

ANNALI
DI
MATEMATICA
PURA ED APPLICATA

DIRETTI DA
F. Brioschi e L. Cremona

(PRESSO IL R. ISTITUTO TECNICO SUPERIORE DI MILANO)

in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal prof. Tortolini.

SERIE II. - TOMO IV.

(dal luglio 1870 al settembre 1871.)

MILANO
TIPOGRAFIA DI GIUSEPPE BERNARDONI.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO IV.^o (SERIE II.^a)

	PAG.
Sopra un problema proposto da Dirichlet. — <i>E. B. Christoffel</i>	1
Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio. (Memoria quarta) — <i>D. Codazzi</i>	10
Sopra un teorema fondamentale della Geometria. — <i>G. F. Geiser</i>	25
Dimostrazione di un teorema fondamentale nella teorica delle funzioni di variabili complesse. — <i>G. Ascoli</i>	31
Sur le développement en séries des intégrales des équations différentielles linéaires. — <i>L. Fuchs</i>	36
Intorno alla rappresentazione delle superficie gobbe di genere $p=0$ sopra un piano. — <i>A. Armenante</i>	50
Sur la surface enveloppée par les plans qui coupent une courbe gauche du 4 ^e ordre et de la 2 ^e espèce en quatre points d'un cercle. — <i>R. Sturm</i>	73
Dell'uso del principio delle velocità virtuali con riguardo all'attrito. — <i>G. Petersen</i>	86
Sur les fonctions abéliennes à quatre périodes. — <i>M. Roberts</i>	95
Les séries Heinéennes supérieures. — <i>J. Thomae</i>	105
Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. — <i>E. Betti</i>	140
Sopra le funzioni di una variabile complessa. — <i>U. Dini</i>	159
Sopra alcune formole generali della teoria delle superficie, e loro applicazioni. — <i>U. Dini</i>	175
Sur les courbes équidistantes sphériques. — <i>W. Roberts</i>	207
Note sur les fonctions dont les dérivées successives forment des séries arith- métiques. — <i>Ed. Veyr</i>	212

Indice.

	PAG.
Étude de la courbure en un point multiple d'une courbe plane. — <i>L. Painvin</i>	215
Sopra la teoria della inversione di un sistema di funzioni. — <i>R. Lipschitz</i>	239
Alcuni teoremi di statica razionale. — <i>G. Bardelli</i>	260
Sopra la corrispondenza del secondo grado fra due sistemi semplicemente infiniti. — <i>Em. Weyr</i>	272
Détermination des plans osculateurs et des rayons de courbure en un point multiple d'une courbe gauche. — <i>L. Painvin</i>	281
Nota sopra alcune singolarità di second'ordine delle curve gobbe razionali. — <i>Em. Weyr</i>	328
Note sur les quadriques polaires. — <i>H. G. Zeuthen</i>	331
Sur la grandeur relative des infinis des fonctions. — <i>P. du Bois-Reymond</i>	338

Sopra un problema proposto da Dirichlet (*)

(del prof. E. B. CHRISTOFFEL, a Berlino).

I.

Da una comunicazione verbale, che debbo al sig. HEINE, ho appreso che DIRICHLET, verso l'anno 1840, o poco dopo, ha ripetutamente invocata l'attenzione dei suoi scolari d'allora sul problema delle temperature stazionarie, mettendo particolarmente in rilievo, come una specie di problemi che meritava d'essere studiata di preferenza per la sua difficoltà, la distribuzione delle temperature su quelle superficie piane, e in quegli spazii a tre dimensioni, che si ottengono togliendo via una figura finita in ogni senso da un piano infinito, o dallo spazio infinito.

Ogni problema di questa specie è visibilmente associato ad un altro problema determinato, del genere di quelli già trattati; ma mentre, per es., la determinazione delle temperature stazionarie sopra una superficie rettangolare F non offre alcuna difficoltà, il problema associato delle temperature stazionarie sulla superficie complementare F' è rimasto completamente inaccessibile ai metodi adoperati finqui. Lo stesso può dirsi di tutti gli altri problemi di questa specie, tranne di quelli che riguardano le figure complementari del circolo e della sfera; ed io credo quindi di poter fare assegnamento sull'interesse dei lettori di questi *Annali* esponendo, in connessione col mio precedente lavoro, i principii che possono servire di base alla soluzione del problema di DIRICHLET per la figura complementare F' di un poligono piano.

(*) Addizione alla Memoria inserita in questi *Annali*, tom. I (2^a serie), pag. 89.
Annali di Matematica, tomo IV.

Riflettendo che la superficie F' si estende all'infinito, e, adottando una generalizzazione indispensabile per ben penetrare nella quistione analitica, il problema dev'essere formulato come segue:

In ogni punto della superficie F' riferita alle coordinate rettangole x, y , la funzione U è monodroma e continua insieme colle sue derivate prime, che si annullano all'infinito. Sul contorno di questa superficie si ha

$$U = \psi(x, y)$$

e nell'interno di essa

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \phi(x, y);$$

con queste condizioni si deve determinare U in ogni punto o di F' . Ponendo $\phi = 0$, si ha il problema proposto da DIRICHLET. Ma è per ogni riguardo preferibile, come ho già notato nel mio precedente lavoro, introdurre un termine indipendente, e ciò vale per tutte le equazioni differenziali lineari, sì ordinarie che parziali. La questione delle restrizioni che risultano per ϕ e ψ dalle restanti condizioni non è nel caso presente che di secondaria importanza.

Tenendo il debito conto di tutte le condizioni relative all'infinito, si riconosce facilmente che all'attuale problema si possono applicare tutti i principii stabiliti negli art. I-IV del mio precedente lavoro, nella supposizione d'una superficie F' d'estensione finita. Passo dunque senz'altro alla soluzione del problema seguente, al quale, come ho ivi dimostrato, il precedente può essere rinvocato.

È dato un altro piano riferito a coordinate rettangole X, Y , di cui E è la parte sulla quale $Y > 0$. Si deve rappresentare la superficie E sopra F' .

II.

Siano distese sui piani delle $Z = X + iY$ e $z = x + iy$ due superficie Φ, ϕ a un solo strato e semplicemente connesse. Affinchè queste superficie siano rappresentate l'una sull'altra per mezzo d'un'equazione fra Z e z , bisogna e basta che quest'equazione soddisfaccia alle condizioni seguenti:

1.° Ad un giro positivo intorno ad una delle due superficie deve corrispondere, in virtù di quest'equazione, un giro positivo intorno all'altra.

2.° Nell'interno delle due superficie, — ciò che non sempre sarebbe possibile sul loro contorno, — deve sussistere una perfetta eguaglianza degli angoli corrispondenti.

In luogo dell'eguaglianza degli angoli si può ancora prescrivere che ad ogni punto dell'una superficie corrisponda un unico punto dell'altra, variabile con continuità insieme col primo. Le condizioni a ciò necessarie e sufficienti sono le seguenti. Se Φ si estende all'infinito e se il punto infinitamente lontano di Φ viene rappresentato sopra ϕ da un punto a distanza finita, bisogna che in questo punto $\frac{dz}{dZ}$ diventi infinitesima come $\frac{a}{Z^2}$, dove a è una costante diversa da zero. Se ϕ si estende all'infinito e se il punto infinitamente lontano di ϕ viene rappresentato sopra Φ da un punto Γ a distanza finita, bisogna che in questo punto $\frac{dz}{dZ}$ diventi discontinua come $\frac{b}{(Z-\Gamma)^2}$, o più esattamente, che la differenza di queste due quantità resti continua in tal punto; b è parimenti una costante diversa da zero. In ogni altro punto di ϕ o di Φ la derivata $\frac{dz}{dZ}$ non deve diventare nè polidroma, nè nulla, nè infinita.

Prendiamo per Φ il mezzo piano E e per ϕ una delle due superficie F , F' . Il contorno di ϕ è formato in ambedue i casi del poligono P , che separa F da F' ; indichiamo con z_1, z_2, \dots, z_n i vertici di P , presi nell'ordine in cui sono percorsi durante un giro positivo intorno ad F , e con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli angoli corrispondenti a questi vertici e rivolti verso l'interno della superficie F .

Siano ora a_1, a_2, \dots, a_n quei punti dell'asse delle X che nella rappresentazione di E sopra la superficie F vengono rappresentati dai vertici di P . Poichè ad un giro positivo intorno ad F corrisponde un giro positivo intorno ad E , le quantità a si presentano in quest'ultimo giro nell'ordine $a_1 a_2 \dots a_n a_1 a_2 \dots$, talchè per es. se il punto infinitamente lontano di E viene rappresentato sul lato $z_p z_{p+1}$ di P , si ha

$$a_{p+1} < a_{p+2} < \dots < a_n < a_1 < a_2 < \dots < a_p.$$

Ciò posto, dall'art. V delle mie precedenti Memorie si ricava, per la rap-

presentazione di E sopra F , la formola

$$f(Z) \frac{dz}{dZ} = \chi,$$

dove il fattore

$$f(Z) = (a_1 - Z)^{\frac{\pi - \lambda_1}{\pi}} (a_2 - Z)^{\frac{\pi - \lambda_2}{\pi}} \dots (a_n - Z)^{\frac{\pi - \lambda_n}{\pi}}$$

è scelto in modo che durante un giro positivo intorno ad E il suo argomento decresca di tanto, di quanto cresce l'argomento di dz durante un giro simultaneo intorno ad F . Conseguentemente lungo l'asse delle X , dove $dZ = dX$, l'argomento di χ , ovvero la parte imaginaria di $\log \chi$, è costante; dal chè nel luogo citato si è dedotto che la stessa quantità χ è costante. Indicandola con α si ha così, per la rappresentazione di E sopra F , l'equazione

$$f(Z) dz = \alpha dZ.$$

III.

Per conseguire, rispetto alla superficie complementare F' , lo stesso intento che per mezzo del fattore $f(Z)$ si è raggiunto rispetto alla superficie F , bisogna innanzi tutto surrogare gli angoli λ , che ora diventano angoli esterni, con $2\pi - \lambda$, con chè l'esponente $\frac{\pi - \lambda}{\pi}$ diventa $\frac{\lambda - \pi}{\pi}$, mutando solo il segno. Ma ciò non basta; poichè, essendosi, insieme col giro positivo intorno a P , invertita la successione dei vertici, la stessa cosa ha luogo per i punti dell'asse delle X in cui questi sono rappresentati. Quindi le quantità reali a_1, a_2, \dots, a_n devono essere surrogate da altre a'_1, a'_2, \dots, a'_n che in un giro positivo intorno ad E devono succedersi nell'ordine $a'_n, a'_{n-1}, \dots, a'_2, a'_1, a'_n$. Indicando con $g(Z)$ il valore reciproco dell'espressione in cui si converte per tal modo $f(Z)$, cioè ponendo

$$(a'_1 - Z)^{\frac{\pi - \lambda_1}{\pi}} (a'_2 - Z)^{\frac{\pi - \lambda_2}{\pi}} \dots (a'_n - Z)^{\frac{\pi - \lambda_n}{\pi}} = g(Z),$$

si ottiene così, per la rappresentazione di E sopra F' , l'equazione

$$\frac{1}{g(Z)} \frac{dz'}{dZ} = \chi,$$

dove i punti di F' sono designati con z' , e dove χ deve soddisfare alle seguenti condizioni:

1.° Lungo l'asse delle X è costante la parte imaginaria di $\log \chi$.

Inoltre siccome il punto infinitamente lontano di E viene rappresentato sul contorno di F' , cioè in un punto a distanza finita, bisogna che in questo punto la derivata $\frac{dz'}{dZ}$ diventi infinitesima come $\frac{a}{Z^2}$, e quindi, poichè $g(Z)$ diventa nello stesso punto infinita del secondo ordine, bisogna che χ diventi infinitesima del quarto: dunque

2.° Nel punto infinitamente lontano di E la quantità $\chi \cdot Z^4$ resta finita e diversa da zero.

Ora se $\Gamma = A + iB$ è quel punto di E nel quale viene rappresentato il punto infinitamente lontano di F' , si ha in esso

$$\chi \cdot g(Z) = \frac{dz'}{dZ} = \frac{b}{(Z-\Gamma)^2} + \text{funz. cont.},$$

e poichè $g(Z)$ è monodroma, continua e diversa da zero in Γ , si deve avere in questo punto

$$\chi = \frac{c}{(Z-\Gamma)^2} + \frac{d}{Z-\Gamma} + \text{funz. cont.}$$

Di qui segue che in prossimità di Γ dev'essere

$$\left[\frac{c}{(Z-\Gamma)^2} + \frac{d}{Z-\Gamma} + \text{funz. cont.} \right] \left[g(\Gamma) + g'(\Gamma)(Z-\Gamma) + \dots \right] = \frac{b}{(Z-\Gamma)^2} + \text{funz. cont.},$$

alchè è necessario e sufficiente che sia $d \cdot g(\Gamma) + c \cdot g'(\Gamma) = 0$. Dunque

3.° Nel punto Γ di E la funzione χ diventa discontinua come

$$c \left[\frac{1}{(Z-\Gamma)^2} - \frac{g'(\Gamma)}{g(\Gamma)} \frac{1}{Z-\Gamma} \right].$$

E dopo ciò finalmente:

4.° In ogni altro punto di E la funzione χ è monodroma, continua e diversa da zero.

È facile formare un'espressione che soddisfaccia alle condizioni trovate per χ . Indicando con $\Gamma' = A - iB$ il punto conjugato di Γ e ponendo

$$\phi(Z) = (Z-\Gamma)(Z-\Gamma') = (Z-A)^2 + B^2,$$

l'espressione

$$\psi = \frac{1}{\varphi^3}$$

soddisfa manifestamente alle condizioni 1, 2 e 4. In prossimità di Γ si ha

$$\psi = \frac{1}{(\Gamma - \Gamma')^2} \left[\frac{1}{(Z - \Gamma)^2} - \frac{2}{\varphi'(\Gamma)} \frac{1}{Z - \Gamma} \right] + \text{funz. cont.};$$

quindi assoggettando Γ alla condizione

$$\frac{2}{\varphi'(\Gamma)} = \frac{g'(\Gamma)}{g(\Gamma)},$$

la funzione ψ acquista tutte le proprietà volute per χ , epperò non resta che esaminare se, oltre ψ , possano esistere altre funzioni dotate delle stesse proprietà.

Ora dall'espressione di ψ e dalle condizioni per χ emerge che il quoziente $\frac{\chi}{\psi}$ è monodromo, continuo e diverso da zero in ogni punto di E , epperò che il suo logaritmo è monodromo e continuo. Inoltre sul contorno di E la parte immaginaria di $\log \frac{\psi}{\chi}$ è costante, epperò essa è tale anche su tutta la superficie E , donde segue che lo stesso ha luogo per la parte reale e quindi finalmente per la stessa quantità $\frac{\chi}{\psi}$. Abbiamo dunque in generale $\chi = \beta\psi$, indicando con β una costante, e possiamo così formulare il seguente teorema:

La rappresentazione di E nei punti z e z' del poligono F e della superficie complementare F' è data dalle equazioni:

$$\begin{aligned} dz &= \alpha (a_1 - Z)^{\frac{\lambda_1 - \pi}{\pi}} (a_2 - Z)^{\frac{\lambda_2 - \pi}{\pi}} \dots (a_n - Z)^{\frac{\lambda_n - \pi}{\pi}} dZ, \\ dz' &= \beta (a'_1 - Z)^{\frac{\pi - \lambda_1}{\pi}} (a'_2 - Z)^{\frac{\pi - \lambda_2}{\pi}} \dots (a'_n - Z)^{\frac{\pi - \lambda_n}{\pi}} \frac{dZ}{[p(Z)]^2}, \\ \phi(Z) &= (Z - A)^2 + B^2, \end{aligned}$$

dove le quantità costanti reali A e B sono determinate dalla condizione che la quantità

$$\frac{2}{\varphi'(Z)} - \frac{g'(Z)}{g(Z)}$$

si annulli insieme con $\phi(Z)$, riservando in ambedue i casi le opportune determinazioni circa i parametri e circa il significato delle potenze fratte.

Che l'espressione

$$\frac{z}{\phi'(Z)} - \frac{g'(Z)}{g(Z)} = \frac{1}{Z-A} - \sum \frac{\pi - \lambda}{\pi} \frac{1}{Z-a'}$$

debba annullarsi non solo per $Z = \Gamma$, ma anche per $Z = \Gamma'$, risulta dalla circostanza che all'infuori di Z essa non contiene che quantità reali.

Se la condizione per Γ si pone sotto la forma

$$\sum (\pi - \lambda) \frac{\Gamma' - a'}{\Gamma - a'} = 0,$$

si può facilmente rilevarne il significato geometrico. Si immagini uno qualunque dei poligoni Π , che possono essere costruiti coi valori assoluti dei numeri

$$\pi - \lambda_1, \quad \pi - \lambda_2, \dots \quad \pi - \lambda_n$$

assunti in ordine qualsivoglia come lunghezze dei lati, e si scelga come positiva la direzione di un giro arbitrario intorno al medesimo. Ciò posto, considerando la direzione di un lato come eguale a quella di un giro positivo o di un giro negativo intorno a Π , secondo che il corrispondente numero $\pi - \lambda$ è positivo o negativo, l'equazione precedente prescrive che i raggi $a'_1\Gamma$, $a'_2\Gamma, \dots a'_n\Gamma$ siano paralleli alle bisettrici degli angoli che l'asse positivo delle X fa colle direzioni dei lati $\pi - \lambda_1, \pi - \lambda_2, \dots, \pi - \lambda_n$.

IV.

Se supponiamo che gli angoli di F abbiano rapporti razionali, le derivate $\frac{dz}{dZ}$ e $\frac{dz'}{dZ}$ sono funzioni algebriche di Z , la cui classe comune può essere facilmente determinata in ciascun caso particolare. Sia infatti T la superficie ad N strati che rappresenta il modo di diramazione di queste funzioni, e di cui E è un mezzo strato. Primieramente si vede che z è un integrale di prima specie coordinato a questa superficie. Rispetto a z' convien riflettere che nel punto Γ di E si ha

$$\frac{dz'}{dZ} = \frac{b}{(Z - \Gamma)^2} + \text{funz. cont.},$$

ora la condizione mediante la quale venne rimosso da questo sviluppo il termine contenente $\frac{1}{Z-\Gamma}$, e quindi esclusa una diramazione logaritmica di z' , non sussiste per il solo punto Γ di E , ma venendo soddisfatta anche da $Z=\Gamma'$ ed essendo inoltre razionale, dà luogo allo stesso risultato per tutti i punti di T in cui Z è $=\Gamma$, oppure $=\Gamma'$. Conseguentemente $\frac{dz'}{dZ}$ diventa in tutti questi punti discontinua, come nel suddetto punto Γ di E , e poichè z' rimane continua in tutti gli altri punti di T , ne risulta che z' è la somma di $2N$ integrali di seconda specie, ciascuno dei quali ha la sua discontinuità in uno dei detti punti.

Quindi se F è, per esempio, un rettangolo, z diventa un integrale ellittico di prima specie e z' la somma di quattro integrali ellittici di seconda specie, secondo la classificazione di RIEMANN.

V.

Indicando ora con x'_o, y'_o le coordinate di un punto o di F' , cui corrisponda in E il punto Z_o , con Z'_o il conjugato di Z_o e ponendo inoltre $z' = x' + iy'$, dai teoremi degli articoli I e IV della citata Memoria, immediatamente applicabili al caso presente, si deduce il seguente valore di U nel punto o :

$$U_o = \frac{1}{2\pi} \left[\int \psi(x', y') \frac{2Y_o dX}{(X-X_o)^2 + Y_o^2} + \int \phi(x', y') \cdot \log \operatorname{mod} \left(\frac{Z-Z_o}{Z-Z'_o} \right) \cdot \operatorname{mod} \left(\frac{dz'}{dZ} \right)^2 \cdot dX dY \right],$$

dove il secondo integrale si deve estendere a tutti gli elementi $dX dY$ della superficie E , il primo a tutti gli elementi dX del suo contorno. Questa equazione si ottiene senza difficoltà dalla formola finale dell'art. I, facendo uso delle formole (b) e (c) dell'art. IV, ed osservando, in quanto alla trasformazione dell'elemento di superficie dF' , che nella rappresentazione sopra E i suoi lati vengono amplificati nel rapporto di $\operatorname{mod} \cdot dz'$ a $\operatorname{mod} \cdot dZ$.

In virtù di quest'equazione, valevole anche per la superficie F , e dei risultati dell'art. III, il problema di DIRICHLET è risoluto per tutte le super-

ficie F, F' terminate da poligoni, fin dove un tal problema è suscettibile di soluzione senza che vengano mutati i termini della quistione. Se si volesse andar più oltre e prescrivere che U_0 sia espresso in funzione di x'_0, y'_0 ed i parametri a (od a' rispettivamente), in funzione dei lati del poligono P , bisognerebbe esprimere Z in funzione di z (o di z' rispettivamente), e una tale espressione, se si vuole che sia valida incondizionatamente, può essere ottenuta soltanto per le quattro superficie F menzionate nell'art. VI del mio precedente lavoro, e per nessuna superficie complementare. In base a ciò non deve far meraviglia che i metodi anteriori, conducendo sempre ad espressioni di tal natura, non potessero dare alcun risultato, fuorchè nei quattro casi d'eccezione.

Berlino, aprile 1870.



Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio.

MEMORIA QUARTA (*).

(del prof. DELFINO CODAZZI, a Pavia).

Il signor prof. Aoust ha già trattato in un modo bastantemente esteso il problema generale delle coordinate curvilinee dello spazio, risguardate come i parametri di tre sistemi di superficie segantisi ad angolo qualunque, ed ha già presentato l'applicazione della sua soluzione ad una linea tracciata in una superficie. Si veda, per la trattazione generale, la *Théorie des coordonnées curvilignes quelconques* inserita negli *Annali di matematica pura ed applicata* pubblicati a Roma nell'anno 1864 (serie 1^a, t. 6), del qual lavoro io non aveva cognizione quando stampava la mia Memoria prima. Il metodo però da lui tenuto differisce essenzialmente da quello puramente analitico seguito dal signor LAMÉ nel trattare il problema delle coordinate curvilinee ortogonali, e quindi anche da quello seguito da me nel trattare il problema delle coordinate curvilinee qualunque. Il signor Aoust osserva su questo punto (V. *Annali*, s. 1^a, t. 6^o, p. 65): « Pour obtenir la solution de la question au point de vue le plus général, il nous a été impossible de profiter de la méthode suivie par Mr. LAMÉ dans le cas des coordonnées orthogonales à cause des complications qui s'attachent à la question générale. En effet, les trois cosinus des angles coordonnés, leurs variations premières et secondes par rapport aux trois paramètres qui fixent la position du point, s'introduisent nécessairement dans les équations, et lorsque l'on suit la méthode analytique, ces quantités au nombre de 30, qui n'existent pas dans le système orthogonal,

(*) I numeri adoperati per indicare le formole di questa Memoria quarta sono in continuazione con quelli della Memoria terza.

entrent dans la composition des coefficients d'un système de neuf équations linéaires à neuf inconnues auquel cette méthode conduit inévitablement. Or, comme la résolution de ce système d'équations est indispensable, les difficultés analytiques de cette résolution imposent la nécessité de renoncer à la marche tracée par l'auteur de la théorie des coordonnées orthogonales.» Il metodo seguito dal signor Aoust è geometrico piuttosto che analitico, e poggia principalmente sulla considerazione di un elemento, la curvatura inclinata, nuovamente introdotto da esso nella teoria. « La simplification, egli continua, due à la marche qui nous est propre, résulte de son caractère essentiellement géométrique, et surtout d'un élément géométrique nouveau que nous avons introduit dans notre théorie. Nous appelons cet élément *courbure inclinée* des lignes coordonnées. Il ne sert pas seulement à éviter des calculs impraticables, mais il est un instrument précieux de transformation et de démonstration, et son introduction dans les équations leur donne une forme à la fois simple et significative. » I risultati, ai quali giunge il signor Aoust nel suo lavoro sul problema generale (*Ann.*, s. 1^a, t. 6^o) consistono in diverse equazioni stabilite fra le seguenti 33 quantità: le 9 componenti oblique della curvatura ordinaria, le 18 componenti oblique della curvatura inclinata, e le 6 quantità da me chiamate $l, m, n, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu$. Alcune fra queste equazioni sono finite, ed altre sono alle derivate parziali del prim'ordine rispetto a' tre parametri (*).

(*) Anche il signor professor DOMENICO CHELINI, in parte d'una sua Memoria inserita negli *Annali* di TORTOLINI del 1853, della quale pure io non aveva cognizione quando scriveva la mia Memoria prima, ha preso a considerare le coordinate curvilinee dello spazio come i parametri di tre sistemi di superficie segantisi ad angolo qualunque. Egli ha somministrato una trasformazione della quantità rappresentabile mediante le mie notazioni con $\Sigma \frac{\partial^2 f}{\partial i^2}$, ove f è funzione qualunque delle λ, μ, ν , ed ha costituito qualche formola relativa alla curvatura delle superficie. In quanto ad una noterella inserita dallo stesso signor prof. CHELINI al piè della pagina 30 della sua recente Memoria: *Della curvatura delle superficie con metodo diretto ed intuitivo*, stampata a Bologna nel 1868, amerei far notare che i miei risultati consistono in certe 9 espressioni presentate in funzioni delle $l, m, n, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu$ e loro derivate, in funzioni cioè di novelle quantità di numero possibilmente minimo e di significazione geometrica evidente; e che, dopo d'aver costituito i valori di quelle 9 espressioni, ho anche implicitamente costituito il valore generale della $\Sigma \frac{\partial^2 f}{\partial i^2}$, ove f è funzione qualunque delle λ, μ, ν , in causa di una formola di calcolo differenziale.

Siccome le componenti oblique della curvatura ordinaria delle tre linee coordinate (μ, ν) , (ν, λ) , (λ, μ) , e quelle della curvatura inclinata nuovamente introdotta, possono essere adoperate come utile mezzo di ricerca in alcune questioni, così mi propongo di trattenermi sopra di esse nella presente Memoria quarta. Propriamente, troverò dapprima i valori di queste 27 componenti oblique espresse in funzioni delle $l, m, n, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu$ e loro derivate parziali prime; perocchè, onde ultimare le integrazioni nei casi particolari, io credo necessario il possedere queste espressioni analitiche. Presenterò di più le stesse ventisette equazioni sotto altra forma; cioè troverò le equazioni finite, in numero di dodici, che legano tra loro le componenti oblique e le $l, m, n, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu$; e troverò le equazioni, in numero di quindici, che servono ad esprimere le derivate prime parziali delle $l, m, n, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu$ in funzioni di queste sei quantità e delle componenti oblique. Parecchie tra le ventisette equazioni di questa seconda forma sono già state costituite con altro metodo dal signor Aoustr.

1.

Cominciamo dall'esprimere le nove componenti oblique della curvatura delle tre linee coordinate in funzioni delle $l, m, n, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu$ e loro derivate prime.

La curvatura della linea coordinata (μ, ν) , cioè l'unità divisa pel raggio di curvatura di questa linea, ha le tre proiezioni sopra i tre assi rettilinei rappresentate da $\frac{1}{l} \frac{\partial i_\lambda}{\partial \lambda}$. Chiamiamo $\frac{1}{L_\lambda}, \frac{1}{M_\lambda}, \frac{1}{N_\lambda}$ le tre componenti oblique di questa curvatura secondo le tangenti alle tre linee coordinate (μ, ν) , (ν, λ) , (λ, μ) , cioè le tre componenti formate dietro la regola del parallelepipedo delle forze; ed avremo, per nota proprietà,

$$\frac{1}{l} \frac{\partial i_\lambda}{\partial \lambda} = \frac{i_\lambda}{L_\lambda} + \frac{i_\mu}{M_\lambda} + \frac{i_\nu}{N_\lambda}. \quad (76)$$

Questa formola, moltiplicata successivamente per I_λ, I_μ, I_ν e sottoposta ciascuna volta all'operazione Σ , somministra

$$\frac{\Sigma I_\lambda i_\lambda}{L_\lambda} = \frac{\Sigma I_\lambda \frac{\partial i_\lambda}{\partial \lambda}}{l}, \quad \frac{\Sigma I_\mu i_\mu}{M_\lambda} = \frac{\Sigma I_\mu \frac{\partial i_\lambda}{\partial \lambda}}{l}, \quad \frac{\Sigma I_\nu i_\nu}{N_\lambda} = \frac{\Sigma I_\nu \frac{\partial i_\lambda}{\partial \lambda}}{l}.$$

Ora, dalla prima (35) si deduce

$$\begin{aligned} \sum I_\lambda \frac{\partial i_\lambda}{\partial \lambda} &= l' \sum I_\lambda i'_\lambda = l' \{ \cos \omega'_\mu (\cos \omega_\mu \cos \omega'_\lambda + \text{sen } \omega_\mu \text{sen } \omega'_\lambda \cos \varepsilon_\nu) \\ &\quad + \text{sen } \omega'_\mu (\text{sen } \omega_\mu \cos \omega'_\lambda - \cos \omega_\mu \text{sen } \omega'_\lambda \cos \varepsilon_\nu) \}, \end{aligned}$$

ovvero

$$\sum I_\lambda \frac{\partial i_\lambda}{\partial \lambda} = -\alpha_\lambda \cos \eta_\mu - \beta_\lambda \text{sen } \eta_\mu \cos \varepsilon_\nu;$$

e dalle (29) si deducono

$$\sum I_\mu \frac{\partial i_\lambda}{\partial \lambda} = l' \sum I_\mu i'_\lambda = a_\lambda, \quad \sum I_\nu \frac{\partial i_\nu}{\partial \lambda} = l' \sum I_\nu i'_\lambda = \alpha_\lambda.$$

Perciò saranno, in causa anche delle (24),

$$\left. \begin{aligned} \frac{l\sqrt{\Delta}}{L_\lambda} &= -\text{sen } \varepsilon_\lambda (\alpha_\lambda \cos \eta_\mu + \beta_\lambda \text{sen } \eta_\mu \cos \varepsilon_\nu), \\ \frac{l\sqrt{\Delta}}{M_\lambda} &= \alpha_\lambda \text{sen } \varepsilon_\mu, \\ \frac{l\sqrt{\Delta}}{N_\lambda} &= \alpha_\lambda \text{sen } \varepsilon_\nu. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Le (77) esprimono le tre componenti oblique della curvatura della linea coordinata (μ, ν) nel modo dichiarato, purchè s'intendano sostituiti in luogo delle $a_\lambda, \alpha_\lambda, \beta_\lambda$ i valori dati dalle (62), (63), (64). Mediante le permutazioni semplice e doppia si concluderanno dalle (77) dapprima le tre componenti oblique per la linea (ν, λ) , dipoi le tre per la (λ, μ) , purchè si cambino le L, M, N nelle M, N, L nel primo caso e nelle N, L, M nel secondo.

Se le superficie de' tre sistemi fossero ortogonali tra loro, le (77) si ridurrebbero alle

$$\frac{1}{L_\lambda} = 0, \quad \frac{1}{M_\lambda} = -\frac{1}{lm} \frac{\partial l}{\partial \mu}, \quad \frac{1}{N_\lambda} = -\frac{1}{ln} \frac{\partial l}{\partial \nu}.$$

2.

Avanti di passare alle componenti oblique della curvatura inclinata della linea (μ, ν) , preparo i valori delle seguenti sei espressioni:

$$\sum I_\lambda \frac{\partial i_\lambda}{\partial \mu}, \quad \sum I_\mu \frac{\partial i_\lambda}{\partial \mu}, \quad \sum I_\nu \frac{\partial i_\lambda}{\partial \mu}, \quad \sum I_\lambda \frac{\partial i_\lambda}{\partial \nu}, \quad \sum I_\mu \frac{\partial i_\lambda}{\partial \nu}, \quad \sum I_\nu \frac{\partial i_\lambda}{\partial \nu}.$$

Le due (39) somministrano

$$\begin{aligned}\Sigma I_{\mu} \frac{\partial i_{\mu}}{\partial \nu} &= \cos \omega'_{\nu} \left(-\frac{\partial \text{sen } \varepsilon_{\lambda}}{\partial \nu} \text{sen } \omega_{\nu} + n' \cos \varepsilon_{\lambda} + c_{\nu} \text{sen } \varepsilon_{\lambda} \cos \omega_{\nu} \right) \\ &\quad + \text{sen } \omega'_{\nu} \left(\frac{\partial \text{sen } \varepsilon_{\lambda}}{\partial \nu} \cos \omega_{\nu} + c_{\nu} \text{sen } \varepsilon_{\lambda} \text{sen } \omega_{\nu} \right), \\ \Sigma I_{\nu} \frac{\partial i_{\nu}}{\partial \mu} &= \cos \omega_{\mu} \left(\frac{\partial \text{sen } \varepsilon_{\lambda}}{\partial \mu} \text{sen } \omega'_{\mu} + m' \cos \varepsilon_{\lambda} - \gamma_{\mu} \text{sen } \varepsilon_{\lambda} \cos \omega'_{\mu} \right) \\ &\quad - \text{sen } \omega_{\mu} \left(\frac{\partial \text{sen } \varepsilon_{\lambda}}{\partial \mu} \cos \omega'_{\mu} + \gamma_{\mu} \text{sen } \varepsilon_{\lambda} \text{sen } \omega'_{\mu} \right); \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}\Sigma I_{\mu} \frac{\partial i_{\mu}}{\partial \nu} &= \text{sen } \eta_{\nu} \frac{\partial \text{sen } \varepsilon_{\lambda}}{\partial \nu} + a_{\nu} \cos \varepsilon_{\lambda} - c_{\nu} \cos \eta_{\nu} \text{sen } \varepsilon_{\lambda}, \\ \Sigma I_{\nu} \frac{\partial i_{\nu}}{\partial \mu} &= \text{sen } \eta_{\mu} \frac{\partial \text{sen } \varepsilon_{\lambda}}{\partial \mu} + a_{\mu} \cos \varepsilon_{\lambda} + \gamma_{\mu} \cos \eta_{\mu} \text{sen } \varepsilon_{\lambda}; \end{aligned}$$

o anche

$$\begin{aligned}\Sigma I_{\mu} \frac{\partial i_{\mu}}{\partial \nu} &= -\text{sen } \eta_{\nu} \cos \varepsilon_{\lambda} \left(b_{\nu} - \frac{\partial \varepsilon_{\lambda}}{\partial \nu} \right) - \cos \eta_{\nu} (a_{\nu} \cos \varepsilon_{\lambda} + c_{\nu} \text{sen } \varepsilon_{\lambda}), \\ \Sigma I_{\nu} \frac{\partial i_{\nu}}{\partial \mu} &= \text{sen } \eta_{\mu} \cos \varepsilon_{\lambda} \left(\beta_{\mu} + \frac{\partial \varepsilon_{\lambda}}{\partial \mu} \right) - \cos \eta_{\mu} (a_{\mu} \cos \varepsilon_{\lambda} - \gamma_{\mu} \text{sen } \varepsilon_{\lambda}); \end{aligned}$$

perocchè sono, in causa delle (62), (63),

$$\begin{aligned}a_{\nu} &= -b_{\nu} \text{sen } \eta_{\nu} - a_{\nu} \cos \eta_{\nu}, \\ a_{\mu} &= \beta_{\mu} \text{sen } \eta_{\mu} - a_{\mu} \cos \eta_{\mu}. \end{aligned}$$

Operando la permutazione doppia sulla prima formola e la permutazione semplice sulla seconda, concludiamo

$$\left. \begin{aligned}\Sigma I_{\lambda} \frac{\partial i_{\lambda}}{\partial \mu} &= -\text{sen } \eta_{\mu} \cos \varepsilon_{\nu} \left(b_{\mu} - \frac{\partial \varepsilon_{\nu}}{\partial \mu} \right) - \cos \eta_{\mu} (a_{\mu} \cos \varepsilon_{\nu} + c_{\mu} \text{sen } \varepsilon_{\nu}); \\ \Sigma I_{\lambda} \frac{\partial i_{\lambda}}{\partial \nu} &= \text{sen } \eta_{\nu} \cos \varepsilon_{\mu} \left(\beta_{\nu} + \frac{\partial \varepsilon_{\mu}}{\partial \nu} \right) - \cos \eta_{\nu} (a_{\nu} \cos \varepsilon_{\mu} - \gamma_{\nu} \text{sen } \varepsilon_{\mu}). \end{aligned} \right\} (78)$$

Le stesse (39) somministrano

$$\Sigma I_{\nu} \frac{\partial i_{\mu}}{\partial \nu} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\text{sen } \varepsilon_{\nu}} \text{sen } \varepsilon_{\lambda} \left(b_{\nu} - \frac{\partial \varepsilon_{\lambda}}{\partial \nu} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum I_\nu i'_\nu \left(-\frac{\partial \operatorname{sen} \varepsilon_\lambda}{\partial \nu} \operatorname{sen} \omega_\nu + n' \cos \varepsilon_\lambda + c_\nu \operatorname{sen} \varepsilon_\lambda \cos \omega_\nu \right) \\
& + \sum I_\nu i''_\nu \left(\frac{\partial \operatorname{sen} \varepsilon_\lambda}{\partial \nu} \cos \omega_\nu + c_\nu \operatorname{sen} \varepsilon_\lambda \operatorname{sen} \omega_\nu \right), \\
\sum I_\mu \frac{\partial i_\nu}{\partial \mu} & = -\frac{\sqrt{\Delta}}{\operatorname{sen} \varepsilon_\lambda} \operatorname{sen} \varepsilon_\lambda \left(\beta_\mu + \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \mu} \right) \\
& + \sum I_\mu i'_\mu \left(\frac{\partial \operatorname{sen} \varepsilon_\lambda}{\partial \mu} \operatorname{sen} \omega'_\mu + m' \cos \varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \operatorname{sen} \varepsilon_\lambda \cos \omega'_\mu \right) \\
& - \sum I_\mu i''_\mu \left(\frac{\partial \operatorname{sen} \varepsilon_\lambda}{\partial \mu} \cos \omega'_\mu + \gamma_\mu \operatorname{sen} \varepsilon_\lambda \operatorname{sen} \omega'_\mu \right).
\end{aligned}$$

I valori de' coseni $\sum I_\mu i'_\mu$, $\sum I_\nu i'_\nu$ si trovano assoggettando alle due permutazioni semplice e doppia l'equazione in $\sum I_\lambda \frac{\partial i_\lambda}{\partial \lambda}$ numero precedente scritta sotto la forma

$$\left. \begin{aligned}
\sum I_\lambda i'_\lambda & = -\cos \eta_\mu \cos \omega'_\lambda - \operatorname{sen} \eta_\mu \operatorname{sen} \omega'_\lambda \cos \varepsilon_\nu \\
& = -\cos \eta_\nu \cos \omega_\lambda + \operatorname{sen} \eta_\nu \operatorname{sen} \omega_\lambda \cos \varepsilon_\mu.
\end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Si deduce dalla prima (37)

$$\begin{aligned}
\sum I_\lambda i''_\lambda & = \cos \omega'_\mu (\cos \omega_\mu \operatorname{sen} \omega'_\lambda - \operatorname{sen} \omega_\mu \cos \omega'_\lambda \cos \varepsilon_\nu) + \\
& + \operatorname{sen} \omega'_\mu (\operatorname{sen} \omega_\mu \operatorname{sen} \omega'_\lambda + \cos \omega_\mu \cos \omega'_\lambda \cos \varepsilon_\nu),
\end{aligned}$$

ovvero

$$\left. \begin{aligned}
\sum I_\lambda i''_\lambda & = -\cos \eta_\mu \operatorname{sen} \omega'_\lambda + \operatorname{sen} \eta_\mu \cos \omega'_\lambda \cos \varepsilon_\nu \\
& = -\cos \eta_\nu \operatorname{sen} \omega_\lambda - \operatorname{sen} \eta_\nu \cos \omega_\lambda \cos \varepsilon_\mu;
\end{aligned} \right\} \quad (80)$$

e da questa si concludono, mediante le due solite permutazioni, i valori de' coseni $\sum I_\mu i''_\mu$, $\sum I_\nu i''_\nu$. Avremo dunque, sostituendo i valori de' quattro coseni,

$$\begin{aligned}
\sum I_\nu \frac{\partial i_\mu}{\partial \nu} & = \frac{\sqrt{\Delta}}{\operatorname{sen} \varepsilon_\nu} \operatorname{sen} \varepsilon_\lambda \left(b_\nu - \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \nu} \right) \\
& - (\cos \eta_\mu \cos \omega_\nu - \operatorname{sen} \eta_\mu \operatorname{sen} \omega_\nu \cos \varepsilon_\lambda) \left(-\frac{\partial \operatorname{sen} \varepsilon_\lambda}{\partial \nu} \operatorname{sen} \omega_\nu + n' \cos \varepsilon_\lambda + c_\nu \operatorname{sen} \varepsilon_\lambda \cos \omega_\nu \right) \\
& - (\cos \eta_\mu \operatorname{sen} \omega_\nu + \operatorname{sen} \eta_\mu \cos \omega_\nu \cos \varepsilon_\lambda) \left(\frac{\partial \operatorname{sen} \varepsilon_\lambda}{\partial \nu} \cos \omega_\nu + c_\nu \operatorname{sen} \varepsilon_\lambda \operatorname{sen} \omega_\nu \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum I_\mu \frac{\partial i_\nu}{\partial \mu} &= -\frac{\sqrt{\Delta}}{\text{sen } \varepsilon_\mu} \text{sen } \varepsilon_\lambda \left(\beta_\mu + \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \mu} \right) \\ &- (\cos \eta_\nu \cos \omega'_\mu + \text{sen } \eta_\nu \text{sen } \omega'_\mu \cos \varepsilon_\lambda) \left(\frac{\partial \text{sen } \varepsilon_\lambda}{\partial \mu} \text{sen } \omega'_\mu + m' \cos \varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \text{sen } \varepsilon_\lambda \cos \omega'_\mu \right) \\ &+ (\cos \eta_\nu \text{sen } \omega'_\mu - \text{sen } \eta_\nu \cos \omega'_\mu \cos \varepsilon_\lambda) \left(\frac{\partial \text{sen } \varepsilon_\lambda}{\partial \mu} \cos \omega'_\mu + \gamma_\mu \text{sen } \varepsilon_\lambda \text{sen } \omega'_\mu \right); \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \sum I_\nu \frac{\partial i_\mu}{\partial \nu} &= \text{sen}^2 \varepsilon_\lambda \text{sen } \eta_\mu \left(b_\nu - \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \nu} \right) - \cos^2 \varepsilon_\lambda \text{sen } \eta_\mu \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \nu} \\ &- c_\nu \text{sen } \varepsilon_\lambda \cos \eta_\mu - \cos \varepsilon_\lambda (a_\nu \cos \eta_\mu - b_\nu \text{sen } \eta_\mu \cos \varepsilon_\lambda), \\ \sum I_\mu \frac{\partial i_\nu}{\partial \mu} &= -\text{sen}^2 \varepsilon_\lambda \text{sen } \eta_\nu \left[\beta_\mu + \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \mu} \right] - \cos^2 \varepsilon_\lambda \text{sen } \eta_\nu \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \mu} \\ &+ \gamma_\mu \text{sen } \varepsilon_\lambda \cos \eta_\nu - \cos \varepsilon_\lambda (\alpha_\mu \cos \eta_\nu + \beta_\mu \text{sen } \eta_\nu \cos \varepsilon_\lambda); \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} \sum I_\nu \frac{\partial i_\mu}{\partial \nu} &= \text{sen } \eta_\mu \left(b_\nu - \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \nu} \right) - \cos \eta_\mu (a_\nu \cos \varepsilon_\lambda + c_\nu \text{sen } \varepsilon_\lambda), \\ \sum I_\mu \frac{\partial i_\nu}{\partial \mu} &= -\text{sen } \eta_\nu \left(\beta_\mu + \frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \mu} \right) - \cos \eta_\nu (\alpha_\mu \cos \varepsilon_\lambda - \gamma_\mu \text{sen } \varepsilon_\lambda). \end{aligned}$$

Se ora prendiamo la permutazione doppia della prima di queste equazioni e la permutazione semplice della seconda, otteniamo

$$\left. \begin{aligned} \sum I_\mu \frac{\partial i_\lambda}{\partial \mu} &= \text{sen } \eta_\lambda \left(b_\mu - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial \mu} \right) - \cos \eta_\lambda (\alpha_\mu \cos \varepsilon_\nu + c_\mu \text{sen } \varepsilon_\nu), \\ \sum I_\nu \frac{\partial i_\lambda}{\partial \nu} &= -\text{sen } \eta_\lambda \left(\beta_\nu + \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial \nu} \right) - \cos \eta_\lambda (\alpha_\nu \cos \varepsilon_\mu - \gamma_\nu \text{sen } \varepsilon_\mu). \end{aligned} \right\} (81)$$

Finalmente, se prendiamo la permutazione doppia della (40) e la permutazione semplice della (41), troviamo

$$\begin{aligned} \sum I_\nu \frac{\partial i_\lambda}{\partial \mu} &= a_\mu \cos \varepsilon_\nu + c_\mu \text{sen } \varepsilon_\nu, \\ \sum I_\mu \frac{\partial i_\lambda}{\partial \nu} &= a_\nu \cos \varepsilon_\mu - \gamma_\nu \text{sen } \varepsilon_\mu. \end{aligned}$$

3.

Ciò posto, esprimiamo le diciotto componenti oblique della curvatura inclinata delle tre linee coordinate in funzioni delle $l, m, n, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu$ e loro derivate prime.

La curvatura inclinata, cioè l'unità divisa pel raggio di curvatura inclinata, della linea (ν, λ) secondo la (μ, ν) ha le tre proiezioni sopra i tre assi rettilinei rappresentate da $\frac{1}{m} \frac{\partial i_\lambda}{\partial \mu}$; e la curvatura inclinata della (λ, μ) secondo la stessa (μ, ν) ha le tre proiezioni rappresentate da $\frac{1}{n} \frac{\partial i_\lambda}{\partial \nu}$. Chiamiamo $\frac{1}{L_{\lambda\mu}}, \frac{1}{M_{\lambda\mu}}, \frac{1}{N_{\lambda\mu}}$ le tre componenti oblique dell'una curvatura inclinata secondo le tangenti alle tre linee coordinate $(\mu, \nu), (\nu, \lambda), (\lambda, \mu)$, cioè le tre componenti formate dietro la regola del parallelepipedo delle forze; e chiamiamo $\frac{1}{L_{\lambda\nu}}, \frac{1}{M_{\lambda\nu}}, \frac{1}{N_{\lambda\nu}}$ le tre componenti oblique dell'altra curvatura inclinata. Gl'indici in basso di ciascuna lettera sono scritti in modo che il primo tra essi dinota sempre la linea a cui rimane tangente la retta di coseni sottoposti a variazione, ed il secondo la linea lungo cui la variazione è valutata. Sussisteranno le

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{\partial i_\lambda}{\partial \mu} &= \frac{i_\lambda}{L_{\lambda\mu}} + \frac{i_\mu}{M_{\lambda\mu}} + \frac{i_\nu}{N_{\lambda\mu}}, \\ \frac{1}{n} \frac{\partial i_\lambda}{\partial \nu} &= \frac{i_\lambda}{L_{\lambda\nu}} + \frac{i_\mu}{M_{\lambda\nu}} + \frac{i_\nu}{N_{\lambda\nu}}. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Moltiplicando queste equazioni successivamente per I_λ, I_μ, I_ν ed operando ad ogni volta la somma \sum sopra i prodotti, si trovano, in causa de' valori

costituiti nel numero precedente,

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{m\sqrt{\Delta}}{L_{\lambda\mu}} &= -\operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \left\{ \operatorname{sen}\eta_\mu \cos\varepsilon_\nu \left(b_\mu - \frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial\mu} \right) + \cos\eta_\mu (a_\mu \cos\varepsilon_\nu + c_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\nu) \right\}, \\
 \frac{m\sqrt{\Delta}}{M_{\lambda\mu}} &= \operatorname{sen}\varepsilon_\mu \left\{ \operatorname{sen}\eta_\lambda \left(b_\mu - \frac{\partial\varepsilon_\nu}{\partial\mu} \right) - \cos\eta_\lambda (a_\mu \cos\varepsilon_\nu + c_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\nu) \right\}, \\
 \frac{m\sqrt{\Delta}}{N_{\lambda\mu}} &= \operatorname{sen}\varepsilon_\nu (a_\mu \cos\varepsilon_\nu + c_\mu \operatorname{sen}\varepsilon_\nu), \\
 \frac{n\sqrt{\Delta}}{L_{\lambda\nu}} &= \operatorname{sen}\varepsilon_\lambda \left\{ \operatorname{sen}\eta_\nu \cos\varepsilon_\mu \left(\beta_\nu + \frac{\partial\varepsilon_\mu}{\partial\nu} \right) - \cos\eta_\nu (\alpha_\nu \cos\varepsilon_\mu - \gamma_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\mu) \right\}, \\
 \frac{n\sqrt{\Delta}}{M_{\lambda\nu}} &= \operatorname{sen}\varepsilon_\mu (\alpha_\nu \cos\varepsilon_\mu - \gamma_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\mu), \\
 \frac{n\sqrt{\Delta}}{N_{\lambda\nu}} &= -\operatorname{sen}\varepsilon_\nu \left\{ \operatorname{sen}\eta_\lambda \left(\beta_\nu + \frac{\partial\varepsilon_\mu}{\partial\nu} \right) + \cos\eta_\lambda (\alpha_\nu \cos\varepsilon_\mu - \gamma_\nu \operatorname{sen}\varepsilon_\mu) \right\}.
 \end{aligned} \right\} (83)$$

Queste equazioni esprimono le tre componenti oblique della curvatura inclinata della (ν, λ) secondo la (μ, ν) e le tre della (λ, μ) secondo la stessa (μ, ν) nel modo dichiarato, purchè s'intendano sostituiti in vece delle b_μ , a_μ , β_ν , α_ν i valori dati dalle (62), (63), (64) ed invece delle c_μ , γ_ν i valori dati dalle (69) in cui siansi eliminati i tre angoli θ col mezzo delle (70). Esse equazioni somministreranno con la permutazione semplice le tre componenti oblique della (λ, μ) e le tre della (μ, ν) secondo la (ν, λ) ; e somministreranno con la permutazione doppia le tre componenti oblique della (μ, ν) e le tre della (ν, λ) secondo la (λ, μ) .

Se le superficie de' tre sistemi sono ortogonali tra loro, le (83) si riducono alle

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L_{\lambda\mu}} &= 0, & \frac{1}{M_{\lambda\mu}} &= \frac{1}{lm} \frac{\partial m}{\partial \lambda}, & \frac{1}{N_{\lambda\mu}} &= 0, \\
 \frac{1}{L_{\lambda\nu}} &= 0, & \frac{1}{M_{\lambda\nu}} &= 0, & \frac{1}{N_{\lambda\nu}} &= \frac{1}{ln} \frac{\partial n}{\partial \lambda}.
 \end{aligned}$$

4.

Osserviamo che, col sostituire nella (76) i valori dati dalle (77) in luogo delle tre componenti oblique della curvatura, e col sostituire nelle (82) i

valori dati dalle (83) in luogo delle sei componenti oblique della curvatura inclinata, si troverebbero le tre variazioni del coseno i_λ lungo le tre linee coordinate espresse mediante le $l, m, n, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu$ e loro derivate prime, oltre le i_λ, i_μ, i_ν . Indi, con le due permutazioni semplice e doppia, si dedurrebbero le tre variazioni del coseno i_μ e le tre del coseno i_ν espresse in modo analogo. Possiamo adunque risguardare queste nove variazioni indifferentemente come espresse nel modo or ora dichiarato, oppure come espresse mediante le componenti oblique, oltre le i_λ, i_μ, i_ν , in causa delle (76), (82). Ora, intorno alle due forme sotto alle quali i valori di queste nove variazioni possono essere presentati, il sig. Aoust così si esprime alla pag. 80 degli *Annales* citati: Ces variations constituent en quelque sorte l'essence de la question qui nous occupe. Dans la théorie purement analytique des coordonnées curvilignes, elles dépendent de la résolution d'un système de 9 équations linéaires à 9 inconnues, dont les coefficients se composent des variations premières et secondes des paramètres différentiels du premier ordre et des variations des angles coordonnés. La méthode que nous avons suivie, dispense de la résolution d'un pareil système d'équations, résolution qui serait peut-être impraticable; elle y substitue un procédé simple et facile, et donne l'expression de ces variations sous une forme à laquelle l'introduction des courbures inclinées donne un caractère de clarté et de symétrie.

5.

Passiamo ora a formare le equazioni finite, che legano tra loro le nove componenti oblique della curvatura, le diciotto componenti oblique della curvatura inclinata ed i tre angoli coordinati: equazioni già costituite con altro metodo dal sig. Aoust.

La (76), moltiplicata per i_λ e sottoposta all'operazione Σ , dà

$$\frac{1}{L_\lambda} + \frac{\cos \varepsilon_\nu}{M_\lambda} + \frac{\cos \varepsilon_\mu}{N_\lambda} = 0; \quad (84)$$

dalla quale si deducono altre due mediante le due solite permutazioni. Così,

le due (82), moltiplicate per i_λ e sottoposte alla stessa somma Σ , danno

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{L_{\lambda\mu}} + \frac{\cos \varepsilon_\nu}{M_{\lambda\mu}} + \frac{\cos \varepsilon_\mu}{N_{\lambda\mu}} = 0, \\ \frac{1}{L_{\lambda\nu}} + \frac{\cos \varepsilon_\nu}{M_{\lambda\nu}} + \frac{\cos \varepsilon_\mu}{N_{\lambda\nu}} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

da ciascuna delle quali si deducono altre due col mezzo delle stesse due permutazioni. La (84) e la seconda (85) sono le relazioni registrate alla pag. 81 degli *Annali* del 1864.

Il confronto fra la permutazione semplice della terza (83) e la permutazione doppia della quinta, avuto riguardo alla (42), somministra

$$\frac{1}{L_{\mu\nu}} = \frac{1}{L_{\nu\mu}}; \quad (86)$$

dalla quale si deducono altre due mediante le due solite permutazioni. La (86) è la relazione registrata alla pag. 86 de' medesimi *Annali*.

Abbiamo dunque dodici relazioni finite fra le trenta indicate quantità; cioè tre fra le nove componenti oblique della curvatura ed i tre angoli, e nove fra le diciotto componenti della curvatura inclinata e gli stessi tre angoli.

6.

Formeremo, partendo dalle (82), i valori delle $\frac{\partial l}{\partial \mu}$, $\frac{\partial l}{\partial \nu}$, $\frac{\partial m}{\partial \nu}$, $\frac{\partial m}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial n}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial n}{\partial \mu}$ in funzioni di dodici tra le diciotto componenti oblique della curvatura inclinata e delle l , m , n ; valori già trovati con altro metodo dal sig. Aoustr.

Moltiplichiamo la prima (82) per i_μ , la seconda per i_ν , e prendiamo sopra i due prodotti la somma Σ . In causa della seconda (13) e della prima (15), risulteranno

$$\begin{aligned} \frac{1}{lm} \left(\frac{\partial m}{\partial \lambda} - \frac{\partial l}{\partial \mu} \cos \varepsilon_\nu \right) &= \frac{\cos \varepsilon_\nu}{L_{\lambda\mu}} + \frac{1}{M_{\lambda\mu}} + \frac{\cos \varepsilon_\lambda}{N_{\lambda\mu}}, \\ \frac{1}{nl} \left(\frac{\partial n}{\partial \lambda} - \frac{\partial l}{\partial \nu} \cos \varepsilon_\mu \right) &= \frac{\cos \varepsilon_\mu}{L_{\lambda\nu}} + \frac{\cos \varepsilon_\lambda}{M_{\lambda\nu}} + \frac{1}{N_{\lambda\nu}}. \end{aligned}$$

Sommo la prima di queste equazioni moltiplicata per $\cos \varepsilon_\nu$ con la permutazione semplice della seconda, ed ho

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \varepsilon_\nu}{lm} \frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \varepsilon_\nu}{L_{\lambda\mu}} + \frac{\cos \varepsilon_\nu}{M_{\lambda\mu}} + \frac{\cos \varepsilon_\mu - \operatorname{sen} \varepsilon_\nu \operatorname{sen} \varepsilon_\lambda \cos \eta_\mu}{N_{\lambda\mu}} \\ + \frac{1}{L_{\mu\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_\nu}{M_{\mu\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_\mu}{N_{\mu\lambda}};$$

ovvero, in causa della prima (85) e della permutazione doppia della (86),

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \varepsilon_\nu}{lm} \frac{\partial l}{\partial \mu} = -\frac{\operatorname{sen}^2 \varepsilon_\nu}{L_{\lambda\mu}} + \frac{1}{L_{\mu\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_\nu}{M_{\mu\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_\nu \cos \varepsilon_\lambda}{N_{\mu\lambda}};$$

oppure, in causa della permutazione semplice della seconda (85),

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = lm \left(\frac{1}{L_{\mu\lambda}} - \frac{1}{L_{\lambda\mu}} \right); \quad (87)$$

dalla quale, mediante le due solite permutazioni, si concluderanno i valori delle $\frac{\partial m}{\partial \nu}$, $\frac{\partial n}{\partial \lambda}$. Dipoi, sommo la prima delle precedenti equazioni con la permutazione semplice della seconda moltiplicata per $\cos \varepsilon_\nu$, ed ho

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \varepsilon_\nu}{lm} \frac{\partial m}{\partial \lambda} = \frac{\cos \varepsilon_\nu}{L_{\mu\lambda}} + \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \varepsilon_\nu}{M_{\mu\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_\lambda - \operatorname{sen} \varepsilon_\mu \operatorname{sen} \varepsilon_\nu \cos \eta_\lambda}{N_{\mu\lambda}} \\ + \frac{\cos \varepsilon_\nu}{L_{\lambda\mu}} + \frac{1}{M_{\lambda\mu}} + \frac{\cos \varepsilon_\lambda}{N_{\lambda\mu}};$$

ovvero, in causa della permutazione semplice della seconda (85) e della permutazione doppia della (86)

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \varepsilon_\nu}{lm} \frac{\partial m}{\partial \lambda} = -\frac{\operatorname{sen}^2 \varepsilon_\nu}{M_{\mu\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_\nu}{L_{\lambda\mu}} + \frac{1}{M_{\lambda\mu}} + \frac{\cos \varepsilon_\mu \cos \varepsilon_\nu}{N_{\lambda\mu}};$$

oppure, in causa della prima (85),

$$\frac{\partial m}{\partial \lambda} = lm \left(\frac{1}{M_{\lambda\mu}} - \frac{1}{M_{\mu\lambda}} \right); \quad (88)$$

dalla quale, mediante le due solite permutazioni, si concluderanno i valori delle $\frac{\partial n}{\partial \mu}$, $\frac{\partial l}{\partial \nu}$. Le (87), (88) sono le relazioni registrate alla pag. 85 degli *Annali* citati.

7.

Formiamo ora i valori delle $\frac{\partial \cos \varepsilon_\lambda}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial \cos \varepsilon_\mu}{\partial \mu}$, $\frac{\partial \cos \varepsilon_\nu}{\partial \nu}$ in funzioni delle componenti oblique della curvatura inclinata e delle l , m , n , ε_λ , ε_μ , ε_ν .

Moltiplichiamo la prima (82) per i_ν , e facciamo sul prodotto l'operazione Σ . In causa della seconda (16), risulterà

$$\frac{1}{2lmn} \left(\frac{\partial \cdot mn \cos \varepsilon_\lambda}{\partial \lambda} - \frac{\partial \cdot lm \cos \varepsilon_\nu}{\partial \nu} + \frac{\partial \cdot nl \cos \varepsilon_\mu}{\partial \mu} - 2n \frac{\partial l}{\partial \mu} \cos \varepsilon_\mu \right) = \frac{\cos \varepsilon_\mu}{L_{\lambda\mu}} + \frac{\cos \varepsilon_\lambda}{M_{\lambda\mu}} + \frac{1}{N_{\lambda\mu}};$$

ovvero, avuto riguardo alla (87),

$$\frac{1}{2lmn} \left(\frac{\partial \cdot mn \cos \varepsilon_\lambda}{\partial \lambda} - \frac{\partial \cdot lm \cos \varepsilon_\nu}{\partial \nu} + \frac{\partial \cdot nl \cos \varepsilon_\mu}{\partial \mu} \right) = \frac{\cos \varepsilon_\mu}{L_{\mu\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_\lambda}{M_{\lambda\mu}} + \frac{1}{N_{\lambda\mu}}. \quad (a)$$

Così, moltiplichiamo la seconda (82) per i_μ , e facciamo sul prodotto l'operazione Σ . In causa della terza (16), scrivendo

$$\frac{1}{lm} \left(\frac{\partial \cdot lm \cos \varepsilon_\nu}{\partial \nu} - \cos \varepsilon_\nu \frac{\partial \cdot lm}{\partial \nu} \right) - \Sigma i_\lambda \frac{\partial i_\mu}{\partial \nu}$$

al posto di

$$\Sigma i_\mu \frac{\partial i_\lambda}{\partial \nu},$$

risulterà

$$\frac{1}{lmn} \left(\frac{\partial \cdot lm \cos \varepsilon_\nu}{\partial \nu} - \cos \varepsilon_\nu \frac{\partial \cdot lm}{\partial \nu} \right) - \frac{1}{2lmn} \left(\frac{\partial \cdot nl \cos \varepsilon_\mu}{\partial \mu} - \frac{\partial \cdot mn \cos \varepsilon_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial \cdot lm \cos \varepsilon_\nu}{\partial \nu} - 2l \frac{\partial m}{\partial \nu} \cos \varepsilon_\nu \right) = \frac{\cos \varepsilon_\nu}{L_{\lambda\nu}} + \frac{1}{M_{\lambda\nu}} + \frac{\cos \varepsilon_\lambda}{N_{\lambda\nu}};$$

ovvero, avuto riguardo alla permutazione doppia della (88),

$$\frac{1}{2lmn} \left(\frac{\partial \cdot mn \cos \varepsilon_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial \cdot lm \cos \varepsilon_\nu}{\partial \nu} - \frac{\partial \cdot nl \cos \varepsilon_\mu}{\partial \mu} \right) = \frac{\cos \varepsilon_\nu}{L_{\nu\lambda}} + \frac{1}{M_{\lambda\nu}} + \frac{\cos \varepsilon_\lambda}{M_{\lambda\nu}}. \quad (b)$$

Ora, sommando le (a), (b), si trova

$$\frac{1}{lmn} \frac{\partial \cdot mn \cos \varepsilon_\lambda}{\partial \lambda} = \frac{\cos \varepsilon_\mu}{L_{\mu\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_\lambda}{M_{\lambda\mu}} + \frac{1}{N_{\lambda\mu}} + \frac{\cos \varepsilon_\nu}{L_{\nu\lambda}} + \frac{1}{M_{\lambda\nu}} + \frac{\cos \varepsilon_\lambda}{N_{\lambda\nu}};$$

ovvero, in causa della (88); della permutazione doppia della (87) e delle permutazioni semplice e doppia della (86),

$$\frac{1}{l} \frac{\partial \cos \varepsilon_\lambda}{\partial \lambda} = \frac{\cos \varepsilon_\mu}{L_{\mu\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_\lambda}{M_{\mu\lambda}} + \frac{1}{N_{\mu\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_\nu}{L_{\nu\lambda}} + \frac{1}{M_{\nu\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_\lambda}{N_{\nu\lambda}}; \quad (89)$$

dalla quale si deducono i valori delle $\frac{\partial \cos \varepsilon_\mu}{\partial \mu}$, $\frac{\partial \cos \varepsilon_\nu}{\partial \nu}$ mediante le due solite permutazioni. La (89) e quelle che ne conseguono esprimono le tre derivate parziali nel modo dichiarato. Nella (89) può trasformarsi l'equazione esprimente il valore della $\frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \lambda}$ registrata alla pag. 75 degli *Annali* suddetti.

8.

Da ultimo formiamo i valori delle $\frac{\partial \cos \varepsilon_\lambda}{\partial \mu}$, $\frac{\partial \cos \varepsilon_\lambda}{\partial \nu}$, $\frac{\partial \cos \varepsilon_\mu}{\partial \nu}$, $\frac{\partial \cos \varepsilon_\mu}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial \cos \varepsilon_\nu}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial \cos \varepsilon_\nu}{\partial \mu}$ in funzioni delle componenti oblique delle due curvature ordinaria ed inclinata e delle $l, m, n, \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\nu$.

Moltiplichiamo la (76) per i_μ e prendiamo sul prodotto la somma Σ . In causa della prima (43) avremo

$$\frac{1}{l} \frac{\partial \cos \varepsilon_\nu}{\partial \lambda} - \frac{1}{lm} \left(\frac{\partial l}{\partial \mu} - \frac{\partial m}{\partial \lambda} \cos \varepsilon_\nu \right) = \frac{\cos \varepsilon_\nu}{L_\lambda} + \frac{1}{M_\lambda} + \frac{\cos \varepsilon_\lambda}{N_\lambda};$$

ovvero, avendo riguardo alle (87), (88),

$$\frac{1}{l} \frac{\partial \cos \varepsilon_\nu}{\partial \lambda} = \frac{1}{L_{\mu\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_\nu}{M_{\mu\lambda}} - \frac{1}{L_{\lambda\mu}} - \frac{\cos \varepsilon_\nu}{M_{\lambda\mu}} + \frac{\cos \varepsilon_\nu}{L_\lambda} + \frac{1}{M_\lambda} + \frac{\cos \varepsilon_\lambda}{N_\lambda};$$

o anche, dietro la prima (85) la permutazione doppia della (86),

$$\frac{1}{l} \frac{\partial \cos \varepsilon_\nu}{\partial \lambda} = \frac{1}{L_{\mu\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_\nu}{M_{\mu\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_\mu}{N_{\mu\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_\nu}{L_\lambda} + \frac{1}{M_\lambda} + \frac{\cos \varepsilon_\lambda}{N_\lambda}; \quad (90)$$

dalla quale si deducono altre due mediante le due solite permutazioni. Dipoi, moltiplichiamo la (76) per i_ν e prendiamo ancora sul prodotto la somma Σ ; in causa della seconda (45) avremo

$$\frac{1}{l} \frac{\partial \cos \varepsilon_\mu}{\partial \lambda} - \frac{1}{nl} \left(\frac{\partial l}{\partial \nu} - \frac{\partial n}{\partial \lambda} \cos \varepsilon_\mu \right) = \frac{\cos \varepsilon_\mu}{L_\lambda} + \frac{\cos \varepsilon_\lambda}{M_\lambda} + \frac{1}{N_\lambda};$$

ovvero, avuto riguardo alle permutazioni doppie delle (87), (88),

$$\frac{1}{l} \frac{\partial \cos \varepsilon_{\mu}}{\partial \lambda} = \frac{1}{L_{\nu\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_{\mu}}{N_{\nu\lambda}} - \frac{1}{L_{\lambda\nu}} - \frac{\cos \varepsilon_{\mu}}{N_{\lambda\nu}} + \frac{\cos \varepsilon_{\mu}}{L_{\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_{\lambda}}{M_{\lambda}} + \frac{1}{N_{\lambda}};$$

o anche, dietro la seconda (85) e la permutazione semplice della (86),

$$\frac{1}{l} \frac{\partial \cos \varepsilon_{\mu}}{\partial \lambda} = \frac{1}{L_{\nu\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_{\nu}}{M_{\nu\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_{\mu}}{N_{\nu\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_{\mu}}{L_{\lambda}} + \frac{\cos \varepsilon_{\lambda}}{M_{\lambda}} + \frac{1}{N_{\lambda}}; \quad (91)$$

dalla quale pure si deducono altre due mediante le due solite permutazioni. Le (90) e (91) con quelle che ne conseguono esprimono le sei derivate parziali nel modo dichiarato. Nella (90) può trasformarsi l'equazione esprimente il valore della $\frac{\partial \varepsilon_{\lambda}}{\partial \mu}$ registrata alla pag. 75 degli *Annali* suddetti.

Osservazione.

Il sig. Aoust costituisce anche le equazioni contenenti le derivate parziali delle ventisette componenti oblique. A tal fine egli deduce dalle (76), (82) due diverse espressioni per ciascuna delle derivate seconde $\frac{\partial^2 i_{\lambda}}{\partial \lambda \partial \mu}$, $\frac{\partial^2 i_{\lambda}}{\partial \mu \partial \nu}$, le eguaglia tra loro e rende identiche le equazioni risultanti. Noi non passeremo a formare queste equazioni.

Pavia, 18 luglio 1869.

Sopra un teorema fondamentale della Geometria.

(del prof. C. F. GEISER, a Zurigo.)

Il signor CHASLES nella sua Nota: *Principe de correspondance entre deux objets variables* (*) ha stabilito il teorema seguente:

Se per qualsivogliano considerazioni (nelle quali non entrino nè curve trascendenti nè funzioni trascendenti), due forme geometriche sono riferite fra loro, in modo che a ciascun elemento dell'una forma corrisponda sempre uno ed un solo elemento dell'altra e viceversa; le due forme sono projective, rispetto ai loro elementi.

Questo teorema, che nelle recenti ricerche geometriche ha già trovato la più svariata applicazione, è enunciato nella Nota citata, senza dimostrazione; però si può rilevare da un'altra Nota (**) dello stesso sig. CHASLES, che la dimostrazione è fondata sull'altro teorema:

Se due grandezze variabili λ e λ' sono fra loro dipendenti, in modo che a ciascun valore dell'una corrisponda sempre uno ed un solo valore dell'altra, e viceversa, deve aver luogo fra esse una relazione analitica della forma

$$a\lambda\lambda' + \beta\lambda + \gamma\lambda' + \delta = 0$$

[la quale per ciò è lineare in λ e λ'].

Una volta ciò ammesso, si dimostra facilmente che la condizione della projectività è identica colla dipendenza lineare, cosicchè l'una non è che un'immediata conseguenza dell'altra.

(*) *Compte rendu*, 24 dicembre 1855.

(**) *Compte rendu*, 16 agosto 1853.

Anche i signori CREMONA (*) e HESSE (**) danno una dimostrazione analoga del primo dei due teoremi sopra enunciati.

Ma si può muovere un dubbio sul procedimento della dimostrazione; poichè esso parte dalla tacita supposizione, che ogni relazione univoca fra λ e λ' si possa rappresentare analiticamente; ipotesi questa che in altre parti della Matematica è da molto tempo riconosciuta come inammissibile. Che in fatto il dubbio non sia infondato anche nel presente caso, lo si rileverà da alcuni semplici esempi che tratteremo in questa Nota.

Negli elementi di una teorica delle coniche fondata su proprietà proiettive si dimostra che due tangenti fisse T e T' di una ellisse E sono segate da una terza tangente mobile T in due serie proiettive di punti. La dimostrazione di questo teorema per mezzo del principio di CHASLES sarebbe la seguente. Da un punto a della tangente T parte, oltre a T , una sola retta T tangente ad E , la quale determina un unico punto a' su T' . Partendó viceversa da a' , si perviene nuovamente al punto a , vale a dire che le tangenti T e T' sono fra loro riferite nei punti a e a' reciprocamente e univocamente, e per conseguenza sono punteggiate proiettive.

Se si ha riguardo soltanto agli elementi reali, si scorge che la corrispondenza univoca dei punti a e a' è dovuta alla circostanza, che l'ellisse è una curva avente la curvatura sempre diretta nel medesimo senso, e alla quale da un punto qualsivoglia del piano possono condursi al più due tangenti. Ma della medesima proprietà gode ogni altra linea, incurvata con continuità e convessa dappertutto, la quale ammetta in ciascuno de' suoi punti un'unica tangente (con che si suppone che il raggio di curvatura non diventi mai nullo nè infinito): essendo d'altronde indifferente se essa sia o non sia rappresentabile da un'equazione analitica. Si dovrebbe dunque concludere, pel principio di CHASLES, che due tangenti di una tale linea sono segate dalle rimanenti in due serie proiettive di punti; il che evidentemente è falso.

Dopo aver veduto che il principio di CHASLES non può applicarsi quando sia dimostrata la corrispondenza reciproca ed univoca soltanto per elementi

(*) *Teoria geometrica delle Curve piane*, pag. 7.

(**) *Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie*, pag. 2.

reali di due forme, svilupperemo un altro esempio, dal quale emergerà ch'è anche una corrispondenza univoca per tutti i valori reali e complessi di due variabili λ e λ' non determina necessariamente una relazione lineare, ossia un'equazione della forma

$$\alpha\lambda\lambda' + \beta\lambda + \gamma\lambda' + \delta = 0.$$

A tale scopo, si riferiscano fra loro due piani P e P' non paralleli, mediante una proiezione centrale fatta da un punto M non situato a distanza infinita. Si fissi in P una retta G , non parallela all'intersezione di P e P' ; ad essa corrisponderà in P' una retta G' . Sia O il punto di G corrispondente al punto infinitamente lontano di G' , e sia O' il punto di G' che corrisponde al punto infinitamente lontano di G .

Si può immaginare ora che una variabile complessa $\lambda = \xi + \eta i$ sia geometricamente rappresentata nel piano P , nella nota maniera di GAUSS; e in particolare che O sia l'origine e G l'asse delle ξ nel sistema di assi ortogonali che serve a tale rappresentazione, restando d'altronde arbitrario il fissare la direzione positiva degli assi. In modo analogo il piano P' serve alla rappresentazione geometrica di una seconda variabile complessa $\lambda' = \xi' + \eta' i$, e in esso prendansi O' per origine delle coordinate, G' per asse delle ξ' mentre la direzione positiva degli assi sia anche qui arbitraria.

Ora per la proiezione centrale, a ciascun punto in P corrisponde sempre uno ed un solo punto in P' e viceversa; epperò le due variabili λ e λ' sono, pel principio di CHASLES, riferite fra loro per tutti i valori reali e complessi; e quindi, se il principio fosse vero, dovrebbe sussistere fra λ e λ' un'equazione lineare rispetto a ciascuna di queste due variabili. Poichè le rette G e G' sono fra loro riferite proiettivamente, mediante raggi uscenti da M , i valori reali di λ corrisponderanno ai valori reali di λ' ; ed in particolare, i punti O ed O' corrispondendo ai punti infinitamente lontani di G' e G , fra i valori reali corrispondenti di λ e λ' sussisterà la relazione

$$\lambda\lambda' = c,$$

ove c è una costante reale.

Se questa relazione avesse luogo per tutt'i possibili valori corrispondenti, reali e complessi, di $\lambda = \xi + \eta i$ e $\lambda' = \xi' + \eta' i$, dovrebbe essere

$$(\xi + \eta i)(\xi' + \eta' i) = c$$

ossia

$$\xi + \eta i = \frac{c}{\xi' + \eta' i}.$$

Uguagliando fra loro le parti reali, nonchè le parti immaginarie dei due membri dell'equazione, si ottiene

$$\xi = \frac{c\xi'}{\xi'^2 + \eta'^2}, \quad \eta = -\frac{c\eta'}{\xi'^2 + \eta'^2}$$

e similmente

$$\xi' = \frac{c\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \eta' = -\frac{c\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Queste equazioni servono a risolvere il problema « dato un valore di $\lambda = \xi + \eta i$, trovare il valore corrispondente di $\lambda' = \xi' + \eta' i$, e viceversa ». Assumendo che il punto rappresentativo del valore λ in P si muova lungo una retta non passante per O e non situata per intero all'infinito, dimodochè durante tutto il movimento abbia luogo l'equazione

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma = 0,$$

allora il punto rappresentativo in P' del valore λ' , dedotto dalla relazione $\lambda\lambda' = c$, si muoverà lungo una curva rappresentata dall'equazione

$$\alpha \frac{c\xi'}{\xi'^2 + \eta'^2} - \beta \frac{c\eta'}{\xi'^2 + \eta'^2} + \gamma = 0$$

ossia sopra un cerchio passante per O' . Ma ciò è contrario alle leggi della proiettività centrale dei piani P e P' , per le quali ad una retta percorsa da λ in P corrisponde in P' una retta descritta da λ' . Infatti, anche il passaggio da λ' a λ e viceversa si effettua mediante equazioni assolutamente diverse dalle precedenti, cioè mediante le

$$\xi = \frac{c(q'' - q'n')}{q''\xi' - q'n'}, \quad \eta = \frac{cpn'}{q''\xi' - q'n'},$$

$$\xi' = \frac{q'\eta + cp}{p\xi + q\eta}, \quad \eta' = \frac{q''\eta}{p\xi + q\eta},$$

ove p, q, q', q'' sono costanti reali arbitrarie.

Ma perchè la proiettività centrale di P e P' dà pei valori complessi delle variabili una corrispondenza dei valori λ e λ' , la quale è diversa da quella espressa dall'equazione

$$\lambda\lambda' = c,$$

mentre coincide con questa per tutt'i valori reali delle variabili? La ragione sta in ciò, che una delle variabili, p. e. λ , in virtù della superiore equazione è, nel senso proprio della parola, funzione dell'altra variabile complessa λ' per tutt'i valori complessi; mentre questo non ha luogo nella proiezione centrale, nella quale λ e λ' si corrispondono bensì reciprocamente e univocamente, ma senza che una delle due quantità sia una funzione analitica dell'altra. E ciò d'altronde è manifesto dal fatto, che rappresentando il piano P sul piano P' mediante la proiezione centrale, non si conserva la similitudine delle parti infinitesime.

Da quanto precede si rivela senz'altro l'inesattezza dell'enunciato usato finora del principio di CHASLES. In sua vece si potrà ritenere come esatto il seguente teorema, molto meno generale:

« Se due forme geometriche sono fra loro riferite in modo che la dipendenza fra due elementi corrispondenti possa esprimersi mediante un'equazione algebrica, valida per tutti i valori reali e complessi degli argomenti, e che inoltre a ciascun elemento dell'una forma corrisponda sempre uno ed un solo elemento dell'altra, e viceversa, le due forme sono proiettive. »

Con questo teorema il campo della Geometria sintetica è però del tutto abbandonato e l'importanza teoretica del principio di CHASLES è essenzialmente ridotta. Tuttavia esso conserverà la sua non comune importanza pratica come sussidio per iscoprire nuove verità, e, comodo qual è a usarsi, farà evitare calcoli troppo prolissi, i quali molte volte nascondono la via che conduce alla scoperta delle proprietà geometriche. In realtà, questo principio, per quanto è a nostra conoscenza, non ha mai condotto finora a risultati inesatti, e ciò si deve alla circostanza che le necessarie restrizioni erano sempre verificate nelle ricerche allè quali esso è stato applicato; e si può ben presumere che nel campo delle curve e delle superficie algebriche, non si presenteranno così presto quistioni nelle quali non sia permesso l'uso del principio medesimo.

Osserveremo da ultimo che i dubbi che hanno dato luogo a questa Nota possono anche mettere in forse l'assoluto rigore di un altro postulato fondamentale della Geometria, che ha per conseguenza la identità fra le due più feconde definizioni delle curve d'ordine n . L'una suona così: Una curva d'ordine n è una figura i cui punti espressi in coordinate orto-

gonali (*) soddisfanno ad un'equazione del grado n ; e l'altra: Una curva d'ordine n è una figura che ha n (e soltanto n) punti comuni con una qualsivoglia retta. Infatti è necessario, perchè la seconda definizione coincida con la prima, che la curva in quella considerata soddisfaccia con le coordinate ortogonali di uno de' suoi punti ad una equazione algebrica, che sia valida per tutt' i valori reali e complessi degli argomenti x e y . Non ci fermeremo a dimostrare la necessità di questa restrizione, potendo essa dedursi facilmente da quanto precede.

Zurigo, 31 dicembre 1869.

(*) Si è scelto il più semplice sistema di coordinate, essendo esso abbastanza generale pel caso presente.

Dimostrazione di un teorema fondamentale nella teorica delle funzioni di variabili complesse.

(del D.^r GIULIO ASCOLI, a Milano).

Il signor H. LAURENT dimostrò in una tesi presentata alla Facoltà delle scienze di Nancy e posteriormente anche nella *Théorie des Résidus*, da lui pubblicata a Parigi nel 1865, il seguente teorema:

« Se le funzioni

$$\phi_1(z), \phi_2(z), \dots, \phi_n(z), \dots$$

sono sinettiche nell'area A e se la serie

$$\phi_1(z) + \phi_2(z) + \dots + \phi_n(z) + \dots \quad (1)$$

è convergente dentro essa area, la detta serie rappresenterà una funzione $f(z)$ sinettica in A , la cui derivata sarà

$$\phi'_1(z) + \phi'_2(z) + \dots + \phi'_n(z) + \dots$$

e il cui integrale sarà

$$\int \phi_1(z) dz + \int \phi_2(z) dz + \dots + \int \phi_n(z) dz + \dots$$

gli integrali estendendosi a linee di lunghezza finita, tracciate in A .

Avendo io trovato una dimostrazione di questo teorema, la quale mi sembra più semplice di quella data dal sig. LAURENT, non credo inopportuno il farla argomento della presente Nota.

Lemma. — Se le funzioni

$$\phi_1(z), \phi_2(z), \dots, \phi_n(z), \dots$$

hanno un solo valore e sono continue e finite per ogni punto della linea di lunghezza finita C , e se la serie

$$f(z) = \phi_1(z) + \phi_2(z) + \dots + \phi_n(z) + \dots$$

è convergente e rappresenta una funzione continua lungo C , sarà

$$\int_C f(z) dz = \sum_{s=1}^{s=\infty} \int_C \phi_s(z) dz.$$

Ed invero, chiamando con R_n il resto della serie proposta, si ha

$$f(z) = \sum_{s=1}^{s=n} \phi_s(z) + R_n,$$

donde

$$\int_C f(z) dz = \sum_{s=1}^{s=n} \int_C \phi_s(z) dz + \int_C R_n dz.$$

Indicando con μ il massimo modulo di R_n lungo la linea di integrazione e con $d\sigma$ il modulo di dz , avremo

$$\begin{aligned} \text{mod} \int_C R_n dz &< \mu \int_C d\sigma \\ &< \mu \sigma. \end{aligned}$$

Onde, poichè σ è finito e μ tende a zero per n infinito, sarà

$$\lim \text{mod} \int_C R_n dz = 0,$$

epperò

$$\int_C f(z) dz = \sum_{s=1}^{s=\infty} \int_C \phi_s(z) dz.$$

Ciò posto, dimostriamo il teorema enunciato a principio. La serie (1) essendo convergente e le funzioni ϕ essendo monodrome, possiamo coprire l'area A mediante un sistema L di valori, monodromo e finito, operando nel seguente modo:

Prendo a considerare un punto qualsivoglia z_0 in A , introduco codesto valore z_0 nei vari termini della serie (1) ed ottengo un valore finito ed

uno soltanto qual somma della serie, che porto sopra z_0 ; ciò che ho fatto in particolare pel punto z_0 , ripeto per tutti i punti di A . Laonde questo sistema L di valori [costruito nel modo or ora precisamente indicato] copre A una sola volta, vale a dire, è monodromo; e di più è finito. Facciamo vedere che è continuo e monogeno.

Una funzione $\phi_s(z)$ sinettica nell'intorno del punto z_1 può porsi sotto la forma

$$\phi_s(z') = (z' - z_1) [\phi'_s(z_1) + \varepsilon_s(z')] + \phi_s(z_1)$$

essendo z' un punto nell'intorno di z_1 , ed $\varepsilon_s(z')$ una funzione sinettica di z' pure nell'intorno di z_1 e che si annulla per $z' = z_1$.

Supponendo ora z_1 compreso in A insieme col detto intorno (che può suppersi piccolissimo purchè finito), avremo che il sistema $L = f(z)$ di valori considerato sarà per $z = z'$ eguale a

$$f(z') = \phi_1(z') + \phi_2(z') + \dots$$

ossia

$$f(z') = \{ \phi_1(z_1) + (z' - z_1) [\phi'_1(z_1) + \varepsilon_1(z')] \} + \dots$$

onde

$$f(z') - f(z_1) = (z' - z_1) [\phi'_1(z_1) + \varepsilon_1(z')] + \dots \quad (2)$$

Ora posso prendere n finito sì, ma talmente grande che in ciascun punto dell'intorno di z_1 il modulo del resto R_n della serie (2) abbia un valore più piccolo di una quantità finita data estremamente piccola. Chiamando con μ il massimo modulo di R_n nell'intorno di z_1 , avremo

$$\text{mod} [f(z') - f(z_1)] < \text{mod} (z' - z_1) \sum_{s=1}^{s=n} [\phi'_s(z_1) + \varepsilon_s(z')] + \mu,$$

donde

$$\lim_{z' \rightarrow z_1} \text{mod} [f(z') - f(z_1)] < \mu.$$

Ponendo mente che μ è tale funzione di n che per $n = \infty$ va a zero, mentre il primo membro non dipende punto da n , avremo per $n = \infty$

$$\lim_{z' \rightarrow z_1} \text{mod} [f(z') - f(z_1)] = 0.$$

Quindi, essendo z' un punto qualsivoglia dell'intorno di z_1 , i valori deposti in codesto intorno si connettono con continuità a quello giacente in z_1 ,

cosicchè la serie $f(z)$ (ovvero il sistema L di valori precedentemente costruito) è una funzione continua.

Dimostrato che la serie

$$f(z) = \phi_1(z) + \phi_2(z) + \dots$$

è una funzione monodroma, finita e continua, si vede agevolmente che essa è pure monogena. Ed invero, detto z un punto in A , e C una curva chiusa (pure in A) racchiudente esso punto, avremo che

$$\frac{f(k)}{k-z} = \frac{\phi_1(k)}{k-z} + \frac{\phi_2(k)}{k-z} + \dots$$

essendo k un punto qualsivoglia in C ; ed integrando la precedente equazione sarà, in virtù del lemma,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(k) dk}{k-z} = \int_C \frac{\phi_1(k) dk}{k-z} + \dots = \phi_1(z) + \dots = f(z),$$

onde

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(k) dk}{(k-z)^2}.$$

Dunque $f(z)$ è anche monogena.

Ora poichè

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(k)}{(k-z)^2} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\phi_1(k)}{(k-z)^2} + \dots$$

si avrà altresì

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(k) dk}{(k-z)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\phi_1(k) dk}{(k-z)^2} + \dots$$

epperò

$$f'(z) = \phi'_1(z) + \dots$$

Possiamo per ultimo osservare che, descritto intorno ad un punto qualsivoglia z_0 in A un circolo C_1 non uscente da A , le varie funzioni sono tutte sviluppabili in serie procedenti secondo le potenze ascendenti della variabile z entro C_1 , cioè si ha

$$\phi_s(z) = \sum \left(\frac{\partial^n \phi_s}{\partial z^n} \right)_{z_0} \frac{z^n}{1 \cdot 2 \dots n},$$

e la serie doppia

$$\begin{aligned}
 & (\phi_1)_{z_0} + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z}\right)_{z_0} \frac{z}{1} + \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2}\right)_{z_0} \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \dots \\
 & + (\phi_2)_{z_0} + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial z}\right)_{z_0} \frac{z}{1} + \left(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2}\right)_{z_0} \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \dots \\
 & + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

potrà sommarsi per verticali.

Milano, il 17 maggio 1870.



Sur le développement en séries des intégrales des équations différentielles linéaires.

(par Mr. L. FUCHS, prof. à Greifswald en Poméranie).

Le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances de la variable indépendante est incontestablement en général la manière la plus simple, soit de les évaluer pour une valeur donnée de la variable, soit de les examiner par rapport à leur caractère dans le voisinage d'un point de discontinuité. Mais de plusieurs raisons ce développement est assujéti à des inconvénients considérables. L'un de ces inconvénients consiste en ce, que sous cette forme de représentation certaines propriétés des fonctions restent cachées. C'est pourquoi en diverses recherches l'on s'est procuré différentes autres espèces de représentation qui font ressortir les propriétés que l'on a en vue; par exemple la représentation par la série de FOURIER pour faire voir la périodicité immédiatement par la forme. Un autre plus grave inconvénient des séries à puissances, qui est aussi la cause essentielle du premier, consiste en ce que l'on ne peut pas leur conserver la même forme dans tout le plan infini, qui sert à la représentation de la variable indépendante; mais il faut au contraire la changer tant dans le voisinage des divers points de discontinuité que dans l'infini. Une représentation qui évite cet inconvénient, soit entièrement, soit en partie, est donc digne de quelque attention, lors même qu'elle est moins propre au calcul numérique. Par cette raison il ne sera pas tout-à-fait superflu de donner dans ce mémoire une classe de développements des intégrales des équations différentielles linéaires qui conservent leur forme, du moins pour toute valeur finie de la variable qui ne coïncide pas avec un des points de discontinuité. Les termes de ces séries sont formés par des quadratures réitérées, ils sont donc naturellement

compliqués quant au calcul, mais ils jouissent d'une loi de formation très-claire. Dans le journal de Liouville (année 1864) Mr. CAQUÉ en se plaçant à un point de vue tout différent du notre, a donné un développement en série des intégrales des équations différentielles linéaires qu'il trouve par le passage d'une équation à différences finies. En essayant de remplacer cette voie naturellement épineuse par une autre plus commode et plus courte, nous reconnûmes bientôt que la série de Mr. CAQUÉ peut être conçue comme cas spécial de la classe indiquée de représentations; et par là elle nous servira dans ce qui va suivre comme un simple exemple.

1.

Avant d'entrer dans la matière particulière de ce mémoire nous allons préciser la forme d'une intégrale de l'équation différentielle:

$$y^{(m)} = p_{m-1}y^{(m-1)} + p_{m-2}y^{(m-2)} + \dots + p_0y + p \quad (1)$$

de sorte que $y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}$ prennent pour $x = x_0$ respectivement les valeurs $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m-1}$; en signifiant les dérivées prises par rapport à x par d'accents supérieurs, et supposant que les fonctions de x arbitrairement données $p_{m-1}, p_{m-2}, \dots, p_0, p$ ne deviennent pas infinies pour $x = x_0$, ou, ce qui veut dire le même, que x_0 n'est pas un point singulier de l'équation différentielle (voir à l'égard de cette dénomination le n.º 1 de mon mémoire dans le Journal de Crelle-Borchardt, t. 66).

Soit y_1, y_2, \dots, y_m un système fondamental d'intégrales (dans le sens de mon mémoire déjà cité, n.º 2) de l'équation différentielle

$$\bar{y}^{(m)} = p_{m-1}\bar{y}^{(m-1)} + p_{m-2}\bar{y}^{(m-2)} + \dots + p_0\bar{y}, \quad (2)$$

on sait que l'on trouve d'après LAGRANGE les intégrales de l'équation (1) en considérant dans l'expression :

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_my_m$$

les coefficients c_1, c_2, \dots, c_m comme dépendants de x et en les déterminant ainsi que

$$y^{(i)} = c_1y_1^{(i)} + c_2y_2^{(i)} + \dots + c_my_m^{(i)} \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, m-1. \quad (3)$$

A cet effet les fonctions c doivent satisfaire aux équations :

$$c'_1 y_1^{(i)} + c'_2 y_2^{(i)} + \dots + c'_m y_m^{(i)} = 0 \text{ pour } i=0, 1, 2, \dots, m-2. \quad (4)$$

A ces équations on doit adjoindre encore une équation qui exprime que y est une intégrale de l'équation (1).

En posant le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1^{(m-1)} & y_1^{(m-2)} & y_1 \\ y_2^{(m-1)} & y_2^{(m-2)} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ y_m^{(m-1)} & y_m^{(m-2)} & y_m \end{vmatrix} = \Delta$$

et en signifiant le coefficient de $y_i^{(m-1)}$ en Δ avec Δ_i on a (comme il suit des mémoires de MALMSTÈN et de JOACHIMSTHAL dans le journal de Crelle-Borchardt t. 39 et 40)

$$c_i = \int \frac{p \Delta_i}{\Delta} dx \text{ pour } i=1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

L'on peut poser

$$c_i = \int_{x_0}^x \frac{p \Delta_i}{\Delta} dx + \gamma_i \text{ pour } i=1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ sont des constantes arbitraires. D'après les équations (3) on a

$$y^{(k)} = \sum_1^m y_i^{(k)} \int_{x_0}^x \frac{p \Delta_i}{\Delta} dx + \sum_1^m \gamma_i y_i^{(k)} \text{ pour } k=0, 1, 2, \dots, m-1. \quad (7)$$

Pour que $y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}$ aient pour $x=x_0$ respectivement les valeurs $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_{m-1}$, les constantes γ se déterminent par le système suivant d'équations :

$$\gamma_1 \gamma_{1i} + \gamma_2 \gamma_{2i} + \dots + \gamma_m \gamma_{mi} = \gamma_i \text{ pour } i=0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (8)$$

en signifiant par γ_{ki} la valeur de $y_k^{(i)}$ pour $x=x_0$.

Ces équations sont toujours résolubles, parce que leur déterminant est égal à la valeur de Δ pour $x=x_0$, qui ne s'évanouit pas (v. mon mém. cit. n.º 2). L'intégrale cherchée a donc la forme :

$$y = \sum_1^m y_i \int_{x_0}^x \frac{p \Delta_i}{\Delta} dx + \sum_1^m \gamma_i y_i, \tag{9}$$

où les γ sont déterminées par les équations (8).

Si en particulier $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_{m-1}$ sont toutes zéro, le déterminant des équations (8) ne s'évanouissant pas, il suit que $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ sont toutes zéro, donc l'intégrale (9) devient :

$$y = \sum_1^m y_i \int_{x_0}^x \frac{p \Delta_i}{\Delta} dx. \tag{9^a}$$

Dans ce mémoire nous appellerons l'intégrale (9^a) l'intégrale principale appartenant à x_0 . De l'équation (9^a) il suit, que, si l'équation différentielle est homogène, l'intégrale principale est indetiquement zéro, puisque $p=0$.

Il est essentiel de remarquer que la première somme dans l'équation (9) ne varie pas quand on y remplace le système fondamental y_1, y_2, \dots, y_m par un autre.

En effet, en remplaçant y_i par $c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \dots + c_{im}y_m$, où les quantités c_{ik} sont des constantes arbitraires ainsi choisies que le déterminant :

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{mm} \end{vmatrix}$$

ne devienne pas zéro, Δ se change en $C\Delta$ et Δ_i en

$$\sum_1^m \frac{\partial C}{\partial c_{ik}} \frac{\partial \Delta}{\partial y_k^{(m-1)}} = \sum_1^m \frac{\partial C}{\partial c_{ik}} \Delta_k.$$

Par là la première somme de l'équation (9) se change par la substitution indiquée en

$$\sum_1^m (c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \dots + c_{in}y_m) \sum_1^m \frac{\partial C}{\partial c_{ik}} \int_{x_0}^x \frac{p \Delta_k}{\Delta C} dx.$$

Puisque $\sum_1^m c_{il} \frac{\partial C}{\partial c_{ik}} = C$ ou $= 0$ selon que $l=k$ ou $l \geq k$, cette expression se transforme en

$$\sum_1^m C y_k \int_{x_0}^x \frac{p \Delta_k}{C \Delta} dx = \sum_1^m y_k \int_{x_0}^x \frac{p \Delta_k}{\Delta} dx; \quad \text{c. q. f. d.}$$

2.

Reprenons l'équation différentielle:

$$D(y) - p = y^{(m)} - p_{m-1} y^{(m-1)} - p_{m-2} y^{(m-2)} - \dots - p_0 y - p = 0 \quad (1)$$

et transformons d'une manière arbitraire $D(y)$ dans une différence

$$D(y) = D_1(y) - D_2(y) \quad (2)$$

de manière que $D_1(y)$ et $D_2(y)$ soient des fonctions linéaires et homogènes de y et de ses dérivées, et que $D_1(y)$ contienne le terme $y^{(m)}$ et dans les autres termes des dérivées d'ordre inférieur, de sorte que $D_2(y)$ contiendra seulement les dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$, l'équation (1) est alors

$$D_1(y) = D_2(y) + p. \quad (3)$$

Soit maintenant u_0 une intégrale de l'équation différentielle

$$D_1(y) = 0 \quad (3^a)$$

telle que $u_0, u_0', u_0'', \dots, u_0^{(m-1)}$ prennent pour $x = x_0$ respectivement les valeurs arbitrairement données $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m-1}$, et posons dans l'équation (3)

$$y = u_0 + u,$$

il s'ensuit que u est l'intégrale principale appartenant à x_0 de l'équation différentielle

$$D_1(u) = D_2(u) + F_0(x) \quad (4)$$

où

$$F_0(x) = D_2(u_0) + p.$$

Soit u_1 l'intégrale principale appartenant à x_0 de l'équation

$$D_1(u) = F_0(x) \quad (4^a)$$

et posons dans l'équation (4)

$$u = u_1 + v$$

il s'ensuit que v est l'intégrale principale de l'équation :

$$D_1(v) = D_2(v) + F_1(x) \quad (5)$$

où

$$F_1(x) = D_2(u_1).$$

Soit u_2 l'intégrale principale de l'équation

$$D_1(v) = F_1(x) \quad (5^a)$$

et posons dans l'équation (5)

$$v = u_2 + v_1,$$

il s'ensuit que v_1 est l'intégrale principale de l'équation :

$$D_1(v_1) = D_2(v_1) + F_2(x) \quad (6)$$

où

$$F_2(x) = D_2(u_2).$$

Soit de nouveau u_3 l'intégrale principale de l'équation :

$$D_1(v_1) = F_2(x) \quad (6^a)$$

et posons dans l'équation (6)

$$v_1 = u_3 + v_2,$$

il s'ensuit que v_2 est l'intégrale principale de l'équation :

$$D_1(v_2) = D_2(v_2) + F_3(x) \quad (7)$$

où

$$F_3(x) = D_2(u_3), \text{ etc.}$$

En continuant ces opérations on trouve que

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_r + v_{r-1} \quad (8)$$

est une intégrale de l'équation (1) telle que pour $x = x_0$ les fonctions $y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}$ prennent respectivement les valeurs $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m-1}$, en supposant que u_0 est l'intégrale principale appartenante à x_0 de l'équation différentielle

$$D_1(y) = F_{\rho-1}(x) \text{ pour } \rho > 0 \quad (9)$$

et u_0 l'intégrale de l'équation:

$$D_1(y) = 0 \quad (9^a)$$

telle que pour $x = x_0$ les fonctions $u_0, u_0', u_0'', \dots, u_0^{(m-1)}$ prennent respectivement les valeurs $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m-1}$, et que les fonctions F soient liées par la relation:

$$\left. \begin{aligned} F_\rho(x) &= D_2(u_\rho) \text{ pour } \rho > 0 \\ F_0(x) &= D_2(u_0) + p \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

et enfin que v_{r-1} est l'intégrale principale appartenante à x_0 de l'équation

$$D_1(y) = D_2(y) + F_r(x). \quad (11)$$

Par les équations (9)-(11) on obtient successivement $u_0, F_0(x); u_1, F_1(x); u_2, F_2(x)$, etc. Mais il faut qu'à ces relations on en substitue d'autres, au moyen desquelles on puisse calculer directement ces fonctions sans recourir chaque fois aux équations différentielles; voilà le but du numéro suivant.

3.

Soit y_1, y_2, \dots, y_m un système fondamental d'intégrales de l'équation:

$$D_1(y) = 0, \quad (1)$$

on a, en conservant les notations Δ et Δ_i du n. 1,

$$u_\rho = \sum_1^m c_{\rho i} y_i \text{ pour } \rho > 0 \quad (2)$$

où

$$c_{\rho i} = \int_{x_0}^x \frac{F_{\rho-1}(x) \cdot \Delta_i}{\Delta} dx.$$

Puisque d'après l'équation (3) du n. 1

$$u_\rho^{(k)} = \sum_1^m c_{\rho i} y_i^{(k)} \text{ pour } k = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

il suit

$$D_2(u_\rho) = \sum_1^m c_{\rho i} D_2(y_i) \text{ pour } \rho > 0, \quad (3)$$

la dérivée la plus élevée contenue en $D_2(y)$ étant la $m - 1^{\text{ième}}$.

En remplaçant en $c_{\rho i}$ sous le signe d'intégration la variable x par t_1 et en désignant par v_1, v_2, \dots, v_n respectivement les mêmes fonctions de t que y_1, y_2, \dots, y_m de x , en désignant enfin par $\Delta(t, x)$ le déterminant que l'on obtient en remplaçant dans $\Delta(t)$ les dérivées

$$\frac{d^{n-1}v_1}{ds^{n-1}}, \frac{d^{n-1}v_2}{ds^{n-1}}, \dots, \frac{d^{n-1}v_m}{ds^{n-1}} \text{ resp. par } D_2(y_1), D_2(y_2), \dots, D_2(y_m)$$

quantités dans lesquelles la variable est x , il s'ensuit de l'équation (3) de ce n.º et de l'équation (10) du n.º précédent

$$F_\rho(x) = \int_{x_0}^x \frac{F_{\rho-1}(t) \Delta(t, x)}{\Delta(t)} ds \text{ pour } \rho > 0. \quad (4)$$

En remplaçant dans le déterminant $\Delta(t)$ les dérivées $\frac{d^{n-1}v_1}{ds^{n-1}}, \frac{d^{n-1}v_2}{ds^{n-1}}, \dots, \frac{d^{n-1}v_m}{ds^{n-1}}$ resp. par y_1, y_2, \dots, y_m fonctions de x et désignant le déterminant résultant par $\Delta_1(t, x)$, il suit de l'équation (2)

$$u_\rho = \int_{x_0}^x \frac{F_{\rho-1}(t) \Delta_1(t, x)}{\Delta(t)} ds \text{ pour } \rho > 0. \quad (B)$$

Par l'équation (A) on peut trouver successivement $F_1(x), F_2(x)$, etc., et alors l'équation (B) donne u_1, u_2 , etc. Enfin il suit également de l'équation (11) du n.º précédent et de l'équation (9^a) du n.º 1:

$$v_{r-1} = \int_{x_0}^x \frac{F_r(t) \Delta_1(t, x)}{\Delta(t)} ds. \quad (C)$$

Que l'on remarque que la $i^{\text{ième}}$ dérive de $\Delta_1(t, x)$ prise par rapport à x se forme, si l'on remplace en $\Delta_1(t, x)$ les fonctions y_1, y_2, \dots, y_m respectivement par $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_m^{(i)}$, et les dérivées $\frac{d^{n-2}v_1}{ds^{n-2}}, \frac{d^{n-2}v_2}{ds^{n-2}}, \dots, \frac{d^{n-2}v_m}{ds^{n-2}}$ respectivement par $\frac{d^{m-1}v_1}{ds^{m-1}}, \frac{d^{m-1}v_2}{ds^{m-1}}, \dots, \frac{d^{m-1}v_m}{ds^{m-1}}$.

En posant donc

$$D_2(y) = q_{m-1}y^{(m-1)} + q_{m-2}y^{(m-2)} + \dots + q_0y$$

l'on dérive de la première remarque

$$\Delta(t, x) = q_0\Delta_1(t, x) + q_1 \frac{\partial \Delta_1(t, x)}{\partial x} + q_2 \frac{\partial^2 \Delta_1(t, x)}{\partial x^2} + q_{m-1} \frac{\partial^{m-1} \Delta_1(t, x)}{\partial x^{m-1}}. \quad (D)$$

4.

Les intégrales du n.º précédent sont prises toutes le long d'une même ligne d'intégration qui ne traverse aucun point singulier de l'équation différentielle (1) du n.º 2. Par là $\frac{\Delta(t, x)}{\Delta(t)}$ et $F_0(t)$ sont toujours finies le long de cette ligne, $\Delta(t)$ ne s'évanouissant et $\Delta(t, x)$ et $F_0(t)$ ne devenant infinies que pour les points singuliers (v. mon mém. cité n.º 2). C'est pourquoi l'on peut assigner deux quantités positives M et N telles que le module de $\frac{\Delta(t, x)}{\Delta(t)}$ ne surpasse pas M et le module de $F_0(t)$ ne surpasse pas N le long de la ligne indiquée. Soit de plus s l'arc de cette ligne pris de x_0 jusqu'à x , ds étant le module de dx , nous avons, en employant itérativement l'équation (A) du n.º précédent,

$$\left. \begin{aligned} \text{mod } F_1(x) &< N \cdot Ms \\ \text{mod } F_2(x) &< \frac{N \cdot (Ms)^2}{1 \cdot 2} \\ \text{mod } F_3(x) &< \frac{N(Ms)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ \dots & \\ \text{mod } F_\rho(x) &< \frac{N(Ms)^\rho}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \rho} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Puisque, comme l'on sait, la série

$$\frac{N(Ms)}{1}, \frac{N(Ms)^2}{1 \cdot 2}, \frac{N(Ms)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ etc. in inf.} \quad (2)$$

est convergente, la série

$$F_1(x), F_2(x), F_3(x), \text{ etc. in inf.} \quad (3)$$

est aussi convergente.

D'une manière semblable Mr. CAQUÉ a démontré la convergence de sa série particulière.

Mais il faut ajouter une remarque à cette démonstration. En effet l'arc de la ligne d'intégration peut être infini, quand même x est finie, l'intégration s'approchant du point x par des tortillements en nombre infini. Alors la démonstration précédente serait en défaut. Mais, x n'étant pas un point singulier, on sait que la valeur d'une telle intégrale égale la valeur d'une autre prise de x_0 à x sur une ligne de longueur finie et qui constitue avec la première un contour ne contenant aucun point singulier dans son intérieur.

De l'équation (B) du n.º précédent et des inégalités (1) de ce n.º il suit

$$\text{mod } u_p < \frac{N(Ms)^p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p} \quad (4)$$

et de là on tire que la série

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \text{ in inf.} \quad (5)$$

est aussi convergente.

Il nous reste encore à démontrer que la série (5) satisfait à l'équation différentielle (1) du n.º 2. A cet effet il faut et il suffit que le module de la fonction v_{r-1} de l'équation (8) du n.º 2 décroisse indéfiniment avec r . C'est que l'on déduit immédiatement de l'équation (C) du n.º précédent et des inégalités (1) de ce n.º, parce que l'on a

$$\text{mod } v_{r-1} < \frac{N(Ms)^{r+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r+1)}$$

quantité décroissante indéfiniment avec r à cause de la convergence de la série (2).

5.

Supposons que l'on connaît dans toute l'étendue du plan de x le système fondamental d'intégrales y_1, y_2, \dots, y_m de l'équation différentielle (1) du

n.º 3, alors la série

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \dots \text{ in inf.}$$

représente pour toute valeur finie de x , excepté les points singuliers, une intégrale de l'équation (1) du n.º 2, telle que pour $x = x_0$ les fonctions y , y' , y'' , ... y^{m-1} prennent respectivement les valeurs $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m-1}$. On obtient les termes de la série par des intégrations réitérées, comme l'indiquent les équations (A) et (B) du n.º 3.

En choisissant convenablement $D_1(y)$ et partant y_1, y_2, \dots, y_m , on peut obtenir que les termes de la série reçoivent des formes prescrites, telles qu'une recherche particulière les demande. En tout cas, il est clair qu'il y a une infinité de représentations différentes du genre indiqué des intégrales d'une équation différentielle linéaire.

6.

Nous allons maintenant déduire, comme simple exemple des formules exposées dans les n.ºs précédents, la série que Mr. CAQUÉ a trouvée dans son mémoire cité antérieurement.

En effet en choisissant

$$D_1(y) = y^{(m)}$$

l'équation (1) du n.º (3) devient

$$y^{(m)} = 0. \quad (1)$$

L'intégrale u_0 de cette équation est:

$$u_0 = \eta_0 + \eta_1 \frac{x - x_0}{1} + \eta_2 \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \eta_3 \frac{(x - x_0)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \eta_{m-1} \frac{(x - x_0)^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)}. \quad (2)$$

En prenant les intégrales

$$y_1 = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x^2, \dots, \quad y_m = x^{m-1}$$

pour système fondamental, on a

$$\Delta = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} 1! 2! 3! \dots (m-1)!$$

en désignant le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k$ par $k!$

En formant, d'après la remarque faite à la fin du n.º 3, les dérivées de $\Delta_1(t, x)$ par rapport à x et t , il résulte dans le cas présent immédiatement :

$$\frac{\partial \Delta_1(t, x)}{\partial x} = - \frac{\partial \Delta_1(t, x)}{\partial t}. \quad (4)$$

En outre il est clair que

$$\frac{\partial^m \Delta_1(t, x)}{\partial x^m} = 0. \quad (5)$$

De l'équation (4) on déduit que la fonction $\Delta_1(x, t)$ est une fonction entière de $x - t$ seul, et de l'équation (5) que cette fonction est du degré $m - 1$ au plus. Puisque $\Delta_1(x, t)$ et ses $m - 2$ premières dérivées prises par rapport à x s'évanouissent pour $x = t$, on a

$$\Delta_1(t, x) = C(x - t)^{m-1},$$

où C est indépendante de x et t . Il est clair que

$$\frac{\partial^{m-1} \Delta_1(t, x)}{\partial x^{m-1}} = \Delta,$$

donc

$$\Delta_1(t, x) = \frac{\Delta}{(m-1)!} (x - t)^{m-1}. \quad (6)$$

Par l'équation (D) du n.º 3 on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(t, x)}{\Delta(t)} &= \frac{p_0}{(m-1)!} (x - t)^{m-1} + \frac{p_1}{(m-2)!} (x - t)^{m-2} + \\ &+ \frac{p_2}{(m-3)!} (x - t)^{m-3} + \dots + \frac{p_{m-2}}{1!} (x - t) + p_{m-1} = f(x, t). \end{aligned} \quad (7)$$

Par les équations (6) et (7) les équations (A) et (B) du n.º (3) deviennent pour le cas présent :

$$F_\varrho(x) = \int_{x_0}^x F_{\varrho-1}(t) f(x, t) ds \quad (A')$$

$$u_\varrho = \int_{x_0}^x F_{\varrho-1}(t) \frac{(x-t)^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m-1} ds. \quad (B')$$

7.

Il nous reste à faire voir que les termes de la série de Mr. CAQUÉ coïncident avec les termes u_q que nous venons de donner par la formule (B'), si l'on modifie quelques notations. En remplaçant m par $p+1$; $p, p_0, p_1, \dots, p_{m-1}$ respectivement par $A(x), A_0(x), A_1(x), \dots, A_p(x)$; $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m-1}$ respectivement par $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$; et en nommant $\mathfrak{S}(x)$ la fonction u_0 de l'équation (2) du n.º précédent, on voit que la fonction $f(x, t)$ donnée par l'équation (7) du n.º précédent coïncide avec la fonction $f(x, t)$ de Mr. CAQUÉ définie par l'équation (D), chap. II, n.º 6 de son mémoire; de même notre fonction $F_0(x)$ définie généralement par l'équation (10) du n.º 2 coïncide pour le cas présent avec la fonction $F(x)$ de Mr. CAQUÉ donnée par l'équation (C) de son mémoire. Les fonctions $f_q(x, t)$ qu'il a donné par la formule (E) ibid. peuvent être définies plus distinctement par l'équation:

$$f_{q+1}(x, z) = \int_z^x f_q(x, u) f(u, z) du. \quad (1)$$

Dans la formule (H) ibid., chap. III n.º 12, Mr. CAQUÉ trouve

$$\frac{d^{\nu+1}y}{dx^{\nu+1}} = F(x) + \sum_0^{\infty} \int_{x_0}^x F(z) f_q(x, z) dz. \quad (2)$$

D'après notre formule (B') du n.º précédent nous avons:

$$\frac{d^{\nu+1}u_q}{dx^{\nu+1}} = F_{q-1}(x) \text{ pour } q > 0 \quad (3)$$

$\frac{d^{\nu+1}u_0}{dx^{\nu+1}}$ s'évanouissant; donc il faut montrer que

$$F_{q+1}(x) = \int_{x_0}^x F(z) f_q(x, z) dz. \quad (4)$$

Pour ce but établissons la formule

$$\int_{x_0}^z d\omega \int_{\omega}^x \psi(u, \omega) du = \int_z^x du \int_{x_0}^z \psi(u, \omega) d\omega + \int_{x_0}^z d\omega \int_{x_0}^{\omega} \psi(\omega, v) dv, \quad (A'')$$

où $\psi(u, \omega)$ est une fonction des variables indépendantes u, ω , telle que les fonctions à intégrer ne deviennent pas infinies dans l'étendue de l'intégration.

Les deux membres de cette équation étant des fonctions de x et z dont les dérivées prises par rapport à z sont l'une et l'autre

$$\int_z^x \psi(u, z) du,$$

et dont les valeurs pour $z = x_0$ s'évanouissent simultanément, sont égales. En posant dans cette équation $z = x$, on obtient la formule particulière:

$$\int_{x_0}^x d\omega \int_{\omega_0}^x \psi(u, \omega) du = \int_{x_0}^x d\omega \int_{x_0}^{\omega} \psi(\omega, v) dv. \quad (B'')$$

En posant en outre:

$$\psi(u, \omega) = f_{q-1}(x, u) f(u, \omega) F_r(\omega)$$

et partant

$$\psi(\omega, v) = f_{q-1}(x, \omega) f(\omega, v) F_r(v),$$

il suit

$$\int_{x_0}^x F_r(\omega) d\omega \int_{\omega}^x f_{q-1}(x, u) f(u, \omega) du = \int_{x_0}^x f_{q-1}(x, \omega) d\omega \int_{x_0}^{\omega} f(\omega, v) F_r(v) dv$$

c'est-à-dire, d'après la formule (1) de ce n.º et la formule (A') du n.º précédent,

$$\int_{x_0}^x F_r(\omega) f_q^r(x, \omega) d\omega = \int_{x_0}^x f_{q-1}(x, \omega) F_{r+1}(\omega) d\omega. \quad (5)$$

En posant dans cette équation au lieu de r et q premièrement 0 et q , puis 1 et $q-1$, puis 2 et $q-2$, puis 3 et $q-3$, etc., jusqu'à $q-1$ et 1, et en ajoutant, on obtient

$$\int_{x_0}^x F_0(\omega) f_q^0(x, \omega) d\omega = \int_{x_0}^x f_0^0(x, \omega) F_q(\omega) d\omega = F_{q+1}(x),$$

donc l'équation (4) se trouve démontrée.

Greifswald, mai 1870.

Intorno alla rappresentazione delle superficie gobbe di genere $p=0$ sopra un piano.

(del dott. A. ARMENANTE, prof. a Chieti.)

La bella Memoria del professor CLEBSCH (*) mi ha servito di norma in questo lavoro, nel quale trovo, per le superficie gobbe, oltre i risultati comuni a tutte le superficie algebriche rappresentabili punto per punto su di un piano, ancora alcuni altri caratteristici per le superficie gobbe. Tra questi sono da notare: la esistenza di una curva piana che ha intimo rapporto colla superficie ed è in generale punteggiata proiettivamente alla curva doppia della superficie; e la riduzione della rappresentazione ad un tipo normale, nel quale le immagini delle generatrici sono rette di un fascio, e quelle delle sezioni piane sono curve del minimo ordine possibile tra quelle soddisfacenti alle condizioni della rappresentazione.

Le superficie gobbe del 3.^o e 4.^o ordine, non potendo racchiudersi nelle considerazioni generali, sono state trattate a parte, effettuandone la rappresentazione geometricamente. E come quelle del 3.^o ordine sono caso particolare delle superficie con una direttrice rettilinea della massima molteplicità (**), così ne abbiamo intrapresa la rappresentazione nel caso generale. Prima di passare oltre, facciamo notare che il prof. CREMONA nella sua Memoria: *Rappresentazione di una classe di superficie gobbe su di un piano e determinazione delle loro curve assintotiche* (***) ha dimostrato che le superficie gobbe rappresentabili (punto per punto) su di un piano sono esclusivamente le superficie del genere $p=0$.

(*) *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen* ecc. (Mathematische Annalen, I Band. S. 253.)

(**) CAYLEY, *A second Memoir on skew surfaces otherwise scrolls.*

(***) Tomo 1.^o di questi *Annali.*

§ 1. Rappresentazione delle superficie gobbe di genere $p=0$ su di un piano.

Si possono, come è noto (*), assumere per equazioni di una superficie gobba irriducibile S_n di ordine n e genere $p=0$, le

$$\left. \begin{aligned} f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + f_4 x_4 &= 0 \\ \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \phi_3 x_3 + \phi_4 x_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

nelle quali f e ϕ sono polinomi interi di un parametro λ degli ordini m, μ , tali che

$$m + \mu = n \quad m = < n,$$

e tali che per alcun valore di λ non risulti .

$$\frac{f_1}{\phi_1} = \frac{f_2}{\phi_2} = \frac{f_3}{\phi_3} = \frac{f_4}{\phi_4}.$$

Tagliamo ora la generatrice (1) di S_n con un piano passante per una retta fissa, la equazione del quale

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4) = k(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4)$$

dipende dal parametro variabile k . Per tal modo otteniamo le coordinate di un punto della (1), ossia di un punto di S_n , espresse coi parametri λ e k mediante le

$$\rho x_s = \theta_s(\lambda) + k \omega_s(\lambda), \quad s=1, 2, 3, 4, \quad (2)$$

dinotando con θ_s ed ω_s i complementi algebrici di β_s ed α_s nel determinante

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \end{vmatrix}$$

Se nelle (2) poniamo

$$\lambda = \frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad k = \frac{\xi_3}{\xi_2}$$

(*) SCHWARTZ, *Ueber die geradlinigen Flächen fünften Grades* (G. Crelle-Borchardt, t. 66).

esse prendono la forma omogenea

$$\rho x_s = \pi_s(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \omega_s(\xi_1, \xi_2), \quad (3)$$

alla quale dunque possiamo sempre ridurre le equazioni di una superficie gobba S_n di genere $p=0$. Reciprocamente ogni sistema (3) rappresenta una superficie di tale natura; giacchè eliminando dalle (3) ρ e ξ_3 , si hanno le equazioni di una retta, i coefficienti delle quali sono funzioni razionali del parametro $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_2}$.

Se consideriamo ξ_1, ξ_2, ξ_3 come coordinate di un punto mobile in un dato piano P , le (3) ci dicono che in generale ad ogni punto di P corrisponde un punto solo di S_n . Viceversa, osservando che per ogni sistema (x) appartenente ad un punto di S_n vi ha un solo sistema (ξ) che verifichi ad un tempo le quattro equazioni (3), possiamo anche dire che ad un punto di S_n corrisponde in generale un punto solo del piano P . Dunque S_n è punteggiata proiettivamente ad un piano P .

La immagine su P di una generatrice di S_n è una retta del fascio a ($\xi_1 = \xi_2 = 0$); giacchè il rapporto $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ resta costante per tutti i punti corrispondenti ad una generatrice.

Assumiamo ora che le curve di P

$$\pi_s(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \omega_s(\xi_1, \xi_2) = 0, \quad s=1, 2, 3, 4,$$

siano di ordine $\nu + \tau + l$, passino per σ punti fissi $h_1, h_2, \dots, h_\sigma$, e nel punto a abbiano τ tangenti comuni l_1, l_2, \dots, l_τ .

Ciò posto, alla sezione fatta in S_n dal piano

$$\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4 = 0$$

corrisponde su P una curva Γ , la equazione della quale

$$\Gamma \equiv \sum_{s=1}^{s=4} \gamma_s (\pi_s + \xi_3 \omega_s) = 0$$

mostra che è di ordine $\nu + \tau + l$, ha in a un punto multiplo secondo $\nu + \tau$ con le τ tangenti l , e passa per i σ punti h .

I numeri ν, τ, σ, n sono legati dalla relazione

$$n = 2\nu + \tau - \sigma + 1,$$

la quale dinota il numero delle intersezioni variabili delle immagini di due sezioni piane.

Le curve Γ evidentemente formano un sistema lineare triplicemente infinito, epperò sono soggette a

$$\frac{(\nu + \tau + 1)(\nu + \tau + 1 + 3)}{2} - 3$$

condizioni comuni, cioè verificano oltre le

$$\frac{(\nu + \tau + 1)(\nu + \tau)}{2} + (\tau + \sigma)$$

condizioni relative al punto a , alle τ tangenti l ed ai σ punti h , ancora altre $n-2$ condizioni.

Poichè nelle (4) restano arbitrari tre coefficienti, possiamo disporne in modo che la Γ abbia un punto doppio in un punto dato ξ del piano, con che resta individuato un unico sistema di valori γ , differente da un punto ad un altro di una stessa retta del fascio a ; e siccome tale condizione implica che il piano della sezione sia tangente ad S_n nel punto x corrispondente di ξ , risulta il teorema noto:

« I piani tangenti ad S_n lungo una generatrice sono in generale tra loro differenti. »

Se poi facciamo che il punto ξ non sia fissato, possiamo sottoporre le Γ ad avere 1, 2, 3 punti doppi, o un punto triplo, restando indeterminati rispettivamente 2, 1, 0, 0 coefficienti γ . Dunque i teoremi noti:

« Vi ha una doppia infinità di piani tangenti ad S_n ed una semplice infinità di piani bitangenti. »

« Vi è un numero finito di piani tritangenti e di punti tripli. »

§ 2. Curve e punti di S_n che corrispondono ai punti fondamentali

a, h_1, \dots, h_σ , ed alle rette $l_1, l_2, \dots, l_\tau, ah_1, ah_2, \dots, ah_\sigma$ di P .

Punto a . Per vedere quali punti di S_n rappresenti a , consideriamo il punto di una retta ap infinitamente vicino ad a . Se $\xi_1 = k\xi_2$ è la equazione di questa retta, le (3) ci danno, facendo tendere ξ_2 a zero, per le coordinate del punto cercato le

$$\rho x_i = \omega_i(k, 1), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4)$$

Facendo variare k otterremo una serie infinita di punti formanti su S_n una

curva del genere $p=0$; questi punti hanno tutti su P per immagine il punto a . L'ordine di questa curva è il numero di punti di essa posti in un piano

$$\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 + \delta_4 x_4 = 0,$$

ossia il numero dei valori variabili di k che soddisfanno la

$$\sum_1^4 \delta_i \omega_i(k, 1) = 0.$$

Ora questa equazione è dell'ordine $\nu + \tau$, ed ammette come radici i τ parametri delle rette l che sono indipendenti da δ , perciò ν è il numero delle radici k che dipendono da δ : ossia ν è l'ordine della curva (4).

« Il punto a è dunque la immagine di una curva di S_n del genere $p=0$ e dell'ordine ν . »

Punti h . Rappresentando con ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 le coordinate di uno dei punti h , per es. h' , e quelle del punto β' infinitamente vicino a h' con $\xi'_1, \xi'_2 + \eta\lambda, \xi'_3 + \eta\mu$, si cava dalle (3) che a β' corrisponde su S_n il punto

$$\rho x_i = \lambda \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial \xi'_2} + \xi'_3 \frac{\partial \omega_i}{\partial \xi'_2} \right) + \mu \omega'_i.$$

Facendo variare λ e μ otterremo dunque tutti i punti di S_n che corrispondono a h' , i quali si trovano evidentemente sulla retta

$$\begin{vmatrix} x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 \\ \omega'_1 & , & \omega'_2 & , & \omega'_3 & , & \omega'_4 \\ \frac{\partial \pi_1}{\partial \xi'_2} + \xi'_3 \frac{\partial \omega_1}{\partial \xi'_2} & , & \frac{\partial \pi_2}{\partial \xi'_2} + \xi'_3 \frac{\partial \omega_2}{\partial \xi'_2} & , & \frac{\partial \pi_3}{\partial \xi'_2} + \xi'_3 \frac{\partial \omega_3}{\partial \xi'_2} & , & \frac{\partial \pi_4}{\partial \xi'_2} + \xi'_3 \frac{\partial \omega_4}{\partial \xi'_2} \end{vmatrix} = 0.$$

« Ogni punto h è dunque la immagine di una generatrice di S_n . »

Rette l . Se ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 sono le coordinate di un punto della retta l' , ad esso corrisponderà su S_n il punto

$$\rho x_i = \pi_i(\xi'_1, \xi'_2),$$

poichè per ogni punto di l si ha $\omega_i(\xi'_1, \xi'_2) = 0$. Se facciamo variare il punto di l , il rapporto $\frac{\xi'_1}{\xi'_2}$ resta costante, epperò anche il punto corrispondente su S_n non muta: ossia tutti i punti di l ammettono un unico corrispondente su S_n .

« Dunque ciascuna retta l è la immagine di un punto di S_n . »

Rette ah . Dinotando con ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 le coordinate del punto h' , la equazione della retta ah' è $\xi_1 = \frac{\xi'_1}{\xi'_2} \xi_2$; onde ad uno qualunque dei punti di questa retta corrisponde su S_n il punto

$$\rho x_i = \left(\frac{\xi_2}{\xi'_2} \right)^{(\nu+\tau+1)} \cdot \pi_i(\xi'_1, \xi'_2) + \xi_3 \left(\frac{\xi_2}{\xi'_2} \right)^{\nu+\tau} \omega_i(\xi'_1, \xi'_2)$$

ossia

$$\rho x_i = \left(\frac{\xi_2}{\xi'_2} \right)^{(\nu+\tau)} \omega_i(\xi'_1, \xi'_2) \frac{\xi_3 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_3}{\xi'_2}$$

a causa di

$$\pi_i(\xi'_1, \xi'_2) + \xi'_3 \omega_i(\xi'_1, \xi'_2) = 0.$$

Ora qualunque sieno i valori di ξ_2, ξ_3 , queste coordinate sono sempre proporzionali a quelle del punto

$$\rho x_i = \omega_i(\xi'_1, \xi'_2);$$

dunque qualunque sia il punto della retta ah' , ad esso corrisponderà sempre lo stesso punto di S_n , posto evidentemente sulla generatrice rappresentata in h' . Da ciò segue che:

« Ciascuna delle rette ah è la immagine di un punto di quella generatrice di S_n che è rappresentata nel relativo punto fondamentale h .

È manifesto che la superficie non ha altri punti o linee, diverse dalle già esaminate, che siano rappresentabili in linee o punti di P .

§ 3. Curva doppia di S_n .

La curva doppia H di una superficie gobba è il luogo geometrico dei punti di intersezione delle generatrici, che si segano; quindi ogni suo punto m appartenendo a 2; o più generatrici se H fosse multipla in luogo di doppia, avrà su P per immagine il sistema di 2, o più, punti: ossia la immagine di H non corrisponderà punto per punto ad H . Viceversa una curva di P che non corrisponde punto per punto ad una curva di S_n è la immagine di una curva H multipla per S_n . Infatti, se μ, μ', \dots sono più punti di P che corrispondano ad uno stesso punto m di S_n , le rette $a\mu, a\mu', \dots$ saranno

immagini di generatrici che passano per m . Dunque m è multiplo per S_n , ossia appartiene alla curva multipla della superficie.

In ciò che segue introdurremo, oltre la curva immagine di H , ancora un'altra curva ϕ , punteggiata proiettivamente ad H , quando questa curva non è che doppia per S_n : curva che può avere una certa importanza nella teoria delle superficie gobbe di genere $p=0$.

§ 4. Curva ϕ punteggiata proiettivamente ad H .

Se ξ, ξ' dinotano i 2 punti di P , che corrispondono ad un stesso punto m di H , le coordinate x di m sono date da

$$\rho x = \pi_i(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \omega_i(\xi_1, \xi_2) = \lambda \{ \pi_i(\xi'_1, \xi'_2) + \xi'_3 \omega_i(\xi'_1, \xi'_2) \}, \quad (A)$$

colle relazioni

$$\pi_i(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \omega_i(\xi_1, \xi_2) = \lambda \{ \pi_i(\xi'_1, \xi'_2) + \xi'_3 \omega_i(\xi'_1, \xi'_2) \}, \quad i=1, 2, 3, 4,$$

dalle quali eliminando $\xi_3, \lambda,$ e $\lambda \xi'_3$ si ha la

$$R = \begin{vmatrix} \pi_1 & \omega_1 & \pi'_1 & \omega'_1 \\ \pi_2 & \omega_2 & \pi'_2 & \omega'_2 \\ \pi_3 & \omega_3 & \pi'_3 & \omega'_3 \\ \pi_4 & \omega_4 & \pi'_4 & \omega'_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Evidentemente R è divisibile per $(\xi_1 \xi'_2 - \xi'_1 \xi_2)^2$, e per i fattori $(\xi_1 - k \xi_2), (\xi'_1 - k \xi'_2)$ che si riferiscono alle τ rette l ed alle σ rette ah : onde sopprimendo tali fattori, il quoziente R' sarà una funzione simmetrica di $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ e $\frac{\xi'_1}{\xi'_2}$, e la $R'=0$ è la equazione che lega i parametri delle immagini di due generatrici che si tagliano. •

La $R'=0$, essendo dell'ordine

$$(\nu + \tau + 1) + (\nu + \tau) - (2 + \tau + \sigma) = n - 2$$

rispetto a ciascuno dei parametri $\frac{\xi_1}{\xi_2}, \frac{\xi'_1}{\xi'_2}$, ci porge il teorema noto:

« Ciascuna generatrice di S_n è incontrata da altre $n-2$. »

Se nella $R'=0$ facciamo $\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\xi'_1}{\xi'_2}$, abbiamo i parametri delle immagini

delle generatrici singolari, cioè di quelle lungo le quali il piano tangente è costante.

« Dunque in generale vi sono su S_n $2(n-2)$ generatrici singolari. »

Dati i 2 punti ξ e ξ' , che corrispondono ad uno stesso punto m di H , le coordinate di m , a causa delle (A), sono date da

$$\rho x_s = \begin{vmatrix} \alpha, & \omega_s \pi_1 - \omega_1 \pi_s, & \pi'_1 \omega'_1 \\ \beta, & \omega_s \pi_2 - \omega_2 \pi_s, & \pi'_2 \omega'_2 \\ \gamma, & \omega_s \pi_3 - \omega_3 \pi_s, & \pi'_3 \omega'_3 \\ \delta, & \omega_s \pi_4 - \omega_4 \pi_s, & \pi'_4 \omega'_4 \end{vmatrix},$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono costanti affatto arbitrarie.

Il determinante precedente è divisibile per $\xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1$ e per i $\sigma + \tau$ fattori $(\xi_1 - k \xi_2)$, $(\xi'_1 - k \xi'_2)$, relativi ai parametri k delle $\sigma + \tau$ rette l ed ah . Tolti questi fattori dal determinante, resterà per x_s una espressione intera, razionale e simmetrica di $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ e $\frac{\xi'_1}{\xi'_2}$ dell'ordine $(\nu + \tau) + (\nu + \tau + 1) - (\tau + \sigma + 1) = n - 1$ rispetto a ciascuno dei rapporti $\frac{\xi_1}{\xi_2}, \frac{\xi'_1}{\xi'_2}$.

Poniamo ora tanto nella R' , quanto nella espressione di x_s ,

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} + \frac{\xi'_1}{\xi'_2} = \frac{z_2}{z_3}, \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} \cdot \frac{\xi'_1}{\xi'_2} = \frac{z_1}{z_3};$$

allora la $R' = 0$ si muta in una equazione

$$\phi(z_1, z_2, z_3) = 0 \tag{1}$$

omogenea dell'ordine $n - 2$ nelle z , mentre le x sono date dalle espressioni

$$\rho x_s = \psi_s(z_1, z_2, z_3) \tag{2}$$

omogenee dell'ordine $n - 1$ nelle z .

Segue da ciò che la curva doppia di S_n è data dalle (1) e (2), supposte coesistere.

Immaginando le z come coordinate di un punto mobile in un piano, la $\phi = 0$ rappresenta una curva di ordine $n - 2$, e le (2) ci indicano che ad ogni punto z di ϕ corrisponde un punto solo della curva doppia H . Supposto ora che H sia curva soltanto doppia per S_n , per ogni punto m di H non passano che due generatrici, ossia ad ogni punto m di H corrisponde

un unico sistema $\frac{\xi_1}{\xi_2}, \frac{\xi'_1}{\xi'_2}$, epperò un unico punto di ϕ . Quindi risulta che ϕ corrisponde punto per punto ad H .

Possiamo però enunciare il teorema:

« Se una superficie gobba di ordine n e genere $p=0$ ha una curva doppia H , questa è punteggiata proiettivamente ad una certa curva piana ϕ di ordine $n-2$. »

Segue quindi che il genere della curva doppia H è al più

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2}.$$

Esaminiamo più davvicino la curva ϕ .

Date le immagini di due generatrici che si seghino in m su H , le coordinate del punto μ di ϕ , il quale corrisponde ad m , sono date da

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{\xi_1}{\xi_2} \cdot \frac{\xi'_1}{\xi'_2}, \quad \frac{z_2}{z_3} = \frac{\xi_1}{\xi_2} + \frac{\xi'_1}{\xi'_2};$$

viceversa, dato μ , i parametri delle generatrici che passano per m , sono le radici della quadratica

$$z_3 \xi^2 - z_2 \xi + z_1 = 0. \tag{3}$$

Donde segue che data l'immagine di una generatrice, ossia dato un valore di ξ , i parametri delle immagini delle generatrici che segano la data si ottengono combinando (1) e (3).

Quindi agli $n-2$ punti di H posti su di una generatrice corrispondono gli $n-2$ punti di ϕ posti su di una retta del sistema (3).

Tutte le rette (3) involuppano la conica

$$C_2 \equiv z_2^2 - 4z_1 z_3 = 0;$$

dunque i punti di H i quali si trovano su 2 generatrici passanti per un punto m di H , hanno su ϕ , come corrispondenti, i punti posti sulle 2 tangenti che da μ immagine di m su ϕ si possono condurre a C_2 .

Facilmente si vede che se S_n ha un punto m -plo vengono ad essere determinati $\frac{m(m-1)}{2}$ valori di $\frac{\xi_1}{\xi_2} + \frac{\xi'_1}{\xi'_2}, \frac{\xi_1}{\xi_2} \cdot \frac{\xi'_1}{\xi'_2}$, ossia $\frac{m(m-1)}{2}$ punti di ϕ ; ed osservando che $m-1$ di tali punti sono sempre su di una tangente alle C_2 , vediamo che il sistema degli $\frac{m(m-1)}{2}$ punti forma il sistema dei vertici di un poligono di m lati circoscritto a C_2 ed inscritto in ϕ .

La stessa cosa avviene se m generatrici di S_n si trovano in uno stesso piano. Reciprocamente, se vi ha un poligono di m lati circoscritto a C_2 , il quale abbia i vertici su ϕ , a questi punti corrispondono sulla curva H , o m punti, le congiungenti dei quali sono generatrici della superficie, od un punto multiplo di S_n . Donde il teorema:

« Il numero dei punti m -pli e dei piani m volte tangenti di una superficie gobba di genere $p=0$ è eguale al numero dei poligoni di m lati inscritti in ϕ e circoscritti a C_2 . »

Da questo teorema segue che, quando vi è una infinità di tali poligoni, la superficie possiede o una curva m -pla, o una sviluppabile m volte tangente.

Supponiamo ora che H abbia un punto doppio m , che sia soltanto doppio per S_n . In tale caso le 2 generatrici passanti per m tagliano H , ciascuna in altri $n-4$ punti, ossia m è legato per mezzo di 2 generatrici ad altri $2(n-4)$ punti di H ; quindi ancora la immagine μ di m deve essere legata a $2(n-4)$ punti di ϕ , per mezzo delle tangenti condotte da μ a C_2 , ossia queste tangenti devono segare ϕ in altre $2(n-4)$ punti oltre μ . Dunque μ deve contare come 2 intersezioni sopra 2 direzioni diverse, cioè μ deve essere doppio per ϕ .

Evidentemente poi ai punti comuni a C_2 e ϕ corrispondono su H i punti cuspidali per S_n .

Se la curva H si spezza in parti, che non sieno generatrici doppie, ancora ϕ si spezzerà. Infatti la ϕ o la $R'=0$ stabilisce il legame tra 2 generatrici che si segano: ora questo legame muta passando dai punti di una curva parziale a quelli dell'altra, potendosi gli uni esprimere indipendentemente dagli altri; perciò ancora la $R'=0$ deve stabilire in modo distinto questo legame, ossia R' si deve spezzare in fattori distinti. Ma quando R' si spezza, lo stesso avviene per ϕ ; dunque ha luogo il teorema enunciato.

Il teorema reciproco è evidente.

Quando H è curva multipla per S_n , ϕ non è punteggiata proiettivamente ad H ; ma sussistono in grande parte i risultati trovati. Se poi H si spezza in una curva H_1 multipla, ed una curva H_2 doppia per S_n , la sola parte di ϕ che corrisponde ad H_2 è punteggiata proiettivamente a questa curva.

Possiamo infine osservare che H si trova ancora sopra una superficie K rappresentabile punto per punto sopra un piano.

Infatti H , avendo per equazioni

$$\begin{aligned} \phi(z_1, z_2, z_3) &= 0 \\ \rho x_s &= \psi_s(z_1, z_2, z_3), \quad s=1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

si trova sulla superficie

$$\rho x_s = \psi_s(z_1, z_2, z_3)$$

la quale è rappresentabile sul piano z di ϕ . L'ordine di K non supera $\frac{n(n-1)}{2}$; ed H , se è solamente doppia per S_n , si trova su K come curva semplice, mentre se è multipla per S_n è tale ancora per K .

§ 5. Immagine di H sul piano P .

Sia $S(x^n) = 0$ la equazione della superficie S_n , ed $S(yx^{n-1}) = 0$ l'equazione della prima polare S'_y di un punto y rispetto ad S_n .

Seguendo S'_y la S_n in una curva variabile col polo y , e nella curva doppia H , la immagine della completa intersezione si scinde in una curva variabile ed una curva fissa immagine di H su P . Ora questa completa intersezione si ottiene sostituendo nella

$$S(yx^{n-1}) \equiv y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3 + y_4 S_4 = 0$$

per x i valori

$$\rho x_i = \pi_i(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \omega_i(\xi_1, \xi_2), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (1)$$

perciò bisogna cercare quale è il risultato di tale sostituzione.

Se osserviamo che $S = 0$ si annulla identicamente per i valori (1), si ha

$$S_1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + S_2 \frac{\partial x_2}{\partial \xi_i} + S_3 \frac{\partial x_3}{\partial \xi_i} + S_4 \frac{\partial x_4}{\partial \xi_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

donde

$$\frac{S_1}{I_1} = \frac{S_2}{I_2} = \frac{S_3}{I_3} = \frac{S_4}{I_4},$$

chiamando I_k la Jacobiana delle x , come funzioni delle ξ , nella formazione della quale non entri x_k .

Le equazioni precedenti ci danno le altre

$$S_i = I_i \Theta, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

Θ essendo una funzione intera delle ξ . Da queste ultime si ricava che la completa intersezione di S_n con S'_y ha per immagine su P la curva

$$\{y_1 I_1 + y_2 I_2 + y_3 I_3 + y_4 I_4\} \Theta = 0.$$

Ciascuna delle I (come Jacobiana di tre curve di ordine $\nu + \tau + 1$, che hanno un punto multiplo in a secondo $\nu + \tau$, con τ tangenti l comuni in questo punto e passano per i σ punti fissi h) si spezza nelle $\sigma + \tau$ rette l , ah ed in una curva I' di ordine $3\nu + 2\tau - \sigma$, la quale ha in a un punto multiplo secondo $3\nu + 2\tau - \sigma - 1$, passa per i σ punti h e tocca le τ rette l . Di modo che, chiamate $h=0$, $l=0$ le equazioni delle $\sigma + \tau$ rette, la completa immagine della intersezione di S_n ed S'_y sarà

$$l \cdot h \cdot \{y_1 I'_1 + y_2 I'_2 + y_3 I'_3 + y_4 I'_4\} \Theta = 0 \quad (2)$$

e la curva

$$\sum_1^4 y_i I'_i = 0$$

rappresenterà la immagine della intersezione variabile di S_n colla prima polare S'_y del punto y . E poichè essa immagine è una curva di ordine $3\nu + 2\tau - \sigma$, che ha in a un punto della massima molteplicità, tocca le τ rette l , e passa per i σ punti h , le sue intersezioni variabili con la immagine di una sezione piana sono in numero di

$$(3\nu + 2\tau - \sigma)(\nu + \tau + 1) - (\nu + \tau)(3\nu + 2\tau - \sigma - 1) - (\sigma + \tau) = 2(n - 1);$$

dunque l'ordine della curva d'intersezione variabile di S_n con S'_y è $2(n - 1)$, mentre il genere è $p = 0$.

Se si osserva poi che $h=0$ $l=0$ corrispondono (§ 2) a punti di S_n , risulta che $\Theta = 0$ sarà la immagine della curva H , parte restante della intersezione di S_n e S'_y , e che l'ordine di H , come si sa, è

$$\frac{1}{2} \{n(n-1) - 2(n-1)\} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Passiamo ora alla curva $\Theta = 0$.

Poichè le x_i sono lineari nelle ξ_3 , il risultato della sostituzione in S'_y conterrà ξ_3 al grado $n - 1$; ma i fattori $l=0$, $h=0$ sono indipendenti da ξ_3 ed il fattore $\sum y_i I'_i$ è lineare in ξ_3 , dunque Θ contiene ξ_3 al grado $n - 2$. D'altra parte $\Theta = 0$ è una curva dell'ordine

$$(n - 4)(\nu + \tau + 1) + 3,$$

perciò a è punto multiplo di Θ secondo

$$(n - 4)(\nu + \tau) + 1.$$

Se si noti che ciascuno dei punti h è semplice per le x_i , e però multi-

plo secondo $n-1$ nella curva completa intersezione di S_n ed S'_y , si ricava subito che ciascuno dei punti h è multiplo secondo $n-3$ per la curva $\Theta=0$.

Vediamo come si comporta una delle τ rette l rispetto a Θ .

Se nella x_i mettiamo in evidenza il fattore l , si ha

$$\rho x_i = \pi_i + \xi_3 l \cdot \omega'_i$$

ossia ξ_3 ed l si trovano allo stesso grado, ossia l in (2) si trova al grado $n-1$; ma questo risultato è divisibile per l senza esserlo per ξ_3 , ed il fattore $\sum y_i I_i$ contiene ξ_3 ed l linearmente; dunque Θ conterrà l in ciascuno termine ad un grado minore di una unità di quello al quale contiene ξ_3 ; ossia ciascuna delle rette l taglia Θ ancora in un solo punto oltre a , epperò contiene $n-3$ intersezioni, riunite in a , dippiù di quelle appartenenti ad una retta condotta arbitrariamente per a .

Riassumendo dunque risulta che la immagine di H su P è una curva Θ di ordine $(n-4)(\nu+\tau+1)+3$, per la quale a è un punto multiplo secondo $(n-4)(\nu+\tau)+1$; i σ punti h sono multipli secondo $n-3$; e le τ rette l , sono tangenti in a , ciascuna delle quali ha concentrate in questo punto

$$(n-4)(\nu+\tau+1)+2$$

intersezioni.

§ 6. Rappresentazione di ordine minimo della superficie S_n , e genere della curva Θ .

Ci proponiamo ora di trasformare il piano rappresentativo P in un altro P' , tale che alle rette del fascio a di P corrispondano, su P' rette di un fascio a' , ed alle curve Γ , immagini su P delle sezioni piane di S_n , corrispondano curve Γ' del minimo ordine possibile. A tale scopo faremo uso dei risultati stabiliti dal prof. CREMONA nella sua Nota: *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (*).

Prendiamo in P una rete di curve L_μ di ordine μ , le quali abbiano $\mu-1$ rami incrociati nel punto a , passino per i σ punti h , tocchino le τ rette l

(*) *Mem. dell'Accad. di Bologna*, serie 2^a, tomo 5^o; oppure *Giornale di Matematiche*, tomo 3^o. Napoli, 1865.

in a , e passino ancora per altri \varkappa punti c di P ; e facciamo corrispondere alle curve di questa rete le rette del piano P' . Il solo legame tra l'ordine μ della rete, ed il numero \varkappa dei punti arbitrari c è

$$2\mu = \tau + \sigma + \varkappa + 2:$$

relazione la quale ad un tempo indica che le curve L_μ formano una rete, e che due qualunque di esse si segano in un solo punto variabile.

In questa trasformazione il sistema dei punti principali del piano P è costituito dai σ punti h , dai \varkappa punti c , dai τ punti d , posti infinitamente vicini ad a sulle τ rette l , e dal punto a come punto multiplo d'ordine $\mu - 1$; mentre il sistema delle curve principali consta delle $\tau + \sigma + \varkappa$ rette l , ah , ad , e della curva $B_{\mu-1}$ di ordine $\mu - 1$, individuata da a come punto multiplo di ordine $\mu - 2$, dai $\sigma + \varkappa$ punti h , d e dalle τ rette l come tangenti in a .

Alla curva $B_{\mu-1}$ corrisponderà sul piano P' un punto a' , multiplo secondo $\mu - 1$ per la rete di curve M_μ , le quali corrispondono alle rette M del piano P ; ed alle $\tau + \sigma + \varkappa$ rette l , ah , ac corrisponderanno su P' altrettanti punti semplici d' , h' , c' . Il punto a di P , al contrario, avrà per corrispondente su P' una curva $B'_{\mu-1}$ passante per i punti h' , c' , d' , ed avente in a' un punto multiplo secondo $\mu - 2$; mentre ai punti h , c , d corrispondono le $\tau + \sigma + \varkappa$ rette $a'h'$, $a'c'$, $a'd'$.

Alle rette M di P corrispondono su P' curve M_μ di ordine μ , che passano per i $\tau + \sigma + \varkappa$ punti h' , c' , d' ed hanno in a' un punto multiplo secondo $\mu - 1$. In particolare, le rette del fascio a di P ammettono, come curve corrispondenti su P' , le curve composte della curva fissa $B'_{\mu-1}$ e di una retta del fascio a' ; di modo che, fatta astrazione da punti speciali, ogni retta del fascio a è punteggiata proiettivamente ad una del fascio a' . Segue da ciò, che le immagini delle generatrici di S_n tanto su P quanto su P' sono rette di un fascio.

Curva Γ' trasformata di una curva Γ , immagine su P di una sezione piana di S_n . L'ordine di una Γ' è il numero delle intersezioni variabili di una L_μ colla curva Γ , e perciò è

$$\gamma' = \mu + \nu - \sigma = \frac{n + \varkappa + 1}{2}.$$

Se si osserva che delle rette l , ah , ac soltanto le ultime hanno intersezioni variabili colle Γ , se ne ricava che la Γ' passa per i \varkappa punti c' senza pas-

sare per i punti d' , h' . Ancora, la Γ' ha in a' un punto $(\gamma' - 1)$ -plo, giacchè la $B_{\mu-1}$ sega una curva Γ in altrettanti punti variabili.

Curva Θ' trasformata di Θ . Avendo lasciato arbitrario il numero e la posizione dei punti c scelti su P , supponiamo che essi siano tutti posti sulla curva Θ ; il che porta come condizione necessaria e sufficiente (*) che l'ordine della rete L_μ aumentato di 3 sia minore di quello di Θ , cioè

$$\mu \leq (n-4)(\nu + \tau + 1)$$

ossia

$$\alpha \leq (n-1)(n-4) + (n-5)(\tau + \sigma + 2),$$

condizione che limita il numero α dei punti che si possono scegliere arbitrariamente.

Assegnato tale valore limite a α , è sempre possibile scegliere i α punti c sulla curva Θ ; allora l'ordine della trasformata Θ' è dato da

$$\begin{aligned} \mu \{ (n-4)(\nu + \tau + 1) + 3 \} - (\mu - 1) \{ (n-4)(\nu + \tau) + 1 \} - \\ - (n-3)(\tau + \sigma) - \alpha = (n-4)\gamma' + 3. \end{aligned}$$

Considerando le intersezioni variabili di $B_{\mu-1}$, di l , ah , ac con Θ , si ricava che la trasformata Θ' passa $(n-4)(\gamma' - 1) + 1$ volte per a' , non passa per i punti h' , d' , ma ha dei punti multipli secondo $n-3$ nei α punti c' .

Genere della curva Θ . Il genere p della curva Θ è lo stesso di quello della Θ' ; dunque

$$p = \frac{(n-4)(n-1)(n-2)}{2} + 1.$$

Rappresentazione di ordine minimo. Dall'analisi precedente si è visto che si può trasformare il piano P in un piano P' punteggiato proiettivamente a P , in modo che alle rette del fascio a corrispondano rette di un fascio a' , alle curve Γ curve Γ' di ordine $\gamma' = \frac{n + \alpha + 1}{2}$ passanti per α punti fissi c' ed aventi in a' un punto $(\gamma' - 1)$ -plo; ed alla curva Θ corrisponda una curva Θ' di ordine $(n-4)\gamma' + 3$, avente in a' un punto multiplo secondo $(n-4)(\gamma' - 1) + 1$, e nei α punti c' dei punti multipli secondo $n-3$.

(*) CREMONA, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, pag. 36. — CLEBSCH e GORDAN, *Theorie der Abelschen Functionen*, pag. 35.

Tale trasformazione si effettua mediante una rete di curve di ordine

$$\mu = (\nu + \tau + 1) - \frac{n - \kappa - 1}{2},$$

le quali toccano le τ rette l , passano per i σ punti h , e per altri κ punti c di Θ , mentre hanno in a un punto $(\mu - 1)$ -plo. Il numero κ è soggetto alle condizioni

$$\kappa + n \equiv 1 \pmod{2}, \quad \kappa \leq (n - 1)(n - 4) + (n - 5)(\tau + \sigma + 2).$$

Se supponiamo $n > 5$ possiamo prendere per κ un numero $<$ di 12, perchè la seconda condizione sia soddisfatta.

Noi ora ci proponiamo effettuare la trasformazione, per la quale si ottengono curve Γ' e curva Θ' del minimo ordine possibile. Per fare ciò, è necessario e sufficiente che γ' abbia il minimo valore possibile.

Ciò posto, sia:

1° $n = 2m + 1$, sarà $\gamma' = \frac{2m + \kappa + 2}{2}$, onde il minimo valore di γ' si ha per $\kappa = 0$ ed è $m + 1$; il che si può fare. Per conseguenza l'ordine di Θ' sarà

$$(n - 4)(m + 1) + 3 = \frac{(n - 1)(n - 2)}{2}$$

cioè lo stesso ordine della curva doppia della superficie S_n .

Le curve Γ' non hanno in comune che un punto multiplo; pel quale passano

$$\frac{(n - 2)(n - 3)}{2}$$

rami della Θ' .

2° Sia $n = 2m$, sarà $\gamma' = \frac{2m + \kappa + 1}{2}$, ed il minimo valore si ha scegliendo $\kappa = 1$, il che è ancora possibile. In tale caso $\gamma' = m + 1$ e l'ordine di Θ' sarà

$$(n - 4)(m + 1) + 3 = \frac{n(n - 2)}{2} - 1.$$

Le curve Γ' hanno 2 punti comuni, uno semplice e l'altro multiplo secondo m ; il primo è multiplo secondo $n - 3$ per Θ' , mentre il secondo è multiplo secondo $\frac{n(n - 4)}{2} + 1$.

In ambo i casi adunque, per $n \geq 5$, vi è una immagine di S_n , nella quale le generatrici sono rappresentate da rette di un fascio, e le sezioni piane da curve del minimo ordine possibile fra quelle le quali si possano segare in n punti variabili ed abbiano un punto della massima molteplicità. Tale rappresentazione di ordine minimo può essere chiamata rappresentazione normale.

**§ 7. Rappresentazione geometrica, su di un piano P ,
di una superficie S_n dotata di una retta A , multipla secondo $n-1$.**

Preso un piano fisso P , il quale non passi per A , ed una retta B la quale non seghi A , nè appartenga a P , facciamo muovere su di A e B una retta L . Questa retta L in ogni sua posizione individua un punto di S_n ed un punto di P , tali che, dato l'uno, l'altro resta determinato in modo unico. Dunque la traccia di L su P darà una rappresentazione punto per punto della superficie S_n .

Immagine di una generatrice. La generatrice G , essendo una retta che sega A , sarà rappresentata sul piano P dalla traccia del piano AG . Dunque le generatrici hanno per immagini rette di un fascio a (a traccia di A su P).

Immagine Γ di una sezione piana C_n . Questa immagine è la traccia su P della superficie luogo delle rette che si appoggiano ad A, B, C_n ; ma questa superficie è dell'ordine $n+1$, ha A come direttrice n -pla, B come direttrice semplice, ed ammette come generatrici le n rette di S_n , che passano per i punti ove B incontra la superficie: dunque la traccia è una curva Γ_{n+1} di ordine $n+1$, la quale ha in a un punto n -plo, passa per la traccia h di B e per gli n punti a_1, a_2, \dots, a_n , tracce delle n generatrici di S_n che tagliano B .

Segue da ciò che il sistema dei punti fondamentali di P è formato dal punto n -plo a , e dagli $n+1$ punti semplici h, a_1, a_2, \dots, a_n ; mentre il sistema di rette fondamentali è composto dalle $n+1$ rette $ah, aa_1, aa_2, \dots, aa_n$.

Punto a . La retta mobile L contiene a quando passi per un punto di S_n che si trovi nel piano aB ; dunque a è la immagine di tutti i punti della sezione aB , ad eccezione di quelli posti sulla retta B , i quali hanno per

immagini le n rette aa_1, aa_2, \dots, aa_n , e del punto dove la sezione aB sega ancora P , il quale ha per immagine la retta ah .

Si vede ancora che gli n punti, in cui una sezione C_n sega la aB , sono rappresentati negli n punti infinitamente vicini ad a posti sulle n tangenti in a della immagine Γ_{n+1} di C_n .

Punti a_1, a_2, \dots, a_n . Essi sono le immagini dei punti delle generatrici di S_n che incontrano B , ad eccezione di quei punti posti su B , i quali hanno, come si è visto, per immagini le n rette fondamentali aa_1, aa_2, \dots, aa_n .

Punto h . Questo punto è la immagine della generatrice di S_n , contenuta nel piano hA , ad eccezione della traccia g di questa generatrice, la quale è rappresentata, come si è visto, dalla retta fondamentale ah .

Immagine della sezione fatta da P . Questa immagine si compone della sezione stessa C_n , e della retta ah , come immagine del punto g di C_n .

Immagine della direttrice A . Dalla costruzione geometrica si scorge come il punto di una generatrice posto su A venga rappresentato in un punto variabile di P , e che perciò ogni punto α di A dà $n-1$ immagini, il cui luogo Θ sarà la immagine di A . Gli $n-1$ punti di P che corrispondono ad uno stesso punto α sono evidentemente posti sulla traccia del piano αB , ossia sono su di una retta che passa per h .

Cerchiamo la curva Θ . Sia R una retta qualunque di P ed m un punto di R ; il piano mA sega B in un punto c , e la cm individua su A un punto α , in generale differente dal punto β in cui la generatrice di S_n , contenuta nel piano mA , incontra A . Dunque ogni punto m di R individua un punto α ed un punto β di A ; viceversa ogni punto α individua un punto m , e però un solo punto β . Al contrario ogni punto β individua $n-1$ generatrici di S_n e però $n-1$ piani mA , ossia $n-1$ punti m , e quindi ancora $n-1$ punti α . Segue da ciò che tra i punti α e β di A vi è la corrispondenza $[1, n-1]$, e perciò vi saranno n punti di A in cui α coincide con β ; ma quando α coincide con β , il punto m corrispondente appartiene alla curva Θ : dunque Θ è dell'ordine n .

La Θ evidentemente passa per gli $n+1$ punti h, a_1, \dots, a_n , ha in a un punto multiplo secondo $n-1$, e le $n-1$ tangenti in a sono quelle della C_n contenuta in P : dunque la Θ è completamente determinata.

Gli $n-1$ punti di Θ che corrispondono ad un punto α di A sono su di una retta che passa per h , di modo che, dato uno di essi, gli altri $n-2$ restano determinati, e le immagini delle generatrici che si segano nel punto α sono le $n-1$ rette del fascio α che vanno agli $n-1$ punti di Θ posti per diritto con h .

Di qui risulta che S_n ha tante generatrici singolari, quante sono le tangenti che si possono da h condurre a toccare altrove Θ ; ora in generale queste sono in numero di $2(n-2)$. Dunque S_n ha in generale $2(n-2)$ generatrici singolari.

Condizioni che determinano il sistema delle Γ_{n+1} . Queste condizioni sono evidentemente le $\frac{n(n+1)}{2}$ nascenti dal punto n -plo α , le $n+1$ provenienti dagli $n+1$ punti semplici $h, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, e le $n-2$ che derivano dal dovere ciascuna Γ_{n+1} tagliare la sezione C_n , fatta da P , in n punti in linea retta.

Facciamo osservare infine che due curve Γ_{n+1} si segano in h punti posti su di una conica passante per h ed α , la quale è la traccia dell'iperboloide determinato dalle rette A, B e dalla C secondo la quale si tagliano i piani delle sezioni che sono rappresentate nelle due Γ_{n+1} che si considerano.

Crediamo inutile di passare per queste superficie alla rappresentazione di ordine minimo.

§ 8. Rappresentazione geometrica, su di un piano P , della superficie gobba di 4.^o ordine, genere $p=0$, priva di direttrice tripla.

Sia H_3 la curva doppia di S_4 , A una generatrice fissata ad arbitrio, α_1, α_2 i punti di A posti su H_3 , e P un piano fisso qualunque, che non passi per A . Dintorno poi con h_1, h_2, h_3 i punti in cui P incontra H_3 , con A_1, A_2 le generatrici di S_4 che passano per α_1, α_2 , con a, a_1, a_2 le tracce di A, A_1, A_2 su P , ed in ultimo con Γ_4 la sezione della superficie fatta da P . Ciò posto, facciamo passare per A_1, H_3 e per un punto m qualunque di S_4 l'iperboloide I del fascio AH_3 , e consideriamo la generatrice di I del sistema opposto ad A , la quale passi per m . Poichè questa retta sega A, H_3 e passa per m , così non incontra altrove S_4 , e dà un punto μ di P , il quale appartiene alla conica del fascio $(ah_1h_2h_3)$, sezione fatta da P su I .

Viceversa un punto μ di P determina l'iperboloide I , e mediante la generatrice del sistema opposto ad A , la quale passa per μ , individua su S_4 un unico punto m .

Facendo adunque, per tale costruzione, corrispondere i punti m di S_4 ai punti μ di P , la superficie S_4 viene ad essere rappresentata punto per punto su \hat{P} .

Immagine di una generatrice G . Prendiamo su G un punto qualunque m , e conduciamo l'iperboloide mAH_3 ; questo conferrà per intero la G e non segherà in alcun altro punto, fuori di A ed H_3 , la S_4 . Segue da ciò che i punti m di G sono rappresentati nei punti μ della conica traccia di mAH_3 , ossia nella conica del fascio $(ah_1h_2h_3)$ che passa per la traccia g di G . Dunque:

« La immagine di una generatrice G è la conica del fascio $(ah_1h_2h_3)$, la quale passa per la traccia g di G . »

In particolare, la immagine di A è la conica del fascio la quale tocca in a la Γ_4 , e le immagini delle due generatrici che passano per uno dei punti h sono le coniche del fascio le quali toccano le 2 tangenti in h a Γ_4 . Tutti i punti delle generatrici A_1, A_2 sono rappresentati nelle loro tracce α_1, α_2 , ad eccezione dei punti α_1, α_2 i quali hanno rispettivamente per immagini le coniche $(\alpha_1ah_1h_2h_3), (\alpha_2ah_1h_2h_3)$, tracce dei coni i cui vertici sono i punti stessi α_1, α_2 ed H_3 è la direttrice.

Immagine Γ di una sezione piana C_4 . Questa immagine è la traccia su P della superficie luogo delle rette che si appoggiano ad A, C_4 ed H_3 . Ora questa superficie è del 7.º ordine, ha A come direttrice quadrupla, H_3 come curva tripla, e contiene A_1, A_2 come generatrici semplici; dunque:

« La immagine di una sezione piana C_4 è una curva del 7.º ordine, appartenente al sistema lineare, le cui curve hanno un punto quadruplo in a , un punto triplo in ciascuno dei punti h , passano per α_1, α_2 , ed incontrano Γ_4 in 4 punti posti per diritto. »

In particolare, la immagine di Γ_4 si compone di Γ_4 stessa e delle tre rette ah_1, ah_2, ah_3 , come immagini dei punti c_1, c_2, c_3 dove queste rette incontrano Γ_4 .

Immagine della sezione fatta da un piano condotto per A . Una tale sezione è composta della retta A e di un cubica C_3 passante per α_1, α_2 : ora C_3 si rappresenta punto per punto, ad eccezione di α_1, α_2 , nella traccia del suo piano su P ; quindi la immagine completa di una tale sezione consta della conica immagine di A , delle coniche immagini di α_1, α_2 , e di una retta del fascio a , traccia del piano della sezione su P .

In particolare, la sezione Ah è rappresentata dalla conica relativa ad A , dalle coniche relative ad α_1, α_2 , dal punto h , come immagine di tutti i punti della sezione ad eccezione di α_1, α_2, c , e dalla retta ah come immagine di c .

Punto fondamentale a . Evidentemente la curva di S_4 che si rappre-

senta in a , è l'intersezione del cono del 3.° ordine aH_3 con S_4 , ad eccezione dei punti $\alpha_1, \alpha_2, c_1, c_2, c_3$ di tale curva. Ora tale intersezione è una curva gobba del 4.° ordine, la quale passa non solo per a , ma anche per α_1, α_2 , poichè il cono tocca S_4 in questi punti; epperò essa è una curva di 2.^a specie. Dunque:

« Il punto a è la immagine di tutti i punti di una curva gobba di 4.° ordine e 2.^a specie, ad eccezione dei punti $\alpha_1, \alpha_2, c_1, c_2, c_3$ della curva medesima. »

Immagine di H_3 . Sia m un punto di H_3 ; G, G_1 le generatrici passanti per esso; M la tangente ad H_3 in m ; g, g_1, m_1 le tracce di G, G_1, M su P ; e K_4 la tricuspide, sezione fatta da P nella sviluppabile formata dalle tangenti M di H_3 . La conica della rete (h_1, h_2, h_3) , che tocca K_4 in m_1 , è la traccia del cono mH_3 , e perciò passa per g, g_1 . Dunque questi punti sono le 2 intersezioni variabili di Γ_4 con la conica $(h_1 h_2 h_3 m_1 m_1)$. Sia μ la immagine di m come punto di G , e μ_1 quella di m come punto di G_1 , vale a dire siano μ, μ_1 le tracce delle generatrici $m\mu, m\mu_1$ degli iperboloidi $(AGH_3), (AG_1H_3)$, le quali appartengono al sistema opposto ad A .

I punti μ, μ_1 si trovano su di una retta del fascio a , poichè le $m\mu, m\mu_1$ si tagliano fra loro, ed incontrano A . Segue quindi che ad ogni punto m di H_3 corrisponde una retta del fascio a .

Viceversa ogni retta passante per a ha per corrispondente il punto m di H_3 , individuato dal piano che passa per questa retta e per A .

Se ora si osserva che ogni punto m di H_3 individua un punto m_1 di K_4 e viceversa, risulta ancora che ogni retta del fascio a corrisponde univocamente ad un punto m_1 di K_4 : corrispondenza che resta definita col dire che le rette ah_1, ah_2, ah_3 corrispondono alle cuspidi h_1, h_2, h_3 .

Inoltre, se si osserva che i punti μ, g, m sono in linea retta, come ancora μ_1, g_1, m_1 , si conclude che quando si conosca la retta l del fascio a la quale corrisponde ad m_1 , i punti μ, μ_1 sono determinati costruendo la conica $(h_1 h_2 h_3 m_1 m_1)$, la quale taglierà Γ_4 in g e g_1 , e tirando poi le rette $m_1 g, m_1 g_1$, che incontreranno l nei punti μ, μ_1 .

Mediante questa costruzione e la corrispondenza tra le rette del fascio a ed i punti di K_4 , resta adunque individuata la curva Θ luogo dei punti μ , ossia immagine di H_3 .

Si trova senza difficoltà che la curva Θ è del 6.° ordine, ha in a un punto quadruplo, 3 punti doppi nei punti h_1, h_2, h_3 , passa per i punti α_1, α_2 , ed ha nei punti h le stesse tangenti della Γ_4 . La curva è dunque indi-

viduata da queste condizioni ed è del genere $p=1$. I punti di Θ che corrispondono ad uno stesso punto di H_3 sono su di una retta del fascio a , e le immagini dei punti di una generatrice posti su H_3 sono le intersezioni di una conica del fascio $(ah_1h_2h_3)$ con la Θ .

Riassumendo possiamo dire, che la rappresentazione trovata si effettua mediante un sistema di curve del 7.^o ordine come immagini delle sezioni piane, un fascio di coniche come immagini delle generatrici, ed una curva del 6.^o ordine come immagine della curva doppia.

Il sistema dei punti fondamentali si compone di sei punti: 2 semplici a_1, a_2 ; 3 tripli h_1, h_2, h_3 ; ed uno quadruplo a . Il sistema di curve fondamentali è formato dalle coniche $(a_1ah_1h_2h_3), (a_2ah_1h_2h_3)$, e dalle rette ah_1, ah_2, ah_3 .

§ 9. Rappresentazione normale della superficie gobba di 4.^o ordine, genere $p=0$, priva di direttrice tripla.

Ci proponiamo ora trasformare il piano rappresentativo P in un altro Π ad esso punteggiato proiettivamente e tale che le coniche $(ah_1h_2h_3)$ di P abbiano su Π , come corrispondenti, le rette di un fascio α ; le curve del 7.^o ordine $(a^4h_1^3h_2^3h_3^3a_1a_2)$ siano rappresentate da curve del 3.^o, e la curva $\Theta \equiv (a^4h_1^2h_2^2h_3^2a_1a_2)$, abbia per immagine su Π una curva del 3.^o ordine.

Si raggiunge lo scopo, adoperando una rete di curve del 5.^o ordine $(a^3h_1^2h_2^2h_3^2a_1a_2a_3)$ dove a_3 sia un punto di Θ .

Sia α il punto di Π che corrisponde alla cubica $(a^2h_1h_2h_3a_1a_2a_3)$, curva principale di P per tale trasformazione; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i punti di Π i quali sono le immagini delle rette principali ah_1, ah_2, ah_3 di P ; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, i punti di Π corrispondenti alla coniche principali di P $(ah_1h_2h_3a_1), (ah_1h_2h_3a_2), (ah_1h_2h_3a_3)$; il sistema dei punti fondamentali di Π sarà composto di α come punto triplo, di $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ come punti doppi, e di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ come punti semplici; e la rete di curve di 5.^o ordine in Π , la quale corrisponde alle rete di rette in P , sarà $(\alpha^3\beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$.

Le linee principali di Π sono le rette $\alpha\beta_1, \alpha\beta_2, \alpha\beta_3$, corrispondenti ai punti a_1, a_2, a_3 ; le coniche $(\alpha\beta_1\beta_2\beta_3\alpha_1), (\alpha\beta_1\beta_2\beta_3\alpha_2), (\alpha\beta_1\beta_2\beta_3\alpha_3)$ che corrispondono ai punti h_1, h_2, h_3 ; ed in fine la cubica $(\alpha^2\beta_1\beta_2\beta_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$, la quale è la immagine del punto a di P .

Passiamo ora a trovare la rappresentazione di S_4 su Π .

Immagine di una generatrice di S_4 . Questa immagine è ciò che di-

venta su Π una conica del fascio $(ah_1h_2h_3)$ di P ; ora una tale conica forma insieme colla cubica $(a^2h_1h_2h_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ una curva appartenente alla rete di trasformazione: dunque la conica si muterà in una retta del fascio α . Dunque:

« Le generatrici di S_4 hanno per immagini su Π le rette di un fascio α . »

Immagine di una sezione piana di S_4 . Questa immagine è la trasformata su Π di una curva $(a^4h_1^3h_2^3h_3^3\alpha_1\alpha_2)$, immagine su P di una sezione piana di S_4 ; ora una tale curva è tagliata in 3 punti da ciascuna curva della rete di trasformazione, perciò la immagine su Π è una curva del 3.^o ordine. Se poi si osserva quali delle curve principali tagli una $(a^4h_1^3h_2^3h_3^3\alpha_1\alpha_2)$ in punti non fondamentali, si trova che la cubica $(a^2h_1h_2h_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ sega tale curva in due punti, mentre la conica $(ah_1h_2h_3\alpha_3)$ la taglia in un punto solo; onde le curve cubiche, immagini delle sezioni piane di S_4 su Π , avranno in α un punto doppio e passeranno per β_3 .

Immagine di Γ_4 . Anche la Γ_4 avrà per immagine una cubica Γ_3 passante per β_3 ed avente in α un punto doppio; ma tale Γ_3 passerà ancora per i punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

L'immagine di una sezione piana di S_4 , su P , tagliava la Γ_4 in 4 punti posti per diritto; perciò la cubica immagine, su Π , di una sezione piana di S_4 taglierà la Γ_3 in 4 punti situati in una curva del 5.^o ordine, appartenente alla rete $(\alpha_3\beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$.

Le curve di 3.^o ordine adunque, le quali corrispondono alle sezioni piane di S_4 , oltre di avere un punto semplice β_3 ed un punto doppio α comuni, verificano a due altre condizioni, le quali consistono in ciò che solo 2 delle 4 intersezioni con una certa cubica Γ_3 del sistema sono arbitrarie.

Immagine della curva H_3 di S_4 . La curva Θ , immagine di H_3 su P , è incontrata da una curva della rete di trasformazione in 3 punti, onde avrà su Π , come corrispondente, una curva Ω di 3.^o ordine. Le curve principali di P , che segano Θ in punti diversi dai fondamentali, sono le 3 coniche principali e la cubica principale; perciò la Ω passa per i punti $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$. Inoltre, poichè la Θ ha nei punti h le stesse tangenti di Γ_4 , e ad ogni direzione per h corrisponde un punto della conica di Π , immagine di h , così la Ω passa per le 3 coppie di punti di Γ_3 posti sulle coniche $(\alpha\beta_1\beta_2\beta_3\alpha_1)$, $(\alpha\beta_1\beta_2\beta_3\alpha_2)$, $(\alpha\beta_1\beta_2\beta_3\alpha_3)$. Per tal guisa si vede che, quando siano noti i punti (α, β) , Ω è più che determinata, epperò si conclude che le 6 intersezioni di queste coniche con Γ_3 insieme coi quattro punti $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ giacciono su di una stessa curva Ω del 3.^o ordine.

Milano, 5 giugno 1869.

Sur la surface enveloppée par les plans qui coupent une courbe gauche du 4^e ordre et de la 2^e espèce en quatre points d'un cercle.

(par M.^r R. STURM, à Bromberg.)

L'objet de nos recherches sera préférablement la courbe gauche du 4^e ordre et de la 2^e espèce R''_4 , mais à cause de la comparaison, nous ferons précéder les résultats analogues concernant la courbe de la 1^e espèce R'_4 .

1. Il est évident que si un plan E rencontre cette dernière courbe en quatre points situés sur un cercle C^2 , une surface du faisceau du second ordre dont R'_4 est la base contiendra ce cercle, savoir celle qui est menée par un cinquième point de C^2 ; nous avons donc à considérer l'enveloppe des plans des sections circulaires des surfaces du faisceau (R'_4). C^2_∞ étant le cercle imaginaire du plan à l'infini E_∞ , commun à toutes les sphères, et K^2_∞ la conique d'intersection de ce plan par une surface du second degré F^2 ; les six droites des trois couples appartenant au faisceau (C^2_∞, K^2_∞) sont évidemment les axes des faisceaux de plans (parallèles) qui coupent F^2 suivant des cercles, parce que les coniques d'intersection passent par les points circulaires imaginaires à l'infini de leurs plans. Les sommets de ces couples étant les points à l'infini des axes de F^2 , les plans de deux faisceaux sont parallèles à un même axe. Deux de ces six faisceaux, dont les plans sont parallèles au même axe, sont réels; les quatre autres imaginaires.

2. Le faisceau (R'_4) engendre dans E_∞ un faisceau de coniques qui avec C^2_∞ détermine un réseau. Les droites des couples de ce réseau enveloppent une courbe de la 3^e classe et du 6^e ordre, nommée courbe Cayleyenne du réseau (*). Par conséquent les plans qui sont rencontrés par une

(*) Voir l'Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane de Mr. CREMONA, n. 133.

courbe R_7^4 en quatre points situés sur le même cercle forment des faisceaux de plans parallèles, dont les axes enveloppent la courbe Cayleyenne (de la 3^e classe) du réseau de coniques, lequel est en E_∞ la trace du réseau de surfaces du second ordre déterminé par le faisceau dont R_7^4 est la base et par une sphère arbitraire. L'enveloppe de nos plans est donc une surface de la 3^e classe infiniment aplatie, c'est-à-dire réduite à une courbe plane de cette classe: par toute droite on peut donc mener trois plans qui rencontrent R_7^4 en quatre points d'un cercle.

On peut ajouter que tout plan, dont la trace à l'infini soit une des six droites des trois couples appartenant au faisceau de coniques engendré en E_∞ par le faisceau (R_7^4), rencontre la courbe gauche en quatre points situés sur un cercle: ce cercle étant le système de deux droites, dont l'une est à l'infini.

3. La courbe gauche du 4^e ordre et de la 1^e espèce est ou du genre 1 ou du genre 0; au premier cas elle n'a aucun point singulier, au second cas elle est douée ou d'un point double ou d'un rebroussement. L'ordre de sa développable osculatrice est dans ces trois cas 8, 6, 5; la classe 12, 6, 4; il y a donc $12 \cdot 3 = 36$ ou $6 \cdot 3 = 18$ ou $4 \cdot 3 = 12$ cercles osculateurs de la courbe R_7^4 qui la rencontrent encore une fois. Puisque les plans qui touchent R_7^4 deux fois enveloppent les cônes du faisceau (R_7^4) dont les sommets ne sont pas situés sur la courbe, le nombre de ces cônes étant 4 ou 2 ou 1, il y a $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ ou $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ ou $2 \cdot 3 = 6$ cercles qui ont un double contact avec R_7^4 .

4. Passons maintenant à la courbe R_{II}^4 du 4^e ordre et de la 2^e espèce. Elle est située sur une seule surface du second ordre H^2 , dont les génératrices L de l'un système rencontre trois fois R_{II}^4 , celles M de l'autre une fois. Si l'on mène une surface du 3^e ordre F^3 par 13 points de R_{II}^4 , elle contiendra la courbe entière (*); menons-la encore par 4 points d'une droite G qui ne s'appuie pas sur R_{II}^4 , cette droite sera située toute entière sur F^3 qui, en outre, contiendra les deux droites L_1, L_2 de H^2 rencontrées par G . La surface F^3 n'est déterminée que par 19 points; si l'on donne encore un point P , la surface appartiendra à un certain faisceau dont la base est composée de R_{II}^4 , de G, L_1, L_2 et d'une conique K^2 , passant par le point P et les quatre traces de R_{II}^4 sur le plan (G, P) ; car, cette conique

(*) Voir mes *Synthetische Untersuchungen über die Flächen dritter Ordnung*, n. 73.

rencontrant la droite G deux fois, toute surface du 3^e ordre menée par R_{II}^4 , G (par conséquent aussi par L_1, L_2) et par P rencontre K^2 en 7 points, ce qui veut dire qu'elle la contient toute entière (*). R_{II}^4, G, L_1, L_2 représentent une courbe du 7^e ordre et du 22^e rang (**); la réduction du dernier à 6, c'est-à-dire au rang de R_{II}^4 , est occasionnée par les huit points d'appui des deux L sur R_{II}^4 et G .

5. Tout point P fait donc naître une conique K^2 s'appuyant en quatre points sur R_{II}^4 et dont le plan passe par G . La question que nous nous sommes proposée est par conséquent la suivante: combien de ces coniques sont des cercles? Les points d'un plan arbitraire E nous donnent évidemment toutes ces coniques. Les surfaces du faisceau qui provient d'un point P sont coupées par E suivant les cubiques d'un faisceau dont la base est formée par les quatre traces $r_1 r_2 r_3 r_4$ de la courbe R_{II}^4 , les traces $g l_1 l_2$ des droites $GL_1 L_2$, le point P et l'autre point d'intersection P' de K^2 , qui est variable comme P et donne la même conique que celui-ci. Nommons P et P' ces points associés. Ils sont toujours situés sur une même droite avec g ; par conséquent les six autres points $r_1 r_2 r_3 r_4 l_1 l_2$ se trouvent sur une conique h^2 , intersection de H^2 par E .

6. Quel est le lieu du point P' , si P parcourt une conique S^2 (du plan E)? Mr. GEISER a donné dans son mémoire *Ueber zwei geometrische Probleme* (***) les deux théorèmes suivants:

1) Sept des neuf points d'intersection de deux cubiques (planes) étant fixes, si le huitième décrit une conique S^2 , le neuvième engendre une courbe du 16^e ordre; mais si six des sept points fixes sont situés sur une conique h^2 , pour un huitième point pris sur h^2 tous les points de cette conique tiennent la place du neuvième; par conséquent la courbe du 16^e ordre est remplacée par une courbe du 8^e ordre S^8 , abstraction faite de la conique quadruple h^2 .

2) Le lieu des huitièmes points qui se confondent avec leurs neuvièmes est une courbe du 6^e ordre qui se décompose, dans le cas particulier dont nous venons de faire mention, dans la conique h^2 et une courbe du 4^e ordre M^4 , lieu propre des huitièmes et neuvièmes points réunis.

(*) Voir mes *Synthetiche Untersuchungen über die Flächen dritter Ordnung*, n. 73.

(**) Ibidem, n. 61.

(***) G. Crellé-Borchardt, t. 67, p. 78.

7. Ainsi les points P' associés aux points P d'une conique S^2 produisent une courbe S^8 . Cette courbe coupe évidemment la conique S^2 aux huit points où celle-ci est rencontrée par la courbe M^4 des points associés à soi-mêmes, et en huit autres points. Ces derniers points forment quatre couples de points associés P et P' situés sur S^2 . Il arrive donc quatre fois que les deux points d'intersection de la conique K^2 avec le plan E se trouvent sur une conique donnée S^2 de ce plan. Remplaçons le plan arbitraire E par le plan à l'infini E_∞ , la conique S^2 par le cercle C_∞^2 (de ce plan) commun à toutes les sphères. Puisque toute conique dont les deux points à l'infini sont situés l'un et l'autre sur C_∞^2 est un cercle, il y aura quatre plans qui coupent R_H^4 en quatre points d'un cercle et qui passent par la droite arbitraire G ; la surface enveloppée par tous ces plans, objet de nos recherches, est par conséquent de la quatrième classe: Z_4 .

8. Le genre de la courbe de la 2^e espèce est toujours 0; elle ne peut avoir un point multiple sans se décomposer. L'ordre de sa développable osculatrice est 6 et la classe est, en général, 6. Par conséquent, cette développable ayant $6 \cdot 4 = 24$ plans tangents en commun avec Z_4 , les cercles osculateurs de 24 points de R_H^4 rencontrent cette courbe encore une fois. Mais la classe de la développable osculatrice peut être diminuée par des tangentes stationnaires (osculatrices), dont Mr. CAYLEY (*) et Mr. CREMONA (**) ont observé l'existence: chaque tangente stationnaire réduisant la classe d'une unité, le nombre des cercles osculateurs de la courbe R_H^4 qui la coupent encore une fois, décroît à $5 \cdot 4 = 20$ ou à $4 \cdot 4 = 16$, aussitôt que R_H^4 est douée d'une ou de deux tangentes stationnaires.

La classe de la développable bitangente à R_H^4 est 4 (***) et n'est pas diminuée par les tangentes osculatrices; il y a donc 16 cercles qui touchent la courbe R_H^4 en deux points distincts.

9. La surface Z_4 et l'hyperboloïde H^2 ont une développable circonscrite commune de la 8^e classe. Les plans de cette développable,

(*) Quarterly Journal of Mathematics, t. 8, p. 105.

(**) *Rappresentazione delle superficie di Steiner e delle superficie gobbe di terzo grado sopra un piano*. Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 1867.

(***) CREMONA, *Intorno alla curva gobba del quart'ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado*, v. ce journal, 1^e serie, t. 4, § 20; ou mes *Synthetische Untersuchungen* etc. n. 70.

touchant l'hyperboloïde H^2 , le coupent suivant deux droites L et M , dont l'une L contient trois points de R_H^4 , l'autre M un seul. Ainsi le cercle d'un tel plan doit se décomposer de même en deux droites, dont l'une est L . Si cette droite ne s'appuie pas sur le cercle à l'infini C_∞^2 , c'est-à-dire si elle ne tend pas à un des quatre points $i = (C_\infty^2, h_\infty^2)$, où h_∞^2 est la conique à l'infini de la surface H^2 , il faut que l'autre des deux droites formant le cercle dégénéré contienne les deux points circulaires à l'infini du plan, et par conséquent qu'elle même soit éloignée à l'infini, avec le quatrième point de R_H^4 . La droite M contenant ce point sera donc une des quatre droites $M_1 M_2 M_3 M_4$ de H^2 qui tendent aux points $r_1 r_2 r_3 r_4$ à l'infini de la courbe R_H^4 . Les faisceaux de plans dont les axes sont $M_1 M_2 M_3 M_4$ appartiennent donc à la surface développable de la 8^e classe, et toute droite L de l'hyperboloïde H^2 envoie à la surface Z_4 les quatre plans tangents $L(M_1 M_2 M_3 M_4)$. Au contraire, si la droite L passe par un des quatre points i , la seconde droite du cercle dégénéré n'a à contenir que le second point circulaire à l'infini du plan, elle ne s'éloigne pas donc cette fois à l'infini, ni le quatrième point de R_H^4 non plus. Les quatre droites $L^1 L^2 L^3 L^4$ de H^2 qui sont dirigées vers les points $i^1 i^2 i^3 i^4$ sont les axes de quatre faisceaux de plans qui complètent la surface développable de la 8^e classe, de sorte que celle-ci est composée de huit faisceaux de plans. Toute droite M sur H^2 envoie à Z_4 les quatre plans tangents $M(L^1, L^2, L^3, L^4)$.

10. Nous avons trouvé ainsi huit faisceaux de plans tangents de Z_4 ; Z_4 possède encore douze faisceaux de plans tangents parallèles c'est-à-dire ayant des axes situés à l'infini. Six de ces axes sont les droites des trois couples du faisceau (C_∞^2, h_∞^2) ou qui joignent les points i deux à deux. Les plans de ces faisceaux (dont deux, parallèles au même axe de l'hyperboloïde H^2 , sont réels, et les autres imaginaires) coupent H^2 suivant des cercles. Les six autres axes joignent les points r deux à deux; un plan mené par une de ces droites, par ex. par $R_{1,2} = r_1 r_2$, contient un couple de droites représentant un cercle qui s'appuie quatre fois sur R_H^4 ; car une droite du couple est $R_{1,2}$ elle-même, qui rencontre C_∞^2 deux fois. Ces six derniers axes et leurs faisceaux sont ou tous réels, ou deux réels et les autres imaginaires. Il y a donc ou huit ou quatre faisceaux réels de plans tangents parallèles de Z_4 .

11. Aucun plan à distance finie ne peut être un plan (tangent) multiple de Z_4 ; car, par ses points d'intersection avec R_H^4 il passe un seul

cercle. Mais toute conique qui passe par les quatre points r s'appuie sur C_∞^2 plus de deux fois; donc on peut présumer que le plan à l'infini est un plan multiple de Z_4 . Quel est le degré de multiplicité?

Considérons, comme ci-dessus, au lieu de E_∞ et de C_∞^2 un plan fini E et une conique S^2 dans ce plan. Soit maintenant la droite G située dans E , ce qui n'était pas supposé au n. 4. Si l'on fait passer une surface du 3^e ordre F^3 par R_H^1 et G , les plans E_x qui passent par G la couperont suivant des coniques f_x^2 , qui décrivent sur G une involution I . La surface H^2 est rencontrée par les mêmes plans aussi suivant des coniques h_x^2 , qui s'appuient toutes sur G aux deux points l_1, l_2 , où cette droite perce H^2 et rencontre les deux droites L_1, L_2 qui s'appuient trois fois sur R_H^1 et forment l'intersection restante de F^3 et de H^2 . Les deux coniques h_x^2 et f_x^2 situées dans le même plan E_x se rencontrent sur la courbe R_H^1 et déterminent un faisceau qui coupe la droite G suivant une involution I_x . Si p_1 et p_2 sont les points d'intersection de S^2 avec G , combien de fois une conique qui s'appuie quatre fois sur R_H^1 et dont le plan passe par G , par conséquent une conique qui appartient à un de ces faisceaux, rencontre-t-elle la droite G en p_1 et p_2 ? ou, ce qui revient au même, combien de fois ces points p_1 et p_2 forment-ils un couple d'une involution I_x ? Toute involution I_x est déterminée par le couple (l_1, l_2) et un couple de l'involution I ; l'involution déterminée par (l_1, l_2) et (p_1, p_2) a un couple commun avec I ; dans le plan de la conique f_x^2 qui fournit ce couple; il y a donc une conique qui appartient au faisceau (f_x^2, h_x^2) et rencontre G aux points p_1 et p_2 . Ainsi une seule conique s'appuyant en quatre points sur R_H^1 rencontre S^2 en ses deux points d'intersection avec G . Si E s'éloigne à l'infini et que S^2 soit le cercle C_∞^2 , nous obtenons ce résultat: Par toute droite du plan à l'infini E_∞ il y a un seul plan (en général différent de E_∞) qui est percé par R_H^1 en quatre points d'un cercle. Par conséquent le plan à l'infini est un plan tangent triple de la surface Z_4 .

12. Il semble au premier abord que les mêmes considérations subsistent pour la courbe de la 1^e espèce R_H^1 ; mais pour celle-ci les points l_1, l_2 sont les points où G rencontre la conique K^2 qui est commune à F^3 et à H^2 , outre R_H^1 , et parce qu'ils appartiennent à l'involution I , ils forment le seul couple commun à celle-ci et à l'involution déterminée par (p_1, p_2) et (l_1, l_2) . La conique K^2 est elle-même la conique f_x^2 qui fournit ce couple et elle est en même temps aussi la conique h_x^2 , ce qui fait que ce cas est illusoire; car à cause de cette coïncidence de f_x^2 et de h_x^2 , les quatre points

de R_i^4 situés dans le plan de $f_x^2 = h_x^2 = K^2$ (points d'intersection de h_x^2 et de f_x^2 dans les autres plans) cessent d'être distincts des autres points de la conique K^2 . Ainsi, en general, par une droite du plan E_∞ il n'y passe aucun plan (différent de E_∞), qui rencontre R_i^4 en quatre points d'un cercle. Cependant, si pour une certaine droite de E_∞ il y a un tel plan (et nous avons trouvé un nombre infini de telle droites), tous les plans du faisceau dont cette droite est l'axe auront la même propriété; si F^3 est menée par une telle droite et par R_{II}^4 , la conique commune à F^3 et à H^2 (qui, n'étant pas la seule surface du second degré passant par R_i^4 , peut être remplacée par chaque autre surface du faisceau dont R_i^4 est la base) est un cercle, et les couples (p_1, p_2) et (l_1, l_2) sont identiques, et ne déterminent plus une involution.

On peut démontrer aussi pour R_i^4 , d'une manière semblable que pour R_{II}^4 , que par chaque droite non située à l'infini il passe trois plans qui rencontrent R_i^4 en quatre points d'un cercle. Combinant ce résultat à celui que nous venons de trouver, c'est-à-dire qu'en general par une droite à l'infini il n'y a pas de tels plans, nous concluons que le plan E_∞ est un plan triple de l'enveloppe (de la 3^e classe) des plans qui sont percés par R_i^4 en quatre points d'un cercle; par conséquent cette enveloppe est une courbe plane de la troisième classe située en E_∞ (*).

13. Mais revenons à la courbe R_{II}^4 et à sa surface Z_4 . Sur les six droites qui joignent deux points i , les deux couples $l_1 l_2$ et $p_1 p_2$ se confondent en un seul, celui des deux points i ; ainsi l'involution contenant les couples $(l_1 l_2)$, $(p_1 p_2)$ devient indéterminée, toute involution I_x a le couple $p_1 p_2$ commun avec I ; nous retombons donc sur le théorème déjà trouvé, que tout plan mené par une telle droite touche la surface Z_4 .

Sur chaque plan mené par une droite R qui joint deux points r , par ex. $R_{12} = r_1 r_2$, ces deux points sont deux des quatre points d'intersection avec R_{II}^4 ou deux des quatre points-base du faisceau (h_x^2, f_x^2) ; et l'involution I_x que ce faisceau engendre sur R_{12} est réduite aux deux points $r_1 r_2$; c'est-à-dire qu'elle est devenue telle, que toutes les coniques du faisceau produisent le couple $r_1 r_2$; une seule conique, c'est-à-dire la paire de droites dont l'une est R_{12} , fournit tous les autres points de R_{12} , par conséquent aussi le couple des points $p_1 p_2$, où R_{12} rencontre C_∞^2 ; il y a donc dans le faisceau (f_x^2, h_x^2) de chaque plan mené par R_{12} une conique qui passe par les

(*) CREMONA, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, n. 38.

deux points $p_1 p_2$; ainsi chaque plan par R_{12} touche la surface Z_4 , résultat déjà obtenu au n. 10.

14. Considérons la courbe de contact du plan E_∞ avec la surface Z_4 . Puisque ce plan est un plan tangent multiple qui n'a pas de connexion avec d'autres, nous présumerons que cette courbe de contact est une courbe générale de la troisième classe et ne se résout pas en trois faisceaux de rayons; et que par conséquent le contact n'a pas lieu seulement en trois points (les centres des trois faisceaux), mais en tous les points de la courbe (*).

Soit P un point arbitraire du plan E_∞ , autour duquel pivote la droite G dans ce plan. On peut mener une surface du 3^e ordre F^3 par la courbe R_H^4 (par 13 de ses points), par la conique fixe f^2 du plan E_∞ qui contient les points r et P (par trois points de f^2 différents des r) et par la droite G (par deux points de G différents de ceux où elle rencontre f^2). Qu'on donne, pour achever de déterminer F^3 , encore un autre point fixe de l'espace. Cette surface variera avec la droite G . En général, il n'y a aucune conique du faisceau (f^2, h_∞^2), ou passant par les quatre points r , qui rencontre la droite G en ses points d'intersection $p_1 p_2$ avec C_∞^2 . Cherchons combien de droites G passant par P sont telles que cela ait lieu, c'est-à-dire que les trois couples de points où G est rencontrée par les coniques $f^2, h_\infty^2, C_\infty^2$ appartiennent à la même involution. La conique (réelle) N^2 du faisceau (h_∞^2, C_∞^2) qui passe par P coupe f^2 en trois autres points; et les droites menées de P à ces points sont évidemment les droites cherchées. Sur chacune de ces droites les points d'intersection avec f^2 (dont l'un est P) forment un couple de l'involution I ; les intersections avec h_∞^2 sont les points $l_1 l_2$, la conique du faisceau (f^2, h_∞^2) qui passe par les points $p_1 p_2$ est celle qu'on a cherchée au n. 11; mais son plan est E_∞ ; donc par chacune de ces trois droites il n'y a pas de plan différent de E_∞ qui coupe R_H^4 en quatre points d'un cercle. Ces droites sont ainsi les tangentes provenant de P à la courbe de contact Z_3 du plan E_∞ avec la surface Z_4 .

15. La construction des trois tangentes provenant d'un point P à la courbe Z_3 , que nous venons d'expliquer, devient illusoire si P est situé sur la conique h_∞^2 . Dans ce cas, f^2 se confond avec h_∞^2 et la surface F^3 a en commun avec H^2 la courbe R_H^4 , la conique h_∞^2 et les deux droites $L_1 L_2$

(*) Ibidem.

qui s'appuient trois fois sur R_{II}^4 et une fois (en l_1 et l_2) sur G . Cette surface F^3 se décompose en H^2 et en un plan passant par G , et cesse de déterminer la courbe R_{II}^4 sur II^2 .

16. Mouvons le point P sur une droite R , par ex. R_{12} ; la conique f^2 est invariablement le couple de droites (R_{12}, R_{34}) . R_{34} est touchée par deux coniques du faisceau (h_∞^2, C_∞^2) qui coupent la droite R_{12} en quatre points s . Pour chacun de ces points la conique qui l'a fourni est la conique N^2 ; celle-ci ayant avec $f^2 = (R_{12}, R_{34})$ un contact, deux des tangentes qui sont menées du point s à Z_3 sont réunies dans la droite qui joint s au point de contact. Les quatre points s sont donc des points d'intersection de R_{12} avec Z_3 . Toute conique du faisceau (h_∞^2, C_∞^2) rencontre R_{12} au point P et en un autre point, par conséquent R_{12} est une des trois tangentes menées du point P à la courbe Z_3 . La conique du faisceau (h_∞^2, C_∞^2) qui passe par le point (R_{12}, R_{34}) rencontre la droite R_{12} encore en un point t ; deux des droites qui vont de t aux trois autres points d'intersection de cette conique avec la paire (R_{12}, R_{34}) , ou deux des tangents que le point t envoie à Z_3 , se réunissant dans R_{12} , on voit que cette droite touche Z_3 , et t en est le point de contact. La courbe de contact Z_3 du plan à l'infini E_∞ avec la surface Z_4 est touchée par chacune des 6 droites R et rencontrée en quatre autres points. Cette courbe est donc du sixième ordre, et par conséquent elle est une courbe générale de la troisième classe.

Observons encore que sur chaque droite R les quatre points d'intersection s , le point de contact t avec Z_3 et le point d'intersection avec la droite opposée forment six points en involution; les deux derniers sont conjugués. Si P se meut sur une des six droites qui joignent les points i , p. ex. sur $I^{12} = i^1 i^2$, la conique N^2 est invariablement le couple de droites (I^{12}, I^{34}) , tandis que f^2 change d'un point P à l'autre. On en conclut, comme auparavant, que la droite I^{12} (et semblablement toutes les autres I) touche la courbe Z_3 au 2^e point de I^{12} situé sur la conique f^2 qu'on a menée par les points (I^{12}, I^{34}) et la rencontre aux quatre points marqués sur I^{12} par les deux coniques f^2 qui touchent la droite I^{34} . Ces cinq points et le point (I^{12}, I^{34}) sont, comme ci-dessus, six points en involution.

17. Un plan tangent triple réduit l'ordre d'une surface de $3 \cdot 2^2 = 12$; par conséquent, l'ordre d'une surface générale de la 4^e classe étant $4 \cdot 3^2 = 36$, celui de notre surface Z_4 est $36 - 12 = 24$. L'intersection de Z_4 avec le plan à l'infini E_∞ est composée de la courbe de contact Z_3 du 6^e ordre et des douze droites R et I , comme nous allons voir.

Le cône (cylindre) tangent mené d'un point arbitraire P du plan E_∞ à la surface Z_4 est de la 4^e classe (C_4) et est touché par E_∞ le long des trois tangentes de Z_3 issues de P . L'ordre de ce cône est 6, à cause du plan triple. Si P se trouve sur Z_3 , deux de ces tangentes coïncident; E_∞ a donc avec C_4 deux contacts, dont l'un est stationnaire. Ce contact stationnaire a lieu le long de la tangente de f_3 en P ; l'autre le long de la tangente qui sort de P et va toucher la courbe Z_3 ailleurs. Un plan qui a un contact stationnaire et un contact ordinaire compte comme deux plans doubles et un plan stationnaire (*); l'ordre du cône C_4 est donc 5.

18. Si P tombe sur une droite I , par ex. sur I^{12} , le cône C_4 se décompose dans le faisceau de plans dont I^{12} est l'axe et dans un cône C_3 de la 3^e classe. E_∞ touche le faisceau I^{12} le long de son axe, car cet axe est une des tangentes issues de P à Z_3 (ou bien: un faisceau, considéré comme enveloppe de ses plans, est touché par chacun d'eux le long de l'axe, intersection du plan avec son voisin); et E_∞ touche le cône C_3 le long des deux autres tangentes de P à Z_3 . Le cône C_3 , ayant un plan double, est du 4^e ordre. Outre ce plan double E_∞ , il y a encore un autre plan tangent de C_3 passant par I^{12} , qui est par suite un plan tangent double de C_4 . Mais ce plan n'est pas double pour Z_4 , donc il touche cette surface en P ; par conséquent ce point est situé sur Z_4 . Donc les droites I et de même les droites R se trouvent sur la surface Z_4 , comme nous avons avancé au commencement de ce numéro.

Si P est un des quatre points s d'intersection d'une droite I ou R avec Z_3 , les deux contacts du cône C_3 avec E_∞ se réunissent en un contact stationnaire; et si P est le point de contact t , l'un des deux contacts aura lieu le long de la droite I ou R . Le cône C_3 est dans le premier cas du 3^e ordre, et dans l'autre cas du 4^e ordre.

Le cône tangent C_4 mené d'un point i ou r à la surface Z_4 se résout en quatre faisceaux, trois axes desquels sont situés dans E_∞ . Ce cône a six plans doubles, qui joignent les axes deux à deux; trois plans doubles coïncident avec E_∞ , donc les trois autres [pour i^1 par ex. les plans $L^1(I^{12}$,

(*) Si un plan triple touche un cône le long des arêtes t_1, t_2, t_3 , les trois plans doubles qui le composent, sont ceux qui touchent le long de t_1 et de t_2 , de t_1 et de t_3 , de t_2 et t_3 . Si t_3 est infiniment voisine à t_2 il résulte un plan qui a un contact ordinaire le long de t_1 et un contact stationnaire le long de t_2 . L'un des trois plans doubles, dont ce plan triple est composé, celui qui touche le long de t_2 et de t_3 , est devenu un plan stationnaire.

I^{13}, I^{14}), ou pour r , le plans $M_1(R_{13}, R_{13}, R_{14})$ touchent Z_4 au point i ou r . Les points i et r sont donc des points triples de la surface Z_4 .

19. Soit P l'un des trois points diagonaux du quadrangle des points i ou du quadrangle des points r , ou l'un des points du rencontre d'une droite I et d'une droite R ; par ex. le point $a = (I^{12}, I^{34})$; son cône C_4 dégénère dans les deux faisceaux I^{12} et I^{34} et un cylindre du second degré C^2 qui touche E_∞ (ce plan appartient à chacun des deux faisceaux et au cylindre, et devient de cette manière un plan triple de C_4); par conséquent le cylindre est parabolique.

Chacune des deux droites I^{12} et I^{34} envoyant à C^2 , outre E_∞ , un autre plan tangent qui devient un plan double de C_4 , a sera un point double de Z_4 . Les trois points diagonaux du quadrangle i (qui sont tous réels), ceux du quadrangle r (dont tous sont réels ou un seulement) et les 36 points (I, R) (dont douze ou quatre seuls sont réels) sont doubles sur Z_4 et chacun d'eux fournit deux faisceaux de plans et un cylindre parabolique, comme enveloppe des plans rencontrant la courbe R_{II}^4 en quatre points d'un cercle et passant par le point nommé. Les cylindres appartenant aux trois premiers points sont parallèles aux trois axes de H^2 .

20. Plaçons enfin P sur une des droites $L^1 L^2 L^3 L^4$ ou $M_1 M_2 M_3 M_4$, axes de faisceaux de plans tangents à Z_4 ; le cône C_4 se décomposera dans ce faisceau et un cône C_3 ; ceux-ci ayant en commun trois plans qui ne sont pas doubles pour Z_4 , nous concluons que les huit droites sont triples sur Z_4 .

Remarquons que les points i et r appartiennent à ces droites. Le cône C_4 issu d'un point où l'une des quatre droites L rencontre une des quatre droites M sera composé des faisceaux de ces deux droites et d'un cône du second degré, et aura par suite cinq plans doubles, dont l'un (L, M) touche H^2 ; par conséquent ces 16 points (L, M) sont des points quintuples sur Z_4 et aussi des points de contact de H^2 et Z_4 . Ces deux surfaces se coupent entre elles suivant les huit droites L et M triples sur Z_4 et suivant une courbe gauche du 24^e ordre qui est touchée par E_∞ aux douze points d'intersection de h_∞^2 avec Z_4 . R_{II}^4 est rencontrée par cette courbe en 48 points; les 48 autres points d'intersection de R_{II}^4 avec Z_4 se réduisent à 16 points, qui doivent être comptés trois fois, parce qu'ils sont situés sur les droites triples de Z_4 ; ils sont douze points sur les quatre droites L et les quatre points r sur les M .

21. La courbe Z_3 , étant générale, a 9 rebroussements P_0 . La conique N^2 (du faisceau dont les points r forment la base) et celle du faisceau (h_∞^2, C_∞^2) , qui se rencontrent en un point P_0 , doivent avoir, en outre, un contact *dreipunctig*. En effet, ces deux faisceaux, ayant en commun la conique h_∞^2 , engendrent un réseau de coniques; et dans un tel réseau il y a, d'après Mr. CREMONA (*), 9 faisceaux dont les coniques ont un contact *dreipunctig* (en 9 points Q_0); les quatrièmes points-base de ces faisceaux nous donnent les 9 points P_0 , rebroussements de la courbe Z_3 . Puisque les tangentes de Z_3 sont les droites des couples de ce réseau, la courbe Z_3 est sa courbe Cayleyenne. Ainsi:

La courbe de contact de la surface Z_4 avec le plan à l'infini E_∞ est la courbe Cayleyenne du réseau constitué par les deux faisceaux dont les bases sont formées par les points r et les points i .

Les points Q_0 , où les contacts *dreipunctig* ont lieu, sont les points conjugués des points stationnaires de la courbe Hessienne du réseau, c'est-à-dire les points de contact de cette courbe avec la Cayleyenne.

Outre la tangente de rebroussement, un point P_0 n'envoie aucune tangente à Z_3 , de sorte que les trois tangentes $t_1 t_2 t_3$ se sont réunies dans celle-là; le plan triple E_∞ du cône C_4 mené du point P_0 à la surface Z_4 est composé de deux plans stationnaires (qui touchent le long de t_1, t_2 et de t_2, t_3) et d'un plan double (qui touche le long de t_1, t_2); ce cône est donc du 4^e ordre.

Bromberg, le 5 août 1869.

(*) *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, n. 119.

NOTE,

Outre les huit droites triples signalées par l'Auteur, la surface Z_4 a une courbe cuspidale (de rebroussement) du 54^e ordre et une courbe nodale (double) du 165^e ordre (ou des courbes multiples équivalentes à celle-ci?). La courbe cuspidale est coupée par le plan E_∞ aux 9 points stationnaires de Z_3 , dont chacun doit être compté deux fois, et aux 12 points de contact de Z_3 avec les droites I, R , dont chacun doit être compté trois fois.

Au lieu de Z_3 on peut étudier la surface réciproque F^4 du 4^e ordre, douée d'un point triple o , de 12 droites concourant en o et de 8 autres droites situées sur un hyperboloïde. Il sera très-commode de représenter cette surface sur un plan Π , en projetant les points de F^4 au moyen de rayons issus de o . Alors nous aurons en Π une courbe cubique générale K^3 , image du point triple o ; et deux quadrilatères complets circonscrits à une même conique et inscrits à K^3 , dont les 12 sommets et les 8 cotés seront les images des 12 + 8 droites de F^4 . Il y a 16 coniques, dont chacune est simultanément circonscrite à un triangle du premier quadrilatère et à un triangle du second; ces coniques correspondent à un nombre égal de coniques situées sur F^4 . Les sections planes de cette surface seront représentées par les courbes du 4^e ordre circonscrites simultanément aux deux quadrilatères complets. Les droites du plan Π (qui ne passent par aucun sommet des quadrilatères) sont les images des sections planes passant par o . Les courbes du 3^e ordre qui passent par 9 sommets des quadrilatères (exceptés 3 en ligne droite) sont les images de courbes planes du même ordre appartenant à la surface. La courbe de contact de F^4 avec un cône circonscrit est représentée par une courbe du 6^e ordre circonscrite aux deux quadrilatères; cette courbe est la Jacobienne d'un réseau de courbes du 4^e ordre circonscrites aux mêmes quadrilatères. L'image de la courbe parabolique est une courbe de l'11^e ordre qui touche K^3 aux 12 sommets des quadrilatères et passe par les points d'inflexion de cette même cubique. Etc. etc.

L. C.

Dell'uso del principio delle velocità virtuali con riguardo all'attrito.

(del D.^r GIULIO PETERSEN, a Copenhagen.)

Quando si cercano le posizioni d'equilibrio d'un sistema mediante le sei note equazioni, si devono effettuare in generale molte eliminazioni di pressioni e di tensioni incognite; dopo di che le equazioni che restano, combinate colle condizioni puramente geometriche cui è soggetto il sistema, danno le cercate posizioni d'equilibrio.

Si ottiene quasi sempre una grande semplificazione nei calcoli facendo uso del principio delle velocità virtuali, il quale fornisce tosto le equazioni che altrimenti non si potrebbero conseguire che coll'eliminazione delle forze incognite. Per meglio chiarire ciò che segue, vogliamo dapprima esaminare più da vicino il modo in cui si raggiunge questo scopo.

La condizione generale dell'equilibrio d'un punto è che sia nulla la somma delle componenti delle forze attive secondo una direzione arbitraria; si può in tal modo, scegliendo più direzioni distinte, formare tante equazioni quante si vogliano; ma tre sole di queste sono indipendenti fra loro, e in pari tempo sufficienti a risolvere il problema. Queste equazioni hanno la forma

$$\sum P_k \cos \alpha_k = 0,$$

dove P_k è una qualunque delle forze ed α_k l'angolo che la sua direzione forma con quella della retta secondo cui se ne prendono le componenti. Moltiplicando la precedente equazione per un piccolo segmento m di questa retta si ottiene la condizione equivalente

$$\sum m P_k \cos \alpha_k = 0,$$

ossia

$$\sum P_k p_k = 0.$$

Considerando m come unq spostamento del punto, p_k diventa la proiezione di questo spostamento sulla direzione della forza P_k , e, usando la solita denominazione per il prodotto $P_k p_k$, si conclude tosto che:

Affinchè un punto sia in equilibrio, dev'esser nulla per ogni suo spostamento la somma dei momenti virtuali delle forze attive.

Questo teorema non differisce dal primo che nella forma, giacchè dando al punto tre spostamenti arbitrari, non si fa che decomporre le forze secondo tre direzioni diverse, e le equazioni che si ottengono sono in ambedue i casi le stesse. Alle forze agenti si devono poi sempre ascrivere tanto le forze esterne date, quanto quelle che vengono introdotte a titolo di pressioni, tensioni, ecc.

Perchè un dato sistema sia in equilibrio, è necessario e sufficiente che lo sia ciascuno dei suoi punti in particolare. Dando a ciascuno di questi punti tre spostamenti particolari si otterrebbe il necessario numero d'equazioni; ma queste conterrebbero le pressioni o tensioni incognite come se si facesse la decomposizione delle forze nel modo ordinario. Bisogna dunque dirigere gli spostamenti in modo che le forze incognite non entrino nelle equazioni; quando una di queste forze è per tal modo eliminata, si ha un'incognita di meno e si può quindi far a meno di un'equazione, cioè d'uno spostamento.

Se manca soltanto una condizione a che le posizioni dei varii punti del sistema siano totalmente determinate (senza riguardo alle forze agenti, cioè in un senso puramente geometrico), ogni punto non può percorrere che una linea; in questo caso le pressioni delle varie linee vengono neutralizzate dirigendo gli spostamenti secondo le tangenti di esse, poichè per ogni punto basta un solo spostamento. Se mancano due condizioni, ogni punto non può percorrere che una superficie, e la reazione di questa superficie viene neutralizzata dirigendo due diversi spostamenti del punto corrispondente nel piano tangente della stessa. Si traduce analiticamente questo processo dando alle x, y, z gli incrementi dx, dy, dz , dei quali i primi due sono arbitrari e il terzo dipende da questi nel modo che risulta differenziando l'equazione della superficie. Per un artificio analitico assai semplice, invece di stabilire due equazioni, relative a due spostamenti, se ne scrive una sola,

la quale, per l'indipendenza di dx e dy , ne comprende realmente due distinte.

In tal modo si sono neutralizzate le reazioni incognite, rendendo in pari tempo determinate le direzioni degli spostamenti; ma i rapporti di grandezza di questi spostamenti rimangono tuttavia arbitrari. Si può quindi disporre di essi in modo da neutralizzare anche le tensioni incognite, per guisa che le equazioni contengano soltanto le forze esterne date.

Quando lungo una linea retta agiscono due forze eguali e contrarie applicate ai suoi estremi, è facile dimostrare che la somma dei loro momenti virtuali è nulla per ogni variazione infinitesima della retta che ne lasci invariata la lunghezza. Ora, risultando appunto ogni tensione dalla presenza di due forze eguali e contrarie, è chiaro che i relativi momenti entreranno nelle equazioni per modo da poter essere eliminati per via di addizione, se le grandezze degli spostamenti (già determinati quanto alla direzione) si faranno dipendere le une dalle altre al modo stesso che lo sarebbero per un moto infinitesimo puramente geometrico, soddisfacente alle condizioni prescritte; vale a dire se si stabiliranno fra le variazioni delle coordinate quelle stesse relazioni che risultano dalla differenziazione delle date equazioni.

Così si riesce a far dipendere la determinazione delle posizioni d'equilibrio di un dato sistema dalla considerazione delle sole forze esterne. Sfortunatamente questo metodo non può essere applicato immediatamente quando si deve tener conto dell'attrito, giacchè le forze procedenti da questa causa non escono dal calcolo, e le pressioni incognite da cui dipendono ricompaiono con esse nelle equazioni. Con ciò il principio perde molta della sua utilità, non potendo venir applicato nella pratica, dove il più delle volte si deve aver riguardo agli attriti.

Noi ci proponiamo di mostrare tuttavia che il metodo può essere esteso anche a questo caso. Ci occuperemo dapprima di una figura piana, e passeremo poscia al caso generale.

Sia P la pressione in un punto dove ha luogo attrito. La forza generata dall'attrito è μP , μ essendo il coefficiente d'attrito, ed è diretta secondo la tangente. Queste due forze si possono comporre in una sola di grandezza $P\sqrt{1+\mu^2}$, la cui direzione fa con quella della normale un angolo v dato da

$$\operatorname{tg} v = \mu.$$

Rammentando ora che la pressione P è stata precedentemente neutraliz-

zata con uno spostamento diretto secondo la tangente, è chiaro che per neutralizzare la nuova forza bisognerà dirigere lo spostamento perpendicolarmente alla sua direzione, cioè in modo da formare un angolo v colla tangente alla linea percorsa dal punto. Dunque il principio delle velocità virtuali può essere applicato anche quando si debba tener conto dell'attrito, purchè gli spostamenti dei punti dov'esso si sviluppa formino colla tangente un angolo la cui tangente trigonometrica sia eguale al coefficiente d'attrito.

Gli altri spostamenti dipendono da questi nello stesso modo di prima, perchè le rette secondo le quali si operano le tensioni devono restare di lunghezza costante, affinchè spariscono i momenti virtuali delle tensioni stesse.

Quando la sola forza esterna è la gravità, indicando i pesi con P , e le altezze dei singoli centri di gravità con y , si ha

$$Pdy + P_1dy_1 \dots + P_n dy_n = 0,$$

ossia, chiamando η l'altezza del centro di gravità generale,

$$d\eta = 0,$$

donde si conclude che nelle posizioni d'equilibrio l'altezza del centro di gravità è un massimo o un minimo, semprechè le posizioni contigue risultino determinate da spostamenti nelle direzioni suindicate.

Chiameremo linea d'attrito la direzione secondo cui si deve concepire eseguito lo spostamento affinchè sia neutralizzata la risultante precedentemente considerata. Come abbiamo veduto, essa fa un angolo v colla tangente.

Per trovare la formola da applicarsi per il calcolo, indichiamo con x, y le coordinate di un punto dove abbia luogo attrito, e con $L=0$, l'equazione della linea su cui esso deve mantenersi. Siano $\delta x, \delta y$ gli incrementi delle coordinate relativi ad uno spostamento lungo la linea d'attrito. Siccome l'angolo di queste due direzioni è eguale a v (essendo $tg v = \mu$, dove μ può essere tanto positivo quanto negativo, poichè in generale non si può stabilire a priori la direzione della resistenza dovuta all'attrito), si ha

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\frac{dy}{dx} + \mu}{1 - \mu \frac{dy}{dx}} = \frac{dy + \mu dx}{dx - \mu dy}. \quad (1)$$

Ma dalla $L=0$ si trae

$$\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial y} \delta y = 0, \quad (2)$$

quindi, sostituendo per $\delta y: \delta x$ il valore dato dalla (1), si ha

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \mu \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \mu \frac{\partial L}{\partial x} \right) dy = 0, \quad (3)$$

Spostando V_1 lungo la linea d'attrito per un tratto avente la proiezione dx_1 , si ha

$$dy_1 = \mu_1 dx_1.$$

Il centro di V viene con ciò innalzato per un tratto dy_1 , ma retrocede lungo la linea d'attrito per un tratto la cui proiezione è dx_1 , e poichè questa linea fa angoli eguali colla tangente e con un'orizzontale, si ha

$$dy = dy_1 - \mu dx_1:$$

di qui emerge per la condizione cercata

$$2 V_1 = \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) V.$$

Cerchiamo ora la formola generale da adoperarsi nel caso d'una superficie che presenti una resistenza dovuta all'attrito.

In luogo della linea d'attrito bisogna considerare in questo caso un cono di rotazione, il cui asse è la normale nel punto considerato, e il cui semiangolo al vertice è il complemento di v . Indicando con $L=0$ l'equazione della superficie e con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gli angoli della normale cogli assi, si ha

$$\cos \alpha_1 = \frac{\partial L}{\partial x} V, \quad \cos \alpha_2 = \frac{\partial L}{\partial y} V, \quad \cos \alpha_3 = \frac{\partial L}{\partial z} V,$$

dove

$$V = \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Indicando inoltre con dx, dy, dz gli incrementi delle coordinate secondo una generatrice del cono e con $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ gli angoli di questa generatrice cogli assi, si ha

$$\cos \epsilon_1 = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \quad \cos \epsilon_2 = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \quad \cos \epsilon_3 = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}.$$

Ma essendo

$$\cos(90^\circ - v) = \cos \alpha_1 \cos \epsilon_1 + \cos \alpha_2 \cos \epsilon_2 + \cos \alpha_3 \cos \epsilon_3$$

si ha

$$\frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \frac{\frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial y} dy + \frac{\partial L}{\partial z} dz}{\sqrt{\left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z} \right)^2 \right\} \left\{ dx^2 + dy^2 + dz^2 \right\}}},$$

e questa è l'equazione che deve prendere il posto della (2) quando lungo la linea L abbia luogo attrito. È d'uopo notare che siccome il punto non vien fatto muovere sulla linea data, bisogna prescindere da questa supposizione anche nel differenziare le equazioni di condizione, allo scopo di esprimere le dipendenze fra le variazioni delle coordinate dei diversi punti. Per es. se un punto è obbligato a restare sull'asse delle x , bisogna ciò non ostante rappresentarlo con (x, y) e fare $y=0$ soltanto nelle eliminazioni finali.

Esempio 1.º

Una retta di lunghezza l e di peso V si appoggia colle sue estremità contro gli assi coordinati; si deve determinare la posizione d'equilibrio, nella supposizione che i coefficienti d'attrito alle due estremità siano μ_1 e μ_2 .

Sia (x, y) il centro di gravità, (x_1, y_1) l'estremità inferiore col coefficiente d'attrito μ_1 , (x_2, y_2) l'estremità superiore col coefficiente d'attrito μ_2 . Si ha

$$\begin{aligned} y_1 = 0 & \quad \text{dove} & \quad \mu_1 dx_1 + dy_1 = 0, \\ x_2 = 0 & \quad \text{»} & \quad dx_2 - \mu_2 dy_2 = 0, \\ V dy = 0 & \quad \text{ossia} & \quad dy_1 + dy_2 = 0. \end{aligned}$$

Dalla

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l^2$$

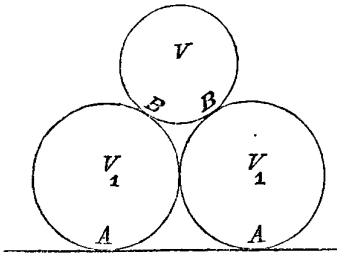
si deduce

$$(x_1 - x_2)(dx_1 - dx_2) + (y_1 - y_2)(dy_1 - dy_2) = 0,$$

epperò

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = - \frac{dx_1 - dx_2}{dy_1 - dy_2} = \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{2 \mu_1},$$

dove ϕ è l'inclinazione della retta l nella cercata posizione d'equilibrio.

Esempio 2.^o

Abbiansi tre cilindri disposti nel modo indicato dalla figura; trovare la condizione perchè essi incomincino simultaneamente a strisciare in tutti i punti di contatto. Due abbiano il peso V_1 , il terzo V ; il coefficiente d'attrito sia μ_1 in A e μ in B .

Se si fa girare un poco uno dei cilindri intorno ad A , si scorge che la pressione totale in B dev'essere diretta verso A , poichè in questo solo caso il suo momento virtuale può essere eliso; la linea d'attrito è quindi perpendicolare a BA epperò divide per metà l'angolo della tangente in B con un'orizzontale. Indicando con y_1 ed y le altezze dei centri si ha

$$2V_1 dy_1 + V dy = 0.$$

ossia

$$\begin{aligned} & \frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial y} dy + \frac{\partial L}{\partial z} dz = \\ & = \mu \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial y} dz - \frac{\partial L}{\partial z} dy\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z} dx - \frac{\partial L}{\partial x} dz\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial x} dy - \frac{\partial L}{\partial y} dx\right)^2}, \end{aligned}$$

epperò questa è l'equazione cercata, da adoperarsi per le superficie nel caso dell'attrito. Per $\mu=0$ essa si riduce all'ordinaria condizione

$$\frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial y} dy + \frac{\partial L}{\partial z} dz = 0;$$

per una linea esistente nel piano xy si ha $z=0$, $dz=0$, $\frac{\partial L}{\partial z}=0$, e si ritrova la formola già precedentemente stabilita per questo caso particolare.

Analoghe considerazioni si possono spesso applicare vantaggiosamente anche in dinamica. Per conseguire la relativa formola cercheremo un'espressione della forza acceleratrice secondo la linea d'attrito, limitandoci, per evitare una soverchia complicazione, a considerare il caso in cui tanto la traiettoria, quanto le direzioni delle forze attive, esistano nel piano xy .

Le forze acceleratrici sono $\frac{dv}{dt}$ nel senso della tangente, $\frac{v^2}{\rho}$ nel senso della normale, oltre la pressione della linea e la resistenza dovuta all'attrito. Le due ultime danno una componente nulla nel senso della linea d'attrito, mentre

le prime due danno, nello stesso senso, la componente

$$\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \left(\frac{dv}{dt} + \mu \frac{v^2}{\rho} \right),$$

dove il radicale deve prendersi positivamente se s'intende scelta la direzione positiva della linea d'attrito in modo da formare un angolo acuto colla direzione del moto.

a) Quando non agiscono forze esterne si ha

$$\frac{dv}{dt} + \mu \frac{v^2}{\rho} = 0,$$

ovvero, sostituendo il valore $\rho = \frac{ds}{d\theta} = v \frac{dt}{d\theta}$,

$$\frac{dv}{v} + \mu d\theta = 0$$

donde

$$v = v_0 e^{-\mu\theta},$$

dove θ è l'angolo della tangente coll'asse delle x , e v_0 la velocità corrispondente al valore $\theta=0$. Supponendo ρ e quindi $d\theta$ positivo, l'angolo θ è crescente, epperò la formola sussiste finchè non si giunga ad un punto di flesso; quando il punto passa sulla parte convessa della linea, la pressione diventa negativa, e il problema perde il suo significato.

b) Quando la forza esterna è la gravità, la sua componente secondo la linea d'attrito è

$$-\frac{g}{\sqrt{1+\mu^2}} \frac{dy + \mu dx}{ds},$$

epperò l'equazione del moto diventa

$$\frac{dv}{dt} + \mu v \frac{d\theta}{dt} = -g \frac{dy + \mu dx}{ds}$$

ossia

$$d \cdot v^2 + 2\mu v^2 d\theta = -2g (\sin\theta + \mu \cos\theta) ds,$$

donde

$$v^2 = -2g e^{-2\mu\theta} \left[\int e^{2\mu\theta} (\sin\theta + \mu \cos\theta) ds + C \right].$$

Il problema è così ridotto ad una quadratura, qualora si esprima $\frac{ds}{d\theta}$ ossia ρ in funzione di θ .

c) Quando le componenti delle forze secondo gli assi sono X ed Y , si ha

$$d \cdot v^2 + 2\mu v^2 d\theta = \{2X(\cos\theta - \mu \operatorname{sen}\theta) + 2Y(\operatorname{sen}\theta + \mu \cos\theta)\} ds,$$

equazione che può essere integrata come la precedente, quando X ed Y dipendano soltanto da x ed y .

Copenhagen, novembre 1869.



Sur les fonctions abéliennes à quatre périodes.

(par M.^r MICHAEL ROBERTS, à Dublin.)

Nous adopterons la notation de mon Mémoire inséré dans ce Journal, t. III, page 70; et je poserai

$$L(x, x', x'', \theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{(1-x^2 \sin^2 \theta)(1-x'^2 \sin^2 \theta)(1-x''^2 \sin^2 \theta)}}$$

$$M(x, x', x'', \theta) = \int_0^\theta \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{(1-x^2 \sin^2 \theta)(1-x'^2 \sin^2 \theta)(1-x''^2 \sin^2 \theta)}}.$$

Nous supposerons aussi que $x' > x' > x$, de sorte qu'en mettant

$$k^2 = 1 - x^2, \quad k'^2 = 1 - x'^2, \quad k''^2 = 1 - x''^2$$

on a $k > k' > k''$. (Les quantités x, x', x'' sont plus grandes que zéro et inférieures à l'unité.)

Soient les angles θ, ϕ liés par la relation

$$k'' \tan \theta \tan \phi = 1,$$

alors on a

$$\frac{d\theta}{\sqrt{1-x''^2 \sin^2 \theta}} = - \frac{d\phi}{\sqrt{1-x''^2 \sin^2 \phi}}, \quad \sin^2 \theta = \frac{\cos^2 \phi}{1-x''^2 \sin^2 \phi},$$

en sorte que

$$L(x, x', x'', \theta) = \frac{1}{k k'} \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-x''^2) \sin^2 \phi d\phi}{\sqrt{\left(1 - \frac{x'^2 - x^2}{k^2} \sin^2 \phi\right) \left(1 - \frac{x''^2 - x^2}{k'^2} \sin^2 \phi\right) (1-x''^2 \sin^2 \phi)}} =$$

$$= \frac{1}{kk'} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-x''^2 \sin^2 \varphi) d\varphi}{\sqrt{\left(1 - \frac{x'^2 - x^2}{k^2} \sin^2 \varphi\right) \left(1 - \frac{x'^2 - x'^2}{k'^2} \sin^2 \varphi\right) (1 - x''^2 \sin^2 \varphi)}} \right. \\ \left. - \int_0^\varphi \frac{(1-x''^2 \sin^2 \varphi) d\varphi}{\sqrt{\left(1 - \frac{x'^2 - x^2}{k^2} \sin^2 \varphi\right) \left(1 - \frac{x'^2 - x'^2}{k'^2} \sin^2 \varphi\right) (1 - x''^2 \sin^2 \varphi)}} \right.$$

et, en considérant que θ devient $\frac{\pi}{2}$ quand $\phi = 0$, nous obtenons

$$kk'L(x, x', x'', \frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-x''^2 \sin^2 \varphi) d\varphi}{\sqrt{\left(1 - \frac{x'^2 - x^2}{k^2} \sin^2 \varphi\right) \left(1 - \frac{x'^2 - x'^2}{k'^2} \sin^2 \varphi\right) (1 - x''^2 \sin^2 \varphi)}}$$

en sorte qu'on a

$$kk'L(x, x', x'', \theta) = kk'L(x, x', x'', \frac{\pi}{2}) - \int_0^\varphi \frac{(1-x''^2 \sin^2 \varphi) d\varphi}{\sqrt{\left(1 - \frac{x'^2 - x^2}{k^2} \sin^2 \varphi\right) \left(1 - \frac{x'^2 - x'^2}{k'^2} \sin^2 \varphi\right) (1 - x''^2 \sin^2 \varphi)}}. \quad (1)$$

D'une manière semblable on déduit

$$kk'M(x, x', x'', \theta) = kk'M(x, x', x'', \frac{\pi}{2}) - \int_0^\varphi \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{\left(1 - \frac{x'^2 - x^2}{k^2} \sin^2 \varphi\right) \left(1 - \frac{x'^2 - x'^2}{k'^2} \sin^2 \varphi\right) (1 - x''^2 \sin^2 \varphi)}}. \quad (2)$$

Maintenant soit $\sin \phi = i \tan \omega$, $i = \sqrt{-1}$, et au moyen de cette substitution $kk'L(x, x', x'', \theta)$ se transforme en

$$kk'L(x, x', x'', \frac{\pi}{2}) - i \int_0^\omega \frac{(1-k''^2 \sin^2 \omega) d\omega}{\sqrt{\left(1 - \frac{k'^2}{k^2} \sin^2 \omega\right) \left(1 - \frac{k'^2}{k'^2} \sin^2 \omega\right) (1 - k''^2 \sin^2 \omega)}}$$

et $kk'M(x, x', x'', \theta)$ deviendra par la même transformation

$$kk'M(x, x', x'', \frac{\pi}{2}) - i \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{\left(1 - \frac{k'^2}{k^2} \sin^2 \omega\right) \left(1 - \frac{k'^2}{k'^2} \sin^2 \omega\right) (1 - k''^2 \sin^2 \omega)}}$$

Remarquons maintenant que les équations

$$k'' \tan \theta \tan \phi = 1, \quad \sin \phi = i \tan \omega, \quad \omega = \frac{\pi}{2}$$

conduisent à la suivante

$$\sin \theta = \frac{1}{x''},$$

en sorte que pour cette valeur de θ , $k k' L(x, x', x'', \theta)$ devient

$$k k' L\left(x, x', x'', \frac{\pi}{2}\right) = i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - k''^2 \sin^2 \omega) d\omega}{\sqrt{\left(1 - \frac{k'^2}{k^2} \sin^2 \omega\right) \left(1 - \frac{k''^2}{k^2} \sin^2 \omega\right) (1 - k''^2 \sin^2 \omega)}}$$

et $k k' M(x, x', x'', \theta)$ devient en même temps

$$k k' M\left(x, x', x'', \frac{\pi}{2}\right) = i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{\left(1 - \frac{k'^2}{k^2} \sin^2 \omega\right) \left(1 - \frac{k''^2}{k^2} \sin^2 \omega\right) (1 - k''^2 \sin^2 \omega)}}.$$

Posons maintenant $L\left(x, x', x'', \frac{\pi}{2}\right) = \Phi$, $M\left(x, x', x'', \frac{\pi}{2}\right) = \Phi'$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - k''^2 \sin^2 \omega) d\omega}{\sqrt{\left(1 - \frac{k'^2}{k^2} \sin^2 \omega\right) \left(1 - \frac{k''^2}{k^2} \sin^2 \omega\right) (1 - k''^2 \sin^2 \omega)}} = k k' \Omega,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{\left(1 - \frac{k'^2}{k^2} \sin^2 \omega\right) \left(1 - \frac{k''^2}{k^2} \sin^2 \omega\right) (1 - k''^2 \sin^2 \omega)}} = k k' \Omega',$$

et je vais chercher les formes algébriques du système transcendant

$$\left. \begin{aligned} L(x, x', x'', \phi) + L(x, x', x'', \psi) + \Phi - i\Omega - L(x, x', x'', \sigma) - L(x, x', x'', \tau) &= 0 \\ M(x, x', x'', \phi) + M(x, x', x'', \psi) + \Phi' - i\Omega' - M(x, x', x'', \sigma) - M(x, x', x'', \tau) &= 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

en m'appuyant sur les équations que j'ai données dans ce Journal.

Pour cela nous poserons, comme je l'ai fait déjà,

$$\Delta(\theta) = \sqrt{(1 - x^2 \sin^2 \theta)(1 - x'^2 \sin^2 \theta)(1 - x''^2 \sin^2 \theta)}$$

$$\nabla(\theta, \phi) = \frac{\sin \theta \cos \theta \Delta(\phi) - \sin \phi \cos \phi \Delta(\theta)}{\sin^2 \theta - \sin^2 \phi},$$

$$\nabla'(\theta, \phi) = \frac{\sin \theta \cos \phi \Delta(\phi) - \sin \phi \cos \theta \Delta(\theta)}{\sin^2 \theta - \sin^2 \phi},$$

et, en ayant égard aux équations qui se trouvent dans mon mémoire (voir ce Journal, t. III, pag. 74, 75, 76), on voit qu'on peut remplacer le système transcendant

$$\left. \begin{aligned} L(x, x', x'', \phi) + L(x, x', x'', \psi) + L(x, x', x'', \chi) - L(x, x', x'', \sigma) - \\ L(x, x', x'', \tau) = 0 \\ M(x, x', x'', \phi) + M(x, x', x'', \psi) + M(x, x', x'', \chi) - M(x, x', x'', \sigma) - \\ M(x, x', x'', \tau) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

par les équations algébriques

$$\begin{aligned} (1 - x''^2 \sin^2 \sigma)(1 - x''^2 \sin^2 \tau) + \\ x''^2 \sin \phi \sin \psi \sin \chi \{ k''^2 \nabla'(\sigma, \tau) + x''^2 \cos \sigma \cos \tau \nabla(\sigma, \tau) \} = \\ (1 - x''^2 \sin^2 \phi)(1 - x''^2 \sin^2 \psi) - \\ x''^2 \sin \sigma \sin \tau \sin \chi \{ k''^2 \nabla'(\phi, \psi) + x''^2 \cos \phi \cos \psi \nabla(\phi, \psi) \} = \\ \sqrt{(1 - x''^2 \sin^2 \phi)(1 - x''^2 \sin^2 \psi)(1 - x''^2 \sin^2 \chi)(1 - x''^2 \sin^2 \sigma)(1 - x''^2 \sin^2 \tau)} \end{aligned}$$

en sorte que le système (3) équivaut au système des équations algébriques

$$\left. \begin{aligned} (1 - x''^2 \sin^2 \sigma)(1 - x''^2 \sin^2 \tau) + \\ x''^2 \sin \phi \sin \psi \{ k''^2 \nabla'(\sigma, \tau) + x''^2 \cos \sigma \cos \tau \nabla(\sigma, \tau) \} = 0 \\ (1 - x''^2 \sin^2 \phi)(1 - x''^2 \sin^2 \psi) - \\ x''^2 \sin \sigma \sin \tau \{ k''^2 \nabla'(\phi, \psi) + x''^2 \cos \phi \cos \psi \nabla(\phi, \psi) \} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

On peut tirer du système (4) l'équation suivante (voir ce Journal, t. II, p. 19)

$$\begin{aligned} \frac{\cos \phi \sin \psi \sin \chi \sqrt{(1 - x''^2 \sin^2 \psi)(1 - x''^2 \sin^2 \chi)(1 - x^2 \sin^2 \phi)(1 - x'^2 \sin^2 \phi)}}{(\sin^2 \phi - \sin^2 \psi)(\sin^2 \phi - \sin^2 \chi)} + \\ \frac{\cos \psi \sin \phi \sin \chi \sqrt{(1 - x''^2 \sin^2 \phi)(1 - x''^2 \sin^2 \chi)(1 - x^2 \sin^2 \psi)(1 - x'^2 \sin^2 \psi)}}{(\sin^2 \psi - \sin^2 \phi)(\sin^2 \psi - \sin^2 \chi)} + \\ \frac{\cos \chi \sin \phi \sin \psi \sqrt{(1 - x''^2 \sin^2 \phi)(1 - x''^2 \sin^2 \psi)(1 - x^2 \sin^2 \chi)(1 - x'^2 \sin^2 \chi)}}{(\sin^2 \chi - \sin^2 \phi)(\sin^2 \chi - \sin^2 \psi)} = \\ \frac{\sqrt{(1 - x''^2 \sin^2 \sigma)(1 - x''^2 \sin^2 \tau)}}{\sin \sigma \sin \tau}, \end{aligned}$$

en sorte qu'il résulte du système (3) l'équation suivante

$$\frac{i x'' \sqrt{(x''^2 - x)(x''^2 - x^2)} \sin \phi \sin \psi \sin \sigma \sin \tau}{\sqrt{(1 - x''^2 \sin^2 \phi)(1 - x''^2 \sin^2 \psi)(1 - x''^2 \sin^2 \sigma)(1 - x''^2 \sin^2 \tau)}} = 1. \quad (6)$$

Maintenant en supposant que les angles σ' , τ' satisfont aux relations suivantes

$$L(x, x', x'', \sigma) + L(x, x', x'', \tau) + \Phi - i\Omega - L(x, x', x'', \sigma') - L(x, x', x'', \tau') = 0$$

$$M(x, x', x'', \sigma) + M(x, x', x'', \tau) + \Phi' - i\Omega' - M(x, x', x'', \sigma') - M(x, x', x'', \tau') = 0$$

nous obtenons en vertu des équations (5)

$$\frac{(1 - x''^2 \sin^2 \sigma')(1 - x''^2 \sin^2 \tau')}{k''^2 \sqrt{\sigma', \tau'} + x''^2 \cos \sigma' \cos \tau' \sqrt{\sigma', \tau'}} = -x'' \sin \sigma \sin \tau$$

$$\frac{(1 - x''^2 \sin^2 \sigma)(1 - x''^2 \sin^2 \tau)}{k''^2 \sqrt{\sigma, \tau} + x''^2 \cos \sigma \cos \tau \sqrt{\sigma, \tau}} = x'' \sin \sigma' \sin \tau'$$

en sorte qu'il résulte du système

$$L(x, x', x'', \phi) + L(x, x', x'', \psi) + 2\Phi - 2i\Omega - L(x, x', x'', \sigma') - L(x, x', x'', \tau) = 0$$

$$M(x, x', x'', \phi) + M(x, x', x'', \psi) + 2\Phi' - 2i\Omega' - M(x, x', x'', \sigma') - M(x, x', x'', \tau') = 0$$

l'équation suivante

$$\sin \phi \sin \psi = -\sin \sigma' \sin \tau'$$

et, en ayant égard à l'équation (6),

$$\sqrt{(1 - x''^2 \sin^2 \phi)(1 - x''^2 \sin^2 \psi)} = -\sqrt{(1 - x''^2 \sin^2 \sigma)(1 - x''^2 \sin^2 \tau)}$$

En posant $x \tan \omega \tan \omega' = 1$, nous obtenons des équations (1), (2)

$$x' x'' L(k, k', k'', \omega) = x' x'' L\left(k, k', k'', \frac{\pi}{2}\right) - \int_0^\omega \frac{(1 - k^2 \sin^2 \omega') d\omega'}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \omega') \left(1 - \frac{x'^2 - x^2}{x'^2} \sin^2 \omega'\right) \left(1 - \frac{x''^2 - x^2}{x'^2} \sin^2 \omega'\right)}}$$

$$x' x'' M(k, k', k'', \omega) = x' x'' M\left(k, k', k'', \frac{\pi}{2}\right) - \int_0^\omega \frac{\cos^2 \omega' d\omega'}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \omega') \left(1 - \frac{x'^2 - x^2}{x'^2} \sin^2 \omega'\right) \left(1 - \frac{x''^2 - x^2}{x'^2} \sin^2 \omega'\right)}}$$

qui donnent, en posant $\omega = 0$,

$$\left. \begin{aligned} \varkappa' \varkappa'' L\left(k, k', k'', \frac{\pi}{2}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - k' \sin^2 \omega') d\omega'}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \omega') \left(1 - \frac{\varkappa'^2 - \varkappa^2}{\varkappa'^2} \sin^2 \omega'\right) \left(1 - \frac{\varkappa''^2 - \varkappa^2}{\varkappa''^2} \sin^2 \omega'\right)}} \\ \varkappa' \varkappa'' M\left(k, k', k'', \frac{\pi}{2}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \omega' d\omega'}{\sqrt{(1 - k' \sin^2 \omega') \left(1 - \frac{\varkappa'^2 - \varkappa^2}{\varkappa'^2} \sin^2 \omega'\right) \left(1 - \frac{\varkappa''^2 - \varkappa^2}{\varkappa''^2} \sin^2 \omega'\right)}} \end{aligned} \right\} (7)$$

et, en mettant $\sin \omega' = i \tan \omega''$, nous aurons

$$\begin{aligned} \varkappa' \varkappa'' L(k, k', k'', \omega) &= \varkappa' \varkappa'' L\left(k, k', k'', \frac{\pi}{2}\right) - \\ &\quad i \int_0^{\omega''} \frac{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \omega'') d\omega''}{\sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \omega'') \left(1 - \frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2} \sin^2 \omega''\right) \left(1 - \frac{\varkappa^2}{\varkappa''^2} \sin^2 \omega''\right)}} \\ \varkappa' \varkappa'' M(k, k', k'', \omega) &= \varkappa' \varkappa'' M\left(k, k', k'', \frac{\pi}{2}\right) - \\ &\quad i \int_0^{\omega''} \frac{d\omega''}{\sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \omega'') \left(1 - \frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2} \sin^2 \omega''\right) \left(1 - \frac{\varkappa^2}{\varkappa''^2} \sin^2 \omega''\right)}}. \end{aligned}$$

Posons maintenant

$$\varkappa^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \omega'' d\omega''}{\sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \omega'') \left(1 - \frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2} \sin^2 \omega''\right) \left(1 - \frac{\varkappa^2}{\varkappa''^2} \sin^2 \omega''\right)}} = \varkappa' \varkappa'' \Sigma,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega''}{\sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \omega'') \left(1 - \frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2} \sin^2 \omega''\right) \left(1 - \frac{\varkappa^2}{\varkappa''^2} \sin^2 \omega''\right)}} = \varkappa' \varkappa'' \Sigma',$$

$$L\left(k, k', k'', \frac{\pi}{2}\right) - M\left(k, k', k'', \frac{\pi}{2}\right) = \Theta, \quad M\left(k, k', k'', \frac{\pi}{2}\right) = \Theta',$$

et observons qu'en mettant $\sin \theta = i \tan \omega$, $L(\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \theta)$ se transforme en $i \{L(k, k', k'', \omega) - M(k, k', k'', \omega)\}$ et que $M(\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \theta)$ devient par la même transformation $-iM(k, k', k'', \omega)$.

Remarquons maintenant que le système des équations

$$\sin \theta = i \tan \omega, \quad \kappa \tan \omega \tan \omega' = 1, \quad \sin \omega' = i \tan \omega', \quad \omega' = \frac{\pi}{2}$$

conduit à la suivante

$$\sin \theta = \frac{1}{k},$$

d'où nous trouvons que pour cette valeur de θ , $L(x, x', x'', \theta)$, $M(x, x', x'', \theta)$ deviennent respectivement $i\Theta - \Sigma$, $-i\Theta' - \Sigma'$. On passe donc aux formes algébriques des équations simultanées

$$L(x, x', x'', \phi) + L(x, x', x'', \psi) + i\Theta - \Sigma - L(x, x', x'', \sigma) - L(x, x', x'', \tau) = 0$$

$$M(x, x', x'', \phi) + M(x, x', x'', \psi) - i\Theta' - \Sigma' - M(x, x', x'', \sigma) - M(x, x', x'', \tau) = 0$$

en permutant x et x'' dans les équations (5), (6), en sorte que le système

$$L(x, x', x'', \phi) + L(x, x', x'', \psi) + 2i\Theta - 2\Sigma - L(x, x', x'', \sigma') - L(x, x', x'', \tau') = 0$$

$$M(x, x', x'', \phi) + M(x, x', x'', \psi) - 2i\Theta' - 2\Sigma' - M(x, x', x'', \sigma') - M(x, x', x'', \tau') = 0$$

conduit aux équations suivantes

$$\sin \phi \sin \psi = -\sin \sigma' \sin \tau', \quad \sqrt{(1-x^2 \sin^2 \phi)(1-x^2 \sin^2 \psi)} = -\sqrt{(1-x^2 \sin^2 \sigma')(1-x^2 \sin^2 \tau')}.$$

En posant

$$L(x, x', x'', \phi) + L(x, x', x'', \psi) = u,$$

$$M(x, x', x'', \phi) + M(x, x', x'', \psi) = v,$$

$$\sin \phi \sin \psi = f(u, v),$$

on a

$$f(u, v) = f \left\{ \begin{array}{l} u + 2mi\Theta + 4m'\Phi + 4m''(\Phi - i\Omega) + 4m'''(i\Theta - \Sigma), \\ v - 2mi\Theta' + 4m'\Phi' + 4m''(\Phi' - i\Omega') - 4m'''(i\Theta' + \Sigma') \end{array} \right\}$$

m, m', m'', m''' étant des nombres entiers.

Dans son grand Mémoire « *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis* » (Crelle, t. 13, pag. 55), JACOBI a remarqué qu'en posant

$$X = \sqrt{x(1-x)(1-x^2x)(1-x^2x)(1-x'^2x)}$$

l'intégrale $\int_0^x \frac{(x + \beta x) dx}{\sqrt{X}}$ a six périodes, savoir

$$\begin{aligned}
 iu_1 &= \int_{-\infty}^0 \frac{(\alpha + \beta x) dx}{\sqrt{X}}, & u_2 &= \int_0^1 \frac{(\alpha + \beta x) dx}{\sqrt{X}}, & iu_3 &= \int_{\frac{1}{x''^2}}^{\frac{1}{x'^2}} \frac{(\alpha + \beta x) dx}{\sqrt{X}}, \\
 u_4 &= \int_{\frac{1}{x''^2}}^{\frac{1}{x'^2}} \frac{(\alpha + \beta x) dx}{\sqrt{X}}, & iu_5 &= \int_{\frac{1}{x''^2}}^{\frac{1}{x'^2}} \frac{(\alpha + \beta x) dx}{\sqrt{X}}, & u_6 &= \int_{\frac{1}{x'^2}}^{\infty} \frac{(\alpha + \beta x) dx}{\sqrt{X}},
 \end{aligned}$$

(on passe de la notation de JACOBI à celle que j'emplois en écrivant x'' pour x , x' pour λ , x pour μ), et que ces quantités sont liées par les relations

$$u_1 + u_5 = u_3, \quad u_2 + u_4 = u_6.$$

Il trouve aussi, en désignant par p, q, p', q' etc. certaines quantités qui renferment $x, x', x'', \alpha, \beta$, les expressions suivantes

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(p + q \sin^2 \theta) d\theta}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \theta) \left(1 - \frac{x'^2 - x^2}{x'^2} \sin^2 \theta\right) \left(1 - \frac{x^2 - x^2}{x'^2} \sin^2 \theta\right)}}, \\
 u_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(p' + q' \sin^2 \theta) d\theta}{\sqrt{(1 - x^2 \sin^2 \theta) (1 - x'^2 \sin^2 \theta) (1 - x''^2 \sin^2 \theta)}}, \\
 u_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(p'' + q'' \sin^2 \theta) d\theta}{\sqrt{(1 - k''^2 \sin^2 \theta) \left(1 - \frac{k'^2}{k^2} \sin^2 \theta\right) \left(1 - \frac{k''^2}{k^2} \sin^2 \theta\right)}}, \\
 u_6 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(p''' + q''' \sin^2 \theta) d\theta}{\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{x'^2} \sin^2 \theta\right) \left(1 - \frac{x^2 k^2}{x'^2 k^2} \sin^2 \theta\right) \left(1 - \frac{x^2 (x'^2 - x^2)}{x'^2 (x'^2 - x^2)} \sin^2 \theta\right)}}
 \end{aligned}$$

En ayant égard aux équations (7), on voit que u_1 s'exprime par Θ, Θ' et se présente ainsi comme une fonction symétrique des quantités x, x', x'' ; u_2 peut s'exprimer par Φ, Φ' ; u_3 dépend des quantités Ω, Ω' ; u_6 s'exprime par Σ, Σ' ; ce qu'on peut démontrer de la manière suivante:

Poisons

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{x'^2}} \tan \theta \tan \theta' = 1,$$

ce qui donne

$$\sin^2 \theta = \frac{\cos^2 \theta'}{1 - \frac{x^2}{x'^2} \sin^2 \theta'}, \quad 1 - \frac{x^2 k'^2}{x'^2 k^2} \sin^2 \theta = \frac{(x'^2 - x^2)(1 - x^2 \sin^2 \theta')}{x'^2 k^2 \left(1 - \frac{x^2}{x'^2} \sin^2 \theta'\right)},$$

$$1 - \frac{x^2 (x''^2 - x'^2)}{x'^2 (x''^2 - x^2)} \sin^2 \theta = \frac{(x'^2 - x^2)(x''^2 - x^2 \sin^2 \theta')}{x'^2 (x''^2 - x^2) \left(1 - \frac{x^2}{x'^2} \sin^2 \theta'\right)},$$

$$\frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x'^2} \sin^2 \theta}} = - \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x'^2} \sin^2 \theta'}}$$

et on voit facilement que cette transformation fait dépendre u_6 des fonctions Σ, Σ' .

Collège de la Trinité à Dublin, le 25 mars 1870.

ERRATA-CORRIGE.

SERIE I^a.

Tomo I, pag. 168, lin. 24	leggi: ... <i>per sei punti dati contiene la cubica</i>
» » 169 » 12	» ... <i>sezione risulta composta della retta</i>
» » 173 » 6-7	» ... <i>inviluppa una superficie di 4^a classe inscritta nella sviluppabile di 4^o ordine determinata dai sei piani dati.</i>
» » 285 » 21	» <i>Siano x_0 ed x_1 i due valori...</i>
» » » » 26	» <i>$\alpha(x_0 + x_1) - \dots$</i>
» » 287 » 3	» <i>$a(b-a)(a-c)A = \dots$</i>
» » » » 4	» <i>$d(b-d)(d-c)D = \dots$</i>
» » 294 » 20-22	» <i>L'equazione (19) dimostra che: se il vertice del cono ed i punti $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ sono dati, i punti θ_5 e θ_6, variando insieme, generano una involuzione di punti sulla cubica gobba. Il piano...</i>

Tomo II, pag. 20, lin. 15 leggi: ... ordinarie coordinate rettilinee ortogonali...

» » 21 » 18-20 » ...= $\lambda(\mu + \nu)^2\alpha$
 ...= $\mu(\nu + \lambda)^2\beta$
 ...= $\nu(\lambda + \mu)^2\gamma$

» » 29 » 30 » ... di due triangoli congiunti (ossia...
 » » 65 » 28 » ... del tetraedro polare (supposto tutto reale)
 come...

» » 79 » 31 » ... in modo che si alternano le superficie...

Tomo III, » 169 » 7-8 » ... B fuori della medesima, trovare una curva
 (nel piano OAB) tale...

» » 171 » 25 » ... e dell'ordine $n(n-1)^2$
 » » 260 (si tralascino le ultime due linee)
 » » 261 » 6-7 leggi: *gli angoli mOn , $m'On'$ siano retti, le rette mn , $m'n'$...*

Tomo IV, » 25 » 20 » ...; 2° les $2m(m-1)$ points...

» » 82 » 21-2 » ... doppia R ed una conica doppia passante
 per α' . Se...

» » 88 » ultima » ... dell'unita negativa.
 » » 92 » 24 » dalla generatrice medesima e in esso la curva
 sarà osculata dal piano P .
 » » » » 26 » D in due punti situati nella generatrice...
 » » » » 28 » oscula la curva doppia in h , la tocca sempli-
 cemente in g e...
 » » » » 33-4 » ... della curva K sono tangenti alla curva D .

SERIE II^a, - TOMO III^o.

pag. 334, l. 3^a sal., leg. $\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\cos m k \pi - \cos \frac{m k \pi}{n}}{\sin \frac{m k \pi}{n}} \cotg \frac{k \pi}{n} = \dots$

» » 3^a dis., » $m, 2m, 3m, \dots, \frac{n-1}{2}m$

335 » 1^a » » $\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\cos m k \pi - \cos \frac{m k \pi}{n}}{\sin \frac{m k \pi}{n}} \cotg \frac{k \pi}{n} = \sum_{q=1}^{q=\frac{1}{2}(n-1)} \tg \frac{q m \pi}{n} \cotg \frac{2 q \pi}{n} \dots$

» » 4^a sal., » ...= $\frac{n^2-1}{8} \frac{m}{n} - \frac{n-1}{4} - \frac{1}{2n} \sum \dots$

338 » 3^a dis., » $-2mn \left\{ \sum \dots \right.$

Les séries Heinéennes supérieures, ou les séries de la forme

$$1 + \sum_{1}^{\infty} x^n \frac{1-q^a}{1-q} \cdot \frac{1-q^{a+1}}{1-q^2} \cdots \frac{1-q^{a+n-1}}{1-q^n} \cdot \frac{1-q^{a'}}{1-q^{b'}} \cdot \frac{1-q^{a'+1}}{1-q^{b'+1}} \cdots \frac{1-q^{a'+n-1}}{1-q^{b'+n-1}} \cdots$$

$$\cdots \frac{1-q^{a^{(h)}}}{1-q^{b^{(h)}}} \cdot \frac{1-q^{a^{(h)}+1}}{1-q^{b^{(h)}+1}} \cdots \frac{1-q^{a^{(h)}+n-1}}{1-q^{b^{(h)}+n-1}},$$

(par Mr. J. THOMAE, à Halle.)

Mr. E. HEINE a traité dans un mémoire publié dans le Journal des mathématiques pures et appliquées de Crelle (*), tom. 34, pag. 285, la série

$$1 + \sum_{1}^{\infty} x^n \frac{1-q^a}{1-q} \cdot \frac{1-q^{a+1}}{1-q^2} \cdots \frac{1-q^{a+n-1}}{1-q^n} \cdot \frac{1-q^b}{1-q^c} \cdot \frac{1-q^{b+1}}{1-q^{c+1}} \cdots \frac{1-q^{b+n-1}}{1-q^{c+n-1}}$$

et a discuté amplement ses propriétés. Plus tard, j'ai examiné cette série d'un autre point de vue, dans le tom. 70 du même journal, et j'y ai ajouté quelques propriétés nouvelles. Grand nombre de ces propriétés peuvent être énoncées plus généralement, de façon qu'elles deviennent celles de toute une classe plus étendue de fonctions, que nous allons dénommer « séries Heinéennes supérieures ». Le mémoire actuel est destiné à cette généralisation, et il est indispensable d'y reproduire les séries du premier et du deuxième ordre, quoiqu'elles aient été déjà illustrées suffisamment dans les mémoires cités et dans un écrit de JACOBI (tom. 32 du Journal de Crelle). Les articles 3 et 4 du mémoire actuel, qui traitent ces séries spéciales,

(*) Continué par Mr. BORCHARDT. Berlin, chez Mr. Reimer libraire.

contiendront donc des résultats déjà connus. Quant aux principes dont on fera usage, je renvoie à mon mémoire cité ci-dessus.

Désormais, nous désignerons par $\Delta\phi(x)$ la différence $\phi(qx) - \phi(x)$, par $\Delta^2\phi(x)$ la différence $\Delta\phi(qx) - \Delta\phi(x)$, etc., et nous nommerons « k -fonctions » les solutions de l'équation aux différences

$$\Delta\phi(x) = 0, \text{ ou } \phi(qx) = \phi(x),$$

et les désignerons par k , $k(x)$, $k_a(x)$, etc. Ces quantités jouent, dans la théorie des fonctions que nous allons considérer, le même rôle qu'ont ailleurs les constantes, comme par ex. dans le théorème: « Il existe toujours une relation homogène et linéaire entre $n+1$ intégrales d'une équation aux différences homogène et linéaire de l'ordre n . »; Théorème qui subsiste encore si l'on introduit des différentielles au lieu des différences, des constantes au lieu des k -fonctions. Des exemples de ces

fonctions sont $x^{\frac{2\pi i}{\lg q}}$, et les puissances entières positives ou négatives de cette fonction, $\sin\left(\frac{2\pi i \lg x}{\lg q}\right)$, etc., mais les plus importantes sont les k -fonctions qui se forment par des quotients de Θ -fonctions, dont la variable est $\frac{1}{2}\lg x$ et dont le module a est la quantité $+$ ou $-\frac{1}{2}\log q$, selon que norme (q) (*) est $<$ ou $>$ 1; c'est pourquoi nous adoptons pour elles une notation spéciale. Soit

$$\Theta_{11}(v) = e^{v + \frac{a}{4}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \binom{n}{n} e^{an^2 + 2n\left(v + \frac{a+i\pi}{2}\right)},$$

et

$$\sigma(\alpha, x) = \frac{\Theta_{11}\left[\frac{1}{2}\lg(xq^\alpha)\right]}{\Theta_{11}\left(\frac{1}{2}\lg x\right)} e^{\alpha \lg(xq) - \alpha i\pi},$$

alors $\sigma(\alpha, x)$ est la k -fonction qu'on emploiera assez souvent.

La fonction $\Theta_{11}(v)$ peut se développer en produits d'un nombre infini de facteurs; en effet on a, comme on sait d'après la théorie des fonctions elliptiques,

$$\Theta_{11}(v) = -i\Theta'_{11}(0) \sin(vi) \prod_{1}^{\infty} \binom{n}{n} \left(1 - \frac{\sin^2(vi)}{\sin^2(nai)}\right),$$

(*) La notation « norme $(a+bi)$ » veut signifier la valeur positive de $\sqrt{a^2+b^2}$.

ou bien, en faisant $v = \alpha a$, $a = \frac{1}{2} \lg q$, (où norme (q) est < 1),

$$\frac{-2\Theta_{11}\left(\frac{\alpha}{2} \lg q\right)}{\Theta'_{11}(0)} q^{\frac{\alpha}{2}} = (1 - q^\alpha) \prod_{1}^{\infty} \left(\frac{1 + q^{2n} - q^{-\alpha+n} - q^{\alpha+n}}{(1 - q^n)^2} \right) =$$

$$\prod_{1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{\alpha-1+n}}{1 - q^n} \right) \cdot \prod_{1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{-\alpha+n}}{1 - q^n} \right).$$

Ces deux produits d'un nombre infini de facteurs, dont la Θ -fonction se compose, forment la même fonction. Donc, si l'on pose

$$\frac{1}{(1 - q)^\alpha} \cdot \prod_{1}^{\infty} \frac{1 - q^m}{1 - q^{m+\alpha}} = \Pi(\alpha, q),$$

l'équation trouvée s'écrira

$$\frac{-2\Theta_{11}\left(\frac{\alpha \log q}{2}\right)}{\Theta'_{11}(0)} q^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - q}{\Pi(\alpha - 1, q) \cdot \Pi(-\alpha, q)}$$

et la fonction $\Pi(\alpha, q)$ a la propriété importante

$$\Pi(\alpha, q) = \frac{1 - q^\alpha}{1 - q} \cdot \Pi(\alpha - 1, q).$$

Par la notation

$$\int_x^{xq^n} f(x) \Delta \frac{\lg(x)}{\lg q} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{q-1} \int_x^{xq^n} f(x) \frac{\Delta(x)}{x},$$

n étant un nombre entier, nous entendons la somme

$$\sum_{0}^{n-1} f(xq^m)$$

et nous nommons ces formules « sommes définies ». Elles deviennent des intégrales définies, en posant $q = 1 - \epsilon$ et en faisant tendre ϵ vers zéro.

Pour éviter des erreurs, nous fixons encore quelques notions relatives aux fonctions polydromes x^α , $(1 - x)^\alpha$, $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^\alpha$. Nous imaginons, dans ce but, les valeurs de la variable complexe x représentées par les points d'un plan d'après GAUSS, et nous concevons ce plan coupé par une ligne, qui partant du point zéro suit la partie positive de l'axe réel jusqu'à l'infini. Sur la

rive positive (gauche) de cette ligne (c'est pour des valeurs positives réelles de x), nous définissons les fonctions nommées, en posant

$$x^\alpha = e^{\alpha \lg x}$$

pour tous les x réels et positifs,

$$(1-x)^\alpha = e^{\alpha \lg(1-x)}$$

pour tous les x réels < 1 , et

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^\alpha = e^{\alpha \lg\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

pour tous les x réels > 1 , le logarithme étant pris réel. On obtient les valeurs de ces fonctions pour tous les autres points du plan en faisant parcourir à x tout le plan sans jamais franchir la ligne susdite et en prenant pour les fonctions les valeurs qui suivent avec continuité les valeurs déjà choisies. Alors $(1-x)^\alpha$ a la valeur $e^{-\alpha i\pi} \cdot e^{\alpha \lg(x-1)}$ pour les x réels > 1 ; et pour les x réels < 1 , $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^\alpha$ a la valeur $e^{\alpha i\pi} \cdot e^{\alpha \left(\lg \frac{1}{x} - 1\right)}$, le logarithme étant pris réel.

Art. 1.

Les séries Heinéennes de l'ordre $h + 1^{\text{ième}}$ ont la propriété d'intégrer complètement une équation aux différences de l'ordre $h + 1^{\text{ième}}$, dont les coefficients sont linéaires et entiers, et vice-versa, l'intégration d'une telle équation conduit aux séries Heinéennes. Ce mémoire peut être considéré comme une discussion de l'équation aux différences linéaires

$$(1-xB)\Delta^{h+1}\phi(x) - (A_1 - xB_1)\Delta^h\phi(x) + \dots - (-1)^{h+1}(A_{h+1} - xB_{h+1})\phi(x) = 0 \quad (1)$$

dans laquelle $A_1, A_2, \dots, A_{h+1}, B_1, B_2, \dots, B_{h+1}$ sont des constantes indépendantes de x . Nous donnons à cette équation aux différences la forme d'une équation entre $\phi(x), \phi(xq), \dots, \phi(xq^{h+1})$, en observant qu'on a

$$\Delta \phi(x) = \phi(xq) - \phi(x), \quad \Delta^2 \phi(x) = \phi(xq^2) - 2\phi(xq) + \phi(x),$$

$$\Delta^3 \phi(x) = \phi(xq^3) - 3\phi(xq^2) + 3\phi(xq) - \phi(x), \dots$$

$$\Delta^m \phi(x) = \phi(xq^m) - \frac{m}{1}\phi(xq^{m-1}) + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2}\phi(xq^{m-2}) - \dots + (-1)^m \phi(x).$$

les intégrales particulières qui correspondent à ces exposants sont

$$x^{\alpha^{(r)}}, x^{\alpha^{(r)}} \lg x, x^{\alpha^{(r)}} (\lg x)^2, x^{\alpha^{(r)}} (\lg x)^3, \dots x^{\alpha^{(r)}} (\lg x)^r.$$

Mais si B est différent de zéro, on peut lui supposer une valeur quelconque sans restreindre la généralité. Par la substitution

$$x = c \cdot x', \quad \phi(c x') = \psi(x'),$$

dans laquelle doit être $c \geq 0$, l'équation (1) se change en une autre qui n'en diffère qu'en ce que B est remplacé par cB , B_1 par cB_1, \dots, B_{h+1} par cB_{h+1} , et ϕ par ψ . En conséquence, B ayant une valeur déterminée, on peut toujours choisir c tel que cB acquière une valeur quelconque. Il nous convient de poser

$$B = q^{\alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots + \alpha^{(h)} + \beta + \beta' + \dots + \beta^{(h)}} = q^{h - \gamma^{(h)}}, \tag{7}$$

alors il est

$$\begin{aligned} \gamma &= -\alpha - \beta, \quad \gamma' = 1 - \alpha - \alpha' - \beta - \beta', \quad \gamma'' = 2 - \alpha - \alpha' - \alpha'' - \beta - \beta' - \beta'', \\ \gamma^{(h)} &= h - \alpha - \alpha' - \dots - \alpha^{(h)} - \beta - \beta' - \dots - \beta^{(h)}. \end{aligned}$$

Si désormais on aura besoin de citer les équations (1) et (2), on mettra B sous la forme qu'il a dans (7), $B_1, B_2, \dots B'_1, B'_2, \dots A_1, A_2, \dots A'_1, A'_2, \dots$ sous les formes qu'ils ont dans (4^a), (4), (3^a), (3).

De même, ce n'est pas une restriction de la généralité, si nous supposons dans la suite, que norme (q) est < 1 . Car si l'on fait

$$q = \frac{1}{q'}, \quad x = \frac{1}{x'}, \quad \phi\left(\frac{1}{x'}\right) = \phi'(x'),$$

l'équation (2) devient une autre de la même forme. D'autre côté on déduit cette dernière de (2), en remplaçant $\alpha, \alpha', \dots \alpha^{(h)}$ respectivement par $\beta, \beta', \dots \beta^{(h)}$, q par q' , ϕ par ϕ' , x par x' . Soit donc

$$\Phi\left(\begin{matrix} \alpha, \alpha', \dots \alpha^{(h)} \\ \beta, \beta', \dots \beta^{(h)}, q, x \end{matrix}\right)$$

une intégrale des équations (1) et (2);

$$\Phi\left(\begin{matrix} \beta, \beta', \dots \beta^{(h)} \\ \alpha, \alpha', \dots \alpha^{(h)}, q', x' \end{matrix}\right) = \Phi\left(\begin{matrix} \beta, \beta', \dots \beta^{(h)}, \frac{1}{q}, \frac{1}{x} \\ \alpha, \alpha', \dots \alpha^{(h)} \end{matrix}\right)$$

est une intégrale de l'équation transformée, et par suite chaque intégrale de

l'une fournit une intégrale de l'autre, et il suffit d'examiner le cas norme $(q) < 1$. Le cas norme $(q) = 1$ exigeant des considérations plus amples, nous l'excluons, et remarquons seulement que pour $q = 1$ l'équation aux différences (1) devient l'équation différentielle linéaire

$$(1-x) \frac{d^{h+1} \phi(x)}{d(\lg x)^{h+1}} - [\alpha + \alpha' \dots + \alpha^{(h)} + x(\beta + \beta' \dots + \beta^{(h)})] \frac{d^h \phi(x)}{d(\lg x)^h} \\ + \dots + (-1)^{h+1} (\alpha \cdot \alpha' \cdot \alpha^{(h)} + (-1)^h x \beta \beta' \dots \beta^{(h)}) \phi(x) = 0. \quad (8)$$

Pour abrégier, nous assujettirons les différences

$$\alpha - \alpha', \quad \alpha - \alpha'', \dots, \quad \alpha^{(h-1)} - \alpha^{(h)}, \quad \beta - \beta', \quad \beta - \beta'', \dots, \quad \beta^{(h-1)} - \beta^{(h)}$$

à la restriction de ne pas être de la forme $m + n \frac{2\pi i}{\lg q}$, où m et n représentent des nombres entiers quelconques positifs ou négatifs.

Nous nommons les quantités $\alpha, \alpha', \dots, \beta, \beta', \dots, \beta^{(h)}$ les exposants des intégrales.

Art. 2.

En substituant donc la série

$$\sum a_n x^n$$

dans l'équation (1) ou mieux dans (2), nous aurons pour les coefficients la formule récurrente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{B q^{n(h+1)} - B'_1 q^{nh} + B'_2 q^{n(h-1)} - \dots + (-1)^{h+1} B'_{h+1}}{q^{(h+1)(n+1)} - A'_1 q^{h(n+1)} + A_2 q^{(h-1)(n+1)} - \dots + (-1)^{h+1} A'_{h+1}} \quad (9) \\ = B \frac{q^n - q^{-\beta}}{q^{n+1} - q^\alpha} \cdot \frac{q^n - q^{-\beta'}}{q^{n+1} - q^{\alpha'}} \dots \frac{q^n - q^{-\beta^{(h)}}}{q^{n+1} - q^{\alpha^{(h)}}} = \frac{1 - q^{n+\beta}}{1 - q^{n-\alpha+1}} \cdot \frac{1 - q^{n+\beta'}}{1 - q^{n-\alpha'+1}} \dots \frac{1 - q^{n+\beta^{(h)}}}{1 - q^{n-\alpha^{(h)}+1}}$$

qui est satisfaite par

$$a_n = \frac{\Pi(n + \beta - 1, q)}{\Pi(n - \alpha, q)} \cdot \frac{\Pi(n + \beta' - 1, q)}{\Pi(n - \alpha', q)} \dots \frac{\Pi(n + \beta^{(h)} - 1, q)}{\Pi(n - \alpha^{(h)}, q)}, \quad (10)$$

ou

$$a_n = q^{-n(1+\gamma)} \cdot \frac{\Pi(-n + \alpha - 1, q)}{\Pi(-n - \beta, q)} \cdot \frac{\Pi(-n + \alpha' - 1, q)}{\Pi(-n - \beta', q)} \dots \frac{\Pi(-n + \alpha^{(h)} - 1, q)}{\Pi(-n - \beta^{(h)}, q)} \quad (*). \quad (11)$$

(*) Dans les formules pour a_n et P de mon mémoire dans le journal de M. BORCHARDT, t. 70, p. 268, art. 2, il faut ajouter au second membre le facteur $q^{(n+\beta) \frac{n+\beta-1}{2} + (n+\beta') \frac{n+\beta'-1}{2}}$.

Pour les séries ascendantes nous prenons les coefficients de (10), pour les descendantes ceux de (11), et nous introduisons la notation

$$F_\varepsilon \left(\begin{matrix} \alpha, \alpha', \alpha'', \dots \alpha^{(h)} \\ \beta, \beta', \beta'', \dots \beta^{(h)} \end{matrix} q, x \right) = \tag{12}$$

$$\begin{aligned} & x^\varepsilon \sum_0^{\infty} \frac{\Pi(\varepsilon + n + \beta - 1)}{\Pi(\varepsilon + \beta - 1)} \cdot \frac{\Pi(\varepsilon + n + \beta' - 1)}{\Pi(\varepsilon + \beta' - 1)} \dots \frac{\Pi(\varepsilon + n + \beta^{(h)} - 1)}{\Pi(\varepsilon + \beta^{(h)} - 1)} \times \\ & \quad \times \frac{\Pi(\varepsilon - \alpha)}{\Pi(\varepsilon + n - \alpha)} \cdot \frac{\Pi(\varepsilon - \alpha')}{\Pi(\varepsilon + n - \alpha')} \dots \frac{\Pi(\varepsilon - \alpha^{(h)})}{\Pi(\varepsilon + n - \alpha^{(h)})} \cdot x^n \\ & = x^\varepsilon \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} x^n \frac{1 - q^{\beta + \varepsilon}}{1 - q^{\varepsilon - \alpha + 1}} \cdot \frac{1 - q^{\beta' + \varepsilon + 1}}{1 - q^{\varepsilon - \alpha' + 2}} \dots \frac{1 - q^{\beta^{(h)} + \varepsilon + n - 1}}{1 - q^{\varepsilon - \alpha^{(h)} + n}} \cdot \frac{1 - q^{\beta' + \varepsilon}}{1 - q^{\varepsilon - \alpha' + 1}} \dots \frac{1 - q^{\beta^{(h)} + \varepsilon + n - 1}}{1 - q^{\varepsilon - \alpha^{(h)} + n}} \right\} \end{aligned}$$

et

$$f_\varepsilon \left(\begin{matrix} \alpha, \alpha', \alpha'', \dots \alpha^{(h)} \\ \beta, \beta', \beta'', \dots \beta^{(h)} \end{matrix} q, x \right) = \tag{13}$$

$$\begin{aligned} & \frac{q^{\frac{\alpha - 1}{2} + \alpha' \frac{\alpha' - 1}{2} + \dots + \alpha^{(h)} \frac{\alpha^{(h)} - 1}{2}}}{e^{(\alpha + \alpha' + \dots + \alpha^{(h)}) \pi i}} \cdot \frac{\Pi(\varepsilon + \beta - 1)}{\Pi(\varepsilon - \alpha)} \cdot \frac{\Pi(\varepsilon + \beta' - 1)}{\Pi(\varepsilon - \alpha')} \dots \frac{\Pi(\varepsilon + \beta^{(h)} - 1)}{\Pi(\varepsilon - \alpha^{(h)})} \times \\ & \quad \times F_\varepsilon \left(\begin{matrix} \alpha, \alpha', \dots \alpha^{(h)} \\ \beta, \beta', \dots \beta^{(h)} \end{matrix} q, x \right) \\ & = \frac{q^{\sum_0^h \alpha^{(\mu)} \frac{\alpha^{(\mu)} - 1}{2}}}{e^{\sum_0^h \alpha^{(\mu)} \pi i}} x^\varepsilon \cdot \sum_0^{\infty} \frac{\Pi(\varepsilon + n + \beta - 1)}{\Pi(\varepsilon - \alpha)} \cdot \frac{\Pi(\varepsilon + n + \beta' - 1)}{\Pi(\varepsilon - \alpha')} \dots \frac{\Pi(\varepsilon + n + \beta^{(h)} - 1)}{\Pi(\varepsilon - \alpha^{(h)})} x^n \end{aligned}$$

(N'ayant pas écrit dans les formules (12 et 13), dans les II-fonctions le second élément q , nous prions de ne pas les confondre avec les II-fonctions de GAUSS.) Cela posé, les formules (1) et (2) sont intégrées par les deux systèmes de $h + 1$ solutions particulières:

$$f_\alpha \left(\begin{matrix} \alpha, \alpha', \dots \alpha^{(h)} \\ \beta, \beta', \dots \beta^{(h)} \end{matrix} q, x \right), f_{\alpha'} \left(\begin{matrix} \alpha, \alpha', \dots \alpha^{(h)} \\ \beta, \beta', \dots \beta^{(h)} \end{matrix} q, x \right), \dots f_{\alpha^{(h)}} \left(\begin{matrix} \alpha, \alpha', \dots \alpha^{(h)} \\ \beta, \beta', \dots \beta^{(h)} \end{matrix} q, x \right), \tag{14}$$

$$\left. \begin{aligned} & f_\beta \left(\begin{matrix} \beta, \beta', \dots \beta^{(h)} \\ \alpha, \alpha', \dots \alpha^{(h)} \end{matrix} q, \frac{q^{1+\gamma^{(h)}}}{x} \right), f_{\beta'} \left(\begin{matrix} \beta, \beta', \dots \beta^{(h)} \\ \alpha, \alpha', \dots \alpha^{(h)} \end{matrix} q, \frac{q^{1+\gamma^{(h)}}}{x} \right), \dots \\ & f_{\beta^{(h)}} \left(\begin{matrix} \beta, \beta', \dots \beta^{(h)} \\ \alpha, \alpha', \dots \alpha^{(h)} \end{matrix} q, \frac{q^{1+\gamma^{(h)}}}{x} \right), \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

où l'on peut aussi poser F au lieu de f . Pour abrégier nous les désignerons souvent par

$$f_{\alpha}^{(h)}(x), f_{\alpha'}^{(h)}(x), \dots, f_{\alpha^{(h)}}^{(h)}(x), f_{\beta}^{(h)}\left(\frac{q^{1+\gamma^{(h)}}}{x}\right), \dots, f_{\beta^{(h)}}^{(h)}\left(\frac{q^{1+\gamma^{(h)}}}{x}\right).$$

Les séries ascendantes, savoir $f_{\alpha}^{(h)}(x), f_{\alpha'}^{(h)}(x)$ etc. convergent tant que norme (x) est < 1 et les descendantes tant que norme $\left(\frac{q^{1+\gamma^{(h)}}}{x}\right)$ est < 1 . De ces intégrales on peut maintenant en déduire une nouvelle qui s'évanouit pour $x = q\gamma^{(h)}, q\gamma^{(h)-1}, q\gamma^{(h)-2}, \dots$ et que l'on indiquera par $f_{\gamma}^{(h)}(x)$; et de même on peut former encore h autres intégrales qui sont indépendantes aussi bien de celle-ci que l'une de l'autre, et qui sont finies pour tous les x finis et différents de zéro. Car posons

$$f_{\gamma}^{(h)}(x) = c \cdot f_{\alpha}^{(h)}(x) + c' \cdot f_{\alpha'}^{(h)}(x) + \dots + c^{(h)} \cdot f_{\alpha^{(h)}}^{(h)}(x)$$

et arrangeons les rapports des $h+1$ constantes $c, c', c'', \dots, c^{(h)}$ d'une telle manière, que $f_{\gamma}^{(h)}(x)$ s'évanouisse dans les h points $x = q\gamma^{(h)}, q\gamma^{(h)-1}, \dots, q\gamma^{(h)-h+1}$; substituons $f_{\gamma}^{(h)}(x)$ dans (2) et posons q^2 pour x , le coefficient de $f_{\gamma}^{(h)}(q^{1+\gamma^{(h)}})$ s'annule et l'équation (2) se ramène à

$$q^{\alpha+\alpha'+\dots+\alpha^{(h)}} \cdot (1 - q\gamma^{(h)-h}) \cdot f_{\gamma}^{(h)}(q\gamma^{(h)-h}) = 0,$$

de sorte que $f_{\gamma}^{(h)}(x)$ devient nulle aussi pour $x = q\gamma^{(h)-h}$. En substituant ensuite pour x , tour à tour

$$q\gamma^{(h)-h-1}, \quad q\gamma^{(h)-h-2}, \quad q\gamma^{(h)-h-3}, \dots,$$

il suit de la même équation successivement que $f_{\gamma}^{(h)}(x)$ s'évanouit pour toutes ces valeurs.

D'autre côté, on peut dans les h formules

$$a' f_{\alpha'}^{(h)}(x) + f_{\alpha}^{(h)}(x), \quad a'' f_{\alpha''}^{(h)}(x) + f_{\alpha}^{(h)}(x), \dots, \quad a^{(h)} f_{\alpha^{(h)}}^{(h)}(x) + f_{\alpha}^{(h)}(x)$$

prendre les constantes $a', a'', \dots, a^{(h)}$ de manière qu'elles restent finies pour

$x=1$, d'où il résulte qu'elles sont finies généralement pour des x finis. Car si $\phi(x)$ est une solution de la formule récurrente, que nous mettons sous la forme

$$\phi(x) = \frac{\phi(xq)(A'_n - xB'_n) - \phi(xq^2)(A'_{n-1} - xB'_{n-1}) + \dots + (-1)^h \phi(xq^{h+1})(1-xB)}{(1-x)q^{\alpha+\alpha'+\dots+\alpha^{(h)}}}, \quad (4)$$

cette solution restant finie tant que norme (x) est < 1 , il suit de (14), en posant pour x une valeur dont la norme est > 1 , que $\phi(x)$ reste aussi fini tant que norme (x) est $<$ norme $\left(\frac{1}{q}\right)$, excepté pour $x=1$. De plus, il suit, si l'on pose dans (14) pour x une valeur dont la norme est $>$ que norme $\left(\frac{1}{q}\right)$, que $\phi(x)$ reste fini tant que norme (x) est $<$ norme $\left(\frac{1}{q^2}\right)$, excepté pour $x=1, x=\frac{1}{q}$; et ainsi continuant, il suit que $\phi(x)$ reste fini généralement, excepté pour $x=1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q^3}, \dots$; mais il suit encore de l'équation (14) que, $(1-x)\phi(x)$ étant fini pour $x=1$, $(1-xq)\phi(x)$ est aussi fini pour $x=\frac{1}{q}$ etc., ou que

$$\phi(x) \cdot \prod_0^{\infty} (1-xq^n)$$

reste fini pour toutes les valeurs finies de x . Mais si l'on exécute la multiplication dans

$$(1-x) f_{\alpha^{(r)}}^{(h)}(x),$$

on obtient une nouvelle série qui converge encore pour $x=1$, et par conséquent le produit

$$x^{-\alpha^{(r)}} \cdot f_{\alpha^{(r)}}^{(r)} \left(\alpha, \alpha', \dots, \alpha^{(h)}, \beta, \beta', \dots, \beta^{(h)}, q, x \right) \cdot \prod_0^{\infty} (1-xq^n)$$

est une fonction finie et monodrome pour tous les x finis, laquelle, comme on sait d'après CAUCHY, sera développable en série convergente pour tous les x finis. Nous obtenons ce développement en série, à l'aide de l'équation

$$\prod_0^{\infty} (1-xq^n) = \sum_0^{\infty} \frac{(-x)^n q^{\frac{n-1}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} \quad (15)$$

(que nous allons démontrer dans l'article suivant) par la multiplication de séries, et nous trouverons l'équation

$$\frac{-x^{\alpha^{(r)}} \cdot e^{\sum_0^h \alpha^{(\mu)} \pi i}}{q^{\sum_0^h \alpha^{(\mu)} \frac{\alpha^{(\mu)} - 1}{2}}} \cdot \prod_0^{\infty} (1 - xq^n) \cdot f_{\alpha^{(r)}}^{(h)} \left(\alpha, \alpha', \dots \alpha^{(h)}, \beta, \beta', \dots \beta^{(h)}, q, x \right) = \quad (16)$$

$$\sum_0^{(n)} x^n \cdot \left\{ \sum_0^n \frac{\Pi(\alpha^{(r)} + \beta + \nu - 1)}{\Pi(\alpha^{(r)} - \alpha + \nu)} \cdot \frac{\Pi(\alpha^{(r)} + \beta' + \nu - 1)}{\Pi(\alpha^{(r)} - \alpha' + \nu)} \dots \times \dots \times \frac{\Pi(\alpha^{(r)} + \beta^{(h)} + \nu - 1)}{\Pi(\alpha^{(r)} - \alpha^{(h)} + \nu)} \cdot \frac{q^{(n-\nu) \frac{n-\nu-1}{2}}}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)} \right\}$$

où pour abrégé on a supprimé dans les Π -fonctions le second élément q . On peut exprimer par cette équation les intégrales $f_{\alpha}^{(h)}(x)$, $f_{\alpha}^{\prime(h)}(x)$, etc., ou $F_{\alpha}^{(h)}(x)$, etc. sans aucune restriction de la variabilité de x , c'est à dire aussi en dehors du cercle de convergence des développements faits précédemment. Il est sous entendu que l'on trouve des expressions pareilles pour les intégrales $f_{\beta}^{(h)}\left(\frac{q^{1+\gamma^{(h)}}}{x}\right)$, qui sont employables pour tous les x différents de zéro.

Art. 3.

Etant d'abord $h=0$, d'où $\gamma = -\alpha - \beta$, nous allons étudier l'équation aux différences

$$(1 - xq^{-\gamma}) \Delta \phi(x) - [q^{\alpha} - 1 - xq^{-\gamma}(q^{-\beta} - 1)] \phi(x) = 0 \quad (17)$$

ou

$$(1 - xq^{-\gamma}) \phi(xq) - q^{\alpha}(1 - x) \phi(x) = 0. \quad (18)$$

Ces équations sont intégrées par ces formules

$$f_{\alpha} \left(\alpha, \beta, q, x \right) = \frac{q^{\alpha \frac{\alpha-1}{2}} \cdot x^{\alpha}}{e^{\alpha i \pi}} \cdot \sum_0^{\infty} x^n \frac{\Pi(\alpha + \beta + n - 1, q)}{\Pi(n, q)}, \quad (19)$$

$$F_{\alpha} \left(\alpha, \beta, q, x \right) = x^{\alpha} \sum_0^{\infty} \frac{1 - q^{\alpha+\beta}}{1 - q} \cdot \frac{1 - q^{\alpha+\beta+1}}{1 - q^2} \dots \frac{1 - q^{\alpha+\beta+n-1}}{1 - q^n} \cdot x^n \quad (19a)$$

(où, de même que dans la suite, l'expression $(1 - q^\lambda)(1 - q^{\lambda+1}) \dots (1 - q^{\lambda+n-1})$ pour $n=0$, doit être remplacée par l'unité) et par la formule

$$f_\beta \left(\alpha, q, \frac{q^{1+\gamma}}{x} \right) = \frac{q^{\beta \frac{\beta-1}{2}} (xq^{-\gamma-1})^{-\beta}}{e^{\beta i \pi}} \cdot \sum_0^{\infty} \frac{1 - q^{\alpha+\beta}}{1 - q} \cdot \frac{1 - q^{\alpha+\beta+1}}{1 - q^2} \dots \times \\ \dots \times \frac{1 - q^{\alpha+\beta+n-1}}{1 - q^n} \cdot \frac{q^{n(1+\gamma)}}{x^n} \quad (20)$$

On représente aisément les fonctions $f_\alpha(x)$, $f_\beta \left(\frac{q^{1+\gamma}}{x} \right)$ par des produits d'un nombre infini de facteurs en déduisant de (18) les équations

$$f_\alpha(x) = \frac{1 - xq^{\alpha+\beta}}{q^\alpha(1-x)} \cdot f_\alpha(xq) \\ = \frac{1}{q^{\alpha n}} \cdot \frac{1 - xq^{\alpha+\beta}}{1-x} \cdot \frac{1 - xq^{\alpha+\beta+1}}{1-xq} \dots \times \frac{1 - xq^{\alpha+\beta+n-1}}{1-xq^{n-1}} \cdot f_\alpha(xq^n),$$

et comme d'après (19)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_\alpha(xq^n) \cdot q^{-\alpha n}) = e^{-\alpha i \pi} \cdot x^\alpha \cdot q^{\alpha \frac{\alpha-1}{2}} \cdot \Pi(\alpha + \beta - 1, q),$$

il suit

$$f_\alpha \left(\alpha, q, x \right) = \frac{x^\alpha \cdot \Pi(\alpha + \beta - 1, q) q^{\alpha \frac{\alpha-1}{2}}}{e^{\alpha i \pi}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - xq^{\alpha+\beta}}{1-x} \cdot \frac{1 - xq^{\alpha+\beta+1}}{1-xq} \dots \times \right. \\ \left. \dots \times \frac{1 - xq^{\alpha+\beta+n-1}}{1-xq^{n-1}} \right) \quad (21) \\ = \frac{e^{-\alpha i \pi} \cdot x^\alpha \cdot q^{\alpha \frac{\alpha-1}{2}} \Pi(\alpha + \beta - 1, q) \cdot \Pi \left(\frac{\lg x}{\lg q} - 1, q \right)}{\Pi \left(\frac{\lg x}{\lg q} + \alpha + \beta - 1, q \right) (1 - q)^{\alpha+\beta}},$$

et pareillement

$$f_\beta \left(\alpha, q, \frac{q^{1-\alpha-\beta}}{x} \right) = \frac{q^{\beta \frac{\beta-1}{2}} \cdot \Pi(\alpha + \beta - 1, q)}{e^{\beta i \pi} (xq^{\alpha+\beta-1})^\beta} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{q}{x}}{1 - \frac{q^{1-\alpha-\beta}}{x}} \cdot \times \\ \times \frac{1 - \frac{q^2}{x}}{1 - \frac{q^{2-\alpha-\beta}}{x}} \dots \frac{1 - \frac{q^n}{x}}{1 - \frac{q^{n-\alpha-\beta}}{x}} \quad (22)$$

$$= \frac{q^{\beta \frac{\beta-1}{2} + (1+\gamma)\beta} \cdot \Pi(\alpha + \beta - 1, q) \Pi\left(-\frac{\lg x}{\lg q} - \alpha - \beta, q\right)}{e^{\beta\pi i} \cdot x^{\beta} \cdot (1-q)^{\alpha+\beta} \cdot \Pi\left(-\frac{\lg x}{\lg q}, q\right)}.$$

Or $f_{\alpha}(x)$ et $f_{\beta}\left(\frac{q^{1+\gamma}}{x}\right)$ satisfont à une même équation aux différences du premier ordre; ainsi elles ne peuvent différer que d'un facteur qui est une k -fonction. Mais en effet il est

$$\begin{aligned} \frac{f_{\alpha}(x)}{f_{\beta}\left(\frac{q^{1+\gamma}}{x}\right)} &= \frac{e^{(2\beta-\alpha-\beta)\pi i} \cdot x^{\alpha+\beta} \cdot q^{\alpha \frac{\alpha-1}{2}} \cdot \Pi\left(\frac{\lg x}{\lg q} - 1, q\right) \Pi\left(-\frac{\lg x}{\lg q}, q\right)}{q^{\beta \frac{\beta-1}{2} + (1+\gamma)\beta} \cdot \Pi\left(\frac{\lg x}{\lg q} + \alpha + \beta - 1, q\right) \Pi\left(\frac{\lg x}{\lg q} - \alpha - \beta, q\right)} \quad (23) \\ &= \frac{e^{2\beta\pi i + (\alpha+\beta)\lg x} \cdot q^{\alpha \frac{\alpha-1}{2}} \cdot \Theta_{11}\left(\frac{\lg(xq^{\alpha+\beta})}{2}\right)}{q^{\beta \frac{\beta-1}{2} + \beta(1+\gamma)} \cdot \Theta_{11}\left(\frac{\lg x}{2}\right)} \cdot \frac{q^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{e^{(\alpha+\beta)\pi i}} = e^{2\beta\pi i} \cdot q^{(\alpha+\beta)\frac{\alpha+\beta-1}{2}} \cdot \sigma(\alpha + \beta, x). \end{aligned}$$

Cette fonction ne change pas si l'on fait varier α et β de nombres entiers quelconques. Supposons que dans l'équation

$$F_0\left(0, q, xq^{-\beta}\right) = \prod_0^{\infty} \frac{1-xq^n}{1-xq^{-\beta+n}} = \sum_0^{\infty} \frac{1-q^{\beta}}{1-q} \cdot \frac{1-q^{\beta+1}}{1-q^2} \cdots \frac{1-q^{n+\beta-1}}{1-q^n} \cdot (xq^{-\beta})^n, \quad (24)$$

$q^{-\beta}$ soit infiniment grand, il suit

$$\prod_0^{\infty} (1-xq^n) = \sum_0^{\infty} \frac{(-x)^n q^{n \frac{n-1}{2}}}{(1-q) \cdot (1-q^2) \cdots (1-q^n)}. \quad (25)$$

De plus si α et β ne diffèrent respectivement de α_1 et β_1 que de nombres entiers, que l'on prenne $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha + \beta + m$, $\alpha_1 - \alpha = n$, il suit de (21)

$$f_{\alpha_1}\left(\beta_1, q, x\right) = \text{const.} f_{\alpha}\left(\beta, q, x\right) x^n \cdot (1-xq^{\alpha+\beta})(1-xq^{\alpha+\beta+1}) \cdots (1-xq^{\alpha+\beta+m-1})$$

et de là le théorème:

(25). Entre deux séries Heinéennes du premier ordre, dont les exposants correspondants ne diffèrent que de nombres entiers, il existe toujours une relation linéaire homogène dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x .

De (19) on déduit immédiatement l'équation

$$x^\delta \cdot F_\alpha \left(\begin{matrix} \alpha, \\ \beta, \end{matrix} q, x \right) = F_{\alpha+\delta} \left(\begin{matrix} \alpha+\delta, \\ \beta-\delta, \end{matrix} q, x \right), \quad (26)$$

donc aussi

$$F_\alpha \left(\begin{matrix} \alpha, \\ \beta, \end{matrix} q, x \right) = x^\alpha \cdot F_0 \left(\begin{matrix} 0, \\ \alpha+\beta, \end{matrix} q, x \right). \quad (26^a)$$

Dans mon mémoire sur la série Heinéenne, t. 70 du journal de Mr. BORCHARDT, j'ai employé la notation:

$$p(\alpha, x) = F_0 \left(\begin{matrix} 0, \\ -\alpha, \end{matrix} q, xq^\alpha \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - xq^n)^\alpha \cdot \prod_0^{n-1} (\mu) \left(\frac{1 - xq^\mu}{1 - xq^{\alpha+\mu}} \right), \quad (27)$$

donc

$$F_\alpha \left(\begin{matrix} \alpha, \\ \beta, \end{matrix} q, x \right) = x^\alpha \cdot p(-\alpha - \beta, xq^{\alpha+\beta}). \quad (27^a)$$

(Le facteur $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - xq^n)^\alpha$ est superflu tant que norme (q) est < 1 ; mais il acquiert de l'influence dès que l'on a $q=1$ ou norme (q) > 1). De plus

$$\begin{aligned} F_\beta \left(\begin{matrix} \beta, \\ \alpha, \end{matrix} q, \frac{q^{1-\alpha-\beta}}{x} \right) &= \left(\frac{q^{1+\gamma-\alpha}}{x} \right) \cdot F_{\alpha+\beta} \left(\begin{matrix} \alpha+\beta, \\ 0, \end{matrix} q, \frac{q^{1+\gamma}}{x} \right) = \\ &= \left(\frac{q^{1+\gamma-\alpha}}{x} \right) \cdot \frac{q^{\alpha+\beta}}{e^{(\alpha+\beta)\pi i}} \pi(-\alpha - \beta, xq^{\alpha+\beta}). \end{aligned} \quad (28)$$

Or il est

$$\frac{\pi(\alpha, x)}{p(\alpha, x)} = \sigma(\alpha, x); \quad (29)$$

en conséquence $\sigma(\alpha, x)$ acquiert, pour $q=1$, la valeur 1. On a encore dans cette signification les équations

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, xq^{-\alpha}) &= e^{-\alpha\pi i} \cdot (xq^\alpha)^\alpha \cdot p \left(\alpha, \frac{q}{x} \right) = \sigma(-\alpha, xq^\alpha) = \frac{q^{-\alpha^2}}{\sigma(\alpha, x)} \quad (30) \\ p(\beta, q^\alpha) &= \frac{\Pi(\alpha + \beta - 1, q)}{\Pi(\alpha - 1, q)} (1 - q)^\beta. \end{aligned}$$

Nous conservons la notation que nous venons de citer, au lieu des séries Heinéennes du premier ordre, parce qu'elle est plus concise.

Dans ce mémoire nous emploierons souvent une somme définie semblable à l'intégrale Eulérienne, savoir la quantité $\int_1^{q^\infty} s s^\lambda \cdot p(\mu, sq) \cdot \frac{\Delta s}{q-1}$, dans laquelle norme $(q^{\lambda+1})$ doit être < 1 .

On la peut écrire selon sa définition

$$\begin{aligned} \sum_0^\infty q^{n(\lambda+1)} \cdot p(\mu, q^{n+1}) &= (1-q)^\mu \cdot \Pi(\mu, q) \sum_0^\infty q^{n(\lambda+1)} \cdot \frac{1-q^{\mu+1}}{1-q} \cdot \frac{1-q^{\mu+2}}{1-q^2} \cdots \frac{1-q^{\mu+n}}{1-q^n} \\ &= (1-q)^\mu \cdot \Pi(\mu, q) \cdot p(-\mu-1, q^{\mu+\lambda+2}) = \frac{\Pi(\mu, q) \Pi(\lambda, q)}{(1-q) \Pi(\mu+\lambda+1, q)}, \end{aligned}$$

d'où l'on a

$$\int_1^{q^\infty} s s^\lambda \cdot p(\mu, sq) \Delta s = - \frac{\Pi(\mu, q) \Pi(\lambda, q)}{\Pi(\lambda + \mu + 1, q)}. \quad (31)$$

Art. 4.

Dans le cas où $h=1$ et par suite $\gamma' = 1 - \alpha - \alpha' - \beta - \beta'$, il s'agit des équations

$$\begin{aligned} (1 - x q^{1-\gamma'}) \cdot \Delta^2 \phi(x) - [q^\alpha + q^{\alpha'} - 2 - x q^{1-\gamma'} (q^{-\beta} + q^{-\beta'} - 2)] \Delta \phi(x) + \\ [(q^\alpha - 1)(q^{\alpha'} - 1) - x q^{1-\gamma'} (q^{-\beta} - 1)(q^{-\beta'} - 1)] \phi(x) = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

ou

$$(1 - x q^{1-\gamma'}) \phi(x q^2) + [q^\alpha + q^{\alpha'} - x q^{1-\gamma'} (q^{-\beta} + q^{-\beta'})] \phi(x q) + q^{\alpha+\alpha'} (1-x) \phi(x) = 0, \quad (33)$$

lesquelles sont intégrées par les équations

$$\phi(x) = k_\alpha f_\alpha \left(\begin{matrix} \alpha, \alpha', \\ \beta, \beta', \end{matrix} q, x \right) + k_{\alpha'} f_{\alpha'} \left(\begin{matrix} \alpha, \alpha', \\ \beta, \beta', \end{matrix} q, x \right), \quad (34)$$

$$\phi(x) = k_\beta f_\beta \left(\begin{matrix} \beta, \beta', \\ \alpha, \alpha', \end{matrix} q, \frac{q^{1+\gamma'}}{x} \right) + k_{\beta'} f_{\beta'} \left(\begin{matrix} \beta, \beta', \\ \alpha, \alpha', \end{matrix} q, \frac{q^{1+\gamma'}}{x} \right). \quad (35)$$

En posant dans (33) $\phi(x) = \psi(x) \cdot p(\gamma', x q^{1-\gamma'})$, on aura

$$\begin{aligned} (1 - x q) \psi(x q^2) - [q^\alpha + q^{\alpha'} - x q (q^{\alpha+\alpha'+\beta-1} + q^{\alpha+\alpha'+\beta'-1})] \psi(x q) + \\ q^{\alpha+\alpha'} (1 - x q^{-\gamma'}) \psi(x) = 0; \end{aligned} \quad (36)$$

c'est une équation, que l'on peut déduire de (33), en posant $xq^{-\gamma'}$ pour x , et $\psi(x)$ pour $\psi(xq^{-\gamma'})$, $1-\alpha-\alpha'-\beta'$ pour β , $1-\alpha-\alpha'-\beta$ pour β' . En conséquence on a pour l'équation (36) les intégrales particulières

$$f_\alpha \left(\begin{matrix} \alpha, & \alpha', \\ 1-\alpha-\alpha'-\beta', & 1-\alpha-\alpha'-\beta, \end{matrix} q, xq^{-\gamma'} \right), f_{\alpha'} \left(\begin{matrix} \alpha, & \alpha', \\ 1-\alpha-\alpha'-\beta', & 1-\alpha-\alpha'-\beta, \end{matrix} q, xq^{-\gamma'} \right),$$

d'où suivent pour (32) et (33) celles-ci

$$p(\gamma', xq^{-\gamma'}) \cdot f_\alpha \left(\begin{matrix} \alpha & \alpha' \\ \gamma'+\beta, & \gamma'+\beta' \end{matrix} q, xq^{-\gamma'} \right), p(\gamma', xq^{-\gamma'}) \cdot f_{\alpha'} \left(\begin{matrix} \alpha & \alpha' \\ \gamma'+\beta, & \gamma'+\beta' \end{matrix} q, xq^{-\gamma'} \right),$$

$$p\left(\gamma', \frac{q}{x}\right) \cdot f_\beta \left(\begin{matrix} \beta, & \beta', \\ \gamma'+\alpha, & \gamma'+\alpha', \end{matrix} q, \frac{q}{x} \right), p\left(\gamma', \frac{q}{x}\right) \cdot f_{\beta'} \left(\begin{matrix} \beta, & \beta', \\ \gamma'+\alpha, & \gamma'+\alpha', \end{matrix} q, \frac{q}{x} \right).$$

Il y a une autre forme des intégrales particulières des équations (32) et (33) que nous obtenons en sommes définies. En effet il est

$$f_\varepsilon \left(\begin{matrix} \alpha, & \alpha', \\ \beta, & \beta', \end{matrix} q, x \right) = \frac{q^{\alpha \frac{\alpha-1}{2} + \alpha' \frac{\alpha'-1}{2}} \cdot x^\varepsilon}{e^{(\alpha+\alpha')\pi i}} \cdot \sum_0^{\infty} \frac{\Pi(\varepsilon+n+\beta-1, q) \Pi(\varepsilon+n+\beta'-1, q)}{\Pi(\varepsilon+n-\alpha, q) \Pi(\varepsilon+n-\alpha', q)} x^n$$

$$= \frac{-x^\varepsilon \cdot q^{\alpha \frac{\alpha-1}{2} + \alpha' \frac{\alpha'-1}{2}}}{e^{(\alpha+\alpha')\pi i} \Pi(-\alpha'-\beta', q)} \cdot \sum_0^{\infty} \frac{\Pi(\varepsilon+n+\beta-1, q)}{\Pi(\varepsilon+n-\alpha, q)} x^n \mathcal{S}_1^{q^\infty} s^{\varepsilon+n+\beta'-1} \cdot p(-\alpha'-\beta', sq) \Delta s,$$

et de là

$$f'_\alpha(x) = f_\alpha \left(\begin{matrix} \alpha, & \alpha', \\ \beta, & \beta', \end{matrix} q, x \right) =$$

$$\frac{-x^\alpha \cdot \Pi(\alpha+\beta-1, q) q^{\alpha \frac{\alpha-1}{2} + \alpha' \frac{\alpha'-1}{2}}}{\Pi(-\alpha'-\beta', q) e^{(\alpha+\alpha')\pi i}} \cdot \mathcal{S}_1^{q^\infty} s^{\alpha+\beta'-1} \times p(-\alpha'-\beta', qs) \cdot p(-\alpha-\beta, xsq^{\alpha+\beta}) \Delta s$$

$$f'_{\alpha'}(x) = f_{\alpha'} \left(\begin{matrix} \alpha, & \alpha', \\ \beta, & \beta', \end{matrix} q, x \right) =$$

$$\frac{-x^{\alpha'} \cdot \Pi(\alpha'+\beta-1, q) q^{\alpha \frac{\alpha-1}{2} + \alpha' \frac{\alpha'-1}{2}}}{\Pi(-\alpha-\beta', q) e^{(\alpha+\alpha')\pi i}} \cdot \mathcal{S}_1^{q^\infty} s^{\alpha'+\beta'-1} \times p(-\alpha-\beta', sq) \cdot p(-\alpha'-\beta, xsq^{\alpha'+\beta}) \Delta s$$

(38)

où doit être respectivement norme $(q^{\alpha+\beta'})$, norme $(q^{\alpha'+\beta}) < 1$. De même

$$\begin{aligned}
 f'_{\beta} \left(\frac{q^{1+\gamma'}}{x} \right) &= f_{\beta} \left(\frac{\beta, \beta', q, \frac{q^{1+\gamma'}}{x}}{\alpha, \alpha', q, \frac{q^{1+\gamma'}}{x}} \right) = \\
 &= \frac{q^{\beta \frac{\beta-1}{2} + \beta' \frac{\beta'-1}{2} + \beta(1+\gamma')}. \Pi(\alpha + \beta - 1, q)}{e^{(\beta+\beta')n_i}. \Pi(-\alpha' - \beta', q). x^{\beta}} \cdot \underset{1}{S} s^{\alpha+\beta'-1} \cdot \times \\
 &\quad \times p(-\alpha' - \beta', qs) p(-\alpha - \beta, sq^{\alpha+\beta'+\gamma'+1}) \Delta s \\
 f'_{\beta'} \left(\frac{q^{1+\gamma'}}{x} \right) &= f_{\beta'} \left(\frac{\beta, \beta', q, \frac{q^{1+\gamma'}}{x}}{\alpha, \alpha', q, \frac{q^{1+\gamma'}}{x}} \right) = \\
 &= \frac{q^{\beta \frac{\beta-1}{2} + \beta' \frac{\beta'-1}{2} + \beta'(1+\gamma')}. \Pi(\alpha + \beta' - 1, q)}{e^{(\beta+\beta')n_i}. \Pi(-\alpha' - \beta, q). x^{\beta'}} \cdot \underset{1}{S} s^{\alpha'+\beta-1} \cdot \times \\
 &\quad \times p(-\alpha' - \beta, qs) p(-\alpha - \beta', sq^{\alpha'+\beta+\gamma'+1}) \Delta s
 \end{aligned} \tag{39}$$

où doit être respectivement norme $(q^{\alpha'+\beta})$, norme $(q^{\alpha+\beta'}) < 1$. Dans les équations (38) on peut permuter β et β' , dans (39) α et α' , d'où proviennent des représentations nouvelles. De même les équations (37) peuvent encore être employées à trouver des expressions par d'autres sommes définies. Posons dans (38) $x = q^{\gamma}$ et employons l'équation

$$p(-\alpha' - \beta', qs) \cdot p(-\alpha - \beta, sq^{1-\alpha'-\beta'}) = p(-\alpha - \beta - \alpha' - \beta', qs) \tag{40}$$

qui sorte immédiatement de la forme en produits; il suit

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha} \left(\frac{\alpha, \alpha'}{\beta, \beta', q, q^{\gamma}} \right) &= \frac{-q^{\alpha\gamma + \alpha \frac{\alpha-1}{2} + \alpha' \frac{\alpha'-1}{2}} \Pi(\alpha + \beta - 1, q)}{e^{(\alpha+\alpha')n_i}. \Pi(-\alpha' - \beta', q)} \cdot \underset{1}{S} s^{\alpha+\beta'-1} p(\gamma'-1, sq) \Delta s \\
 &= \frac{-q^{\alpha\gamma + \alpha \frac{\alpha-1}{2} + \alpha' \frac{\alpha'-1}{2}} \Pi(\alpha + \beta - 1, q) \cdot \Pi(\alpha' + \beta' - 1, q) \cdot \Pi(\gamma' - 1, q)}{e^{(\alpha+\alpha')n_i}. \Pi(-\alpha' - \beta', q) \cdot \Pi(-\alpha' - \beta, q)} \tag{41a}
 \end{aligned}$$

et de là

$$F_{\alpha} \left(\frac{\alpha, \alpha'}{\beta, \beta', q, q^{\gamma}} \right) = -q^{\alpha\gamma} \cdot \frac{\Pi(\alpha - \alpha', q) \cdot \Pi(\gamma' - 1, q)}{\Pi(-\alpha' - \beta', q) \cdot \Pi(-\alpha' - \beta, q)}. \tag{41}$$

En dissolvant la somme définie du second membre dans (38), selon sa notion, après avoir établi $\alpha = 0$, $x = q^r$, $\alpha' = 1 - c$, $\beta = a - r$, $\beta' = r'$, nous obtenons

$$q^{\frac{1-c}{2}} \cdot f_0 \left(\frac{0, 1-c, q, q^r}{a-r, r', q, q^r} \right) =$$

$$\frac{(1-q)^{c-a+r-r'} \cdot \Pi(a-r-1, q)}{e^{(1-c)\pi i} \cdot \Pi(c-r'-1, q)} \cdot \sum_0^{\infty} q^{r'n} \cdot \frac{\Pi(c-r'+n-1, q) \cdot \Pi(r+n-1, q)}{\Pi(n) \cdot \Pi(a+n-1, q)}$$

$$= \frac{q^{a \frac{1-a}{2}} \cdot (1-q)^{c-a+r-r'} \cdot \Pi(a-r-1, q)}{e^{(a-c)\pi i} \cdot \Pi(c-r'-1, q)} \cdot f_0 \left(\begin{matrix} 0, & 1-a, \\ c-r', & r, \end{matrix} \begin{matrix} q, \\ q^{r'} \end{matrix} \right),$$

ou

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Pi(c-r'-1, q)}{q^{\frac{c-1}{2}} \cdot e^{c\pi i}} \cdot f_0 \left(\begin{matrix} 0, & 1-c \\ a-r, & r' \end{matrix} \begin{matrix} q, \\ q^r \end{matrix} \right) &= \frac{\Pi(a-r-1, q')}{q^{a \frac{a-1}{2}} \cdot e^{a\pi i}} \times \\ &\times f_0 \left(\begin{matrix} 0, & 1-a \\ c-r', & r \end{matrix} \begin{matrix} q, \\ q^{r'} \end{matrix} \right) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Nous profitons des représentations des intégrales par des sommes définies pour trouver les relations entre les fonctions

$$f'_\alpha(x), f'_\beta \left(\frac{q^{1+\gamma'}}{x} \right), f'_{\beta'} \left(\frac{q^{1+\gamma'}}{x} \right) \text{ et entre } f'_\alpha(x), f'_{\beta'} \left(\frac{q^{1+\gamma'}}{x} \right), f'_{\beta'} \left(\frac{q^{1+\gamma'}}{x} \right).$$

En effet, elles satisfont à une même équation aux différences du second ordre, et par conséquent entre trois quelconques d'entre elles il existe toujours une relation linéaire et homogène, avec des *k*-fonctions comme coefficients. Voilà pourquoi nous pouvons établir

$$\left. \begin{aligned} f'_\alpha(x) &= k'_{\alpha\beta} \cdot f'_\beta \left(\frac{q^{1+\gamma'}}{x} \right) + k'_{\alpha\beta'} \cdot f'_{\beta'} \left(\frac{q^{1+\gamma'}}{x} \right), \\ f'_{\alpha'}(x) &= k'_{\alpha'\beta} \cdot f'_\beta \left(\frac{q^{1+\gamma'}}{x} \right) + k'_{\alpha'\beta'} \cdot f'_{\beta'} \left(\frac{q^{1+\gamma'}}{x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

En remplaçant les *f*-fonctions des premiers membres par les sommes définies, et les seconds membres par la série, il vient

$$\frac{-x^\alpha q^{\alpha \frac{\alpha-1}{2} + \alpha' \frac{\alpha'-1}{2}} \cdot \Pi(\alpha+\beta-1, q)}{e^{(\alpha+\alpha')\pi i} \cdot \Pi(-\alpha'-\beta', q)} \cdot \sum_1^{\infty} s^{\alpha+\beta'-1} \cdot p(-\alpha'-\beta', sq) \times$$

$$\times p(-\alpha-\beta, xsq^{\alpha+\beta}) \Delta s =$$

$$\frac{-x^\alpha \cdot \Pi(\alpha+\beta-1, q) \cdot q^{\alpha \frac{\alpha-1}{2} + \alpha' \frac{\alpha'-1}{2}}}{e^{(\alpha+\alpha')\pi i} \cdot \Pi(-\alpha'-\beta', q) \beta(-\alpha-\beta, xsq^{\alpha+\beta})} \cdot \sum_1^{\infty} s^{\alpha+\beta'-1} \times$$

$$\times p(-\alpha'-\beta', sq) \cdot \pi(-\alpha-\beta, xsq^{\alpha+\beta}) \Delta s$$

$$= k'_{\alpha\beta} \cdot f'_\beta \left(\frac{q^{1+\gamma'}}{x} \right) + k'_{\alpha\beta'} \cdot f'_{\beta'} \left(\frac{q^{1+\gamma'}}{x} \right);$$

et d'après (30),

$$\begin{aligned} & \frac{-\Pi(\alpha + \beta - 1, q) q^{\alpha \frac{\alpha-1}{2} + \alpha' \frac{\alpha'-1}{2}} \cdot \sigma(\alpha + \beta, x) \cdot \underset{1}{S} \underset{1}{S} s^{\beta' - \beta - 1} \times}{e^{(\alpha + \alpha' - \alpha - \beta)\pi i} \cdot \Pi(-\alpha' - \beta', q)} \\ & \quad \times p(-\alpha' - \beta', sq) p\left(-\alpha - \beta, \frac{q}{xs}\right) \Delta s \\ & = k'_{\alpha\beta} \cdot x^\beta \cdot \mathcal{F}'_{\beta} \left(\frac{q^{1+\gamma'}}{x} \right) + k_{\alpha\beta'} \cdot x^\beta \cdot \mathcal{F}'_{\beta'} \left(\frac{q^{1+\gamma'}}{x} \right). \end{aligned}$$

Soit maintenant norme $(q^{\beta' - \beta}) < 1$; en posant dans cette équations $(x q^{-m})$ pour x (ce qui ne fait pas varier les fonctions $k'_{\alpha\beta}$, $k'_{\alpha\beta'}$) et pour m un nombre entier positif infini, elle se transforme dans

$$\begin{aligned} & \frac{\Pi(\alpha + \beta - 1) \cdot \Pi(\beta' - \beta - 1) \cdot \Pi(-\alpha' - \beta') \cdot \sigma(\alpha + \beta, x)}{q^{-\left(\alpha \frac{\alpha-1}{2} + \alpha' \frac{\alpha'-1}{2}\right)} \cdot e^{(\alpha + \alpha' - \beta - \alpha)\pi i} \cdot \Pi(-\alpha' - \beta'), \Pi(-\alpha' - \beta)} = \\ & \quad \frac{k'_{\alpha\beta} \cdot \Pi(\alpha + \beta - 1) \Pi(\beta + \alpha' - 1) q^{\beta(1+\gamma')}}{\Pi(\beta - \beta') e^{(\beta + \beta')\pi i} \cdot q^{-\beta \frac{\beta-1}{2} - \beta' \frac{\beta'-1}{2}}} \end{aligned}$$

(où l'on a supprimé dans Π l'élément q pour abrégier) et par suite

$$k'_{\alpha\beta} = \frac{\Pi(\beta - \beta', q) \cdot \Pi(\beta' - \beta - 1, q) \cdot \sigma(\alpha + \beta, x) \cdot q^{\alpha \frac{\alpha-1}{2} + \alpha' \frac{\alpha'-1}{2} + \beta(1+\gamma')}}{\Pi(-\alpha' - \beta, q) \cdot \Pi(\beta + \alpha' - 1, q) e^{(\alpha' + \beta' - 2\beta)\pi i} \cdot q^{\beta \frac{\beta-1}{2} + \beta' \frac{\beta'-1}{2}}} \quad (44)$$

d'où résultent $k'_{\alpha\beta}$, $k'_{\alpha'\beta}$, $k'_{\alpha'\beta'}$ par un changement des indices, parce qu'on peut permuter β et β' dans les premiers membres des équations (43) et par là aussi dans les seconds membres. Ainsi l'on a, d'après ce qui a été remarqué dans l'introduction,

$$\left. \begin{aligned} k'_{\alpha\beta} &= \frac{e^{2\beta\pi i} \cdot \sigma(\alpha + \beta, x) q^{(\alpha + \beta) \frac{\alpha + \beta - 1}{2}} \cdot \Theta_{11} \left(\frac{\alpha' + \beta}{2} \lg q \right) \cdot q^{\frac{(\alpha' + \beta)^2}{2}} \cdot e^{-\alpha'\pi i}}{\Theta_{11} \left(\frac{\beta' - \beta}{2} \lg q \right) \cdot q^{\frac{(\beta' - \beta)^2}{2}} \cdot e^{-\beta'\pi i}}, \\ k'_{\alpha\beta'} &= \frac{e^{2\beta'\pi i} \cdot \sigma(\alpha + \beta', x) q^{(\alpha + \beta') \frac{\alpha + \beta' - 1}{2}} \cdot \Theta_{11} \left(\frac{\alpha' + \beta'}{2} \lg q \right) \cdot e^{\frac{(\alpha' + \beta')^2}{2}} \cdot e^{-\alpha'\pi i}}{\Theta_{11} \left(\frac{\beta - \beta'}{2} \lg q \right) q^{\frac{(\beta - \beta')^2}{2}} \cdot e^{-\beta\pi i}}, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned}
 k'_{\alpha'\beta} &= \frac{e^{2\beta\pi i} \cdot \sigma(\alpha' + \beta, x) q^{(\alpha'+\beta)\frac{\alpha'+\beta-1}{2}} \cdot \Theta_{11}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} \lg q\right) \cdot q^{\frac{(\alpha+\beta)^2}{2}} \cdot e^{-\alpha\pi i}}{\Theta_{11}\left(\frac{\beta'-\beta}{2} \lg q\right) q^{\frac{(\beta'-\beta)^2}{2}} \cdot e^{-\beta'\pi i}}, \\
 k'_{\alpha'\beta'} &= \frac{e^{2\beta'\pi i} \cdot \sigma(\alpha' + \beta', x) q^{(\alpha'+\beta')\frac{\alpha'+\beta'-1}{2}} \cdot \Theta_{11}\left(\frac{\alpha+\beta'}{2} \lg q\right) q^{\frac{(\alpha+\beta')^2}{2}} \cdot e^{-\alpha\pi i}}{\Theta_{11}\left(\frac{\beta-\beta'}{2} \lg q\right) \cdot q^{\frac{(\beta-\beta')^2}{2}} \cdot e^{-\beta'\pi i}}.
 \end{aligned} \right\} (46)$$

Nous n'avons obtenu ces équations que pour une étendue finie des variables complexes $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, mais elles sont valables généralement selon le principe qu'une fonction d'une variable complexe ne peut se continuer que d'une seule manière. On voit donc immédiatement le theoreme :

(47). Les fonctions $k'_{\alpha\beta}, k'_{\alpha\beta'}, k'_{\alpha'\beta}, k'_{\alpha'\beta'}$ restent les mêmes si l'on varie les exposants $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, de nombres entiers quelconques. Maintenant qu'il soit

$$f'_{\alpha}(x) = f'_{\alpha}\left(\begin{matrix} \alpha, \alpha' \\ \beta; \beta' \end{matrix}; q, x\right), \quad f'_{\alpha_1}(x) = f'_{\alpha_1}\left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha'_1 \\ \beta_1, \beta'_1 \end{matrix}; q, x\right)$$

deux séries Heinéennes du second ordre, dont les exposants correspondants ne diffèrent que par des nombres entiers; il résulte du theoreme (47) et de propriétés connues des déterminants,

$$\begin{vmatrix} f'_{\alpha}, f'_{\alpha_1}(x) \\ f'_{\alpha'}, f'_{\alpha'_1}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k'_{\alpha\beta}, k'_{\alpha'\beta} \\ k'_{\alpha\beta'}, k'_{\alpha'\beta'} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f'_{\beta}\left(\frac{q^{1+\gamma'}}{x}\right), f'_{\beta_1}\left(\frac{q^{1+\gamma'_1}}{x}\right) \\ f'_{\beta'}\left(\frac{q^{1+\gamma'}}{x}\right), f'_{\beta'_1}\left(\frac{q^{1+\gamma'_1}}{x}\right) \end{vmatrix} \quad (48)$$

où est $\gamma'_1 = 1 - \alpha_1 - \alpha'_1 - \beta_1 - \beta'_1$.

Désignons le premier membre de (48) par $|f'_{\alpha}|$, le premier déterminant du second membre par $|k'|$, le deuxième par $|f'_{\beta}|$; $|f'_{\alpha}| : |f'_{\beta}|$ s'évanouit pour $x = q^{1+\gamma'}, q^{2+\gamma'}$, et pour $x = q^{1+\gamma'_1}, q^{2+\gamma'_1}, q^{3+\gamma'_1}, \dots$, mais pour aucune autre série de points, qui contient des puissances de q croissantes de l'unité. Car $|f'_{\beta}|$ ne devient infini et $|f'_{\alpha}|$ zéro pour aucune autre série de points, puisqu'une fonction, qui s'annule en une telle série de points, n'est pas développable suivant des puissances croissantes de l'unité. Pareillement on conclut que $|f'_{\alpha}| : |f'_{\beta}|$ devient infini pour la série de points $x = 1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \dots$,

mais pour aucune autre série de points, qui contient des puissances décroissantes de q . Or $|f'_\alpha| : |f'_\beta| = |k'|$ est une k -fonction et les deux séries du déterminant $|k'|$ sont égales l'une à l'autre, et par conséquent cette fonction ne devient infinie que du premier ordre pour les points $x = 1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \dots$. De plus cette fonction est ramifiée comme $\sigma(-\bar{\gamma}, x)$, où $\bar{\gamma}$ est celle des quantités γ', γ'_1 , qui est moindre que l'autre d'un nombre entier. En résumant, on conclut que $|k'|$ ne diffère de $\sigma(-\bar{\gamma}, x)$ que par un facteur constant. Il en résulte de plus, que $|f'_\alpha|$ aux points $x = 1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \dots$ et $|f'_\beta|$ aux points $x = q^{1+\bar{\gamma}}, q^{2+\bar{\gamma}}, \dots$, devient infini du premier ordre, et que $|f'_\alpha|$ devient zéro du premier ordre aux points $x = q^{\bar{\gamma}}, q^{\bar{\gamma}-1}, q^{\bar{\gamma}-2}, \dots$; $|f'_\beta|$ aux points $x = 1, q, q^2, \dots$. Si maintenant $\bar{\alpha}$ est celle des quantités $\alpha + \alpha'_1, \alpha_1 + \alpha'$; $\bar{\beta}$ celle des quantités $\beta + \beta'_1, \beta_1 + \beta'$, qui est moindre que l'autre d'un nombre entier, il sera, comme l'on déduit de (30),

$$|f'_\alpha| \cdot x^{-\bar{\alpha}} \cdot p(-\bar{\gamma}, x) = \frac{\text{const}}{x^{\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}}} \cdot |f'_\beta| \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{-\bar{\beta}} p\left(-\gamma, \frac{q^{1+\bar{\gamma}}}{x}\right), \quad (48^a)$$

une fonction monodrome dans toute l'étendue du plan, qui n'est pas infinie pour aucune valeur finie de x , ce que l'on sait du premier membre de (48^a); mais le second membre est aussi monodrome et il est infini pour $x = \infty$ comme $x^{-\bar{\alpha} - \bar{\beta} - \bar{\gamma}}$. Il en résulte que

$$\begin{vmatrix} f'_\alpha(x), & f'_{\alpha_1}(x) \\ f'_{\alpha'}(x), & f'_{\alpha'_1}(x) \end{vmatrix} \cdot x^{-\bar{\alpha}} \cdot p(-\bar{\gamma}, x) \quad (49)$$

est une fonction entière du degré $-\bar{\alpha} - \bar{\beta} - \bar{\gamma}$.

Qu'il soit de plus

$$f\left(\begin{matrix} \alpha, & \alpha', \\ \beta, & \beta', \end{matrix} q, x\right), \quad f\left(\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha'_1, \\ \beta_1, & \beta'_1, \end{matrix} q, x\right), \quad f\left(\begin{matrix} \alpha_2, & \alpha'_2, \\ \beta_2, & \beta'_2, \end{matrix} q, x\right)$$

trois séries Heinéennes du second ordre, dont les exposants correspondants ne diffèrent que de nombres entiers; il suit de l'identité

$$f'_\alpha(x) \{ f'_{\alpha_1}(x) f'_{\alpha'_1}(x) - f'_{\alpha'_1}(x) f'_{\alpha_2}(x) \} + f'_{\alpha_1}(x) \{ f'_{\alpha_2}(x) f'_{\alpha'}(x) - f'_{\alpha'_2}(x) f'_\alpha(x) \} \\ + f'_{\alpha_2}(x) \{ f'_\alpha(x) f'_{\alpha'_1}(x) - f'_{\alpha'}(x) f'_{\alpha'_1}(x) \} = 0$$

après avoir appliqué aux formules en parenthèses le théorème (49), les théorèmes :

(50). Il existe toujours entre trois séries Heinéennes du second ordre, dont les exposants correspondants ne diffèrent que par des nombres entiers, une relation homogène linéaire dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x ;

(51). Toutes les séries Heinéennes du second ordre, dont les exposants correspondants diffèrent par des nombres entiers, peuvent s'exprimer linéairement par deux quelconques d'entre, elles, avec des fonctions rationnelles de x comme coefficients.

Dans le cas où ces nombres entiers ne surpassent l'unité, les fonctions s'appellent contiguës, et les rapports entre elles ont été établis par M. HEINE dans le Journal de Crelle, tom. 34, pag. 290.

Art. 5.

Pour $h=2$ ($\gamma''=2-\alpha-\alpha'-\alpha''-\beta-\beta'-\beta''$) il s'agit de l'équation

$$(1-xq^{2-\gamma''})\Delta^3\phi(x)-[q^\alpha+q^{\alpha'}+q^{\alpha''}-3-xq^{2-\gamma''}(q^{-\beta}+q^{-\beta'}+q^{-\beta''}-3)]\Delta^2\phi(x) \quad (52)$$

$$+\{(q^\alpha-1)(q^{\alpha'}-1)+(q^\alpha-1)(q^{\alpha''}-1)+(q^{\alpha'}-1)(q^{\alpha''}-1)-$$

$$xq^{1-\gamma''}[(q^{-\beta}-1)(q^{-\beta'}-1)+(q^{-\beta}-1)(q^{-\beta''}-1)+(q^{-\beta'}-1)(q^{-\beta''}-1)]\}\Delta\phi(x)$$

$$-[(q^\alpha-1)(q^{\alpha'}-1)(q^{\alpha''}-1)-xq^{2-\gamma''}(q^{-\beta}-1)(q^{-\beta'}-1)(q^{-\beta''}-1)]\phi(x)=0,$$

ou de l'équation fonctionnelle

$$(1-xq^{2-\gamma''})\phi(xq^3)-[q^\alpha+q^{\alpha'}+q^{\alpha''}-xq^{2-\gamma''}(q^{-\beta}+q^{-\beta'}+q^{-\beta''})]\phi(xq^2) \quad (53)$$

$$+[q^{\alpha+\alpha'}+q^{\alpha+\alpha''}+q^{\alpha'+\alpha''}-xq^{2-\gamma''}(q^{-\beta-\beta'}+q^{-\beta-\beta''}+q^{-\beta'-\beta''})]\phi(xq)-$$

$$q^{\alpha+\alpha'+\alpha''}(1-x)\phi(x)=0,$$

qui sont intégrées par les équations

$$\phi(x) = k_\alpha \cdot f''_\alpha(x) + k_{\alpha'} \cdot f''_{\alpha'}(x) + k_{\alpha''} \cdot f''_{\alpha''}(x),$$

et

$$\phi(x) = k_\beta \cdot f''_\beta\left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x}\right) + k_{\beta'} \cdot f''_{\beta'}\left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x}\right) + k_{\beta''} \cdot f''_{\beta''}\left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x}\right), \quad (54)$$

où $k_\alpha, k_{\alpha'}, \dots, k_\beta, \dots$ sont des k -fonctions quelconques et où est

$$f''_\alpha(x) = f_\alpha\left(\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'', q, x\right), \quad f''_\beta\left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x}\right) = f''_\beta\left(\beta, \beta', \beta'', \alpha, \alpha', \alpha'', q, \frac{q^{1+\gamma''}}{x}\right).$$

Nous obtenons une autre forme des intégrales particulières par des sommes définies si nous posons (en supprimant l'élément q , pour abrégé, dans les Π -fonctions)

$$\begin{aligned}
 f''_{\alpha}(x) &= \frac{q^{\alpha \frac{\alpha-1}{2} + \alpha' \frac{\alpha'-1}{2} + \alpha'' \frac{\alpha''-1}{2}}}{e^{(\alpha+\alpha'+\alpha'')\pi i}} \cdot x^{\alpha} \cdot \sum_0^{\infty} \frac{\Pi(\alpha+\beta+n-1)}{\Pi(n)} \cdot \frac{\Pi(\alpha+\beta'+n-1)}{\Pi(\alpha-\alpha'+n)} \cdot \times \\
 &\quad \times \frac{\Pi(\alpha+\beta''+n-1)}{\Pi(\alpha-\alpha''+n)} x^n \\
 &= \frac{-x^{\alpha} \cdot q^{\alpha \frac{\alpha-1}{2} + \alpha' \frac{\alpha'-1}{2} + \alpha'' \frac{\alpha''-1}{2}}}{e^{(\alpha+\alpha'+\alpha'')\pi i} \cdot \Pi(-\alpha''-\beta'')} \cdot \sum_0^{\infty} x^n \frac{\Pi(\alpha+\beta+n-1)}{\Pi(n)} \cdot \frac{\Pi(\alpha+\beta'+n-1)}{\Pi(\alpha-\alpha'+n)} \cdot \times \\
 &\quad \times \underset{1}{S} s^{n+\alpha+\beta''-1} \cdot p(-\alpha''-\beta'', sq) \Delta s \\
 &= \frac{-q^{\alpha'' \frac{\alpha''-1}{2}} \cdot e^{-\alpha''\pi i}}{\Pi(-\alpha''-\beta'')} \cdot \underset{1}{S} \left\{ s^{\beta''-1} \cdot p(-\alpha''-\beta'', sq) \cdot \sum_0^{\infty} \cdot \frac{q^{\alpha \frac{\alpha-1}{2} + \alpha' \frac{\alpha'-1}{2}}}{e^{(\alpha+\alpha')\pi i}} \cdot \times \right. \\
 &\quad \times \left. \frac{\Pi(\alpha+\beta+n-1)}{\Pi(n)} \frac{\Pi(\alpha+\beta'+n-1)}{\Pi(\alpha-\alpha'+n)} (xs)^{n+\alpha} \right\} \Delta s \\
 &= \frac{q^{\alpha'' \frac{\alpha''-1}{2}} \cdot e^{-\alpha''\pi i}}{\Pi(-\alpha''-\beta'')} \cdot \underset{1}{S} s^{\beta''-1} \cdot p(-\alpha''-\beta'', sq) \cdot f_{\alpha} \left(\begin{matrix} \alpha, \alpha', \\ \beta, \beta', \end{matrix} ; sx \right) \Delta s,
 \end{aligned}$$

donc nous avons

$$f_{\alpha} \left(\begin{matrix} \alpha, \alpha', \alpha'', \\ \beta, \beta', \beta'', \end{matrix} ; q, x \right) = \quad (55)$$

$$\frac{-q^{\alpha'' \frac{\alpha''-1}{2}} e^{-\alpha''\pi i}}{\Pi(-\alpha''-\beta'')} \cdot \underset{1}{S} s^{\beta''-1} \cdot p(-\alpha''-\beta'', sq) \cdot f_{\alpha} \left(\begin{matrix} \alpha, \alpha', \\ \beta, \beta', \end{matrix} ; q, sx \right) \Delta s,$$

d'où l'on acquiert par permutation de α contre α' et α'' les restantes séries Heinéennes ascendantes du troisième ordre, qui intègrent (52), exprimées par des sommes définies. Il est bien entendu que dans la formule (55) norme ($q^{\alpha+\beta''}$) doit être < 1 , pourqu'elle soit exacte.

Il faut qu'il existe entre quatre intégrales de l'équation (52) une relation linéaire et homogène avec des k -fonctions comme coefficients. Nous les imaginons sous les formes

$$\left. \begin{aligned} f''_{\alpha}(x) &= k''_{\alpha\beta} \cdot f''_{\beta} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right) + k''_{\alpha\beta'} f''_{\beta'} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right) + k''_{\alpha\beta''} \cdot f''_{\beta''} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right), \\ f''_{\alpha'}(x) &= k''_{\alpha'\beta} \cdot f''_{\beta} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right) + k''_{\alpha'\beta'} f''_{\beta'} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right) + k''_{\alpha'\beta''} \cdot f''_{\beta''} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right), \\ f''_{\alpha''}(x) &= k''_{\alpha''\beta} \cdot f''_{\beta} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right) + k''_{\alpha''\beta'} f''_{\beta'} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right) + k''_{\alpha''\beta''} \cdot f''_{\beta''} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right). \end{aligned} \right\} (56)$$

Les k -fonctions $k_{\alpha\beta}$ etc., se trouvent de la manière suivante.
D'après (55) et (43) nous avons

$$\begin{aligned} &k''_{\alpha\beta} \cdot f''_{\beta} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right) + k''_{\alpha\beta'} f''_{\beta'} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right) + k''_{\alpha\beta''} f''_{\beta''} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right) = \\ &\frac{-q^{\frac{\alpha''\alpha''-1}{2}} \cdot e^{-\alpha''\pi i} \cdot q^{\infty}}{\Pi(-\alpha''-\beta'', q)} \cdot S s^{\beta''-1} \cdot p(-\alpha''-\beta'', sq) \cdot f_{\alpha} \left(\beta, \beta', q, xs \right) \Delta s = \\ &\frac{-q^{\frac{\alpha''\alpha''-1}{2}} \cdot e^{-\alpha''\pi i} \cdot k'_{\alpha\beta}}{\Pi(-\alpha''-\beta'', q)} \cdot S s^{\beta'-1} \cdot p(-\alpha''-\beta'', sq) \cdot f_{\beta} \left(\alpha, \alpha', q, \frac{q^{1+\gamma'}}{x} \right) \Delta s + \\ &\frac{-q^{\frac{\alpha''\alpha''-1}{2}} \cdot e^{-\alpha''\pi i} \cdot k'_{\alpha\beta'}}{\Pi(-\alpha''-\beta'', q)} \cdot S s^{\beta''-1} \cdot p(-\alpha''-\beta'', sq) \cdot f_{\beta'} \left(\alpha, \alpha', q, \frac{q^{1+\gamma'}}{x} \right) \Delta s. \end{aligned}$$

Maintenant, qu'il soit

$$\text{norme } (q^{\beta''-\beta}) < 1, \quad \text{norme } (q^{\beta''-\beta'}) < 1, \quad \text{norme } (q^{\beta'-\beta}) < 1$$

et qu'on multiplie l'équation établie par x^{β} ; en posant en outre xq^{-m} au lieu de x , et m étant un nombre entier positif infini, on aura l'équation

$$k''_{\alpha\beta} = \frac{e^{(\beta''-\alpha'')} \cdot k'_{\alpha\beta} \cdot q^{(\gamma'-\gamma'')\beta - \beta''\frac{\beta''-1}{2} + \alpha''\frac{\alpha''-1}{2}} \cdot \Pi(\beta-\beta'', q) \Pi(\beta''-\beta-1, q)}{\Pi(-\alpha''-\beta, q) \cdot \Pi(\alpha''+\beta-1, q)},$$

ou

$$\begin{aligned} k''_{\alpha\beta} &= \frac{e^{2\beta\pi i} \cdot \sigma(\alpha+\beta, x) q^{(\alpha+\beta)\frac{\alpha+\beta-1}{2}}}{e^{(\alpha'-\beta'+\alpha''-\beta'')\pi i}} \times \\ &\times \frac{\Theta_{11} \left(\frac{\beta+\alpha'}{2} \lg q \right) q^{\frac{(\beta+\alpha')^2}{2}} \cdot \Theta_{11} \left(\frac{\alpha''+\beta}{2} \lg q \right) q^{\frac{(\alpha''+\beta)^2}{2}}}{\Theta_{11} \left(\frac{\beta'-\beta}{2} \lg q \right) q^{\frac{(\beta'-\beta)^2}{2}} \cdot \Theta_{11} \left(\frac{\beta''-\beta}{2} \lg q \right) q^{\frac{(\beta''-\beta)^2}{2}}}, \end{aligned} \quad (57)$$

d'où l'on acquiert les restantes k -fonctions des équations (56) en vertu de la symétrie par la permutation de β contre β' et β'' , et de α contre α' , α'' . Il est vrai qu'elles sont trouvées sous des conditions, qui restreignent la variabilité de $\alpha, \alpha', \dots, \beta''$, mais elles sont valables généralement suivant le principe, qu'une fonction d'une variable complexe ne peut s'étendre continuellement que d'une seule manière.

(58). Les fonctions $k''_{\alpha\beta}, k''_{\alpha\beta'}, \dots, k''_{\alpha'\beta''}$ restent les mêmes si l'on varie $\alpha, \alpha', \dots, \beta''$ de nombres entiers.

Or si les exposants correspondants dans

$$f''_{\alpha}(x), f''_{\alpha_1}(x) = f_{\alpha_1} \left(\alpha_1, \alpha'_1, \alpha''_1, q, x \right), f''_{\alpha_2}(x) = f_{\alpha_2} \left(\alpha_2, \alpha'_2, \alpha''_2, q, x \right)$$

ne diffèrent que de nombres entiers et si l'on pose

$$|f''_{\alpha}| = \begin{vmatrix} f''_{\alpha}(x), f''_{\alpha_1}(x), f''_{\alpha_2}(x) \\ f''_{\alpha'}(x), f''_{\alpha'_1}(x), f''_{\alpha'_2}(x) \\ f''_{\alpha''}(x), f''_{\alpha''_1}(x), f''_{\alpha''_2}(x) \end{vmatrix}, \quad |k''| = \begin{vmatrix} k''_{\alpha\beta}, k''_{\alpha\beta'}, k''_{\alpha\beta''} \\ k''_{\alpha'\beta}, k''_{\alpha'\beta'}, k''_{\alpha'\beta''} \\ k''_{\alpha''\beta}, k''_{\alpha''\beta'}, k''_{\alpha''\beta''} \end{vmatrix},$$

$$|f''_{\beta}| = \begin{vmatrix} f''_{\beta} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right), f''_{\beta_1} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right), f''_{\beta_2} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right) \\ f''_{\beta'} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right), f''_{\beta'_1} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right), f''_{\beta'_2} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right) \\ f''_{\beta''} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right), f''_{\beta''_1} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right), f''_{\beta''_2} \left(\frac{q^{1+\gamma''}}{x} \right) \end{vmatrix},$$

il est $|f''_{\alpha}| = |k''| \cdot |f''_{\beta}|$.

Observons que $|f''_{\alpha}| : |f''_{\beta}|$ s'évanouit pour

$$x = q^{1+\gamma''}, q^{2+\gamma''}, q^{3+\gamma''}, \dots, x = q^{\gamma''_1+1}, q^{\gamma''_1+2}, \dots, x = q^{\gamma''_2+1}, q^{\gamma''_2+2}, \dots$$

mais pour aucune autre série de points qui contient des puissances croissantes de l'unité. Car pour de telles séries $|f''_{\beta}|$ ne peut plus devenir infini, ni $|f''_{\alpha}|$ zéro, puis qu'une fonction, qui s'annule dans une telle série de points, n'est pas développable en série suivant des puissances croissantes de l'unité.

Pareillement on conclut que $|f''_{\alpha''}| : |f''_{\beta''}|$ devient infini dans la série de points $x = 1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \dots$, mais dans aucune autre série, qui contient des puis-

sances de q décroissantes. Or $|f''_{\alpha}| : |f''_{\beta}| = |k''|$ est une k -fonction, $|k''|$ pour $x=1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \dots$, ne devient infini que du premier ordre (par ce que pour ces valeurs toutes les trois séries du déterminant deviennent égales) et cette fonction se ramifie comme $\sigma(-\bar{\gamma}, x)$, si $\bar{\gamma}$ est une des quantités $\gamma'', \gamma_1'', \gamma_2''$, spécialement, comme nous allons fixer, celle qui est inférieure aux autres d'un nombre entier positif. De tout cela on conclut que $|k''|$ ne diffère de $\sigma(-\bar{\gamma}, x)$ que d'un facteur constant. Il en résulte donc:

(59). $|f''_{\alpha}|$ devient infini du premier ordre aux points $1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \dots$, et infiniment petit du premier ordre aux points $q\bar{\gamma}, q\bar{\gamma}^{-1}, q\bar{\gamma}^{-2}, \dots$; $|f''_{\beta}|$ devient infini du premier ordre aux points $q\bar{\gamma}^{+1}, q\bar{\gamma}^{+2}, \dots$, et infiniment petit aux points q, q^2, q^3, \dots .

Si maintenant α signifie celle des quantités $\alpha + \alpha_1' + \alpha_2'', \alpha + \alpha_1'' + \alpha_2', \alpha' + \alpha_1 + \alpha_2'', \alpha' + \alpha_1'' + \alpha_2, \alpha'' + \alpha_1 + \alpha_2', \alpha'' + \alpha_1' + \alpha_2$, et $\bar{\beta}$ celle des quantités $\beta + \beta_1' + \beta_2'', \beta + \beta_1'' + \beta_2', \beta' + \beta_1 + \beta_2'', \beta' + \beta_1'' + \beta_2, \beta'' + \beta_1 + \beta_2', \beta'' + \beta_1' + \beta_2$, qui est inférieure aux autres d'un nombre entier positif,

$$|f''_{\alpha}| x^{-\alpha} \cdot p(-\bar{\gamma}, x) = \frac{\text{const}}{x^{\alpha + \bar{\beta} + \gamma}} \cdot |f''_{\beta}| \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{-\beta} p\left(-\bar{\gamma}, \frac{q^{1-\gamma}}{x}\right)$$

est une fonction monodrome partout et finie pour des x finis, mais infinie comme $x^{-\alpha-\beta-\gamma}$ pour $x=\infty$, et elle est d'après cela une fonction entière du degré $-\alpha-\beta-\gamma$, ou zéro lorsque ce degré est négatif.

Soit

$$f\left(\begin{matrix} \alpha_3, \alpha_3, \alpha_3'' \\ \beta_3, \beta_3', \beta_3'' \end{matrix}, q, x\right)$$

une quatrième série Heinéenne du troisième ordre dont les exposants ne diffèrent des correspondants des trois précédentes que par des nombres entiers; il suit de ce qui précède et de l'identité

$$f'_{\alpha}(x) \left| \begin{matrix} f''_{\alpha_1}(x), f''_{\alpha_2}(x), f''_{\alpha_3}(x) \\ f''_{\alpha'_1}(x), f''_{\alpha'_2}(x), f''_{\alpha'_3}(x) \\ f''_{\alpha''_1}(x), f''_{\alpha''_2}(x), f''_{\alpha''_3}(x) \end{matrix} \right| = f'_{\alpha_1}(x) \left| \begin{matrix} f''_{\alpha}(x), f''_{\alpha_2}(x), f''_{\alpha_3}(x) \\ f''_{\alpha'}(x), f''_{\alpha'_2}(x), f''_{\alpha'_3}(x) \\ f''_{\alpha''}(x), f''_{\alpha''_2}(x), f''_{\alpha''_3}(x) \end{matrix} \right| \quad (61)$$

$$+f''_{\alpha_3}(x) \begin{vmatrix} f''_{\alpha}(x), & f''_{\alpha'}(x), & f''_{\alpha_3}(x) \\ f''_{\alpha'}(x), & f''_{\alpha'_1}(x), & f''_{\alpha'_3}(x) \\ f''_{\alpha''}(x), & f''_{\alpha''_1}(x), & f''_{\alpha''_3}(x) \end{vmatrix} - f''_{\alpha_3}(x) \begin{vmatrix} f''_{\alpha}(x), & f''_{\alpha'}(x), & f''_{\alpha_3}(x) \\ f''_{\alpha'}(x), & f''_{\alpha'_1}(x), & f''_{\alpha'_3}(x) \\ f''_{\alpha''}(x), & f''_{\alpha''_1}(x), & f''_{\alpha''_3}(x) \end{vmatrix} = 0 \quad (61)$$

les théorèmes :

(62). Entre quatre séries Heinéennes du troisième ordre, dont les exposants correspondants ne diffèrent que par des nombres entiers, il existe toujours une relation linéaire homogène avec des fonctions entières de x comme coefficients. Dans les cas spéciaux que l'un de ces coefficients s'évanouit, il peut encore exister une telle relation entre trois séries.

(63). Toutes les séries Heinéennes du troisième ordre, dont les exposants correspondants diffèrent par des nombres entiers, peuvent s'exprimer linéairement, avec des fonctions rationnelles de x comme coefficients, par trois d'entre elles, qui soient linéairement indépendantes.

Art. 6.

Ce sont les relations à trois termes entre des séries Heinéennes contiguës du troisième ordre, qui offrent le plus grand intérêt. Nous allons présenter dans tous ses détails la déduction d'une telle relation.

Nous posons pour abrégé

$$f''_{\alpha}(x) = B_{\alpha}, \quad f_{\alpha} \begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta' + 1, & \beta'' \end{pmatrix} = C_{\alpha},$$

$$f_{\alpha} \begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta, & \beta', & \beta'' + 1 \end{pmatrix} = D_{\alpha}, \quad f_{\alpha} \begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta + 2, & \beta', & \beta'' \end{pmatrix} = B''_{\alpha}$$

et nous désignons les coefficients des éléments de la première série horizontale du déterminant identiquement nul

$$\begin{vmatrix} B_{\alpha} & C_{\alpha} & D_{\alpha} & B''_{\alpha} \\ B_{\alpha} & C_{\alpha} & D_{\alpha} & B''_{\alpha} \\ B_{\alpha'} & C_{\alpha'} & D_{\alpha'} & B''_{\alpha'} \\ B_{\alpha''} & C_{\alpha''} & D_{\alpha''} & B''_{\alpha''} \end{vmatrix}$$

respectivement par D, D', D'', D''' ; on a d'après l'art. 5 $D''' = 0$.

Posons

$$\mu = \frac{\Pi(\alpha + \beta - 1) \Pi(\alpha + \beta' - 1) \Pi(\alpha + \beta'' - 1) \Pi(\alpha' + \beta - 1) \Pi(\alpha' + \beta' - 1)}{e^{3(\alpha + \alpha' + \alpha'')\pi i} \cdot q^{-\frac{\alpha - 1}{2} - \frac{\alpha' - 1}{2} - \frac{\alpha'' - 1}{2}} \Pi(\alpha - \alpha') \Pi(\alpha - \alpha'')} \times \\ \times \frac{\Pi(\alpha' + \beta'' - 1) \Pi(\alpha'' + \beta - 1) \Pi(\alpha'' + \beta' - 1) \Pi(\alpha'' + \beta'' - 1)}{\Pi(\alpha' - \alpha) \Pi(\alpha' - \alpha'') \Pi(\alpha'' - \alpha) \Pi(\alpha'' - \alpha')}$$

où, pour abrégier, on a supprimé q dans les Π -fonctions; la constante, qui doit éгалer

$$D \cdot x^{-\alpha - \alpha' - \alpha''} \cdot p(-\gamma'' + 2, x)$$

est

$$\frac{\mu}{(1-q)^4} \begin{vmatrix} 1 - q^{\alpha + \beta'} & 1 - q^{\alpha + \beta''} & (1 - q^{\alpha + \beta}) (1 - q^{\alpha + \beta + 1}) \\ 1 - q^{\alpha' + \beta'} & 1 - q^{\alpha' + \beta''} & (1 - q^{\alpha' + \beta}) (1 - q^{\alpha' + \beta + 1}) \\ 1 - q^{\alpha'' + \beta'} & 1 - q^{\alpha'' + \beta''} & (1 - q^{\alpha'' + \beta}) (1 - q^{\alpha'' + \beta + 1}) \end{vmatrix} \\ = \frac{q^{\beta} - \beta''}{(1-q)^4} q^{2\beta + 1} \begin{vmatrix} 1, & q^{\alpha}, & q^{2\alpha} \\ 1, & q^{\alpha'}, & q^{2\alpha'} \\ 1, & q^{\alpha''}, & q^{2\alpha''} \end{vmatrix}$$

De plus, la constante qui doit éгалer

$$D' \cdot x^{-\alpha - \alpha' - \alpha''} \cdot p(-\gamma'' + 2, x)$$

est:

$$\frac{-\mu}{(1-q)^3} \begin{vmatrix} 1, & 1 - q^{\alpha + \beta''} & (1 - q^{\alpha + \beta}) (1 - q^{\alpha + \beta + 1}) \\ 1, & 1 - q^{\alpha' + \beta''} & (1 - q^{\alpha' + \beta}) (1 - q^{\alpha' + \beta + 1}) \\ 1, & 1 - q^{\alpha'' + \beta''} & (1 - q^{\alpha'' + \beta}) (1 - q^{\alpha'' + \beta + 1}) \end{vmatrix} = \frac{\mu q^{\beta'' + \beta + 1}}{(1-q)^3} \begin{vmatrix} 1, & q^{\alpha}, & q^{2\alpha} \\ 1, & q^{\alpha'}, & q^{2\alpha'} \\ 1, & q^{\alpha''}, & q^{2\alpha''} \end{vmatrix}$$

Enfin la constante qui doit éгалer

$$D'' \cdot x^{-\alpha - \alpha' - \alpha''} \cdot p(-\gamma'' + 2, x)$$

est

$$\frac{\mu}{(1-q)^3} \begin{vmatrix} 1, & 1 - q^{\alpha + \beta'}, & (1 - q^{\alpha + \beta}) (1 - q^{\alpha + \beta + 1}) \\ 1, & 1 - q^{\alpha' + \beta'}, & (1 - q^{\alpha' + \beta}) (1 - q^{\alpha' + \beta + 1}) \\ 1, & 1 - q^{\alpha'' + \beta'}, & (1 - q^{\alpha'' + \beta}) (1 - q^{\alpha'' + \beta + 1}) \end{vmatrix} = \frac{-\mu q^{\beta' + 2\beta + 1}}{(1-q)^3} \begin{vmatrix} 1, & q^{\alpha}, & q^{2\alpha} \\ 1, & q^{\alpha'}, & q^{2\alpha'} \\ 1, & q^{\alpha''}, & q^{2\alpha''} \end{vmatrix}$$

D'où suit l'équation

$$f_{\alpha''}(x) \frac{q^{\beta'} - q^{\beta''}}{1 - q} - f_{\alpha} \left(\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta + 1, \beta', q, x \right) q^{\beta''} + f_{\alpha} \left(\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'' + 1, q, x \right) q^{\beta'} = 0. \quad (64)$$

En permutant dans (64) β et β' et multipliant l'équation qui en résulte par $\frac{q^{\beta'} - q^{\beta''}}{1 - q}$, et (64) par $\frac{q^{\beta} - q^{\beta''}}{1 - q}$, et retranchant l'une équation de l'autre, nous aurons

$$f_{\alpha} \left(\alpha, \alpha', \alpha'', \beta + 1, \beta', \beta'', q, x \right) (q^{\beta'} - q^{\beta''}) - f_{\alpha} \left(\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta' + 1, \beta'', q, x \right) (q^{\beta} - q^{\beta''}) + f_{\alpha} \left(\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'' + 1, q, x \right) (q^{\beta} - q^{\beta'}) = 0. \quad (65)$$

Si l'on remplace dans cette équation les séries ascendantes par les descendantes qui en sont la continuation, la relation doit être encore vérifiée, et si l'on permute β, β', β'' respectivement contre $\alpha, \alpha', \alpha''$, et l'on remplace $\frac{q^{2+\gamma''}}{x}$ par x , on obtient

$$f_{\alpha+1} \left(\alpha + 1, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'', q, x \right) (q^{\alpha''} - q^{\alpha'}) - f_{\alpha} \left(\alpha, \alpha' + 1, \alpha'', \beta, \beta', \beta'', q, x \right) (q^{\alpha''} - q^{\alpha}) + f_{\alpha} \left(\alpha, \alpha', \alpha'' + 1, \beta, \beta', \beta'', q, x \right) (q^{\alpha'} - q^{\alpha}) = 0. \quad (66)$$

D'après la même méthode nous allons trouver encore une relation entre quatre fonctions contiguës. Nous prendrons les fonctions

$$f_{\alpha''}(x) = B_{\alpha}, \quad f_{\alpha} \left(\alpha, \alpha', \alpha'', \beta + 1, \beta', \beta'', q, x \right) = B'_{\alpha},$$

$$f_{\alpha} \left(\alpha, \alpha', \alpha'', \beta + 2, \beta', \beta'', q, x \right) = B''_{\alpha}, \quad f_{\alpha} \left(\alpha, \alpha', \alpha'', \beta + 3, \beta', \beta'', q, x \right) = B'''_{\alpha}.$$

A ce fin, nous désignons les coefficients des éléments de la première série horizontale du déterminant identiquement nul

$$\begin{vmatrix} B_{\alpha} & B'_{\alpha} & B''_{\alpha} & B'''_{\alpha} \\ B_{\alpha} & B'_{\alpha} & B''_{\alpha} & B'''_{\alpha} \\ B_{\alpha'} & B'_{\alpha'} & B''_{\alpha'} & B'''_{\alpha'} \\ B_{\alpha''} & B'_{\alpha''} & B''_{\alpha''} & B'''_{\alpha''} \end{vmatrix}$$

respectivement par $\Delta, \Delta', \Delta'', \Delta'''$; on a

$$\Delta \cdot x^{-\alpha-\alpha'-\alpha''} \cdot p(-\gamma''+3, x) = \frac{-\mu(1-q^{\alpha+\beta})(1-q^{\alpha'+\beta})(1-q^{\alpha''+\beta})}{(1-q)^\beta} \left| \begin{array}{l} 1, q^\alpha, q^{2\alpha} \\ 1, q^{\alpha'}, q^{2\alpha'} \\ 1, q^{\alpha''}, q^{2\alpha''} \end{array} \right| q^{3\beta+2}$$

μ étant le même que auparavant. Alors

$$\Delta' \cdot x^{-\alpha-\alpha'-\alpha''} \cdot p(-\gamma''+3, x)$$

est une fonction linéaire de x , dans laquelle le terme constant a la valeur

$$\frac{\mu q^{2\beta+2}}{(1-q)^\beta} \left| \begin{array}{l} 1, q^\alpha, q^{\alpha} \\ 1, q^{\alpha'}, q^{2\alpha'} \\ 1, q^{\alpha''}, q^{2\alpha''} \end{array} \right|$$

De même

$$\Delta'' \cdot x^{-\alpha-\alpha'-\alpha''} \cdot p(-\gamma''+3, x)$$

est une fonction linéaire de x dont le terme constant est

$$\frac{-\mu q^{2\beta}}{(1-q)^4} \left| \begin{array}{l} 1, q^\alpha, q^{2\alpha} \\ 1, q^{\alpha'}, q^{2\alpha'} \\ 1, q^{\alpha''}, q^{2\alpha''} \end{array} \right|$$

Enfin on a

$$\Delta''' \cdot x^{-\alpha-\alpha'-\alpha''} \cdot p(-\gamma''+3, x) = \frac{\mu q^{2\beta+1}}{(1-q)^3} \left| \begin{array}{l} 1, q^\alpha, q^{2\alpha} \\ 1, q^{\alpha'}, q^{2\alpha'} \\ 1, q^{\alpha''}, q^{2\alpha''} \end{array} \right|$$

Soient b et c des constantes encore indéterminées, la relation en question peut s'écrire

$$\begin{aligned} & B_\alpha q^2 \cdot \frac{1-q^{\alpha+\beta}}{1-q} \cdot \frac{1-q^{\alpha'+\beta}}{1-q} \cdot \frac{1-q^{\alpha''+\beta}}{1-q} \\ & - B'_\alpha \{ b x + q(1-q)^2 + q^2(1-q^{\alpha+\beta})(1-q^{\alpha'+\beta+1}) + q^2(1-q^{\alpha'+\beta})(1-q^{\alpha''+\beta+1}) \\ & \quad + q^2(1-q^{\alpha''+\beta})(1-q^{\alpha'+\beta+1}) \} \\ & + B''_\alpha \{ c x + q^2(1-q^{\alpha+\beta}) + q^2(1-q^{\alpha'+\beta}) + q^2(1-q^{\alpha''+\beta}) + 1 - q + 2q(1-q) \} \\ & - B'''_\alpha (1 - x q^{2-\gamma''}) = 0 \end{aligned}$$

Si l'on substitue dans cette relation pour les séries ascendantes f''_{β}, \dots , les correspondantes descendantes f'_{β}, \dots ou $f''_{\beta'}, \dots$, elle sera encore vérifiée. Dans le premier cas chacune des séries descendantes commence par une autre puissance, savoir respectivement par la puissance $-\beta^{\text{ième}}$, $-\beta-1^{\text{ième}}$, $-\beta-2^{\text{ième}}$, $-\beta-3^{\text{ième}}$ de x , et par la comparaison des coefficients de la plus grande d'entre elles, on obtient

$$\frac{q^{(1+\gamma'')\beta+2} \cdot \Pi(\beta + \alpha - 1, q) \cdot \Pi(\beta + \alpha' - 1, q) \cdot \Pi(\beta + \alpha'' - 1, q)}{q^{\beta \frac{1-\beta}{2} + \beta' \frac{1-\beta'}{2} + \beta'' \frac{1-\beta''}{2}} \cdot e^{(\beta+\beta'+\beta'')\pi i} \cdot \Pi(\beta - \beta', q) \cdot \Pi(\beta - \beta'', q)} \times \\ \times \frac{1 - q^{\alpha+\beta}}{1 - q} \cdot \frac{1 - q^{\alpha'+\beta}}{1 - q} \cdot \frac{1 - q^{\alpha''+\beta}}{1 - q} = \\ = b \frac{\Pi(\beta + \alpha, q) \cdot \Pi(\beta' + \alpha, q) \cdot \Pi(\beta'' + \alpha, q) q^{(1+\beta)\gamma''}}{q^{\beta \frac{1-\beta}{2} + \beta' \frac{1-\beta'}{2} + \beta'' \frac{1-\beta''}{2}} \cdot e^{(\beta+\beta'+\beta'')\pi i} \cdot \Pi(\beta - \beta' + 1, q) \cdot \Pi(\beta - \beta'' + 1, q)}$$

et de là

$$b = - \frac{1 - q^{\beta-\beta'+1}}{1 - q} \cdot \frac{1 - q^{\beta-\beta''+1}}{1 - q} \cdot q^{2-\gamma''}.$$

Dans le second cas toutes les séries commencent par la puissance $-\beta^{\text{ième}}$, et posant égal zéro le coefficient de la plus grande puissance, on obtient

$$b q \gamma'' \beta' + \beta + c \cdot q^{(\gamma''-1)\beta'+2\beta+1} \cdot \frac{1 - q^{\beta'-\beta-1}}{1 - q} - q^{(\gamma''-2)\beta'+3\beta+3} \cdot \frac{1 - q^{\beta'-\beta-2}}{1 - q} \cdot \frac{1 - q^{\beta'-\beta-1}}{1 - q} = 0$$

donc

$$c = - \frac{1 - q^{\beta-\beta'+2}}{1 - q} - q^{2-\gamma''} \cdot \frac{1 - q^{\beta-\beta''+1}}{1 - q}.$$

Ainsi nous avons trouvé la relation

$$f_{\alpha} \left(\begin{matrix} \alpha, \alpha', \alpha'', \\ \beta, \beta', \beta'', \end{matrix} q, x \right) q^2 \frac{1 - q^{\alpha+\beta}}{1 - q} \cdot \frac{1 - q^{\alpha'+\beta}}{1 - q} \cdot \frac{1 - q^{\alpha''+\beta}}{1 - q} \quad (67) \\ + f_{\alpha} \left(\begin{matrix} \alpha, \alpha', \alpha'', \\ \beta+1, \beta', \beta'', \end{matrix} q, x \right) \left\{ q^{2-\gamma''} \cdot \frac{q^{\beta-\beta'+1}}{1 - q} \cdot \frac{1 - q^{\beta-\beta''+1}}{1 - q} x - q - \right. \\ \left. q^2 \frac{1 - q^{\alpha+\beta}}{1 - q} \cdot \frac{1 - q^{\alpha'+\beta+1}}{1 - q} - q^2 \frac{1 - q^{\alpha+\beta}}{1 - q} \frac{1 - q^{\alpha''+\beta+1}}{1 - q} - q^2 \frac{1 - q^{\alpha''+\beta}}{1 - q} \frac{1 - q^{\alpha+\beta+1}}{1 - q} \right\} \\ + f_{\alpha} \left(\begin{matrix} \alpha, \alpha', \alpha'', \\ \beta+2, \beta', \beta'', \end{matrix} q, x \right) \left\{ \frac{q^{\beta-\beta'+2} - 1}{1 - q} x + q^{2-\gamma''} \frac{q^{\beta-\beta''+1} - 1}{1 - q} x + \right.$$

$$q^2 \left(\frac{1 - q^{\alpha + \beta}}{1 - q} \right) + q^2 \frac{1 - q^{\alpha' + \beta}}{1 - q} + q^2 \frac{1 - q^{\alpha'' + \beta}}{1 - q} \left. \vphantom{q^2} \right\} \\ - f_a \left(\alpha, \alpha', \alpha'', \beta + 3, \beta', \beta'', q \right) (1 - x) = 0.$$

Ces exemples des relations entre des séries contiguës Heinéennes du troisième ordre suffiseront. Les moyens que nous avons donnés suffisent pour trouver toutes les relations possibles entre de telles séries.

Art. 7.

Dans le cas où h a une valeur quelconque il s'agit des équations (1) et (2), qui sont intégrées par

$$f_{\alpha}^{(h)}(x), f_{\alpha'}^{(h)}(x), \dots, f_{\alpha^{(h)}}^{(h)}(x); f_{\beta}^{(h)}\left(\frac{q^{1+\gamma^{(h)}}}{x}\right), f_{\beta'}^{(h)}\left(\frac{q^{1+\gamma^{(h)}}}{x}\right), \dots, f_{\beta^{(h)}}^{(h)}\left(\frac{q^{1+\gamma^{(h)}}}{x}\right).$$

Il faut qu'il existe entre $h + 2$ de ces intégrales une relation homogène linéaire avec des k -fonctions comme coefficients, que nous concevons sous la forme

$$k_{\alpha^{(r)}}^{(h)}(x) = k_{\alpha^{(r)}\beta}^{(h)} f_{\beta}^{(h)}\left(\frac{q^{1+\gamma^{(h)}}}{x}\right) + k_{\alpha^{(r)}\beta'}^{(h)} f_{\beta'}^{(h)}\left(\frac{q^{1+\gamma^{(h)}}}{x}\right) + \dots + k_{\alpha^{(r)}\beta^{(h)}}^{(h)} f_{\beta^{(h)}}^{(h)}\left(\frac{q^{1+\gamma^{(h)}}}{x}\right).$$

Alors on trouve par la methode inductive

$$\left. \begin{aligned} & \frac{k_{\alpha^{(r)}\beta^{(s)}}^{(h)} \cdot q^{\alpha^{(r)} + \beta^{(s)} \frac{1 - \alpha^{(r)} - \beta^{(s)}}{2}}}{\sigma(\alpha^{(r)} + \beta^{(s)}, x)} = \frac{e^{(\beta^{(s)} + \beta + \beta' \dots + \beta^{(h)})\pi i} \cdot \Theta_{11}\left(\frac{\beta^{(s)} - \beta^{(s)}}{2} \lg q\right) q^{\frac{(\beta^{(s)} - \beta^{(s)})^2}{2}}}{e^{(-\alpha^{(r)} + \alpha + \alpha' \dots + \alpha^{(h)})\pi i} \cdot \Theta_{11}\left(\frac{\alpha^{(r)} + \beta^{(s)}}{2} \lg q\right) q^{\frac{(\alpha^{(r)} + \beta^{(s)})^2}{2}}} \times \\ & \times \frac{\Theta_{11}\left(\frac{\alpha + \beta^{(s)}}{2} \lg q\right) q^{\frac{(\alpha + \beta^{(s)})^2}{2}}}{\Theta_{11}\left(\frac{\beta - \beta^{(s)}}{2} \lg q\right) q^{\frac{(\beta - \beta^{(s)})^2}{2}}} \cdot \frac{\Theta_{11}\left(\frac{\alpha' + \beta^{(s)}}{2} \lg q\right) q^{\frac{(\alpha' + \beta^{(s)})^2}{2}}}{\Theta_{11}\left(\frac{\beta' - \beta^{(s)}}{2} \lg q\right) q^{\frac{(\beta' - \beta^{(s)})^2}{2}}} \dots \times \\ & \times \frac{\Theta_{11}\left(\frac{\alpha^{(h)} + \beta^{(s)}}{2} \lg q\right) q^{\frac{(\alpha^{(h)} + \beta^{(s)})^2}{2}}}{\Theta_{11}\left(\frac{\beta^{(h)} - \beta^{(s)}}{2} \lg q\right) q^{\frac{(\beta^{(h)} - \beta^{(s)})^2}{2}}} \end{aligned} \right\} (69)$$

quantité laquelle ne varie pas, quand les exposants $\alpha, \alpha', \dots, \beta, \beta', \dots$ varient de nombres entiers. Posons $x=1$ dans le déterminant $|k^{(h)}|$ qui est formé par les $(h+1)^2$ quantités $k_{\alpha^{(r)}, \beta^{(s)}}^{(h)}$, toutes ces séries sont égales, d'où l'on apprend que la fonction n'est infinie que du premier ordre aux points $x=1, q, q^2, \dots, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \dots$. De là on conclut d'une manière analogue à celles que nous avons suivies dans les cas spéciaux $h=1, h=2$, que l'on a

$$|k^{(h)}| = \text{const} \cdot \sigma(-\gamma^{(h)}, x).$$

Ces propriétés suffisent pour établir les théorèmes :

(70). Entre $h+2$ séries Heinéennes de l'ordre $h+1^{\text{ième}}$, dont les exposants correspondants ne diffèrent que par des nombres entiers, il existe toujours une relation linéaire homogène avec, des fonctions entières de x comme coefficients.

(71). Toutes les séries Heinéennes de l'ordre $h+1^{\text{ième}}$, dont les exposants correspondants diffèrent par des nombres entiers, peuvent s'exprimer par $h+1$ d'entre elles, qui soient linéairement indépendantes.

Il existe, c'est ce que je remarque en passant, des relations qui ne contiennent que trois termes.

En automne 1869. ''

ERRATA

du Mémoire précédent,

- pag. 122 ligne 15, 16 et 18 lisez « ... = $q^{\alpha\gamma'+\dots}$ »
- » » » 18 au dénominateur du second membre lisez « $\Pi(-\alpha'-\beta', q) \cdot \Pi(-\alpha'-\beta, q)$ »
- » 123 » 8 lisez « ... et entre $f'_{\alpha'}(x)$... »
- » » » 19 au dénominateur lisez « $e^{(\alpha+\alpha')\pi i} \cdot \Pi(-\alpha'-\beta', q) \cdot \Pi(-\alpha-\beta, xq^{\alpha+\beta})$ »
- » 124 » 5 lisez « ... dans cette équation ... »
- » » » 16 au dénominateur lisez « $q^{(\beta-\beta')^2}$ »
- » 127 » » lisez « $xq^{2-\gamma'}[\dots]$ »
- » 131 » 17 l'équation commence par $|f_{\alpha''}|x^{-\bar{\alpha}}\dots$ et porte le n.º (60)
- » » » 19 et 20 lisez « $-\bar{\alpha}-\bar{\beta}-\bar{\gamma}$ »
- » 122 à la fin, les deux dernières lignes du déterminant soient :

$$\begin{array}{cccc} B_{\alpha'} & C_{\alpha'} & D_{\alpha'} & B''_{\alpha'} \\ B_{\alpha''} & C_{\alpha''} & D_{\alpha''} & B'_{\alpha''} \end{array}$$

- » 134 ligne 2 lisez « ... — $f\left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ \beta, & \beta'+1, & \beta', \end{array} q, x\right)q^{\beta''} + \dots$ »

Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni.

(del prof. ENRICO BETTI, a Pisa.)

1.

Siano z_1, z_2, \dots, z_n n variabili che possono prendere tutti i valori reali da $-\infty$ a $+\infty$. Il campo n volte infinito dei sistemi di valori di queste variabili lo diremo uno spazio di n dimensioni e lo dinoteremo con S_n . Un sistema $(z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0)$ determinerà un punto L_0 di questo spazio, e $z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0$ si diranno le coordinate di questo punto.

Un sistema di m equazioni determinerà un campo dei sistemi di valori di $n - m$ variabili indipendenti che sarà uno spazio S_{n-m} di altrettante dimensioni, contenuto in S_n . Uno spazio di una sola dimensione che forma una semplice continuità lo chiameremo una linea.

Sia:

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0 \tag{1}$$

la equazione di uno spazio S_{n-1} di $n - 1$ dimensioni. Se la funzione F è continua e ad un sol valore per tutti i valori reali delle coordinate, lo spazio S_{n-1} in generale separerà S_n in due regioni, in una delle quali sarà $F < 0$, e nell'altra $F > 0$; e non si potrà con variazioni continue dal sistema di valori delle coordinate di un punto della prima regione passare al sistema di valori delle coordinate di un punto dell'altra regione senza passare per un sistema di valori che soddisfaccia alla equazione (1). Le due regioni saranno due spazi di n dimensioni limitati dallo spazio S_{n-1} . Se dal sistema di valori delle coordinate di un punto qualunque di una delle due regioni si potrà sempre con variazione continua passare al sistema di valori delle coordinate di un altro punto qualunque della medesima regione senza passare per i valori delle coordinate di un punto di S_{n-1} , si dirà che questa regione è uno spazio connesso.

Siano :

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= z_1(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}), \\ z_2 &= z_2(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ z_n &= z_n(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

tali funzioni continue e ad un sol valore, che sostituite nella equazione (1) la soddisfacciano identicamente. Lo spazio S_{n-1} si potrà riguardare come il campo dei sistemi di valori delle $n-1$ variabili reali: u_1, u_2, \dots, u_{n-1} .

È evidente che in S_{n-1} saranno soddisfatte le $n-1$ equazioni:

$$\frac{dF}{dz_1} \frac{dz_1}{du_n} + \frac{dF}{dz_2} \frac{dz_2}{du_n} + \dots + \frac{dF}{dz_n} \frac{dz_n}{du_n} = 0, \quad (3)$$

che si ottengono prendendo successivamente per m i numeri $1, 2, \dots, n-1$.

Denotando con A_1, A_2, \dots, A_n quantità indeterminate qualunque, e ponendo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & \frac{dz_1}{du_1} & \frac{dz_1}{du_2} & \dots & \frac{dz_1}{du_{n-1}} \\ A_2 & \frac{dz_2}{du_1} & \frac{dz_2}{du_2} & \dots & \frac{dz_2}{du_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n & \frac{dz_n}{du_1} & \frac{dz_n}{du_2} & \dots & \frac{dz_n}{du_{n-1}} \end{vmatrix} \quad (4)$$

$$\mu^2 = \sum_1^n \left(\frac{dF}{dz_m} \right)^2, \quad (5)$$

$$M^2 = \sum_1^n \left(\frac{d\Delta}{dA_m} \right)^2, \quad (6)$$

dalle equazioni (3) otterremo:

$$\frac{dF}{dz_n} = \frac{\mu}{M} \frac{d\Delta}{dA_n}. \quad (7)$$

Ora sia L una linea determinata dalle equazioni:

$$z_1 = l_1(t), \quad z_2 = l_2(t), \dots, \quad z_n = l_n(t) \quad (8)$$

Se la equazione (1), sostituendovi questi valori, è soddisfatta soltanto da un numero finito di valori reali di t , la linea L intersecherà lo spazio T_{n-1} soltanto in un numero finito di punti. Sia T_0 uno di questi punti di intersezione corrispondente a $t=t_0$. Sarà:

$$F[l_1(t_0), l_2(t_0), \dots, l_n(t_0)] = 0.$$

Consideriamo ora i due punti di L corrispondenti a:

$$t = t_0 + \delta t_0$$

$$t = t_0 - \delta t_0$$

essendo δt_0 un infinitesimo,

Per il primo di questi valori di t la funzione F diviene:

$$\delta F = \delta t_0 \sum_1^n \frac{dF}{dz_m} \frac{dl_m}{dt_0},$$

per il secondo:

$$\delta' F = -\delta t_0 \sum_1^n \frac{dF}{dz_m} \frac{dl_m}{dt_0}.$$

Rammentando le equazioni (7) si ottiene:

$$\left. \begin{aligned} \delta F &= \frac{\mu D}{M} \delta t_0 \\ \delta' F &= -\frac{\mu D}{M} \delta t_0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

essendo D il determinante Δ nel quale alle A_m sono sostituite le quantità $\frac{dl_m}{dt_0}$.

Se ora prendiamo pei radicali che danno μ ed M il segno positivo, e fissiamo convenientemente l'ordine delle z_1, z_2, \dots, z_m , e percorriamo la linea L facendo crescere t con continuità, dall'equazioni (9) si deduce che se $D > 0$, quando L interseca S_{n-1} nel punto T_0 , si esce da quella regione in cui $F < 0$ e si entra in quella in cui $F > 0$, e viceversa se $D < 0$, si esce da quella in cui $F > 0$ e si entra in quella in cui $F < 0$.

Se poniamo:

$$ds_n^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \dots + dz_m^2,$$

e ds_n è l'elemento lineare di S_n (nel qual caso RIEMANN chiama piano lo

spazio S_n), nello spazio S_{n-1} l'elemento lineare ds_{n-1} sarà dato dalla formula:

$$ds_{n-1}^2 = \sum \sum E_{rs} du_r du_s,$$

essendo:

$$E_{rs} = \sum \frac{dz_n}{du_r} \frac{dz_n}{du_s},$$

e per una nota proprietà dei determinanti sarà:

$$M^2 = \sum \left(\frac{d\Delta}{dA_n} \right)^2 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \cdots & E_{1,n-1} \\ E_{12} & E_{22} \cdots & E_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ E_{1,n-1} & E_{2,n-1} \cdots & E_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \quad (10)$$

Se:

$$dS_n = dz_1 dz_2 \dots dz_n$$

è l'elemento dello spazio S_n , l'elemento di S_{n-1} sarà:

$$dS_{n-1} = M du_1 du_2 \dots du_{n-1}. \quad (11)$$

Sia ora:

$$F_1(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) = 0$$

la equazione di uno spazio S_{n-2} contenuto in S_{n-1} . Se F_1 è una funzione continua e ad un sol valore, S_{n-2} in generale separerà S_{n-1} in due regioni, in una delle quali sarà $F_1 < 0$ e nell'altra $F_1 > 0$. Potrà riguardarsi S_{n-2} come il campo di $n-2$ variabili reali, e potrà ripetersi ciò che abbiamo detto per S_{n-1} . L'elemento lineare sarà sempre una forma omogenea di 2° grado, ma i coefficienti avranno una forma differente, come pure differente sarà il coefficiente M per mezzo del quale si ottiene l'elemento dello spazio S_{n-2} . Analoghe osservazioni valgono per gli spazi di un minor numero di dimensioni.

2.

Diremo che uno spazio S_{n-m} di $n-m$ dimensioni è linearmente connesso, se prendendo in esso due punti qualunque si potrà condurre una linea continua che senza uscire da S_{n-m} vada da uno di questi punti all'altro.

Diremo che uno spazio S_{n-1} è chiuso, se divide S_n in due spazi linearmente connessi, in modo che da un punto di uno di questi non si possa condurre una linea continua a un punto qualunque dell'altro che non intersechi S_{n-1} . Diremo che uno spazio linearmente connesso S_{n-2} è chiuso se divide uno spazio chiuso S_{n-1} in due regioni ciascuna linearmente connessa e tali che non si possa da un punto qualunque di una di esse condurre una linea continua tutta contenuta in S_{n-1} , a un punto qualunque dell'altra che non intersechi S_{n-2} : e così di seguito.

Considerando, invece di una sola, un numero qualunque di disuguaglianze:

$$F_1 < 0, \quad F_2 < 0, \dots \quad F_m < 0$$

determineremo una parte R di uno spazio S_t che potrà essere connessa linearmente. La totalità degli spazi di $t-1$ dimensioni:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \dots \quad F_m = 0$$

che limita R in modo che da un punto qualunque di R non si può condurre una linea continua a un punto fuori di R , che non intersechi alcuno di questi spazi, si chiamerà il contorno di R .

Si dirà che uno spazio è finito se le coordinate di tutti i suoi punti hanno valori finiti.

Uno spazio finito e linearmente connesso o sarà chiuso o avrà un contorno.

3.

Uno spazio finito ha proprietà indipendenti dalla grandezza delle sue dimensioni, e dalla forma dei suoi elementi. Queste proprietà che si riferiscono soltanto al modo di connessione delle sue parti furono considerate da LISTING per gli spazi ordinari in una Memoria intitolata *Der Census räumlicher Complexe*, e furono determinate da RIEMANN per le superficie.

Oltre la connessione lineare che si presenta sola nelle superficie, io ho osservato che negli spazi di un numero di dimensioni maggiore di due si possono considerare altre specie di connessioni.

Se in uno spazio R di n dimensioni limitato da uno o più spazi di $n-1$ dimensioni, ogni spazio chiuso di m dimensioni, essendo $m < n$, è il contorno di una parte di uno spazio linearmente connesso di $m+1$ dimensioni, tutta quanta contenuta in R , avremo una connessione secondo $m+1$ dimensioni, e diremo che R ha semplice la connessione di m^{esima} specie. Se uno

spazio R ha semplici tutte le connessioni, diremo che è semplicemente connesso. Se invece in R si può immaginare un numero p_m di spazi chiusi di m dimensioni che non possano formare il contorno di una parte linearmente connessa di uno spazio di $m+1$ dimensioni, tutta quanta contenuta in R , e tali che ogni altro spazio chiuso di m dimensioni formi solo o con una parte di essi o con tutti il contorno di una parte linearmente connessa di uno spazio di $m+1$ dimensioni tutta quanta contenuta in R , diremo che R ha di $(p_m+1)^{\text{esimo}}$ ordine la connessione di m^{esima} specie.

Esempi. Nello spazio ordinario, quello compreso tra due sfere concentriche ha di 2° ordine la connessione di 2^{a} specie, e semplice quella di 1^{a} specie.

Lo spazio compreso da un anello ha semplice la connessione di 2^{a} specie, e di 2° ordine quella di 1^{a} specie.

Lo spazio compreso tra due anelli uno interno all'altro ha di 2° ordine la connessione di 2^{a} specie, e di 3° ordine quella di 1^{a} specie.

Lo spazio compreso tra una sfera e un anello ha di 2° ordine ambedue le connessioni.

Per giustificare la definizione che abbiamo data delle differenti specie di connessione, è necessario dimostrare che per ogni spazio limitato R il numero p_m è determinato, cioè che comunque si conducano gli spazi chiusi di m dimensioni che godono la esposta proprietà, il loro numero è sempre lo stesso. Perciò ci fonderemo, come ha fatto RIEMANN per provare il teorema corrispondente relativo alle superficie, sopra il lemma seguente:

Se un sistema A insieme con un altro sistema C di spazi chiusi di m dimensioni forma il contorno di uno spazio S_{m+1} di $m+1$ dimensioni linearmente connesso contenuto tutto quanto in R , e se un altro sistema B di spazi chiusi di m dimensioni forma insieme col sistema C il contorno di uno spazio linearmente connesso S'_{m+1} contenuto tutto in R ; il sistema A col sistema B formerà il contorno di uno spazio di $m+1$ dimensioni linearmente connesso contenuto tutto in R .

Infatti i due spazi S_{m+1} ed S'_{m+1} saranno o da parti opposte, o dalla stessa parte del contorno C . Nel primo caso lo spazio composto di S_{m+1} e di S'_{m+1} avrà per contorno il sistema A col sistema B ; nel secondo caso togliendo S'_{m+1} da S_{m+1} rimarrà uno spazio che avrà per contorno il sistema A col sistema B .

Se t spazi chiusi di m dimensioni A_1, A_2, \dots, A_t non possono formare soli, e con ogni altro spazio chiuso di m dimensioni

formano il contorno di uno spazio linearmente connesso di $m+1$ dimensioni tutto contenuto in R ; e se un altro sistema di t' spazi chiusi di m , dimensioni $B_1, B_2, \dots, B_{t'}$, gode la stessa proprietà, sarà $t=t'$.

Infatti, supponiamo $t' > t$. Se C è uno spazio chiuso qualunque di m dimensioni, tanto il sistema $(A_1, A_2, \dots, A_t, C)$ quanto il sistema $(A_1, A_2, \dots, A_t, B_1)$ formerà il contorno di uno spazio linearmente connesso di $m+1$ dimensioni tutto contenuto in R ; quindi tanto il sistema $(A_2, A_3, \dots, A_t, C)$ quanto il sistema $(A_2, A_3, \dots, A_t, B_1)$ formerà insieme con A_1 il contorno di uno spazio linearmente connesso di $m+1$ dimensioni tutto contenuto in R ; e in conseguenza, per il lemma precedente, il sistema $(A_2, A_3, \dots, A_t, C)$ insieme col sistema $(A_2, A_3, \dots, A_t, B_1)$ cioè il sistema $(B_1, A_2, A_3, \dots, A_t, C)$ formerà il contorno di uno spazio di $m+1$ dimensioni tutto contenuto in R . Così il sistema $(B_1, A_2, A_3, \dots, A_t)$ unito con uno spazio chiuso qualunque C forma il contorno di uno spazio linearmente connesso di $m+1$ dimensioni; e ora seguitando sostituiremo successivamente a uno degli spazi A uno degli spazi B , e avremo finalmente che il sistema $(B_1, B_2, \dots, B_{t'})$ formerà con uno spazio qualunque chiuso, e quindi anche con B_{t+1} il contorno di uno spazio di $m+1$ dimensioni linearmente connesso contenuto tutto in R , e questo è in contraddizione con ciò che abbiamo supposto se $t' > t$. Ugualmente si dimostra che non può essere $t > t'$. Dunque $t=t'$ come volevamo dimostrare.

4.

Quando supponiamo rotta la connessione di uno spazio limitato R lungo uno spazio di un minor numero di dimensioni, che ha il contorno sopra il contorno di R , si dice che si fa in R una sezione trasversa.

Se da uno spazio di m dimensioni se ne separa una parte infinitesima che abbia per contorno uno spazio infinitesimo di $m-1$ dimensioni, diremo che vi si fa un punto sezione.

Se uno spazio limitato R si può ridurre ad un altro R' senza farvi nessuna sezione trasversa e soltanto mediante continui ingrandimenti e impiccolimenti delle sue parti, diremo che R può con trasformazione continua ridursi ad R'

: Due spazi limitati R ed R' che si possono ridurre uno all'altro mediante

trasformazione continua avranno uguali gli ordini di tutte le specie di connessione. Ora un punto è semplicemente connesso, dunque ogni spazio che con trasformazione continua può ridursi ad un punto sarà semplicemente connesso.

Ad uno spazio che ha un contorno si può sempre con trasformazione continua far perdere una dimensione.

Infatti sia R questo spazio, m il numero delle sue dimensioni, C il suo contorno, S_m lo spazio di cui è parte, e $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$ denotino un sistema di coordinate in S_m . Imaginiamo un sistema $m-1$ volte infinito di linee che occupino con continuità tutto quanto S_m , per esempio le linee che hanno per equazioni:

$$u_2 = a_2, \quad u_3 = a_3, \dots, \quad u_{m-1} = a_{m-1}$$

dove a_2, a_3, \dots, a_{m-1} prendono tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$, e di questo sistema consideriamo soltanto quella parte che contiene le linee che incontrano il contorno C di R . Ciascuna di queste linee continue col crescere di u_1 incontrando C , tante volte entrerà in R e altrettante ne uscirà, e si potrà con trasformazione continua avvicinare indefinitamente ciascun punto d'ingresso al punto di egresso successivo, e così far perdere ad R una dimensione come volevamo dimostrare.

Ad uno spazio chiuso si può sempre con trasformazione continua far perdere una dimensione, dopo averci fatto un punto sezione.

Infatti, dopo averci fatto un punto sezione lo spazio acquista un contorno, e quindi per il teorema precedente può sempre con trasformazione continua perdere una dimensione.

Se in uno spazio chiuso R di m dimensioni si fa un solo punto sezione, non si mutano gli ordini delle sue connessioni; ma se vi si fanno $s+1$ punti sezione, l'ordine di $(m-1)^{\text{esima}}$ specie aumenta di s unità, mentre gli ordini di connessione di specie inferiore non mutano.

Infatti sia $\alpha+1$ l'ordine di connessione di $(m-1)^{\text{esima}}$ specie dello spazio chiuso R di m dimensioni. Potremo imaginare in R un sistema A di α spazi chiusi di $m-1$ dimensioni che non formi solo, ma con ogni altro spazio chiuso C di $m-1$ dimensioni formi il contorno di una parte di R . Poichè R è chiuso il sistema A con C lo dividerà in due regioni separate, R' e R'' , ambedue aventi il medesimo contorno, cioè il sistema A con C . Ora se fac-

ciamo in R un punto sezione, questo sarà in una delle due regioni; supponiamolo in R' . È chiaro che allora il sistema A con C non formerà più tutto il contorno di R' , ma però farà sempre tutto il contorno di R'' . Dunque l'ordine di connessione di $(m-1)^{\text{esima}}$ specie di R non sarà mutato da un sol punto sezione. Ma se facciamo in R due punti sezione, potremo sempre prendere C in modo che uno di questi punti sia in R' e l'altro in R'' , e quindi il sistema A con C non formerà più il contorno di una parte di R , e sarà necessario aggiungere un altro spazio chiuso di $m-1$ dimensioni per avere tutto il contorno di una parte di R . Dunque con due punti sezione si aumenta di una unità l'ordine di connessione di $(m-1)^{\text{esima}}$ specie di R . Analogamente si dimostra che con 3, 4, ... $s+1$ punti sezione si aumenta quest'ordine di 2, 3, ... s unità.

Ora sia $\beta+1$ l'ordine di connessione di $(m-t-1)^{\text{esima}}$ specie di R , essendo $0 < t < m$; si potrà imaginare in R un sistema A di spazi chiusi di $m-t-1$ dimensioni che non formi solo il contorno di uno spazio T di $m-t$ dimensioni tutto contenuto in R . Siano quanti si vogliano i punti sezione fatti in R , purchè in numero finito; potremo sempre col dato contorno condurre T in modo che non passi per ciascuno di questi punti sezione. Dunque un numero finito qualunque di punti sezione non muta gli ordini di connessione di specie inferiore alla $(m-1)^{\text{esima}}$.

Poichè non si mutano gli ordini delle connessioni di uno spazio chiuso R facendovi un sol punto sezione, per determinare questi ordini sarà indifferente riguardare R come chiuso o come avente un contorno infinitesimo. Dunque si potrà ritenere uno spazio finito come limitato sempre da un contorno, e quindi gli si potrà sempre far perdere una dimensione con trasformazione continua, senza mutare gli ordini delle sue connessioni.

5.

Per rendere semplicemente connesso, mediante sezioni trasverse semplicemente connesse, uno spazio finito R di n dimensioni, è necessario e sufficiente di fare p_{n-1} sezioni lineari, p_{n-2} di due, p_{n-3} di tre, ... p_1 di $n-1$ dimensioni, se $p_1+1, p_2+1, \dots, p_{n-1}+1$ sono rispettivamente gli ordini delle sue connessioni di $1^{\text{a}}, 2^{\text{a}}, \dots, (n-1)^{\text{esima}}$ specie.

Infatti, essendo $p_{n-1}+1$ l'ordine di connessione di $(n-1)^{\text{esima}}$ specie di

R , potremo immaginare in esso un sistema A di p_{n-1} spazi chiusi di $n-1$ dimensioni che non formi solo il contorno di una parte di R , ma lo formi con ogni altro spazio chiuso di $n-1$ dimensioni. Si avranno così più regioni limitate, ciascuna delle quali avrà per contorno tutto o parte del sistema A e una parte del contorno di R ; quindi facendo perdere a queste regioni con trasformazione continua una dimensione, esse si ridurranno al sistema A , connesso lungo spazi di $n-2$ dimensioni. Dunque R si potrà ridurre con trasformazione continua ad uno spazio R_1 di $n-1$ dimensioni formato di p_{n-1} spazi chiusi A di $n-1$ dimensioni connessi tra loro lungo spazi di $n-2$ dimensioni, ed R_1 avrà uguali a quelli di R gli ordini delle connessioni di $(n-2)^{\text{esima}}$, $(n-3)^{\text{esima}}$, ..., 1^{a} specie. Ora senza mutare gli ordini delle connessioni di R_1 , potremo farvi al più tanti punti sezione quanti sono gli spazi chiusi dei quali è formato, cioè p_{n-1} . Sia R'_1 lo spazio R_1 in cui sono fatti questi punti sezione.

Riducendo R'_1 ad R con trasformazione continua, i punti sezione acquistano una dimensione e divengono linee continue, che vanno da un punto del contorno di R ad un altro punto del medesimo contorno, cioè divengono sezioni lineari trasverse e così gli ordini delle connessioni di specie inferiore alla $(n-1)^{\text{esima}}$ restano ancora gli stessi. Dunque in R si può fare soltanto un numero p_{n-1} di sezioni trasverse che non mutano i suoi ordini di connessione di specie inferiore alla $(n-1)^{\text{esima}}$.

Ora ciascuna di queste p_{n-1} sezioni trasverse lineari attraversa uno dei p_{n-1} spazi chiusi A , che al più si potevano condurre in R in modo che non formassero soli il contorno di una porzione di R , ma che lo formassero quando ad essi se ne aggiungeva un altro di $n-1$ dimensioni. Dunque dopo aver condotte queste sezioni trasverse, ciascuno degli spazi A non è più chiuso, e quindi ogni spazio chiuso di $n-1$ dimensioni diviene il contorno di una porzione di R ed è resa semplice la connessione di R di $(n-1)^{\text{esima}}$ specie. Dunque per rendere semplice la connessione di $(n-1)^{\text{esima}}$ specie di R mediante sezioni trasverse semplicemente connesse senza mutare gli ordini delle connessioni di specie inferiore, è necessario e sufficiente di farvi p_{n-1} sezioni trasverse lineari.

Lo spazio R'_1 di $n-1$ dimensioni, al quale si è ridotto con trasformazione continua lo spazio R in cui sono fatte le p_{n-1} sezioni lineari trasverse, avendo un punto sezione in ognun degli spazi chiusi dei quali è formato, e avendo l'ordine di connessione di $(n-2)^{\text{esima}}$ specie uguale a p_{n-2} , potrà con trasformazione continua perdere una dimensione, e ridursi a uno spazio R_2 for-

mato di p_{n-2} spazi chiusi di $n-2$ dimensioni connessi lungo spazi di $n-3$ dimensioni. Ora senza mutare gli ordini delle connessioni di R_2 possiamo farvi al più p_{n-2} punti sezione. Denotiamo con R'_2 lo spazio R_2 in cui sono fatti questi punti sezioni. Riducendo R'_2 ad R , i punti sezione di R'_2 acquistano due dimensioni e divengono spazi di due dimensioni che hanno il contorno sopra il contorno di R , e sono semplicemente connessi perchè riducibili a un punto con trasformazione continua, e quindi sono sezioni trasverse di due dimensioni. Denoteremo con R'' lo spazio R in cui sono fatte le sezioni trasverse di una e di due dimensioni. Le sezioni trasverse di due dimensioni rendono semplice la connessione di $(n-2)^{\text{esima}}$ specie. Dunque per ridurre R mediante sezioni trasverse semplicemente connesse ad uno spazio R'' che abbia semplici le connessioni di $(n-1)^{\text{esima}}$ ed $(n-2)^{\text{esima}}$ specie senza mutare gli ordini delle connessioni di specie inferiori, è necessario e sufficiente farci p_{n-1} sezioni trasverse lineari e p_{n-2} di due dimensioni. Così seguitando per le connessioni di specie inferiori.

Quando uno spazio finito R è ridotto semplicemente connesso mediante sezioni trasverse semplicemente connesse, ogni spazio chiuso di m dimensioni condotto in R forma con altrettanti spazi chiusi di m dimensioni quante sono le sezioni trasverse di $n-m$ dimensioni che esso incontra, il contorno di uno spazio di $m+1$ dimensioni tutto contenuto in R .

Infatti se p_m+1 è l'ordine di connessione di m^{esima} specie di R , ogni spazio chiuso C di m dimensioni formerà con un sistema A di p_m spazi chiusi di m dimensioni il contorno di uno spazio S di $m+1$ dimensioni tutto contenuto in R . Ora ciascuno degli spazi A sarà intersecato da una e da una soltanto delle sezioni trasverse di $n-m$ dimensioni che fanno parte di quelle che rendono R semplicemente connesso, e quindi poichè ciascuna di queste sezioni ha il contorno sopra il contorno di R , se C formerà con s degli spazi A il contorno di S , dovrà intersecare precisamente le s sezioni trasverse che intersecano quelli s spazi chiusi del sistema A .

Per maggior chiarezza facciamo alcune applicazioni allo spazio ordinario.

Lo spazio compreso tra due sfere concentriche si riduce semplicemente connesso mediante una sola sezione trasversa lineare che va da un punto della superficie sferica maggiore a un punto qualunque della minore.

Lo spazio compreso da una superficie anulare si riduce semplicemente connesso mediante una sola sezione trasversa superficiale fatta lungo il meridiano della superficie.

Lo spazio compreso tra due superficie anulari si riduce semplicemente connesse mediante una sola sezione trasversa lineare che va da un punto della superficie anulare maggiore a uno della minore, e mediante due sezioni trasverse superficiali ambedue condotte per la sezione lineare; una fatta lungo il meridiano e una lungo l'equatore della superficie.

Lo spazio compreso tra una sfera e un anello si riduce semplicemente connesso mediante una sezione lineare trasversa che va dalla superficie della sfera a quella dell'anello, e l'altra superficiale che terminando alla sezione lineare va pure dalla superficie dell'anello a quella della sfera.

6.

Sia dato uno spazio R di n dimensioni limitato da un numero qualunque di spazi chiusi di $n-1$ dimensioni: $S'_{n-1}, S''_{n-1}, \dots S^{(t)}_{n-1}$ i quali abbiano per equazioni

$$F_1=0, F_2=0, \dots F_t=0,$$

e R sia determinato dalle disuguaglianze:

$$F_1 < 0, F_2 < 0, \dots F_t < 0. \tag{1}$$

Siano: $X_1, X_2, \dots X_n$ n funzioni dei punti di R finite e continue; prendiamo a considerare l'integrale n^{uplo} :

$$\Omega_n = \int_n \left(\frac{dX_1}{dz_1} + \frac{dX_2}{dz_2} + \dots + \frac{dX_n}{dz_n} \right) dz_1 dz_2 \dots dz_n$$

esteso a tutto lo spazio R .

Distinguendo con indici pari i valori di X_r nei punti nei quali la linea Z_r che ha per equazioni:

$$z_1 = a_1, z_2 = a_2, \dots z_{r-1} = a_{r-1}, z_{r+1} = a_{r+1}, \dots z_n = a_n \tag{2}$$

col crescere di z_r , attraversando uno degli spazi S_{n-1} , entra nello spazio R nel quale sono soddisfatte tutte le disuguaglianze (1), e distinguendo con indici dispari i valori di X_r nei punti nei quali la linea Z_r , attraversando uno degli spazi S_{n-1} esce dello spazio R , avremo:

$$\int_{n-1} \frac{dX_r}{dz_r} dz_r = X_r^0 - X_r' + X_r'' - X_r''' + \dots$$

Onde:

$$\Omega_n = \sum_{n-1} \int (X_r^0 - X_r' + X_r'' - X_r''' + \dots) dz_1 dz_2 \dots dz_{r-1} dz_{r+1} \dots dz_n.$$

Ora il numero dei punti nei quali la linea Z_r incontra ciascuno degli spazi chiusi S_{n-1} è pari, e in quanti di essi Z_r entra in R da altrettanti esce. Per esempio lo spazio S'_{n-1} sarà incontrato da Z_r nei punti $0, 2l_1+1, 2l_2, 2l_3+1, \dots$, e la parte dell'integrale Ω_n che si riferisce ai punti di S'_{n-1} sarà:

$$\Omega'_n = \sum_{n-1} \int (X_r^0 - X_r^{(2l_1+1)} + X_r^{(2l_2)} - X_r^{(2l_3+1)} + \dots) dz_1 dz_2 \dots dz_{r-1} dz_{r+1} \dots dz_n.$$

Considerando S'_{n-1} come il campo delle $n-1$ variabili reali: $u'_1, u'_2, \dots, u'_{n-1}$, avremo:

$$dz_1 dz_2 \dots dz_{r-1} dz_{r+1} \dots dz_n = \pm \frac{d\Delta}{dA_r} du'_1 du'_2 \dots du'_{n-1}$$

dove è da prendersi il segno $+$ o il segno $-$ secondo che $\frac{d\Delta}{dA_r}$ è $>$ oppure è < 0 .

Ora da ciò che abbiamo dimostrato nel primo paragrafo risulta che si può sempre prendere l'ordine delle z_1, z_2, \dots, z_n in modo che il segno di $\frac{d\Delta}{dA_r}$ sia uguale a quello di $\frac{dF_1}{dz_r}$, essendo $F_1 = 0$ l'equazione di S'_{n-1} .

Ora $\frac{dF_1}{dz_r} < 0$ nei punti di S'_{n-1} nei quali Z_r entra in R , e $\frac{dF_1}{dz_r} > 0$ nei punti nei quali esce. Avremo dunque:

$$\begin{aligned} \int_{n-1} X_r^0 dz_1 dz_2 \dots dz_{r-1} dz_{r+1} \dots dz_n &= - \int_{n-1} X_r^0 \frac{d\Delta}{dA_r} du'_1 du'_2 \dots du'_{n-1} \\ \int_{n-1} X_r^{(2l_1+1)} dz_1 dz_2 \dots dz_{r-1} dz_{r+1} dz_n &= \int_{n-1} X_r^{(2l_1+1)} \frac{d\Delta}{dA_r} du'_1 du'_2 \dots du'_{n-1} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Onde:

$$\Omega'_n = - \int_{n-1} \left(X_r^0 \frac{d\Delta}{dA_r} + X_r^{(2l_1+1)} \frac{d\Delta}{dA_r} + \dots \right) du'_1 du'_2 \dots du'_{n-1}$$

ossia:

$$\Omega'_n = - \int_{n-1} X_r \frac{d\Delta}{dA_r} du'_1 du'_2 \dots du'_{n-1}$$

esteso a tutto lo spazio S'_{n-1} .

Analoga riduzione si può fare per gli altri spazi, e si ottiene

$$\Omega_n = -\sum_{r=1}^n \int X_r \frac{d\Delta}{dA_r} du'_1 du'_2 \dots du'_{n-1} - \sum_{r=1}^n \int X_r \frac{d\Delta}{dA_r} du''_1 du''_2 \dots du''_{n-1} - \dots$$

Ma:

$$\sum X_r \frac{d\Delta}{dA_r} = \begin{vmatrix} X_1 & \frac{dz_1}{du_1} & \dots & \frac{dz_1}{du_{n-1}} \\ X_2 & \frac{dz_2}{du_1} & \dots & \frac{dz_2}{du_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_n & \frac{dz_n}{du_1} & \dots & \frac{dz_n}{du_{n-1}} \end{vmatrix}$$

Dunque:

$$\Omega_n = -\sum_t \int \begin{vmatrix} X_1 & \frac{dz_1}{du_1^{(t)}} & \dots & \frac{dz_1}{du_{n-1}^{(t)}} \\ X_2 & \frac{dz_2}{du_1^{(t)}} & \dots & \frac{dz_2}{du_{n-1}^{(t)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_n & \frac{dz_n}{du_1^{(t)}} & \dots & \frac{dz_n}{du_{n-1}^{(t)}} \end{vmatrix} du^{(t)}_1 du^{(t)}_2 \dots du^{(t)}_{n-1}. \quad (3)$$

Se $(z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0)$ è un punto di $S^{(t)}_{n-1}$, una linea che passa per questo punto ed ha per equazioni:

$$z_1 - z_1^0 = \frac{dF_t}{dz_1^0} \frac{\rho}{\mu}$$

$$z_2 - z_2^0 = \frac{dF_t}{dz_2^0} \frac{\rho}{\mu}$$

$$\dots$$

$$z_n - z_n^0 = \frac{dF_t}{dz_n^0} \frac{\rho}{\mu}$$

si dice la normale allo spazio $S^{(t)}_{n-1}$; e siccome di qui abbiamo:

$$\rho^2 = (z_1 - z_1^0)^2 + (z_2 - z_2^0)^2 + \dots + (z_n - z_n^0)^2,$$

ρ si chiama la distanza del punto (z_1, z_2, \dots, z_n) da $(z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0)$. Se ρ è infinitesimo e uguale a dp_t , abbiamo:

$$\frac{dz_r}{dp_t} = \frac{dF_t}{dz_r} \frac{1}{\mu}.$$

Ma:

$$\frac{dF_t}{dz_r} = \frac{d\Delta}{dA_r} \frac{\mu}{M},$$

onde:

$$\frac{dz_r}{dp_t} = \frac{d\Delta}{dA_r} \frac{1}{M}.$$

Onde sostituendo:

$$\Omega_n = - \sum_{r=1}^n \int \left(X_1 \frac{dz_1}{dp_t} + X_2 \frac{dz_2}{dp_t} + \dots + X_n \frac{dz_n}{dp_t} \right) M du^{(t)}_1 du^{(t)}_2 \dots du^{(t)}_{n-1}.$$

Ma essendo $dS^{(t)}_{n-1}$ l'elemento dello spazio $S^{(t)}_{n-1}$, abbiamo:

$$dS^{(t)}_{n-1} = M du^{(t)}_1 du^{(t)}_2 \dots du^{(t)}_{n-1},$$

onde:

$$\Omega_n = - \sum_t \int_{S^{(t)}_{n-1}} \sum_r X_r \frac{dz_r}{dp_t} dS^{(t)}_{n-1}.$$

Quindi se:

$$X_r = \frac{dV}{dz_r},$$

avremo:

$$\begin{aligned} \Omega_n &= \int_R \left(\frac{d^2 V}{dz_1^2} + \frac{d^2 V}{dz_2^2} + \dots + \frac{d^2 V}{dz_n^2} \right) dR \\ &= - \sum_t \int_{S^{(t)}_{n-1}} \frac{dV}{dp_t} dS^{(t)}_{n-1}, \end{aligned}$$

e perciò se:

$$\frac{d^2 V}{dz_1^2} + \frac{d^2 V}{dz_2^2} + \dots + \frac{d^2 V}{dz_n^2} = 0 \tag{4}$$

in tutto lo spazio R , sarà:

$$\sum_t \int_{S^{(t)}_{n-1}} \frac{dV}{dp_t} dS^{(t)}_{n-1} = 0. \tag{5}$$

Se lo spazio R ha semplice la connessione di $(n-1)$ esima specie, ogni spazio chiuso C di $n-1$ dimensioni condotto in esso, forma il contorno di una porzione di R ; quindi se la equazione (4) è soddisfatta per tutto R , e vi sono finite continue V e le sue derivate prime, sarà sempre:

$$\int_C \frac{dV}{dp_c} dC = 0.$$

Se poi lo spazio R ha la connessione di specie $(n-1)$ esima di ordine $p_{n-1} + 1$, condotti in esso p_{n-1} spazi chiusi $A_1, A_2, \dots, A_{p_{n-1}}$ di $n-1$ dimensioni, ogni spazio chiuso C contenuto in R formerà col sistema A il contorno di una parte di R : e se $a_1, a_2, \dots, a_{p_{n-1}}$ sono le sezioni trasverse lineari che attraversano rispettivamente gli spazi chiusi $A_1, A_2, \dots, A_{p_{n-1}}$, e rendono semplice la connessione di $(n-1)$ esima specie dello spazio R , C formerà il contorno di una parte di R con quelli spazi del sistema che sono attraversati dalle sezioni a che incontra C .

Ponendo dunque:

$$\int_{A_r} \frac{dV}{dp_i} dA_r = M_r$$

avremo:

$$\int_C \frac{dV}{dp_c} dC + \sum M_r = 0$$

estendendo la somma a tutti i valori di r che sono indici delle sezioni trasverse incontrate da C , ed abbiamo il seguente teorema:

Se lo spazio R ha la connessione di $(n-1)$ esima specie di ordine $p_n + 1$, se con sezioni trasverse lineari si rende semplice questa connessione, e C è uno spazio chiuso di $n-1$ dimensioni, contenute in R , l'integrale:

$$\int_C \frac{dV}{dp_c} dC$$

differirà da zero di tanti moduli di periodicità quante sono le sezioni trasverse lineari che attraversa lo spazio C .

Poichè due spazi di $n-1$ dimensioni che hanno uno stesso contorno formano insieme uno spazio chiuso, avremo ancora il seguente teorema:

Dato, nello spazio R di n dimensioni, che ha la connessione di $(n-1)^{\text{esima}}$ specie di ordine $p_{n-1}+1$, unò spazio chiuso Γ di $n-2$ dimensioni, resa mediante p_{n-1} sezioni lineari semplice questa connessione, l'integrale precedente esteso a uno spazio C' che ha per contorno Γ e incontra s sezioni trasverse lineari, differirà dal medesimo integrale esteso a uno spazio C che ha lo stesso contorno e non incontra alcuna sezione, dei moduli di periodicità relativi a quelle sezioni, e quindi se lo spazio R ha semplice la connessione di $(n-1)^{\text{esima}}$ specie l'integrale esteso a uno spazio qualunque C contenuto in R che ha per contorno Γ avrà sempre lo stesso valore.

7.

In uno spazio chiuso R di n dimensioni che ha la connessione di 1^{a} specie di ordine p_1+1 , siano s_1, s_2, \dots, s_{p_1} le p_1 sezioni trasverse semplicemente connesse di $n-1$ dimensioni che rendono semplice la connessione di 1^{a} specie di R . Siano L_1, L_2, \dots, L_{p_1} p_1 linee chiuse che rispettivamente attraversano le sezioni s_1, s_2, \dots, s_{p_1} , e che sono tali che ogni altra linea l chiusa, con quelle delle linee L che attraversano le medesime sezioni che essa attraversa, forma il contorno di uno spazio C di due dimensioni contenuto tutto in R .

Siano :

$$z_1 = z_1(u), \quad z_2 = z_2(u), \dots \quad z_n = z_n(u) \quad (1)$$

le equazioni della linea l , e prendiamo a considerare l'integrale:

$$\Omega_1 = \Sigma \int X_r dz_r = \Sigma \int X_r \frac{dz_r}{du} du$$

esteso a tutta la linea l , essendo le X_r finite e continue in tutta R .

Ora la linea l formando parte del contorno di C , se lo spazio C sarà determinato dall'equazione:

$$z_1 = z_1(v_1, v_2), \quad z_2 = z_2(v_1, v_2), \dots \quad z_n = z_n(v_1, v_2)$$

avremo:

$$\frac{dz_r}{du} du = \frac{dz_r}{dv_1} dv_1 + \frac{dz_r}{dv_2} dv_2$$

e quindi:

$$\Omega_1 = \int \Sigma X_r \frac{dz_r}{dv_1} dv_1 + \int \Sigma X_r \frac{dz_r}{dv_2} dv_2.$$

Ora per quello che abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente:

$$\begin{aligned} \iint \left[\frac{d}{dv_2} \left(\Sigma X_r \frac{dz_r}{dv_1} \right) - \frac{d}{dv_1} \left(\Sigma X_r \frac{dz_r}{dv_2} \right) \right] dv_1 dv_2 \\ = \int \Sigma X_r \frac{dz_r}{dv_1} dv_1 + \int \Sigma X_r \frac{dz_r}{dv_2} dv_2 \end{aligned}$$

dove l'integrale doppio è esteso a tutto lo spazio C e il semplice a tutto il sistema di linee l, L_1, L_2, \dots che formano il contorno di C .

Ma abbiamo:

$$\begin{aligned} \iint \left[\frac{d}{dv_2} \left(\Sigma X_r \frac{dz_r}{dv_1} \right) - \frac{d}{dv_1} \left(\Sigma X_r \frac{dz_r}{dv_2} \right) \right] dv_1 dv_2 \\ = \iint \Sigma \frac{dX_r}{dz_t} \begin{vmatrix} \frac{dz_r}{dv_1} & \frac{dz_r}{dv_2} \\ \frac{dz_t}{dv_1} & \frac{dz_t}{dv_2} \end{vmatrix} dv_1 dv_2 = \Sigma \iint \left(\frac{dX_r}{dz_t} - \frac{dX_t}{dz_r} \right) dz_r dz_t. \end{aligned}$$

Quindi l'integral doppio è nullo se in tutto R sono verificate anche le equazioni:

$$\frac{dX_r}{dz_t} - \frac{dX_t}{dz_r} = 0. \tag{2}$$

Dunque l'integrale

$$\Sigma \int X_r dz_r$$

esteso a tutte le linee l, L_1, L_2, \dots che formano il contorno di uno spazio C , è sempre nullo, qualunque sia la linea chiusa l , se le X_r soddisfano le (2) e sono finite e continue in R . Da ciò si ricava il teorema seguente:

Se in uno spazio R di n dimensioni, che ha la connessione di 1^a specie di ordine p_1 , sono s_1, s_2, \dots, s_{p_1} le sezioni trasverse di $n-1$ dimensioni, semplicemente connesse che rendono semplice la connessione di 1^a specie di R , ed L_1, L_2, \dots, L_{p_1} p_1 linee chiuse che incontrano rispettivamente le sezioni s_1, s_2, \dots, s_{p_1} e poniamo:

$$M_t = \Sigma \int_{L_t} X_r dz_r,$$

l'integrale:

$$\sum \int_{Z^0}^{Z^1} X_r dz_r$$

esteso tra due punti Z^0 e Z^1 lungo una linea che incontra più sezioni s , differirà da quello preso lungo una linea che va dal punto Z^0 al punto Z^1 senza incontrare nessuna sezione s , delle quantità M relative alle sezioni s incontrate, prese queste positivamente o negativamente secondo che sono incontrate progredendo in una o in altra direzione; se poi la connessione di 1^a specie dello spazio R è semplice, l'integrale preso lungo una linea qualunque che in R va da Z_0 a Z_1 ha sempre lo stesso valore.

Sopra le funzioni di una variabile complessa

(del prof. ULISSE DINI, a Pisa.)

CAUCHY ha dato lo sviluppo in serie di una funzione di una variabile complessa, monodroma finita e continua essa e le sue derivate prime dentro un cerchio, in funzione dei valori che essa ha sulla circonferenza. I signori LAURENT e NEUMANN hanno poi generalizzato il teorema di CAUCHY, dando gli sviluppi corrispondenti di una funzione per gli spazii compresi fra due cerchi concentrici o fra due ellissi omofocali, in funzione sempre dei valori che essa ha sul contorno di questi spazii. Ma una funzione di una variabile complessa è pienamente determinata in un dato campo, quando sono dati i valori della sua parte reale sul contorno ed è dato il valore della parte immaginaria in un punto (*); quindi gli sviluppi citati contengono qualche cosa di più di quello che è strettamente necessario alla determinazione della funzione negli spazii corrispondenti; e mentre ci dicono che se esiste una funzione che ha quei dati valori sul contorno di quelli spazii, e nell'interno si mantiene monodroma finita e continua insieme alle sue derivate prime, essa può svilupparsi in serie con quelle formole, non ci danno però il mezzo di determinare la funzione quando sono date le sole quantità che bastano effettivamente a determinarla. Per questo, credo utile di pubblicare la presente memoria nella quale dò gli sviluppi di una funzione di una variabile complessa nello spazio compreso fra due cerchi concentrici e nello spazio interno o esterno ad un cerchio e fra due ellissi omofocali, in funzione dei valori della sua parte reale sul contorno e del valore della parte immaginaria in un punto.

(*) Alla dimostrazione data da RIEMANN della esistenza di una funzione la cui parte reale prende valori dati sul contorno, ecc., si fanno varie obiezioni; io però in questo lavoro ammetterò l'esistenza della funzione parte reale, colla condizione che le sue derivate prime siano finite anche sul contorno, e allora essa sarà appunto quella che qui viene trovata.

1. Sia $w = u + iv$ la funzione di una variabile complessa cercata. Sono dati i valori della parte reale u sul contorno del nostro campo C che noi supporremo dapprima essere quello compreso fra due cerchi concentrici, ed è dato il valore della parte immaginaria v in un punto di C .

Si tratta di determinare w o u e v in un punto qualunque $M'(x', y')$ pure di C .

Incominceremo dal determinare u , e per questo ricorderemo che indicando con r la distanza dal punto M' a un altro punto $M(x, y)$ in un campo C , qualunque esso sia, e indicando con p la normale al contorno contata verso l'interno di C , per i teoremi di RIEMANN e di GREEN, se esisterà, come supponiamo, una funzione u che nell'interno di C è finita continua e ad un sol valore essa e le sue derivate prime, soddisfa alla equazione $\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0$, e sul contorno essa prende i valori dati e le sue derivate prime sono finite, questa funzione sarà unica, e il suo valore nel punto M' di C sarà dato dalla formola

$$u' = \frac{1}{2\pi} \int \left(\log r \frac{du}{dp} - u \frac{d \log r}{dp} \right) ds, \tag{1}$$

ove l'integrale del secondo membro è esteso a tutto il contorno di C .

Nel caso nostro adunque, indicando con s il cerchio maggiore e con s' il cerchio minore, si avrà

$$u' = \frac{1}{2\pi} \int_s \left(\log r \frac{du}{dp} - u \frac{d \log r}{dp} \right) ds + \int_{s'} \left(\log r \frac{du}{dp} - u \frac{d \log r}{dp} \right) ds'; \tag{2}$$

gli integrali essendo estesi ai cerchi s e s' rispettivamente; e ora per trovare u' basterà fare sparire da questa formola i valori di $\frac{du}{dp}$ sul contorno che non sono dati.

Poniamo perciò l'origine delle coordinate rettilinee e polari nel centro dei due cerchi e indichiamo con R e R' i raggi di questi cerchi s e s' , e con (ρ, θ) , (ρ', θ') le coordinate polari di M e M' . Osservando che

$$r = \{ \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta') \}^{\frac{1}{2}} = (\rho - \rho' e^{i(\theta - \theta')})^{\frac{1}{2}} (\rho - \rho' e^{-i(\theta - \theta')})^{\frac{1}{2}},$$

si trova che fuori del cerchio di raggio ρ' è:

$$\log r = \log \rho - \sum_1^{\infty} \frac{\rho'^n}{n \rho^n} \cos n(\theta - \theta'),$$

e dentro a questo cerchio:

$$\log r_1 = \log \rho' - \sum_1^{\infty} \frac{\rho'^n}{n \rho'^n} \cos n(\theta - \theta');$$

quindi sarà su s :

$$\begin{aligned} \log r_s &= \log R - \sum_1^{\infty} \frac{\rho'^n}{n R^n} \cos n(\theta - \theta'), \\ \frac{d \log r_s}{d \rho} &= - \left(\frac{d \log r}{d \rho} \right)_{\rho=R} = - \frac{1}{R} - \sum_1^{\infty} \frac{\rho'^n}{R^{n+1}} \cos n(\theta - \theta'), \end{aligned}$$

e su s' :

$$\begin{aligned} \log r_{s'} &= \log \rho' - \sum_1^{\infty} \frac{R'^n}{n \rho'^n} \cos n(\theta - \theta'), \\ \frac{d \log r_{s'}}{d \rho} &= \left(\frac{d \log r_1}{d \rho} \right)_{\rho=R'} = - \sum_1^{\infty} \frac{R'^{n+1}}{\rho'^n} \cos n(\theta - \theta'), \end{aligned}$$

e siccome alle serie che qui compariscono può applicarsi l'integrazione rispetto ad s e a s' , si avrà dalla (2):

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_s^u \frac{u}{R} ds + \int_s \log R \frac{du}{dp} ds + \int_{s'} \log \rho' \frac{du}{dp} ds' \right) \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_1^{\infty} \left\{ \int_s \frac{\rho'^n}{R^{n+1}} \cos n(\theta - \theta') ds + \int_{s'} u \frac{R'^{n-1}}{\rho'^n} \cos n(\theta - \theta') ds' - \right. \\ &\left. \frac{1}{n} \int_s \frac{\rho'^n}{R^n} \cos n(\theta - \theta') \frac{du}{dp} ds - \frac{1}{n} \int_{s'} \frac{R'^n}{\rho'^n} \cos n(\theta - \theta') \frac{du}{dp} ds' \right\}; \end{aligned} \right\} (3)$$

e quindi basterà ora fare sparire $\frac{du}{dp}$ dalle due somme

$$\left. \begin{aligned} &\int_s \log R \frac{du}{dp} ds + \int_{s'} \log \rho' \frac{du}{dp} ds', \\ &\int_s \frac{\rho'^n}{R^n} \cos n(\theta - \theta') \frac{du}{dp} ds + \int_{s'} \frac{R'^n}{\rho'^n} \cos n(\theta - \theta') \frac{du}{dp} ds'. \end{aligned} \right\} (4)$$

Per questo (seguendo un processo suggeritomi dal prof. BETTI, e già da lui applicato nella sua memoria *Sopra le funzioni sferiche*) userò del principio che, se F è una funzione di x e y che nell'interno di C e sul con-

torno si mantiene finita continua e a un sol valore, essa e le sue derivate prime, e soddisfa alla equazione $\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{d^2 F}{dy^2} = 0$, si ha

$$\int F \frac{du}{dp} ds = \int u \frac{dF}{dp} ds,$$

gli integrali essendo estesi a tutto il contorno di C ; e prenderò una volta:

$$F = A \log \rho + B,$$

e un'altra:

$$F = M \rho^n \cos n(\theta - \theta') + \frac{N}{\rho^n} \cos n(\theta - \theta'),$$

essendo A, B, M, N costanti da determinarsi.

Si trova così servendosi del primo valore di F :

$$\int (A \log R + B) \frac{du}{dp} ds + \int (A \log R' + B) \frac{du}{dp} ds' = - \int \frac{A}{R} u ds + \int \frac{A}{R'} u ds';$$

e quindi prendendo A e B in modo che si abbia

$$A \log R + B = \log R, \quad A \log R' + B = \log R',$$

cioè prendendo:

$$A = \frac{\log \frac{R}{R'}}{\log \frac{R}{R'}}, \quad B = \log R \frac{\log \frac{R'}{R}}{\log \frac{R}{R'}},$$

si avrà

$$\int \log R \frac{du}{dp} ds + \int \log R' \frac{du}{dp} ds' = \frac{1}{\log \frac{R}{R'}} \left(\frac{1}{R'} \log \frac{R}{R'} \int u ds' - \frac{1}{R} \log \frac{R}{R'} \int u ds \right)$$

e così è calcolata la prima delle somme (4).

Prendendo invece il secondo valore di F si trova:

$$\begin{aligned} & \int \left(MR^n + \frac{N}{R^n} \right) \cos n(\theta - \theta') \frac{du}{dp} ds + \int \left(MR'^n + \frac{N}{R'^n} \right) \cos n(\theta - \theta') \frac{du}{dp} ds' = \\ & = n \int u \left(MR'^{n-1} - \frac{N}{R'^{n+1}} \right) \cos n(\theta - \theta') ds' - n \int u \left(MR^{n-1} - \frac{N}{R^{n+1}} \right) \cos n(\theta - \theta') ds; \end{aligned}$$

e determinando M e N in modo che si abbia

$$MR^n + \frac{N}{R^n} = \frac{\rho'^n}{R^n}, \quad MR'^n + \frac{N}{R'^n} = \frac{R^n}{\rho'^n},$$

ciò prendendo:

$$M = \frac{\rho'^{2n} - R'^{2n}}{\rho'^n (R^{2n} - R'^{2n})}, \quad N = \frac{R'^{2n} R^{2n} - \rho'^{2n}}{\rho'^n R^{2n} - R'^{2n}},$$

resterà determinata anche la seconda delle somme (4).

Sostituendo ora nella (3) per le somme (4) i valori trovati, si otterrà subito pel valore di u' :

$$\left. \begin{aligned} u' = & \frac{1}{2\pi \log \frac{R}{R'}} \left(\frac{1}{R'} \log \frac{R}{\rho'} \int u ds' - \frac{1}{R} \log \frac{R'}{\rho'} \int u ds \right) + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{R^{n-1}}{\rho'^n} \frac{\rho'^{2n} - R'^{2n}}{R^{2n} - R'^{2n}} \int u \cos n(\theta - \theta') ds + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{R'^{n-1}}{\rho'^n} \frac{R^{2n} - \rho'^{2n}}{R^{2n} - R'^{2n}} \int u \cos n(\theta - \theta') ds', \end{aligned} \right\} (5)$$

ovvero, indicando con u_s e $u_{s'}$ i valori dati di u su s e su s' ,

$$\left. \begin{aligned} u' = & \frac{1}{2\pi \log \frac{R}{R'}} \left(\log R \int_0^{2\pi} u_s d\theta - \log R' \int_0^{2\pi} u_s d\theta \right) + \frac{\log \rho'}{2\pi \log \frac{R}{R'}} \int_0^{2\pi} (u_s - u_{s'}) d\theta + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{R^n}{\rho'^n} \frac{\rho'^{2n} - R'^{2n}}{R^{2n} - R'^{2n}} \int_0^{2\pi} u_s \cos n(\theta - \theta') d\theta + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{R'^n}{\rho'^n} \frac{R^{2n} - \rho'^{2n}}{R^{2n} - R'^{2n}} \int_0^{2\pi} u_{s'} \cos n(\theta - \theta') d\theta, \end{aligned} \right\} (6)$$

ovvero infine

$$\left. \begin{aligned} u' = & \frac{1}{2\pi \log \frac{R}{R'}} \left(\log R \int_0^{2\pi} u_s d\theta - \log R' \int_0^{2\pi} u_s d\theta \right) + \frac{\log \rho'}{2\pi \log \frac{R}{R'}} \int_0^{2\pi} (u_s - u_{s'}) d\theta + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\rho'^n}{R^{2n} - R'^{2n}} \int_0^{2\pi} (R^n u_s - R'^n u_{s'}) \cos n(\theta - \theta') d\theta + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{R^n R'^n}{\rho'^n (R^{2n} - R'^{2n})} \int_0^{2\pi} (R^n u_{s'} - R'^n u_s) \cos n(\theta - \theta') d\theta. \end{aligned} \right\} (7)$$

Tali sono le espressioni che la formola (2) ci somministra pel valore di u' nell'interno e anche sul contorno di C , quando i valori di u al contorno che vi compariscono sono tali che si possono soddisfare tutte le condizioni

poste in principio. — In un altro lavoro che pubblicherò quanto prima, tornerò sopra questi risultati, e allora mi occuperò anche del caso in cui la funzione deve soddisfare alle stesse condizioni nell'interno del campo che si considera, e sul contorno deve soddisfare soltanto alla condizione di prendere i valori dati senza che in essa avvenga rottura di continuità quando dall'interno del campo ci si avvicina indefinitamente al contorno stesso.

Osservazione. È da notare che per la formola (7) si può dire che se una funzione u nello spazio compreso fra due cerchi concentrici è finita continua e a un sol valore, essa e le sue derivate prime, e soddisfa alla equazione $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$, e prende valori costanti sui due cerchi e su questi cerchi le sue derivate prime sono finite, essa è della forma $A \log \rho + B$, ove A e B sono costanti; e se i valori costanti che prende sui due cerchi sono uguali, essa è costante per tutto.

2. Passiamo ora a calcolare la funzione v' .

Per questo osserviamo che si ha

$$\frac{dv'}{d\rho'} = -\frac{du'}{\rho' d\theta'}, \quad \frac{dv'}{d\theta'} = \rho' \frac{du'}{d\rho'},$$

e quindi sarà

$$v' = \int \left(-\frac{du'}{\rho' d\theta'} d\rho' + \rho' \frac{du'}{d\rho'} d\theta' \right),$$

estendendo l'integrale a una curva qualunque che va dal punto $A(\rho_0, \theta_0)$ in cui è dato il valore di v al punto $M'(\rho', \theta')$.

Prendendo dunque per linea d'integrazione la linea composta della porzione di raggio vettore θ_0 da $\rho' = \rho_0$ fino a $\rho' = \rho'$, e della porzione di circonferenza ρ' da $\theta' = \theta_0$ fino a $\theta' = \theta'$, e osservando che dentro lo spazio C le serie (6) e (7) sono convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini, si concluderà che per tutti i punti di C ad eccezione di quelli del contorno (pei quali quì resta dubbio) si ha

$$v' = \frac{\theta'}{2\pi \log \frac{R}{R_0}} \int_0^{2\pi} (u_s - u_{s'}) d\theta - \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{R^n \rho'^{2n} + R^{2n}}{\rho'^n R^{2n} - R'^{2n}} \int_0^{2\pi} u_s \operatorname{sen} n(\theta - \theta') d\theta + \left. \begin{aligned} & + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{R^n \rho'^{2n} + R^{2n}}{\rho'^n R^{2n} - R'^{2n}} \int_0^{2\pi} u_{s'} \operatorname{sen} n(\theta - \theta') d\theta + c, \end{aligned} \right\} (8)$$

ovvero:

$$v' = \frac{\theta'}{2\pi \log \frac{R}{R'_0}} \int_0^{2\pi} (u_s - u_{s'}) d\theta - \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\rho'^n}{R^{2n} - R'^{2n}} \int_0^{2\pi} (R^n u_s - R'^n u_{s'}) \operatorname{sen}(\theta - \theta') d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{R^n R'^n}{\rho'^n (R^{2n} - R'^{2n})} \int_0^{2\pi} (R^n u_{s'} - R'^n u_s) \operatorname{sen} n(\theta - \theta') d\theta + c, \quad (9)$$

essendo c una costante che dipende dal valore di v nel punto (ρ_0, θ_0) .

Così è trovato anche il valore di v' , cioè del coefficiente di i nella funzione $u + iv$, nel campo G , in funzione dei valori che la parte reale u ha sul contorno; però, siccome supponiamo che R' non sia zero e R non sia infinito, questo valore di v' , contenendo il termine

$$\frac{\theta'}{2\pi \log \frac{R}{R'_0}} \int_0^{2\pi} (u_s - u_{s'}) d\theta,$$

viene finito e continuo esso e le sue derivate nell'interno dei due cerchi e soddisfa alla equazione $\frac{d^2 v'}{d x'^2} + \frac{d^2 v'}{d y'^2} = 0$, ma, a meno che non si riduca semplicemente connesso il nostro campo con una sezione trasversa, esso non è a un sol valore altro che quando i valori dati di u sui due cerchi sono tali che si ha

$$\int_0^{2\pi} (u_s - u_{s'}) d\theta = 0.$$

Tutte le derivate di v' però fra i due cerchi oltre esser finite e continue sono anche a un sol valore.

3. Moltiplicando per i questo valore (9) di v' , e sommandolo col valore (7) di u' , si ottiene

$$w' = u' + i v' = \frac{1}{2\pi \log \frac{R}{R'_0}} \left(\log R \int_0^{2\pi} u_{s'} d\theta - \log R' \int_0^{2\pi} u_s d\theta \right) + \frac{1}{2\pi \log \frac{R}{R'_0}} (\log \rho' + i\theta') \int_0^{2\pi} (u_s - u_{s'}) d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\rho'^n}{R^{2n} - R'^{2n}} \int_0^{2\pi} (R^n u_s - R'^n u_{s'}) e^{-in(\theta - \theta')} d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{R^n R'^n}{\rho'^n (R^{2n} - R'^{2n})} \int_0^{2\pi} (R^n u_{s'} - R'^n u_s) e^{in(\theta - \theta')} d\theta + ic,$$

ovvero, ponendo $\rho' e^{i\theta'} = z'$,

$$\begin{aligned}
 w' = & \frac{1}{2\pi \log \frac{R}{R'}} \left(\log R \int_0^{2\pi} u_s d\theta - \log R' \int_0^{2\pi} u_{s'} d\theta + \frac{1}{2\pi \log \frac{R}{R'}} \log z' \int_0^{2\pi} (u_s - u_{s'}) d\theta + \right. \\
 & + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{z'^n}{R^{2n} - R'^{2n}} \int_0^{2\pi} (R^n u_s - R'^n u_{s'}) e^{-in\theta} d\theta + \\
 & \left. + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{R^n R'^n}{z'^n (R^{2n} - R'^{2n})} \int_0^{2\pi} (R^n u_{s'} - R'^n u_s) e^{in\theta} d\theta + ic, \right) \quad (10)
 \end{aligned}$$

e così abbiamo il valore di w' in funzione dei valori di u sul contorno.

Questo valore di w' viene dato per una serie ordinata per le potenze intere positive e negative di z' e contiene inoltre un termine in $\log z'$; quindi, non intendendo ridotto il campo G semplicemente connesso, si può dire che quando si prenderanno arbitrariamente i valori della parte reale u sul contorno, senza altre condizioni che quelle poste al § 1, la funzione w in generale non verrà monodroma, ma conterrà il termine

$$\frac{\log z'}{2\pi \log \frac{R}{R'}} \int_0^{2\pi} (u_s - u_{s'}) d\theta;$$

e quindi per ogni giro attorno al centro dei due cerchi, tornando allo stesso punto, la funzione verrà aumentata della costante immaginaria

$$\frac{i}{\log \frac{R}{R'}} \int_0^{2\pi} (u_s - u_{s'}) d\theta.$$

Questo si presenta qui come caso particolare di una proprietà generale enunciata da RIEMANN nella sua dissertazione inaugurale.

Le derivate di w' però fra i due cerchi oltre esser finite e continue saranno anche monodrome.

4. La condizione necessaria e sufficiente affinchè nello spazio compreso fra due cerchi concentrici la funzione w , che corrisponde ai valori $u_s, u_{s'}$ della parte reale sul contorno, sia monodroma, viene dunque espressa dalla equazione

$$\int_0^{2\pi} (u_s - u_{s'}) d\theta = 0; \quad (11)$$

e quando questa sia soddisfatta, sarà:

$$w' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_s d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{z'^n}{R^{2n} - R'^{2n}} \int_0^{2\pi} (R^n u_s - R'^n \bar{u}_s) e^{-in\theta} d\theta + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{R^n R'^n}{z'^n (R^{2n} - R'^{2n})} \int_0^{2\pi} (R^n u_s - R'^n u_s) e^{in\theta} d\theta + ic. \end{aligned} \right\} (12)$$

In particolare, se $u_s = u_s'$, la funzione w risulterà monodroma, e si avrà

$$w' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_s d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{z'^n}{R^n + R'^n} \int_0^{2\pi} u_s e^{-in\theta} d\theta + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{z'^n (R^{-n} + R'^{-n})} \int_0^{2\pi} u_s e^{in\theta} d\theta + ic. \end{aligned} \right\} (13)$$

In generale poi si può notare che, siccome $u_s - u_s'$ è una funzione di θ fra 0 e 2π che può svolgersi in serie colla formola di FOURIER, la condizione di monodromia della funzione w porterà che nello sviluppo di $u_s - u_s'$, secondo la serie di FOURIER, si abbia

$$\left. \begin{aligned} u_s - u_s' &= a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + a_3 \cos 3\theta + \dots \\ &+ b_1 \sin \theta + b_2 \sin 2\theta + b_3 \sin 3\theta + \dots \end{aligned} \right\} (14)$$

cioè che manchi il termine indipendente da θ ; e siccome alle serie di FOURIER può applicarsi l'integrazione (*), quando questa condizione sia soddisfatta, si avrà

$$w' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_s d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{z'^n}{R^n + R'^n} \int_0^{2\pi} u_s e^{-in\theta} d\theta + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{z'^n (R^{-n} + R'^{-n})} \int_0^{2\pi} u_s e^{in\theta} d\theta + \\ &+ \sum_1^{\infty} \frac{z'^n R'^n}{R^{2n} - R'^{2n}} (a_n - i b_n) - \sum_1^{\infty} \frac{R^{2n} R'^n}{z'^n (R^{2n} - R'^{2n})} (a_n + i b_n) + ic. \end{aligned} \right\} (15)$$

5. Facciamo ora alcune osservazioni sui risultati che precedono.

(*) Queste proprietà delle serie di FOURIER sarà dimostrata nel lavoro di cui ho parlato alla fine del § 1.

I. La condizione di monodromia (11) della funzione w sarà evidentemente soddisfatta anche per due cerchi qualunque nell'interno di C concentrici ai due cerchi dati s e s' e vicini fra loro quanto si vuole; e quindi supponendo questi due cerchi infinitamente vicini l'uno a l'altro, si avrà evidentemente [come anche risulta subito dalle formole (7) e (11)]

$$\int_{s_1} \frac{du}{dp} ds_1 = 0, \quad \text{e} \quad \int_{s_1} \frac{dw}{dp} ds_1 = 0,$$

quando si estendano questi integrali a un cerchio qualunque s_1 interno a C e concentrico ai due cerchi dati.

Da ciò risulta che, avendo uno spazio qualunque S nel quale una funzione w di una variabile complessa si mantiene monodroma finita e continua essa e le sue derivate prime, e tracciando in questo spazio una curva chiusa qualunque σ che formi il contorno completo di una porzione di S , o tale che si possano costruire due cerchi concentrici s e s' che non taglino σ e con ciascuno dei quali σ formi il contorno completo di una parte di S , si avrà

$$\int_{\sigma} \frac{dw}{dp} d\sigma = 0;$$

giacchè nel primo caso questo risulta subito da un teorema noto, e nel secondo costruendo un terzo cerchio s_1 fra s e s' e concentrico a questi, per ciò che precede, si avrà

$$\int_{s_1} \frac{dw}{dp} ds_1 = 0,$$

e quindi, poichè per un teorema noto si ha

$$\int_{s_1} \frac{dw}{dp} ds_1 + \int_{\sigma} \frac{dw}{dp} d\sigma = 0,$$

sarà anche

$$\int_{\sigma} \frac{dw}{dp} d\sigma = 0.$$

II. Nel caso in cui la condizione di monodromia

$$\int_0^{2\pi} (u_s - u_{s'}) d\theta = 0$$

è soddisfatta, la serie (12) che abbiamo trovata per w' si trasforma facilmente in quella di LAURENT.

Indicando infatti con w_{ρ_1} il valore di w sul cerchio di raggio ρ_1 interno a C e concentrico ai cerchi s e s' , la (12) ci darà le formole seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} w_{\rho_1} d\theta' &= -i \int_{\rho_1} \frac{w}{z} dz = \int_0^{2\pi} u_s d\theta + 2\pi ic, \\ \frac{1}{\rho_1^n} \int_0^{2\pi} w_{\rho_1} e^{-in\theta'} d\theta' &= -i \int_{\rho_1} \frac{w}{z^{n+1}} dz = \frac{2}{R^{2n} - R'^{2n}} \int_0^{2\pi} (R^n u_s - R'^n u_{s'}) d\theta, \\ \rho_1^n \int_0^{2\pi} w_{\rho_1} e^{in\theta'} d\theta' &= -i \int_{\rho_1} w z^{n-1} dz = \frac{2R^n R'^n}{R^{2n} - R'^{2n}} \int_0^{2\pi} (R^n u_s - R'^n u_{s'}) d\theta, \end{aligned} \right\} (16)$$

che sono abbastanza notevoli; e ora applicando queste formole una volta al cerchio di raggio ρ e un'altra al cerchio di raggio ρ_1 , essendo $R' < \rho_1 < \rho < R$, e sostituendo nella (12) si otterrà la seguente:

$$w' = \frac{1}{2\pi i} \sum_0^{\infty} z'^n \int_{\rho} \frac{w}{z^{n+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \sum_1^{\infty} \frac{1}{z'^n} \int_{\rho_1} w z^{n-1} dz, \quad (17)$$

che è quella di LAURENT pei due cerchi ρ e ρ_1 .

Da questa [come anche dalla (12) servendosi della (16)] si ottiene l'altra:

$$w' = \frac{1}{2\pi i} \sum_0^{\infty} z'^n \int_{\rho} \frac{w}{z^{n+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \sum_1^{\infty} \frac{1}{z'^n} \int_{\rho} w z^{n-1} dz, \quad (18)$$

che fu pure data da LAURENT; e questa, contenendo soltanto i valori di w sul cerchio di raggio ρ interno ai due s e s' , ci mostra che quando esiste una funzione di una variabile complessa che è monodroma finita e continua insieme alle sue derivate nel campo compreso fra due cerchi concentrici e prende dati valori su un terzo cerchio ρ interno e concentrico a questo, essa sarà data dalla serie (18).

III. Se si cercassero le funzioni u , v e w entro un cerchio di raggio R , si troverebbe coi metodi precedenti

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_s d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\rho'^n}{R^n} \int_0^{2\pi} u_s \cos n(\theta - \theta') d\theta, \\ v' &= -\frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\rho'^n}{R^n} \int_0^{2\pi} u_s \operatorname{sen} n(\theta - \theta') d\theta + c, \\ w' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_s d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{z_1'^n}{R^n} \int_0^{2\pi} u_s e^{-in\theta} d\theta + ic; \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

quindi in questo caso la funzione w viene monodroma qualunque siano i valori dati per la parte reale sul contorno; e il valore della sua parte reale nel centro del cerchio è

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_s d\theta.$$

Volendo invece una funzione come w di una variabile complessa z nello spazio esterno al cerchio R , quando sono dati i valori della sua parte reale su questo cerchio, ed è posta la condizione che all'infinito la funzione sia costante e il prodotto $\frac{dw}{dz} z^3$ si mantenga finito, si osserverà che ponendo $z = \frac{R^2}{z_1}$, e prendendo z_1 per variabile, w verrà una funzione di z_1 che sarà monodroma finita e continua essa e le sue derivate prime nel cerchio di raggio R (descritto sul piano di z_1), e su questo cerchio la sua parte reale prenderà ancora i valori dati ma in senso opposto; e quindi le formole corrispondenti a questo caso saranno quelle che si ottengono dalle precedenti (19) cangiandovi ρ' in $\frac{R^2}{\rho'}$, $\theta' in -\theta'$, e u_s in $u_s(-\theta)$, e si potranno ridurre alle seguenti:

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_s d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{R^n}{\rho'^n} \int_0^{2\pi} u_s \cos n(\theta - \theta') d\theta, \\ v' &= \frac{1}{2\pi} \sum_1^{\infty} \frac{R^n}{\rho'^n} \int_0^{2\pi} u_s \operatorname{sen} n(\theta - \theta') d\theta + c, \\ w' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_s d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{R^n}{z_1'^n} \int_0^{2\pi} u_s e^{in\theta} d\theta + ic \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

quando vi si cangi θ in $2\pi - \theta$ e si supponga $u_s(\theta - 2\pi) = u_s(\theta) = u_s$; e sotto questa forma si vede che esse, come le (19), risultano da quelle date pel caso di due cerchi R e R' , quando vi si faccia rispettivamente $R=0$ o $R'=0$, e si cangi poi nel primo caso R' in R , e u_s in u_s .

6. Cerchiamo ora lo sviluppo della nostra funzione w di una variabile complessa nel campo racchiuso da due ellissi omofocali, in funzione dei valori che la parte reale ha sul contorno.

Per questo potremmo ancora seguire il metodo precedente; ma io preferisco di seguirne un altro (che può applicarsi anche in altri casi), deducendo uno sviluppo della funzione cercata da quello che abbiamo trovato nel caso di due cerchi.

Indichiamo perciò con z_1 la nostra variabile complessa; con $2d$ la distanza focale delle ellissi date, e con α e β i parametri isometrici del doppio sistema di ellissi e iperbole omofocali di cui queste ellissi date fanno parte. Le formole che esprimono x_1, y_1, z_1 per α e β saranno le seguenti

$$x_1 = d \cosh \alpha \cos \beta, \quad y_1 = d \operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \beta, \quad z_1 = d \cos(\beta - i\alpha); \quad (21)$$

e con queste, facendo variare α da 0 a ∞ e β da 0 a 2π , si otterranno tutti i punti del nostro piano z_1 . Le ellissi date corrisponderanno a due valori particolari α_0 e α_1 di α .

Consideriamo ora un altro piano z , e rappresentiamolo su z_1 in modo che si abbia la similitudine nelle parti infinitesime. Il sistema di coordinate polari (ρ, θ) costituisce su questo piano un doppio sistema di coordinate ortogonali e isoterme di cui i parametri isometrici sono $\log \rho$ e θ ; quindi, poichè anche le linee α, β su z_1 sono esse pure ortogonali e isoterme, potremo stabilire la corrispondenza in modo da ottenere che alle circonferenze ρ corrispondano le ellissi α , e alle semi-rette θ i rami di iperbola β . Per questo basterà porre

$$\log \rho + i\theta = m(\alpha \pm i\beta) + n + in',$$

essendo m, n, n' costanti arbitrarie reali; e se vogliamo che percorrendo una intera circonferenza ρ su z si venga a percorrere una intiera ellisse α su z_1 e nello stesso senso, bisognerà prendere $m = \pm 1$ secondochè si prende il segno superiore o l'inferiore di $i\beta$. Inoltre potremo prendere $n' = 0$, poichè ciò equivale a fare corrispondere l'asse delle x_1 a quello delle x , e potremo porre $n = -\log c$, essendq c una costante positiva.

Si avrà così per la nostra corrispondenza

$$\log c + \log \rho + i\theta = \log cz = \pm \alpha + i\beta, \quad (22)$$

e per la (21) questa corrispondenza potrà esprimersi anche colle formole

$$x_1 = d \cosh(\pm \log c\rho) \cos \theta, \quad y_1 = d \operatorname{sen} h(\pm \log c\rho) \operatorname{sen} \theta; \quad (23)$$

e noi vediamo perciò che quando si prenda il segno superiore di α nella (22), o il segno superiore di $\log c\rho$ in queste ultime, ρ non potrà essere minore di $\frac{1}{c}$, e quando si prenda il segno inferiore ρ non potrà essere maggiore di $\frac{1}{c}$; e quindi, osservando anche che per $\rho = \frac{1}{c}$ si ha sempre dalle (23) $x_1 = d \cos \theta$, $y_1 = 0$, e per $\theta = 0$ si ha $x_1 = d \cosh(\pm \log c\rho)$, $x_1 = 0$, si potrà dire che, le rappresentazioni su z_1 dei punti di z esterni al cerchio di raggio $\frac{1}{c}$, e quelle dei punti interni a questo cerchio ricuoprono ambedue il piano z_1 , e per tutte e due queste rappresentazioni il cerchio limite $\frac{1}{c}$ viene rappresentato sulla porzione di asse delle x_1 compreso fra i fuochi, mentre le altre porzioni di quest'asse rappresentano la porzione di asse delle x che si trova nel campo rappresentato.

Qui prenderemo il segno superiore di α e di $\log c\rho$, intendendo perciò che sia sempre $\rho \geq \frac{1}{c}$; allora la corrispondenza fra i punti dei due piani z e z_1 potrà esprimersi colla equazione

$$z_1 = \frac{d}{2} \left(cz + \frac{1}{cz} \right), \quad (24)$$

e al cerchio di raggio ρ corrisponderà l'ellisse α per la quale $\alpha = \log c\rho$, o $\rho = \frac{e^\alpha}{c}$, e il cui semi-asse maggiore a è dato dalla formola $a = \frac{d}{2} \left(c\rho + \frac{1}{c\rho} \right)$. Le ellissi α_0 e α_1 corrisponderanno ai due cerchi R e R' pei quali $R = \frac{e^{\alpha_0}}{c}$, $R' = \frac{e^{\alpha_1}}{c}$, e se $\alpha_0 > \alpha_1$ sarà $R > R'$, e allo spazio racchiuso fra questi cerchi corrisponderà lo spazio fra le dette ellissi.

Inoltre per la (24) si avrà

$$cdz = z_1 + \sqrt{z_1^2 - d^2},$$

e il radicale dovrà essere preso in modo che per z_1 positivo e maggiore di d sia positivo; e così, fra le due ellissi, $\sqrt{z_1^2 - d^2}$ sarà bene determinato per ogni valore di z_1 .

Con ciò si vede subito che una funzione di una variabile complessa z , monodroma finita e continua essa e le sue derivate prime nello spazio racchiuso fra due cerchi concentrici, può trasformarsi in una funzione di una altra variabile complessa z_1 dotata delle stesse proprietà nello spazio racchiuso fra due ellissi omofocali; e ora siccome si ha $\rho = \frac{e^x}{c}$, $\theta = \beta$, $R = \frac{e^{\alpha_0}}{c}$, $R' = \frac{e^{\alpha_1}}{c}$, e $R > R'$ se $\alpha_0 > \alpha_1$, si conclude subito che, per avere i valori cercati di u' , v' , w' fra le due ellissi α_0 e α_1 in funzione dei valori di u sul contorno e in coordinate ellittiche α e β , non vi è altro da fare che sostituire nelle formole (7) (9) e (10) per ρ , θ , R , R' questi loro valori. Si trova così

$$u' = \frac{1}{2\pi(\alpha_0 - \alpha_1)} \left(\alpha_1 \int_0^{2\pi} u_1 d\beta - \alpha_0 \int_0^{2\pi} u_0 d\beta \right) + \frac{\alpha'}{2\pi(\alpha_0 - \alpha_1)} \int_0^{2\pi} (u_0 - u_1) d\beta + \left. \begin{aligned} & + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{e^{n\alpha'}}{e^{2n\alpha_0} - e^{2n\alpha_1}} \int_0^{2\pi} (e^{n\alpha_0} u_0 - e^{n\alpha_1} u_1) \cos n(\beta - \beta') d\beta + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{e^{n(\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha')}}{e^{2n\alpha_0} - e^{2n\alpha_1}} \int_0^{2\pi} (e^{n\alpha_0} u_1 - e^{n\alpha_1} u_0) \cos n(\beta - \beta') d\beta, \end{aligned} \right\} (25)$$

$$v' = \frac{\beta'}{2\pi(\alpha_0 - \alpha_1)} \int_0^{2\pi} (u_0 - u_1) d\beta - \left. \begin{aligned} & - \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{e^{n\alpha'}}{e^{2n\alpha_0} - e^{2n\alpha_1}} \int_0^{2\pi} (e^{n\alpha_0} u_0 - e^{n\alpha_1} u_1) \sin n(\beta - \beta') d\beta + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{e^{n(\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha')}}{e^{2n\alpha_0} - e^{2n\alpha_1}} \int_0^{2\pi} (e^{n\alpha_0} u_1 - e^{n\alpha_1} u_0) \sin n(\beta - \beta') d\beta + c, \end{aligned} \right\} (26)$$

$$w' = \frac{1}{2\pi(\alpha_0 - \alpha_1)} \left(\alpha_0 \int_0^{2\pi} u_1 d\beta - \alpha_1 \int_0^{2\pi} u_0 d\beta \right) + \frac{\alpha' + i\beta'}{2\pi(\alpha_0 - \alpha_1)} \int_0^{2\pi} (u_0 - u_1) d\beta + \left. \begin{aligned} & + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{e^{n(\alpha' + i\beta')}}{e^{2n\alpha_0} - e^{2n\alpha_1}} \int_0^{2\pi} (e^{n\alpha_0} u_0 - e^{n\alpha_1} u_1) e^{-in\beta} d\beta + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{e^{n(\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha' - i\beta')}}{e^{2n\alpha_0} - e^{2n\alpha_1}} \int_0^{2\pi} (e^{n\alpha_0} u_1 - e^{n\alpha_1} u_0) e^{in\beta} d\beta + ic, \end{aligned} \right\} (27)$$

ove u_0 e u_1 indicano i valori dati di u sopra le ellissi α_0 e α_1 rispettivamente.

Volendo introdurre in w' la variabile z'_1 che ora possiamo chiamare z' , si vede dalle (21) che basta porre $\frac{z' + \sqrt{z'^2 - d^2}}{d}$ al posto di $e^{\alpha' + i\beta'}$, e intendere che il radicale sia preso ancora in modo che per z' positivo e maggiore di d sia positivo.

La condizione di monodromia di w viene ora espressa dalla equazione

$$\int_0^{2\pi} (u_0 - u_1) d\beta = 0.$$

Supponendo nelle formole precedenti $\alpha_1 = 0$, si ottengono i valori di u' , v' , w' entro una ellisse nella quale è fatta una sezione rettilinea limitata ai due fuochi, in funzione dei valori della parte reale sull'ellisse e su questa sezione rettilinea. Il valore di w' è

$$\left. \begin{aligned} w' = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1 d\beta + \frac{\alpha' + i\beta'}{2\pi\alpha_0} \int_0^{2\pi} (u_0 - u_1) d\beta + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{e^{n(\alpha' + i\beta')}}{e^{2n\alpha_0} - 1} \int_0^{2\pi} (e^{n\alpha_0} u_0 - u_1) e^{-in\beta} d\beta + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_5^{\infty} \frac{e^{n(\alpha_0 - \alpha' - i\beta')}}{e^{2n\alpha_0} - 1} \int_0^{2\pi} (e^{n\alpha_0} u_1 - u_0) e^{in\beta} d\beta + ic. \end{aligned} \right\} (28)$$

Dalla formola di LAURENT poi se ne deduce una analoga pel caso attuale cambiandovi z in $z + \sqrt{z^2 - d^2}$ e z' in $z' + \sqrt{z'^2 - d^2}$.

Pisa, 15 ottobre 1870.

Sopra alcune formole generali della teoria delle superficie, e loro applicazioni

(del prof. ULISSE DINI, a Pisa.)

In questa memoria, facendo la rappresentazione di una superficie non sviluppabile S sulla sfera di raggio $=1$, col metodo di GAUSS, e considerando le linee sferiche che corrispondono alle linee coordinate u e v di S (che suppongo qualunque) e l'elemento lineare sferico corrispondente, stabilisco prima di tutto alcune formole generali che contengono i coefficienti di questo elemento lineare sferico e altre quantità relative alla superficie S . Dopo, faccio alcune considerazioni su queste formole e sulle asintotiche delle superficie, e poi passo a fare alcune applicazioni delle medesime formole, per mostrarne l'utilità e fare risaltare sempre più i vantaggi che si hanno nello studio delle superficie quando si fa uso della loro rappresentazione sferica, e si tiene conto della forma che prende l'elemento lineare sferico nelle coordinate u e v che corrispondono a quelle u e v della superficie.

Per fare queste applicazioni suppongo dapprima che le linee coordinate sulla superficie S siano le asintotiche; e allora, per mezzo delle formole stabilite in principio, giungo ad altre pure generali che conducono poi, in particolare, a dei risultati notevoli relativi alle superficie di curvatura costante negativa e a quelle di area minima. Suppongo poi che uno solo dei due sistemi di linee coordinate sia formato di asintotiche, e l'altro sia formato dalle linee che sono a tangenti conjugate colle traiettorie ortogonali di queste asintotiche; e in questo caso applico prima le formole date in principio alla ricerca delle superficie nelle quali le asintotiche di un sistema sono eliche appartenenti a cilindri paralleli fra loro, e riduco la determinazione di queste superficie alla soluzione di uno dei più semplici problemi della teoria del calore; e poi applico le stesse formole alla trattazione di alcuni problemi sulle superficie gobbe.

Formole generali.

1. Prendiamo su una superficie non sviluppabile S due sistemi di linee coordinate i cui parametri siano u e v . Le coordinate cartesiane x, y, z dei punti di questa superficie e i coseni X, Y, Z degli angoli che la normale ad essa fa coi tre assi saranno funzioni di u e v , e insieme alla relazione $\Sigma X^2=1$, e a quelle che se ne deducono colla derivazione, si avranno, come è noto, le formole seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{du} &= M \frac{dX}{du} + N \frac{dX}{dv}, & \frac{dx}{dv} &= P \frac{dX}{du} + Q \frac{dX}{dv}, \\ \frac{dy}{du} &= M \frac{dY}{du} + N \frac{dY}{dv}, & \frac{dy}{dv} &= P \frac{dY}{du} + Q \frac{dY}{dv}, \\ \frac{dz}{du} &= M \frac{dZ}{du} + N \frac{dZ}{dv}, & \frac{dz}{dv} &= P \frac{dZ}{du} + Q \frac{dZ}{dv}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ove M, N, P, Q sono certe funzioni di u e v .

Rappresentiamo ora la superficie S sulla sfera di raggio $=1$, col metodo di GAUSS. Il punto della sfera che corrisponde a quello della superficie di coordinate u e v , cioè al punto (x, y, z) , avrà per coordinate cartesiane X, Y, Z e per coordinate curvilinee u e v ; e il quadrato dell'elemento lineare sferico in queste coordinate sarà

$$ds'^2 = E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2, \quad (2)$$

ove

$$E' = \Sigma \left(\frac{dX}{du} \right)^2, \quad F' = \Sigma \frac{dX}{du} \frac{dX}{dv}, \quad G' = \Sigma \left(\frac{dX}{dv} \right)^2. \quad (3)$$

Troviamo ora le relazioni che esistono fra questi coefficienti E', F', G' dell'elemento lineare sferico, e le quantità M, N, P, Q che compariscono nelle formole (1).

Per questo osserviamo che uguagliando fra loro i due valori di $\frac{d^2x}{du dv}$ tratti dalle due prime delle (1), e indicando con M'_u, M'_v, N'_u, \dots le derivate di M, N, \dots rispetto ad u e v , si ha la equazione

$$(M'_v - P'_u) \frac{dX}{du} + (N'_v - Q'_u) \frac{dX}{dv} + (M - Q) \frac{d^2X}{du dv} + N \frac{d^2X}{dv^2} - P \frac{d^2X}{du^2} = 0, \quad (4)$$

e se ne avrebbero due simili in Y e Z considerando le altre equazioni (1);

e ora da queste, moltiplicandole una volta per X, Y, Z , un'altra per $\frac{dX}{du}, \frac{dY}{du}, \frac{dZ}{du}$, e un'altra infine per $\frac{dX}{dv}, \frac{dY}{dv}, \frac{dZ}{dv}$, e sommandole ogni volta col-
l'averle riguardo alle equazioni (3) e alle altre $\sum X \frac{dX}{du} = 0, \sum X \frac{dX}{dv} = 0$, non
che a quelle che si deducono da queste e dalle (3) con sole derivazioni,
si otterranno le seguenti equazioni:

$$\left. \begin{aligned} (M - Q)F' + NG' - PE' &= 0, \\ (M'_u - P'_u)E' + (N'_u - Q'_u)F' + \frac{1}{2}(M - Q)\frac{dE'}{dv} - \frac{1}{2}P\frac{dE'}{du} + N\left(\frac{dF'}{dv} - \frac{1}{2}\frac{dG'}{du}\right) &= 0, \\ (M'_v - P'_v)F' + (N'_v - Q'_v)G' + \frac{1}{2}(M - Q)\frac{dG'}{du} + \frac{1}{2}N\frac{dG'}{dv} - P\left(\frac{dF'}{du} - \frac{1}{2}\frac{dE'}{dv}\right) &= 0, \end{aligned} \right\} (5)$$

che sono quelle che volevamo stabilire, e delle quali parlavamo in principio.

2. Queste equazioni, nella ipotesi che E', F', G' appartengano ad una sfera di raggio = 1, e X, Y, Z siano le coordinate dei punti di questa sfera ecc., esprimono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le equazioni (1) appartengano ad una superficie di cui X, Y, Z sono i coseni degli angoli che la normale fa coi tre assi. Per ciò che precede infatti, quando le (1) appartengano a una superficie, le equazioni (5) saranno sempre soddisfatte; e reciprocamente, se esse saranno soddisfatte, le equazioni (1), ove M, N, P, Q hanno i valori che compariscono nelle (5), apparterranno a una superficie di cui X, Y, Z sono i coseni degli angoli che la normale fa coi tre assi, giacchè in questo caso indicando con A, B, C i primi membri della equazione (4) e delle sue analoghe in Y e Z , avremo:

$$\sum AX = 0, \quad \sum A \frac{dX}{du} = 0, \quad \sum A \frac{dX}{dv} = 0;$$

e quindi, poichè il determinante formato coi coefficienti di A, B, C in queste equazioni non è nullo, avremo $A = B = C = 0$, e perciò le espressioni $\frac{dx}{du}du + \frac{dx}{dv}dv, \dots$ dedotte dalle (1) saranno differenziali esatti, e i loro integrali in conseguenza saranno le coordinate dei punti di una superficie di cui X, Y, Z saranno i coseni degli angoli che la normale fa cogli assi, giacchè si avrà $\sum X \frac{dx}{du} = 0, \sum X \frac{dx}{dv} = 0$.

3. Colle equazioni (4) poi, se saranno dati i valori di M , N , P e Q , si determineranno quelli di E' , F' , G' che le soddisfano; e quando questi appartengano alla sfera di raggio $=1$, esisteranno dei valori corrispondenti di X , Y , Z che si potranno trovare per mezzo della relazione $\Sigma X^2=1$ e delle (3) o (4), o per mezzo delle formole date dal prof. BRIOSCHI al § 4 della sua memoria: *Sulla teoria delle coordinate curvilinee*; e quindi, per quanto testè dicemmo, i valori dati di M , N , P e Q apparterranno a una superficie le cui equazioni si avranno subito dalle (1) quando si siano determinate X , Y e Z .

Viceversa, date le linee u e v sulla sfera, o dati E' , F' , G' , le equazioni (5) determinano tre delle quantità M , N , P , Q in funzione della quarta.

Notiamo poi che le equazioni (5) divengono molto più semplici quando si ha $E'=1$, $F'=0$, $G'=\cos^2 u$, cioè quando le linee coordinate v ed u sulla superficie sono tali che le linee corrispondenti sferiche costituiscono un sistema di meridiani e di paralleli, e sono in conseguenza le coordinate del BONNET.

Quando poi sia $N=P=0$, $F'=0$, cioè quando le linee coordinate u e v siano le linee di curvatura e che quindi M e Q siano i raggi di curvatura principali, le equazioni (5) si riducono alle relazioni note fra questi raggi di curvatura e i coefficienti E' e G' del corrispondente elemento lineare sferico.

4. Prima di passare alle applicazioni delle formole precedenti, è utile di fare alcune considerazioni sulle asintotiche della superficie S , che d'ora innanzi riterrò a curvatures opposte; e incomincerò perciò dal trovare la equazione di queste linee in funzione di M , N , P , Q , E' , F' e G' . Per questo, si osservi prima che, se si chiamano r_1 e r_2 i raggi di curvatura principali di S , e si chiama α l'angolo di una linea di S colla linea di curvatura cui corrisponde r_2 , e α' l'angolo delle linee corrispondenti sulla sfera, si ha (*):

$$\operatorname{tg} \alpha' = -\frac{r_2}{r_1} \operatorname{tg} \alpha, \quad (6)$$

giacchè la superficie è a curvatures opposte.

Ora per le asintotiche si ha, come è noto:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = -\frac{r_1}{r_2},$$

(*) Vedi la mia memoria: *Sopra alcuni punti della teoria delle superficie*. — Atti della Società Italiana dei XL, S. III, T. I, pag. 2.

quindi per queste linee sarà:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' = 1, \quad (7)$$

e perciò $\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}, \dots$; e quindi osservando che reciprocamente le linee per le quali α e α' soddisfano a queste condizioni sono le asintotiche, giacchè quando si ha la (7), la (6) ci dà $\operatorname{tg}^2 \alpha = -\frac{r_1}{r_2}$, e osservando inoltre che nelle superficie a curvature opposte la rappresentazione sferica produce una inversione nelle figure, si potrà dire che le asintotiche delle superficie a curvature opposte sono le linee che nella rappresentazione sferica deviano di un angolo retto dalla direzione primitiva; e quindi esse hanno la seguente equazione differenziale:

$$dx dX + dy dY + dz dZ = 0;$$

che per le (1) e (3) si riduce all'altra

$$(ME' + NF') du^2 + \{ (M+Q)F' + PE' + NG' \} du dv + (PF' + QG') dv^2 = 0, \quad (8)$$

che è quella che volevamo stabilire, e che come vedremo ci sarà molto utile in questi studi.

5. Poichè le rappresentazioni sferiche delle asintotiche sono perpendicolari alle loro direzioni primitive, ne viene che le linee sferiche traiettorie ortogonali delle linee che corrispondono alle asintotiche di uno stesso sistema sono parallele alle asintotiche stesse. Se dunque per una asintotica si ha:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{-\frac{r_1}{r_2}},$$

per la direzione sferica (β') che è perpendicolare alla rappresentazione sferica di questa asintotica si avrà:

$$\operatorname{tg} \beta' = -\sqrt{-\frac{r_1}{r_2}};$$

e quindi, chiamando β l'angolo corrispondente su S , si avrà per la (6),

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r_1}{r_2} \sqrt{-\frac{r_1}{r_2}} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Ma per la linea (α_1) perpendicolare all'asintotica (α) si ha:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha = -1;$$

quindi, fra α_1 e β sussisterà la relazione :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \beta = -\frac{r_1}{r_2};$$

la quale ci mostra che le linee α_1 e β sono a tangenti conjugate, e ci permette perciò di dire che le direzioni a tangenti conjugate colla perpendicolare ad una asintotica hanno le loro rappresentazioni sferiche parallele a questa asintotica; o anche: le trasformate sferiche delle asintotiche di un sistema e quelle delle linee a tangenti conjugate colle traiettorie ortogonali di queste asintotiche costituiscono un doppio sistema ortogonale.

6. Osservazione. Per questo teorema si può dire che, considerando su una superficie un sistema di asintotiche v e le linee u a tangenti conjugate colle traiettorie ortogonali di queste asintotiche, se sarà data la direzione delle normali alla superficie lungo uno di questi due sistemi di linee u e v , la direzione delle stesse normali lungo l'altro sistema di linee risulterà pienamente determinata; e in particolare si può dire che nelle superficie gobbe a piano direttore le normali alla superficie lungo le linee a tangenti conjugate colle traiettorie ortogonali delle generatrici sono ugualmente inclinate sul piano direttore; e nelle superficie nelle quali le asintotiche di un sistema sono eliche appartenenti a cilindri paralleli fra loro, le normali lungo le linee a tangenti conjugate colle traiettorie ortogonali di queste eliche sono parallele a dei piani fissi che passano per una retta parallela alle generatrici dei cilindri che contengono queste eliche; giacchè evidentemente in questo caso le normali alla superficie lungo una delle asintotiche fanno angoli costanti colle generatrici dei cilindri che contengono queste asintotiche.

Caso particolare

in cui le linee coordinate sulla superficie S sono le asintotiche.

APPLICAZIONI.

7. Fin qui abbiamo supposto che le coordinate u e v sulla superficie S fossero qualunque. Ora prenderemo a considerare alcuni sistemi di coordinate particolari, e incominceremo dal supporre che esse siano le asintotiche.

In questa ipotesi la equazione (8) delle asintotiche ci mostra che si devono avere le due equazioni:

$$ME' + NF' = 0, \quad PF' + QG' = 0. \quad (9)$$

Ora l'essere zero una delle tre quantità M , Q , F' porta che anche le altre due lo sieno; quindi escludendo per ora questo caso (che corrisponde alle superficie di area minima) e osservando che P ed N non possono essere zero, si avrà dalle precedenti:

$$(M - Q)F' + \frac{MQ}{NP}(NG' - PE') = 0;$$

e per questa e per la prima delle equazioni (5), siccome MQ non può essere eguale a NP , perchè $MQ - NP$ è il prodotto dei raggi di curvatura principali della superficie (*), si concluderà che deve essere $M = Q$.

Dunque in ogni caso, se le linee coordinate u e v sono le asintotiche, dovremo avere $M = Q$, e inoltre dovremo soddisfare alle (9) e alle due ultime delle (5), o a una delle (9) e alle (5), a meno che non sia $M = Q = F' = 0$, nel qual caso le (9) sono già soddisfatte ambedue, e restano da soddisfarsi tutte le (5).

8. Questi risultati conducono ad altri non meno notevoli, relativi essi pure al caso in cui le linee coordinate u e v sono le asintotiche.

In questo caso infatti, per quanto ora abbiamo detto, si ha sempre $M = Q$, e si hanno le equazioni:

$$ME' + NF' = 0, \quad PF' + MG' = 0, \quad NG' - PE' = 0;$$

quindi si avranno anche le seguenti:

$$\frac{N}{E'} = \frac{P}{G'} = -\frac{M}{F'};$$

e perciò chiamando λ il valore comune di questi rapporti, si avrà sempre:

$$N = \lambda E', \quad M = Q = -\lambda F', \quad P = \lambda G',$$

pei valori di N , M , Q , P .

(*) Nel caso generale l'equazione delle linee di curvatura delle superficie (1) (BERTRAND, *Calcul diff.* § 672) è la seguente:

$$Ndu^2 - (N - Q)dudv - Pdv^2 = 0;$$

e quella dei raggi di curvatura principali è l'altra:

$$\rho^2 - (M + Q)\rho + MQ - NP = 0.$$

Ma, essendo $-\mu^2$ la curvatura della superficie, si ha:

$$\frac{1}{\mu^2} = NP - M^2;$$

quindi, se poniamo:

$$E'G' - F'^2 = \Delta'^2,$$

sarà $\lambda = \frac{1}{\mu\Delta'}$, e perciò si avrà

$$N = \frac{E'}{\mu\Delta'}, \quad M = Q = -\frac{F'}{\mu\Delta'}, \quad P = \frac{G'}{\mu\Delta'} \quad (10)$$

pei valori di M , N , P e Q ; e le equazioni differenziali (4) della superficie diverranno ora le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \frac{1}{\mu\Delta'} \left(-F' \frac{dX}{du} + E' \frac{dX}{dv} \right), & \frac{dx}{dv} &= \frac{1}{\mu\Delta'} \left(G' \frac{dX}{du} - F' \frac{dX}{dv} \right), \\ \frac{dy}{du} &= \frac{1}{\mu\Delta'} \left(-F' \frac{dY}{du} + E' \frac{dY}{dv} \right), & \frac{dy}{dv} &= \frac{1}{\mu\Delta'} \left(G' \frac{dY}{du} - F' \frac{dY}{dv} \right), \\ \frac{dz}{du} &= \frac{1}{\mu\Delta'} \left(-F' \frac{dZ}{du} + E' \frac{dZ}{dv} \right), & \frac{dz}{dv} &= \frac{1}{\mu\Delta'} \left(G' \frac{dZ}{du} - F' \frac{dZ}{dv} \right), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ove, come abbiamo detto, $-\mu^2$ è la curvatura della superficie e E' , F' , G' sono i coefficienti dell'elemento lineare sferico; e fra queste quantità μ , E' , F' e G' esistono soltanto le due relazioni:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu'_u}{\mu} &= \frac{-F' \frac{dE'}{dv} + E' \frac{dG'}{du}}{\Delta'^2}, \\ \frac{\mu'_v}{\mu} &= \frac{G' \frac{dE'}{dv} - F' \frac{dG'}{du}}{\Delta'^2}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

cui si riducono ora le due ultime delle (5) ponendovi per M , N , P , Q i loro valori (10).

Queste relazioni poi risolte rispetto a $\frac{dE'}{dv}$ e a $\frac{dG'}{du}$ si trasformano nelle altre:

$$\frac{d \frac{E'}{\mu}}{dv} = F' \left(\frac{1}{\mu} \right)'_v, \quad \frac{d \frac{G'}{\mu}}{du} = F' \left(\frac{1}{\mu} \right)'_u \quad (13)$$

che sono della massima semplicità.

9. Le relazioni (12) servono a derminare μ quando siano date convenientemente E' , F' e G' .

Da esse si vede che queste quantità E' , F' e G' (oltre alla relazione che proviene dall'essere esse i tre coefficienti dell'elemento lineare sferico) devono ora soddisfare alla relazione:

$$\frac{d}{dv} \left\{ \frac{F' \frac{dE'}{dv} - E' \frac{dG'}{du}}{\Delta'^2} \right\} = \frac{d}{du} \left\{ \frac{-G' \frac{dE'}{dv} + F' \frac{dG'}{du}}{\Delta'^2} \right\}; \quad (14)$$

e ora, poichè quando sia soddisfatta questa condizione e μ sia dedotto dalle (14) (ciò che allora puo farsi), i valori (10) di M , N , P , Q soddisfano a tutte le condizioni (5) e (9), si conclude (§ 2) che essendo dati sulla sfera due sistemi di linee per le quali sia soddisfatta la condizione (14), esse corrisponderanno alle asintotiche di una superficie la cui curvatura si determinerà per mezzo delle formole (12), e le cui equazioni si avranno con sole quadrature per mezzo delle formole (11).

Invece, quando sia data la curvatura $-\mu^2$ della superficie in funzione dei parametri u e v delle asintotiche, le (12) o (13) insieme alla condizione che esprime che E' , F' , G' appartengono a una sfera di raggio $=1$, serviranno a determinare queste quantità E' , F' e G' ; e quando si riesca a trovare i valori di X , Y , Z che corrispondono a questi valori di E' , F' e G' , le (11) serviranno a dare (con sole quadrature) le equazioni delle superficie di cui $-\mu^2$ è la curvatura, le linee u e v sono le asintotiche e X , Y , Z sono i coseni degli angoli della normale alla superficie coi tre assi.

10. Le formole che qui ho date contengono tutte i coefficienti dell'elemento lineare sferico. Volendo introdurvi invece quelli dell'elemento lineare della superficie, basta osservare (v. mia mem. cit.) che nella rappresentazione di una superficie sulla sfera gli archi elementari delle asintotiche vengono variati nello stesso rapporto in ogni punto, e il loro angolo si muta nell'angolo supplementare. Da questa osservazione infatti (come anche può vedersi ricavando dalle (11) l'elemento lineare della superficie S) si deduce subito che, se

$$ds'^2 = E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2$$

è l'elemento lineare sferico, quello

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

della superficie è:

$$ds^2 = \frac{1}{\mu^2} (E' du^2 - 2F' du dv + G' dv^2);$$

e si ha perciò:

$$E = \frac{E'}{\mu^2}, \quad F = -\frac{F'}{\mu^2}, \quad G = \frac{G'}{\mu^2}; \quad (15)$$

e dietro queste formole, le precedenti possono ridursi a contenere E , F , G in luogo di E' , F' e G' , e in particolare le (13) possono ridursi alle altre:

$$\frac{d(E\mu)}{dv} = F\mu'_u, \quad \frac{d(G\mu)}{du} = F\mu'_v. \quad (16)$$

11. Le formole che abbiamo stabilite in questi ultimi paragrafi pel caso che le coordinate u e v siano le asintotiche, conducono a delle conseguenze notevoli relative alle superficie di curvatura costante negativa e a quelle di area minima.

1.° Supponendo che le superficie che si considerano siano quelle di curvatura costante negativa $-\mu^2$, si vede dalle (13) che possiamo prendere $E' = G' = 1$; e questo, dandoci $E = G = \frac{1}{\mu^2}$, $F = -\frac{F'}{\mu^2}$, ci fa concludere che nelle superficie di curvatura costante negativa $-\mu^2$, le asintotiche sono tali che prese per coordinate u e v riducono l'elemento lineare della superficie alla forma

$$ds^2 = \frac{du^2 - 2F' du dv + dv^2}{\mu^2},$$

essendo F' una funzione tale che

$$ds'^2 = du^2 + 2F' du dv + dv^2 \quad (17)$$

è il corrispondente elemento lineare sferico; e questo mostra che nelle superficie di curvatura costante negativa le asintotiche dividono la superficie in losanghe infinitamente piccole, e inoltre se s'intende che le distanze siano contate lungo le asintotiche di uno stesso sistema, si può anche dire che due qualunque delle asintotiche dell'altro sistema sono in tutti i punti equidistanti. Lo stesso avviene delle linee corrispondenti sferiche.

Inoltre è da notare che, per ciò che precede, si può dire che trovate sulla sfera le linee u e v per le quali si ha la (17) e trovati i valori corrispondenti di X , Y , Z , le equazioni integrali delle superficie di curvatura co-

stante negativa $-\mu^2$ si otterranno con sole quadrature per mezzo delle (11); e con ciò la ricerca delle superficie di curvatura costante negativa viene ridotta a quella di tre funzioni X, Y, Z che soddisfano alle tre equazioni simultanee:

$$\Sigma X^2 = 1, \quad \Sigma \left(\frac{dX}{du} \right)^2 = 1, \quad \Sigma \left(\frac{dX}{dv} \right)^2 = 1.$$

12. 2.° Supponendo $F' = 0$ o $F = 0$, siamo nel caso delle superficie di area minima, e le (13) ci mostrano che in questo caso si può sempre prendere $E' = G' = \mu$, con μ tale soltanto che E' e G' appartengano alla sfera di raggio $= 1$; e poichè questo porta per le (15) che $E = G = \frac{1}{\mu}$, si ritrova così che in queste superficie le asintotiche sono ortogonali e isoterme, e le linee corrispondenti sferiche possono essere uno qualunque dei doppi sistemi ortogonali e isotermi della sfera.

Ora i sistemi di linee ortogonali e isoterme della sfera possono dirsi conosciuti, e possiamo dire di conoscere i valori delle coordinate X, Y, Z dei punti della sfera in funzione dei parametri isometrici u e v di queste linee; quindi, supponendo che per questi valori di X, Y, Z il quadrato dell'elemento lineare sferico sia:

$$ds'^2 = \mu^2 (du^2 + dv^2),$$

si può dire, per le (11), che le equazioni delle superficie di area minima in funzione dei parametri isometrici u e v delle asintotiche sono le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} x &= \int \frac{1}{\mu} \left(\frac{dX}{dv} du + \frac{dX}{du} dv \right), \\ y &= \int \frac{1}{\mu} \left(\frac{dY}{dv} du + \frac{dY}{du} dv \right), \\ z &= \int \frac{1}{\mu} \left(\frac{dZ}{dv} du + \frac{dZ}{du} dv \right), \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ove X, Y, Z sono presi nel modo che abbiamo detto.

13. Per essere poi $E = G = \frac{1}{\mu}$ quando $E' = G' = \mu$, e viceversa, si conclude che l'elemento lineare delle superficie di area minima, quando le coordinate u e v sono le asintotiche, è dato dalla formola:

$$ds^2 = \frac{1}{\mu} (du^2 + dv^2)$$

ove μ è tale che l'espressione

$$\mu(du^2 + dv^2),$$

appartiene alla sfera di raggio $=1$; e si può dire inoltre che affinchè una superficie sia applicabile su una di area minima è necessario e sufficiente che esistano su essa due sistemi di linee ortogonali e isoterme tali che, se con esse si ha:

$$ds^2 = \frac{1}{\mu}(du^2 + dv^2),$$

l'espressione

$$\mu(du^2 + dv^2)$$

appartenga alla sfera di raggio $=1$.

È poi da notare che nelle superficie di area minima, nelle attuali coordinate u e v , le equazioni delle linee di curvatura sono le seguenti:

$$u + v = \text{cost.}, \quad u - v = \text{cost.}$$

14. Inoltre è da osservare che, avendo le equazioni generali (18) delle superficie di area minima in funzione dei parametri u e v delle asintotiche e delle loro rappresentazioni sferiche, se vogliamo quelle fra queste superficie nelle quali le asintotiche godono di proprietà speciali che si riducono a proprietà delle linee sferiche che le rappresentano, basta porre nelle (18) per X, Y, Z, μ i valori corrispondenti alle variabili isometriche u e v , che vogliamo che rappresentino le asintotiche.

Così volendo le superficie di area minima nelle quali le asintotiche sono ellissi e iperbole geodetiche, e riducono per conseguenza l'elemento lineare della superficie alla forma:

$$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2),$$

ove U è una funzione di u e V una funzione di v soltanto, basterà cercare le linee della sfera per le quali si ha:

$$ds'^2 = \frac{du^2 + dv^2}{U + V},$$

e porre poi nelle (10) per X, Y, Z i valori corrispondenti.

Volendo le superficie di area minima nelle quali le asintotiche sono eliche, si osserverà che quando le asintotiche di una superficie sono eliche le loro rappresentazioni sferiche sono piccoli cerchi e viceversa; e quindi per avere le dette superficie basterà porre nelle (18) per X, Y, Z, μ i valori (noti)

che esse hanno quando si esprimono in funzione dei parametri isometrici u e v di due sistemi di cerchi ortogonali.

È chiaro poi che nelle superficie di area minima, se le asintotiche di un sistema sono eliche, quelle dell'altro sistema saranno pure eliche, giacchè nella rappresentazione sferica le linee corrispondenti alle asintotiche sono ortogonali e isoterme, e quindi se le linee dell'un sistema sono circolari, anche le altre sono circolari; e inoltre le generatrici dei cilindri che contengono le eliche di uno stesso sistema sono parallele a un piano fisso, e i due piani sono perpendicolari l'uno all'altro.

15. Se poi ricordiamo che, per un teorema del BONNET, ad ogni superficie di area minima ne corrisponde un'altra della stessa specie che è applicabile sovr'essa; e i punti di due superficie così conjugate si corrispondono in modo che alle linee di curvatura dell'una corrispondono le asintotiche dell'altra, e le normali delle due superficie nei punti corrispondenti sono parallele, si potrà dire evidentemente che, se nell'una di queste superficie le linee di curvatura sono piane, nella superficie conjugata le asintotiche sono eliche.

È facile poi di vedere che fra le superficie di area minima che hanno per asintotiche delle eliche, ne esistono alcune che hanno al tempo stesso le linee di curvatura piane, e quindi godono della proprietà che colla deformazione possono ridursi ad altre superficie di area minima dotate delle stesse proprietà.

Osserviamo infatti che, se le linee asintotiche u e v della superficie di area minima che consideriamo sono eliche, l'elemento lineare sferico corrispondente sarà:

$$ds'^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(U + V)^2}, \quad (19)$$

ove U e V sono tali che si abbia:

$$UU'' - U'^2 + VV'' - V'^2 + UV'' + U''V = 1.$$

Ora, oltre a potere soddisfare a questa equazione per mezzo di valori di U e V che contengono delle esponenziali, si può anche soddisfarvi col prendere

$$U = Au^2 + B, \quad V = Av^2 + C, \quad (20)$$

ove $4A(B + C) = 1$; e per questi valori di U e V si ha:

$$ds'^2 = \left\{ \frac{4A}{4A^2(u^2 + v^2) + 1} \right\}^2 (du^2 + dv^2),$$

e si ha quindi anche:

$$ds'^2 = \left\{ \frac{4A}{4A^2(u_1^2 + v_1^2) + 1} \right\}^2 (du_1^2 + dv_1^2),$$

quando si fa $u + v = u_1 \sqrt{2}$, $u - v = v_1 \sqrt{2}$, cioè quando si prendono per coordinate le linee u_1 e v_1 che corrispondono a quelle di curvatura; e questo mostra chiaramente che, nelle superficie di area minima cui corrispondono i valori (20) di U e V , le asintotiche sono eliche e le linee di curvatura sono piane, ecc.

Volendo poi le equazioni di queste superficie speciali di area minima, basta porre nelle (18) per X, Y, Z, μ i valori corrispondenti in funzione dei parametri isometrici u e v pei quali si hanno sulla sfera le formole (19) e (20), e che si possono trovare facilmente, servendosi delle formole che ho dato al § 38 della mia memoria citata.

**Caso in cui le linee coordinate di un sistema sono asintotiche,
e le altre sono le linee a tangenti conjugate colle traiettorie ortogonali
di queste asintotiche.**

APPLICAZIONI.

16. Fin qui abbiamo supposto che i due sistemi di linee coordinate siano le asintotiche. Se ora supponiamo che soltanto le v siano asintotiche, per la (8) si avrà $ME' + NF' = 0$; e se di più supponiamo che le linee u siano quelle a tangenti conjugate colle perpendicolari a queste asintotiche, si avrà (§ 5) $F' = 0$, e quindi $M = 0$; e viceversa se $M = F' = 0$, le linee coordinate u e v saranno quelle che abbiamo detto (*).

In questo caso le equazioni (5) si riducono alle altre più semplici:

$$\left. \begin{aligned} NG' &= PE' \\ P'_u E' + \frac{1}{2} Q \frac{dE'}{dv} + \frac{1}{2} P \frac{dE'}{du} + \frac{1}{2} N \frac{dG'}{du} &= 0 \\ (N'_v - Q'_v) G' - \frac{1}{2} Q \frac{dG'}{du} + \frac{1}{2} N \frac{dG'}{dv} + \frac{1}{2} P \frac{dE'}{dv} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(*) Se invece si prendessero per linee coordinate v e u sulla superficie le asintotiche di un sistema e le loro traiettorie ortogonali, servendosi delle (1) si troverebbe che oltre ad aversi $ME' + NF' = 0$, si dovrebbe avere $Q = 0$.

e poichè da queste si vede che per ogni sistema di valori di E' e G' esistono dei valori corrispondenti per le quantità N , P , Q , si conclude che esistono sempre delle superficie che ammettono un sistema di asintotiche che hanno per rappresentazioni sferiche delle linee date, o, in altri termini, esistono sempre delle superficie tali che le normali ad esse lungo un sistema di asintotiche siano parallele alle generatrici di un sistema di coni dati.

17. Per la (8) e per le (21) si vede che nelle attuali coordinate, le asintotiche del secondo sistema hanno la seguente equazione differenziale:

$$2Ndu + Qdv = 0. \tag{22}$$

Indicando poi con

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{23}$$

il quadrato dell'elemento lineare della superficie, e avendo riguardo alle equazioni (1) e (21) e all'essere ora $M = F' = 0$, si ha:

$$E = N^2G' = NPE', \quad F = NQG = PQE', \quad G = P^2E' + Q^2G' = (NP + Q^2)G', \tag{24}$$

e quindi sarà

$$ds^2 = G'(Ndu + Qdv)^2 + NP G' dv^2, \tag{25}$$

il quadrato dell'elemento lineare delle superficie, e la equazione

$$Ndu + Qdv = 0 \tag{26}$$

rappresenterà le traiettorie ortogonali delle asintotiche v .

Siccome poi le curvature geodetiche $\frac{1}{\rho_v}$, $\frac{1}{\rho_t}$ delle linee v e delle loro traiettorie ortogonali sulla superficie (23) sono:

$$\frac{1}{\rho_v} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ (\sqrt{E})'_v - \left(\frac{F}{\sqrt{E}} \right)'_u \right\}, \quad \frac{1}{\rho_t} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} \right)'_u,$$

nel nostro caso sarà:

$$\frac{1}{\rho_v} = \frac{1}{NP\sqrt{E'G'}} \left\{ (N\sqrt{G'})'_v - (Q\sqrt{G'})'_u \right\}, \quad \frac{1}{\rho_t} = \frac{(P\sqrt{E'})_u}{NP\sqrt{E'G'}} = \frac{(\log P\sqrt{E'})'_u}{N\sqrt{G'}}; \tag{27}$$

e si può perciò notare in particolare che le superficie nelle quali le asintotiche di un sistema sono traiettorie ortogonali di un sistema di geodetiche

sono quelle per le quali $P\sqrt{E'}$ è una funzione V della sola v , ciò che porta per le (21), che in questo caso si ha:

$$P = \frac{V}{\sqrt{E'}}, \quad Q = V \frac{\frac{d \log \sqrt{G'}}{du}}{\frac{d \sqrt{E'}}{dv}}, \quad N = V \sqrt{\frac{E'}{G'}}$$

e E' e G' devono soddisfare alla equazione che viene dalla terza delle (21) ponendovi per N , P e Q questi valori.

18. Premesse queste formole, passiamo a farne l'applicazione alle superficie nelle quali le asintotiche di un sistema sono eliche appartenenti a cilindri paralleli, e alle superficie gobbe.

Incominciando dalle prime di queste superficie, osserveremo che se si suppongono i cilindri paralleli all'asse delle x , si avrà:

$$X = \cos v, \quad Y = \cos u \sin v, \quad Z = \sin u \sin v,$$

e sarà perciò:

$$E' = \sin^2 v, \quad G' = 1,$$

e le equazioni (21) si ridurranno ora alle seguenti:

$$N = P \sin^2 v, \quad P'_u + Q \cot v = 0, \quad N'_v - Q'_u + P \sin v \cos v = 0.$$

Per integrare queste equazioni osserviamo che la terza ci dà:

$$(N \sin v)'_v = (Q \sin v)'_u,$$

e ci mostra che si ha:

$$N \sin v = \frac{d\theta}{du}, \quad Q \sin v = \frac{d\theta}{dv},$$

ove θ è una certa funzione di u e v .

Per queste le due prime ci danno:

$$P = \frac{\frac{d\theta}{du}}{\sin^3 v}, \quad \frac{d^2\theta}{du^2} = -\sin v \cos v \frac{d\theta}{dv};$$

e quindi si conclude che, trovata la funzione θ per la quale si ha:

$$\frac{d^2\theta}{du^2} + \sin v \cos v \frac{d\theta}{dv} = 0, \quad (29)$$

sarà:

$$N = \frac{\frac{d\theta}{du}}{\operatorname{sen} v}, \quad Q = \frac{\frac{d\theta}{dv}}{\operatorname{sen} v}, \quad P = \frac{\frac{d\theta}{du}}{\operatorname{sen}^3 v}; \quad (30)$$

e per le (1), le equazioni delle superficie cercate saranno le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\theta, \\ y &= \int \left\{ \cos u \cot v \frac{d\theta}{du} du + \left(-\frac{d\theta}{du} \frac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen}^2 v} + \frac{d\theta}{dv} \cos u \cot v \right) dv \right\}, \\ z &= \int \left\{ \operatorname{sen} u \cot v \frac{d\theta}{du} du + \left(\frac{d\theta}{du} \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 v} + \frac{d\theta}{dv} \operatorname{sen} u \cot v \right) dv \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

19. Ora ponendo:

$$t = -\int \frac{dv}{\operatorname{sen} v \cos v} = \log \cot v, \quad (32)$$

e prendendo t per variabile, la equazione (29) che determina la funzione ausiliaria θ si riduce all'altra:

$$\frac{d^2\theta}{du^2} = \frac{d\theta}{dt}, \quad (33)$$

che è quella che si presenta nella teoria del calore, quando si hanno da determinare le temperature variabili di uno spazio rettangolare nel quale le temperature dipendono soltanto da una coordinata e dal tempo, o quelle del solido compreso fra due sfere concentriche, quando le temperature dipendono soltanto dalla distanza dal centro e dal tempo; quindi la nostra ricerca è ridotta alla risoluzione di un problema della teoria del calore, e a completarla non ci resta ora che prendere per la funzione θ i valori che già sono stati dati per essa nei trattati sul calore (RIEMANN, *Partielle Differentialgleichungen*, ecc., dal § 49 al § 69 inclusive. — BETTI, *Sopra la determinazione delle temperature nei corpi solidi e omogenei*: Atti della Società Italiana, S. III, T. I, P. II, ecc.)

20. Questi valori di θ sono determinati quando sono date alcune condizioni ai limiti, come per es.: quando è dato θ lungo una linea t e lungo una linea u , o quando è dato θ lungo una linea t e lungo due linee u .

Nel primo caso, supposto che si debba avere:

$$\begin{aligned} \theta &= f(u) \quad \text{per} \quad t = t_0 \\ \theta &= \phi(t) \quad \text{per} \quad u = \alpha. \end{aligned}$$

e supposto $u > \alpha$, $t > t_0$, RIEMANN dà pel valore di θ (§ 63):

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{t-t_0}} \int_0^\infty f(\lambda) d\lambda \left(e^{\frac{(u-\alpha-\lambda)^2}{4(t-t_0)}} - e^{-\frac{(u-\alpha+\lambda)^2}{4(t-t_0)}} \right) + \right. \\ \left. + (u-\alpha) \int_0^{t-t_0} \phi(\lambda) d\lambda e^{-\frac{(u-\alpha)^2}{4(t-t_0-\lambda)}} (t-t_0-\lambda)^{-\frac{3}{2}} \right\}, \quad (34)$$

e supponendo poi in particolare:

$$t_0 = \alpha = f(u) = 0, \quad \phi(t) = \sum_m \rho_m \cos(m\nu t - \lambda_m),$$

con m intero e ρ_m , ν , e λ_m quantità costanti, RIEMANN trova:

$$\theta = \sum \rho_m e^{-u\sqrt{\frac{m\nu}{2}}} \cos\left(m\nu t - \lambda_m - u\sqrt{\frac{m\nu}{2}}\right).$$

Nel secondo caso, supponendo che si debba avere:

$$\theta = f(u) \quad \text{per } t = t_0,$$

$$\theta = \phi(t) \quad \text{per } u = \alpha,$$

$$\theta = \psi(t) \quad \text{per } u = \beta,$$

e applicando le formole date dal prof. BETTI (l. c.), si trova:

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int_\alpha^\beta \omega_{\lambda=t_0} f(\mu) d\mu + \int_{t_0}^t \left\{ \psi(\lambda) \left(\frac{d\omega}{d\mu} \right)_\beta - \phi(\lambda) \left(\frac{d\omega}{d\mu} \right)_\alpha \right\} d\lambda, \quad (35)$$

ove si suppone $t > t_0$, $\beta > u > \alpha$, e

$$\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta - \alpha} \left\{ \Theta_{00} \left(\frac{\mu - u}{2(\beta - \alpha)}, \frac{\pi i(t - \lambda)}{(\beta - \alpha)^2} \right) - \Theta_{00} \left(\frac{2\beta - \mu - u}{2(\beta - \alpha)}, \frac{\pi i(t - \lambda)}{(\beta - \alpha)^2} \right) \right\},$$

essendo Θ_{00} una funzione Jacobiana definita dalla equazione

$$\Theta_{00}(z, \omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi(n^2\omega + 2nz)}.$$

RIEMANN dà un'altra espressione per la funzione u che si può ridurre a quella qui data del prof. BETTI.

Oltre poi a dare per θ le condizioni ai limiti poste disopra, si potrebbero dare le altre che θ lungo una linea t o lungo una linea u prendesse dati

valori, e lungo un'altra linea u soddisfacesse alla condizione $\frac{d\theta}{du} = h(\theta - \xi)$ ove h è una costante, e ξ una funzione nota di u . Anche per questo caso può vedersi il RIEMANN e la memoria del prof. BETTI: *Sulla determinazione delle temperature variabili di un cilindro*.

Osservando poi che il valore (34) di u si annulla per $t = \infty$, e la funzione

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{t}} + \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{1 + \frac{1}{t}}$$

è uguale a 1 per $t = \infty$, e uguale a zero per gli altri valori positivi di t , si conclude anche che la funzione

$$F(u) \left\{ \frac{t}{1+t} + \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{1+t} \right\} + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} f(\lambda) d\lambda \left(e^{-\frac{(u-\alpha-\lambda)^2}{4(t-t_0)}} - e^{-\frac{(u-\alpha+\lambda)^2}{4(t-t_0)}} \right) \right\} + \\ &(u-\alpha) \int_0^{t-t_0} \phi(\lambda) d\lambda e^{-\frac{(u-\alpha)^2}{4(t-t_0-\lambda)}} (t-t_0-\lambda)^{-\frac{3}{2}} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

ove $f(\lambda)$ e $\phi(\lambda)$ non divengono mai infinite, e t_0 si suppone ora positivo o nullo per tutti i valori positivi di t ad eccezione di quello $t = \infty$, soddisfa alla equazione (33); per $t = \infty$ prende il valore $F(u)$, per $t = t_0$ il valore $f(u)$ e per $u = \alpha$ il valore $\phi(t)$.

Ponendo al posto della prima parte l'espressione $au + b$ si ha una funzione che soddisfa sempre alla (33), per $t = \infty$ prende il valore $au + b$ per $t = t_0$ il valore $f(u) + au + b$, e per $u = \alpha$ il valore $\phi(t) + a\alpha + b$.

21. Osservazione I. È da notare che volendo che le variabili restino reali anche quando v è maggiore di $\frac{\pi}{2}$, bisogna intendere che il valore (32) di t è sempre la parte reale di $\log \cot v$; e così, andando sulla sfera dall'equatore a uno dei poli, t va sempre da $-\infty$ a ∞ ; e servendosi, per esempio, della (34) il valore che si avrà da questa per θ varrà pel punto $\left(u, \frac{\pi}{2} - v\right)$ della sfera situato da una parte dell'equatore e pel punto $\left(u, \frac{\pi}{2} + v\right)$ situato dall'altra parte.

Osservazione II. Per le (26) e (30) le traiettorie ortogonali delle asintotiche v hanno per equazione $\theta = \text{cost}$; e quindi per la (31) si può dire che in queste superficie le traiettorie ortogonali delle asintotiche v sono curve piane e situate in piani paralleli fra loro e perpendicolari all'asse delle eliche v . Prendendo poi per coordinate sulla superficie le linee v e θ , il suo elemento lineare (25) si riduce alla forma

$$ds^2 = \frac{d\theta^2}{\text{sen}^2 v} + \frac{\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2}{\text{sen}^4 v} dv^2, \quad (37)$$

ove $\frac{d\theta}{du}$ s'intende qui espresso per θ e v .

22. Passiamo ora a cercare alcune superficie speciali della classe (31) che qui consideriamo.

1.° Volendo le superficie nelle quali una asintotica del secondo sistema taglia ortogonalmente quelle del primo, osserveremo che in questo caso, essa dovrà essere al tempo stesso una delle linee θ , e una delle linee u , e perciò (oss. prec.) sarà rettilinea e si avrà per essa $\theta = \text{cost}$ e $u = \text{cost}$; e quindi supponendo che questa linea sia la $u=0$, e per essa si abbia $\theta=0$, basterà fare $\alpha = \phi(\lambda) = 0$ nella (34) per avere il valore di θ corrispondente.

Se due asintotiche del secondo sistema dovessero essere traiettorie ortogonali delle asintotiche v , e queste fossero quindi le linee $u=\alpha$, $u=\beta$, basterebbe fare $\psi(t) = \text{cost}$, $\phi(t) = \text{cost}$ nella formola (35).

2.° Volendo le superficie della classe (31) nelle quali le asintotiche v sono traiettorie ortogonali di un sistema di geodetiche, si osserverà che, per ciò che precede, queste geodetiche dovranno essere linee piane e situate in piani paralleli fra loro, e non potendo essere di curvatura dovranno essere rettilinee, e la superficie sarà l'elicoide gobbo di area minima.

Ciò del resto risulta anche dal dovere essere ora (§ 17) $P\sqrt{E'}$ e quindi $\frac{d\theta}{du}$ una funzione della sola v ; giacchè questo porta per la (29) che $\frac{d\theta}{dv} = 0$, e quindi $Q = 0$.

3.° Volendo le superficie della nostra classe nelle quali uno dei raggi di curvatura è una funzione dell'altro, si osserverà che, essendo Q la somma dei raggi di curvatura, e NP il loro prodotto, queste superficie non potranno trovarsi che fra quelle delle due classi

$$NP = \text{cost}; \quad Q = f(\sqrt{NP})$$

Ora, se fosse $NP = \text{cost}$, $\frac{d\theta}{du}$ non conterebbe u , e quindi per la (29) si avrebbe $\frac{d\theta}{dv} = 0$, e $\theta = \text{cost}$; dunque ci dobbiamo limitare al caso in cui sia $Q = f(\sqrt{NP})$, ovvero per le (29) e (30):

$$\frac{\frac{d^2\theta}{du^2}}{\text{sen}^2 v} = \cos v f' - \left(\frac{\frac{d\theta}{du}}{\text{sen}^2 v} \right).$$

Ora, escludendo il caso di $\frac{d^2\theta}{du^2} = 0$ che corrisponde ancora all'elicoide di area minima, perchè fosse verificata la precedente si vede che dovrebbe essere:

$$\theta = \frac{\text{sen}^2 v}{\cos v} F(u \cos v + V) + V_1,$$

essendo F una funzione di $u \cos v + V$, e V e V_1 funzioni di v .

Ma per questo valore di θ la (29) darebbe:

$$F'' + 2F + \text{tg}^2 v F - F' \text{tg} v (u \text{sen} v - V') + \frac{V'_1}{\text{sen} v} = 0,$$

e questa ponendo $u \cos v + V = p$, e prendendo p per variabile invece di u , e derivando rapporto a p , ci darebbe l'altra:

$$F''' + 2F' + F'' \text{tg} v (p \text{tg} v - V \text{tg} v + V') = 0,$$

la quale porterebbe che si avesse $F'' = 0$, o che l'espressione

$$\text{tg} v (p \text{tg} v - V \text{tg} v + V')$$

fosse indipendente da v .

Ma quest'ultima condizione non può soddisfarsi, e così avviene anche dell'altra $F'' = 0$, perchè questa porterebbe anche $F' = 0$, e θ non conterebbe nè u nè v ; dunque anche in questo caso si trova soltanto il solito elicoide di area minima.

4.º Volendo che le asintotiche v siano eliche circolari, bisogna che la loro curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_v}$ sia costante lungo di esse; e poichè dalla (26) si ha ora:

$$\frac{1}{\rho_v} = - \frac{\text{sen} v \cos v}{\frac{d\theta}{du}}, \quad (37)$$

si vede di qui che deve aversi $\frac{d^2\theta}{du^2}=0$; e questo porta $\frac{d\theta}{dv}=0$, e siamo ancora nel caso dell'elicoide gobbo di area minima.

5.° Vogliansi ora le superficie della nostra classe nelle quali le eliche v sono eliche cilindro-coniche.

Osserviamo perciò che per la (37) il raggio di curvatura delle nostre eliche v è:

$$\rho_v = - \frac{\frac{d\theta}{du}}{\text{sen } v \cos v},$$

e per la (25) il loro arco elementare è:

$$ds_v = \frac{\frac{d\theta}{du}}{\text{sen } v} du;$$

e quindi poichè per le eliche cilindro-coniche il rapporto $\frac{ds_v}{d\rho_v}$ è costante lungo di esse e diverso da zero, si concluderà che per le superficie cercate si deve avere:

$$\frac{d^2\theta}{du^2} = V \frac{d\theta}{du},$$

ove V è una funzione di v che non è zero; e quindi sarà:

$$\theta = V_1 e^{\sqrt{u}} + V_2,$$

ove V_1 e V_2 sono altre funzioni di v .

Sostituendo nella (29) si trova che V_2 deve essere una costante che può prendersi uguale a zero; V deve essere un'altra costante c , e V_1 deve essere $b \cot^{c^2} v$ ove b è un'altra costante; quindi per le superficie cercate si avrà:

$$\theta = b e^{cu} \cot^{c^2} v; \quad (38)$$

e le loro equazioni (37) saranno le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} x &= -b e^{cu} \cot^{c^2} v, \\ y &= b c e^{cu} \cot^{1+c^2} v \frac{\text{sen } u + c \cos u}{1+c^2}, \\ z &= b c e^{cu} \cot^{1+c^2} v \frac{-\cos u + c \text{sen } u}{1+c^2}, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

ovvero:

$$\left. \begin{aligned} x &= -b\tau^{c^2} e^{cu}, \\ y &= b \operatorname{sen} \alpha \tau^{1+c^2} e^{cu} \operatorname{sen} u, \\ z &= b \operatorname{sen} \alpha \tau^{1+c^2} e^{cu} \operatorname{cos} u, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

quando si ponga $c = \operatorname{tg} \alpha$, e $\operatorname{cot} v = \tau$, e si cangi u in $u - x$, e b in $b e^{c\alpha}$.

Da queste si ricava facilmente la equazione:

$$y^2 + z^2 = x^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \tau^2,$$

che è quella del cono circolare retto che contiene le eliche v . Dividendo la seconda per la terza si trova la equazione:

$$y = z \operatorname{tg} u;$$

la quale ci mostra che in queste superficie le linee u a tangenti conjugate colle perpendicolari alle eliche v sono esse pure piane, e i loro piani passano tutti per l'asse delle eliche e sono quindi normali a quelli delle traiettorie ortogonali di queste eliche. Queste linee u sono algebriche quando c è commensurabile. L'origine è un punto singolare della superficie nel quale i raggi di curvatura sono zero. Per esso passano tutte le linee u e le v .

È poi da osservare che per le (22) e (28) le asintotiche dell'altro sistema in questa superficie hanno la seguente equazione:

$$2u + c \log \tau = k.$$

ove k è una costante arbitraria.

Così anche le equazioni delle linee di curvatura sono subito integrabili.

Infine, per la (36), ponendo ancora $\operatorname{cot} v = \tau$, si trova che l'elemento lineare delle attuali superficie in coordinate τ e θ prende la forma:

$$ds^2 = (1 + \tau^2) d\theta + c^2 \theta^2 d\tau^2;$$

donde si deduce che in queste superficie le asintotiche v e le loro traiettorie ortogonali costituiscono un doppio sistema isoterma.

23. Passiamo ora a dare delle applicazioni delle formole dei § 16 e 17 allè superficie gobbe.

A tal uopo osserviamo che in questo caso dovendo essere le linee v sulla sfera cerchi massimi, e le linee u traiettorie ortogonali di questi cerchi, i valori di X, Y, Z saranno quelli che ho dati nella mia memoria *Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura piane* (Annali del-

l'Univ. di Pisa, tom. XI, § 8), e si possono scegliere le variabili u e v in modo che l'elemento lineare sferico abbia la forma:

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sen}^2(u - W) dv^2,$$

ora W è una funzione (arbitraria) di v .

Ora essendo in questo caso $E' = 1$, $G' = \operatorname{sen}^2(u - W)$, le equazioni (21) si riducono alle altre:

$$P = N \operatorname{sen}^2(u - W), \quad P'_u = -N \operatorname{sen}(u - W) \cos(u - W), \\ [N \operatorname{sen}(u - W)]'_v = [Q \operatorname{sen}(u - W)]'_u;$$

e con queste si trova facilmente:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{V}{\operatorname{sen}(u - W)}, & N &= \frac{V}{\operatorname{sen}^3(u - W)}, \\ Q &= \frac{V}{\operatorname{sen}(u - W)} \{ V_1 - V \cot(u - W) \}'_v. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

ove V e V_1 sono funzioni arbitrarie di v ; e perciò si conclude che le equazioni delle superficie gobbe sono le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} x &= \int \left\{ \frac{V}{\operatorname{sen}^3(u - W)} \frac{dX}{dv} du + \left[\frac{V}{\operatorname{sen}(u - W)} \frac{dX}{du} + \frac{1}{\operatorname{sen}(u - W)} \{ V_1 - V \cot(u - W) \}'_v \frac{dX}{dv} \right] dv \right\}, \\ y &= \int \left\{ \frac{V}{\operatorname{sen}^3(u - W)} \frac{dY}{dv} du + \left[\frac{V}{\operatorname{sen}(u - W)} \frac{dY}{du} + \frac{1}{\operatorname{sen}(u - W)} \{ V_1 - V \cot(u - W) \}'_v \frac{dY}{dv} \right] dv \right\}, \\ z &= \int \left\{ \frac{V}{\operatorname{sen}^3(u - W)} \frac{dZ}{dv} du + \left[\frac{V}{\operatorname{sen}(u - W)} \frac{dZ}{du} + \frac{1}{\operatorname{sen}(u - W)} \{ V_1 - V \cot(u - W) \}'_v \frac{dZ}{dv} \right] dv \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

ove X , Y , Z sono presi nel modo che abbiamo detto.

24. In queste superficie l'equazione delle asintotiche del secondo sistema è per le (22) e (41):

$$\frac{2V}{\operatorname{sen}^2(u - W)} du + \{ V_1 - V \cot(u - W) \}'_v dv = 0. \quad (43)$$

L'equazione delle traiettorie ortogonali delle generatrici è per la (26):

$$V_1 - V \cot(u - W) = t \quad (44)$$

ove t è una costante; e per la (25) il quadrato dell'elemento lineare della superficie in coordinate v e t è:

$$ds^2 = dt^2 + \frac{V^2}{\operatorname{sen}^2(u - W)} dv^2 = dt^2 + \{ (t - V_1)^2 + V^2 \} dv^2. \quad (45)$$

Di qui risulta che le superficie corrispondenti a uno stesso valore di V^2 e V'_1 o di $\pm V$ e $V_1 + k$ ove k è una costante, sono tutte applicabili l'una sull'altra, qualunque sia W ; e quindi per un teorema del BONNET, si conclude che lasciando fermi i valori di V^2 e V'_1 e variando i valori di X , Y , Z e W in modo che i cerchi v sulla sfera vengano ad essere tutti i sistemi distinti di cerchi massimi della stessa sfera, le equazioni (42) daranno una classe completa di superficie gobbe applicabili l'una sull'altra; e da questo poichè col variare di X , Y , Z in tutti i modi possibili varia in simil modo il cono direttore della superficie, si deduce subito il teorema di BOUR che una superficie gobba può sempre deformarsi in modo che le sue generatrici vengano parallele a quelle di un cono dato qualunque.

Notiamo poi che dal valore precedente di ds^2 si deduce subito che $\frac{1}{V}$ è il parametro di distribuzione dei piani tangenti, e la linea che ha per equazione $u = W + \frac{\pi}{2}$ è la linea di stringimento della superficie.

Sulla sfera dunque la linea di stringimento viene rappresentata da quella linea che dicesi linea di stringimento dei cerchi massimi che rappresentano le generatrici.

Dalla (43) poi risulta che, onde la linea di equazione $u = \phi(v)$ sia una asintotica, bisogna che fra W , V , V_1 e $\phi(v)$ sussista la relazione:

$$\{V \cot(\phi - W)\}' - V'_1 - \frac{V\phi'}{\sin^2(\phi - W)} = 0$$

che, ponendo $V \cot(\phi - W) = \eta$, si riduce all'altra:

$$\eta' - V'_1 - V\phi' - \frac{\eta^2\phi'}{V} = 0;$$

e poichè quando sono dati V , V_1 e ϕ , esiste sempre una funzione W che soddisfa a questa relazione, si conclude di qui che (*) una superficie gobba può sempre deformarsi in modo che una sua linea qualunque divenga asintotica, senza che la superficie cessi per questo di esser gobba.

In particolare dunque la sua linea di stringimento può sempre ridursi ad essere una asintotica della superficie, e una sua geodetica qualunque può

(*) Questi teoremi ed altri che potremmo dedurre dalle nostre formole sono stati dati dal prof. BELTRAMI nella sua memoria *Sulla flessione delle superficie rigate*: Annali di Matematica, 1^a serie, tom. VII.

sempre ridursi ad essere rettilinea; e quando la linea di stringimento sia divenuta una asintotica si avrà

$$W = -\int \frac{V'_1}{V} dv.$$

25. Quando $W = \text{cost}$: le linee u e v sulla sfera costituiscono un sistema di paralleli e di meridiani, e siamo evidentemente nel caso delle superficie gobbe a piano direttore.

Ora in questo caso, supponendo $W = 0$, il che evidentemente può farsi, si ha:

$$X = \cos u, \quad Y = \text{sen} u \cos v, \quad Z = \text{sen} u \text{sen} v,$$

quindi le equazioni della superficie si riducono alle altre più semplici:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\int V dv, \\ y &= V \cot u \text{sen} v - \int V'_1 \text{sen} v dv, \\ z &= -V \cot u \cos v + \int V'_1 \cos v dv. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

L'equazione differenziale (43) delle asintotiche si riduce ora, all'altra:

$$\frac{2V}{\text{sen}^2 u} du + (V_1 - V \cot u)'_v dv = 0,$$

che divisa per $2\sqrt{V}$ viene subito integrabile, e dà:

$$\sqrt{V} \cot u - \frac{1}{2} \int \frac{V'_1}{\sqrt{V}} dv = \text{cost}, \quad (47)$$

per la equazione in termini finiti delle asintotiche del secondo sistema nelle superficie gobbe a piano direttore.

In queste superficie la linea di stringimento è la linea $u = \frac{\pi}{2}$, e quindi è una linea a tangenti conjugate colla perpendicolare alla generatrice.

Le sue equazioni in coordinate cartesiane sono le seguenti:

$$x = -\int V dv, \quad y = -\int V'_1 \text{sen} v dv, \quad z = \int V'_1 \cos v dv,$$

e perciò quando si vuole che questa linea soddisfaccia a qualche condizione speciale basterà, servendosi di queste equazioni, determinare una o tutte e due le funzioni V e V_1 in modo che queste condizioni riescano soddisfatte.

Così volendo che essa appartenga ad un cilindro circolare di raggio r il

cui asse sia quello delle x , bisognerà prendere V_1 in modo che si abbia:

$$(\int V'_1 \operatorname{sen} v \, dv)^2 + (\int V'_1 \operatorname{cos} v \, dv)^2 = r^2,$$

ciò che porta $V'_1 = r$.

Volendo che la superficie abbia per linea di stringimento una retta perpendicolare al piano direttore, e che quindi possiamo supporre essere l'asse x , si dovrà prendere $V_1 = 0$, e perciò le equazioni della superficie saranno le seguenti:

$$\begin{aligned} x &= -\int V \, dv, \\ y &= V \cot u \operatorname{sen} v, \\ z &= -V \cot u \operatorname{cos} v; \end{aligned}$$

e la equazione (47) delle asintotiche si ridurrà all'altra:

$$\sqrt{V} \cot u = \operatorname{cost};$$

dalla quale, coll'osservare che $V \cot u$ è la distanza del punto che si considera della superficie dalla linea di stringimento contata sulla generatrice, e $\frac{1}{\sqrt{V}}$ è il parametro di distribuzione dei piani tangenti, si deduce subito una proprietà nota delle asintotiche delle superficie conoidi che qui consideriamo.

26. Per dare un'altra applicazione delle formole (41) che abbiamo trovato per le superficie gobbe, mi proporrò di ricercare le superficie gobbe che hanno un sistema di linee di curvatura piane; e poichè già dimostrai in un altro lavoro (*) che l'iperboloide gobbo di rivoluzione è la sola superficie gobba che abbia tutte le linee di curvatura piane, mi limiterò ora a cercare le superficie gobbe (se pur esistono) che hanno un solo sistema di linee di curvatura piane.

Per questo ricordiamo che quando per una superficie si hanno le equazioni (1), le linee di curvatura sono rappresentate dalla equazione:

$$Ndu^2 + (Q - M)du \, dv - Pdv^2 = 0,$$

ovvero dall'altra:

$$2Ndu + \{Q - M \pm \sqrt{(Q - M)^2 + 4PN}\}dv = 0;$$

e questa equazione oltre a rappresentare le linee di curvatura della superficie, rappresenta anche le loro trasformate sferiche.

(*) *Sulle superficie che hanno le linee di curvatura piane*: Annali di Mat., 2ª serie, t. 1.
Annali di Matematica, tomo IV. 26

Ora, nel caso delle superficie gobbe l'elemento lineare sferico è:

$$ds'^2 = du^2 + \operatorname{sen}^2(u - W) dv^2, \quad (48)$$

e si hanno le (41) e $M=0$; quindi le equazioni delle linee di curvatura e delle loro trasformate sferiche sono comprese nella seguente (*)

$$2Vdu + \left\{ V'_1 \operatorname{sen}^2(u - W) - V' \operatorname{sen}(u - W) \cos(u - W) - VW' \right. \\ \left. \pm \sqrt{[V'_1 \operatorname{sen}^2(u - W) - V' \operatorname{sen}(u - W) \cos(u - W) - VW']^2 + 4V^2 \operatorname{sen}^2(u - W)} \right\} dv = 0; \quad (49)$$

la quale, ponendo $\operatorname{sen}(u - W) = \eta$, può anche scriversi sotto la forma:

$$2Vdu + (\alpha \pm \sqrt{\beta}) dv = 0, \quad (50)$$

ove α e β sono funzioni razionali intere di η e $\sqrt{1 - \eta^2}$, i cui coefficienti sono funzioni di v ; e perciò per avere le superficie gobbe che cerchiamo (se pure esistono), basterà determinare i valori da darsi a V , V_1 e W onde ottenere che le linee (50) corrispondenti al segno superiore di $\sqrt{\beta}$, o quelle corrispondenti al segno inferiore, considerate sulla sfera (48), abbiano la curvatura geodetica costante.

Ciò posto, sia $\phi(u, v)$ il valore che si trova colle formole note per la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho}$ delle linee (50) sulla sfera (48). Lungo queste linee si avrà:

$$d \frac{1}{\rho} = \left(\frac{d\phi}{du} \frac{du}{dv} + \frac{d\phi}{dv} \right) dv,$$

ove $\frac{du}{dv}$ deve essere dedotto dalla equazione (50); quindi per le superficie che cerchiamo si dovrà avere:

$$\frac{d\phi}{du} \frac{du}{dv} + \frac{d\phi}{dv} = 0, \quad (51)$$

(*) Questa equazione è soddisfatta da $u=W$ o $u=W+\pi$, quando si prende il segno inferiore del radicale; quindi poichè per le (44), (45) e (48) queste linee sulla superficie sono situate all'infinito, e sulla sfera sono gli involuppi dei cerchi v , si conclude che le linee della sfera involuppi dei cerchi massimi che rappresentano le generatrici corrispondono a linee di curvatura all'infinito; e quindi (escludendo il caso che queste curve involuppi si riducano a due punti e che quindi la superficie sia a piano direttore) si potrà dire che nelle superficie gobbe che non hanno un piano direttore, le linee di curvatura di un sistema sono tali che le loro rappresentazioni sferiche sono perpendicolari alle curve involuppi dei cerchi massimi che rappresentano le generatrici, e sulla superficie vanno a toccare le generatrici all'infinito.

quando $\frac{du}{dv}$ appartenga alle linee di curvatura (50) di uno stesso sistema, e quindi sia il valore che viene dalla (50) prendendovi il segno superiore di $\sqrt{\beta}$, o quello che si ottiene prendendo il segno inferiore; e poichè questa equazione (51) viene ad essere in termini finiti e non contiene costanti arbitrarie, mentre deve appartenere a tutte le infinite linee di curvatura di uno stesso sistema, si conclude che essa dovrà essere identica.

Ora, ponendo nel primo membro della (51) il valore di $\frac{du}{dv}$ che si ha dalla (23), si ottiene una equazione della forma:

$$A + B\sqrt{1-\eta^2} \pm (C + D\sqrt{1-\eta^2})\sqrt{\beta} = 0, \quad (52)$$

ove A, B, C, D sono funzioni razionali intere di η ; quindi, per quanto abbiamo detto, per le superficie che cerchiamo bisognerà che una e una sola delle due equazioni che si ottengono da questa prendendo il segno superiore o l'inferiore di $\sqrt{\beta}$ sia identicamente soddisfatta.

Da ciò risulta che C e D non potranno essere zero, perchè altrimenti quando fosse soddisfatta una delle (52), lo sarebbe anche l'altra; quindi onde sia soddisfatta una delle (52) basterà che lo sia una delle seguenti

$$(A + B\sqrt{1-\eta^2})(C - D\sqrt{1-\eta^2}) \pm [C^2 - D^2(1-\eta^2)]\sqrt{\beta} = 0.$$

Ora queste equazioni hanno la forma:

$$\lambda + \mu\sqrt{1-\eta^2} \pm \nu\sqrt{\beta} = 0$$

ove λ, μ, ν sono funzioni razionali intere di η , e ν non può essere nullo; quindi si vede intanto che β dovrà essere il quadrato di una funzione razionale di η e di $\sqrt{1-\eta^2}$; e perciò dobbiamo prima cercare in quali casi β può godere di questa proprietà.

Per questo osserviamo che si ha:

$$\beta = (V_1'^2 - V'^2)\eta^4 + (V'^2 + 4V^2 - 2VV'_1W')\eta^2 + V^2W'^2 + 2V'\eta(VW' - V'_1\eta^2)\sqrt{1-\eta^2}, \quad (53)$$

e onde sia:

$$\beta = (r + s\sqrt{1-\eta^2})^2, \quad (54)$$

ove r ed s sono funzioni razionali intere di η , dovrà essere:

$$rs = V'\eta(VW' - V'_1\eta^2).$$

Ora è chiaro che r non potrà essere una funzione del terzo grado di η e s una funzione del secondo o del terzo grado, altrimenti il valore (54) di β verrebbe del sesto o dell'ottavo grado, mentre il valore (53) è soltanto del quarto; dunque r dovrà essere al più del secondo grado in η , ed s del primo al più; e perciò, indicando con m una funzione di v , non si potranno avere che i seguenti casi:

$$\begin{aligned}
 1.^{\circ} \quad r &= \frac{VW' - V'_1 \eta^2}{m}, & s &= mV'\eta, \\
 2.^{\circ} \quad r &= \frac{\eta \left(\eta \pm \sqrt{\frac{VW'}{V'_1}} \right)}{m}, & s &= -mV'V'_1 \left(\eta \mp \sqrt{\frac{VW'}{V'_1}} \right), \\
 3.^{\circ} \quad r &= \frac{1}{m}, & s &= mVV'W'\eta, \quad V'_1 = 0, \\
 4.^{\circ} \quad r &= \frac{VV'W'\eta}{m}, & s &= m, \quad V'_1 = 0, \\
 5.^{\circ} \quad V' &= W' = 0, \\
 6.^{\circ} \quad V'_1 &= 0.
 \end{aligned}$$

Ma esaminando i primi quattro di questi casi, e osservando che in questi si suppone che V' e V'_1 non siano zero, si trova che onde potessero essere uguali i valori (53) e (54) di β , bisognerebbe che si avesse $V=0$ e questo non può essere; quindi questi quattro casi sono da escludersi, e ci resta soltanto da esaminare i due ultimi.

Ora esaminando il quinto caso, si trova che onde β sia un quadrato, bisogna che anche V sia costante, e questo porterebbe che la superficie gobba fosse l'elicoide di area minima. Ma in questo elicoide, come è noto (e come è facile a riscontrarsi coll'osservare che le trasformate sferiche delle linee di curvatura sono lossodromiche) le linee di curvatura non sono piane; quindi anche il caso attuale è da escludersi, e ci resta solo da considerare il caso di $V'=0$.

Supponiamo dunque ora $V'=0$; il valore di β diviene:

$$\beta = V'^2_1 \eta^4 + 2V(2V - V'_1 W') \eta^2 + V^2 W'^2,$$

e per essere un quadrato richiede che si abbia $V = V'_1 W'$; quindi oltre a $V'=0$, si dovrebbe avere $V = V'_1 W'$.

Ora, quando si ha $V'_1 W' = V = \text{cost}$, le equazioni (49) delle linee di curvatura si riducono alle altre:

$$du - W' dv = 0, \quad W' du + \text{sen}^2(u - W) dv = 0;$$

la prima delle quali è subito integrabile e dà:

$$u - W = \text{cost}$$

per l'equazione in termini finiti delle linee di curvatura di un sistema; quindi per esaurire la nostra ricerca, non ci resta più che cercare se è possibile di determinare la funzione W in modo che la curvatura geodetica di uno solo dei due sistemi di linee:

$$u - W = \text{cost}, \tag{55}$$

$$W' du + \text{sen}^2(u - W) dv = 0, \tag{56}$$

sulla sfera (48) sia costante lungo le stesse linee.

Ora calcolando la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho}$ delle linee (55) sulla sfera (48) si trova:

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{W'' \text{sen } \omega}{(W'^2 + \text{sen}^2 \omega)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\cos \omega}{(W'^2 + \text{sen}^2 \omega)^{\frac{1}{2}}},$$

ove $\omega = u - W$; e siccome, onde $\frac{1}{\rho}$ sia costante lungo le linee (55) stesse bisogna che $\frac{1}{\rho}$ non dipenda che da ω , si conclude che onde le linee (55) sulla superficie fossero piane, dovrebbe essere $W' = \text{cost}$. Ma la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho'}$ delle linee (56) sulla sfera è:

$$\frac{1}{\rho'} = - \frac{W' W''}{(W'^2 + \text{sen}^2 \omega)^{\frac{3}{2}}}, \tag{57}$$

ed è zero quando W' è costante; quindi se le linee (55) sulla superficie fossero piane, le linee (56) sarebbero geodetiche e perciò non potremmo essere che nel caso dell'iperboloide gobbo di rivoluzione; e di questo caso noi non vogliamo occuparci.

Volendo invece che le linee (56) fossero piane, bisognerebbe che si avesse identicamente per la (56) e (57):

$$d\frac{1}{\rho'} = -\frac{1}{(W'^2 + \text{sen}^2 \omega)^{\frac{3}{2}}} \{ (W' W'')' (W'^2 + \text{sen}^2 \omega) - \\ - 3 W'' [W'^2 W'' - \text{sen} \omega \cos \omega (W'^2 + \text{sen}^2 \omega)] \} dv = 0,$$

e questa porterebbe ancora $W'' = 0$, e saremmo nel caso precedente; dunque si può ora concludere che: fra le superficie gobbe non ne esiste alcuna che abbia un solo sistema di linee di curvatura piane; e quindi (per il teorema citato in principio sull'iperboloide gobbo di rivoluzione), quando sia trovato che una superficie gobba ha un sistema di linee di curvatura piane, si può dire subito che anche le linee di curvatura dell'altro sistema sono piane, e che la superficie è un iperboloide gobbo di rivoluzione.

Pisa, settembre 1870.

Sur les courbes équidistantes sphériques.

(par M.^r WILLIAM ROBERTS, à Dublin.)

1. Il existe, comme nous allons le faire voir, une liaison simple entre la surface développable, circonscrite à une sphère suivant une courbe C , et les courbes équidistantes à C . En effet, soit $F(R, \Omega) = 0$ l'équation, en coordonnées polaires sphériques, d'une courbe donnée. Un petit cercle, ayant son pôle en un point quelconque (R, Ω) de cette courbe, et pour rayon sphérique un arc de longueur constante k , aura pour équation entre ρ, ω , coordonnées polaires sphériques,

$$\cos k = \cos R \cos \rho + \sin R \sin \Omega \sin \rho \sin \omega + \sin R \cos \Omega \sin \rho \cos \omega. \quad (1)$$

Cette équation renferme un seul paramètre, en vertu de la relation donnée $F(R, \Omega) = 0$, et l'enveloppe de tous les cercles par rapport à ce paramètre sera une courbe équidistante à la donnée. Or en supposant que l'origine des coordonnées polaires soit le point où l'axe des z perce la sphère, et qu'on compte l'angle ω à partir d'un grand cercle fait par le plan des xz , l'équation d'un plan tangent à la sphère (dont on désigne le rayon par a) en un point quelconque de la courbe donnée sera,

$$x \sin R \cos \Omega + y \sin R \sin \Omega + z \cos R = a.$$

L'enveloppe de ce plan sera la développable circonscrite à la sphère suivant la courbe $F(R, \Omega) = 0$, ce qui donnera évidemment le théorème suivant:

« Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la développable circonscrite à une sphère, dont on prend le rayon pour unité, suivant une courbe C . L'équation, en coordonnées polaires sphériques, d'une courbe équidistante à C , sera

$$F\left(\frac{\sin \rho \cos \omega}{\cos k}, \frac{\sin \rho \sin \omega}{\cos k}, \frac{\cos \rho}{\cos k}\right) = 0. »$$

2. Maintenant considérons la courbe, enveloppe des grands cercles passant par les points de la courbe $F(R, \Omega) = 0$, et perpendiculaires aux rayons vecteurs sphériques issus de l'origine: courbe analogue à la première podaire négative in plano. Un quelconque de ces cercles aura pour équation

$$\tan \rho \cos(\Omega - \omega) = \tan R.$$

En se reportant sur l'équation (1), on verra qu'en y faisant $k = \rho$, elle prendra la forme

$$\tan \rho \cos(\Omega - \omega) = \tan \frac{1}{2} R.$$

Par conséquent, on en déduit le théorème suivant, en se rappelant qu'en cherchant l'enveloppe du cercle (1), la différentiation s'étend aux seules quantités R, Ω .

« En écrivant ρ au lieu de k dans l'équation de la courbe équidistante à une courbe C , on aura celle de la première podaire négative sphérique de la courbe, lieu des points milieux des rayons recteurs sphériques de C . »

En se rappelant que la courbe équidistante est absolument liée avec la donnée, on s'apercevra qu'ayant obtenu son équation, on peut en déduire, par une simple transformation de l'origine, celle de la première podaire négative de la courbe lieu des points milieux des rayons sphériques, issus d'un point quelconque sur la sphère, choisi à volonté. De plus, l'équation de la première podaire négative, par rapport à une origine quelconque, du lieu des points milieux des rayons vecteurs de la courbe équidistante, s'obtient avec la même facilité. Il résulte immédiatement du théorème énoncé, que si $\Pi(\rho, \omega, k) = 0$ est l'équation, rapportée à une origine quelconque, de la courbe équidistante à une donnée, $\Pi(\rho, \omega, \rho + k) = 0$ sera celle de la podaire négative dont il s'agit.

Il est bon de remarquer que le résultat qu'on vient de trouver, fournit une parfaite analogie, dans la géométrie de la sphère, à un théorème que j'ai publié dans les Annales de M.^r TORTOLINI, (1^e série, t. 4, pag. 153), il y a quelques années. Je le rappellerai ici: « Soit $\Pi(x, y, z, k) = 0$ l'équation d'une surface parallèle à une surface S . Alors l'équation

$$\Pi\left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = 0$$

représente la première podaire négative de S , rapportée à l'origine comme pôle, et

$$\Pi\left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z, k + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = 0$$

est l'équation de la première polaire négative de la surface parallèle à S . »

3. Toutes les courbes sphériques équidistantes ont la même développée sphérique, ainsi que la même surface polaire développable, enveloppe des plans normaux; la polaire développable est le cône ayant le centre de la sphère pour sommet, et passant par la développée sphérique. Le théorème de M.^r DUPIN sur les tangentes conjuguées nous montre aussi que :

L'arête de rebroussement de la développable circonscrite à une sphère suivant une courbe, se trouve située sur le cône, polaire développable de la courbe. Elle est une ligne géodésique de ce cône. Ce cône est le lieu des arêtes de rebroussement des développables circonscrites suivant toutes les courbes équidistantes.

On voit par là que l'arête de rebroussement de la développable circonscrite à une sphère, suivant une courbe quelconque C , est une développée de C ; en prolongeant un fil tendu, appliqué à la polaire développable suivant cette arête de rebroussement, on peut décrire sur la développable circonscrite la courbe C , aussi qu'une série de courbes équidistantes à elle.

Ces courbes équidistantes sont des lignes de courbure de la développable circonscrite à la sphère. Elles sont données aussi par l'intersection de cette développable avec un système de sphères ayant le même centre que la donnée.

Le théorème de DUPIN nous conduit également aux résultats que voici :

L'arête de rebroussement de la développable circonscrite à une surface quelconque suivant une de ses lignes de courbure, se trouve située sur la polaire développable de la ligne de courbure. Elle est une ligne géodésique de la polaire développable, et aussi une développée de la ligne de courbure, ainsi que des courbes équidistantes à elle sur la développable circonscrite; surface, dont elles constituent une série de lignes de courbure.

4. Il est intéressant d'observer que l'arête de rebroussement de la développable circonscrite à une quadrique suivant la courbe de son intersection avec une autre quadrique, ayant le même centre et semblablement placée, se projette sur les plans principaux dans des développées de coniques. C'est ce que je vais démontrer, comme il suit :

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2)$$

l'équation d'un ellipsoïde. On sait que la courbe d'intersection de cette surface avec une autre quadrique ayant le même centre et semblablement

placée, est située sur un cône du second degré, dont on peut écrire l'équation sous la forme

$$\frac{x^2}{\tan^2 \alpha} + \frac{y^2}{\tan^2 \beta} = z^2. \quad (3)$$

En faisant dans cette dernière équation

$$x = a \sin \theta \cos \psi \quad y = b \sin \theta \sin \psi \quad z = c \cos \theta,$$

on aura .

$$\frac{a^2 \tan^2 \theta \cos^2 \psi}{c^2 \tan^2 \alpha} + \frac{b^2 \tan^2 \theta \sin^2 \psi}{c^2 \tan^2 \beta} = 1. \quad (4)$$

La développable circonscrite à l'ellipsoïde (2) suivant la courbe définie par l'équation (3), sera l'enveloppe du plan tangent, dont l'équation

$$\frac{x \tan \theta \cos \psi}{a} + \frac{y \tan \theta \sin \psi}{b} + \frac{z}{c} = \sec \theta$$

ne renferme qu'un seul paramètre, en vertu de la relation (4). Prenons pour paramètre un angle ϕ , tel que

$$\tan \theta \cos \psi = \frac{c}{a} \tan \alpha \cos \phi, \quad \tan \theta \sin \psi = \frac{c}{b} \tan \beta \sin \phi;$$

ce qui nous donnera, pour l'équation du plan tangent,

$$\frac{x \tan \alpha}{a} \cos \phi + \frac{y \tan \beta}{b} \sin \phi + \frac{z}{c} = \sqrt{\left(\frac{1}{c^2} + \frac{\tan^2 \alpha}{a^2}\right) \cos^2 \phi + \left(\frac{1}{c^2} + \frac{\tan^2 \beta}{b^2}\right) \sin^2 \phi}.$$

Maintenant posons

$$U = \frac{\frac{cx \tan \alpha \cos \phi}{a^2} + \frac{cy \tan \beta \sin \phi}{b^2} + \frac{z}{c}}{\sqrt{\left\{\left(1 + \frac{c^2}{a^2} \tan^2 \alpha\right) \cos^2 \phi + \left(1 + \frac{c^2}{b^2} \tan^2 \beta\right) \sin^2 \phi\right\}}},$$

et il est clair que l'arête de rebroussement de la développable se trouvera située sur la surface enveloppe, par rapport à ϕ , du plan ayant pour équation $\frac{dU}{d\phi} = 0$. Mais si l'on fait $u = \frac{A \cos \phi + B \sin \phi + C}{\sqrt{D \cos^2 \phi + E \sin^2 \phi}}$, l'équation $\frac{du}{d\phi} = 0$ nous donnera

$$\frac{AE}{\cos \phi} - \frac{BD}{\sin \phi} = C(D - E)$$

et l'enveloppe de cette équation, comme il est aisé de s'en assurer, est

$$(AE)^{\frac{2}{3}} + (BD)^{\frac{2}{3}} = C^{\frac{2}{3}}(D - E)^{\frac{2}{3}}.$$

Par conséquent, l'arête de rebroussement est située sur le cône ayant pour équation

$$\begin{aligned} \left(\frac{x \tan \alpha}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{c^2}{b^2} \tan^2 \beta\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y \tan \beta}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{c^2}{a^2} \tan^2 \alpha\right)^{\frac{2}{3}} = \\ = z^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\tan^2 \alpha}{a^2} - \frac{\tan^2 \beta}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Il est évident aussi que la projection sur le plan des xy de l'arête de rebroussement sera l'enveloppe de la droite ayant pour équation

$$\frac{x \tan \alpha \sin \phi}{a^2} - \frac{y \tan \beta \cos \phi}{b^2} = \frac{\left(\frac{\tan^2 \alpha}{a^2} - \frac{\tan^2 \beta}{b^2}\right) \sin \phi \cos \phi}{\sqrt{\left\{\left(\frac{1}{c^2} + \frac{\tan^2 \alpha}{a^2}\right) \cos^2 \phi + \left(\frac{1}{c^2} + \frac{\tan^2 \beta}{b^2}\right) \sin^2 \phi\right\}}}.$$

Mais, en général, l'enveloppe de l'équation

$$A \sin \phi - B \cos \phi = \frac{\sin \phi \cos \phi}{\sqrt{C \cos^2 \phi + D \sin^2 \phi}}$$

est

$$A^{\frac{2}{3}} C^{\frac{1}{3}} + B^{\frac{2}{3}} D^{\frac{1}{3}} = 1$$

d'où il résulte que la projection sur le plan xy de l'arête de rebroussement aura pour équation

$$\left(\frac{x \tan \alpha}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{\tan^2 \alpha}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{y \tan \beta}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{\tan^2 \beta}{b^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\tan^2 \alpha}{a^2} - \frac{\tan^2 \beta}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

En combinant cette dernière équation avec (5), on en tire la démonstration du théorème que nous nous sommes proposé d'établir.

Ce théorème renferme, comme cas particuliers, les développables circonscrites à une quadrique suivant ses lignes de courbure, ainsi que celle circonscrite à une sphère suivant une sphéro-conique.

Greystones, Comté de Wicklow (Irlande), le 10 septembre 1869.

Note sur les fonctions dont les dérivées successives forment des séries arithmétiques

(par ED. WEYR, étudiant à Prague.)

Avant la recherche de la forme générale d'une fonction $f(x)$, qui jouit de la propriété indiquée, je démontre le théorème suivant :

« Si les dérivées successives d'une fonction $f(x)$ forment pour une valeur particulière $x=a$ une série arithmétique de l'ordre m , il en est du même pour toute valeur de la variable x , c'est-à-dire : les dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... sont membres d'une série arithmétique de l'ordre m . En désignant par δ la m -ième différence de la suite $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$, ... on aura δe^{x-a} pour différence m -ième de la série $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... »

Pour démontrer cela, formons d'après le théorème de TAYLOR les équations •

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + f'''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots$$

$$f''(x) = f''(a) + f'''(a)(x-a) + f^{(4)}(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots$$

$$f'''(x) = f'''(a) + f^{(4)}(a)(x-a) + f^{(5)}(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots$$

.....

séries convergentes pour toutes valeurs finies de x , puisqu'on a

$$\lim \cdot \frac{f^{(n+1)}(a)}{f^{(n)}(a)} = 1 \text{ pour } n = \infty.$$

Pour calculer le premier membre A des m -ièmes différences de la suite

$$f'(x), f''(x), f'''(x), \dots \tag{1}$$

il suffit de former les premiers membres des m -ièmes différences des séries

$$\left. \begin{array}{l} f'(a) \quad f''(a) \quad f'''(a) \dots \\ f''(a) \quad f'''(a) \quad f^{(4)}(a) \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\} \quad (2)$$

mais ces premiers membres sont tous $= \delta$, ce qui donne

$$A = \delta + \delta(x-a) + \delta \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots = \delta e^{x-a}.$$

On trouvera de la même manière le second membre B des m -ièmes différences de la suite (1), et puisque les seconds membres des m -ièmes différences des séries (2) sont aussi $= \delta$, il viendra

$$B = \delta + \delta(x-a) + \delta \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots = \delta e^{x-a}.$$

On voit par là, que toutes les différences m -ièmes A, B, C, D, \dots de la série (1) sont égales à δe^{x-a} , ce qui démontre le théorème.

Après cela cherchons la forme générale de la fonction $y = f(x)$. Ecrivons les équations :

$$\begin{aligned} A &= \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - \binom{m}{1} \frac{d^n y}{dx^n} + \binom{m}{2} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \dots + (-1)^m \frac{dy}{dx} \\ B &= \frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} - \binom{m}{1} \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \binom{m}{2} \frac{d^n y}{dx^n} - \dots + (-1)^m \frac{d^2 y}{dx^2} \\ C &= \frac{d^{n+3}y}{dx^{n+3}} - \binom{m}{1} \frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + \binom{m}{2} \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - \dots + (-1)^m \frac{d^3 y}{dx^3} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

On aura d'après ce qui précède :

$$A = B = C = D = \dots$$

Mais on remarque sur le champ, que les fonctions B, C, D, \dots sont les dérivées successives de la fonction A ; on pourra donc par différentiation de l'équation $A = B$ déduire les équations $B = C, C = D, \dots$ La condition nécessaire et suffisante, pour qu'une fonction $f(x)$ jouit de la propriété indiquée, est donc

$$A = B$$

ou ayant égard à la formule connue $\binom{m}{p+1} + \binom{m}{p} = \binom{m+1}{p+1}$:

$$\frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}} - \binom{m+1}{1} \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} + \binom{m+1}{2} \frac{d^m y}{dx^m} - \dots - (-1)^m \frac{dy}{dx} = 0 \dots \quad (3)$$

$y = e^{\alpha x}$ sera une intégrale de (3), si l'on aura:

$$\alpha^{m+2} - \binom{m+1}{1} \alpha^{m+1} + \binom{m+1}{2} \alpha^m - \dots - (-1)^m \alpha = \alpha (\alpha - 1)^{m+1} = 0;$$

ce qui donne $\alpha = 0$ et la racine $m + 1$ ^{tuple} $\alpha = 1$. L'intégrale complète de l'équation (3) sera donc

$$y = c + c_0 e^x + c_1 x e^x + c_2 x^2 e^x + \dots + c_m x^m e^x.$$

Cette formule fournit la somme de chaque série de la forme

$$u_0 + u_1 x + u_2 \frac{x^2}{2!} + u_3 \frac{x^3}{3!} + \dots$$

si u_1, u_2, u_3, \dots sont les membres d'une série arithmétique d'un ordre quelconque.



Etude de la courbure en un point multiple d'une courbe plane (*).

(par Mr. L. PAINVIN, prof. à Lyon.)

1. **S**auf les indications très-sommaires données par Mr. BERTRAND, à l'occasion des points de rebroussement, dans son *Traité de calcul différentiel* nos 500, 501, 502, je ne connais rien sur la courbure en un point multiple d'une courbe ou d'une surface; les procédés habituellement employés dans le calcul différentiel se prêtent d'ailleurs très-difficilement à une semblable étude; j'ai donc abordé cette question par une méthode nouvelle, et cette méthode permet de déterminer sans aucune difficulté la courbure en un point multiple d'ordre quelconque, soit dans une courbe, soit dans une surface.

Voici en quelques mots le résumé de la méthode que j'ai adoptée pour l'étude de la courbure.

Lorsqu'il s'agit d'une courbe, j'imagine un cercle quelconque touchant la tangente proprement dite à la courbe au point considéré, O par exemple, puis j'exprime que ce cercle rencontre la courbe en le plus grand nombre possible de points coïncidant avec le point O ; pour cela, je forme des combinaisons des équations de la courbe et du cercle; ces combinaisons se succèdent d'ailleurs d'une manière très-régulière, comme on le verra dans les applications qui suivent.

Lorsqu'il s'agit d'une surface, j'imagine une sphère quelconque touchant le plan tangent à la surface (ou au cône tangent, si le point considéré est multiple); puis j'exprime que les sections de la surface et de la sphère par

(*) Mémoire présenté à l'Acad. des sciences de Paris (18 janvier 1869).

le plan sécant choisi se rencontrent en le plus grand nombre possible de points coïncidant avec le point considéré sur la surface.

2. Dans ce mémoire, je me servirai fréquemment de la notation suivante: C et C' désignant deux courbes qui passent par un point O , je représenterai par

$$N(C, C')$$

le nombre des points, coïncidant avec le point O , et communs aux deux courbes C et C' .

§ 1. Point double ordinaire.

3. Si l'on prend le point double pour origine O des coordonnées, l'équation de la courbe se présentera sous la forme

$$S = ax^2 + bxy + cy^2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \dots = 0, \quad (1)$$

ϕ_i désignant une fonction homogène et de degré i par rapport aux variables x et y ; les fonctions ϕ_3 et ϕ_4 sont, par exemple:

$$\left. \begin{aligned} \phi_3 &= Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3, \\ \phi_4 &= A_1x^4 + B_1x^3y + C_1x^2y^2 + D_1xy^3 + E_1y^4 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

les coefficients a, b, c, A, B, \dots sont de fonctions connues et parfaitement déterminées des coordonnées du point double.

L'ensemble des termes du second degré peut s'écrire

$$ax^2 + bxy + cy^2 = c(y - mx)(y - m_1x), \quad (3)$$

les quantités m et m_1 sont distinctes, puisqu'il s'agit d'un point double ordinaire, et on a les valeurs

$$m = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}, \quad m_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}. \quad (4)$$

Ceci posé, considérons un cercle touchant à l'origine une des branches de la courbe S ; l'équation de ce cercle sera, en supposant les axes de coordonnées rectangulaires:

$$C = \lambda(y - mx) + x^2 + y^2 = 0, \quad (5)$$

λ étant un paramètre arbitraire.

Formons maintenant l'équation

$$\Sigma = \lambda S - c(y - m_1 x) \cdot C = 0. \quad (6)$$

Or il est visible d'après cette équation que

$$N(S, C) = N(\Sigma, C),$$

c'est-à-dire que le nombre des points, coïncidant avec O , communs aux courbes S et C est égal au nombre des points, coïncidant avec O , communs aux courbes Σ et C . Mais l'origine est un point triple pour la courbe Σ et un point simple pour la courbe C ; ces deux courbes n'ont pas d'ailleurs de tangente commune; elles ont, par conséquent, trois points coïncidant avec O . Donc

« Un cercle quelconque touchant en O une des branches de la courbe S rencontre cette courbe en trois points coïncidant avec O , c'est-à-dire qu'il a avec cette courbe un contact effectif du premier ordre ».

Pour que le cercle ait avec la courbe S un contact effectif d'un ordre plus élevé, il faut que la tangente ($y - mx = 0$) touche également la courbe Σ ; c'est une condition nécessaire. Or si l'on exprime que les termes du 3^{ème} degré de l'équation (6) sont divisibles par $(y - mx)$, c'est-à-dire si l'on exprime que l'ensemble de ces termes s'annule lorsqu'on y fait $y = mx$, il vient

$$\lambda \phi_3(1, m) - c(m - m_1)(1 + m^2) = 0;$$

d'où l'on déduit

$$\lambda = \frac{c(m - m_1)(1 + m^2)}{\phi_3(1, m)}. \quad (7)$$

Je dis qu'alors le cercle C rencontrera la courbe S en quatre points coïncidant avec O , c'est-à-dire qu'il aura avec cette courbe un contact effectif de second ordre; je l'appellerai, dans ce cas, cercle osculateur.

En effet dans l'hypothèse actuelle, l'équation se présente sous la forme suivante:

$$\Sigma' = (y - mx)\psi_2 + \lambda \phi_4 + \lambda \phi_5 + \dots = 0; \quad (8)$$

formons maintenant l'équation

$$\Sigma_1 = \lambda \Sigma' - C \cdot \psi_2 = 0. \quad (9)$$

D'après cette équation on a visiblement

$$N(\Sigma, C) = N(\Sigma_1, C);$$

mais l'origine est un point quadruple pour la courbe Σ_1 et un point simple pour le cercle C ; ces deux courbes ont donc, en général, quatre points communs coïncidant avec l'origine. Il peut arriver, pour des valeurs particulières des coefficients, que le nombre des points communs et coïncidant avec l'origine soit supérieur à quatre; ceci aura lieu, si les termes du 4^{ème} degré dans l'équation (9) admettent $(y - mx)$ en facteur.

4. De cette analyse on conclut:

THÉOR. I. Lorsqu'une courbe S possède un point double ordinaire O , un cercle quelconque, touchant en O une des branches de la courbe rencontre cette courbe en trois points coïncidant avec O , c'est-à-dire qu'il a avec elle un contact effectif du premier ordre.

Il existe, pour chacune des branches de la courbe S , un cercle touchant cette branche et rencontrant la courbe en quatre points coïncidant avec O , c'est-à-dire ayant avec cette courbe un contact effectif du second ordre; ce sont les deux cercles osculateurs de la courbe au point double considéré.

5. Les calculs qui précèdent nous donnent le formules suivantes:

Si une courbe possède un point double ordinaire et qu'on ait pris ce point double pour origine des coordonnées, l'équation de la courbe se présentera sous la forme:

$$S = c(y - mx)(y - m_1x) + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \dots = 0,$$

les deux cercles osculateurs à la courbe en ce point double seront déterminés par les équations qui suivent:

$$\begin{array}{l} \text{1^{er} cercle oscula-} \\ \text{teur touchant la bran-} \\ \text{che dont la tangente} \\ \text{est} \\ y - mx = 0. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 = \frac{c(m - m_1)(1 + m^2)}{\varphi_3(1, m)}, \\ x_0 = \frac{\lambda_0 m}{2}, \quad y_0 = -\frac{\lambda_0}{2}; \text{ coordonnées du centre,} \\ \lambda_0(y - mx) + x^2 + y^2 = 0; \text{ équation du cercle,} \\ R_0 = \frac{c(m - m_1)(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi_3(1, m_1)} \text{ rayon du cercle;} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 \text{2}^{\text{ème}} \text{ cercle oscula-} \\
 \text{teur touchant la bran-} \\
 \text{che dont la tangente} \\
 \text{est} \\
 y - m_1 x = 0.
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \lambda_1 = \frac{c(m - m_1)(1 + m_1^2)}{\varphi_3(1, m)}, \\
 x_1 = \frac{\lambda_1}{2} m_1, \quad y_1 = -\frac{\lambda_1}{2}; \text{ coordonnées du centre,} \\
 \lambda(y - m_1 x) + x^2 + y^2 = 0; \text{ équation du cercle,} \\
 R_1 = \frac{c(m_1 - m)(1 + m_1^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi_3(1, m_1)}; \text{ rayon du cercle.}
 \end{array} \right.$$

REMARQUE I. On voit que les rayons R_0 ou R_1 deviennent infinis lorsque la fonction $\varphi_3(x, y)$ s'annule par la substitution $y = mx$ ou $y = m_1 x$; c'est-à-dire que :

Si l'une des tangentes à la courbe au point double a , avec cette courbe, un contact effectif d'ordre supérieur au premier, le rayon du cercle osculateur correspondant est infini; en d'autres termes, la courbure est nulle.

Il est toujours admis que les quantités m et m_1 sont différentes, puisqu'il s'agit d'un point double ordinaire, c'est-à-dire d'un point double pour lequel les deux tangentes sont distinctes.

REMARQUE II. Lorsque le point double est un point isolé, les deux cercles osculateurs sont imaginaires.

5. EXEMPLE: (voir la planche, fig. I.)

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \text{ (Folium de DESCARTES.)}$$

L'application des formules précédentes donne pour les équations des deux cercles de courbure:

$$1^{\text{er}} \text{ cercle:} \quad x^2 + y^2 - 3ay = 0,$$

$$2^{\text{ème}} \text{ cercle:} \quad x^2 + y^2 - 3ax = 0.$$

Chaque cercle est rencontré par la courbe au point I , et a en outre avec elle cinq points communs coïncidant avec le point O ; il en résulte que chacun de ces cercles a avec la courbe un contact effectif du 3^{ème} ordre.

On constate directement ce résultat en cherchant les points communs à la courbe et à chacun des cercles osculateurs; pour cela on posera $y = tx$, et on trouve en considérant le 1^{er} cercle et en supprimant la solution $x = 0$:

$$x(1 + t^3) = 3at, \quad x(1 + t^3) = 3at;$$

d'où il résulte par l'élimination de x :

$$t = 1.$$

Les deux courbes n'ont donc en commun qu'un seul point distinct de l'origine O ; il en reste, par conséquent, cinq coïncidant avec cette même origine.

§ 2. Point double de rebroussement.

6. Si l'on prend le point de rebroussement pour origine de coordonnées et la tangente de rebroussement pour axe des x , l'équation de la courbe aura la forme suivante:

$$S = y^2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \dots = 0; \quad (1)$$

et l'équation d'un cercle tangent en O à Ox sera:

$$C = \lambda y + x^2 + y^2 = 0, \quad (2)$$

λ est une constante arbitraire, et on suppose les axes de coordonnées rectangulaires.

Formons l'équation

$$\Sigma = \lambda S - Cy = 0; \quad (3)$$

on voit par cette équation que

$$N(S, C) = N(\Sigma, C);$$

mais l'origine est un point triple pour la courbe Σ , et l'axe des x n'est pas une tangente en ce point triple; les deux courbes C et Σ ont donc trois points communs et coïncidant avec l'origine O , et trois seulement; c'est-à-dire que le cercle C et la courbe S ont un contact effectif du 1^{er} ordre seulement.

Si l'on veut que ce cercle ait, avec la courbe, un contact effectif d'un ordre plus élevé, il faut que l'ensemble des termes du 3^{ème} degré, dans l'équation (3), admette le facteur y , c'est-à-dire que l'on ait

$$\lambda A = 0, \quad (4)$$

où A désigne le coefficient de x^3 dans ϕ_3 .

Nous aurons d'après cela à considérer les trois cas suivants:

1.° La tangente de rebroussement a , avec la courbe, un contact effectif du premier ordre seulement;

2.° La tangente de rebroussement a un contact effectif du second ordre;

3.° La tangente de rebroussement a un contact effectif d'un ordre supérieur au second.

. Il est entendu que nous conservons la dénomination de point de rebroussement au cas où l'on a deux branches de la courbe qui se touchent et se prolongent de chaque côté du point de contact.

7. 1^{er} CAS. La tangente de rebroussement a , avec la courbe, un contact effectif du premier ordre seulement.

Dans ce cas, le coefficient A est différent de zéro; l'égalité (4) donne alors $\lambda = 0$; le rayon du cercle osculateur est donc nul, et, par suite, la courbure est infinie.

De là la proposition suivante :

« Lorsque la tangente de rebroussement a , avec la courbe, un contact effectif du premier ordre seulement, le cercle osculateur, c'est-à-dire le cercle ayant avec la courbe un contact effectif du second ordre, est un cercle de rayon nul; la courbure est alors infinie.

EXEMPLE: (voir la planche, fig. II.)

$$y^2 - x^3 = 0.$$

8. 2^{ème} CAS. La tangente de rebroussement a , avec la courbe, un contact effectif du second ordre, et du second ordre seulement.

Dans cette hypothèse, on a $A = 0$, et l'équation de la courbe est :

$$S = y^2 + y\phi_2 + \phi_4 + \phi_5 + \dots = 0, \quad (5)$$

le coefficient A_1 de x^4 dans ϕ_4 est supposé différent de zéro.

L'équation (3) de la courbe Σ devient alors

$$\Sigma' = [\lambda\phi_2 - (x^2 + y^2)]y + \lambda\phi_4 + \lambda\phi_5 + \dots = 0; \quad (6)$$

formons maintenant l'équation

$$\Sigma_1 = \lambda\Sigma' - C[\lambda\phi_2 - x^2 - y^2] = 0, \quad (7)$$

on voit, par cette équation que

$$N(C, \Sigma) = N(C, \Sigma_1);$$

mais l'origine est un point quadruple pour la courbe Σ_1 et un point simple pour le cercle C ; ces deux courbes ont donc toujours quatre points communs et coïncidant avec O , c'est-à-dire qu'un cercle quelconque, tangent à la courbe au point O , a avec cette courbe un contact effectif du second ordre.

Pour que le cercle ait un contact effectif d'un ordre plus élevé, il faut déterminer λ de manière à ce que l'ensemble des termes du 4^{ème} ordre, dans l'équation (7), soit divisible par y ; on trouve ainsi

$$\lambda^2 A_1 - \lambda B + 1 = 0, \quad (8)$$

où B soit le coefficient de x^2 dans ϕ_2 . Comme A_1 est supposé différent de zéro, il y a donc deux cercles osculateurs, et leurs rayons ne sont ni nuls, ni infinis.

Constatons que ces deux cercles ont, avec la courbe S , un contact effectif du 3^{ème} ordre au moins. En effet, lorsqu'on prend pour la valeur de λ une des racines de l'équation (8), l'équation (7) de Σ_1 se ramène à la forme

$$\Sigma'_1 = y\psi_3 + \lambda^2\phi_5 + \lambda^2\phi_6 + \dots = 0. \quad (9)$$

Si maintenant on forme l'équation

$$\Sigma_2 = \lambda\Sigma'_1 - C \cdot \psi_3 = 0, \quad (10)$$

on voit, que

$$N(C, \Sigma_1) = N(C, \Sigma_2);$$

mais l'origine est un point quintuple pour la courbe Σ_2 , et un point simple pour le cercle C ; d'ailleurs la droite Ox ne touche pas, en général, la courbe Σ_2 ; par conséquent, le cercle C rencontre la courbe S en cinq points coïncidant avec l'origine O , c'est-à-dire qu'il a avec cette courbe un contact effectif du 3^{ème} ordre.

Il peut arriver, pour des valeurs particulières des coefficients, que l'ensemble des termes du 5^{ème} degré dans l'équation (10) soit divisible par y , c'est-à-dire que le cercle C ait avec la courbe S un contact effectif d'un ordre plus élevé que le troisième.

Ainsi :

« Lorsque la tangente de rebroussement a , avec la courbe, un contact effectif du second ordre, et du second ordre seulement, un cercle quelconque, tangent à la courbe au point de rebroussement, a avec cette courbe un contact effectif du second ordre. Il y a deux cercles ayant avec la courbe un contact effectif du 3^{ème} ordre ou d'un ordre plus élevé; ces

« cercles sont, en général, distincts, et leurs rayons ne sont jamais nuls
« ou infinis. »

9. Les calculs qui précèdent nous conduisent aux formules suivantes:

Lorsque l'équation de la courbe se présente sous la forme;

$$S = y^2 + (Bx^2 + Cxy + Dy^2)y + \\ + (A_1x^4 + B_1x^3y + C_1x^2y^2 + D_1xy^3 + E_1y^4) + \dots = 0,$$

le coefficient A_1 étant différent de zéro, il y a deux cercles osculateurs dont les éléments sont déterminés par les équations qui suivent:

$$\left. \begin{array}{l} \text{1}^{\text{er}} \text{ cercle oscula-} \\ \text{teur.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lambda_0 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4A_1}}{2A_1}, \\ x_0 = 0, y_0 = -\frac{\lambda_0}{2}, \text{ coordonnées du centre,} \\ x^2 = y^2 + \lambda_0 y = 0, \text{ équation du cercle,} \\ R_0 = \text{valeur absolue de } \frac{\lambda_0}{2}, \text{ rayon;} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{2}^{\text{ème}} \text{ cercle oscula-} \\ \text{teur.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4A_1}}{2A_1}, \\ x_1 = 0, y_1 = -\frac{\lambda_1}{2}, \text{ coordonnées du centre,} \\ x^2 + y^2 + \lambda_1 y = 0, \text{ équation du cercle,} \\ R_1 = \text{valeur absolue de } \frac{\lambda_1}{2}, \text{ rayon.} \end{array}$$

Les deux cercles osculateurs coïncident lorsqu'on a:

$$B^2 - 4A_1 = 0.$$

EXEMPLE:

1.° Soit la courbe: (voir la planche, fig. III.)

$$S = y^2 + 4x^2y + 3x^4 + y^4 = 0.$$

Les équations des deux cercles osculateurs sont respectivement:

$$C_0 = x^2 + y^2 + y = 0,$$

$$C_1 = x^2 + y^2 + \frac{1}{3}y = 0.$$

Chacun de ces cercles a , avec la courbe, un contact effectif du 4^{ème} ordre; le cercle C_0 la rencontre, en outre, en deux points réels A et B ; le cercle C_1 la rencontre en deux points imaginaires.

Pour déterminer l'ordre du contact on peut chercher directement les points communs au cercle et à la courbe; si, par exemple, on prend le cercle C_0 , on posera $y = tx$; les équations des deux courbes donnent alors, après avoir supprimé la solution $x = 0$:

$$(3 + t^4)x^2 + 4tx + t^2 = 0, \quad x(1 + t^2) + t = 0;$$

éliminant la quantité x , il vient, en supprimant toujours les solutions nulles,

$$t^2 = 1;$$

donc, parmi les huit points communs aux deux courbes, il y en a deux distincts de l'origine; il en reste, par conséquent, six confondus avec cette origine.

1.° Soit la courbe: (voir la planche, fig. IV.)

$$S = y^2 + 4x^2y + 4x^4 - y^3x = 0.$$

Les deux cercles osculateurs se confondent avec le cercle:

$$\dot{C}_0 = x^2 + y^2 + \frac{1}{2}y = 0.$$

Ce cercle rencontre la courbe en sept points coïncidant avec l'origine O , c'est-à-dire qu'il a avec la courbe un contact effectif du 5^{ème} ordre, et il la coupe en un 8^{ème} point distinct de O .

10. 3^{ème} CAS. La tangente de rebroussement a , avec la courbe, un contact effectif d'un ordre supérieur au second.

L'équation de la courbe se présente alors sous la forme

$$S = y(y + \phi_2 + \phi_3 + \dots + \phi_i) + \phi_{i+2} + \phi_{i+3} + \dots = 0; \quad (11)$$

tous les termes, à partir du premier, renferment y en facteur jusqu'à la fonction ϕ_{i+2} exclusivement; i est égal ou supérieur à 3; les fonctions $\phi_2, \phi_3, \dots, \phi_i$ pourraient admettre encore le facteur y , mais la fonction ϕ_{i+2} ne l'admet pas.

La droite $y = 0$ rencontre la courbe S en $(i+2)$ points coïncidant avec l'origine O , elle a donc avec cette courbe un contact effectif de l'ordre i .

L'équation d'une circonférence, touchant en O l'axe Ox sera

$$C = \lambda y + x^2 + y^2 = 0, \quad (12)$$

λ étant une constante arbitraire. Formons l'équation

$$\Sigma = \lambda S - Cy = 0, \tag{13}$$

on a évidemment

$$N(C, S) = N(C, \Sigma).$$

Comme y entre en facteur dans les termes du moindre degré de Σ , il nous faudra, pour reconnaître le nombre de points coïncidant avec O , communs à C et Σ , former l'équation

$$\Sigma_1 = \lambda \Sigma - C[\lambda \phi_2 - x^2 - y^2] = 0, \tag{14}$$

et l'on a encore

$$N(C, \Sigma) = N(C, \Sigma_1).$$

Mais l'origine est un point simple pour le cercle C , et un point quadruple pour la courbe Σ_1 ; d'ailleurs, si λ est quelconque, y n'est pas diviseur des termes du degré le moins élevé dans Σ_1 ; par conséquent, C et Σ_1 ont quatre points communs coïncidant avec l'origine O . Il résulte de là que:

« Un cercle quelconque, tangent à la courbe S en son point de rebroussement, a avec la courbe un contact effectif du second ordre et du second ordre seulement ».

Si l'on suppose que ϕ_2 soit de la forme

$$\phi_2 = Ax^2 + Bxy + Cy^2, \tag{15}$$

et si l'on écrit que l'ensemble des termes du degré le moins élevé dans l'équation (14) de Σ_1 est divisible par y , ou trouve

$$\lambda A = 1, \quad \text{d'où } \lambda = \frac{1}{A}. \tag{16}$$

En prenant pour λ la valeur (16), l'équation de Σ_1 devient:

$$\Sigma'_1 = \left[\lambda^2 \phi_3 + (x^2 + y^2) \left(y - \frac{Bx + Cy}{A} \right) y + \lambda^2 y \phi_4 + \lambda^2 y \phi_5 + \dots + \right. \\ \left. + \lambda^2 y \phi_i + \lambda^2 \phi_{i+2} + \dots = 0. \right] \tag{17}$$

Pour reconnaître l'ordre du contact du cercle C avec la courbe S , il faut déterminer le nombre des points communs à C et Σ'_1 ; dans ce but, nous formerons l'équation

$$\Sigma_2 = \lambda \Sigma'_1 - C \cdot \psi_3 = 0, \quad \text{où } \psi_3 = \lambda^2 \phi_3 + (x^2 + y^2) \left(y - \frac{Bx + Cy}{A} \right) \tag{18}$$

et l'on a visiblement

$$N(C, \Sigma'_1) = N(C, \Sigma_2).$$

Or, l'origine est un point quintuple pour Σ_2 , et un point simple pour le cercle C ; le cercle C rencontre donc la courbe Σ_2 , et par suite la courbe S , en cinq points coïncidant avec l'origine O , c'est-à-dire qu'il a, avec la courbe S , un contact effectif du 3^{ème} ordre.

Ainsi « lorsque la tangente de rebroussement a, avec la courbe S , un contact effectif d'un ordre supérieur au second, le rayon d'un des cercles osculateurs devient infini, et il y a un seul cercle osculateur dont le rayon n'est pas, en général, infini; ce cercle a, avec la courbe un contact effectif du 3^{ème} ordre, ou d'un ordre plus élevé ».

11. Les calculs qui précèdent nous conduisent aux formules suivantes.

Lorsque l'équation de la courbe se présente sous la forme:

$$S = y^2 + (Ax^2 + Bxy + Cy^2) \cdot y + y(\phi_3 + \phi_4 + \dots + \phi_i) + \phi_{i+2} + \dots = 0,$$

i étant égal ou supérieur à 3; il n'y a plus qu'un seul cercle osculateur dont la rayon soit, en général, fini; l'équation de ce cercle est

$$C = x^2 + y^2 + \frac{1}{A}y = 0.$$

Le rayon du cercle C devient infini, c'est-à-dire la courbure est nulle, lorsque $A = 0$.

EXEMPLES:

1.° Soit la courbe: (voir la planche, fig. V.)

$$S = y^2 + xy^2 + x^3y + x^5 = 0;$$

le rayon du cercle osculateur proprement dit est ici infini; la courbure est nulle.

2.° Soit la courbe: (voir la planche, fig. VI)

$$S = y^2 + x^2y + x^3y + x^6 = 0.$$

Le cercle osculateur proprement dit a pour équation:

$$C = x^2 + y^2 + y = 0.$$

Ce cercle recontre la courbe en cinq points coïncidant avec l'origine; il a donc avec cette courbe un contact effectif du 3^{ème} ordre.

12. Je résumerai dans le théorème suivant la discussion qui vient d'être faite :

THÉORÈME II. Lorsque le point double est un point de rebroussement, on devra distinguer les trois cas qui suivent :

I. Lorsque la tangente de rebroussement a , avec la courbe, un contact effectif du 1^{er} ordre seulement, le cercle osculateur, c'est-à-dire le cercle ayant avec la courbe un contact effectif du 2^d ordre, est un cercle de rayon nul, la courbure est alors infinie.

II. Lorsque la tangente de rebroussement a , avec la courbe, un contact effectif du 2^d ordre, et du 2^d ordre seulement, un cercle quelconque, tangent à la courbe au point de rebroussement, rencontre cette courbe en quatre points coïncidant avec le point double, c'est-à-dire a avec elle un contact effectif du 2^d ordre. Il y a alors deux cercles ayant avec la courbe un contact effectif du 3^{ème} ordre ou d'un ordre plus élevé; ces cercles sont, en général, distincts, et leurs rayons ne sont jamais nuls ou infinis.

III. Lorsque la tangente de rebroussement a , avec la courbe, un contact effectif d'un ordre supérieur au second, un cercle quelconque, tangent à la courbe au point de rebroussement, a avec cette courbe un contact effectif du 2^d ordre seulement. Il n'y a plus qu'un seul cercle osculateur dont le rayon ne soit pas, en général, infini; ce cercle a avec la courbe un contact effectif du 3^{ème} ordre; dans des cas particuliers, le contact peut être d'un ordre plus élevé.

§ 3. Point multiple d'ordre quelconque.

13. Si l'on prend pour origine le point multiple, que nous supposons d'ordre p , l'équation de la courbe aura la forme

$$S = \phi_p(x, y) + \phi_{p+1}(x, y) + \dots + \phi_m(x, y) = 0, \quad (1)$$

ϕ_i désignant une fonction homogène en x et y , et du degré i .

Soit une des tangentes au point multiple

$$T = bx - ay = 0; \quad (2)$$

j'admettrai que T n'entre qu'à la 1^{ère} puissance dans $\phi_p(x, y)$, de sorte qu'on aura l'identité

$$\phi_p(x, y) = (bx - ay) \phi(x, y). \quad (3)$$

L'équation d'un cercle, touchant en O la branche dont la tangente est T , sera

$$C = \lambda(bx - ay) + x^2 + y^2 = 0, \quad (4)$$

λ étant une constante arbitraire, et les axes de coordonnées étant rectangulaires.

Formons maintenant l'équation

$$\Sigma = \lambda S - C \cdot \phi(x, y) = 0; \quad (5)$$

on a visiblement:

$$N(C, S) = N(C, \Sigma).$$

Or l'origine est un point multiple d'ordre $(p+1)$ pour la courbe Σ , et un point simple pour la cercle C ; d'ailleurs la droite T n'est pas tangente commune, si λ est quelconque; il en résulte que les courbes C et Σ , et par suite les courbes C et S , ont $(p+1)$ points communs coïncidant avec l'origine; donc:

« Un cercle quelconque, tangent en O à l'une des branches de la courbe S , rencontre cette courbe en $(p+1)$ points seulement coïncidant avec O , et n'a avec la courbe qu'un contact effectif du premier ordre ».

Pour que l'ordre du contact soit plus élevé, il faut exprimer que les termes du degré $(p+1)$, dans l'équation (5) de Σ , sont divisibles par $(bx - ay)$, c'est-à-dire que l'ensemble de ces termes s'annule lorsqu'on y fait $x = a$, $y = b$; ce qui donne

$$\lambda \phi_{p+1}(a, b) - (a^2 + b^2) \phi(a, b) = 0. \quad (6)$$

D'ailleurs l'identité (3) donne en différentiant, soit par rapport à x , soit par rapport à y :

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_p}{dx} &= b \phi(x, y) + (bx - ay) \frac{d\phi}{dx}, \\ \frac{d\phi_p}{dy} &= -a \phi(x, y) + (bx - ay) \frac{d\phi}{dy}; \end{aligned}$$

d'où l'on conclut, en faisant $x=a, y=b$:

$$\phi(a, b) = \frac{1}{b} \frac{d\varphi_p(a, b)}{dx} = -\frac{1}{b} \frac{d\varphi_p(a, b)}{db}. \quad (7)$$

On a donc

$$\lambda = \frac{(a^2 + b^2) \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{d\varphi_p(a, b)}{da}}{\phi_{p+1}(a, b)} = \frac{-\frac{1}{a} (a^2 + b^2) \frac{d\varphi_p(a, b)}{db}}{\phi_{p+1}(a, b)}; \quad (8)$$

lorsque a et b sont différents de zéro, les deux valeurs de λ sont identiques; mais, si $a=0$, il faudra prendre la première valeur; il faudra prendre la seconde, lorsqu'on aura $b=0$.

Quand on donnera à λ la valeur (8), le cercle C aura avec la courbe un contact effectif du second ordre; en effet, d'après la valeur admise, l'équation de Σ devient

$$\Sigma = (bx - ay)\psi_p(x, y) + \lambda\phi_{p+2}(x, y) + \lambda\phi_{p+3}(x, y) + \dots = 0. \quad (9)$$

Si maintenant on forme l'équation

$$\Sigma_1 = \lambda\Sigma - C \cdot \psi_p(x, y) = 0, \quad (10)$$

on voit que les courbes C et Σ_1 ont $(p+2)$ points communs et coïncidant avec l'origine O ; le contact effectif de C avec S est donc du second ordre.

Ainsi:

THÉOR. III. Lorsqu'une courbe possède un point multiple d'ordre p , et que les tangentes en ce point sont distinctes, il y a p cercles qui, touchant séparément chacune des branches de la courbe, ont avec cette courbe un contact effectif du second ordre, c'est-à-dire rencontrent la courbe en $(p+2)$ points coïncidant avec le point multiple.

Si une des tangentes au point multiple a , avec la courbe, un contact effectif d'un ordre supérieur au premier, le rayon de courbure correspondant est infini, la courbure est nulle.

14. Des calculs qui précèdent nous concluons les formules suivantes:

Le point multiple d'ordre p étant pris pour origine des coordonnées, l'équation de la courbe aura la forme:

$$S = \phi_p(x, y) + \phi_{p+1}(x, y) + \phi_{p+2}(x, y) \dots = 0,$$

l'équation d'une tangente en ce point étant

$$T = bx - ay = 0,$$

de sorte qu'on a la relation

$$\phi_p(a, b) = 0,$$

le cercle osculateur en O à la branche de courbe qui a pour tangente la droite T sera défini par les équations suivantes:

(On suppose que la tangente T ne résulte pas de la superposition de plusieurs tangentes, c'est-à-dire que $x = a, y = b$ est une solution simple de l'équation $\phi_p(x, y) = 0$)

$$\lambda = \frac{\frac{1}{b}(a^2 + b^2) \frac{d\phi_p(a, b)}{da}}{\phi_{p+1}(a, b)} = \frac{-\frac{1}{a}(a^2 + b^2) \frac{d\phi_p(a, b)}{db}}{\phi_{p+1}(a, b)},$$

$$C = \lambda(bx - ay) + x^2 + y^2 = 0, \text{ équation du cercle,}$$

$$x_0 = -\frac{\lambda b}{2}, \quad y_0 = \frac{\lambda a}{2}, \text{ coordonnées du centre,}$$

$$R = \frac{\lambda}{2}(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ rayon.}$$

Lorsque a sera nul, on devra prendre la 1^{re} valeur de λ ; il faudra prendre la seconde, quand b sera nul.

On voit que si la tangente T a avec la courbe un contact effectif d'un ordre supérieur au premier, c'est-à-dire si $\phi_{p+1}(a, b) = 0$, la valeur de λ est infinie, et par suite $R = \infty$; la courbure est nulle.

EXEMPLE. (voir la planche, fig. VI)

Soit la courbe

$$S = xy(x - y) + x^4 + y^4 = 0.$$

Les équations des trois cercles osculateurs sont respectivement:

$$C_0 = x - y + x^2 + y^2 = 0,$$

$$C_1 = -x + x^2 + y^2 = 0,$$

$$C_2 = y + x^2 + y^2 = 0.$$

On constate que les points de rencontre du cercle C_0 avec la courbe sont imaginaires, à l'exception du point O ; la vérification se fait sans difficulté en posant $y = tx$; on arrive ainsi à l'équation

$$(t - 1)^3(t^2 + t + 1) = 0.$$

Ceci légitime la position que j'ai donnée aux deux petites feuilles de la courbe.

15. Pour compléter cette étude, il nous reste à examiner le cas où plusieurs des tangentes au point multiple viennent à coïncider avec une même droite T , cette droite pouvant avoir avec la courbe un contact effectif d'un ordre supérieur au premier. Admettant que l tangentes viennent coïncider avec une droite T , nous aurons à examiner deux cas distincts. Pour bien préciser la différence de ces deux cas, je ferai la remarque suivante :

Si l'équation de la courbe est, après l'avoir rendue homogène :

$$f = \phi_p z^{m-p} + \phi_{p+1} z^{m-p-1} + \phi_{p+2} z^{m-p-2} + \dots + \phi_{m-1} z + \phi_m = 0, \quad (1^0)$$

on sait que la $(m-p-i)^{\text{ème}}$ polaire de l'origine, c'est-à-dire la polaire d'ordre $(p+i)$ de cette origine, a pour équation

$$\frac{d^{m-p-i} f}{dz^{m-p-i}} = 0,$$

c'est-à-dire en effectuant

$$P = a_0 \phi_p z^i + a_1 \phi_{p+1} z^{i-1} + a_2 \phi_{p+2} z^{i-2} + \dots + a_{i-1} \phi_{p+i-1} z + a_i \phi_{p+i} = 0. \quad (2^0)$$

où $a_0, a_1, a_2, \dots, a_i$ sont des nombres entiers. Ceci rappelé, nous aurons à distinguer les deux cas suivants :

L'origine O étant un point multiple d'ordre p , et l tangentes venant à coïncider avec une droite T :

1.° Les polaires du point O , ayant pour ordres respectifs :

$$p, p+1, p+2, p+3, \dots, p+l-2, p+l-1, p+l,$$

renferment respectivement

$$l, l-1, l-2, l-3, \dots, 2, 1, 0,$$

droites coïncidant avec la droite T ;

2.° Parmi les polaires précédentes, une au moins, par exemple la polaire d'ordre $p+i$, i étant inférieur à l , renferme $(l-i-j)$ droites seulement coïncidant avec la droite T , au lieu d'en renfermer $(l-i)$.

16. Pour examiner le 1^{er} cas, nous supposons, par exemple, $l=4$; et, d'après les hypothèses admises, l'équation de la courbe aura la forme :

$$S = (y-ax)^4 \phi_{p-4} + (y-ax)^3 \phi_{p-3} + (y-ax)^2 \phi_p + (y-ax) \phi_{p+2} + \left. \begin{array}{l} + \phi_{p+4} + \phi_{p+5} + \dots = 0; \end{array} \right\} \quad (1)$$

il y a quatre tangentes qui se confondent avec la droite

$$T = y - ax = 0.$$

L'équation d'un cercle, touchant la branche qui a pour tangente la droite T , sera

$$C = \lambda(y - ax) + x^2 + y^2 = 0, \quad (2)$$

λ étant une constante arbitraire.

Formons l'équation

$$\Sigma = \lambda S - C \cdot (y - ax)^3 \cdot \phi_{p-4} = 0, \quad (3)$$

et l'on a

$$N(C, S) = N(C, \Sigma).$$

Comme $(y - ax)$ entre en facteur dans les termes du degré le moins élevé de Σ , formons encore l'équation

$$\Sigma_1 = \lambda \Sigma - C \cdot M_1 (y - ax)^2 = 0, \quad \text{où } M_1 = \lambda \phi_{p-2} - (x^2 + y^2) \phi_{p-4}, \quad (4)$$

et l'on a

$$N(C, \Sigma) = N(C, \Sigma_1).$$

Pour la même raison que précédemment, formons l'équation

$$\Sigma_2 = \lambda \Sigma_1 - C \cdot M_2 (y - ax) = 0, \quad \text{où } M_2 = \lambda^2 \phi_p - (x^2 + y^2) M_1, \quad (5)$$

l'on aura

$$N(C, \Sigma_1) = N(C, \Sigma_2).$$

Formons enfin l'équation

$$\Sigma_3 = \lambda \Sigma_2 - C M_3 = 0, \quad \text{où } M_3 = \lambda^3 \phi_{p+2} - (x^2 + y^2) M_2,$$

et l'on a toujours :

$$N(C, \Sigma_2) = N(C, \Sigma_3).$$

L'origine est un point simple pour le cercle C , et un point multiple d'ordre $(p + 4)$ pour la courbe Σ_3 ; d'ailleurs, si λ est quelconque, l'ensemble des termes du degré le moins élevé dans Σ_3 n'est pas divisible par $(y - ax)$; les deux courbes C et Σ_3 ont donc $(p + 4)$ points communs et coïncidant avec O ; il en est de même pour les courbes C et S ; par conséquent :

« Un cercle quelconque, tangent en O à la branche qui touche la droite « T , aura avec la courbe S un contact effectif du 4^{ème} ordre. »

Pour que le contact soit d'un ordre plus élevé, il faut que l'ensemble des termes du moindre degré dans Σ_3 soit divisible par $(y - ax)$; on est ainsi conduit à l'équation de condition:

$$\left. \begin{aligned} \lambda^4 \phi_{p+4}(1, a) - \lambda^3(1 + a^2) \phi_{p+2}(1, a) + \lambda^2(1 + a^2)^2 \phi_p(1, a) - \\ - \lambda(1 + a^2)^3 \phi_{p-2}(1, a) + (1 + a^2)^4 \phi_{p-4}(1, a) = 0. \end{aligned} \right\} (7)$$

Si l'on forme maintenant l'équation

$$\Sigma_4 = \lambda \Sigma_3 - C \cdot \frac{\lambda^4 \phi_{p+4} - (x^2 - y^2) M_3}{(y - ax)} = 0,$$

on constate sans difficulté que, pour une des valeurs de λ vérifiant l'équation (7), le cercle correspondant a, avec la courbe S , un contact effectif du 5^{ème} ordre ou d'un ordre plus élevé.

17. L'analyse du numéro précédent peut évidemment se généraliser, et nous aurons la conclusion suivante:

Lorsqu'une courbe possède un point multiple d'ordre p , et que l des tangentes en ce point viennent à coïncider avec une droite

$$T = y - ax = 0;$$

si, en outre, l'équation de la courbe se présente sous la forme:

$$S = \left\{ \begin{aligned} (y - ax)^l \phi_{p-l} + (y - ax)^{l-1} \phi_{p-l+2,1} + (y - ax)^{l-2} \phi_{p-l+2,2} + \\ + \dots + (y - ax)^{l-i} \phi_{p-l+2i} \\ + \dots + (y - ax)^2 \phi_{p+l-4} + (y - ax) \phi_{p+l-2} + \phi_{p+l} + \phi_{p+l+1} + \dots \end{aligned} \right\} = 0,$$

il y aura l cercles osculateurs correspondant aux branches qui touchent la droite T ; ces cercles auront, avec la courbe S , un contact effectif de l'ordre $(l + 1)$ ou d'un ordre plus élevé.

L'équation d'un de ce cercles étant

$$C = \lambda(y - ax) + x^2 + y^2 = 0, \quad \text{d'où } R = \frac{\lambda}{2}(1 + a^2)^{\frac{1}{2}},$$

les l valeurs de λ seront déterminées par l'équation:

$$\left. \begin{aligned} \lambda^l \phi_{p+l}(1, a) - \lambda^{l-1}(1 + a^2) \phi_{p+l-2}(1, a) + \lambda^{l-2}(1 + a^2)^2 \phi_{p+l-4}(1, a) - \\ - \dots \pm \lambda^i(1 + a^2)^{l-i} \phi_{p-l+2i}(1, a) \\ \mp \dots \pm \lambda^2(1 + a^2)^{l-2} \phi_{p-l+2,2}(1, a) \mp \lambda(1 + a^2)^{l-1} \phi_{p-l+2,1}(1, a) \pm \\ \pm (1 + a^2)^l \phi_{p-l}(1, a) \end{aligned} \right\} = 0.$$

REMARQUE I. On suppose que ϕ_{p-l} n'admet plus le facteur $(y-ax)$; par suite $\phi_{p-l}(1, a)$ n'est pas nul; la dernière équation n'a donc pas de racine nulle, c'est à dire qu'aucun des l cercles n'a son rayon nul; la courbure n'est jamais infinie.

REMARQUE II. La fonction ϕ_{p+l} peut admettre le diviseur $(y-ax)$; il peut en être de même des fonctions $\phi_{p+l-2}, \phi_{p+l-4}, \dots$; la dernière équation peut donc avoir des racines infinies, c'est-à-dire que, parmi les l cercles, plusieurs pourront avoir leur rayon infini; dans ce cas, la courbure sera nulle.

18. Si l'on a égard à la remarque du n° [15], l'analyse des n°s [16] et [17] se résumera par la proposition suivante :

THÉOR. IV. Une courbe ayant un point multiple O d'ordre p , on suppose que l des tangentes viennent à coïncider avec une droite T ; on suppose en outre que les polaires du point O ayant pour ordres respectifs :

$$p, p+1, p+2, p+3, \dots, p+l-2, p+l-1, p+l$$

renferment respectivement et au moins

$$l, l-1, l-2, l-3, \dots, 2, 1, 0$$

droites coïncidant avec la tangente T . Ceci admis, un cercle quelconque, touchant en P la droite T , rencontre la courbe S en $(p+l)$ points coïncidant avec O , c'est-à-dire a, avec elle, un contact effectif du l^{me} ordre. Il y aura l cercles osculateurs correspondant à cette tangente, c'est-à-dire l cercles qui touchant en O la droite T , auront avec la courbe S un contact effectif du $(l+1)^{\text{me}}$ ordre ou d'un ordre plus élevé. Aucun de ces cercles n'aura son rayon nul, la courbure n'est jamais infinie; il pourra arriver que plusieurs de ces cercles aient leur rayon infini, la courbure pourra devenir nulle.

18. Arrivons maintenant au second cas signalé dans le n° [15], c'est-à-dire que une ou plusieurs des polaires d'ordres respectifs

$$p, p+1, \dots, p+i, \dots, p+j, \dots, p+l-1, p+l$$

ne contiennent pas leur nombre normal de droites coïncidant avec T , savoir

$$l, l-1, \dots, l-i, \dots, l-j, \dots, 1, 0.$$

Ainsi je supposerai que la polaire d'ordre $(p+i)$ renferme seulement

$(l-i-i_1)$ droites coïncidant avec T , au lieu d'en renfermer $(l-i)$; que la polaire d'ordre $(p+j)$ renferme seulement $(l-j-j_1)$ droites coïncidant avec T , au lieu d'en renfermer $(l-j)$; $i < j$. Ceci est suffisant pour nous donner une idée de ce qui doit avoir lieu; j'admettrai que les polaires des autres ordres, depuis p jusqu'à $(p+l)$, à l'exception des polaires d'ordre $(p+i)$ et $(p+j)$, renferment leur nombre normal de droites coïncidant avec T .

Nous choisirons la droite T pour axe des x ; d'après les hypothèses admises, l'équation de la courbe aura la forme:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} y^l \phi_{p-l} + y^{l-1} \phi_{p-l+2.1} + y^{l-2} \phi_{p-l+2.2} + y^{l-3} \phi_{p-l+2.3} + \dots + \\ \qquad \qquad \qquad y^{l-i+1} \phi_{p-l+2(i-1)} + y^{l-i+1} \phi_{p-l+2i+i_1} \\ + y^{l-i-1} \phi_{p-l+2(i+1)} + \dots + y^{l-j+1} \phi_{p-l+2(j-1)} + \\ \qquad \qquad \qquad y^{l-j-j_1} \phi_{p-l+2j+j_1} + y^{l-j-1} \phi_{p-l+2(j+1)} + \dots \\ \dots + y^2 \phi_{p+l-4} + y \phi_{p+l-2} + \phi_{p+l} + \phi_{p+l+1} + \dots \end{array} \right\} = 0;$$

d'ailleurs l'équation d'un cercle, touchant en O la droite T , sera

$$C = \lambda y + x^2 + y^2 = 0.$$

Ceci posé, nous formerons successivement les équations suivantes:

$$\Sigma_1 = \lambda S - C \cdot y^{l-1} \phi_{p-l} = 0,$$

$$\Sigma_2 = \lambda \Sigma_1 - C \cdot y^{l-2} M_1 = 0, \text{ où } M_1 = \lambda \phi_{p-l+2.1} - (x^2 + y^2) \phi_{p-l},$$

.....

$$\Sigma_{i-1} = \lambda \Sigma_{i-2} - C \cdot y^{l-i+1} M_{i-2} = 0, \text{ où } M_{i-2} = \lambda^{i-2} \phi_{p-l+2(i-2)} - (x^2 + y^2) M_{i-3},$$

$$\Sigma_i = \lambda \Sigma_{i-1} - y^{l-i} M_{i-1} C = 0, \text{ où } M_{i-1} = \lambda^{i-1} \phi_{p-l+2(i-1)} - (x^2 + y^2) M_{i-2},$$

$$\Sigma_{i+1} = \lambda \Sigma_i - y^{l-i-i_1-1} M_i C = 0, \text{ où } M_i = \lambda^i \phi_{p-l+2i+i_1} - (x^2 + y^2) y^{i_1} M_{i-1},$$

.....

$$\Sigma_{i+k} = \lambda \Sigma_{i+k-1} - y^{l-i-i_1-k} M_{i+k-1} C = 0, \text{ où } M_{i+k-1} = \lambda^{i+k-1} y^{i_1} \phi_{p-l+2(i+k-1)} - (x^2 + y^2) M_{i+k-2},$$

.....

$$\Sigma_j = \lambda \Sigma_{j-1} - y^{l-i_1+j} M_{j-1} C = 0, \text{ où } M_{j-1} = \lambda^{j-1} y^{i_1} \phi_{p-l+2(j-1)} - (x^2 + y^2) M_{j-2},$$

$$\Sigma_{j+1} = \lambda \Sigma_j - y^{l-j-j_1-1} M_j C = 0, \text{ où } M_j = \lambda^j \phi_{p-l+2j+j_1} - y^{j-i_1} (x^2 + y^2) M_{j-1},$$

si $j_1 > i_1$, ou

$$\Sigma_{j+1} = \lambda \Sigma_j - y^{l-j-i_1-1} M'_j C = 0, \text{ où } M'_j = \lambda^j y^{i_1-j} \phi_{p-l+2j+j_1} - (x^2 + y^2) M_{j-1}$$

si $i_1 > j_1$,

$$\Sigma_{j+k} = y^{i-j-j_1-k} [\lambda^{j+k} y^{j_1} \phi_{p-l+2(j+k)} - (x^2 + y^2) M_{j+k-1}] + \lambda^{j+k} y^{i-j-k-1} \phi_{p-l+2(j+k+1)} + \dots = 0, \text{ si } j_1 > i_1, \text{ ou}$$

$$\Sigma_{j+k} = y^{i-j-i_1-k} [\lambda^{j+k} y^{i_1} \phi_{p-l+2(j+k)} - (x^2 + y^2) M'_{j+k-1}] + \lambda^{j+k} y^{i-j-k-1} \phi_{p-l+2(j+k+1)} + \dots = 0, \text{ si } i_1 > j_1,$$

$$\Sigma_{l-j_1} = [\lambda^{l-j_1} y^{j_1} \phi_{p+l-2j_1} - (x^2 + y^2) M_{l-j_1-1}] + \lambda^{l-j_1} y^{j_1-1} \phi_{p+l-2j_1+2} + \dots = 0, \text{ si } j_1 > i_1, \text{ ou bien}$$

$$\Sigma_{l-i_1} = [\lambda^{l-i_1} y^{i_1} \phi_{p+l-2i_1} - (x^2 + y^2) M'_{l-i_1-1}] + \lambda^{l-i_1} y^{i_1-1} \phi_{p+l-2i_1+2} + \dots = 0, \text{ si } i_1 > j_1.$$

Si l'on suppose $j_1 > i_1$, on voit que les termes du moindre degré, dans la dernière courbe Σ_{l-j_1} , ne contiennent plus le facteur y ; le degré de ces termes est d'ailleurs égal à $(p + l - j_1)$; le cercle C rencontre donc la courbe Σ_{l-j_1} en $(p + l - j_1)$ points coïncidant avec l'origine O ; il a, par conséquent, avec la courbe S , un contact effectif de l'ordre $(l - j_1)$.

Pour qu'il y ait un contact effectif d'un ordre plus élevé, il faut que l'ensemble des termes du degré le moins élevé dans l'équation de Σ_{l-j_1} soit divisible par y , c'est-à-dire s'annule pour $y = 0$; on obtient ainsi l'équation de condition

$$M_{l-j_1} = 0;$$

en remontant de proche en proche les équations supérieures, on trouve

$$\lambda^j \phi_{p-l+2j+j_1}(x, 0) = 0;$$

mais, comme la fonction $\phi_{p-l+2j+j_1}$ n'admet pas, par hypothèse, le facteur y ; il en résulte

$$\lambda^j = 0;$$

c'est-à-dire qu'il y a j cercles osculateurs, et ces cercles ont leur rayon nul.

Supposons maintenant $i_1 > j_1$; on voit que les termes du moindre degré, dans la dernière courbe Σ_{l-i_1} , ne contiennent plus le facteur y ; le degré de ces termes est $(p + l - i_1)$; le cercle C rencontre donc la courbe Σ_{l-i_1} en $(p + l - i_1)$ points coïncidant avec l'origine O ; il a, par conséquent, avec la courbe S , un contact effectif de l'ordre $(l - i_1)$.

Pour qu'il ait un contact effectif d'un ordre plus élevé, il faut que l'ensemble des termes du moindre degré dans l'équation de Σ_{l-i_1} , soit divisible par y , c'est-à-dire s'annule pour $y=0$; on obtient ainsi l'équation de condition

$$M'_{l-i_1} = 0;$$

en remontant de proche en proche les équations supérieures, on trouve

$$\lambda^i \phi_{p-l+2i+i_1}(x, 0) = 0;$$

mais, comme la fonction $\phi_{p-l+2i+i_1}$ n'admet pas, par hypothèse, le facteur y ; il en résulte

$$\lambda^i = 0;$$

c'est-à-dire qu'il y a i cercles osculateurs, et ces cercles ont leur rayon nul.

19. De cette analyse nous concluons la proposition suivante:

THÉOR. V. Une courbe ayant un point multiple O d'ordre p , l des tangentes viennent à coïncider avec une droite T ; on suppose, en outre, que, parmi les polaires du point O , dont les ordres respectifs sont

$$p, p+1, p+2, \dots, p+i, \dots, p+j, \dots, p+l-1, p+l,$$

toutes ne renferment pas

$$l, l-1, l-2, \dots, l-i, \dots, l-j, \dots, 1, 0$$

droites coïncidant avec la droite T ; ainsi, par exemple, les polaires dont les ordres sont $(p+i)$, $(p+j)$, $(p+k)$, ..., $(i < j < k < l)$, renferment respectivement $(l-i-i_1)$, $(l-j-j_1)$, $(l-k-k_1)$, ... droites seulement coïncidant avec T , au lieu d'en renfermer $(l-i)$, $(l-j)$, $(l-k)$... Dans ce cas, un cercle quelconque, touchant en O la droite T , aura, avec la courbe S , un contact effectif de l'ordre $(l-i_1)$, si i_1 est le plus grand des nombres i_1 , j_1 , k_1 ... Il y aura alors i cercles ayant un contact effectif d'un ordre plus élevé, et les rayons de ces i cercles seront nuls; la courbure sera infinie.

20. EXEMPLES (voir la planche, fig. VIII)

1.° Soit la courbe

$$S = 2x^3 + x^2y^2 - 2xy^4 - y^6 = 0.$$

Appliquant à ce cas les formules du n° [17] ou la méthode suivie dans

le n° [16], on trouve pour les équations des trois cercles osculateurs en O :

$$C_0 = -x + x^2 + y^2 = 0,$$

$$C_1 = +x + x^2 + y^2 = 0,$$

$$C_2 = 2x + x^2 + y^2 = 0.$$

On voit d'ailleurs que la courbe, représentée par l'équation donnée, est une courbe complexe formée des trois paraboles:

$$-x + y^2 = 0.$$

$$+x + y^2 = 0,$$

$$2x + y^2 = 0.$$

2.° Soit la courbe : (voir la planche, fig. VIII.)

$$S = -x^3 + x^4 + 2x^2y^3 + y^6 = 0.$$

Les trois cercles osculateurs en O ont pour équations:

$$C_0 = -x + x^2 + y^2 = 0,$$

$$C_1 = -\alpha x + x^2 + y^2 = 0,$$

$$C_2 = -\alpha^2 x + x^2 + y^2 = 0;$$

α étant une des racines cubiques imaginaires de l'unité; un seul de ces cercles est donc réel.

3.° Soit la courbe : (voir la planche, fig. IX.)

$$S = x^3 + x^2y^2 + y^4 = 0.$$

Un cercle de rayon quelconque, tangent en O à Oy , a avec la courbe un contact effectif du 1^{er} ordre seulement; il y a un seul cercle osculateur, et son rayon est nul; le cercle de rayon nul rencontre la courbe en six points coïncidant avec le point O .

Ces résultats sont bien d'accord avec le théorème V, n° [19]; car dans le cas actuel, on a

$$i=1, i_1=2; p=3, l=3;$$

d'où

$$i=1, l-i_1=1.$$

NB. La deuxième partie de ce travail, qui traite de la courbure en un point multiple d'une surface, a paru déjà dans le Journal mathématique, publié à Berlin par Mr. BORCHARDT (t. 72, pag. 340-349).

Fig. I.

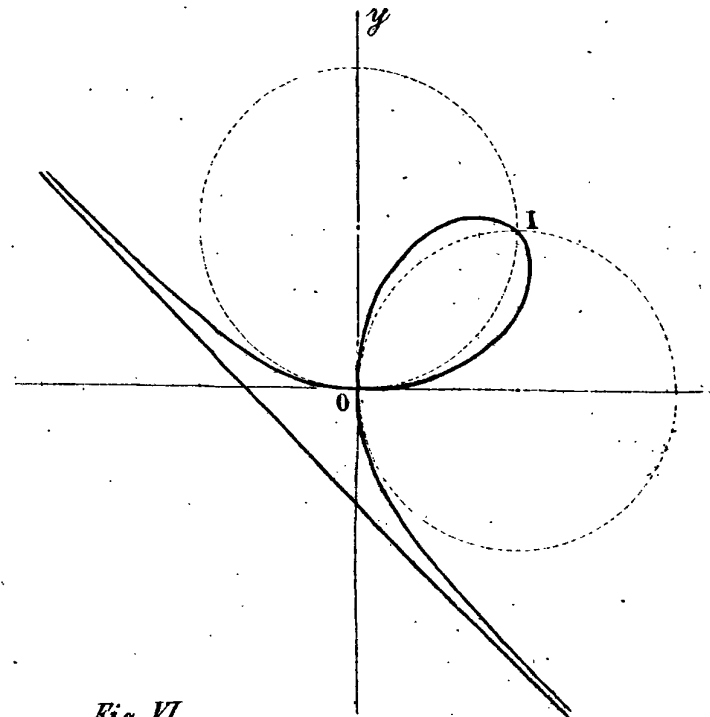


Fig. III.

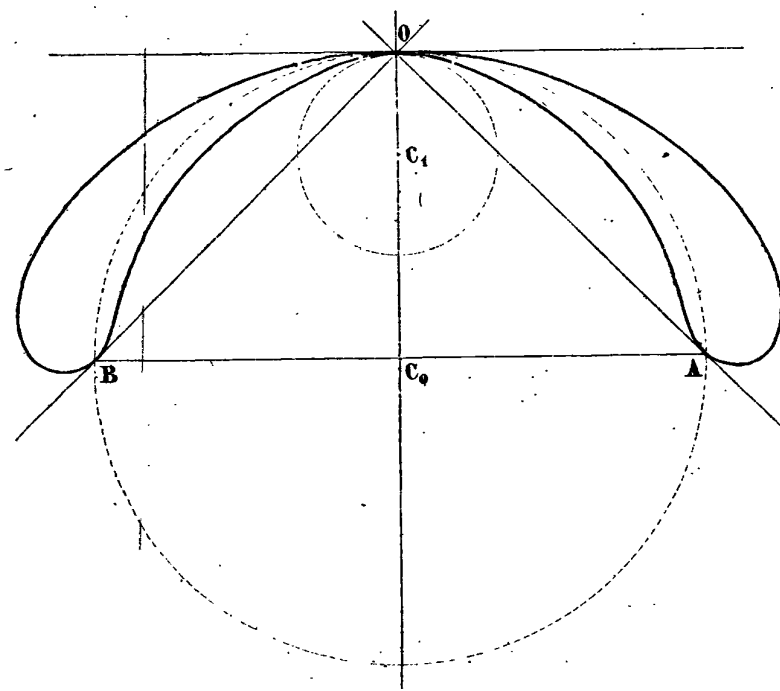


Fig. IV.

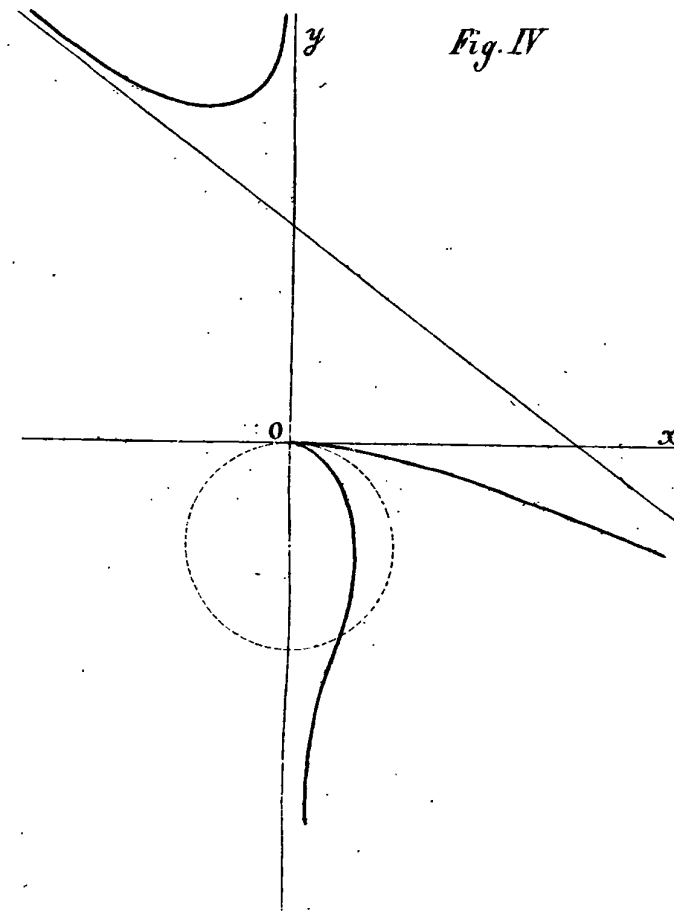


Fig. V.

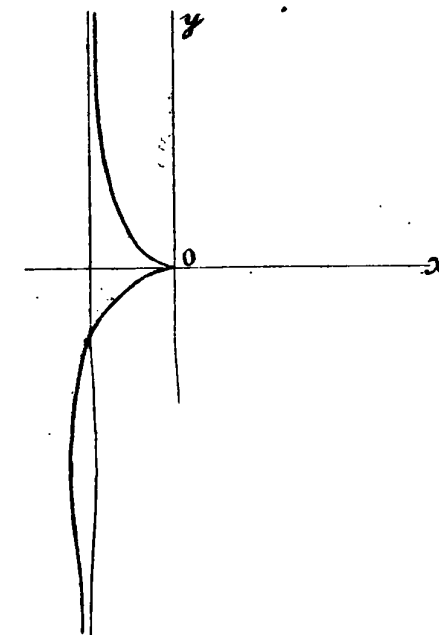


Fig. VI.

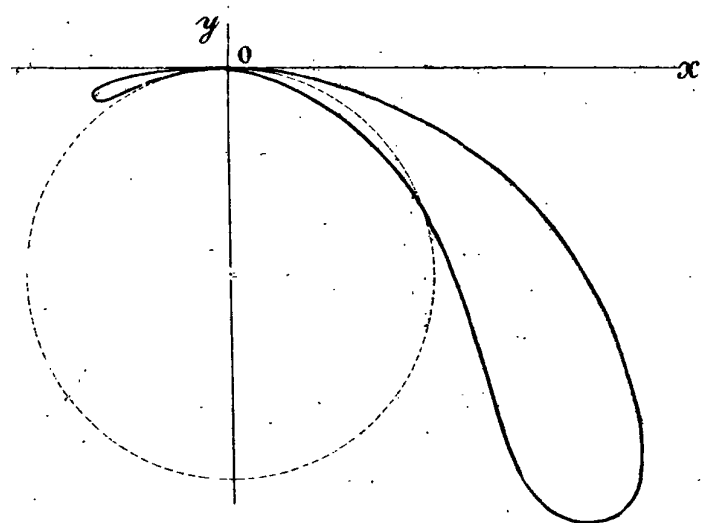


Fig. II.

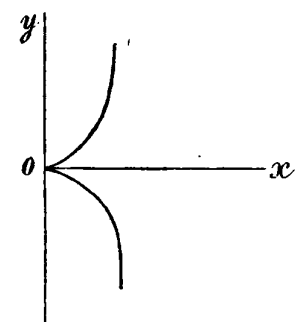


Fig. VII.

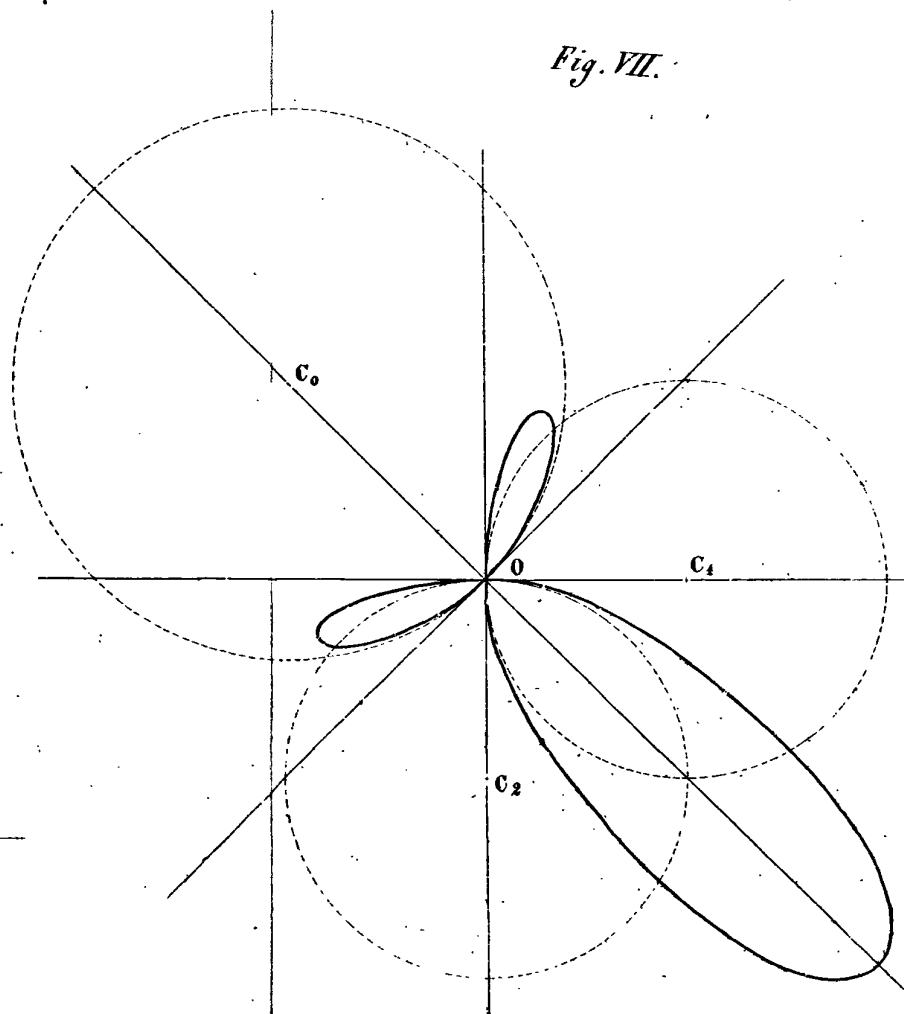


Fig. VIII.

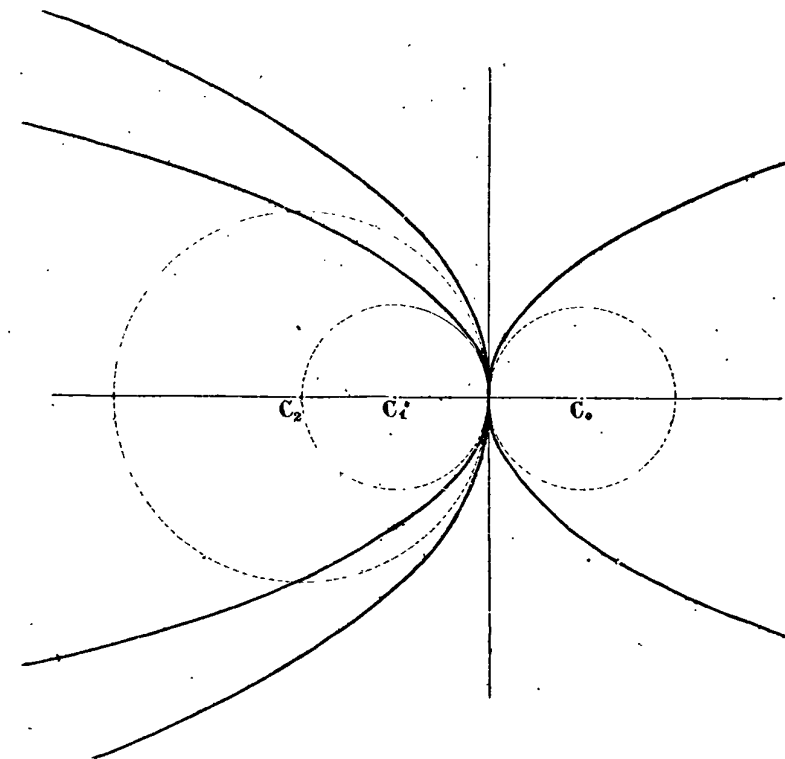


Fig. IX.

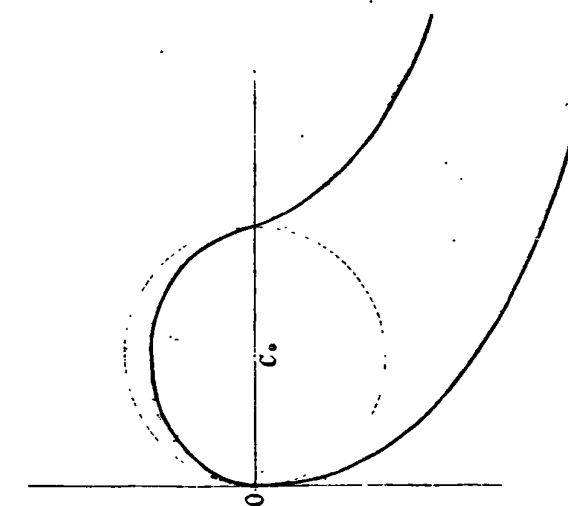
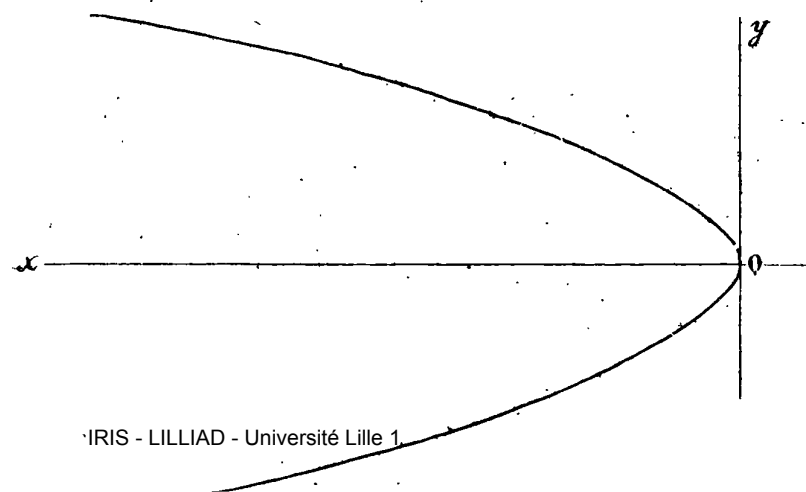


Fig. X.



Sopra la teoria della inversione di un sistema di funzioni (*).

(del prof. R. LIPSCHITZ, a Bonn.)

Quando in un campo determinato G delle variabili reali z_1, z_2, \dots, z_n è dato un sistema di funzioni F_1, F_2, \dots, F_n reali e ad un sol valore, che hanno le derivate prime parziali, rapporto a queste variabili, finite e continue in tutto il campo, si può dimandare quali condizioni debbono essere soddisfatte affinchè inversamente ad ogni sistema di valori delle funzioni F_1, F_2, \dots, F_n corrisponda un solo sistema di grandezze z_1, z_2, \dots, z_n . I concetti, per mezzo dei quali JACOBI ha fondato la teoria dei sistemi di funzioni di più variabili sopra la teoria algebrica dei determinanti, conducono alla prima condizione, che il valore del determinante funzionale del sistema di funzioni F_1, F_2, \dots, F_n rapporto al sistema delle variabili z_1, z_2, \dots, z_n , in tutto il campo G abbia sempre lo stesso segno.

Per aggiungere a questa altre condizioni, in modo da avere un sistema di condizioni sufficienti perchè la esposta relazione necessariamente debba verificarsi, bisognava mettere in giuoco, con opportune transizioni, il concetto di RIEMANN della semplice connessione di una varietà.

Ora io svilupperò dapprima un sistema di condizioni che sodisfà alla questione, e poi darò un processo teorico per mezzo del quale possono esser rappresentate le grandezze z_1, z_2, \dots, z_n che corrispondono univocamente a un dato sistema di valori delle funzioni F_1, F_2, \dots, F_n . Affinchè questi problemi siano sciolti anche nella supposizione che sia dato un sistema di funzioni f_1, f_2, \dots, f_m delle variabili complesse y_1, y_2, \dots, y_m , conviene riguardare, secondo il metodo del sig. KRONECKER (**), le parti separate delle va-

(*) Dai *Nachrichten* della Società delle scienze e dell'Università di Gottinga (1770, n.° 22).

(**) *Sopra i sistemi di funzioni di più variabili*: Monatsbericht der Berliner Akademie, marzo 1869, pag. 177.

riabili complesse y_1, y_2, \dots, y_m come variabili reali z_1, z_2, \dots, z_{2m} e contemporaneamente le parti separate delle funzioni complesse f_1, f_2, \dots, f_m come funzioni reali F_1, F_2, \dots, F_{2m} di quelle $2m$ variabili reali; allora il metodo prescelto conduce allo scopo.

1.

Il campo G delle variabili reali z_1, z_2, \dots, z_n sia determinato dalla condizione che in esso certe funzioni di queste variabili a un sol valore non possano raggiungere, o rispettivamente non possano superare certi dati valori costanti, e soddisfacciano a questa condizione soltanto valori finiti delle singole variabili z_1, z_2, \dots, z_n : e nel contorno K del campo G quelle funzioni siano rispettivamente uguali a quei dati valori. Se diamo a una funzione F_α della serie delle date funzioni F_1, F_2, \dots, F_n un valore ammissibile C_α , le disuguaglianze $F_\alpha - C_\alpha > 0$, ed $F_\alpha - C_\alpha < 0$ denoteranno due pezzi, nei quali il campo G è diviso dalla equazione $F_\alpha - C_\alpha = 0$. Nel sistema di equazioni:

$$F_1 = C_1, \quad F_2 = C_2, \dots, \quad F_n = C_n \quad (1)$$

sono imposti a tutte le funzioni F_α valori costanti C_α .

Se da questo sistema di equazioni se ne toglie una coppia qualunque $F_k = C_k$ ed $F_l = C_l$, le rimanenti $n - 2$ equazioni tra le variabili z_1, z_2, \dots, z_n determinano una varietà del secondo ordine $M_{k,l}$. Il contorno della varietà $M_{k,l}$ sia una varietà di primo ordine chiusa, che appartiene al contorno K del campo G .

Ora una varietà del secondo ordine si dice semplicemente connessa, quando per mezzo di ogni varietà di primo ordine, che si estende semplicemente da un sistema di valori del suo contorno fino ad un altro sistema di valori dello stesso contorno, essa rimane divisa in due pezzi separati (*); ed io suppongo che la varietà $M_{k,l}$ sia semplicemente connessa. Suppongo quindi che nella medesima, tanto la equazione $F_k = C_k$, quanto la equazione $F_l = C_l$, ciascuna presa separatamente, rappresenti una varietà di primo or-

(*) RIEMANN: *Fondamenti di una teoria generale delle funzioni di una variabile complessa*: n° 6 (Annali di Matematica, serie 1^a, t. 2). Invece delle espressioni linee e superficie sono introdotte nel testo le espressioni: « varietà del primo e del secondo ordine. »

dine che si estende semplicemente da un sistema di valori della varietà che forma il contorno a un secondo sistema di valori della medesima, e che ambedue queste varietà del primo ordine o abbiano comune un numero finito di sistemi di valori aventi tra loro differenze finite, o coincidano in parti finite, ma che però non possiedano in comune un infinito numero di sistemi di valori discontinui. Ammetto inoltre che la varietà $M_{k,i}$ non possieda singolarità di alcuna specie; in seguito definiremo precisamente questa espressione. Allora, se per ogni sistema di valori nell'intero campo G il determinante funzionale

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \dots \frac{\partial F_n}{\partial z_n} = \Delta$$

è sempre una grandezza dello stesso segno, epperò non è mai zero, si può dimostrare che al dato sistema di equazioni (1) non può soddisfare più di un sistema di valori z_1, z_2, \dots, z_n .

Una dimostrazione di questo teorema si può dedurre dalla considerazione di una forma analitica, che ho già considerata in un'altra occasione (*). Alla funzione intera e omogenea di primo grado degli n differenziali dz_α

$$a_1 dz_1 + a_2 dz_2 + \dots + a_n dz_n \quad (2)$$

nella quale i coefficienti a_1, a_2, \dots, a_n sono funzioni delle variabili z_1, z_2, \dots, z_n , reali, a un sol valore e differenziabili, date nel campo G , corrisponde la forma bilineare relativamente ad ambedue i sistemi di differenziali dz_α e dz_β

$$\Sigma_{\alpha, \beta} \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} \right) (dz_\alpha dz_\beta - dz_\beta dz_\alpha) \quad (3)$$

la quale per una sostituzione di altre variabili qualunque, invece delle variabili z_α , rimane covariante alla funzione omogenea (2); per α e β si debbono prendere tutte le coppie di numeri differenti della serie da 1 ad n . Una determinata applicazione di questa forma (3) serve al presente scopo, e dà contemporaneamente una dimostrazione del teorema che la espressione (2) è un differenziale esatto, quando la forma (3) è identicamente uguale a zero.

(*) *Ricerche intorno alle funzioni intere e omogenee di n differenziali*: Giornale di Crelle, t. 70, pag. 72. Monatsbericht der Berl. Ak. gennajo 1869, pag. 50.

aumenti dz_γ, dz_δ sono presi soltanto positivi; avremo la espressione

$$I = \iint \Sigma_{\alpha, \beta} \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} \right) \left(\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\gamma} \frac{\partial z_\beta}{\partial z_\delta} - \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\delta} \frac{\partial z_\beta}{\partial z_\gamma} \right) \varepsilon_{\gamma, \delta} dz_\gamma dz_\delta \quad (8)$$

della discussione della quale dobbiamo occuparci prima d'ogni altra cosa.

I determinanti $\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\gamma} \frac{\partial z_\beta}{\partial z_\delta} - \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\delta} \frac{\partial z_\beta}{\partial z_\gamma}$ possono esser rappresentati facilmente in modo esplicito, servendosi della equazione (7). Se uno dei numeri α, β è uguale ad uno dei numeri γ, δ , per es. se α è uguale a γ , il corrispondente determinante diverrà $\frac{\partial z_\beta}{\partial z_\delta}$ e la equazione

$$dz_\beta = - \frac{(\delta, \beta)}{(\gamma, \delta)} dz_\gamma - \frac{(\beta, \gamma)}{(\gamma, \delta)} dz_\delta$$

darà il risultato

$$\frac{\partial z_\beta}{\partial z_\delta} = \frac{(\gamma, \beta)}{(\gamma, \delta)}. \quad (9)$$

Con una ripetuta applicazione del medesimo, si ottiene per ogni coppia di numeri α, β

$$\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\gamma} \frac{\partial z_\beta}{\partial z_\delta} - \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\delta} \frac{\partial z_\beta}{\partial z_\gamma} = \frac{(\alpha, \beta)}{(\gamma, \delta)}. \quad (9^*)$$

La diretta sostituzione di questi valori trasforma la espressione I nel modo seguente

$$\left. \begin{aligned} I &= H, \\ H &= \iint \Sigma_{\alpha, \beta} \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} \right) (\alpha, \beta) \frac{\varepsilon_{\gamma, \delta}}{(\gamma, \delta)} dz_\gamma dz_\delta. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Se invece si scioglie I in una somma d'integrali, e nell'integrale

$$\iint \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} \right) \left(\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\gamma} \frac{\partial z_\beta}{\partial z_\delta} - \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\delta} \frac{\partial z_\beta}{\partial z_\gamma} \right) \varepsilon_{\gamma, \delta} dz_\gamma dz_\delta$$

s'introducono le variabili z_α, z_β come variabili indipendenti della integrazione, siccome per la (9*) il determinante della sostituzione ha il segno $\varepsilon_{\alpha, \beta} \varepsilon_{\gamma, \delta}$, così questo integrale diviene

$$\iint \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} \right) \varepsilon_{\alpha, \beta} dz_\alpha dz_\beta$$

e si ha la equazione

$$\left. \begin{aligned} I &= L, \\ L &= \sum_{\alpha, \beta} \iint \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} \right) \varepsilon_{\alpha, \beta} dz_\alpha dz_\beta. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Questa dimostra che il valore della espressione I è indipendente affatto dalla scelta delle variabili z_γ, z_δ .

Poichè dalla equazione $(\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) = 0$ segue l'altra $\varepsilon_{\alpha, \beta} + \varepsilon_{\beta, \alpha} = 0$, si ha

$$\left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} \right) \varepsilon_{\alpha, \beta} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} \varepsilon_{\alpha, \beta} + \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} \varepsilon_{\beta, \alpha}$$

e quindi:

$$\left. \begin{aligned} L &= \sum_\alpha \iint \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+1}} \varepsilon_{\alpha, \alpha+1} dz_\alpha dz_{\alpha+1} + \frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+2}} \varepsilon_{\alpha, \alpha+2} dz_\alpha dz_{\alpha+2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+n-1}} \varepsilon_{\alpha, \alpha+n-1} dz_\alpha dz_{\alpha+n-1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

dove si deve sottrarre il numero n da tutti gl'indici maggiori di n . La introduzione delle variabili indipendenti d'integrazione $z_\alpha, z_{\alpha+1}$ dà la equazione:

$$\left. \begin{aligned} &\iint \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+1}} \varepsilon_{\alpha, \alpha+1} dz_\alpha dz_{\alpha+1} + \dots + \frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+n-1}} \varepsilon_{\alpha, \alpha+n-1} dz_\alpha dz_{\alpha+n-1} \right) \\ &= \iint \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+1}} + \frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+2}} \frac{\partial z_{\alpha+2}}{\partial z_{\alpha+1}} + \dots + \frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+n-1}} \frac{\partial z_{\alpha+n-1}}{\partial z_{\alpha+1}} \right) \varepsilon_{\alpha, \alpha+1} dz_\alpha dz_{\alpha+1}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

e quindi

$$L = \sum_\alpha \iint \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+1}} + \frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+2}} \frac{\partial z_{\alpha+2}}{\partial z_{\alpha+1}} + \dots + \frac{\partial a_\alpha}{\partial z_{\alpha+n-1}} \frac{\partial z_{\alpha+n-1}}{\partial z_{\alpha+1}} \right) \varepsilon_{\alpha, \alpha+1} dz_\alpha dz_{\alpha+1}. \quad (14)$$

La espressione tra parentesi è la derivata completa della funzione a_α rapporto alla variabile $z_{\alpha+1}$, per un valore costante di z_α . Dunque, se nella integrazione da effettuarsi relativamente all'elemento $dz_\alpha dz_{\alpha+1}$ si dà un valore costante alla variabile z_α , si può eseguire immediatamente la integrazione indefinita rispetto alla variabile $z_{\alpha+1}$ in quell'intervallo della stessa, in cui la grandezza $\varepsilon_{\alpha, \alpha+1}$ rimane invariata. I valori delle funzioni ottenute colla integrazione indefinita si devono prendere negativi nei posti dove la variabile $z_{\alpha+1}$ entra nel campo della integrazione, e positivi nei posti dove

ne esce. Siccome le variabili in questa integrazione hanno soltanto incrementi positivi, così, purchè la variabile $z_{\alpha+1}$ si muova sempre verso l'interno del campo della integrazione, per ogni posto d'ingresso $dz_{\alpha+1}$ è una quantità positiva, e per ogni posto di egresso una quantità negativa. Ora bisogna esaminare accuratamente i limiti degl'intervalli per la variabile $z_{\alpha+1}$, i quali si trovano in parte sul contorno della varietà T , e in parte nelle varietà di primo ordine nelle quali la grandezza $(\alpha, \alpha+1)$ è uguale a zero.

Il contorno della varietà T sia determinato in modo che nell'interno di T certe funzioni a un sol valore delle variabili z_1, z_2, \dots, z_n possano ottenere soltanto valori positivi; quando si considerano successivamente le diverse parti del contorno, denoteremo sempre con Θ la funzione relativa. Allora, nel passaggio da un sistema di valori del contorno nell'interno della varietà T , il differenziale $d\Theta$ è una grandezza positiva. Aggiungendo al sistema delle equazioni (5) la equazione

$$d\Theta = \Theta_1 dz_1 + \Theta_2 dz_2 + \dots + \Theta_n dz_n \quad (15)$$

ed eliminando $n-2$ differenziali, si ha

$$R_{\alpha+1} dz_\alpha - R_\alpha dz_{\alpha+1} = (\alpha, \alpha+1) d\Theta. \quad (16)$$

Ora, siccome nella integrazione che si deve effettuare, il valore indefinito della variabile z_α rimane costante, e quindi $dz_\alpha = 0$, per il differenziale $dz_{\alpha+1}$ abbiamo

$$R_\alpha dz_{\alpha+1} = -(\alpha, \alpha+1) d\Theta, \quad (17)$$

dove R_α non può essere uguale a zero. Se denotiamo il segno di questa grandezza con ε_α , il differenziale $dz_{\alpha+1}$ per un moto della variabile $z_{\alpha+1}$ diretto verso l'interno del campo della integrazione ha il segno $-\varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha, \alpha+1}$. Dunque per ciò che abbiamo detto, ogni posto d'ingresso è caratterizzato dalla equazione $\varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha, \alpha+1} = -1$, e ogni posto di egresso dalla equazione $\varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha, \alpha+1} = +1$, e la funzione $\varepsilon_{\alpha, \alpha+1} a_\alpha$ ottenuta dalla (14) colla integrazione indefinita rispetto alla variabile $z_{\alpha+1}$ acquista in ogni posto del contorno della varietà T il valore $\varepsilon_\alpha a_\alpha$.

Resta ora da stabilirsi come può annullarsi la grandezza $(\alpha, \alpha+1)$ nella varietà $M_{n-1, n}$ in una varietà del primo ordine. Fra il differenziale di una variabile dipendente z_γ e i differenziali delle due variabili indipendenti z_α e $z_{\alpha+1}$, si ha dalla (7) la equazione

$$(\alpha+1, \gamma) dz_\alpha + (\gamma, \alpha) dz_{\alpha+1} + (\alpha, \alpha+1) dz_\gamma = 0.$$

Siccome nella integrazione rapporto a $z_{\alpha+1}$, è il differenziale $dz_{\alpha}=0$, si ha la equazione

$$(\gamma, \alpha) dz_{\alpha+1} + (\alpha, \alpha+1) dz_{\gamma} = 0 \quad (18)$$

dalla quale dz_{γ} è pienamente determinato finchè la grandezza $(\alpha, \alpha+1)$ è differente da zero. Perciò, finchè questa condizione è soddisfatta, da ogni sistema di valori (z_1, z_2, \dots, z_n) , se z_{α} rimane costante e $z_{\alpha+1}$ si aumenta di $dz_{\alpha+1}$, si perviene ad un secondo sistema di valori pienamente determinato. Sopra abbiamo osservato, che quando la varietà $M_{n-1, n}$ è riferita alle variabili indipendenti $z_{\alpha}, z_{\alpha+1}$, ad ogni sistema di valori $z_{\alpha}, z_{\alpha+1}$ possono appartenere più sistemi di valori dell'altra variabile z_{γ} , e da ciò che ora abbiamo detto consegue che il coincidere di più di tali sistemi di valori può solo accadere là dove la grandezza $(\alpha, \alpha+1)$ si annulla. L'annullarsi in una parte della varietà $M_{n-1, n}$ è già stato escluso. Per le varietà di primo ordine, nelle quali $(\alpha, \alpha+1)$ si annulla, io ammetto che, se ad una tal varietà appartiene la combinazione di valori $z_{\alpha}, z_{\alpha+1}$, per un movimento diretto verso l'interno della varietà $M_{n-1, n}$ col valore di z_{α} tenuto costante, la variabile $z_{\alpha+1}$ possa ottenere soltanto un aumento $dz_{\alpha+1}$ di dato segno; che a questo movimento della variabile $z_{\alpha+1}$ corrisponda il passaggio da un determinato sistema di valori z_{γ} a due sistemi di valori z_{γ} differenti tra loro; che la grandezza $(\alpha, \alpha+1)$ sia positiva per uno di questi sistemi di valori, negativa per l'altro; e che la integrazione della espressione $\frac{dz_{\alpha+1}}{(\alpha, \alpha+1)}$ estesa da questo sistema di valori a un altro che abbia una differenza finita con esso, offra un significato preciso. Queste condizioni definiscono la espressione usata sopra, che la varietà $M_{n-1, n}$ non possa contenere nessuna specie di singolarità. Un semplice esempio pel prescritto comportarsi di una varietà del secondo ordine ci è dato, per $n=3$, da $F_1 = \frac{z_1^2}{b_1} + \frac{z_2^2}{b_2} + \frac{z_3^2}{b_3}$, dove b_1, b_2, b_3 sono costanti positive; la equazione $F_1 = C_1$ rappresenta allora la varietà $M_{2, 3}$. Le esposte condizioni generali rimuovono il dubbio che può nascere, nella eseguita trasformazione di integrali doppi, dallo annullarsi delle grandezze (γ, δ) nel denominatore. Queste condizioni producono inoltre nella integrazione da eseguirsi nell'interno della varietà T rapporto alla variabile $z_{\alpha+1}$, mantenendo costante z_{α} , il seguente effetto. Ciascuna varietà di primo ordine contenuta in T , nella quale la grandezza $(\alpha, \alpha+1)$ si annulli, è il limite di due campi in uno dei quali $\varepsilon_{\alpha, \alpha+1} = 1$, e nell'altro

$\epsilon_{\alpha, \alpha+1} = -1$. Ogni sistema di valori di questa varietà di primo ordine, per z_{α} costante, forma per la variabile $z_{\alpha+1}$ in ambedue i campi contemporaneamente o un punto d'ingresso o un punto di egresso, perchè l'aumento $dz_{\alpha+1}$ ha in ambedue i campi lo stesso segno. Quindi, per la integrazione relativa alla variabile $z_{\alpha+1}$, nei sistemi di valori della suddetta varietà si presentano sempre ambedue i valori della funzione $+a_{\alpha}$ e $-a_{\alpha}$ che reciprocamente si distruggono. Perciò il risultato finale contiene soltanto i valori della funzione corrispondenti al contorno della varietà T , precedentemente determinati, e prende questa forma (*)

$$\left. \begin{aligned} I &= N, \\ N &= \int (a_1 \epsilon_1 dz_1 + a_2 \epsilon_2 dz_2 + \cdots + a_n \epsilon_n dz_n). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Qui bisogna fare una osservazione rispetto agli n segni ϵ_{α} . Se per Φ si intende una funzione a un sol valore delle variabili z_1, z_2, \dots, z_n e si formano le n equazioni

$$\left. \begin{aligned} F_{1,1} dz_1 + F_{1,2} dz_2 + \cdots + F_{1,n} dz_n &= 0 \\ F_{2,1} dz_1 + F_{2,2} dz_2 + \cdots + F_{2,n} dz_n &= 0 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ F_{n-2,1} dz_1 + F_{n-2,2} dz_2 + \cdots + F_{n-2,n} dz_n &= 0 \\ \Theta_1 dz_1 + \Theta_2 dz_2 + \cdots + \Theta_n dz_n &= 0 \\ \Phi_1 dz_1 + \Phi_2 dz_2 + \cdots + \Phi_n dz_n &= d\Phi \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

e se R è il determinante delle n^2 quantità dei primi membri, ed è differente da zero, risolvendo le equazioni abbiamo

$$Rz_{\alpha} = R_{\alpha} d\Phi. \quad (21)$$

Da queste sono determinati gli n differenziali dz_{α} per l'unico differenziale $d\Phi$, e i segni degli n differenziali dz_{α} si ottengono da quelli ϵ_{α} delle R_{α} e da quelli delle grandezze R e $d\Phi$. Se fissiamo che il differenziale $d\Phi$ abbia il segno del determinante R , ogni differenziale dz_{α} avrà sul contorno della

(*) Il risultato per il caso $n=2$ è dato da RIEMANN nella citata memoria: *Fondamenti ecc.*, pag. 9, e nell'altra: *Lehrsätze aus der Analysis situs etc.* (Giornale di Crelle, t. 54, pag. 105). Il risultato per il caso $n=3$ si trova nel lavoro di H. HANKEL: *Sulla teoria generale del moto dei fluidi*, Gottinga 1861; di questo lavoro non ho però cognizione che per un estratto inserito nei *Fortschritte der Physik*, 1861, pag. 57.

varietà T , a cui le equazioni (20) si riferiscono, il segno di R_a . Questa determinazione dà il senso in cui un sistema di valori percorre la relativa varietà chiusa di primo ordine, e coincide colla determinazione fornita dal principio di passaggio, sviluppato dal sig. KRONECKER (*). L'elemento dell'integrale semplice N è la forma lineare (2), l'elemento dell'integrale doppio è la forma bilineare (3) covariante alla forma (2), e la relazione (19) esprime l'eguaglianza dei due integrali.

2.

Ora faremo una doppia applicazione della relazione (19). Per la prima applicazione supporremo che la forma (3) si annulli identicamente, ossia che in tutto il campo G siano soddisfatte per la forma (2) le $\frac{n(n-1)}{2}$ condizioni d'integrabilità

$$\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} = 0. \quad (22)$$

Siccome in conseguenza di ciò la espressione I è uguale a zero, dalla (19) avremo la equazione

$$N = \int (a_1 \varepsilon_1 dz_1 + a_2 \varepsilon_2 dz_2 + \dots + a_n \varepsilon_n dz_n) = 0. \quad (23)$$

Nel contorno della varietà T semplicemente connessa prendiamo un sistema fisso di valori $[z_1(0), z_2(0), \dots, z_n(0)]$ e un sistema di valori mobile (z_1, z_2, \dots, z_n) e chiamiamo S ed S' le due parti nelle quali è spezzato il contorno da questi due sistemi di valori. La parte S sia quella che cresce quando alle variabili z_1, z_2, \dots, z_n del sistema mobile si danno gli aumenti $\varepsilon_1 dz_1, \varepsilon_2 dz_2, \dots, \varepsilon_n dz_n$. Allora l'equazione (23) mostra che l'integrale

$$\int (\varepsilon_1 a_1 dz_1 + \varepsilon_2 a_2 dz_2 + \dots + \varepsilon_n a_n dz_n) \quad (23^*)$$

esteso alla parte S e l'integrale

$$-\int (\varepsilon_1 a_1 dz_1 + \varepsilon_2 a_2 dz_2 + \dots + \varepsilon_n a_n dz_n) \quad (23^{**})$$

(*) Nella memoria citata, pag. 160.

esteso alla parte S' sono tra loro uguali. Se un sistema di valori $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ percorre la parte S dal sistema $[z_1(0), z_2(0), \dots, z_n(0)]$ sino al sistema (z_1, z_2, \dots, z_n) , ogni variabile ζ_α riceve l'aumento $\varepsilon_\alpha d\zeta_\alpha$; se un sistema di valori $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ percorre la parte S' dal sistema $[z_1(0), z_2(0), \dots, z_n(0)]$ sino al sistema (z_1, z_2, \dots, z_n) , ogni variabile ζ_α riceve l'aumento $-\varepsilon_\alpha d\zeta_\alpha$. Il valore \mathfrak{E} dell'integrale (23*) è quindi indipendente dalla varietà del primo ordine sopra cui si estende l'integrale stesso dal sistema di valori $[z_1(0), z_2(0), \dots, z_n(0)]$ sino al sistema (z_1, z_2, \dots, z_n) , e \mathfrak{E} è quindi una funzione delle variabili z_1, z_2, \dots, z_n , che si annulla quando per ogni valore di α sia $z_\alpha = z_\alpha(0)$. Se con \varkappa s'intende una grandezza data, positiva, piccola quanto si vuole, e con η_α una frazione propria, positiva o negativa, si potrà a cagione della continuità della funzione a_α per ogni sistema di valori (z_1, z_2, \dots, z_n) dare a una variabile z_α un tale aumento ζ_α , non mutando le altre variabili, che si abbia

$$\mathfrak{E}(z_\alpha + \zeta_\alpha) - \mathfrak{E}(z_\alpha) = (a_\alpha + \eta_\alpha \varkappa) \zeta_\alpha. \quad (24)$$

Questa, passando al limite, ci dice che la derivata della funzione \mathfrak{E} rapporto alla variabile z_α è uguale alla grandezza a_α , e mostra così, come doveva essere, la integrabilità della espressione (2) nella supposizione delle equazioni (22).

Se è data una funzione \mathfrak{F} delle variabili z_1, z_2, \dots, z_n , la quale per il sistema di valori $z_\alpha = z_\alpha(0)$ diviene uguale a zero, e le cui derivate prese rispetto a z_α sono uguali rispettivamente alle quantità a_α , e se può darsi per ogni sistema di valori (z_1, z_2, \dots, z_n) del campo G a ciascuna variabile z_α un aumento ζ_α indipendente, quanto alla sua grandezza, da questo sistema di valori, il quale, essendo \varkappa una grandezza positiva, data, piccola quanto si vuole, corrisponde alla equazione

$$\mathfrak{F}(z_\alpha + \zeta_\alpha) - \mathfrak{F}(z_\alpha) = (a_\alpha + \eta_\alpha \varkappa) \zeta_\alpha \quad (24^*)$$

si può dimostrare che questa funzione \mathfrak{F} è identica colla funzione sopra definita \mathfrak{E} . Il mio amico e collega KORRUM verbalmente mi ha fatto avvertire, che la condizione (24*), necessaria per la dimostrazione, dev'essere espressamente formulata, poichè la equazione $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z_\alpha} = a_\alpha$ può sussistere benissimo, senza che questa condizione sia soddisfatta. Questa riflessione è di natura molto affine a quelle fatte dal sig. HEINE nella memoria *Sopra le serie trigonometriche*, Giornale di Crelle-Borchardt, t. 71, pag. 353.

Per tutte le funzioni F_γ del dato sistema supporremo perciò che la equazione

$$F_\gamma(z_\alpha + \zeta_\alpha) - F_\gamma(z_\alpha) = \left(\frac{\partial F_\gamma}{\partial z_\alpha} + \eta_\alpha \zeta \right) \zeta_\alpha$$

possa essere soddisfatta nel modo dichiarato. Allora la espressione (23*), ammesso che sia

$$a_\alpha = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_\alpha} \quad (25)$$

dà l'equazione

$$F_{n-1}(z_1, z_2, \dots, z_n) - F_{n-1}(z_1(0), z_2(0), \dots, z_n(0)) = \sum_\alpha \int \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_\alpha} \varepsilon_\alpha dz_\alpha. \quad (25^*)$$

La corrispondente supposizione vale anche per la effettuazione di ogni integrazione definita, e quindi anche per quella che si fa per ottenere la equazione (19).

La seconda applicazione della equazione (19) si ottiene prendendo per le funzioni a_α

$$a_\alpha = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_\alpha} F_n. \quad (26)$$

In conseguenza di questa determinazione, si ha

$$\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_\alpha} \frac{\partial F_n}{\partial z_\beta} - \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_\beta} \frac{\partial F_n}{\partial z_\alpha} \quad (26^*)$$

e la somma che bisogna prendere nella (10) rispetto agli indici α e β diviene uguale al determinante funzionale del sistema F_1, F_2, \dots, F_n

$$\sum_{\alpha, \beta} \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial z_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial z_\alpha} \right) (\alpha, \beta) = \Delta. \quad (27)$$

Sostituendo questa espressione nell'integrale H , e la espressione (26) nell'integrale N , le (10) e (19) danno la equazione

$$\iint \Delta \frac{\varepsilon_{\gamma, \delta}}{(\gamma, \delta)} dz_\gamma dz_\delta = \int F_n \sum_\alpha \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_\alpha} \varepsilon_\alpha dz_\alpha. \quad (28)$$

La deduzione della equazione (19) richiede, come abbiamo precedentemente osservato, la supposizione che allora abbiamo fatto. Poichè ora si applica la sostituzione (26), dovranno soddisfare a questa supposizione tanto le derivate prime quanto le seconde delle funzioni F_γ .

La equazione (28) nel caso $n=2$ si riduce alla

$$\iint \left(\frac{\partial F_1}{\partial z_1} \frac{\partial F_2}{\partial z_2} - \frac{\partial F_1}{\partial z_2} \frac{\partial F_2}{\partial z_1} \right) dz_1 dz_2 = \int F_2 \left(\frac{\partial F_1}{\partial z_1} \varepsilon_1 dz_1 + \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \varepsilon_2 dz_2 \right) \quad (29)$$

stabilita da RIEMANN nella memoria: *Sopra le superficie di area minima entro un dato contorno*, pag. 12. Un assiduo studio di questa equazione mi ha condotto alla dimostrazione del teorema sopra enunciato, che adesso passo ad esporre.

3.

Supponiamo che esistano due sistemi di valori differenti tra loro $[z_1(0), z_2(0), \dots, z_n(0)]$, ossia $W(0)$, e $[z_1(1), z_2(1), \dots, z_n(1)]$, ossia $W(1)$, che soddisfacciano alle n equazioni (1)

$$F_1 = C_1, F_2 = C_2, \dots, F_n = C_n.$$

Consideriamo ora una qualunque della varietà M_{n-1} e questa sia sempre la varietà $M_{n-1,n}$. Secondo la fatta supposizione, sia essa semplicemente connessa, e nella medesima tanto la equazione $F_{n-1} = C_{n-1}$ quanto la equazione $F_n = C_n$ rappresentino varietà di primo ordine, che da un sistema di valori della varietà formante il contorno si estendano semplicemente sino a un altro sistema di valori dello stesso contorno. Quindi $M_{n-1,n}$ rimarrà divisa, tanto dalla varietà di primo ordine $F_{n-1} = C_{n-1}$, quanto dalla varietà di primo ordine $F_n = C_n$, in due varietà semplicemente connesse (*), le quali sono caratterizzate rispettivamente dalle disuguaglianze $F_{n-1} - C_{n-1} > 0$, $F_{n-1} - C_{n-1} < 0$ ed $F_n - C_n > 0$, $F_n - C_n < 0$. I sistemi di valori $W(0)$ e $W(1)$ appartengono ciascuno ad ambedue le varietà $F_{n-1} = C_{n-1}$ ed $F_n = C_n$, ed in ambedue il passaggio dal sistema di valori $W(0)$ al sistema di valori $W(1)$ è possibile in un sol modo. Per la supposizione fatta, le varietà $F_{n-1} = C_{n-1}$ ed $F_n = C_n$ hanno in comune nella varietà $M_{n-1,n}$ o un numero finito di sistemi di valori differenti tra loro, o esse coincidono completamente in parti finite. Bisogna considerare separatamente questi due casi possibili.

Nel primo caso, sia W il primo sistema di valori nel quale le varietà di primo ordine $F_{n-1} = C_{n-1}$ ed $F_n = C_n$ s'incontrano muovendosi, nel modo che

(*) RIEMANN: *Fondamenti*, ecc. n.º 6.

abbiamo detto, a partire da $W(0)$. Denotiamo con S la parte della varietà $F_{n-1} = C_{n-1}$ che si estende da $W(0)$ a W , e con S' la parte della varietà $F_n = C_n$ che si estende da $W(0)$ a W . Allora S ed S' formeranno il contorno di una parte finita, semplicemente connessa, della varietà $M_{n-1,n}$ e riferiamo a questa parte T la equazione (28). In questa equazione l'integrale $\int F_n \sum_{\alpha} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_{\alpha}} \varepsilon_{\alpha} dz_{\alpha}$ è composto di due parti, la prima delle quali è estesa ad S , la seconda ad S' . Il primo integrale esteso ad S ha il valore zero, perchè, secondo la definizione, per ogni sistema di valori di S l'aggregato $\sum_{\alpha} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_{\alpha}} \varepsilon_{\alpha} dz_{\alpha}$ si annulla. Nel secondo integrale esteso ad S' la funzione F_n ha il valore costante C_n , quindi

$$\int F_n \sum_{\alpha} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_{\alpha}} \varepsilon_{\alpha} dz_{\alpha} = C_n \int \sum_{\alpha} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_{\alpha}} \varepsilon_{\alpha} dz_{\alpha}.$$

L'integrale $\int \sum_{\alpha} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial z_{\alpha}} \varepsilon_{\alpha} dz_{\alpha}$ è, a cagione della (25*), uguale alla differenza dei valori della funzione F_{n-1} per i valori W e $W(0)$ epperò, nelle vigenti relazioni, uguale a zero. Dunque si annulla anche il secondo integrale e quindi anche tutto il valore del primo membro della (28). Per conseguenza, colle supposizioni fatte, si ha la equazione

$$\iint \Delta \frac{\varepsilon_{\gamma, \delta} dz_{\gamma} dz_{\delta}}{(\gamma, \delta)} = 0. \quad (30)$$

Fin qui non ci siamo serviti di alcuna supposizione speciale rispetto al determinante funzionale Δ . Ma si deve ammettere che Δ in tutto il campo G , e quindi anche in tutta la varietà T , non muti mai segno. Ora poichè nel precedente integrale l'elemento $\frac{\varepsilon_{\gamma, \delta}}{(\gamma, \delta)} dz_{\gamma} dz_{\delta}$ è sempre positivo, e la grandezza Δ sempre positiva o sempre negativa, il valore dell'integrale non può annullarsi, e la equazione (30) contiene una contraddizione. Dunque l'ipotesi che le equazioni (1) siano soddisfatte da ambedue i sistemi di valori $W(0)$ e $W(1)$, è incompatibile colla supposizione che in $M_{n-1,n}$ le varietà di primo ordine $F_{n-1} = C_{n-1}$ ed $F_n = C_n$ abbiano in comune un numero finito di sistemi di valori finiti, differenti tra loro.

Il secondo caso che deve considerarsi quanto ai sistemi di valori $W(0)$, $W(1)$, è quello in cui le varietà di primo ordine $F_{n-1} = C_{n-1}$ ed $F_n = C_n$

contenute in $M_{n-1,n}$, in un moto eseguito da $W(0)$ a $W(1)$, coincidano in una parte finita. È chiaro che per questa parte i differenziali totali delle funzioni F_α dovrebbero allora essere tutti uguali a zero. Ma dalle equazioni

$$\begin{aligned} F_{1,1} dz_1 + F_{1,2} dz_2 + \dots + F_{1,n} dz_n &= 0 \\ F_{2,1} dz_1 + F_{2,2} dz_2 + \dots + F_{2,n} dz_n &= 0 \\ \dots &\dots \\ F_{n,1} dz_1 + F_{n,2} dz_2 + \dots + F_{n,n} dz_n &= 0 \end{aligned}$$

segue l'annullarsi del determinante funzionale Δ , che per supposizione è escluso. Dunque questo secondo caso non può aver luogo, come non può aver luogo il primo, e rimane perciò dimostrata la proposizione, che le n equazioni (1), sotto le condizioni stabilite, possono essere soddisfatte soltanto da un unico sistema di valori z_1, z_2, \dots, z_n .

Se riguardiamo con RIEMANN le n variabili z_1, z_2, \dots, z_n come le coordinate di un punto in una varietà n -upla [*Sopra le ipotesi che servono di fondamento alla geometria* (*)], ne risulta che la presente ricerca non contiene il concetto dell'elemento lineare di questa varietà. Le sopra accennate deduzioni di RIEMANN della equazione (19) nel caso $n=2$ mostrano, confrontate sotto questo punto di vista, una notevole differenza. L'integrale denotato con N nella (19) è riferito nel primo lavoro all'elemento lineare della curva che forma il contorno del pezzo di superficie T , al contrario nel secondo lavoro è riguardato come l'integrale di una espressione di due differenziali.

4.

Quando si verificano le condizioni, sotto le quali le equazioni

$$\left. \begin{aligned} F_1(z_1, z_2, \dots, z_n) &= X_1 \\ F_2(z_1, z_2, \dots, z_n) &= X_2 \\ \dots &\dots \\ F_n(z_1, z_2, \dots, z_n) &= X_n \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

(*) Annali di Matematica, serie 2^a, t. 3^o, pag. 315.

lore $F_n = X_n(0)$ soddisfacciano alle equazioni $z_\alpha = z_\alpha(0)$. Allora il sistema di valori $[z_1(1), z_2(1), \dots, z_n(1)]$ che sodisfà alle equazioni (33) è quello che corrisponde al valore $F_n = X_n$.

Il problema così espresso è contenuto nel problema generale: date in un certo campo delle variabili reali x, y^1, y^2, \dots, y^n le n funzioni $f^\alpha(x, y^1, y^2, \dots, y^n)$ a un sol valore, reali, finite e continue, integrare il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dy^\alpha}{dx} = f^\alpha(x, y^1, y^2, \dots, y^n)$$

in modo che le n funzioni y^1, y^2, \dots, y^n variino con continuità mentre la variabile indipendente x percorre un certo cammino finito, e per il valore $x = x_0$ contenuto in questo cammino prendano valori dati $y^\alpha = y_0^\alpha$. In una ricerca che io ho intrapresa in connessione col presente lavoro, ma che ho pubblicata indipendentemente (*) si deduce, sotto certe condizioni di continuità, per mezzo di un processo graduato, un sistema di funzioni y^1, y^2, \dots, y^n che sodisfà alle poste condizioni colla precisione che si vuole. Sia poi $y^\alpha = \bar{Y}^\alpha$ una tale soluzione; si spezzi l'intervallo della variabile esteso da x_0 a $x_0 + A$ interpolando nell'ordine della loro grandezza i valori x_1, x_2, \dots, x_{p-1} ; denoti ε_a^α una frazione propria, positiva o negativa, λ una data grandezza positiva, piccola quanto si vuole; il numero a vada da 1 a $p-1$; il sistema di valori $\bar{y}^\alpha = \bar{Y}_a^\alpha$ appartenga al valore $x = x_a$, e si abbia la serie di equazioni

$$\bar{Y}_{a+1}^\alpha - \bar{Y}_a^\alpha = [f^\alpha(x_a, \bar{Y}_a^1, \bar{Y}_a^2, \dots, \bar{Y}_a^n) + \varepsilon_a^\alpha \lambda] (x_{a+1} - x_a).$$

Allora in quel lavoro è dimostrato che il sistema \bar{Y}^α è identico col sistema y^α menzionato di sopra. Coerentemente alle osservazioni fatte sopra per le equazioni (24) e (24*), io formulo il verificarsi della precedente serie di equazioni espressamente come una condizione. Nella integrazione dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie, che si considerano nei lavori da me pubblicati, è supposto che questa condizione è sodisfatta.

(*) *Disamina della possibilità d'integrare completamente un sistema dato di equazioni differenziali ordinarie*: Annali di Matematica, serie 2^a, t. 2, pag. 288.

Le condizioni di continuità esposte per le funzioni $f(x, y^1, y^2, \dots, y^n)$ sono sempre soddisfatte, perchè esse hanno le loro derivate prime rispetto alle variabili y^1, y^2, \dots, y^n a un sol valore, finite e continue (*); anche queste derivate debbono possedere le proprietà sopra esposte per le equazioni (24*). Nell'applicazione al sistema di equazioni differenziali (35) si fa manifesto che questa supposizione è una conseguenza delle condizioni che sono state poste prima. Infatti le derivate prime rapporto alla variabile delle espressioni $\frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dF_{n,\alpha}}$ rapporto alla variabile z_s sono composte colle derivate prime e seconde delle funzioni F_γ rapporto alla variabile z_s , e per queste derivate delle funzioni F_γ è stata fissata nell'art. 2 la proprietà della quale è parola. Se le funzioni F_γ si concepiscono ottenute colla integrazione di differenziali esatti, le condizioni corrispondenti conducono appunto alle derivate parziali seconde. Nelle vigenti relazioni, si ha dunque una rappresentazione del sistema di valori $[z_1(1), z_2(1), \dots, z_n(1)]$ che sodisfà alle equazioni (33).

Dopo che si è determinato il sistema di valori $[z_1(1), z_2(1), \dots, z_n(1)]$, si domanda quel sistema di valori $[z_1(2), z_2(2), \dots, z_n(2)]$ che sodisfà alle n equazioni

$$F_1 = X_1(0), F_2 = X_2(0), \dots, F_{n-2} = X_{n-2}(0), F_{n-1} = X_{n-1}, F_n = X_n. \quad (36)$$

Qui la totalità dei sistemi di valori, per i quali si ha

$$F_1 = X_1(0), F_2 = X_2(0), \dots, F_{n-2} = X_{n-2}(0), F_n = X_n$$

mentre la funzione F_{n-1} prende con continuità i valori da $X_{n-1}(0)$ a X_{n-1} , forma una varietà semplice di primo ordine che è caratterizzata dal sistema di equazioni

$$\left. \begin{aligned} F_{1,1} dz_1 + F_{1,2} dz_2 + \dots + F_{1,n} dz_n &= 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_{n-2,1} dz_1 + F_{n-2,1} dz_2 + \dots + F_{n-2,n} dz_n &= 0 \\ F_{n-1,1} dz_1 + F_{n-1,2} dz_2 + \dots + F_{n-1,n} dz_n &= dF_{n-1} \\ F_{n,1} dz_1 + F_{n,2} dz_2 + \dots + F_{n,n} dz_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

(*) Nel lavoro citato, pag. 300.

Questo dà il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{dz_\alpha}{dF_{n-1}} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial F_{n-1, \alpha}} \quad (38)$$

dove le grandezze z_α variano con continuità quando la variabile indipendente F_{n-1} va dal valore $X_{n-1}(0)$ al valore X_{n-1} , e per il valore $F_{n-1} = X_{n-1}(0)$ devono soddisfare alle equazioni $z_\alpha = z_\alpha(0)$. Della integrazione del sistema (38) vale tutto ciò che si è detto della integrazione del sistema (35), e il sistema cercato $[z_1(2), z_2(2), \dots, z_n(2)]$ che corrisponde al valore $F_{n-1} = X_{n-1}$, può, sotto le relative condizioni, riguardarsi come conosciuto.

È chiaro che si può ripetere il processo indicato e pervenire a una determinazione del sistema (z_1, z_2, \dots, z_n) che sodisfà alle equazioni (31), colla successiva integrazione di n sistemi di equazioni differenziali ordinarie che hanno la forma (35). Qui ha però significato essenziale la circostanza, che se in queste integrazioni si muta l'ordine delle funzioni F_α , muta anche il processo di tutte le operazioni per le quali si ottiene il risultato definitivo. Quindi non è in alcun modo evidente che le determinazioni che si ottengono con i differenti processi conducano allo stesso risultato. Ma poichè la ricerca fatta nel primo articolo dà il modo di conoscere le condizioni sufficienti perchè il sistema (31) determini in modo unico le grandezze z_α , la supposizione di quelle condizioni dà diritto ad asserire che, per mezzo del processo esposto, le grandezze z_1, z_2, \dots, z_n vengono rappresentate nella loro unica dipendenza dai valori X_1, X_2, \dots, X_n ; nel che consisteva appunto lo scopo di questo processo.

5.

Ora applichiamo le considerazioni esposte ad un sistema di funzioni complesse. Sia il numero fin qui denotato con n uguale a un numero pari $2m$, sia i uguale alla unità imaginaria $\sqrt{-1}$, gl'indici p, q, \dots trascorranò la serie dei numeri da 1 ad m , e tanto due funzioni F_α quanto due variabili z_β siano combinate per mezzo delle equazioni

$$f_p = F_p + iF_{m+p}, \quad y_q = z_q + iz_{m+q}. \quad (39)$$

Affinchè una espressione f_p sia una funzione complessa delle m variabili complesse y_q , è necessario e sufficiente che tra i differenziali

$$df_p = dF_p + idF_{m+p}, \quad dy_q = dz_q + idz_{m+q} \quad (39^*)$$

si abbia la equazione

$$df_p = \sum_q f_{p,q} dy_q \quad (40)$$

dove le $f_{p,q}$ denotano espressioni complesse, finite, dipendenti dalle variabili z_1, z_2, \dots, z_n . Se questa relazione si confronta colla relazione che ha luogo in generale

$$df_p = dF_p + idF_{m+p} = \left. \begin{aligned} &= \sum_q \left(\frac{\partial F_p}{\partial z_q} + i \frac{\partial F_{m+p}}{\partial z_q} \right) dz_q + \sum_q \left(\frac{\partial F_p}{\partial z_{m+q}} + i \frac{\partial F_{m+p}}{\partial z_{m+q}} \right) dz_{m+q} \end{aligned} \right\} (41)$$

si ha il sistema di relazioni

$$f_{p,q} = \frac{\partial F_p}{\partial z_q} + i \frac{\partial F_{m+p}}{\partial z_q} = -i \left(\frac{\partial F_p}{\partial z_{m+q}} + i \frac{\partial F_{m+p}}{\partial z_{m+q}} \right) \quad (42)$$

che reciprocamente ha per conseguenza l'equazione (40).

Supporremo che per ciascuna delle espressioni f_q abbia luogo la relativa equazione (40), ossia che le espressioni f_q formino un sistema di funzioni delle variabili complesse y_1, y_2, \dots, y_m . Ora la soluzione algebrica delle m equazioni (40) dia il sistema di determinazioni

$$dy_q = \sum_p y_{q,p} df_p \quad (43)$$

Se qui è permesso di riguardare le grandezze reali z_1, z_2, \dots, z_{2m} come funzioni dei valori reali F_1, F_2, \dots, F_{2m} , le espressioni $y_{q,p}$ divengono funzioni dei valori F_1, F_2, \dots, F_{2m} , e le equazioni (43) esprimono il fatto, che le grandezze y_q sono funzioni complesse delle grandezze complesse f_p . Quindi, tostochè per mezzo delle condizioni sviluppate nei primi articoli, le grandezze reali z_1, z_2, \dots, z_{2m} sono funzioni a un sol valore dei valori reali f_1, f_2, \dots, f_{2m} , si è in diritto d'invertire questa relazione per il sistema di funzioni f_1, f_2, \dots, f_{2m} delle variabili complesse y_1, y_2, \dots, y_{2m} , e di considerare le grandezze y_1, y_2, \dots, y_m come funzioni complesse a un sol valore delle variabili complesse f_1, f_2, \dots, f_m .

Per formare in questo caso il determinante funzionale Δ delle funzioni reali F_1, F_2, \dots, F_{2m} rapporto alle variabili reali z_1, z_2, \dots, z_{2m} , denotiamo con $f'_p, y'_q, f'_{p,q}$ le espressioni rispettivamente coniugate ad $f_p, y_q, f_{p,q}$. Dalla (39*) si hanno allora le equazioni

$$df'_p = dF_p - idF_{m+p}, \quad dy'_q = dz_q - idz_{m+q} \quad (44)$$

e dalla (40) le equazioni

$$df'_p = \sum_q df'_{p,q} dy'_q \quad (45)$$

Ora tra i differenziali introdotti sussistono tre sistemi di $2m$ equazioni lineari; per mezzo del primo si esprimono dF_p, dF_{m+p} per df_p, df'_p , per mezzo del secondo df_p, df'_p per dy_q, dy'_q , per mezzo del terzo dy_q, dy'_q per dz_q, dz_{m+q} . Ciascuno di questi sistemi di equazioni lineari ha un proprio determinante, e per teoremi noti si ha che il determinante funzionale cercato Δ è uguale al prodotto di questi tre determinanti. Denotiamo con $|f_{p,q}|$ il determinante dell'equazioni (40), con $|f'_{p,q}|$ quello dell'equazioni (45), sarà facile a vedersi che per i tre menzionati sistemi di $2m$ equazioni i determinanti del primo e del terzo hanno valori reciproci, mentre il determinante del secondo è uguale al prodotto $|f_{p,q}| \cdot |f'_{p,q}|$. Dunque il prodotto dei tre determinanti è uguale al secondo di essi, e per il determinante funzionale Δ si ha la espressione

$$\Delta = |f_{p,q}| \cdot |f'_{p,q}|. \quad (46)$$

Separando nel determinante $|f_{p,q}|$ le parti reale e imaginaria, essendo $|f'_{p,q}|$ coniugato ad $|f_{p,q}|$, si ha

$$|f_{p,q}| = A + Bi, \quad |f'_{p,q}| = A - Bi \quad (47)$$

e quindi:

$$\Delta = A^2 + B^2. \quad (48)$$

Dunque il determinante funzionale Δ è la somma di due quadrati, e perciò essenzialmente positivo, come ha osservato anche il signor KRONECKER (*).

Se le grandezze z_1, z_2, \dots, z_{2m} , in virtù delle condizioni sopra esposte, debbono essere funzioni a un sol valore delle variabili F_1, F_2, \dots, F_{2m} , nel campo G il determinante funzionale Δ deve avere da per tutto lo stesso segno. Nel caso presente Δ non può divenir mai negativo, e può annullarsi soltanto quando le parti reali A e B contemporaneamente si annullano. Dunque nel campo G non possono essere contenuti quei sistemi di valori per i quali avvien questo accidente. La totalità dei relativi sistemi di valori non può mai formare altro che una varietà $(2m-2)^{\text{upla}}$. Nel caso $2m=2$, questi sistemi di valori debbono essere, come è noto, valori singolari.

Bonn, 6 ottobre, 1870.

(*) Nel luogo citato, pag. 177.

Alcuni teoremi di statica razionale

(del D.^r GIUSEPPE BARDELLI, a Milano.)

1.° **R**iferito un sistema di forma invariabile a tre assi ortogonali delle x, y, z , siano: n il numero delle forze, P l'intensità di una qualunque tra esse, x, y, z le coordinate del suo punto di applicazione, α, β, γ i suoi coseni di direzione. Indichiamo con X, Y, Z, M_x, M_y, M_z le somme delle componenti delle forze secondo gli assi ed i momenti delle coppie componenti poste nei tre piani ortogonali, e si ponga:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$$

$$XM_x + YM_y + ZM_z = T$$

$$M_m = \frac{T}{R}.$$

Il momento risultante M_0 del sistema corrispondente al punto di coordinate x_0, y_0, z_0 , ritenute le denominazioni:

$$M_{x_0} = M_x - y_0 Z + z_0 Y$$

$$M_{y_0} = M_y - z_0 X + x_0 Z$$

$$M_{z_0} = M_z - x_0 Y + y_0 X$$

vien dato dall'equazione:

$$M_0^2 = M_{x_0}^2 + M_{y_0}^2 + M_{z_0}^2,$$

e se chiamiamo θ , l'angolo che l'asse della coppia di momento M_0 fa con una retta data di cui siano λ, μ, ν i coseni di direzione, avremo:

$$M_0 \cos \theta = \lambda M_{x_0} + \mu M_{y_0} + \nu M_{z_0}.$$

Se da questa e dalla precedente eliminiamo M_0 , si trova:

$$(M_{x_0}^2 + M_{y_0}^2 + M_{z_0}^2) \cos^2 \theta = (\lambda M_{x_0} + \mu M_{y_0} + \nu M_{z_0})^2. \quad (1)$$

Quando si ritengano le x_0, y_0, z_0 variabili, questa equazione rappresenta il luogo dei centri di riduzione ai quali corrispondono coppie risultanti i cui assi sono egualmente inclinati alla retta data. Come è facile il provare, il luogo ora determinato è una superficie cilindrica di secondo ordine avente le generatrici parallele alla direzione della forza risultante, e la cui sezione retta è un'ellisse, un'iperbole od una parabola, secondo che l'angolo θ è minore, maggiore od eguale all'angolo, che il piano perpendicolare alla retta data fa colla direzione della risultante. Quando la retta si prenda parallela alla direzione della risultante, la superficie cilindrica riesce di rotazione, e la sua equazione si deduce dalla precedente ponendo in luogo di λ, μ, ν rispettivamente $\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}, \frac{Z}{R}$, con che si trova

$$M^2_{x_0} + M^2_{y_0} + M^2_{z_0} = \frac{T^2}{R^2 \cos^2 \theta}; \quad (2)$$

il momento risultante:

$$M_0 = \frac{T}{R \cos \theta} = \frac{M_m}{\cos \theta}$$

è in questo caso costante per tutti i punti di una stessa superficie, varia coll'angolo θ da una superficie all'altra e riceve il valor minimo M_m per $\theta=0$. Sottraendo da ambo i membri della (2) la quantità $\frac{T^2}{R^2}$, e ponendo le denominazioni:

$$\left. \begin{aligned} R^2 A &= Y M_z - Z M_y \\ R^2 B &= Z M_x - X M_z \\ R^2 C &= X M_y - Y M_x \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

si giunge con facili riduzioni alla seguente:

$$\begin{aligned} \{ (y_0 - B) Z - (z_0 - C) Y \}^2 + \{ (z_0 - C) X - (x_0 - A) Z \}^2 \\ + \{ (x_0 - A) Y - (y_0 - B) Z \}^2 = M_m^2 \operatorname{tang}^2 \theta. \end{aligned}$$

L'asse di questa superficie, o asse centrale del sistema, ha per equazioni:

$$\frac{x_0 - A}{X} = \frac{y_0 - B}{Y} = \frac{z_0 - C}{Z}$$

nelle quali si decompone la precedente quando si supponga $\theta=0$. Il raggio Δ della sezione retta è dato dall'equazione:

$$R \Delta = M_m \operatorname{tg} \theta$$

e combinando questa colla superiore, che dà il valore di M_0 , si deduce:

$$M_0^2 = M_m^2 + R^2 \Delta^2.$$

Per le cose dette, la proprietà che comunemente viene assunta quale definizione dell'asse centrale di un sistema di forma invariabile, deriva da una proprietà più generale delle coppie risultanti del sistema stesso, giacchè la superficie cilindrica ordinaria di cui il medesimo è asse, e che venne considerata primamente da POINSON nella sua *Statika*, è un caso particolare del sistema di superficie cilindriche rappresentate dalla (1).

Per $\theta = \frac{\pi}{2}$ l'equazione (1) si riduce alla seguente:

$$\lambda M_x + \mu M_y + \nu M_z + x_0(\mu Z - \nu Y) + y_0(\nu X - \lambda Z) + z_0(\lambda Y - \mu X) = 0$$

e quindi il luogo dei centri di riduzione a cui corrispondono coppie risultanti aventi gli assi perpendicolari ad una direzione data è un piano parallelo a questa direzione ed a quella della forza risultante. Se invece supponiamo $\theta = 0$, avuto riguardo alla relazione:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

la (1) si decompone nelle due:

$$\frac{M_{x_0}}{\lambda} = \frac{M_{y_0}}{\mu} = \frac{M_{z_0}}{\nu}$$

ed anche:

$$\frac{x_0 - a}{X} = \frac{y_0 - b}{Y} = \frac{z_0 - c}{Z}.$$

dove si è posto:

$$R^2 a \cos \phi = \mu M_x - \nu M_y,$$

$$R^2 b \cos \phi = \nu M_y - \lambda M_x,$$

$$R^2 c \cos \phi = \lambda M_x - \mu M_z,$$

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = R \cos \phi;$$

onde il luogo dei centri di riduzione, corrispondentemente ai quali gli assi delle coppie risultanti riescono paralleli ad una retta data, è una retta parallela alla direzione della forza risultante. L'asse centrale può considerarsi come un caso particolare della retta ora determinata, giacchè dalle equazioni di questa si deducono quelle già trovate, col fare:

$$\lambda R = X, \quad \mu R = Y, \quad \nu R = Z.$$

2.° Si conduca pel punto x_0, y_0, z_0 la parallela alla retta già immaginata, si prenda su di essa a partire dal punto in un verso determinato una lunghezza L , e si chiami Δ la minima distanza tra questa retta e l'asse centrale, avremo:

$$\Delta R \widehat{\text{sen}} \widehat{RL} = (A - x_0)(Y\nu - Z\mu) + (B - y_0)(Z\lambda - X\nu) + (C - z_0)(X\mu - Y\lambda)$$

ossia:

$$\Delta R \widehat{\text{sen}} \widehat{RL} = \lambda[BZ - CY - y_0Z + z_0Y] + \mu[CX - AZ - z_0X + x_0Z] + \nu[AY - BX - x_0Y + y_0X].$$

Ma dalle equazioni (3) deduconsi facilmente le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} BZ - CY &= M_x - X \frac{M_m}{R} \\ CX - AZ &= M_y - Y \frac{M_m}{R} \\ AY - BX &= M_z - Z \frac{M_m}{R} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

per le quali la precedente colla sostituzione diviene:

$$\Delta R \widehat{\text{sen}} \widehat{RL} = \lambda M_x + \mu M_y + \nu M_z + X(y_0\nu - z_0\mu) + Y(z_0\lambda - x_0\nu) + Z(x_0\mu - y_0\lambda) - M_m \widehat{\text{cos}} \widehat{RL},$$

e chiamando N il momento della coppia del sistema, che ha per asse la retta L , il cui valore è dato dalla:

$$N = \lambda M_x + \mu M_y + \nu M_z + X(y_0\nu - z_0\mu) + Y(z_0\lambda - x_0\nu) + Z(x_0\mu - y_0\lambda) \quad (5)$$

avremo:

$$N = M_m \widehat{\text{cos}} \widehat{RL} + \Delta R \widehat{\text{sen}} \widehat{RL}. \quad (6)$$

A questa equazione debbono sempre soddisfare un momento qualunque N del sistema, componente o risultante, e le quantità Δ , \widehat{RL} che vi si riferiscono, ed essa esprime, che il momento stesso può sempre considerarsi come risultante dei due momenti posti in piani ortogonali, M_m , $R\Delta$. Se però N è momento risultante, ha luogo la relazione:

$$N \widehat{\text{cos}} \widehat{LR} = M_m$$

epperò la precedente si riduce a:

$$\Delta R = N \widehat{\text{sen}} RL;$$

da queste, quadrando e sommando, ottiene la relazione già veduta:

$$N^2 = M_m^2 + \Delta^2 R^2.$$

Dati i momenti di due coppie componenti N_1, N_2 , gli angoli θ_1, θ_2 che i loro assi fanno coll'asse centrale, e le loro minime distanze Δ_1, Δ_2 da questo, purchè i due assi non siano entrambi nè perpendicolari nè paralleli all'asse centrale, si possono sempre assegnare i valori della risultante e del momento minimo. Infatti, per la (6) si hanno le equazioni;

$$N_1 = M_m \cos \theta_1 + \Delta_1 R \text{sen} \theta_1,$$

$$N_2 = M_m \cos \theta_2 + \Delta_2 R \text{sen} \theta_2,$$

da cui ricavansi R ed M_m . Se i due momenti dati sono risultanti basta per ciascuno di essi conoscere la minima distanza del suo asse dall'asse centrale, onde avere la forza risultante ed il momento minimo, i quali si dedurranno in tal caso dalle seguenti:

$$N_1^2 = M_m^2 + R^2 \Delta_1^2$$

$$N_2^2 = M_m^2 + R^2 \Delta_2^2.$$

L'equazione (6) può servire altresì ad assegnare la minima distanza Δ quando si conoscono le altre quantità che entrano in essa, e quindi anche ad individuare la posizione dell'asse centrale quando per tre coppie distinte si conoscono gli elementi N, Δ, \widehat{LR} oltre ad R ed M_m .

3.º Date due rette (o forze) P, Q in grandezza, direzione e verso, nonchè le posizioni delle rispettive origini, si indichi con:

$$[P, Q]$$

il volume del tetraedro costruito sulle medesime, a cui attribuiremo il segno positivo o negativo a seconda che la rotazione segnata da una di essa intorno all'altra, presa come asse della stessa direzione e verso, sia da sinistra a destra o da destra a sinistra, e con V la somma degli $\frac{n(n-1)}{2}$ volumi dei tetraedri, che si ottengono combinando le forze del sistema due a due. Considerando due forze P_r, P_s qualunque, chiamando $\delta_{r,s}$ la minima distanza

tra le loro direzioni, avremo:

$$[P_r, P_s] = \frac{1}{6} \cdot P_r P_s \delta_{r,s} \widehat{\text{sen}} P_r P_s = \frac{1}{6} P_r P_s \{ (x_r - x_s)(\beta_r \gamma_s - \beta_s \gamma_r) + (y_r - y_s)(\gamma_r \alpha_s - \gamma_s \alpha_r) + (z_r - z_s)(\alpha_r \beta_s - \alpha_s \beta_r) \}.$$

Moltiplicando in ordine le equazioni delle due terne:

$$\begin{aligned} X &= \Sigma P \alpha, & M_x &= \Sigma P (y \gamma - z \beta) \\ Y &= \Sigma P \beta, & M_y &= \Sigma P (z \alpha - x \gamma) \\ Z &= \Sigma P \gamma, & M_z &= \Sigma P (x \beta - y \alpha) \end{aligned}$$

e sommando i prodotti, si ottiene facilmente:

$$X M_x + Y M_y + Z M_z = \Sigma P_r P_s \{ (x_r - x_s)(\beta_r \gamma_s - \beta_s \gamma_r) + (y_r - y_s)(\gamma_r \alpha_s - \gamma_s \alpha_r) + (z_r - z_s)(\alpha_r \beta_s - \alpha_s \beta_r) \}$$

dove gli indici r, s , diversi tra loro, debbono ricevere tutti i valori $1, 2, \dots, n$. Per la precedente e pel valore di T avremo:

$$T = 6 \Sigma [P_r, P_s] = 6 V, \quad (7)$$

relazione la quale dimostra la notissima proprietà del trinomio T di essere indipendente dalla scelta degli assi coordinati. Per la relazione fondamentale, che lega la teoria delle coppie a quella dei momenti, è possibile esprimere il momento N di una coppia qualunque del sistema di forma invariabile mediante le grandezze delle componenti, gli angoli che le loro direzioni comprendono coll'asse della coppia, e le minime distanze δ tra queste e le direzioni stesse (*); si ha pertanto:

$$N = \Sigma P \delta \widehat{\text{sen}} PL;$$

ciò posto, la equazione trovata nel numero precedente:

$$N = M_m \cos \widehat{LR} + \Delta R \widehat{\text{sen}} RL \quad (8)$$

si può facilmente tradurre in una relazione tra volumi: moltiplicando per L e richiamando il valore di M_m , si trova:

$$LN = \Sigma LP \delta \widehat{\text{sen}} LP = LR \Delta \widehat{\text{sen}} LR + \frac{LT}{R} \cos \widehat{LR}$$

(*) BRIOSCHI: *La Statica dei sistemi di forma invariabile*, Cap. III.

Annali di Matematica, tomo IV.

ossia:

$$6\Sigma[L, P] = LR\Delta \widehat{LR} + \frac{LT}{R} \cos \widehat{LR}.$$

Si supponga la risultante diretta secondo l'asse centrale, allora:

$$LR\Delta \widehat{LR} = 6[L, R]$$

e per la (7) risulterà:

$$\Sigma[L, P] = [L, R] + \frac{LV}{R} \cos \widehat{LR}; \quad (9)$$

quest'equazione dà il mezzo di calcolare la somma dei volumi dei tetraedri aventi per singoli opposti una retta qualunque e ciascuna forza del sistema, quando si conoscano: il volume del tetraedro costruito sulla retta e sulla risultante, supposta diretta secondo l'asse centrale, e la somma dei volumi dei tetraedri i cui spigoli opposti sono le forze date prese due a due. Accenneremo ad alcune conseguenze a cui conduce la medesima.

Il secondo membro della (8) riceve un valore costante, quando, considerando sempre lo stesso sistema di forze, siano costanti L , Δ , \widehat{LR} , cioè quando L sia presa su una generatrice rettilinea qualunque dell'iperboloide ad una falda di rotazione, che ha per asse l'asse centrale e Δ per raggio del cerchio di gola; e siccome le generatrici stesse sono assi di coppie risultanti aventi l'egual momento, così possiamo stabilire il seguente teorema: Se in uno qualunque degli assi delle coppie risultanti di egual momento, supposti i medesimi condotti pei rispettivi centri di riduzione, si prende una costante lunghezza (che potrebbe rappresentare il momento risultante), e si costruiscono su di essa e su ciascuna delle date forze come spigoli opposti, i tetraedri, la somma dei volumi di questi sarà costante.

Quando la retta L si fa coincidere colla risultante applicata a qualsivoglia centro di riduzione, si ha:

$$\widehat{LR} = 0, \quad [L, R] = 0$$

e quindi in qualunque sistema di forze:

$$\Sigma[R, P] = V. \quad (10)$$

Il secondo membro della equazione trovata, per gli stessi valori di L , Δ , \widehat{RL} mantiene lo stesso valore, se essa si fa sussistere per un altro sistema

di forze equivalente al primo, giacchè i due sistemi dovranno ammettere la stessa risultante, lo stesso momento minimo e l'identico asse centrale. Sia Q una qualunque delle forze del sistema equivalente, risulterà:

$$\Sigma[L, P] = \Sigma[L, Q];$$

se le forze Q sono due sole Q_1, Q_2 sarà:

$$\Sigma[L, P] = [Q_1, L] + [Q_2, L],$$

e se supponiamo L coincidere con R , si ha:

$$\Sigma[R, P] = [Q_1, R] + [Q_2, R]$$

e per la (9):

$$V = [Q_1, R] + [Q_2, R] = [Q_1, Q_2] \quad (11)$$

nella quale è contenuta la dimostrazione di un notissimo teorema di CHASLES.

Se la retta L è presa in un piano perpendicolare alla risultante, si ha:

$$\Sigma[P, L] = [R, L]$$

e quando invece è parallela alla risultante:

$$\Sigma[L, P] = \frac{L}{R} \cdot V.$$

La prima di queste relazioni si verifica anche nel caso che il sistema sia riducibile ad una risultante unica e qualunque sia la retta L , perchè sappiamo dover allora essere $T=0$ e quindi $V=0$. Allorquando si consideri un sistema in equilibrio, dovendo essere nulli la forza risultante ed il momento minimo, se ne conclude:

$$[R, L] = 0, \quad V = 0, \quad \Sigma[L, P] = 0;$$

la seconda di queste contiene un conosciuto teorema di MÖBIUS, e la terza, surrogando ad L successivamente le forze del sistema, fornisce n equazioni, che si verificano nell'equilibrio di qualunque sistema, da me date in altra occasione, ma seguendo un metodo diverso (*), e che vennero in seguito trovate anche dal signor SPOTTISWOODE (**).

3.° Immaginiamo un secondo sistema di forma invariabile affatto indipendente dal primo. Siano Q la grandezza di una qualunque delle sue forze,

(*) Rendiconti dell'Istituto Lombardo, 1866, vol. III.

(**) Comptes rendus, 1868, N.° 2.

d la minima distanza che la sua direzione ha dalla direzione della forza P qualsivoglia del primo sistema; e per indicare tutti gli altri elementi che si riferiscono al nuovo sistema, ci serviremo delle lettere già usate con analogo significato pel primo sistema, ma accentate. Posto:

$$W = XM_{x_1} + YM_{y_1} + ZM_{z_1} + X_1M_x + Y_1M_y + Z_1M_z \quad (*)$$

e seguendo lo stesso metodo che ci ha servito al calcolo di T , troveremo:

$$W = \Sigma PQ d \cos PQ = 6 \Sigma [P, Q]. \quad (12)$$

Il valore di W può essere calcolato altrimenti come segue. Si determini la minima distanza D tra gli assi centrali dei due sistemi: perciò cominceremo a porre nella (8) $L = R_1$, $\Delta = D$ ed avremo:

$$N = DR \widehat{\text{sen}} RR_1 + \frac{T}{R} \widehat{\text{cos}} RR_1;$$

poi per avere N , momento della coppia del primo sistema, che ha per asse l'asse centrale del secondo, faremo nella (5) le seguenti sostituzioni

$$\lambda = \frac{X'}{R_1}, \quad \mu = \frac{Y_1}{R_1}, \quad \nu = \frac{Z_1}{R_1}, \quad x_0 = A_1, \quad y_0 = B_1, \quad z_0 = C_1$$

e richiamando anche le (4), troveremo:

$$N = \frac{1}{R_1} (X_1M_x + Y_1M_y + Z_1M_z) + \frac{X}{R_1} \left(M_{x_1} - \frac{X_1T_1}{R_1^2} \right) + \frac{Y}{R_1} \left(M_{y_1} - \frac{Y_1T_1}{R_1^2} \right) + \frac{Z}{R_1} \left(M_{z_1} - \frac{Z_1T_1}{R_1^2} \right) = \frac{W}{R_1} - \frac{T_1}{R_1^2} (XX_1 + YY_1 + ZZ_1) = \frac{W}{R_1} - \frac{T_1}{R_1^2} \widehat{\text{cos}} RR_1$$

(*) Se con M ed M_1 indichiamo i momenti risultanti dei due sistemi corrispondenti all'origine degli assi coordinati, e con \widehat{MR}_1 , \widehat{MR}_1 gli angoli che l'asse risultante di un sistema comprende coll'asse centrale dell'altro, al valore di W possiamo dare la seguente forma:

$$W = MR_1 \widehat{\text{cos}} MR_1 + M_1 R \widehat{\text{cos}} M_1 R.$$

Questa relazione insieme alla (12)

$$W = 6 \Sigma [P, Q]$$

venne data anche dal ch.^o signor Prof.^r CHELINI nella sua recente memoria: *Sulla composizione geometrica dei sistemi di rette, di aree e di punti*, pubblicata dall'Accademia di Bologna, e della quale io ebbi comunicazione soltanto quando il mio breve lavoro era già compilato. La seconda poi di quelle relazioni trovasi altresì dimostrata, come venemmi avvertito dal Prof.^r CREMONA, in una anteriore memoria dello stesso signor Prof. CHELINI: *Sugli assi centrali delle forze e delle rotazioni nell'equilibrio e nel moto dei corpi* (Bologna, 1866).

e finalmente, eliminando N colla superiore:

$$W = DRR_1 \widehat{\text{sen}} \widehat{RR_1} + \cos \widehat{RR_1} \left(\frac{RT_1}{R_1} + \frac{R_1 T}{R} \right).$$

Eguagliando i due valori trovati di W ed introducendo la notazione dei volumi, abbiamo:

$$\Sigma[P, Q] = [R, R_1] + \cos \widehat{RR_1} \left(\frac{RV_1}{R_1} + \frac{R_1 V}{R} \right). \quad (13)$$

Quest'equazione dimostra il seguente teorema: Dati due sistemi qualunque di forma invariabile, per calcolare la somma dei volumi dei tetraedri che si possono costruire combinando ciascuna forza dell'uno con ciascuna forza dell'altro, basta conoscere il volume del tetraedro, che ha per spigoli opposti le due risultanti, supposte dirette secondo i rispettivi assi centrali, e le somme dei volumi dei tetraedri che si ottengono combinando in ciascun sistema le forze due a due.

Se si applica l'equazione (9) a ciascuno dei due sistemi prendendo per retta L successivamente le risultanti $R_1 R$, si hanno le seguenti equazioni:

$$\Sigma[R, P] = [R, R_1] + \frac{R_1}{R} V \cos \widehat{RR_1}$$

$$\Sigma[R_1, Q] = [R, R_1] + \frac{R}{R_1} V_1 \cos \widehat{RR_1}$$

sommando membro a membro ed avendo riguardo alla (12), si trova:

$$\Sigma[P, Q] + [R, R_1] = \Sigma[R_1, P] + \Sigma[R, Q]. \quad (14)$$

È facile enunciare il teorema contenuto in questa equazione: Dati due sistemi affatto indipendenti di forze, la somma dei volumi dei tetraedri, che nascono dal combinare ciascuna forza dell'una con ciascuna dell'altro, più il volume del tetraedro costruito sulle due risultanti dirette secondo i rispettivi assi centrali, eguaglia la somma dei tetraedri che si ottengono combinando ciascuna forza di un sistema colla risultante dell'altro, e viceversa. Deriviamo alcuni corollari.

Quando l'uno dei due sistemi, per es. il secondo, è in equilibrio si ha:

$$R_1 = 0, \quad [R, R_1] = 0, \quad \Sigma[R_1, P] = 0, \quad \Sigma[R_1, Q] = 0$$

e quindi anche:

$$\Sigma[P, Q]=0;$$

teorema di CHASLES (*).

Se i due sistemi sono riducibili ad un'unica risultante:

$$\Sigma[P, Q]=[R, R_1],$$

e se inoltre le direzioni delle risultanti si incontrano, sarà:

$$[R, R_1]=0, \quad \Sigma[R_1, P]=0, \quad \Sigma[R, Q]=0$$

e quindi ancora:

$$\Sigma[P, Q]=0$$

e per conseguenza:

$$W=0 (**).$$

Supponiamo il secondo sistema equivalente al primo, dovranno verificarsi le condizioni:

$$R=R_1, \quad \widehat{RR_1}=0, \quad V=V_1, \quad [R, R_1]=0,$$

ed allora dalla (13) deduciamo:

$$\Sigma[P, Q]=2V.$$

Consideriamo in particolare il sistema di due forze dirette secondo due rette reciproche ed equivalente al dato; chiamando Q_1, Q_2 le intensità delle due risultanti parziali, avremo:

$$\Sigma[P, Q_1] + \Sigma[P, Q_2] = 2V$$

e per la relazione (11) già trovata al numero precedente:

$$\Sigma[P, Q_1] + \Sigma[P, Q_2] = 2\{[Q_1, R] + [Q_2, R]\} = 2[Q_1, Q_2];$$

possiamo pertanto concludere col seguente teorema: Ridotto un sistema di forma invariabile a due sole forze agenti secondo due rette reciproche, la somma dei $2n$ volumi dei tetraedri che si ottengono combinando ciascuna delle componenti con ciascuna delle risultanti parziali, è uguale al doppio del volume del tetraedro avente per spigoli opposti queste ultime. »

(*) Journal de Liouville, tome XII, pag. 213.

(**) BRIOSCHI: *La Statica dei sistemi di forma invariabile*, Cap. VII.

Notiamo infine, che la relazione (13) stabilita indipendentemente dalla (9) comprende questa stessa come caso particolare, alla quale si riduce quando si consideri il secondo sistema costituito di una sola forza Q , e si ponga:

$$Q=L, \quad R_1=L, \quad V_1=0$$

cosichè l'equazione:

$$\Sigma [P, Q] = [R_1, R] + \cos \widehat{RR_1} \left\{ \frac{RV_1}{R_1} + \frac{R_1V}{R} \right\}$$

è la più generale fra le analoghe che possono dare relazioni di volumi tetraedri che risultano dalla considerazione simultanea di due sistemi di forze: da essa infatti si possono derivare tutti i teoremi dimostrati negli ultimi due numeri precedenti.

Milano, gennajo 1871.

Sopra la corrispondenza del secondo grado fra due sistemi semplicemente infiniti

(del sig. D.^r EMILIO WEYR, di Praga.)

1. Questa corrispondenza, lo studio della quale è importantissimo per una grande classe di problemi geometrici, fu infatti già considerata ed adoperata specialmente in riguardo alle curve piane del terz'ordine, alle curve gobbe del quart'ordine e prima specie, o diciamo in generale in riguardo alle curve del primo genere. Ecco il concetto della corrispondenza suddetta.

Abbiansi due sistemi X , Y , ciascuno formato di una infinità semplice di elementi, individuati univocamente dai valori di un solo parametro, in tal modo che anche viceversa ad un elemento corrisponda uno ed un solo valore del parametro. Tali sistemi possono essere per esempio punteggiate del genere zero (cioè giacenti sopra curve del genere zero) o fasci di curve, o fasci di superficie ecc. Avremo dunque nei due sistemi X , Y due parametri x , y per la determinazione dei loro elementi; ma si intende che il parametro x del sistema X può avere un'altra significazione da quella del parametro y nel sistema Y . Fra i due sistemi avrà luogo una corrispondenza del secondo grado, quando a ciascun elemento dell'un sistema corrisponda algebricamente una coppia di elementi dell'altro sistema; cioè quando i parametri di due elementi corrispondenti siano legati fra loro da una equazione algebrica del secondo grado rispetto a ciascuno dei due parametri. Una tale equazione avrà, come si vede immediatamente, la forma:

$$y^2 f_0 + y f_1 + f_2 = 0 \quad (1)$$

dove

$$f_i = A_i x^2 + B_i x + C_i;$$

A, B, C essendo costanti arbitrarie. Il numero di tali costanti sarà dunque nove; una però si può tralasciare. Di qui segue che una corrispondenza generale del secondo grado è individuata quando si conoscano otto paia di elementi corrispondenti (*).

È noto che in ciascuno dei due sistemi si trovano quattro elementi di diramazione (*Verzweigungselemente*) cioè elementi tali che i due a loro corrispondenti dell'altro sistema coincidono. Denominiamo con $x_1 x_2 x_3 x_4$, $y_1 y_2 y_3 y_4$ gli elementi di diramazione ai quali corrisponderanno rispettivamente gli elementi doppi $y_1^{12} y_2^{12} y_3^{12} y_4^{12}$, $x_1^{12} x_2^{12} x_3^{12} x_4^{12}$ dell'altro sistema. Per esempio corrisponde all'elemento x_3 l'elemento doppio y_3^{12} ecc.

Fra gli elementi di diramazione fu dal celebre SALMON enunciato in forma geometrica il teorema seguente:

I due gruppi $(x_1 x_2 x_3 x_4)$, $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ degli elementi di diramazione formano (in quattro maniere diverse) due sistemi proiettivi.

Noi ci proponiamo in questa breve nota da dimostrare i due teoremi seguenti, forse non ancora conosciuti: *

Anche i due gruppi $(x_1^{12} x_2^{12} x_3^{12} x_4^{12})$, $(y_1^{12} y_2^{12} y_3^{12} y_4^{12})$ degli elementi doppi formano (in quattro maniere diverse) due sistemi proiettivi.

E di più:

Ad ogni gruppo di elementi presi fra gli elementi $x_1 x_2 x_3 x_4$, $x_1^{12} x_2^{12} x_3^{12} x_4^{12}$ del sistema X corrisponde proiettivamente (in quattro maniere diverse), un gruppo di elementi presi fra gli elementi $y_1 y_2 y_3 y_4$, $y_1^{12} y_2^{12} y_3^{12} y_4^{12}$ del sistema Y .

Dimostriamo dunque il teorema generale:

Gli elementi di diramazione e gli elementi doppi nei due sistemi legati da una corrispondenza generale del secondo grado formano (in quattro maniere diverse) due sistemi proiettivi.

2. Così i tre primi teoremi come l'ultimo saranno dimostrati, se potremo affermare il teorema seguente:

Il sistema X si può (in quattro maniere diverse) in tal modo proiettare sul sistema Y che gli elementi di diramazione e gli elementi doppi d'un sistema coincidano cogli elementi analoghi dell'altro.

(*) Una corrispondenza generale secondo $[m, n]$ è determinata se sono dati $(mn + m + n)$ paia di elementi corrispondenti.

In fatti una tale proiezione o, con altre parole, una tale trasformazione lineare si può effettuare in quattro maniere diverse come ora ci proponiamo di far vedere.

Se vogliamo proiettare il sistema X linearmente sopra Y , basta porre:

$$x = \frac{\alpha y' + \beta}{\gamma y' + \delta} \quad (2)$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono costanti, qualsivogliano. Dal sistema X dedurremo un sistema Y' ed è facile riconoscere che i due sistemi X ed Y' saranno proiettivi. Poichè i due sistemi Y ed Y' sono sovrapposti, riterremo che per ogni elemento, sia considerato appartenente all'uno o all'altro, sia $y = y'$. Adesso abbiamo due sistemi Y, Y' con elementi comuni, e la proiettività fra Y' ed X fa sì che c'è una corrispondenza del secondo grado fra Y ed Y' quando consideriamo un elemento y' di Y' che corrisponde proiettivamente all'elemento x del sistema X , come corrispondente ai due elementi che corrispondono nel sistema Y all'elemento x .

La equazione esprime questa corrispondenza fra Y ed Y' si può facilmente dedurre dall'equazione (1) mediante la equazione (2) che esprime la proiettività fra Y' ed X . Mettendo (2) in f_i otteniamo:

$$f_i = \frac{A_i(\alpha y' + \beta)^2 + B_i(\alpha y' + \beta)(\gamma y' + \delta) + C_i(\gamma + \delta)^2}{(\gamma y' + \delta)^2}$$

ossia:

$$f_i = \frac{y'^2(A_i\alpha^2 + B_i\alpha\gamma + C_i\gamma^2) + y'[2A_i\alpha\beta + B_i(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2C_i\gamma\delta] + (A_i\beta^2 + B_i\beta\delta + C_i\delta^2)}{(\gamma y' + \delta)^2}$$

o, ponendo

$$\phi_i = y'(A_i\alpha^2 + B_i\alpha\gamma + C_i\gamma^2) + y'[2A_i\alpha\beta + B_i(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2C_i\gamma\delta] + (A_i\beta^2 + B_i\beta\delta + C_i\delta^2)$$

avremo:

$$f_i = \frac{\phi_i}{(\gamma y' + \delta)^2}$$

onde tralasciando il fattore comune $\frac{1}{(\gamma y' + \delta)^2}$, la equazione (1) assumerà la forma:

$$y^2\phi_0 + y\phi_1 + \phi_2 = 0 \quad (3)$$

che significa evidentemente ancora una corrispondenza generale del secondo grado, ma fra i sistemi Y ed Y' , perchè nelle funzioni ϕ si trova adesso il parametro y' .

Fra le costanti $\alpha\beta\gamma\delta$ possiamo considerarne tre come arbitrarie, dunque le possiamo scegliere in tal modo che siano soddisfatte tre condizioni. Faremo la scelta così che la equazione (3) divenga simmetrica in y ed y' . In questa equazione abbiamo termini della forma x^2y^2 , x^2y , xy^2 , x^2 , y^2 , xy , x , y , 1, e la equazione sarebbe evidentemente simmetrica se i coefficienti di x^2y ed xy^2 , poi di x^2 ed y^2 e finalmente quei di x ed y fossero eguali. Ma questo dà precisamente tre condizioni alle quali possiamo dunque soddisfare mediante la scelta delle costanti $\alpha\beta\gamma\delta$. Le condizioni della simmetria sono, come si vede subito:

$$\left. \begin{aligned} 2A_0\alpha\beta + B_0(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2C_0\gamma\delta &= A_1\alpha^2 + B_1\alpha\gamma + C_1\gamma^2 \\ 2A_2\alpha\beta + B_2(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2C_2\gamma\delta &= A_1\beta^2 + B_1\beta\delta + C_1\delta^2 \\ A_2\alpha^2 + B_2\alpha\gamma + C_2\gamma^2 &= A_0\beta^2 + B_0\beta\delta + C_0\delta^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

alle quali soddisfacendo, la equazione (3) prenderà la forma:

$$ay^2y'^2 + byy'(y + y') + c(y^2 + y'^2) + dyy' + e(y + y') + f = 0. \quad (5)$$

Ma, che significa la simmetria dell'equazione (5) esprime la corrispondenza fra i due sistemi Y ed Y' ? Evidentemente essa esprime la proprietà speciale che, se consideriamo un elemento come appartenente all'uno od all'altro sistema, ad esso corrispondono in entrambi i casi gli stessi due elementi. Difatti, la equazione (5) fornisce (a causa della sua simmetria) due valori y'_1, y'_2 corrispondenti ad y che sono identici con quei due valori y_1, y_2 che corrispondano ad y' , se è $y' = y$. In questo caso i due sistemi Y ed Y' non si possono più distinguere e formano ciò che si potrebbe chiamare un sistema simmetrico del secondo grado (*).

Dalla simmetria caviamo immediatamente che gli elementi y_1, y_2, y_3, y_4 di diramazione del sistema Y saranno anche quelli del sistema Y' e gli elementi doppi $y_1^{12}, y_2^{12}, y_3^{12}, y_4^{12}$ di Y saranno anche gli elementi doppi di Y' . Difatti, siccome all'elemento y_1 per es. corrispondono due elementi uniti in (y_1^{12}) , riguardandolo come elemento y'_1 del sistema Y' gli devono corrispondere (a causa della simmetria) gli stessi due elementi uniti in $y_1^{12} (\equiv y_1'^{12})$; ne concludiamo dunque che $y_1 (\equiv y_1')$ è simultaneamente un elemento di

(*) La equazione (5) contenendo cinque costanti arbitrarie, mostra che un sistema simmetrico del secondo grado è individuato mediante cinque paia di elementi corrispondenti. Per es. un così fatto sistema generale di punti è determinato dalle tangenti di una conica sopra di una altra conica.

diramazione dei due sistemi Y ed Y' e, che $y_1^{12} (\equiv y_1'^{12})$ è simultaneamente un elemento doppio dei medesimi.

Vediamo dunque che il sistema $y_1 y_2 y_3 y_4 y_1^{12} y_2^{12} y_3^{12} y_4^{12}$ è congruente col sistema $y_1' y_2' y_3' y_4' y_1'^{12} \dots$ (perchè questi due sistemi giacciono uno sopra dell'altro) e, essendo Y' proiettivo con X , per conseguenza saranno i due sistemi $y_1 y_2 y_3 y_4 y_1^{12} y_2^{12} \dots$ ed $x_1 x_2 x_3 x_4 x_1^{12} x_2^{12} \dots$ proiettivi fra loro.

Le equazioni (4) rappresentano tre superficie del secondo grado le quali avranno otto punti d'intersezione comuni, giacchè nessuna delle medesime passa per la curva d'intersezione delle altre due. Noi otterremo dunque otto sistemi di valori per le costanti $\alpha\beta\gamma\delta$. Ma, questi otto sistemi devono essere per così dire, conjugati due a due, come si vede dalla seguente osservazione.

Facendo la proiezione mediante l'equazione (2) e in tal modo che il sistema Y' divenga simmetrico col sistema Y , non intendiamo che questo. Ad un elemento y' di Y' corrisponde per la (2) un elemento y di Y , ed a quest'elemento corrispondono due elementi x_1, x_2 di X in conseguenza dell'equazione (1); ma, se consideriamo y' come un elemento di X , ad esso corrisponderanno in conseguenza dalla (1) due elementi y_1, y_2 di Y , e la nostra intenzione è stata di scegliere $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ così che gli elementi y_1, y_2 siano legati cogli elementi x_1, x_2 mediante l'equazione (2). Ma questo si può (la possibilità è già dimostrata) effettuare in due maniere che sono, come si potrebbe dire, conjugate. Infatti si può domandare che si progetti x_1 in y_1 , onde x_2 verrà poi proiettato in y_2 , o che si progetti y_1 in x_2 e poi y_2 in x_1 . Ma nell'effetto finale queste due proiezioni non sono differenti fra loro; dunque degli otto sistemi che caviamo dalle (4) per $\alpha\beta\gamma\delta$, restano effettivamente soli quattro che danno luogo a proiezioni differenti fra loro.

Possiamo dunque considerare come dimostrato il teorema enunciato.

3. Nell'articolo presente ci permetteremo di dare una dimostrazione puramente geometrica del teorema proposto.

Quali sistemi X, Y legati dalla corrispondenza del secondo grado, vogliamo considerare i due sistemi di generatrici di un'iperboloide I . Due generatrici x, y corrispondenti s'incontrano in un punto p perchè appartengono ciascuna ad un sistema diverso. Il luogo dei punti p sarà dunque una curva C giacente sopra di I . Ciascuna generatrice di I incontra C in due punti, nei quali è incontrata dalle due generatrici dell'altro sistema che corrispondono ad essa. Di qui possiamo già osservare che C dev'essere una curva gobba di quart'ordine e prima specie. Infatti, un piano qualsivoglia ha quattro punti comuni con C , che sono evidentemente i quattro punti

uniti delle due serie che determinano i due sistemi di generatrici corrispondenti sulla conica comune al piano ed all'iperboloide. Essendo la curva C da ciascuna generatrice dell'iperboloide incontrata in due punti, non può essere che una curva di prima specie. Inoltre C è una curva generale di quart'ordine e prima specie; perchè una tale curva è determinata conoscendo otto punti d'essa situati ad arbitrio sopra di I ; e per stabilire la corrispondenza fra i due sistemi di generatrici dobbiamo scegliere (come abbiamo osservato poco fa) otto paia di elementi corrispondenti, cosa che è precisamente equivalente alla scelta di otto punti della curva. Possiamo dunque dire:

Se i due sistemi di generatrici di un'iperboloide si trovano in una corrispondenza (generale) del secondo grado, le generatrici di un sistema incontrano le corrispondenti generatrici dell'altro nei punti di una curva generale del quart'ordine e prima specie. E viceversa, ogni curva così fatta, situata sull'iperboloide, dà luogo ad una corrispondenza (generale) del secondo grado fra le generatrici dei due sistemi (*).

Per la curva C passano, come si sa, quattro coni di secondo grado; sia dunque o_1 il vertice di un tale cono e proiettiamo C da o_1 come centro di proiezione sopra il piano polare di o_1 rispetto all'iperboloide. La proiezione dell'iperboloide I sarà la conica P nella quale il piano di proiezione sega l'iperboloide. Ciascuna tangente θ di P è l'immagine di due generatrici θ_1, θ_2 dell'iperboloide che si segano nel punto di contatto della retta θ colla conica P . La proiezione della nostra curva C sarà la conica C_1 intersezione del cono (oC) col piano di proiezione. I due punti m, n nei quali θ sega la conica C_1 sono dunque l'immagine dei quattro punti $m_1 n_1, m_2 n_2$ nei quali le due generatrici θ_1, θ_2 incontrano la curva C . Di qui segue che le quattro tangenti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ comuni alle due coniche P ed C_1 rappresentano una volta quattro generatrici di un sistema, e l'altra volta quattro generatrici dell'altro sistema che toccano la curva C . Queste generatrici sono dunque gli elementi di diramazione dei due sistemi da noi considerati. Ma i quattro

(*) Vi è anche una corrispondenza del secondo grado che si potrebbe chiamare «riducibile», e che si presenta nel caso di una curva C con un punto doppio. In questo caso vi è nel sistema X un elemento x , e nel sistema Y un elemento y ciascuno dei quali corrisponde due volte all'altro. Una tale corrispondenza tralasciamo nella nostra considerazione, perchè non vi sono più quattro ma solamente due elementi di diramazione in ciascun sistema.

punti a, b, c, d nei quali $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ toccano la conica P sono i punti di intersezione delle otto generatrici di diramazione, prese due a due, ed essendo noto che il rapporto anarmonico di quattro generatrici dell'un sistema è eguale al rapporto anarmonico di quattro generatrici dell'altro sistema, quando esse segano le prime in quattro punti del medesimo piano, rimane dimostrato il teorema:

Il rapporto anarmonico delle quattro generatrici di un sistema toccanti la curva C è eguale al rapporto anarmonico delle quattro generatrici dell'altro sistema toccanti la stessa curva C .

I quattro modi nei quali queste due quaterne di generatrici si possono mettere nella relazione di proiettività corrispondono ai quattro vertici o_1, o_2, o_3, o_4 dei coni passanti per C . Le due quaterne si segano quattro volte in quattro punti sopra le facce del tetraedro $(o_1 o_2 o_3 o_4)$ che è conjugato a sè stesso per ogni superficie di secondo grado passante per C . Ma il teorema dimostrato per la curva C , cioè per due sistemi di generatrici, vale anche (a causa della generalità della corrispondenza fra i due sistemi) per due sistemi qualunque, i quali siano in una corrispondenza generale del secondo grado. Le immagini delle generatrici doppie, cioè delle otto generatrici (quattro di ciascun sistema) passanti per i punti di contatto della curva C colle generatrici toccanti saranno evidentemente le quattro tangenti che si possono condurre alla conica P per i quattro punti di contatto delle tangenti $\alpha\beta\gamma\delta$ colla conica C_1 . Ciascuna di queste quattro tangenti è l'immagine simultaneamente di una generatrice doppia dell'uno o dell'altro sistema, che si segano nel punto di contatto della loro proiezione colla conica P . Abbiamo dunque il teorema generale che corrisponde a quello dell'articolo precedente:

Sull'iperboloide I giaccia una curva C del quart'ordine e prima specie. Vi sono quattro generatrici $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ dell'uno, e quattro $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$ dell'altro sistema, toccanti la curva C . Per i punti di contatto delle $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$ passano quattro generatrici $\alpha_1^{12}\beta_1^{12}\gamma_1^{12}\delta_1^{12}$ del primo sistema, e per i punti di contatto delle $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$ passano quattro generatrici $\alpha_2^{12}\beta_2^{12}\gamma_2^{12}\delta_2^{12}$ dell'altro sistema. Le otto generatrici: $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\alpha_1^{12}\beta_1^{12}\gamma_1^{12}\delta_1^{12}$ segano le otto generatrici $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2\alpha_2^{12}\beta_2^{12}\gamma_2^{12}\delta_2^{12}$ secondo quattro maniere diverse in otto punti giacenti in un medesimo piano. I piani così ottenuti sono le facce del tetraedro conjugato a sè stesso, rispetto a tutte le superficie del secondo grado passanti per C .

I punti di contatto della curva C colle generatrici $\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_2 \dots$ hanno le loro proiezioni nei punti di contatto delle quattro tangenti $\alpha \beta \gamma \delta$ colla conica C_1 immagine di C . Dunque vediamo che gli otto punti di contatto della curva C colle generatrici $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1 \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \delta_2$ giacciono in quattro maniere diverse due a due in quattro rette passanti per uno stesso punto. I quattro punti così ottenuti sono i vertici del tetraedro sopradetto, ossia i vertici dei quattro coni di secondo grado passanti per C .

4. Da un punto qualunque dell'iperboloide proiettiamo ora, sopra un piano, tutta la figura tracciata sull'iperboloide medesimo; avremo così il seguente teorema, noto in parte:

Sia C una curva piana del quart'ordine con due punti doppi δ_1, δ_2 ; per δ_1 si possono condurre quattro rette $A_1 B_1 C_1 D_1$ che la toccano altrove in quattro punti $a_1 b_1 c_1 d_1$, e per δ_2 passano analogamente quattro tangenti $A_2 B_2 C_2 D_2$ e siano $a_2 b_2 c_2 d_2$ i punti di contatto. Gli otto raggi $A_1, B_1, C_1, D_1, \delta_1(a_2, b_2, c_2, d_2)$ segano gli altri otto raggi $A_2, B_2, C_2, D_2, \delta_2(a_1, b_1, c_1, d_1)$ in quattro maniere diverse in otto punti di una stessa conica passante per δ_1 e δ_2 . Due qualunque delle quattro coniche così ottenute hanno, oltre a $\delta_1 \delta_2$, una secante comune, e le sei secanti analoghe passano tre a tre per quattro punti $o_1 o_2 o_3 o_4$, formando un quadrangolo completo. Gli otto punti $a_1 b_1 c_1 d_1 a_2 b_2 c_2 d_2$ giacciono in quattro maniere diverse due a due in quattro raggi passanti per uno dei punti o (*). Le quattro coniche suddette finalmente segano la curva C (oltre δ_1 e δ_2) in sedici punti, in ciascuno dei quali questa curva ha un contatto quadripunto con una conica passante per δ_1 ed δ_2 .

Se prendessimo il centro di proiezione sulla curva C , otterremmo un teorema analogo per le cubiche piane. Vogliamo solamente notare che per queste curve i punti o sono situati sopra la cubica, e hanno come punto tangenziale comune il terzo punto d'intersezione della cubica colla retta $\delta_1 \delta_2$. I punti δ_1, δ_2 sono in questo caso due punti presi ad arbitrio nella cubica (**).

5. Se prendiamo un sistema Σ di generatrici dell'iperboloide I ed un

(*) Cioè: congiungendo uno dei punti $a_1 b_1 c_1 d_1$ con uno dei punti o , la retta congiungente passa anche per uno dei punti $a_2 b_2 c_2 d_2$.

(**) CREMONA, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, n.º 149.

sistema Σ' d'un altro iperboloide I' , e se consideriamo due generatrici che si segano come corrispondenti, i due sistemi entrano evidentemente in una corrispondenza generale del secondo grado. Le quattro generatrici di Σ che toccano I' e quelle di Σ' che toccano I rappresentano gli elementi di diramazione; dunque:

Il rapporto anarmonico delle quattro generatrici appartenenti allo stesso sistema di un iperboloide, che toccano un altro iperboloide, è eguale al rapporto anarmonico delle quattro generatrici appartenenti ad uno stesso sistema del secondo iperboloide, che toccano il primo.

6. Assumiamo due rette bisecanti una curva gobba del quart'ordine e prima specie, e consideriamole come assi di due fasci i cui piani corrispondenti si seghino sulla curva. La corrispondenza è del secondo grado, e così otteniamo il teorema (*):

Il rapporto anarmonico dei quattro piani tangenti, che si possono condurre ad una curva gobba del quart'ordine e prima specie per qualunque retta bisecante è costante.

Il valore di questo rapporto è eguale al rapporto anarmonico dei quattro piani passanti per una tangente della curva e pei quattro vertici del tetraedro conjugato a sè stesso, rispetto ad ogni superficie del secondo grado passante per la curva. Difatti, questi piani, essendo piani tangenti ai quattro coni di secondo grado passanti per la curva, sono i quattro piani che per la tangente nominata si possono condurre a toccare di nuovo la curva gobba altrove.

Milano, marzo 1871.

(*) CREMONA, *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du 3° ordre*, n.° 161 e 162.

Détermination des plans osculateurs et des rayons de courbure en un point multiple d'une courbe gauche (*).

(par L. PAINVIN, prof. à Lyon.)

1. Le point multiple étant pris pour origine des coordonnées, les équations des deux surfaces qui déterminent la courbe gauche considérée pourront s'écrire :

$$(\Delta) \begin{cases} S = \phi_p(x, y, z) + \phi_{p+1}(x, y, z) + \phi_{p+2}(x, y, z) + \dots = 0, \\ T = \psi_q(x, y, z) + \psi_{q+1}(x, y, z) + \psi_{q+2}(x, y, z) + \dots = 0, \end{cases}$$

les fonctions ϕ_i, ψ_i sont des fonctions homogènes et du degré i par rapport aux variables x, y, z .

Les cônes tangents, au point O , aux surfaces S et T sont respectivement :

$$\phi_p(x, y, z) = 0, \quad \psi_q(x, y, z) = 0;$$

les tangentes inflexionnelles de la première surface relatives au point O sont déterminées par les deux équations

$$\phi_p(x, y, z) = 0, \quad \phi_{p+1}(x, y, z) = 0; \tag{1^\circ}$$

les tangentes inflexionnelles de la deuxième surface relatives au même point O seront données par les équations.

$$\psi_q(x, y, z) = 0, \quad \psi_{q+1}(x, y, z) = 0. \tag{2^\circ}$$

Je ferai encore usage de la notation suivante qui m'a été utile dans un mémoire précédent :

(*) Mémoire présenté à l'Académie des sciences de Paris (séance du 5 avril 1869).

« Si deux courbes C et D passent par l'origine O , je désignerai par

$$N(C, D)$$

« le nombre des points communs à ces deux courbes et coïncidant avec
 « l'origine.

2. La détermination des plans osculateurs au point multiple O de la courbe gauche Δ exige, pour être complète, que l'on examine les trois cas généraux suivants :

- I.^o Les fonctions ϕ_p et ψ_q n'ont pas de facteur rationnel commun ;
- II.^o Les fonctions ϕ_p et ψ_q ont un facteur commun entrant à la même puissance dans les deux fonctions ;
- III.^o Les fonctions ϕ_p et ψ_q ont un facteur commun entrant à des puissances différentes.

Je m'occuperai d'abord, dans une première partie, de la détermination des plans osculateurs ; la recherche des rayons de courbure sera l'objet de la seconde partie.

§ 1. Détermination des plans osculateurs.

1^{er} CAS. *Les fonctions ϕ_p et ψ_q n'ont pas de facteur commun.*

3. Dans ce premier cas, les équations des deux surfaces sont

$$(\Delta) \begin{cases} S = \phi_p(x, y, z) + \phi_{p+1}(x, y, z) + \phi_{p+2}(x, y, z) + \dots = 0, \\ T = \psi_q(x, y, z) + \psi_{q+1}(x, y, z) + \psi_{q+2}(x, y, z) + \dots = 0. \end{cases} \quad (1)$$

I.^o *Ordre de multiplicité du point O ; nombre des tangentes distinctes.*

Prenons un plan quelconque, passant par l'origine O

$$z = \lambda x + \mu y ; \quad (2)$$

ce plan coupera les surfaces (1) suivant des courbes ayant pour projections respectives :

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \phi_p(x, y, \lambda x + \mu y) + \phi_{p+1}(x, y, \lambda x + \mu y) + \\ &\quad + \phi_{p+2}(x, y, \lambda x + \mu y) + \dots = 0, \\ T_1 &= \psi_q(x, y, \lambda x + \mu y) + \psi_{q+1}(x, y, \lambda x + \mu y) + \\ &\quad + \psi_{q+2}(x, y, \lambda x + \mu y) + \dots = 0 ; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

le nombre des points d'intersection (coïncidant avec l'origine O) du plan (2) avec la courbe gauche Δ est égal au nombre des points coïncidant avec O et communs aux courbes de section de ce plan avec les surfaces (S) et (T); ou, ce qui revient au même, puisque le plan de projection est quelconque, est égal au nombre des points coïncidant avec O et communs aux courbes S_1 et T_1 . Or on a évidemment

$$N(S_1, T_1) = pq;$$

le point O est donc un point multiple d'ordre pq pour la courbe gauche Δ .

Cherchons maintenant les tangentes aux diverses branches de la courbe qui passent par le point O .

Soit

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, \tag{4}$$

les équations d'une de ces tangentes; un plan, passant par cette droite, devra rencontrer la courbe gauche en $(pq + 1)$ points, au moins, coïncidant avec O ; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les courbes S_1 et T_1 aient $(pq + 1)$ points communs et coïncidant avec l'origine. Mais la droite (4) doit toucher les sections faites par le plan (2) dans les surfaces S et T ; et, par suite, la projection de cette droite doit toucher les deux courbes S_1 et T_1 ; on a ainsi les équations de condition

$$\phi_p(\alpha, \beta, \lambda\alpha + \mu\beta) = 0, \quad \psi_q(\alpha, \beta, \lambda\alpha + \mu\beta) = 0.$$

Or le plan (2) passant par la droite (4), on a la relation

$$\lambda\alpha + \mu\beta = \gamma; \tag{5}$$

les deux équations qui précèdent deviennent alors

$$\left. \begin{aligned} \phi_p(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \psi_q(\alpha, \beta, \gamma) &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

Il y a donc pq branches (réelles ou imaginaires) passant par le point O ; les tangentes respectives à ces branches sont déterminées par les solutions communes aux deux équations homogènes (6).

4. II.^o Détermination des plans osculateurs.

Soit (α, β, γ) une des solutions du système (6), et Ot la tangente à la branche correspondante; supposons que le plan (2) passe par cette droite, de sorte qu'on a la relation (5). Le plan sécant coupera les surfaces S et T suivant des courbes qui touchent Ot en O ; les projections S_1 et T_1 de ces courbes seront donc tangentes à la projection $(\beta x - \alpha y = 0)$ de la droite (4); d'après cela on pourra poser les identités

$$\left. \begin{aligned} \phi_p(x, y, \lambda x + \mu y) &= (\beta x - \alpha y) \phi_{p-1}(x, y), \\ \psi_q(x, y, \lambda x + \mu y) &= (\beta x - \alpha y) \psi_{q-1}(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Les équations (3) des courbes S_1 et T_1 s'écriront alors:

$$\left. \begin{aligned} S'_1 &= (\beta x - \alpha y) \phi_{p-1}(x, y) + \phi_{p+1}(x, y, \lambda x + \mu y) + \\ &\quad + \phi_{p+2}(x, y, \lambda x + \mu y) + \dots = 0, \\ T'_1 &= (\beta x - \alpha y) \psi_{q-1}(x, y) + \psi_{q+1}(x, y, \lambda x + \mu y) + \\ &\quad + \psi_{q+2}(x, y, \lambda x + \mu y) + \dots = 0; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

pour connaître exactement le nombre des points coïncidant avec O et communs aux deux courbes S'_1 et T'_1 , nous formerons la combinaison

$$\Sigma = \psi_{q-1} \cdot S'_1 - \phi_{p-1} \cdot T'_1 = 0. \quad (9)$$

Or, d'après l'équation (9), on a visiblement

$$N(S'_1, T'_1) = N(S'_1, \Sigma) - N(S'_1, \phi_{p-1}); \quad (10)$$

d'ailleurs la courbe ϕ_{p-1} est un système de $(p-1)$ droites passant par l'origine, et chacune de ces droites rencontre la courbe S'_1 en $(p+1)$ points coïncidant avec O ; on a donc

$$N(S'_1, \phi_{p-1}) = (p-1)(p+1).$$

L'origine est un point multiple d'ordre $(p+q)$ pour la courbe Σ , et, si les arbitraires λ et μ ne sont assujetties qu'à vérifier la relation (5), on a

$$N(S'_1, \Sigma) = p(p+q),$$

car les courbes S'_1 et Σ n'ont pas de tangentes communes en O . Il résulte de ces valeurs

$$N(S'_1, T'_1) = p(p+q) - (p^2 - 1) = pq + 1.$$

Ainsi, un plan quelconque, passant par la tangente Ot , rencontre la courbe gauche en $(pq+1)$ points coïncidant avec O .

Pour que le plan sécant considéré soit osculateur à la branche de courbe, il faut et il suffit qu'il rencontre la courbe gauche en $(pq+2)$ points coïncidant avec O ; pour qu'il en soit ainsi, il faut que les courbes S'_1 et T'_1 aient $(pq+2)$ points communs coïncidant avec O , ou, ce qui revient au même, que les courbes S'_1 et Σ aient plus de $p(p+q)$ points communs en O . Pour cela, il faut qu'une des tangentes à S'_1 en O touche également en O la courbe Σ , et cette tangente devra être la droite $\beta x - \alpha y = 0$, puisqu'il s'agit des points infiniment voisins de la direction (4). Ainsi, en définitive, l'ensemble des termes de degré $(p+q)$ dans l'équation (9) de Σ doit être divisible par $(\beta x - \alpha y)$, c'est-à-dire que cette expression doit s'annuler lorsqu'on y fait $x = \alpha$, $y = \beta$; on trouve alors l'équation de condition

$$\phi_{p+1}(\alpha, \beta, \lambda\alpha + \mu\beta) \cdot \psi_{q-1}(\alpha, \beta) - \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \lambda\alpha + \mu\beta) \cdot \phi_{p-1}(\alpha, \beta) = 0;$$
 en ayant égard à la relation (5), cette égalité devient:

$$\phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \psi_{q-1}(\alpha, \beta) - \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \phi_{p-1}(\alpha, \beta) = 0. \quad (11)$$

Pour déterminer $\phi_{p-1}(\alpha, \beta)$, différencions la première des identités (7) par rapport à x , par exemple, il vient:

$$\frac{\partial \phi_p(x, y, \lambda x + \mu y)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi_p(x, y, \lambda x + \mu y)}{\partial z} = \beta \phi_{p-1}(x, y) + (\beta x - \alpha y) \frac{\partial \phi_{p-1}(x, y)}{\partial x};$$

puis faisant $x = \alpha$, $y = \beta$, et ayant égard à la relation (5), on a

$$\beta \phi_{p-1}(\alpha, \beta) = \frac{\partial \phi_p(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial \phi_p(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \gamma}; \quad (12)$$

on trouvera de la même manière:

$$\beta \psi_{q-1}(\alpha, \beta) = \frac{\partial \psi_q(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial \psi_q(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \gamma}; \quad (12^{\text{bis}})$$

l'égalité (11) devient alors

$$\phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \left[\frac{\partial \psi_q}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial \psi_q}{\partial \gamma} \right] = \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \left[\frac{\partial \phi_p}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial \phi_p}{\partial \gamma} \right]. \quad (13)$$

L'équation du plan osculateur est maintenant facile à déterminer; on a, en effet

$$\lambda x + \mu y = z,$$

$$\lambda \alpha + \mu \beta = \gamma;$$

on déduit de là par l'élimination de μ :

$$\lambda(\beta x - \alpha y) = \beta z - \gamma y;$$

transportons cette valeur de λ dans l'équation (13), il vient:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \left[(\beta x - \alpha y) \frac{\partial \psi_q}{\partial \alpha} + (\beta z - \gamma y) \frac{\partial \psi_q}{\partial \gamma} \right] = \\ = \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \left[(\beta x - \alpha y) \frac{\partial \varphi_p}{\partial \alpha} + (\beta z - \gamma y) \frac{\partial \varphi_p}{\partial \gamma} \right]. \end{aligned} \right\} (14)$$

Mais (α, β, γ) est une solution des équations (6), lesquelles peuvent s'écrire:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \frac{\partial \varphi_p}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \varphi_p}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial \varphi_p}{\partial \gamma} = 0, \\ \alpha \frac{\partial \psi_q}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \psi_q}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial \psi_q}{\partial \gamma} = 0; \end{aligned} \right\} (15)$$

en ayant égard aux égalités (15), l'équation (14) prend la forme définitive:

$$\Phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \left[x \frac{\partial \psi_q}{\partial \alpha} + y \frac{\partial \psi_q}{\partial \beta} + z \frac{\partial \psi_q}{\partial \gamma} \right] = \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \left[x \frac{\partial \varphi_p}{\partial \alpha} + y \frac{\partial \varphi_p}{\partial \beta} + z \frac{\partial \varphi_p}{\partial \gamma} \right]. (16)$$

On a ainsi un premier théorème facile à énoncer.

5. Pour compléter cette première recherche, il nous faut ajouter plusieurs remarques relatives aux divers cas particuliers qui peuvent se présenter.

REMARQUE I. La droite (α, β, γ) peut être une tangente inflexionnelle de l'une seulement des surfaces S et T .

Si cette droite est une tangente inflexionnelle de la première surface, par exemple, on aura

$$\Phi_p(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \Phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

l'équation (16) de plan osculateur devient alors

$$x \frac{\partial \varphi_p}{\partial \alpha} + y \frac{\partial \varphi_p}{\partial \beta} + z \frac{\partial \varphi_p}{\partial \gamma} = 0,$$

c'est-à-dire que le plan osculateur est tangent au cône Φ_p , lequel est le cône tangent à la surface sur laquelle se trouve la tangente inflexionnelle.

6. REMARQUE II. La droite (α, β, γ) peut être une génératrice double pour un seulement des cônes Φ_p ou ψ_q .

Si la droite considérée est une génératrice double pour le cône ψ_q par exemple, on aura

$$\frac{\partial \psi_q}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \psi_q}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \psi_q}{\partial \gamma} = 0.$$

L'équation (16) du plan osculateur devient alors

$$x \frac{\partial \varphi_p}{\partial \alpha} + y \frac{\partial \varphi_p}{\partial \beta} + z \frac{\partial \varphi_p}{\partial \gamma} = 0,$$

c'est-à-dire que le plan osculateur est tangent au cône auquel n'appartient pas la génératrice double.

7. REMARQUE III. La droite (α, β, γ) peut être une tangente inflexionnelle pour les deux surfaces S et T .

Dans cette hypothèse, on a, outre les relations (6) n.° [3], les deux conditions :

$$\left. \begin{aligned} \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

l'équation (16) du plan osculateur se réduit à une identité; il faut alors reprendre en partie l'analyse du n.° [4].

Les termes du degré le moins élevé, dans l'équation (9), s'annulent pour $x = \alpha, y = \beta$; on peut alors poser l'identité :

$$\left. \begin{aligned} \phi_{p+1}(x, y, \lambda x + \mu y) \cdot \psi_{q-1}(x, y) - \psi_{q+1}(x, y, \lambda x + \mu y) \cdot \phi_{p-1}(x, y) &= \\ &= (\beta x - \alpha y) \theta_{p+q-1}(x, y); \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

et au lieu de la courbe (9) nous aurons la suivante :

$$\Sigma_1 = (\beta x - \alpha y) \theta_{p+q-1}(x, y) + [\phi_{p+2} \cdot \psi_{q-1}(x, y) - \psi_{q+2} \cdot \phi_{p-1}(x, y)] + \dots = 0. \quad (19)$$

On a toujours

$$N(S'_1, T'_1) = N(S_1, \Sigma_1) - N(S'_1, \phi_{p-1}) = N(S'_1, \Sigma_1) - (p-1)(p+1), \quad (20)$$

les courbes S'_1 et T'_1 étant définies par les équations (8) n.° [4]. Pour déterminer $N(S'_1, \Sigma_1)$ il faut former l'équation

$$\Sigma_2 = \Sigma_1 \cdot \phi_{p-1}(x, y) - S'_1 \cdot \theta_{p+q-1}(x, y) = 0; \quad (21)$$

on a d'après cette équation

$$N(S'_1, \Sigma_1) = N(S'_1, \Sigma_2) - N(S'_1, \phi_{p-1}).$$

L'équation (21) donne encore

$$N(S'_1, \phi_{p-1}) = (p-1)(p+1),$$

$$N(S'_1, \Sigma_2) = p(2p+q);$$

d'où il résulte

$$N(S'_1, T'_1) = p(2p+q) - 2(p^2-1) = pq + 2; \quad (22)$$

c'est-à-dire qu'un plan quelconque, passant par la droite (α, β, γ) , rencontre la courbe gauche en $(pq+2)$ points coïncidant avec le point O .

Pour que ce plan devienne osculateur, il faut que les courbes S'_1 et Σ_2 aient un contact effectif d'un ordre plus élevé suivant la direction $\beta x - \alpha y = 0$, c'est-à-dire que l'ensemble des termes du degré $(2p+q)$ dans l'équation (21) de Σ_2 soit divisible par $(\beta x - \alpha y)$, c'est-à-dire enfin que cette expression s'annule pour $x = \alpha, y = \beta$; en ayant égard aux relations (5) et (17), on trouve

$$\phi_{p+2}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \psi_{q-1}(\alpha, \beta) - \psi_{q+2}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \phi_{p-1}(\alpha, \beta) = 0. \quad (23)$$

D'ailleurs les valeurs de $\psi_{q-1}(\alpha, \beta)$ et $\phi_{p-1}(\alpha, \beta)$ sont celles qui sont fournies par les égalités (12) et (12^{bis}); l'équation (23) devient alors

$$\phi_{p+2}(\alpha, \beta, \gamma) \left[\frac{\partial \psi_q}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial \psi_q}{\partial \gamma} \right] = \psi_{q+2}(\alpha, \beta, \gamma) \left[\frac{\partial \phi_p}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial \phi_p}{\partial \gamma} \right]. \quad (24)$$

En éliminant λ et μ entre l'égalité (24) et les équations

$$\lambda x + \mu y = z, \quad \lambda \alpha + \mu \beta = \gamma,$$

on trouve pour l'équation du plan osculateur dans le cas particulier en question:

$$\phi_{p+2}(\alpha, \beta, \gamma) \left[x \frac{\partial \psi_q}{\partial \alpha} + y \frac{\partial \psi_q}{\partial \beta} + z \frac{\partial \psi_q}{\partial \gamma} \right] = \psi_{q+2}(\alpha, \beta, \gamma) \left[x \frac{\partial \phi_p}{\partial \alpha} + y \frac{\partial \phi_p}{\partial \beta} + z \frac{\partial \phi_p}{\partial \gamma} \right]. \quad (16^{\text{bis}})$$

Dans le cas actuel, le plan osculateur rencontre la courbe gauche en $(pq+3)$ points coïncidant avec O ; il peut arriver que le contact effectif soit d'un ordre supérieur au troisième.

8. REMARQUE IV. La droite (α, β, γ) peut être une génératrice double pour les deux cônes ϕ_p et ψ_q .

Il nous faut, pour ce cas, reprendre toute l'analyse du n.º [4].

D'abord, puisque la droite (α, β, γ) est une génératrice double pour chacun des cônes ϕ_p et ψ_q , on a les équations de condition:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_p}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \phi_p}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \phi_p}{\partial \gamma} = 0; \\ \frac{\partial \psi_q}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \psi_q}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \psi_q}{\partial \gamma} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

en égard aux relations (25), les égalités (12) et (12^{bis}) donnent

$$\phi_{p-1}(\alpha, \beta) = 0, \quad \psi_{q-1}(\alpha, \beta) = 0;$$

il résulte de là les identités :

$$\left. \begin{aligned} \phi_p(x, y, \lambda x + \mu y) &= (\beta x - \alpha y)^2 \phi_{p-2}(x, y), \\ \psi_q(x, y, \lambda x - \mu y) &= (\beta x - \alpha y)^2 \psi_{q-2}(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Si l'on coupe les surfaces (S) et (T), (1) n.º [3], par le plan

$$z = \lambda x + \mu y, \quad (27)$$

les projections des sections sont

$$\left. \begin{aligned} S_2 &= (\beta x - \alpha y)^2 \phi_{p-2}(x, y) + \phi_{p+1}(x, y, \lambda x + \mu y) + \dots = 0, \\ T_2 &= (\beta x - \alpha y)^2 \psi_{q-2}(x, y) + \psi_{q+1}(x, y, \lambda x + \mu y) + \dots = 0; \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

on a toujours l'équation de condition

$$\lambda \alpha + \mu \beta = \gamma. \quad (27^{\text{bis}})$$

Pour déterminer le nombre des points communs à S_2 et T_2 et coïncidant avec O , formons la combinaison

$$\Sigma_2 = S_2 \cdot \psi_{q-2} - T_2 \cdot \phi_{p-2} = 0. \quad (29)$$

D'après cette équation on a

$$N(S_2, T_2) = N(S_2, \Sigma_2) - N(S_2, \phi_{p-2});$$

mais il est visible que

$$\begin{aligned} N(S_2, \phi_{p-2}) &= (p-2)(p+1), \\ N(S_2, \Sigma_2) &= p(p+q-1); \end{aligned}$$

de là il résulte :

$$N(S_2, T_2) = p(p+q-1) - (p-2)(p+1) = pq + 2. \quad (30)$$

Ainsi, un plan quelconque, passant par la droite (α, β, γ) , rencontre la courbe gauche en $(pq + 2)$ points coïncidant avec le point O .

Pour que le plan devienne osculateur, il faut que l'ensemble des termes du moindre degré, dans l'équation (29) de Σ_2 soit divisible par $(\beta x - \alpha y)$, c'est-à-dire que cette expression s'annule pour $x = \alpha, y = \beta$; ou trouve ainsi, en ayant égard à la relation (27^{bis}):

$$\phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \psi_{q-2}(\alpha, \beta) - \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \phi_{p-2}(\alpha, \beta) = 0.$$

Pour déterminer les quantités $\phi_{p-2}(\alpha, \beta), \psi_{q-2}(\alpha, \beta)$, il faut différentier deux fois, par rapport à x par exemple, les identités (26), puis faire $x = \alpha$,

$y = \beta$. Si l'on prend la première, on a

$$\frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x \partial z} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial z^2} = 2\beta \phi_{p-2}(x, y) + 2(\beta x - \alpha y) \frac{\partial \varphi_{p-2}}{\partial x} + (\beta x - \alpha y)^2 \frac{\partial^2 \varphi_{p-2}}{\partial x^2};$$

faisant $x = \alpha$, $y = \beta$, et ayant égard à la relation (27^{bis}), on trouve

$$2\beta \phi_{p-2}(\alpha, \beta) = \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x \partial \gamma} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial \gamma^2}; \quad (32)$$

on aura de même

$$2\beta \psi_{q-2}(\alpha, \beta) = \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial x \partial \gamma} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \gamma^2}. \quad (32^{\text{bis}})$$

L'égalité (31) devient alors

$$\left. \begin{aligned} \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \left[\frac{\partial^2 \psi_q}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial x \partial \gamma} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \gamma^2} \right] = \\ = \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \left[\frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x \partial \gamma} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial \gamma^2} \right]; \end{aligned} \right\} (33)$$

en éliminant λ et μ entre cette dernière équation et les suivantes

$$\lambda x + \mu y = z, \quad \lambda \alpha + \mu \beta = \gamma,$$

on trouve

$$\left. \begin{aligned} \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \left[(\alpha y - \beta x)^2 \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial x^2} + 2(\alpha y - \beta x)(\gamma y - \beta z) \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial x \partial \gamma} + (\gamma y - \beta z)^2 \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \gamma^2} \right] \\ - \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \left[(\alpha y - \beta x)^2 \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x^2} + 2(\alpha y - \beta x)(\gamma y - \beta z) \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x \partial \gamma} + (\gamma y - \beta z)^2 \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial \gamma^2} \right] \end{aligned} \right\} = 0. \quad (34)$$

Si l'on a égard aux relations suivantes, qui ne sont que les égalités (25) mises sous une autre forme:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial \alpha^2} + \beta \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial \alpha \partial \beta} + \gamma \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial \alpha \partial \gamma} = 0, \quad \alpha \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \alpha^2} + \beta \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \alpha \partial \beta} + \gamma \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \alpha \partial \gamma} = 0, \\ \alpha \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial \beta \partial \alpha} + \beta \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial \beta^2} + \gamma \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial \beta \partial \gamma} = 0, \quad \alpha \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \beta \partial \alpha} + \beta \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \beta^2} + \gamma \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \beta \partial \gamma} = 0, \\ \alpha \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial \gamma \partial \alpha} + \beta \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial \gamma \partial \beta} + \gamma \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial \gamma^2} = 0, \quad \alpha \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \gamma \partial \alpha} + \beta \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \gamma \partial \beta} + \gamma \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \gamma^2} = 0, \end{aligned} \right\} (35)$$

l'équation (34) pourra se mettre sous la forme définitive:

$$\left. \begin{aligned} & \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \left[x^2 \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \alpha^2} + y^2 \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \beta^2} + z^2 \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \gamma^2} + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + 2xy \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \alpha \partial \beta} + 2xz \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \alpha \partial \gamma} + 2yz \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \beta \partial \gamma} \right] \\ - \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \left[x^2 \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial \alpha^2} + y^2 \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial \beta^2} + z^2 \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial \gamma^2} + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + 2xy \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial \alpha \partial \beta} + 2xz \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial \alpha \partial \gamma} + 2yz \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial \beta \partial \gamma} \right] \end{aligned} \right\} = 0. \quad (16^{\text{ter}})$$

Ainsi, dans le cas que nous venons d'examiner, il y a deux plans osculateurs correspondant aux branches de la courbe qui touchent la droite (α, β, γ) ; ces deux plans sont définis par l'équation (16^{ter}); chacun d'eux rencontre la courbe gauche en $(pq + 3)$ points coïncidant avec le point O .

Les fonctions du second degré qui figurent dans l'équation (16^{ter}) déterminent respectivement les plans tangents aux cônes ϕ_p et ψ_q suivant l'arête double considérée.

Si dans le cas actuel la droite (α, β, γ) était en même temps une tangente inflexionnelle pour les deux surfaces S et T , il faudrait remplacer dans l'équation (16^{ter}) $\phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma)$ par $\phi_{p+2}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\psi_{q+2}(\alpha, \beta, \gamma)$; on établirait ce fait en modifiant l'analyse précédente par un procédé semblable à celui qui a été exposé au n.^o [7].

2^{ème} CAS. *Les fonctions ϕ_p et ψ_q ont un facteur commun entrant à la même puissance dans les deux fonctions.*

9. D'après l'hypothèse admise, les équations des deux surfaces se présenteront sous la forme:

$$(\Delta) \left\{ \begin{aligned} S &= \phi_i(x, y, z) \cdot [\theta(x, y, z)]^k + \phi_{p+1}(x, y, z) + \phi_{p+2}(x, y, z) + \dots = 0, \\ T &= \psi_j(x, y, z) \cdot [\theta(x, y, z)]^k + \psi_{q+1}(x, y, z) + \psi_{q+2}(x, y, z) + \dots = 0; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$\theta(x, y, z)$ est une fonction homogène que nous supposerons de degré r ; on aura par conséquent

$$\left. \begin{aligned} i + kr &= p, \\ j + kr &= q. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

1.^o *Ordre de multiplicité du point O ; nombre des tangentes distinctes.*

Prenons un plan quelconque passant par le point O :

$$z = \lambda x + \mu; \quad (3)$$

ce plan coupera les surfaces S et T suivant des courbes ayant pour projections respectives:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \phi_i(x, y, \lambda x + \mu y) \cdot [\theta(x, y, \lambda x + \mu y)]^k + \phi_{p+1}(x, y, \lambda x + \mu y) + \dots = 0, \\ T_1 &= \psi_j(x, y, \lambda x + \mu y) [\theta(x, y, \lambda x + \mu y)]^k + \psi_{q+1}(x, y, \lambda x + \mu y) + \dots = 0. \end{aligned} \right\} (4)$$

Le nombre des points d'intersection (coïncidant avec l'origine O) du plan (3) avec la courbe gauche Δ , est égal au nombre des points coïncidant avec O et communs aux courbes de section; or ce dernier nombre est égal au nombre des points coïncidant avec O et communs aux courbes S_1 et T_1 , puisque le plan sécant peut être supposé non parallèle à l'axe des z .

Pour reconnaître le nombre des points communs à S_1 et T_1 et coïncidant avec l'origine, je formerai la combinaison

$$\Sigma = S_1 \cdot \psi_j - T_1 \cdot \phi_i = 0. \quad (5)$$

D'après l'équation (5), on a

$$N(S_1, T_1) = N(S_1, \Sigma) - N(S_1, \phi_i); \quad (6)$$

or, il est visible que

$$\begin{aligned} N(S_1, \phi_i) &= i(p+1), \\ N(S_1, \Sigma) &= p(p+j+1); \end{aligned}$$

d'où il résulte, eu égard aux relations (2):

$$N(S_1, T_1) = ij + kr(i+j+kr+1) = pq + kr.$$

Donc le point O est un point multiple d'ordre

$$P = ij + kr(i+j+kr+1) = pq + kr \quad (7)$$

pour la courbe gauche Δ .

Cherchons maintenant les tangentes aux diverses branches passant par le point O . Soient les équations d'une de ces tangentes

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}; \quad (8)$$

cette droite doit être telle qu'un plan, passant par elle, doit rencontrer la courbe en $(P + 1)$ points, au moins, coïncidant avec O .

Supposons que le plan (3) passe par cette droite, on aura l'équation de condition

$$\lambda\alpha + \mu\beta = \gamma, \tag{9}$$

et les courbes S_1 et T_1 devront avoir $(P + 1)$ points communs coïncidant avec O . Mais, puisque la droite (8) est tangente à la courbe gauche, la projection $(\beta x - \alpha y = 0)$ de cette droite devra toucher les deux courbes S_1 et T_1 ; et, pour que l'ordre de leur contact effectif augmente, il faudra que cette droite soit une des tangentes en O pour la courbe Σ (5); en ayant égard à la relation (9), on est conduit aux relations :

$$\left. \begin{aligned} \phi_i(\alpha, \beta, \gamma)[\theta(\alpha, \beta, \gamma)]^k &= 0, \\ \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma)\psi_j(\alpha, \beta, \gamma) - \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

Le système (10) donne lieu aux systèmes suivants :

$$\left. \begin{aligned} \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) &= 0; \end{aligned} \right\} \tag{11, 1°}$$

$$\left. \begin{aligned} \theta(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma)\psi_j(\alpha, \beta, \gamma) - \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma)\phi_i(\alpha, \beta, \gamma) &= 0; \end{aligned} \right\} \tag{11, 2°}$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{11, 3°}$$

Or le troisième système, qui donne des tangentes inflexionnelles de la surface S , ne saurait convenir à la question; car la droite $\beta x - \alpha y = 0$ touche la courbe S_1 , mais elle ne touche pas la courbe T_1 , puisqu'on suppose $\theta(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\psi_j(\alpha, \beta, \gamma)$ différents de zéro; les deux courbes S_1 et T_1 n'auraient donc pas un nombre de points communs et coïncidant avec O supérieur à P ; par conséquent, la droite (α, β, γ) ne saurait être tangente à la courbe gauche.

Les tangentes aux diverses branches de la courbe, qui passent par le point O , seront donc déterminées par les deux systèmes d'équations :

$$\left. \begin{aligned} \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) &= 0; \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \theta(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) - \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Par conséquent, il y a

$$P' = ij + r(i + j + kr + 1) \tag{14}$$

tangentes distinctes pour les branches (réelles ou imaginaires) passant par le point O . Les ij tangentes définies par le système (12) correspondent à des branches simples; pour les $r(i + j + kr + 1)$ tangentes définies par le système (13), chacune d'elles résulte de la superposition de k tangentes et est touchée par k branches (réelles ou imaginaires) de la courbe.

Cette conclusion résulte de la comparaison des formules (7) et (14).

10. II.^o *Détermination des plans osculateurs.*

Pour les branches de la courbe dont les tangentes sont définies par les équations (12), le plan osculateur se déterminera à l'aide la formule (16) n.^o [4]; nous n'avons donc à nous occuper que des branches dont les tangentes sont définies par les équations (13).

Soit (α, β, γ) une solution du système (13), savoir

$$\left. \begin{aligned} \theta(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) - \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) &= 0; \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

admettons que le plan (3) passe par la droite

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, \tag{15}$$

de sorte qu'on a l'équation de condition

$$\lambda\alpha + \mu\beta = \gamma. \tag{16}$$

Le plan sécant coupe les surfaces S et T suivant des courbes qui touchent la droite (15) en O ; la projections S_1 et T_1 de ces courbes devront donc toucher la projection $\beta x - \alpha y = 0$ de cette droite; d'après les égalités (13) et (16) on pourra poser les identités

$$\left. \begin{aligned} \theta(x, y, \lambda x + \mu y) &= (\beta x - \alpha y) \cdot f(x, y), \\ \phi_{p+1}(x, y, \lambda x + \mu y) \cdot \psi_j(x, y, \lambda x + \mu y) - \\ - \psi_{q+1}(x, y, \lambda x + \mu y) \cdot \phi_i(x, y, \lambda x + \mu y) &= (\beta x - \alpha y) \cdot F(x, y); \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

les équations des courbes S_1 et T_1 s'écriront alors :

$$\left. \begin{aligned} S' &= \phi_i(x, y, \lambda x + \mu y) \cdot [f(x, y)]^k (\beta x - \alpha y)^k + \\ &\quad + \phi_{p+1}(x, y, \lambda x + \mu y) + \dots = 0, \\ T' &= \psi_j(x, y, \lambda x + \mu y) \cdot [f(x, y)]^k (\beta x - \alpha y)^k + \\ &\quad + \psi_{q+1}(x, y, \lambda x + \mu y) + \dots = 0. \end{aligned} \right\} (18)$$

Formons la combinaison

$$\Sigma' = S'_1 \cdot \psi_j - T'_1 \cdot \phi_i = 0, \quad (19)$$

d'où il suit

$$N(S'_1, T'_1) = N(S'_1, \Sigma') - N(S'_1, \phi_i); \quad (20)$$

et il est visible d'abord que

$$N(S'_1, \phi_i) = i(p+1). \quad (20^{bis})$$

Pour déterminer le nombre des points communs à S'_1 et Σ' et coïncidant avec O , formons la nouvelle combinaison

$$\Sigma'' = \phi_i(x, y, \lambda x + \mu y) [f(x, y)]^k (\beta x - \alpha y)^k \cdot \Sigma' - F(x, y) \cdot S'_1 = 0 \quad (21)$$

d'après laquelle on a

$$N(S'_1, \Sigma') = N(\Sigma', \Sigma'') - N[\Sigma', F(x, y)]; \quad (22)$$

d'ailleurs $F(x, y) = 0$ représente $(p+j)$ droites passant par l'origine; par suite

$$N[\Sigma', F(x, y)] = (p+j)(p+j+2); \quad (22^{bis})$$

et l'on a évidemment

$$N(\Sigma', \Sigma'') = (p+j+1)(2p+j+1), \quad (22^{ter})$$

puisque $(2p+j+1)$ est le degré de l'ensemble des termes du moindre degré dans l'équation (21) de Σ'' .

Eu égard aux égalités (20), (20^{bis}), (22), (22^{bis}), (22^{ter}), on trouve

$$N(S'_1, T'_1) = ij + kr(i+j+kr+1) + 1 = P+1; \quad (23)$$

donc un plan quelconque, passant par la tangente (α, β, γ) , rencontre la courbe en $(P+1)$ points confondus avec le point O .

Ce qui confirme parfaitement les résultats déjà énoncés.

11. Pour que le plan sécant considéré soit osculateur, il faut qu'il rencontre la courbe gauche en $(P+2)$ points, au moins, coïncidant avec

le point O ; or, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la droite $\beta x - \alpha y = 0$ soit tangente à la courbe Σ'' , c'est-à-dire que l'ensemble des termes du degré le moins élevé dans Σ'' , (21), s'annule pour $x = \alpha$, $y = \beta$.

Pour écrire l'équation de condition correspondante, nous aurons à distinguer les deux hypothèses:

$$k > 1, \quad k = 1.$$

1^{ère} hypothèse:

$$k > 1;$$

on a

$$F(\alpha, \beta) = 0;$$

j'admets que $\phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma)$ est différent de zéro.

2^{ème} hypothèse:

$$k = 1;$$

on a

$$\left. \begin{aligned} f(\alpha, \beta) \cdot \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) [\phi_{p+2}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) - \\ - \psi_{q+2}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \phi_i(\alpha, \beta, \gamma)] - \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot F(\alpha, \beta) = 0. \end{aligned} \right\} (25)$$

Pour déterminer les quantités $f(\alpha, \beta)$, $F(\alpha, \beta)$, différencions les identités (17) par rapport à x par exemple; après avoir posé

$$z(x, y, z) = \phi_{p+1}(x, y, z) \cdot \psi_j(x, y, z) - \psi_{q+1}(x, y, z) \cdot \phi_i(x, y, z), \quad (26)$$

où z est une fonction homogène du degré $(i + j + kr + 1)$, on trouve

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} = \beta f(x, y) + (\beta x - \alpha y) \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial z}{\partial z} = \beta F(x, y) + (\beta x - \alpha y) \frac{\partial F}{\partial x};$$

faisant alors $x = \alpha$, $y = \beta$, et ayant égard à la relation (16), il vient:

$$\beta F(\alpha, \beta) = \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial z}{\partial \gamma}; \quad (27)$$

$$\beta f(\alpha, \beta) = \frac{\partial \theta}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \gamma}. \quad (27^{\text{bis}})$$

Les relations (24) et (25) deviennent alors:

$$k > 1: \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial z}{\partial \gamma} = 0; \quad (28)$$

$$k=1; \left. \begin{aligned} & \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} \right) \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) [\phi_{p+2}(\alpha, \beta, \gamma) \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) - \\ & - \psi_{q+2}(\alpha, \beta, \gamma) \phi_i(\alpha, \beta, \gamma)] = \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right). \end{aligned} \right\} (29)$$

Eliminons λ et μ entre ces égalités et les suivantes

$$\lambda x + \mu y = z, \quad \lambda \alpha + \mu \beta = \gamma,$$

puis remarquons qu'on a, d'après les égalités (13) et la notation (26):

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} &= 0, \\ \alpha \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial x}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial x}{\partial \gamma} &= 0; \end{aligned}$$

on trouve pour l'équation du plan osculateur:

$$\text{si } k > 1, \quad x \frac{\partial x}{\partial \alpha} + y \frac{\partial x}{\partial \beta} + z \frac{\partial x}{\partial \gamma} = 0; \quad (30)$$

$$\text{si } k = 1, \quad \left. \begin{aligned} & \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) [\phi_{p+2} \cdot \psi_j - \psi_{q+2} \cdot \phi_i] \left[x \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + y \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + z \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} \right] = \\ & = \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \left[x \frac{\partial x}{\partial \alpha} + y \frac{\partial x}{\partial \beta} + z \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right]. \end{aligned} \right\} (31)$$

Nous avons ainsi un second théorème facile à énoncer.

12. REMARQUE. Dans l'hypothèse où k est supérieur à l'unité, nous n'avons trouvé qu'un seul plan osculateur pour les k branches qui touchent la tangente considérée; mais il peut arriver qu'il y ait plus d'un plan osculateur, et cela se présentera si $\phi_{p-1}(x, y, \lambda x + \mu y)$ admet un certain nombre de fois le facteur $(\beta x - \alpha y)$, c'est-à-dire si (α, β, γ) est une tangente inflexionnelle des surfaces S et T . Je laisserai de côté ce cas particulier, ainsi que plusieurs autres qui peuvent se présenter, par exemple: le cône $\theta(x, y, z)$ peut avoir des génératrices multiples; les cônes θ, ϕ_i, ϕ_j , peuvent avoir des génératrices communes; ces génératrices peuvent être des tangentes inflexionnelles; etc., etc...

La méthode que j'ai adoptée est d'ailleurs applicable dans tous les cas; seulement il y aura à faire un plus grand nombre de combinaisons des courbes S_1 et T_1, Σ, \dots ; j'ai donné, dans le premier cas, des exemples de la marche qu'on devra suivre.

3^{ème} CAS. Les fonctions ϕ_p et ψ_q ont un facteur commun entrant à des puissances différentes.

13. D'après l'hypothèse admise, les équations des deux surfaces seront de la forme

$$(\Delta) \left\{ \begin{aligned} S &= \phi_i(x, y, z) \cdot [\theta(x, y, z)]^h + \phi_{p+1}(x, y, z) + \phi_{p+2}(x, y, z) + \dots = 0, \\ T &= \psi_j(x, y, z) [\theta(x, y, z)]^k + \psi_{q+1}(x, y, z) + \psi_{q+2}(x, y, z) + \dots = 0; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$\theta(x, y, z)$ est une fonction homogène que nous supposons de degré r , de sorte qu'on aura

$$\left. \begin{aligned} i + rh &= p, \\ j + rk &= q; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

nous admettons que l'on ait par exemple

$$h > k. \quad (3)$$

I.^o *Ordre de multiplicité du point O; nombre des tangentes distinctes.*

Prenons un plan quelconque passant par le point O

$$z = \lambda x + \mu y; \quad (4)$$

ce plan coupera les surfaces S et T suivant des courbes ayant pour projections respectives :

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \phi_i(x, y, \lambda x + \mu y) [\theta(x, y, \lambda x + \mu y)]^h + \phi_{p+1}(x, y, \lambda x + \mu y) + \dots = 0, \\ T_1 &= \psi_j(x, y, \lambda x + \mu y) [\theta(x, y, \lambda x + \mu y)]^k + \psi_{q+1}(x, y, \lambda x + \mu y) + \dots = 0; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

le nombre des points d'intersection (coïncidant avec l'origine O) du plan (4) avec la courbe Δ est égal au nombre des points coïncidant avec O et communs aux courbes de section; or ce dernier nombre est égal au nombre des points coïncidant avec O et communs aux courbes S_1 et T_1 , puisqu'on peut supposer le plan sécant non parallèle à l'axe Oz .

Pour reconnaître le nombre des points coïncidant avec l'origine et communs aux courbes S_1 et T_1 , je formerai la combinaison

$$\Sigma = S_1 \cdot \psi_j - T_1 \cdot \phi_i \cdot \theta^{h-k} = 0, \quad (6)$$

d'où l'on a

$$N(S_1, T_1) = N(T_1, \Sigma) - N(T_1, \psi_j); \quad (7)$$

mais il est visible que

$$N(T_1, \psi_j) = j(q+1),$$

puisque $\psi_j(x, y, \lambda x + \mu y) = 0$ représente j droites passant par l'origine et tangentes à la courbe T_1 ; on a, en outre

$$N(T_1, \Sigma) = q(p + j + 1),$$

car l'origine est un point multiple d'ordre $(p + j + 1)$ pour la courbe Σ ; il résulte de là, eu égard aux valeurs (2):

$$N(S_1, T_1) = pq + kr = ij + hrj + kr(p + 1).$$

Le point O est donc un point multiple d'ordre

$$P = pq + kr = ij + hrj + kr(p + 1) \quad (8)$$

pour la courbe gauche Δ .

Cherchons maintenant les tangentes aux diverses branches qui passent par le point O .

Soient les équations d'une de ces tangentes

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}; \quad (9)$$

cette droite doit être telle qu'un plan, passant par elle, doit rencontrer la courbe en $(P + 1)$ points, au moins, coïncidant avec O .

Supposons que le plan (4) passe par la droite (9), on aura la condition

$$\lambda\alpha + \mu\beta = \gamma; \quad (10)$$

et les courbes S_1 et T_1 devront avoir $(P + 1)$ points communs et coïncidant avec O .

Pour cela, il faut et il suffit que la droite $\beta x - \alpha y = 0$, tangente aux courbes S_1 et T_1 , touche également la courbe Σ en O ; on a, ainsi eu égard à la relation (10), le système d'équations

$$\psi_j(\alpha, \beta, \gamma) \cdot [\theta(\alpha, \beta, \gamma)]^k = 0,$$

$$\phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) - \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) [\theta(\alpha, \beta, \gamma)]^{h-k} = 0.$$

Ce système d'équations donne lieu aux suivants:

$$\left. \begin{aligned} \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (1^\circ)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \theta(\alpha, \beta, \gamma) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2^\circ)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta(\alpha, \beta, \gamma) &= 0; \\ \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3^\circ)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \psi_{j+1}(\alpha, \beta, \gamma) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4^\circ)$$

Le système (4°) ne saurait convenir à la question; car la droite $\beta x - \alpha y = 0$ touche la courbe T_1 , mais elle ne touche pas la courbe S_1 , puisqu'on suppose $\theta(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\phi_i(\alpha, \beta, \gamma)$ différents de zéro; les deux courbes S_1 et T_1 n'ont donc pas un nombre de points communs et coïncidant avec O supérieur à P ; la droite (α, β, γ) ne saurait donc être une tangente à la courbe gauche.

Ainsi les tangentes aux diverses branches de la courbe qui passent par le point O seront déterminées par les trois systèmes d'équations:

$$\left. \begin{aligned} \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) &= 0; \end{aligned} \right\} (ij) \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \end{aligned} \right\} (rj) \quad (11^{\text{bis}})$$

$$\left. \begin{aligned} \theta(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \end{aligned} \right\} r(p+1). \quad (11^{\text{ter}})$$

Par conséquent il y a

$$P' = ij + rj + r(p+1) \quad (12)$$

tangentes distinctes pour les diverses branches (réelles ou imaginaires) qui passent par le point O .

Si l'on compare les formules (8) et (12), on voit que:

Les ij tangentes, définies par le système (11), sont touchées, chacune, par une seule branche de courbe;

Les rj tangentes, définies par le système (11^{bis}), résultent, chacune, de la superposition de h tangentes; et chacune d'elles est touchée par h branches (réelles ou imaginaires) de la courbe;

Les $r(p+1)$ tangentes définies par le système (11^{ter}), résultent, chacune, de la superposition de k tangentes; et chacune d'elles est touchée par k branches (réelles ou imaginaires) de la courbe.

On suppose $h > k$.

14. II.° Détermination des plans osculateurs.

Pour les branches dont les tangentes sont définies par les équations (11), les plans osculateurs se détermineront à l'aide de la formule (16) n.° [4]; occupons-nous des tangentes définies par le systèmes (11^{bis}) et (11^{ter}).

Soit d'abord (α, β, γ) une des tangentes définies par les équations (11^{bis}), de sorte que

$$\left. \begin{aligned} \theta(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (11^{\text{bis}})$$

admettons que le plan (4) passe par la droite (α, β, γ) , on aura l'équation de condition

$$\lambda\alpha + \mu\beta = \gamma. \quad (13)$$

Le plan sécant coupe les surfaces S et T suivant des courbes qui touchent la droite (α, β, γ) en O ; les projections S_1 et T_1 de ces courbes devront toucher la projection $\beta x - \alpha y = 0$ de cette droite; et, d'après les égalités (11^{bis}) et (13), on aura les identités:

$$\left. \begin{aligned} \theta(x, y, \lambda x + \mu y) &= (\beta x - \alpha y) f(x, y), \\ \psi_j(x, y, \lambda x + \mu y) &= (\beta x - \alpha y) F(x, y); \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

les équations des courbes S_1 et T_1 s'écriront alors:

$$\left. \begin{aligned} S'_1 &= \phi_i(x, y, \lambda x + \mu y) [f(x, y)]^h (\beta x - \alpha y)^h + \\ &\quad + \phi_{p+1}(x, y, \lambda x + \mu y) + \dots = 0, \\ T'_1 &= F(x, y) [f(x, y)]^k (\beta x - \alpha y)^{k+1} + \psi_{q+1}(x, y, \lambda x + \mu y) + \dots = 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

On a supposé $h > k$; nous aurons à examiner les deux hypothèses

$$h - k > 1, \text{ puis } h - k = 1.$$

1.° Soit $h > k + 1$.

Nous formerons la combinaison suivante

$$\left. \begin{aligned} \Sigma' &= F(x, y) \cdot S'_1 - [f(x, y)]^{h-k} \cdot \phi_i(x, y, \lambda x + \mu y) \cdot \\ &\quad \cdot (\beta x - \alpha y)^{h-k-1} \cdot T'_1 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

d'après laquelle, on aura

$$N(S'_1, T'_1) = N(T'_1, \Sigma') - N[T'_1, F(x, y)]; \quad (17)$$

mais $F(x, y) = 0$ représente $(j - 1)$ droites touchant en O la courbe T'_1 , par suite

$$N[T'_1, F(x, y)] = (j - 1)(q + 1); \quad (18)$$

et on a encore

$$N(T'_1, \Sigma') = q(p + j), \quad (18^{\text{bis}})$$

puisque l'origine est un point multiple d'ordre $(p + j)$ pour la courbe Σ' ; il résulte de là

$$N(S'_1, T'_1) = pq + kr + 1 = P + 1. \quad (19)$$

Donc un plan quelconque, passant par la droite (α, β, γ) , rencontre la courbe gauche en $(P + 1)$ points coïncidant avec O . Pour que le plan devienne osculateur, il faut qu'il rencontre la courbe en $(P + 2)$ points, au moins, coïncidant avec O ; et pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la droite $\beta x - \alpha y = 0$ touche la courbe Σ' en O , c'est-à-dire qu'on ait, eu égard à la relation (13):

$$F(\alpha, \beta) = 0; \quad (20)$$

on suppose $\phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma)$ différent de zéro.

Pour avoir la valeur de $F(\alpha, \beta)$, différencions la seconde des identités (14) par rapport à x , puis faisons $x = \alpha$, $y = \beta$, il vient

$$\beta F(\alpha, \beta) = \frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial \psi_j}{\partial \gamma}. \quad (21)$$

Éliminons λ et μ entre les équations

$$\lambda x + \mu y = z, \quad \lambda \alpha + \mu \beta = \gamma$$

et la relation

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial \psi_j}{\partial \gamma} = 0,$$

on trouve que:

Si $h > k + 1$, l'équation du plan osculateur est

$$x \frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha} + y \frac{\partial \psi_j}{\partial \beta} + z \frac{\partial \psi_j}{\partial \gamma} = 0. \quad (21^{\text{bis}})$$

2.° Soit $h = k + 1$.

Nous formerons la combinaison suivante des équations (15):

$$\Sigma'' = F(x, y) \cdot S'_1 - \phi_i(x, y, \lambda x + \mu y) \cdot f(x, y) \cdot T'_1 = 0, \quad (22)$$

d'après laquelle, on a

$$N(S'_1, T'_1) = N(T'_1, \Sigma'') - N[T'_1, F(x, y)]; \quad (23)$$

les valeurs (18) et (18^{bis}) sont encore applicables au cas actuel, et il en résulte

$$N(S'_1, T'_1) = pq + kr + 1 = P + 1; \quad (24)$$

c'est-à-dire que le plan sécant rencontre la courbe gauche en $(P + 1)$ points coïncidant avec O .

Pour que ce plan devienne osculateur, il faut que l'ensemble des termes du moindre degré, dans Σ'' , s'annule pour $x = \alpha, y = \beta$; ce qui donne

$$F(\alpha, \beta) \cdot \Phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) - f(\alpha, \beta) \cdot \Phi_i(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \Psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) = 0. \quad (25)$$

La valeur de $F(\alpha, \beta)$ est fournie par l'égalité (21); la première des identités (14) donnera pour la valeur de $f(\alpha, \beta)$

$$\beta f(\alpha, \beta) = \frac{\partial \theta}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \gamma}; \quad (26)$$

l'égalité (25) devient alors

$$\Phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \left[\frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \Psi_j}{\partial \gamma} \right] = \Phi_i(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \Psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} \right]. \quad (27)$$

En éliminant λ et μ entre la relation (27) et les équations

$$\lambda x + \mu y = z, \quad \lambda \alpha + \mu \beta = \gamma,$$

on aura l'équation du plan osculateur; on trouve ainsi que:

Si $h = k + 1$, l'équation du plan osculateur est:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \left[x \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + y \frac{\partial \Psi_j}{\partial \beta} + z \frac{\partial \Psi_j}{\partial \gamma} \right] = \\ = \Phi_i(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \Psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \left[x \frac{\partial \theta}{\partial x} + y \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + z \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} \right]. \end{aligned} \right\} (27^{\text{bis}})$$

15. Considérons, en second lieu, une des tangentes (α, β, γ) définies par les équations (11^{ter}), savoir:

$$\left. \begin{aligned} \theta(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \\ \Phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) = 0; \end{aligned} \right\} (11^{\text{ter}})$$

admettons que le plan (4) passe par la droite (α, β, γ) , de sorte qu'on a toujours la condition

$$\lambda \alpha + \mu \beta = \gamma. \quad (28)$$

Le plan sécant coupe les surfaces S et T suivant des courbes qui touchent la droite (α, β, γ) en O ; les projections S_1 et T_1 de ces courbes devront donc toucher la projection $\beta x - \alpha y = 0$ de cette droite; d'ailleurs on a, d'après les égalités (11^{ter}) et (28) les identités :

$$\left. \begin{aligned} \theta(x, y, \lambda x + \mu y) &= (\beta x - \alpha y) f(x, y), \\ \phi_{p+1}(x, y, \lambda x + \mu y) &= (\beta x - \alpha y) g(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

les équations des courbes S_1 et T_1 s'écriront alors :

$$\left. \begin{aligned} S''_1 &= \phi_i(x, y, \lambda x + \mu y) \cdot [f(x, y)]^h (\beta x - \alpha y)^h + \\ &\quad + (\beta x - \alpha y) g(x, y) + \phi_{p+2}(x, y, \lambda x + \mu y) + \dots = 0, \\ T''_1 &= \psi_j(x, y, \lambda x + \mu y) [f(x, y)]^k (\beta x - \alpha y)^k + \\ &\quad + \psi_{q+1}(x, y, \lambda x + \mu y) + \psi_{q+2}(x, y, \lambda x + \mu y) + \dots = 0. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Formons la combinaison

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_1 &= \psi_j(x, y, \lambda x + \mu y) \cdot S''_1 - \\ &\quad - \phi_i(x, y, \lambda x + \mu y) [f(x, y)]^{h-k} (\beta x - \alpha y)^{h-k} \cdot T''_1 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$= (\beta x - \alpha y) E(x, y) + G(x, y) + \dots = 0.$$

où les fonctions homogènes $E(x, y)$, $G(x, y)$ sont des degrés respectifs $p + j$, $p + j + 2$.

D'après (31), on a

$$N(S''_1, T''_1) = N(T''_1, \Sigma_1) - N(T''_1, \psi_j); \quad (32)$$

d'ailleurs $\psi_j(x, y, \lambda x + \mu y) = 0$ représente j droites tangentes en O à la courbe T''_1 , par suite

$$N(T''_1, \psi_j) = j(q + 1). \quad (33)$$

Pour déterminer le nombre $N(T''_1, \Sigma_1)$ formons encore la combinaison

$$\Sigma_2 = E(x, y) \cdot T''_1 - \psi_j(x, y, \lambda x + \mu y) [f(x, y)]^k (\beta x - \alpha y)^{k-1} \cdot \Sigma_1 = 0, \quad (34)$$

d'où il suit

$$N(T''_1, \Sigma_1) = N(\Sigma_1, \Sigma_2) - N[\Sigma_1, E(x, y)]; \quad (35)$$

d'ailleurs $E(x, y) = 0$ représente $(p + j)$ droites touchant en O la courbe Σ_1 , par suite

$$N[\Sigma_1, E(x, y)] = (p + j)(p + j + 2); \quad (36)$$

l'origine étant un point multiple d'ordre $(p + q + j + 1)$ pour la courbe Σ_2 , on a encore

$$N(\Sigma_1, \Sigma_2) = (p + j + 1)(p + q + j + 1). \quad (36^{\text{bis}})$$

Les égalités (32), (33), (35), (36), (36^{bis}) donnent définitivement

$$N(S''_1, T''_1) = pq + kr + 1 = P + 1; \quad (37)$$

c'est-à-dire qu'un plan quelconque, passant par la droite (α, β, γ) , rencontre la courbe gauche en $(P + 1)$ points coïncidant avec O .

16. Pour que le plan devienne osculateur, il faut que l'ensemble des termes du moindre degré dans Σ_2 , (34), soit divisible par $(\beta x - \alpha y)$, c'est-à-dire s'annule pour $x = \alpha, y = \beta$.

Nous aurons ici différents cas à distinguer, savoir :

$$\left. \begin{array}{l} k > 1, \\ h > k + 1; \end{array} \right\} (1^{\circ}) \quad \left. \begin{array}{l} k > 1, \\ h = k + 1; \end{array} \right\} (2^{\circ}) \quad \left. \begin{array}{l} k = 1, \\ h > 2; \end{array} \right\} (3^{\circ}) \quad \left. \begin{array}{l} k = 1, \\ h = 2. \end{array} \right\} (4^{\circ})$$

Si l'on remarque qu'il résulte des identités (29)

$$\left. \begin{array}{l} \beta f(\alpha, \beta) = \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \gamma}, \\ \beta g(\alpha, \beta) = \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \gamma}; \end{array} \right\} \quad (38)$$

on aura, eu égard à la relation (28) et à la valeur des fonctions $E(x, y)$ et $G(x, y)$:

1.^o: Si $k > 1$, et $h > k + 1$:

$$\frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \gamma} = 0; \quad (39)$$

2.^o: Si $k > 1$ et $h = k + 1$:

$$\psi_j(\alpha, \beta, \gamma) \left[\frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \gamma} \right] = \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \left[\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} \right]; \quad (39^{\text{bis}})$$

3.^o: Si $k = 1$, et $h > 2$;

$$\psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \left[\frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \gamma} \right] = \phi_{p+2}(\alpha, \beta, \gamma) \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) \left[\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} \right]; \quad (39^{\text{ter}})$$

4.°: Si $k=1$, et $h=2$:

$$\left. \begin{aligned} & \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) \left(\frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \gamma} \right) = \\ & = \left[\phi_i(\alpha, \beta, \gamma) [\psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma)]^2 + \phi_{p+2}(\alpha, \beta, \gamma) [\psi_j(\alpha, \beta, \gamma)]^2 \right] \cdot \left[\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} \right]. \end{aligned} \right\} (39^{\text{quater}})$$

En éliminant λ et μ entre les équations

$$\lambda x + \mu y = z, \quad \lambda \alpha + \mu \beta = \gamma$$

et les équations (39) prises successivement, on trouve pour l'équation du plan osculateur:

1.°: $k > 1, h > k + 1$:

$$x \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \alpha} + y \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \beta} + z \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \gamma} = 0; \quad (40)$$

2.°: $k > 1, h = k + 1$:

$$\left. \begin{aligned} & \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) \left[x \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \alpha} + y \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \beta} + z \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \gamma} \right] = \\ & = \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \left[x \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + y \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + z \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} \right]; \end{aligned} \right\} (40^{\text{bis}})$$

3.°: $k = 1, h > 2$:

$$\left. \begin{aligned} & \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \left[x \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \alpha} + y \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \beta} + z \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \gamma} \right] = \\ & = \phi_{p+2}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \left[x \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + y \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + z \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} \right]; \end{aligned} \right\} (40^{\text{ter}})$$

4.°: $k = 1, h = 2$:

$$\left. \begin{aligned} & \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) \left[x \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \alpha} + y \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \beta} + z \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \gamma} \right] = \\ & = \left[\phi_i(\alpha, \beta, \gamma) [\psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma)]^2 + \phi_{p+2}(\alpha, \beta, \gamma) [\psi_j(\alpha, \beta, \gamma)]^2 \right] \cdot \left[x \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + y \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + z \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} \right]. \end{aligned} \right\} (40^{\text{quater}})$$

Cette discussion nous conduit à une proposition facile à énoncer.

§ 2. Détermination des rayons de courbure.

17. Nous supposons toujours que le point multiple ait été pris pour origine O des coordonnées; soient

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} \tag{1}$$

les équations de la tangente à la branche considérée, et

$$Ax + By + Cz = 0 \tag{2}$$

l'équation du plan osculateur en O pour cette branche; A, B, C sont des fonctions déterminées des quantités α, β, γ , et ces fonctions sont connues par les formules que nous avons établies dans le paragraphe précédent. Le plan osculateur (2) passe par la tangente (1), on a donc toujours la relation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0. \tag{2bis}$$

Le plan osculateur coupera les surfaces (S) et (T), qui déterminent la courbe gauche, suivant deux courbes ayant un contact effectif du second ordre au moins; le cercle osculateur, lequel est situé dans le plan osculateur, devra avoir avec l'une et l'autre de ces courbes de section un contact effectif du second ordre au moins.

Or imaginons un plan passant par la tangente (1) et perpendiculaire au plan osculateur (2); l'équation de ce second plan sera

$$Mx + Ny + Pz = 0 \tag{3}$$

après avoir posé

$$\left. \begin{aligned} M &= \beta C - \gamma B, \\ N &= \gamma A - \alpha C, \\ P &= \alpha B - \beta A, \end{aligned} \right\} \tag{3bis}$$

valeurs qui résultent des deux conditions imposées au plan (3)

$$\left. \begin{aligned} M\alpha + N\beta + P\gamma &= 0, \\ MA + NB + PC &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{3ter}$$

Le cercle osculateur peut être regardé comme situé sur une sphère touchant en O le plan (3); l'équation d'une telle sphère sera

$$\Gamma = -2\lambda(Mx + Ny + Pz) + x^2 + y^2 + z^2 = 0; \tag{4}$$

les coordonnées x_0, y_0, z_0 , du centre de cette sphère seront

$$x_0 = \lambda M, \quad y_0 = \lambda N, \quad z_0 = \lambda P, \quad (5)$$

le rayon de cette sphère, qui est également le rayon du cercle situé dans le plan osculateur, a pour valeur

$$R = \lambda \sqrt{M^2 + N^2 + P^2};$$

eu égard aux relations (3^{bis}) et (2^{bis}), l'expression du rayon R prend la forme définitive:

$$R = \lambda \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}. \quad (6)$$

Toute la question consiste donc à déterminer λ de manière que la section de la sphère (Γ) par le plan osculateur (2) ait un contact effectif du second ordre au moins avec l'une et avec l'autre des sections des surfaces (S) et (T) par ce même plan (2).

18. Je vais d'abord établir plusieurs formules préliminaires qui nous seront utiles dans les déterminations qu'il nous reste à effectuer.

Si l'on considère avec attention les équations des plans osculateurs trouvées dans le paragraphe précédent, on constate le fait suivant:

« Une des tangentes en O , à une des branches de la courbe gauche, « étant définie par deux équations telles que

$$\left. \begin{aligned} \phi(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \psi(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

l'équation du plan osculateur correspondant est

$$H \left(x \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + y \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + z \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) = G \left(x \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + y \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + z \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \right), \quad (8)$$

« H et G sont des coefficients connus qui ne dépendent que des quantités « α, β, γ . »

D'après cela, les coefficients A, B, C , de l'équation (2) auront les valeurs suivantes

$$\left. \begin{aligned} A &= H \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} - G \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \\ B &= H \frac{\partial \phi}{\partial \beta} - G \frac{\partial \psi}{\partial \beta}, \\ C &= H \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} - G \frac{\partial \psi}{\partial \gamma}; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

et nous poserons, en outre:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} - \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \\ B_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}, \\ C_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Nous rencontrerons plus loin des expressions de la forme suivante:

$$\left. \begin{aligned} a &= B \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} - C \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \\ b &= C \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - A \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}, \\ c &= A \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - B \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= B \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} - C \frac{\partial \psi}{\partial \beta}, \\ b_1 &= C \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - A \frac{\partial \psi}{\partial \gamma}, \\ c_1 &= A \frac{\partial \psi}{\partial \beta} - B \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

eu égard aux valeurs (9) et (10), nous aurons

$$\left. \begin{aligned} a &= -G \cdot A_1, \\ b &= -G \cdot B_1, \\ c &= -G \cdot C_1; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -H \cdot A_1, \\ b_1 &= -H \cdot B_1, \\ c_1 &= -H \cdot C_1. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

D'ailleurs les égalités (7) et (9) entraînent les suivantes:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} &= 0, & \alpha \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} &= 0, \\ \alpha A + \beta B + \gamma C &= 0; & \alpha A + \beta B + \gamma C &= 0; \end{aligned}$$

de ces dernières relations on conclut, en résolvant chaque groupe par rapport à α , β , γ , et en tenant compte des valeurs (11), (12), (13), (14):

$$\frac{\alpha}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = \frac{G \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}; \quad (15)$$

$$\frac{a_1}{\alpha} = \frac{b_1}{\beta} = \frac{c_1}{\gamma} = \frac{H \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}. \quad (16)$$

Ces formules préliminaires étant établies, passons à la détermination de la valeur de λ .

19. L'équation (2) du plan osculateur peut s'écrire

$$z = mx + ny, \quad (17)$$

après avoir posé

$$m = -\frac{A}{C}, \quad n = -\frac{B}{C}, \quad (17^{\text{bis}})$$

d'où il résulte, eu égard à la relation (2^{bis}):

$$m\alpha + n\beta = \gamma. \quad (18)$$

Le plan (2) ou (17) coupera la sphère Γ , ou (4), suivant un cercle ayant pour projection:

$$\Gamma_1 = -\frac{2\lambda}{C} (A^2 + B^2 + C^2) (\beta x - \alpha y) + x^2 + y^2 + (mx + ny)^2 = 0; \quad (19)$$

pour simplifier un peu l'écriture, nous poserons

$$\mu = \frac{2\lambda}{C} (A^2 + B^2 + C^2), \quad (19^{\text{bis}})$$

de sorte que:

$$\Gamma_1 = -\mu (\beta x - \alpha y) + x^2 + y^2 + (mx + ny)^2 = 0. \quad (19^{\text{ter}})$$

Pour déterminer le rayon de courbure, nous allons parcourir successivement les divers cas étudiés dans le premier paragraphe.

20. 1^{ère} CAS. *Les fonctions ϕ_p et ψ_q n'ont pas de facteur commun.*

Les équations des deux surfaces déterminant la courbe gauche sont:

$$(\Delta) \begin{cases} S = \phi_p(x, y, z) + \phi_{p+1}(x, y, z) + \phi_{p+2}(x, y, z) + \dots = 0, \\ T = \psi_q(x, y, z) + \psi_{q+1}(x, y, z) + \psi_{q+2}(x, y, z) + \dots = 0. \end{cases}$$

Les projections des sections des surfaces S et T par le plan (17) ont pour équations:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \phi_p(x, y, mx + ny) + \phi_{p+1}(x, y, mx + ny) + \dots = 0, \\ T_1 &= \psi_q(x, y, mx + ny) + \psi_{q+1}(x, y, mx + ny) + \dots = 0; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

On a, dans le cas actuel .

$$\phi_p(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \psi_q(\alpha, \beta, \gamma) = 0; \quad (21)$$

et, eu égard à la relation (18), il en résulte les identités:

$$\left. \begin{aligned} \phi_p(x, y, mx + ny) &= (\beta x - \alpha y) \phi_{p-1}(x, y), \\ \psi_q(x, y, mx + ny) &= (\beta x - \alpha y) \psi_{q-1}(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Pour déterminer le nombre des points coïncidant avec O et communs à S_1 , (20), et Γ_1 , (19), formons la combinaison

$$\Sigma = \mu S_1 + \Gamma_1 \cdot \phi_{p-1}(x, y) = 0, \quad (23)$$

d'après laquelle on a

$$N(S_1, \Gamma_1) = N(\Gamma_1, \Sigma) = p + 1; \quad (24)$$

pour que S_1 et Γ_1 aient un contact effectif d'un ordre plus élevé, il faut et il suffit que l'ensemble des termes du degré le moins élevé, dans Σ , s'annule pour $x = \alpha$, $y = \beta$; ce qui donne, eu égard aux relations (18) et (19^{bis}):

$$\frac{2\lambda}{C} (A^2 + B^2 + C^2) \cdot \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) + (\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) \phi_{p-1}(\alpha, \beta) = 0. \quad (25)$$

La valeur de $\phi_{p-1}(\alpha, \beta)$ se déduit de la première des identités (22), et l'on trouve

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial \alpha} + m \frac{\partial \phi_p}{\partial \gamma} = \beta \phi_{p-1}(\alpha, \beta),$$

d'où l'on conclut

$$\phi_{p-1}(\alpha, \beta) = \frac{C \frac{\partial \phi_p}{\partial \alpha} - A \frac{\partial \phi_p}{\partial \gamma}}{\beta C}; \quad (26)$$

et l'égalité (25) devient

$$2\lambda (A^2 + B^2 + C^2) \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \frac{C \frac{\partial \phi_p}{\partial \alpha} - A \frac{\partial \phi_p}{\partial \gamma}}{\beta} = 0. \quad (27)$$

Si l'on se reporte aux équations (6) du n.º [3] et (16) du n.º [4], et qu'on les compare aux équations (7) et (8) du n.º [18], on a, dans le cas actuel:

$$\phi = \phi_p, \quad \psi = \psi_q; \quad H = \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma), \quad G = \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma),$$

et par suite:

$$\left. \begin{aligned} A &= \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \frac{\partial \phi_p}{\partial \alpha} - \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \frac{\partial \psi_q}{\partial \alpha}, \\ B &= \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \frac{\partial \phi_p}{\partial \beta} - \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \frac{\partial \psi_q}{\partial \beta}, \\ C &= \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \frac{\partial \phi_p}{\partial \gamma} - \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \frac{\partial \psi_q}{\partial \gamma}; \end{aligned} \right\} \quad (1^{\circ})$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial \psi_q}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi_p}{\partial \gamma} - \frac{\partial \psi_q}{\partial \gamma} \frac{\partial \varphi_p}{\partial \beta}, \\ B_1 &= \frac{\partial \psi_q}{\partial \gamma} \frac{\partial \varphi_p}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi_q}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi_p}{\partial \gamma}, \\ C_1 &= \frac{\partial \psi_q}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi_p}{\partial \beta} - \frac{\partial \psi_q}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi_p}{\partial \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (2^\circ)$$

Eu égard à ces valeurs et aux relations (11) et (15) n.º [18], l'égalité (27) donnera pour λ la valeur suivante :

$$2\lambda = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}{A^2 + B^2 + C^2}. \quad (3^\circ)$$

D'après la formule (6) n.º [17] nous concluons alors pour la valeur de R :

$$2R = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (4^\circ)$$

On serait arrivé à la même valeur de λ en exprimant que les courbes Γ_1 et T_1 ont un contact effectif du second ordre.

Le rayon R déterminé par la formule (4º), est donc celui d'un cercle ayant une contact effectif du second ordre avec chacune des sections des surfaces S et T par le plan osculateur qui le contient; ce cercle a donc avec la branche de courbe considérée un contact effectif du second ordre; il en est, par conséquent, le cercle osculateur.

Il est facile de voir en combien de points, coïncidant avec O , le cercle osculateur rencontre la courbe gauche.

Ce cercle en effet, rencontre en trois points coïncidant avec O la branche tangente à la droite (α, β, γ) ; mais il reste, dans le cas actuel, $(pq - 1)$ autres branches ne touchant pas la droite (α, β, γ) , et chacune de ces branches rencontre le cercle en un seul point coïncidant avec O ; par conséquent :

Le cercle osculateur en O pour une des branches de la courbe gauche Δ rencontre cette courbe en $(pq + 2)$ points coïncidant avec le point O .

21. REMARQUE I. La droite (α, β, γ) peut être une des tangentes inflexionelles de l'une seulement des surfaces S ou T .

Dans ce cas particulier on a, n.º [5], remarque I :

$$A = \frac{\partial \varphi_p}{\partial \alpha}, \quad B = \frac{\partial \varphi_p}{\partial \beta}, \quad C = \frac{\partial \varphi_p}{\partial \gamma}; \quad (28)$$

et d'après l'hypothèse admise, on a, outre les équations (21), n.º [20], la relation

$$\phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) = 0. \quad (28^{\text{bis}})$$

Eu égard aux valeurs (28), l'égalité (26) donne $\phi_{p-1}(\alpha, \beta) = 0$; et l'égalité (25) se réduit alors à une identité. Ceci veut dire qu'un cercle quelconque situé dans le plan osculateur actuel et touchant la droite (α, β, γ) , a, avec la section de la surface (S) par ce même plan, un contact effectif du second ordre; on trouverait alors, comme il est facile de s'en convaincre, deux cercles, σ' et σ'' , ayant avec cette même section un contact effectif du troisième ordre; mais nous allons voir que ces deux derniers cercles ne sont pas osculateurs à la courbe gauche.

En effet, cherchons maintenant le cercle qui, situé dans le plan osculateur actuel, ait avec la section de la surface (T) par le même plan un contact effectif du second ordre. On trouve, en remplaçant dans les calculs du numéro précédent la courbe S_1 par la courbe T_1 ;

$$2\lambda = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}{A^2 + B^2 + C^2};$$

on constate que, dans cette expression, $A, B, C, A_1, B_1, C_1, \gamma$ ont précisément les valeurs que donnent les formules (1º) et (2º) du n.º [20] après qu'on y a introduit l'hypothèse

$$\phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Le cercle τ , correspondant à cette dernière valeur de λ , a un contact effectif du second ordre avec la section de la surface (T) par le plan osculateur; il aura également un contact effectif du second ordre avec la section de la surface (S) par le même plan, puisque ceci a lieu pour tout cercle tangent à la droite (α, β, γ) ; le cercle τ a donc bien un contact effectif du second ordre avec la branche considérée de la courbe gauche; c'est le cercle osculateur cherché.

Les cercles σ' et σ'' au contraire, lesquels sont distincts du cercle τ , n'auront plus avec la section de la surface (T) par le plan osculateur qu'un contact effectif du premier ordre; ils ne seront donc pas osculateurs à la courbe gauche, quoi qu'ils aient un contact effectif du 3^{ème} ordre avec la section de la surface (S) .

En résumé, les formules (1º), (2º), (3º), (4º), n.º [20] sont applicables au cas particulier en question, pourvu qu'on ait égard à l'hypothèse admise

$$\phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

22. REMARQUE II. La droite (α, β, γ) peut être une génératrice double pour l'un seulement des cônes ϕ_p ou ψ_q .

Supposons qu'elle soit une génératrice double pour le cône ψ_q , de sorte qu'on a

$$\frac{\partial \psi_q}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \psi_q}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \psi_q}{\partial \gamma} = 0; \quad (29)$$

dans le cas actuel, on a encore n.° [6] remarque II:

$$A = \frac{\partial \phi_p}{\partial \alpha}, \quad B = \frac{\partial \phi_p}{\partial \beta}, \quad C = \frac{\partial \phi_p}{\partial \gamma}; \quad (30)$$

il faut alors reprendre l'analyse du n.° [20].

D'après les hypothèses admises (29) et les égalités (26) et (30), on a les identités:

$$\left. \begin{aligned} \phi_p(x, y, mx + ny) &= (\beta x - \alpha y)^2 \phi_{p-1}(x, y), \\ \psi_q(x, y, mx + ny) &= (\beta x - \alpha y)^2 \psi_{q-2}(x, y); \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

les sections des surfaces S et T n.° [20] par le plan osculateur (17) n.° [19], auront pour projections:

$$\left. \begin{aligned} S'_1 &= (\beta x - \alpha y)^2 \phi_{p-2}(x, y) + \phi_{p+1}(x, y, mx + ny) + \dots = 0, \\ T'_1 &= (\beta x - \alpha y)^2 \psi_{q-2}(x, y) + \psi_{q+1}(x, y, mx + ny) + \dots = 0; \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

la projection de la section de la sphère Γ sera toujours (19) n.° [19]:

$$\Gamma_1 = -\mu(\beta x - \alpha y) + x^2 + y^2 + (mx + ny)^2 = 0, \quad (33)$$

équation où l'on a posé:

$$\mu = \frac{2\lambda}{C} (A^2 + B^2 + C^2). \quad (33^{\text{bis}})$$

Formons la combinaison:

$$\Sigma = \mu S'_1 + \phi_{p-2}(x, y) \cdot (\beta x - \alpha y) \cdot \Gamma_1 = 0, \quad (34)$$

d'après laquelle on a

$$N(S'_1, \Gamma_1) = N(\Sigma, \Gamma_1) = p + 1. \quad (35)$$

Si l'on exprime que les termes du degré le moins élevé, dans Σ , s'annulent pour $x = \alpha$, $y = \beta$, on trouve

$$\mu = 0, \quad \text{d'où } \lambda = 0; \quad (36)$$

on obtient ainsi un cercle σ , de rayon nul, qui a un contact effectif du second ordre avec la section de la surface (S) par le plan osculateur considéré.

Si l'on combine les équations des courbes T'_1 et Γ_1 , on a

$$\Sigma' = \mu T'_1 + \psi_{q-2}(x, y) \cdot (\beta x - \alpha y) \Gamma_1 = 0, \quad (37)$$

on a maintenant

$$N(T'_1, \Gamma_1) = N(\Sigma', \Gamma_1) = q + 1. \quad (38)$$

Si l'on exprime que les termes du degré le moins élevé, dans Σ' , s'annulent pour $x = \alpha$, $y = \beta$, on trouve

$$\mu = 0, \text{ d'où } \lambda = 0; \quad (39)$$

on obtient encore un cercle, de rayon nul, qui a un contact effectif du second ordre avec la section de la surface (T).

Ainsi, dans le cas actuel, le rayon de courbure en O de la branche tangente à la droite (α, β, γ) est nul; la courbure est infinie.

Les formules (1°), (2°), (3°), (4°), du n.° [20] sont encore applicables au cas particulier en question; car on voit, qu'en y introduisant les hypothèses (29), on trouve

$$\lambda = 0, \quad R = 0.$$

23. REMARQUE III. La droite (α, β, γ) peut être une tangente inflexionnelle pour les deux surfaces S et T .

Dans ce cas, on a les relations

$$\left. \begin{aligned} \phi_p(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \\ \psi_q(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Les sections des surfaces (S) et (T) par le plan osculateur correspondant ont pour projections:

$$\left. \begin{aligned} S''_1 &= (\beta x - \alpha y) \phi_{p-1}(x, y) + \\ &\quad + (\beta x - \alpha y) \chi_p(x, y) + \phi_{p+2}(x, y, mx + ny) + \dots = 0, \\ T''_1 &= (\beta x - \alpha y) \psi_{q-1}(x, y) + \\ &\quad + (\beta x - \alpha y) \theta_q(x, y) + \psi_{q+2}(x, y, mx + ny) + \dots = 0, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

après avoir posé

$$\left. \begin{aligned} \phi_p(x, y, mx + ny) &= (\beta x - \alpha y) \phi_{p-1}(x, y); \\ \psi_q(x, y, mx + ny) &= (\beta x - \alpha y) \psi_{q-1}(x, y); \\ \phi_{p+1}(x, y, mx + ny) &= (\beta x - \alpha y) \chi_p(x, y); \\ \psi_{q+1}(x, y, mx + ny) &= (\beta x - \alpha y) \theta_q(x, y); \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

ces identités résultent des hypothèses admises (40).

La section de la sphère Γ par le même plan a toujours pour projection $\Gamma_1 = -\mu(\beta x - \alpha y) + x^2 + y^2 + (mx + ny)^2 = 0$, où $\mu = \frac{2\lambda}{C}(A^2 + B^2 + C^2)$. (43)

Comparant les courbes S''_1 et Γ_1 , nous formerons la combinaison

$$\Sigma = \mu S''_1 + \phi_{p-1}(x, y) \cdot \Gamma_1 = 0;$$

si l'on exprime que le contact effectif des courbes S''_1 et Γ_1 est supérieur à l'unité, on trouve

$$\mu = \infty, \text{ d'où } \lambda = \infty.$$

On arrive au même résultat en comparant les courbes T''_1 et Γ_1 .

On conclut de là que le rayon de courbure de la branche considérée est infini, c'est-à-dire que la courbure est nulle. Conséquence d'ailleurs évidente de la propriété de la droite (α, β, γ) d'être tangente inflexionnelle pour les deux surfaces. On constate, en y introduisant les hypothèses (40), que les formules (1^o), (2^o), (3^o) et (4^o) du n.° [20] sont encore applicables au cas actuel, car elles donnent $\lambda = \infty$.

24. REMARQUE IV. La droite (α, β, γ) peut être une génératrice double pour les deux cônes ϕ_p et ψ_q .

On remarque d'abord qu'en vertu des hypothèses admises on a les identités

$$\left. \begin{aligned} \phi_p(x, y, mx + ny) &= (\beta x - \alpha y)^2 \phi_{p-2}(x, y), \\ \psi_q(x, y, mx + ny) &= (\beta x - \alpha y)^2 \psi_{q-2}(x, y); \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

il y a, dans ce cas, deux plans osculateurs qui sont donnés par l'équation (16^{ter}) du n.° [8]. Si nous considérons un de ces plans

$$Ax + By + Cz = 0, \text{ ou } z = mx + ny, \quad (45)$$

les projections des sections des surfaces (S) et (T) par ce plan seront

$$\begin{aligned} S_1 &= (\beta x - \alpha y)^2 \phi_{p-2}(x, y) + \phi_{p+1}(x, y, mx + ny) + \dots = 0, \\ T_1 &= (\beta x - \alpha y)^2 \psi_{q-2}(x, y) + \psi_{q+1}(x, y, mx + ny) + \dots = 0. \end{aligned}$$

En reprenant l'analyse du n.° [22], on trouve $\lambda = 0$; le rayon de courbure est donc nul.

25. 2^{ème} CAS. Les fonctions ϕ_p et ψ_q ont un facteur commun entrant à la même puissance dans les deux fonctions.

Les équations des deux surfaces sont alors

$$\left. \begin{aligned} S &= \phi_i(x, y, z)[\theta(x, y, z)]^k + \phi_{p+1}(x, y, z) + \dots = 0, \\ T &= \psi_j(x, y, z)[\theta(x, y, z)]^k + \psi_{q+1}(x, y, z) + \dots = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$\theta(x, y, z)$ étant une fonction homogène du degré r .

Les tangentes en O aux diverses branches de la courbe sont données par les deux systèmes d'équations:

$$\left. \begin{aligned} \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) &= 0; \end{aligned} \right\} (ij) \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma)\psi_j(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma)\phi_i(\alpha, \beta, \gamma) &= \left. \begin{aligned} &= \chi(\alpha, \beta, \gamma) = 0. \end{aligned} \right\} r(i+j+kr+1) \quad (3) \end{aligned}$$

Le rayon de courbure, relatif à une quelconque des branches dont les tangentes sont définies par le système (2), sera donné par la formule générale (4°) du n.° [20]. Occupons-nous du rayon de courbure relatif à une quelconque des branches dont les tangents sont définies par le système (3).

L'équation du plan osculateur étant toujours

$$Ax + By + Cz = 0, \text{ ou } z = mx + ny,$$

les coefficients A, B, C , sont donnés par les formules (30) ou (31) du n.° [11], suivant que k est supérieur ou égal à l'unité.

Le plan osculateur coupe les surfaces S et T , (1), suivant des courbes ayant pour projections respectives

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \phi_i(x, y, mx + ny)[f(x, y)]^k(\beta x - \alpha y)^k + \\ &\quad + \phi_{p+1}(x, y, mx + ny) + \dots = 0, \\ T_1 &= \psi_j(x, y, mx + ny)[f(x, y)]^k(\beta x - \alpha y)^k + \\ &\quad + \psi_{q+1}(x, y, mx + ny) + \dots = 0; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

on a posé les identités suivantes qui résultent des relations admises (3):

$$\left. \begin{aligned} \theta(x, y, mx + ny) &= (\beta x - \alpha y)f(x, y), \\ \chi(x, y, mx + ny) &= \phi_{p+1}(x, y, mx + ny)\psi_j(x, y, mx + ny) - \\ &\quad - \psi_{q+1}(x, y, mx + ny)\phi_i(x, y, mx + ny) = (\beta x - \alpha y)\Gamma(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

et on a toujours les égalités

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \text{ ou } m\alpha + n\beta = \gamma. \quad (6)$$

Le plan osculateur coupe d'ailleurs la sphère (4) n.º [17] suivant une courbe ayant pour projection

$$\Gamma_1 = -\mu(\beta x - \alpha y) + x^2 + y^2 + (mx + ny)^2 = 0, \quad (7)$$

où l'on a posé

$$\mu = \frac{2\lambda}{C}(A^2 + B^2 + C^2). \quad (7^{\text{bis}})$$

Comparons d'abord les courbes S_1 et Γ_1 , c'est-à-dire formons la combinaison:

$$\Sigma = \mu S_1 + \phi_i \cdot [f(x, y)]^k (\beta x - \alpha y)^{k-1} \cdot \Gamma_1 = 0, \quad (8)$$

d'où l'on conclut

$$N(S_1, \Gamma_1) = N(\Sigma, \Gamma_1) = p + 1.$$

Comparons en second lieu les courbes T_1 et Γ_1 , c'est-à-dire formons la combinaison

$$\Sigma' = \mu T_1 + \psi_j [f(x, y)]^k (\beta x - \alpha y)^{k-1} \Gamma_1 = 0, \quad (9)$$

d'où l'on conclut

$$N(T_1, \Gamma_1) = N(\Sigma', \Gamma_1) = q + 1.$$

Supposons d'abord $k > 1$.

Si l'on exprime que la courbe Σ est touchée en O par la droite $\beta x - \alpha y = 0$, on aura un cercle ayant un contact effectif du second ordre avec la section de la surface (S) par le plan osculateur considéré; de même si l'on exprime que la courbe Σ' est touchée en O par la droite $\beta x - \alpha y = 0$, on obtiendra un cercle ayant un contact effectif du second ordre avec la section de la surface T par ce plan osculateur. Or dans les deux cas, on trouve $\lambda = 0$, par conséquent le cercle osculateur en O à la branche en question est un cercle de rayon nul.

Supposons en second lieu $k = 1$.

Le rayon du cercle ayant un contact effectif du second ordre avec la section de la surface S par le plan osculateur considéré sera déterminé à l'aide de la valeur suivante de λ :

$$\frac{2\lambda'}{C}(A^2 + B^2 + C^2)\phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) + \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)f(\alpha, \beta) = 0; \quad (10)$$

le rayon du cercle ayant un contact effectif du second ordre avec la section de la surface T par le même plan sera déterminé à l'aide de la valeur suivante de λ :

$$\frac{2\lambda''}{C}(A^2 + B^2 + C^2) \cdot \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) + \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \cdot f(\alpha, \beta) = 0. \quad (11)$$

Or ces deux valeurs de λ sont les mêmes, car d'après la seconde des égalités (3) on a

$$\phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) = \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \phi_i(\alpha, \beta, \gamma). \quad (12)$$

Le cercle ainsi déterminé sera donc osculateur à la branche considérée de la courbe gauche; et, eu égard à la valeur (11) de λ , la formule (6) n.° [17] donnera pour l'expression de son rayon:

$$2R = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot \frac{\phi_i(\alpha, \beta, \gamma)}{\phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma)} \cdot C \cdot f(\alpha, \beta). \quad (13)$$

La première des identités (5) n.° [26] donne

$$Bf(\alpha, \beta) = \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + m \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} = \frac{C \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - A \frac{\partial \theta}{\partial \gamma}}{C}; \quad (14)$$

mais des égalités

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0, \quad \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} = 0,$$

on conclut

$$\left. \begin{aligned} \frac{B \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} - C \frac{\partial \theta}{\partial \beta}}{\alpha} &= \frac{C \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - A \frac{\partial \theta}{\partial \gamma}}{\beta} = \frac{A \frac{\partial \theta}{\partial \beta} - B \frac{\partial \theta}{\partial \alpha}}{\gamma} = \\ &= \frac{\sqrt{\left(B \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} - C \frac{\partial \theta}{\partial \beta}\right)^2 + \left(C \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - A \frac{\partial \theta}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(A \frac{\partial \theta}{\partial \beta} - B \frac{\partial \theta}{\partial \alpha}\right)^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Or d'après la formule (31) n.° [11] qui est applicable au cas actuel, on a

$$\left. \begin{aligned} A &= H \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - G \frac{\partial \chi}{\partial \alpha}, \\ B &= H \frac{\partial \theta}{\partial \beta} - G \frac{\partial \chi}{\partial \beta}, \\ C &= H \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} - G \frac{\partial \chi}{\partial \gamma}; \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} H &= \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) [\phi_{p+2}(\alpha, \beta, \gamma) \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) - \psi_{q+2}(\alpha, \beta, \gamma) \phi_i(\alpha, \beta, \gamma)], \\ G &= \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma); \end{aligned} \right\} (16^{bis})$$

et si l'on pose

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial \chi}{\partial \gamma} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} - \frac{\partial \chi}{\partial \beta} \frac{\partial \theta}{\partial \gamma}, \\ B_1 &= \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} - \frac{\partial \chi}{\partial \gamma} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha}, \\ C_1 &= \frac{\partial \chi}{\partial \beta} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \beta}; \end{aligned} \right\} (17)$$

on a évidemment

$$\left. \begin{aligned} B \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} - C \frac{\partial \theta}{\partial \beta} &= G \cdot A_1, \\ C \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - A \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} &= G \cdot B_1, \\ A \frac{\partial \theta}{\partial \beta} - B \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} &= G \cdot C_1. \end{aligned} \right\} (18)$$

Eu égard aux relations (15) et aux valeurs (18), l'expression (13) du rayon R prend la forme définitive:

$$2R = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (19)$$

26. 3^{ème} CAS. Les fonctions ϕ_p et ψ_q ont un facteur commun entrant à des puissances différentes.

Les équations des deux surfaces sont alors:

$$\left. \begin{aligned} S &= \phi_i(x, y, z) \cdot [\theta(x, y, z)]^h + \phi_{p+1}(x, y, z) + \phi_{p+2}(x, y, z) + \dots = 0, \\ T &= \psi_j(x, y, z) [\theta(x, y, z)]^k + \psi_{q+1}(x, y, z) + \psi_{q+2}(x, y, z) + \dots = 0; \end{aligned} \right\} (1)$$

$\theta(x, y, z)$ est une fonction homogène de degré r , de sorte que

$$i + rh = p, \quad j + rk = q, \quad (2)$$

et l'on suppose $h > k$.

Les tangentes en O aux diverses branches de la courbe sont déterminées n.º [13] par les trois systèmes d'équations:

$$\left. \begin{aligned} \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) &= 0; \end{aligned} \right\} (ij) \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) &= 0; \end{aligned} \right\} (rj) \tag{4}$$

$$\left. \begin{aligned} \theta(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) &= 0; \end{aligned} \right\} r(p+1). \tag{5}$$

Le rayon de courbure relatif aux branches qui touchent les droites (3) sera donné par les formules générales du n.º [20]. Nous n'avons donc à nous occuper que des branches dont les tangentes sont définies soit par le système (4), soit par le système (5).

Supposons d'abord que (α, β, γ) soit une solution du système (4); le plan osculateur correspondant

$$Ax + By + Cz = 0, \text{ ou } z = mx + ny \tag{6}$$

sera donné par l'équation (21^{bis}), ou bien par l'équation (27^{bis}), n.º [14], suivant que h sera supérieur ou égal à $(k+1)$.

On a toujours la relation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \text{ ou } \gamma = m\alpha + n\beta. \tag{7}$$

Remarquons d'abord que, en égard aux relations (4) et (7), on a les identités:

$$\left. \begin{aligned} \theta(x, y, mx + ny) &= (\beta x - \alpha y) \cdot f(x, y), \\ \psi_j(x, y, mx + ny) &= (\beta x - \alpha y) \psi_{j-1}(x, y). \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

Ceci posé, les sections des surfaces S et T par le plan osculateur (6) auront pour projections respectives

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \phi_i(x, y, mx + ny) [f(x, y)]^h (\beta x - \alpha y)^h + \\ &\quad + \phi_{p+1}(x, y, mx + ny) + \dots = 0, \\ T_1 &= \psi_{j-1}(x, y) [f(x, y)]^k (\beta x - \alpha y)^{k+1} + \psi_{q+1}(x, y, mx + ny) + \dots = 0; \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

la section de la sphère (4) n.º [17], par le même plan, aura pour projection:

$$\Gamma_1 = -\mu(\beta x - \alpha y) + x^2 + y^2 + (mx + ny)^2 = 0, \tag{10}$$

où l'on a posé

$$\mu = \frac{2\lambda}{C} (A^2 + B^2 + C^2). \tag{10^{bis}}$$

Comparons d'abord les courbes S_1 et Γ_1 , et formons la combinaison

$$\Sigma = \mu S_1 + \phi_i(x, y, mx + ny) [f(x, y)]^h (\beta x - \alpha y)^{h-1} \cdot \Gamma_1 = 0, \tag{11}$$

d'où l'on conclut

$$N(S_1, \Gamma_1) = N(\Sigma, \Gamma_1) = p + 1.$$

Or on a toujours $h > 1$, car h est au moins égal à $(k + 1)$, et k est au moins égal à l'unité; si l'on exprime que les courbes Γ_1 et Σ ont $(p + 2)$ points communs en O , on trouve

$$\mu = 0, \text{ d'où } \lambda = 0;$$

par conséquent, le cercle, situé dans le plan osculateur (6) et ayant un contact effectif du second ordre avec la section de la surface S par ce même plan, est un cercle de rayon nul.

Si maintenant on compare les courbes T_1 et Γ_1 , et qu'on fasse la combinaison:

$$\Sigma' = \mu T_1 + \psi_{j-1}(x, y) [f(x, y)]^k (\beta x - \alpha y)^k \cdot \Gamma_1 = 0, \quad (12)$$

l'on conclut

$$N(T_1, \Gamma_1) = N(\Sigma', \Gamma_1) = q + 1.$$

Le nombre k est au moins égal à un; si l'on exprime que la droite $\beta x - \alpha y = 0$ touche la courbe Σ' en O on trouve encore

$$\mu = 0, \text{ d'où } \lambda = 0:$$

c'est-à-dire que le cercle, situé dans le plan osculateur (6) et ayant un contact effectif du second ordre avec la section de la surface T par ce même plan, est un cercle de rayon nul.

« Donc, pour la branche de la courbe qui touche une quelconque des « tangentes définies par le système (4), le rayon du cercle de courbure est « nul; la courbure est infinie. »

27. Supposons maintenant que (α, β, γ) soit un solution du système (5), et que l'équation (6) représente le plan osculateur correspondant; les coefficients A, B, C , seront donnés par les équations (40) n.º [16].

Des relations (5) et (7) résultent les identités

$$\left. \begin{aligned} \theta(x, y, mx + ny) &= (\beta x - \alpha y) f(x, y), \\ \phi_{p+1}(x, y, mx + ny) &= (\beta x - \alpha y) \chi_p(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Les sections des surfaces S et T par le plan osculateur (6) auront pour projections respectives

$$\left. \begin{aligned} S'_1 &= \phi_i(x, y, mx + ny) \cdot [f(x, y)]^h (\beta x - \alpha y)^h + \\ &\quad + (\beta x - \alpha y) \chi_p(x, y) + \phi_{p+2}(x, y, mx + ny) + \dots = 0, \\ T'_1 &= \psi_j(x, y, mx + ny) \cdot [f(x, y)]^k (\beta x - \alpha y)^k + \\ &\quad + \psi_{q+1}(x, y, mx + ny) + \psi_{q+2}(x, y, mx + ny) + \dots = 0; \end{aligned} \right\} (14)$$

la section de la sphère (4) n.° [17] aura pour projection

$$\Gamma_1 = -\mu(\beta x - \alpha y) + x^2 + y^2 + (mx + ny)^2 = 0, \quad (15)$$

où

$$\mu = \frac{2\lambda}{C} (A^2 + B^2 + C^2). \quad (15^{\text{bis}})$$

Comparons d'abord les courbes S'_1 et Γ_1 , et formons la combinaison

$$\begin{aligned} \Sigma &= \mu S'_1 + \phi_i(x, y, mx + ny) [f(x, y)]^h (\beta x - \alpha y)^{h-1} \cdot \Gamma_1, \\ &= (\beta x - \alpha y) g_p(x, y) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

De l'équation (16) on conclut

$$N(S'_1, \Gamma_1) = N(\Sigma, \Gamma_1);$$

Pour reconnaître le nombre des points coïncidant avec O et communs à Σ et Γ_1 , formons la nouvelle combinaison

$$\Sigma' = \mu \Sigma + g_p(x, y) \cdot \Gamma_1 = 0, \quad (17)$$

et l'on a

$$N(S'_1, \Gamma_1) = N(\Sigma, \Gamma_1) = N(\Sigma', \Gamma_1);$$

si μ ou λ reste arbitraire, on a

$$N(S'_1, \Gamma_1) = p + 2;$$

donc:

« COROL. I. Un cercle quelconque, situé dans le plan osculateur (6) « et touchant en O la droite (α, β, γ) , a un contact effectif du second « ordre avec la section de la surface S par ce même plan. »

Pour que le contact effectif soit d'un ordre plus élevé, il faut que la droite $\beta x - \alpha y = 0$ touche en O la courbe Σ' ; on est ainsi conduit aux relations suivantes:

si $h > 2$:

$$4\lambda^2 \frac{(A^2 + B^2 + C^2)^2}{C^2} \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) + 2\lambda \frac{(A^2 + B^2 + C^2)}{C} \chi_p(\alpha, \beta) \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0;$$

si $h=2$, on aura:

$$4\lambda^2 \frac{(A^2 + B^2 + C^2)^2}{C^2} \phi_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) + 2\lambda \frac{(A^2 + B^2 + C^2)}{C} \chi_p(\alpha, \beta) \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \quad (19)$$

$$+ \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) \cdot [f(\alpha, \beta)]^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 = 0.$$

Les valeurs des quantités $f(\alpha, \beta)$ et $\chi_p(\alpha, \beta)$ sont fournies par les identités (13), et l'on trouve

$$\beta f(\alpha, \beta) = \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + m \frac{\partial \theta}{\partial \gamma},$$

$$\beta \chi_p(\alpha, \beta) = \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial \alpha} + m \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial \gamma},$$

où $m = -\frac{A}{C}$. (20)

d'où:

« COROL. II. Il y a deux cercles, situés dans le plan osculateur (6) et « touchant en O la droite (α, β, γ) , qui ont un contact effectif du 3^{ème} « ordre avec la section de la surface (S) par ce même plan. »

Les valeurs de λ correspondant à ces cercles seront fournies par l'équation (18) ou par l'équation (19), suivant qu'on aura $h > 2$ ou $h = 2$; d'ailleurs l'hypothèse $h = 2$ ne peut se présenter que si k est égal à l'unité, puisque h doit être supérieur à k .

Comparons maintenant les courbes T'_1 et Γ_1 , formons la combinaison

$$\Sigma_1 = \mu T'_1 + \psi_j(x, y, mx + ny) [f(x, y)]^k (\beta x - \alpha y)^{k-1} \cdot \Gamma_1 = 0, \quad (21)$$

et on conclut

$$N(T'_1, \Gamma_1) = N(\Sigma_1, \Gamma_1) = q + 1.$$

Ainsi:

« COROL. III. Un cercle quelconque, situé dans le plan osculateur « (6) et touchant en O la droite (α, β, γ) , a un contact effectif du « premier ordre seulement avec la section de la surface (T) par ce « plan. »

Pour que le contact effectif soit d'un ordre plus élevé, il faut que λ vérifie la relation suivante obtenue en écrivant que les termes du degré le moins élevé dans Σ_1 s'annulent pour $x = \lambda, y = \beta$; on trouve:

si $k > 1$:

$$\mu = 0, \text{ d'où } \lambda = 0; \quad (22)$$

si $k = 1$:

$$\frac{2\lambda}{C} (A^2 + B^2 + C^2) \cdot \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) + \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \cdot f(\alpha, \beta) = 0. \quad (23)$$

28. De cette discussion nous tirerons les conclusions suivantes, en admettant que α , β , γ , ne satisfont pas à d'autres relations que celles que nous avons supposées.

I.° Si $k > 1$, le rayon du cercle osculateur est nul; car, d'après l'égalité (22) c'est le seul cercle qui ait, avec la section de la surface (T), un contact effectif du second ordre; et, d'après le corollaire I n.° [27], ce cercle aura également un contact effectif du second ordre avec la section de la surface (S). Ce cercle, de rayon nul, aura donc un contact effectif du second ordre avec la branche considérée de la courbe gauche. D'ailleurs le cercle, correspondant à la valeur de λ différente de zéro et fournie par l'égalité (18), n'aura pas avec la courbe gauche un contact effectif d'un ordre plus élevé que le premier, puisque ce cercle n'aura, corollaire III, qu'un contact effectif du premier ordre avec la section de la surface (T) par le plan osculateur. Dans l'hypothèse où k est supérieur à l'unité, h ne peut pas être égal à 2.

II.° Si $k = 1$, l'égalité (23) donne une seule valeur pour λ , cette valeur est, en égard à la première des relations (20):

$$2\lambda = - \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \left(C \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - A \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} \right)}{(A^2 + B^2 + C^2) \psi_{j+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \beta}; \quad (24)$$

le cercle, correspondant à cette valeur de λ , sera le cercle osculateur à la branche considérée. En effet, ce cercle a un contact effectif du second ordre avec la section de la surface (T) par le plan osculateur; d'après le corollaire I, il a également un contact effectif du second ordre avec la section de la surface (S) par le même plan: il aura donc un contact effectif du second ordre avec la branche de la courbe gauche.

Les valeurs de λ , définies par les équations (18) ou (19), donneront des cercles qui ne seront pas osculateurs à la courbe gauche; car ces cercles, qui ont un contact effectif du 3^{me} ordre avec la section de la surface (S), n'auront qu'un contact effectif du 1^{er} ordre avec la section de la surface (T), à moins que les valeurs de λ ne soient égales à la valeur fournie par l'équation (23).

Dans l'hypothèse où $k = 1$, les formules (40) du n.° [16] donnent

$$\left. \begin{aligned} A &= H \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \alpha} - G \frac{\partial \theta}{\partial \alpha}, \\ B &= H \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \beta} - G \frac{\partial \theta}{\partial \beta}, \\ C &= H \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \gamma} - G \frac{\partial \theta}{\partial \gamma}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

et l'on a en outre :
si $h > 2$

$$\left. \begin{aligned} H &= \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma), \\ G &= \phi_{p+2}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \psi_j(\alpha, \beta, \gamma); \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

si $h = 2$

$$\left. \begin{aligned} H &= \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \psi_j(\alpha, \beta, \gamma), \\ G &= \phi_i(\alpha, \beta, \gamma) \cdot [\psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma)]^2 + \phi_{p+2}(\alpha, \beta, \gamma) [\psi_j(\alpha, \beta, \gamma)]^2, \end{aligned} \right\} \quad (26^{bis})$$

D'après les formules (10), (12), (16) du n.° [18], nous aurons

$$\frac{C \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - A \frac{\partial \theta}{\partial \gamma}}{\beta} = \frac{H \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \gamma} - \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \beta}, \\ B_1 &= \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \gamma}, \\ C_1 &= \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \beta} - \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Si l'on a égard aux égalités (24) et (27), la formule (6) du n.° [17] nous conduira à l'expression suivante du rayon de courbure :

$$2R = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \frac{\psi_j(\alpha, \beta, \gamma)}{\psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma)} \cdot H \cdot \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (29)$$

Lorsque $h > 2$, on a

$$H = \psi_{q+1}(\alpha, \beta, \gamma),$$

il résulte de la formule (29)

$$2R = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \psi_j(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (30)$$

Lorsque $h=2$, on a

$$H = \psi_{i+1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \psi_j(\alpha, \beta, \gamma),$$

il vient alors

$$2R = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) [\psi_j(\alpha, \beta, \gamma)]^2 \cdot \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (30^{\text{bis}})$$

Il n'y a aucune difficulté à énoncer les théorèmes auxquels nous a conduit la discussion précédente.

10 février 1869.



Nota

sopra alcune singolarità di second'ordine delle curve gobbe razionali

(del D.^r EMILIO WEYR, a Praga.)

1. **L**a proprietà essenziale di una curva razionale è che si può stabilire una corrispondenza univoca fra i punti della curva ed i punti d'una retta arbitraria. In altre parole: i punti della curva si possono far corrispondere (come è possibile per una retta) ai valori di un parametro in tal modo, che ad un valore del parametro corrisponda un sol punto della curva e viceversa ad un punto della curva un sol valore del parametro.

Sia dunque C una curva gobba razionale d'ordine n ; x un punto di essa e ξ il valore del parametro corrispondente al punto x . Se ξ passa per tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$, il punto x descriverà tutta la curva C . Le coordinate $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ del punto x della curva C si possono esprimere mediante il parametro corrispondente (ξ), come funzioni razionali intere d'ordine n di questo parametro.

Avremo dunque:

$$\xi_1 = f_1(\xi), \quad \xi_2 = f_2(\xi), \quad \xi_3 = f_3(\xi), \quad \xi_4 = f_4(\xi), \quad (*)$$

dove:

$$\xi_i = a_{i0} \xi^n + a_{i1} \xi^{n-1} + a_{i2} \xi^{n-2} + \dots + a_{in}.$$

2. La proprietà anzidetta della curva C permette, come si vede subito, di considerare gli stessi sistemi di punti sopra C , come si fa sopra una retta. Potremo dunque parlare di punteggiate proiettive, o più generalmente di punteggiate aventi la corrispondenza $[m, n]$; potremo parlare d'involuzioni di qualunque grado, ecc. Ogni teorema che ha luogo per questi sistemi sopra una retta, avrà luogo anche per gli stessi sistemi sopra la curva C .

3. Consideriamo la curva C simultaneamente con un fascio F_2 di superficie di second'ordine, passanti per otto punti fissi arbitrari, epperò per una curva gobba del quart'ordine. Essendo $F'_2=0$, $F''_2=0$ le equazioni di due superficie del fascio, ogni terza superficie del medesimo fascio avrà l'equazione $F_2=F'_2+\lambda F''_2=0$, dove λ è il parametro del fascio.

Mettendo nell'equazione $F_2=0$ per le coordinate i valori (*), ne segue pel parametro ξ di un punto d'intersezione della curva C colla superficie F_2 , l'equazione $\phi(\xi)+\lambda\psi(\xi)=0$, dove ϕ ed ψ sono funzioni intere di ξ , del grado $2n$.

L'ultima equazione rappresenta un'involuzione d'ordine $2n$ e quindi possiamo dire:

« Le superficie d'un fascio di secondo grado determinano sopra C un'involuzione d'ordine $2n$ »

Siccome una tale involuzione deve avere $2(2n-1)$ punti doppi, ne segue:

« Fra le superficie del fascio F_2 ve ne sono $2(2n-1)$ tangenti alla curva C . »

Se degli otto punti-base del fascio F_2 , c giacciono sopra la curva C , l'involuzione risultante sarà solamente d'ordine $2n-c$, ed avrà perciò $2(2n-c-1)$ punti doppi, cioè:

« Per otto punti, c dei quali si trovano sopra C , passano $2(2n-c-1)$ superficie di secondo grado tangenti la curva. »

4. Prendiamo c punti ad arbitrio sopra C , e $(7-c)$ punti arbitrari nello spazio, $c \leq 7$; allora potremo stabilire ancora ad arbitrio un ottavo punto-base x del fascio F_2 . Se x si trova sopra C , nel fascio vi saranno, come abbiamo dimostrato, $2[2n-(c+1)-1]=2(2n-c-2)$ superficie tangenti la curva C in altrettanti punti y . Ma una superficie F_2 passante pei primi sette punti-base e tangente la curva C nel punto y , la sega ancora in $[2n-c-2]$ punti x , in modo che la corrispondenza fra x ed y avrà luogo secondo $[2(2n-c-2), (2n-c-2)]$, e vi saranno perciò

$$2(2n-c-2) + (2n-c-2) = 3(2n-c-2)$$

punti uniti. Cioè:

« Per sette punti, c dei quali sono sopra C , passano $3(2n-c-2)$ superficie di secondo grado, aventi con C un contatto di secondo ordine. »

Andando così avanti, prendiamo sei punti, c dei quali si trovino sopra C ; sappiamo che per questi punti e per un punto x preso ad arbitrio sopra

C passano $3[2n - (c + 1) - 2]$ superficie F_2 che hanno in altrettanti punti y con C un contatto di second'ordine. Ma una tale superficie, avente in y con C un contatto di second'ordine e passante pei sei primi punti-base, sega C in altri $(2n - c - 3)$ punti x . La corrispondenza fra x ed y sarà quindi secondo $[(2n - c - 3), 3(2n - c - 3)]$, e vi saranno $4(2n - c - 3)$ punti uniti, cioè:

« Per sei punti, c dei quali sono situati sopra C , passano $4(2n - c - 3)$ superficie di secondo grado aventi con C un contatto del terz'ordine. »

Analogamente si dimostra:

« Per cinque punti, c dei quali sono situati sopra C , passano $5(2n - c - 4)$ superficie di secondo grado aventi con C un contatto del quart'ordine. »

« Per quattro punti, c dei quali sono situati sopra C , passano $6(2n - c - 5)$ superficie di secondo grado aventi con C un contatto del quint'ordine. »

« Per tre punti, c dei quali sono sopra C , passano $7(2n - c - 6)$ superficie di secondo grado aventi con C un contatto del sesto ordine. »

« Per due punti, c dei quali sono sopra C , passano $8(2n - c - 7)$ superficie di secondo grado aventi con C un contatto del settimo ordine. »

« Per un punto fuori di C passano $9(2n - 8)$, e per un punto di C passano $9(2n - 9)$ superficie di secondo grado aventi con C un contatto dell'ottavo ordine. »

Nel caso che il punto sia sopra C , vi è anche una superficie di secondo grado che ha nello stesso punto nove punti infinitamente vicini in comune con C .

Finalmente:

« Vi sono $10(2n - 9)$ superficie di secondo grado che hanno un contatto del nono ordine colla curva C . »

I risultati ottenuti si possono riunire nella seguente proposizione generale;

« Per q punti dello spazio e per c punti della curva C passano $K(2n - K - c + 1)$ superficie di secondo grado aventi con C un contatto dell'ordine $(K - 1)$. I numeri K , c , q devono soddisfare la relazione $c + q + K = 10$. »

Milano, maggio 1871.

Note sur les quadriques polaires

(par H. G. ZEUTHEN, à Copenhague.)

MR. CREMONA, dans son mémoire couronné *Sur les surfaces du troisième ordre* (*) déduit les nombres qui ont égard à la surface Hessienne et à la surface Steinerienne d'une surface d'ordre quelconque de sa belle et générale théorie des « assemblages symétriques », qui permet à la géométrie pure de suivre, même en beaucoup d'autres questions, quelques-uns des procédés les plus fertiles de l'analyse. Toutefois comme il peut être utile de parvenir à un même résultat par des voies différentes, je me permets de donner ici une autre déduction géométrique de ces nombres.

On caractérise un système de quadriques satisfaisant à huit conditions au moyen des trois nombres suivants (**):

- 1.° le nombre μ des surfaces du système qui passent par un point,
- 2.° le nombre ν des surfaces qui touchent une droite,
- 3.° le nombre ρ des surfaces qui touchent un plan.

Nous supposons qu'il y ait dans le système ϕ cônes, χ coniques (c'est à dire quadriques infiniment aplaties limitées par des coniques) et ψ surfaces composées de deux plans dont la droite d'intersection est limitée par deux points (sommets). Alors

$$\left. \begin{aligned} \phi &= 2\rho - \nu \\ \chi &= 2\mu - \nu \\ \psi &= 2\nu - \mu - \rho. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ces formules, qui résultent d'une manière très simple des formules analogues dans la théorie des systèmes de coniques, peuvent servir en beaucoup de

(*) *Crelle-Borchardt*: Journal für die Mathematik, 68 Bd.; plus tard inséré dans la traduction allemande des *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*.

(**) Voir les mémoires de MM. de JONQUIÈRES et CHASLES; *Comptes rendus*, t. LVIII, p. 564 et t. LXII, p. 405.

cas à la détermination des caractéristiques des surfaces du second ordre (*). Comme la théorie de la surface Hessienne et de la surface Steinerienne d'un surface F_n (d'ordre n) repose sur celles des quadriques polaires par rapport à F_n , les mêmes formules peuvent être utiles dans le cas actuel.

Nous désignerons par $N(Z_1, Z_2, Z_3)$ le nombre des quadriques polaires qui satisfont aux trois conditions Z_1, Z_2, Z_3 , par (Z_1, Z_2) le système des quadriques polaires qui satisfont aux deux conditions Z_1 et Z_2 , et par $\phi(Z_1, Z_2)$, $\chi(Z_1, Z_2)$, $\rho(Z_1, Z_2)$ les nombres respectifs des surfaces singulières de ce même système. Nous désignerons respectivement par p , l et P les conditions de passer par un point ou de toucher une droite ou un plan, et respectivement par π , λ et Π celles d'avoir pour pôle un point donné (condition triple), un point d'une droite donnée (condition double) ou un point d'un plan donné (condition simple).

1. On a premièrement $N(\pi)=1$; car la polaire quadrique d'un point donné est entièrement déterminée.

2. Comme le pôle d'une quadrique polaire qui passe par un point donné se trouve sur la deuxième polaire du point, qui est d'ordre $n-2$, on a

$$N(p, \lambda) = n - 2.$$

Ce nombre est la caractéristique μ du système (λ) . On aura encore pour le même système $\chi = \psi = 0$. En effet, les deux espèces de surfaces singulières dont nous avons désigné les nombres par χ et ψ dépendent, lorsqu'elles sont regardées seulement comme lieu de points, respectivement de trois et de six conditions. On n'en trouvera donc pas, en général, dans un système où plus de trois ou de six conditions ont égard seulement à la détermination d'une surface comme lieu de points. Les formules (1) nous donnent maintenant

$$N(l, \lambda) = \nu = 2(n-2), \quad N(p, \lambda) = \rho = 3(n-2), \quad \phi(\lambda) = 4(n-2).$$

3. Comme le pôle d'une quadrique polaire qui passe par deux points donnés se trouve sur la courbe d'intersection des deuxièmes polaires des points, on a

$$N(2p, \Pi) = (n-2)^2.$$

(*) J'en ai fait cette application dans un article inséré dans le t. VII de la 2me série des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, où se trouve aussi ma démonstration des formules. — Mes premières applications des mêmes formules se trouvent dans les comptes rendus de l'Académie Danoise 1866.

Ce nombre est la caractéristique μ du système (p, Π) . On a pour le même système $\chi = \psi = 0$, de façon que

$$N(p, l, \Pi) = 2(n-2)^2, \quad N(p, P, \Pi) = 3(n-2)^2, \quad \phi(p, \Pi) = 4(n-2)^2.$$

Les deux premiers de ces nombres sont les caractéristiques μ des systèmes (l, Π) et (P, Π) . On a dans chacun de ces systèmes $\chi = \psi = 0$, de façon qu'on trouve :

$$\begin{aligned} N(2l, \Pi) &= 4(n-2)^2, & N(l, P, \Pi) &= 6(n-2)^2, & \phi(l, \Pi) &= 8(n-2)^2, \\ N(2P, \Pi) &= 9(n-2)^2, & \phi(P, \Pi) &= 12(n-2)^2. \end{aligned}$$

4. Comme le pôle d'une quadrique polaire qui passe par trois points donnés doit être un des points d'intersection de leur deuxièmes polaires, on a

$$N(3p) = (n-2)^3.$$

Ce nombre, qui est la caractéristique μ du système $(2p)$, peut servir de point de départ d'une détermination successive des caractéristiques des systèmes $(2p)$, (p, l) , $(2l)$, (p, P) et (l, P) , où $\chi = \psi = 0$. On trouve

$$\begin{aligned} N(2p, l) &= 2(n-2)^3, & N(2p, P) &= 3(n-2)^3, & \phi(2p) &= 4(n-2)^3, \\ N(p, 2l) &= 4(n-2)^3, & N(p, l, P) &= 6(n-2)^3, & \phi(p, l) &= 8(n-2)^3, \\ N(3l) &= 8(n-2)^3, & N(2l, P) &= 12(n-2)^3, & \phi(2l) &= 16(n-2)^3, \\ N(p, 2P) &= 9(n-2)^3, & \phi(p, P) &= 12(n-2)^3, \\ N(l, 2P) &= 18(n-2)^3, & \phi(l, P) &= 24(n-2)^3. \end{aligned}$$

On connaît ainsi les caractéristiques μ et ν du système $(2P)$, et l'on sait encore que $\chi = 0$. Mais il y a dans ce système-ci des quadriques composées de deux plans, dont les plans donnés limitent la droite d'intersection, pendant que les six autres conditions servent à déterminer ces surfaces singulières regardées comme lieux de points; ψ n'est donc pas égal à zéro.

Les trois nombres connus satisfaisant identiquement à l'une des trois équations (1), nous n'aurons pour déterminer les nombres ϕ , ψ et ρ que les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} 2\rho - \phi &= 18(n-2)^3, \\ \rho + \psi &= 27(n-2)^3. \end{aligned}$$

On doit donc chercher d'autres moyens de trouver un de ces trois nombres. Nous chercherons ϕ qui est le nombre *théorique* des cônes du système.

Ceux-ci auront leurs sommets sur la droite d'intersection des deux plans donnés; mais alors on sait (*) que chaque cône compte pour quatre dans le nombre ϕ ; ϕ est donc le quadruple du nombre des cônes qui sont des polaires quadriques et dont les sommets se trouvent sur une droite donnée. Nous appellerons ce dernier nombre x .

Pour trouver x on regarde un cas particulier du système (l, P) : celui où la droite donnée l se trouve dans le plan donné P . Nous désignerons ce système particulier par (l', P') . Un cône d'un système (l, P) compte pour deux dans le nombre $\phi(l, P)$ parce que son sommet se trouve dans le plan P . Dans le système particulier (l', P') une partie de ces cônes (au nombre y) ont le plan donné pour plan tangent, et les sommets des autres se trouvent sur la droite donnée. Dans chacun de ces derniers x cônes, coïncident deux cônes du système général (l, P) . On a donc:

$$4x + 2y = \phi(l, P) = 24(n-2)^3.$$

Dans une quadrique du système (l', P') qui satisfait à une neuvième condition coïncident, en général, deux quadriques du système (l, P) qui satisfont à la même condition. La caractéristique ν du système (l', P') a donc la valeur de

$$N(l, l', P') = \frac{1}{2}N(2l, P) = 6(n-2)^3.$$

Dans le cas où aussi la nouvelle droite l se trouve dans le plan donné, les ν surfaces qu'on trouve ainsi sont, 1^o les y cônes tangents au plan, et 2^o les quadriques propres dont les points de contact avec le plan sont au point d'intersection des deux droites. Dans chacune de ces dernières quadriques coïncident deux des $N(l, l', P')$ quadriques, et leur nombre est égal à celui des quadriques polaires qui passent par trois points coïncidant, ou bien à $N(3p) = (n-2)^3$. On trouve donc:

$$y = \frac{1}{2}N(2l, P) - 2N(3p) = 6(n-2)^3 - 2(n-2)^3 = 4(n-2)^3.$$

On trouve en suite:

$$x = 4(n-2)^3.$$

Revenons au système $(2P)$; on y a $\phi = 4x = 16(n-2)^3$. Puis on trouve:

$$N(3P) = 17(n-2)^3, \quad \psi(2P) = 10(n-2)^3.$$

(*) Voir l'article déjà cité dans les *Nouvelles Annales*.

5. Les résultats trouvés dans les n.° 2-4 nous fournissent le moyen de trouver par *la méthode de substitution* de Mr. CHASLES (*) le nombre des quadriques polaires qui satisfont à trois conditions quelconques, imposées soit directement aux surfaces, soit à leurs pôles. Nous entendons que ces nouvelles conditions, qui peuvent être doubles ou triples (**), soient indépendantes de la surface fondamentale donnée.

Nous n'appliquerons ici cette méthode de substitution qu'à la démonstration de résultats trouvés dans le mémoire de Mr. CREMONA. Nous ferons usage des théorèmes suivantes (***) : « Il y a dans un système, μ quadriques par rapport auxquelles deux points donnés sont conjugués, ρ quadriques par rapport auxquelles deux plans sont conjugués, et ν quadriques par rapport auxquelles deux droites sont conjuguées. (Deux droites sont conjuguées par rapport à une quadrique lorsqu'elles rencontrent les réciproques l'une de l'autre.) » En appliquant ces théorèmes au système (λ), on trouve :

Le lieu d'un point tel que deux points donnés sont conjugués par rapport à sa quadrique polaire (polaire mixte des points donnés) est de l'ordre $n-2$.

Le lieu d'un point tel que deux plans donnés sont conjugués par rapport à sa quadrique polaire (polaire mixte des plans donnés) est de l'ordre $3(n-2)$.

Le lieu d'un point tel que deux droites données sont conjuguées par rapport à sa polaire quadrique (polaire mixte des droites données) est de l'ordre $2(n-2)$.

[Les ordres des polaires pures, qui résultent de la coïncidence des deux points, des deux plans ou des deux droites auxquels appartiennent les polaires mixtes, ne sont que les caractéristiques μ , ρ et ν du système (λ). Ils sont donc égaux aux ordres des polaires mixtes. La polaire pure d'un point est sa deuxième polaire].

On peut aussi appliquer la méthode de substitution à la déduction des résultats indiqués dans les n.° 63 et 64 du mémoire de Mr. CREMONA (les n.° 174 et 175 de la traduction des *Preliminari*, ecc.).

6. Le nombre $\phi(\lambda) = 4(n-2)$ indique l'ordre de la surface

(*) Exposée pour des systèmes de coniques, dans le t. LVIII des Comptes rendus.

(**) Voir l'article dans les *Nouvelles Annales*.

(***) Exposés dans le mémoire cité de Mr. de JONQUIÈRES. On les prouve sans difficulté au moyen du principe de correspondance.

Hessienne, c'est à dire du lieu des pôles des quadriques polaires qui se réduisent à des cônes.

Le nombre $x=4(n-2)^3$ indique l'ordre de la surfaces Steinerienne, c'est à dire du lieu des sommets des cônes qui se trouvent parmi les quadriques polaires par rapport à une surface donnée.

Le nombre $\psi(2P)=10(n-2)^3$ est celui des quadriques polaires qui se divisent en deux plans. Il faut prouver, car notre assertion n'est pas évident a priori, qu'une quadrique polaire (d'un point o) qui est composée de deux plans et qui a pour sommets deux points quelconques de la droite d'intersection (ceux où elle rencontre les deux plans donnés $2P$), est la limite d'une seule série de quadriques polaires. En effet, l'assertion sera vraie, si les sommets de la quadrique singulière, qui sont des points de contact de tous les plans qui passent par eux, se trouvent sur une seule polaire consécutive. Or le pôle d'une quadrique consécutive qui passe par ces deux points doit être le point consécutif à o sur la courbe d'intersection de leurs deuxièmes polaires. La quadrique consécutive est donc entièrement déterminée.

Si les deux sommets coïncident, la quadrique singulière devient un cône singulier, et comme la coïncidence peut avoir lieu d'un seule manière dans un point quelconque de la droite d'intersection des deux plans qui composent la quadrique, cette droite est une droite simple de la surface Steinerienne. Il y en a donc $10(n-2)^3$ sur la Steinerienne. Pendant que les autres points de l'Hessienne et de la Steinerienne se correspondent un-à-un, tous les points de chacun de ces droites correspondent à un même point o de l'Hessienne: le pôle de la quadrique composée.

On peut trouver le degré de multiplicité de l'Hessienne à un de ces $10(n-2)^3$ points o , en regardant le système (\mathcal{N}) des quadriques dont les pôles se trouvent sur une droite \mathcal{N} passant par o . On a pour ce système (voir le n.º 2) $\mu=n-2$, $\chi=0$; mais ψ devient ici égal à 1. On trouve par conséquent $\rho=3(n-2)-1$, $\phi=4(n-2)-2$. La droite \mathcal{N} ne rencontre donc l'Hessienne qu'à $4(n-2)-2$ points différents de o . Deux points d'intersection coïncident donc en ce point, et il sera par conséquent double. Deux plans donnés étant toujours conjugués par rapport à une quadrique composée de deux plans et dont les sommets peuvent être choisis d'une manière convenable, la polaire mixte de deux plans passe par les $10(n-2)^3$ points doubles de l'Hessienne.

Le nombre $y=4(n-2)^3$ des cônes tangents à un plan est celui des

points doubles de la polaire pure du plan (voir le mémoire de Mr. CREMONA, 77; trad., 188). On voit sans difficulté que les polaires mixtes et pures des droites du plan, ainsi que l'Hessienne, passent par ces points.

La polaire pure d'une droite a pour points doubles les

$$N(3p) = (n-2)^3$$

points dont les polaires quadriques passent par la droite. Les polaires pures (deuxièmes) et mixtes des points de la droite et celles des plans par elle passent par ces points.

Un cône du système (P, Π) a son sommet sur le plan donné P , et il est, pour cette raison, compté pour deux dans le nombre ϕ qui appartient au système (*); $\frac{1}{2}\phi(P, \Pi) = 6(n-2)^2$ indique donc le nombre des points correspondants de l'Hessienne et de la Steinerienne qui se trouvent dans deux plans donnés Π et P . Le même nombre indiquera l'ordre de la courbe qui sur une des deux surfaces correspond à une section plane de l'autre. Celle de l'Hessienne est la courbe de contact avec la polaire pure du plan P ; elle passe par tous les $10(n-2)^3$ points doubles de l'Hessienne parce que le plan P rencontre toutes les droites correspondantes de la Steinerienne. La courbe de la Steinerienne qui correspond à une section plane de l'Hessienne ne rencontre pas, en général, les $10(n-2)^3$ droites de la Steinerienne, parce que le plan Π ne passe pas en général par les points correspondants, etc.

Copenhague, mais 1871.

(*) Voir l'article dans les *Nouvelles Annales*.

Sur la grandeur relative des infinis des fonctions.

(par PAUL DU BOIS-REYMOND, professeur à l'Université
de Freiburg en Bade.)

On s'occupera dans ce petit mémoire de la limite du rapport de deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$, ces fonctions devenant infinies ou s'annulant pour $x = \infty$. Notre but ne sera pas d'établir la valeur finie, quand elle existe, de la limite ou rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Mais nous nous proposons premièrement de développer quelques vues générales, d'ailleurs en partie connues, concernant la suite continue des fonctions ordonnées suivant les limites de leurs quotients et l'analogie de cette suite avec la suite des nombres réels (art. I), et secondement (art. II) de démontrer certains théorèmes, qui peuvent servir à classer les fonctions selon la limite du rapport $\frac{d \log f(x)}{dx}$, et qui, en déterminant dans un grand nombre de cas la vitesse avec laquelle la dérivée s'approche de l'infini, lorsque celle de la fonction primitive est donnée, pourront être utiles dans la théorie de la convergence des intégrales: savoir quand, la fonction étant donnée en série, il n'est pas permis de la différencier membre à membre, ou quand la fonction n'est connue que par certaines propriétés suffisantes pour la solution du problème (*).

Pour plus de concision dans l'énoncé des théorèmes et dans les démonstrations nous nous servirons des expressions et des notations suivantes:

S'il s'agit de comparer deux fonctions d'une variable x par rapport à la vitesse avec laquelle elles atteignent l'infini, x devenant infinie, il est clair

(*) Le rôle que la dérivée joue dans la théorie de la convergence des intégrales se trouvera exposé dans un petit ouvrage de l'auteur sur la convergence et la divergence des intégrales et des séries, qui va paraître chez B. G. Teubner, Leipzig.

qu'une fonction $f(x)$ rapprochera infiniment plus vite ou infiniment moins vite de sa limite infinie, qu'une autre fonction $\varphi(x)$, suivant que le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tendra vers une limite infinie ou s'annulera, pendant que x croit à l'infini.

Quand $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ est infinie, nous dirons que $f(x)$ a un infini plus grand que $\varphi(x)$, expression pas assez philosophique, j'en conviens, mais qui a l'avantage d'être brève et claire. De même lorsque $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ est finie ou est égale à zéro, nous dirons que $f(x)$ a un infini égal ou inférieur à celui de $\varphi(x)$. Et nous ferons usage des notations :

$$f(x) > \varphi(x), \quad f(x) \sim \varphi(x), \quad f(x) < \varphi(x)$$

qui seront équivalentes à ces formules :

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty, \quad \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} \text{ est finie, } \quad \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

Ce nouvel algorithme, qui présente quelque analogie avec les inégalités ordinaires, pourra être nommé celui des inégalités infinitaires. Soient donnés par exemple trois couples de fonctions satisfaisantes aux inégalités infinitaires :

$$f(x) > f_1(x), \quad \varphi(x) > \varphi_1(x), \quad \lambda(x) \sim \lambda_1(x),$$

on aura aussi :

$$f(x) \varphi(x) > f_1(x) \varphi_1(x), \quad f(x) \lambda(x)^{\pm 1} > f_1(x) \lambda_1(x)^{\pm 1},$$

et, en cas que $f(x) > \lambda(x)$, on aura $f(x) \pm \lambda(x) > f_1(x) \pm \lambda_1(x)$, mais, si $\lambda(x) > f(x)$, l'analogie fait défaut, et on aura $f(x) \pm \lambda(x) \sim f_1(x) \pm \lambda_1(x)$, formules qu'il est aisé de vérifier.

Comme ces inégalités n'expriment que des propriétés de la limite du quotient de deux fonctions, on peut s'en servir encore quand ces fonctions s'évanouissent à la limite, au lieu de devenir infinies. Or si deux fonctions s'évanouissent pour $x = \infty$, pourquoi ne pas attribuer aussi à zéro, symboliquement parlant, des grandeurs différentes et comparables, et dire que $f(x)$ a un zéro égal à celui de $\varphi(x)$, ou bien plus grand ou plus petit que celui de $\varphi(x)$, selon qu'on trouve $f(x) \sim \varphi(x)$, $f(x) > \varphi(x)$, $f(x) < \varphi(x)$?

Art. I.

1. Suite des fonctions ordonnée suivant les valeurs limites de leurs quotiens.

Les fonctions rangées par ordre de grandeur de leurs infinis forment une suite infinie. Pour s'en faire une idée, on commencera par ordonner en série, suivant leurs infinis les fonctions, les plus usitées :

$$f_0(x) \dots f_1(x) \dots f_2(x) \dots,$$

de manière que chaque fonction suivante ait un infini plus grand que toutes les précédentes. Qu'il s'agisse de placer dans cette série une fonction donnée $\psi(x)$, on y cherchera deux fonctions $f_{n-1}(x)$ et $f_n(x)$, telles qu'on ait: $f_{n-1} < \psi < f_n$, et on placera ψ entre f_{n-1} et f_n . Faisant

$$\text{lognat}x = 1x, \quad 11x = 1_2x, \quad 111x = 1_3x, \text{ etc.}$$

une pareille série sera :

$$\dots e^{-\mu e^{\mu_1 x^x}} \dots e^{-\mu x^x} \dots x^{-\mu} \dots (1x)^{-\mu} \dots (1_2x)^{-\mu} \dots (1_3x)^{-\mu} \dots \text{const} \dots (1_3x)^\mu \\ \dots (1_2x)^\mu \dots (1x)^\mu \dots x^\mu \dots e^{\mu x^x} \dots e^{\mu e^{\mu_1 x^x}} \dots$$

où à gauche de « const. » les fonctions sont ordonnées suivant la grandeur des infinis de leur valeurs reciproques, à droite suivant les infinis de leurs valeurs directes, en sorte que le quotient d'une fonction quelconque de la série par une précédente devient infini pour $x = \infty$, ce dont on se convaincra aisément dans la plupart des cas, en ramenant ces quotients à la forme $\frac{x}{1x}$, ainsi que je le ferai voir par quelques exemples. Cher-

chons d'abord la limite de $\frac{x^\mu}{(1x)^\mu}$. On a $\frac{x^\mu}{(1x)^\mu} = \left(\frac{\frac{\mu}{x^\mu}}{1x}\right)^\mu$. En posant $x^\mu = x_1$, on trouve $\lim \frac{x^\mu}{(1x)^\mu} = \frac{1}{\left(\frac{\mu}{x_1}\right)^\mu} \lim \left(\frac{x_1}{1x_1}\right)^\mu = \infty$. Établissons encore la limite de $x^{-m} e^{\mu x^x}$. Posant $\mu x^x = x_1$, cette expression devient $\mu^{\frac{m}{x_1}} \cdot x_1^{-\frac{m}{x_1}} e^{x_1}$, dont le

logarithme peut être mis sous la forme: $l\mu^{\frac{m}{x}} + lx_1 \left\{ \frac{x_1}{lx_1} - \frac{m}{x} \right\}$. Cherchons enfin la limite de $e^{\mu_1 x^{\alpha_1}} \cdot e^{-\mu x^{\alpha}}$, dont le logarithme est $\mu x^{\alpha} \left\{ \frac{\mu_1}{\mu} x^{\alpha_1 - \alpha} - 1 \right\}$. La limite de cette expression est infinie pour $\alpha_1 \geq \alpha$, $\mu_1 \geq \mu$, excepté le cas où l'on a à la fois $\alpha_1 = \alpha$, $\mu_1 = \mu$.

Il y a quelques remarques à faire sur la série F , telle que nous l'avons écrite.

1.) Chaque membre de la série F est affecté d'un ou de plusieurs paramètres $\mu, \mu_1, \dots, \alpha, \dots$. Il faut se représenter ces paramètres variant de 0 excl. jusqu'à ∞ excl., ce qui fait que chaque fonction de la série pourvue d'un paramètre représente un infini simple de fonctions, chaque fonction munie de deux paramètres représente une infini double de fonctions, etc.

2.) Le produit d'un nombre fini quelconque des fonctions constituant la suite F , telle que nous l'avons écrite, et pour des valeurs quelconques des paramètres qu'elles contiennent, a un infini moindre que chaque fonction située à droite des fonctions, dont est composé le produit. Par exemple on a:

$$(l_2 x)^{m_2} (l_3 x)^{m_3} \dots (l_n x)^{m_n} < (lx)^{\mu}$$

quelque grands que soient les nombres m_2, m_3, \dots, m_n , et quelque petit que soit μ . Cette remarque pourra servir à multiplier indéfiniment les fonctions de la série F . Car, par exemple, entre les fonctions $(lx)^{\mu}$, $(lx)^{\mu_1}$, $\mu_1 - \mu$ étant d'une petitesse quelconque, on pourra interposer

$$(lx)^{\mu} (l_2 x)^{m_2} (l_3 x)^{m_3} \dots (l_n x)^{m_n}$$

et faire varier les m de 0 excl. à ∞ excl.

En général, soient u_1, u_2 deux fonctions quelconques pour lesquelles on aie $u_1 < u_2$, en posant $u_2 = u_1 \phi(x)$, on aura $\phi(\infty) = \infty$, et encore :

$$u_1 < u_1 \phi(x)^{\mu} (l\phi)^{m_1} (l_2 \phi)^{m_2} \dots (l_n \phi)^{m_n} < u_2,$$

μ étant < 1 .

3.) Il va sans dire, qu'il existe une foule de procédés servant à rendre plus dense la suite F . Notons encore celui-ci. En substituant aux paramètres μ , etc. des fonctions convenablement choisies, on obtiendra autant de fonctions intermédiaires aux fonctions de la série, qu'on voudra. Ainsi

par exemple on a :

$$(1x)^M < x^{\frac{1}{(1x)^\mu}} < x^m, \quad 0 < \mu < 1,$$

$$(1x)^M < (1x)^{(1x)^\mu} < x^m, \quad 0 < \mu < 1,$$

quelque grand que soit M et quelque petit que soit m . Pour comparer les termes moyens de ces deux inégalités infinitaires, à cause de $x = (1x)^{\frac{1}{1_2x}}$, on pourra écrire :

$$(1x)^{-(1x)^\mu} x^{\frac{1}{(1x)^{\mu_1}}} = 1x^{\frac{(1x)^1 - \mu_1}{1_2x} - (1x)^\mu}$$

d'où l'on tire :

$$(1x)^{(1x)^\mu} < \frac{1}{x^{(1x)^{\mu_1}}} >$$

selon que $\mu + \mu_1 < 1$ ou $\equiv 1$. Jamais on a $(1x)^{(1x)^\mu} \sim x^{\frac{1}{(1x)^{\mu_1}}}$.

Pour obtenir de nouvelles fonctions intermediaires, on fera varier μ dans $(1x)^{(1x)^\mu}$ ou dans $x^{\frac{1}{(1x)^\mu}}$, etc. etc.

4.) Dans le logarithme multiple $l_n x$, l'index n pourra être choisi aussi grand qu'on voudra, mais il n'est pas permis de le faire croître indéfiniment, sans que $l_n x$ ne cesse d'être réel, ce qui devient évident en construisant le logarithme $l_n x$.

Traçons pour cet effet dans le plan des x et des y les lignes :

$$y = x, \quad y = 1x.$$

Si du point $x = X, y = 1X$ on tire une parallèle à l'axe des x , jusqu'à la ligne $y = x$, qu'elle coupera au point $x = 1X, y = 1X$, la perpendiculaire à l'axe des x passant par ce dernier point coupera la ligne $x = 1x$ au point $x = 1X, y = 1_2 X$. De la même manière on construira d'abord le point $x = 1_2 X, y = 1_2 X$, puis le point $x = 1_2 X, y = 1_3 X$, et ainsi de suite. Il est clair que, quelque grand que soit X , si l'on fait croître indéfiniment n , $l_n X$ finira toujours par obtenir une valeur negative, en sorte que $l_{n+1} X$ deviendra imaginaire.

2. Analogie de la suite F avec la suite des nombres réels.
 Cette analogie, qui est defectueuse sous un certain rapport,
 peut être rendue parfaite.

Comme entre deux fonctions, aussi proches par rapport à leurs infinis qu'on voudra, on peut en imaginer une infinité d'autres formant une espèce de passage de la première fonction à la seconde, on a comparé la suite F à la suite des nombres réels, dans laquelle on peut aussi passer d'un nombre à un nombre très peu différent par une infinité d'autres. Mais il y a entre les deux suites cette différence importante, que dans la suite des nombres, quelque serrée qu'on la suppose, on peut assigner à chaque nouveau nombre donné une place absolument déterminée, tandis que la place que devra occuper dans la suite F une fonction donnée restera jusqu'à un certain point arbitraire, parce que pour chaque fonction il en a une quantité illimitée d'autres qui ont un infini égal. En effet soient f, f_1, f_2, \dots des fonctions satisfaisant à la condition:

$$f > f_1 > f_2 \dots$$

on aura toujours:

$$f \sim \alpha f + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots$$

les α étant des constantes quelconques. Par exemple on voit sur le champ que

$$x + x^{\frac{1}{2}}, \quad x \frac{x+1}{x-1}, \quad \frac{1}{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

sont trois fonctions à infinis égaux.

Ici donc l'analogie entre la suite F et la suite des nombres se trouve être en défaut, mais je vais montrer, comment on réussit à la rendre parfaite, moyennant quelques restrictions concernant les fonctions à admettre dans la série.

Nous y parviendrons, en ne nous bornant pas à considérer la limite du rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, mais en examinant encore la différence $f(x) - \varphi(x)$. Par rapport à cette différence deux choses peuvent avoir lieu. Premièrement, x croissant indéfiniment, la différence $f(x) - \varphi(x)$ pourra finir par ne plus changer de signe. Secondement, cette différence pourra ne pas cesser de

changer de signe; en d'autres termes, l'équation $f(x) - \varphi(x) = 0$ pourra avoir un nombre infini de racines. Le dernier cas pourra avoir lieu quand même les deux courbes $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ sont privées de points d'inflexion, comme pour

$$f(x) = x^2 + \sin x, \quad \varphi(x) = x^2.$$

Il n'aura pas lieu, si les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont composées algébriquement de puissances, racines, exponentielles, et opérations pareilles. Nous supposons que parmi les fonctions, que nous considérons, il ne s'en trouvera pas deux, dont la différence, égalée à zéro, ait un nombre infini de racines. Cela posé, l'incertitude touchant l'ordre des places, qu'occuperont deux fonctions à infinis égaux dans la série, cessera, si l'on établit la règle suivante :

Une fonction $f_2(x)$ devra être placée à droite d'une autre fonction $f_1(x)$, si la différence $f_2(x) - f_1(x)$, x croissant à l'infini, finit par rester positive.

Il est nécessaire qu'elle finisse par rester ou positive ou négative, car si elle restait zéro, les deux fonctions seraient identiques. Le quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ étant plus grand ou moins grand que l'unité, selon que la différence $f(x) - \varphi(x)$ est positive ou négative, il existe entre le premier procédé pour constituer les fonctions en série et celui que nous venons d'exposer ce rapport, qu'au lieu d'examiner simplement si la limite $\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ est infinie ou zéro; on se demande si elle est plus grande ou plus petite que l'unité, de sorte que le premier procédé est contenu dans le second.

Appliquons le second procédé aux fonctions

$$x + x^{\frac{1}{2}}, \quad x \frac{x+1}{x-1}, \quad \log^{-1} \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

D'abord on a :

$$x + x^{\frac{1}{2}} - x \frac{x+1}{x-1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x-1} \left\{ 1 - \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x} \right\}$$

différence qui finit par être positive. La différence $\log^{-1} \left(1 + \frac{1}{x} \right) - x \frac{x+1}{x-1}$ peut être mise sous la forme :

$$\frac{u e^u + (1 - e^u)(2 - e^u)}{u(1 - e^u)(2 - e^u)},$$

moyennant la substitution $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = u$. Quand x devient infinie ou devient zéro après avoir été positive, cette différence devient positive aussi. Enfin par la même substitution on a :

$$x + x^{\frac{1}{2}} - \log^{-1}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{(e^u - 1)^{\frac{1}{2}} - \frac{u}{1 \cdot 2} - \frac{u^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots}{e^u - 1}$$

différence qui devient encore positive. Les trois fonctions en question devront être rangées dans l'ordre suivant :

$$x \frac{x+1}{x-1}, \quad \log^{-1}\left(1 + \frac{1}{x}\right), \quad x + x^{\frac{1}{2}}.$$

Art. II.

Théorèmes concernant le rapport entre les infinis des fonctions et de leurs dérivées.

Nous supposerons que les fonctions dont nous voulons comparer les infinis avec ceux de leurs dérivées, n'ont pas un nombre illimité de maxima et minima, ni même de points d'inflexion, car si le dernier cas avait lieu, c'est les dérivées qui pourraient avoir un nombre infini de maxima et minima et par conséquent ne pas être susceptibles d'une limite déterminée finie ou infinie.

1. Selon que l'on a $f(x) \gtrsim \varphi(x)$, en posant $f(x) = \varphi(x) \cdot f_1(x)$, on aura $f_1(\infty) = \frac{0}{\infty}$. Si l'on a $f(x) \sim \varphi(x)$, et que l'on fasse $f(x) = M\varphi(x) + f_1(x)$ où $M = \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, on aura $f_1(x) < f(x)$.

Les relations $f(x) \begin{matrix} < \\ \sim \\ > \end{matrix} \varphi(x)$ ne sont pas altérées quand on multiplie $f(x)$ et $\varphi(x)$ par des fonctions qui restent finies et déterminées et ne s'annulent pas pour $x = \infty$, par exemple par un constante d'une valeur quelconque,

ainsi les relations $\varphi(x) \succ x$ entraînent celles-ci : $e^{\varphi(x)} \prec e^{mx}$, m étant un nombre aussi petit et M un nombre aussi grand qu'on voudra.

2. *Lemme.* On a $f'(\infty) = \lim \frac{f(x)}{x}$, toutes les fois que $f'(\infty)$ n'est pas indéterminée.

Démonstration. La formule $(b-a)f'(\xi) = f(b) - f(a)$, $a < \xi < b$, équivaut à une identité, pourvu que, dans le cas où $f'(x)$ éprouve des changements brusques de valeur entre les limites a et b de x , on convienne de ne considérer $f'(\xi)$ que comme une valeur moyenne entre les valeurs extrêmes de $f'(x)$ dans l'intervalle $x=a, \dots, x=b$. Maintenant en écrivant cette formule ainsi qu'il suit :

$$f'(\xi) = \frac{1}{1 - \frac{a}{b}} \left\{ \frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{b} \right\}, \quad a < \xi < b,$$

et en faisant d'abord $b = \infty$ puis $a = \infty$, on obtient le lemme en question.

3. *Théorème.* Aux trois cas $f(x) \sim x$ répondent ceux-ci :

$$f'(\infty) = \begin{matrix} 0 \\ \text{ni zéro ni infini.} \\ \infty \end{matrix}$$

Démonstration. En faisant $f(x) = x f_1(x)$ selon que $f(x) \succ x$, on a

$$f_1(\infty) = \lim \frac{f(x)}{x} = \begin{matrix} \infty \\ 0 \end{matrix},$$

donc, d'après le lemme : $f'(\infty) = \begin{matrix} \infty \\ 0 \end{matrix}$. Si l'on a $f(x) \sim x$, on fera

$$f(x) = Ax + f_1(x), \quad f'(x) = A + f'_1(x).$$

Or à cause de $f_1(x) \prec x$, et à cause de la première partie de cette démonstration, on a $f'_1(\infty) = 0$, donc $f'(\infty) = A$.

4. *Lemme.* Soit $e^{Mx} \succ f(x) \succ e^{mx}$, il sera permis de poser

$$f(x) = f_1(x) e^{\mu x},$$

où $M > \mu > m$, et où $f_1(x)$ satisfait à l'une ou à l'autre des conditions :

$$f_1(x) \prec e^{\alpha x}, \quad \frac{1}{f_1(x)} \prec e^{\alpha x},$$

α étant un nombre si petit que l'on voudra.

Démonstration. Quand on a $e^{Mx} > f(x) > e^{mx}$, on doit avoir $\log f(x) \sim x$, car en faisant $f(x) = e^{\varphi(x)}$, on trouve

$$\lim x \left\{ \frac{\varphi(x)}{x} - M \right\} = -\infty, \quad \lim x \left\{ m - \frac{\varphi(x)}{x} \right\} = -\infty,$$

donc $M > \lim \frac{\varphi(x)}{x} > m$, ainsi $\lim \frac{\varphi(x)}{x}$ est une quantité finie différente de zéro. Et à cause de $\varphi(x) \sim x$, en posant $\varphi(x) = \mu x + \varphi_1(x)$, on aura $\varphi_1(x) \ll x$.

Maintenant si dans $f(x) = e^{\mu x + \varphi_1(x)}$ on fait $e^{\varphi_1(x)} = f_1(x)$, selon que $\varphi_1(x)$ est positive ou négative, $f_1(x)$ satisfera à la première ou à la seconde condition du lemme.

En général, chaque fois qu'en posant $f(x) = e^{\varphi(x)}$, on aura $\varphi(x) \sim x$, on pourra indiquer deux nombres μ_1, μ_2 aussi rapprochés qu'on voudra et satisfaisants à l'inégalité infinitaire $e^{\mu_1 x} > f(x) > e^{\mu_2 x}$. Car en faisant $\varphi(x) = \mu x + \varphi_1(x)$, $\mu_1 > \mu > \mu_2$, les rapports de $e^{\mu_1 x}$ à $f(x)$, et de $f(x)$ à $e^{\mu_2 x}$ pourront s'écrire : $e^{x \left\{ \mu_1 - \mu - \frac{\varphi_1(x)}{x} \right\}}$, $e^{x \left\{ \mu - \mu_2 + \frac{\varphi_1(x)}{x} \right\}}$, où l'on aura $\lim \frac{\varphi_1(x)}{x} = 0$. Si au contraire il n'est pas possible d'indiquer un nombre M suffisamment grand ou un nombre m suffisamment petit, pour qu'on ait $e^{Mx} > f(x) > e^{mx}$, on n'aura jamais $\varphi(x) \sim x$.

5. *Théorème.* Soit $f(x)$ une fonction qui a un infini plus grand que les puissances minimales e^x , et un infini moindre que les puissances le plus hautes de e^x , dans ce cas on aura toujours :

$$f'(x) \sim f(x).$$

Démonstration. En effet, en posant $f(x) = e^{\mu x + \varphi(x)}$, la différentiation logarithmique donne :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \mu + \varphi'(x).$$

Or à cause de $\varphi(x) \ll x$ et du théorème 3, on a $\varphi'(\infty) = 0$, donc $\lim \frac{f'(x)}{f(x)} = \mu$

6. *Théorème inverse.* Quand on n'a pas $e^{Mx} > f(x) > e^{mx}$, M étant si grand et m si petit qu'on voudra, on n'aura jamais $f'(x) \sim f(x)$.

En posant $f(x) = e^{\varphi(x)}$, on n'aura pas $\varphi(x) \sim x$, donc $\varphi'(\infty)$ sera ou zéro ou infinie, et comme l'on a $\frac{f'(x)}{f(x)} = \varphi'(x)$, $\lim \frac{f'(x)}{f(x)}$ sera de même ou zéro ou infini.

Généralisation des théorèmes précédents, et classification des fonctions selon leurs types infinitaires.

Ces théorèmes se généralisent facilement, vu que l'on peut remplacer l'exponentielle e^x par une fonction quelconque v devenant infinie pour $x = \infty$.

7. En effet, supposons que l'on ait $v^M > f(x) > v^m$, M étant si grand et m si petit qu'on voudra, on pourra écrire $f(x) = f_1(x) v^\mu$, $M > \mu > m$, et $f_1(x)$ satisfaisant à l'une ou à l'autre des conditions $f_1(x) < v^\alpha$, $\frac{1}{f_1(x)} < v^\alpha$, α étant de la dernière petitesse. C'est une conséquence qui découle du lemme 4., si l'on fait $v = e^u$, $x = \psi(u)$.

8. De même si $v^M > f(x) > v^m$, on a toujours:

$$\frac{f'(x)}{\frac{d1v}{dx}} \sim f(x).$$

Car en posant $v = e^u$, $x = \psi(u)$, d'après le théorème 5, on a

$$\frac{df(x)}{du} = \frac{df(x)}{dx} \frac{dx}{du} \sim f(u)$$

et de l'équation $u = 1v$, on tire $1 = \frac{d1v}{dx} \cdot \frac{dx}{du}$.

9. Enfin quand on n'a pas $v^M > f(x) > v^m$, on n'aura jamais

$$\frac{f'(x)}{\frac{d1v}{dx}} \sim f(x).$$

Car en faisant $e^u = v$, $x = \psi(u)$, $f(x) = e^{\theta(u)}$, on n'aura pas $\theta(u) \sim u$, donc on aura $\frac{d\theta(u)}{du} = \frac{df(x)}{du} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{\frac{d1v}{dx}} =$ à zéro, ou infinie.

On peut donner à ces théorèmes l'énoncé parfaitement symétrique que voici.

10. Soient u et v deux fonctions de x devenant infinies pour $x = \infty$, si $\lim \frac{\frac{d^2 u}{dx^2}}{\frac{d^2 v}{dx^2}}$ n'est ni zéro ni infini, on pourra toujours donner à u la forme Uv^μ , $U^{\pm 1}$ ayant un infini moindre qu'une puissance, quelque petite qu'elle soit, de v ; et de même à v on pourra donner la forme Vu^μ , $V^{\pm 1}$ ayant un infini moindre qu'une puissance de u . Réciproquement, quand on peut donner à u ou à v cette forme Uv^μ ou Vu^μ , on aura toujours $\frac{d^2 u}{dx^2} \sim \frac{d^2 v}{dx^2}$.

Ces théorèmes conduisent à une espèce de classification des fonctions selon les infinis de leurs dérivées. Nommons la quantité $\frac{1}{\frac{d^2 u}{dx^2}}$ type infinitaire de

la classe des fonctions dont l'infini n'atteint pas celui des puissances les plus hautes de v et est supérieur à celui des puissances les plus basses de v : à chaque type répondra une classe, mais la classe ne changera pas quand on multiplie le type par une constante, c'est à dire, quand on élève la fonction v , qui entre dans le type, à une puissance quelconque. Il y a donc moins de types, ainsi que cela doit être, que de fonctions. Comme nous l'avons vu plus haut, l'unité est le type de toutes les fonctions $f(x)$, satisfaisantes à la condition $e^M > f(x) > e^{mx}$, ainsi x sera le type de toutes les fonctions $x^M > f(x) > x^m$, pour lesquelles on aura donc $x f'(x) \sim f(x)$, $x|x$ sera le type des fonctions $1x^M > f(x) > 1x^m$, pour lesquelles on aura $x|x f'(x) \sim f(x)$, etc. etc.

Quelques théorèmes concernant les types infinitaires des fonctions.

Jetons un coup d'œil sur les trois séries suivantes, dont la première contient quelques fonctions rangées par ordre de grandeur de leur infinis, la seconde leurs dérivées, la troisième leurs types :

$$\begin{aligned}
 & e^{-e^x}, \quad e^{-x^2}, \quad e^{-x}, \quad x^{-2}, \quad x^{-1}, \quad x^{-\frac{1}{2}}, \log x^{-1}, \text{ const}, \quad 1x, \quad x^{\frac{1}{2}}, \quad x, \quad x^2, \quad e^x, \quad e^{x^2}, \quad e^{e^x}, \\
 & -e^x e^{-e^x}, \quad -2xe^{-x^2}, \quad -e^{-x}, \quad -2x^{-2}, \quad -x^{-1}, \quad -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}, \quad -\frac{1}{x}, \quad 0, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad 1, \quad 2x, \quad e^x, \quad 2xe^x, \quad e^x e^{e^x}, \\
 & -e^{-x}, \quad -\frac{1}{x}, \quad -1, \quad -x, \quad -x, \quad -x, \quad -x|x, \quad , \quad +x|x, \quad x, \quad x, \quad x, \quad 1, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{e^c}.
 \end{aligned}$$

En nous bornant à considérer les fonctions à droite de « const. », nous remarquons que $f(\infty)$ parcourant tous les infinis, des plus petits, immédiatement à droite de « const. », jusqu'aux plus grands, $f'(\infty)$ commence par s'évanouir, puis devient finie et différente de zéro, puis atteint un infini égal à celui de $f(x)$, et finalement son infini surpasse celui de $f(x)$.

La troisième série nous fait voir que les types réciproques peuvent atteindre les infinis les plus grands, mais les types directes ne peuvent vraisemblablement pas avoir un infini aussi grand qu'une puissance de x supérieure à la première. Pour donner à ces conclusions plus de sûreté, et pour faire en sorte qu'elles embrassent aussi les fonctions intermédiaires à celles qui se trouvent dans la première série, notons ces théorèmes :

11. *Théorème.* Soit $f'(x) > f(x)$ et posons $f'(x) = \lambda(x)f(x)$. Soit $f_1(x) > f(x)$, et posons $f_1'(x) = \lambda_1(x)f_1(x)$. Je dis qu'on n'aura jamais $\lambda(x) > \lambda_1(x)$.

Démonstration. En faisant $f_1(x) = \varphi(x)f(x)$ on a :

$$\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Au lieu de $f_1'(x)$, $f'(x)$, nous écrirons $\lambda_1(x)f_1(x)$, $\lambda(x)f(x)$. Il vient :

$$\lambda_1(x) = \lambda(x) + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

$\varphi(x)$ devenant infinie pour $x = \infty$, $\lim \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ ne pourra pas être négative, donc etc.

12. *Théorème.* Soit $f'(x) < f(x)$ et $f_1(x) < f(x)$,

$$f'(x) = \frac{f(x)}{\lambda(x)}, \quad f_1'(x) = \frac{f_1(x)}{\lambda_1(x)};$$

je dis que l'on n'aura jamais $\lambda(x) > \lambda_1(x)$.

Démonstration. Faisons $f_1(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Nous avons :

$$\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

$\lim \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ étant positive, et $\lim \frac{f'(x)}{f(x)}$ zéro, de

$$\lim \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \lim \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = 0$$

nous tirons d'abord $\lim \frac{f_1(x)}{f_1(x)} = 0$. De plus, en introduisant les fonctions λ , nous trouvons :

$$\lambda_1(x) = \lambda(x) + \lambda(x)\lambda_1(x) \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

donc etc.

Soit par exemple $f(x) = x^2$, $f_1(x) = x$, $\varphi(x) = x$, $\lambda(x) = \frac{x}{2}$, $\lambda_1(x) = x$. L'équation $\lambda_1(x) = \lambda(x) + \lambda(x)\lambda_1(x) \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ donnera $\lambda_1(x) = x = \lambda(x) + \frac{x}{2}$. On a donc $\lambda_1(x) \sim \lambda(x)$. Soit en second lieu $f(x) = x$, $f_1(x) = \log x$, $\varphi(x) = \frac{x}{\log x}$, $\lambda(x) = x$, $\lambda_1(x) = x \log x$. L'équation entre les λ donne

$$\lambda_1(x) = \lambda(x) + x(\log x - 1).$$

On a donc $\lambda_1(x) \succ \lambda(x)$. A ces théorèmes ajoutons encore celui-ci :

13. Soient t_1, t_2, \dots, t_r les types de r fonctions et soit t_r le type dont la valeur directe ait l'infini le plus petit, ou la valeur reciproque l'infini le plus grand, t_r sera le type du produit de ces r fonctions.

En effet soient $f_1(x), f_2(x)$ deux fonctions avec les types t_1, t_2 et soit $t_1 \succ t_2$. Dans

$$\frac{df_1 f_2}{dx} = \frac{df_1}{dx} f_2 + \frac{df_2}{dx} f_1$$

on aura $\frac{df_1}{dx} f_2 \prec \frac{df_2}{dx} f_1$, $t_2 \cdot \frac{df_2}{dx} \cdot f_1 \sim f_1 f_2$, donc $t_2 \frac{df_1 f_2}{dx} \sim f_1 f_2$.

De l'excès maximum de l'infini de la dérivée sur celui de la fonction.

La seconde des trois séries transcrites plus haut, savoir celle des dérivées des fonctions de la première série nous montre que, plus les infinis des fonctions sont grands, plus aussi les infinis des dérivées surpassent ceux des fonctions. Il est curieux d'établir de combien les infinis des dérivées peuvent surpasser ceux des fonctions. On obtiendra des éclaircissements suffisants sur ce sujet, au moyen des raisonnements suivants.

Quand une fonction de x s'évanouit pour $x = \infty$ sans avoir un nombre infini de maxima et minima, sa dérivée s'évanouira aussi. Supposons donc

que $f(x)$ devienne infinie pour $x = \infty$, $l_n^{-\nu} f(x)$ devra s'évanouir pour $x = \infty$, ainsi la dérivée de $l_n^{-\nu} f(x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x) \cdot l_1 f \cdot l_2 f \cdots l_n^{1+\nu} f}$$

s'évanouira aussi, quelque grand que soit n et quelque petit que soit $\nu > 0$. Soit de plus $t(x) f'(x) \sim f(x)$. L'infini de $f(x)$ étant supposé plus grand que celui d'une puissance de e^x , on aura $t(\infty) = 0$.

14. Mais si l'on divise l'inégalité infinitaire $f'(x) < f(x) \cdot l_1 f \cdots l_n^{1+\nu} f$ par l'égalité $t(x) f'(x) \sim f(x)$, on aura toujours:

$$\frac{1}{t(x)} < l_1 f \cdots l_n^{1+\nu} f$$

et à fortiori $\frac{1}{t(x)} < f^\nu$, ν étant si petit qu'on voudra.

Quand $f(x)$ s'évanouira plus vite pour $x = \infty$ que e^{-x} , comme par exemple $f(x) = e^{-e^x}$, sa dérivée, dans l'exemple précédent $-e^x \cdot e^{-e^x}$, s'évanouira plus lentement que $f(x)$, le rapport $\frac{f'(x)}{f(x)}$ aura une limite infinie. Mais si $f(\infty) = 0$, $\lim l_n^{-\nu} \frac{1}{f(x)}$ sera aussi égal à zéro par conséquent

$$\frac{f'(x)}{f l_1^{\frac{1}{f}} l_2^{\frac{1}{f}} \cdots l_n^{1+\nu} \frac{1}{f}}$$

s'évanouira aussi, quelque grand que soit n et quelque petit que soit ν , pourvu qu'on ait $\nu > 0$.

15. Si donc on fait $t(x) f'(x) \sim f(x)$, on obtiendra de nouveau

$$\frac{1}{t(x)} < l_1 \frac{1}{f} \cdots l_n^{1+\nu} \frac{1}{f}$$

et à fortiori $\frac{1}{t(x)} < \frac{1}{f(x)^\nu}$, inégalité qui s'obtient directement en songeant que $f(x)^\nu$ et sa dérivée doivent s'évanouir pour $x = \infty$, donc on a $f'(x) < f(x)^{1-\nu}$, inégalité qu'il faut diviser par $t(x) f'(x) \sim f(x)$.

De cette manière nous avons déterminé l'infini que ne saurait surpasser le rapport de la dérivée à la fonction chez les fonctions aux infinis les plus grands, ou bien aux zéros les plus petits.

Sur les infinis des fonctions pour des valeurs finies de la variable.

Il est facile de réduire les infinis des fonctions pour une valeur finie de x , par exemple pour $x=0$, à ceux que nous avons considérés jusqu'ici. En faisant $\frac{1}{x} = x_1$, $f(x) = F(x_1)$ on aura $f'(x) = -x_1^2 F'(x_1)$, et comme x_1 s'évanouit pour $x = \infty$, on peut exprimer chaque théorème concernant $f(\infty)$ et $f'(\infty)$ comme théorème touchant $F(0)$ et $F'(0)$. Nous finissons par noter encore une proposition qui se rapporte aux infinis de $f(x)$ et $f'(x)$ pour $x=0$, et dont la démonstration directe est très simple.

16. Quand $f(x)$ devient infinie pour $x=0$, on a

$$f'(x) > f(x) l_1 f \dots l_n^{1-\nu} f$$

(ν autant petit qu'on voudra) et quand $f(x)$ s'évanouit pour $x=0$, on a

$$f'(x) > f(x) l_1 \frac{1}{f} \dots l_n^{1-\nu} \frac{1}{f}.$$

En effet, si la fonction $f(x)$ devient infinie pour $x=0$, sans avoir un nombre infini de maxima et minima, la dérivée doit devenir infinie aussi, parce que la tangente asymptotique est verticale. Donc les dérivées de $l_n^\nu f$ pour $f(0) = \infty$ et de $l_n^\nu \frac{1}{f}$ pour $f(0) = 0$ seront infinies pour $x=0$.

FINE DEL TOMO IV.º (SERIE II.ª)