_x - \Pi_1 D_y)^n (D_x - \Pi'_1 D_y)^n \Phi = 0,$$

a cui si riduce la nostra equazione $\Delta\Phi = 0$, e separando la parte reale dalla immaginaria troviamo:

$$Z_1 = \left\{(p_1 x + y)^2 + q_1^2 x^2\right\}^{n-1}\lg\sqrt{(p_1 x + y)^2 + q_1^2 x^2}.$$

Questo integrale, quando $p_1 = 0$ $q_1 = 1$ $n = 2$, si riduce ad uno ben conosciuto.

Per le applicazioni che abbiamo di mira conviene cercare la forma delle derivate degli integrali che abbiamo determinato. Dalla (5) si ha:

$$\frac{\partial^{h+t} Z}{\partial x^h \partial y^t} = \sum_{s=1}^{n}(\lambda_s + i\mu_s)\Pi_s^h(\Pi_s x + y)^{2n-h-t-2}\left\{A_{ht}^{(s)}\lg(\Pi_s x + y) + B_{ht}^{'(s)}\right\},$$

dove $A_{ht}^{(s)}$, $B_{ht}^{(s)}$ sono costanti. Per $h+t=2n-2$, il secondo membro si riduce ad una funzione lineare con coefficienti costanti delle espressioni

$$\lg(\Pi_1 x + y), \qquad \lg(\Pi_2 x + y), \ldots, \qquad \lg(\Pi_n x + y).$$

Le derivate di ordine $2n-1$ di Z_1 saranno le parti reali delle derivate di queste funzioni; ed avranno evidentemente un punto di infinito isolato, di 1.° ordine, nell'origine $x=y=0$.

Nel caso in cui si ha una radice multipla, le derivate della funzione

$$F_h = (\Pi'_1 x + y)^{h-1}(\Pi_1 x + y)^{2n-h-1}\lg(\Pi_1 x + y),$$

che sono di ordine non superiore a $2n-h-1$ sono della forma:

$$H_h(x, y)\lg(\Pi_1 x + y) + K_h(x, y),$$

ove H, K sono funzioni omogenee, razionali *intere* di grado uguale a $2n-2-\nu$, se ν è l'ordine della derivata. Se invece ν è maggiore di $2n-h-1$, le K sono funzioni omogenee, razionali *fratte*, ed ancora dello stesso grado; inoltre il loro denominatore è la potenza

$$(\Pi_1 x + y)^{\nu-(2n-h-1)}.$$

Di qui concludiamo che le derivate d'ordine $2n-2$ di Z, quando questa funzione è data dalla (5') sono della forma seguente:

$$\sum_{s=1}^{n-m+1} A_s \lg(\Pi_s x + y) + \sum_{h=1}^{m} \frac{R_{h-1}(x, y)}{(\Pi_1 x + y)^{h-1}},$$

dove le $R_{h-1}(x, y)$ sono omogenee, razionali, intere, di grado $h-1$.

Anche in questo caso, dunque, le derivate d'ordine $2n-1$ della Z_1 avranno un punto di infinito isolato, di 1.° ordine, nell'origine.

Perciò la funzione Z_1 data dalla (5) o (5') ha tutte le proprietà richieste per l'integrale caratteristico della equazione

$$\Delta(D_x, D_y)\Phi = 0,$$

quando, ben inteso, si ammetta che la forma $\Delta(x, y)$ sia positiva.

§ 3. Teorema di reciprocità e formole integrali pei sistemi simmetrici.

Le equazioni (1) possono in infiniti modi essere poste sotto la forma:

$$\frac{\partial X_{11}}{\partial x} + \frac{\partial X_{12}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial X_{21}}{\partial x} + \frac{\partial X_{22}}{\partial y} = 0 \ldots \qquad \frac{\partial X_{n1}}{\partial x} + \frac{\partial X_{n2}}{\partial y} = 0. \qquad (1')$$

Sopra due moti di Poinsot concordanti (*).

(*Di* Roberto Marcolongo, *in Roma*.)

I due moti P_0, P_1 che si considerano hanno a comune il centro e le direzioni degli assi delle due quadriche basi, direzioni che accenneremo con a, b, c, e sono individuati rispettivamente dalle costanti:

$$\left(\frac{a_0}{n_0}\right)^2, \quad \left(\frac{b_0}{n_0}\right)^2, \quad \left(\frac{c_0}{n_0}\right)^2, \quad \left(\frac{h_0}{n_0}\right)^2; \qquad \left(\frac{a_1}{n_1}\right)^2, \quad \left(\frac{b_1}{n_1}\right)^2, \quad \left(\frac{c_1}{n_1}\right)^2, \quad \left(\frac{h_1}{n_1}\right)^2,$$

tra le quali hanno luogo due relazioni. Gli angoli che una terna d'assi (x_0, y_0, z_0) connessa con P_0 fa colla terna (a, b, c) hanno la seguente rappresentazione ellittica:

$$\cos a z_0 = \frac{\sigma(u_0 - \omega_\alpha)\sigma(v_0 - \omega_\alpha)}{\sigma u_0 \sigma v_0} e^{\eta_\alpha(v_0 + u_0 - \omega_\alpha)}$$

$$\cos a x_0 + i \cos a y_0 = E_0 e^{-\left(\zeta v_0 + \varepsilon i \frac{h_0}{\mu_0}\right) u_0} \frac{\sigma(u_0 + v_0 - \omega_\alpha)\sigma\omega_\alpha}{\sigma u_0 \sigma v_0} e^{\eta_\alpha(v_0 + u_0 - \omega_\alpha)}$$

$$\cos a x_0 - i \cos a y_0 = \frac{1}{E_0} e^{\left(\zeta v_0 + \varepsilon i \frac{h_0}{\mu_0}\right) u_0} \frac{\sigma(u_0 - v_0 - \omega_\alpha)\sigma\omega_\alpha}{\sigma u_0 \sigma v_0} e^{\eta_\alpha(v_0 - u_0 - \omega_\alpha)}$$

dove E_0 e v_0 sono costanti; u_0 varia proporzionalmente al tempo e precisamente:

$$\frac{d u_0}{d t} = \tau = \frac{\mu_0}{n_0}.$$

Inoltre il discriminante delle funzioni ellittiche è positivo; l'argomento u_0 è

(*) Cfr. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*. 2.me partie, pag. 75 e seg., e Darboux, *Notes à la Mécanique de Despeyrous*, tome 2.me, 1886. Note XVII. *Sur la théorie de Poinsot et sur deux mouvements différents, correspondants à la même polhodie.*

della forma $a + \omega'$ con a reale; v_0 è della forma $ib + \omega$; e però pu_0 è compreso nell'intervallo (e_2, e_3); pv_0 nell'intervallo (e_1, e_2); $\varepsilon = \pm 1$ è il carattere di congruenza delle due terne (x_0, y_0, z_0) ed (a, b, c); ω_α, ω_β, ω_γ sono tre semiperiodi qualsiasi.

Le stesse formule varranno per la seconda terna $x_1\ y_1\ z_1$; l'indice zero verrà sostituito coll'indice 1.

I due moti essendo concordanti hanno lo stesso periodo e le funzioni ellittiche le stesse radici: però:

$$\frac{\mu_1}{n_1} = -\frac{\mu_0}{n_0} = \tau$$

$$u_0 + u_1 = \text{costante}.$$

Vogliamo studiare il moto di P_1 relativamente a P_0, nel caso in cui tale costante è nulla, e allorchè è soddisfatta un'altra condizione che accenneremo poi.

Formula sommatoria.

Cominciamo a stabilire una formula sommatoria, assai utile in tal genere di ricerche. Una delle forme dell'equazione a tre termini è la seguente:

$$\sigma a\, \sigma b\, \sigma c\, \sigma d - \sigma a'\, \sigma b'\, \sigma c'\, \sigma d' = P, \tag{1}$$

in cui a, b, c, d sono quattro argomenti qualsiasi, e di più:

$$P = \sigma\left(\frac{-a+b+c+d}{2}\right)\sigma\left(\frac{a-b+c+d}{2}\right)\sigma\left(\frac{a+b-c+d}{2}\right)\sigma\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)$$

$$2a' = a+b+c+d; \qquad 2b' = a+b-c-d; \qquad 2c' = a-b+c-d;$$

$$2d' = a-b-c+d.$$

Questa forma si deduce dall'altra:

$$\sigma(x-y)\sigma(x+y)\sigma(z-w)\sigma(z+w) + \sigma(y-z)\sigma(y+z)\sigma(x-w)\sigma(x+w) +$$
$$+ \sigma(z-x)\sigma(z+x)\sigma(y-w)\sigma(y+w) = 0, \tag{2}$$

ponendo:

$$y+z=a, \quad y-z=b; \qquad x-w=c, \quad x+w=d.$$

Detto ω_α un semiperiodo qualunque, mutiamo in quest'ultima x in $x + \omega_\alpha$,

y in $y + \omega_\alpha$; ricordando che:

$$\sigma(u+\omega_\alpha) = -\sigma\omega_\alpha\,\sigma_\alpha u\, e^{\eta_\alpha u}\;; \qquad \sigma(u+2\omega_\alpha) = -\sigma u\, e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\;;$$

$$U_\alpha = \sigma\omega_\alpha\, e^{\frac{1}{2}\eta_\alpha\omega_\alpha},$$

otterremo facilmente:

$$U_\alpha^4\,\sigma_\alpha a\,\sigma_\alpha b\,\sigma_\alpha c\,\sigma_\alpha d - U_\alpha^4\,\sigma_\alpha a'\,\sigma_\alpha b'\,\sigma_\alpha c'\,\sigma_\alpha d' = P; \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3).$$

Onde:

$$\begin{aligned} &-U_\alpha^4\sigma_\alpha a\,\sigma_\alpha b\,\sigma_\alpha c\,\sigma_\alpha d + U_\beta^4\sigma_\beta a\,\sigma_\beta b\,\sigma_\beta c\,\sigma_\beta d = \\ &-U_\sigma^4\sigma_\alpha a'\,\sigma_\alpha b'\,\sigma_\alpha c'\,\sigma_\alpha d' + U_\beta^4\sigma_\beta a'\,\sigma_\beta b'\,\sigma_\beta c'\,\sigma_\beta d', \end{aligned} \tag{3}$$

e

$$\begin{aligned} &U_\beta^4\sigma_\beta a\,\sigma_\beta b\,\sigma_\beta c\,\sigma_\beta d - \sigma a\,\sigma b\,\sigma c\,\sigma d = \\ &U_\beta^4\sigma_\beta a'\,\sigma_\beta b'\,\sigma_\beta c'\,\sigma_\beta d' - \sigma a'\,\sigma b'\,\sigma c'\,\sigma d'. \end{aligned} \tag{4}$$

In questa quarta equazione mutiamo a, b, c, d rispettivamente in $a+\omega_\alpha$, $b+\omega_\alpha$, $c+\omega_\alpha$, $d+\omega_\alpha$; a' si muterà in $a'+2\omega_\alpha$, b', c', d' resteranno invariati.

Riflettiamo poi che:

$$\omega_\alpha = p_\alpha\omega + q_\alpha\omega'; \qquad \omega_\beta = p_\beta\omega + q_\beta\omega'; \qquad \omega_\gamma = p_\gamma\omega + q_\gamma\omega'$$

$$p_\alpha + p_\beta + p_\gamma = 0; \qquad q_\alpha + q_\beta + q_\gamma = 0;$$

$$\sigma_\beta(u+\omega_\alpha) = -e^{\eta_\alpha\left(u+\frac{1}{2}\omega_\alpha\right)}\,\frac{U_\gamma}{U_\beta}\,\sigma_\gamma u\, e^{(\alpha\beta)\frac{i\pi}{4}} \text{ (*)}.$$

Allora risulterà:

$$\sigma_\beta(u+2\omega_\alpha) = e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\,\sigma_\beta u\, e^{\{(\alpha\beta)+(\alpha\gamma)\}\frac{i\pi}{4}} = e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\,\sigma_\beta u,$$

poichè:

$$(\alpha\beta) + (\alpha\gamma) = (p_\alpha q_\beta - p_\beta q_\alpha) + (p_\alpha q_\gamma - p_\gamma q_\alpha) = 0.$$

Però la (4) si trasformerà nella

$$\begin{aligned} &U_\gamma^4\sigma_\gamma a\,\sigma_\gamma b\,\sigma_\gamma c\,\sigma_\gamma d + U_\alpha^4\sigma_\alpha a\,\sigma_\alpha b\,\sigma_\alpha c\,\sigma_\alpha d = \\ &-U_\beta^4\sigma_\beta a'\,\sigma_\beta b'\,\sigma_\beta c'\,\sigma_\beta d' - \sigma a'\,\sigma b'\,\sigma c'\,\sigma d' \end{aligned} \tag{5}$$

(*) Halphen, *Fonct. ellipt.*, 1.ère partie, pag. 195 e seg.

Sommando la (4) e la (5) otteniamo:

$$\sigma a\,\sigma b\,\sigma c\,\sigma d - \sum_\alpha U_\alpha^4 \sigma_\alpha a\,\sigma_\alpha b\,\sigma_\alpha c\,\sigma_\alpha d = 2\sigma a'\,\sigma b'\,\sigma c'\,\sigma d', \tag{6}$$

alla quale può anche darsi la forma seguente:

$$\sigma a\,\sigma b\,\sigma c\,\sigma d - \sum \sigma(\omega_\alpha - a)\sigma(\omega_\alpha - b)\sigma(\omega_\alpha - c)\sigma(\omega_\alpha - d)\, e^{\eta_\alpha(a+b+c+d-2\omega_\alpha)}$$
$$= 2\sigma a'\,\sigma b'\,\sigma c'\,\sigma d'. \tag{7}$$

Per $d = 0$ si ha una formula stabilita diversamente da Halphen (*).

Espressione ellittica dei coseni della terna P_1 rispetto alla terna P_0.

La ricerca dei nove coseni degli angoli che individuano la terna connessa col corpo P_1, rispetto alla terna connessa col corpo P_0, dipende dalla ricerca delle tre seguenti espressioni:

$$\cos z_0 x_1 + i \cos z_0 y_1; \qquad \cos x_0 z_1 + i \cos y_0 z_1; \qquad \cos z_0 z_1.$$

Ma

$$\cos z_0 x_1 + i \cos z_0 y_1 = \sum_a \cos a z_0 (\cos a x_1 + i \cos a y_1)$$

$$= \sum_\alpha \frac{E_1\, e^{-\left(\zeta v_1 + i\varepsilon \frac{h_1}{\mu_1}\right) u_1}}{\sigma u_0\, \sigma v_0\, \sigma u_1\, \sigma v_1}\, \sigma(u_0 - \omega_\alpha)\sigma(v_0 - \omega_\alpha)\sigma(u_1 + v_1 - \omega_\alpha)\sigma\omega_\alpha \cdot e^{\eta_\alpha(u_0 + v_0 + u_1 + v_1 - 2\omega_\alpha)}.$$

Applichiamo la formula (7) ponendo $a = u_0$, $b = v_0$, $c = u_1 + v_1$, $d = 0$.

Risulta:

$$\cos z_0 x_1 + i \cos z_0 y_1$$
$$= \frac{2 E_1\, e^{-\left(\zeta v_1 + \varepsilon i \frac{h_1}{\mu_1}\right) u_1}}{\sigma u_0\, \sigma v_0\, \sigma u_1\, \sigma v_1}\, \sigma\left(\frac{u_0 + v_0 + u_1 + v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u_0 + v_0 - u_1 - v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u_0 - v_0 + u_1 + v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u_0 - v_0 - u_1 + v_1}{2}\right).$$

Poniamo:

$$u_1 = -u_0 = u$$

e spezziamo le due costanti v_0 e v_1 in altre due, tali che:

$$v_0 + v_1 = -2a_1; \qquad v_0 - v_1 = 2a.$$

(*) L. c., 2[me] partie, pag. 10.

Allora:

$$\cos z_0 x_1 + i\cos z_0 y_1 = \frac{2E_1 e^{-\left(\zeta v_1 + \varepsilon i \frac{h_1}{\mu_1}\right)u}\, \sigma a\, \sigma a_1}{\sigma(a-a_1)\sigma(a+a_1)} \; \frac{\sigma(u-a)\cdot(u-a_1)}{\sigma^2 u}. \tag{8}$$

Con calcolo analogo si trova:

$$\cos z_0 x_1 - i\cos z_0 y_1 = -\frac{2e^{\left(\zeta v_1 + \varepsilon i \frac{h_1}{\mu_1}\right)u}\, \sigma a\, \sigma a_1}{E_1\,\sigma(a-a_1)\sigma(a+a_1)} \; \frac{\sigma(u+a)\sigma(u+a_1)}{\sigma^2 u} \tag{9}$$

$$\cos x_0 z_1 + i\cos y_0 z_1 = -\frac{2E_0 e^{\left(\zeta v_0 + \varepsilon i \frac{h_0}{\mu_0}\right)u}\, \sigma a\, \sigma a_1}{\sigma(a-a_1)\sigma(a+a_1)} \; \frac{\sigma(u-a)\sigma(u+a_1)}{\sigma^2 u} \tag{10}$$

$$\cos x_0 z_1 - i\cos y_0 z_1 = \frac{2e^{-\left(\zeta v_0 + \varepsilon i \frac{h_0}{\mu_0}\right)u}\, \sigma a\, \sigma a_1}{E_0\,\sigma(a-a_1)\sigma(a+a_1)} \; \frac{\sigma(u+a)\sigma(u-a_1)}{\sigma^2 u}. \tag{11}$$

Passiamo alla ricerca di $\cos z_0 z_1$; si ha:

$$\cos z_0 z_1 = \sum_a \cos a z_0 \cos a z_1.$$

Ora $\cos a z_0$ può anche porsi sotto la forma seguente:

$$\cos a z_0 = U_\alpha^2 \frac{\sigma_\alpha u_0\, \sigma_\alpha v_0}{\sigma u_0\, \sigma v_0}.$$

Quindi:

$$\cos z_0 z_1 = \frac{1}{\sigma u_0\, \sigma v_0\, \sigma u_1\, \sigma v_1} \sum U_\alpha^4 \sigma_\alpha u_0\, \sigma_\alpha v_0\, \sigma_\alpha u_1\, \sigma_\alpha v_1.$$

Supponendo nella (6): $a = u_0$, $b = v_0$, $c = u_1$, $d = v_1$ si ottiene:

$$\cos z_0 z_1 = 1 + 2\frac{\sigma^2 a_1\, \sigma(u-a)\sigma(u+a)}{\sigma^2 u\, \sigma(a-a_1)\sigma(a+a_1)}, \tag{12}$$

oppure:

$$\cos z_0 z_1 = 1 + 2\frac{pa - pu}{pa_1 - pa} = \frac{2pu - pa - pa_1}{pa - pa_1}. \tag{13}$$

L'espressione di $\cos z_0 z_1$ può anche scriversi così:

$$\cos z_0 z_1 = \frac{\sigma(a-a_1)\sigma(a+a_1)\sigma^2 u + \sigma(u-a)\sigma(u+a)\sigma^2 a_1 + \sigma(u-a)\sigma(u+a)\sigma^2 a_1}{\sigma^2 u\, \sigma(a-a_1)\sigma(a+a_1)},$$

e in virtù dell'equazione a tre termini:

$$\sigma(a-a_1)\sigma(a+a_1)\sigma^2 u + \sigma(a_1-u)\sigma(a_1+u)\sigma^2 a + \sigma(u-a)\sigma(u+a)\sigma^2 a_1 = 0,$$

risulta:

$$\cos z_0 z_1 = \frac{\sigma(u-a)\sigma(u+a)\sigma^2 a_1 + \sigma(u-a_1)\sigma(u+a_1)\sigma^2 a}{\sigma^2 u\, \sigma(a-a_1)\sigma(a+a_1)}. \tag{14}$$

Si terranno anco presenti le due espressioni:

$$1 + \cos z_0 z_1 = 2\,\frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u+a_1)\sigma^2 a}{\sigma(a-a_1)\sigma(a+a_1)\sigma^2 u} \tag{15}$$

$$1 - \cos z_0 z_1 = -2\,\frac{\sigma(u-a)\sigma(u+a)\sigma^2 a}{\sigma(a-a_1)\sigma(a+a_1)\sigma^2 u}. \tag{16}$$

Ricerca delle componenti di rotazione.

Derivando la (8) rispetto al tempo si ha:

$$\frac{d(\cos z_0 x_1 + i\cos z_0 y_1)}{dt}$$

$$= \tau(\cos z_0 x_1 + i\cos z_0 y_1)\left\{-\zeta v_1 - \varepsilon i\frac{h_1}{\mu_1} + \zeta(u-a) + \zeta(u-a_1) - 2\zeta u\right\}$$

$$= \tau(\cos z_0 x_1 + i\cos z_0 y_1)\left\{\zeta(u-a) + \zeta(u-a_1) - 2\zeta u + 2\zeta(a+a_1) - \zeta a - \zeta a_1 - \frac{ir}{\tau}\right\},$$

dove si è posto:

$$r = \frac{\tau}{i}\left\{\zeta(a+a_1) - \zeta a - \zeta a_1\right\} + \varepsilon\frac{h_1}{n_1}.$$

Poniamo ancora:

$$\alpha = \frac{2\tau}{i}\left\{\zeta(a+a_1) - \zeta a - \zeta a_1\right\} = \frac{\tau}{i}\,\frac{p'a_1 - p'a}{pa_1 - pa}, \tag{17}$$

e però risulterà:

$$\alpha - 2r = -2\varepsilon\frac{h_1}{n_1}.$$

Consideriamo la funzione:

$$\zeta(u-a) + \zeta(a+a_1) - \zeta u - \zeta a_1,$$

che ha gli zeri $a + a_1$, $-a_1$ e gl'infiniti 0, a: e però:

$$\zeta(u-a) + \zeta(a+a_1) - \zeta u - \zeta a_1 = -\frac{\sigma a}{\sigma a_1\, \sigma(a+a_1)}\,\frac{\sigma(u-a-a_1)\sigma(u+a_1)}{\sigma u\, \sigma(u-a)}.$$

Mutando a in a_1:

$$\zeta(u-a_1) + \zeta(a+a_1) - \zeta u - \zeta a = -\frac{\sigma a_1}{\sigma a\, \sigma(a+a_1)}\,\frac{\sigma(u-a-a_1)\sigma(u+a)}{\sigma u\, \sigma(u-a_1)}.$$

E però sommando colla equazione precedente:

$$\zeta(u - a_1) + \zeta(u - a) - 2\zeta u + 2\zeta(a + a_1) - \zeta a - \zeta a_1$$
$$= - \frac{\sigma(a - a_1)\sigma(u - a - a_1)\sigma u}{\sigma(a + a_1)\sigma a \sigma a_1 \sigma(u - a)\sigma(u - a_1)} \cos z_0 z_1 .$$

Quindi:

$$\frac{d}{dt}(\cos z_0 x_1 + i \cos z_0 y_1)$$
$$= - \frac{2 E_1 \tau e^{-\left(\zeta v_1 + \varepsilon i \frac{h_1}{\mu_1}\right)u} \sigma(u - a - a_1)}{\sigma(a + a_1)\sigma u} \cos z_0 z_1 - ir(\cos z_0 x_1 + i \cos z_0 y_1).$$

Pongasi:

$$p + iq = \frac{2 i E_1 \tau \sigma(u - a - a_1)}{\sigma(a + a_1)\sigma u} e^{-\left(\zeta v_1 + \varepsilon i \frac{h_1}{\mu_1}\right)u}, \tag{18}$$

e quindi:

$$\frac{d}{dt}(\cos z_0 x_1 + i \cos z_0 y_1) = i(p + iq)\cos z_0 z_1 - ir(\cos z_0 x_1 + i \cos z_0 y_1),$$

d'onde:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d \cos z_0 x_1}{dt} &= r \cos z_0 y_1 - q \cos z_0 z_1 \\ \frac{d \cos z_0 y_1}{dt} &= p \cos z_0 z_1 - r \cos z_0 x_1 . \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Moltiplicando la prima per $\cos z_0 x_1$, la seconda per $\cos z_0 y_1$ e sommando si ha:

$$\frac{d \cos z_0 z_1}{dt} = q \cos z_0 x_1 - p \cos z_0 y_1 .$$

Osserviamo che il coefficiente di u nell'esponenziale che figura nella (18) è:

$$- \varepsilon i \frac{h_1}{\mu_1} + \zeta(a + a_1) = - \varepsilon i \frac{h_1}{\mu_1} + \left(\frac{i\alpha}{2\tau} + \zeta a + \zeta a_1\right),$$

che si riduce ancora a

$$\zeta a + \zeta a_1 + \frac{i}{\tau}(\alpha - r).$$

Quindi:

$$p + iq = \frac{2 i E_1 \tau \sigma(u - a - a_1)}{\sigma(a + a_1)\sigma u} e^{\left\{\zeta a + \zeta a_1 + \frac{i}{\tau}(\alpha - r)\right\}u}. \tag{20}$$

Se derivassimo la (9) rispetto al tempo, otterremmo:

$$p - iq = - \frac{2 i \tau}{E_1} \frac{\sigma(u + a + a_1)}{\sigma(a + a_1)\sigma u} e^{-\left\{\zeta a + \zeta a_1 + \frac{i}{\tau}(\alpha - r)\right\}u}. \tag{21}$$

Deriviamo ora la (10) rispetto al tempo; otterremo:

$$\frac{d}{dt}(\cos x_0 z_1 + i \cos y_0 z_1) = L(\cos x_0 z_1 + i \cos y_0 z_1),$$

dove:

$$L = \tau\left\{\varepsilon i \frac{h_0}{\mu_0} + \zeta(a - a_1) + \zeta(u - a) + \zeta(u - a_1) - 2\zeta u\right\},$$

che potremo scrivere anche così:

$$L = \frac{i}{2}\left(2\varepsilon\frac{h_0}{\mu_0} - \delta'\right) + \tau\left\{\zeta(u + a_1) + \zeta(u - a) - 2\zeta u + \zeta a - \zeta a_1\right\},$$

essendo:

$$\delta' = \frac{2\tau}{i}\left\{\zeta(a - a_1) + \zeta a_1 - \zeta a\right\} = \frac{\tau}{i}\,\frac{p' a_1 + p' a}{p a_1 - p a}. \tag{22}$$

Imponiamo ora un'altra condizione; i due moti di Poinsot sieno tali che:

$$\delta' = 2\varepsilon\frac{h_0}{\mu_0}. \tag{23}$$

Osserviamo poscia che:

$$\zeta(u - a) - \zeta u - \zeta a_1 + \zeta(a + a_1) = -\frac{\sigma a}{\sigma a_1 \sigma(a + a_1)}\,\frac{\sigma(u + a_1)\sigma(u - a - a_1)}{\sigma u \sigma(u - a)},$$

e però:

$$\frac{(\cos z_0 x_1 - i \cos z_0 y_1)(p + iq)}{1 - \cos z_0 z_1} = -2i\tau\left\{\zeta(u - a) - \zeta u - \zeta a_1 + \zeta(a + a_1)\right\}, \tag{23}$$

come del pari:

$$\frac{(\cos z_0 x_1 + i \cos z_0 y_1)(p - iq)}{1 + \cos z_0 z_1} = -2i\tau\left\{\zeta(u + a_1) - \zeta u + \zeta a - \zeta(a - a_1)\right\}. \tag{24}$$

Segue adunque che:

$$\frac{d}{dt}(\cos x_0 z_1 + i \cos y_0 z_1)$$

$$= \frac{i}{2}(\cos x_0 z_1 + i \cos y_0 z_1)\left\{\frac{(\cos z_0 x_1 + i \cos z_0 y_1)(p - iq)}{1 + \cos z_0 z_1} + \frac{(\cos z_0 x_1 - i \cos z_0 y_1)(p + iq)}{1 - \cos z_0 z_1}\right\}.$$

Ma si ha, supponendo congruenti le due terne $(x_0\ y_0\ z_0)$ e $(x_1\ y_1\ z_1)$:

$$\cos x_0 x_1 + i \cos y_0 x_1$$

$$= \frac{1}{2}(\cos x_0 z_1 + i \cos y_0 z_1)\left\{\frac{\cos z_0 x_1 + i \cos z_0 y_1}{1 + \cos z_0 z_1} - \frac{\cos z_0 x_1 - i \cos z_0 y_1}{1 - \cos z_0 z_1}\right\}$$

$$\cos x_0 y_1 + i \cos y_0 y_1$$

$$= \frac{1}{2i}(\cos x_0 z_1 + i \cos y_0 z_1)\left\{\frac{\cos z_0 x_1 + i \cos z_0 y_1}{1 + \cos z_0 z_1} + \frac{\cos z_0 x_1 - i \cos z_0 y_1}{1 - \cos z_0 z_1}\right\}.$$

Quindi:

$$\frac{d}{dt}(\cos x_0 z_1 + i\cos y_0 z_1) = q(\cos x_0 x_1 + i\cos y_0 x_1) - p(\cos x_0 y_1 + i\cos y_0 y_1),$$

dalla quale si traggono le altre due:

$$\frac{d\cos x_0 z_1}{dt} = q\cos x_0 x_1 - p\cos x_0 y_1; \qquad \frac{d\cos y_0 z_1}{dt} = q\cos y_0 x_1 - p\cos y_0 y_1,$$

insieme colle quali si dovrà considerare la terza delle (19) cioè:

$$\frac{d\cos z_0 z_1}{dt} = q\cos z_0 x_1 - p\cos z_0 y_1.$$

Da queste si trae il significato cinematico di p, q, r; esse sono le componenti della velocità angolare del moto della terna $(x_1\ y_1\ z_1)$ rispetto alla $(x_0\ y_0\ z_0)$.

Del moto di P_1 rispetto a P_0.

Possiamo ora trovare le equazioni del moto della terna P_1 rispetto a P_0. Deriviamo la (20) rispetto al tempo; otterremo:

$$\frac{d}{dt}(p+iq) = \tau(p+iq)\left\{\zeta a + \zeta a_1 + \frac{i}{\tau}(\alpha - r) + \zeta(u-a-a_1) - \zeta u\right\}.$$

Ma col noto metodo di decomposizione si trova che:

$$\zeta(u-a-a_1) - \zeta u + \zeta a + \zeta a_1 = \frac{\sigma(a+a_1)}{\sigma a\,\sigma a_1}\,\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u-a_1)}{\sigma u\,\sigma(u-a-a_1)},$$

e però risulterà:

$$\frac{d}{dt}(p+iq) = i(\alpha - r)(p+iq) + i\tau^2\,\frac{\sigma(a+a_1)\,\sigma(a-a_1)}{\sigma^2 a\,\sigma^2 a_1}(\cos z_0 x_1 + i\cos z_0 y_1).$$

Poniamo:

$$\beta = 2\tau^2\,\frac{\sigma(a+a_1)\,\sigma(a-a_1)}{\sigma^2 a\,\sigma^2 a_1} = 2\tau^2(p a_1 - p a). \tag{26}$$

Quindi:

$$\frac{dp}{dt} = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) rq - \frac{1}{2}\,\beta\cos z_0 y_1; \quad \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\alpha}{r} - 1\right) pr + \frac{1}{2}\,\beta\cos z_0 x_1; \quad \frac{dr}{dt} = 0. \tag{27}$$

E queste sono le equazioni del moto di un corpo di rotazione pesante, sospeso per un punto del suo asse di simmetria; la terna $(x_1\ y_1\ z_1)$ è quella degli assi principali d'inerzia; l'asse z_0 è diretto secondo la gravità. Quanto precede adunque dimostra un teorema di JACOBI sulla decomposizione di un tal moto in due moti di POINSOT; inoltre le formule (8), (9), (10), (11), (12) sono gli integrali ultimi del nuovo problema. Questo teorema, conosciuto dopo la pubblicazione delle opere complete di JACOBI (*) fu dimostrato dapprima dal prof. PADOVA (**) e poi successivamente da HALPHEN (***), dal DARBOUX (****), sulla dimostrazione del quale è tornato recentemente il prof. PADOVA (*****).

Le costanti α, β, r, δ' debbono risultare reali; ora:

$$a = \frac{v_0 - v_1}{2}; \qquad a_1 = -\frac{v_0 + v_1}{2},$$

e poichè v_0 e v_1 sono della forma $\omega + ib$, segue che a è della forma ib (a meno di periodi) ed a_1 della forma $\omega + ib$; però pa e pa_1 sono entrambi reali e rispettivamente compresi negli intervalli $(e_3, -\infty)$; (e_1, e_2) e $p'a$ e $p'a_1$ sono immaginari puri; quindi per le (7), (22) e (26), α, β, δ', e quindi anche r, risulteranno reali.

Detti A, B, C, i momenti principali del corpo rispetto agli assi x_1 y_1 z_1 e ζ la distanza tra il punto di sospensione e il baricentro del corpo, e P il peso del corpo si ha:

$$A = B; \qquad \frac{C}{A} = \frac{\alpha}{r}; \qquad \zeta P = \frac{1}{2}\beta,$$

e poichè:

$$2A > C \quad \text{così} \quad \alpha < 2r;$$

ma

$$\alpha - 2r = -2\varepsilon\frac{h_1}{n_1},$$

onde ε deve avere lo stesso segno di $\dfrac{h_1}{n_1}$.

(*) JACOBI. Gesamm. Werke, Bd. 2. *Fragments sur la rotation d'un corps*, pag. 477-514.

(**) *Sulla rotazipne di un corpo di rivoluzione pesante che gira intorno ad un punto del suo asse di simmetria.* Atti della R. Acc. di Torino, 1884.

(***) *Sur le mouvement* etc. Comptes Rendus, tom. 100, pag. 1065, e *Traité des fonc. ellip.*, 2.^{me} partie, pag. 93 e seg.

(****) *Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution* etc. Journal de Liouville, 4.^{me} série, tom. 1, pag. 403, année 1885; e le *Notes à la Mècanique de Despeyrous*, tom. 2, 1886 Note XIX.

(*****) *Dimostrazione di un teorema di Jacobi.* Atti del R. Istit. Veneto, serie 7.^{a}, tom. 3, pag. 487, anno 1892.

Espressione ellittica delle costanti meccaniche.

Nel problema della rotazione di un corpo pesante di rivoluzione sospeso per un punto del suo asse di simmetria, compariscono altre due costanti meccaniche: quella dell'integrale delle forze vive, e quella dell'integrale delle aree. Cerchiamo in qual modo si esprimono mediante a ed a_1.

L'integrale delle forze vive è

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2P\zeta \cos z_0 z_1 + h,$$

cioè:

$$p^2 + q^2 = \beta(\cos z_0 z_1 + \gamma).$$

Moltiplicando tra loro le espressioni (20) e (21), otteniamo:

$$p^2 + q^2 = 4\tau^2 \frac{\sigma(u-a-a_1)\sigma(u+a+a_1)}{\sigma^2 u \sigma^2(a+a_1)} = \frac{2\beta}{pa_1 - pa}\left\{p(a+a_1) - pu\right\},$$

oppure:

$$p^2 + q^2 = \beta\left\{\frac{2pu - pa - pa_1}{pa - pa_1} + \frac{2p(a+a_1) - pa - pa_1}{pa_1 - pa}\right\},$$

d'onde segue che la costante γ delle forze vive è data dà:

$$\gamma = \frac{2p(a+a_1) - pa - pa_1}{pa_1 - pa}, \tag{28}$$

e (per i valori di a e a_1) è una costante reale.

L'integrale delle aree è

$$Ap\cos z_0 x_1 + Bq\cos z_0 y_1 + Cr\cos z_0 z_1 = \text{costante},$$

cioè:

$$p\cos z_0 x_1 + q\cos z_0 y_1 = \delta - \alpha\cos z_0 z_1,$$

onde:

$$2(\delta - \alpha\cos z_0 z_1) = (p+iq)(\cos z_0 x_1 - i\cos z_0 y_1) + (p-iq)(\cos z_0 x_1 + i\cos z_0 y_1).$$

Ora moltiplicando la (20) per la (8); la (21) per la (9) e sommando si ha:

$$\delta - \alpha\cos z_0 z_1$$
$$= -\frac{2i\tau\sigma a\sigma a_1}{\sigma^2(a+a_1)\sigma(a-a_1)}\left\{\frac{\sigma(u+a)\sigma(u+a_1)\sigma(u-a-a_1)}{\sigma^3 u} + \frac{\sigma(u-a)\sigma(u-a_1)\sigma(u+a+a_1)}{\sigma^3 u}\right\}.$$

Consideriamo la funzione:

$$\frac{\sigma(u+a)\sigma(u+a_1)\sigma(u-a-a_1)}{\sigma^3 u},$$

che ha l'infinito triplo $u=0$, e gli zeri $-a$, $-a_1$, $a+a_1$; è quindi una funzione intera di pu e $p'u$ della forma:

$$Apu+Bp'u+C.$$

Sviluppando in serie si ha:

$$\sigma a\,\sigma a_1\,\sigma(a+a_1)\left\{-\frac{1}{u^3}+\frac{\zeta(a+a_1)-\zeta a-\zeta a_1}{u^2}+\cdots\right\}=\frac{A}{u^2}-\frac{2B}{u^3}+\cdots$$

e quindi:

$$A=\frac{\sigma a\,\sigma a_1\,\sigma(a+a_1)}{2}\,\frac{p'a_1-p'a}{pa_1-pa}; \qquad B=\frac{\sigma a\,\sigma a_1\,\sigma(a+a_1)}{2}.$$

La funzione:

$$Apu+Bp'u+C,$$

ha le radici $-a$, $-a_1$ e quindi anche $a+a_1$; e però risulta facilmente:

$$C=-\frac{\sigma a\,\sigma a_1\,\sigma(a+a_1)}{2}\,\frac{pa\,p'a_1-pa_1\,p'a}{pa_1-pa}.$$

Mutando a ed a_1 in $-a$, $-a_1$, A e C non mutano nè di valore nè di segno: B muta segno, onde:

$$\delta-\alpha\cos z_0z_1=-2i\tau\,\frac{\sigma^2a\,\sigma^2a_1}{\sigma(a+a_1)\,\sigma(a-a_1)}\left\{\frac{p'a_1-p'a}{pa_1-pa}\,pu-\frac{pa\,p'a_1-pa_1\,p'a}{pa_1-pa}\right\},$$

oppure:

$$\delta-\alpha\cos z_0z_1=-i\tau\,\frac{1}{pa_1-pa}\left\{\frac{p'a_1-p'a}{pa_1-pa}(2pu-pa-pa_1)+p'a_1+p'a\right\},$$

d'onde:

$$\delta=\frac{\tau}{i}\,\frac{p'a_1+p'a}{pa_1-pa}, \tag{29}$$

e però infine:

$$\delta'=\delta=2\varepsilon\frac{h_0}{n_0}. \tag{30}$$

Della poloide.

Sia O il punto di sospensione del corpo; OR l'asse istantaneo di rotazione alla fine del tempo t; OR l'ampiezza della rotazione istantanea. Le proiezioni di OR sugli assi principali d'inerzia sono p, q, r; la curva descritta dal punto R nel corpo (curva base del cono luogo degli assi istantanei di rotazione mobili) chiamasi *poloide;* il luogo di R nello spazio fisso dicesi *erpoloide.*

Le proprietà di queste curve furono investigate anzitutto da Hess, in un suo bel lavoro (*) nel caso particolare che inizialmente sia $p = q = 0$; poscia dal Darboux (**) e poi nuovamente da Hess nel caso generale delle condizioni iniziali qualsiasi (***). Poichè $r =$ cost., la poloide è una curva piana contenuta in un piano parallelo ad $x_1\ y_1$. Le coordinate $X_1\ Y_1$ di un punto della curva sono espresse così:

$$X_1 + iY_1 = 2i\tau E_1 \frac{\sigma(u - a - a_1)}{\sigma u \sigma(a + a_1)}\, e^{-\left(\zeta v_1 + \varepsilon i \frac{h_1}{\mu_1}\right)u}$$

$$X_1 - iY_1 = -2i\tau \frac{1}{E_1} \frac{\sigma(u + a + a_1)}{\sigma u \sigma(a + a_1)}\, e^{\left(\zeta v_1 + \varepsilon i \frac{h_1}{\mu_1}\right)u}.$$

Chiamando x_1 ed y_1 le coordinate dell'erpoloide relativa al secondo moto P_1 di Poinsot si ha (****):

$$x_1 + iy_1 = -\varepsilon i \mu_1 E_1 \frac{\sigma(u_1 + v_1)}{\sigma u_1 \sigma v_1}\, e^{-\left(\zeta v_1 + \varepsilon i \frac{h_1}{\mu_1}\right)u_1},$$

e poichè:

$$u_1 = u, \qquad v_1 = -a - a_1,$$

risulta:

$$X_1 + iY_1 = k(x_1 + iy_1),$$

dove k è costante, quindi:

Le coordinate di un' punto della poloide sono proporzionali alle coordinate omonime della erpoloide relativa al secondo moto di Poinsot e però la poloide è una curva compresa tra due cerchi concentrici ai quali è tangente, che può presentare o no dei flessi a seconda che ne presenta o no l'erpoloide relativa al moto P_1. Il punto R descriverà quindi la poloide colle stesse leggi colle quali è descritta la erpoloide P_1 ed enunciate da Darboux (*****).

(*) W. Hess, *Ueber das Gyroskop.* Math. Ann., Bd. 19, 1882, pag. 121-154.

(**) Memoria citata.

(***) W. Hess, *Ueber das Gyroskop bei allgemeinster Wahl des zur Bewegung anregenden Mementankräftesystems.* Math. Ann., Bd. 29, 1887, pag. 500-580.

(****) Halphen, *Théorie fon. ell.,* 2.me partie, pag. 55.

(*****) Cfr. le *Notes à la Méc. de Despeyrous,* XVII e XVIII. Queste leggi discendono assai facilmente dalla nota rappresentazione ellittica dell'erpoloide; cioè:

$$r^2 = \mu^2(pv - pu); \qquad \frac{d\theta}{du} = -\frac{\varepsilon h}{\mu} + \frac{1}{2i} \frac{p'v}{pv - pu},$$

dalle quali si deduce:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = -\varepsilon \frac{h}{n} r^2 + \frac{\mu^3}{2in} p'v; \quad \text{quindi:}$$

Il raggio vettore ρ della poloide è dato dà:

$$\rho^2 = 4\tau^2 \left\{ p(a+a_1) - pa \right\},$$

l'anomalia θ è data da:

$$\theta = \frac{1}{i}\left\{ \zeta a + \zeta a_1 + \frac{i}{\tau}(\alpha - r) \right\} u + \frac{1}{2i} \log \frac{\sigma(u-a-a_1)}{\sigma(u+a+a_1)} + \text{costante},$$

oppure:

$$\theta = \frac{1}{i}\left\{ \zeta a + \zeta a_1 + \frac{i}{\tau}(\alpha - r) + \frac{2\eta(a+a_1)}{\omega} \right\} u + \frac{1}{2i} \log \frac{\sigma(u-a-a_1)}{\sigma(u+a+a_1)} e^{-\frac{4\eta(a+a_1)}{\omega}u},$$

e però l'anomalia è composta di una parte lineare in u (proporzionale al tempo) e non periodica; e di una parte periodica rispetto al tempo.

Il caso trattato da Hess nel primo lavoro citato, discende facilmente dalle formule esposte. Supponiamo che per $t=0$ sia $p=q=0$. L'integrale delle aree e delle forze vive dànno per valore iniziale di $\cos z_0 z_1$ rispettivamente $\frac{\delta}{\alpha}$ e $-\gamma$; onde:

$$\alpha\gamma + \delta = 0,$$

cioè, tenendo presenti le (17), (25) e (26):

$$\frac{p'a_1 + p'a}{pa_1 - pa} = \frac{pa + pa_1 - 2p(a+a_1)}{pa_1 - pa}.$$

1.ª Legge. *La velocità areolaria è una funzione lineare di r^2.*

Detta V la velocità totale:

$$r^2V^2 = \left(r\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{\mu^6}{n^2}\left(pv - e_1 - \frac{r^2}{\mu^2}\right)\left(pv - e_2 - \frac{r^2}{\mu^2}\right)\left(pv - e_3 - \frac{r^2}{\mu^2}\right) + \\ + \left(-\frac{\varepsilon h}{n}r^2 + \frac{\mu^3}{2in}p'v\right)^2.$$

Il termine indipendente da r^2 nel secondo membro è

$$\frac{\mu^6}{n^2}(pv - e_1)(pv - e_2)(pv - e_3) - \frac{\mu^6}{4n^2}p'^2v = 0,$$

e però:

$$V^2 = -\frac{1}{n^2}r^4 + Hr^2 + K; \quad \text{cioè:}$$

2.ª Legge. *Il quadrato della velocità è una funzione biquadrata di r che ha negativo il coefficiente di r^4.*

Si può mostrare facilmente ancora che:

Il quadrato dell'accelerazione totale è la somma di due polinomi; uno di terzo grado in r, l'altro di terzo grado in $\frac{1}{r}$.

Ma per tre argomenti a, a_1, $-(a+a_1)$ si ha:

$$\frac{p'a_1 - p'a}{pa_1 - pa} = \frac{p'(a+a_1) + p'a}{pa - p(a+a_1)} = \frac{p'(a+a_1) + p'a_1}{pa_1 - p(a+a_1)}.$$

Componendo i due ultimi rapporti e tenendo conto della relazione precedente si ha:

$p'(a+a_1) = 0$ e però: $p(a+a_1) = e_2$; $a + a_1 = \omega''$ a meno di periodi.

In tal caso il raggio vettore della poloide è dato dà:

$$\rho^2 = 4\tau^2(e_2 - pu),$$

e quindi il suo valor minimo è lo zero; in tal caso adunque la poloide è compresa entro un sol cerchio; parte dal centro dirigendosi verso la periferia cui risulta tangente.

L'anomalia è:

$$\theta = \frac{1}{i}\left\{\zeta a + \zeta(\omega'' - a) + \frac{i}{\tau}(\alpha - r)\right\} u + \frac{1}{2i}\log\frac{\sigma(u-\omega'')}{\sigma(u+\omega'')}:$$

ma:

$$\sigma(u-\omega'') = -\sigma(u+\omega'')e^{-2\eta'' u}; \qquad \zeta(\omega''-a) = -\zeta a + 2\eta'',$$

e però:

$$\theta = \frac{1}{\tau}(\alpha - r)u + \frac{\eta''}{i}u.$$

La costante α ha, in tal caso, la forma:

$$\alpha = \frac{2\tau}{i}\left\{\zeta(a+a_1) - \zeta a - \zeta a_1\right\} = -\frac{2\tau\eta''}{i},$$

onde infine:

$$\theta = \frac{1}{2\tau}(\alpha - 2r)u = -\varepsilon\frac{h_1}{\mu_1}u = mu \quad (m \text{ costante}).$$

È facile mostrare che in tal caso la poloide non ha flessi.

Considerando ρ funzione di θ, i punti di flesso si ottengono cercando i valori di ρ tali che:

$$\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = 0,$$

e poichè si ha successivamente:

$$\rho\frac{d\rho}{d\theta} = -2\tau^2 m p'u; \qquad \rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = -2\tau^2 m^2 p''u,$$

i valori di u, o di pu, ai quali corrispondono punti di flesso sono dati dalla equazione:

$$4(e_2 - pu) + \frac{3m^2 p'^2 u}{e_2 - pu} + 2m^2 p'' u = 0,$$

la quale, ricordando che:

$$p'^2 u = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3) = 4p^3 u - g_2 pu - g_3$$
$$2p'' u = 12 p^2 u - g_2,$$

si trasforma in una equazione di 1.° grado in pu, che risoluta dà:

$$4pu = \frac{4e_2 - m^2(12 e_1 e_2 + g_2)}{1 + 3 e_2 m^2}.$$

Ma non basta che pu risulti reale: occorre che sia compreso tra e_2 ed e_3; quindi $4pu < 4e_2$ cioè:

$$e_1 e_3 + 2e_2^2 > 0,$$

oppure:

$$(e_2 - e_1)(e_2 - e_3) > 0,$$

ciò che non è poichè:

$$e_1 > e_2 > e_3,$$

e però la poloide non ha flessi reali nel caso considerato da Hess.

Della erpoloide.

Passiamo a considerare l'erpoloide descritta da R. Determiniamone le equazioni; diciamo però X, Y, Z, le coordinate di R rispetto alla terna fissa $(x_0\ y_0\ z_0)$; sarà:

$$X = p \cos x_0 x_1 + q \cos x_0 y_1 + r \cos x_0 z_1$$
$$Y = p \cos y_0 x_1 + q \cos y_0 y_1 + r \cos y_0 z_1$$
$$Z = p \cos z_0 x_1 + q \cos z_0 y_1 + r \cos z_0 z_1.$$

Dall'integrale delle aree si deduce:

$$Z = \delta - (\alpha - r) \cos z_0 z_1;$$

cioè:

$$Z = \delta + (\alpha - r) \frac{2pu - pa - pa_1}{pa_1 - pa}.$$

Abbiamo poscia:

$$X + iY$$
$$= \frac{1}{2}(\cos x_0 z_1 + i \cos y_0 z_1) \left\{ \frac{(\cos z_0 z_1 + i \cos z_0 y_1)(p - iq)}{1 + \cos z_0 z_1} - \frac{(\cos z_0 x_1 - i \cos z_0 y_1)(p + iq)}{1 - \cos z_0 z_1} + 2r \right\}.$$

Il secondo membro, tenendo presenti le (23) e (24), si trasforma subito e si ha:

$$X+iY$$
$$=i\tau(\cos x_0 z_1+i\cos y_0 z_1)\left\{\zeta(u-a)-\zeta(u+a_1)-\zeta a-\zeta a_1+2\zeta(a+a_1)+\frac{r}{i\tau}\right\},$$

La quantità in parentisi equivale ancora a

$$\zeta(u-a)-\zeta(u+a_1)+\zeta a+\zeta a_1+2\left\{\zeta(a+a_1)-\zeta a-\zeta a_1\right\}+\frac{r}{i\tau}=$$
$$=\frac{\sigma(a+a_1)}{\sigma a\,\sigma a_1}\,\frac{\sigma u\,\sigma(u-a+a_1)}{\sigma(u-a)\,\sigma(u+a_1)}+\frac{i}{\tau}(\alpha-r),$$

e poichè:

$$\zeta v_0+\varepsilon i\frac{h_0}{\mu_0}=\zeta a-\zeta a_1,$$

risulta:

$$X+iY$$
$$=-2i\tau E_0\frac{\sigma(u-a+a_1)}{\sigma(a-a_1)\,\sigma u}e^{\left(\zeta v_0+\varepsilon i\frac{h_0}{\mu_0}\right)u}+2E_0(\alpha-r)\,\frac{\sigma a\,\sigma a_1\,\sigma(u-a)\,\sigma(u+a_1)}{\sigma(a+a_1)\,\sigma(a-a_1)\,\sigma^2 u}\,e^{(\zeta a-\zeta a_1)u}$$

D'altra parte si ha:

$$\frac{\sigma(a-a_1)}{\sigma a\,\sigma a_1}\,\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u+a_1)}{\sigma^2 u}\,e^{(\zeta a-\zeta a_1)u}=-\frac{d}{du}\left\{\frac{\sigma(u-a+a_1)}{\sigma u}\,e^{(\zeta a-\zeta a_1)u}\right\},$$

e poi:

$$u=-u_0,\qquad v_0=a-a_1;$$

onde:

$$X+iY$$
$$=-2i\tau E_0\frac{\sigma(u_0+v_0)}{\sigma u_0\,\sigma v_0}e^{-\left(\zeta v_0+\varepsilon i\frac{h_0}{\mu_0}\right)u_0}-2E_0\frac{\alpha-r}{p a_1-p a}\,\frac{d}{du}\left\{\frac{\sigma(u_0+v_0)}{\sigma u_0\,\sigma v_0}e^{-\left(\zeta v_0+\varepsilon i\frac{h_0}{\mu_0}\right)u_0}\right\}.$$

Diciamo x_0 ed y_0 le coordinate dell'erpoloide relativa al primo moto di Poinsot; sarà:

$$x_0+iy_0=-\varepsilon i\mu_0 E_0\,\frac{\sigma(u_0+v_0)}{\sigma u_0\,\sigma v_0}\;e^{-\left(\zeta v_0+\varepsilon i\frac{h_0}{\mu_0}\right)u_0};$$

posto quindi:

$$A=\frac{2\tau}{\mu_0};\qquad B=-2\varepsilon\,\frac{\alpha-r}{\mu_0(p a_1-p a)}\qquad (A \text{ e } B \text{ costanti reali}),$$

risulta l'espressione notevolissima:

$$X+iY=A(x_0+iy_0)+iB\frac{d}{du}(x_0+iy_0).$$

È noto che il caso particolare in cui $\alpha = r$ (l'ellissoide d'inerzia diventa una sfera) non specializza il corpo, ma il punto di sospensione; il moto, nel caso generale, può sempre ridursi ad una rotazione semplice e ad un movimento pel quale sia $\alpha = r$; in tal caso $B = 0$, e però:

Le coordinate della proiezione orizzontale della erpoloide sono proporzionali alle coordinate omonime dell'erpoloide relativa al primo moto di Poinsot, nel caso in cui sia $\alpha = r$.

Escludendo questo caso, diciamo ρ il raggio vettore della proiezione orizzontale della erpoloide; ρ_0, θ_0 il raggio vettore e l'anomalia della erpoloide relativa al primo moto di Poinsot; V_0 la velocità colla quale essa è descritta; troveremo che:

$$\rho^2 = A^2\rho_0^2 + \frac{n_0^2}{\mu_0^2} B^2 V_0^2 + 2AB\rho_0^2 \frac{d\theta_0}{du},$$

e per le leggi di Darboux, già ricordate, si ha:

$$\rho^2 = -\frac{B^2}{\mu_0^2}\rho_0^4 + H\rho_0^2 + K, \qquad (H,\ K \text{ costanti}),$$

la quale esprime in modo semplice la relazione tra il raggio vettore ρ e il raggio vettore ρ_0 dell'erpoloide del moto risultante e del primo moto componente.

La legge che esprime il quadrato della velocità V del punto che percorre la proiezione orizzontale della erpoloide non è semplice. È per altro facile stabilire che il quadrato di questa velocità si compone della somma di tre termini rispettivamente proporzionali al quadrato della velocità, al quadrato della accelerazione totale e al prodotto della velocità e della accelerazione normale nel moto del punto che percorre l'erpoloide P_0. Se quindi tale erpoloide ha dei flessi, il moto della proiezione del punto R sul piano orizzontale sarà oscillatorio.

La velocità areolaria della proiezione di R è eguale ad una funzione biquadrata di ρ_0 più due termini rispettivamente proporzionali al prodotto della velocità per l'accelerazione normale, e al prodotto del raggio vettore per l'accelerazione secondo il raggio vettore, nel moto di P_0.

L'accelerazione del moto della proiezione di R si potrebbe esprimere per mezzo delle accelerazioni di ordine superiore nel moto di P_0.

Roma, dicembre 1893.

Paolo Ruffini
e i primordii della teoria dei gruppi (*).

(*Di* Heinrich Burkhardt, *in Göttingen.*)

Traduzione di Ernesto Pascal in Pavia.

Ho aderito molto volentieri all'invito fattomi dall'illustre Direttore di questo periodico, e mi sono accinto a ridurre nel nostro idioma questo notevole lavoro di un mio egregio amico di Germania, il dott. Burkhardt. Lavoro tanto più notevole per noi, inquantochè tratta di cose nostre, e rivendica ad un insigne italiano priorità di idee e di teoremi attribuiti ordinariamente a stranieri.

E se un dotto straniero si è assunta la lunga e faticosa pena di renderci giustizia, noi non possiamo non essergli grati, e io credo di farmi interprete dei sentimenti di tutti i miei colleghi d'Italia, tributando qui pubblicamente all'Autore di questo scritto i ringraziamenti dei matematici italiani.

Milano, novembre del 1893.

Ernesto Pascal.

Mentre oggidì son molti quelli che si occupano della storia della matematica antica, pochi sono invece quelli che si danno a ricercare la storia dello sviluppo della nostra scienza negli ultimi tempi.

Alcune poche notizie sul primo apparire di questo o quel teorema si ricopiano da un libro all'altro; un lettore desideroso di notizie più dettagliate deve ricorrere addirittura alle fonti. Così per es. si trova dappertutto riferito che il matematico italiano Ruffini fu il primo che dimostrò la impossibilità della risoluzione per radicali dell'equazione generale di quinto grado, e di tale dimostrazione se ne trova anche fatta la critica e indicati i difetti; ma sembra poi essere

---

(*) Estratto dalle *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik,* VI Heft. (Supplemento alla 37.ma annata della *Zeitschrift für Mathematik und Physik.*)

stato completamente dimenticato (*) che una gran parte delle idee sulla teoria delle sostituzioni, che si sogliono attribuire a Cauchy, erano già note a Ruffini.

Non ci sembra quindi che sarà priva di un certo interesse una recensione delle cose principali contenute nei lavori di Ruffini; prima però ci sia permesso fare una rapida rassegna degli antecessori suoi, e seguire in essi il graduale sviluppo di quelle idee che a lui servirono di base.

1. Hudde, Saunderson, Le Seur. — La prima occasione per riconoscere l'importanza delle considerazioni di analisi combinatoria per le ricerche algebriche, sembra essere stata data dal problema: formare l'equazione di m^{mo} grado che abbia per radici m di quelle di una data equazione di n^{mo} grado ($m < n$). Per $n = 4, 5, 6$ ed $m = 2, 3$ il problema è trattato nella *epistola Johannis Huddenii de reductione aequationum* che Fr. van Schooten pubblicò insieme alla sua traduzione latina della geometria di Cartesio (**). Quivi (***) il problema si limita solo alla ricerca dei fattori *razionali* della equazione data, e perciò lo si risolve, costruendo prima la equazione ausiliaria, e poi esaminando se questa possiede radici razionali. In maniera simile si trova trattato il problema nei libri posteriori, fino a che Saunderson (****), molto tempo dopo, notò che la determinazione dei fattori quadratici di un polinomio di quarto grado, deve condurre *necessariamente* ad un'equazione di sesto grado, perchè vi sono sei fattori possibili di tale specie. La ragione per la quale egli si limitò a questo caso speciale, la si trova pensando che egli scriveva un'opera elementare. Il caso generale fu trattato subito dopo da Le Seur; egli dà il numero

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m},$$

come grado dell'equazione da cui dipende la determinazione dei divisori di m^{mo} grado di un polinomio di n^{mo} grado (*****).

(*) Nella dissertazione di I. Hecker fatta a Bonn: *Ueber Ruffini's Beweis für die Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der allgemeinen Gleichung von einem höheren als dem vierten Grade* (Bonn, 1886) si parla solo dell'ultima redazione della dimostrazione di Ruffini (quella del 1813), la quale non contiene però gli sviluppi più interessanti.

(**) *Geometria a Renato des Cartes*... opera atque studio Francisci a Schooten. Amstel. ap. Elzevirios, 2.ª ediz., 1659, 3.ª ediz., 1683.

(***) Pag. 487 della 3.ª ediz.

(****) *The elements of algebra* by Nicholas Saunderson, 2 volumi. Cambridge, 1740 (posthum); vol. 2.°, pag. 737.

(*****) *Mémoire sur le calcul intégral* par le P. Thomas Le Seur. Rome, 1748 (non 1758 come erroneamente sta stampato), pag. 22, 23. L'opuscolo tratta dell'integrazione delle funzioni fratte razionali per mezzo della decomposizione in frazioni parziali.

L'interesse con cui i matematici di quel tempo si occuparono proprio di questo problema, si spiega col fatto che si pensò di potere per questa via giungere a dimostrare la esistenza delle radici delle equazioni algebriche di grado elevato. Si pensava così: collo stesso diritto con cui si introducono nel calcolo le quantità immaginarie, cioè le radici di certe equazioni quadratiche, si può benanche ammettere che da equazioni di grado superiore restino definite delle quantità immaginarie, salvo poi a decidere se queste sieno della stessa specie di quelle o di natura diversa. Ma non si potrebbe d'altra parte non conchiudere secondo la prima ipotesi per poco che si fosse giunti a ridurre la determinazione dei fattori quadratici di un polinomio dato alla risoluzione di una serie di risolventi di grado dispari, ciascuna delle quali quindi possegga almeno una radice reale. L'errore contenuto in tale argomentazione, fu messo in rilievo per la prima volta, come si sa, da Gauss nella sua *Dissertazione* (*).

2. Waring. — Una più estesa applicazione dell'analisi combinatoria alla determinazione del grado delle risolventi si incomincia a trovare per la prima volta in Waring, e propriamente in molti luoghi della prima parte della sua *Miscellanea analytica* (**) e delle *Meditationes algebraicae* (***). Così per es. dopo le prime proposizioni si trova subito formulato il problema (****): *Invenire aequationem, cuius radices sint quaecumque algebraica radicum datarum aequationum functio.* Per la soluzione di questo problema vengono proposti due metodi e illustrati con esempi; il primo di essi si riduce alla costruzione di funzioni simmetriche, e l'altro ad un processo di eliminazione.

Ma le ricerche di questo genere sono poi principalmente raccolte nel cap. IV delle *Misc. anal.* e nel cap. III delle *Med. alg.*, sotto il titolo: *De reductione et resolutione aequationum.* Qui si trova trattato il più volte citato problema dei divisori di m^{mo} grado di un polinomio di n^{mo} grado (*****); come dimostrazione sufficiente del fatto che tutti i valori che acquista la

(*) Ges. Werke, vol. 3.°, pag. 5, 14.

(**) Cantabrigiae, 1762. La seconda parte di quest'opera tratta della teoria delle curve; le *proprietates algebraicarum curvarum* (ib., 1772) stanno a questa seconda parte nello stesso rapporto che le *Med. alg.* stanno alla prima parte.

(***) Ib., 1770; la edizione posteriore del 1782 è segnata come ediz. 3.ª, perchè la *Misc. anal.* è calcolata come 1.ª ediz. Le *meditationes analyticae* di Waring (ib., 1775) sono un esteso trattato del calcolo delle *flussioni* e dei *fluenti.*

(****) *Misc. anal.,* pag. 11; *Med. alg.,* pag. 17 (ediz. del 1770).

(*****) *Misc. anal.,* pag. 34; *Med. alg.,* pag. 87.

quantità ausiliaria, per le permutazioni fra le radici dell'equazione data, debbono essere tutti radici della stessa equazione ausiliaria, anche Waring osserva semplicemente che: *quot sunt combinationes m radicum in maiore multitudine n radicum, tot erunt problematis solutiones* ET CONSEQUENTER *tot erunt radices aequationis reducentis.*

Nei luoghi citati si trova anche la osservazione, che dopo aver determinato *un* coefficiente del divisore, gli altri si potrebbero determinare con semplici divisioni, *eccettuato il caso che l'equazione da cui dipende quel primo coefficiente venga a possedere radici eguali.* Qui vien rimandato il lettore ad un passo più avanti (pag. 166) dove si trova il seguente teorema generale: Sieno date due equazioni con due incognite; queste potranno esprimersi ambedue mediante le stesse irrazionalità, salvo se più valori di una di esse sono fra loro eguali; ma se 2, 3,... valori di x corrispondono allo stesso valore di y, allora l'equazione quadratica, cubica, ecc., cui soddisfanno questi valori non contiene altre irrazionalità che quelle che compariscono nel corrispondente valore di y.

È da notarsi poi anche che Waring conosce la trasformazione di Tschirnhaus, e dà esattamente il grado dell'equazione ausiliaria che occorre per far sparire i termini medii nella equazione risolvente corrispondente (*); del resto egli cita Tschirnhaus per la prima volta nella Prefazione dell'edizione del 1782, pag. X, XXV.

Come esempi per le sue proposizioni generali Waring adopera in gran parte i diversi metodi noti per la risoluzione delle equazioni di 4.° grado; egli fa vedere fra le altre cose (**) come le radici delle corrispondenti risolventi cubiche si possano esprimere come funzioni a tre valori

$$x_1 x_2 + x_3 x_4, \qquad (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2, \qquad (x_1 x_2 - x_3 x_4)^2,$$

delle radici $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ della equazione data.

Propone poi anche il problema: Trovare equazioni speciali, le cui radici abbiano una forma stabilita; e, fra le altre, trovare equazioni di m^{mo} grado le cui radici abbiano la forma (allora molto trattata)

$$x = \sqrt[m]{\alpha_1} + \sqrt[m]{\alpha_2} + \cdots + \sqrt[m]{\alpha_{m-1}}.$$

(*) Un caso speciale si trova nella *Misc. anal.,* pag. 39; il caso generale nelle *Med. alg.,* pag. 101.

(**) *Med. alg.,* pag. 94.

Che poi la determinazione delle α, già pel caso delle equazioni generali di 5.° grado, dipenda da un'equazione di grado più elevato, egli lo ricava senza difficoltà dai suoi principii di analisi combinatoria (*).

3. Lagrange. — Nello stesso anno in cui comparirono per la prima volta le *Med. alg.* di Waring, Lagrange presentò all'Accademia di Berlino la sua estesa Memoria: *Reflexions sur la théorie algébrique des équations* (**).

Nei trattati si parla di quest'opera molto più che di tutti gli altri lavori che abbiamo qui da esaminare; così per es. il trattato del Serret ne contiene un sunto assai esteso (art. 498-521). Ci sia quindi permesso limitarci ad un breve sunto di essa, limitandoci solo a quei punti caratteristici che si riferiscono alla introduzione, nella teoria delle equazioni, delle idee di teoria dei gruppi.

(*) *Med. alg.,* pag. 120. — Sebbene si tratti di cose estranee al nostro scopo, pure vogliamo notare una serie di altre rimarchevoli cose, che si trovano in Waring, e che sono poco conosciute. Le prefazioni delle due opere contengono un riassunto di notizie (sempre più completo in ciascuna delle edizioni seguenti) sopra la storia anteriore dell'algebra, riassunto che specialmente per il XVII secolo, e per la prima metà del XVIII è assai ben fatto.

A capo del testo si trovano nelle due opere le formole per il calcolo delle somme delle potenze simili delle radici per mezzo dei coefficienti; vi si adopera l'espressione *esponentes litterarum* per ciò che ora si suol chiamare *peso dei coefficienti;* segue poi il calcolo delle altre funzioni simmetriche per mezzo delle somme delle potenze simili delle radici; il metodo, cosiddetto di Waring, per il calcolo delle funzioni simmetriche direttamente per mezzo dei coefficienti si trova solo nella seconda opera (pag. 11). La *Misc. anal.* contienė pure (pag. 16) il metodo per il calcolo approssimato delle radici (supposto che sieno reali) metodo cha va sotto il nome di Graeffe.

Una gran parte delle due opere è occupata da ricerche sopra le radici razionali di sistemi determinati e indeterminati di equazioni; nel V cap. delle *med. alg.* queste ricerche comprendono anche un riassunto formale di teoremi sulla teoria dei numeri (vi si trova anche pubblicato per la prima volta il teorema di Wilson riferendosi ad una comunicazione di Wilson a Waring, pag. 218 v. anche pag. VIII). Per Waring, come anche per parecchi altri suoi contemporanei, tali problemi aveano anche una grande importanza algebrica, perchè egli pensava (v. *Misc. anal.,* pag. 48; *Med. alg.,* pag. 121) di potere giungere alla soluzione delle equazioni generali di grado elevato, nel seguente modo: assumendo prima una risolvente con un numero di incognite superiore al numero delle condizioni da soddisfare, una opportuna eliminazione avrebbe condotto ad una equazione a più incognite; ciò ottenuto, e trovati valori razionali per le incognite, e soddisfacenti quest'ultima equazione, si sarebbe potuto poi da questi pervenire alla soluzione della equazione data.

(**) Nouveaux mémoires de l'Académie de Berlin pour les années 1770-1771 (Berl., 1772-1773) *Oeuvres de Lagrange,* éd. Serret, tom. 3.

Come scopo del lavoro il Lagrange nella Prefazione si propone questo: esaminare i diversi metodi adoperati sino al suo tempo per la risoluzione algebrica delle equazioni, ridurli a principii generali, e mostrare *a priori* perchè essi, mentre conducono allo scopo finale per le equazioni di 3.° e 4.° grado, vengon meno invece per le equazioni di grado superiore.

Nel primo capitolo si mostra che tutti i metodi dati per la risoluzione delle equazioni cubiche, conducono tutti alla risoluzione di un'equazione ausiliaria di 2.° grado, di cui le radici si esprimono mediante le radici x_1 x_2 x_3 della data e mediante una radice terza complessa dell'unità α, sotto la forma:

$$(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3,$$

o mediante combinazioni lineari di tali espressioni; la proprietà caratteristica di queste, è che esse, per tutte le permutazioni fra le radici x, non possono assumere più che due valori diversi. Il capitolo termina collo sviluppo di alcuni teoremi sulle radici dell'unità, e che si ricavano dalla forma trigonometrica sotto cui quelle possono porsi.

Nel secondo capitolo si tratta similmente dei metodi per la risoluzione delle equazioni biquadratiche, e si dimostra che essi si riducono in sostanza all'uso di un'equazione ausiliaria, di cui le radici sono funzioni a tre valori di quelle dell'equazione data, come per es.:

$$x'x'' + x'''x^{\mathrm{IV}}, \qquad (x' + x'' - x''' - x^{\mathrm{IV}})^2,$$

$$(x' + x''\sqrt{-1} - x''' - x^{\mathrm{IV}}\sqrt{-1})\,(x' - x''\sqrt{-1} + x''' - x^{\mathrm{IV}}\sqrt{-1}).$$

Per una funzione meno semplice di queste, egli dimostra col seguente procedimento la proprietà di possedere tre valori (art. 43). Essa resta inalterata scambiando x' con x'', quindi non conterrà più 24 valori, ma al più 12. Resta ancora inalterata per lo scambio di x''' con x^{IV}, e quindi allora al più avrà 6 valori, e finalmente questi 6 valori si riducono a 3 se si osserva che la funzione resta ancora inalterata per gli scambi di x' con x''' e contemporaneamente di x'' con x^{IV}, e *che tale permutazione è indipendente dalle prime già considerate.* Osserva poi ancora che la funzione non si altera per gli scambi di x' con x^{IV} e x'' con x'''; ma egli dice che *tale ultima permutazione non è più da considerarsi perchè non è indipendente dalle altre già considerate.*

Il terzo capitolo si riferisce alle ricerche analoghe per le equazioni di grado superiore. Proprio di questo capitolo il Serret riproduce quasi per intero le considerazioni e i risultati; è da osservarsi però che egli ha sostanzialmente modernizzato la forma dell'esposizione, inquantochè adopera la notazione simbolica delle sostituzioni, e in generale si serve di una trattazione sistematica, precedentemente fatta, della teoria delle sostituzioni, da cui Lagrange era ancora lontano.

Il capitolo termina con alcune considerazioni riguardanti la possibilità di trovare, seguendo la via già tracciata, equazioni ausiliarie di grado minore di quelle ottenute sino allora. Lagrange già per le equazioni di 6.° grado crede di dover rinunziare a questa speranza, perchè osserva che i 10 valori dell'espressione

$$(x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6)^2,$$

non si possono raccogliere in due serie di cinque ciascuna, in modo che il prodotto delle somme dei cinque valori di ciascuna serie riesca una funzione simmetrica (art. 85).

Il quarto capitolo contiene maggiori dettagli sui teoremi che si riferiscono al grado delle risolventi. Un suo proprio procedimento di eliminazione, ricavato con metodo induttivo da esempi semplicissimi, conduce al teorema fondamentale che il grado di una risolvente coincide col numero m dei diversi valori che le sue radici possono acquistare per tutte le permutazioni fra le radici della data equazione; per la dimostrazione di questo teorema non occorre la conoscenza dell'altro teorema, che tutte le funzioni simmetriche delle radici si possono esprimere razionalmente mediante i coefficienti, che anzi questo si ricava come caso particolare da quello (per $m = 1$).

Non si fa del resto alcuna parola riguardo alla irriducibilità della equazione che si ottiene (una lacuna notevole non tanto per le considerazioni di Lagrange nelle quali questo punto ha poca importanza, quanto per le conseguenze che posteriormente se ne ricavarono).

Si tratta poi anche del teorema generale che il numero dei diversi valori di una funzione razionale di μ quantità è sempre un divisore di $\mu!$; la dimostrazione è riportata integralmente solo per le funzioni bidrome, e per gli altri casi viene osservato poi che si può ragionare nella stessa maniera. Se ne ricava allora anche la nota dimostrazione del teorema, che una funzione y delle radici x di un'equazione la quale resti inalterata per tutte le permutazioni fra le x che lasciano inalterata una funzione t delle radici x, si può esprimere razionalmente mediante t, mentre poi y dipende da un'equazione di grado m i cui coefficienti sono razionali in t, dove m è il numero dei valori di y appartenenti ad uno stesso valore di t (*). Come esempi vengon di nuovo considerate le funzioni a due valori di tre quantità, e quelle a tre valori di quattro quantità.

I risultati delle sue ricerche il LAGRANGE li riassume nelle seguenti parole (art. 109):

« Io non dubito punto che nelle cose avanti sviluppate risiedano i veri « principii della risoluzione delle equazioni, e il più opportuno procedimento « analitico per arrivarvi. Come si vede, tutto si riduce ad una maniera di « calcolo di combinazioni col quale si può conoscere *a priori* il risultato finale. « Sarebbe stato qui il luogo di applicarlo alle equazioni di 5.° grado e di « grado superiore, la cui soluzione non è ancora nota. Ma per tale applica- « zione è necessario un numero di ricerche e combinazioni maggiore di quanto « potevamo racchiudere in questo lavoro. Noi speriamo però di ritornarci in « altro tempo, e per ora saremo paghi d'aver fondata una teoria che ci pare « nuova e generale. »

A modo di aggiunta vi sono poi alcune osservazioni sulle equazioni fra le cui radici esista una nota relazione; l'Autore ricerca, illustrandolo con alcuni esempi, fino a che punto la conoscenza di una tal relazione può portare, in base ai principi sviluppati, alla riduzione dell'equazione. Del resto egli non intende di fare con questa aggiunta una teoria completa di tali equazioni.

Alla 2.ª ediz. del suo *Traité sur la résolution des équations numériques* (Paris, 1808; opere ed. SERRET, tom. 8) LAGRANGE aggiunse come *note XIII* un punto dei tre primi capitoli della Memoria di cui parliamo, e in esso introduce alcune semplificazioni nella teoria delle radici, inspirate dalla lettura delle *Disquisitiones arithmeticae* di GAUSS che nel frattempo erano comparse; ma del resto non vi si trova nessun altro notevole progresso.

Verso la fine LAGRANGE parla della Memoria di VANDERMONDE di cui adesso parleremo noi. Egli osserva che il metodo di questo Autore è fondato su di un principio che deriva dalla natura delle equazioni e perciò è un metodo più diretto del suo.

4. VANDERMONDE. — Allo stesso anno 1770 appartiene un terzo lavoro interessante cioè la *Mémoire sur la résolution des équations* di VANDERMONDE (**).

(*) Sopra la maniera colla quale LAGRANGE tratta i casi d'eccezione che capitano in questo teorema per effetto dell'eguaglianza numerica di funzioni formalmente diverse, vedi HÖLDER, Math. Ann., vol. 34, pag. 454 e seg. (1889).

(**) *Histoire de l'Académie des sciences;* année 1771 (Paris, 1774), pag. 365 e seg. Come dice una nota, la Memoria era stata già letta nel novembre del 1770, ma non

Ecco come Vandermonde si esprime nella prefazione per dire lo scopo del suo lavoro:

« Mi è parso che una parte della difficoltà può essere imputata alla natura « stessa dei metodi analitici, di cui si è fatto uso finora; ed è perciò che io « ho preso il partito di scegliere un'altra via. Il metodo che io vado ad « esporre non suppone l'introduzione di alcuna incognita, e a qualunque punto « del calcolo, non si hanno che delle equazioni facili a verificare, eseguendo « le operazioni indicate . . . .

« La equazione

« $$x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

« può essere considerata da due punti di vista; cioè o come equazione di « 2.° grado, e allora l'incognita vi rappresenta una quantità ambigua; oppure « come prodotto di due fattori di 1.° grado, e allora è l'equazione che è am- « bigua, e l'incognita è suscettibile di due valori che non lo sono punto (*). « Si tratti solo di risolvere l'equazione, bisognerà allora scegliere il secondo « punto di vista, ma se si domanda una radice che non sia composta che dei « suoi coefficienti $(a + b)$ e (ab) questa radice sarà ambigua necessariamente: « perchè . . . . . . le due condizioni:

« $$a = \text{funz.}\ [(a + b),\ ab]$$

« e

« $$b = \text{funz.}\ [(a + b),\ ab],$$

« possono allora solo sussistere, se la funzione è una funzione ambigua. Una « tal funzione è per esempio:

« $$\frac{1}{2}\left(a + b + \sqrt{(a + b)^2 - 4ab}\right) \ldots\ldots \text{»}.$$

Analogamente viene in seguito data, per le radici dell'equazione cubica, la espressione

$$\frac{1}{3}\left(a + b + c + \sqrt[3]{(a + r'b + r''c)^3} + \sqrt[3]{(a + r''b + r'c)^3}\right),$$

potette trovar posto nel volume del 1770 perchè Vandermonde non era ancor membro dell'Accademia; nel frattempo Vandermonde conobbe le *Meditationes algebraicae* di Waring, e le *Réflexions* di Lagrange.

(*) La indeterminatezza di tali asserzioni dipende dalla mancanza di idee di funzioni monogène e di campo di razionalità.

dove r' r'' indicano due radici terze complesse dell'unità, e vien mostrato che $(a+r'b+r''c)^3$ e $(a+r''b+r'c)^3$ si possono esprimere razionalmente mediante $a+b+c$, $ab+ac+bc$, e abc, a meno di un termine

$$\pm (a^2b+b^2c+c^2a-ab^2-bc^2-ca^2),$$

il cui quadrato gode però di tale proprietà (*).

Con tali considerazioni Vandermonde giunge a formulare nella seguente maniera il problema generale della risoluzione delle equazioni:

in primo luogo, trovare una funzione delle radici tale che si possa dire essere essa eguale in un certo senso a ciascuna delle radici stesse;

in secondo luogo, ridurre questa funzione ad una forma tale che sia sempre la stessa se anche le radici si permutino fra loro;

in terzo luogo, introdurre in tale funzione la somma di tutte le radici, la somma dei prodotti a due a due, ecc.

Vandermonde comincia colla terza parte di questo programma, e dà le formole ordinarie della teoria delle funzioni simmetriche. Schizza poi una teoria delle radici dell'unità, e questa contiene già (art. 6) senza dimostrazione l'asserzione che l'equazione di m^{mo} grado da cui dipende la determinazione delle radici $(2m+1)^{me}$ dell'unità, è *sempre facile a risolversi* (**).

Vandermonde passa quindi (art. 15 e seg.) alla prima parte del suo programma. Egli, riunendo insieme radici quadrate e cubiche, forma una serie di espressioni a sei, otto, nove valori; ma trova che nessuna di esse è atta a rappresentare le radici di un'equazione generale. Per andare avanti egli sente il bisogno di adoperare una notazione abbreviata per rappresentare quelle permutazioni delle radici per le quali la funzione che si considera resta inalterata; ma la notazione da lui scelta (art. 24), a meno di casi semplicissimi, è così incomoda che egli non può ricavarne molto profitto. Ciò nondimeno egli riesce non solo a completare la trattazione delle equazioni di 3.° e 4.° grado, ma riconoscere ancora la esistenza della risolvente di 6.° grado per le equazioni di 5.° e delle risolventi di 10.^{mo} e 15.^{mo} grado per le equazioni di

(*) Si vede che Vandermonde per metodo *sintetico* intende un metodo pel quale si piglian le mosse da una determinata forma delle radici, e si ricercano le equazioni di cui le radici abbiano quella forma stabilita.

(**) Le espressioni esplicite per le radici undicesime dell'unità sono date nell'art. 35, senza dire come sono state ricavate.

6.^{mo} grado, come anche la relazione di tali risolventi colla scomposizione di un polinomio di 6.° grado in fattori cubici e quadratici. Dopo avere anche formato le risolventi di queste risolventi, e mostrato che anche esse non lo fanno progredire nella risoluzione, termina col dire (art. 34) d'aver fatto molti inutili tentativi per formare con cinque elementi funzioni a tre o quattro valori, ed essersi convinto che non ne esistono.

Non poco interessanti sono le osservazioni colle quali il Segretario dell'Accademia accompagna la sua relazione sopra il lavoro di Vandermonde nel suo rapporto annuale (pag. 49). Egli fa un paragone colle idee di Lagrange e crede che questi era persuaso doversi seguire un'altra via per la risoluzione delle equazioni superiori, mentre pare che Vandermonde creda che, se la risoluzione è possibile, non può che ritrovarsi per questa via; per conto suo egli è anche del parere di Vandermonde. È dubbio che egli abbia esattamente interpretato le vere idee dei due Autori, giacchè questi hanno sempre evitato di dichiararsi apertamente su questo punto.

5. Riassunto. — L'anno 1770, nel quale si seguirono a breve distanza fra loro, i tre lavori di cui abbiamo parlato cioè le *Meditationes* di Waring, le *Réflexions* di Lagrange, e la *Mémoire* di Vandermonde, rappresenta nella storia dell'algebra la fine di un periodo; il che del resto appare anche dal fatto che dopo questi lavori, i problemi in essi trattati si arrestarono per più d'un quarto di secolo.

Ci sarà ora utile riassumere in poche parole a che punto con quei lavori era stata ridotta la teoria della risoluzione delle equazioni di grado superiore. Era risultato che tutti i metodi noti per la risoluzione delle equazioni di 3.° e 4.° grado, per quanto sieno apparentemente diversi, hanno però sempre questo di comune, che cioè essi si riducono sempre a determinar prima tutte le funzioni razionali delle radici della data equazione, che assumono un ristretto numero di valori diversi, per tutte le possibili permutazioni fra le radici stesse; indi, conosciute queste funzioni, determinarne altre ad un numero maggiore di valori, e così di seguito; compiendo però tutto questo procedimento sempre nei limiti delle sole funzioni razionali. Era poi assolutamente ignoto se questa proprietà, comune ai noti metodi di risoluzione, è inerente alla natura del problema, ovvero è solo una proprietà casuale di quei metodi. Si conosceva inoltre la relazione (considerata del resto come evidente) esistente fra il numero dei diversi valori di una funzione e il grado dell'equazione ausiliaria da cui dipende il calcolo di quella funzione; e si sapeva poi ancora che le funzioni fra loro diverse, ma che si alterano o no per le medesime permutazioni fra le radici, erano egualmente atte allo scopo, fatta naturalmente astrazione da una maggiore o minore complicazione di calcoli. Ma però i ragionamenti con cui si cercava di dimostrare queste asserzioni erano, in quanto a rigore, appena sufficienti per quel tempo, in cui pareva giusto il fare applicazioni spesso molto soggettive del principio della ragione sufficiente.

Si credeva che per fare nuovi progressi in questo campo sarebbe stato necessario di sottoporre ad una ricerca uniforme e prestabilita tutte le diverse permutazioni fra le radici, ma mancava un punto di vista generale, col quale una simile ricerca fosse salvata dal perdersi in innumerevoli particolarità.

Ed infine, vista la inutilità di molti tentativi fatti per risolvere algebricamente le equazioni di grado superiore, si era giunti alla persuasione che tale risoluzione era impossibile; ma non esisteva però alcun mezzo per dimostrare questa impossibilità.

Se nei tempi che vennero dopo, si attribuirono a Lagrange tutti questi risultati positivi e negativi, ciò si deve senza dubbio alle eccellenti qualità delle quali è fornita quella sua Memoria: la precisione e la sottigliezza nelle idee, la generalità della disposizione, la semplicità, la chiarezza, e (per quanto lo comportassero i tempi) il rigore delle dimostrazioni.

Ma se però si guarda solo al contenuto, non si può negare che anche Waring e Vandermonde, indipendentemente da Lagrange, e contemporaneamente a lui, aveano ottenuto una gran parte dei suoi risultati.

6. Ruffini; vita pubblica. — Dal quadro descritto nel precedente paragrafo si vede che negli ultimi tre decenni del secolo XVIII il problema della risoluzione delle equazioni di grado elevato rimase stazionario; e anche i risultati che si erano già ottenuti si introdussero assai lentamente nei libri per le scuole (*). Un nuovo passo avanti lo fece per il primo Paolo Ruffini (nato nel 1765, morto nel 1822) (**).

(*) Negli *Elementi d'algebra* di Pietro Paoli (Pisa, 1794), nel tom. 1, pag. 119 si cita Lagrange; la 5.ª ediz. degli *Elementi d'algebra* di Clairaut (Paris, 1797) contiene fra le aggiunte dell'editore (L. C.) un estratto della Memoria di Lagrange.

(**) Una estesa Biografia, in cui però è molto trascurata la parte matematica, si trova nelle Memorie della Società italiana delle scienze, tom. 19, pag. LXXXV-CX (1826); un'altra si trova nella *Biografia degli italiani illustri,* pubblicata per cura d'E. de Tipaldo, vol. 4 (Venezia, 1837), pag. 225-230. Brevi notizie si trovano anche nella *Biografie universelle,* tom. 39 (Paris, 1825), pag. 274; nelle *Nouvelle biografie générale,* tom. 42 (Paris, 1863) col. 866; in Lombardi, *Storia della letteratura italiana.*

Della vita di questo uomo singolare, la cui opera, già dai suoi contemporanei poco conosciuta, fu anche più dimenticata dai posteri, sieno solo ricordate brevemente le seguenti cose.

Per propria vocazione medico (come Cardano), egli si dette poi agli studi matematici che gli procurarono cattedre in varie scuole e finalmente all'Università di Modena. Quivi egli non fu lasciato tranquillo, per parte dell'uno o dell'altro dei così mutabili governi di quel tempo, perchè egli in materia politica e massimamente religiosa, si mantenne tenacemente alla tradizione. Del resto seppe congiungere queste sue convinzioni con un vivo senso di italianità; egli con compiacimento chiamava Lagrange suo connazionale. I suoi scritti di medicina sono poco vantati, e si distinse dippiù nella sua imperterrita attività contro le varie epidemie che, a causa delle guerre, funestarono in quel tempo il paese. Si provò anche come scrittore religioso e filosofico. Noi ci occuperemo qui solo dei suoi lavori algebrici, e anche fra questi specialmente di quelli riferentisi alla risoluzione per radicali delle equazioni di grado superiore. Ruffini fu il primo che enunciò la impossibilità di tale risoluzione e che tentò di dimostrarla; a tale scopo egli pubblicò non meno di sei redazioni della sua dimostrazione.

Noi ci occuperemo ora successivamente di queste dimostrazioni, insieme agli altri scritti che vi si rapportano; potremo così formarci un completo concetto della contribuzione data da Ruffini a questa parte della scienza.

7. Opera di Ruffini del 1799. — La prima pubblicazione di Ruffini nel campo delle ricerche algebriche è un libro di algebra in due volumi intitolato: *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto,* uscito a Bologna nel 1799.

Dopo la esposizione delle proprietà generali delle equazioni, e la discussione dei metodi per risolvere quelle di 2.° 3.° 4.° grado, nel cap. XIII, Ruffini comincia la sua dimostrazione della impossibilità, e comincia col classificare le diverse *permutazioni.*

Per intendere questa classificazione è da sapersi in primo luogo che egli indica come una permutazione unica l'assieme di tutte quelle per le quali una funzione resta inalterata; egli cioè intende con *permutazione* quello stesso che Cauchy chiamò *sistema di sostituzioni coniugate,* e Galois *gruppo di sostituzioni.*

Un tal gruppo notoriamente è caratterizzato dal fatto che ad esso appartiene ogni sostituzione che risulta operando successivamente due qualunque sostituzioni del gruppo stesso; tale proprietà è conosciuta perfettamente da Ruffini e da lui ripetutamente applicata (*).

Come *permutazioni semplici* egli indicò i gruppi che (secondo il moderno modo di dire) risultano facendo le potenze di una stessa sostituzione, egli li distinse in due specie, secondochè questa sostituzione contiene uno o più cicli. Gli altri gruppi egli li chiamò *permutazioni composte,* e poi li distinse in quelli di *1.ª 2.ª 3.ª specie* secondochè sono *intransitivi, transitivi e imprimitivi, transitivi e primitivi.* Per la determinazione della transitività egli del resto considerava solo quelle radici che comparivano nella funzione considerata; una inutile convenzione che lo obbliga poi spesso a stabilire altre suddivisioni di casi. Anche in un altro punto le sue denominazioni si allontanano dalle odierne, e propriamente parlando dei diversi valori di una stessa funzione egli dice sempre: *tutti questi valori restano inalterati per la stessa permutazione,* laddove noi ora parliamo di *gruppi derivati gli uni dagli altri con trasformazioni.* Ciò non avrà poco influito per chiudere a Ruffini la via per giungere all'idea dei *sottogruppi caratteristici.* Del resto le sue definizioni delle diverse specie di permutazioni non sono abbastanza chiare considerate in sè stesse; però il loro senso risulta così chiaro dai vari esempi e applicazioni che egli ne fa, che si può esser sicuri non essergli ancora a quell'epoca penetrate le idee posteriori. (*In seguito adopereremo la terminologia adoperata oggi e non quella di* Ruffini.)

Il numero delle diverse permutazioni fra le radici, per le quali una data funzione non altera il suo valore, Ruffini lo chiama il *grado di uguaglianza* di questa funzione; questa idea corrisponde al nostro *ordine del gruppo appartenentevi* (**). Questo numero p egli lo determina per tutti i gruppi possibili di cinque elementi. Per una *permutazione semplice di 1.ª specie* esso è (e questo egli lo dimostra in generale) eguale al numero degli elementi che vi sono contenuti; per una *permutazione semplice di 2.ª specie* è eguale al minimo comun multiplo dei numeri analoghi corrispondenti alle diverse *componenti;* per una *permutazione composta di 1.ª specie* è eguale al prodotto di questi numeri (***). Delle *permutazioni composte di 2.ª specie* il Ruffini per

(*) Il caso che vi possa essere una eguaglianza *numerica* fra funzioni *formalmente* diverse, non è ancora in questo punto considerato da Ruffini; ma vedi il § 8.

(**) Che questo numero è sempre un divisore di $m!$ il Ruffini lo afferma seguendo Lagrange, ma senza dimostrarlo.

(***) Le componenti qui vengono supposte *semplici,* ciò che per $m = 5$, a meno di un caso triviale, effettivamente ha luogo.

cinque elementi conosce solo un gruppo per il quale è $p=8$; l'altro con $p=4$ (gruppo quadruplo) o gli sfuggì, oppure non credette di doverlo considerare a parte perchè compreso nel precedente. Passa poi egli alla discussione di tutte quelle *permutazioni di 3.ª specie* di cui una componente è una sostituzione ciclica di tutti cinque gli elementi; egli trova che in tal caso p non può avere altri valori che 10, 20, 60, o 120 (*). Dimostrato poi il teorema generale che per un gruppo, non contenente nessuna di tali sostituzioni cicliche di tutti cinque gli elementi, il numero p non può essere mai un multiplo di 5, stabilisce come risultato principale delle sue ricerche il fatto che p non può mai essere eguale a 15, 30, o 40, o con altre parole, che *non esiste alcuna funzione di cinque elementi la quale abbia solo otto, quattro o tre valori diversi, quando tali elementi si permutino fra loro in tutti i modi possibili* (art. 275).

Questo capitolo inoltre contiene (art. 273) anche un altro teorema generale (anche questo dimostrato col discutere tutti i singoli casi possibili) che ora si può enunciare così: Se un gruppo contiene tutte quelle sostituzioni che risultano trasformando una sua sostituzione mediante una determinata sostituzione ciclica di cinque elementi, esso contiene anche questa sostituzione ciclica.

Ruffini passa poi ad applicare i risultati ottenuti nella teoria dei gruppi al problema della risoluzione delle equazioni. Egli comincia col teorema (art. 277): Se fra due funzioni razionali M, Z delle radici di una equazione (generale) di 5.° grado, esiste una relazione della forma:

$$Z^5 - M = 0,$$

allora i 120 valori di Z sono tutti fra loro diversi. È qui tacitamente ammesso che Z deve alterarsi per una permutazione qualunque Q fra le radici, per la quale M resti inalterato.

Per la dimostrazione egli si serve del teorema ultimamente ricordato (art. 273): Q deve essere una permutazione ciclica di tutte le cinque radici; se ora Z non si alterasse per una permutazione P, essa non si altererebbe neanche per $Q^{-1}PQ$, e quindi, in forza di quel teorema, neanche per Q stesso, contro l'ipotesi. Di qui risulta, prima di tutto, che la risoluzione dell'equazione non può cominciarsi coll'estrazione di una radice 5.ª, e neanche coll'estra-

(*) Qui la enumerazione di tutti i casi possibili non è completa, perchè mancano i gruppi risultanti da (1 2 3 4 5), e (1 3 2); ma questo errore non ha nessuna influenza sui risultati.

zione di una radice 3.ª o 4.ª, perchè non esistono funzioni a tre o quattro valori; e quindi si conchiude che il primo passo non può essere che l'estrazione di una radice quadrata (art. 280). Dopo poi che è stata fatta questa estrazione, non potrà neanche operarsi l'estrazione di una radice 5.ª, o 2.ª o 4.ª, perchè non esistono neanche funzioni a quattro o otto valori, e neanche una radice 3.ª, perchè, sebbene esistano funzioni a sei valori, questi però non diventano a tre valori dopo l'estrazione di una radice quadrata (il che si dimostra esaminando i singoli casi). Siccome dunque non possono considerarsi come esponenti delle radici altri numeri che 2, 3, 4, 5, così resta dimostrato che non si può giungere, con estrazioni di radici, a funzioni delle radici dell'equazione generale di 5.° grado, le quali funzioni abbiano più che due valori, e quindi non si può giungere neanche ai valori delle radici stesse.

Questa dimostrazione trascura una serie di obbiezioni. Prima di tutto vi si parla delle radici dell'equazione, senza aver prima dimostrata la loro esistenza (*); poi non sono sempre complete le frequenti enumerazioni dei casi possibili. In terzo luogo i teoremi di Lagrange a cui si lega tutto il procedimento, aveano bisogno in parte ancor essi di dimostrazioni; e sopratutto sia Lagrange che Ruffini hanno sempre trascurata la dimostrazione del teorema che il numero dei valori di una funzione di n elementi è sempre un divisore di $n!$. In quarto luogo è enunciato senza dimostrarlo (art. 274: vi si usa la frase: *dedurremo non difficilmente*) che un gruppo di cui l'ordine è un multiplo di 5, deve sempre contenere una permutazione ciclica di tutti i cinque elementi; forse Ruffini ha creduto di avere esaurita la dimostrazione enumerando tutti i casi che si presentano. Finalmente (e questa è la più seria obbiezione) resta oscuro se nel procedimento si tratta solo di funzioni razionali delle radici, o anche delle irrazionali, le cosiddette *irrazionalità accessorie;* nel primo caso occorrerebbe giustificare una simile limitazione, e nel secondo caso alcune delle conclusioni non reggono più.

Cogli stessi principii Ruffini dimostra ancora la irresolubilità algebrica (**) delle equazioni di 6.° grado e di grado superiore.

Applica poi le sue ricerche (capp. XV e XVI) a equazioni speciali che si possano risolvere, nota che sia, per la forma delle equazioni, o per altro qualunque modo, una relazione fra le radici. Rimarchevole è qui solamente

(*) Negli art. 15, 20 ciò sembra considerato come assioma.

(**) Diciamo qui una volta per sempre che in quel tempo per risoluzione *algebrica* si intendeva la risoluzione *per radicali.*

il procedimento sviluppato negli art. 346 e seg. pel caso in cui la relazione nota contenga funzioni irrazionali delle radici. Ruffini cerca di liberar prima la relazione dalle irrazionalità, e poi opera colla relazione resa così razionale; non dice nulla sulla possibilità di ottenere alle volte maggior vantaggio adoperando la data forma irrazionale.

Dopo aver poi trattato dei metodi di approssimazione, degli sviluppi in serie, delle frazioni continue ecc., verso la fine della sua opera, agli articoli 496 e seg., egli torna ancora alla sua dimostrazione della insolubilità, e fa la seguente obbiezione: se anche non è possibile la risoluzione algebrica generale delle equazioni di grado superiore, dovrebbero però esistere, per ogni equazione particolare, delle relazioni fra le radici le quali (come si è mostrato avanti) potrebbero essere utili alla risoluzione. Egli risponde in due modi: prima di tutto se anche la cosa è così, ciò non porta alcuna influenza sulla verità del teorema generale, e poi non è affatto stabilito che ogni relazione fra le radici porti una riduzione del problema. Lascia poi irresoluto il quesito se per ogni equazione con coefficienti numerici (solo di queste egli si occupa) esista sempre una relazione fra le radici.

8. Memoria di Ruffini del 1801. — Subito dopo la comparsa della *Teoria generale delle equazioni* Ruffini pubblicò nelle Memorie della Società italiana delle scienze (tom. 9, pag. 444-526, Modena, 1802, colla data del 21 ottobre 1801) la Memoria: *Della soluzione delle equazioni algebriche determinate particolari di grado superiore al quarto.* Oggetto di questo lavoro è la risposta al problema: in quali casi la risoluzione algebrica di un'equazione si possa ottenere colla risoluzione di equazioni di grado inferiore. Restano dunque escluse tutte quelle equazioni risolubili algebricamente, ma nella cui formola di risoluzione compariscono radicali con indici eguali al grado dell'equazione; cosa che Ruffini per allora non notò, ma notò poi in una postilla nella sua Memoria posteriore (tom. 10, pag. 434).

Nella prima parte della Memoria si classificano le equazioni (si parla solo di quelle con coefficienti numerici razionali) in semplici (cioè irreducibili) e composte (riducibili), e si escludono queste ultime. Seguono alcune considerazioni sul modo di ricavare da una funzione delle radici un'altra consimile funzione; tali considerazioni sono poco chiare, perchè anche qui Ruffini considera solo le permutazioni fra le sole radici che compariscono effettivamente nella funzione. L'Autore passa poi alle modificazioni che debbono subire i teoremi generali della teoria delle equazioni, se fra le radici esista una determinata relazione; in altre parole se si considera come noto il valore di una determinata funzione di esse; qui egli si ricollega al già citato (n.° 7) capitolo finale della sua *Teoria*, e riferisce una serie di casi (art. 13 e seg.) in cui la conoscenza di una tal funzione non conduce ad una riduzione della equazione data. Come conclusione di questa parte (art. 16 e seg.) Ruffini passa ad una ricerca, non priva d'interesse, sul seguente problema: Può accadere che la funzione nota t delle radici, per alcune permutazioni di queste, alteri la sua forma; ma, a causa dei particolari valori numerici delle radici, non alteri invece il suo valore numerico; che cioè le funzioni t' t''.... $t^{(\alpha)}$ diverse nella forma, abbiano tutte però lo stesso valore K. Allora le funzioni simili a t non si possono più esprimere razionalmente mediante t, e quindi le deduzioni seguenti restano senza fondamento. Per questo caso Ruffini propone la seguente regola per la formazione di un'altra funzione T per la quale tale circostanza perturbatrice non si verifica più.

Sieno t_1 t_2... t_p le funzioni formalmente diverse che risultano da t colle permutazioni delle radici; di queste t_1 t_2... t_α abbiano i valori numerici eguali, e $t_{\alpha+1}$... t_p sieno numericamente diverse da t_1. Si formi

$$T_1 = t_1 + t_2 + \cdots + t_{\alpha-1} + t_\alpha;$$

facendo le diverse permutazioni fra le radici x, si possono di qui ricavare $q = \binom{p}{\alpha}$ funzioni, cioè:

$$\begin{aligned} T_2 &= t_1 + t_2 + \cdots + t_{\alpha-1} + t_{\alpha+1} \\ T_3 &= t_1 + t_2 + \cdots + t_{\alpha-1} + t_{\alpha+2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T_q &= t_{p-\alpha+1} + t_{p-\alpha+2} + \cdots + t_{p-1} + t_p. \end{aligned}$$

Se oltre le supposte relazioni fra le radici non ne esistono altre, nessuna di queste funzioni ha lo stesso valore di T_1; in tal caso generale T_1 è una funzione della specie richiesta. Ma nei casi speciali può facilmente verificarsi una tale eguaglianza fra le T; e allora Ruffini procede nella seguente maniera. Indica con ε la serie dei numeri primi 1, 2, 3, 5, 7,... e immagina costruite le funzioni

$$\begin{aligned} T_1(\varepsilon) &= t_1^\varepsilon + t_2^\varepsilon + \cdots + t_{\alpha-1}^\varepsilon + t_\alpha^\varepsilon \\ T_2(\varepsilon) &= t_1^\varepsilon + t_2^\varepsilon + \cdots + t_{\alpha-1}^\varepsilon + t_{\alpha+1}^\varepsilon \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T_q(\varepsilon) &= t_{p-\alpha+1}^\varepsilon + t_{p-\alpha+2}^\varepsilon + \cdots + t_{p-1}^\varepsilon + t_p^\varepsilon. \end{aligned}$$

Se ora, per un determinato indice μ, sussistesse la equazione $T_1(\varepsilon) = T_\mu(\varepsilon)$ per infiniti valori di ε, si ricaverebbe che uno dei valori $t_{\alpha+1} \ldots t_p$ sarebbe numericamente eguale a t_1, contro l'ipotesi (*). Siccome ora anche il numero q degli indici μ è finito, vi dovranno essere valori di ε pei quali nessuno $T_\mu(\varepsilon)$ è eguale a $T_1(\varepsilon)$ (**). Una tale $T_1(\varepsilon)$ è allora infatti una funzione colla voluta proprietà; tutte le funzioni da essa formalmente diverse che ne risultano colla permutazione delle radici x, hanno anche valori numericamente diversi; ed in particolare essa conserva la sua forma e il suo valore solo per tali permutazioni fra le radici per le quali t_1 non altera il suo valore numerico. Del resto essa non resta in generale inalterata per *tutte* le sostituzioni di tal natura (***); ciò nonpertanto (art. 22, nr.[i] 4, 5) essa è allora anche più adatta per la riduzione dell'equazione. Il teorema dell'esistenza di una tale funzione T_1 rende a RUFFINI gli stessi servigi che quelli che a noi ora rende il teorema, che « ciascuna specie contiene funzioni con discriminante diverso da zero »; ma però non è identico con tal teorema.

La seconda parte della Memoria (pag. 476 e seg.) tratta del problema principale. L'Autore comincia colla dimostrazione, che il gruppo (****) di un'equazione irriducibile è transitivo, e quindi che la funzione T formata nel modo detto avanti, deve contenere tutte le radici (art. 26). Vien poi mostrato che la risoluzione di un'equazione ausiliaria di grado inferiore può rendere solo allora riducibile l'equazione data, se il gruppo di questa era imprimitivo (*composto di 2.ª specie* secondo la terminologia di RUFFINI, art. 29). Sin qui le sue conclusioni sembrano esatte; ed infatti esse non sono diverse, per quanto il modo col quale sono rappresentate possa essere strano, da quelle che si adoperano ora. Ma in seguito egli crede che un gruppo non imprimitivo debba sempre avere un sottogruppo caratteristico imprimitivo, e giunge quindi alla

(*) RUFFINI dimostra questo per mezzo di un esempio; ora invece si può facilmente dimostrare in generale mediante la espressione per determinanti dei prodotti delle differenze.

(**) A questa dimostrazione del RUFFINI può farsi l'appunto che egli (art. 18, 19) tratta ancora diversi casi possibili, senza accorgersi che questi sono già esclusi dalle premesse fatte.

(***) Ciò succederebbe solo se $t_2\ t_3 \ldots t_\alpha$ non alterassero il loro valore per le medesime permutazioni per le quali t_1 non l'altera; vedi su questo HÖLDER, Math. Ann., vol. 34, pag. 40 (1888).

(****) Il *gruppo dell'equazione* comparisce qui sempre come *l'assieme delle permutazioni* per le quali T non altera il suo valore.

seguente falsa generalizzazione del teorema precedente (*): Un'equazione è risolubile con una serie di equazioni di grado inferiore solo nel caso in cui il suo gruppo è imprimitivo (art. 33).

Il problema di ricercare se ciò si verifica per una data equazione, conduce al problema di ricercare i fattori razionali di quella risolvente donde dipendono i prodotti a μ a μ delle radici, e di questo problema e dei suoi affini si occupa la terza parte della Memoria. Vengono prima di tutto stabilite delle formole della teoria delle funzioni simmetriche, formole che occorrono alla costruzione di questa equazione (art. 37). Vien poi mostrato come, dopo la determinazione del prodotto di μ radici, le altre funzioni simmetriche di queste μ radici si possono determinare (in generale) razionalmente con un processo di divisione.

Tal processo è diverso da quello di LAGRANGE, ed è adatto solo per questo caso speciale; esso però vien generalizzato anche nel seguente modo (ar. 48): Sia u_1 un dato valore di una funzione u delle radici, t_1 il corrispondente valore di una funzione simile u. Si indichi con t una grandezza ausiliaria e si formi il prodotto di tutti i possibili valori del trinomio

$$Z^2 + tZ + u.$$

I coefficienti delle singole potenze di Z in tal prodotto, sono razionalmente note, perchè funzioni simmetriche. Dividendolo per $Z^2 + tZ + u$, si ha un resto lineare in Z che deve annullarsi per ogni Z. La radice comune delle due equazioni in t che ne risultano è t_1, e propriamente è l'unica radice comune, e quindi è esprimibile razionalmente, se le u formalmente diverse non hanno valori numerici eguali.

9. ABBATI (**). — Nel volume seguente (10) delle stesse Memorie si trova a pag. 385-409 una lettera di PIETRO ABBATI (conte MARESCOTTI) a RUFFINI (30 settembre 1802), in cui l'Autore convinto della esattezza della dimostrazione della irresolubilità data da RUFFINI, imprende a semplificarla e a generalizzarla. La semplificazione consiste prima di tutto in ciò, che egli alle ricerche singole di tutti i possibili sottogruppi, ricerche che in RUFFINI occupano

(*) Per equazioni il cui grado non è una potenza di un numero primo, tal teorema notoriamente è esatto; ma non si può però dimostrare con mezzi così semplici. È curioso che il RUFFINI non abbia pensato, di sottomettere il suo teorema alla prova delle equazioni di quarto grado, che gli avrebbero subito messo in luce la sua inesattezza.

(**) V. P. RICCARDI, *Notizie della vita e delle opere del conte Pietro Abbati Marescotti.* Modena, 1879.

tanto spazio, sostituisce degli sviluppi di un carattere generale. Così egli dimostra il teorema fondamentale, che una funzione razionale di cinque elementi non può avere tre o quattro valori, colla seguente considerazione semplicissima (art. 26): Un gruppo di cui l'indice deve essere minore di 5, deve contenere tutte le permutazioni cicliche di cinque lettere; ma inoltre deve anche contenere, oltre l'identità, almeno una delle sei sostituzioni che risultano con tre lettere, e quindi o una trasposizione, o una sostituzione circolare di tre lettere. Ma, come avea già mostrato Ruffini, una sostituzione ciclica di cinque lettere forma con una trasposizione il gruppo simmetrico, e con una sostituzione circolare di tre lettere il gruppo alternante. Viene poi anche semplicizzata in modo analogo la dimostrazione del teorema, che non esiste alcuna funzione di cinque lettere a otto valori. La generalizzazione di Abbati consiste nel mostrare, ciò che Ruffini avea tralasciato, che anche per più di cinque elementi, non esistono funzioni a tre o quattro valori. Anche in altri punti il lavoro di Abbati contiene alcune cose notevoli, come per es. in una nota all'art. 7, contiene la prima (per quanto mi è noto) dimostrazione completa del teorema, che il numero dei valori formalmente diversi di una funzione di n elementi è sempre un divisore di $n!$, e la dimostrazione vien condotta con quello stesso metodo, l'ordinamento dei valori della funzione in uno schema rettangolare, col quale la si fa adesso generalmente. Vi si trova inoltre (art. 35) espressamente enunciato e dimostrato il teorema, che non esistono altre funzioni a due valori oltre quelle che appartengono al gruppo alternante.

10. Memoria di Ruffini del 1802. — Questo scritto di Abbati indusse Ruffini a pubblicare per esteso ancora una volta la sua dimostrazione giovandosi delle semplificazioni introdotte da Abbati (*). Premessi i teoremi e le definizioni contenute nella sua prima opera, comincia la prima parte del suo lavoro, che tratta delle equazioni di 5.° grado, col ricavare una serie di sottogruppi risultanti dalle diverse combinazioni delle permutazioni semplici; questi sviluppi terminano (art. 14) colla dimostrazione di Abbati del teorema fondamentale della non esistenza di funzioni di cinque elementi aventi tre o quattro valori.

Dopo queste considerazioni preliminari sulla teoria dei gruppi, segue, sotto nuova forma, la parte algebrica della dimostrazione. Ruffini comincia

(*) *Della insolubilità delle equazioni algebriche generali di grado superiore al quarto.* Mem. della Società italiana delle scienze, tom. 10, parte II (Modena, 1803), pag. 410-470 colla data del 18 dicembre 1802.

di nuovo col teorema (art. 16) che una equazione della forma

$$Z^5 - M = 0,$$

dove M è una funzione a due valori delle cinque radici della equazione generale di 5.° grado, può solo sussistere se Z è anche a due valori. Perchè se Z mutasse per un'operazione del gruppo alternante, per es. per una permutazione ciclica di tre lettere, essa potrebbe cambiarsi solamente in αZ, essendo α una radice quinta dell'unità. Ma una permutazione ciclica di tre lettere ha il periodo 3, onde dovrebbe essere $\alpha^3 = 1$ contro l'ipotesi. Siccome poi in quell'equazione (art. 20), se Z deve avere più valori che M, questa non può neanche essere a cinque valori (altrimenti Z sarebbe a 25 valori), si conclude che una tale equazione può solo sussistere se M è almeno a sei valori.

Similmente restano anche dimostrati i teoremi:

Una funzione M che con un'altra Z stia in una relazione della specie indicata, non può soddisfare ad un'equazione della forma $M^p + V = 0$ se V appartiene ad un gruppo più ampio che M (art. 21).

Se fra due funzioni y Q delle radici sussiste una relazione della forma $y^5 = Q$, allora i cinque valori di y che appartengono allo stesso valore di Q, derivano l'uno dall'altro colle cinque sostituzioni circolari delle cinque radici (art. 23).

Dopo questi teoremi preliminari vi è prima di tutto l'osservazione che un'equazione solo allora è immediatamente risolubile algebricamente, se essa è riducibile o è un'equazione binomia; in ogni altro caso si deve passare attraverso la formazione di risolventi. Indi si osserva che nessuna risolvente di un'equazione generale può essere riducibile (art. 28), dopo di che segue il teorema: Se mediante una funzione z le radici x di un'equazione generale di 5.° grado possono esprimersi razionalmente, z deve alterarsi per una sostituzione circolare delle cinque radici, perchè altrimenti tutti i cinque valori di x dipenderebbero egualmente da z. Conseguentemente il grado dell'equazione, cui soddisfa z (*), deve essere un multiplo di 5 (art. 32). Poichè tale equazione (secondo l'art. 20) non può essere binomia, deve introdursi una nuova grandezza ausiliaria y (art. 34). Ma con tale introduzione solo allora si ottiene un vantaggio, se y rimane invariata almeno per una permutazione circolare di tutte le cinque radici x. Una funzione con tale proprietà può (secondo l'art. 21) soddisfare ad un'equazione binomia solo nel caso che essa

(*) Cioè nel campo di razionalità dei coefficienti.

sia a due valori; allora il grado dell'equazione in z, anche dopo l'aggiunzione di y, deve essere un multiplo di 5 (art. 37). Dopo di ciò si dimostra il teorema ausiliario: Se una funzione per una permutazione ciclica delle cinque x non altera il suo valore, essa possiede nel campo del gruppo alternante o uno o sei o dodici valori (art. 40; la dimostrazione si fa discutendo i singoli casi che possono presentarsi); segue quindi che dopo l'aggiunzione di y la funzione $M = z^5$ deve ancora dipendere da un'equazione di 6.° grado o 12.$^{\text{mo}}$ grado, la quale, secondo l'art. 21, non può essere binomia (art. 41). Si deve dunque assumere una nuova funzione risolvente N che dopo l'aggiunzione di y soddisfa ad un'equazione $N^q + \cdots = 0$ (art. 42). Se questa N deve restare inalterata per una sostituzione ciclica delle cinque x, deve essere (come per M) $q = 1$, 6, 12 (art. 43, 1); ma se deve mutarsi per ogni siffatta sostituzione, allora q deve essere un multiplo di 5 (art. 43, 2). In ambo i casi cogli stessi ragionamenti si giunge alla formazione di nuove risolventi, per le quali avviene daccapo lo stesso, e così di seguito indefinitivamente (art. 44). Seguono poi ancora le osservazioni che, anche supponendo risolventi riducibili, non si arriva a nulla, perchè per i loro fattori irriducibili si giunge alle stesse conclusioni; e sarebbe lo stesso se anche non si cominciasse dall'estrazione di una radice quadrata (art. 46, 1).

Delle cinque obbiezioni che noi abbiamo mosso alla prima forma della dimostrazione di Ruffini, cadono, in questa seconda forma la terza, la quarta, e in parte la seconda; il progresso è del resto da attribuirsi principalmente all'Abbati. La prima obbiezione la possiamo lasciar da parte, tenendo conto della *Dissertazione* di Gauss comparsa in quel tempo (*). Resta però l'ultima obbiezione, quella che si riferisce alle *irrazionalità accessorie,* e che incorre per tutto il corso della dimostrazione, come già lo mostra il modo ambiguo col quale Ruffini adopera le parole *semplice* (riducibile) e *composto* (irreducibile) senza una più precisa determinazione.

Fatta astrazione da tale obbiezione, è utile soffermarci a considerare un'altra caratteristica di questa prima dimostrazione di Ruffini. La dimostrazione di Abel (**) comincia col problema: Quale deve essere, supposta la possibilità della risoluzione, la prima operazione da farsi (o come si usa dire, il più interno segno di radicale); la teoria di Galois sulle equazioni risolubili per radicali, comincia invece col problema di ricercare quale deve essere l'ul-

(*) Non può sorprendere che essa, come pare, restò sconosciuta da Ruffini.
(**) *Oeuvres d'Abel,* éd. Sylow e Lie, tom. I, pag. 31, 84.

tima operazione da farsi. Ruffini comincia contemporaneamente dalle due parti, e cerca di continuare nell'una e nell'altra delle due direzioni concorrenti, per mostrare che resterà sempre nel mezzo una lacuna che non si può riempire. Questa è la causa della sua prolissità e della poca chiarezza della sua dimostrazione, ma si ha così forse la più completa conoscenza della natura della impossibilità e irresolubilità di cui si parla.

La seconda parte della Memoria contiene la dimostrazione dell'impossibilità di risolvere per radicali le equazioni di grado superiore al quinto. Poichè questa è nei punti più essenziali analoga a quella di cui abbiamo discorso per le equazioni di 5.° grado, così tralasciamo di esporne i dettagli. Solo osserveremo che Ruffini non conosce il teorema generale: per $n > 4$ non esistono funzioni di n elementi che abbiano più di 2 e meno di n valori, ma si contenta solo di mostrare che non esistono di tali funzioni con più di due valori e meno di cinque.

11. Dubbi di Malfatti. — Era da supporsi che gli antichi matematici, i quali molto si erano affaticati sul problema della risoluzione delle equazioni di 5.° grado senza veder coronati i loro sforzi, non lasciassero passare senza opposizione le deduzioni di Ruffini. Tale opposizione fu per la prima volta (a quanto mi è noto) sostenuta dal matematico ferrarese Gianfrancesco Malfatti (*) (in quel tempo già vecchio). Nella introduzione della sua Memoria egli con un giro di molte cortesi parole, dice d'aver avuto dei dubbi sulla esattezza della dimostrazione di Ruffini, e volerlo provare partendo da un'idea sulla genesi delle equazioni che egli soleva adoperare da molto tempo, e che del resto non differisce molto dal procedimento tenuto da Ruffini. Comincia così coll'esporre un suo proprio e antico tentativo di risoluzione.

Immagina prima di tutto tolta dall'equazione di r^{mo} grado il termine colla potenza $r-1^{ma}$ dell'incognita; la equazione così semplificata è per lui un'equazione *generica* nel suo grado, se i suoi coefficienti dipendono da $r-1$ variabili indipendenti. Egli osserva a questo proposito che le risolventi di Ruffini non sono in tal senso equazioni generiche (pag. 589). Cerca (**) egli allora di porre la radice di una tale equazione sotto la forma

$$x = -(fm + f^2 n + f^3 p + f^4 q + \cdots),$$

dove f è una radice r^{ma} dell'unità.

(*) Dubbi proposti al socio Paolo Ruffini sulla sua dimostrazione *Della impossibilità di risolvere le equazioni superiori al quarto grado;* Memorie della Società italiana delle scienze, tom. 11 (Modena, 1804), pag. 579-607; colla data del 26 aprile 1804.

(**) Come già Eulero, Vandermonde, Waring e altri.

Con alcuni teoremi preliminari sulle radici dell'unità, egli mostra come infatti partendo da tal forma si possa ottenere la risoluzione dell'equazione di 2.°, 3.°, 4.° grado, e ciò egli lo mostra sempre effettuando i calcoli, e senza considerazioni della teoria dei gruppi. Anche per le equazioni di 5.° grado egli intraprende il calcolo, ma a causa della sua complicazione è obbligato a fermarsi al punto in cui trova che $mnpq$ è una radice di una risolvente (*) di 6.° grado (pag. 596). Qui egli trova la prima obbiezione: Ruffini, egli dice, deduce per l'analogia colla soluzione delle equazioni di grado inferiore, che la espressione delle radici dell'equazione di 5.° grado deve contenere un radicale quarto sotto un radicale quinto; ora questa deduzione fatta per analogia non è certamente rigorosa (pag. 597).

Ammesso poi che sia così, non si può però conchiudere che le funzioni corrispondenti dipendano da equazioni di 4.° grado. Egli avvalora tale asserzione coll'esempio dell'equazione di 12.$^{\text{mo}}$ grado le cui radici sono $\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$. Egli dice di non vedere perchè la trovata risolvente di 6.° grado o qualche altra risolvente non possa avere una radice di tal forma o di altra forma simile, non essendo essa una equazione generale del suo grado.

La terza obbiezione di Malfatti consiste in ciò: egli dà a pag. 599 un esempio di un'equazione di 5.° grado la cui risolvente di 6.° ha una radice razionale; osserva quindi che manca una dimostrazione che questo fatto non succeda più per la risolvente di 6.° dell'equazione generale di 5.° grado; e, se anche si voglia concedere questo, resta però sempre che per ogni nuova risolvente da formare si ripresenta daccapo la stessa difficoltà. Egli non vede (pag. 606) la necessità che in tal caso la risolvente di 6.° grado dovrebbe avere tre radici eguali (**). Del resto, così finisce Malfatti, egli sarebbe ben lieto se Ruffini riuscisse a togliergli questi dubbi.

12. Risposta di Ruffini. — Ai dubbi di Malfatti, Ruffini rispose subito estesamente (***). La sua Memoria comincia con un'estesa esposizione della sua

(*) Sopra questa risolvente di Malfatti vedi la Nota di Brioschi nel 9.° vol. delle Memorie del R. Istituto Lombardo, 1863.

(**) Queste obbiezioni in Malfatti non sono del resto così precisamente formulate una ad una, come, per riuscire più chiari, le abbiamo inserite qui nel testo ponendole in relazione colle risposte di Ruffini; esse risultano invece da ragionamenti lunghi e continuamente interrotti da frequenti digressioni.

(***) Risposta di P. Ruffini ai dubbi propostigli dal socio G. Fr. Malfatti: *Sopra la insolubilità algebrica dell' equazioni di grado superiore al quarto;* Memorie della Soc. italiana delle scienze, tom. 12, pag. I (Modena, 1805), pag. 213-267; colla data del 27 giugno 1805.

dimostrazione, parte ripetendo, parte abbreviando, parte sviluppando daccapo l'antica dimostrazione; ma questa nuova esposizione è fatta però in modo che da essa, meglio che dalla precedente, risulta chiaro il corso delle sue idee (art. 1-12). Viene poi ai dubbi di Malfatti che egli ripete uno per uno. In quanto all'obbiezione dell'*analogia*, egli protesta non aver mai adoperata questa per dimostrar qualunque cosa; ma essersi solo servito della risoluzione delle equazioni di 2.°, 3.°, 4.° grado per rischiarare il suo metodo (art. 21). Molto meno possono poi anche trovarsi nel suo scritto, luoghi in cui egli abbia detto che le quantità sotto i radicali quinti, debbono essere radicali quarti, o in generale quantità dipendenti da equazioni di 4.° grado; solo avere egli, accanto agli altri possibili casi, considerato anche il caso di equazioni ausiliarie di 4.° grado (art. 22). Inoltre non avere egli mai detto che le grandezze contenenti radicali quarti dipendano da equazioni di 4.° grado, e similmente non sapere egli qual luogo dei suoi lavori abbia potuto far pensare a Malfatti che egli abbia detto, che per la risolubilità della risolvente di 6.° grado occorra la eguaglianza di tre delle sue radici (art. 22 in fine).

Contro l'ultimo dubbio di Malfatti, cioè che le altre risolventi potrebbero forse essere riducibili, il Ruffini confessa (art. 26) che è qui necessario uno schiarimento. Egli ragiona presso a poco così: sia z una prima funzione risolvente, e sia dimostrato, come nell'art. 28 della Memoria del 1801, che la corrispondente equazione risolvente non può essere riducibile se la data equazione è generale. Si potrebbe allora, per risolverla, prendere una nuova funzione ausiliaria y, funzione delle radici z' z''... della prima risolvente, e quindi anche funzione delle radici x' x''... dell'equazione data.

Si prendano ora tutti i diversi valori che y può prendere per le permutazioni fra le z; questi soddisfanno ad un'equazione $F(y) = 0$ di cui certamente non si può dire che è irriducibile. Ma la seconda risolvente non deve formarsi in tal maniera, ma direttamente dalla data, prendendo cioè in considerazione tutti i valori di y che risultano colle permutazioni fra le x. Tutti questi valori allora soddisfanno ad un'equazione $f(y) = 0$ per la quale la irreducibilità deriva dagli stessi principii donde deriva la irreducibilità dell'equazione in z. Ora il polinomio $F(y)$ non può avere altri fattori razionali che $f(y)$ e quelli che derivano da $f(y)$ colle permutazioni delle z; quindi non potrà, meglio che $f(y)$, servire alla risoluzione dell'equazione data (*).

(*) È da osservarsi, che qui si parla della formazione di una seconda risolvente, senza supporre che una prima è stata già risoluta, ma supponendo che una prima risol-

Sia che MALFATTI si sia persuaso di queste risposte di RUFFINI, sia che, anche non persuaso, non abbia voluto continuare la discussione, sia che ne sia stato impedito dalla morte (accaduta nel 1807), il fatto è che egli nulla rispose per le stampe.

Se dobbiamo dare un giudizio di questa discussione fra MALFATTI e RUFFINI, dobbiamo dar ragione a quest'ultimo laddove egli rispose che le prime obbiezioni di MALFATTI poteano solo derivare da equivoci; non si può però negare che la esposizione di RUFFINI è appunto assai poco opportuna per non dar motivi ad equivoci. Più grave invece (e ciò lo concesse lo stesso RUFFINI) è la obbiezione circa la irreducibilità della risolvente. Infatti sarebbe stata qui necessaria una chiara nozione dell'idea di *campo di razionalità;* ed è ovvio aggiungere che ambedue, sia MALFATTI che RUFFINI, eran ben lontani da una tale idea precisa. Coll'introduzione della quale del resto le considerazioni di RUFFINI sulle equazioni *generali* il cui campo di razionalità è quello dei coefficienti considerati come variabili indipendenti, senza dubbio sono valide; e lo stesso accade ancora dopo l'aggiunzione della radice quadrata del discriminante. Tale quistione del resto si ricongiunge con quella, già più volte citata, se cioè dall'introduzione delle irrazionalità *accessorie* possa aversi un vantaggio per la risoluzione; noi avremo occasione di tornarci ancora una volta.

Alla Memoria in risposta alle obbiezioni di MALFATTI, RUFFINI aggiunse una seconda parte, in cui si propose egli stesso alcuni dubbi e li risolvette. Il primo di essi è (art. 34): se la funzione ora indicata con $F(y)$ non possa essere binomia, supposto che $f(y)$ non lo sia. Che ciò non è possibile si può dimostrare nel seguente modo semplicissimo: Sia g il grado delle singole $f(y)$, h il loro numero, sarà quindi gh il grado di $F(y)$; sieno inoltre y', y'', due radici di $f(y)=0$. Poichè esse devono essere anche radici dell'equazione binomia (*) $F(y)=0$, deve essere anche $y''=\alpha y'$ essendo α una radice $(gh)^{ma}$ dell'unità. Applicando quelle permutazioni fra le x che mutano y' in y'', si mostra poi che anche $\alpha^2 y'$, $\alpha^3 y',\ldots$ devono essere radici di $f(y)=0$. Il numero γ delle radici così ottenute deve essere un divisore di grado g di $f(y)$ e quindi α una radice $g^{m\alpha}$ dell'unità. Quindi $f(y)$ stesso sarebbe eguale a $y^\gamma+C$, o ad un prodotto di siffatti fattori, il che contraddice all'ipotesi.

---

vente non si sappia risolvere. Del resto in questi sviluppi, si deve considerare sempre come aggiunta la radice quadrata del discriminante, anche che RUFFINI non lo dica espressamente.

(*) RUFFINI qui in luogo dell'ipotesi $F(y)=y^{gh}+b$, ha fatta l'altra, solo apparentemente più generale, $F(y)=(y+a)^{gh}+b$.

Ruffini, sia per poca dimestichezza colla teoria delle radici dell'unità, sia per altro, giunge a questo risultato solo pel caso $h=2$, e quindi ne deduce che potrebbe però ancora essere $h>2$ (art. 36). Allora egli procede nel seguente modo per far vedere che neanche questo caso può avverarsi. Si ponga $y^g=R$ e quindi $R^h+b=0$; sarà $h=ik$ se i è il numero dei diversi valori di R per le permutazioni fra le x, mentre k ha per R lo stesso significato che h ha per y. Sia ora $i=1, 2$; allora R sarebbe simmetrica o alternante, e quindi non sarebbe possibile un'equazione $y^g=R$, perchè g è >2 e y non deve a sua volta essere simmetrica o alternante; quindi deve essere $i>2$ (art. 39). Ora dell'equazione $R^{ik}+b=0$ si dimostrano le stesse proprietà, avanti supposte per l'equazione $y^{gh}+b=0$; quindi si ricava ancora, come sopra, $k>2$ (art. 40). Sia $R^i=S$ $S^k+b=0$ $k=qr$ dove q r hanno gli stessi significati che aveano i, k, e si dimostrerà similmente che deve essere $q>2$, $r>2$. Così procedendo si ha una serie indefinita di equazioni:

$$p=gh, \qquad h=ik, \qquad k=qr, \qquad r=st,\ldots$$

e ciascuno dei numeri i, q, s,... dovrebbe essere >2, ciò che non è possibile, perchè p è un numero finito (art. 41).

Ruffini aggiunge che tale conclusione sussiste anche se si immaginano aggiunte le funzioni alternanti (art. 44) e che $F(y)$ non può avere nessun altro fattore razionale che gli $f(y)$ (art. 45).

13. La quistione delle irrazionalità accessorie. — Se questa prima obbiezione che il Ruffini si fece da per sè, ei la potette risolvere senza difficoltà, la seconda invece riguarda quel punto debolissimo di tutta la sua argomentazione, già più volte citato; ci pare quindi qui il luogo di parlarne distesamente.

In primo luogo la obbiezione di Ruffini riguarda solo una quistione affine a quella di cui parliamo; trascriveremo qui le sue parole (art. 47), anche per dare un esempio caratteristico del modo di scrivere di quell'Autore:

« Nel (n.° 241 Teor.) (*), e nel (3.° Intr. della Mem.) (**) ho detto, che la « funzione fra le x' x'' x''' x^{IV} x^{V}, la quale è radice di una di quelle trasfor- « mate (***), che deggiono immediatamente, o mediatamente servire alla solu- « zione della (F) (****) può sempre supporsi razionale; perchè se si supponesse

(*) Così cita egli l'opera di cui abbiamo sopra parlato nel n.° 7.

(**) La Memoria del 1802; vedi sopra al n.° 10.

(***) Cioè: risolventi.

(****) La equazione data.

« irrazionale: 1.° la trasformata corrispondente per questa irrazionalità s'innal-
« zerebbe maggiormente di grado (n.[i] 241, 136 Mem.), e quindi si renderebbe
« più difficile a risolversi; 2.° dallo stato d'irrazionalità della supposta funzione
« pel (n.° 158 Teor.) non si trae vantaggio alcuno sopra di una funzione si-
« mile razionale, mentre da tal funzione vogliansi determinare i valori della x
« nella (F), o quelli di un'altra funzione delle x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}. Supposto le
« due (*) $y' = \varphi'(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})$, $z' = f'(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})$ funzioni
« simili (n.° 4 Teor.), tali cioè, che per quelle permutazioni medesime fra le
« x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}) per cui là y' conserva o cangia il proprio valore, lo con-
« servi o cambi in corrispondenza la z', e supposta la y' irrazionale, e razionale
« la z', la trasformata primieramente in y sarà di un grado più alto di quello
« della trasformata in z, e secondariamente nel cercare dalla z' il valore
« della x, o quello di una terza funzione $u = F'(x)$, se cadiamo in un'equa-
« zione di grado per esempio q, si caderà eziandio in un'equazione dello
« stesso grado q, mentre questo valore della x o questa funzione u si ricerchi
« dalla y'. Egli è perciò, che tanto nella Teoria, come nella Memoria non si
« sono, rapporto alla soluzione delle equazioni, considerate punto le trasfor-
« mate, che hanno per radici delle funzioni delle x' x'' ecc. x^{V} irrazionali:
« ma quantunque il grado dell'equazione in $y = \varphi(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})$, es-
« sendo questa funzione irrazionale, sia troppo alto, non potrebbe tale equa-
« zione acquistare la solita forma $(y + a)^p + b = 0$, od avere un fattore deter-
« minabile, da cui possa ricavarsi un valore della y opportuno immediatamente,
« o mediatamente allo scioglimento della (F)? Quantunque, nel cercare dalla y'
« il valore di una funzione u, cadasi in un'equazione di grado q troppo alto,
« non potrebbe darsi, che anche in quest'equazione in u fosse determinabile
« un fattore atto alla soluzione della (F), o che fosse essa riducibile alla
« forma $(u + a)^q + b = 0$? Ecco altri due dubbi cui è necessario risolvere. »

Ciò che poi Ruffini stesso propone a tale scopo, è assai poco atto a togliere le dette obbiezioni. Egli si riferisce ad una serie di precedenti teoremi, che in parte sussistono solo per le funzioni razionali delle radici dell'equazione data, mentre per l'altra parte, le dimostrazioni date da Ruffini non sussistono che solo per tali funzioni. Si tratta principalmente di quei teoremi che riguardono il grado e la irreducibilità delle risolventi. Egli va avanti seguendo il concetto: « lasciar fissi il valore e le combinazioni dei radicali quando

(*) Le parentesi che circondano le singole variabili, voglion significare, come in Lagrange, che la funzione non è supposta simmetrica in quelle variabili.

si scambino le x contenute sotto di questi », concetto che non fu da lui ben precisato, nè del resto sembra suscettibile di esserlo.

Le dimostrazioni di RUFFINI sulla irresolubilità contengono quindi, in un punto molto interessante, una lacuna, che del resto è stata già altre volte notata (*).

Si sa che la dimostrazione di ABEL riempie questa lacuna con una deduzione numerica del teorema: Se un'equazione è risolubile per radicali, si può dare alla soluzione sempre una tal forma, che tutte le funzioni algebriche di cui essa risulta composta, si possano esprimere come funzioni razionali delle radici della data equazione. È stata espressa l'idea che una tale deduzione algebrica, o, se si vuole, aritmetica, non si possa sopprimere, e sostituirsi con alcun'altra considerazione di altra specie (**). Ora se così infatti fosse, allora la menda della dimostrazione di RUFFINI non potrebbe evitarsi, o meglio dovrebbe considerarsi come tale che per evitarsi ha bisogno, come già nella dimostrazione di ABEL, di uno sviluppo a parte, separato, nel metodo, da tutto il resto. Però C. JORDAN, seguendo le idee di GALOIS, ha potuto (***) dare la dimostrazione, senza far uso di teoremi aritmetici, di una proposizione più generale contenente quella come caso particolare; egli si serve di idee adoperate già anche da RUFFINI, che cioè aggiungendo una funzione irrazionale delle radici, restano aggiunte anche delle funzioni razionali: quindi dovrà esser possibile, adattando convenientemente questi sviluppi, di rendere la dimostrazione dell'impossibilità di risolvere *algebricamente* le equazioni superiori, indipendente da quei teoremi preliminari, e dall'apparato formale che da essi risulta, e fare anche in modo che quei teoremi ne risultino invece come corollari. Una dimostrazione così costruita potrebbe a buon diritto riguardarsi come la *completa dimostrazione di* RUFFINI.

Seguono poi nel lavoro di cui si parla alcune altre osservazioni di minore interesse. Nel n.° 51 si spiega come l'aggiunzione simultanea delle radici di più equazioni ausiliarie non rende più agevole la soluzione. Nel n.° 52 si fa la domanda se alle volte non sia possibile di trovare, indipendentemente dal metodo già seguito, un'espressione algebrica che, sostituita nella data equazione, la renda soddisfatta; a tale domanda si risponde mostrando in che modo

(*) Vedi per es. SYLOW nelle *Note alle opere complete di Abel,* éd. SYLOW et LIE, vol. 2, pag. 293, o la *Dissert.* di HECKER (pag. 5 e 26) da noi citata nella introduzione.

(**) Vedi per es. NETTO, *Teoria delle sostituzioni* (Leipzig, 1882), § 200.

(***) *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Paris, 1870) art. 373 e seg. Si vegga anche HÖLDER, Math. Ann., vol. 34, pag. 47 e seg. (1889).

viceversa dalla data espressione si potrebbero formare le risolventi, e quindi si tornerebbe al problema sotto la forma primitiva (*).

14. Memoria di Ruffini del 1806. — Questa Memoria di Ruffini si propone di far vedere che la risoluzione delle equazioni di grado superiore al 4.° è sempre impossibile sia con metodo algebrico che con metodo trascendente (**). Forse colpiti da quest'asserzione paradossale molti matematici si saranno astenuti dallo studiare i lavori di Ruffini, contenendo naturalmente questa asserzione un'evidente contraddizione. Ma dopochè abbiamo visto nei lavori già esaminati, d'aver da fare con un matematico molto serio, per quanto qualche volta con nozioni non completamente chiare, alla maniera del suo tempo, noi non faremo caso di questa apparente contraddizione e prenderemo cognizione anche del contenuto di quest'altro lavoro, e troveremo poi in qual senso si deve propriamente intendere quell'asserzione paradossale. Il Ruffini spiega l'asserzione in tal senso, che cioè non esiste alcuna funzione *esatta* dei coefficienti, cioè risultante di un numero finito di termini, che sostituita nell'equazione la soddisfi. A prima vista a tale asserzione non si può dare alcun senso determinato, se essa deve riferirsi anche a funzioni trascendenti; ma la cosa è di altra natura. Si era da lungo tempo abituati a esprimere certe dipendenze trascendenti che incorrono di frequente (le funzioni esponenziali, le trigonometriche e le loro inverse) con segni particolari di funzioni, e di operare con questi come coi segni ordinari delle funzioni algebriche, senza per altro stabilire prima per quali speciali proprietà, quelle a preferenza di tutte le altre trascendenti, avean

(*) Lo stesso volume delle Memorie della Società italiana delle scienze contiene a pag. 321-336 anche un piccolo lavoro di Ruffini: *Riflessioni intorno al metodo proposto dal consocio Malfatti per la soluzione delle equazioni di 5.° grado* (del 21 settembre 1805). In esso egli mostra come dai teoremi fondamentali di Lagrange si possa concludere *a priori* che il grado della risolvente di Malfatti deve essere eguale a 6. Egli discute pure l'esempio dato da Malfatti, in cui tale risolvente possiede una radice razionale, e avverte che, sempreché ciò si verifica per la risolvente di una certa equazione di 5.° grado, questa potrà risolversi algebricamente. (Che tale condizione non è solo sufficiente, ma anche necessaria lo ha dimostrato E. Luther: *De criteris quibus cognoscatur an aequatio quinti gradus irreductibilis algebraice resolvi possit.* Crelle's Journal, Bd. 34, pag. 244; Diss. Regiom., 1847.)

(**) *Della insolubilità delle equazioni algebriche generali di grado superiore al 4.°, qualunque metodo si adoperi, algebrico esso sia o trascendentale.* Memoria dell'Istituto Nazionale italiano. Classe di fisica e matematica, tom. 1, pag. II (Bologna, 1806), pag. 433-450 (22 novembre 1806).

bisogno di una tal distinzione. Cosicchè spontaneamente si pensava solo a tali funzioni speciali quando si parlava della rappresentazione analitica e delle regole dei calcoli cui le funzioni si sottoponevano; e appena poi si riconobbe il bisogno di introdurre altre funzioni trascendenti, le proprietà che si erano riconosciute per quelle, si estesero senza dimostrazione alle funzioni generali. In Ruffini pare che si sieno riuniti ambedue gli equivoci; questa convinzione si acquista almeno se si legge la sua Memoria (*) sopra le proprietà generali delle funzioni, a cui è assai affine quella di cui parliamo in questo capitolo. Anche in questa noi cerchiamo invano in qualche definizione che cosa Ruffini intenda per funzione, e specialmente per *funzione semplice.*

Noi troviamo solo un'osservazione preliminare in cui si dice che funzione semplice è quella che risulta con un'unica operazione di calcolo, e come esempi di tali funzioni si dànno le seguenti:

$$\sqrt[5]{P}, \qquad \cos\left(\frac{1}{n}\,\mathrm{arc}\cos P\right), \qquad \log P.$$

Vi è una lunga serie di deduzioni e di calcoli in cui si opera con funzioni polidrome senza fissare il valore di scegliere, con funzioni di indice frazionario o anche irrazionale, con funzioni dipendenti da equazioni funzionali che ammettono ancora infinite altre soluzioni, e cose simili; si procede insomma in una maniera così poco scrupolosa che già dai primi teoremi si perde ogni via per controllare come debbono limitarsi le ipotesi per ottenere dei risultati che possano ritenersi validi.

Volendo formarsi un concetto dell'intera struttura non riman di meglio che raccogliere nella definizione quelle proprietà che Ruffini crede d'aver ricavate dalle sue indeterminate ipotesi sulle funzioni semplici, e dire:

Una funzione si dice semplice, nel senso di Ruffini, se fra i suoi valori, per un determinato valore dell'argomento, ciascuno è una funzione razionale di uno di essi, e se inoltre tutte le operazioni razionali così ottenute si possono esprimere colla ripetizione di una sola fra esse.

Sieno allora $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $\varphi(x, y, z)$ funzioni semplici, le funzioni $f_2[f_1(x)]$, $f_3[f_2(f_1(x))]$, $\varphi[f_1(x), f_2(x), f_3(x)]$ ecc. si chiamano funzioni composte, e tacitamente si considerano solo funzioni tali che si possano in tal

(*) *Alcune proprietà generali delle funzioni;* Memorie della Società Italiana delle scienze, tom. 13, pag. I (Modena, 1807), pag. 292-335 (27 giugno 1806).

maniera comporre mediante le semplici (*). Che con funzioni di tali specie non si possa effettuare la risoluzione delle equazioni di grado superiore, tale è il vero senso in cui bisogna intendere l'asserzione paradossale di Ruffini. Ma coi mezzi della moderna teoria delle funzioni si dimostra ora che quelle proprietà convengono solo, fra tutte le funzioni trascendenti, alla funzione logaritmica. Quindi l'asserzione di Ruffini si riduce a questo, che la soluzione delle equazioni di grado superiore è impossibile anche adoperando funzioni logaritmiche e circolari; e quindi l'asserzione è assolutamente esatta.

Del resto è chiaro che una combinazione di queste idee di Ruffini potrebbe condurre a considerazioni della stessa specie di quelle che alcuni anni fa il Rausenberger credette di dover porre a fondamento dei suoi lavori sulla teoria delle funzioni. In quanto alla dimostrazione che Ruffini dà della sua tesi, essa è presso a poco la seguente:

Sia P (n.° 1) una funzione dei coefficienti della data equazione, sia $y = \psi(P)$ una funzione *semplice* di P, ψ' ψ'' ψ'''.... i suoi diversi valori, $P = \Pi(y)$ la sua inversa. In P e y si introducano in luogo dei coefficienti le radici x. Esiste allora (n.° 2) un numero di permutazioni di x che dànno lo stesso valore di P ma diversi valori di y, e questi sieno indicati con ψ' ψ''... Sieno ora (n.° 3, I) y' y''.... y^{V}, cinque valori di y che risultano applicando ripetutamente le cinque permutazioni circolari di cinque fra le x, e sia $y'' = f(y')$, ne risulta che $f^5(y') = y'$, cioè che la quinta ripetizione della operazione f si riduce all'identità. Inoltre (n.° 3, II) se la funzione P resta inalterata per un'altra permutazione ciclica di g delle x, mentre y' si trasformi in $y^{(\alpha)} = \psi(y')$, ne deriva similmente che $\psi^g(y) = y$.

Supposto ora che (n.° 4) P resti inalterata per le dette permutazioni cicliche di cinque x, come anche per altre permutazioni cicliche di 2, 3 o 4 di esse, e che y per effetto delle prime muti il suo valore, ne segue che esso per le seconde deve conservarsi inalterato. Giacchè sia in primo luogo y^α eguale ad uno dei primi cinque valori y' y''... y^{V} per es. $= f^p(y)$; da $\psi^g(y) = y$ segue che $f^{pg}(y) = y$, $y^\alpha = y'$; ma in secondo luogo y^α è diverso da tutti quei cinque valori, quindi posto $f(y^\alpha) = f[\psi(y')] = F(y')$ sarà y' trasformato in $F(y')$ con una permutazione ciclica di cinque x, cosicchè, come nel primo

(*) Le funzioni *semplici* sarebbero allora nella teoria delle funzioni ciò che nell'algebra sono i radicali *con esponenti numeri primi*. (Dei radicali *con esponenti composti*, Ruffini dice che essi possono considerarsi sia come funzioni semplici che come funzioni composte.)

caso, $F^5(y)=y$, e, a causa della permutabilità (*) di f con ψ, $f^5\psi^5(y)=y$ e quindi $\psi^5(y)=y$ $\psi(y)=y$, contro l'ipotesi.

Il n.° 5 contiene l'analogo teorema per due permutazioni cicliche di tre o quattro delle radici x, e contiene poi la osservazione che questi casi sono tutti casi particolari di una legge generale. Il n.° 7 contiene dopo questi preliminari la affermazione decisa che y deve restare inalterato per ogni permutazione ciclica di cinque radici, se P è ad uno o due valori. Perchè altrimenti, per effetto del n.° 4, esso dovrebbe restare inalterato per qualunque permutazione di tre radici; ma d'altra parte ogni permutazione di cinque radici può comporsi con permutazioni di tre lettere, e quindi si è condotti ad una contraddizione.

Dopo ciò si chiude nel n.° 9 la dimostrazione della irresolubilità, mostrando che per quanto si aggiungano ancora segni di funzioni semplici, non possiamo mai giungere coi coefficienti dell'equazione a funzioni di tale specie che mutino il loro valore colle permutazioni cicliche di cinque radici, il che invece si verifica per le radici stesse.

15. Memoria di Ruffini del 1813. — Una quinta e ultima redazione della sua dimostrazione il Ruffini la pubblicò in uno scritto a parte (**). Nella introduzione egli ricapitola una serie di teoremi, per lo più di Lagrange, sulla teoria delle equazioni; tali teoremi vengono poi sviluppati per esteso in note poste alla fine dell'opuscolo. È a notarsi, a proposito di queste note, che Ruffini anche qui pone in vista la diversità fra l'eguaglianza formale e l'eguaglianza numerica dei valori di una funzione (nota 4, pag. 122), come anche il fatto che le sostituzioni che non alterano il valore numerico di una funzione non formano alcun gruppo (nota 5, pag. 123). La prima parte della Memoria contiene la dimostrazione della irresolubilità algebrica sotto la forma sopra esposta (n.° 14) per la irresolubilità *trascendente,* solo che dappertutto non si parla che di funzioni algebriche e di radicali.

I passi essenziali sono i seguenti:

(n.° 1) Sieno y, P due funzioni delle radici x dell'equazione data, e sia $y^p=P$; P resti inalterata per una permutazione ciclica (1 2 3 4 5) delle cinque radici x; un valore y' di y si trasformi in y'', y''', y^{IV}, y^{V} ripetendo consecutivamente la medesima permutazione.

(n.° 2) Deve allora essere $y''=\beta y'$, $y'''=\beta^2 y'$, $y^{\text{IV}}=\beta^3 y'$, $y^{\text{V}}=\beta^4 y'$, dove β è una radice quinta dell'unità.

(*) In tale permutabilità sta il perno della dimostrazione.

(**) *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebriche generali.* Opuscolo del cav. dott. P. Ruffini, ecc. Modena, 1813.

(n.° 3) Resti P inalterata anche per un'altra sostituzione ciclica (1 2 3) di tre fra quelle cinque radici, allora y' deve per tale sostituzione trasformarsi in $\gamma y'$ dove γ è una radice terza dell'unità.

(n.° 4) Operando le due permutazioni cicliche consecutivamente si ha di nuovo una permutazione ciclica di cinque radici (1 3 4 5 2); di qui segue $\beta^5 \gamma^5 = 1$; ma ciò è solo possibile se γ stesso è eguale ad 1; cioè y non può alterarsi per nessuna delle permutazioni cicliche (1 2 3), (2 3 4), (3 4 5), (4 5 1), (5 1 2).

(n.° 5) Quindi essa non può neanche alterarsi per la permutazione ciclica di cinque radici supposta avanti, perchè questa si potrebbe comporre mediante quelle di tre radici.

(n.° 6) Dunque non si può con estrazioni di radici giungere oltre le funzioni a due valori.

È appena necessario dire che questa redazione della dimostrazione coincide in tutti i punti principali con quella che nei libri si suole indicare come la *modificazione di Wantzel della dimostrazione di Abel.*

In quanto al problema delle irrazionalità accessorie il Ruffini questa volta si inganna laddove dice (nota 9, pag. 134):

Se nella espressione di $x^{(n)}$, dopo fatte le sostituzioni delle espressioni dei coefficienti mediante le radici, e le corrispondenti riduzioni, non scompariscono tutti i radicali, si avrebbe un'espressione razionale, cioè $x^{(n)}$, eguale ad un'espressione irrazionale, ciò che è assurdo.

I capitoli seguenti contengono un'estesa teoria delle equazioni di 3.° e 4.° grado, coll'intenzione di mostrare come a queste non possono applicarsi le stesse conclusioni che possono farsi per le equazioni di grado superiore. È da osservarsi qui sopratutto il modo con cui Ruffini stabilisce la impossibilità di evitare il *casus irriducibilis;* nella espressione generale delle radici di tali equazioni debbono necessariamente comparire le radici terze dell'unità, e, proprio a causa di ciò, i radicandi debbono essere complessi se le radici dell'equazione devono essere reali.

La seconda parte dello scritto ripete quasi alla lettera la dimostrazione dell'impossibilità della soluzione trascendente, contenuta nelle due Memorie di cui abbiamo parlato al n.° 14 (*).

(*) Delle ulteriori pubblicazioni di Ruffini le due seguenti hanno anche una certa relazione col nostro argomento:

Alcune proprietà delle radici dell'unità; Memorie dell'imp. R. Istituto del Regno Lom-

16. Riassunto. — Resta ora a formarci, dopo avere analizzato i diversi scritti di Ruffini, un quadro generale sulla contribuzione che egli portò in questo campo di ricerche. Certamente quei lavori non sono privi di mende. Il fatto di trovare poca chiarezza e precisione nelle definizioni che vi si contengono, poco rigore e forza di convinzione nelle dimostrazioni, è un difetto del resto di cui non son privi neanche i migliori matematici di quel tempo, e che perciò non si può attribuire a lui personalmente.

Questi difetti non poteano trattenere i suoi contemporanei dal tributare ai suoi lavori il dovuto onore; e se questo invece avvenne, si deve attribuirlo ad altre cause.

Prima di tutto il suo modo di esprimersi che infatti è difficile ad intendersi. E la difficoltà ha dovuto essere ancora maggiore per quel tempo, in cui una gran parte delle idee da lui adoperate era completamente nuova pel lettore; e di ciò fan fede sufficiente i dubbi sollevati da Malfatti. Ma egli non ebbe in mira, e forse neanche cercò, di rendere queste nuove idee di facile uso con un opportuno sistema di espressioni e di adatte notazioni; che invece egli si servì di lunghi giri, e spesso si servì di una serie di esempi per dare al lettore il modo di astrarre da questi il senso di un teorema che non formulò in modo preciso e intelligibile.

E nelle dimostrazioni si comporta in modo analogo; egli comincia per lo più la sua artifiziosa costruzione da un estremo, e ne deduce avanti in quella

bardo-Veneto, vol. 3, anni 1816-17 (Milano, 1824, pag. 67-84) del 7 marzo 1816. (Contiene principalmente delle formole per il calcolo delle funzioni simmetriche delle radici dell'unità.)

Intorno al metodo generale proposto dal sig. Hoëné Wronski, onde risolvere le equazioni di tutti i gradi; Memorie della Società italiana delle scienze, tom. 18, parte contenente le Memorie di matematica (Modena, 1820), pag. 56-68 (del 20 marzo 1816).

La soluzione di Wronski, come minutamente mostra Ruffini, si fonda sull'ipotesi falsa, che è possibile esprimere le radici x di un'equazione generale di n^{mo} grado, per mezzo delle radici $\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_{n-1}$ di un'equazione ausiliaria di $(n-1)^{mo}$ grado sotto la forma:

$$x = \sqrt[n]{\xi_1} + \sqrt[n]{\xi_2} + \cdots + \sqrt[n]{\xi_{n-1}}.$$

Io non ho poi preso conoscenza di un libro elementare *(Algebra e sua appendice)* pubblicato da Ruffini negli anni 1807-8 per la sua scuola d'Artiglieria. Non ho potuto poi intendere a che cosa si riferisce la citazione contenuta in Abel, (*Oeuvres complètes,* éd. Sylow et Lie, tom. 2, pag. 293) presa dal Bull. des annonces von Férussac: *Dans les Mém. de l'Inst. imp. de Milan,* tom. 1, *un autre auteur fait voir etc.* Quel volume contiene su queste cose solo una Memoria poco importante di Ant. Caccianino, che consente col-l'opinione di Ruffini.

direzione una parte; poi salta ad un altro estremo per costruirne un altro pezzo; finchè poi colla riunione dei diversi pezzi egli giunge a por fine alla sua dimostrazione con una *deductio ad absurdum.* Frattanto egli qualche volta sospende anche per lungo tratto il corso del suo ragionamento per occuparsi di obbiezioni che minacciano di infirmargli ciò che credeva già terminato.

Per i singoli problemi non è in generale possibile venire in chiaro delle sue idee, perchè le sue espressioni differiscono molto fra loro secondo i tempi in cui furono da lui adoperate. (La stessa indeterminatezza di convinzione scientifica si vede ancora nelle sue cose di medicina; per es. si dice che egli ogni anno esponeva ai suoi scolari una diversa teoria del tifo.)

In particolare ciò avviene anche pel problema: fin dove si possa, nella ricerche sulla risoluzione delle equazioni algebriche, limitarsi a considerare solo funzioni razionali delle radici.

Nelle sue prime pubblicazioni egli si esprime in maniera da far credere di potere applicare colla stessa facilità, i suoi teoremi sulla teoria dei gruppi, sia a funzioni razionali che a irrazionali. Pare poi che più tardi ciò gli sembrò dubbio; e nella seconda parte aggiunta alla risposta data da lui alle obbiezioni di Malfatti, egli si intrattiene con lunghe considerazioni su tale quistione, considerazioni cui del resto non può in nessun modo attribuirsi forza di dimostrazione, ma che però non stanno molto lontane dall'orbita delle idee di Galois. Nel suo ultimo scritto infine egli si inganna sulla difficoltà con un artifizio che si potrebbe chiamare da prestigiatore.

Ma tutti questi difetti non ci debbono far dimenticare che negli scritti di Ruffini l'algebra, anche in intere teorie, essenzialmente progredì. Egli per il primo considerò a fondo il problema posto da Waring, Vandermonde, Lagrange, ai loro seguaci, di una ricerca cioè sistematica delle permutazioni per le quali una funzione razionale di n elementi muta o no il suo valore, e, almeno per $n = 5$, lo condusse a buon termine. Fra le altre cose egli dimostrò completamente il teorema importante, che cioè non esistono funzioni di cinque elementi a tre o quattro valori. Egli per il primo applicò al suo speciale campo di ricerca l'idea fondamentale di gruppo di operazioni, e distinse i vari gruppi che a quelle ricerche occorrevano. Egli dette la dimostrazione del teorema che non è possibile la soluzione per radicali delle equazioni di grado superiore con funzioni che si esprimano razionalmente mediante le radici, e tale dimostrazione non solo la dette egli per il primo, ma dopo varie redazioni la ridusse anche a quella forma che ora si suole attribuire a Wantzel. Egli infine riconobbe il legame che c'è fra la irriducibilità di un'equazione e la transitività del suo gruppo, e fra la risolubilità mediante equazioni ausiliarie di grado inferiore, e la imprimitività dello stesso gruppo.

Non vogliamo poi ricercare se dobbiamo attribuire a Ruffini anche l'ispirazione del contenuto principale del lavoro del suo amico Abbati, il quale riuscì anche egli a dimostrare per la prima volta due teoremi fondamentali in queste ricerche, ovvero se dobbiamo considerare quest'uomo, ora dimenticato, come un altro, accanto a Ruffini, fondatore della teoria dei gruppi.

Non possiamo però tralasciare un'altra quistione che forse molti lettori si sono già posta da sè stessi: che cosa resta, se è esatto tutto quello che abbiamo detto, della contribuzione data da Cauchy alla teoria dei gruppi, lui cui si è soliti attribuire la più gran parte dei teoremi di cui abbiamo parlato? Certamente resta sempre una parte rimarchevole; Cauchy non solo ha aggiunto ai singoli teoremi dati da Ruffini una gran parte di nuovi teoremi, e messo il tutto in una esposizione sistematica, ma ha anche introdotte per il primo quelle terminologie e quelle notazioni che si sono poi diffuse nei libri, e a cui questo ramo delle matematiche va debitore di tutto il suo posteriore progresso, mentre che Ruffini in questo non fece nulla.

Ma le poche parole colle quali Cauchy nella sua prima pubblicazione (*) rammenta il suo predecessore sono così indeterminate che sono state intese in generale in una maniera che ha contribuito più ad oscurare che a porre in luce i lavori di Ruffini; e Cauchy non ha mai smentito, con una acconcia spiegazione delle sue parole, un tale apprezzamento sul suo predecessore.

(*) *Journal de l'école polytechnique,* Cah. 17 (1815), pag. 1 e 8. Gli scritti posteriori più dettagliati (*Exercices d'analyse et de physique mathématique,* tom. 3, pag. 151-252; 1844) non contengono alcuna citazione al proposito.

Simmetria ortogonale rispetto a una superficie di rivoluzione.

(*Di* Geminiano Pirondini, *a Parma*.)

§ 1.

Formole fondamentali. — Due punti A e A_1 si dicono simmetrici rispetto a una superficie, quando il segmento AA_1 che li congiunge è normale alla superficie ed è diviso per metà dalla medesima.

Due figure F e F_1 sono simmetriche rispetto a una superficie, quando una di esse è il luogo dei simmetrici dei punti dell'altra.

Rispetto a una superficie di rivoluzione Σ, il cui asse coincide coll'asse delle z, siano F e F_1 due figure simmetriche e $A(x, y, z)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $B(\xi, \eta, \zeta)$ punti corrispondenti di F, F_1 e di Σ *(superficie fondamentale)*. Prese sopra di questa a linee coordinate i paralleli ($u =$ costante) e un sistema qualsivoglia di generatrici eguali fra loro ($v =$ costante), sarà:

$$\xi = R \cdot \cos(u + v); \qquad \eta = R \cdot \operatorname{sen}(u + v); \qquad \zeta = U, \tag{1}$$

quando R, U (funzioni di u) rappresentino le coordinate di un punto qualunque del meridiano di Σ.

Osservando che i coseni direttivi della tangente alla generatrice $v =$ cost. e quelli della tangente al parallelo $u =$ cost. sono proporzionali alle quantità:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = R' \cos(u + v) - R \operatorname{sen}(u + v);$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = R' \operatorname{sen}(u + v) + R \cos(u + v); \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial u} = U',$$

e alle altre:

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = - R \operatorname{sen}(u + v); \qquad \frac{\partial \eta}{\partial v} = R \cos(u + v); \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial v} = 0,$$

rispettivamente; e che i coseni direttivi della congiungente i punti corrispondenti A, B della figura obbiettiva F e della superficie Σ sono proporzionali alle differenze:

$$x - R\cos(u+v); \qquad y = R\,\mathrm{sen}(u+v); \qquad z - U,$$

alle due condizioni, che esprimono che tale congiungente è normale alla superficie Σ, possiamo dare la forma seguente:

$$x\cdot\cos(u+v) + y\cdot\mathrm{sen}(u+v) = \frac{RR' - (Z-U)\cdot U'}{R'}$$
$$x\cdot\mathrm{sen}(u+v) - y\cdot\cos(u+v) = 0.$$

Alla prima di queste equazioni si può sostituire l'altra:

$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot R' = RR' - (Z-U)\cdot U',$$

che è una facile conseguenza delle precedenti; le condizioni fondamentali richieste si possono dunque scrivere così:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2}\cdot R' &= RR' - (Z-U)U' \\ \mathrm{tang}(u+v) &= \frac{y}{x}\cdot \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Avendosi poi:

$$x_1 = \xi + AB\cdot\cos(\widehat{AB,\,x}); \qquad y_1 = \eta + AB\cdot\cos(\widehat{AB,\,y});$$
$$z_1 = \zeta + AB\cdot\cos(\widehat{AB,\,z}),$$

e inoltre:

$$\cos(\widehat{AB,\,x}) = \frac{\xi - x}{AB}; \qquad \cos(\widehat{AB,\,y}) = \frac{\eta - y}{AB}; \qquad \cos(\widehat{AB,\,z}) = \frac{\zeta - z}{AB},$$

risulta:

$$x_1 = 2\xi - x; \qquad y_1 = 2\eta - y; \qquad z_1 = 2\zeta - z. \tag{3}$$

Se l'obbiettiva è una superficie S, la sua simmetrica S_1 è pure generalmente una superficie; le formole di cui si deve fare uso per la risoluzione di questioni inerenti alla simmetria sono le (1), (2), (3), nelle quali si supponga che u e v siano due parametri indipendenti. Se poi l'obbiettiva è una linea L, sono pure linee in generale la simmetrica L_1 e la projezione ortogonale Λ sopra la superficie Σ; in tal caso si può far uso delle stesse formole, quando si supponga in esse v eguale a una costante qualunque, *zero* ad esempio.

In quest'ultimo caso, osservando che la L_1, considerata come linea obbiettiva, ammette per simmetrica la L, le questioni distinte inerenti alla simmetria di una linea rispetto a una superficie di rivoluzione Σ, si riducono alle quattro seguenti:

1.ª data Σ e L trovare Λ e L_1;
2.ª data Σ e Λ trovare L e L_1;
3.ª data L e Λ trovare Σ e L_1;
4.ª data L e L_1 trovare Σ e Λ.

§ 2.

Risoluzione della 1.ª questione. — La prima questione sarà risolta anche supponendo che la figura obbiettiva sia una superficie; le altre supponendo esclusivamente che l'obbiettiva sia una linea.

Secondo che l'equazione del meridiano Σ è:

$$R = f(U), \tag{4}$$

ovvero:

$$U = \varphi(R), \tag{5}$$

la prima delle condizioni (2) assume la forma:

$$z + \sqrt{x^2 + y^2} \cdot f'(U) = U + f(U) \cdot f'(U), \tag{6}$$

ovvero l'altra:

$$z \cdot \varphi'(R) + \sqrt{x^2 + y^2} = R + \varphi(R) \cdot \varphi'(R), \tag{7}$$

nelle quali x, y, z sono funzioni note di due parametri indipendenti t, τ ovvero di un solo parametro t, secondo che si riferiscono a una superficie o a una linea.

Distinguendo appunto questi due casi, si hanno i due teoremi generali seguenti:

Teorema I. *La simmetrica $S_1(x_1, y_1, z_1)$ della superficie $S(x, y, z)$ rispetto alla superficie di rotazione il cui meridiano è la curva* (4) *o la* (5) *è rappresentata dalle equazioni* (3), *purchè:*

1.° *le ξ, η, ζ si intendano espresse in funzione dei due parametri indipendenti u, v per mezzo delle* (1).

2.° *le x, y, z si intendano espresse in funzione di due altri parametri indipendenti t, τ.*

3.° *si sia effettuata l'eliminazione di due di questi quattro parametri u, v, t, τ per mezzo della seconda equazione* (2) *e della* (6) *o* (7), *secondo che si è fatto uso della* (4) *o* (5).

Teorema II. *La projezione ortogonale della linea $L(x, y, z)$ sulla superficie di rivoluzione il cui meridiano ha per equazione* (4) *o* (5) *e la simmetrica $L_1(x_1, y_1, z_1)$ rispetto alla medesima superficie, sono rappresentate rispettivamente dalle equazioni:*

$$\xi = R \cdot \cos u, \qquad \eta = R \cdot \operatorname{sen} u, \qquad \zeta = U, \tag{1'}$$

e dalle (3), *dove la U o la R sono date in funzione di u rispettivamente dall'equazione* (6) *o* (7), *nelle quali si supponga di avere eliminato il parametro t, in funzione del quale sono espresse le coordinate x, y, z, per mezzo dell'equazione:*

$$\operatorname{tang} u = \frac{y}{x} \cdot \tag{2'}$$

§ 3.

Esempi ed applicazioni. — 1.° Se restando la superficie di rivoluzione Σ indeterminata, la superficie obbiettiva S si riduce al piano coordinato $z = 0$, si può porre:

$$x = t, \qquad y = t \cdot \operatorname{tang} \tau, \qquad z = 0,$$

e allora l'equazione (6) e la seconda delle (2) dànno:

$$\tau = u + v, \qquad t = \frac{U + f(U) \cdot f'(U)}{f'(U)} \cdot \cos(u + v).$$

Abbiamo quindi per la simmetrica:

$$x_1 = \frac{f(U) f'(U) - U}{f'(U)} \cdot \cos(u + v);$$

$$y_1 = \frac{f(U) f'(U) - U}{f'(U)} \operatorname{sen}(u + v); \qquad z_1 = 2U,$$

e perciò: *Rispetto alla superficie di rotazione il cui meridiano è la curva* (4), *la simmetrica del piano $z = 0$ è una superficie di rotazione dello stesso asse della prima e il cui meridiano è la curva rappresentata dalle equazioni:*

$$X = \frac{f(U) f'(U) - U}{f'(U)}; \qquad Z = 2U.$$

Applicando questo teorema, si trova ad esempio che, rispetto al paraboloide il cui meridiano è:

$$R = \sqrt{aU},$$

la simmetrica del piano tangente nel vertice è la superficie di rotazione avente per meridiano la curva del 3.° ordine:

$$2aX^2 = Z(a - Z)^2.$$

E rispetto alla superficie di rotazione il cui meridiano è la parabola:

$$R = \frac{U^2}{a},$$

la simmetrica del piano equatoriale $z = 0$ è la superficie di rotazione avente per meridiano la parabola:

$$X + \frac{a}{2} = \frac{Z^2}{4a}.$$

2.° La superficie fondamentale Σ sia un cilindro, e l'obbiettiva una superficie (o una linea) qualunque. In questo caso si ha:

$$R = f(U) = a,$$

con a costante; e quindi la condizione (6) dà:

$$z = U.$$

Ricavando dalla seconda equazione (2) $\operatorname{sen}(u + v)$ e $\cos(u + v)$ e facendo poi uso delle (1), si ottiene:

$$\xi = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \qquad \eta = \frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \qquad \zeta = z.$$

Conseguentemente le (3) dànno:

$$x_1 = \left(\frac{2a}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1\right)x; \qquad y_1 = \left(\frac{2a}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1\right)y; \qquad z_1 = z, \tag{8}$$

le quali equazioni servono per definire la simmetrica della figura data.

In particolare esse mostrano che una superficie rappresentata dall'equazione:

$$f(x, y, z) = 0,$$

ha per simmetrica un'altra superficie rappresentata dall'equazione:

$$f\left(\frac{2a - \sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \cdot x_1, \qquad \frac{2a - \sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \cdot y_1, \; z_1\right) = 0.$$

La figura obbiettiva sia una linea L. Dalle equazioni (8) si ricava:

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2a - \sqrt{x^2 + y^2};$$

chiamando quindi (x_0, z_0), (x_{10}, z_{10}) le coordinate cartesiane dei punti dei meridiani M, M_1 delle superficie generate dalla rotazione delle linee L, L_1 attorno all'asse delle z, si ha:

$$x_0 = 2a - x_{10}; \qquad z_0 = z_{10}.$$

Se dunque l'equazione di M è:

$$f(x_0, z_0) = 0, \tag{9}$$

quella di M_1 sarà:

$$f(2a - x_{10}, z_{10}) = 0. \tag{10}$$

Perciò: *Se una linea L ruotando attorno all'asse delle z, genera una superficie avente per meridiano la curva* (9), *la linea L_1, simmetrica di L rispetto a un cilindro circolare di raggio a il cui asse coincide coll'asse delle z, nella rotazione attorno allo stesso asse, genera una superficie il cui meridiano è la curva* (10).

Ne viene di conseguenza che se l'obbiettiva L è una retta, la simmetrica L_1 genera una superficie il cui meridiano è un'iperbole, avente l'asse immaginario parallelo all'asse delle z.

Se l'obbiettiva L è una linea qualunque tracciata sopra una sfera col centro sull'asse delle z, la simmetrica L_1, nella rotazione attorno a detto asse, genera un toro, ecc.

Chiamando R ed R_1 i raggi vettori uscenti dall'origine e relativi ai punti corrispondenti delle projezioni equatoriali delle linee L, L_1, si ha:

$$R_1 = 2a - R.$$

Quindi: *Se la projezione equatoriale di L ha per equazione:*

$$R = f(u),$$

la projezione equatoriale di L_1 ha per equazione:

$$R_1 = 2a - f(u).$$

Ne consegue che ogni linea obbiettiva tracciata sopra un cilindro la cui sezione retta è una spirale d'Archimede col polo nell'origine, ha per simmetrica una linea tracciata sopra un cilindro della stessa specie; che una linea di un piano parallelo all'asse del cilindro ha per simmetrica una linea di un cilindro la cui sezione retta è una concoide di Nicomede, ecc.

3.° Per mostrare l'uso delle formole trovate quando la figura obbiettiva è una linea, si supponga che la superficie fondamentale Σ sia un toro e la linea obbiettiva un'elica circolare coll'asse coincidente coll'asse delle z.

In tale caso si ha:

$$U=\varphi(R)=\sqrt{a^2-(R-m)^2};\qquad x=k\cdot\cos t,\qquad y=k\cdot\operatorname{sen} t,\qquad z=ht,$$

con a, m, k, h costanti. Siccome in causa della (2') abbiamo $t=u$, la condizione fondamentale (7) dà:

$$R=m\pm\frac{a(k-m)}{\sqrt{h^2u^2+(k-m)^2}},$$

e conseguentemente risulta:

$$U=\frac{ahu}{\sqrt{h^2u^2+(k-m)^2}}.$$

Si trova allora per projezione ortogonale dell'elica, sulla superficie, la linea:

$$\xi=\left(m\pm\frac{a(k-m)}{\sqrt{h^2u^2+(k-m)^2}}\right)\cos u,\qquad \eta=\left(m\pm\frac{a(k-m)}{\sqrt{h^2u^2+(k-m)^2}}\right)\operatorname{sen} u,$$

$$\zeta=\frac{ahu}{\sqrt{h^2u^2+(k-m)^2}};$$

e per simmetrica l'altra:

$$x_1=\left(2m-k\pm\frac{2a(k-m)}{\sqrt{h^2u^2+(k-m)^2}}\right)\cos u,$$

$$y_1=\left(2m-k\pm\frac{2a(k-m)}{\sqrt{h^2u^2+(k-m)^2}}\right)\operatorname{sen} u,\qquad z_1=\left(\frac{2a}{\sqrt{h^2u^2+(k-m)^2}}-1\right)\cdot hu.$$

Fra i raggi vettori R_1, R delle projezioni equatoriali delle linee L_1, Λ si trova la relazione:

$$R_1=2R-k,$$

la quale mostra che la projezione equatoriale di L_1 è una concoide della curva che si ottiene dalla projezione equatoriale di Λ, duplicandone i raggi vettori.

§ 4.

Caso particolare. — Si supponga che le projezioni equatoriali delle linee L e Λ siano omotetiche rispetto all'origine. Avremo allora:

$$\xi=R\cos u,\qquad \eta=R\operatorname{sen} u \tag{11}$$

$$x=k\cdot R\cos u,\qquad y=k\cdot R\operatorname{sen} u, \tag{12}$$

essendo R una funzione di u e k una costante.

Dalle equazioni (3) si ricava:

$$x_1 = (2-k)\cdot R\cos u, \qquad y_1 = (2-k)\cdot R\,\mathrm{sen}\,u, \tag{13}$$

e queste equazioni dimostrano: *Se le projezioni equatoriali di due delle tre linee L, Λ, L_1 sono curve omotetiche rispetto all'origine, la projezione equatoriale della terza è omotetica alle altre, rispetto al medesimo punto.*

Dalle (12) si ricava:

$$\sqrt{x^2+y^2} = kR,$$

e quindi la (7) diviene:

$$z\cdot\varphi'(R) = (1-k)\cdot R + \varphi(R)\cdot\varphi'(R).$$

Abbiamo dunque le equazioni:

$$\zeta = \varphi(R) \tag{11'}$$

$$z = \varphi(R) + (1-k)\frac{R}{\varphi'(R)} \tag{12'}$$

$$z_1 = \varphi(R) - (1-k)\frac{R}{\varphi'(R)}, \tag{13'}$$

le quali, insieme alle (11), (12), (13), definiscono completamente le tre linee Λ, L, L_1 quando sia nota la funzione R (che resta quindi arbitraria) e si abbia per di più per equazione del meridiano della superficie di rivoluzione fondamentale:

$$U = \varphi(R). \tag{5}$$

Se ad esempio le altezze z si ottengono dalle corrispondenti ζ aumentandole di una quantità costante, con analoga costruzione si ottengono le altezze z_1; si ha allora:

$$\frac{R}{\varphi'(R)} = \frac{m}{2},$$

con m costante, e conseguentemente:

$$U = \varphi(R) = \frac{R^2}{m} + n.$$

La superficie di rivoluzione fondamentale è quindi un paraboloide.

Siccome poi l'equazione (13') ci dà:

$$z_1 = \frac{R^2}{m} + n - \frac{m(1-k)}{2},$$

risulta:

$$z_1 = \frac{x_1^2 + y_1^2}{m(2-k)^2} + n - \frac{m(1-k)}{2},$$

la quale mostra che la simmetrica L_1, ruotando attorno all'asse delle z, genera un paraboloide.

Se la linea obbiettiva è tracciata sul piano $z=0$, la condizione (12) diviene:

$$\varphi(R) \cdot \varphi'(R) + (1-k) \cdot R = 0,$$

d'onde, moltiplicando per dR e integrando:

$$\varphi^2(R) + (1-k) \cdot R^2 = m,$$

con m costante. L'equazione del meridiano di Σ è dunque:

$$U^2 + (1-k)R^2 = m.$$

Ricavandosi da questa equazione:

$$\varphi(R) = \sqrt{m - (1-k) \cdot R^2},$$

l'equazione (13') ci dà:

$$z_1 = 2\sqrt{m - (1-k) \cdot R^2}.$$

Questa e le equazioni (13), coll'eliminazione di R, dànno luogo all'altra equazione:

$$\frac{4(1-k)}{(2-k)^2}(x_1^2 + y_1^2) + z_1^2 = 4m.$$

Dunque: *Se una linea L, posta in un piano P normale all'asse di una superficie di rotazione Σ, ha per projezione ortogonale sulla Σ una linea Λ la cui projezione equatoriale è una linea omotetica ad L, rispetto al punto in cui P taglia l'asse, qualunque altra linea del piano P ha, rispetto alla superficie Σ, la medesima proprietà. Tale superficie Σ è una quadrica a centro, avente P per uno de' suoi piani principali.*

La linea L_1, simmetrica di L rispetto alla superficie Σ è situata sopra una quadrica a centro, avente lo stesso asse di Σ e che è sempre la medesima, qualunque sia sul piano P la linea obbiettiva L dalla quale si parte.

L'equazione (12') ci fa vedere che, quando la linea obbiettiva L è a doppia curvatura, al variare di essa varia, in generale, anche la superficie di rotazione sulla quale devesi projettare, onde abbia luogo la proprietà di cui ora si parla.

La superficie fondamentale sia un cono circolare, il cui vertice è nell'origine e il cui semiangolo al vertice è ε; si ha:

$$U = \varphi(R) = R \cdot \cot\varepsilon,$$

e quindi:

$$x = k \cdot R\cos u, \qquad y = k \cdot R\,\mathrm{sen}\,u, \qquad z = \left(\cot\varepsilon + \frac{1-k}{\cot\varepsilon}\right) \cdot R$$

$$x_1 = (2-k) \cdot R\cos u, \quad y_1 = (2-k) \cdot R\,\mathrm{sen}\,u, \quad z_1 = \left(\cot\varepsilon - \frac{1-k}{\cot\varepsilon}\right) \cdot R.$$

Le coordinate dei punti dei meridiani delle superficie descritte da tali linee, nella rotazione attorno all'asse delle z, sono:

$$x_0 = \sqrt{x^2+y^2} = k \cdot R, \qquad z_0 = z = \left(\cot\varepsilon + \frac{1-k}{\cot\varepsilon}\right) \cdot R$$

$$x_{10} = \sqrt{x_1^2+y_1^2} = (2-k) \cdot R, \qquad z_{10} = z_1 = \left(\cot\varepsilon - \frac{1-k}{\cot\varepsilon}\right) \cdot R.$$

E siccome da queste equazioni si ricava:

$$z_0 = \left(\cot\varepsilon + \frac{1-k}{\cot\varepsilon}\right) \cdot \frac{x_0}{k}, \qquad z_{10} = \left(\cot\varepsilon - \frac{1-k}{\cot\varepsilon}\right) \cdot \frac{x_{10}}{2-k},$$

si conclude: *Quando la superficie di rivoluzione principale è un cono, e le projezioni equatoriali delle tre linee L, Λ, L_1 sono omotetiche, le linee L e L_1 sono tracciate sopra due coni di rotazione aventi lo stesso vertice e lo stesso asse di quello che contiene Λ.*

Facendo variare solamente k, variano i coni che contengono la linea obbiettiva L e la simmetrica L_1, ma non quello che contiene la projezione Λ.

Quindi: *Se sopra un cono circolare retto si descrive una linea qualunque L e si conducono le normali al cono lungo di essa, la superficie rigata luogo di queste normali incontra gli infiniti coni circolari dello stesso vertice e dello stesso asse del primo, in una serie di linee, le cui projezioni, sopra piani perpendicolari all'asse dei coni, sono curve omotetiche.*

La prima delle equazioni fondamentali (2) rimane inalterata sostituendo alle due quantità:

$$\sqrt{x^2+y^2}, \qquad R,$$

rispettivamente le altre:

$$\sqrt{x^2+y^2} + m, \qquad R + m,$$

essendo m una costante qualunque.

Facendo poi uso delle equazioni (3), col notare che, in causa della condizione (2'), si ha:

$$\frac{x}{y} = \frac{\xi}{\eta}$$

in punti corrispondenti delle linee L, Λ, si trova per raggio vettore della projezione equatoriale della linea simmetrica L_1:

$$2R - \sqrt{x^2 + y^2};$$

e per altezza de' suoi punti:

$$2U - z.$$

Avvenute le predette modificazioni, il raggio vettore della projezione equatoriale della simmetrica L_1 diviene:

$$2R - \sqrt{x^2 + y^2} + m,$$

e l'altezza de' suoi punti:

$$2U - z.$$

Possiamo dunque enunciare il teorema: *Siano: Λ e L_1 la projezione ortogonale di una linea L sopra una superficie di rivoluzione Σ e la simmetrica di essa rispetto alla stessa superficie; Σ' la superficie di rivoluzione il cui meridiano è il meridiano stesso di Σ, spostato normalmente all'asse della quantità m; L', Λ', L'_1 le linee che si ricavano rispettivamente dalle L, Λ, L_1 conservando inalterate le altezze dei loro punti e aumentando i raggi vettori, uscenti dall'origine e relativi alle loro projezioni equatoriali, della quantità costante m* (*).

La linea Λ' è allora la projezione ortogonale di L' sopra la superficie Σ', e L'_1 la simmetrica di L' rispetto alla medesima superficie.

Coll'applicazione di questo teorema, si trova che ad ogni proprietà relativa alla simmetria rispetto a una superficie di rivoluzione, ne corrisponde un'altra analoga.

Si deduce ad esempio, da quanto si è dimostrato in questo stesso paragrafo che, quando la linea obbiettiva e la simmetrica sono in piani paralleli

(*) S'intende che il predetto aumento deve essere fatto, per tutte le curve, in una stessa direzione; di modo che, se pei raggi vettori di una di esse ha luogo *effettivamente* un aumento m, pei raggi vettori delle altre due ha luogo un aumento o una diminuzione m, secondo che i raggi vettori di tali curve sono coincidenti od opposti ai raggi vettori della prima.

fra loro e all'asse di rotazione e le altezze dei punti corrispondenti di queste linee differiscono per una costante, la superficie di rivoluzione fondamentale è un paraboloide. Che quando la linea obbiettiva è una retta del piano $z = 0$ e la simmetrica è posta in un piano parallelo a quella retta e all'asse, la superficie di rivoluzione fondamentale è una quadrica a centro, ecc.

Applicando quindi il teorema precedente, si ha senz'altro: *Quando le projezioni equatoriali di due delle tre linee L, Λ, L_1 sono due concoidi di* Nicomede *aventi il polo nell'origine:*

1.° *Se le altezze corrispondenti dei punti di quelle linee differiscono per una costante, la superficie di rivoluzione fondamentale ha per meridiano una parabola, coll'asse parallelo all'asse di rotazione; anche la terza linea ha per projezione equatoriale una concoide di* Nicomede *col polo nell'origine, e le altezze de' suoi punti differiscono di una costante da quelle dei punti corrispondenti delle altre.*

2.° *Se la linea obbiettiva è posta sul piano $z = 0$, ed è una di tali concoidi, la superficie di rivoluzione fondamentale è un toro ellittico od iperbolico, e la terza linea ha per projezione equatoriale una concoide di* Nicomede, *collo stesso polo delle altre.*

§ 5.

Risoluzione della 2.ª questione. — Data la superficie di rivoluzione principale Σ e sopra di questa la linea Λ, esistono infinite linee obbiettive L e quindi infinite simmetriche L_1. Si potrà infatti prendere per L qualsivoglia linea tracciata sulla superficie rigata, luogo delle normali a Σ lungo Λ.

La superficie Σ abbia per meridiano la curva:

$$U = \varphi(R), \tag{5}$$

e la linea Λ, su di questa, sia determinata dalla sua projezione equatoriale:

$$R = \lambda(u). \tag{14}$$

Ricordando che:

$$\operatorname{tang} u = \frac{y}{x},$$

l'equazione di condizione (7) diviene:

$$z \cdot \varphi'\left[\lambda\left(\operatorname{arc} \cdot \operatorname{tang} \frac{y}{x}\right)\right] + \sqrt{x^2 + y^2} = \lambda\left(\operatorname{arc} \cdot \operatorname{tang} \frac{y}{x}\right) + \\ + \varphi\left[\lambda\left(\operatorname{arc} \cdot \operatorname{tang} \frac{y}{x}\right)\right] \cdot \varphi'\left[\lambda\left(\operatorname{arc} \cdot \operatorname{tang} \frac{y}{x}\right)\right] \cdot \tag{15}$$

Possiamo dunque dire: *L'equazione* (15) *è quella che rappresenta la superficie rigata luogo delle normali alla superficie di rivoluzione il cui meridiano è la curva* (5), *lungo la linea che si ottiene intersecando detta superficie col cilindro avente le generatrici parallele all'asse e per sezione retta la curva* (14).

Si voglia ad esempio determinare la superficie rigata avente per direttrici una retta (asse delle z) e la curva:

$$\xi = k, \qquad \eta = \eta, \qquad \zeta = f(\eta),$$

posta in un piano parallelo alla retta, colla condizione che tale linea sia una trajettoria ortogonale delle generatrici rettilinee.

Si ha in questo caso:

$$R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{k^2 + \eta^2} = \frac{k}{\cos u}; \qquad \eta = k \operatorname{tang} u;$$

$$U = \zeta = f(\eta) = f(k \cdot \operatorname{tang} u),$$

da cui, eliminando u:

$$U = \varphi(R) = f(\sqrt{R^2 - k^2}).$$

Si ha poi facilmente:

$$\varphi'(R) = f'(\sqrt{R^2 - k^2}) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - k^2}}, \qquad \lambda\left(\operatorname{arc} \cdot \operatorname{tang} \frac{y}{x}\right) = \frac{k\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$$\varphi\left[\lambda\left(\operatorname{arc} \cdot \operatorname{tang} \frac{y}{x}\right)\right] = f\left(\frac{ky}{x}\right), \qquad \varphi'\left[\lambda\left(\operatorname{arc} \cdot \operatorname{tang} \frac{y}{x}\right)\right] = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} \cdot f'\left(\frac{ky}{x}\right).$$

Sostituendo nell'equazione (15), si ha:

$$xz \cdot f'\left(\frac{ky}{x}\right) - x \cdot f\left(\frac{ky}{x}\right) \cdot f'\left(\frac{ky}{x}\right) + xy - ky = 0,$$

che è l'equazione della superficie costrutta.

Se ad esempio la linea è un'iperbole equilatera con un assintoto parallelo all'asse delle z, ovvero una parabola coll'asse parallelo all'asse delle z, le superficie rigate corrispondenti sono rispettivamente del 5.° o del 4.° ordine, ed hanno per equazioni:

$$a^4x^4 - a^2kx^3yz + k^3xy^4 - k^4y^4 = 0$$

$$a^2x^3y + 2akx^2yz - a^2kx^2y - 2k^3y^3 = 0.$$

Caso particolare. — Se la superficie di rotazione fondamentale è un cono, col vertice nell'origine, si ha:

$$U = \varphi(R) = R \cdot \cot \varepsilon,$$

essendo ε il semiangolo al vertice; e l'equazione di condizione (7) diviene:

$$z \cdot \operatorname{sen}\varepsilon \cos\varepsilon + \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \operatorname{sen}^2\varepsilon = R.$$

La R rimane una funzione arbitraria di u, e quindi una funzione arbitraria di $\frac{y}{x}$, essendo:

$$u = \operatorname{arc} \cdot \operatorname{tang} \frac{y}{x} \cdot$$

Indicando tale funzione arbitraria con $F\left(\frac{y}{x}\right)$, si ha:

$$z \cdot \operatorname{sen}\varepsilon \cos\varepsilon + \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \operatorname{sen}^2\varepsilon = F\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \tag{16}$$

Perciò: *L'equazione* (16), *dove F è il simbolo di una funzione arbitraria, rappresenta una superficie rigata avente per generatrici un sistema di normali a un cono circolare, il cui asse coincide coll'asse delle z e il cui vertice è nell'origine.*

Fra le funzioni R e F si ha la relazione:

$$R = F\left(\frac{y}{x}\right) = F(\operatorname{tang} u).$$

Supponendo che la superficie rigata costrutta sia gobba, algebrica e d'ordine minimo, si ottiene la condizione:

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = a \cdot \frac{y}{x},$$

con a costante; e l'equazione della superficie rigata diviene:

$$x^2(x^2 + y^2) \cdot \operatorname{sen}^4\varepsilon = (a y - x z \cdot \operatorname{sen}^2\varepsilon)^2.$$

Essa è dunque del quarto ordine. Avendosi ora:

$$R = a \cdot \operatorname{tang} u,$$

risulta che, sul cono, la linea, lungo la quale si debbono condurre le normali, ha per projezione equatoriale la linea la cui equazione in coordinate cartesiane è:

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = a \frac{y_0}{x_0},$$

cioè:

$$x_0^2(x_0^2 + y_0^2) = a^2 y_0^2 \cdot \tag{17}$$

Siccome questa equazione è indipendente da ε, si ha: *Il cilindro la cui sezione retta, sul piano* $z = 0$, *è la curva* (17), *taglia un cono circolare arbitrario, avente per asse l'asse delle* z, *in una curva lungo la quale conducendo le normali al cono, si dà origine alla superficie rigata non sviluppabile d'ordine minimo. Tale ordine è* 4.

Sulla superficie di rivoluzione il cui meridiano è rappresentato dall'equazione:

$$U = \varphi(R),$$

si consideri la linea Λ la cui projezione equatoriale è:

$$R = F(u).$$

Le normali a Σ lungo Λ formano una superficie rigata segata dal piano coordinato $z = 0$ lungo la linea L. Assunta tale linea L come obbiettiva, si ha $z = 0$ e l'equazione (7) del § 2 diviene:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = F(u) + \varphi[F(u)] \cdot \varphi'[F(u)].$$

Applicando le equazioni (3), per rappresentare la linea L_1 simmetrica di L si trovano le equazioni:

$$x_1 = \{F(u) - \varphi[F(u)]\varphi'[F(u)]\}\cos u,$$
$$y_1 = \{F(u) - \varphi[F(u)] \cdot \varphi'[F(u)]\}\operatorname{sen} u, \qquad z_1 = 2 \cdot \varphi[F(u)].$$

Quindi: *Quando la superficie di rotazione ha per meridiano la curva* $U = \varphi(R)$ *e la linea che si considera su di essa si projetta equatorialmente nella linea* $R = F(u)$, *l'intersezione* L *col piano* $z = 0$ *della superficie rigata luogo delle normali alla superficie lungo quella linea è rappresentata dall'equazione:*

$$R_0 = F(u) + \varphi[F(u)] \cdot \varphi'[F(u)].$$

E la linea L_1, *simmetrica della* L, *ha per projezione equatoriale la curva:*

$$R_{10} = F(u) - \varphi[F(u)] \cdot \varphi'[F(u)].$$

Caso del paraboloide di rivoluzione. — Avendosi ora:

$$U = \varphi(R) = \frac{R^2}{a},$$

con a costante, risulta:

$$R_0 = F(u) + \frac{2}{a^2} \cdot F^3(u);$$

e quindi: *Segando un paraboloide di rivoluzione con un cilindro la cui se-*

zione retta è la curva:

$$R = F(u), \tag{18}$$

e le cui generatrici sono parallele all'asse, e conducendo poi le normali alla superficie lungo l'intersezione ottenuta, sul piano $z = 0$ si determina per intersezione la curva:

$$R_0 = F(u) + \frac{2}{a^2} \cdot F^3(u). \tag{19}$$

Di qui una costruzione facile delle linee (19), partendo dalle linee (18).

In particolare le linee:

$$R_0 = a u + b u^3,$$

si costruiscono, nel modo detto, col mezzo del paraboloide di rivoluzione, partendo dalla spirale d'ARCHIMEDE.

Qualora si abbia:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a,$$

con a costante, e rimangano fisse le notazioni precedenti, partendo dalla condizione (7) del § 2, si ricava:

$$z = \frac{F(u) + \varphi[F(u)] \cdot \varphi'[F(u)] - a}{\varphi'[F(u)]}.$$

Se ora si osserva che, chiamando σ l'arco della circonferenza di raggio a col centro nell'origine degli assi, si ha:

$$u = \frac{\sigma}{a},$$

risulta: *Quando la superficie di rotazione Σ ha per meridiano la linea $U = \varphi(R)$ e la linea che si considera su di essa si projetta sul piano dell'equatore nella curva:*

$$R = F(u),$$

l'intersezione della superficie rigata, luogo delle normali a Σ lungo quella linea, col cilindro circolare retto di raggio a e il cui asse coincide coll'asse delle z, è una linea che, nello sviluppo del cilindro sopra un piano, ha per trasformata la curva rappresentata dall'equazione:

$$z = \frac{F\left(\frac{\sigma}{a}\right) + \varphi\left[F\left(\frac{\sigma}{a}\right)\right] \cdot \varphi'\left[F\left(\frac{\sigma}{a}\right)\right] - a}{\varphi'\left[F\left(\frac{\sigma}{a}\right)\right]}.$$

Se ad esempio la superficie Σ è un paraboloide e la projezione equatoriale della linea che si considera su di essa è una spirale d'Archimede, si ha:

$$U = \varphi(R) = \frac{R^2}{m}, \qquad R = F(u) = k u,$$

con m e k costanti. Sarà allora:

$$F\left(\frac{\sigma}{a}\right) = \frac{k\sigma}{a}, \qquad \varphi\left[F\left(\frac{\sigma}{a}\right)\right] = \frac{k^2\sigma^2}{a^2 m}, \qquad \varphi'\left[F\left(\frac{\sigma}{a}\right)\right] = \frac{2k\sigma}{am};$$

e la linea cilindrica, nello sviluppo del cilindro sopra un piano, diviene la curva del 3.° ordine:

$$z = \frac{2k^3\sigma^3 + a^2 m^2 k\sigma - a^4 m^2}{2a^2 m k\sigma}.$$

§ 6.

Risoluzione della 3.ª questione. — Se l'obbiettiva L è rappresentata dalle equazioni:

$$x = r \cdot \cos u, \qquad y = r \cdot \operatorname{sen} u, \qquad z = z(u), \tag{20}$$

e la projezione Λ dalle altre:

$$\xi = \rho \cos u, \qquad \eta = \rho \operatorname{sen} u, \qquad \zeta = \zeta(u), \tag{21}$$

l'equazione (2') è identicamente soddisfatta e la prima delle equazioni (2), poichè ora:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r, \qquad R = \rho, \qquad U = \zeta(u),$$

diviene:

$$(r - \rho)\rho' + (z - \zeta)\zeta' = 0. \tag{22}$$

Le due linee L e Λ non sono dunque completamente arbitrarie, dovendo essere soddisfatta la condizione (22).

Il meridiano della superficie di rotazione è definito dalle equazioni:

$$x_0 = \rho(u), \qquad z_0 = \zeta(u), \tag{23}$$

e la linea L_1 simmetrica di L, dalle altre:

$$x_1 = (2\rho - r)\cos u, \qquad y_1 = (2\rho - r)\operatorname{sen} u, \qquad z_1 = 2\zeta - z.$$

1.° caso speciale. — L'obbiettiva L sia sul piano $z=0$.

L'equazione differenziale (22) diviene:

$$\zeta\zeta' = (r-\rho)\rho',$$

d'onde integrando:

$$\zeta = \sqrt{2\int \rho' r \cdot du - \rho^2 + c}, \tag{24}$$

con c costante arbitraria. In questo caso il problema è dunque ridotto interamente a quadrature. Se si suppone che la projezione equatoriale di Λ e l'obbiettiva piana L siano linee simili, riducibili ad essere omotetiche rispetto all'origine, mediante la rotazione di una di esse attorno a tale punto, dobbiamo avere:

$$r = k \cdot \rho(u+\alpha),$$

con k ed α costanti. Ricorrendo allora all'equazione (24), avremo per il meridiano della superficie di rivoluzione:

$$x_0 = \rho(u), \qquad z_0 = \sqrt{2k \cdot \int \rho(u+\alpha) \cdot \rho'(u) \cdot du - \rho^2(u) + c}.$$

Per la linea piana L e per le projezioni equatoriali delle linee Λ e L_1 abbiamo le equazioni in coordinate polari:

$$r = k \cdot \rho(u+\alpha); \qquad \rho = \rho(u); \qquad R_1 = 2\rho(u) - k \cdot \rho(u+\alpha).$$

Supponendo $\alpha = 0$, si è nel caso considerato al § 4 e la superficie Σ è allora una quadrica a centro.

Supponendo che la linea obbiettiva piana L sia una retta, si può porre:

$$\rho(u) = \frac{a}{\cos u},$$

con a costante; se in questo caso si ha inoltre $\alpha = \frac{\pi}{2}$, risulta:

$$x_0 = \frac{a}{\cos u}, \qquad z_0 = \sqrt{-2a^2k \cdot \operatorname{tang} u - \frac{a^2}{\cos u} + c}.$$

d'onde, eliminando u:

$$(x_0^2 + z_0^2 - c)^2 = 4a^2k^2(x_0^2 - a^2).$$

La superficie di rotazione Σ ha dunque per meridiano una curva del 4.° ordine.

Siccome poi:

$$R_1 = \frac{2a}{\cos u} + \frac{ak}{\operatorname{sen} u},$$

passando alle coordinate cartesiane x_{10}, y_{10}, si ha:

$$x_{10} \cdot y_{10} = akx_{10} + 2ay_{10}.$$

La linea simmetrica L_1 ha dunque per projezione equatoriale un'iperbole equilatera che passa per l'origine e i cui assintoti sono paralleli alla retta obbiettiva L e alla retta che rappresenta la projezione equatoriale di Λ.

Se poi si suppone che la projezione equatoriale di Λ sia simile tanto alla linea obbiettiva piana L quanto alla projezione equatoriale della simmetrica L_1 e che per di più queste linee possano essere ridotte ad essere omotetiche rispetto all'origine mediante rotazioni intorno a tale punto, dobbiamo avere:

$$R_1 = 2\rho(u) - k\rho(u+\alpha) = h \cdot \rho(u+\beta),$$

ossia:

$$k \cdot \rho(u+\alpha) + h \cdot \rho(u+\beta) = 2 \cdot \rho(u),$$

con h, k, α, β costanti.

Supponendo successivamente:

$$\rho = au, \qquad \rho = a \cdot e^{nu}, \qquad \rho = a \cdot \cos u,$$

con a ed n costanti, si verifica la condizione ora trovata prendendo rispettivamente:

$$\left\{ \begin{aligned} k &= -\frac{2\beta}{\alpha-\beta} \\ h &= \frac{2\alpha}{\alpha-\beta}; \end{aligned} \right. \qquad ke^{n\alpha} + he^{n\beta} = 2; \qquad \left\{ \begin{aligned} k &= -\frac{2\,\mathrm{sen}\,\beta}{\mathrm{sen}(\alpha-\beta)} \\ h &= \frac{2\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}(\alpha-\beta)}. \end{aligned} \right.$$

Si vede quindi che la condizione che l'obbiettiva piana L e le projezioni equatoriali delle linee Λ e L_1 siano simili e riducibili ad essere omotetiche rispetto all'origine, mediante rotazioni attorno a tale punto, può venire soddisfatta allorchè tali linee siano spirali d'Archimede, o spirali logaritmiche coi poli nell'origine, o circonferenze passanti per l'origine.

Coll'applicazione delle formole precedenti, si trova che nel primo caso la superficie di rotazione fondamentale Σ e la superficie generata dalla rotazione della linea simmetrica L_1 attorno all'asse delle z hanno per meridiani due coniche a centro, con uno degli assi parallelo all'asse di rotazione. Nel caso speciale poi che le tre linee piane suddette siano eguali, tali superficie di rotazione hanno per meridiani due parabole cogli assi perpendicolari all'asse di rotazione.

Nel secondo caso le due superficie di rotazione in discorso sono due quadriche a centro.

Nel terzo caso, esse sono due superficie di rotazione trascendenti.

2.º caso speciale. — Le altezze dei punti corrispondenti delle curve L e Λ differiscano per una costante.

Avendosi:

$$\zeta - z = k,$$

con k costante, l'equazione differenziale (22) diviene:

$$k\zeta' = \rho'(r - \rho),$$

da cui integrando:

$$\zeta = \frac{1}{2k}\left(2\int r\rho' \cdot du - \rho^2\right), \tag{25}$$

quando si metta a zero la costante arbitraria, il che non nuoce alla generalità.

Il problema è così ridotto a quadrature.

Quando ad esempio le projezioni equatoriali delle due linee L e Λ siano due cerchi tangenti fra loro nell'origine, si può porre:

$$r = a \cdot \cos u, \qquad \rho = b \cdot \cos u,$$

ed allora risulta:

$$\int r\rho' du = \frac{ab}{2} \cdot \cos^2 u.$$

Per rappresentare le linee L, Λ, L_1 e il meridiano L_0 della superficie di rotazione principale abbiamo rispettivamente le equazioni:

$$x = a\cos^2 u; \qquad y = a \operatorname{sen} u \cos u; \qquad z = \frac{b(a-b)}{2k}\cos^2 u - k$$

$$\xi = b\cos^2 u; \qquad \eta = b \operatorname{sen} u \cos u; \qquad \zeta = \frac{b(a-b)}{2k}\cos^2 u$$

$$x_1 = (2b - a)\cos^2 u; \quad y_1 = (2b-a)\operatorname{sen} u \cos u; \quad z_1 = \frac{b(a-b)}{2k} \cdot \cos^2 u + k$$

$$x_0 = b \cdot \cos u; \qquad z_0 = \frac{b(a-b)}{2k} \cdot \cos^2 u.$$

Siccome dalle equazioni precedenti si ricavano le altre:

$$R_1 = (2b - a)\cos u; \qquad z_1 = \zeta + k$$

$$z = \frac{b(a-b)}{2ak}x - k; \qquad \zeta = \frac{a-b}{2k}\xi; \qquad z_1 = \frac{b(a-b)}{2k(2b-a)}x_1 + k,$$

$$z = \frac{b(a-b)}{2a^2 k}(x^2 + y^2) - k; \quad z_0 = \frac{a-b}{2bk}x_0^2; \quad z_1 = \frac{b(a-b)}{2k(2b-a)^2}(x_1^2 + y_1^2) + k,$$

si conclude: *Quando si metta la condizione che la linea obbiettiva L e la linea Λ abbiano per projezioni equatoriali due cerchi tangenti fra loro e che le altezze dei punti corrispondenti delle due curve differiscano di una costante:*

1.° *La projezione equatoriale della linea simmetrica L_1 è un altro cerchio tangente agli altri due nello stesso punto.*

2.° *Le altezze dei punti di L_1 differiscono da quelle dei punti corrispondenti di L o di Λ di una costante.*

3.° *La linea obbiettiva, la linea Λ e la simmetrica sono tre ellissi poste in piani perpendicolari a uno stesso piano (a quello determinato dall'asse di rotazione e dalla retta contenente i centri dei tre cerchi tangenti).*

4.° *Ciascuna di queste tre curve, ruotando attorno all'asse, genera un paraboloide.*

3.° caso speciale. — Le altezze dei punti corrispondenti delle curve L e Λ siano proporzionali.

Avendosi:

$$z = k\zeta,$$

con k costante, l'equazione fondamentale (22) diviene:

$$(r-\rho)\rho' = (1-k)\zeta\zeta'.$$

Di qui si ricava integrando:

$$\zeta = \sqrt{\frac{2\int r\rho' \cdot du - \rho^2}{1-k} + c}, \tag{26}$$

con c costante arbitraria. Il problema è così ridotto a quadrature.

Se ad esempio si suppone:

$$r = a \cdot \cos u, \qquad \rho = b \cdot \cos u,$$

con a e b costanti, si ha:

$$x = a\cos^2 u; \qquad y = a \,\mathrm{sen}\, u \cos u; \qquad z = k\sqrt{\frac{b(a-b)\cos^2 u}{1-k} + c}$$

$$\xi = b\cos^2 u; \qquad \eta = b \,\mathrm{sen}\, u \cos u; \qquad \zeta = \sqrt{\frac{b(a-b)\cos^2 u}{1-k} + c}$$

$$x_1 = (2b-a)\cos^2 u; \quad y_1 = (2b-a)\,\mathrm{sen}\, u \cos u; \quad z_1 = (2-k)\sqrt{\frac{b(a-b)\cos^2 u}{1-k} + c}$$

$$x_0 = b \cdot \cos u; \quad z_0 = \sqrt{\frac{b(a-b)\cos^2 u}{1-k} + c};$$

e quindi: *Quando si metta la condizione che la linea obbiettiva L e la linea Λ*

abbiano per projezioni equatoriali due cerchi tangenti fra loro e che le altezze dei punti corrispondenti delle due curve siano proporzionali:

1.° *La projezione equatoriale della simmetrica L_1 è un altro cerchio tangente ai due altri nello stesso punto.*

2.° *Le altezze dei punti di L_1 sono proporzionali a quelle dei punti corrispondenti di L o di Λ.*

3.° *Le projezioni dell'obbiettiva, della linea Λ e della simmetrica sul piano determinato dall'asse di rotazione e dalla retta contenente i centri dei tre cerchi tangenti, sono tre parabole aventi per asse comune quest'ultima retta.*

4.° *Ciascuna di queste tre curve, ruotando attorno all'asse, genera una quadrica a centro.*

Se nell'equazione (25) si suppone $r = a$, con a costante, si trova:

$$\zeta = \frac{1}{2k}(2a\rho - \rho^2),$$

e quindi l'equazione del meridiano della superficie di rotazione fondamentale è:

$$z_0 = \frac{1}{2k}(2ax_0 - x_0^2).$$

Se si fa l'istessa ipotesi nell'equazione (26), si trova:

$$\zeta = \sqrt{\frac{2a\rho - \rho^2}{1-k} + c},$$

e quindi l'equazione del meridiano della superficie di rotazione è:

$$z_0^2 = \frac{2ax_0 - x_0^2}{1-k} + c.$$

Dunque: *Allorchè l'obbiettiva è sopra un cilindro circolare coll'asse coincidente coll'asse di rotazione, e le altezze dei punti di tale linea differiscono di una costante da quella dei punti di Λ, ovvero sono proporzionali a quelle dei punti di Λ, la superficie di rotazione ha rispettivamente per meridiano una parabola coll'asse parallelo all'asse di rotazione, o una conica a centro con uno degli assi parallelo all'asse di rotazione.*

§ 7.

Risoluzione della 4.ª questione. — Qualora la linea obbiettiva L sia rappresentata dalle equazioni (20) e la simmetrica L_1 dalle altre:

$$x_1 = r_1 \cos u, \qquad y_1 = r_1 \operatorname{sen} u, \qquad z_1 = z_1(u),$$

in forza delle (3) avremo per coordinate dei punti di Λ:

$$\xi = \frac{r + r_1}{2} \cos u, \qquad \eta = \frac{r + r_1}{2} \operatorname{sen} u, \qquad \zeta = \frac{z + z_1}{2}. \tag{27}$$

Confrontando queste equazioni colle (21), si trova:

$$\rho = \frac{r + r_1}{2}, \qquad \zeta = \frac{z + z_1}{2}; \tag{28}$$

e in causa della (22), si ha che le funzioni r, r_1, z, z_1 di u sono legate fra loro dall'equazione differenziale:

$$(r - r_1)(r' + r'_1) + (z - z_1)(z' + z'_1) = 0. \tag{29}$$

In tal caso il meridiano della superficie di rotazione fondamentale è definito dalle equazioni (28) e la linea Λ, projezione ortogonale dell'obbiettiva su tale superficie, dalle (27).

Casi particolari. — 1.° La linea obbiettiva L sia descritta sul piano coordinato $z = 0$, e questa linea e l'altra L_1 siano simili e riducibili ad essere omotetiche rispetto all'origine, mediante la rotazione di una di esse attorno a questo punto.

Avremo:

$$z = 0, \qquad r_1(u) = k \cdot r(u + \alpha),$$

con k ed α costanti; e la (29) diviene:

$$[r(u) - k \cdot r(u + \alpha)] \cdot [r'(u) + k \cdot r'(u + \alpha)] = z_1 z'_1,$$

da cui si trae:

$$z_1 = \sqrt{2 \int [r(u) - k \cdot r(u + \alpha)]\, [r'(u) + k \cdot r'(u + \alpha)]\, du + c} =$$

$$= \sqrt{2 r^2(u) - \{k \cdot r(u + \alpha) - r(u)\}^2 - 4k \int r(u + \alpha) \cdot r'(u) \cdot du + c},$$

con c costante arbitraria.

Le coordinate dei punti del meridiano della superficie fondamentale sono dunque così espresse:

$$x_0 = \frac{\{r(u) + k \cdot r(u + \alpha)}{2};$$

$$z_0 = \frac{1}{2} \sqrt{2 r^2(u) - \{k \cdot r(u + \alpha) - r(u)\}^2 - 4k \int r(u + \alpha) \cdot r'(u) du + c}.$$

E per equazioni in coordinate polari della linea L e delle projezioni equatoriali di L_1 e Λ si ha:

$$r = r(u); \qquad r_1 = k \cdot r(u + \alpha); \qquad \rho = \frac{r(u) + k \cdot r(u + \alpha)}{2}.$$

Supponendo $k = 1$, si ha il caso dell'eguaglianza della linea L e delle projezioni equatoriali di L_1 e Λ.

2.° Se nell'equazione (29) si suppone $z = 0$, $r_1 = 2a$, con a costante, si ha:

$$(r - 2a)r' = z_1 z'_1,$$

d'onde integrando:

$$(r - 2a)^2 - z_1^2 = \text{costante}.$$

E poichè:

$$r = 2(x_0 - a), \qquad z_1 = 2z_0,$$

l'equazione del meridiano della superficie di rotazione fondamentale è:

$$(x_0 - a)^2 - z_0^2 = \text{costante}.$$

Quindi: *La superficie di rotazione il cui meridiano è un' iperbole equilatera avente uno degli assi parallelo all'asse di rotazione, ha la proprietà caratteristica che la simmetrica di qualsivoglia linea tracciata nel piano dell'equatore è situata sopra un cilindro circolare, il cui asse coincide coll'asse di rotazione.*

Supposto $a = 0$, si ha:

L'iperboloide equilatero di rivoluzione a una o a due falde ha la caratteristica proprietà, che una linea qualunque tracciata sul piano dell'equatore ha per simmetrica l'asse della superficie normale a tale piano.

Parma, gennajo 1894.

Sulla costruzione della superficie del 3.° ordine individuata da 19 punti.

(*Di* M. Pannelli, *a Pavia.*)

La presente Memoria ha per oggetto la costruzione della superficie del 3.° ordine individuata da 19 punti. Essa è divisa in due paragrafi. Nel primo vengono studiate le proprietà elementari di una particolare corrispondenza fra gli elementi di tre forme fondamentali di seconda specie, detta *correlazione di seconda specie,* e si trovano esposte le costruzioni di siffatta corrispondenza in alcuni casi particolari. Nel secondo vien dimostrata la possibilità di generare la superficie del 3.° ordine mediante tre stelle di raggi legate fra loro da una correlazione di seconda specie, e vien data la costruzione della superficie medesima, quando di questa si conoscano 19 punti.

§ 1.

1. Siano x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 le coordinate omogenee di tre punti X, Y, Z appartenenti a tre piani α, β, γ, e fra esse abbia luogo la relazione espressa dalla seguente equazione simbolica:

$$a_x b_y c_z = 0, \tag{1}$$

nella quale i *simboli* a_i, b_j, c_k $(i = j = k = 1, 2, 3)$ hanno significato di quantità solo nelle combinazioni $a_i b_j c_k = a_i b_k c_j = \cdots$. In virtù di questa relazione, fra i punti dei tre piani dati resta stabilita una corrispondenza particolare, che è precisamente quella che qui vien chiamata *correlazione di seconda specie.*

Tre punti X, Y, Z appartenenti rispettivamente ai tre piani α, β, γ e aventi coordinate che soddisfano l'equazione (1), si diranno *corrispondenti.*

Preso ad arbitrio un punto X, o Y, o Z, sul piano α, o β, o γ, cioè attribuiti valori particolari alle coordinate x_1, x_2, x_3, o y_1, y_2, y_3, o z_1, z_2, z_3, l'equazione (1) rappresenta una correlazione fra i punti dei due piani rimanenti, la quale, a scanso di equivoci, si dirà di *prima specie,* e si chiamerà *corrispondente* al punto considerato nella data correlazione di seconda specie. Dunque:

I. « A ciascun punto di uno qualunque dei tre piani α, β, γ corri-« sponde una correlazione di prima specie fra i punti dei due piani rimanenti. »

In particolare, ai tre punti (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) di α corrispondono le correlazioni di prima specie definite dalle equazioni seguenti:

$$a_1 b_y c_z = 0, \qquad a_2 b_y c_z = 0, \qquad a_3 b_y c_z = 0. \tag{2}$$

Considerate le y_1, y_2, y_3 come variabili, queste tre equazioni coesistono, se, indicando con $a'_i b'_j c'_k$ e $a''_i b''_j c''_k$ simboli equivalenti ad $a_i b_j c_k$, si ha:

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ b''_1 & b''_2 & b''_3 \end{vmatrix} a_1 a'_2 a''_3 c_z c'_z c''_z = 0,$$

ossia, permutando fra loro i simboli equivalenti e poi sommando le equazioni risultanti:

$$(a\,a'\,a'')(b\,b'\,b'')\,c_z c'_z c''_z = 0,$$

dove con la notazione $(b\,b'\,b'')$ s'indichi il determinante che figura nell'equazione precedente e con $(a\,a'\,a'')$ il determinante analogo formato con le a. L'equazione ottenuta rappresenta una curva del 3.° ordine C_γ del piano γ, la quale è dunque il luogo di un punto Z^0 di γ cui corrisponde in β un punto Y^0 determinato da due qualsivogliano delle equazioni (2), col quale quello forma una coppia di punti coniugati (*) comune alle tre correlazioni date dalle medesime equazioni (2).

In modo analogo si trova che il punto Y^0 descrive in β una curva del 3.° ordine C_β, di cui l'equazione è:

$$(a\,a'\,a'')(c\,c'\,c'')\,b_y b'_y b''_y = 0.$$

(*) Adottando le denominazioni usate dal sig. Hirst nella sua *Note in the Correlation of two Planes* (Annali di Matematica pura ed applicata, serie 2.ª, tom.[i] 6 e 8) si diranno *coniugati* due punti corrispondenti in una correlazione di prima specie. Così in seguito un punto ed una retta corrispondenti nella correlazione medesima, si chiameranno *polo* e *polare* rispettivamente.

Ora le correlazioni di prima specie fra i punti dei due piani β e γ, corrispondenti ai punti X di α, formano una rete, che ha per equazione:

$$x_1 \cdot a_1 b_y c_z + x_2 \cdot a_2 b_y c_z + x_3 \cdot a_3 b_y c_z = 0,$$

e questa mostra che le coppie di punti coniugati comuni alle correlazioni (2) appartengono anche a ciascuna correlazione della rete.

Se invece di partire dal piano α, si parte dal piano β, si trova che la curva C_α di α, analoga alle anzidette curve C_β e C_γ, ha per equazione:

$$(b b' b'')(c c' c'') a_x a'_x a''_x = 0,$$

e che quella del piano γ coincide con la stessa curva C_γ. Infine se si parte dal piano γ, si ritrovano ancora le curve C_α e C_β.

Dunque:

II. « Le correlazioni di prima specie fra i punti di due dei tre piani « α, β, γ, corrispondenti ai punti del terzo piano, formano una rete. V'è un « numero semplicemente infinito di coppie di punti coniugati comuni alle cor- « relazioni di una medesima rete, e i punti di siffatte coppie generano sui « tre piani le tre curve C_α, C_β, C_γ. »

Nella correlazione di prima specie:

$$a_x b_y c_z = 0,$$

fra i punti dei due piani β e γ, corrispondente ad un punto X dato in α, la polare di un punto Y di β, o Z di γ, ha per equazione:

$$a_x b_y c_1 \cdot z_1 + a_x b_y c_2 \cdot z_2 + a_x b_y c_3 \cdot z_3 = 0,$$

oppure:

$$a_x c_z b_1 \cdot y_1 + a_x c_z b_2 \cdot y_2 + a_x c_z b_3 \cdot y_3 = 0;$$

quindi è indeterminata, se si ha simultaneamente:

$$a_x b_y c_1 = 0, \qquad a_x b_y c_2 = 0, \qquad a_x b_y c_3 = 0, \tag{3}$$

oppure:

$$a_x c_z b_1 = 0, \qquad a_x c_z b_2 = 0, \qquad a_x c_z b_3 = 0. \tag{4}$$

Ora esprimendo la condizione che le equazioni dell'una o dell'altra di queste due terne coesistano, considerate come variabili le y_1, y_2, y_3, o le z_1, z_2, z_3, si ottiene in ogni caso l'equazione della curva C_α. Ma nelle ipotesi fatte la correlazione considerata è una correlazione speciale con punti singolari, ossia secondo le denominazioni del sig. Hirst (*), una *correlazione speciale centrale;* dunque:

III. « La curva C_α, o C_β, o C_γ, è ancora il luogo di un punto del « piano α, o β, o γ, cui corrisponde una correlazione speciale centrale fra i « punti dei due piani rimanenti. »

In modo analogo si trova:

IV. « Le curve C_β e C_γ, C_γ e C_α, C_α e C_β sono i luoghi dei punti « singolari delle correlazioni speciali centrali fra i punti dei piani β e γ, γ « e α, α e β, corrispondenti ai punti delle curve C_α, C_β, C_γ rispettivamente. »

Risolvendo due qualsivogliano delle equazioni (3), o (4), rispetto alle y_1, y_2, y_3, o alle z_1, z_2, z_3, si ottengono le coordinate del punto singolare $Y^{(1)}$ del piano β, o quelle del punto singolare $Z^{(1)}$ del piano γ, appartenente alla correlazione speciale centrale corrispondente ad un punto dato X sulla curva C_α. Così ad esempio, se si prendono le ultime due delle equazioni (3), nella seconda delle quali si imaginino sostituiti i simboli $a'_i b'_j c'_k$ ai loro equivalenti $a_i b_j c_k$, si ha:

$$y_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ b'_2 & b'_3 \end{vmatrix} c_2 c'_3 a_x a'_x$$

$$y_2 = \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ b'_3 & b'_1 \end{vmatrix} c_2 c'_3 a_x a'_x$$

$$y_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b'_1 & b'_2 \end{vmatrix} c_2 c'_3 a_x a'_x,$$

donde scambiando fra loro i simboli $a_i b_j c_k$ e $a'_i b'_j c'_k$, e poi sommando le due espressioni che così si ottengono per la medesima coordinata, si ricava (a meno del fattore 2):

$$y_1 = (bb')_1 (cc')_1 a_x a'_x$$
$$y_2 = (bb')_2 (cc')_1 a_x a'_x$$
$$y_3 = (bb')_3 (cc')_1 a_x a'_x,$$

indicando con le notazioni $(bb')_1, \ldots$ i determinanti $\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ b'_2 & b'_3 \end{vmatrix}, \ldots$. Ora se in luogo delle ultime due delle equazioni (3), si considerano la terza e la prima,

(*) Hirst, loc. cit.

oppure le prime due, si ottengono per y_1, y_2, y_3 espressioni che differiscono dalle precedenti solo per lo scambio del determinante $(cc')_1$ col determinante $(cc')_2$, oppure $(cc')_3$. Quindi il punto singolare $Y^{(1)}$ di β e quello $Z^{(1)}$ di γ, corrispondenti ad un punto dato X di C_α hanno per coordinate:

$$\begin{aligned} y_1 &= (bb')_1 (cc')_i a_x a'_x, & z_1 &= (cc')_1 (bb')_i a_x a'_x \\ y_2 &= (bb')_2 (cc')_i a_x a'_x, & z_2 &= (cc')_2 (bb')_i a_x a'_x \\ y_3 &= (bb')_3 (cc')_i a_x a'_x, & z_3 &= (cc')_3 (bb')_i a_x a'_x \end{aligned}$$

rispettivamente, dove i può avere uno qualunque dei valori 1, 2, 3.

Parimenti il punto singolare $Z^{(1)}$ di γ e quello $X^{(1)}$ di α, corrispondenti ad un punto dato Y di C_β hanno per coordinate:

$$\begin{aligned} z_1 &= (cc')_1 (aa')_i b_y b'_y, & x_1 &= (aa')_1 (cc')_i b_y b'_y \\ z_2 &= (cc')_2 (aa')_i b_y b'_y, & x_2 &= (aa')_2 (cc')_i b_y b'_y \\ z_3 &= (cc')_3 (aa')_i b_y b'_y, & x_3 &= (aa')_3 (cc')_i b_y b'_y \end{aligned}$$

rispettivamente.

Infine il punto singolare $X^{(1)}$ di α e quello $Y^{(1)}$ di β, corrispondenti ad un punto dato Z di C_γ, hanno per coordinate:

$$\begin{aligned} x_1 &= (aa')_1 (bb')_i c_z c'_z, & y_1 &= (bb')_1 (aa')_i c_z c'_z \\ x_2 &= (aa')_2 (bb')_i c_z c'_z, & y_2 &= (bb')_2 (aa')_i c_z c'_z \\ x_3 &= (aa')_3 (bb')_i c_z c'_z, & y_3 &= (bb')_3 (aa')_i c_z c'_z \end{aligned}$$

rispettivamente.

2. Preso ad arbitrio un punto Y sul piano β e un punto Z sul piano γ, resta in generale determinata sul piano α una retta U di coordinate:

$$u_1 = b_y c_z a_1, \qquad u_2 = b_y c_z a_2, \qquad u_3 = b_y c_z a_3, \tag{5}$$

la quale si dirà *corrispondente* alla coppia di punti (YZ) nella data correlazione di seconda specie.

Parimenti alla coppia di punti (ZX) dei piani γ e α corrisponde sul piano β la retta V di coordinate:

$$v_1 = c_z a_x b_1, \qquad v_2 = c_z a_x b_2, \qquad v_3 = c_z a_x b_3.$$

Infine alla coppia di punti (XY) dei piani α e β corrisponde sul piano γ la retta W di coordinate:

$$w_1 = a_x b_y c_1, \qquad w_2 = a_x b_y c_2, \qquad w_3 = a_x b_y c_3.$$

Dunque:

I. « Ad una coppia di punti presi rispettivamente sopra due qualsi- « vogliano dei tre piani α, β, γ, corrisponde nel terzo una retta. »

Al punto Y di β, o Z di γ, corrisponde fra i punti dei due piani α e γ, o α e β, la correlazione di prima specie definita dall'equazione:

$$a_x b_y c_z = 0,$$

nella quale le y_1, y_2, y_3, o le z_1, z_2, z_3, siano le coordinate del punto Y, o Z. In questa correlazione il punto Z, o Y, ha per polare sul piano α una retta U che coincide con la (5). Quindi:

II. « La retta che in uno dei tre piani α, β, γ corrisponde ad una « coppia di punti presi rispettivamente sopra gli altri due piani, è la polare « di uno qualunque di questi punti rispetto alla correlazione di prima specie « corrispondente all'altro. »

La retta u corrispondente alla coppia di punti (YZ) è indeterminata, se si ha simultaneamente:

$$b_y c_z a_1 = 0, \qquad b_y c_z a_2 = 0, \qquad b_y c_z a_3 = 0,$$

ossia se quei due punti Y, Z costituiscono una coppia di punti coniugati Y^0, Z^0 comune alle correlazioni di prima specie corrispondenti ai punti del piano α. Seguendo le denominazioni già in uso per le omografie binarie di seconda specie, si dirà che due punti siffatti formano una *coppia neutra:* epperò (1, II) si ha ancora:

III. « Le curve C_β e C_γ, C_γ e C_α, C_α e C_β sono i luoghi dei punti « delle coppie neutre dei piani β e γ, γ e α, α e β. »

3. A due punti $X'(x'_1, x'_2, x'_3)$ e $X''(x''_1, x''_2, x''_3)$ del piano α corrispondono fra i piani β e γ le correlazioni di prima specie:

$$a_{x'} b_y c_z = 0, \qquad a_{x''} b_y c_z = 0,$$

e ad un punto qualunque X della retta $X'X''$ del quale le coordinate sono:

$$x_1 = \lambda x'_1 + \mu x''_1, \qquad x_2 = \lambda x'_2 + \mu x''_2, \qquad x_3 = \lambda x'_3 + \mu x''_3,$$

corrisponde la correlazione:

$$[a_1(\lambda x'_1 + \mu x''_1) + a_2(\lambda x'_2 + \mu x''_2) + a_3(\lambda x'_3 + \mu x''_3)]\, b_y c_z = 0,$$

ossia:

$$(\lambda a_{x'} + \mu a_{x''}) b_y c_z = 0,$$

o infine:

$$\lambda a_{x'} b_y c_z + \mu a_{x''} b_y c_z = 0, \tag{6}$$

epperò:

I. « Ad una punteggiata di uno qualunque dei tre piani α, β, γ corrisponde fra gli altri due piani un fascio di correlazioni di prima specie, « proiettivo a quella punteggiata. »

Un punto Y di β, o Z di γ, ha per polare, sul piano γ, o β, rispetto ad una qualunque delle correlazioni del fascio la retta di cui l'equazione è la (6), nella quale le y_1, y_2, y_3, o le z_1, z_2, z_3, siano le coordinate del punto dato. Quindi al variare della correlazione nel fascio, la polare anzidetta descrive un fascio a quello proiettivo. Il centro di questo nuovo fascio si dirà *corrispondente* alla coppia formata dalla retta e dal punto considerati nella data correlazione di seconda specie; epperò:

II. « Ad una coppia formata da una retta e da un punto presi rispettivamente sopra due qualsivogliano dei tre piani α, β, γ, corrisponde « nel terzo un punto, che è il centro del fascio generato dalle polari del « punto della coppia rispetto alle correlazioni di prima specie corrispondenti « ai punti della retta della coppia medesima. »

In virtù del teorema II del n.º 2, la proposizione precedente può enunciarsi anche così:

III. « Il punto che in uno dei tre piani α, β, γ corrisponde ad una « coppia formata da una retta e da un punto presi rispettivamente sopra gli « altri due piani, è il polo di quella retta rispetto alla correlazione di prima « specie corrispondente a questo punto. »

Supposto che la retta della coppia sia $X'X''$ e il punto sia un punto Y di β, le coordinate del punto di γ corrispondente alla coppia considerata sono date dalle equazioni:

$$a_{x'} b_y (c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3) = 0$$
$$a_{x''} b_y (c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3) = 0.$$

Da queste si ricava, ad esempio:

$$z_1 = \begin{vmatrix} a_{x'} b_y c_2, & a_{x'} b_y c_3 \\ a'_{x''} b'_y c'_2, & a'_{x''} b'_y c'_3 \end{vmatrix} = a_{x'} a'_{x''} b_y b'_y (c c')_1,$$

donde scambiando $a_i b_j c_k$ con $a'_i b'_j c'_k$ e poi sommando l'eguaglianza risultante con la precedente, si deduce (a meno del fattore 2):

$$z_1 = (a_{x'} a'_{x''} - a'_{x'} a_{x''}) b_y b'_y (c c')_1 .$$

Ora si ha:

$$a_{x'}a'_{x''}-a'_{x'}a_{x''}=\begin{vmatrix} a_{x'} & a_{x''} \\ a'_{x'} & a'_{x''}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1x'_1+a_2x'_2+a_3x'_3, & a_1x''_1+a_2x''_2+a_3x''_3 \\ a'_1x'_1+a'_2x'_2+a'_3x'_3, & a'_1x''_1+a'_2x''_2+a'_3x''_3\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3\end{vmatrix}=(aa')_1(x'x'')_1+(aa')_2(x'x')_2+(aa')_3(x'x'')_3=$$

$$=(aa')_1u_1+(aa')_2u_2+(aa')_3u_3=(aa'u),$$

dicendo u_1, u_2, u_3 le coordinate della retta $U=X'X''$; dunque è:

$$z_1=(cc')_1(aa'u)b_yb'_y.$$

In modo analogo si calcolano z_2 e z_3. Quindi il punto Z di γ, e quello Y di β corrispondenti alle coppie (UY) e (UZ), hanno per coordinate:

$$\left.\begin{array}{ll} z_1=(cc')_1(aa'u)b_yb'_y, & y_1=(bb)_1(aa'u)c_zc'_z \\ z_2=(cc')_2(aa'u)b_yb'_y, & y_2=(bb')_2(aa'u)c_zc'_z \\ z_3=(cc')_3(aa'u)b_yb'_y, & y_3=(bb')_3(aa'u)c_zc'_z \end{array}\right\} \quad (7)$$

rispettivamente.

Parimenti il punto X di α e quello Z di β corrispondenti alle coppie (VZ) e (VX), hanno per coordinate:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1=(aa')_1(bb'v)c_zc'_z, & z_1=(cc')_1(bb'v)a_xa'_x \\ x_2=(aa')_2(bb'v)c_zc'_z, & z_2=(cc')_2(bb'v)a_xa'_x \\ x_3=(aa')_3(bb'v)c_zc'_z, & z_3=(cc')_3(bb'v)a_xa'_x \end{array}\right\} \quad (8)$$

rispettivamente.

Infine il punto Y di β e quello X di α corrispondenti alle coppie (WX) e (WY), hanno per coordinate:

$$\left.\begin{array}{ll} y_1=(bb')_1(cc'w)a_xa'_x, & x_1=(aa')_1(cc'w)b_yb'_y \\ y_2=(bb')_2(cc'w)a_xa'_x, & x_2=(aa')_2(cc'w)b_yb'_y \\ y_3=(bb')_3(cc'w)a_xa'_x, & x_3=(aa')_3(cc'w)b_yb'_y \end{array}\right\} \quad (9)$$

rispettivamente.

Dal teorema precedente e da una nota proprietà delle correlazioni di prima specie segue:

IV. « I punti che in uno dei tre piani α, β, γ corrispondono alle coppie « formate da un punto fisso di un altro dei tre piani medesimi e da una retta

« variabile in un fascio del terzo piano, generano una punteggiata proiettiva « a questo fascio. »

4. Se X, Y, Z sono tre punti corrispondenti fra loro, alla coppia formata da due qualunque di essi corrisponde una retta che passa per il terzo. Inoltre se il punto X resta fisso e il punto Y percorre una retta V di β, la retta di γ corrispondente alla coppia (XY) ruota intorno ad un punto Z. Quindi alla coppia formata da Z e da un punto qualunque Y di V, corrisponde una retta che passa per X. Perciò come alla coppia (XV) corrisponde il punto Z, così alla coppia (ZV) corrisponde il punto X. Quindi uno qualunque dei due sistemi di formole (7), (8) e (9), è una conseguenza dell'altro.

Alla coppia (YW) corrisponde il punto X dato dalle formole (9) (a destra). Se il punto Y percorre la retta V:

$$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = 0,$$

si ottiene l'equazione del luogo descritto dal punto corrispondente X, eliminando le y_1, y_2, y_3 fra l'equazione precedente e le (9) (a destra), le quali ultime, per l'osservazione fatta pocanzi, possono essere sostituite dalle (9) (a sinistra). Quindi l'equazione risultante è evidentemente:

$$(b b' v)(c c' w) a_x a'_x = 0,$$

epperò il luogo cercato è una conica. Questa si dirà *corrispondente* alla coppia di rette (VW), nella data correlazione di seconda specie.

Si giunge al medesimo risultato, se si cerca il luogo descritto in α dal punto X corrispondente alla coppia (ZV), quando si supponga che il punto Z di questa coppia percorra la retta W.

Dunque:

I. « Ad una coppia di rette prese rispettivamente sopra due qualsivogliano dei tre piani α, β, γ corrisponde nel terzo una conica. Questa è il « luogo dei punti del terzo piano corrispondente alle coppie formate da una « qualunque delle due rette date e dai punti dell'altra. »

Come alla coppia di rette (VW) corrisponde la conica:

$$(b b' v)(c c' w) a_x a'_x = 0, \tag{10}$$

così alla coppia di rette (WU) corrisponde la conica:

$$(c c' w)(a a' u) b_y b'_y = 0, \tag{11}$$

e infine alla coppia di rette (UV) corrisponde la conica:

$$(a a' u)(b b' v) c_z c'_z = 0. \tag{12}$$

Le equazioni (10), (11) e (12) rappresentano le correlazioni di prima specie fra le rette di due dei tre piani α, β, γ corrispondenti ai punti del terzo piano.

In virtù del teorema III del n.° 3, la proposizione precedente può enunciarsi anche così:

II. « La conica che in uno dei tre piani α, β, γ corrisponde ad una « coppia di rette prese rispettivamente sopra gli altri due piani, è il luogo « dei poli di una qualunque di queste due rette rispetto alle correlazioni di « prima specie del fascio corrispondente all'altra. »

5. Chiamando col sig. Hirst *classe* e *ordine* di un sistema semplicemente infinito di correlazioni di prima specie, la classe dell'inviluppo delle polari di un medesimo punto e l'ordine del luogo dei poli di una medesima retta rispetto alle correlazioni del sistema, si ha (II, 3 e II, 4):

I. « Un fascio di correlazioni di prima specie è della prima classe e « del secondo ordine. »

È noto (*) che dette μ e ν le due *caratteristiche* (classe e ordine) di un sistema semplicemente infinito di correlazioni di prima specie, il numero π delle correlazioni speciali centrali del sistema, e quello λ delle correlazioni speciali assiali (**) del sistema medesimo, sono dati dalle formole:

$$\pi = 2\nu - \mu$$
$$\lambda = 2\mu - \nu.$$

Nel caso in cui il sistema dato sia un fascio si ha $\mu = 1$, $\nu = 2$; quindi si trova $\pi = 1$, $\lambda = 0$; epperò:

II. « Un fascio di correlazioni di prima specie contiene tre correla- « zioni speciali centrali e non contiene alcuna correlazione speciale assiale. »

La prima parte di questo teorema è anche una conseguenza della proposizione III del n.° 1.

Ad una retta u di α corrisponde un fascio di correlazioni fra i punti dei due piani β e γ, ed in virtù di questo ad ogni punto Y di β corrisponde un punto Z di γ e viceversa (3). Inoltre, se il punto Y percorre in β una retta V, il punto Z corrispondente alla coppia (UY) descrive in γ una conica, la quale è il luogo dei poli della retta V rispetto alle correlazioni del fascio corri-

(*) Hirst, loc. cit.

(**) Il sig. Hirst chiama correlazione speciale assiale una correlazione speciale di prima specie dotata di rette singolari.

spondente alla retta U (4). Ora in questo fascio esistono (II) tre correlazioni speciali centrali e il polo della retta V rispetto a ciascuna di queste coincide (*) col punto singolare della correlazione che si considera situato nel piano γ. Quindi la conica anzidetta passa per ciascuno dei punti singolari del piano γ appartenenti alle medesime correlazioni speciali. Dunque:

III. « A ciascuna retta di uno qualunque dei tre piani α, β, γ corri-« sponde una trasformazione quadratica fra i punti dei due piani rimanenti. « I punti fondamentali di questa trasformazione sono sopra ciascun piano i « punti singolari esistenti su di esso e appartenenti alle tre correlazioni spe-« ciali centrali contenute nel fascio corrispondente alla retta data. »

In virtù di questo teorema, la proposizione III del n.º 3 e la II del n.º 4 si possono enunciare anche così:

IV. « Ad una coppia formata da una retta e da un punto presi rispet-« tivamente sopra due qualsivogliano dei tre piani α, β, γ corrisponde in ge-« nerale nel terzo un punto, che è il punto corrispondente al punto dato nella « trasformazione quadratica che corrisponde alla retta data. »

V. « Ad una coppia di rette prese rispettivamente sopra due qualsi-« vogliano dei tre piani α, β, γ corrisponde in generale nel terzo una conica, « che è la conica corrispondente ad una qualunque delle due rette date nella « trasformazione quadratica che corrisponde all'altra. »

Inoltre tenendo presenti le note proprietà della trasformazione quadratica si trova:

VI. « Data una retta sopra uno qualunque dei tre piani α, β, γ esi-« stono sopra ciascuno dei due piani rimanenti tre punti, ognuno dei quali « forma con quella retta una coppia cui non corrisponde nel terzo piano un « punto, ma una retta. »

VII. « Data una retta sopra uno qualunque dei tre piani α, β, γ esi-« stono sopra ciascuno dei due piani rimanenti tre rette, ognuna delle quali « forma con la data una coppia cui corrisponde nel terzo piano una conica « degenere »

etc.

6. L'equazione di una correlazione di seconda specie contiene 26 coefficienti indipendenti fra loro; epperò:

I. « Una correlazione di seconda specie è individuata da 26 condizioni « lineari. »

(*) Hirst, loc. cit., n.º 17.

Se si vuole che i punti X, Y, Z dati rispettivamente sopra i piani α, β, γ siano elementi corrispondenti in una correlazione di seconda specie, le loro coordinate debbono verificare la relazione:

$$a_x b_y c_z = 0,$$

la quale contiene a primo grado i coefficienti dell'equazione della correlazione. Quindi:

II. « Il volere che una correlazione di seconda specie fra i punti di « tre piani α, β, γ abbia come corrispondenti tre punti dati rispettivamente « sui piani medesimi, equivale ad assoggettare la correlazione ad *una* condi- « zione lineare. »

Se si vuole che i punti X ed Y dati sopra i piani α e β e la retta w data su γ siano elementi corrispondenti in una correlazione di seconda specie, le loro coordinate debbono verificare le relazioni seguenti:

$$a_x b_y c_1 = \rho w_1, \qquad a_x b_y c_2 = \rho w_2, \qquad a_x b_y c_3 = \rho w_3,$$

da cui eliminando il fattore di proporzionalità ρ, si ricavano le altre:

$$a_x b_y c_2 \cdot w_3 = a_x b_y c_3 \cdot w_2, \qquad a_x b_y c_3 \cdot w_1 = a_x b_y c_1 \cdot w_3,$$
$$a_x b_y c_1 \cdot w_2 = a_x b_y c_2 \cdot w_1,$$

una qualunque delle quali è una conseguenza delle altre due. Queste contengono a primo grado i coefficienti dell'equazione della correlazione; epperò:

III. « Il volere che una correlazione di seconda specie fra i punti di « tre piani α, β, γ abbia come elementi corrispondenti due punti ed una « retta presi rispettivamente sui piani medesimi, equivale ad assoggettare la « correlazione a *due* condizioni lineari. »

Se si vuole che i punti X ed Y dati sui piani α e β costituiscano una coppia neutra per una correlazione di seconda specie, le loro coordinate debbono verificare le tre relazioni seguenti:

$$a_x b_y c_1 = 0, \qquad a_x b_y c_2 = 0, \qquad a_x b_y c_3 = 0,$$

le quali contengono a primo grado i coefficienti dell'equazione della correlazione. Quindi:

IV. « Il volere che una correlazione di seconda specie fra i punti di « tre piani α, β, γ abbia come neutra una coppia di punti dati sopra due dei « piani medesimi, equivale ad assoggettare la correlazione a *tre* condizioni « lineari. »

7. Si è dimostrato (1, I) che in una correlazione di seconda specie fra i punti di tre piani α, β, γ a ciascun punto di uno qualunque dei piani medesimi corrisponde una correlazione di prima specie fra i punti dei due piani rimanenti. Ora viceversa è facile dimostrare che se tre piani punteggiati α, β, γ sono riferiti tra loro in modo che a ciascun punto di uno qualunque di essi corrisponda algebricamente una correlazione di prima specie fra i punti degli altri due, i tre piani dati sono in correlazione di seconda specie. Infatti, perchè a ciascun punto X del piano α corrisponda una correlazione di prima specie fra i punti Y e Z dei due piani β e γ, fra le coordinate x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 dei punti anzidetti deve passare una relazione della forma:

$$y_1(A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3) + y_2(B_1 z_1 + B_2 z_2 + B_3 z_3) + \\ + y_3(C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3) = 0,$$

nella quale i coefficienti A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2, 3)$ siano forme delle variabili x_1, x_2, x_3 del medesimo grado. Inoltre perchè ad ogni punto Y di β corrisponda ancora una correlazione di prima specie fra i punti dei due piani γ e α, le anzidette forme debbono essere di primo grado rispetto alle x_1, x_2, x_3. Ma supposto che ciò abbia luogo, accade altresì che ad ogni punto Z di γ corrisponde una correlazione di prima specie fra i punti dei due piani α e β, e i tre piani dati sono legati fra loro da una correlazione di seconda specie; dunque:

I. « Se tre piani punteggiati α, β, γ sono riferiti fra loro in modo « che a ciascun punto di uno qualunque di essi corrisponda una correlazione « di prima specie fra i punti degli altri due, i tre piani dati sono in corre« lazione di seconda specie. »

Inoltre:

II. « Se la corrispondenza di cui si tratta nel teorema precedente ha « luogo per due dei tre piani dati, essa sussiste anche per il terzo piano. »

8. In particolare suppongasi che i tre piani α, β, γ coincidano con un medesimo piano π, e in tale ipotesi i punti X, Y, Z siano riferiti ad uno stesso triangolo fondamentale. Dette ξ_1, ξ_2, ξ_3 le coordinate di un punto qualunque P di π, e considerato P come appartenente ai due piani β e γ, o γ e α, o α e β, ad esso corrisponde nella correlazione di seconda specie una retta la quale ha per equazione:

$$b_\xi c_\xi (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = 0,$$

oppure:

$$c_\xi a_\xi (b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3) = 0,$$

o infine:

$$a_\xi b_\xi (c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3) = 0.$$

Dunque:

I. « Se i tre piani α, β, γ coincidono in un medesimo piano π, ad « ogni punto di questo corrispondono tre rette. »

La retta rappresentata da una qualunque delle tre equazioni precedenti, passa per il punto P cui corrisponde, se le coordinate di questo punto verificano la relazione:

$$a_\xi b_\xi c_\xi = 0,$$

e quindi:

II. « Il luogo di un punto del piano π cui corrisponde una retta pas- « sante per il punto stesso, è una curva generale del 3.° ordine. »

Questa curva è sempre la stessa, qualunque sia quello dei tre piani α, β, γ coincidenti con π, cui si supponga che il punto P appartenga.

9. Una rete di correlazioni di prima specie fra i punti di due piani è individuata quando siano date sei coppie di punti coniugati comuni a tutte le correlazioni della rete. Per determinare ogni altra correlazione della rete medesima, basta assumere come polo e polare un punto ed una retta presi ad arbitrio sui piani dati, oppure come coniugati i punti di due coppie prese ad arbitrio sui piani stessi.

Individuata nel modo anzidetto una rete di correlazioni di prima specie fra due dei tre piani α, β, γ, per esempio fra β e γ, si stabilisca una corrispondenza omografica fra i punti del terzo piano α e le correlazioni della rete; e ciò si faccia assumendo sopra il piano α quattro punti A_1, A_2, A_3, A_4 tali che tre qualsivogliano di essi non giacciano in linea retta e sui piani β e γ quattro correlazioni H_1, H_2, H_3, H_4 della rete in modo che tre qualsivogliano di esse non appartengano ad un medesimo fascio, e poi scegliendo quei quattro punti come corrispondenti a queste quattro correlazioni rispettivamente. Le quattro correlazioni siano individuate prendendo sopra il piano β come poli i quattro punti B_1, B_2, B_3, B_4, tre qualsivogliano dei quali non stiano in linea retta, e sopra il piano γ come polari corrispondenti le quattro rette c_1, c_2, c_3, c_4 tre qualsivogliano delle quali non appartengano ad un medesimo fascio. Così individuata la corrispondenza proiettiva fra il piano punteggiata α e la rete di correlazioni di prima specie fra i due piani β e γ, resta determinata fra i punti dei tre piani α, β, γ una correlazione di seconda specie. Infatti, per questa correlazione gli elementi delle terne $(A_1 B_1 c_1)$, $(A_2 B_2 c_2)$, $(A_3 B_3 c_3)$, $(A_4 B_4 c_4)$ risultano corrispondenti fra loro, e quindi

(6, III) la correlazione stessa viene con ciò a sodisfare a $2 \cdot 4 = 8$ condizioni lineari. Inoltre le sei coppie date di punti coniugati comuni alle correlazioni della rete sono coppie di punti neutri dei piani β e γ nella correlazione di seconda specie: quindi (6, IV) questa viene a sodisfare ad altre $3 \cdot 6 = 18$ condizioni lineari. Essa dunque sodisfa ad $8 + 18 = 26$ condizioni lineari, epperò (6, I) è individuata.

Una volta individuata la corrispondenza proiettiva fra il piano punteggiato α, e la rete di correlazioni data fra i due piani β e γ, nasce il problema:

I. « Dato un punto qualunque X di α, costruire la corrispondente cor-« relazione H fra i due piani β e γ. »

Per risolvere questo problema si unisca uno qualunque dei punti A_1, A_2, A_3, A_4, per esempio A_1, ai rimanenti e al punto X: si ottengono così le quattro punteggiate A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1X, appartenenti al medesimo fascio (A_1), alle quali corrispondono i seguenti fasci di correlazioni fra β e γ: (H_1H_2), (H_1H_3), (H_1H_4), (H_1H). Poi prendasi ad arbitrio un punto Y sul piano β. Alle coppie (A_1A_2, Y), (A_1A_3, Y), (A_1A_4, Y), (A_1X, Y) corrispondono in γ (3, IV) quattro punti in linea retta Z_1, Z_2, Z_3, Z costituenti un gruppo di cui il rapporto anarmonico è eguale a quello, noto, del gruppo formato dai quattro raggi A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1X. I punti Z_1, Z_2, Z_3 si possono facilmente costruire. Ed in vero, Z_1 ad esempio, essendo il punto di γ corrispondente alla coppia (A_1A_2, Y) è (3, II) il punto di concorso delle polari di Y rispetto alle correlazioni del fascio (H_1H_2). Due di queste correlazioni, e precisamente H_1 e H_2, sono note; perciò si possono trovare le polari di Y rispetto ad esse (*); il punto d'incontro di tali polari è il punto richiesto Z_1. In modo analogo si costruiscono i punti Z_2 e Z_3. Trovati questi tre punti, i quali, come si è detto, giacciono in linea retta, si determina subito Z, conoscendosi il rapporto anarmonico $(Z_1Z_2Z_3Z)$. Considerando inoltre i quattro raggi A_2A_1, A_2A_3, A_2A_4, A_2X di α e ancora il punto Y di β, si trova nello stesso modo un altro punto Z' di γ, corrispondente alla coppia (A_2X, Y). Ora il punto Z determinato in γ e corrispondente alla coppia (A_1X, Y), è il punto di concorso delle polari di Y rispetto alle correlazioni del fascio (H_1H); quindi la polare di Y rispetto ad H passa per Z. Analogamente si vede, con-

(*) Schröter: *Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis per data puncta construendam spectantis solutio nova.* Giornale di Crelle, vol. 62. In questa Memoria vengono date le costruzioni di una correlazione di prima specie nei seguenti casi: (3 0 2 0), (2 0 4 0), (1 0 6 0), (0 0 8 0), secondo le notazioni del sig. Hirst.

siderando la coppia ($A_2 X$, Y), che la polare anzidetta passa anche per Z'. Essa è dunque la retta ZZ'. Così della correlazione incognita H si conosce la polare ZZ' corrispondente ad un polo dato Y, epperò essa è individuata, dovendo anche appartenere alla data rete di correlazioni fra i piani β e γ, e si sa costruire.

Ripetendo, in ordine inverso, le costruzioni precedenti, si risolve il seguente problema:

II. « Data, mediante un polo ed una polare, una correlazione H fra « β e γ, appartenente alla rete considerata, costruire il punto corrispondente « X di α. »

Se in luogo della corrispondenza proiettiva fra i punti del piano α e le correlazioni della rete data fra i piani β e γ, si considera la correlazione di seconda specie fra i tre piani α, β, γ determinata da quella corrispondenza, i due problemi testè risoluti prendono le forme seguenti:

III. « Data la coppia di punti (XY), o (XZ), costruire la retta cor« rispondente nella correlazione di seconda specie determinata fra i tre piani « α, β, γ. »

IV. « Data la coppia (YW), o (ZV), costruire il punto corrispondente « nella correlazione di seconda specie determinata fra i tre piani α, β, γ. »

Da questo problema si ricava subito la soluzione dell'altro:

V. « Data la coppia di punti (YZ), costruire la retta corrispondente « nella correlazione di seconda specie determinata fra i tre piani α, β, γ. »

Infatti condotte per il punto Z, o Y, due rette ad arbitrio W_1 e W_2, o V_1 e V_2, si costruiscano i punti X_1 e X_2 corrispondenti alle coppie (YW_1) e (YW_2), o (ZV_1) e (ZV_2). La loro congiungente $X_1 X_2$ è la retta richiesta.

Così dati due punti sopra due qualsivogliano dei tre piani α, β, γ, si sa sempre trovare la retta che ad essi corrisponde nella correlazione di seconda specie determinata fra i piani medesimi; e quindi può dirsi di saper costruire la correlazione stessa.

Sin qui si è supposto che ciascuna delle quattro correlazioni H_1, H_2, H_3, H_4 sia individuata da un polo e dalla polare corrispondente; ma se ciascuna di esse, o soltanto qualcuna, è individuata da due coppie di punti coniugati, tutte le costruzioni precedentemente indicate possono egualmente essere eseguite (*). In particolare, si supponga che le quattro correlazioni anzidette siano individuate rispettivamente dalle coppie di punti coniugati: ($B_1 C_1$) e ($B'_1 C'_1$),

(*) Schröter, loc. cit.

$(B_2 C_2)$ e $(B'_2 C'_2)$, $(B_3 C_3)$ e $(B'_3 C'_3)$, $(B_4 C_4)$ e $(B'_4 C'_4)$. In questa ipotesi la correlazione di seconda specie fra i tre piani α, β, γ è individuata dalle sei coppie date di punti neutri e dalle seguenti otto terne di punti corrispondenti:

$$(A_1 B_1 C_1), \quad (A_2 B_2 C_2), \quad (A_3 B_3 C_3), \quad (A_4 B_4 C_4)$$
$$(A_1 B'_1 C'_1), \quad (A_2 B'_2 C'_2), \quad (A_3 B'_3 C'_3), \quad (A_4 B'_4 C'_4),$$

le quali però non sono le terne più generali, e la correlazione per ciò che si è detto, si sa costruire.

Se in luogo delle due terne $(A_1 B_1 C_1)$ e $(A_1 B'_1 C'_1)$ le quali hanno in comune un medesimo punto A_1 del piano α, sono date le due terne $(A_1 B_1 C_1)$ e $(A'_1 B'_1 C'_1)$, la correlazione di seconda specie fra i tre piani α, β, γ resta parimenti determinata; ma come si costruisce? Questo problema è ricondotto al precedente, se si sa determinare la correlazione H_1 fra β e γ corrispondente al punto A_1 di α. Le correlazioni di seconda specie fra i tre piani α, β, γ aventi in comune le sei coppie date di punti neutri e le terne di punti corrispondenti:

$$(A_2 B_2 C_2), \quad (A_3 B_3 C_3), \quad (A_4 B_4 C_4)$$
$$(A'_1 B'_1 C'_1), \quad (A_2 B'_2 C'_2), \quad (A_3 B'_3 C'_3), \quad (A_4 B'_4 C'_4),$$

formano un fascio, e le correlazioni di prima specie fra β e γ corrispondenti al punto A_1 di α in ciascuna delle correlazioni del fascio precedente, formano parimenti un fascio (*). È facile determinare quest'ultimo fascio. Perciò prendansi due correlazioni del primo, il che può farsi aggiungendo agli elementi che determinano questo successivamente ciascuna delle due terne di punti corrispondenti $(A'_1 B_1 C_1)$ e $(A'_1 B^0_1 C^0_1)$, essendo B^0_1 e C^0_1 due nuovi punti presi rispettivamente sui piani β e γ. Trovate con le costruzioni sopra accennate, le correlazioni di prima specie corrispondenti al punto A_1 nelle due correlazioni di seconda specie testè prese, esse determinano il fascio suddetto. La correlazione di questo fascio individuata dalla coppia data di punti coniugati $(B_1 C_1)$ è la correlazione cercata H_1.

Analogamente alle terne $(A_2 B_2 C_2)$ e $(A_2 B'_2 C'_2)$ si possono sostituire le altre $(A_2 B_2 C_2)$ e $(A'_2 B'_2 C'_2)$, e così di seguito.

In tal modo si giunge al risultato seguente:

VI. « Date sei coppie di punti neutri e otto terne di punti corrispon-
« denti di una correlazione di seconda specie fra tre piani α, β, γ, questa è
« individuata e si sa costruire. »

(*) È ovvio dimostrare analiticamente le proprietà accennate.

10. Una rete di correlazioni di prima specie fra i punti di due piani è individuata quando siano date cinque coppie di punti coniugati comuni a tutte le correlazioni della rete e tre correlazioni della rete medesima non appartenenti ad uno stesso fascio, ciascuna delle quali può essere individuata da una coppia di punti coniugati e da un polo con la polare corrispondente, oppure da tre coppie di punti coniugati.

Suppongasi che la rete di correlazioni sia data sui piani β e γ e le tre correlazioni che insieme alle cinque coppie date di punti coniugati comuni la individuano, siano rispettivamente date dalle coppie di punti coniugati:

$$(B_1 C_1),\quad (B'_1 C'_1),\quad (B''_1 C''_1);\qquad (B_2 C_2),\quad (B'_2 C'_2),\quad (B''_2 C''_2);$$
$$(B_3 C_3),\quad (B'_3 C'_3),\quad (B''_3 C''_3).$$

Nella rete così individuata prendasi una quarta correlazione, che non appartenga a nessuno dei tre fasci determinati dalle tre correlazioni precedenti, dando le coppie di punti coniugati:

$$(B_4 C_4) \quad \text{e} \quad (B'_4 C'_4).$$

Se le quattro correlazioni considerate H_1, H_2, H_3, H_4 si fanno corrispondere rispettivamente a quattro punti A_1, A_2, A_3, A_4 del piano α, tre qualsivogliano dei quali non giacciano in linea retta, resta stabilita una corrispondenza omografica fra i punti del piano α e le correlazioni della rete data, e quindi una correlazione di seconda specie fra i tre piani punteggiati α, β, γ. Infatti di questa correlazione sono date cinque coppie di punti neutri e le undici terne di punti corrispondenti:

$$\begin{array}{llll}
(A_1 B_1 C_1), & (A_2 B_2 C_2), & (A_3 B_3 C_3), & (A_4 B_4 C_4) \\
(A_1 B'_1 C'_1), & (A_2 B'_2 C'_2), & (A_3 B'_3 C'_3), & (A B'_4 C'_4) \\
(A_1 B''_1 C''_1), & (A_2 B''_2 C''_2), & (A_3 B''_3 C''_3), &
\end{array}$$

La costruzione della correlazione così individuata è ricondotta al caso studiato nel numero precedente, se per mezzo degli elementi dati, si sa trovare una sesta coppia di punti neutri. A tale oggetto si ricordi (5, II) che in uno qualunque dei dati fasci di correlazioni $(H_2 H_3)$, $(H_3 H_1)$, $(H_1 H_2)$, per esempio nel primo, esistano tre correlazioni speciali centrali, i cui punti singolari R_1, R_2, R_3, o S_1, S_2, S_3, situati sul piano β, o γ, si sanno costruire, essendo (5, III) i punti principali di una determinata trasformazione quadratica. Quelli appartengono alla curva C_β (1, IV), e questi a C_γ. Quindi (1, II) ad uno qualsiasi dei primi, per esempio ad R_1, corrisponde un punto R'_1

di C_γ, che è il punto di concorso delle polari di R_1 rispetto a tutte le correlazioni della rete data. La polare di R_1 rispetto alle correlazioni del fascio $(H_2 H_3)$ è la retta $S_2 S_3$; quella di R_1 rispetto alla correlazione data H_1 si sa costruire. Il punto dove questa incontra la precedente è R'_1, e i due punti R_1 e R'_1 costituiscono la sesta coppia cercata di punti neutri.

Se in luogo delle terne $(A_1 B_1 C_1)$, $(A_1 B'_1 C'_1)$, $(A_1 B''_1 C''_1)$, le quali hanno in comune un medesimo punto A_1 di α si considerano le altre $(A_1 B_1 C_1)$, $(A'_1 B_1 C'_1)$, $(A'_1 B''_1 C''_1)$ di cui le due ultime soltanto hanno in comune il punto A'_1, la correlazione di seconda specie fra i tre piani α, β, γ, resta parimenti determinata; ma come si costruisce? Questo problema è ricondotto al precedente se si sa determinare la correlazione H_1 fra β e γ corrispondente al punto A_1 di α. Questa correlazione H_1 poi si determina con procedimenti affatto analoghi a quelli tenuti alla fine del n.° 9 per sostituire alle terne $(A_1 B_1 C_1)$ e $(A_1 B_1 C'_1)$ le altre $(A_1 B_1 C_1)$ e $(A'_1 B'_1 C'_1)$. Parimenti si possono ora sostituire alle terne $(A_1 B_1 C_1)$, $(A'_1 B_1 C'_1)$, $(A'_1 B''_1 C''_1)$ le altre $(A_1 B_1 C_1)$, $(A'_1 B'_1 C'_1)$, $(A''_1 B''_1 C''_1)$, che non hanno alcun punto comune. Così queste ultime sono state sostituite alle primitive $(A_1 B_1 C_1)$, $(A_1 B'_1 C'_1)$, $(A_1 B''_1 C''_1)$.

Analogamente alle terne $(A_2 B_2 C_2)$, $(A_2 B'_2 C'_2)$, $(A_2 B''_2 C''_2)$ si possono sostituire le altre $(A_2 B_2 C_2)$, $(A'_2 B'_2 C'_2)$, $(A''_2 B''_2 C''_2)$, e così di seguito.

In tal modo si giunge al risultato seguente:

« Date cinque coppie di punti neutri e undici terne di punti corrispon-
« denti di una correlazione di seconda specie fra tre piani α, β, γ, questa è
« individuata e si sa costruire. »

11. Sin qui si è supposto che le tre forme fondamentali in correlazione di seconda specie fossero piani punteggiati. È facile vedere come si modificano le proprietà trovate, se le tre forme sono piani rigati, oppure stelle di raggi o di piani.

In particolare, se esse sono tre stelle di raggi (A), (B), (C), in queste esistono (2, III) tre coni del 3.° ordine Γ_A, Γ_B, Γ_C tali che Γ_B e Γ_C, Γ_C e Γ_A, Γ_A e Γ_B sono i luoghi delle rette costituenti le coppie neutre delle stelle (B) e (C), (C) e (A), (A) e (B).

Le generatrici dei due coni Γ_B e Γ_C, ad esempio, si corrispondono una ad una, chiamando corrispondenti le rette di una stessa coppia neutra. Ora quale è il numero delle coppie neutre formate da due rette incidenti? Un piano qualunque α condotto per la retta che unisce i vertici B e C dei due coni considerati, taglia ciascuno di questi secondo tre generatrici alle quali corrispondono sull'altro altrettante generatrici, che determinano tre piani β

passanti per la retta BC. Così fra i piani α e β del fascio (BC) viene ad essere stabilita una corrispondenza algebrica (3, 3). Questa ammette sei coincidenze; epperò si ha:

« Se (A), (B), (C) sono tre stelle di raggi in correlazione di seconda « specie, in ciascuna delle coppie (B) e (C), (C) e (A), (A) e (B) esistono sei « coppie neutre formate da rette incidenti. »

§ 2.

12. Siano date tre stelle di raggi (A), (B), (C) in correlazione di seconda specie. A due raggi appartenenti a due qualsivogliano di queste stelle corrisponde nella terza un piano (2, I). Quale è il luogo dei punti dello spazio in ciascuno dei quali concorrono due rette ed un piano corrispondenti? Segando le tre stelle date con uno stesso piano Π, si ottengono evidentemente tre piani punteggiati sovrapposti in correlazione di seconda specie. Se P è un punto di Π per cui passano due raggi di due stelle e il piano a questi corrispondente nella terza, il punto P appartiene alla curva di Π, luogo di un punto situato sulla retta corrispondente nella correlazione di seconda specie determinata su Π, e viceversa. Quindi si ha (8, II):

I. « Date tre stelle di raggi in correlazione di seconda specie, il luogo « di un punto dello spazio dove concorrono due raggi ed un piano corrispon- « denti è una superficie del 3.° ordine. »

Il centro di una stella congiunto ai centri delle altre due determina in queste due raggi ai quali corrisponde nella prima un piano determinato. Dunque nel centro di ciascuna stella concorrono due raggi ed un piano corrispondenti, epperò:

II. « La superficie del 3.° ordine generata da tre stelle di raggi in « correlazione di seconda specie, passa per i centri delle stelle medesime. »

Sia α il piano della stella (A), corrispondente alla coppia di raggi AB e AC considerati come appartenenti alle altre due stelle rispettivamente. Ad un raggio qualunque r di (A) posto sul piano α, corrisponde (1, I) una correlazione di prima specie fra le stelle (B) e (C), la quale determina sullo stesso piano α un'altra correlazione di prima specie. La conica di α, luogo di un punto situato sulla polare che ad esso corrisponde in questa correlazione, passa per il punto A, perchè le rette AB e AC sono raggi coniugati nell'anzidetta correlazione fra le stelle (B) e (C). La retta considerata r incontra quella conica in un sol punto, fuori di A, il quale è l'unico che, oltre A, essa abbia in comune con la superficie generata dalle tre stelle (A), (B), (C). Dunque:

III. « Date tre stelle di raggi in correlazione di seconda specie, il piano « che in una qualunque di esse corrisponde alla coppia formata dalle rette « che uniscono il centro di questa stella con i centri delle altre due, è tan- « gente alla superficie del 3.° ordine generata dalle stelle date e il punto di « contatto è il centro della stella cui il piano appartiene. »

Inoltre si ha evidentemente:

IV. « La superficie del 3.° ordine generata da tre stelle di raggi in « correlazione di seconda specie, passa per i diciotto punti dello spazio deter- « minati dalle diciotto coppie neutre formate da rette incidenti. »

Fissato un raggio a nella stella (A), resta determinata (1, I) una correlazione di prima specie fra i raggi delle altre due stelle (B) e (C), la quale genera una superficie del 2.° ordine, che passa per i centri B e C delle stelle medesime. Questa superficie varia al variare del raggio a nella stella (A) e descrive una *rete,* di cui B e C sono due punti-base. Quali sono gli altri punti-base della rete stessa? Nelle stelle (B) e (C) esistono (11) sei coppie neutre formate da rette incidenti. I due raggi di una qualsiasi di queste coppie ed un raggio qualunque a della stella (A) costituiscono una terna di rette corrispondenti nella data correlazione di seconda specie fra le tre stelle (A), (B), (C). Quindi il punto d'appoggio dei due raggi della coppia considerata appartiene alla quadrica generata dalla correlazione fra le due stelle (B) e (C), corrispondente al raggio a di (A), qualunque esso sia. Dunque:

V « Date tre stelle di raggi in correlazione di seconda specie, ciascuna « di esse determina una rete proiettiva di quadriche, di cui gli otto punti-base « sono i centri delle altre due stelle e i punti dello spazio determinati dalle « sei coppie di rette incidenti somministrate dalle due stelle medesime. »

Un raggio a della stella (A) incontra la quadrica corrispondente in due punti, per ciascuno dei quali passano due rette ed un piano corrispondenti nella data correlazione di seconda specie fra le tre stelle (A), (B), (C). Quindi questi due punti giacciono sulla superficie del 3.° ordine generata dalle stelle medesime, epperò:

VI. « La superficie del 3.° ordine generata da tre stelle di raggi in « correlazione di seconda specie, può essere generata anche da una qualunque « delle tre stelle medesime e da una rete proiettiva di quadriche (*). »

(*) REYE: *Projectivische Enzeugung der allgemeinen Flächen dritter, vierter und beliebiger Ordnung durch Flächenbündel niederer Ordnung.* Mathem. Annalen, vol. 1, pag. 455.

13. Ora suppongasi data una superficie generale del 3.° ordine. Come è noto (*), essa può sempre essere generata mediante una stella di raggi e una rete di quadriche proiettive fra loro. Sia A il centro della stella e B, C, P_1, $P_2, \ldots P_6$ gli otto punti-base della rete. Ad un raggio qualunque a della stella corrisponde nella rete una quadrica F, la quale può sempre imaginarsi generata da due stelle reciproche. I centri di queste due stelle possono essere scelti ad arbitrio; quindi per essi possono assumersi i due punti B e C. Per determinare la reciprocità fra le stelle medesime, basta prendere un punto qualunque P su F e al raggio BP della stella (B) far corrispondere nella stella (C) un piano qualsiasi passante per la retta CP (**). Come punto P prendasi uno qualsivoglia dei punti-base P_1, $P_2, \ldots P_6$, per esempio P_1, e al raggio BP_1 di (B) facciasi corrispondere in (C) il piano CP_1P_2. Così resta determinata la reciprocità fra le due stelle (B) e (C) in modo da generare la quadrica F. Variando il raggio a nella stella (A), varia nella rete la quadrica corrispondente F; ma siccome questa passa sempre per i punti B, C, P_1, $P_2, \ldots P_6$, così essa può sempre imaginarsi generata da due stelle aventi i centri nei punti B e C e di cui la reciprocità sia determinata scegliendo come elementi corrispondenti quelli già fissati, cioè la retta BP_1 e il piano CP_1P_2. Quindi si può concludere:

a) Ogni raggio della stella (A) determina una reciprocità fra le due stelle (B) e (C).

Prendasi ad arbitrio un raggio b nella stella (B). Una quadrica qualunque della rete data incontra la retta b, oltre il punto B in un punto X. Questa quadrica viene generata da una determinata reciprocità fra le due stelle (B) e (C) (quando ben inteso restino fissi come si è supposto sopra i due elementi corrispondenti BP_1 e CP_1P_2): quindi al raggio BX di (B) corrisponde in (C) un piano determinato passante per il punto X. Così si ha:

1.° Per mezzo della retta b di (B), ad ogni quadrica della rete data corrisponde un piano nella stella (C).

Sia γ un piano qualunque della stella (C): esso incontra la retta b in un punto X, per cui passano infinite quadriche della rete formanti un fascio. Fra queste quadriche ve n'ha una ed una sola generata da una tale reciprocità fra le due stelle (B) e (C), che in essa la retta b e il piano γ sono elementi

(*) Reye, loc. cit.

(**) Schröter: *Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung als erzeugnisse proiektivischer Gebilde*, pag. 461.

corrispondenti. Per dimostrar ciò si ricordi (*) che data una quadrica F, presi sopra di essa due punti qualsivogliano B e C come centri di due stelle e stabilita la reciprocità fra queste in modo che siano elementi corrispondenti la retta BP_1 e il piano CP_1P_2, essendo P_1 un punto qualunque di F e CP_1P_2 un piano qualunque condotto per CP_1, il piano che nella stella (C) corrisponde ad un raggio b dato in (B), è il piano CXY, dove X è il punto d'incontro, oltre B, di b con F ed Y il punto in cui la retta r, comune ai piani CP_1P_2 e bP_1, incontra, oltre P_1, la quadrica F. Quindi se al raggio b corrisponde il piano dato γ, con questo deve coincidere il piano CXY, epperò si vede che la quadrica della rete, generata da una tale reciprocità fra le due stelle (B) e (C), che in essa siano corrispondenti la retta b e il piano γ, passa per il punto Y, in cui questo piano è incontrato dalla retta r, punto che è determinato quando sono dati b e γ. La quadrica che si cerca deve dunque passare per i due punti X ed Y; inoltre appartiene ad una rete data; quindi è unica; epperò:

2.° Per mezzo della retta b di (B), ad ogni piano della stella (C) corrisponde una quadrica nella rete data.

Nella rete data prendasi un fascio di quadriche; a questo corrisponde nella stella (C), per mezzo della retta b, un inviluppo di piani tale che per ogni punto di b, e quindi anche per ogni retta del piano bC, la quale contenga il punto C, passa un sol suo piano, perchè per quel punto di b passa una sola superficie del fascio considerato. Il piano bC poi non appartiene all'inviluppo, perchè se vi appartenesse, nel fascio dato dovrebbe esistere una quadrica generata da una reciprocità fra le stelle (B) e (C), nella quale la retta b e il piano γ fossero elementi corrispondenti; quindi la quadrica stessa conterrebbe la retta b, ciò che è impossibile, il fascio di quadriche essendo stato preso ad arbitrio nella rete. Dunque il piano bC non appartiene all'inviluppo; inoltre per ogni sua retta condotta per C passa un sol piano dell'inviluppo stesso. Questo è adunque un fascio, epperò:

3.° Per mezzo della retta b di (B), ad un fascio di quadriche della rete data corrisponde nella stella (C) un fascio di piani.

In virtù delle ultime proprietà dimostrate 1.°, 2.° e 3.°, si ha che per mezzo della retta b di (B) resta stabilita una corrispondenza omografica fra la stella di piani (C) e la rete di quadriche. Ma questa è proiettiva alla stella di raggi (B); dunque le due stelle (B) e (C) sono reciproche, epperò:

b) Ogni raggio della stella (B) determina una reciprocità fra le due stelle (C) ed (A).

(*) Schröter: *Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung*, etc., pag. 461.

Dalle proprietà *a*) e *b*), tenendo presenti i due teoremi dimostrati nel n.° 7, segue che per mezzo della data superficie del 3.° ordine si può stabilire fra le tre stelle (A), (B), (C) una correlazione di seconda specie, che generi la superficie stessa. Dunque:

I. « Una superficie generale del 3.° ordine può essere generata da tre « stelle di raggi in correlazione di seconda specie. »

Il centro della stella di raggi e due degli otto punti-base della rete proiettiva di quadriche, che insieme a quella stella genera una data superficie del 3.° ordine, possono essere scelti ad arbitrio su questa superficie (*) Quindi, in virtù di quanto precede, si ha ancora:

II. « Tre punti arbitrari di una superficie generale del 3.° ordine pos- « sono essere scelti come centri di tre stelle di raggi in correlazione di se- « conda specie tale che esse generino la superficie data. »

Dati 19 punti dello spazio, si prendano tre qualsivogliano di essi A, B, C, come centri di tre stelle di raggi. Detti P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 altri cinque dei 19 punti dati e indicati con 1, 2, 3,... 11 i rimanenti, è determinata e si sa costruire (10) la correlazione di seconda specie fra le stelle (A), (B), (C), che ha come neutre le cinque coppie di raggi:

$$(BP_1,\ CP_1),\quad (BP_2,\ CP_2),\quad (BP_3,\ CP_3),\quad (BP_4,\ CP_4),\quad (BP_5,\ CP_5),$$

e come corrispondenti i raggi delle undici terne:

$$(A1,\ B1,\ C1),\quad (A2,\ B2,\ C2),\ldots\quad (A11,\ B11,\ C11).$$

Quindi:

III. « Per 19 punti arbitrari dello spazio si può far passare una su- « perficie generale del 3.° ordine ed una soltanto. »

Individuata nel modo anzidetto la correlazione di seconda specie fra le tre stelle di raggi (A), (B), (C), prendasi in una qualunque di queste, per esempio nella stella (A), un raggio a e costruiscansi i due punti in cui questo incontra la quadrica generata dalla correlazione di prima specie fra le altre due stelle (B) e (C) corrispondente al raggio stesso. I due punti così ottenuti appartengono alla superficie del 3.° ordine individuata dai 19 punti dati. Facendo variare la retta a nella stella (A), questa superficie resta in tal modo costruita per punti.

Pavia, 15 Aprile 1894.

(*) Reye, loc. cit.

I gruppi continui proiettivi semplicemente infiniti nello spazio ordinario.

(*Del prof.* Giulio Pittarelli, *a Roma.*)

Nelle opere del prof. Lie:

Vorlesungen über Differentialgleichungen, etc.,

Vorlesungen über continuirliche Gruppen, edite tutt'e due dal dottore Scheffers,

Theorie der Transformationsgruppen, edita in collaborazione del professore F. Engel,

si trovano numerosi esempi ed applicazioni di gruppi proiettivi nel piano e nello spazio. Ma nella III.ᵉ Abtheilung del III.° Abschnitt di quest'ultima opera è detto espressamente, a pag. 179, non esser nelle vedute dell'Autore di trattare i gruppi proiettivi nello spazio a tre dimensioni in maniera così compiuta come nel piano. E poco dopo, a pag. 182, soggiunge l'Autore: « Se noi avessimo già ridotte ai diversi tipi le trasformazioni infinitesimali dello spazio, « come già facemmo nel piano a pag. 85, sarebbe assai facile in generale di « trovare tutte le curve gobbe, le quali ammettano almeno una trasformazione « infinitesimale proiettiva, ecc. »

Lo scopo della presente Memoria è appunto di risolvere il problema precedente, sperando così di recare una qualche contribuzione, benchè piccola, ad una teoria che, creata dal Lie co' suoi lavori, fornisce anche materia a corsi universitari come quello del Klein (semestre d'estate del 1893), e del nostro Cremona (anno scolastico corrente).

A luogo opportuno ed a pie' di pagina saranno citati altri lavori che abbiano attinenza col soggetto.

§ 1. Formole generali in coordinate omogenee.

Una trasformazione infinitesimale proiettiva dello spazio a tre dimensioni in coordinate omogenee è definita dal sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{1}$$

ovvero dal simbolo:

$$Xf = \sum_i \sum_k a_{ik} x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}, \tag{2}$$

dove f è una funzione qualunque delle coordinate.

Le equazioni finite del gruppo generato da quella trasformazione infinitesimale, cioè le espressioni delle x in funzione di t, sono gl'integrali del sistema (1) con le condizioni iniziali che per $t = 0$ sia $x_i = x_i^0$, essendo x_i^0 le coordinate del punto iniziale x^0.

Le (1) dànno le variazioni delle coordinate sotto la forma:

$$\delta x_i = \delta t \sum_k a_{ik} x_k, \tag{3}$$

mentre, per la funzione f,

$$\delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = \delta t \sum_i \sum_k a_{ik} x_k = \delta t Xf. \tag{3bis}$$

Sia ora:

$$\sum x \xi = \xi_x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

l'equazione di un piano ξ.

La trasformazione Xf applicata ai punti di questo piano li condurrà nei punti del piano $\xi + \delta \xi$; abbiamo cioè:

$$(\xi + \delta \xi)_{x + \delta x} = \xi_x + \xi_{\delta x} + x_{\delta \xi} + \delta \xi_{\delta x} = 0.$$

Trascurando l'ultimo termine del 2.° ordine, se vogliamo che tutta l'espressione precedente si riduca a $\xi_x = 0$, dobbiamo porre identicamente, qualunque sia x,

$$\xi_{\delta x} + x_{\delta \xi} \equiv 0. \tag{4}$$

Ponendo per δx_i i valori (3) possiamo scrivere:

$$\sum_i \xi_i \sum_k a_{ik} x_k \delta t + \sum_i x_i \delta \xi_i \equiv 0,$$

e sommando prima rispetto a k, poi rispetto ad i, abbiamo:

$$\sum_i x_i(\delta\xi_i + \delta t \sum_k a_{ki}\xi_k) \equiv 0.$$

Onde si traggono le variazioni delle coordinate ξ_i

$$\delta\xi_i = -\delta t \sum_k a_{ki}\xi_k, \tag{5}$$

le equazioni differenziali

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\sum_k a_{ki}\xi_k, \tag{6}$$

ed il simbolo

$$\Xi\varphi = -\sum_i\sum_k a_{ki}\xi_k \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}. \tag{7}$$

I sistemi (1) e (6) di equazioni differenziali si dicono, nei trattati, sistemi aggiunti, e si ha la relazione:

$$0 = \sum x_i \frac{d\xi_i}{dt} + \sum \xi_i \frac{dx_i}{dt} = \sum \frac{d}{dt}(\xi_i x_i), \quad \text{ossia} \quad \xi_x = 0,$$

perchè x e ξ si appartengono. I loro integrali dànno, in funzion di t, le coordinate dei punti della trajettoria di un punto iniziale x^0, ovvero le coordinate dei piani tangenti che, a partire da uno iniziale ξ^0, toccano una sviluppabile, osculatrice della trajettoria, se ξ_0 e x_0 si appartengono, come supponiamo.

Dinotiamo con z_{ij} le coordinate di un raggio xy e con ζ_{ij} quelle di un asse $\xi\eta$. Se per y prendiamo il punto $x+\delta x$ e per η il piano $\xi+\delta\xi$, abbiamo, a meno del fattore δt,

$$z_{ij} = x_i \sum_k a_{jk}x_k - x_j \sum_k a_{ik}x_k \tag{8}$$

$$\zeta_{ij} = \xi_j \sum_k a_{ki}\xi_k - \xi_i \sum_k a_{kj}\xi_k. \tag{9}$$

Le rette (8) e (9) furon dette da Chasles *caratteristiche*, rispettivamente, del punto x e del piano ξ nel movimento infinitamente piccolo d'un corpo solido libero nello spazio.

Si potrebbero anche assegnare le formole per la trasformazione infinitesimale dei raggi e degli assi partendo dalle trasformazioni dei punti e dei piani. Così al raggio $p+\delta p$ ed all'asse $\pi+\delta\pi$ spetteranno le coordinate che si traggono dalle due matrici

$$\begin{Vmatrix} x_1+\delta x_1 \ldots & x_4+\delta x_4 \\ y_1+\delta y_1 \ldots & y_4+\delta y_4 \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} \xi_1+\delta\xi_1 \ldots & \xi_4+\delta\xi_4 \\ \eta_1+\delta\eta_1 \ldots & \eta_4+\delta\eta_4 \end{Vmatrix}.$$

[Per non ingenerar confusione chiamerò z o ζ le caratteristiche e p o π le rette qualunque xy o $\xi\eta$.]

Cosicchè, per esempio, trascurando gl'infinitesimi del 2.° ordine:

$$p_{ij}+\delta p_{ij}=\begin{vmatrix} x_i+\delta x_i & x_j+\delta x_j \\ y_i+\delta y_i & y_j+\delta y_j \end{vmatrix}=p_{ij}+x_i\delta y_j-y_i\delta x_j-x_j\delta y_i+y_j\delta x_i,$$

onde poi

$$\delta p_{ij}=x_i\delta y_j-y_i\delta x_j-x_j\delta y_i+y_j\delta x_i, \tag{10}$$

e sostituendo alle variazioni delle coordinate le loro espressioni e passando alle equazioni differenziali, abbiamo un sistema di equazioni differenziali il cui tipo è:

$$\frac{dp_{ij}}{dt}=a_{j1}p_{i1}-a_{i1}p_{j1}+a_{j2}p_{i2}-a_{i2}p_{j2}+a_{j3}p_{i3}-a_{i3}p_{j3}+a_{j4}p_{i4}-a_{i4}p_{j4}. \tag{10$^{\text{bis}}$}$$

Nei secondi membri di queste equazioni figureranno soltanto cinque delle 6 coordinate, mancherà cioè la coordinata p_{hk} se hk è una combinazione d'indici differenti da ij.

Si ottengono formole più semplici ed immediate partendo dalle coordinate z_i $(i=1,\dots, 6)$ di Klein legate dalla relazione fondamentale

$$\sum_i z_i^2=z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2+z_5^2+z_6^2. \tag{11}$$

Da questa segue per differenziazione:

$$\sum_i z_i\,dz_i=z_1\,dz_1+\cdots+z_6\,dz_6=0. \tag{12}$$

Siano ora le formole di trasformazione infinitesimale proiettiva tra le z

$$\frac{dz_i}{dt}=\sum_k \alpha_{ik}z_k \qquad (i,\ k=1,\dots,\ 6). \tag{13}$$

Dovendo esser verificata la (12) qualunque sia z, avremo l'equazione identica:

$$\sum_i z_i\sum_k \alpha_{ik}z_k=\sum_{ik}\alpha_{ik}z_iz_k=0.$$

Or questa equazione si deve ridurre alla (11), la sola identica esistente tra le coordinate di una retta qualunque dello spazio; dunque avremo:

$$\alpha_{11}=\alpha_{22}=\cdots=\alpha_{66}=\alpha, \tag{14}$$

per esempio, indi

$$\alpha_{ik}+\alpha_{ki}=0. \tag{15}$$

Da ciò si deduce che il determinante dei coefficienti è gobbo, ed il numero di essi da 36 si riduce a 16, tanti quanti sono i coefficienti della trasformazione (1).

Se una funzione Ω delle coordinate di punti, di rette o di piani rimane invariata per la trasformazione, essa dovrà riprodursi moltiplicata per un fattore indipendente dalle coordinate. Sia, per esempio, Ω funzione di x: si può porre, a meno d'infinitesimi del 2.° ordine,

$$\Omega(x+\delta x)=\Omega(x)+\sum_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}\delta x_i.$$

Dovendo il secondo membro ridursi alla funzione Ω, avremo, tenendo presente la (3^{bis}), e dinotando con ρ un fattore:

$$\sum_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}\delta x_i=\delta t X\Omega=\rho\Omega, \tag{16}$$

cosicchè allora viene appunto

$$\Omega(x+\delta x)=(1+\rho)\Omega(x).$$

Ricordiamo poi che se un ente ammette la trasformazione infinitesimale Xf ammetterà tutte quelle del gruppo generato da Xf (*).

Se la funzione Ω è il primo membro dell'equazione di un piano ξ *invariante* dovremo avere qualunque sia x

$$\rho\xi_x=\{\xi_1\sum_k a_{ik}x_k+\cdots\}\delta t.$$

Di qui ponendo $-\rho=\sigma\delta t$, avremo per le coordinate di un piano invariante ξ

$$-\sigma\xi_i=\sum_k a_{ki}\xi_k \text{ (**)}. \tag{17}$$

E così per le coordinate di un punto invariante x

$$s x_i=\sum_k a_{ik}x_k. \tag{18}$$

Le (17) e (18) forniscono una stessa equazione in $\sigma=(-s)$ di 4.° grado

$$\bar{\Delta}(\sigma)=\begin{vmatrix} a_{11}-\sigma & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\sigma & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\sigma & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\sigma \end{vmatrix}=0.$$

(*) Vedasi: LIE, *Vorlesüngen über Differentialgleichungen,* etc., pag. 72, Satz 9.

(**) Il segno $-$ è posto perchè così esso si presenta nella (6), ed è molto giovevole mantenerlo; come si vedrà sempre meglio in seguito.

Consideriamo l'omografia tra due spazi S ed S' sovrapposti definita dall'equazione [connesso (1, 1)]

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i \xi'_k = 0, \tag{19}$$

ovvero separatamente in coordinate di punti e di piani

$$s x'_i = \sum_k a_{ik} x_k \tag{20}$$

$$-\sigma \xi_i = \sum_k a_{ki} \xi'_k. \tag{21}$$

È notissimo allora che l'equazione $\Delta(\sigma) = 0$ serve a determinare i punti ed i piani uniti dell'omografia (19).

Ad ogni tipo d'omografia (20) corrisponderà un tipo d'equazioni differenziali (1) formate sostituendo ad $s x'_i$ le quantità $\frac{dx_i}{dt}$, ed in pari tempo ad ogni conseguente tipo duale d'omografia (21) corrisponderà un tipo d'equazioni differenziali (6) formate sostituendo a $\sigma \xi$ le quantità $\frac{d\xi'_i}{dt}$, e poi scrivendo ξ in luogo di ξ'. Così facendo gl'integrali dei sistemi aggiunti (1) e (6) saranno sempre, senz'altro, determinati con la condizione $\xi_x = 0$.

Il determinante $\Delta(\sigma)$ fu chiamato determinante caratteristico da Cauchy, ed è pur noto l'uso che si fa di esso per l'integrazione dei sistemi (1) e (6).

Si vede dunque che i due problemi di classificare le omografia tra due spazi sovrapposti e d'integrare un sistema di equazioni differenziali lineari di 1.° ordine ed omogenee rientrano l'uno nell'altro.

Chiamerò l'omografia (19) *aggiunta* ai sistemi differenziali (1) e (6) e propriamente l'omografia (20) aggiunta al sistema (1) e l'omografia (21) aggiunta al sistema (6).

La classificazione delle omografie in uno spazio a un numero qualunque di dimensioni come teoria di forme bilineari si trova sostanzialmente nel lavoro fondamentale del Weierstrass: *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen,* Kön. Akad. zu Berlin, 1868. Ma la traduzione geometrica dei risultati analitici del prof. Weierstrass si deve al mio amico Segre, il quale dedicò due Memorie al soggetto: l'una *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni,* nel vol. 19, serie 3.ª delle Memorie dei Lincei, 1884; l'altra *Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale ecc.* nel tom. 37, serie 2.ª delle Memorie dell'Accademia di Torino, 1885. In quello stesso anno 1884 anche il prof. Loria nel vol. 22 del Giornale di Battaglini si occupò della teoria in quistione nella Nota: *Sulle corrispondenze proiettive tra due piani e tra due spazi,* dando una completa classificazione delle omografie.

Si comprende come partendo dalle formole di Weierstrass e mettendo a profitto i risultati geometrici, specialmente di Segre, io avrei potuto giungere a dar le forme canoniche dei secondi membri di (20) e (21) ovvero dei sistemi (1) e (6) per eseguirne poi l'integrazione. Ed io avevo cominciato a fare i calcoli opportuni, allorchè il mio collega ed amico Castelnuovo m'additò la Memoria del prof. Predella: *Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni,* serie 2.ª, vol. 17, 1889, di questi Annali, nella quale la quistione è risoluta. Apprendesi anzi da quella Memoria che anche il Jordan nel tomo 73 dei Comptes Rendus a pag. 787 in una Nota: *Sur la résolution des équations différentielles linéaires,* mostrò la possibilità di giungere ad equazioni del tipo

$$\frac{dy_1}{dt}=\sigma y_1,\qquad \frac{dz_1}{dt}=\sigma z_1+y_1,\ldots\qquad \frac{dw_1}{dt}=\sigma w_1+v_1,$$

dove σ è radice multipla del determinante caratteristico annullante minori di dato ordine. Il risultato di Jordan è analiticamente importante; ma sono i lavori geometrici su riferiti quelli che permettono, come si vedrà, di delineare in un modo molto netto la posizione della curva integrale del sistema d'equazioni differenziali, non soltanto rispetto agli enti fondamentali dell'omografia, ma anche rispetto ad altri enti che si mutano in sè stessi per le trasformazioni del gruppo.

Perchè il lettore possa fare gli opportuni riscontri avverto ch'io adopreró così il simbolo del Segre, ch'è in sostanza quello immaginato dal Weiler (*), per indicare la distribuzione dei divisori elementari del determinante caratteristico, come il corrispondente del Predella. Per comprendere il simbolo adoperato dal Segre occorrerebbe un discorso un po' lungo; laddove il simbolo del Predella è di più facile intelligenza. Il Predella usa i numeri 0, 1, 2 per dinotare un punto unito (dimensione 0), una retta unita (dimensione 1), un piano unito (dimensione 2). Se due enti si appartengono o coincidono i loro simboli saranno chiusi tra ( ). Per esempio il simbolo [(0 0) 0 0] indica l'esistenza di 4 punti uniti di cui 2 coincidenti; gli corrisponde il simbolo [2 1 1] di Segre che mostra due radici semplici ed una doppia del determi-

(*) *Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades.* Math. Ann., Bd. 7.

nante caratteristico che non ne annulla i subdeterminanti. Ancora nel simbolo [1 0 0] di PREDELLA è messa in chiaro l'esistenza di un raggio unito e due punti uniti fuori di esso; a quel simbolo corrisponde l'altro di SEGRE [(1 1) 1 1] che dinota l'esistenza di due punti uniti forniti da due radici semplici del determinante $\Delta(\sigma)$ alle quali si riferisce il gruppo 1 1, e l'esistenza di una radice doppia che per l'annullarsi dei subdeterminanti del 3.° ordine fornisce non più un punto unito doppio, ma infiniti situati sopra un raggio, al quale si riferisce il gruppo (1 1) ecc. Adoprerò pure i simboli di WEILER, nella classificazione fatta per le coordinate di rette modificati da SEGRE in ciò che questi usa le parentesi { } invece delle [ ] ecc.

Notisi infine che le omografie definite dalle equazioni integrali avranno la stessa distribuzione degli elementi uniti dell'omografia aggiunta alle equazioni differenziali, ma le radici e gl'invarianti assoluti saranno funzioni esponenziali delle grandezze $\sigma_i t$, come mostrerà l'integrazione.

§ 2. I 13 tipi di gruppi.

A) LE TRAJETTORIE SONO CURVE SGHEMBE (E DUALMENTE).

N. 1: $[1\ 1\ 1\ 1] \equiv [0\ 0\ 0\ 0]$:

Omografie aggiunte (*):

$$x'_1 = \sigma_1 x_1, \qquad x'_2 = \sigma_2 x_2, \qquad x'_3 = \sigma_3 x_3, \qquad x'_4 = \sigma_4 x_4$$
$$-\xi_1 = \sigma_1 \xi'_1, \qquad -\xi_2 = \sigma_2 \xi'_2, \qquad -\xi_3 = \sigma_3 \xi'_3, \qquad -\xi_4 = \sigma_4 \xi'_4.$$

Le quattro radici sono distinte; si hanno quattro punti uniti e quattro piani uniti che formano un tetraedro, tre coppie di rette unite che ne sono gli spigoli.

Le equazioni differenziali si formano e s'integrano subito. Chiamando x^0 e ξ^0 il punto ed il piano iniziale si hanno le:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 = x_1^0 e^{\sigma_1 t}, & x_2 = x_2^0 e^{\sigma_2 t}, & x_3 = x_3^0 e^{\sigma_3 t}, & x_4 = x_4^0 e^{\sigma_4 t} \\ \xi_1 = \xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_2 = \xi_2^0 e^{-\sigma_2 t}, & \xi_3 = \xi_3^0 e^{-\sigma_3 t}, & \xi_4 = \xi_4^0 e^{-\sigma_4 t}, \end{array}\right\} \quad (1)$$

(*) Sopprimo il fattore di proporzionalità nelle x, ma lo faccio eguale a -1 nelle ξ per poter passare subito alla equazione differenziale (6) del § 2.

come integrali dei sistemi

$$\frac{dx_i}{dt} = \sigma_i x_i, \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = -\sigma_i \xi_i. \tag{2}$$

Bisogna poi distinguere due casi.

1.º caso corrispondente al simbolo $\{11\ 11\ 11\}$, (caso generale).

Le coordinate della caratteristica di x e di quella di ξ sono per le (2):

$$z_{ij} = (\sigma_j - \sigma_i) x_i x_j, \qquad \zeta_{ij} = (\sigma_i - \sigma_j)\xi_i \xi_j. \tag{3}$$

Eliminando il prodotto $x_1 x_2 x_3 x_4$ o l'altro $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ abbiamo le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{z_{12}\, z_{34}}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_4)} = \frac{z_{23}\, z_{14}}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_4)} = \frac{z_{31}\, z_{24}}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_4)} \\ \frac{\zeta_{12}\, \zeta_{34}}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_4)} = \frac{\zeta_{23}\, \zeta_{14}}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_4)} = \frac{\zeta_{31}\, \zeta_{24}}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_4)}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

che rappresentano, come è notissimo, il complesso tetraedrale di Reye. Il piano ξ^0, essendo osculatore alla trajettoria nel punto x^0, avrà le coordinate espresse da:

$$\xi_1^0 = \quad (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_4)(\sigma_3 - \sigma_4) x_2^0 x_3^0 x_4^0 = \rho_1 \frac{x_1^0 x_2^0 x_3^0 x_4^0}{x_1^0}$$

$$\xi_2^0 = -(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_4)(\sigma_3 - \sigma_4) x_1^0 x_3^0 x_4^0 = \rho_2 \frac{x_1^0 x_2^0 x_3^0 x_4^0}{x_2^0}$$

$$\xi_3^0 = \quad (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_4)(\sigma_2 - \sigma_4) x_1^0 x_2^0 x_4^0 = \rho_3 \frac{x_1^0 x_2^0 x_3^0 x_4^0}{x_3^0}$$

$$\xi_4^0 = -(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) x_1^0 x_2^0 x_3^0 = \rho_4 \frac{x_1^0 x_2^0 x_3^0 x_4^0}{x_4^0},$$

dove ρ_i sono i prodotti delle differenze di $\sigma_h, \sigma_j, \sigma_k$. Avremo dunque a meno del fattore $x_1^0 x_2^0 x_3^0 x_4^0$, le

$$\xi_i^0 x_i^0 = \rho_i. \tag{5}$$

Ed allora le (1) dànno successivamente, in forza della (5),

$$x_i = \frac{\rho_i}{\xi_i^0} e^{\sigma_i t} = \frac{\rho_i}{\xi_i}, \tag{6}$$

che definiscono la ben nota reciprocità per la quale ad un piano α di equazione $\alpha_x = 0$ corrisponde la superficie di 3.ª classe:

$$\sum \frac{\rho_i \alpha_i}{\xi_i} = 0,$$

con quattro piani doppi, tangenti secondo una conica la superficie, nelle facce del tetraedro fondamentale; e ad un punto a di equazione $a_\xi = 0$ la superficie di 3.° ordine:

$$\sum \frac{\rho_i a_i}{x_i} = 0,$$

con quattro punti doppi conici nei vertici dello stesso tetraedro.

Il complesso tetraedrale (4) dipende dalle sole σ; esso è invariante rispetto a tutte le trasformazioni del gruppo. Come prova di ciò si osservi che la trasformazione infinitesimale di una retta p è data dalle formole:

$$\frac{dp_{ij}}{dt} = (\sigma_i + \sigma_j) p_{ij}. \tag{7}$$

Di qui segue, trascurando i termini del 2.° ordine:

$$(p_{ij} + \delta p_{ij})(p_{hk} + \delta p_{hk}) = p_{ij} p_{hk} + (\sigma_i + \sigma_j + \sigma_h + \sigma_k) p_{ij} p_{hk} \delta t;$$

onde se ij, hk sono combinazioni binarie differenti la somma delle σ è eguale a $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4$, ed il secondo membro dell'equazione precedente si riduce al termine $p_{ij} p_{hk}$ moltiplicato pel fattore, che non muta, $1 + (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)\delta t$.

Se invece, per un dato valor finito di t, cioè per una data trasformazione finita del gruppo, consideriamo come corrispondenti i due punti x ed x^0 nei due spazi S ed S^0 sovrapposti (e dualmente) trasformati l'uno dell'altro, rimettendo in vista nelle (1) il fattore di proporzionalità ρ, avremo le equazioni dell'omografia:

$$\rho x_1 = x_1^0 e^{\sigma_1 t}, \qquad \rho x_2 = x_2^0 e^{\sigma_2 t}, \qquad \rho x_3 = x_3^0 e^{\sigma_3 t}, \qquad \rho x_4 = x_4^0 e^{\sigma_4 t}, \tag{8}$$

ed i valori di ρ che dànno gli elementi uniti, che sono poi i vertici (e le facce) dello stesso tetraedro, sono:

$$\rho = e^{\sigma_1 t}, \qquad e^{\sigma_2 t}, \qquad e^{\sigma_3 t}, \qquad e^{\sigma_4 t}.$$

Il determinante della sostituzione (8) è poi $e^{(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)t}$ sempre diverso da zero. Onde si conclude che l'omografia non è mai degenere, come osservò anche il Torelli nella sua Nota: *Sul gruppo monomio individuato da una trasformazione infinitesimale proiettiva* (*). E mentre gl'invarianti dell'omografia aggiunta sono i rapporti $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_4$, quelli della (8) sono invece i rapporti $e^{\sigma_1 t} : e^{\sigma_2 t} : e^{\sigma_3 t} : e^{\sigma_4 t}$.

(*) Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, gennaio 1884; vedi un'altra Nota nei Rendiconti dell'Accad. di Napoli, maggio 1894: *Sulle equazioni finite del gruppo monomio*, ecc.

È noto pure come si compongano coi primi rapporti i rapporti anarmonici fondamentali dei quattro punti nei quali la caratteristica del punto x incontra i quattro piani uniti (e dualmente). Perchè si ha per esempio, chiamando α uno dei suddetti rapporti anarmonici

$$\alpha = (1\ 2\ 3\ 4) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3} : \frac{\sigma_1 - \sigma_4}{\sigma_2 - \sigma_4} = -\frac{z_{31}\, z_{24}}{z_{23}\, z_{14}},$$

per le (4) ecc. Inoltre poi il quoziente

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3}$$

è il rapporto anarmonico formato dal punto di contatto della tangente coi punti comuni alle tre facce $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ del tetraedro fondamentale, ecc. (*).

L'omografia (8) dà luogo invece ad un altro complesso di rette congiungenti coppie di punti corrispondenti come x ed x^0. Le coordinate delle congiungenti e l'equazione del complesso si ottengono dalle (3) e (4) mutandovi da per tutto le differenze $\sigma_i - \sigma_j$ nelle $e^{\sigma_i t} - e^{\sigma_j t}$.

Le equazioni (1) individuano famiglie di curve e di sviluppabili osculatrici diversissime, algebriche o trascendenti, che chiameremo curve o sviluppabili W (**); ma è facile vedere come tutte si comportino rispetto agli elementi uniti della trasformazione.

Supponiamo $\sigma_4 > \sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$, e scriviamo le (1) sotto forma di rapporti come segue:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1^0 : x_2^0\, e^{(\sigma_2 - \sigma_1)t} : x_3^0\, e^{(\sigma_3 - \sigma_1)t} : x_4^0\, e^{(\sigma_4 - \sigma_1)t}$$

ovvero:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1^0\, e^{(\sigma_1 - \sigma_4)t} : x_2^0\, e^{(\sigma_2 - \sigma_4)t} : x_3^0\, e^{(\sigma_3 - \sigma_4)t} : x_4^0.$$

Dalla prima forma di questi rapporti si vede che per $t = -\infty$ la curva passa pel punto $\xi_1 = 0$ di coordinate (1, 0, 0, 0), e dalla seconda si vede che per $t = \infty$ la curva passa pel punto $\xi_4 = 0$ di coordinate (0, 0, 0, 1).

(*) Vedi LINDEMANN, *Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung*, nel vol. 7 dei Math. Annalen, Memoria che contiene numerosi ed importanti risultati, e che avrò occasione di citare insieme alla prima parte del 2.° volume di CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorles. über die Geometrie.*

(**) W iniziale di «Wurf» (di STAUDT) quaderna d'elementi di dato rapporto anarmonico. Vedansi, per la ragion della denominazione, le Lezioni litografate del prof. KLEIN, Göttingen, 1893, dal titolo: *Einleitung in die Köhere Geometrie I.*

Lo stesso ragionamento applicato alle ξ mostra che la curva è osculata, per $t=-\infty$, dal piano $x_4=0$ nel punto $\xi_1=0$, e per $t=\infty$ è osculata dal piano $x_1=0$ nel punto $\xi_4=0$. Esprimendo poi per mezzo delle (1) le coordinate z_{ij} o ζ_{ij} della tangente in funzione di t, date dalle (3), si deduce allo stesso modo che lo spigolo ξ_1, $\xi_2\equiv x_3$, $x_4=0$ è tangente nel punto $t=-\infty$, e lo spigolo ξ_3, $\xi_4\equiv x_1$, $x_2=0$ è tangente nel punto $t=\infty$.

Non supponendo relazione alcuna tra le σ_i, pur essendo queste distinte, nessuna quadrica e nessun complesso lineare è trasformato in sè stesso, come lo è invece il complesso tetraedrale più generale

$$a z_{23} z_{14} + b z_{31} z_{24} + c z_{12} z_{34} = 0,$$

la cui equazione in virtù della nota identità $z_{23}z_{14}+z_{31}z_{24}+z_{12}z_{34}=0$ si può ridurre a forma binomia, per esempio, alla

$$(b-a) z_{31} z_{24} + (c-a) z_{12} z_{34} = 0.$$

2.° caso corrispondente al simbolo $\{(\overline{1\,1})\ 1\ 1\ 1\ 1\}$.

Proponiamoci invece di determinare quelle quadriche e quei complessi lineari che, per certe relazioni tra le σ, possano trasformarsi in sè, e di trovare quelle relazioni. Se $F=a_x^2$ è, in notazione simbolica, una quadrica così fatta, applicando il criterio (16) del § 1 dovremo avere l'identità

$$a_x a_{dx} = \rho a_x^2, \tag{9}$$

se per dx_i si pongono i valori (2). Ciò porta a concludere che devono essere nulli i coefficienti a_{ii} e due coppie di coefficienti a_{hk} corrispondenti a due combinazioni hk d'indici differenti (altrimenti le σ dovrebbero essere eguali), e che supposta diverso da zero la coppia a_{14} a_{23} l'identità (9) che in questo caso si riduce alla

$$a_{14}(\sigma_1+\sigma_4)x_1x_4 + a_{23}(\sigma_2+\sigma_3)x_2x_3 = \rho(a_{14}x_1x_4 + a_{23}x_2x_3),$$

porge la relazione tra le σ

$$\sigma_1+\sigma_4 = \sigma_2+\sigma_3 \ (*). \tag{10}$$

In forza della relazione (10) le superficie del fascio-schiera

$$F(x)\equiv x_1x_4 + m x_2 x_3 = 0 \quad \text{ovvero} \quad \Phi(\xi)\equiv \xi_1\xi_4 + \mu\xi_2\xi_3 = 0, \tag{11}$$

(*) Si potrebbe supporre diversa da zero la sola coppia di coefficienti a_{ii}, a_{hk} per esempio a_{33}, a_{12}. In questo caso la quadrica è un cono $a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2=0$, e dev'essere $\sigma_1+\sigma_2=2\sigma_3$. Questo caso sarà esaminato al § 3 in coordinate non omogenee.

si mutano in sè stesse per tutte le trasformazioni del gruppo (1). Ma per le relazioni (7) e per la (10) anche il fascio di complessi lineari

$$p_{14}+kp_{23}=0 \quad \text{ovvero} \quad \pi_{23}+k\pi_{14}=0 \text{ (*)}, \tag{12}$$

si muta in sè, ed è il solo che abbia questa proprietà. Questo fascio di complessi ha per direttrici le rette unite $\xi_1, \xi_4=0$, $\xi_2, \xi_3=0$ che sono polari reciproche rispetto alle quadriche (11). E se $k=m$ le generatrici dell'iperboloide cui appartengono $\xi_1\xi_3$, $\xi_2\xi_4$ sono anche rette del complesso (12); se invece $k=-m$ apparterranno al complesso le rette del sistema $\xi_1\xi_2$, $\xi_3\xi_4$.

Applicando la trasformazione finita, per esempio alla quadrica (11), abbiamo, per (10),

$$x_1x_4+mx_2x_3=e^{(\sigma_1+\sigma_4)t}(x_1^0x_4^0+mx_2^0x_3^0),$$

cioè $F(x)=e^{(\sigma_1+\sigma_4)t}F(x^0)$. Volendosi invece, dal punto di vista dell'algebra, $F(x)=F(x^0)$, bisognerebbe annullare l'esponente di e, qualunque sia t. Ciò richiede le due condizioni:

$$\sigma_1+\sigma_4=0, \qquad \sigma_2+\sigma_3=0. \tag{13}$$

Allora le radici dell'equazione che dà i valori ρ in (8) sono reciproche, come dev'essere per un teorema sulle forme quadratiche che si mutano in sè stesse dovuto al Frobenius (vedi Segre, *Ricerche*, ecc.). Or noi possiamo sempre soddisfare a quelle due condizioni. Infatti dalla (10) si ha:

$$\sigma_1+\sigma_4=\sigma_2+\sigma_3=2\sigma,$$

per esempio, onde:

$$(\sigma_1-\sigma)+(\sigma_4-\sigma)=0, \qquad (\sigma_2-\sigma)+(\sigma_3-\sigma)=0. \tag{14}$$

Scrivendo le (1) dopo l'introduzione del fattore di proporzionalità $e^{\sigma t}$, così:

$$x_1:x_2:x_3:x_4=x_1^0e^{(\sigma_1-\sigma)t}:x_2^0e^{(\sigma_2-\sigma)t}:x_3^0e^{(\sigma_3-\sigma)t}:x_4^0e^{(\sigma_4-\sigma)t},$$

si vede ch'è lecito determinare σ con le condizioni (14) concordanti in virtù di (10).

Ponendo $k=\frac{\sigma_3-\sigma_2}{\sigma_4-\sigma_1}$ ovvero $k=\frac{\sigma_4-\sigma_1}{\sigma_3-\sigma_2}$ si hanno quei due complessi che furon detti dal Lindermann nella Memoria citata (pag. 75-77) « Rotationscomplexe » e « Translationscomplexe » per quei *movimenti* dello spazio che,

(*) Caporali e del Pezzo, *Introduzione alla teoria dello spazio rigato*, § 20, pag. 307 nelle *Memorie di Geometria* di Caporali.

in una determinazione metrica proiettiva, sono definiti come trasformazione in sè della quadrica fondamentale in modo che ciascun sistema di generatrici sia trasformato in sè stesso.

Le curve (1), situate allora sulle superficie $F(x)$ del fascio (11) contenenti i punti iniziali x^0 furon detti ivi dal Lindemann *eliche proiettive* (*). Esse sono le trasformate omografiche delle lossodromie della sfera.

Per provarlo consideriamo una qualunque delle quadriche $F(x)$ per es. quella passante pel punto (1, 1, 1, 1)

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0. \tag{15}$$

Questa quadrica è proiettata stereograficamente dal punto su di essa, $\xi_4 = 0$, sopra un piano rappresentativo i cui punti y li riferiamo a quel triangolo fondamentale ch'è sezione di esso piano coi piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, mediante le formole note

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 : y_2 : y_3 : \frac{y_2 y_3}{y_1}. \tag{16}$$

Sul piano rappresentativo l'omografia dello spazio individua un'omografia di simbolo [0 0 0], contenuta nella data, la cui espressione analitica è:

$$y_1 : y_2 : y_3 = y_1^0 e^{\sigma_1 t} : y_2^0 e^{\sigma_2 t} : y_3^0 e^{\sigma_3 t}, \tag{17}$$

e la curva rappresentata da queste equazioni è la proiezione stereografica della (1) situata sulla superficie (15). Supponiamo ora che la (15) sia una sfera, e che le (16) definiscano la proiezione stereografica in senso stretto, che sia cioè il piano rappresentativo parallelo al piano tangente in $\xi_4 = 0$ alla sfera. Su questo piano si ha in tal caso un'omografia della quale l'origine è un punto unito e gli altri due punti uniti sono i punti ciclici. Allora, com'è noto, le (17) definiscono una spirale logaritmica (**), alle cui tangenti compete la proprietà (metrico-proiettiva) d'inclinarsi ad angolo costante sui raggi vettori. Proiettando di nuovo sulla sfera, il fascio dei raggi vettori dà il fascio dei meridiani passanti pel centro di proiezione, e la spirale logaritmica dà una

(*) Vedi anche: *Vorles. über Geom.*, Bd. 2, th. 1.ª, pag. 336 e seg.

(**) Clebsch, *Vorles. über die Geom.* a pag. 979, 988 e seg. nel capitolo sui connessi. Vedasi poi l'esteso e fondamentale lavoro dei prof.[i] F. Klein e S. Lie pubblicato nel vol. 4 dei Math. Annalen, 1871: *Ueber diejenigen ebenen Curven welche ... in sich übergehen,* oltre alle due Note del 6 e 13 giugno 1870 nei Comptes Rendus dal titolo: *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces.* — Klein, *Einleitung in die höhere Geometrie I,* già citato.

curva che, per la notissima proprietà della conservazione degli angoli nella proiezione stereografica, taglia sotto lo stesso angolo i meridiani che incontra: e questa curva è la lossodromia.

3.° caso corrispondente al simbolo $\{(\overline{1\,1})\ (\overline{1\,1})\ 1\,1\}$.

Se anche la quadrica

$$x_1 x_2 + n x_3 x_4 = 0,$$

o il complesso

$$p_{12} + h p_{34} = 0,$$

dovessero mutarsi in sè stessi, sarebbe necessariamente

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3 + \sigma_4.$$

Questa relazione insieme all'altra del caso precedente

$$\sigma_1 + \sigma_4 = \sigma_2 + \sigma_3,$$

fornisce

$$\sigma_2 - \sigma_4 = \sigma_4 - \sigma_2,$$

cioè:

$$\sigma_2 = \sigma_4,$$

onde poi

$$\sigma_1 = \sigma_3;$$

il determinante caratteristico $\Delta(\sigma)$ avrebbe due coppie di radici eguali. Ma questo caso sarà esaminato più tardi al n.° 10. Adunque nel gruppo [1 1 1 1] non vi sono trasformazioni corrispondenti al simbolo $\{(\overline{1\,1})\ (\overline{1\,1})\ 1\,1\}$.

Per realizzare un tipo così fatto bisogna considerare un'omografia qualunque, per esempio la

$$x'_1 = \sigma_1 x_1, \qquad x'_2 = \sigma_2 x_2, \qquad x'_3 = \sigma_3 x_3, \qquad x'_4 = \sigma_4 x_4, \tag{18}$$

ed in coordinate di rette

$$p'_{ij} = \sigma_i \sigma_j p_{ij}.$$

La quadrica $x_1 x_4 + m x_2 x_3 = 0$ ed il complesso $p_{14} + k p_{23} = 0$ si mutano in sè stessi se

$$\sigma_1 \sigma_4 = \sigma_2 \sigma_3.$$

E se lo stesso avviene per la quadrica $x_1 x_2 + n x_3 x_4 = 0$ e pel complesso $p_{12} + h p_{34} = 0$ dev'essere

$$\sigma_1 \sigma_2 = \sigma_3 \sigma_4.$$

Da queste due relazioni tra le σ segue moltiplicando membro a membro ovvero in croce

$$\sigma_1^2 = \sigma_3^2, \qquad \sigma_2^2 = \sigma_4^2,$$

onde, escluso il caso delle radici eguali,

$$\sigma_1 = -\sigma_3, \qquad \sigma_2 = -\sigma_4. \tag{19}$$

Siccome (*) gl'invarianti assoluti o i rapporti delle radici sono i rapporti anarmonici che due punti corrispondenti qualunque formano coi punti nei quali la loro congiungente interseca i piani uniti, così chiamando xx' la coppia di punti corrispondenti ed a_1, a_2, a_3, a_4 i punti tracce della xx' sui piani uniti, abbiamo per le (19):

$$\left.\begin{array}{lll} (xx'a_1a_2) = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}, & (xx'a_1a_3) = -1, & (xx'a_1a_4) = -\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}, \\ (xx'a_2a_3) = -\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}, & (xx'a_2a_4) = -1, & (xx'a_3a_4) = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}, \end{array}\right\} \tag{20}$$

non tutti indipendenti, ma dei quali si scorge il significato.

N. 2: $[2\,1\,1] \equiv [(0\,0)\ 0\,0]$, $\sigma_1 = \sigma_2$.

1.º caso corrispondente al simbolo $|2\,2\ 1\,1|$,, (caso generale).

Omografie aggiunte:

$$\left.\begin{array}{llll} x'_1 = \sigma_2 x_1 + \lambda_1 x_2, & x'_2 = \sigma_2 x_2 & x'_3 = \sigma_3 x_3, & x'_4 = \sigma_4 x_4 \\ -\xi_1 = \sigma_2 \xi'_1 & -\xi_2 = \sigma_2 \xi'_2 + \lambda_1 \xi_1, & -\xi_3 = \sigma_3 \xi'_3, & -\xi_4 = \sigma_4 \xi'_4. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Gli elementi uniti sono:

il punto doppio $\xi_1 = 0$ ed il piano doppio $x_2 = 0$, doppi, perchè corrispondenti al valore σ_2 della radice doppia;

i punti ed i piani semplici

$$\xi_3 = 0, \qquad \xi_4 = 0,$$
$$x_3 = 0, \qquad x_4 = 0;$$

le rette doppie

$$\xi_1 \cdot \xi_3 \equiv x_2 \cdot x_4, \qquad \xi_1 \cdot \xi_4 \equiv x_2 \cdot x_3,$$

aventi in comune il punto ξ_1 ed il piano x_2;

le rette semplici sghembe

$$\xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_3 \cdot x_4, \qquad \xi_3 \cdot \xi_4 = x_1 \cdot x_2.$$

(*) Segre, *Sulla teoria e sulla classificazione,* ecc., pag. 13.

Nelle formole dell'omografia aggiunta la costante λ_1 non può esser nulla (altrimenti si avrebbe il caso del n.° 6), ma non è costante essenziale, dipende dal punto-unità del sistema di coordinate, come osserva il PREDELLA, e si può anche porre eguale ad 1, come nelle formole di JORDAN. Riferendosi infatti allo stesso tetraedro coordinato e mutando il punto-unità si potrà scrivere $x_i = \alpha_i y_i$ e, conseguentemente, $x'_i = \alpha_i y'_i$, onde si avrà $y'_2 = \sigma_2 y_2$, $y'_3 = \sigma_3 y_3$, $y'_4 = \sigma_4 y_4$, mentre la prima delle (1) darà $y'_1 = \sigma_2 y_1 + \lambda_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2$. Nulla vieta di porre $\lambda_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1$: ciò equivale, in sostanza, a scegliere in un modo o nell'altro il vertice $\xi_2 = 0$ sulla retta unita $\xi_1 \xi_2$ ed il piano x_1 del fascio $\xi_3 \xi_4$, vertice e piano non uniti nell'omografia. Quest'osservazione valga per tutti i casi che, nel seguito, troveremo analoghi all'attuale.

Le equazioni differenziali sono:

$$\left.\begin{array}{llll} \frac{dx_1}{dt} = \sigma_2 x_1 + \lambda_1 x_2, & \frac{dx_2}{dt} = \sigma_2 x_2, & \frac{dx_3}{dt} = \sigma_3 x_3, & \frac{dx_4}{dt} = \sigma_4 x_4 \\ \frac{d\xi_1}{dt} = -\sigma_2 \xi_1, & \frac{d\xi_2}{dt} = -\sigma_2 \xi_2 - \lambda_1 \xi_1, & \frac{d\xi_3}{dt} = -\sigma_3 \xi_3, & \frac{d\xi_4}{dt} = -\sigma_4 \xi_4. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Le ultime tre in x_2, x_3, x_4 s'integrano immediatamente; la prima, ponendovi il valor trovato di x_2 in funzione di t, diviene un'equazione lineare di primo ordine del noto tipo

$$\frac{dy}{dt} = py + q,$$

dove p e q sono funzioni di t, il cui integrale è il notissimo:

$$y = e^{\int p dt} \left\{ \int e^{-\int p dt} q \, dt + \text{cost.} \right\}.$$

Anche quest'osservazione valga fatta ora per sempre. Eseguendo le integrazioni abbiamo:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 = (x_1^0 + \lambda_1 x_2^0 t) e^{\sigma_2 t}, & x_2 = x_2^0 e^{\sigma_2 t}, & x_3 = x_3^0 e^{\sigma_3 t}, & x_4 = x_4^0 e^{\sigma_4 t} \\ \xi_1 = \xi_1^0 e^{-\sigma_2 t}, & \xi_2 = (\xi_2^0 - \lambda_1 \xi_1^0 t) e^{-\sigma_2 t}, & \xi_3 = \xi_3^0 e^{-\sigma_3 t}, & \xi_4 = \xi_4^0 e^{-\sigma_4 t}. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Scrivendo le equazioni della prima linea sotto la forma:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : \frac{x_2^0}{x_1^0 + \lambda_1 x_2^0 t} : \frac{x_3^0 e^{(\sigma_3 - \sigma_2) t}}{x_1^0 + \lambda_1 x_2^0 t} : \frac{x_4^0 e^{(\sigma_4 - \sigma_2) t}}{x_1^0 + \lambda_1 x_2^0 t},$$

posto $\sigma_4 > \sigma_3 > \sigma_2$ ed osservando che:

$$\lim_{t=-\infty} \frac{x_3^0 e^{(\sigma_3-\sigma_2)t}}{x_1^0 + \lambda_1 x_2^0 t} = \lim_{t=-\infty} \frac{x_3^0 (\sigma_3 - \sigma_2) e^{(\sigma_3-\sigma_2)t}}{\lambda_1 x_2^0} = 0,$$

si trae che la curva passa pel punto $\xi_1 = 0$ per $t = -\infty$. Così passa pel punto $\xi_4 = 0$ corrispondentemente al valore $t = \infty$, ed inoltre in $\xi_1 = 0$ è osculata dal piano $x_4 = 0$, in $\xi_4 = 0$ dal piano $x_2 = 0$, mentre la tangente nel primo punto è la retta $\xi_1 \xi_3$, quella nel secondo è la $\xi_1 \xi_4$.

Formando le coordinate z_{ij} della caratteristica di x dalla matrice

$$\left\| \begin{matrix} \sigma_2 x_1 + \lambda_1 x_2 & \sigma_2 x_2 & \sigma_3 x_3 & \sigma_4 x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \right\|,$$

si trova subito che l'equazione del complesso quadratico è in questo caso:

$$\lambda_1 (\sigma_3 - \sigma_4) z_{23} z_{24} = (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_4) z_{12} z_{34}.$$

Questo complesso corrisponde al simbolo [(1 1) (2 2)] nella classificazione di Weiler, pag. 188, n.° 29 della Memoria citata.

Essendovi ancora tre piani uniti $x_2 x_3 x_4$ si può ricercare il rapporto anarmonico α, sulla tangente, del punto di contatto x e delle tre tracce $a_2 a_3 a_4$ su quei piani; e si trova:

$$a = (x a_2 a_3 a_4) = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_4}.$$

2.° caso corrispondente al simbolo $\{(\overline{1\,1})\ 2\,2\}$.

Se ci proponiamo di trovare le quadriche $F(x)$ o $\Phi(\xi)$ che si mutano in sè per le trasformazioni del gruppo, troviamo che i soli fasci-schiera di coni e di coniche

$$x_3 x_4 + l x_2^2 = 0 \tag{4}$$

$$\xi_3 \xi_4 + \lambda \xi_1^2 = 0, \tag{5}$$

rispettivamente col vertice in $\xi_1 = 0$ e sul piano $x_2 = 0$, si mutano in sè stessi, quando però sia verificata la relazione

$$2\sigma_2 = \sigma_3 + \sigma_4. \tag{6}$$

Ed allora anche il fascio di complessi

$$p_{12} + k p_{34} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \pi_{34} + k \pi_{12} = 0, \tag{7}$$

si muta in sè stesso.

Determinando l in modo che il cono (4) passi per x^0 e λ in modo che la conica (5) tocchi ξ^0, sarà la curva (3) posta sul cono e la sviluppabile osculatrice toccherà la conica.

N. 3: $[3\,1] \equiv [(0\,0\,0)\ 0]$, $\{3\,3\}$, $\sigma_3 = \sigma_2 = \sigma_1$.

Omografie aggiunte:

$$\left.\begin{array}{lll} x'_1 = \sigma_1 x_1 + \lambda_1 x_2, & x'_2 = \sigma_1 x_2 + \lambda_2 x_3, & x'_3 = \sigma_1 x_3, \\ & x'_4 = \sigma_4 x_4, & \\ -\xi_1 = \sigma_1 \xi'_1, & -\xi_2 = \sigma_1 \xi'_2 + \lambda_1 \xi'_1, & -\xi_3 = \sigma_1 \xi'_3 + \lambda_2 \xi'_2, \\ & -\xi_4 = \sigma_4 \xi'_4. & \end{array}\right\} \quad (1)$$

Gli elementi uniti sono:

il punto triplo $\xi_1 = 0$ ed il punto semplice $\xi_4 = 0$; il piano triplo $x_3 = 0$ ed il piano semplice $x_4 = 0$, le rette unite triple entrambe $\xi_1 \cdot \xi_4 \equiv x_2 \cdot x_3$, $x_3 \cdot x_4 \equiv \xi_1 \cdot \xi_2$.

Integrando le equazioni differenziali

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{dx_1}{dt} = \sigma_1 x_1 + \lambda_1 x_2, & \dfrac{dx_2}{dt} = \sigma_1 x_2 + \lambda_2 x_3, & \dfrac{dx_3}{dt} = \sigma_1 x_3, \\ & \dfrac{dx_4}{dt} = \sigma_4 x_4, & \\ \dfrac{d\xi_1}{dt} = -\sigma_1 \xi_1, & \dfrac{d\xi_2}{dt} = -\sigma_1 \xi_2 - \lambda_1 \xi_1, & \dfrac{d\xi_3}{dt} = -\sigma_1 \xi_3 - \lambda_2 \xi_2, \\ & \dfrac{d\xi_4}{dt} = -\sigma_4 \xi_4, & \end{array}\right\} \quad (2)$$

si trova:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = \left(x_1^0 + \lambda_1 x_2^0 t + \dfrac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 x_3^0 t^2\right) e^{\sigma_1 t}, & x_2 = (x_2^0 + \lambda_2 x_3^0 t) e^{\sigma_1 t}, \\ x_3 = x_3^0 e^{\sigma_1 t}, & x_4 = x_4^0 e^{\sigma_4 t}, \\ \xi_1 = \xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_2 = (\xi_2^0 - \lambda_1 \xi_1^0 t) e^{-\sigma_1 t}, \\ \xi_3 = \left(\xi_3^0 - \lambda_2 \xi_2^0 t + \dfrac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \xi_1^0 t^2\right) e^{-\sigma_1 t}, & \xi_4 = \xi_4^0 e^{-\sigma_4 t}. \end{array}\right\} \quad (3)$$

La trajettoria passa (e si vede come prima) pel punto ξ_1, corrispondente al valore $t = -\infty$, col piano osculatore x_4 e con la tangente $\xi_1 \cdot \xi_2$, e passa pel punto ξ_4, corrispondente al valore $t = \infty$, col piano osculatore $x_3 = 0$ e con la tangente $\xi_1 \cdot \xi_4$.

Il complesso delle caratteristiche è:

$$\lambda_1 z_{23} z_{24} + \lambda_2 z_{31} z_{34} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\sigma_4 - \sigma_1} z_{23} z_{34} = 0,$$

corrispondente al tipo [(3 3)] di Weiler [pag. 200, n.° 47].

Non vi sono complessi lineari uniti (che si trasformano, cioè, in sè stessi). Ma vi sono fasci uniti di coni e di coniche: essi sono, come si trova facilmente col solito metodo,

$$\left.\begin{aligned} F(x) &\equiv \lambda_1 x_2^2 - 2\lambda_2 x_1 x_3 + m x_3^2 = 0 \\ \Phi(\xi) &\equiv \lambda_2 \xi_2^2 - 2\lambda_1 \xi_1 \xi_3 + \mu \xi_1^2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

col vertice e col piano rispettivamente nel punto semplice ξ_4 e nel piano opposto $x_4 = 0$: sono le sole quadriche che si trasformano in sè stesse.

Queste coniche sono le curve inviluppi delle loro tangenti, e quei coni sono i luoghi di rette, appartenenti alle omografie di simbolo [3] (ovvero [(0 0 0)]) del piano $x_4 = 0$ o del punto (stella) $\xi_4 = 0$ contenute nella omografia data. Le coordinate delle generatrici dei coni o delle tangenti alle coniche sono fornite dalle equazioni (3) toltene le espressioni di x_4 e di ξ_4, e sopprimendo, se si vuole, il fattore $e^{\sigma_1 t}$ che figura come fattore di proporzionalità: restano così le x_1, x_2, x_3; ξ_1, ξ_2, ξ_3 espresse con funzioni di 2.° grado nel parametro t. Inoltre poi m e μ nelle (4) si possono determinare in modo che il cono, o la conica, del fascio passi per x^0, o tocchi ξ^0: ed infatti, come verifica, sostituendo in $F(x)$ ed in $\Phi(\xi)$ i valori (3) si ha, a meno del fattore $e^{2\sigma_1 t}$ o del fattore $e^{-2\sigma_1 t}$,

$$F(x) = F(x^0) = 0, \qquad \Phi(\xi) = \Phi(\xi^0) = 0,$$

equazioni che determinano appunto m e μ.

I coni e le coniche dei fasci (4) hanno tra loro rispettivamente un contatto del 3.° ordine (quattro generatrici e quattro tangenti consecutive comuni), e propriamente i coni lungo la retta unita $\xi_1 \cdot \xi_1 \equiv x_2 \cdot x_3$ col piano tangente nel piano unito $x_3 = 0$ triplo, le coniche nell'altra retta unita $\xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_3 \cdot x_4$ col punto di contatto nel punto unito triplo $\xi_1 = 0$.

Determinando, come sopra, m (e μ) in modo che il cono passi per x^0 (e la conica tocchi ξ^0), la curva (3) giacerà sul cono (e la sviluppabile (3) toccherà la conica), anzi, come si vide poco fa, passerà pel vertice del cono stesso, avrà il piano osculatore $x_3 = 0$, e la tangente nella retta $\xi_1 \cdot \xi_4$, lungo la quale i coni del fascio si sovrosculano.

Se, per fissar le idee, diamo a t il significato di tempo, ricordando che per $t = \infty$ si ha il punto ξ_4 e per $t = -\infty$ si ha il punto ξ_1, diremo che il punto mobile descrive una curva (trascendente) sopra un cono quadrico, passando prima, da tempo infinito, per un punto ξ_1 (unito), poi, all'origine del tempo, pel punto x^0, ed infine accostandosi vieppiù al vertice, dove giunge solo dopo trascorso un tempo infinito.

Volendo, possiamo determinare μ, dato il cono $F(x)$ cioè dato m, in modo che la conica $\Phi(\xi)$ sia, in coordinate di rette, la sezione prodotta dal piano $x_4 = 0$ sul cono $F(x) = 0$. Per questo, ritenendo sempre che il covariante identico sia $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$ onde, nel piano $x_4 = 0$, $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$, cercando l'equazione tangenziale di $F(x)$, si trova:

$$\lambda_2 \xi_2^2 = 2 \lambda_1 \xi_1 \xi_3 - \frac{\lambda_1 m}{\lambda_2} \xi_1^2 = 0,$$

e paragonando con $\Phi(\xi)$ si ha:

$$\mu = -\frac{\lambda_1 m}{\lambda_2}.$$

N. 4: $[2\,2] \equiv [(0\,0)\;(0\,0)]$, $\sigma_2 = \sigma_1$, $\sigma_4 = \sigma_3$.

Omografie aggiunte:

$$\left.\begin{array}{lll} x'_1 = \sigma_1 x_1 + \lambda_1 x_2, & x'_2 = \sigma_1 x_2, & x'_3 = \sigma_3 x_3 + \lambda_2 x_4, \\ & x'_4 = \sigma_3 x_4, & \\ -\xi_1 = \sigma_1 \xi'_1, & -\xi_2 = \sigma_1 \xi'_2 + \lambda_1 \xi'_1, & -\xi_3 = \sigma_3 \xi'_3, \\ & -\xi_4 = \sigma_3 \xi'_4 + \lambda_2 \xi'_3. & \end{array}\right\} \quad (1)$$

Elementi uniti:

i punti doppi $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = 0$,
i piani doppi $x_2 = 0$, $x_4 = 0$,
le due rette unite sghembe $\xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_3 \cdot x_4$, $\xi_3 \cdot \xi_4 \equiv x_1 \cdot x_2$ giacenti sui piani uniti e passanti per i punti uniti,
un'altra retta che si appoggia alle precedenti ed è la retta $\xi_1 \cdot \xi_3 \equiv x_2 \cdot x_4$ che congiunge i punti uniti ed è intersezione dei piani uniti.

Equazioni differenziali:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt}=\sigma_1 x_1+\lambda_1 x_2, \quad \frac{dx_2}{dt}=\sigma_1 x_2, \quad \frac{dx_3}{dt}=\sigma_3 x_3+\lambda_2 x_4, \\
&\frac{dx_4}{dt}=\sigma_3 x_4 \\
&\frac{d\xi_1}{dt}=-\sigma_1\xi_1, \quad \frac{d\xi_2}{dt}=-\sigma_1\xi_2-\lambda_1\xi_1, \quad \frac{d\xi_3}{dt}=-\sigma_3\xi_3, \\
&\frac{d\xi_4}{dt}=-\sigma_3\xi_4-\lambda_2\xi_3;
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

equazioni integrali:

$$\left.\begin{aligned}
&x_1=(x_1^0+\lambda_1 x_2^0 t)e^{\sigma_1 t}, \quad x_2=x_2^0 e^{\sigma_1 t}, \quad x_3=(x_3^0+\lambda_2 x_4^0 t)e^{\sigma_3 t}, \\
&x_4=x_4^0 e^{\sigma_3 t} \\
&\xi_1=\xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, \quad \xi_2=(\xi_2^0-\lambda_1\xi_1^0 t)e^{-\sigma_1 t}, \quad \xi_3=\xi_3^0 e^{-\sigma_3 t}, \\
&\xi_4=(\xi_4^0-\lambda_2\xi_3^0 t)e^{-\sigma_3 t}.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Supponendo, come sempre, $\sigma_3>\sigma_1$, si vede che la curva passa pel punto unito $\xi_1=0$ dov'è osculata dal piano unito $x_4=0$ ed ammette per tangente la retta unita $\xi_1\cdot\xi_2\equiv x_3\cdot x_4$: ciò per $t=-\infty$. Invece per $t=\infty$ si ha il punto $\xi_3=0$, il piano osculatore $x_2=0$ e la tangente $\xi_3\cdot\xi_4\equiv x_1\cdot x_2$.

Cosicchè l'asserzione del Lindemann (Memoria citata, pag. 112) che la curva tocca la retta $x_2=x_4=0$ dev'esser corretta (nel Lindemann al posto di x_2 è x_1). Essa poggia sull'affermazione che per $t=-\infty$ il rapporto $x_1:x_3$ (nel Lindemann $x_2:x_3$) ha un *valor finito,* mentre x_2 ed x_4 svaniscono. Ciò non è vero, come si vede subito. Perchè, intanto, x_2 ed x_4 potrebbero per $t=-\infty$ svanire soltanto allorchè fossero positive le due radici σ_1 e σ_3; ma nelle coordinate omogenee bisogna ragionar sui rapporti; e nel caso nostro, se $\sigma_3>\sigma_1$ il rapporto $\frac{x_4}{x_2}$ svanisce per $t=-\infty$. Poi il rapporto:

$$\frac{x_1}{x_3}=\frac{x_1^0+\lambda_1 x_2^0 t}{x_3^0+\lambda_2 x_4^0 t}e^{(\sigma_1-\sigma_3)t}=\frac{\dfrac{x_1^0}{t}+\lambda_1 x_2^0}{\dfrac{x_3^0}{t}+\lambda_2 x_4^0}e^{(\sigma_1-\sigma_3)t},$$

per $t=-\infty$ essendo sempre $\sigma_3>\sigma_1$, diviene ∞.

Il complesso delle caratteristiche è:

$$\lambda_1 \lambda_2 z_{24}^2 - (\sigma_1 - \sigma_3)^2 z_{12} z_{34} \quad (*).$$

Dalle (3) ricaviamo le equazioni:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^0}{x_2^0} + \lambda_1 t, \qquad \frac{x_3}{x_4} = \frac{x_3^0}{x_4^0} + \lambda_2 t, \tag{4}$$

che rappresentano al variar di t due fasci di piani proiettivi, le cui rette d'intersezione passano pel punto corrispondente al valor di t della traiettoria e generano una quadrica rigata, che contiene la traiettoria suddetta. Gli assi dei fasci sono le rette unite sghembe $x_1 \cdot x_2 = 0$, $x_3 \cdot x_4 = 0$ dell'omografia; l'altra retta unita dell'omografia $x_2 \cdot x_4 = 0$ corrispondente a $t = \pm \infty$ che passa anche pel punto x^0, è generatrice della quadrica.

Così pure le equazioni:

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{\xi_2^0}{\xi_1^0} - \lambda_1 t, \qquad \frac{\xi_4}{\xi_3} = \frac{\xi_4^0}{\xi_3^0} - \lambda_2 t, \tag{5}$$

individuano due punteggiate proiettive cogli stessi assi sghembi precedenti; $\xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_3 \cdot x_4$, $\xi_3 \cdot \xi_4 \equiv x_1 \cdot x_2$. Le congiungenti i punti corrispondenti generano una quadrica rigata i cui piani tangenti riescono osculatori alla sviluppabile fornita dalle (3), seconda linea orizzontale. La retta unita $\xi_1 \cdot \xi_3 \equiv x_2 \cdot x_4$, corrispondente al valor $t = \pm \infty$, è anche generatrice di questa quadrica.

Le equazioni delle due quadriche sono:

$$\frac{\lambda_2 x_1 x_4 - \lambda_1 x_2 x_3}{x_2 x_4} = \frac{\lambda_2 x_1^0 x_4^0 - \lambda_1 x_2^0 x_3^0}{x_2^0 x_4^0} = m \tag{6}$$

$$\frac{\lambda_2 \xi_2 \xi_3 - \lambda_1 \xi_1 \xi_4}{\xi_1 \xi_3} = \frac{\lambda_2 \xi_2^0 \xi_3^0 - \lambda_1 \xi_1^0 \xi_4^0}{\xi_1^0 \xi_3^0} = \mu. \tag{7}$$

Le (6) e (7) mostrano che i fasci-schiera di quadriche

$$F(x) \equiv \lambda_2 x_1 x_4 - \lambda_1 x_2 x_3 - m x_2 x_4 = 0$$

$$\Phi(\xi) \equiv \lambda_2 \xi_2 \xi_3 - \lambda_1 \xi_1 \xi_4 - \mu \xi_1 \xi_3 = 0,$$

sono quadriche invarianti pel gruppo di trasformazioni, e sono le sole, come si potrebbe trovare col solito metodo. Le F e Φ rappresenteranno una stessa

(*) Weiler, loco cit., pag. 178, n.° 14 simbolo [(1 1) (1 1 2)]; Lindemann, alla pag. 112 citata nel testo.

quadrica, in coordinate di punti o di piani, se $m = -\mu$. L'intersezione completa di due F o due Φ si compone delle rette unite $\xi_1 \cdot \xi_2$, $\xi_3 \cdot \xi_4$ sghembe, e dell'altra $\xi_1 \cdot \xi_3$ contata due volte.

Ma v'è anche un fascio di complessi lineari che si trasforma in sè stesso ed ha per equazione (*):

$$\lambda_2 p_{14} - \lambda_1 p_{23} + k p_{24} = 0, \tag{8}$$

ovvero in coordinate π_{ij}

$$\lambda_2 \pi_{23} - \lambda_1 \pi_{14} + k \pi_{31} = 0: \tag{8bis}$$

le direttrici coincidenti del fascio sono date dalla retta unita $\xi_1 \cdot \xi_3$. Secondochè k si pone eguale ad m o a μ il complesso conterrà le generatrici di F o di Φ.

Tutto ciò che abbiamo detto fino qui corrisponde al simbolo $\{(\overline{3\,1})\ 1\,1\}$; ma nulla invece corrisponde al simbolo $\{(\overline{3\,1})\ (\overline{1\,1})\}$. Infatti il fascio di complessi aventi per direttrici le rette unite sghembe

$$p_{12} + k p_{34} = 0,$$

non è unito, nè può esserlo; perchè, dinotando con p^0_{12} e p^0_{34} due valori iniziali, si ha $p_{12} = e^{2\sigma_1 t} p^0_{12}$, $p_{34} = e^{2\sigma_3 t} p^0_{34}$; permodochè

$$p_{12} + k p_{34} = e^{2\sigma_1 t} p^0_{12} + e^{2\sigma_3 t} k p^0_{34};$$

e dovrebbe poi essere $\sigma_1 = \sigma_3$, il che non è. Ma, come si vide nel 3.° caso del n.° 1, può bene avverarsi ciò per una trasformazione omografica qualunque (non di quelle che costituiscono il gruppo attuale) per esempio per la trasformazione aggiunta (1). Le quadriche (6) e (7) ed il complesso (8) sono enti invarianti anche rispetto ad essa; ma poiche si ha pure:

$$p'_{12} = \sigma_1^2 p_{12}, \qquad p'_{34} = \sigma_3^2 p_{34},$$

così:

$$p'_{12} + k p'_{34} = \sigma_1^2 p_{12} + \sigma_3^2 k p_{34}.$$

(*) La trasformazione infinitesimale delle rette definita per mezzo delle (10) del § 1 e delle (2) di questo numero è data dalle formole:

$$\frac{dp_{12}}{dt} = 2\sigma_1 p_{12}, \quad \frac{dp_{34}}{dt} = 2\sigma_3 p_{34}, \quad \frac{dp_{23}}{dt} = (\sigma_1 + \sigma_3) p_{23} + \lambda_2 p_{24},$$

$$\frac{dp_{14}}{dt} = (\sigma_1 + \sigma_3) p_{14} + \lambda_1 p_{24}, \quad \frac{dp_{31}}{dt} = (\sigma_1 + \sigma_3) p_{31} - \lambda_1 p_{23} - \lambda_2 p_{14}, \quad \frac{dp_{24}}{dt} = (\sigma_1 + \sigma_3) p_{24}.$$

Applicando queste formole ad un complesso lineare si deduce l'equazione (8) col solito metodo.

Da ciò, per l'invariabilità del complesso, segue $\sigma_1^2 = \sigma_3^2$ cioè, escludendo il caso di radici eguali, $\sigma_3 = -\sigma_1$. Il significato geometrico più immediato di questo risultato si ha dalla relazione [vedi n.° 1 equazione (20)]

$$(x x' a_2 a_4) = -1.$$

N. 5: $[4] \equiv [(0\,0\,0\,0)]$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4$.

Omografie aggiunte:

$$\left.\begin{array}{lll} x'_1 = \sigma_1 x_1 + \lambda_1 x_2, & x'_2 = \sigma_1 x_2 + \lambda_2 x_3, & x'_3 = \sigma_1 x_3 + \lambda_3 x_4, \\ & x'_4 = \sigma_1 x_4 & \\ -\xi_1 = \sigma_1 \xi'_1, & -\xi_2 = \sigma_1 \xi'_2 + \lambda_1 \xi'_1, & -\xi_3 = \sigma_1 \xi'_3 + \lambda_2 \xi'_2, \\ & -\xi_4 = \sigma_1 \xi'_4 + \lambda_3 \xi'_3. & \end{array}\right\} \quad (1)$$

Elementi uniti:

il punto quadruplo $\xi_1 = 0$, il piano quadruplo $x_4 = 0$, e la retta $\xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_3 \cdot x_4$.

Equazioni differenziali:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{dx_1}{dt} = \sigma_1 x_1 + \lambda_1 x_2, & \dfrac{dx_2}{dt} = \sigma_1 x_2 + \lambda_2 x_3, & \dfrac{dx_3}{dt} = \sigma_1 x_3 + \lambda_3 x_4, \\ & \dfrac{dx_4}{dt} = \sigma_1 x_4 & \\ \dfrac{d\xi_1}{dt} = -\sigma_1 \xi_1, & \dfrac{d\xi_2}{dt} = -\sigma_1 \xi_2 - \lambda_1 \xi_1, & \dfrac{d\xi_3}{dt} = -\sigma_1 \xi_3 - \lambda_2 \xi_2, \\ & \dfrac{d\xi_4}{dt} = -\sigma_1 \xi_4 - \lambda_3 \xi_3; & \end{array}\right\} \quad (2)$$

loro integrali:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = \left(x_1^0 + \lambda_1 x_2^0 t + \dfrac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 x_3^0 t^2 + \dfrac{1}{6} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 x_4^0 t^3\right) e^{\sigma_1 t}, & x_3 = (x_3^0 + \lambda_3 x_4^0 t) e^{\sigma_1 t} \\ x_2 = \left(x_2^0 + \lambda_2 x_3^0 t + \dfrac{1}{2} \lambda_2 \lambda_3 x_4^0 t^2\right) e^{\sigma_1 t}, & x_4 = x_4^0 e^{\sigma_1 t} \end{array}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \xi_1 = \xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_3 = \left(\xi_3^0 - \lambda_2 \xi_2^0 t + \dfrac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \xi_1^0 t^2\right) e^{-\sigma_1 t} \\ \xi_2 = (\xi_2^0 - \lambda_1 \xi_1^0 t) e^{-\sigma_1 t}, & \xi_4 = \left(\xi_4^0 - \lambda_3 \xi_3^0 t + \dfrac{1}{2} \lambda_2 \lambda_3 \xi_2^0 t^2 - \dfrac{1}{6} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \xi_1^0 t^3\right) e^{-\sigma_1 t}. \end{array}\right\}$$

Si può prescindere, come si vede, dai fattori $e^{\sigma_1 t}$, $e^{-\sigma_1 t}$ nelle espressioni delle x e delle ξ.

La traiettoria è una cubica gobba, e l'inviluppo è una sviluppabile di 3.ª classe duale della cubica, che sarà la sviluppabile osculatrice di questa, se x^0 e ξ^0 si appartengono, come si suppone (*). La curva passa pel punto $\xi_1 = 0$ oscula il piano $x_4 = 0$ e tocca la retta $\xi_1 \cdot \xi_2$, corrispondentemente al valore $t = \pm \infty$.

Le uniche quadriche che si trasformano in sè sono:

i coni del fascio

$$F(x) \equiv \lambda_2 x_3^2 - 2\lambda_3 x_2 x_4 + m x_4^2 = 0 \text{ col vertice in } \xi_1 = 0,$$

le coniche della schiera

$$\Phi(x) \equiv \lambda_2 \xi_2^2 - 2\lambda_1 \xi_3 \xi_1 + \mu \xi_1^2 = 0 \text{ sul piano } x_4 = 0.$$

I coni hanno un contatto del 3.° ordine sul piano unito $x_4 = 0$ lungo la generatrice $x_3 \cdot x_4 \equiv \xi_1 \cdot \xi_2$; e così le coniche lo hanno nel punto ξ_1 lungo la stessa retta $\xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_3 \cdot x_4$. Questi coni (e queste coniche) sono gli enti invarianti nell'omografia della stella $\xi_1 = 0$ (e del piano $x_4 = 0$) contenuta nell'omografia data, di simbolo [3], cfr. il n.° 3.

Inoltre determinando m in modo che $F(x)$ passi per x^0, e μ in modo che $\Phi(\xi)$ tocchi ξ^0, il cono sarà quello che proietta la cubica gobba dal suo punto $\xi_1 = 0$, e la conica sarà la sezione della sviluppabile osculatrice col suo piano $x_4 = 0$.

Il complesso delle caratteristiche è:

$$\frac{z_{14} z_{34}}{\lambda_1} + \frac{z_{34} z_{23}}{\lambda_3} - \frac{z_{24}^2}{\lambda_2} = 0 \quad \{\text{Weiler, pag. 193, n.° 38 simbolo } [(1\,2\,3)]\}.$$

V'è inoltre un fascio di complessi lineari uniti, le cui direttrici coincidono nella retta unita $\xi_1 \cdot \xi_2$ dell'omografia: l'equazione del fascio è:

$$\lambda_1 p_{23} - \lambda_3 p_{14} + k p_{34} = 0.$$

(*) Dall'equazione del piano osculatore in un punto t si deducono le coordinate del piano osculatore ξ^0 nel punto iniziale x^0: esse sono:

$$\xi_1^0 = -\lambda_3^2 x_4^{0^3}, \qquad \xi_2^0 = \lambda_1 \lambda_3 x_3^0 x_4^{0^2}, \qquad \xi_3^0 = \lambda_1 x_4^0 (\lambda_3 x_2^0 x_4^0 - \lambda_2 x_3^{0^2})$$

$$\xi_4 = \lambda_1 \lambda_2 x_3^{0^3} - 2\lambda_1 \lambda_3 x_2^0 x_3^0 x_4^0 + \lambda_3^2 x_1^0 x_4^{0^2}.$$

Espressioni analoghe si potrebbero trovare per tutti i casi.

B) LE TRAJETTORIE SONO CURVE PIANE (E DUALMENTE).

N. 6: $[(1\,1)\,1\,1] \equiv [1\,0\,0]$; *axiale Collineation* di SCHUR nei Math. Ann., Bd. 19, pag. 430, *prospettiva di 1.ª specie* di BATTAGLINI nella terza Memoria: *Sulla geometria projettiva.*

Nella Memoria di SEGRE: *Sulla teoria e sulla classificazione,* ecc. è detto che questo è il caso generale di una seconda categoria di omografie, per le quali vi sarà sempre un raggio r di punti uniti ed un asse ρ di piani uniti, mentre nei cinque casi precedenti il numero degli elementi uniti era finito.

Ciò basta per concludere che le trajettorie sono curve piane (e le sviluppabili sono coni). Infatti se x^0 è il punto iniziale, il piano $x^0 \cdot \rho$ è invariante perchè appartiene al fascio ρ. Applicando dunque ad x^0 una trasformazione qualunque del gruppo esso si sposterà sulla trajettoria, ma non lascerà il piano $x^0 \cdot \rho$: dunque la trajettoria è piana (*).

1.º caso corrispondente al simbolo $\{(1\,1)\,(1\,1)\,1\,1\}$.

Per maggior brevità adotterò la segnatura x'_i in luogo della $\frac{dx_i}{dt}$, e così ξ'_i in luogo di $\frac{d\xi_i}{dt}$; allora l'equazione $x'_i = \sigma_i x_i$ per esempio è un'equazione differenziale, ma la si può intendere anche come una delle equazioni dell'omografia aggiunta che serve a passare dallo spazio S allo spazio S'. Analogamente $\xi'_i = -\sigma_i \xi_i$ è un'equazione differenziale; ma se si vuole intenderla come equazione dell'omografia aggiunta, bisogna ricordare che in questa si ha propriamente $\xi_i = -\sigma_i \xi'_i$ per passare dallo spazio S' allo spazio S; è questo scambio di spazi che conviene tener presente per evitar dubbi.

Equazioni differenziali:

$$\left.\begin{array}{llll} x'_1 = \sigma_1 x_1, & x'_2 = \sigma_1 x_2, & x'_3 = \sigma_3 x_3, & x'_4 = \sigma_4 x_4, \\ \xi'_1 = -\sigma_1 \xi_1, & \xi'_2 = -\sigma_1 \xi_2, & \xi'_3 = -\sigma_3 \xi_3, & \xi'_4 = -\sigma_4 \xi_4; \end{array}\right\} \quad (1)$$

integrali:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 = x_1^0 e^{\sigma_1 t}, & x_2 = x_2^0 e^{\sigma_1 t}, & x_3 = x_3^0 e^{\sigma_3 t}, & x_4 = x_4^0 e^{\sigma_4 t} \\ \xi_1 = \xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_2 = \xi_2^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_3 = \xi_3^0 e^{-\sigma_3 t}, & \xi_4 = \xi_4^0 e^{-\sigma_4 t}. \end{array}\right\} \quad (2)$$

(*) Questo teorema è provato analiticamente dal sig. TANNENBERG nella sua Tesi: *Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendentes qui admettent un groupe continu de transformations,* citata nel 3.º vol. dell'opera di LIE-ENGEL a pag. 115, e della quale devo la conoscenza al prof. CERRUTI. In questa Memoria si trovano discussi cinque tipi di trasformazioni omografiche infinitesimali insieme a cinque corrispondenti categorie di curve gobbe W. Cfr. più avanti alla fine del § 3.

Gli elementi uniti sono:

due punti semplici $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$ (corrispondenti alle radici semplici σ_3, σ_4);

due piani semplici $x_3 = 0$, $x_4 = 0$;

un raggio di punti uniti $r \equiv \xi_1 \cdot \xi_2$ $\equiv x_3 \cdot x_4$ (corrispondente alla radice doppia σ_1 che annulla i minori del 3.° ordine);

un asse di piani uniti $\rho \equiv x_1 \cdot x_2 \equiv \xi_3 \cdot \xi_4$.

Conseguentemente sono uniti i fasci di centri ξ_3 e ξ_4 e di piani x_4 ed x_3 rispettivamente. Intorno a quei centri e su quei piani si hanno due omologie piane ordinarie aventi r per asse di omologia e però di simboli [(1 1) 1] ovvero [1 0]; mentre poi sui piani x_1, x_2 ed intorno ai punti ξ_1, ξ_2 si hanno omografie ordinarie di simbolo [1 1 1] ovvero [0 0 0]. Quelle omologie, appartenenti al gruppo, si hanno trascurando le terze o le quarte equazioni nelle due linee in (2); e quelle omografie si hanno invece trascurando le prime o le seconde. Si avverta pure che alle coppie $\xi_1 \cdot \xi_2$, $x_1 \cdot x_2$ di punti e di piani uniti possiamo sostituire un'altra coppia qualunque di punti su r o di piani per ρ.

Le trajettorie sono curve piane situate nei piani $x_2^0 x_1 - x_1^0 x_2 = 0$ del fascio ρ (al variar di x^0); e le sviluppabili sono coni coi vertici nei punti $\xi_2^0 \xi_1 - \xi_1^0 \xi_2 = 0$ del raggio r. — Le caratteristiche dei punti x, come le congiungenti due punti corrispondenti qualunque, tagliano ρ; le caratteristiche dei piani ξ, come le intersezioni di due piani corrispondenti qualunque, tagliano r.

2.° caso corrispondente al simbolo $\{(\overline{1\ 1})\ (1\ 1)\ (1\ 1)\}$.

Nel caso precedente al fascio di complessi, avente per direttrici r e ρ, di equazione

$$p_{12} + k p_{34} = 0, \tag{3}$$

ed al fascio-schiera di quadriche, avente quelle rette per polari coniugate, di equazione

$$\left.\begin{aligned} x_1 x_2 + m x_3 x_4 = 0 \\ \xi_1 \xi_2 + \mu \xi_3 \xi_4, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

corrispondono i due fasci:

$$e^{2\sigma_1 t} p_{12}^0 + k e^{(\sigma_3+\sigma_4) t} p_{34}^0 = 0$$

$$e^{2\sigma_1 t} x_1^0 x_2^0 + m e^{(\sigma_3+\sigma_4) t} x_3^0 x_4^0 = 0.$$

Ma i fasci (3) e (4) si mutano in sè stessi se è verificata la condizione

$$2\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_4. \tag{5}$$

Facendo un'analisi più accurata si troverà che non vi sono altri complessi uniti oltre a quelli del fascio (3); ma oltre al fascio (4) v'è un sistema lineare ∞^3 di quadriche che, in forza della (5), si muta in sè stesso, e che ha per equazione

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{34}x_3x_4, \\ &\text{e così pure} \\ \Phi(\xi) &= \alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + 2\alpha_{12}\xi_1\xi_2 + 2\alpha_{34}\xi_3\xi_4. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Potendo determinare uno dei coefficienti a o α in modo che $F(x)$ passi per x^0 o $\Phi(\xi)$ tocchi ξ^0, si vede subito che le trajettorie sono coniche situate su $F(x)$ e le sviluppabili sono coni circoscritti a $\Phi(\xi)$.

La forma delle (6) mostra l'importante fatto che le rette r e ρ sono coniugate rispetto ad F ed a Φ. Basta per questo immaginar decomposto, per esempio, il trinomio $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$ nei suoi fattori lineari $p_x = p_1x_1 + p_2x_2$ e $q_x = q_1x_1 + q_2x_2$, e poi scrivere F così:

$$F = p_xq_x + 2a_{34}x_3x_4 = 0,$$

donde si vede che, appunto, la retta $r \equiv x_3 \cdot x_4$ è coniugata all'asse $\rho \equiv p_x \cdot q_x \equiv x_1 \cdot x_2$, che è lo stesso, poichè i piani $p_x = 0$, $q_x = 0$ formano fascio con x_1, x_2. Potendosi intendere che $\Phi(\xi) = 0$ sia l'equazione tangenziale di F (*), vediamo subito come può avvenire il movimento: il punto x percorre una conica di F, ed il piano ξ, tangente ad F in x, inviluppa il cono circoscritto ad F lungo quella conica; e se il piano di questa è, come dev'essere, un piano per ρ, il vertice del cono sarà il polo del piano ossia un punto di r. Le posizioni iniziali saranno un punto x^0 di F ed il piano tangente rispettivo ξ^0.

(*) L'equazione tangenziale di $F = 0$ è:

$$a_{22}\xi_1^2 + a_{11}\xi_2^2 - 2a_{12}\xi_1\xi_2 + 2\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{34}}\xi_3\xi_4 = 0;$$

di qui paragonando con $\Phi = 0$ possiamo porre:

$$\alpha_{11} = a_{22}, \quad \alpha_{22} = a_{11}, \quad \alpha_{12} = -a_{12}, \quad \alpha_{34} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{34}},$$

donde, inversamente,

$$a_{11} = \alpha_{22}, \quad a_{22} = \alpha_{11}, \quad a_{12} = -\alpha_{12}, \quad a_{34} = \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{\alpha_{34}}.$$

Le equazioni (2) delle trajettorie e degli inviluppi si possono in questo caso semplificare.

Dalla (5) possiamo trarre:

$$\sigma_3 = \sigma_1 + \sigma, \qquad \sigma_4 = \sigma_1 - \sigma,$$

onde, per esempio, dividendo per $e^{\sigma_1 t}$

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 e^{\sigma t} : x_4^0 e^{-\sigma t},$$

e posto $\lambda = e^{\sigma t}$ e moltiplicando poi per λ

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1^0 \lambda : x_2^0 \lambda : x_3^0 \lambda^2 : x_4^0,$$

che sono ben le equazioni di una conica.

S'intende già che in questo e nei seguenti casi il complesso quadratico delle caratteristiche si scinde nei due speciali aventi per direttrici ρ ed r; il primo formato dalle tangenti alle coniche, il secondo formato dalle generatrici dei coni.

N. 7: $[(1\ 1)\ 2] \equiv [1\ (0\ 0)]$.

Equazioni differenziali:

$$\left.\begin{array}{llll} x'_1 = \sigma_1 x_1, & x'_2 = \sigma_1 x_2, & x'_3 = \sigma_3 x_3 + \lambda_1 x_4, & x'_4 = \sigma_3 x_4, \\ \xi'_1 = -\sigma_1 \xi_1, & \xi'_2 = -\sigma_1 \xi_2, & \xi'_3 = -\sigma_3 \xi_3, & \xi'_4 = -\sigma_3 \xi_4 - \lambda_1 \xi_3; \end{array}\right\} \quad (1)$$

integrali:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 = x_1^0 e^{\sigma_1 t}, & x_2 = x_2^0 e^{\sigma_1 t}, & x_3 = (x_3^0 + \lambda_1 x_4^0 t) e^{\sigma_3 t}, & x_4 = x_4^0 e^{\sigma_3 t} \\ \xi_1 = \xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_2 = \xi_2^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_3 = \xi_3^0 e^{-\sigma_3 t}, & \xi_4 = (\xi_4^0 - \lambda_1 \xi_3^0 t) e^{-\sigma_3 t}. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Gli elementi uniti sono:

un punto unito isolato $\xi_3 = 0$,
un piano unito isolato $x_4 = 0$,
un raggio $r \equiv \xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_3 \cdot x_4$ di punti uniti,
un asse $\rho \equiv x_1 \cdot x_2 \equiv \xi_3 \cdot \xi_4$ di piani uniti.

Nel piano unito $x_4 = 0$ si ha un'omologia ordinaria $[(1\ 1)\ 1] \equiv [1\ 0]$ di centro ξ_3 e di asse r (e dualmente nella stella $\xi_3 = 0$ si ha un'omologia ordinaria di piano $x_4 = 0$ sul quale giacciono sempre due rette corrispondenti e di asse ρ intorno al quale si segano due piani corrispondenti). In ogni piano unito del fascio ρ, per esempio nel piano $x_1 = 0$ si ha un'omografia di simbolo $[2\,1] \equiv [(0\,0)\,0]$ col punto doppio $\xi_3 = 0$ unito, col punto unito semplice ξ_2 ecc.

Le trajettorie sono curve trascendenti nei piani per ρ, le sviluppabili sono coni i cui vertici sono punti di r.

Non vi sono complessi lineari uniti (s'intende oltre ai complessi speciali r e ρ); e le uniche quadriche unite sono le coppie di piani per ρ e le coppie di punti su r.

Tutto ciò corrisponde al simbolo $\{(\overline{2\,2})\,1\,1\}$. Invece nel gruppo non si trovano omografie cui corrisponda il simbolo $\{(\overline{2\,2})\,\overline{1\,1}\}$, per le quali cioè sia unito il fascio dei complessi lineari avente per direttrici r e ρ.

Infatti dall'equazione del fascio $p_{12} + kp_{34} = 0$ si trae quella del fascio corrispondente:

$$e^{2\sigma_1 t} p^0_{12} + k e^{2\sigma_3 t} p^0_{34} = 0.$$

E perchè questo fascio coincida col primo dev'essere $\sigma_1 = \sigma_3$; il che non è.

Ma anche qui come nel n.° 1 e nel n.° 4 cade in acconcio avvertire che un'omografia generale può ben presentare questo caso.

Sia l'omografia data dalle (1). Allora:

$$p'_{12} + kp'_{34} \equiv \sigma_1^2 p_{12} + k\sigma_3^2 p_{34}.$$

Di qui, se il fascio è unito,

$$\sigma_1 = -\sigma_3, \tag{3}$$

che può ben essere. Siccome poi nell'omologia sul piano $x_4 = 0$ il rapporto $\sigma_1 : \sigma_3$ è la *costante* dell'omologia, così nel caso della relazione (3) questa costante vale -1, e l'omologia è involutoria.

Adunque cotale omologia si può presentare in un'omografia qualunque del tipo (1), ma giammai in quelle che appartengono al gruppo (2).

Un'altra definizione facile del rapporto $\sigma_1 : \sigma_3$ si trova agevolmente. La congiungente due punti corrispondenti x ed x' nell'omografia si appoggia a ρ. Sia a il punto di appoggio ed a' il punto comune ad xx' ed al piano unito $x_4 = 0$: si ha:

$$(x\,x'\,a\,a') = \sigma_3 : \sigma_1.$$

E, se ha luogo la (3), il gruppo $(xx'aa')$ è armonico; onde xx' formano un'involuzione (i cui punti doppi sono aa') e sono permutabili tra loro.

N. 8: $[(2\,1)\;1] \equiv [(1\,0)\;0]$, $\{(2\,1)\,(2\,1)\}$.

Equazioni differenziali:

$$x'_1 = \sigma_1 x_1 + \lambda_1 x_3, \qquad x'_2 = \sigma_1 x_2, \qquad x'_3 = \sigma_1 x_3, \qquad x'_4 = \sigma_4 x_4$$
$$\xi'_1 = -\sigma_1 \xi_1, \qquad \xi'_2 = -\sigma_1 \xi_2, \qquad \xi'_3 = -\sigma_1 \xi_3 - \lambda_1 \xi_1, \qquad \xi'_4 = -\sigma_4 \xi_4.$$

Gli elementi uniti sono:

un punto unito isolato $\xi_4 = 0$,
un piano unito isolato $x_4 = 0$,
un raggio $r \equiv \xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_3 \cdot x_4$ di punti uniti,
un asse $\rho \equiv x_2 \cdot x_3 = \xi_1 \cdot \xi_4$ di piani uniti,
ed r e ρ passano per ξ_1 e giacciono nel piano x_3.

Le trajettorie sono curve nei piani per l'asse ρ, e gl'inviluppi sono coni i cui vertici sono su r, curve ed inviluppo dati dalle equazioni integrali:

$$x_1 = (x_1^0 + \lambda_1 x_3^0 t)\, e^{\sigma_1 t}, \quad x_2 = x_2^0 e^{\sigma_1 t}, \quad x_3 = x_3^0 e^{\sigma_1 t}, \quad x_4 = x_4^0 e^{\sigma_4 t}$$
$$\xi_1 = \xi_1 e^{-\sigma_1 t}, \quad \xi_2 = \xi_2^0 e^{-\sigma_1 t}, \quad \xi_3 = (\xi_3^0 - \lambda_1 \xi_1^0 t)\, e^{-\sigma_1 t}, \quad \xi_4 = \xi_4^0 e^{-\sigma_4 t}.$$

N. 9: $[(3\,1)] \equiv [(1\,0\,0)]$, $\{(\overline{3\,3})\}$.

Equazioni differenziali:

$$\left.\begin{aligned} & x'_1 = \sigma_1 x_1 + \lambda_1 x_3, \quad x'_2 = \sigma_1 x_2, \quad x'_3 = \sigma_1 x_3 + \lambda_2 x_4, \\ & \qquad x'_4 = \sigma_1 x_4 \\ & \xi'_1 = -\sigma_1 \xi_1, \quad \xi'_2 = -\sigma_1 \xi_2, \quad \xi'_3 = -\sigma_1 \xi_3 - \lambda_1 \xi_1, \\ & \qquad \xi'_4 = -\sigma_1 \xi_4 - \lambda_2 \xi_3, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

integrali:

$$\left.\begin{aligned} & x_1 = \left(x_1^0 + \lambda_1 x_3^0 t + \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 x_4^0 t^2\right) e^{\sigma_1 t}, \quad x_2 = x_2^0 e^{\sigma_1 t}, \quad x_3 = (x_3^0 + \lambda_2 x_4^0 t)\, e^{\sigma_1 t}, \\ & \qquad x_4 = x_4^0 e^{\sigma_1 t} \\ & \xi_1 = \xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, \quad \xi_2 = \xi_2^0 e^{-\sigma_1 t}, \quad \xi_3 = (\xi_3^0 - \lambda_1 \xi_1^0 t)\, e^{-\sigma_1 t}, \\ & \qquad \xi_4 = \left(\xi_4^0 - \lambda_2 \xi_3^0 t + \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \xi_1^0 t^2\right) e^{-\sigma_1 t}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

I fattori trascendenti $e^{\sigma_1 t}$, $e^{-\sigma_1 t}$ si possono sopprimere, e le (2) si riducono a funzioni di secondo grado del parametro t. Le trajettorie dunque sono coniche nei piani del fascio $\rho : x_4^0 x_2 - x_2^0 x_4 = 0$, e gl'inviluppi sono coni aventi i punti sulla punteggiata $r : \xi_2^0 \xi_1 - \xi_1^0 \xi_2 = 0$. I piani dell'asse ρ ed i punti del raggio r, aventi a comune il punto $\xi_1 = 0$ ed il piano $x_4 = 0$, sono i soli elementi uniti dell'omografia.

Cerchiamo se vi sono quadriche che si trasformano in sè stesse.

Se la quadrica $F = a_x^2$ si deve trasformare in sè stessa, applicando il criterio solito, si trova che dev'essere identicamente:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} \lambda_1 x_3 + \frac{\partial F}{\partial x_3} \lambda_2 x_4 \equiv 0.$$

Di qui le: a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, $a_{34} = 0$, $a_{14}\lambda_1 + a_{33}\lambda_2 = 0$. Da quest'ultima si trae poi, supposto data la quadrica soggetta alle prime cinque condizioni, per i coefficienti della trasformazione:

$$\lambda_1 = \mu a_{33}, \qquad \lambda_2 = - \mu a_{14}, \tag{3}$$

essendo μ fattore non nullo, e non potendo essere nulli nè a_{33} nè a_{14}.

L'equazione della quadrica dunque è:

$$F = a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 + 2 a_{14} x_1 x_4 + 2 a_{24} x_2 x_4 = 0, \tag{4}$$

o anche, posto $\nu = \frac{1}{\mu}$, per le (3)

$$\left.\begin{array}{l} F = a_{22} x_2^2 + a_{44} x_4^2 + 2\, a_{24} x_2 x_4 + \nu(\lambda_1 x_3^2 - 2\lambda_2 x_1 x_4) = 0. \\ \text{Analogamente:} \\ \Phi = \alpha_{22} \xi_2^2 + \alpha_{11} \xi_1^2 + 2 \alpha_{12} \xi_1 \xi_2 + n(\lambda_2 \xi_3^2 - 2 \lambda_1 \xi_1 \xi_4) \ (*). \end{array}\right\} \tag{4$^{\text{bis}}$}$$

La F appartiene ad un fascio individuato dalla coppia di piani

$$a_{22} x_2^2 + a_{44} x_4^2 + 2 a_{24} x_2 x_4 = 0,$$

per l'asse ρ e dal cono

$$\lambda_1 x_3^2 - 2 \lambda_2 x_1 x_4 = 0, \tag{5}$$

(l'unico del fascio), forme ambedue invarianti.

(*) L'equazione tangenziale di F è:

$$a_{33}(a_{22} a_{44} - a_{24}^2) \xi_1^2 - a_{33} a_{14}^2 \xi_2^2 - a_{22} a_{14}^2 \xi_3^2 + 2 a_{33} a_{14} a_{24} \xi_1 \xi_2 - 2 a_{33} a_{22} a_{14} \xi_1 \xi_4 = 0,$$

ch'è composta con le ξ come è composta la Φ: il che è ben naturale.

Oltre al cono (5) appartiene al sistema lineare ∞^3 di quadriche F anche il cono:

$$a_{44}x_4^2 + \nu(\lambda_1 x_3^2 - 2\lambda_2 x_1 x_4) = 0, \tag{6}$$

ossia determinando il rapporto $a_{44}:\nu$ in modo che il cono passi pel punto x^0:

$$\frac{\lambda_1 x_3^2 - 2\lambda_2 x_1 x_4}{x_4^2} = \frac{\lambda_1 x_3^{0^2} - 2\lambda_2 x_1^0 x_4^0}{x_4^{0^2}}\left(= -\frac{a_{44}}{\nu}\right). \tag{6^{bis}}$$

Questo cono contiene la trajettoria del punto x^0 data dalle equazioni (2).

Il piano $x_4 = 0$, tangente alla quadrica F, la taglia nelle due rette fornite dalle equazioni:

$$x_4 = 0, \qquad a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0. \tag{7}$$

Or queste rette sono coniugate armoniche rispetto alla coppia

$$x_4 = 0, \qquad x_2 = 0 \quad \text{cioè l'asse } \rho$$

$$x_4 = 0, \qquad x_3 = 0 \quad \text{cioè il raggio } r.$$

Dunque ρ ed r sono tangenti coniugate fisse rispetto a tutte le quadriche invarianti F.

Determinando le costanti di F in modo ch'essa passi pel punto x^0, avremo dunque che la trajettoria di x^0 è la conica comune al piano del fascio ρ: $x_4^0 x_2 - x_2^0 x_4 = 0$ ed alla corrispondente superficie F. Per quella trajettoria poi passano ∞^2 superficie F, chè il passaggio per x^0 equivale ad una sola condizione lineare delle tre di cui si può disporre per le F. Considerando il cono (6), o (6^{bis}), che pur contiene la trajettoria in questione, facciasi variare il punto x' in modo che il piano $x_4^0 x_2 - x_2^0 x_4 = 0$ non varii. Nasceranno altre trajettorie ed altri coni; ma come questi coni [n.° 3 equazione (4)] hanno tra loro un contatto del 3.° ordine lungo la generatrice $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, cioè lungo r, così le coniche suddette hanno anch'esse un contatto del 3.° ordine nel punto $\xi_1 = 0$ con la tangente comune ρ.

Possiamo anche assoggettare le quadriche F alla condizione che siano fisse per tutte la rette (7), il che richiede semplicemente

$$\frac{a_{22}}{\nu\lambda_1} = \frac{a_{22}}{a_{33}} = \lambda = \text{costante}.$$

Allora tutte le quadriche F si toccano lungo quelle stesse rette fisse: le sfere che si toccano in un punto, per esempio, sono in queste condizioni, e le rette comuni sono le rette che dal punto di contatto vanno ai punti ciclici del piano tangente.

Facciamo muovere adesso il piano intorno a ρ e la trajettoria ch'esso contiene. Il polo del piano mobile percorrerà la retta r. E se la posizione iniziale ξ^0 del piano ξ è quella del piano tangente ad F nel punto x^0, il piano ξ inviluppera il cono tangente ad F lungo la trajettoria ed avente il vertice in quel punto di r ch'è polo, rispetto ad F, del piano della trajettoria.

Avvengono dunque quì gli stessi movimenti che trovammo nel secondo caso del n.° 6: soltanto qui non vi sono invarianti assoluti e le due rette r e ρ si tagliano.

Questo caso è trattato anch'esso dal Lindemann a pag. 112 della Memoria sulla *Meccanica,* e posteriormente a pag. 498 e seguenti delle *Vorlesungen,* 2.ª parte, a proposito della *Geometria iperbolica.* Le formole di questo Autore non sono per altro le canoniche adoperate da me; ma le si possono ridurre facilmente con sostituzioni lineari. Certo è, ad ogni modo, che specialmente il fatto che nell'omografia le rette r e ρ sono raggi ed assi uniti e sono, oltre a ciò, tangenti coniugate e spigoli del tetraedro di riferimento, permette di seguir con l'intuizione i movimenti del gruppo come meglio non si potrebbe.

N. 10: [(1 1) (1 1)] ≡ [1 1].

Caso corrispondente al simbolo $|\overline{(1\,1\,1\,1)}\;1\,1|$.

Equazioni differenziali:

$$\left.\begin{array}{llll} x'_1=\sigma_1 x_1, & x'_2=\sigma_1 x_2, & x'_3=\sigma_3 x_3, & x'_4=\sigma_3 x_4 \\ \xi'_1=-\sigma_1\xi_1, & \xi'_2=-\sigma_1\xi_2, & \xi'_3=-\sigma_3\xi_3, & \xi'_4=-\sigma_3\xi_4, \end{array}\right\} \quad (1)$$

integrali:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1=x_1^0 e^{\sigma_1 t}, & x_2=x_2^0 e^{\sigma_1 t}, & x_3=x_3^0 e^{\sigma_3 t}, & x_4=x_4^0 e^{\sigma_3 t} \\ \xi_1=\xi_1 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_2=\xi_2^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_3=\xi_3^0 e^{-\sigma_3 t}, & \xi_4=\xi_4^0 e^{-\sigma_3 t}. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Gli elementi uniti sono tutti i punti e tutti i piani delle due rette unite

$$r\equiv\xi_1\cdot\xi_2\equiv x_3\cdot x_4, \qquad \rho\equiv\xi_3\cdot\xi_4\equiv x_1\cdot x_2.$$

Le trajettorie sono rette comuni ai piani dei fasci

$$x_2^0 x_1-x_1^0 x_2=0, \qquad x_4^0 x_3-x_3^0 x_4=0,$$

di assi ρ ed r, o congiungenti i punti delle punteggiate

$$\xi_2^0\xi_1-\xi_1^0\xi_2=0, \qquad \xi_4^0\xi_3-\xi_3^0\xi_4=0,$$

sui sostegni r e ρ. Si ha così una congruenza di 1.° ordine e di 1.ª classe (*geschaarte Collineation, prospettiva di 2.ª specie* di Battaglini, *omografia rigata* di Segre).

Questo gruppo trasforma in sè ognuno dei due fasci-schiera di quadriche

$$x_1 x_4 + \lambda x_2 x_3 = 0, \qquad x_1 x_3 + \lambda' x_2 x_4 = 0.$$

Anche il sistema lineare ∞^3 di quadriche

$$F(x) \equiv a_{13} x_1 x_3 + a_{14} x_1 x_4 + a_{23} x_2 x_3 + a_{24} x_2 x_4 = 0,$$

si muta in sè stesso. Le quadriche passano per r e ρ. Il sistema tangenziale ha la stessa forma.

Essendo poi le equazioni differenziali in coordinate di rette

$$p'_{12} = 2\sigma_1 p_{12}, \qquad p'_{34} = 2\sigma_3 p_{34}, \qquad p'_{23} = (\sigma_1 + \sigma_3) p_{23}, \qquad p'_{14} = (\sigma_1 + \sigma_3) p_{14}$$
$$p'_{31} = (\sigma_1 + \sigma_3) p_{31}, \qquad p'_{24} = (\sigma_1 + \sigma_3) p_{24},$$

si vede che la serie ∞^3 di complessi lineari

$$\alpha_{24} p_{13} + \alpha_{23} p_{14} + \alpha_{14} p_{23} + \alpha_{13} p_{24} = 0,$$

è unita. A questi complessi appartengono le due rette r e ρ. Ognuno di questi complessi o contiene due generatrici della quadrica o le contiene tutte. Questo secondo caso avviene solo quando sia $\alpha_{ij} \equiv a_{hk}$, essendo ij ed hk combinazioni diverse.

All'altro simbolo $\{\overline{(1\,1\,1\,1)\;(1\,1)}\}$ non corrispondono, nè anche quì, trasformazioni del gruppo. Dovrebbero essere uniti: il fascio-schiera di quadriche

$$x_1 x_2 + \mu x_3 x_4 = 0,$$

ed il fascio di complessi

$$p_{12} + k p_{34} = 0.$$

Dovrebbe dunque essere

$$e^{2\sigma_1 t} = e^{2\sigma_3 t};$$

ciò che è assurdo perchè σ_1 è diverso da σ_3.

Al solito, questo caso si presenta in una omografia generale per la quale fosse

$$\sigma_3 = -\sigma_1,$$

cioè per l'omografia involutoria. Dunque nel gruppo non vi sono omografie involutorie.

N. 11: $[(2\,2)] \equiv [(1\,1)]$.

Equazioni differenziali:

$$\left.\begin{array}{lll} x'_1 = \sigma_1 x_1 + \lambda_1 x_3, & x'_2 = \sigma_1 x_2 + \lambda_2 x_4, & x'_3 = \sigma_1 x_3, \\ & x'_4 = \sigma_1 x_4 & \\ \xi'_1 = -\sigma_1 \xi_1, & \xi'_2 = -\sigma_1 \xi_2, & \xi'_3 = -\sigma_1 \xi_3 - \lambda_1 \xi_1, \\ & \xi'_4 = -\sigma_1 \xi_4 - \lambda_2 \xi_2, & \end{array}\right\} \quad (1)$$

integrali:

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 = (x_1^0 + \lambda_1 x_3^0 t) e^{\sigma_1 t}, & x_2 = (x_2^0 + \lambda_1 x_4^0 t) e^{\sigma_1 t}, & x_3 = x_3^0 e^{\sigma_1 t}, \\ & x_4 = x_4^0 e^{\sigma_1 t} & \\ \xi_1 = \xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_2 = \xi_2^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_3 = (\xi_3^0 - \lambda_1 \xi_1^0 t) e^{-\sigma_1 t}, \\ & \xi_4 = (\xi_4^0 - \lambda_2 \xi_2^0 t) e^{-\sigma_1 t}, & \end{array}\right\} \quad (2)$$

mentre gli elementi uniti sono tutti i punti ed i piani dell'unica retta

$$\xi_1 \cdot \xi_2 \equiv x_3 \cdot x_4,$$

nella quale coincidono r e ρ.

Dalle (2) si possono sopprimere i fattori $e^{\sigma_1 t}$, $e^{-\sigma_1 t}$, ed esse fanno vedere che le trajettorie sono rette appoggiantisi ad r, formanti una congruenza a direttrici coincidenti.

Questa è l'*omografia rigata speciale* di SEGRE.

Si trova poi che si trasforma in sè stesso il sistema lineare ∞^3 di quadriche

$$F(x) \equiv a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 + 2 a_{34} x_3 x_4 + m(\lambda_2 x_1 x_4 - \lambda_1 x_2 x_3) = 0,$$

ed il sistema tangenziale:

$$\Phi(\xi) \equiv \alpha_{11} \xi_1^2 + \alpha_{22} \xi_2^2 + 2 \alpha_{12} \xi_1 \xi_2 + \mu(\lambda_2 \xi_2 \xi_3 - \lambda_1 \xi_1 \xi_4) = 0.$$

Queste quadriche (*) si toccano lungo la retta $r \equiv \rho$ e si tagliano secondo due rette, mobili, dell'altro sistema. Le trajettorie sono rette di queste quadriche di sistema opposto alla $r \equiv \rho$: basta far passare F per x^0 o far toccare Φ da ξ_0, perchè la trajettoria-raggio di x^0 (l'inviluppo-asse di ξ^0) sia posta su F (su Φ).

(*) CLEBSCH-LINDEMANN, Vorles., 2.ª parte, pag. 230-31, n.° 11.

Si trova pure che la serie lineare ∞^3 di complessi:

$$\beta(\lambda_1 p_{23} + \lambda_2 p_{14}) + \beta_{24} p_{13} + \beta_{13} p_{24} + \beta_{12} p_{31} = 0,$$

si trasforma in sè.

Il complesso è speciale se

$$\lambda_1 \lambda_2 \beta^2 - \beta_{13} \beta_{24} = 0:$$

in ogni caso la retta $\xi_1 \cdot \xi_2 \equiv r \equiv \rho$ appartiene al complesso.

N. 12: $[(1\,1\,1)\ 1] \equiv [2\ 0]$, $\{(1\,1\,1)\ (1\,1\,1)\}$.

Equazioni differenziali:

$$x'_1 = \sigma_1 x_1, \qquad x'_2 = \sigma_1 x_2, \qquad x'_3 = \sigma_1 x_3, \qquad x'_4 = \sigma_4 x_4$$

$$\xi'_1 = -\sigma_1 \xi_1, \qquad \xi'_2 = -\sigma_1 \xi_2, \qquad \xi'_3 = -\sigma_1 \xi_3, \qquad \xi'_4 = -\sigma_4 \xi_4,$$

integrali:

$$x_1 = x_1^0 e^{\sigma_1 t}, \qquad x_2 = x_2^0 e^{\sigma_1 t}, \qquad x_3 = x_3^0 e^{\sigma_1 t}, \qquad x_4 = x_4^0 e^{\sigma_4 t}$$

$$\xi_1 = \xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, \qquad \xi_1 = \xi_2^0 e^{-\sigma_1 t}, \qquad \xi_3 = \xi_3^0 e^{-\sigma_1 t}, \qquad \xi_4 = \xi_4^0 e^{-\sigma_4 t}.$$

Gli elementi uniti sono:

il punto $\xi_4 = 0$ come centro di una stella unita,
il piano $x_4 = 0$ come sostegno di un sistema piano unito.

Questa è l'omologia solida ordinaria (*prospettiva di 3.ª specie* di Battaglini). Le rette per $\xi_4 = 0$ (centro d'omologia) o le rette in $x_4 = 0$ (piano d'omologia) sono le trajettorie o gl'inviluppi (caratteristiche di punti o di piani).

Sono quadriche unite tutti i coni in $\xi_4 = 0$ e tutte le coniche in $x_4 = 0$.

Abbiamo poi le altre equazioni differenziali in coordinate-raggi di rette

$$p'_{23} = 2\sigma_1 p_{23}, \qquad p'_{31} = 2\sigma_1 p_{31}, \qquad p'_{12} = 2\sigma_1 p_{12}$$

$$p'_{14} = (\sigma_1 + \sigma_4) p_{14}, \qquad p'_{24} = (\sigma_1 + \sigma_4) p_{24}, \qquad p'_{14} = (\sigma_1 + \sigma_4) p_{34}.$$

(e dualmente $\pi'_{14} = 2\sigma_1 \pi_{14}$, $\pi'_{23} = (\sigma_1 + \sigma_4)\pi_{23}$ ecc.).

Onde si vede che i due complessi speciali

$$A \equiv a_{14} p_{23} + a_{24} p_{31} + a_{34} p_{12} = 0$$

$$B \equiv b_{23} p_{14} + b_{31} p_{24} + b_{12} p_{34} = 0,$$

sono uniti. Il primo complesso individua una retta a le cui coordinate-raggi sono $(0, 0, 0, a_{14}, a_{24}, a_{34})$ e che, dunque, passa pel centro ξ_4 di omologia; la retta b individuata dal secondo complesso ha per coordinate-raggi $(b_{23}, b_{31}, b_{12}, 0, 0, 0)$ e giace nel piano $x_4 = 0$ di omologia (*). Le rette a, b sono in generale sghembe, perchè in generale non è nullo l'invariante:

$$a_{14} b_{23} + a_{24} b_{31} + a_{34} b_{12},$$

e sono direttrici di una congruenza comune ai due complessi speciali. Questa congruenza degenera in un fascio di raggi se a e b si tagliano.

Inoltre due complessi corrispondenti si possono scrivere:

$$A + B = 0, \qquad e^{2\sigma_1 t} A + e^{(\sigma_1 + \sigma_4)t} B = 0;$$

e si vede da ciò ch'essi si tagliano nella congruenza precedente.

N. 13: $[(2\,1\,1)] \equiv [(2\,0)]$, $\{(\overline{2\,2\,1\,1})\}$.

Equazioni differenziali:

$$\left.\begin{array}{llll} x'_1 = \sigma_1 x_1 + \lambda_1 x_4, & x'_2 = \sigma_1 x_2 & x'_3 = \sigma_1 x_3, & x'_4 = \sigma_1 x_4 \\ \xi'_1 = -\sigma_1 \xi_1, & \xi'_2 = -\sigma_1 \xi_2, & \xi'_3 = -\sigma_1 \xi_3, & \xi'_4 = -\sigma_1 \xi_4 - \lambda_1 \xi_1, \end{array}\right\} \quad (1)$$

integrali:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 = (x_1^0 + \lambda_1 x_4^0 t) e^{\sigma_1 t}, & x_2 = x_2^0 e^{\sigma_1 t}, & x_3 = x_3^0 e^{\sigma_1 t}, & x_4 = x_4^0 e^{\sigma_1 t} \\ \xi_1 = \xi_1^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_2 = \xi_2^0 e^{-\sigma_1 t}; & \xi_3 = \xi_3^0 e^{-\sigma_1 t}, & \xi_4 = (\xi_4^0 - \lambda_1 \xi_1^0 t) e^{-\sigma_1 t}. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Questa è pure un'omologia, ma quella detta *speciale,* nella quale il centro è $\xi_1 = 0$ ed il piano è $x_4 = 0$ che contiene il centro.

Quadriche unite (coni e coniche) come precedentemente.

Abbiamo poi:

$$\left.\begin{array}{lll} p'_{12} = 2\sigma_1 p_{12} - \lambda_1 p_{24}, & p'_{13} = 2\sigma_1 p_{13} - \lambda_1 p_{34}, & p'_{14} = 2\sigma_1 p_{14} \\ p'_{23} = 2\sigma_1 p_{23}, & p'_{24} = 2\sigma_1 p_{24}, & p'_{34} = 2\sigma_1 p_{34}; \end{array}\right\} \quad (3)$$

onde il complesso unito, appartenente ad una serie lineare ∞^3,

$$B \equiv b_{23} p_{14} + b_{14} p_{23} + b_{31} p_{24} + b_{12} p_{34} = 0.$$

Se poi:

$$C \equiv b_{23} p_{14} + b_{31} p_{24} + b_{12} p_{34} + b_{14} p_{23} + b_{24} p_{31} + b_{34} p_{12} = 0,$$

(*) SEGRE, *Ricerche,* ecc., pag. 17.

è l'equazione di un complesso qualunque, quella del suo corrispondente si ottiene, dopo aver eseguita l'integrazione delle (3), sotto la forma:

$$\Gamma \equiv e^{2\sigma_1 t} \cdot C + e^{2\sigma_1 t} \lambda_1 [b_{24} p_{34} - b_{34} p_{24}] t = 0.$$

Di quì intanto si conclude che il complesso C sarà unito, diverrà, cioè, B, se $b_{24} = b_{34} = 0$. In ogni altro caso Γ è una combinazione lineare dei due

$$C = 0 \quad \text{e} \quad b_{24} p_{34} - b_{34} p_{24} = 0,$$

che possiamo scrivere anche, posto $s = \frac{1}{\lambda_1 t}$, così:

$$\Gamma = s\,C + b_{24} p_{34} - b_{34} p_{24} = 0.$$

Per determinare i complessi speciali si ha l'equazione

$$(b_{14} b_{23} + b_{24} b_{31} + b_{34} b_{12}) s^2 = 0. \tag{4}$$

Pel valore doppio $s = 0$ si ha dunque il complesso speciale (direttrici infinitamente vicine della congruenza)

$$b_{24} p_{34} - b_{34} p_{24} = 0,$$

che rappresenta una retta le cui coordinate-raggi q_{ij} sono:

$$q_{12} = b_{24}, \qquad q_{31} = - b_{34},$$

e le altre q_{ij} sono nulle.

Or queste sono le coordinate di una retta per ξ_1 nel piano $x_4 = 0$.

L'equazione (4) in s è identica se è nullo l'invariante

$$b_{14} b_{23} + b_{24} b_{31} + b_{34} b_{12} = 0,$$

cioè se il complesso C è speciale saranno allora speciali tutti i complessi Γ (*).

(*) Il dott. Enriques m'inviò, durante la redazione della mia Memoria, un suo lavoro pubblicato negli Atti del R. Istituto Veneto: *Le superficie con infinite trasformazioni projettive in sè stesse.* Il titolo stesso dinota la differenza del soggetto mio da quello dell'egregio dott. Enriques, malgrado analogie sostanziali. Le superficie esaminate dal dott. Enriques sono degnissime di studio, anche, come mi scriveva l'Autore, dal punto di vista della geometria differenziale (per le assintotiche, per esempio).

§ 3. Gruppi in coordinate non omogenee. Osservazioni.

Volendo adoperar le coordinate cartesiane, alle quali sole restringerò oramai il mio dire, si ha gran vantaggio nel mandare all'∞ un piano unito corrispondente ad una radice della maggior moltiplicità possibile.

Adottando in questo caso il simbolo

$$Uf \equiv \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\equiv \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z},$$

si ha:

$$\frac{dx}{dt} = \xi, \qquad \frac{dy}{dt} = \eta, \qquad \frac{dz}{dt} = \zeta.$$

Le funzioni ξ, η, ζ si calcolano subito, caso per caso, partendo dalle coordinate non omogenee, nel modo seguente.

Pongasi per esempio:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \qquad y = \frac{x_2}{x_4}, \qquad z = \frac{x_3}{x_4}.$$

Abbiamo, per le (1) del § 1,

$$\xi = \frac{dx}{dt} = \frac{x_4(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) - x_1(a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4)}{x_4^2}$$

$$= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} - x(a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}).$$

Simili espressioni si avranno per le $\eta = \frac{dy}{dt}$, $\zeta = \frac{dz}{dt}$.

Onde:

$$Uf = [a_{11}x + \cdots - x(a_{41}x + \cdots)]\frac{\partial f}{\partial x} + [a_{21}x + \cdots - y(a_{41}x + \cdots)]\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$+ [a_{31}x + \cdots - z(a_{41}x + \cdots)]\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Cosicchè dal simbolo

$$Xf = \frac{\partial f}{\partial x_1}\sum_k a_{1k}x_k + \frac{\partial f}{\partial x_2}\sum_k a_{2k}x_k + \frac{\partial f}{\partial x_3}\sum_k a_{3k}x_k + \frac{\partial f}{\partial x_4}\sum_k a_{4k}x_k,$$

nascerà il simbolo Uf (*) sottraendo dai coefficienti di $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ i prodotti di x_1, x_2, x_3 pel coefficiente di $\frac{\partial f}{\partial x_4}$, sopprimendo in Xf il termine in $\frac{\partial f}{\partial x_4}$ e ponendo in ultimo $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = 1$.

Seguono i 13 tipi $U_i f$ ($i = 1, \ldots, 13$). Avverto che Uf si può moltiplicare per un fattore costante.

[1 1 1 1]

$$U_1 f = (\sigma_1 - \sigma_4) x \frac{\partial f}{\partial x} + (\sigma_2 - \sigma_4) y \frac{\partial f}{\partial y} + (\sigma_3 - \sigma_4) z \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$= \alpha x \frac{\partial f}{\partial x} + \beta y \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Le trasformazioni per le quali

$$\alpha = \beta + \gamma,$$

cioè:

$$\sigma_1 + \sigma_4 = \sigma_2 + \sigma_3 \qquad \text{[§ 2, n.° 1 equazione (10)]},$$

mutano in sè stesse le quadriche

$$a_{11} x + 2 a_{23} yz = 0;$$

quelle per le quali

$$\alpha + \beta = 0,$$

(*) L'equazione $Uf = 0$ alle derivate parziali ad un numero qualunque di variabili fu integrata da Hesse, nel 25.° vol. del Giornale di Crelle, subito dopo che Jacobi ebbe integrata, nel vol. 24, l'equazione differenziale ordinaria a due variabili x, y che porta il suo nome, ed il cui integrale fornisce appunto curve W piane. Vedansi, oltre i già citati, anche i seguenti lavori o libri:

Lebesgue, tom. 10 del Journal de Liouville, pag. 316-319.

Darboux, *Mémoire sur les équations différentielles*, etc. nel Bulletin des Sciences mathématiques, 12.me série, tom. 2.e, année 1878.

Boole, *A treatise on differential equations*, 1859.

Jordan, *Cours d'Analyse*, tom. 3, pag. 36 e pag. 164, dove riporta il metodo di Cauchy pel sistema d'equazioni differenziali ordinarie cui dà luogo la $Uf = 0$.

Serret, *Calcolo integrale*.

Fouret, Comptes Rendus, tom. 77, 1.° sem., pag. 693 e pag. 1837.

Battaglini, *Sulla geometria proiettiva*, Memoria 3.a, Accad. di Napoli, 1875. — *Sui connessi ternarii* (1, 1), Ibid., 1880.

mutano in sè stessi i cilindri

$$xy - k = 0;$$

e finalmente quelle per le quali

$$\alpha + \beta = 2\gamma, \tag{1}$$

mutano in sè i coni

$$xy - kz^2 = 0. \tag{2}$$

Giova in questo caso, volendo fare un esempio, supporre prima di tutto α e β immaginari coniugati, γ reale, poi i piani uniti x ed y coincidenti coi piani ciclici per l'asse z.

Scriveremo allora prima $U_1 f$ e (2) sotto la forma:

$$U_1 f = \alpha \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + \beta \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} + \gamma z \frac{\partial f}{\partial z} \tag{3}$$

$$\xi \eta - kz^2 = 0, \tag{4}$$

indi porremo, d'accordo con la (1),

$$\alpha = \gamma + \mu i, \qquad \beta = \gamma - \mu i \tag{5}$$

$$\xi = x + yi, \qquad \eta = x - yi. \tag{6}$$

Le equazioni integrali

$$\xi = \xi_0 e^{\alpha t}, \qquad \eta = \eta_0 e^{\beta t}, \qquad z = z_0 e^{\gamma t},$$

diventano:

$$x + iy = (x_0 + iy_0) e^{(\gamma + \mu i) t}, \qquad z = z_0 e^{\gamma t}, \tag{7}$$

(il valore di η essendo coniugato a quello di ξ è inutile scriverlo). Di qui si hanno le

$$\left.\begin{array}{c} x = (x_0 \cos \mu t - y_0 \operatorname{sen} \mu t) e^{\gamma t}, \qquad y = (x_0 \operatorname{sen} \mu t + y_0 \cos \mu t) e^{\gamma t} \\ z = z_0 e^{\gamma t}. \end{array}\right\} \tag{8}$$

La (4) con le sostituzioni (6) diviene:

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_0^2} = k, \tag{9}$$

determinando k in modo che il cono passi pel punto iniziale $x_0\ y_0\ z_0$: il cono è di rotazione intorno all'asse unito z.

La curva (8) giace sul cono (9) ed è la cosidetta spirale conica, elica conica, lossodromia del cono di rotazione, perchè si dimostra facilmente che questa curva forma angolo costante così con le generatrici come coi piani meridiani del cono.

Le x ed y delle equazioni (8) rappresentano la proiezione dell'elica conica sul piano perpendicolare all'asse del cono: essa è una spirale logaritmica. L'equazione di questa curva in coordinate polari ρ e φ, se τ è l'angolo costante del raggio vettore e della tangente è:

$$\rho = \rho_0 e^{(\varphi - \varphi_0)\cot\tau}, \tag{10}$$

dove ρ_0 è il raggio vettore corrispondente al valore φ_0.

La prima delle (7) moltiplicata per la coniugata da

$$\rho = \rho_0 e^{\gamma t},$$

e questa paragonata con la (10) porge:

$$t = \varphi - \varphi_0, \qquad \cot\tau = \gamma,$$

la quale ultima equazione dà il significato di γ.

Volendo trasformare il simbolo $U_1 f$ nelle nuove coordinate x, y, z, siccome nel termine $\gamma z \frac{\partial f}{\partial z}$ x ed y non entrano esplicitamente, basterà trasformare il binomio

$$Af \equiv \alpha\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + \beta\eta \frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

Esprimendo dalle (6) le x ed y con ξ ed η si ha:

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \qquad y = \frac{1}{2i}(\xi - \eta),$$

onde poi

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Cosicchè successivamente:

$$\left.\begin{aligned} Af &= \frac{1}{2}(\alpha\xi + \beta\eta)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}(\alpha\xi - \beta\eta)\frac{\partial f}{\partial y} \\ &= (\gamma x - \mu y)\frac{\partial f}{\partial x} + (\gamma y + \mu x)\frac{\partial f}{\partial y}; \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

perciò:

$$U_1 f = (\gamma x - \mu y)\frac{\partial f}{\partial x} + (\gamma y + \mu x)\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Questo è il simbolo della « Spiraltransformation » (KLEIN: *Einleitung in die* *höhere Geom. II,* pag. 221-243; ed anche Lie-Scheffers: *Vorles. über continuirliche Gruppen,* pag. 414), e si può scriverlo così:

$$U_1 f = \mu\left(-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \gamma\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Il coefficiente di μ è il simbolo della rotazione intorno all'asse z (dell'asse x verso l'asse y) ed il coefficiente di γ è il simbolo di una omotetia rispetto all'origine (vedansi appresso i simboli $U'_6 f$, $U_{12} f$). Perciò la trasformazione si compone di una rotazione intorno ad un asse *sommata* con una omotetia solida il cui centro è su quell'asse.

[2 1 1].

Qui il piano unito doppio è $x_2 = 0$; onde in questo caso giova porre:

$$z = \frac{x_1}{x_2}, \qquad \xi = \frac{x_3}{x_2}, \qquad \eta = \frac{x_4}{x_2},$$

ed abbiamo:

$$U_2 f = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z} + (\sigma_3 - \sigma_2)\xi\frac{\partial f}{\partial \xi} + (\sigma_4 - \sigma_2)\eta\frac{\partial f}{\partial \eta}. \tag{12}$$

Un caso molto importante si ha allorchè le radici σ_3, σ_4 sono immaginarie coniugate e si cercano quelle trasformazioni per le quali

$$2\sigma_2 = \sigma_3 + \sigma_4, \tag{13}$$

nel qual caso (vedi n.° 2 del § 2) si mutano in sè i fasci-schiere di coni e di coniche

$$x_3 x_4 + \lambda x_2^2 = 0, \qquad \xi_3\xi_4 + l\xi_1^2 = 0; \tag{14}$$

e, di più, come precedentemente

$$\xi = x + iy, \qquad \eta = x - iy.$$

Compatibilmente con (13) poniamo allora:

$$\sigma_3 = \sigma_2 + \mu i, \ \sigma_4 = \sigma_2 - \mu i.$$

Le equazioni integrali sono in questo caso

$$\xi = \xi_0 e^{\mu i t}, \qquad \eta = \eta_0 e^{-\mu i t}, \qquad z = z_0 + \lambda_1 t,$$

onde in coordinate x, y, z

$$x = x_0 \cos\mu t - y_0 \operatorname{sen}\mu t, \qquad y = x_0 \operatorname{sen}\mu t + y_0 \operatorname{sen}\mu t, \qquad z = z_0 + \lambda_1 t. \tag{15}$$

Il simbolo $U_2 f$ si trasforma così:

$$U_2 f = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z} + \mu i \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} - \mu i \eta \frac{\partial f}{\partial \eta},$$

e, dalla (11) ponendovi $\gamma = 0$,

$$U_2 f = \mu \left(- y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z}. \tag{16}$$

Le curve (15) sono eliche tracciate sul cilindro retto circolare (14), cioè:

$$\xi \eta + \lambda \equiv x^2 + y^2 + \lambda,$$

dove $\lambda = -(x_0^2 + y_0^2)$; ed il simbolo $U_2 f$ è quello del movimento elicoidale intorno all'asse z, composto della rotazione intorno ad esso e della traslazione lungo esso.

[3 1].

Qui il piano unito triplo è $x_3 = 0$; onde si porrà:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3}, \qquad z = \frac{x_4}{x_3},$$

cosicchè:

$$U_3 f = \lambda_1 y \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial y} + (\sigma_4 - \sigma_1) z \frac{\partial f}{\partial z}. \tag{17}$$

[2 2].

I piani uniti doppi son due $x_2 = 0$, $x_4 = 0$, cosicchè possiamo porre:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \qquad y = \frac{x_2}{x_4}, \qquad z = \frac{x_3}{x_4},$$

per ottenere poi

$$U_4 f = [(\sigma_1 - \sigma_3) x + \lambda_1 y] \frac{\partial f}{\partial x} + (\sigma_1 - \sigma_3) y \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial z}.$$

[4].

Qui manderemo all'∞ il piano $x_4 = 0$ ed avremo:

$$U_5 f = \lambda_1 y \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 z \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_3 \frac{\partial f}{\partial z}, \tag{18}$$

pel gruppo le cui trajettorie sono cubiche gobbe esclusivamente.

[(1 1) 1 1].

I piani corrispondenti alla radice doppia sono quelli del fascio $\rho \equiv x_1 \cdot x_2$: porremo perciò:

$$z = \frac{x_2}{x_1}, \qquad x = \frac{x_3}{x_1}, \qquad y = \frac{x_4}{x_1},$$

cosicchè l'asse ρ dei piani uniti cade all'∞ sul piano $z = 0$, mentre il luogo dei punti uniti è l'asse delle z ($\equiv x,\ y = 0$).

Onde avremo qui

$$U_6 f = (\sigma_3 - \sigma_1) x \frac{\partial f}{\partial x} + (\sigma_4 - \sigma_1) y \frac{\partial f}{\partial y}, \tag{19}$$

per essere:

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Avremo dunque nei piani $z =$ costante delle curve, proiettate in vera forma sul piano xy, trajettorie del gruppo piano generale projettivo del tipo:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial f}{\partial y},$$

avendo posto, il che è lecito, $\alpha = \frac{\sigma_4 - \sigma_1}{\sigma_3 - \sigma_1}$.

Le trajettorie del gruppo sono coniche se la $U_6 f$ si sceglie tra quelle per le quali [n.° 6 equazione (5)]

$$2\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_4. \tag{20}$$

Allora il gruppo avrà l'espressione semplicissima ($\alpha = -1$)

$$U'_6 f = x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{21}$$

Le proiezioni delle trajettorie sui piani $z =$ cost. saranno le coniche

$$xy = x_0 y_0, \tag{22}$$

mentre poi le quadriche F invarianti hanno per equazione:

$$F = a_{11} + a_{22} z^2 + 2 a_{12} z + 2 a_{34} xy = 0,$$

e conterranno le curve (22) se

$$F_0 = a_{11} + a_{22} z_0^2 + 2 a_{12} z_0 + 2 a_{34} x_0 y_0 = 0.$$

In particolare a questo tipo appartiene il gruppo delle rotazioni intorno all'asse z. Soltanto bisogna supporre, d'accordo con (20)

$$\sigma_3 = \sigma_1 + \mu i, \qquad \sigma_4 = \sigma_1 - \mu i,$$

e di più, al solito,

$$x = X + Yi, \qquad y = X - Yi.$$

Allora il simbolo $U_6 f$ [vedi innanzi nell'equazione (11) pel simbolo Af ponendovi $\gamma = 0$] si muta nell'altro:

$$U''_6 f = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial x}, \tag{23}$$

avendo scritto qui x, y in luogo di X, Y.

La F poi diviene:

$$F = a_{11} + a_{22} z^2 + 2 a_{12} z + 2 a_{34}(x^2 + y^2) = 0,$$

equazione di una quadrica di rotazione intorno all'asse z.

[(1 1) 2].

Qui si faccia:

$$x = \frac{x_4}{x_2}, \qquad y = \frac{x_3}{x_2}, \qquad z = \frac{x_1}{x_2},$$

e si otterrà:

$$U_7 f = (\sigma_3 - \sigma_1) x \frac{\partial f}{\partial x} + [(\sigma_3 - \sigma_1) y + \lambda_1 x] \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Questo gruppo è quello di quell'omografia nel piano $z = \text{cost.}$ [o nella proiezione su $z = 0$] che ha il simbolo [2 1], possiede, cioè, una retta unita semplice nell'asse ρ all'∞, poi l'unica altra retta unita doppia nell'asse y, infine un punto unito semplice nell'origine ed il doppio all'∞ sull'asse y.

[(2 1) 1].

Ponendo:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_4}{x_3}, \qquad z = \frac{x_2}{x_3},$$

si ha:

$$U_8 f = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x} + (\sigma_4 - \sigma_1) y \frac{\partial f}{\partial y}$$

Osservazione. I due gruppi $U_7 f$ ed $U_8 f$ sono rispettivamente riducibili alla forma:

$$U'_7 f = x \frac{\partial f}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad U'_8 f = \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial t}{\partial y};$$

perchè basta porre:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{nel primo} & y = Y, \quad \lambda_1 x = (\sigma_3 - \sigma_1) X & \text{e dividere poi per } \sigma_3 - \sigma_1 \\ \text{nel secondo} & y = Y, \quad (\sigma_4 - \sigma_1) x = \lambda_1 X & \text{e dividere poi per } \sigma_4 - \sigma_1. \end{array}\right\} \quad (24)$$

e scrivere di nuovo lettere minuscole.

Or le trasformazioni del tipo $U'_8 f$ hanno per elementi uniti i due punti all'∞ sugli assi delle coordinate la retta all'∞ (come doppia) e l'asse delle x (come semplice).

Adunque tra i due gruppi non v'è che scambio di nomi per gli elementi uniti; perciò i due gruppi, in quanto all'omografia che producono sui piani $z =$ cost. appartengono allo stesso tipo. E da $U'_7 f$ si deduce $U'_8 f$ (*) ponendo:

$$x' = -\frac{y}{x}, \qquad y' = \frac{1}{x},$$

onde:

$$x = \frac{1}{y'}, \qquad y = -\frac{x'}{y'},$$

e perciò:

$$U'_7 f = -\frac{\partial f}{\partial x'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

La sostituzione, estesa a tutto lo spazio, non è però lineare. Tornando infatti alle coordinate omogenee e chiamando x'_i le variabili cui si riferisce il gruppo $U_8 f$ x_i quelle cui si riferisce U_7, si deduce, ritenendo le stesse z:

$$x' = \frac{x'_1}{x'_3} = -\frac{x_3}{x_4}, \qquad y' = \frac{x'_4}{x'_3} = \frac{x_2}{x_4}, \qquad z' = \frac{x'_2}{x'_3} = z = \frac{x_1}{x_2},$$

onde la trasformazione dell'uno nell'altro spazio:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = -x_2 x_3 : x_1 x_4 : x_2 x_{.} : x_2^2,$$

ch'è quadratica così come la sua inversa.

(*) Vedasi LIE-SCHEFFERS: passim.

[(3 1)].

Qui abbiamo a porre:

$$x = \frac{x_3}{x_4}, \quad y = \frac{x_1}{x_4}, \quad z = \frac{x_2}{x_4},$$

per ottenere subito:

$$U_9 f = \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 x \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Questo gruppo, nei piani $z =$ costante, è del tipo

$$U'_9 f = \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y},$$

corrispondente all'omografia piana [3], con una retta sola unita all'∞ e con un sol punto all'∞ quello dell'asse y.

[(1 1) (1 1)].

Fatto:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4},$$

abbiamo:

$$U_{10} f = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y},$$

omotetia nei piani $z =$ cost.

[(2 2)].

Qui:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4},$$

donde:

$$U_{11} f = \lambda_1 z \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

[(1 1 1) 1].

Ponendo:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4},$$

si trova:

$$U_{12} f = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Se poi si fa:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3}, \qquad z = \frac{x_4}{x_3},$$

si trova:

$$U'_{12} f = z \frac{\partial f}{\partial z},$$

$U_{12} f$ è il gruppo delle omotetie solide intorno all'origine, $U'_{12} f$ è il gruppo delle affinità solide secondo l'asse z.

[(2 1 1)].

Ponendo:

$$z = \frac{x_1}{x_4}, \qquad x = \frac{x_2}{x_4}, \qquad y = \frac{x_3}{x_4},$$

si trova:

$$U_{13} f = \frac{\partial f}{\partial z},$$

che è il gruppo delle traslazioni parallelamente all'asse z.

I primi cinque gruppi sono quelli già discussi del sig. Tannenberg, salvo la diversa scrittura e l'ordine, chè il nostro quarto gruppo è il terzo di quell'autore, e salvo altresì qualche fattore costante o qualche mutamento nelle unità di misura.

Per esempio nel tipo:

$$U_4 f = [(\sigma_1 - \sigma_3) x + \lambda_1 y] \frac{\partial f}{\partial x} + (\sigma_1 - \sigma_3) y \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial z},$$

basta scrivere:

$$x = X, \qquad y = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\lambda_1} Y, \qquad z = \frac{\lambda_2}{\sigma_1 - \sigma_3} Z,$$

analogamente a (24), per ottenere il tipo:

$$(X + Y) \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z},$$

ch'è il terzo del Tannenberg.

Roma, luglio 1894.

La trasformazione, d'ordine pari, delle funzioni ellittiche.

(*Di* FRANCESCO BRIOSCHI, *in Milano.*)

1. La trasformazione, d'ordine pari, delle funzioni ellittiche, e la ricerca delle corrispondenti equazioni modulari, fu scarsamente considerata fin qui dagli analisti. Quanto di più esteso fu scritto intorno a questo argomento trovasi nella interessante Memoria del sig. KIEPERT, *Ueber die Transformation der elliptischen Functionen bei zusammengesetztem Transformationsgrade* (Math. Annalen, Bd. 32, 1888), ma le equazioni modulari delle quali l'Autore si occupa, come precedentemente a lui aveva fatto il sig. GIERSTER nella sua *Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrad* (*), sono quelle denominate del moltiplicatore o Jacobiane.

Data l'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^3-\gamma_2 y-\gamma_3}}=\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2 x-g_3}}, \tag{1}$$

sono integrali algebrici della medesima: 1.° Supponendo n dispari l'equazione:

$$y=\frac{U(x)}{T^2(x)},$$

nella quale:

$$T(x)=x^{\frac{n-1}{2}}+\alpha_1 x^{\frac{n-3}{2}}+\cdots+\alpha_{\frac{n-1}{2}}, \tag{2}$$

ed

$$U(x)=[nx+2\alpha_1]T^2-\frac{1}{2}\varphi'(x)TT'-\varphi(x)[TT''-T'^2],$$

essendo $\varphi(x)=4x^3-g_2x-g_3$, $T'=\frac{dT}{dx}$, $T''=\frac{d^2T}{dx^2}$.

(*) Math. Annalen, Bd. 21.

2.° Nel caso di n pari:

$$y = \frac{V(x)}{(x-e)P^2(x)},$$

nella quale:

$$P(x) = x^{\frac{n}{2}-1} + a_1 x^{\frac{n}{2}-2} + \cdots + a_{\frac{n}{2}-1}, \tag{3}$$

e

$$V(x) = (x-e)\left\{[(n-1)x + 2a_1]P^2 - \frac{1}{2}\varphi'(x)PP' - \varphi(x)(PP'' - P'^2)\right\} + hP^2,$$

essendo e una delle radici della equazione $\varphi(x) = 0$ ed $h = 3e^2 - \frac{1}{4}g_2$.

Indicando con σ_1, σ_2,... le somme delle potenze delle radici dell'equazione $T(x) = 0$, e con s_1, s_2,... le analoghe somme per l'equazione $P(x) = 0$, si hanno per n dispari:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_2 &= 120\sigma_2 - (5n-6)g_2 \\ \gamma_3 &= 280\sigma_3 - 42g_2\sigma_1 - (14n-15)g_3, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

e per n pari:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_2 &= 120s_2 - (5n-6)g_2 + 60e^2 \\ \gamma_3 &= 280s_3 - 42g_2s_1 - (14n-50)g_3 + 14g_2e, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ed in conseguenza denominando con G_2, G_3 i valori di γ_2, γ_3 nel caso di $n = 2$, si avranno le

$$G_2 = 60e^2 - 4g_2, \qquad G_3 = 14g_2e + 22g_3, \tag{6}$$

e quindi:

$$G_2 - g_2 = 20h, \qquad G_3 - g_3 = 28he,$$

ed i valori di γ_2, γ_3 pel caso di n pari possono scriversi:

$$\begin{aligned} \gamma_2 - G_2 &= 120s_2 - 5(n-2)g_2 \\ \gamma_3 - G_3 &= 280s_3 - 42g_2s_1 + 14(n-2)g_3. \end{aligned}$$

Infine posto:

$$\frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - G_2\xi - G_3}} = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}, \tag{7}$$

dalla formola superiore di trasformazione per n pari, si otterrà:

$$\xi = x + \frac{h}{x-e}, \tag{8}$$

e per la (1)

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^3-\gamma_2 y-\gamma_3}}=\frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3-G_2\xi-G_3}}. \tag{9}$$

2. Sia dapprima $n=2m$ ed m numero dispari. Si avrà per quest'ultima (9)

$$y=\frac{U(\xi)}{T^2(\xi)},$$

i polinomi $T(\xi)$, $U(\xi)$ deducendosi dalle espressioni (2) nelle quali ad x, n, g_2, g_3 si sostituiscano ξ, m, G_2, G_3. Ora pel valore dato sopra di ξ si hanno le:

$$(x-e)^{\frac{m-1}{2}}T(\xi)=P(x), \qquad (x-e)^m U(\xi)=V(x),$$

da cui:

$$\frac{U(\xi)}{T^2(\xi)}=\frac{V(x)}{(x-e)P^2(x)},$$

inoltre:

$$P(x)=x^{\frac{n}{2}-1}+\left(\alpha_1-\frac{n-2}{4}e\right)x^{\frac{n}{2}-2}+\cdots,$$

e quindi:

$$a_1=\alpha_1-\frac{n-2}{4}e,$$

ossia:

$$\sigma_1=s_1-\frac{n-2}{4}e=s_1-\frac{m-1}{2}e.$$

Si ha così il teorema: Se nella equazione modulare corrispondente alla trasformazione di ordine m dispari si sostituisce a σ_1 la espressione $s_1-\frac{n-2}{4}e$ ed a g_2, g_3 le quantità G_2, G_3, si ottiene l'equazione modulare corrispondente alla trasformazione dell'ordine $2m=n$.

Sia, per esempio, $m=3$; la nota equazione modulare è in questo caso la:

$$\sigma_1^4-\frac{1}{2}g_2\sigma_1^2-g_3\sigma_1-\frac{1}{48}g_2^2=0,$$

e la equazione modulare per $n=6$ sarà:

$$(s_1-e)^4-\frac{1}{2}G_2(s_1-e)^2-G_3(s_1-e)-\frac{1}{48}G_2^2=0.$$

Inoltre per la trasformazione del terzo ordine essendo per le (4)

$$\gamma_2=120\sigma_1^2-9g_2, \qquad \gamma_3=280\sigma_1^3-42g_2\sigma_1-27g_3,$$

sarà per quella di sesto ordine:

$$\gamma_2 = 120(s_1 - e)^2 - 9\,G_2, \qquad \gamma_3 = 280(s_1 - e_1)^3 - 42\,G_2(s_1 - e) - 27\,G_3.$$

3. Sia in secondo luogo $n = 4$; le equazioni (3) dànno:

$$y = \frac{V(x)}{(x-e)\,P^2(x)}, \qquad P(x) = x + a_1$$

$$V(x) = (x-e)\left[x^3 + 2\,a_1 x^2 + \left(7\,a_1^2 - \frac{1}{2}\,g_2\right)x + 2\,a_1^3 + \frac{1}{2}\,g_2 a_1 - g_3\right] + h\,(x+a_1)^2.$$

Ora per la (9) si ha:

$$y = \xi + \frac{k}{\xi - \varepsilon},$$

essendo $k = 3\,\varepsilon^2 - \frac{1}{4}\,G_2$, e sostituendo in quest'ultima per ξ il valore (8) si ottengono le:

$$P^2(x) = (x-e)(x-\varepsilon) + h;$$

$$V(x) = (x-e)\left[x(x-e)(x-\varepsilon) + h\,x + k(x-e)\right] + h\,P^2(x),$$

le quali poste a confronto coi valori superiori dànno:

$$a_1 = -\frac{1}{2}(e+\varepsilon), \qquad a_1^2 = h + e\,\varepsilon,$$

ossia:

$$(a_1 + e)^2 = h, \qquad (e - \varepsilon)^2 = 4\,h,$$

e

$$6\,a_1^2 - \frac{1}{2}\,g_2 = k, \qquad 2\,a_1^3 + \frac{1}{2}\,g_2 a_1 - g_3 = -\,k\,e.$$

Posto come sopra, $a_1 = -\,s_1$, si ottiene l'equazione modulare per la trasformazione del quarto ordine:

$$(s_1 - e)^2 = h,$$

ed i valori degli invarianti:

$$\gamma_2 = 60\,\varepsilon^2 - 4\,G_2, \qquad \gamma_3 = 14\,G_2\,\varepsilon + 22\,G_3.$$

4. Suppongasi $n = 4m$ ed m numero dispari. Dalla (7) per una trasformazione del quarto ordine si hanno le:

$$\xi = \frac{V(x)}{(x-e)\,P^2(x)}, \qquad P(x) = x + a_1, \qquad (a_1 + e)^2 = (s_1 - e)^2 = h$$

$$V(x) = (x-e)\left[x^3 + 2\,a_1\,x^2 + \left(7\,a_1^2 - \frac{1}{2}\,g_2\right)x + 2\,a_1^3 + \frac{1}{2}\,g_2\,a_1 - g_3\right] + h(x+a_1)^2,$$

inoltre:

$$G_2 = 120 s_1^2 + 60 e^2 - 14 g_2, \qquad G_3 = 280 s_1^3 - 42 g_2 s_1 + 14 g_2 e - 6 g_3,$$

e dalla (9) per una trasformazione d'ordine m dispari, la:

$$y = \frac{U(\xi)}{T^2(\xi)},$$

essendo:

$$T(\xi) = \xi^{\frac{m-1}{2}} + \alpha_1 \xi^{\frac{m-3}{2}} + \cdots + \alpha_{\frac{m-1}{2}},$$

ed

$$U(\xi) = [m\xi + 2\alpha_1]\, T^2 - \frac{1}{2}\, \Phi'(\xi) T T' - \Phi(\xi)[T T'' - T'^2],$$

nella quale $\Phi(\xi) = 4\xi^3 - G_2 \xi - G_3$.

Sostituendo il valore superiore di ξ si giunge alla:

$$y = \frac{M(x)}{(x-e)\, N^2(x)}.$$

Ora posto:

$$N(x) = x^{2m-1} + A_1 x^{2m-2} + \cdots + A_{2m-1},$$

si ha per $M(x)$ il valore corrispondente [equazioni (3)], ed

$$A_1 = \alpha_1 - \frac{3m-1}{2}\, e + m(a_1 + e),$$

ossia:

$$\sigma_1 = S_1 - \frac{3m-1}{2}\, e - m(s_1 - e).$$

Si ha così il teorema: Sostituendo nella equazione modulare corrispondente ad una trasformazione di ordine m dispari in luogo di σ_1 la espressione superiore, ed i valori di G_2, G_3 dati sopra, in luogo di g_2, g_3: eliminando in seguito s_1 per mezzo della $(s_1 - e)^2 = h$, si ottiene la equazione modulare corrispondente alla trasformazione d'ordine $4m$.

5. Consideriamo infine il caso di $n = 8$. Per una trasformazione di secondo ordine si ha:

$$\xi = x + \frac{h}{x-e},$$

e per una di quarto:

$$y = \frac{V(\xi)}{(\xi - \varepsilon) P^2(\xi)}, \qquad P(\xi) = \xi + a_1,$$

e $V(\xi)$ si ottiene dalla (3) sostituendo ξ, ε, k alle x, e, h, e ponendo $n = 4$.

Ponendo in quest'ultime il valore di ξ si giunge alla:

$$y = \frac{M(x)}{(x - e) N^2(x)},$$

nella quale posto:

$$N(x) = x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3,$$

ed $A_1 = - S_1$, trovasi:

$$S_1 - 3e = s_1 - \varepsilon + \frac{3}{2}(\varepsilon - e).$$

Ma per la trasformazione del quarto ordine si ha:

$$(s_1 - \varepsilon)^2 = k,$$

così dopo qualche riduzione si arriva alla equazione modulare per la trasformazione dell'ottavo ordine:

$$(S_1 - 3e)^4 - 34h(S_1 - 3e)^2 - 144he(S_1 - 3e) + h^2 - 144he^2 = 0.$$

Si avranno inoltre le [equazioni (5)]:

$$\gamma_2 = 120 S_2 + 60 e^2 - 34 g_2 = 120 s_1^2 + 60 \varepsilon^2 - 14 G_2$$

$$\gamma_3 = 280 S_3 - 42 g_2 S_1 + 14 g_2 e - 62 g_3 = 280 s_1^3 - 42 G_2 s_1 + 14 G_2 \varepsilon - 6 G_3.$$

6. Non è d'uopo aggiungere altri esempi per dimostrare come il metodo si presti facilmente alla ricerca delle equazioni modulari corrispondenti ad un numero pari, ed a quella dei valori degli invarianti della trasformata. Ed è anche evidente che il metodo stesso è applicabile alla ricerca delle equazioni modulari corrispondenti ad una trasformazione di ordine n, essendo n il prodotto di due o più numeri primi. Infatti per $n = 9$ una prima trasformazione di terzo ordine dà le:

$$s_1^4 - \frac{1}{2} g_2 s_1^2 - g_3 s_1 - \frac{1}{48} g_2^2 = 0 \tag{10}$$

$$G_2 = 120 s_1^2 - 9 g_2, \qquad G_3 = 280 s_1^3 - 42 g_2 s_1 - 27 g_3,$$

ed una seconda trasformazione del terzo ordine le:

$$\sigma_1^4 - \frac{1}{2} G_2 \sigma_1^2 - G_3 \sigma_1 - \frac{1}{48} G_2^2 = 0 \tag{11}$$

$$\gamma_2 = 120 \sigma_1^2 - 9 G_2, \qquad \gamma_3 = 280 \sigma_1^3 - 42 G_2 \sigma_1 - 27 G_3.$$

Ora per la formola di trasformazione del nono ordine:

$$y = \frac{U(x)}{T^2(x)},$$

posto:

$$T(x) = x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4,$$

ed indicando con S_1, S_2,... le somme delle potenze delle radici della equazione $T(x) = 0$ si trovano le:

$$S_1 = 3 s_1 + \sigma_1, \qquad S_2 = \sigma_1^2 - 9 s_1^2 + g_2$$

$$S_3 = \sigma_1^3 - 18 s_1^2 \sigma_1 - 27 s_1^3 + \frac{3}{2} g_2 (3 s_1 + \sigma_1) + 3 g_3.$$

Sostituendo nelle (11) in luogo di σ_1 il valore $S_1 - 3 s_1$ e per G_2, G_3 i valori superiori si ottiene la:

$$S_1^3 - 12 s_1 S_1^2 - \left(6 s_1^2 - \frac{9}{2} g_2\right) S_1 - 28 s_1^3 + 15 g_2 s_1 + 27 g_3 = 0,$$

ed eliminando s_1 da questa e dalla (10) si giunge alla equazione modulare del 14.° grado corrispondente alla trasformazione del nono ordine.

I valori superiori per γ_2, γ_3 nei quali si sostituiscono quelli di G_2, G_3 dànno:

$$\gamma_2 = 120(\sigma_1^2 - 9 s_1^2) + 81 g_2 = 120 S_2 - 39 g_2$$

$$\gamma_3 = 280(\sigma_1^3 - 18 s_1^2 \sigma_1 - 27 s_1^3) + 378 g_2 (3 s_1 + \sigma_1) + 3^6 \cdot g_3 =$$

$$= 280 S_3 - 42 g_2 S_1 - 111 g_3,$$

come deve essere per le relazioni generali (4).

7. Posto:

$$\delta = g_2^3 - 27 g_3^2, \qquad D = G_2^3 - 27 G_3^2, \qquad \Delta = \gamma_2^3 - 27 \gamma_3^2,$$

dalle equazioni (6) deducesi la:

$$D + 16 \delta = 3 \cdot 4^2 \cdot g_2 (6 g_2 e^2 - 9 g_3 e - g_2^2),$$

e da questa le:

$$(D + 16 \delta)^2 = 3^2 \cdot 4^4 \cdot g_2^2 \delta (g_2 - 3 e^2), \qquad (D + 16 \delta)^3 = 3^3 \cdot 4^3 \cdot g_2^3 \delta D, \quad (12)$$

ma supponendo $e = e_1$, $g_2 - 3 e_1^2 = (e_2 - e_3)^2$, si ha quindi:

$$\frac{D^{\frac{1}{3}}}{\delta^{\frac{1}{3}}} = \pm 4 \frac{e_2 - e_3}{\delta^{\frac{1}{6}}}.$$

Si indichi il rapporto $\frac{D}{\delta}$ con t^{24}; dalla seconda delle (12) si ha:

$$3^3 \cdot 4^3 \frac{g_2^3}{\delta} = \frac{(t^{24} + 16)^3}{t^{24}} \quad \text{e quindi:} \quad 3^6 \cdot 4^3 \cdot \frac{g_3^2}{\delta} = \frac{(t^{24} - 8)^2 (t^{24} + 64)}{t^{24}}, \tag{13}$$

o la equazione modulare del moltiplicatore per $n = 2$. Inoltre dalla (6) e dalle (12) si deduce:

$$5 D^{\frac{2}{3}} = 4 \delta^{\frac{1}{3}} (16 g_2 - G_2),$$

e quindi le:

$$3^3 \cdot 4^3 \cdot \frac{G_2^3}{D} = \frac{(t^{24} + 4^4)^3}{t^{48}}. \qquad 3^6 \cdot 4^3 \frac{G_3^2}{D} = \frac{(t^{24} - 2 \cdot 4^4)^2 (t^{24} + 64)}{t^{48}}. \tag{14}$$

Consideriamo ora i due casi di $n = 4$, $n = 6$. Poniamo:

$$v^{24} = \frac{\Delta}{D}, \qquad z^{24} = \frac{\Delta}{\delta} \quad \text{da cui} \quad z = v t.$$

Nel primo caso avremo come sopra [equazioni (13)]:

$$12 \frac{G_2}{D^{\frac{1}{3}}} = \frac{v^{24} + 16}{v^8},$$

e quindi per la (14):

$$\frac{t^{24} + 256}{t^{16}} = \frac{v^{24} + 16}{v^8},$$

da cui:

$$t^{24} = z^8 (z^8 + 16).$$

Si hanno così per le stesse (13) le seguenti:

$$3^3 \cdot 4^3 \cdot \frac{g_2^3}{\delta} = \frac{(z^{16} + 16 z^8 + 16)^3}{z^8 (z^8 + 16)}, \qquad 3^6 \cdot 4^3 \frac{g_3^2}{\delta} = \frac{(z^{24} + 24 z^{16} + 120 z^8 - 64)^2}{z^8 (z^8 + 16)},$$

o la equazione modulare del moltiplicatore per $n = 4$.

Nel secondo caso si hanno, come è noto, le:

$$3^3 \cdot 4^3 \cdot \frac{G_2^3}{D} = \frac{(v^{12} + 3)^3 (v^{12} + 27)}{v^{12}}, \qquad 3^6 \cdot 4^3 \cdot \frac{G_3^2}{D} = \frac{(v^{24} + 18 v^{12} - 27)^2}{v^{12}},$$

e quindi:

$$\frac{t^{24} + 4^4}{t^{16}} = \frac{(v^{12} + 3)(v^{12} + 27)^{\frac{1}{3}}}{v^4},$$

dalla quale, dalla $z = v t$ e da una delle (13) eliminando v, t si ottiene l'equazione modulare in z.

Ponendo:

$$v^{12}+27=\frac{(4m^3+1)^3}{m^3},$$

si ha:

$$v^{12}+3=\frac{1}{m^3}(64m^9+48m^6-12m^3+1),$$

e quindi:

$$(v^{12}+3)(v^{12}+27)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{m^4}[1-8m^3+4^4m^9(m^3+1)].$$

Ne risulta che l'equazione superiore è soddisfatta facendo:

$$t^{24}=\frac{1-8m^3}{m^9(m^3+1)},$$

e siccome:

$$v^{12}=\frac{(m^3+1)(1-8m^3)^2}{m^3},$$

sarà:

$$z^{24}=\frac{(m^3+1)(1-8m^3)^5}{m^{15}},$$

formole già date dal prof. KIEPERT.

8. Indicando con h il noto simbolo di operazione:

$$12g_3\frac{d}{dg_2}+\frac{2}{3}g_2^2\frac{d}{dg_3},$$

pel quale:

$$h(g_2)=12g_3, \qquad h(g_3)=\frac{2}{3}g_2^2, \qquad h(\delta)=0,$$

si ha:

$$h(e)=4e^2-\frac{2}{3}g_2,$$

ed in conseguenza per le (6):

$$h(G_2)=6G_3-4G_2e, \qquad h(G_3)=\frac{1}{3}G_2^2-6G_3e,$$

ed indicando con H lo stesso simbolo di operazione sostituendo G_2, G_3 a g_2, g_3, si avrà:

$$h=\frac{1}{2}H-2e\left[2G_2\frac{d}{dG_2}+3G_3\frac{d}{dG_3}\right],$$

od anche:

$$h=\frac{1}{2}H-2e\left[2g_2\frac{d}{dg_2}+2g_3\frac{d}{dg_3}\right].$$

Per queste operando sulle quantità D, Δ, si ottengono le:

$$h(D) = -12eD,$$

$$h(\Delta) = \frac{1}{2} H(\Delta) - 12e\Delta.$$

Sia $n = 2m$ ed m numero primo, si ha come è noto:

$$\sigma_1 = -\frac{m}{48} \frac{H(\Delta)}{\Delta},$$

quindi:

$$n \frac{h(\Delta)}{\Delta} = -48\sigma_1 - 12ne,$$

ed

$$n \frac{h(D)}{D} = -12ne,$$

dalle quali:

$$\sigma_1 = -m h(\log v), \qquad e = -2h(\log t).$$

Ora dalla $z = vt$ si deduce:

$$n h(\log z) = -2\sigma_1 - me,$$

ma come si è dimostrato al § 2 $\sigma_1 = s_1 - \frac{m-1}{2} e$, si avrà dunque:

$$2s_1 + e = -nh(\log z).$$

Infine anche nel caso di n pari si ottengono i valori di $h(a_1)$, $h(a_2)$,... dalla relazione generale:

$$n h[P(x)] = \varphi(x) P''(x) - \left[2(2n-5)x^2 - \frac{1}{12}(4n-9)g_2 - 4ex - 4e^2\right] P'(x) +$$
$$+ [(n-1)(n-2)x - 6a_1 - 2(n-2)e] P(x).$$

Settembre 1894.

FINE DEL TOMO XXII.° (SERIE II.ª)