ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DAL

prof. Francesco Brioschi

IN MILANO

colla cooperazione dei professori:

Luigi Cremona *in Roma* — **Eugenio Beltrami** *in Roma*
Ulisse Dini *in Pisa.*

SERIE II - TOMO XXIII
(dal gennaio al settembre dell'anno 1895).

MILANO.

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XXIII.$^{\circ}$ (SERIE II.^{a})

PAG.

Complemento alle ricerche sulle forme quaternarie quadratiche e sui gruppi poliedrici. — *Luigi Bianchi* 1

Relations entre la fonction Bessélienne de 1.re espèce et une fraction continue. — *I. H. Graf* 45

Sulla definizione di integrali. — *Giulio Ascoli* 67

Nuove formole nella moltiplicazione e nella trasformazione delle funzioni ellittiche. — *Francesco Brioschi* 73

Di alcune superficie che ammettono un sistema di linee eguali e un secondo sistema di linee eguali, o simili. — *Geminiano Pirondini* 93

Deformazione di una sfera isotropa. — *Roberto Marcolongo* 111

Sulla definizione di integrale. — *G. Peano* 153

Dimostrazione algebrica del teorema di Weierstrass sulle forme bilineari. — *Benedetto Calò* 159

Sulle funzioni σ ellittiche pari. — *Ernesto Pascal* 181

Sur les groupes paramètres dans la théorie des substitutions. — *Ed. Maillet.* 199

Riemann e la sua importanza nello sviluppo della matematica moderna. — *Felix Klein* 209

Indice.

Pag.

Sull'equazioni lineari alle derivate parziali del 2.° ordine (tipo ellittico), e sopra una classificazione dei sistemi di linee ortogonali che si possono tracciare sopra una superficie. — *Pietro Burgatti* 225

Sulle rotazioni permanenti stabili di un sistema in cui sussistono moti interni stazionarii. — *Vito Volterra* 269

Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio elastico. — *Giuseppe Lauricella* 287

Un contributo alla teoria delle forme lineari alle differenze. — *Ettore Bortolotti* 309

Complemento alle ricerche sulle forme quaternarie quadratiche e sui gruppi poliedrici.

(*Di* Luigi Bianchi, *a Pisa.*)

Il presente lavoro è una continuazione della Memoria da me pubblicata l'anno scorso nel tomo 21 di questi *Annali* e insieme della mia Nota ulteriore sull'argomento nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » (7 gennaio 1894) (*). Lo scopo principale di questa nuova pubblicazione è di dare numerose applicazioni numeriche dei metodi generali alla determinazione del gruppo aritmetico riproduttivo di una forma quaternaria a determinante negativo. Essa diversifica dalle precedenti per ciò che alla considerazione di quel sottogruppo riproduttivo della forma, che è congruo coll'identità (mod. 2), è sostituita a dirittura quella del gruppo riproduttivo completo. Col moltiplicare appunto gli esempi, mi sono convinto che se da un lato si perde così il vantaggio che l'incontro fra due sfere di riflessione possa aver luogo solo ortogonalmente o tangenzialmente, dall'altro però l'aggiunta di nuove sfere di riflessione permette di isolare in casi molto più numerosi e con un minor numero di faccie un poliedro racchiuso da sfere di riflessione. Si aggiunga poi che nei casi, assai frequenti, in cui il gruppo possiede infiniti piani di riflessione, la ricerca non risulta affatto complicata dalla estensione di cui è parola.

Alla definizione aritmetica dei gruppi poliedrici corrispondenti al gruppo riproduttivo di una forma quaternaria mi sono arrestato soltanto in un caso (n.i 22, 23), che conduce ad una notevole estensione dei gruppi già da me considerati nel vol. 40 dei « Mathematische Annalen ». Del resto anche per gli

(*) Citerò questi due lavori rispettivamente con (*A*), (*B*).

altri casi si trovano già nella Nota (*B*) tutti gli elementi necessari per una tale definizione; soltanto occorre associare alle sostituzioni ivi considerate a determinante *1* convenienti sostituzioni della medesima forma a determinante *2*.

Notiamo qui in fine, per non dover ripetere l'osservazione ad ogni singolo esempio, che in tutti i casi considerati nel presente lavoro non esiste, fuori del gruppo aritmetico riproduttivo della forma quaternaria, alcuna sostituzione permutabile col gruppo, cioè il gruppo stesso non è ampliabile. Fanno soltanto eccezione due casi che verranno indicati particolarmente.

§ 1. Le forme quaternarie: $px_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Supporremo qui soltanto, per semplicità, che il numero intero p sia privo di fattori quadrati. Considerando il gruppo aritmetico completo riproduttivo della forma, determiniamo col metodo dei §§ 1, 2 della Nota (*B*) le riflessioni contenute nel gruppo poliedrico corrispondente. Esse hanno la forma:

$$z' = \frac{(\alpha_1\sqrt{\lambda} + i\alpha_2\sqrt{\mu})z_0 + i\sqrt{\lambda}m}{i\sqrt{\lambda}nz_0 + (\alpha_1\sqrt{\lambda} - i\alpha_2\sqrt{\mu})}, \tag{1}$$

essendo:

$$p = \lambda\mu,$$

una qualunque decomposizione di p in due fattori, e indicando con α_1, α_2, m, n numeri interi, *dei quali i due ultimi debbono essere insieme pari o dispari;* inoltre il determinante della (1) deve essere o eguale a *1* o eguale a *2*, ciò che scriviamo:

$$\lambda\alpha_1^2 + \mu\alpha_2^2 + \lambda mn = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}. \tag{2}$$

Cerchiamo anzi tutto i piani di riflessione.

Se p è impari, essi si ottengono soltanto quando si faccia

$$n = 0, \qquad \lambda = 1, \qquad \mu = p, \qquad \alpha_1 = 1, \qquad \alpha_2 = 0,$$

ovvero:

$$n = 0, \qquad \lambda = p, \qquad \mu = 1, \qquad \alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 1,$$

ed hanno rispettivamente le equazioni:

$$\eta = r, \qquad \xi = r\sqrt{p},$$

indicando r un intero qualunque. Ma se p è pari abbiamo anche le soluzioni:

$$n=0, \qquad \lambda=\frac{p}{2}, \qquad \mu=2, \qquad \alpha_1=0, \qquad \alpha_2=1,$$

che dànno i nuovi piani di riflessione:

$$\xi = r\,\frac{\sqrt{p}}{2},$$

r indicando ancora un intero qualunque. Ciò posto, se nel caso di p dispari consideriamo il prisma limitato dai quattro piani di riflessione:

$$1)\ \eta=0, \qquad 2)\ \xi=0, \qquad 3)\ \xi=\sqrt{p}, \qquad 4)\ \eta=1,$$

e nel caso di p pari quello limitato dai quattro piani:

$$1)\ \eta=0, \qquad 2)\ \xi=0, \qquad 3)\ \xi=\frac{\sqrt{p}}{2}, \qquad 4)\ \eta=1,$$

esso non sarà attraversato da alcun altro piano di riflessione. Se poi, togliendo da questo prisma le regioni interne alle sfere di riflessione che lo attraversano, riusciamo ad isolare un poliedro situato tutto al disopra del piano $\xi\eta$, salvo agli eventuali vertici singolari sul piano stesso, avremo o il poliedro fondamentale del gruppo o quello di un suo sottogruppo eccezionale d'indice finito, ciò che nei singoli casi potremo facilmente decidere, determinando le trasformazioni del poliedro in sè stesso (*).

Le sfere di riflessione corrispondenti alla sostituzione (1), per $n \gtrless 0$, hanno l'equazione:

$$\left(\xi-\frac{\alpha_2\sqrt{\mu}}{n\sqrt{\lambda}}\right)^2+\left(\eta+\frac{\alpha_1}{n}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{\lambda n^2}, \tag{3}$$

ovvero l'altra:

$$\left(\xi-\frac{\alpha_2\sqrt{\mu}}{n\sqrt{\lambda}}\right)^2+\left(\eta+\frac{\alpha_1}{n}\right)^2+\zeta^2=\frac{2}{\lambda n^2}, \tag{3*}$$

secondo che il determinante della (1) è eguale a *1* ovvero eguale a *2*.

(*) Cfr. specialmente i primi paragrafi della Memoria (*A*).

§ 2. La forma: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Ciò che si è detto nel numero precedente riguardo ai piani di riflessione vale naturalmente per $p > 1$. Ma per $p = 1$ (caso che merita di venir considerato, come il più semplice), ai piani di riflessione:

$$\xi = r, \qquad \eta = r,$$

sono da aggiungersi i nuovi piani:

$$\xi \pm \eta = r,$$

indicando sempre r un intero arbitrario.

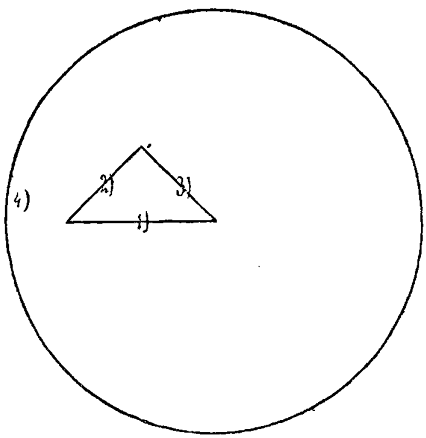

Fig. 1.ª

Se consideriamo il prisma triangolare compreso, al disopra del piano $\zeta = 0$, fra i tre piani di riflessione:

$$1)\ \eta = 0, \qquad 2)\ \xi - \eta = 0,$$
$$3)\ \xi + \eta = 1,$$

esso non è evidentemente attraversato da alcun altro piano di riflessione. Basta ora togliere da questo prisma la regione interna alla sfera di riflessione:

$$4)\ (\xi - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2,$$

per avere definito un poliedro (fig. 1.ª) coi quattro vertici:

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$	intersezione delle	faccie	1) 2) 4)
$V_2 \equiv (1,\ 0,\ \sqrt{2})$	»	»	1) 3) 4)
$V_3 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	»	»	2) 3) 4)
$V_\infty \equiv (0,\ 0,\ \infty)$	»	»	1) 2) 3).

Questo poliedro (piramide) non è più attraversato da alcuna sfera di riflessione come ce ne accertiamo, dati i valori delle coordinate dei vertici, con calcoli elementari che omettiamo qui per brevità come sempre in seguito, rimandando al § 14 della Memoria nel vol. 40 dei « Mathematische Annalen ». Il poliedro non ammette trasformazioni in sè medesimo e però esso è il poliedro fondamentale del gruppo G riproduttivo della forma $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$. Questo gruppo si genera dunque con quattro omologie armoniche elementari corrispondenti alle riflessioni 1) 2) 3) 4). Le loro espressioni effettive, calcolate colla formola (5) della Nota (B), sono le seguenti:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

$$4) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Volendo considerare in G anche le sostituzioni coll'ultimo coefficiente negativo, basta associare alle quattro precedenti la quinta sostituzione elementare:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Confrontando questo primo esempio con quello dei §§ 12, 13 (A), vediamo già come la ricerca venga in effetto semplificata, passando dal sottogruppo congruo coll'identità (mod. 2) al gruppo riproduttivo completo. Nel caso attuale la definizione aritmetica del gruppo poliedrico corrispondente a G è molto semplice. Invero il poliedro sopra definito coincide, nel senso non-euclideo con quello del gruppo ampliato di sostituzioni a determinante ± 1, $\pm i$, i cui coefficienti sono interi di Gauss, come si trova determinato nel § 12 della mia Memoria ora citata (*). In effetto la sostituzione:

$$z' = \frac{1+i}{2}(-z+1),$$

trasforma l'un poliedro nell'altro.

(*) Math. Annalen, Bd. 40.

§ 3. La forma: $2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani di riflessione:

$$1)\ \eta = 0, \qquad 2)\ \xi = 0, \qquad 3)\ \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad 4)\ \eta = 1,$$

basta togliere la regione interna alla sfera di riflessione:

$$5)\ \xi^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = 2,$$

per avere definito un poliedro (fig. 2.a) limitato da sfere (piani) di riflessione coi cinque vertici:

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$	intersezione	delle faccie	1) 2) 5)
$V_2 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	»	»	1) 3) 5)
$V_3 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1,\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	»	»	3) 4) 5)
$V_4 \equiv (0,\ 1,\ \sqrt{2})$	»	»	2) 4) 5)
$V_\infty \equiv (0,\ 0,\ \infty)$	»	»	1) 2) 3) 4).

Questo poliedro non è più attraversato da alcuna sfera di riflessione e non ammette trasformazioni in sè medesimo. Esso è dunque il poliedro fondamentale del gruppo G riproduttivo della forma, il quale si genera quindi con cinque omologie armoniche elementari corrispondenti alle riflessioni da 1) a 5). Le espressioni effettive di queste omologie sono le seguenti:

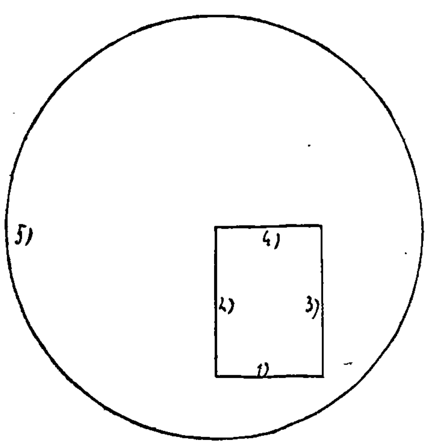

Fig. 2.a

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad 2)\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$3)\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad 4)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \qquad 5)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Anche qui è facile risalire alla definizione aritmetica del gruppo poliedrico corrispondente. E infatti il poliedro del presente numero coincide, nel senso non-euclideo con quello del gruppo ampliato di sostituzioni a determinante ± 1, i cui coefficienti percorrono i numeri interi del corpo quadratico immaginario $(1, i\sqrt{2})$ (*).

§ 4. La forma: $3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Dal prisma limitato dai quattro piani di riflessione:

$$1)\quad \eta = 0, \qquad 2)\quad \xi = 0, \qquad 3)\quad \xi = \sqrt{3}, \qquad 4)\quad \eta = 1,$$

togliamo le regioni interne alle due sfere di riflessione:

$$5)\quad \xi^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = 2$$

$$6)\quad (\xi - \sqrt{3})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2.$$

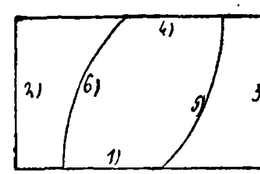

Fig. 3.ª

Il poliedro così definito (fig. 3.ª) ha i sette vertici:

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$	intersezione	delle faccie	1) 2) 5)
$V_2 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ 0,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	»	»	1) 5) 6)
$V_3 \equiv (\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{2})$	»	»	1) 3) 6)
$V_4 \equiv (\sqrt{3},\ 1,\ 1)$	»	»	3) 4) 6)
$V_5 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}},\ 1,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	»	»	4) 5) 6)
$V_6 \equiv (0,\ 1,\ \sqrt{2})$	»	»	2) 4) 5)
$V_\infty \equiv (0,\ 0,\ \infty)$	»	»	1) 2) 3) 4).

Nessuna sfera di riflessione lo attraversa e vi ha un'unica sostituzione che lo riporta in sè medesimo; questa è la ellittica a periodo 2:

$$z' = -z + (\sqrt{3} + i).$$

Se costruiamo la quaternaria corrispondente riproduttiva della forma

(*) Cfr. il § 13 della mia Memoria nel vol. 40 dei Math. Annalen.

$f = 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$, troviamo per la sua espressione (*):

$$a)\quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Essa appartiene al gruppo aritmetico G riproduttivo di f e quindi per generare G non bastano più, come nel caso precedente, le sole omologie armoniche, colle quali si compone soltanto un sottogruppo eccezionale d'indice *2* in G. Per sostituzioni generatrici di G conviene prendere le sei omologie armoniche corrispondenti alle riflessioni elementari da 1) a 6) (**) ed associare a queste la quaternaria a).

§ 5. La forma: $f = 5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Dal prisma limitato dai quattro piani di riflessione:

$$1)\ \eta = 0, \qquad 2)\ \xi = 0, \qquad 3)\ \xi = \sqrt{5}, \qquad 4)\ \eta = 1,$$

togliamo le regioni interne alle due sfere di riflessione:

$$5)\quad \xi^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = 2$$

$$6)\quad (\xi - \sqrt{5})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2.$$

(*) Osserviamo in generale (perchè un calcolo simile si presenterà in diversi esempi seguenti), che se p è impari, alla sostituzione ellittica

$$z' = -z + (\sqrt{p} + i),$$

corrisponde sulla quaternaria $f = px_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ la sostituzione riproduttiva a coefficienti interi

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -p & 1 & 1 - \frac{p+1}{2} & -\frac{p+1}{2} \\ p & -1 & \frac{p+1}{2} & 1 + \frac{p+1}{2} \end{vmatrix}.$$

(**) Omettiamo qui come in seguito di dare le espressioni effettive delle omologie armoniche elementari, che si costruiscono immediatamente facendo uso, come sopra, della formola (5) Nota (B).

Il poliedro risultante (fig. 4.ª) ha i sette vertici:

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$	intersezione	delle faccie	1) 2) 5)
$V_2 \equiv \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	»	»	1) 5) 6)
$V_3 \equiv (\sqrt{5},\ 0,\ \sqrt{2})$	»	»	1) 3) 6)
$V_4 \equiv (\sqrt{5},\ 1,\ 1)$	»	»	3) 4) 6)
$V_5 \equiv \left(\frac{3}{\sqrt{5}},\ 1,\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	»	»	4) 5) 6)
$V_6 \equiv (0,\ 1,\ \sqrt{2})$	»	»	2) 4) 5)
$V_\infty \equiv (0,\ 0,\ \infty)$	»	»	1) 2) 3) 4).

Nessuna sfera di riflessione lo attraversa e la sola sostituzione:

$$a) \quad z' = -z + (\sqrt{5} + i),$$

lo trasforma in sè medesimo. La quaternaria corrispondente ha l'espressione (Cfr. la nota al numero precedente):

$$a) \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} .$$

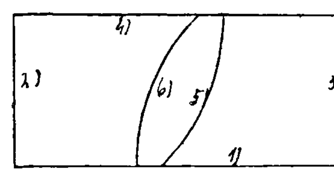

Fig. 4.ª

Il gruppo G riproduttivo di $f = 5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ ammette dunque per sostituzioni generatrici le sei omologie armoniche corrispondenti alle riflessioni da 1) a 6), alle quali si associ la quaternaria a).

§ 6. La forma: $f = 6x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani di riflessione:

$$1) \quad \eta = 0, \qquad 2) \quad \xi = 0, \qquad 3) \quad \xi = \sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad 4) \quad \eta = 1,$$

tolgansi le regioni interne alle due sfere di riflessione:

$$5) \quad \xi^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = 2$$

$$6) \quad \left(\xi - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2} \cdot$$

Il poliedro così definito (fig. 5.ª) ha i sette vertici:

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$	intersezione delle faccie	1) 2) 5)
$V_2 \equiv \left(\sqrt{\frac{2}{3}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	» »	1) 5) 6)
$V_3 \equiv \left(\sqrt{\frac{3}{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	» »	1) 3) 6)
$V_4 \equiv \left(\sqrt{\frac{3}{2}},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$	» »	3) 5) 6)
$V_5 \equiv \left(\sqrt{\frac{3}{2}},\ 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	» »	3) 4) 5)
$V_6 \equiv (0,\ 1,\ \sqrt{2})$	» »	2) 4) 5)
$V_\infty \equiv (0,\ 0,\ \infty)$	» »	1) 2) 3) 4).

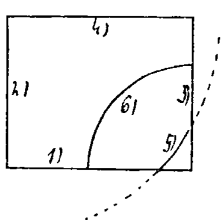

Fig. 5.ª.

Nessuna sfera di riflessione lo attraversa e non vi ha alcuna trasformazione del poliedro in sè stesso. In questo caso adunque, come per $p=2$, bastano a generare il gruppo le sole omologie armoniche e precisamente le sei elementari che corrispondono alle riflessioni da 1) a 6).

§ 7. La forma: $f = 7x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani:

$$1)\ \eta = 0, \qquad 2)\ \xi = 0, \qquad 3)\ \xi = \sqrt{7}, \qquad 4)\ \eta = 1,$$

togliamo le regioni interne alle quattro sfere di riflessione:

$$5)\quad \xi^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = 2$$

$$6)\quad (\xi - \sqrt{7})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2$$

$$7)\quad \left(\xi - \frac{3}{\sqrt{7}}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{2}{7}$$

$$8)\quad \left(\xi - \frac{4}{\sqrt{7}}\right)^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{7}\,.$$

Il poliedro risultante (fig. 6.ª) ha i dieci vertici:

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$	intersezione delle faccie	1) 2) 5)
$V_2 \equiv \left(\frac{\sqrt{7}}{3},\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$	" "	1) 5) 7)
$V_3 \equiv \left(\frac{\sqrt{7}}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$	" "	1) 6) 7)
$V_4 \equiv (\sqrt{7},\ 0,\ \sqrt{2})$	" "	1) 3) 6)
$V_5 \equiv (\sqrt{7},\ 1,\ 1)$	" "	3) 4) 6)
$V_6 \equiv \left(\frac{2\sqrt{7}}{3},\ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$	" "	4) 6) 8)
$V_7 \equiv \left(\frac{\sqrt{7}}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$	" "	4) 5) 8)
$V_8 \equiv (0,\ 1,\ \sqrt{2})$	" "	2) 4) 5)
$V_9^* \equiv \left(\frac{\sqrt{7}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$	" "	5) 6) 7) 8)
$V_\infty \equiv (0,\ 0,\ \infty)$	" "	1) 2) 3) 4),

fra i quali i due ultimi singolari. Nessuna sfera di riflessione lo attraversa e la sola sostituzione:

$$z' = -z + (\sqrt{7} + i),$$

lo cangia in sè medesimo. La quaternaria corrispondente:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -7 & 1 & -3 & -4 \\ 7 & -1 & 4 & 5 \end{vmatrix},$$

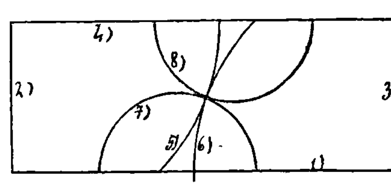

Fig. 6.ª.

insieme colle otto omologie armoniche, corrispondenti alle riflessioni da 1) a 8), dà il sistema di sostituzioni generatrici del gruppo.

Il poliedro del presente numero si è già presentato in altro mio lavoro nei « Mathematische Annalen » (Bd. 43, pag. 112).

§ 8. La forma: $f = 10x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani:

$$1)\ \eta = 0, \qquad 2)\ \xi = 0, \qquad 3)\ \xi = \frac{\sqrt{10}}{2}, \qquad 4)\ \eta = 1,$$

togliamo le regioni interne alle tre sfere di riflessione:

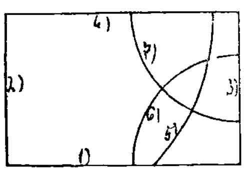

Fig. 7.ª

$$5)\ \xi^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = 2$$

$$6)\ \left(\xi - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2}$$

$$7)\ \left(\xi - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2}.$$

Il poliedro risultante (fig. 7.ª) ha i nove vertici:

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$	intersezione delle faccie	1) 2) 5)
$V_2 \equiv \left(\frac{3}{\sqrt{10}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$	" "	1) 5) 6)
$V_3 \equiv \left(\frac{\sqrt{10}}{2},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	" "	1) 3) 6)
$V_4 \equiv \left(\frac{\sqrt{10}}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$	" "	3) 6) 7)
$V_5 \equiv \left(\frac{\sqrt{10}}{2},\ 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	" "	3) 4) 7)
$V_6 \equiv \left(\frac{4}{\sqrt{10}},\ 1,\ \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$	" "	4) 5) 7)
$V_7 \equiv (0,\ 1,\ \sqrt{2})$	" "	2) 4) 5)
$V_8 \equiv \left(\frac{4}{\sqrt{10}},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}\right)$	" "	5) 6) 7)
$V_\infty \equiv (0,\ 0,\ \infty)$	" "	1) 2) 3) 4).

Esso non è attraversato da alcuna sfera di riflessione, nè possiede trasformazioni in sè medesimo. Il gruppo G attuale si genera adunque colle sole omologie armoniche e precisamente colle sette elementari corrispondenti alle riflessioni da 1) a 7).

§ 9. La forma: $f = 15x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani:

$$1)\ \eta = 0, \qquad 2)\ \xi = 0, \qquad 3)\ \xi = \sqrt{15}, \qquad 4)\ \eta = 1,$$

togliamo le regioni interne alle sei sfere di riflessione:

$$5)\ \xi^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = 2$$

$$6)\ (\xi - \sqrt{15})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2$$

$$7)\ \left(\xi - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{2}{3}$$

$$8)\ \left(\xi - 2\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{3}$$

$$9)\ \left(\xi - 3\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{2}{5}$$

$$10)\ \left(\xi - 2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{5}$$

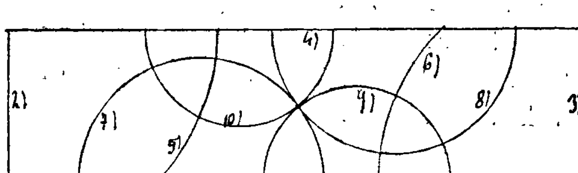

Fig 8.ª

Il poliedro risultante (fig. 8.ª) ha i quattordici vertici:

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$:	intersezione delle faccie	1) 2) 5)
$V_2 \equiv \left(\sqrt{\frac{3}{5}},\ 0,\ \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$	" "	1) 5) 7)
$V_3 \equiv \left(\frac{\sqrt{15}}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$	" "	1) 7) 9)
$V_4 \equiv \left(2\sqrt{\frac{5}{3}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	" "	1) 6) 9)
$V_5 \equiv (\sqrt{15},\ 0,\ \sqrt{2})$	" "	1) 3) 6)

$V_6 \equiv (\sqrt{15},\ 1,\ 1)$	intersezione	delle faccie	3) 4) 6)
$V_7 \equiv \left(4\sqrt{\frac{3}{5}},\ 1,\ \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$	»	»	4) 6) 8)
$V_8 \equiv \left(\frac{\sqrt{15}}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$	»	»	4) 8) 10)
$V_9 \equiv \left(\sqrt{\frac{5}{3}},\ 1,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	»	»	4) 5) 10)
$V_{10} \equiv (0,\ 1,\ \sqrt{2})$	»	»	2) 4) 5)
$V_{11} \equiv \left(\sqrt{\frac{5}{3}},\ \frac{2}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$	»	»	5) 7) 10)
$V_{12} \equiv \left(2\sqrt{\frac{5}{3}},\ \frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$	»	»	6) 8) 9)
$V^*_{13} \equiv \left(\frac{\sqrt{15}}{3},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$	»	»	7) 8) 9) 10)
$V^*_\infty \equiv (0,\ 0,\ \infty)$	»	»	1) 2) 3) 4).

Notiamo che le faccie 2) 3) sono triangolari, le faccie 5) 6) pentagone, le faccie 1) 4) esagonali, mentre le rimanenti quattro 7) 8) 9) 10) sono quadrilatere. I due vertici singolari V_{13}, V_∞ sono di diversa specie, onde si vede facilmente che la sola sostituzione:

$$z' = -z + (\sqrt{15} + i),$$

trasforma il poliedro in sè medesimo. A questa corrisponde la quaternaria:

$$a) \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -15 & 1 & -7 & -8 \\ 15 & -1 & 8 & 9 \end{vmatrix},$$

alla quale associando le dieci omologie armoniche elementari corrispondenti alle riflessioni da 1) a 10), si ha un sistema di sostituzioni generatrici del gruppo.

§ 10. Le forme quaternarie: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - p x_4^2$.

Anche qui supporremo, come al n.° 1, che p sia un numero privo di fattori quadrati. Fondandoci al solito sui risultati dei §§ 1, 2 della Nota (*B*), troviamo che nel gruppo poliedrico corrispondente al gruppo aritmetico riproduttivo della forma si trovano le riflessioni seguenti:

$$z' = \frac{\sqrt{\lambda}(\alpha_1 + i\alpha_2)z_0 + i(\gamma_1\sqrt{\lambda} + \delta_1\sqrt{\tau})}{i(\gamma_1\sqrt{\lambda} - \delta_1\sqrt{\tau})z_0 + \sqrt{\lambda}(\alpha_1 - i\alpha_2)}, \tag{4}$$

dove

$$p = \lambda\tau$$

è una qualunque decomposizione di p in due fattori, α_1, α_2, γ_1, δ_1 sono numeri interi, e il determinante della (4) è eguale a *1* ovvero a *2*, cioè:

$$\lambda(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \gamma_1^2) - \tau\delta_1^2 = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right. . \tag{5}$$

Contrariamente a quanto accadeva nel caso del n.° 1, troviamo qui un numero limitato di piani di riflessione e precisamente i quattro piani

$$\eta = 0, \qquad \xi = 0, \qquad \eta \pm \xi = 0.$$

Se γ_1, δ_1 non sono insieme nulli, abbiamo la sfera di riflessione:

$$\left(\xi - \frac{\alpha_2\sqrt{\lambda}}{\gamma_1\sqrt{\lambda} - \delta_1\sqrt{\tau}}\right)^2 + \left(\eta + \frac{\alpha_1\sqrt{\lambda}}{\gamma_1\sqrt{\lambda} - \delta_1\sqrt{\tau}}\right)^2 + \zeta^2 = R^2,$$

essendo:

$$R = \frac{1}{\gamma_1\sqrt{\lambda} - \delta_1\sqrt{\tau}}, \quad \text{o} \quad R = \frac{\sqrt{2}}{\gamma_1\sqrt{\lambda} - \delta_1\sqrt{\tau}},$$

secondo che il determinante della (4) è *1*, ovvero *2*.

La ricerca dei poliedri fondamentali per le forme attuali risulta certo più complicata, in confronto dei casi precedenti, specialmente in quella parte ove si tratta di accertarsi che nessuna altra sfera di riflessione attraversa il poliedro ottenuto. Qui mi limiterò a trattare il solo caso $p = 3$. I casi $p = 2$, $p = 5$, $p = 10$ potrebbero trattarsi egualmente ma non possono dare alcun nuovo risultato, le forme corrispondenti essendo rispettivamente equivalenti a quelle dei n.i 3, 5, 8.

§ 11. La forma: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_4^2$.

Consideriamo lo spazio compreso al disopra del piano $\zeta = 0$ fra i due piani di riflessione:

$$1)\quad \eta = 0, \qquad 2)\quad \eta - \xi = 0,$$

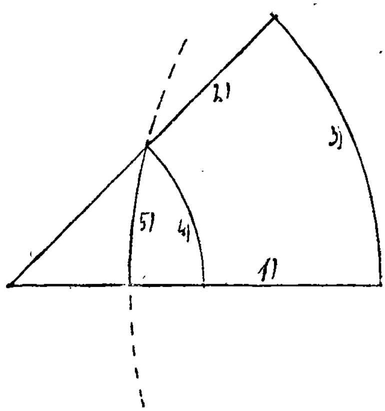

Fig. 9.ª

nel triedro positivo degli assi coordinati, e le due sfere di riflessione consecutive col centro nell'origine:

$$3)\quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$4)\quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2.$$

Se ne togliamo la regione interna alla sfera di riflessione:

$$5)\quad (\xi - \sqrt{3})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2,$$

avremo definito un poliedro (fig. 9.ª) coi sei vertici:

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$	intersezione	delle faccie	1) 2) 3)
$V_2 \equiv \left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)$	"	"	1) 2) 4)
$V_3 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}+1},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)$	"	"	1) 4) 5)
$V_4 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ 0,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	"	"	1) 3) 5)
$V_5^* \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}+1},\ \frac{1}{\sqrt{3}+1},\ 0\right)$	"	"	2) 4) 5)
$V_6 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	"	"	2) 3) 5),

dei quali uno soltanto, il vertice V_5, è singolare.

Per dimostrare che nessuna sfera di riflessione attraversa questo poliedro, sono necessari alcuni calcoli, che ci limitiamo ad indicare. Le sfere di riflessione del nostro gruppo si dividono, secondo il numero precedente, nei tre tipi seguenti:

$$\text{I)}\left\{\begin{array}{l}\left(\xi-\dfrac{\alpha_2}{\gamma_1-\delta_1\sqrt{3}}\right)^2+\left(\eta-\dfrac{\alpha_1}{\gamma_1-\delta_1\sqrt{3}}\right)^2+\zeta^2=\dfrac{1}{(\gamma_1-\delta_1\sqrt{3})^2}\\ \alpha_1^2+\alpha_2^2+\gamma_1^2-3\delta_1^2=1\end{array}\right.$$

$$\text{II)}\left\{\begin{array}{l}\left(\xi-\dfrac{\alpha_2}{\gamma_1-\delta_1\sqrt{3}}\right)^2+\left(\eta-\dfrac{\alpha_1}{\gamma_1-\delta_1\sqrt{3}}\right)^2+\zeta^2=\dfrac{2}{(\gamma_1-\delta_1\sqrt{3})^2}\\ \alpha_1^2+\alpha_2^2+\gamma_1^2-3\delta_1^2=2\end{array}\right.$$

$$\text{III)}\left\{\begin{array}{l}\left(\xi-\dfrac{\alpha_2\sqrt{3}}{\gamma_1\sqrt{3}-\delta_1}\right)^2+\left(\eta-\dfrac{\alpha_1\sqrt{3}}{\gamma_1\sqrt{3}-\delta_1}\right)^2+\zeta^2=\dfrac{2}{(\gamma_1\sqrt{3}-\delta_1)^2}\\ 3(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\gamma_1^2)-\delta_1^2=2.\end{array}\right.$$

Ora si osservi in primo luogo che una sfera di riflessione non può attraversare il poliedro lasciando nel suo interno il vertice V_1 o il vertice V_2. E invero, se per es. una sfera del tipo I) lascia al suo interno V_1, si avrà:

$$\frac{\alpha_1^2}{(\gamma_1-\delta_1\sqrt{3})^2}+\frac{\alpha_2^2}{(\gamma_1-\delta_1\sqrt{3})^2}+1<\frac{1}{(\gamma_1-\delta_1\sqrt{3})^2},$$

onde:

$$\alpha_1=\alpha_2=0,$$

e la sfera, avendo il centro nell'origine, comprenderebbe nel suo interno tutta la sfera 3), indi il poliedro. Similmente si dimostra la cosa per le sfere degli altri due tipi e pel vertice V_2. Dopo ciò si vede facilmente che la sfera supposta traverserebbe una almeno delle due faccie 1) o 2). Ora se si tien conto dei diversi casi possibili, avendo riguardo agli angoli sotto cui due sfere di riflessione possono incontrarsi (*), si vede che una tale sfera non esiste.

(*) Se si considerano per es. due sfere l'una del tipo I):

$$\left(\xi-\frac{\alpha_2}{\gamma_1-\delta_1\sqrt{3}}\right)^2+\left(\eta-\frac{\alpha_1}{\gamma_1-\delta_1\sqrt{3}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{(\gamma_1-\delta_1\sqrt{3})^2},$$

l'altra del tipo II):

$$\left(\xi-\frac{a_2}{c_1-d_1\sqrt{3}}\right)^2+\left(\eta-\frac{a_1}{c_1-d_1\sqrt{3}}\right)^2+\zeta^2=\frac{2}{(c_1-d_1\sqrt{3})^2},$$

e si suppone che s'incontrino, per l'angolo A d'intersezione abbiamo la formola:

$$\cos A=\frac{3d_1\delta_1-c_1\gamma_1}{\sqrt{2}},$$

Con maggiore facilità si dimostra che l'attuale poliedro non ammette alcuna trasformazione in sè stesso. Il gruppo aritmetico riproduttivo della forma $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_4^2$ si genera adunque con cinque omologie armoniche elementari.

§ 12. Le forme quaternarie: $px_1^2 + qx_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Qui supponiamo per brevità che p, q siano numeri primi diversi. Per le riflessioni del gruppo poliedrico corrispondente troviamo, col solito processo, la tabella seguente:

$$\text{Tipo I)} \left\{ \begin{array}{l} z' = \dfrac{(\alpha_1\sqrt{q} + i\alpha_2\sqrt{p})z_0 + im}{inz_0 + (\alpha_1\sqrt{q} - i\alpha_2\sqrt{q}} \\ q\alpha_1^2 + p\alpha_2^2 + mn = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right. ; \qquad m \equiv n \pmod{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Tipo II)} \left\{ \begin{array}{l} z' = \dfrac{(\alpha_1 + i\alpha_2\sqrt{pq})z_0 + i\sqrt{q}\cdot m}{i\sqrt{q}\cdot nz_0 + (\alpha_1 - i\alpha_2\sqrt{pq})} \\ \alpha_1^2 + pq\alpha_2^2 + qmn = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right. ; \qquad m \equiv n \pmod{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Tipo III)} \left\{ \begin{array}{l} z' = \dfrac{(\alpha_1\sqrt{p} + i\alpha_2\sqrt{q})z_0 + i\sqrt{pq}\cdot m}{i\sqrt{pq}\cdot nz_0 + (\alpha_1\sqrt{p} - i\alpha_2\sqrt{q})} \\ p\alpha_1^2 + q\alpha_2^2 + pqmn = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right. ; \qquad m \equiv n \pmod{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Tipo IV)} \left\{ \begin{array}{l} z' = \dfrac{(\alpha_1\sqrt{pq} + i\alpha_2)z_0 + i\sqrt{p}\cdot m}{i\sqrt{p}\cdot nz_0 + (\alpha_1\sqrt{pq} - i\alpha_2)} \\ pq\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + pmn = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right. ; \qquad m \equiv n \pmod{2}. \end{array} \right.$$

Se nessuno dei due numeri primi p, q è uguale a *2*, si hanno i soli piani di riflessione:

$$\xi = r\sqrt{p}, \qquad \eta = r\sqrt{q},$$

---

e quindi si hanno le due sole possibilità:

$$3d_1\delta_1 - c_1\gamma_1 = 0, \quad \text{o} \quad 3d_1\delta_1 - c_1\gamma_1 = \pm 1,$$

cioè l'angolo A può essere di 90° o di 45°. Considerazioni simili valgono per le possibili combinazioni fra le sfere dei tre tipi.

con r intero qualunque. Ma se per es. $p=2$, indi $q>2$, i piani di riflessione sono:

$$\xi=\frac{r}{\sqrt{2}}, \qquad \eta=r\sqrt{q}.$$

Le sfere di riflessione hanno le rispettive equazioni:

Tipo I) $\left(\xi-\frac{\alpha_2\sqrt{p}}{n}\right)^2+\left(\eta+\frac{\alpha_1\sqrt{q}}{n}\right)^2+\zeta^2=R^2$; $\quad R=\frac{1}{n}$, o $R=\frac{\sqrt{2}}{n}$

Tipo II) $\left(\xi-\frac{\alpha_2\sqrt{p}}{n}\right)^2+\left(\eta+\frac{\alpha_1}{n\sqrt{q}}\right)^2+\zeta^2=R^2$; $\quad R=\frac{1}{n\sqrt{q}}$, o $R=\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{q}}$

Tipo III) $\left(\xi-\frac{\alpha_2}{n\sqrt{p}}\right)^2+\left(\eta+\frac{\alpha_1}{n\sqrt{q}}\right)^2+\zeta^2=R^2$; $\quad R=\frac{1}{n\sqrt{pq}}$, o $R=\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{pq}}$

Tipo IV) $\left(\xi-\frac{\alpha_2}{n\sqrt{p}}\right)^2+\left(\eta+\frac{\alpha_1\sqrt{q}}{n}\right)^2+\zeta^2=R^2$; $\quad R=\frac{1}{n\sqrt{p}}$, o $R=\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{p}}$,

valendo ogni volta per R la prima o la seconda formola secondo che il determinante della corrispondente sostituzione è $=1$, ovvero $=2$.

§ 13. La forma: $f=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2-x_4^2$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani di riflessione:

$$1)\ \eta=0, \qquad 2)\ \xi=0, \qquad 3)\ \xi=\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad 4)\ \eta=\sqrt{3},$$

togliamo le regioni interne alle due sfere di riflessione:

$$5)\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$$

$$6)\ \xi^2+(\eta-\sqrt{3})^2+\zeta^2=2.$$

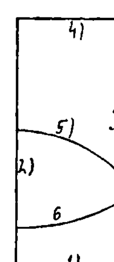

Fig. 10.ª

Il poliedro così definito (fig. 10.ª) ha i sette vertici:

$V_1\equiv(0,\ 0,\ 1)$ intersezione delle faccie 1) 2) 5)

$V_2\equiv\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ " " 1) 3) 5)

$V_3\equiv\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ " " 3) 5) 6)

$$V_4 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{3},\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \quad \text{intersezione delle faccie} \quad 3)\ 4)\ 6)$$

$$V_5 \equiv (0,\ \sqrt{3},\ \sqrt{2}) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 2)\ 4)\ 6)$$

$$V_6 \equiv \left(0,\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 2)\ 5)\ 6)$$

$$V_\infty \equiv (0,\ 0,\ \infty) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 1)\ 2)\ 3)\ 4).$$

Nessuna sfera di riflessione lo attraversa e le coordinate dei vertici essendo tutte differenti, non vi ha alcuna trasformazione del poliedro in sè medesimo. Dunque il gruppo G riproduttivo della forma si genera con sei omologie armoniche elementari.

Qui è interessante paragonare il poliedro fondamentale ora ottenuto per la forma:

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - x_4^2,$$

coll'altro del n.° 6 per la forma di egual determinante:

$$6x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2.$$

I due poliedri sono essenzialmente diversi, poichè nell'attuale abbiamo due faccie triangolari e quattro quadrangolari, mentre in quello del n.° 6 si presentano tre faccie triangolari, due quadrangolari ed una pentagona. Le due forme sopra scritte non sono quindi fra loro equivalenti.

§ 14. La forma: $f = 3x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani di riflessione:

$$1)\ \eta = 0, \qquad 2)\ \xi = 0, \qquad 3)\ \xi = \sqrt{3}, \qquad 4)\ \eta = \sqrt{5},$$

togliamo le regioni interne alle sei sfere di riflessione:

$$5)\quad (\xi - \sqrt{3})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2$$

$$6)\quad \xi^2 + (\eta - \sqrt{5})^2 + \zeta^2 = 2$$

$$7)\quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$8)\quad (\xi - \sqrt{3})^2 + (\eta - \sqrt{5})^2 + \zeta^2 = 1$$

$$9)\quad \left(\xi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{15}$$

$$10)\quad \left(\xi - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\eta - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{15}.$$

Il poliedro che ne risulta (fig. 11.ª), non attraversato da alcuna altra sfera di riflessione, ha i quattordici vertici:

$$\begin{array}{lllll}
V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1) & \text{intersezione} & \text{delle faccie} & 1)\ 2)\ 7) \\
V_2 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ 0,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right) & " & " & 1)\ 5)\ 7) \\
V_3 \equiv (\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{2}) & " & " & 1)\ 3)\ 5) \\
V_4 \equiv \left(\sqrt{3},\ \frac{3}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right) & " & " & 3)\ 5)\ 8) \\
V_5 \equiv (\sqrt{3},\ \sqrt{5},\ 1) & " & " & 3)\ 4)\ 8) \\
V_6 \equiv \left(\frac{2}{\sqrt{3}},\ \sqrt{5},\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right) & " & " & 4)\ 6)\ 8) \\
V_7 \equiv (0,\ \sqrt{5},\ \sqrt{2}) & " & " & 2)\ 4)\ 6) \\
V_8 \equiv \left(0,\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right) & " & " & 2)\ 6)\ 7) \\
V_9^* \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right) & " & " & 5)\ 6)\ 9)\ 10) \\
V_{10} \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{5}}{3},\ \frac{1}{3}\right) & " & " & 5)\ 7)\ 9) \\
V_{11} \equiv \left(\frac{4\sqrt{3}}{5},\ \frac{3}{\sqrt{5}},\ \frac{\sqrt{2}}{5}\right) & " & " & 5)\ 8)\ 10) \\
V_{12} \equiv \left(\frac{2}{\sqrt{3}},\ \frac{2\sqrt{5}}{3},\ \frac{1}{3}\right) & " & " & 6)\ 8)\ 10) \\
V_{13} \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{5},\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{\sqrt{2}}{5}\right) & " & " & 6)\ 7)\ 9) \\
V_\infty \equiv (0,\ 0,\ \infty) & " & " & 1)\ 2)\ 3)\ 4).
\end{array}$$

L'unica trasformazione del poliedro in sè medesimo è data da

$$z' = -z + (\sqrt{3} + i\sqrt{5}),$$

cui corrisponde la quaternaria:

$$a) \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

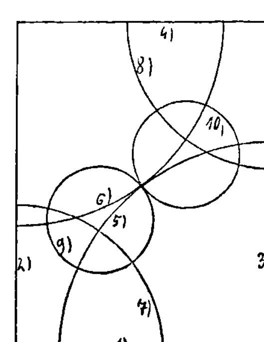

Fig. 11.ª

Il gruppo G riproduttivo della forma si genera mediante la a), combinata con dieci omologie armoniche elementari.

§ 15. Confronto fra le due forme: $\begin{cases} f = 3x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - x_4^2, \\ f' = 15x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2. \end{cases}$

Particolarmente interessante è il confronto fra il poliedro del numero precedente e quello del n.° 9. Essi mostrano lo stesso numero e la medesima disposizione di faccie omologhe, onde nasce la questione se si possono trasformare l'uno nell'altro, se cioè sono sovrapponibili nel senso della metrica non-euclidea. Ciò ha luogo infatti e con semplici considerazioni ausiliarie, che qui sopprimiamo, si trova che la sostituzione:

$$z' = \frac{(\sqrt{15} + i)z - 2i\sqrt{3}}{2z - (\sqrt{3} + i\sqrt{5})}, \tag{b}$$

trasforma il primo poliedro nel secondo (*). Se per maggiore chiarezza indichiamo cogli accenti le quantità che si riferiscono al poliedro del n.° 9, abbiamo che la (b) sovrappone i due poliedri colla seguente corrispondenza delle faccie:

$$\begin{pmatrix} 10', & 7', & 8', & 9', & 4', & 1', & 5', & 6', & 2', & 3' \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10 \end{pmatrix}.$$

Un secondo modo di trasformazione si otterrebbe naturalmente, combinandovi la trasformazione del poliedro in sè medesimo.

Risulta di qui che i due gruppi aritmetici riproduttivi delle due forme f, f' sono simili, cioè esiste una e quindi infinite sostituzioni, che trasformano l'un gruppo nell'altro. Se una tale sostituzione, ridotta a determinante 1, fosse a coefficienti interi, le due forme f, f sarebbero aritmeticamente equivalenti.

Dimostreremo che ciò non ha luogo, onde si vede già da questo esempio che per l'equivalenza di due forme quaternarie è bensì condizione necessaria ma non sufficiente l'equivalenza dei due rispettivi poliedri fondamentali.

Supponiamo infatti che le due forme:

$$f = 3y_1^2 + 5y_2^2 + y_3^2 - y_4^2$$
$$f' = 15x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2,$$

siano aritmeticamente equivalenti. Fra le infinite sostituzioni che trasformano

(*) Si potrebbe constatare lo stesso fatto calcolando, colle note formole della rappresentazione di Poincaré, le lunghezze non-euclidee dei vari spigoli.

l'una nell'altra ve ne sarà certamente una che trasforma le omologie armoniche elementari dell'una in quelle dell'altra e quindi necessariamente l'omologia 1') nell'omologia 5) o nella 6) (*). Ma per le espressioni effettive di queste omologie troviamo:

$$1')\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad 5)\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad 6)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & -10 & 2 & 5 \end{vmatrix},$$

e i rispettivi piani e centri di omologia sono:

$$\text{per la } 1')\left\{\begin{array}{ll} \text{piano} & x_2 = 0 \\ \text{centro} & (0,\ 1,\ 0,\ 0) \end{array}\right.$$

$$\text{per la } 5)\left\{\begin{array}{ll} \text{piano} & 3y_1 + y_4 = 0 \\ \text{centro} & (1,\ 0,\ 0,\ -1) \end{array}\right.$$

$$\text{per la } 6)\left\{\begin{array}{ll} \text{piano} & -5y_2 + y_3 + 2y_4 = 0 \\ \text{centro} & (0,\ -1,\ 1,\ -2). \end{array}\right.$$

Ora se la sostituzione a coefficienti interi

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ y_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4, \end{array}\right\} \qquad (c)$$

trasformasse f in f' e cangiasse il centro della 1') in quello delle 5), avremmo la proporzione:

$$a_{12} : a_{22} : a_{32} : a_{42} = 1 : 0 : 0 : -1,$$

e invece l'altra:

$$a_{12} : a_{22} : a_{32} : a_{42} = 0 : -1 : 1 : -2,$$

se lo trasformasse in quello della 6). Ma poichè, il determinante della sostituzione (c) essendo l'unità, a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42} non possono avere un fattore comune, ne risulterebbe nel primo caso:

$$a_{12} = \pm 1, \qquad a_{22} = 0, \qquad a_{32} = 0, \qquad a_{42} = \mp 1,$$

(*) Il poliedro del n.° 9 ha invece due sole faccie esagonali 1') 4') e quello del n.° 14 le due 5) 6).

e invece nel secondo:

$$a_{12}=0, \qquad a_{22}=\mp 1, \qquad a_{32}=\pm 1, \quad a_{42}=\mp 2.$$

Ambedue le volte risulta:

$$3a_{12}^2+5a_{22}^2+a_{32}^2-a_{24}^2=2,$$

mentre, perchè f si trasformi in f', è necessario che si abbia:

$$3a_{12}^2+5a_{22}^2+a_{32}^2-a_{42}^2=1.$$

Dunque le due forme f, f' non sono equivalenti.

Appoggiandoci sulle medesime considerazioni dei piani e centri di omologia corrispondenti e fissando ad esempio che la corrispondenza delle faccie dei due poliedri sia quella sopra segnata, troviamo la seguente sostituzione a determinante 4:

$$\left|\begin{array}{rrrr} 5 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -15 & 2 & -2 & -5 \end{array}\right| .$$

che trasforma f in $2f'$. Basta dividere simultaneamente i sedici coefficienti di questa sostituzione per $\sqrt{2}$ per avere una delle cercate sostituzioni a determinante *1* che trasformano f in f' ed il gruppo aritmetico riproduttivo di f in quello di f'.

Ho insistito su questo esempio perchè è evidente che ogniqualvolta di due forme di egual determinante si conoscono i poliedri fondamentali si potrà decidere, con calcoli simili a quelli ora eseguiti, della equivalenza delle due forme.

§ 16. Le forme quaternarie: $p(x_1^2+x_2^2)+rx_3^2-x_4^2$.

Supponiamo che p, r siano numeri primi diversi. Dalla discussione al § 4 della Nota (B) si deduce che nel gruppo esistono le riflessioni dei tipi seguenti:

$$\text{Tipo I)} \quad \left\{ \begin{array}{l} z' = \dfrac{(\alpha_1+i\alpha_2)z_0+i\sqrt{p}(\gamma_1\sqrt{r}+\delta_1)}{i\sqrt{p}(\gamma_1\sqrt{r}-\delta_1)z_0+(\alpha_1-i\alpha_2)} \\[2ex] \alpha_1^2+\alpha_2^2+pr\gamma_1^2-p\delta_1^2=\left\{\begin{array}{l}2\\1\end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\text{Tipo II)}\left\{\begin{aligned} z' &= \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)\sqrt{p}\,z_0 + i(\gamma_1\sqrt{r} + \delta_1)}{i(\gamma_1\sqrt{r} - \delta_1)z_0 + (\alpha_1 - i\alpha_2)\sqrt{p}} \\ p(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) &+ r\gamma_1^2 - \delta_1^2 = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \end{aligned}\right.$$

$$\text{Tipo III)}\left\{\begin{aligned} z' &= \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)\sqrt{r}\,z_0 + i\sqrt{p}(\gamma_1 + \delta_1\sqrt{r})}{i\sqrt{p}(\gamma_1 - \delta_1\sqrt{r})z_0 + (\alpha_1 - i\alpha_2\sqrt{r})} \\ r(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) &+ p\gamma_1^2 - pr\delta_1^2 = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \end{aligned}\right.$$

$$\text{Tipo IV)}\left\{\begin{aligned} z' &= \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)\sqrt{pr}\,z_0 + i(\gamma_1 + \delta_1\sqrt{r})}{i(\gamma_1 - \delta_1\sqrt{r})z_0 + (\alpha_1 - i\alpha_2)\sqrt{pr}} \\ pr(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) &+ \gamma_1^2 - r\delta_1^2 = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}. \end{aligned}\right.$$

Qui non esistono che i quattro piani di riflessione:

$$\eta = 0, \qquad \xi = 0, \qquad \xi \pm \eta = 0,$$

e le equazioni delle sfere di riflessione si scrivono del tutto analogamente come negli altri casi superiormente trattati.

Scegliamo come esempi particolarmente semplici ed interessanti le due forme:

$$3(x_1^2 + x_2^2) + 2x_3^2 - x_4^2$$
$$3(x_1^2 + x_2^2) + 5x_3^2 - x_4^2;$$

esse non sono suscettibili di rappresentare lo zero e in conseguenza i loro poliedri fondamentali non presentano vertici singolari [cfr. (*A*) §§ 1, 2].

Per la prima forma consideriamo il poliedro seguente. Dallo spazio compreso al disopra del piano $\zeta = 0$ fra i due piani:

$$1)\quad \eta = 0, \qquad 2)\quad \eta - \xi = 0,$$

e le due sfere consecutive col centro nell'origine:

$$3)\quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$
$$4)\quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (\sqrt{2} - 1)^2,$$

togliamo le regioni interne alle due sfere:

$$5)\quad (\xi - \sqrt{3})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2$$

$$6)\quad \left(\xi - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}\right)^2.$$

Similmente per la seconda forma dallo spazio compreso fra i due piani:

$$1)\quad \eta = 0, \qquad 2)\quad \eta - \xi = 0,$$

e le due sfere concentriche consecutive:

$$3)\quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$4)\quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (\sqrt{5} - 2)^2,$$

togliamo le regioni interne alle tre sfere:

$$5)\quad (\xi - \sqrt{3})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2$$

$$6)\quad \left(\xi - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3} + \sqrt{15}}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{2}{(2\sqrt{3} + \sqrt{15})^2}$$

$$7)\quad \left(\xi - \frac{\sqrt{3}}{3 + \sqrt{5}}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{3}}{3 + \sqrt{5}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{(3 + \sqrt{5})^2}.$$

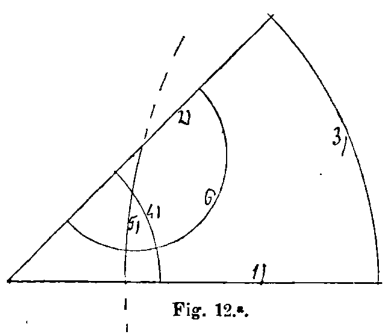

Fig. 12.ª

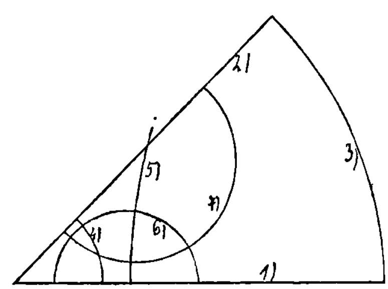

Fig. 13.ª

I poliedri così definiti (fig.ᵉ 12.ª e 13.ª) sono racchiusi da sfere e piani di riflessione e non presentano alcun vertice singolare. Essi non sono più attraversati da alcuna sfera di riflessione, come si dimostra con calcoli alquanto prolissi del tutto simili a quelli indicati al n.° 10. Il primo poliedro ammette un'unica trasformazione in sè medesimo, data dalla sostituzione ellittica a periodo *2*:

$$\alpha)\quad z' = \frac{(\sqrt{2} + i)z - \sqrt{3}(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)z - (\sqrt{2} + i)},$$

il secondo nessuna trasformazione. Alla α) corrisponde una sostituzione quaternaria riproduttiva della forma $3(x_1^2 + x_2^2) + 2x_3^2 - x_4^2$ con coefficienti irrazionali (contenenti l'irrazionalità $\sqrt{3}$), che non appartiene dunque al gruppo aritmetico. I due gruppi G riproduttivi delle forme $3(x_1^2+x_2^2)+2x_3^2-x_4^2$, $3(x_1^2+x_2^2)+5x_3^2-x_4^2$ si generano adunque con pure omologie armoniche, il primo con sei, il secondo con sette omologie elementari. Nel primo gruppo abbiamo un primo esempio della circostanza indicata nella Prefazione; esso è permutabile con una sostituzione fuori del gruppo.

§ 17. Le forme quaternarie: $px_2^2+qx_3^2-x_1x_4$.

Le forme che andiamo ora a considerare possono bensì ridursi colla sostituzione:

$$x_1 = y_4 + y_1$$
$$x_4 = y_4 - y_1,$$

a quelle studiate al n.° 12; però la sostituzione da eseguirsi è a determinante 2. La costituzione del loro gruppo aritmetico riproduttivo è per molti rispetti più semplice di quella del gruppo omologo per le forme ora ricordate.

Nel caso $p=1$ (o $q=1$) i gruppi poliedrici, cui dànno luogo, coincidono precisamente come ora si vedrà, coi gruppi da me studiati nei vol.[i] 40 e 42 dei « Mathematische Annalen ». Quando $p>1$, $q>1$ otteniamo dei nuovi gruppi più generali interessanti per la forma delle loro sostituzioni; di questi determineremo in alcuni casi più semplici i poliedri fondamentali. Supporremo per brevità della ricerca che p, q *siano numeri primi differenti,* ma s'intenderà subito che col medesimo metodo potrebbe trattarsi il caso di p, q numeri composti. Anche qui considereremo il gruppo aritmetico completo riproduttivo delle forme in questione; soltanto siccome nel gruppo totale è sempre evidentemente contenuta la sostituzione:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

e le sostituzioni coll'ultimo coefficiente positivo formano un sottogruppo eccezionale d'indice 2 nel gruppo stesso, ci limiteremo a considerare questo sottogruppo che indicheremo con G.

A fondamento delle nostre ricerche porremo il risultato stabilito nel 42° vol. dei « Mathematische Annalen » (pag. 51 s. s.), secondo il quale alle sostituzioni a determinante 1 del gruppo *algebrico* riproduttivo di $f = px_2^2 + qx_3^2 - x_1x_4$ si può dare la forma:

$$(C) \quad \begin{vmatrix} \alpha_1^2 + q\alpha_2^2, & 2\sqrt{p}(\alpha_1\gamma_1 + q\alpha_2\gamma_2), & 2q(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1), & \gamma_1^2 + q\gamma_2^2 \\ \dfrac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}{\sqrt{p}}, & \alpha_1\delta_1 + \beta_1\gamma_1 + q(\alpha_2\delta_2 + \beta_2\gamma_2), & \dfrac{2q}{\sqrt{p}}(\alpha_1\delta_2 - \beta_2\gamma_1), & \dfrac{\gamma_1\delta_1 + q\gamma_2\delta_2}{\sqrt{p}} \\ \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2, & 2\sqrt{p}(\alpha_2\delta_1 - \beta_2\gamma_1), & \alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 + q(\alpha_2\delta_2 - \beta_2\gamma_2), & \gamma_2\delta_1 - \gamma_1\delta_2 \\ \beta_1^2 + q\beta_2^2, & 2\sqrt{p}(\beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2), & 2q(\beta_1\delta_2 - \beta_2\delta_1), & \delta_1^2 + q\delta_2^2 \end{vmatrix},$$

essendo $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; \delta_1, \delta_2$ costanti reali legate dalla relazione complessa:

$$(\alpha_1 + i\sqrt{q}\,\alpha_2)(\delta_1 + i\sqrt{q}\,\delta_2) - (\beta_1 + i\sqrt{q}\,\beta_2)(\gamma_1 + i\sqrt{q}\,\gamma_2) = \pm 1,$$

che si scinde nelle due reali:

$$\begin{cases} \alpha_1\delta_1 - q\alpha_2\delta_2 - \beta_1\gamma_1 + q\beta_2\gamma_2 = \pm 1 \\ \alpha_1\delta_2 + \alpha_2\delta_1 = \beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1. \end{cases}$$

Le sostituzioni a determinante -1 hanno la stessa forma, salvo che debbono cangiarsi i segni degli elementi della terza linea.

Ora sarebbe assai complicata la ricerca diretta dei valori che debbono darsi alle costanti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ affinchè la sostituzione (C) abbia i coefficienti interi, cioè appartenga a G. Ma se anche qui ci limitiamo alla ricerca delle omologie armoniche in G, la questione si risolverà con grande semplicità e dalla conoscenza di queste omologie armoniche potremo poi facilmente risalire nei casi più semplici a quella dell'intero gruppo.

Ricordiamo ancora che le sostituzioni del gruppo poliedrico Γ corrispondenti a G hanno la forma:

$$z' = \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2\sqrt{q})z + (\beta_1 + i\beta_2\sqrt{q})}{(\gamma_1 + i\gamma_2\sqrt{q})z + (\delta_1 + i\delta_2\sqrt{q})},$$

se corrispondono a collineazioni di G a determinante $+1$ e invece l'altra:

$$z' = \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2\sqrt{q})z_0 + (\beta_1 + i\beta_2\sqrt{q})}{(\gamma_1 + i\gamma_2\sqrt{q})z_0 + (\delta_1 + i\delta_2\sqrt{q})},$$

se le collineazioni di G corrispondenti hanno il determinante -1.

§ 18. Le omologie armoniche in G (*).

Alle omologie armoniche di 1.ª categoria in G corrispondono le riflessioni proprie in Γ; queste si ottengono tutte ponendo:

$$\delta_1 = -\alpha_1, \qquad \delta_2 = \alpha_2, \qquad \beta_2 = \gamma_2 = 0,$$

essendo:

$$\alpha_1^2 + q\alpha_2^2 + \beta_1\gamma_1 = 1, \tag{6}$$

e la corrispondente collineazione (C) ha quindi la forma seguente:

$$(C^*) \quad \left| \begin{array}{cccc} 1-\beta_1\gamma_1, & 2\sqrt{p}\alpha_1\gamma_1, & -2q\alpha_2\gamma_1, & \gamma_1^2 \\ \dfrac{\alpha_1\beta_1}{\sqrt{p}}, & 1-2\alpha_1^2, & \dfrac{2q}{\sqrt{p}}\alpha_1\alpha_2, & \dfrac{-\alpha_1\gamma_1}{\sqrt{p}} \\ -\alpha_2\beta_1, & 2\sqrt{p}\alpha_1\alpha_2, & 1-2q\alpha_2^2, & \alpha_2\gamma_1 \\ \beta_1^2, & -2\sqrt{p}\alpha_1\beta_1, & 2q\alpha_2\beta_1, & 1-\beta_1\gamma_1 \end{array} \right|$$

La questione che dobbiamo risolvere è adunque quella dei valori da attribuirsi alle costanti α_1, α_2, β_1, γ_1, legate dalla (6), affinchè i sedici coefficienti dell'omologia armonica (C^*) riescano interi. È manifesto intanto che dovranno essere interi i dieci numeri seguenti:

$$\left.\begin{array}{c} \beta_1^2, \quad \gamma_1^2, \quad \beta_1\gamma_1, \quad 2\alpha_1^2, \quad 2q\alpha_2^2, \quad 2\alpha_1\alpha_2\sqrt{p}, \quad \alpha_2\beta_1, \\ \alpha_2\gamma_1, \quad \alpha_1\beta_1\sqrt{p}, \quad \alpha_1\gamma_1\sqrt{p}. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Indicando con

$$b_1^2, \quad c_1^2, \quad a_1^2, \quad a_2^2,$$

i massimi fattori quadrati contenuti rispettivamente nei numeri

$$\beta_1^2, \quad \gamma_1^2, \quad 2\alpha_1^2, \quad 2q\alpha_2^2,$$

potremo porre:

$$\beta_1 = b_1\sqrt{r}, \qquad \gamma_1 = c_1\sqrt{r'}, \qquad \alpha_1\sqrt{2} = a_1\sqrt{s}, \qquad \alpha_2\sqrt{2q} = a_2\sqrt{u},$$

i numeri interi positivi r, r', s, u essendo privi di fattori quadrati. Poichè $\beta_1\gamma_1 = b_1c_1\sqrt{rr'}$ deve essere intero, è intanto manifestamente $r' = r$ e perchè

(*) Come nella Memoria (A) ricerchiamo fra le omologie armoniche solo quelle di 1.ª categoria, il cui centro d'omologia cioè è esterno alle quadriche, perchè a questa soltanto corrispondono riflessioni proprie in Γ. [Cfr. (A) § 1.]

i numeri (7) riescano interi, tali dovranno essere i tre numeri

$$\sqrt{2prs}, \qquad \sqrt{2qru}, \qquad \sqrt{pqsu}. \tag{8}$$

Supponiamo dapprima che ambedue i numeri primi p, q siano diversi da 2. Allora perchè $\sqrt{2prs}$ sia intero, dovrà uno dei numeri r, s essere pari e l'altro impari, altrimenti rimarrebbe nel detto numero l'irrazionalità $\sqrt{2}$. Siccome poi la relazione (6) si converte nell'altra:

$$sa_1^2 + ua_2^2 + 2rb_1c_1 = 2,$$

è chiaro che i tre numeri r, s, u non potranno ammettere alcun divisore comune.

§ 19. Caso di r impari, s pari.

In questo caso perchè il secondo dei numeri (8) sia intero, dovrà anche u essere pari; poniamo dunque:

$$s = 2s', \qquad u = 2u',$$

e i numeri

$$\sqrt{prs'}, \qquad \sqrt{qru'}, \tag{9}$$

dovranno essere interi. Ne segue che p dividerà r ovvero s' e nel primo caso sarà:

$$A) \quad r = ps',$$

nel secondo

$$B) \quad s' = pr.$$

Caso A). Perchè il secondo dei numeri (9) sia intero occorre che anche u' sia divisibile per p; poniamo in conseguenza

$$r = ps', \qquad u' = pu'',$$

e il numero

$$\sqrt{qs'u''},$$

sarà intero. Quindi, essendo s', u'' primi fra loro, avremo una delle seguenti possibilità:

$$A_1) \quad s' = q, \qquad u'' = 1$$

$$A_2) \quad s' = 1, \qquad u'' = q.$$

Conseguentemente avremo:

nel caso A_1) $\left\{\begin{array}{llll} \alpha_1 = a_1, & \alpha_2 = a_2\sqrt{p}, & \beta_1 = b_1\sqrt{p}, & \gamma_1 = c_1\sqrt{p} \\ & a_1^2 + pqa_2^2 + pb_1c_1 = 1, & & \end{array}\right.$

e invece:

nel caso A_2) $\left\{\begin{array}{llll} \alpha_1 = a_1\sqrt{q}, & \alpha_2 = a_2\sqrt{\frac{p}{q}}, & \beta_1 = b_1\sqrt{qp}, & \gamma_1 = c_1\sqrt{pq}, \\ & qa_1^2 + pa_2^2 + pqb_1c_1 = 1, & & \end{array}\right.$

e in ambedue i casi si riscontrerà subito che i sedici coefficienti della (C^*) riescono appunto numeri interi.

Caso B). Una discussione del tutto simile porta a suddistinguere i due sottocasi:

B_1) $\left\{\begin{array}{llll} \alpha_1 = a_1\sqrt{p}, & \alpha_2 = a_2, & \beta_1 = b_1, & \gamma_1 = c_1 \\ & pa_1^2 + qa_2^2 + b_1c_1 = 1 & & \end{array}\right.$

B_2) $\left\{\begin{array}{llll} \alpha_1 = a_1\sqrt{pq}, & \alpha_2 = \dfrac{a_2}{\sqrt{q}} & \beta_1 = b_1\sqrt{q}, & \gamma_1 = c_1\sqrt{q} \\ & pqa_1^2 + a_2^2 + qb_1c_1 = 1. & & \end{array}\right.$

Ed anche qui la sostituzione corrispondente (C^*) avrà ogni volta coefficienti interi.

§ 20. Caso di r pari, s impari.

Ponendo $r = 2r'$, dovranno i numeri

$$\sqrt{pr's}, \qquad \sqrt{qr'u},$$

risultare interi. Il numero p dovrà quindi dividere uno ed uno solo dei due numeri r', s e similmente q dovrà dividere uno ed uno solo dei due numeri r', u. Siamo quindi condotti anche qui a distinguere quattro sottocasi che riassumiamo nella tabella seguente:

(C_1) $\left\{\begin{array}{llll} \alpha_1\sqrt{2} = a_1, & \alpha_2\sqrt{2} = a_2\sqrt{p}, & \beta_1 = b_1\sqrt{2p}, & \gamma_1 = c_1\sqrt{2p} \\ & a_1^2 + pqa_2^2 + 4pb_1c_1 = 2 & & \end{array}\right.$

(C_2) $\left\{\begin{array}{llll} \alpha_1\sqrt{2} = a_1\sqrt{q}, & \alpha_2\sqrt{2q} = a_2\sqrt{p}, & \beta_1 = b_1\sqrt{2pq}, & \gamma_1 = c_1\sqrt{2pq} \\ & qa_1^2 + pa_2^2 + 4pqb_1c_1 = 2 & & \end{array}\right.$

$$(D_1)\left\{\begin{array}{llll} \alpha_1\sqrt{2}=a_1\sqrt{p}, & \alpha_2\sqrt{2}=a_2, & \beta_1=b_1\sqrt{2}, & \gamma_1=c_1\sqrt{2} \\ & p a_1^2+a_2^2+4b_1c_1=2 & & \end{array}\right.$$

$$(D_2)\left\{\begin{array}{llll} \alpha_1\sqrt{2}=a_1\sqrt{pq}, & \alpha_2\sqrt{2q}=a_2, & \beta_1=b_1\sqrt{2q}, & \gamma_1=c_1\sqrt{2q} \\ & pqa_1^2+a_2^2+4qb_1c_1=2. & & \end{array}\right.$$

Si verificherà subito anche qui che i coefficienti della corrispondente (C^*) saranno in tutti quattro i casi numeri interi.

È importante osservare che le relazioni cui debbono soddisfare nei quattro casi a_1, a_2, b_1, c_1 sono possibili soltanto quando sia $pq\equiv 1$ (mod. 4), cioè $p\equiv q$ (mod. 3).

§ 21. Le riflessioni in Γ.

Dopo i risultati ottenuti nei due numeri precedenti possiamo ora scrivere le espressioni delle riflessioni contenute nel gruppo poliedrico Γ isomorfo al gruppo quaternario G. Esse si distinguono in otto tipi, provenienti i primi quattro dai casi considerati al n.° 18, gli altri quattro da quelli del n.° 19. Queste ultime esisteranno soltanto quando sia

$$p\equiv q \quad (\text{mod. } 4).$$

Diamo senz'altro la tabella degli otto tipi di riflessioni colle equazioni delle rispettive sfere:

$$\text{Tipo I)}\left\{\begin{array}{l} z'=\dfrac{(a_1+ia_2\sqrt{pq})z_0+b_1\sqrt{p}}{c_1\sqrt{p}\,z_0-(a_1-ia_2\sqrt{pq})}\,; \quad a_1^2+pqa_2^2+pb_1c_1=1 \\ \textit{sfera di riflessione: } \left(\xi-\dfrac{a_1}{c_1\sqrt{p}}\right)^2+\left(\eta-\dfrac{a_2\sqrt{q}}{c_1}\right)^2+\zeta^2=\dfrac{1}{pc_1^2} \end{array}\right.$$

$$\text{Tipo II)}\left\{\begin{array}{l} z'=\dfrac{(a_1\sqrt{q}+ia_2\sqrt{p})z_0+b_1\sqrt{pq}}{c_1\sqrt{pq}\cdot z_0-(a_1\sqrt{q}-ia_2\sqrt{p})}\,; \quad qa_1^2+pa_2^2+pqb_1c_1=1 \\ \textit{sfera di riflessione: } \left(\xi-\dfrac{a_1}{c_1\sqrt{p}}\right)^2+\left(\eta-\dfrac{a_2}{c_1\sqrt{q}}\right)^2+\zeta^2=\dfrac{1}{pqc_1^2} \end{array}\right.$$

$$\text{Tipo III)}\left\{\begin{array}{l} z'=\dfrac{(a_1\sqrt{p}+ia_2\sqrt{q})z_0+b_1}{c_1z_0-(a_1\sqrt{p}-ia_2\sqrt{q})}\,; \quad pa_1^2+qa_2^2+b_1c_1=1 \\ \textit{sfera di riflessione: } \left(\xi-\dfrac{a_1\sqrt{p}}{c_1}\right)^2+\left(\eta-\dfrac{a_2\sqrt{q}}{c_1}\right)^2+\zeta^2=\dfrac{1}{c_1^2} \end{array}\right.$$

Tipo IV)
$$z' = \frac{(a_1\sqrt{pq} + i a_2) z_0 + b_1\sqrt{q}}{c_1\sqrt{q}\, z_0 - (a_1\sqrt{pq} - i a_2)}; \quad pq a_1^2 + a_2^2 + q b_1 c_1 = 1$$
sfera di riflessione: $\left(\xi - \frac{a_1\sqrt{p}}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2}{c_1\sqrt{q}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{q c_1^2}$

Tipo V)
$$z' = \frac{\frac{a_1 + i a_2\sqrt{pq}}{\sqrt{2}} z_0 + b_1\sqrt{2p}}{c_1\sqrt{2p}\, z_0 - \frac{a_1 - i a_2\sqrt{pq}}{\sqrt{2}}}; \quad a_1^2 + pq a_2^2 + 4p b_1 c_1 = 2$$
sfera di riflessione: $\left(\xi - \frac{a_1}{2 c_1\sqrt{p}}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{q}}{2 c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2 p c_1^2}$

Tipo VI)
$$z' = \frac{\frac{a_1\sqrt{q} + i a_2\sqrt{p}}{\sqrt{2}} z_0 + b_1\sqrt{2pq}}{c_1\sqrt{2pq}\, z_0 - \frac{a_1\sqrt{q} - i a_2\sqrt{p}}{\sqrt{2}}}; \quad q a_1^2 + p a_2^2 + 4pq b_1 c_1 = 2$$
sfera di riflessione: $\left(\xi - \frac{a_1}{2 c_1\sqrt{p}}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2}{2 c_1\sqrt{q}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2 pq c_1^2}$

Tipo VII)
$$z' = \frac{\frac{a_1\sqrt{p} + i a_2\sqrt{q}}{\sqrt{2}} z_0 + b_1\sqrt{2}}{c_1\sqrt{2}\, z_0 - \frac{a_1\sqrt{p} - i a_2\sqrt{q}}{\sqrt{2}}}; \quad p a_1^2 + q a_2^2 + 4 b_1 c_1 = 2$$
sfera di riflessione: $\left(\xi - \frac{a_1\sqrt{p}}{2 c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{q}}{2 c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2 c_1^2}$

Tipo VIII)
$$z' = \frac{\frac{a_1\sqrt{pq} + i a_2}{\sqrt{2}} z_0 + b_1\sqrt{2q}}{c_1\sqrt{2q}\, z_0 - \frac{a_1\sqrt{pq} - i a_2}{\sqrt{2}}}; \quad pq a_1^2 + a_2^2 + 4q b_1 c_1 = 2$$
sfera di riflessione: $\left(\xi - \frac{a_1\sqrt{p}}{2 c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2}{2 c_1\sqrt{q}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2 q c_1^2}.$

Come si è detto, nel caso $pq \equiv 3$ (mod. 4) mancano le riflessioni degli ultimi quattro tipi ed anzi, a causa del teorema di reciprocità, anche quelle del tipo II).

È importante osservare quali piani di riflessione sono in Γ. Essi si ottengono quando $c_1 = 0$ ed appartengono solo ai tipi I) e IV); le loro equazioni sono:

$$\xi = v\frac{\sqrt{p}}{2}, \qquad \eta = r\frac{\sqrt{q}}{2},$$

percorrendo r i valori interi. Qui il prisma fondamentale sarà limitato dai quattro piani:

$$1)\ \ \eta = 0, \qquad 2)\ \ \xi = 0, \qquad 3)\ \ \xi = \frac{\sqrt{p}}{2}, \qquad 4)\ \ \eta = \frac{\sqrt{q}}{2}.$$

§ 22. Caso $p = 2$.

Se $p = 2$ e q è un numero primo impari, troviamo gli stessi tipi di riflessioni da I) a IV) del caso generale, rimanendo escluse le riflessioni da V) a VIII).

Ma qui vogliamo trattare il caso ulteriore in cui, *essendo* $p = 2$, q *è il doppio di un numero primo impari:* $q = 2d$.

Allora si trovano i sei tipi di riflessione seguenti:

$$a)\quad z' = \frac{(a_1\sqrt{2} + i a_2\sqrt{2d})z_0 + b_1}{c_1 z_0 - (a_1\sqrt{2} - i a_2\sqrt{2d})}; \qquad 2a_1^2 + 2d a_2^2 + b_1 c_1 = 1$$

$$b)\quad z' = \frac{(a_1 + i a_2\sqrt{d})z_0 + b_1\sqrt{2}}{c_1\sqrt{2}z_0 - (a_1 - i a_2\sqrt{d})}; \qquad a_1^2 + d a_2^2 + 2b_1 c_1 = 1$$

$$c)\quad z' = \frac{(a_1\sqrt{d} + i a_2)z_0 + b_1\sqrt{2d}}{c_1\sqrt{2d}\,z_0 - (a_1\sqrt{d} - i a_2)}; \qquad d a_1^2 + a_2^2 + 2d b_1 c_1 = 1$$

$$d)\quad z' = \frac{(a_1\sqrt{2d} + i a_2\sqrt{2})z_0 + b_1\sqrt{d}}{c_1\sqrt{d}z_0 + (a_1\sqrt{2d} - i a_2)}; \qquad 2d a_1^2 + 2a_2^2 + d b_1 c_1 = 1$$

$$e)\quad z' = \frac{\dfrac{a_1 + i a_2\sqrt{d}}{\sqrt{2}}z_0 + 2b_1}{2c_1 z_0 - \dfrac{a_1 - i a_2\sqrt{d}}{\sqrt{2}}}; \qquad a_1^2 + d a_2^2 + 8b_1 c_1 = 2$$

$$f)\quad z' = \frac{\dfrac{a_1\sqrt{d} + i a_2}{\sqrt{2}}z_0 + 2b_1\sqrt{d}}{2c_1\sqrt{d}z_0 - \dfrac{a_1\sqrt{d} - i a_2}{\sqrt{2}}}; \qquad d a_1^2 + a_2^2 + 8d b_1 c_1 = 2.$$

Le riflessioni del tipo d) esistono solo se $\left(\frac{2}{d}\right) = +1$ cioè quando $d \equiv \pm 1$ (mod. 8), quelle degli ultimi due tipi soltanto se $d \equiv 1$ (mod. 8).

§ 23. Definizione aritmetica del gruppo Γ'.

Andiamo ora ad occuparci della definizione aritmetica del gruppo Γ o, per dire più esattamente, di un conveniente sottogruppo Γ' avente a comune con Γ tutte le riflessioni.

Per non complicare la ricerca supponiamo p, q numeri primi, non escludendo che possa essere $p=2$.

Se lasciamo dapprima da parte il caso $pq \equiv 1 \pmod{4}$, avremo soltanto le riflessioni dei tipi da I) a IV) (n.° 20). Ora osserviamo che combinando fra loro queste riflessioni, le sostituzioni di 1.ª e 2.ª specie che si ottengono hanno tutte una delle due forme:

$$S)\quad \begin{pmatrix} a_1 + i a_2\sqrt{pq}, & b_1\sqrt{p} + i b_2\sqrt{q} \\ c_1\sqrt{p} + i c_2\sqrt{q}, & d_1 + i d_2\sqrt{pq} \end{pmatrix}$$

$$U)\quad \begin{pmatrix} a_1\sqrt{p} + i a_2\sqrt{q}, & b_1 + i b_2\sqrt{pq} \\ c_1 + i c_2\sqrt{pq}, & d_1\sqrt{p} + i d_2\sqrt{q} \end{pmatrix},$$

essendo a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2 numeri interi e il determinante della sostituzione avendo il valore ± 1. Per convincersene si osservi che le riflessioni dei tipi I) III) appartengono in effetto rispettivamente alle $S)$, $U)$, mentre quelle dei tipi II) IV) vi rientrano, appena se ne moltiplichino i quattro coefficienti per i. D'altra parte se consideriamo tutte le possibili $S)$ $U)$ a determinante ± 1, vediamo che esse formano un gruppo. Ciò si riscontra osservando che i due *moduli* (*) binari

$$\mathfrak{M}_1 = [1,\ i\sqrt{pq}]$$

$$\mathfrak{M}_2 = [\sqrt{p},\ i\sqrt{q}],$$

godono delle proprietà seguenti:

1.ª Il prodotto di due numeri in $\mathfrak{M}_1$ o di due numeri in $\mathfrak{M}_2$ è in $\mathfrak{M}_1$.

2.ª Il prodotto di un numero in $\mathfrak{M}_1$ per un numero in $\mathfrak{M}_2$ è in $\mathfrak{M}_2$.

Introducendo la nozione di prodotto di due moduli (**), possiamo esprimere le proprietà enunciate colle equazioni simboliche:

$$\mathfrak{M}_1^2 = \mathfrak{M}_1, \qquad \mathfrak{M}_2^2 = \mathfrak{M}_1, \qquad \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2.$$

(*) Questa denominazione intesa nel senso di DEDEKIND (cfr. l'XI Suppl. alle *Vorlesungen ueber Zahlentheorie di Dirichlet*).

(**) Cfr. DEDEKIND, loc. cit., § 170 della quarta edizione tedesca.

Ne segue che il prodotto di due S) o di due U) è una S), mentre il prodotto di una S) per una U) è una U), e però le S) U) formano un gruppo. Questo gruppo, che indichiamo con Γ', è contenuto certamente in Γ, poichè la quaternaria (C) n.° 16, corrispondente ad una qualsiasi S) o U), riesce a coefficienti interi. Inoltre il sottogruppo Γ' di Γ ne contiene, per quanto si è visto, tutte le riflessioni, sicchè in ambedue i gruppi Γ, Γ' è contenuto, quale sottogruppo eccezionale, il gruppo generato dal combinare fra loro le sole riflessioni.

§ 24. Caso $pq \equiv 1$ (mod. 4).

In questo caso, se bene esaminiamo la composizione delle riflessioni da V) a VIII) e delle sostituzioni che nascono dal combinarle fra loro e con quelle dei tipi precedenti, siamo condotti a introdurre i due nuovi moduli:

$$\mathfrak{M}_3 = \left[\sqrt{2},\quad \frac{1+i\sqrt{pq}}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\mathfrak{M}_4 = \left[\sqrt{2p},\quad \frac{\sqrt{p}+i\sqrt{q}}{\sqrt{2}}\right].$$

Il prodotto di due qualunque dei moduli

$$\mathfrak{M}_1, \quad \mathfrak{M}_2, \quad \mathfrak{M}_3, \quad \mathfrak{M}_4,$$

è uno dei moduli stessi secondo la legge espressa dalle equazioni simboliche:

$$\mathfrak{M}_r^2 = \mathfrak{M}_1, \qquad \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_r, \qquad \mathfrak{M}_r \mathfrak{M}_s = \mathfrak{M}_t,$$

indicando nell'ultima con rst una qualunque permutazione degli indici 2, 3, 4. Inoltre ciascuno dei quattro moduli contiene insieme ad ogni numero il suo coniugato. Indichiamo ora con lettere greche affette dall'indice r i numeri del modulo $\mathfrak{M}_r$ e consideriamo tutte le sostituzioni di 1.ª e 2.ª specie a determinante ± 1 che abbiano una delle quattro forme seguenti:

$$S)\ \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_1\end{pmatrix}, \qquad U)\ \begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_2\end{pmatrix}$$

$$T)\ \begin{pmatrix}\alpha_3 & \beta_4\\ \gamma_4 & \delta_3\end{pmatrix}, \qquad V)\ \begin{pmatrix}\alpha_4 & \beta_3\\ \gamma_3 & \delta_4\end{pmatrix}.$$

Dalle proprietà enunciate dei moduli $\mathfrak{M}_2$ segue che tutte queste sostituzioni formano un gruppo, componendosi i quattro tipi fra loro al modo di un

Vierergruppe, cioè secondo la legge espressa nella tabella seguente:

$$\begin{vmatrix} S & U & T & V \\ U & S & V & T \\ T & V & S & U \\ V & T & U & S \end{vmatrix}$$

Questo gruppo, che indicheremo nuovamente con Γ', è certamente contenuto in Γ poichè non solo le quaternarie corrispondenti alle $S)$ $U)$, ma anche quelle corrispondenti alle $T)$ $V)$ sono a coefficienti interi (*). Di più il sottogruppo Γ' di Γ ne contiene tutte le riflessioni.

Arrestiamoci un momento al caso speciale $p=1$. Allora $\mathfrak{M}_1$ coincide con $\mathfrak{M}_2$ ed $\mathfrak{M}_3$ con $\mathfrak{M}_4$; il gruppo Γ non è altro che il gruppo delle sostituzioni a determinante ± 1 i cui coefficienti sono numeri interi del corpo quadratico immaginario $(1, i\sqrt{q})$, ampliato il gruppo nel caso $q \equiv 1$ (mod. 4), appunto come ho indicato nel vol. 42 dei « Mathematische Annalen » (pag. 34 e seguenti).

§ 25. Esempi diversi.

Diamo ora alcuni esempi numerici per la determinazione dei poliedri fondamentali delle forme quaternarie:

$$p x_2^2 + q x_3^2 - x_1 x_4 .$$

Tralasciamo il caso $p=1$ perchè, secondo quanto abbiamo ora detto, i miei lavori nei « Mathematische Annalen » e specialmente nel vol. 40 contengono già la determinazione in singoli casi dei poliedri corrispondenti.

Qui ci limiteremo a definire il poliedro che sarà ogni volta il poliedro fondamentale, come mi sono accertato coi soliti metodi.

Esempio 1.°: $p=2$, $q=3$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani:

$$1)\ \eta=0, \qquad 2)\ \xi=0, \qquad 3)\ \xi=\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad 4)\ \eta=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

(*) Per constatarlo basta già il fatto che alle $S)$ $U)$ corrispondono delle sostituzioni quaternarie aritmetiche (n.° 22), come pure alle riflessioni di uno dei tipi da V) a VIII).

si tolgano le regioni interne alle due sfere:

$$5)\quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$$

$$6)\quad \left(\xi-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{4}\,.$$

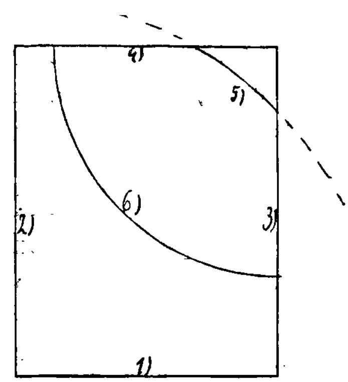

Fig. 14.a.

Il poliedro risultante (fig. 14.a) non ammette trasformazioni in sè medesimo, quindi il gruppo riproduttivo della forma:

$$2x_2^2+3x_3^2-x_1x_4$$

si genera con sei omologie armoniche.

Esempio 2.o: $p=2,\ q=5$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani:

$$1)\quad \eta=0,\qquad 2)\quad \xi=0,$$

$$3)\quad \xi=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad 4)\quad \eta=\frac{\sqrt{5}}{2},$$

si tolgano le regioni interne alle tre sfere:

$$5)\quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$$

$$6)\quad \left(\xi-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{4}$$

$$7)\quad \xi^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{4}\,.$$

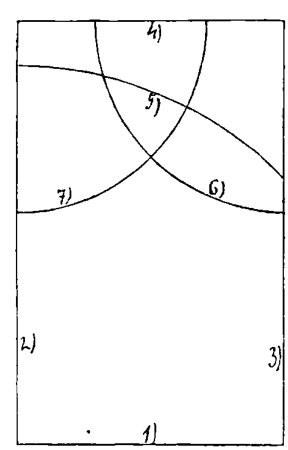

Fig. 15.a.

Il poliedro risultante (fig. 15.a) non ha trasformazioni in sè stesso e il gruppo riproduttivo della forma:

$$2x_2^2+5x_3^2-x_1x_4,$$

si genera colle sette omologie armoniche corrispondenti.

Esempio 3.o: $p=2,\ q=6$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani:

$$1)\quad \eta=0,\qquad 2)\quad \xi=0,$$

$$3)\quad \xi=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad 4)\quad \eta=\sqrt{\frac{3}{2}},$$

togliamo le regioni interne alle tre sfere:

$$5) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$6) \quad \xi^2 + \left(\eta - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2}$$

$$7) \quad \left(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\eta - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{6}.$$

Il poliedro risultante (fig. 16.ª) ammette una sola trasformazione non identica in sè stesso e cioè la riflessione:

$$z' = \frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}} z_0 - 1}{z_0 - \frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}.$$

sulla sfera:

$$\left(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\eta - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \zeta^2 = 1,$$

che scambia la faccia 1) con 7), la 2) con 6) lasciando ferme 3) 4) 5) e permuta fra loro i due vertici singolare $V_1 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$ e V_∞. La quaternaria corrispondente riproduttiva della forma:

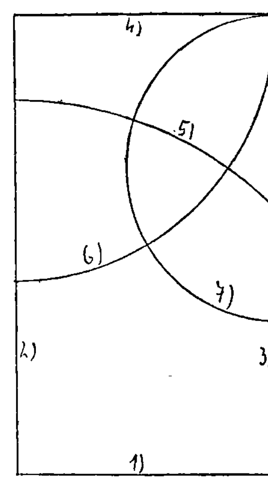

Fig. 16.ª

$$2x_2^2 + 6x_3^2 - x_1 x_4,$$

ha lo schema seguente:

$$a) \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & -6 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & -6 & 2 \end{vmatrix},$$

e non appartiene al gruppo aritmetico. Questo gruppo è dunque generabile colle sette omologie armoniche corrispondenti alle riflessioni da 1) a 7) (*). A differenza però di tutti i gruppi considerati, esso è contenuto quale sottogruppo eccezionale d'indice 2 in un gruppo più ampio ottenuto ampliandolo colla a).

Esempio 4.º: $p=2$, $q=7$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani:

$$1)\quad \eta=0,\qquad 2)\quad \xi=0,\qquad 3)\quad \xi=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad 4)\quad \eta=\frac{\sqrt{7}}{2},$$

tolgansi le regioni interne alle cinque sfere:

$$5)\quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$$

$$6)\quad \left(\xi-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{4}$$

$$7)\quad \xi^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{4}$$

$$8)\quad \left(\xi-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\eta-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{14}$$

$$9)\quad \left(\xi-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\eta-\frac{5}{2\sqrt{7}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{56}.$$

(*) Le espressioni effettive di queste omologie elementari sono le seguenti:

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},\qquad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},\qquad 3)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$4)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -12 & 1 \end{vmatrix},\qquad 5)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},\qquad 6)\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & -12 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -12 & 3 \end{vmatrix}$$

$$7)\ \begin{vmatrix} 7 & 12 & -24 & 6 \\ -3 & -5 & 12 & -3 \\ 2 & 4 & -7 & 2 \\ 6 & 12 & -24 & 7 \end{vmatrix},$$

e il lettore verificherà agevolmente che la sostituzione a) trasforma la omologia 1) nella 7), la 2) nella 6), mentre trasforma in sè medesime le omologie 3) 4) 5).

Il poliedro risultante (fig. 17.ª) non ha alcuna trasformazione in sè medesimo e il gruppo riproduttivo di $f = 2x_2^2 + 7x_3^2 - x_1 x_4$ si genera con nove omologie armoniche.

Esempio 5.º: $p = 3$, $q = 7$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani:

$$1)\ \eta = 0, \qquad 2)\ \xi = 0, \qquad 3)\ \xi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 4)\ \eta = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

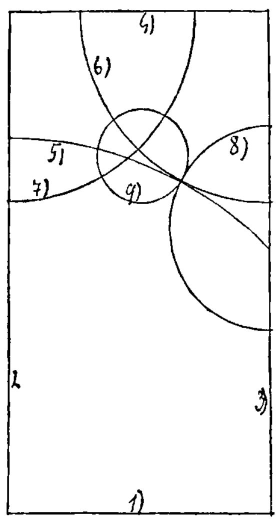

Fig. 17.ª

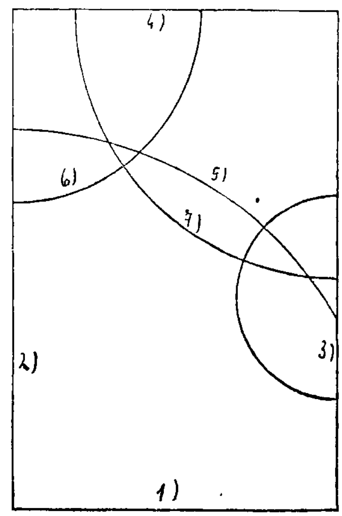

Fig. 18.ª

togliamo le regioni interne alle quattro sfere:

$$5)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$6)\ \xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4}$$

$$7)\ \left(\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2}$$

$$8)\ \left(\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{3}{2\sqrt{7}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{14}.$$

Il poliedro risultante (fig. 18.ª) non ammette trasformazioni in sè stesso. Il gruppo riproduttivo della forma:

$$3x_2^2 + 7x_3^2 - x_1 x_4,$$

si genera con otto omologie armoniche elementari.

AGGIUNTA.

La forma: $x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_4$.

Non è privo d'interesse il considerare fra gli esempi dati al numero precedente anche il caso $p = 1$, $q = 1$, poichè il gruppo riproduttivo della forma:

$$x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_4,$$

si trova *simile* a quello della forma:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2;$$

ma le sostituzioni (a determinante *1*) che trasformano l'uno nell'altro contengono nei coefficienti l'irrazionalità $\sqrt[4]{8}$ circostanza questa affatto analoga a quella riscontrata al n.° 15 per le due forme ivi considerate.

Nel caso $p = 1$, $q = 1$ la discussione al n.° 18 porta subito a stabilire che nel gruppo poliedrico Γ esistono le riflessioni seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} & z' = \frac{(a_1 + i a_2) z_0 + b_1}{c_1 z_0 - (a_1 - i a_2)} \\ & a_1^2 + a_2^2 + b_1 c_1 = 1 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} & z' = \frac{\dfrac{a_1 + i a_2}{\sqrt{2}} z_0 + b_1 \sqrt{2}}{c_1 \sqrt{2} z_0 - \dfrac{a_1 - i a_2}{\sqrt{2}}} \\ & a_1^2 + a_2^2 + 4 b_1 c_1 = 2. \end{aligned}\right.$$

Queste sono le riflessioni stesse che si presentano nel gruppo $\overline{\Gamma^{(i)}}$ formato con numeri interi di Gauss (*) e però il poliedro fondamentale coincide, nel senso non-euclideo, con quello del n.° 2. Distinguendo con numeri accentati le faccie del poliedro attuale, omologhe alle egualmente numerate al n.° 2, avremo la

(*) Cfr. Mathem. Annalen. Bd. 10, pag. 352.

piramide racchiusa fra i tre piani:

$$1') \quad \xi - \eta = 0, \qquad 2') \quad \xi = \frac{1}{2}, \qquad 3') \quad \eta = 0,$$

esternamente alla sfera:

$$4') \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Le espressioni delle omologie armoniche elementari corrispondenti generatrici del gruppo G' riproduttivo della forma:

$$y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_4,$$

sono:

$$1') \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad 2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$3') \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad 4') \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Paragonando *queste colle omologhe* del n.° 2 che qui riportiamo per maggior chiarezza:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad 2) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$3) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad 4) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

dobbiamo calcolare la sostituzione quaternaria che trasforma 1) in 1'), 2) in 2'), 3) in 3'), 4) in 4'). Questa sostituzione esiste certamente, a causa della similitudine dei due *poliedri*, *ed è pienamente determinata*, *salvo un fattor* comune ai coefficienti, che si può fissare dando alla sostituzione il determinante *1*.

Per calcolarla basta tener conto dei rispettivi piani e centri d'omologia (cfr. n.° 15) che sono:

per la 1) $\begin{cases} \text{piano } x_2 = 0 \\ \text{centro } (0, 1, 0, 0) \end{cases}$ per la 2) $\begin{cases} \text{piano } x_1 + x_2 = 0 \\ \text{centro } (1, 1, 0, 0) \end{cases}$

per la 1') $\begin{cases} \text{piano } y_2 + y_3 = 0 \\ \text{centro } (0, 1, 1, 0) \end{cases}$ per la 2') $\begin{cases} \text{piano } y_1 + 2y_2 = 0 \\ \text{centro } (0, 1, 0, -1) \end{cases}$

per la 3) $\begin{cases} \text{piano } x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \text{centro } (1, -1, 1, -1) \end{cases}$ per la 4) $\begin{cases} \text{piano } x_1 - x_3 = 0 \\ \text{centro } (1, 0, -1, 0) \end{cases}$

per la 3') $\begin{cases} \text{piano } y_3 = 0 \\ \text{centro } (0, 0, 1, 0) \end{cases}$ per la 4') $\begin{cases} \text{piano } y_1 - y_2 = 0 \\ \text{centro } (1, 0, 0, -1 \end{cases}$

Per la sostituzione trasformatrice cercata, prescindendo dalla condizione che il determinante sia $= 1$, troviamo lo schema:

$$\alpha) \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Il determinante di questa essendo $= 8$ basta dividere i sedici coefficienti per $\sqrt[4]{8} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}$ per avere la sostituzione a determinante *1* cercata.

È chiaro a priori che la α), cioè la sostituzione:

$$\begin{cases} y_1 = -2(x_3 + x_4) \\ y_2 = \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ y_3 = -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ y_4 = -2(x_1 + x_4), \end{cases}$$

deve trasformare, a meno di un fattore $y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_4$ in $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4$ e in effetto troviamo:

$$y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_4 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2).$$

Pisa, agosto 1894.

Relations entre la fonction Bessélienne de 1.re espèce et une fraction continue.

(*De* I. H. Graf, *à Berne*.)

INTRODUCTION.

F. W. Bessel (*) a déjà montré que le quotient de deux fonctions Besséliennes de 1.re espèce, dans lesquelles le paramètre diffère d'une unité, peut se mettre sous la forme d'une fraction continue, et il a trouvé:

$$\frac{I_k^i}{I_k^{i-1}} = \cfrac{\frac{k}{2\,i}}{1 - \cfrac{\frac{k\,k}{2\,i\cdot 2\,i+2}}{1 - \cfrac{\frac{k\,k}{2\,i+2\cdot 2\,i+4}}{\begin{matrix}\vdots \\ 1 - \cfrac{\frac{k\,k}{2\,i+2\,h-4\,\cdot\, 2\,i+2\,h-2}}{1 - \frac{k}{2\,i+2\,h-2}\cdot\frac{I_k^{i+h}}{I_k^{i+h-1}}}\end{matrix}}}}\,.$$

Finalement il donne directement une fraction continue pour I_k^i, et dit que cette expression peut être employée pour déduire I_k^i de I_k^0 et I_k^1.

O. Schlömilch (**) traite aussi la représentation du quotient de deux fonctions Besséliennes analogues, et donne, quand $Q_n = \frac{I_{n+1}}{\lambda\, I_n}$, pour Q_n l'ex-

---

(*) *Untersuchungen des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne ensteht.* Voir: Abhandlungen der Berliner Akademie, 1824. Math. Classe, pag. 1 et Abhandlungen von F. W. Bessel, tom. 1, pag. 96, n.° 11.

(**) *Ueber die Bessel'sche Funktion.* Zeitschrift für Math. u. Physik, tom. 2, pag. 142.

pression:

$$Q_n = \cfrac{1}{n+1 - \cfrac{\lambda^2}{n+2 - \cfrac{\lambda^2}{n+3 - \cdots - \cfrac{\lambda^2}{n+k-\lambda^2 Q_{n+k}}}}}.$$

De là, il conclut à une fraction continue pour $\frac{I_{n+1}}{I_n}$. N. Herz (*) s'arrête de même à la représentation de Bessel et donne, particulièrement pour la formule (43) du travail de Bessel une expression simplifiée du quotient $\frac{I_k^1}{I_k^0}$.

En outre, E. Lommel (**) a montré, comment, en partant de l'équation:

$$\frac{2\nu}{z} I^{\nu}_{(z)} = I^{\nu-1}_{(z)} + I^{\nu+1}_{(z)},$$

le quotient de deux fonctions Besséliennes de 1.re espèce, dans lesquelles les paramètres diffèrent d'une unité, peut être développé en une fraction continue infinie, et il a trouvé:

$$\frac{I^{\nu+1}_{(z)}}{I^{\nu}_{(z)}} = \cfrac{z}{2(\nu+1) - \cfrac{z^2}{2(\nu+2) - \cfrac{z^2}{2(\nu+3) - \cdots\cdots}}} \tag{1}$$

Il trouve d'une façon analogue le quotient de deux fonctions semblables, dans lesquelles les paramètres diffèrent de 2.

$$\frac{I^{\nu+2}_{(z)}}{I^{\nu}_{(z)}} = -1 + \cfrac{2(\nu+1)}{2(\nu+1) - \cfrac{z^2}{2(\nu+2) - \cfrac{z^2}{2(\nu+3) - \cdots\cdots}}} \tag{2}$$

Il remarque, que, au moyen des formules (1) et (2), $I^{\nu+1}_{(z)}$ et $I^{\nu+2}_{(z)}$ sont calculables quand $I^{\nu}_{(z)}$ est connu.

(*) Astronomische Nachrichten, tom. 107, pag. 17.

(**) *Studien über die Bessel'schen Funktionen*, § 2, pag. 5.

Nous nous permettons ici, de continuer les travaux résumés, et nous voulons réunir et établir les relations entre les fonctions Besséliennes de 1.re espèce et la théorie des fractions continues, ce qui nous conduira à une série complète de formules nouvelles et intéressantes.

§ 1.

Soit la formule:

$$I_{(x)}^{a+1} + I_{(x)}^{a-1} - \frac{2a}{x} I_{(x)}^{a} = 0;$$

nous divisons par $i I_{(x)}^{a}$ il suit:

$$\frac{I_{(x)}^{a+1}}{i I_{(x)}^{a}} + \frac{I_{(x)}^{a-1}}{i I_{(x)}^{a}} - \frac{2a}{ix} = 0,$$

posons ensuite:

$$\frac{I_{(x)}^{a-1}}{i I_{(x)}^{a}} = f(a, x),$$

on aura:

$$-\frac{i I_{(x)}^{a+1}}{I_{(x)}^{a}} + f(a, x) - \frac{2a}{ix} = 0,$$

mais:

$$\frac{I_{(x)}^{a}}{i I_{(x)}^{a+1}} = f(a+1, x) \quad \text{ou} \quad \frac{i I_{(x)}^{a+1}}{I_{(x)}^{a}} = \frac{1}{f(a+1, x)}$$

$$f(a, x) = \frac{2a}{ix} + \frac{1}{f(a+1, x)},$$

analogue:

$$f(a+1, x) = \frac{2(a+1)}{ix} + \frac{1}{f(a+2, x)}$$

. . . .

ainsi:

$$f(a, x) = \frac{2a}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{2(a+1)}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{2(a+2)}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{2(a+3)}{ix} + \cdots + \cfrac{1}{\cfrac{2(a+n)}{ix} + \cfrac{1}{f(a+n+1, x)}}}}}. \tag{3}$$

Par la formule (3), $f(a, x)$ ou le quotient de deux fonctions Besséliennes de 1.[re] espèce est developpé en une fraction continue, dont les quotients incomplets forment une progression arithmétique comme les quotients incomplets dans la fraction continue suivante:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \ldots\ldots\ldots$$

Pour établir d'après cela, une théorie générale, nous voulons d'abord préciser quelques propriétés des fractions continues.

Soi $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ une série de valeurs arbitraires; formons une fraction continue, dont les nombres donnés seront les quotients incomplets; les numérateurs des réduites successives s'exprimeront par

$[\ ] = 1$, c'est-à-dire la fraction continue de 0 élément $= 1$

$[a_1] = a_1$

$[a_1 a_2] = a_1 a_2 + 1$

$[a_1 a_2 a_3] = a_1 a_2 a_3 + a_3 + a_1$

$[a_1 a_2 a_3 a_4] = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_3 a_4 + a_1 a_4 + a_1 a_2 + 1 = a_4 [a_1 a_2 a_3] + [a_1 a_2]$

en général,

. . . .

$$[a_1 a_2 \ldots a_{m-1} a_m] = a_m [a_1 a_2 \ldots a_{m-1}] + [a_1 a_2 \ldots a_{m-2}]. \qquad (4)$$

Étant données de semblables expressions, les quatre théorèmes suivants sont valables:

a) Quand $[a_1 a_2 \ldots a_{m-1} a_m] = a_m [a_1 a_2 \ldots a_{m-1}] + [a_1 a_2 \ldots a_{m-2}]$

on a aussi:

$$[a_1 a_2 \ldots a_{m-1} a_m] = a_1 [a_2 a_3 \ldots a_m] + [a_3 \ldots a_m],$$

c'est-à-dire la série des quotients incomplets peut aussi être lue en sens inverse.

b) Soit m le nombre des éléments, on a:

$$[a_1 a_2 \ldots a_m]\,[a_2 \ldots a_{m-1}] - [a_2 \ldots a_m]\,[a_1 \ldots a_{m-1}] = (-1)^m$$

c) $[a_1 a_2 \ldots a_m;\ a_{m+1} \ldots a_n] = [a_1 a_2 \ldots a_m]\,[a_{m+1} \ldots a_n] +$
$$+ [a_1 \ldots a_{m-1}]\,[a_{m+2} \ldots a_n]$$

d) $$\frac{[a_1 a_2 \ldots a_m]}{[a_2 a_3 \ldots a_m]} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{\vdots}{\ddots + \cfrac{1}{a_m}}}}\,.$$

§ 2.

Ces quatre théorèmes étant donnés, nous pouvons les appliquer à des éléments formant une progression arithmétique dont le premier terme est a et la raison b; nous aurons:

$$f_n(a,\ b) = [a,\ a+b,\ a+2b, \ldots,\ a+(n-1)b]$$

ensuite,

$$f_{n+1}(a,\ b) = (a+nb) f_n(a,\ b) + f_{n-1}(a,\ b). \tag{5}$$

Soit alors:

$$f_0(a,\ b) = 1$$
$$f_1(a,\ b) = a$$
$$f_2(a,\ b) = a(a+b) + 1$$
$$f_3(a,\ b) = a(a+b)(a+2b) + 2(a+b)$$
$$f_4(a,\ b) = a(a+b)(a+2b)(a+3b) + 3(a+b)(a+2b) + 1$$
$$f_5(a,\ b) = a(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b) +$$
$$+ 4(a+b)(a+2b)(a+3b) + 3(a+2b)$$

. . . .

$$f_n(a,\ b) = \sum_{\lambda=0} \binom{n-\lambda}{\lambda} [a+\lambda b]\,[a+(\lambda+1)b]\,[a+(\lambda+2)b] \ldots$$
$$\ldots [a+(n-\lambda-1)b] \tag{6}$$

$$f_{n-1}(a,\ b) = \sum_{\mu=0} \binom{n-\mu-1}{\mu} [a+\mu b]\,[a+(\mu+1)b] \ldots [a+(n-\mu-2)b],$$

avec $\mu = \lambda - 1$, on écrit:

$$f_{n-1}(a,\ b) = \sum_{\lambda=1} \binom{n-\lambda}{\lambda-1} [a+(\lambda-1)b]\,[a+\lambda b] \ldots [a+(n-\lambda-1)b]. \tag{7}$$

En appliquant la formule (5) il suit:

$$f_{n+1}(a,\, b) = \sum_{\lambda=0} \frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)\dots(n-2\lambda+2)}{1\cdot 2\dots\lambda}\Big\{[a+\lambda b]\dots$$

$$\dots[a+(n-\lambda-1)b]\Big\}\Big\{(n-2\lambda+1)[a+nb]+\lambda[a+(\lambda-1)b]\Big\},$$

mais:

$$\Big[(n-2\lambda+1)[a+nb]+\lambda[a+(\lambda-1)b]\Big] = (n-\lambda+1)[a+b(n-\lambda)],$$

d'où

$$f_{n+1}(a,\, b) = \sum_{\lambda=0} \frac{(n-\lambda+1)(n-\lambda)\dots(n-2\lambda+2)}{1\cdot 2\cdot 3\dots\lambda}[a+\lambda b][a+(\lambda+1)b]\dots$$
$$\dots[a+(n-\lambda)b]$$

$$f_{n+1}(a,\, b) = \sum_{\lambda=0} \binom{n+1-\lambda}{\lambda}[a+\lambda b][a+(\lambda+1)b]\dots[a+(n-\lambda)b]. \qquad (8)$$

D'après (7) et (8) la formule (6) n'est pas seulement valable pour n; mais aussi pour $n-1$ et $n+1$, donc *elle est générale.*

Revenons à la formule (6).

$$f_n(a,\, b) = \sum_{\lambda=0} \binom{n-\lambda}{\lambda}[a+\lambda b][a+(\lambda+1)b]\dots[a+(n-\lambda-1)b],$$

et laissons ici n devenir infiniment grand.

On connait la relation:

$$a(a+b)\dots\Big(a+(n-1)b\Big) = b^n\frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}+1\right)\dots\left(\frac{a}{b}+(n-1)\right) = \frac{b^n\Gamma\left(\frac{a}{b}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)}.$$

Nous poserons:

$$\lim_{n=\infty}\frac{f_n(a,\, b)}{b^n\Gamma\left(\frac{a}{b}+n\right)} = \lim_{n=\infty}\frac{\sum_{\lambda=0}\binom{n-\lambda}{\lambda}[a+\lambda b][a+(\lambda+1)b]\dots[a+(n-\lambda-1)b]}{b^n\Gamma\left(\frac{a}{b}+n\right)}$$

$$= \lim_{n=\infty}\sum_{\lambda=0}\frac{b^{n-2\lambda}\left(\frac{a}{b}+\lambda\right)\left(\frac{a}{b}+\lambda+1\right)\dots\left(\frac{a}{b}+n-\lambda-1\right)\cdot\binom{n-\lambda}{\lambda}}{b^n\underbrace{\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{a}{b}+1\right)\dots\left(\frac{a}{b}+\lambda-1\right)}_{\Gamma\left(\frac{a}{b}+\lambda\right)}\left(\frac{a}{b}+\lambda\right)\dots\left(\frac{a}{b}+n-\lambda-1\right)\left(\frac{a}{b}+n-\lambda\right)\dots\left(\frac{a}{b}+n-1\right)}$$

$$= \lim_{n=\infty} \sum_{\lambda=0} \frac{b^{-2\lambda}}{\Gamma\left(\frac{a}{b}+\lambda\right)\cdot\left(\frac{a}{b}+n-\lambda\right)\cdots\left(\frac{a}{b}+n-1\right)} \cdot \binom{n-\lambda}{\lambda}$$

$$= \lim_{n=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^{2\lambda}}{\Gamma\left(\frac{a}{b}+\lambda\right)\cdot\lambda!} \cdot \frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)\ldots(n-2\lambda+1)}{\left(n-\lambda+\frac{a}{b}\right)\left(n-\lambda+1+\frac{a}{b}\right)\cdots\left(n-1+\frac{a}{b}\right)}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^{2\lambda}}{\Gamma\left(\frac{a}{b}+\lambda\right)\lambda!} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda}\left(\frac{1}{ib}\right)^{2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma\left(\frac{a}{b}+\lambda\right)}$$

$$= (ib)^{\frac{a}{b}-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda}\left(\frac{1}{ib}\right)^{\frac{a}{b}-1+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma\left(\frac{a}{b}+\lambda\right)} = (ib)^{\frac{a}{b}-1} I^{\frac{a}{b}-1}_{\left(\frac{2}{ib}\right)},$$

si

$$I^{a}_{(x)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{a+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(a+\lambda+1)}.$$

Ainsi:

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_n(a,\,b)}{b^n\,\Gamma\left(\frac{a}{b}+n\right)} = (ib)^{\frac{a}{b}-1} I^{\frac{a}{b}-1}_{\left(\frac{2}{ib}\right)} \tag{9}$$

Cette expression donne la relation qui existe entre la fonction Bessélienne de 1.re espèce et la fraction continue.

Si nous voulons avoir une autre formule analogue nous pouvons procéder de la manière suivante.

Soit:

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_n(a,\,b)}{b^n\,\Gamma\left(\frac{a}{b}+n\right)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^{2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma\left(\frac{a}{b}+\lambda\right)},$$

nous introduirons:

$$\frac{a}{b} = c+1, \qquad \frac{1}{b} = \frac{ix}{2}\cdot \qquad a = b(c+1) = \frac{2(c+1)}{ix},$$

ensuite nous multiplierons les deux côtés par $\left(\frac{x}{2}\right)^c$, soit:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^c\left(\frac{ix}{2}\right)^{2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(c+1+\lambda)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{c+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(c+1+\lambda)} = I^{c}_{(x)},$$

ainsi:

$$I^c_{(x)} = \lim_{n-\infty} \frac{f_n\left(\frac{2(c+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{\Gamma(c+1+n)} \cdot \left(\frac{ix}{2}\right)^n \left(\frac{x}{2}\right)^c$$

$$I^c_{(x)} = \lim_{n-\infty} \frac{i^n \left(\frac{x}{2}\right)^{n+c} f_n\left(\frac{2(c+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{\Gamma(c+1+n)} \tag{10}$$

. . . .

Dans la formule (10) écrivons $n+1$ et $c-1$ au lieu de n et c; il suivra:

$$I^{c-1}_{(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{i^{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+c} f_{n+1}\left(\frac{2c}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{\Gamma(c+1+n)}, \tag{11}$$

divisons (11) par (10), nous aurons:

$$\frac{I^{c-1}_{(x)}}{i I^c_{(x)}} = \lim_{n=\infty} \frac{f_{(n+1}\left(\frac{2c}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{f_{(n)}\left(\frac{2(c+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}. \tag{12}$$

Ensuite d'après la propriété *d*) de la fraction continue on a:

$$\frac{[a_0, a_1, a_2, \ldots a_n]}{[a_1, a_2, \ldots a_n]} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Pour, a_0, a_1, a_2,... a_n prenons la progression arithmétique suivante:

$$\frac{2c}{ix}, \quad \frac{2(c+1)}{ix}, \quad \frac{2(c+2)}{ix}, \ldots \quad \frac{2(c+n)}{ix},$$

il suivra:

$$\frac{I^{c-1}_{(x)}}{i I^c_{(x)}} = \frac{2c}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{2(c+1)}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{2(c+2)}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{2(c+3)}{ix} + \cdots\cdots}}} \quad \text{in inf. (*)}. \tag{13}$$

(*) On peut comparer avec les formules (2) et (3) données dans le § 2 de E. LOMMEL: *Studien über die Bessel'schen Funktionen*, pag. 5.

§ 3.

Appliquons à qq. cas particuliers:

I. $c = \frac{1}{2}$

$$\frac{I_{(x)}^{-1/2}}{i I_{(x)}^{1/2}} = \lim_{n=\infty} \frac{f_{n+1}\left(\frac{1}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{f_{n)}\left(\frac{3}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}.$$

Mais on sait que

$$I_{(x)}^{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x; \qquad I_{(x)}^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,$$

par conséquent:

$$\frac{I_{(x)}^{-1/2}}{i I_{(x)}^{1/2}} = \frac{\cos x}{i \sin x} = \frac{1}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{3}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{5}{ix} + \cdots\cdots \text{ in inf.}}} \tag{14}$$

A l'aide de ce théorème, LEGENDRE (*) démontre que le nombre π n'est pas rationnel. Soit:

$$\frac{e^{2\sqrt{a}} - e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}} + e^{-2\sqrt{a}}} \cdot 2\sqrt{a} = \cfrac{4a}{1 + \cfrac{4a}{3 + \cfrac{4a}{5 + \cdots\cdots}}}$$

En posant $4a = -x^2$ on arrive à la valeur réciproque de (14):

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = i \operatorname{tang} x, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 \cdots\cdots}}}} \text{ in inf.},$$

et cette formule sert de base à LEGENDRE pour la démonstration de la proposition:

« Le rapport de la circonférence au diamètre, et son carré sont des nombres irrationnels. »

(*) A. M. LEGENDRE: *Éléments de géométrie.* 4.e éd. Paris. An. X-1802. Note IV, pag. 288 et ss.; SCHLÖMILCH dans son travail déjà cité, touche aussi cette question.

D'après (14) on a:

$$\frac{I_{(x)}^{-1/2}}{i\,I_{(x)}^{1/2}} = \frac{\cos x}{i \sin x} = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}}.$$

Dans cette formule, remplaçons x par $-ix$, nous aurons:

$$\frac{I_{(-ix)}^{-1/2}}{i\,I_{(-ix)}^{1/2}} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \text{cotg. hyperbol. } x.$$

$$= \cfrac{1}{x+\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{5}{x}+\cdots\cdots \text{ in inf.}}}} \tag{15}$$

Pour $x = 1$ il suit:

$$\frac{I_{(-i)}^{-1/2}}{i\,I_{(-i)}^{1/2}} = \frac{e^{2}+1}{e^{2}-1} = 1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cdots\cdots \text{ in inf.}}}} \tag{16}$$

pour $x = 1/2$

$$\frac{I_{\left(-\frac{i}{2}\right)}^{-1/2}}{i\,I_{\left(-\frac{i}{2}\right)}^{1/2}} = \frac{e+1}{e-1} = 2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cdots\cdots \text{ in inf.}}}} \tag{17}$$

II. $c = 1$,

$$\frac{I_{(x)}^{0}}{i\,I_{(x)}^{1}} = \lim_{n=\infty} \frac{f_{(n+1)}\left(\frac{2}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{f_{(n)}\left(\frac{4}{ix}, \frac{2}{ix}\right)} = \frac{2}{ix}+\cfrac{1}{\cfrac{4}{ix}+\cfrac{1}{\cfrac{6}{ix}+\cfrac{1}{\cfrac{8}{ix}+\cdots\cdots \text{ in inf.}}}} \tag{18}$$

III. $c = 0$,

$$\frac{I_{(x)}^{-1}}{i\,I_{(x)}^{0}} = \lim_{n=\infty} \frac{f_{(n+1)}\left(0, \frac{2}{ix}\right)}{f_{(n)}\left(\frac{2}{ix}, \frac{2}{ix}\right)} = \cfrac{1}{\cfrac{2}{ix}+\cfrac{1}{\cfrac{4}{ix}+\cfrac{1}{\cfrac{6}{ix}+\cfrac{1}{\cfrac{8}{ix}+\cdots\cdots \text{ in inf.}}}}} \tag{19}$$

Euler dans son « Briefwechsel » avec Bernouilli a déjà signalé certains théorèmes analogues à (16) et à (17).

§ 4.

Après cette digression, continuons à établir les relations qui existent entre la fraction continue et la fonction Bessélienne de 1.re espèce et ses transformées.

La propriété *c*) des fractions continues donne:

$$[a_1 a_2 \dots a_m;\ a_{m+1} \dots a_{m+n}] = [a_1 a_2 \dots a_m]\,[a_{m+1} \dots a_{m+n}] + [a_1 a_2 \dots a_{m-1}]\,[a_{m+2} \dots a_{m+n}].$$

Appliquons ce théorème à l'expression $f_n(a, b)$, nous aurons:

$$f_{m+n}\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right) = f_m\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right) f_n\left(\frac{2(a+m)}{ix}, \frac{2}{ix}\right) + f_{m-1}\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right) f_{n-1}\left(\frac{2(a+m+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right); \tag{20}$$

multiplions cette équation par

$$i^{m+n}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{m+n+a-1}}{\Gamma(a+m+n)},$$

et introduisons encore les simplifications suivantes:

$$i^m f_m\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right) = P_m^{a-1}(x) \tag{21}$$

$$i^{m-1} f_{m-1}\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right) = P_{m-1}^{a-1}(x). \tag{22}$$

On aura ainsi:

$$P_m^a(x) = i^m f_m\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)$$

$$= i^m \sum \binom{m-\lambda}{\lambda} [a+1+\lambda]\,[a+2+\lambda] \dots [a+m-\lambda] \cdot \left(\frac{2}{ix}\right)^{m-2\lambda}$$

$$= \sum \frac{(m-\lambda)!}{\lambda!} \binom{a+m-\lambda}{m-2\lambda} i^{2\lambda} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda},$$

d'où

$$P_m^a(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m+1}{2}} (-1)^\lambda \frac{(m-\lambda)!}{\lambda!} \binom{a+m-\lambda}{m-2\lambda} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda} \tag{23}$$

Appelons cette nouvelle fonction *la fonction Schlaeflienne* et alors (23) nous sert de formule de définition.

Ainsi la fonction Schlaeflienne $P^a_m(x)$ est une fonction entière de $\frac{1}{x}$ du degré m. La formule (20) nous donne maintenant:

$$I^{a-1}_{(x)} = P^{a-1}_m(x) I^{a+m-1}_{(x)} - P^{a-1}_{m-1}(x) I^{a+m}_{(x)} \tag{24}$$

$$I^a_{(x)} = P^a_{m-1}(x) I^{a+m-1}_{(x)} - P^a_{m-2}(x) I^{a+m}_{(x)}. \tag{25}$$

Introduisons dans (23) au lieu de x, la valeur $-x$.

$$P^a_m(-x) = (-1)^m \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m+1}{2}} \frac{(m-\lambda)!}{\lambda!} (-1)^\lambda \binom{a+m-\lambda}{m-2\lambda} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda},$$

ainsi:

$$P^a_m(-x) = (-1)^m P^a_m(x) \tag{26}$$

D'après la formule (23), on aura d'une part:

$$P^{a-m-1}_m(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m+1}{2}} (-1)^\lambda \frac{(m-\lambda)!}{\lambda!} \binom{a-\lambda-1}{m-2\lambda} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}, \tag{27}$$

et d'autre part,

$$P^{-a}_m(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m+1}{2}} (-1)^\lambda \frac{(m-\lambda)!}{\lambda!} \binom{-a+m-\lambda}{m-2\lambda} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda},$$

mais:

$$\binom{-a+m-\lambda}{m-2\lambda} = (-1)^{m-2\lambda} \frac{(a-\lambda-1)\dots(a-m+\lambda)}{1\cdot 2\dots(m-2\lambda)}$$
$$= (-1)^{m-2\lambda} \binom{a-\lambda-1}{m-2\lambda},$$

ainsi:

$$P^{-a}_m(x) = (-1)^m \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m+1}{2}} (-1)^\lambda \frac{(m-\lambda)!}{\lambda!} \binom{a-\lambda-1}{m-2\lambda} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}. \tag{28}$$

Des équations (27) et (28) on tire:

$$\left.\begin{aligned} P^{-a}_m(x) &= (-1)^m P^{a-m-1}_m(x) \\ P^a_m(x) &= (-1)^m P^{-a-m-1}_m(x). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Cette propriété (29) des fonctions P peut aussi être déduite du principe suivant: Une fraction continue ne change pas de valeur quand on prend ses éléments dans l'ordre inverse. Par exemple:

$$i^m f_m\left(\frac{2(a+1)}{ix},\ \frac{2}{ix}\right) = i^m f_m\left(\frac{2(a-m)}{-ix},\ \frac{2}{-ix}\right).$$

La propriété *b*) des fractions continues donne:

$$f_m\left(\frac{2a}{ix},\ \frac{2}{ix}\right) f_{m-2}\left(\frac{2(a+1)}{ix},\ \frac{2}{ix}\right) - f_{m-1}\left(\frac{2a}{ix},\ \frac{2}{ix}\right) f_{m-1}\left(\frac{2(a+1)}{ix},\ \frac{2}{ix}\right) = (-1)^m,$$

multiplions cette équation par $(i)^{2m-2} = (-1)^{m-1}$, et revenons aux formules (21) et (22), nous aurons,

$$P^{a-1}_{m-1}(x) P^a_{m-1}(x) - P^{a-1}_m(x) P^a_{m-2}(x) = 1. \tag{30}$$

On peut éliminer $I^{a+m-1}_{(x)}$ entre les équations (24) et (25). Pour cela on multiplie (25) par $P^{a-1}_m(x)$ et (24) par $P^a_m(x)$, puis on retranche (25) de (24). On obtient ainsi:

$$I^{a-1}_{(x)} P^a_{m-1}(x) - I^a_{(x)} P^{a-1}_m(x) = I^{a+m}_{(x)} \left\{ \underbrace{P^{a-1}_m(x) P^a_{m-2}(x) - P^a_{m-1}(x) P^{a-1}_{m-1}(x)}_{=\,-1 \text{ d'après (30).}} \right\}$$

Donc:

$$I^{a+m}_{(x)} = P^{a-1}_m(x) I^a_{(x)} - P^a_{m-1}(x) I^{a-1}_{(x)}. \tag{31}$$

De l'équation (31) on conclut que toutes les fonctions Besséliennes de 1.re espèce comme $I^{a+1}_{(x)}$, $I^{a+2}_{(x)}, \ldots I^{a+m}_{(x)}$ peuvent se ramener à deux seules fonctions Besséliennes $I^{a-1}_{(x)}$ et $I^a_{(x)}$ affectées de coefficients qui sont des fonctions entières de $\frac{1}{x}$.

Ce résultat est la conséquence principale que l'on peut tirer de l'équation originelle:

$$I^{a+1}_{(x)} + I^{a-1}_{(x)} - \frac{2a}{x} I^a_x = 0,$$

de laquelle nous sommes partis, et nous ajoutons que notre résultat n'est qu'une généralisation de ceux obtenus de Bessel, Schlömilch et Lommel.

§ 5.

Remplaçons, dans l'équation (24) le paramètre a par $-a-m+1$, nous obtiendrons:

$$I^{-a-m}_{(x)} = P^{-a-m}_m(x) I^{-a}_{(x)} - P^{-a-m}_{m-1}(x) I^{1-a}_{(x)}.$$

Or, d'après (29) (1.re équation), on a:

$$\left.\begin{aligned} P_m^{-a-m}(x) &= (-1)^m P_m^{a-1}(x) \\ P_{m-1}^{-a-m} &= -(-1)^m P_{m-1}^a(x); \end{aligned}\right\} \qquad (31_a)$$

et si nous substituons ces valeurs dans l'équation précédente, il vient:

$$I_{(x)}^{-a-m} = (-1)^m [P_{m-1}^a(x) I_{(x)}^{1-a} + P_m^{a-1}(x) I_{(x)}^{-a}]. \qquad (32)$$

Rappelons la forme que L. Schläfli (*) a donné à la fonction complémentaire Bessélienne:

$$K_{(x)}^a = \operatorname{cotg} a\pi\, I_{(x)}^a - \frac{1}{\sin a\pi} I_{(x)}^{-a},$$

par analogie on a:

$$K_{(x)}^{a+m} = \operatorname{cotg}(a+m)\pi\, I_{(x)}^{a+m} - \frac{1}{\sin(a+m)\pi} I_{(x)}^{-a-m}.$$

Si nous multiplions (31) par

$$\operatorname{cotg}(a+m)\pi = \operatorname{cotg} a\pi$$

et (32) par

$$-\frac{1}{\sin(a+m)\pi} = -\frac{(-1)^m}{\sin a\pi},$$

puis additionnons, nous aurons:

$$K_{(x)}^{a+m} = P_m^{a-1}(x) K_{(x)}^a - P_{m-1}^a(x) K_{(x)}^{a-1} \qquad (33)$$

On élimine ensuite entre (31) et (33) la fonction $P_m^{a-1}(x)$, en multipliant (31) par $K_{(x)}^a$ et (33) par $-I_{(x)}^a$ et en additionnant ensuite; il vient:

$$I_{(x)}^{a+m} K_{(x)}^a - K_{(x)}^{a+m} I_{(x)}^a = P_{m-1}^a(x) \{K_{(x)}^{a-1} I_x^a - K_{(x)}^a I_{(x)}^{a-1}\}. \qquad (33_a)$$

La formule de Weber (**) donne:

$$I_{(x)}^a \frac{\partial K_{(x)}^a}{\partial x} - K_x^a \frac{\partial I_{(x)}^a}{\partial x} = \frac{2}{\pi x},$$

ou ce qui revient au même:

$$I_{(x)}^a K_{(x)}^{a-1} - K_{(x)}^a I_{(x)}^{a-1} = \frac{2}{\pi x};$$

(*) Voir Annali di Matematica, Serie 2.a, tom. 4, pag. 17 et mes remarques dans le travail intitulé: *Ueber die Addition et Subtraktion der Argumente bei Bessel'schen Funktionen nebst einer Anwendung.* Mathem. Annalen, Bd. 43, pag. 136.

(**) Crelle's Journal, Bd. 76, pag. 10, 1873.

il suit en changeant les signes des deux membres de l'équation (33_a):

$$I^a_{(x)} K^{a+m}_{(x)} - K^a_{(x)} I^{a+m}_{(x)} = -\frac{2}{\pi x} P^a_{m-1}(x). \tag{34}$$

Avec cela, la fonction Schlaeflienne P est donnée par un déterminant du 2.d ordre, soit:

$$P^a_{m-1}(x) = \frac{\pi x}{2} \begin{vmatrix} I^{a+m}_{(x)} & K^{a+m}_{(x)} \\ I^a_{(x)} & K^a_{(x)} \end{vmatrix}. \tag{35}$$

On obtient des déterminants analogues quand on développe la fonction S de Schläfli (*) en fonctions I et en fonction O, c'est-à-dire en fonctions Besséliennes de 1.e et 2.e espèce.

Dans (35), remplaçons l'indice $m-1$ par l'indice plus élevé m, il vient:

$$P^a_m(x) = \frac{\pi x}{2}(K^a_{(x)} \cdot I^{a+m+1}_{(x)} - I^a_{(x)} K^{a+m+1}_{(x)}). \tag{36}$$

Dans (36) introduisons:

1.° au lieu de m la valeur $-m$;
2.° » a » $a+1-m$
» m » $m-2$.

En substituant, il suit:

$$P^a_{-m}(x) = \frac{\pi x}{2}(K^a_{(x)} I^{a-m+1}_{(x)} - I^a_{(x)} K^{a-m+1}_{(x)}) \tag{37}$$

$$P^{a+1-m}_{m-2}(x) = \frac{\pi x}{2}(K^{a+1-m}_{(x)} I^a_{(x)} - I^{a-m+1}_{(x)} K^a_{(x)}). \tag{38}$$

De (37) et (38) on tire la relation:

$$P^a_{-m}(x) = -P^{a-m+1}_{m-2}(x). \tag{39}$$

Mais d'après la formule (31_a) (2.me équation) on a

$$-P^{a+1-m}_{m-2}(x) = (-1)^{m-1} P^{-a}_{m-2}(x),$$

il vient donc aussi:

$$P^a_{-m}(x) = (-1)^{m-1} P^{-a}_{m-2}(x). \tag{40}$$

Ces relations peuvent être démontrées directement par la formule de définition (23). On aura:

$$P^{a-1}_m(x) + P^{a+1}_{m-2}(x) = \frac{2a}{x} P^a_{m-1}(x). \tag{41}$$

(*) Mathem. Annalen, Bd. 3, pag. 139.

L'équation (41) a une forme semblable à celle de la formule fondamentale dont nous sommes partis.

On a aussi:

$$P^a_m(x) + P^a_{m-2}(x) = (a+m)\frac{2}{x} P^a_{m-1}(x), \tag{42}$$

(41) et (42) peuvent s'obtenir directement en partant de la definition des fractions continues. Si on lit les éléments en sens direct on a (41); si on les lit en sens inverse on a (42). Nous obtenons ainsi une formule de réduction qui nous donne le moyen de développer la fonction $P^a_m(x)$ quand son indice m est un nombre négatif.

§ 6.

De l'équation (23) il suit, pour

$$m=0, \qquad P^a_0(x) = 1$$

$$m=1, \qquad P^a_1(x) = (a+1)\frac{2}{x}$$

$$m=2, \qquad P^a_2(x) = (a+2)(a+1)\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 1$$

$$m=3, \qquad P^a_3(x) = (a+3)(a+2)(a+1)\left(\frac{2}{x}\right)^3 - 2(a+2)\frac{2}{x}$$

. . . .

. . . .

. . . .

En appliquant la formule (42) aux valeurs obtenues plus haut, on aura:

$$m=1, \qquad P^a_{-1}(x) = 0$$

$$m=0, \qquad P^a_0(x) + P^a_{-2}(x) = a\cdot\frac{2}{x} P^a_{-1}(x),$$

ainsi:

$$P^a_{-2}(x) = -P^a_0(x) = -1$$

. . . .

$$m=-1, \qquad P^a_{-1}(x) + P^a_{-3}(x) = (a-1)\frac{2}{x} P^a_{-2}(x)$$

$$P^a_{-3}(x) = (1-a)\frac{2}{x}$$

. . . .

$$m = -2, \qquad P^a_{-2}(x) + P^a_{-4}(x) = (a-2)\frac{2}{x}P^a_{-3}(x)$$

$$P^a_{-4}(x) = (a-2)(-a+1)\left(\frac{2}{x}\right)^2 + 1$$

$$= (-1)^1\left[(2-a)(1-a)\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 1\right]$$

$$P^a_{-4}(x) = (-1)^1 P^{-a}_{+2}(x).$$

D'une manière analogue, on a:

$$P^a_{-5}(x) = (-1)^2 P^{-a}_3(x)$$

. . . .

. . . .

et en général

$$P^a_{-m}(x) = (-1)^{m-1} P^{-a}_{m-2}(x)$$

. . . .

Ce qui n'est pas autre chose que la formule (40); cette formule (40) est donc valable pour les indices

$$-1, \quad -2, \quad -3, \ldots, \quad -m.$$

D'un autre côté la formule de réduction (42) donne, quand on met, au lieu de m, la valeur $-m+1$,

$$P^a_{-m-1}(x) = (a-m+1)\frac{2}{x}P^a_{-m}(x) - P^a_{-m+1}(x),$$

en introduisant les valeurs données par (40), il vient:

$$P^a_{-m-1}(x) = (a-m+1)\frac{2}{x}(-1)^{m-1}P^{-a}_{m-2}(x) - (-1)^m P^{-a}_{m-3}(x)$$

$$= (-1)^m\left\{(m-a-1)\frac{2}{x}P^{-a}_{m-2}(x) - P^{-a}_{m-3}(x)\right\}.$$

La quantité entre parenthèses, n'est pas autre chose, d'après (42) que $P^{-a}_{m-1}(x)$, on aura donc, en substituant cette valeur,

$$P^a_{-m-1}(x) = (-1)^m P^{-a}_{m-1}(x). \tag{43}$$

Cette formule peut aussi être obtenue de (40), quand, au lieu de l'indice $-m$, on introduit l'indice $-(m+1)$.

La formule (40), étant valable pour l'indice $-m$, et aussi pour l'indice $-(m+1)$, est donc générale.

§ 7.

Avant de nous arrêter à quelques cas particuliers, nous allons encore donner pour la *fonction Schlaeflienne* $P_m^{-a}(x)$ l'expression générale.

D'après (23) on a:

$$P_m^{-a}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m+1}{2}} (-1)^\lambda \frac{(m-\lambda)!}{\lambda!} \binom{-a+m-\lambda}{m-2\lambda} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}$$

$$\binom{-a+m-\lambda}{m-2\lambda} = \frac{(-a+m-\lambda)\ldots(-a+\lambda+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-2\lambda)}$$

$$= (-1)^{m-2\lambda} \frac{(a-\lambda-1)(a-\lambda-2)\ldots(a-m+\lambda)}{1\cdot 2\ldots(m-2\lambda)}$$

$$= (-1)^m \binom{a-m+\lambda}{m-2\lambda},$$

ainsi:

$$P_m^{-a}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m+1}{2}} (-1)^{m+\lambda} \frac{(m-\lambda)!}{\lambda!} \binom{a-m+\lambda}{m-2\lambda} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}. \tag{44}$$

§ 8.

Nous allons d'abord étudier le cas particulier où l'on a dans la fonction Schlaeflienne le paramètre $a = -\frac{1}{2}\cdot$ Pour cela nous pouvons partir de l'équation (23) ou de l'équation (44), mais dans cette dernière équation on devra poser $a = \frac{1}{2}\cdot$

De (23) on tire:

$$P_m^{-1/2}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m+1}{2}} (-1)^\lambda \frac{(m-\lambda)!}{\lambda!} \binom{-1/2+m-\lambda}{m-2\lambda} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda},$$

mais

$$\binom{-1/2+m-\lambda}{m-2\lambda} = \frac{1}{2^{m-2\lambda}} \cdot \frac{(2m-2\lambda-1)\ldots(2\lambda+3)(2\lambda+1)}{(m-2\lambda)!},$$

et

$$\frac{(m-\lambda)!}{\lambda!} = (m-\lambda)(m-\lambda-1)\ldots(\lambda+1)$$

$$= \frac{1}{2^{m-2\lambda}} (2m-2\lambda)(2m-2\lambda-2)\ldots(2\lambda+4)(2\lambda+2),$$

ainsi:

$$\frac{(m-\lambda)!}{\lambda!}\binom{-{}^1/_2+m-\lambda}{m-2\lambda}\left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}=$$

$$\frac{(2m-2\lambda)(2m-2\lambda-1)(2m-2\lambda-2)\ldots(2\lambda+2)(2\lambda+1)}{(m-2\lambda)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{m-2\lambda}$$

$$=\frac{(2m-2\lambda)!}{(2\lambda)!(m-2\lambda)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{m-2\lambda}$$

$$P_m^{-{}^1/_2}(x)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m+1}{2}}(-1)^\lambda\frac{(2m-2\lambda)!}{(2\lambda)!(m-2\lambda)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{m-2\lambda}. \tag{45}$$

De la même façon, on demontre que:

$$P_m^{{}^1/_2}(x)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m+1}{2}}(-1)^\lambda\frac{(2m-2\lambda+1)!}{(2\lambda+1)!(m-2\lambda)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{m-2\lambda}. \tag{46}$$

Au lieu de m prenons $m-1$, nous aurons:

$$P_{m-1}^{{}^1/_2}(x)-\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m}{2}}(-1)^\lambda\frac{(2m-2\lambda-1)!}{(2\lambda+1)!(m-2\lambda-1)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{m-2\lambda-1}. \tag{47}$$

On peut réunir en une seule les séries (45) et (47), après avoir multiplié (47) préablement par i

$$P_m^{-{}^1/_2}(x)+iP_{m-1}^{{}^1/_2}(x)=\left(\frac{1}{2x}\right)^m\sum_{\mu=0}^{\mu=m}\frac{(2m-\mu)!}{\mu!(m-\mu)!}(2ix)^\mu. \tag{48}$$

Pour

$\mu=0,\ 2,\ 4,\ldots\ 2\lambda,$ cette série donne $P_m^{-{}^1/_2}(x)$

et pour

$\mu=1,\ 3,\ 5,\ldots,$ elle donne $P_{m-1}^{{}^1/_2}(x),$

on aura aussi l'expression conjuguée:

$$P_m^{-{}^1/_2}(x)-iP_{m-1}^{{}^1/_2}(x)=\left(\frac{1}{2x}\right)^m\sum_{\mu=0}^{\mu=m}\frac{(2m-\mu)!}{\mu!(m-\mu)!}(-2ix)^\mu. \tag{49}$$

Posons:

$$H_m(z)=\sum_{\mu=0}^{\mu=m}\frac{(2m-\mu)!}{\mu!(m-\mu)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{m-\mu}. \tag{50}$$

Il est évidemment permis de mettre $m-\mu$ au lieu de μ,

$$H_m(z)=\sum_{\mu=0}^{\mu=m}\frac{(m+\mu)!}{\mu!(m-\mu)!}\left(\frac{1}{z}\right)^\mu. \tag{51}$$

Il suit, en ajoutant et retranchant (48) et (49) et en tenant compte de (50) ou (51):

$$P_m^{-1/2}(x) = \frac{1}{2}\left[i^m H_m(2ix) + (-i)^m H_m(-2ix)\right] \tag{52}$$

$$P_{m-1}^{+1/2}(x) = \frac{1}{2i}\left[i^m H_m(2ix) - (-i)^m H_m(-2ix)\right]. \tag{53}$$

Le numéro (31) donnait, pour $a = \frac{1}{2}$

$$I_x^{m+1/2} = P_m^{-1/2}(x) I_{(x}^{1/2} - P_{m-1}^{1/2}(x) I_x^{-1/2}.$$

En appliquant les resultats donnés par (52) et (53) et en rappelant les valeurs:

$$I_{(x)}^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x = \frac{1}{i}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}(e^{ix} - e^{-ix})$$

$$I_{(x)}^{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}(e^{ix} + e^{-ix}).$$

il suit:

$$I_{(x)}^{m+1/2} = \frac{i}{\sqrt{2\pi x}}\left[i^m H_m(2ix) e^{-ix} - (-i)^m H_m(-2ix) e^{ix}\right]. \tag{54}$$

On a d'une façon analogue à l'aide de (33) pour $a = \frac{1}{2}$

$$I_{(x)}^{-m-1/2} = P_{-m}^{1/2}(x) I_{x}^{-1/2} - P_{-m-1}^{-1/2}(x) I_{(x}^{1/2}$$

$$I_{(x)}^{-m-1/2} = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi x}}\left[i^m H_m(2ix) e^{-ix} + (-i)^m H_m(-2ix) e^{ix}\right]. \tag{55}$$

La formule (34) donnait:

$$K_{(x)}^{m+1/2} = P_m^{-1/2}(x) K_{(x)}^{1/2} - P_{m-1}^{1/2}(x) K_{(x)}^{1/2},$$

en substituant les valeurs trouvées, on a:

$$K_{(x)}^{m+1/2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\left[i^m H_m(2ix) e^{-ix} + (-i)^m H_m(-2ix) e^{ix}\right] \tag{56}$$

$$K_{(x)}^{m-1/2} = -\frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi x}}\left[i^m H_m(2ix) e^{-ix} - (-i)^m H_m(-2ix) e^{ix}\right]. \tag{57}$$

Multiplions la formule (56) par i, puis ajoutons-la et retranchons-la de la formule (54), nous aurons:

$$\frac{1}{2}\left[I_{(x)}^{m+1/2} + i K_{(x)}^{m+1/2}\right] = \frac{(-i)^{m+1}}{\sqrt{2\pi x}} H_m(-2ix)e^{ix} \tag{58}$$

$$\frac{1}{2}\left[I_{(x)}^{m+1/2} - i K_{(x)}^{m+1/2}\right] = \frac{(i)^{m+1}}{\sqrt{2\pi x}} H_m(2ix)e^{-ix}. \tag{59}$$

Nous trouvons de même à l'aide de (55) et (57):

$$\frac{1}{2}\left[I_{(x)}^{-m-1/2} + i K_{(x)}^{-m-1/2}\right] = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi x}} i^m H_m(2ix)e^{-ix} \tag{60}$$

$$\frac{1}{2}\left[I_{(x)}^{-m-1/2} - i K_{(x)}^{-m-1/2}\right] = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi x}} (-i)^m H_m(-2ix)e^{ix}. \tag{61}$$

La propriété c) des fractions continues, nous donne:

$$H_{m-1}(z)H_m(-z) + H_{m-1}(-z)H_m(z) = z. \tag{62}$$

La formule de réduction (42) donne aussi:

$$H_{m+1}(z) = \frac{2(2m+1)}{z} H_m z + H_{m-1}(z). \tag{63}$$

En continuant il vient:

$$H_{-m}(z) = H_{m-1}(z), \tag{64}$$

et

$$H_m(2z) = f_m\left(\frac{1}{z}, \frac{2}{z}\right) + f_{m-1}\left(\frac{1}{z}, \frac{2}{z}\right). \tag{65}$$

Berne, en mai 1894.

Sulla definizione di integrale.

(*Di* Giulio Ascoli, *a Milano.*)

Leggendo alcuni giorni fa il n.° 1 (Définition de l'intégrale définie, ses propriétés fondamentales) del cap. I del tomo 1 dell'opera del sig. E. Picard: *Traité d'Analyse,* mi sovvenni di aver scritto in addietro (*) una Nota: *Sul concetto di integrale definito,* la quale mi fu ispirata dalle ricerche di Riemann sullo stesso argomento contenute nella Memoria: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.* Del mio lavoro, comunque non scevro da concetti nuovi, non fu dai matematici fatta, a quanto io sappia, alcuna menzione; anzi, le idee in esso esposte furono attribuite ad altri. Egli è perciò che, desideroso di rivendicarmi le medesime, non credo sconveniente il pubblicare questa noterella, tanto più che mi venne fatto di esporre una parte delle mie ricerche in maniera alquanto più semplice.

Sia $f(x)$ una funzione ovunque finita nel segmento limitato ab $(a < b)$ e tale, che non si possa assegnare un tratticello comunque piccolo del medesimo, in cui non esista, ad esempio, la funzione eguale ad $\frac{1}{2}$ in ciascun punto distante dall'estremo a di una lunghezza commensurabile con l'unità di misura, nè altrove definita.

Ciò premesso, divido il tratto ab in più parti $d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_{l_1}^{(1)}$ da sinistra verso destra e dico $G^{(1)}$ il gruppo di punti di divisione, ripeto poi la stessa operazione indefinitamente, generando in tal guisa la varietà degli spazi $d_1^{(s)}, d_2^{(s)}, \ldots, d_{l_s}^{(s)}$ $(s = 1, 2, 3, 4, \ldots)$ e l'insieme corrispondente $G^{(s)}$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$. Ammetto altresì che l'elemento $d_t^{(s)}$ sia evanescente col quoto $\frac{1}{s}$, qualunque sia l'intero t $(\geqq 1, \leqq l_s)$.

(*) Vedi il tomo 2, serie 2.ª degli Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma, 1875.

Detto $A_t^{(s)}$ il limite superiore (*) dei valori conseguiti dalla $f(x)$ nel tratto $d_t^{(s)}$, formo la somma:

$$\sum_1^{l_s}{}_t\, d_t^{(s)} A_t^{(s)} = \varphi(s),$$

la quale è una funzione che ha vita soltanto pei valori interi dell'ente s.

L'espressione $\varphi(s)$ tende ad un limite al crescere indefinito del numero s.

Ed invero, detto B il limite superiore dei valori assoluti della $f(s)$ nel tratto ab, non si ha al certo $\varphi(s) > B \cdot ab$, fatta astrazione dal segno. Questa asserzione è conseguenza della proposizione:

Se A_1 è una varietà di grandezze tali, che possa assegnarsi una quantità M in guisa, che nessuna delle medesime la superi, il limite superiore del gruppo di valori B_1 contenuto in A_1 non può essere più grande della quantità analoga relativa all'insieme A_1.

Ciò posto, dico $g^{(s)}$ ($s = 1, 2, 3, \ldots$) un complesso conforme all'altro $G^{(s)}$, il quale divida il tratto ab nei segmenti $\delta_1^{(s)}, \delta_2^{(s)}, \ldots, \delta_{p_s}^{(s)}$, laddove l'elemento $\delta_v^{(s)}$ si annulla con $\frac{1}{s}$, qualunque sia l'indice v, ed ogni punto del gruppo $g^{(s)}$ appartiene al successivo $g^{(s+1)}$. In tale ipotesi abbiamo per la proposizione rammentata or ora

$$\sum_1^{p_{s+1}}{}_t\, B_t^{(s+1)} \delta_t^{(s+1)} \leqq \sum_1^{p_s}{}_t\, B_t^{(s)} \delta_t^{(s)},$$

quando il simbolo $B_t^{(s)}$ indichi il limite superiore della funzione $f(x)$ nel

(*) Il limite superiore di una funzione $f(x)$ che non va all'infinito positivamente in un tratto ab è una grandezza M tale, che la differenza $M - f(x)$ non sia mai negativa nell'intervallo contemplato, laddove per valore opportuno della variabile x ($\geqq a$, $\leqq b$) essa può riuscire minore di quella quantità che si vuole. Una funzione continua nel segmento ab raggiunge in esso il limite superiore dei suoi valori, ad esempio, l'ente sen$x$ nel tratto $0\,\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1\right)$. Se all'incontro la funzione contemplata non è continua, esso limite potrà venir conseguito ed anche no. Il primo evento si verifica per la espressione che è eguale a sen$x$ in ogni punto dell'intervallo $0\,\frac{\pi}{2}$ distante dall'origine di una lunghezza incommensurabile con l'unità di misura nè definita altrove $\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1\right)$, il secondo per la funzione ottenuta in modo analogo da sen$x$ scambiando però i punti di ascissa incommensurabile con quelli che non sono tali.

tratto $\delta_t^{(s)}$. Di conseguenza, l'espressione $\sum_1^{\nu_s}{}_t B_t^{(s)} \delta_t^{(s)}$ tende ad un limite L all'annullarsi del quoto $\frac{1}{s}$, perchè una quantità mutabile che mai aumenta nè eccede in valore assoluto una grandezza fissa converge, come è noto, ad un valore.

È facile ora l'avvertire come si abbia $\lim\limits_{s=\infty} \varphi(s) = L$.

Ed invero, la quantità $\varphi(s)$ restando finita all'aumentare dell'intero s oscillerà tra due grandezze M ed N (*). D'altra parte, ha luogo il teorema:

Se una funzione $l(x)$ oscilla mentre la variabile x cresce a dismisura tra due quantità M ed N ($M \geqq N$), si può assegnare una successione di valori x_1, x_2,... per l'ente x in guisa, che sia $\lim\limits_{t=\infty} l(x_t) = M$, ed un'altra x'_1, x'_2,... per modo, che si abbia $\lim\limits_{t=\infty} l(x'_t) = N$.

Considero ora la serie di interi ognora crescenti r_1, r_2, r_3,... tale, che sia $\lim\limits_{v=\infty} \varphi(r_v) = M$, laddove la somma q_{r_t} dei segmenti nati dal gruppo $G^{(r_t)}$, i quali hanno un termine od un punto intermedio in un elemento dell'insieme $g^{(t)}$ si annulla con $\frac{1}{t}$. A queste condizioni si può soddisfare nel seguente modo: scelto l'aggregato k_1, k_2, k_3,... in guisa, che sia $\lim\limits_{t=\infty} \varphi(k_t) = M$, tolgo da quest'ultimo l'altro $k_{v_1} \equiv r_1$, $k_{v_2} \equiv r_2$, $k_{v_3} \equiv r_3$,... per modo, che si abbia $\lim\limits_{t=\infty} q_{r_t} = 0$, il che è al certo possibile, perchè il numero dei punti

---

(*) Nel n.° 1 della mia Memoria: *Sulla serie di Fourier* (Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati dal prof. Brioschi, serie 2.ª, tom. 6, 1873) espongo le considerazioni seguenti: *Se la funzione $f(x)$ è continua nel tratto $\overline{a+0}\ \overline{b-0}$ ($a < b$) e finita in $\overline{a+0}$ e se la si rappresenta graficamente nel solito modo, si possono tracciare due rett' parallele all'asse X, le quali si confondono in una sola, quando l'ente $f(a+0)$ ha significato, tali, che, assegnata una quantità arbitraria ε (>0), esistano altre due, l'una al disopra della superiore di ε, l'altra al disotto della seconda pure di ε, dotate della proprietà, che per tutti i punti di un tratticello aderente ad $\overline{a+0}$ l'imagine della $f(x)$ cada tra le medesime.*

In una Nota al mio lavoro: *Sul concetto di integrale definito* aggiungo, riferendomi all'asserzione riportata: *Ivi io mi accosto al punto a sito a distanza finita, suppongo continua la funzione tra a e b e finita presso l'ente a. È però chiaro come basti sia soddisfatta la terza soltanto delle condizioni precedenti, perchè sussista il concetto di rette limite.*

Io fui, se non erro, il primo ad introdurre nella scienza le considerazioni precedenti, ed il largo uso fattone dai matematici dimostra la efficacia delle medesime.

di ciascuna varietà $g^{(t)}$ è determinato, laddove l'ente $d_u^{(s)}$ si annulla con $\frac{1}{s}$, qualunque sia l'intero u ($\geqq 1$, $\leqq l_s$). Scindo ora la quantità $\varphi(r_v)$ nelle due parti H_v e K_v, di cui la seconda è quell'aggregato degli elementi $d_u^{(s)} A_u^{(s)}$ che corrisponde alla somma degli spazi indicata con q_{r_v}, la quale, come si osservò, tende allo zero col valore reciproco dell'intero v. Ciò premesso, in virtù della prima proposizione non si ha al certo $H_v > \sum_t \delta_t^{(v)} B_t^{(v)}$, qualunque sia il numero v; mandando quindi v all'infinito, poichè $\lim_{v=\infty} K_v = 0$, non sarà $M > L$. Invertendo il nostro ragionamento rispetto ai gruppi G e g, deduco che non si avrà neppure $L > M$, laonde $L = M$.

Quanto si disse circa alle quantità L ed M può ripetersi anche delle due L ed N, e perciò:

$$L = M = N,$$

ossia la grandezza $\varphi(s)$ tende al limite L.

Possiamo quindi enunciare il teorema:

Se $f(x)$ è una funzione finita nel tratto ab ($a < b$) tale, che non possa assegnarsi un intervallo comunque piccolo in ciascun punto del quale essa non abbia significato, la somma $\sum_m d_m^{(s)} A_m^{(s)}$ relativa alla varietà dei gruppi $G^{(s)}$ ($s = 1, 2, 3, \ldots$) converge ad un limite L all'annullarsi del quoto $\frac{1}{s}$. Questo limite non muta qualunque sia la serie dei punti cui ci riferiamo.

E poichè il limite inferiore della $f(x)$ preso col segno contrario è il limite superiore della espressione $-f(x)$, ne avviene che possiamo enunciare un teorema analogo al precedente rispetto alla somma:

$$\sum_m d_m^{(s)} a_m^{(s)},$$

quando il simbolo $a_m^{(s)}$ indichi il limite inferiore della $f(x)$ nello spazio $d_m^{(s)}$. Dirò l questo nuovo limite. È poi chiaro che si ha $L > l$ oppure $L = l$. Quando sia $L = l$, la funzione $f(x)$ si suole dire integrabile nel tratto contemplato ab ($a < b$) e si scrive:

$$L = l = \lim \sum_1^{l_t}{}_u\, d_u^{(t)} e_u^{(t)} = \int_a^b f(x)\,dx,$$

laddove l'ente $d_u^{(t)}$ si annulla con $\frac{1}{t}$, qualunque sia l'intero t ($\geqq 1$, $\leqq l_t$), ed $e_u^{(t)}$ è un valore compreso tra le grandezze $A_m^{(t)}$ ed $a_m^{(t)}$ e se vuolsi anche eguale ad una di quest'ultime.

La relazione $L = l$ può presentarsi sotto altri notevoli aspetti come ho dimostrato, seguendo le idee di Riemann, nel mio lavoro: *Sul concetto di integrale definito.*

Nel Trattato di *Calcolo differenziale* di Angelo Genocchi pubblicato con aggiunte dal dott. G. Peano (Torino, fratelli Bocca, 1884) vengono attribuite (a pag. XXXI, n.° 193) al sig. Volterra le considerazioni precedenti, il quale le espose nel vol. 19.° del Giornale di Matematiche pubblicato per cura di G. Battaglini (Napoli, Benedetto Pellerano, editore, 1881). Ma poichè la Memoria nella quale io esposi questi concetti risale al 1875, ardisco rivendicarmi queste idee.

Milano, 11 maggio 1891.

Nuove formole nella moltiplicazione e nella trasformazione delle funzioni ellittiche.

(*Di* Francesco Brioschi, *a Milano.*)

1. Considerando la forma biquadratica:

$$f = 4x_1^3 x_2 - g_2 x_1 x_2^3 - g_3 x_2^4,$$

per la quale sono g_2, g_3 i due invarianti, ed

$$h = \frac{1}{2}(ff)_2, \qquad t = 2(fh),$$

i due covarianti, si ha come è noto:

$$t^2 = -4h^3 + g_2 h f^2 - g_3 f^3. \tag{1}$$

Posto $x_1 = x$, $x_2 = 1$ ed $f' = \frac{df}{dx}$, inoltre:

$$k = xf + h,$$

saranno:

$$k = 3xf - \frac{1}{16}f'^2, \qquad t = \frac{1}{2}f'k - f^2. \tag{2}$$

Si indichino con e_1, e_2, e_3 le radici della equazione $f = 0$, e si considerino le tre espressioni (*):

$$y_r = (x - e_r)^2 - m_r \qquad (r = 1, 2, 3), \tag{3}$$

nelle quali:

$$m_r = 3e_r^2 - \frac{1}{4}g_2 = (e_r - e_s)(e_r - e_t).$$

Dimostrasi facilmente essere:

$$y_r^2 = -(h + e_r f),$$

(*) Posto $\varphi_r = (x_1 - e_s x_2)(x_1 - e_t x_2)$, $\psi_r = 4x_2(x_1 - e_r x_2)$ sicchè $f = \varphi_r \psi_r$ si ha: $y_r = (\varphi_r \psi_r)$.

e quindi per la (1) sarà:

$$t = 2y_1 y_2 y_3.$$

La somma delle tre quantità y_r conduce alla

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{4} f',$$

ed essendo:

$$y_2 y_3 = (x - e_1) f - \frac{1}{4} f' y_1$$

$$y_3 y_1 = (x - e_2) f - \frac{1}{4} f' y_2$$

$$y_1 y_2 = (x - e_3) f - \frac{1}{4} f' y_3,$$

si otterrà la terza relazione:

$$y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2 = k,$$

ed infine per la seconda delle (2):

$$\frac{1}{2} f^2 = (y_1 + y_2 + y_3)(y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2) - y_1 y_2 y_3,$$

la quale può anche dedursi dalle

$$y_2^2 y_3 + y_3^2 y_1 + y_1^2 y_2 = \frac{1}{4} f^2 - \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \delta^{\frac{1}{2}} f$$

$$y_2 y_3^2 + y_3 y_1^2 + y_1 y_2^2 = \frac{1}{4} f^2 - \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \delta^{\frac{1}{2}} f,$$

essende $\delta = g_2^3 - 27 g_3^2$.

2. Indichiamo con D il simbolo d'operazione:

$$D = 12 g_3 \frac{d}{dg_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{d}{dg_3},$$

pel quale, come è noto, si ha:

$$D(e_r) = 4 e_r^2 - \frac{2}{3} g_2.$$

Operando sulle tre quantità y_1, y_2, y_3, si ottengono le tre seguenti relazioni:

$$\left.\begin{aligned} D(y_1) &= -\left(4x^2 - \frac{2}{3} g_2\right) y'_1 + 4x y_1 + f \\ D(y_2) &= -\left(4x^2 - \frac{2}{3} g_2\right) y'_2 + 4x y_2 + f \\ D(y_3) &= -\left(4x^2 - \frac{2}{3} g_2\right) y'_3 + 4x y_3 + f, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

dalle quali indicando con $F(y_1, y_2, y_3)$ una funzione omogenea dell'ordine m di y_1, y_2, y_3, si deduce la:

$$D(F) = -\left(4x^2 - \frac{2}{3}g_2\right)F' + 4mxF + fP(F), \tag{5}$$

essendo:

$$P = \frac{dF}{dy_1} + \frac{dF}{dy_2} + \frac{dF}{dy_3} \qquad \left(y'_r = \frac{dy_r}{dx}, \ F' = \frac{dF}{dx}\right).$$

Applichiamo quest'ultimo risultato ai due casi di $F = k$, $F = t$. Nel primo si avrà:

$$D(k) = -\left(4x^2 - \frac{2}{3}g_2\right)k' + 8xk + \frac{1}{2}ff',$$

ma siccome $k' = 3f$, $k'' = 3f'$, si ha che:

$$\frac{1}{2}f'k' + fk'' = \frac{9}{2}ff',$$

il quale valore sostituito nell'ultima relazione conduce alla

$$3^2 D(k) = -3^2\left(4x^2 - \frac{2}{3}g_2\right)k' + 3^2(3^2 - 1)xk + \frac{1}{2}f'k' + fk''. \tag{6}$$

Analogamente se $F = t$ si ha:

$$D(t) = -\left(4x^2 - \frac{2}{3}g_2\right)t' + 12xt + 2fk.$$

Ma osservando che:

$$t' = 12xk - \frac{1}{2}ff', \qquad t'' = 20k,$$

e quindi per le (2):

$$f't' = 24xt + 8fk,$$

si ottiene la:

$$\frac{3}{2}f't' + ft'' - 36xt = 32fk,$$

e quindi:

$$4^2 D(t) = -4^2\left(4x^2 - \frac{2}{3}g_2\right)t' + (4^2 - 3)(4^2 - 4)xt + \frac{3}{2}f't' + ft'. \tag{7}$$

Le relazioni (6) (7) sono i due tipi di equazioni differenziali alle quali soddisfano alcune speciali funzioni $F(y_1, y_2, y_3)$, equazioni che deduconsi dalla (5) tenendo presenti i tipi superiori.

Sia dapprima n un numero dispari, ed F una forma ternaria dell'ordine $m=\frac{n^2-1}{4}$; dalla (5) si deduce:

$$n^2 D(F)=-n^2\left(4x^2-\frac{2}{3}g_2\right)F'+n^2(n^2-1)xF+\frac{1}{2}f' F'+fF'', \tag{8}$$

per le forme F che soddisfano alla:

$$\frac{1}{2}f' F'+fF''=n^2 fP(F), \tag{9}$$

e pel caso di n pari ed $m=\frac{n^2-4}{4}$, sarà:

$$n^2 D(F)=-n^2\left(4x^2-\frac{2}{3}g_2\right)F'+(n^2-3)(n^2-4)xF+\frac{3}{2}f' F'+fF'', \tag{10}$$

per le forme F le quali soddisfano alla:

$$\frac{3}{2}f' F'+fF''-3(n^2-4)xF=n^2 fP(F). \tag{11}$$

Le forme ternarie $F(y_1, y_2, y_3)$ oltre le proprietà generali delle funzioni omogenee hanno per la loro origine le seguenti proprietà speciali. Posto:

$$Q(F)=y_1^2\frac{dF}{dy_1}+y_2^2\frac{dF}{dy_2}+y_3^2\frac{dF}{dy_3}$$

$$R(F)=y_2 y_3\frac{dF}{dy_1}+y_3 y_1\frac{dF}{dy_2}+y_1 y_2\frac{dF}{dy_3},$$

essendo per quanto si è dimostrato precedentemente:

$$y_1^2=\frac{1}{2}fy'_1-k, \qquad y_2 y_3=\frac{1}{2}fy'_1-\frac{1}{4}f' y_1,$$

si hanno le:

$$Q(F)+kP(F)=\frac{1}{2}fF', \qquad R(F)=\frac{1}{2}fF'-\frac{m}{4}f' F,$$

supposto m l'ordine di F. Per queste relazioni le equazioni (9) (11) diventano:

$$2fS'(F)-f' S(F)=n^2 f^2 P(F) \qquad (n \text{ dispari})$$

$$2fR'(F)+\frac{n^2}{4}f' S(F)=n^2 f^2 P(F) \quad (n \text{ pari}),$$

essendo $S(F)=Q(F)+kP(F)$.

Sia $F = f^2 t - k^3$ si hanno con breve calcolazione le due:

$$\frac{1}{2} f' F' - 5fP(F) = -10fkt$$
$$fF'' - 20fP(F) = 10fkt,$$

ed essendo nel caso attuale $n = 5$, la relazione (9) è soddisfatta.

Così supponendo $F = k\,(f^2 t - k^3 - t^2)$ si ottengono le:

$$\frac{3}{2} f' F' - 72xF = 9f^3 f' t - 18 f^3 k^2 - 66 f k^2 t + 6 k^3 t'$$
$$fF'' - 24xF = 27 f^3 f' t - 54 f^3 k^2 - 78 f k^2 t - 6 k^3 t'$$
$$P(F) = f^2 f' t - 2 f^2 k^2 - 4 k^2 t,$$

le quali soddisfano la (11) essendo $n = 6$.

Concludendo: *tutte le forme ternarie* $F(y_1, y_2, y_3)$ *soddisfano alla equazione differenziale* (5); *alcune fra esse soddisfano altresì alla* (9) *e quindi alla* (8); *altre soddisfano alla* (11) *ed in conseguenza alla* (10).

3. Le equazioni differenziali (8) (10) alle quali abbiamo nel paragrafo precedente assegnata una nuova origine, corrispondono alla nota equazione differenziale di Jacobi pel caso della moltiplicazione, e si trovano nel *Traité des fonctions elliptiques* di Halphen (Première Partie, pag. 328, 329).

Ne deriva che ciascuna delle funzioni indicate da lui colla lettera ψ_n sono forme ternarie di y_1, y_2, y_3. Si hanno cioè le:

$$\psi_3 = k, \qquad \psi_5 = f^2 t - k^3, \qquad \psi_7 = f^2 t k^3 - k^6 - t^2, \ldots$$
$$\psi_2 = -f^{\frac{1}{2}}, \qquad \psi_4 = -f^{\frac{1}{2}} t, \qquad \psi_6 = -f^{\frac{1}{2}} k (f^2 t - k^3 - t^2), \ldots$$

e così via; supponendo $x = \wp(u)$. Le funzioni y_1, y_2, y_3 possono esprimersi per mezzo delle $\sigma(u)$, $\sigma(\omega)$ colle formole date dal medesimo Autore alla pag. 191 o con le *Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques* di Schwarz (art.[i] dal 15 al 22).

4. La calcolazione dei polinomi ψ_n può eseguirsi o collo sviluppo della loro espressione sotto forma di determinante (*), o colla determinazione dei coefficienti del polinomio per mezzo delle equazioni differenziali superiori; ma

(*) Queste espressioni furono da me date la prima volta in una comunicazione alla Académie des Sciences del 7 novembre 1864. Sotto altra forma trovasi nelle *Formeln und Lehrsätze* etc. di Schwarz, nel *Traité des fonctions elliptiques* di Halphen ed in altri lavori.

sia l'uno che l'altro metodo già per le funzioni di indice n dei primi gradi esigono lunghi calcoli. A questi si può ovviare col metodo seguente.

Ponendo nella:

$$\frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3-\gamma_2\xi-\gamma_3}}=\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}},$$

le $\xi=\mu^2y$, $\gamma_2=\mu^4g_2$, $\gamma_3=\mu^6g_3$, la equazione differenziale superiore si trasforma nella:

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}}=\frac{\mu dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}.$$

Se $\mu=n$ numero dispari, si ha:

$$y=\frac{U}{n^2V^2}, \tag{12}$$

essendo $V=\frac{1}{n}\psi_n$ ed

$$U=n^2xV^2-\frac{1}{2}f'VV'-f(VV''-V'^2). \tag{13}$$

Il polinomio V è del grado $\frac{n^2-1}{2}$ ed indicando con S_m la somma delle potenze emmesime delle radici della equazione $V=0$, dalle superiori (12) (13) deducesi la:

$$y=x+\frac{1}{n^2}\left[f\sum_1^\infty{}_m\frac{mS_{m-1}}{x^{m+1}}-\frac{1}{2}f'\sum_1^\infty{}_m\frac{S_{m-1}}{x^m}\right]. \tag{14}$$

Vedesi facilmente che essendo:

$$S_0=\frac{n^2-1}{2},\qquad S_1=0,$$

il termine costante nel secondo membro della equazione (14) è nullo, e che il coefficiente di x è eguale a $\frac{1}{n^2}$. La (14) si trasforma quindi nella:

$$y=\frac{1}{n^2}\left[x+\sum_1^\infty{}_m\frac{r_m}{x^m}\right], \tag{15}$$

posto:

$$r_m=2(2m+1)S_{m+1}-\frac{1}{2}(2m-1)g_2S_{m-1}-(m-1)g_3S_{m-2}, \tag{16}$$

e siccome, i valori di r_1, r_2 in funzione di g_2, g_3 si ottengono da note relazioni, e quelli di r_3, r_4,... sono funzioni di questi, dalla relazione (16) si deducono quelli di S_2, S_3,....

Essendo:

$$n^2 f(y) = y'^2 f(x),$$

sostituendo nella medesima per y la espressione (15) ed eguagliando nei due membri i termini costanti, trovasi:

$$\frac{12\, r_2}{n^4} - n^2 g_3 = -\frac{1}{n^4}(g_3 + 16\, r_2),$$

dalla quale:

$$r_2 = \frac{n^6 - 1}{4 \cdot 7}\, g_3.$$

Eseguendo la stessa operazione sulla:

$$n^2 f'(y) = 2y'' f(x) + y' f' f'(x),$$

si ha:

$$\frac{24\, r_1}{n^2} - n^2 g_2 = \frac{16\, r_1}{n^2} - \frac{12\, r_1}{n^2} - \frac{g^2}{n^2},$$

e quindi:

$$r_1 = \frac{n^4 - 1}{4 \cdot 5} \cdot g_2.$$

Infine dalla:

$$f''(y) y' = 2y''' f(x) + 3y'' f'(x) + y' f''(x),$$

si ottengono le due relazioni (*):

$$\left.\begin{aligned}
&(2m-1)\left[(4m+5) r_{2m+1} - \frac{1}{4}(4m-1) g_2 r_{2m-1} - (m-1) g_3 r_{2m-2}\right] - \\
&\qquad - 3 r^2_m - 6 \sum_1^m{}_s\, r_{m-s} r_{m+s} = 0 \\
&m\left[(4m+7) r_{2m+2} - \frac{1}{4}(4m+1) g_2 r_{2m} - \frac{1}{2}(2m-1) g_3 r_{2m-1}\right] - \\
&\qquad - 3 \sum_1^m{}_s\, r_{m-s+1} r_{m+s} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

la prima delle quali dà i valori di r_3, $r_5, \ldots$; e la seconda di r_4, $r_6, \ldots$ in funzione di r_1, r_2.

Pei valori di r_1, r_2 si deducono dalla equazione (16) quelli di S_2, S_3, ossia:

$$S_2 = \frac{(n^2-1)(n^2+6)}{4 \cdot 5 \cdot 6}\, g_2, \qquad S_3 = \frac{(n^2-1)(n^4+n^2+15)}{5 \cdot 7 \cdot 8}\, g_3,$$

(*) Vedi una mia comunicazione alla R. Accademia dei Lincei del settembre 1893.

ma per le (17):

$$r_3 = \frac{(n^4-1)(n^4+4)}{3\cdot 4^2\cdot 5^2}\, g_2^2,$$

$$r_4 = \frac{n^2-1}{4^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}(3n^8+3n^6+25n^4+36n^2+36)g_2 g_3$$

$$r_5 = \frac{n^4-1}{3\cdot 4^3\cdot 5^3\cdot 13}(n^4+4)(2n^4+33)g_2^3 + \frac{(n^6-1)(n^6+27)}{4^2\cdot 7^2\cdot 13}\, g_3^2,$$

e per la (16):

$$14 S_4 = r_3 + \frac{5}{2} g_2 S_2, \qquad 18 S_5 = r_4 + \frac{7}{2} g_2 S_3 + 3 g_3 S_2$$

$$22 S_6 = r_5 + \frac{9}{2} g_2 S_4 + 4 g_3 S_3,$$

e così di seguito si calcoleranno i valori delle somme S_r. Sarà quindi:

$$\frac{1}{n}\psi_n = x^{\frac{n^2-1}{2}} - \frac{(n^2-1)(n^2+6)}{3\cdot 4^2\cdot 5}\, g_2 x^{\frac{n^2-5}{2}} - \frac{(n^2-1)(n^4+n^2+15)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 8}\, g_3 x^{\frac{n^2-7}{2}} -$$

$$- \frac{(n^2-1)(n^6-13n^4+36n^2+420)}{2\cdot 3^2\cdot 4^4\cdot 5\cdot 7}\, g_2^2 x^{\frac{n^2-9}{2}} + \cdots .$$

Pel caso di n pari le formole superiori rimangono le stesse salvo che nel secondo membro della equazione (16) devesi aggiungere il trinomio:

$$m_1 e_1^{m-1} + m_2 e_2^{m-1} + m_3 e_3^{m-1},$$

ponendo $S_0 = \frac{n^2-4}{2}$; e quindi:

$$S_1 = 0, \qquad S_2 = \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}(n^4+5n^2-36)g_2,$$

$$S_3 = \frac{1}{5\cdot 7\cdot 8}(n^6+14n^2-120)g_3, \ldots .$$

5. Le formole da me date nel 1864 come espressione di ψ_n sotto forma di determinante pongono in evidenza alcune funzioni che meritano essere considerate. Posto $\varphi = f^{\frac{1}{2}}$ si calcolino le derivate:

$$a_0 = -\frac{1}{2}\varphi', \qquad a_1 = \frac{1}{4}\varphi'', \qquad a_2 = -\frac{1}{3\cdot 4}\varphi''', \qquad a_3 = \frac{1}{3\cdot 4^2}\varphi^{\text{IV}}, \ldots,$$

in generale:

$$a_{r+1} = -\frac{a'_r}{r+2},$$

e sia:

$$\alpha_r = f^{\frac{2r+1}{2}} a_r;$$

le formole sopra citate dànno le:

$$\psi_n = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \dots & \alpha_{\frac{n-1}{2}} \\ \alpha_2 & \alpha_3 \dots & \alpha_{\frac{n+1}{2}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\frac{n-1}{2}} & \alpha_{\frac{n+1}{2}} \dots & \alpha_{n-2} \end{vmatrix}, \qquad \psi_n = -f^{\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \dots & \alpha_{\frac{n}{2}} \\ \alpha_3 & \alpha_4 \dots & \alpha_{\frac{n}{2}+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\frac{n}{2}} & \alpha_{\frac{n}{2}+1} \dots & \alpha_{n-2} \end{vmatrix},$$

essendo nella prima $n = 3, 5, 7, \dots$ nella seconda $n = 4, 6, \dots$.

Le funzioni alle quali accennammo sopra sono gli elementi di cui si compongono questi determinanti, e cioè:

$$\alpha_1 = k, \qquad \alpha_2 = t, \qquad \alpha_3 = \frac{1}{2} f' t - k^2, \qquad \alpha_4 = \frac{1}{4} f'^2 t - f^2 k - 3tk$$

$$\alpha_5 = 14(k^2 t - k^3 - t^2) - \delta f^2 \dots \qquad (\delta = g_2^3 - 27 g_3^2),$$

deducibili l'uno dall'altro colla operazione:

$$(r+2)\alpha_{r+1} = \frac{2r+1}{2} f' \alpha_r - f \alpha'_r.$$

Le funzioni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_r$ dei gradi $4, 6, 8, \dots 2(r+1)$ in x, sono evidentemente forme ternarie di y_1, y_2, y_3 degli ordini $2, 3, 4, \dots r+1$. Se inoltre supponendo r dispari, poniamo:

$$x = \frac{2}{r-1} \left[\wp\left(\frac{2\omega}{r}\right) + \wp\left(\frac{4\omega}{r}\right) + \dots + \wp\left(\frac{(r-1)\omega}{r}\right) \right],$$

la equazione modulare corrispondente del grado $r+1$, nella ipotesi di $\delta = 0$ è la:

$$\alpha_{\frac{r-1}{2}} = 0,$$

questa equazione cioè corrisponde a quella rappresentata da Halphen nel Capitolo 2.° della terza parte della sua opera (pag. 101) col simbolo:

$$[x - r\gamma]\,[x + \gamma]^r = 0.$$

Le note equazioni modulari per le trasformazioni degli ordini 3, 5, 7 sono le:

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2 \cdot 4^2}\delta, \qquad \alpha_3 = \frac{\delta}{3^5}\left(86x^2 - \frac{9}{2}g_2\right),$$

ossia le:

$$y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2 = 0, \qquad y_1 y_2 y_3 = \frac{1}{4^3}\delta$$

$$y_2^2 y_3^2 + y_3^2 y_1^2 + y_1^2 y_2^2 - 2 y_1 y_2 y_3 (y_1 + y_2 + y_3) = -\frac{\delta}{3^5}\left(86x^2 - \frac{9}{2}g_2\right).$$

Osserveremo da ultimo che, sempre nella ipotesi $\delta = 0$, si ha:

$$\alpha''_r = 4(2r+1)(2r-3)\alpha_{r-2},$$

e che δ può esprimersi come segue:

$$\delta = 5f^2 + 32t - 12xt'.$$

6. È noto che il modulo k delle funzioni ellittiche di Jacobi è determinato dalla equazione:

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \qquad k_1^2 = 1 - k^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3},$$

e quindi posto $\rho = e_1 - e_3$ si ottengono le:

$$\rho k_1 = \sqrt{m_1}, \qquad \rho k k_1 = i\sqrt{m_2}, \qquad \rho k = \sqrt{m_3},$$

nelle quali m_1, m_2, m_3 hanno i valori del § 1; sarà così:

$$\rho^3 k^2 k_1^2 = -\frac{1}{4}\delta^{\frac{1}{2}}.$$

Rammentando il valore dell'invariante assoluto:

$$\frac{g_2^3}{\delta} = \frac{4}{27}\,\frac{(1 - k^2 k_1^2)^3}{k^4 k_1^4},$$

si ha che il simbolo di operazione D si trasforma nel modo seguente:

$$D = 2\rho k(\alpha^2 - 4)\frac{d}{d\alpha}, \tag{18}$$

posto $\alpha = \dfrac{1+k^2}{k}$.

Sieno ε_1, ε_2, ε_3 le radici della equazione $4\sigma^3 - \gamma_2\sigma - \gamma_3 = 0$ per una trasformazione d'ordine n della:

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{4\sigma^3 - \gamma_2\sigma - \gamma_3}} = \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}, \tag{19}$$

si avranno pei moduli λ, λ_1, le:

$$\lambda^2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}, \qquad \lambda_1^2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3},$$

e per una nota trasformazione essendo:

$$\frac{d s}{\sqrt{4 s^3 - g_2 s - g_3}} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \cdot \frac{d \xi}{\sqrt{(k \xi^2 - 1)(\xi^2 - k)}}, \tag{20}$$

si avrà pel moltiplicatore μ:

$$\mu = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{e_1 - e_3}}.$$

Sia, come nel precedente paragrafo:

$$x = \frac{2}{n-1}\left[\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right) + \wp\left(\frac{4\omega}{n}\right) + \cdots + \wp\left(\frac{(n-1)\omega}{n}\right)\right], \tag{21}$$

si hanno le:

$$n D(\varepsilon_r) = 4 \varepsilon_r^2 - \frac{2}{3}\gamma_2 - 4(n-1)\varepsilon_r x \qquad (r = 1,\ 2,\ 3),$$

da cui:

$$n D[\log(\varepsilon_r - \varepsilon_s)] = -4[\varepsilon_t + (n-1)x],$$

ed in conseguenza, se $\Delta = \gamma_2^3 - 27\gamma_3^2$

$$x = -\frac{n}{24(n-1)} D(\log \Delta).$$

Pongasi:

$$z^3 = \mu \sqrt{\mu \frac{\lambda \lambda_1}{k k_1}}, \tag{22}$$

si avrà pei valori superiori:

$$z^{24} = \frac{\Delta}{\delta} \quad \text{ed} \quad x = -\frac{n}{n-1} D(\log z).$$

Il secondo membro della equazione (22) è noto essere uno dei coefficienti delle formole di trasformazione di Jacobi, coefficiente da lui indicato colla lettera $B_{\frac{n-1}{2}}$. La formola (18) condurrà così alla:

$$3 z^2 D(z) = 2 \rho k (\alpha^2 - 4) \frac{d B_{\frac{n-1}{2}}}{d \alpha},$$

e siccome per la equazione differenziale pure dovuta a Jacobi:

$$2n(\alpha^2-4)\frac{dB_{\frac{n-1}{2}}}{dx}=(n-1)\alpha B_{\frac{n-1}{2}}+6B_{\frac{n-3}{2}},$$

essendo $B_{\frac{n-3}{2}}$ un altro dei coefficienti di quelle formole di trasformazione, osservando essere $\rho k\alpha=-3e_3$, si giunge alla:

$$x-e_3=q\sqrt{m_3}, \tag{23}$$

posto:

$$qB_{\frac{n-1}{2}}=-\frac{2}{n-1}B_{\frac{n-3}{2}}.$$

Per questa relazione le quantità y_1, y_2, y_3 (3) diventano:

$$y_1=\frac{m_1 k}{k_1^2}[kq^2-2q+k]$$

$$y_2=-\frac{m_2}{k_1^2}[q^2-2kq+1]$$

$$y_3=m_3[q^2-1],$$

ed in conseguenza:

$$\Sigma y=m_3(3q^2-2\alpha q+1)$$
$$\Sigma y_2y_3=m_3^2[3q^4-4\alpha q^3+6q^2-1]$$
$$y_1y_2y_3=m_3^3(q^2-1)(q^4-2\alpha q^3+6q^2-2\alpha q+1),$$

da cui le note equazioni modulari Jacobiane.

La relazione (23) è una delle $\frac{n-1}{2}$ relazioni esistenti fra i coefficienti B delle trasformazioni Jacobiane ed i coefficienti della trasformazione corrispondente alla equazione differenziale (19). Per questa si ha, come è noto:

$$\sigma=\frac{U(s)}{T^2(s)},$$

essendo $T(s)$ un polinomio del grado $\frac{n-1}{2}$:

$$T(s)=s^{\frac{n-1}{2}}+a_1 s^{\frac{n-3}{2}}+\cdots+a_{\frac{n-1}{2}},$$

ed $a_1 = -\frac{n-1}{2} x$. Ora dalle tre relazioni (*):

$$(\sqrt{m_1})^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{e_2 - e_3}\right]^{\frac{1}{4}} = z^3\, T(e_1)$$

$$(i\sqrt{m_2})^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{e_1 - e_3}\right]^{\frac{1}{4}} = z^3\, T(e_2)$$

$$(\sqrt{m_3})^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{e_1 - e_2}\right]^{\frac{1}{4}} = z^3\, T(e_3),$$

si deducono le:

$$\left.\begin{array}{c} (\sqrt{m_1})^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\mu \frac{\lambda}{k}} = z^3\, T(e_1), \qquad (i\sqrt{m_2})^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\mu} = z^3\, T(e_2), \\ (\sqrt{m_3})^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\mu \frac{\lambda_1}{k_1}} = z^3\, T(e_3), \end{array}\right\} \tag{24}$$

e da questa la:

$$\sqrt{\lambda k} = k^{\frac{n+1}{2}} \frac{T(e_1)}{T(e_2)}, \qquad \sqrt{\lambda_1 k_1} = k_1^{\frac{n+1}{2}} \frac{T(e_3)}{T(e_2)}, \tag{25}$$

ma siccome è noto:

$$B = \sqrt{\mu \frac{\lambda_1}{k_1}},$$

quindi:

$$m_3^{\frac{n-1}{4}} B = z^3\, T(e_3),$$

e da questa colla consecutiva applicazione della operazione (18), si ottengono le:

$$m_3^{\frac{n-3}{4}} B_1 = z^3\, T'(e_3)$$

$$m_3^{\frac{n-5}{4}} B_2 = \frac{1}{2} z^3\, T''(e_3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_3^{\frac{n-2r-1}{4}} B_r = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots r} z^3\, T^{(r)}(e_3),$$

(*) Queste relazioni si trovano in una mia comunicazione à l'Académie des Sciences dell'anno 1891, vol. 112.

dove la $T'(e_3)$, $T''(e_3)$,... sono le derivate del polinomio $T(x)$ in cui siasi ad s sostituito e_3. Per $r = \frac{n-3}{2}$ si ritorna alla relazione (23).

Si sono così espressi tutti i coefficienti delle trasformazioni Jacobiane in funzione di z e del polinomio $T(s)$ e sue derivate, nelle quali ad s siasi sostituito la radice e_3.

Per questi valori il polinomio denominatore della trasformazione di Jacobi:

$$V(\xi^2) = B + B_1\xi^2 + B_2\xi^4 + \cdots + B_{\frac{n-1}{2}}\xi^{n-1},$$

essendo $\xi^2 = \frac{s-e_3}{\sqrt{m_3}}$, diventa:

$$(\sqrt{m_3})^{\frac{n-1}{2}} V(\xi^2) = z^3 T(s),$$

e siccome a:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad \xi = \sqrt{k}, \qquad \xi = 0, \quad \text{corrispondono} \quad s = e_1,\ e_2,\ e_3,$$

si ritrovano le equazioni (24).

7. Posto:

$$\left.\begin{aligned} \rho N_1 &= n e_1 - \varepsilon_1 + 2a_1 \\ \rho N_2 &= n e_2 - \varepsilon_2 + 2a_1 \\ \rho N_3 &= n e_3 - \varepsilon_3 + 2a_1, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

rammentando essere $a_1 = -\frac{n-1}{2}x$ (21); dalle equazioni:

$$n D[\log(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)] = 4[2a_1 - \varepsilon_1]$$
$$D[\log(e_2 - e_3)] = -4e_1,$$

deducesi la:

$$\rho N_1 = n D\left[\log\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{e_2 - e_3}\right)^{\frac{1}{4}}\right],$$

ed analogamente per N_2, N_3; ma deducesi facilmente dalla (18) che:

$$D(t) = -2\rho k k_1^2 \frac{dt}{dk},$$

si avranno quindi le:

$$\left.\begin{aligned} N_1 = -nkk_1^2 \frac{d}{dk}\left(\log\frac{\mu\lambda}{k}\right), \qquad N_2 = -nkk_1^2\frac{d}{dk}(\log\mu), \\ N_3 = -nkk_1^2\frac{d}{dk}\left(\log\frac{\mu\lambda_1}{k_1}\right), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

od anche:

$$\rho N_1 = 2m_1 \frac{T'(e_1)}{T(e_1)}, \qquad \rho N_2 = 2m_2 \frac{T'(e_2)}{T(e_2)}, \qquad \rho N_3 = 2m_3 \frac{T'(e_3)}{T(e_3)}. \quad (28)$$

La quantità qui denominata N_3 è la stessa che il sig. HERMITE ha introdotto, indicandola con N, nella teoria della trasformazione delle funzioni elittiche (*).

Sommando le (26) si ha:

$$a_1 = \frac{1}{6} \rho (N_1 + N_2 + N_3),$$

ossia per le (27):

$$a_1 = -\frac{1}{6} n \rho k k_1^2 \frac{d}{dk}\left(\log m^3 \frac{\lambda \lambda_1}{k k_1}\right) = \frac{n}{2} D(\log z),$$

come alla (22).

Le relazioni (26), le quali si ottengono anche dalla formola di trasformazione:

$$\sigma = \frac{U(s)}{T^2(s)},$$

conducono alle equazioni modulari per N_1, N_2, N_3. Supponendo $n = 3$, queste equazioni sono:

$$\left(\frac{N_1}{2k_1}\right)^4 - 6\left(\frac{N_1}{2k_1}\right)^2 + 4\,\frac{1+k_1^2}{k_1}\left(\frac{N_1}{2k_1}\right) - 3 = 0$$

$$\left(\frac{N_2}{2kk_1}\right)^4 + 6\left(\frac{N_2}{2kk_1}\right)^2 - 4\,\frac{k^2 - k_1^2}{kk_1}\left(\frac{N_2}{2kk_1}\right) - 3 = 0$$

$$\left(\frac{N_3}{2k}\right)^4 - 6\left(\frac{N_3}{2k}\right)^2 + 4\,\frac{1+k^2}{k}\left(\frac{N_3}{2k}\right) - 3 = 0,$$

l'ultima delle quali già trovasi nello scritto dell'eminente analista sopra nominato.

Notiamo da ultimo che le quantità N_1, N_2, N_3, ponno anche esprimersi col polinomio $V(\xi^2)$ nel modo seguente:

$$N_1 = 2\frac{k_1^2}{k}\,\frac{V'\left(\frac{1}{k}\right)}{V\left(\frac{1}{k}\right)}, \qquad N_2 = -2kk_1^2\,\frac{V'(k)}{V(k)}, \qquad N_3 = 2k\,\frac{V'(0)}{V(0)},$$

(*) *Sur la transformation des fonctions elliptiques.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, tom. 6. Année 1892.

e che al valore di N del sig. Hermite si giunge facendo uso delle note relazioni (*):

$$K = \omega_1 \sqrt{\rho}, \qquad iK' = \omega_3 \sqrt{\rho}$$

$$I = -\frac{1}{\sqrt{\rho}} [\eta_1 + e_3 \omega_1], \qquad iI' = -\frac{1}{\sqrt{\rho}} (\eta_3 + e_3 \omega_3),$$

essendo ρ come sopra $= e_1 - e_3$.

8. Dalle equazioni (25), posto:

$$P = k\lambda + k_1\lambda_1 - 1, \qquad P_1 = \sqrt{k\lambda} + \sqrt{k_1\lambda_1} - 1, \qquad P_2 = \sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k_1\lambda_1} - 1,$$

si deducono le seguenti:

$$\text{per } \frac{n+1}{2} \text{ dispari } \quad P(e_1 - e_3)^{\frac{n+1}{2}} T^2(e_2) = \Sigma (e_2 - e_3)^{\frac{n+1}{2}} T^2(e_1)$$

$$\text{» } \frac{n+1}{4} \text{ » } \quad P_1(e_1 - e_3)^{\frac{n+1}{4}} T(e_2) = \Sigma (e_2 - e_3)^{\frac{n+1}{4}} T(e_1)$$

$$\text{» } \frac{n+1}{8} \text{ » } \quad P_2(e_1 - e_3)^{\frac{n+1}{8}} T^{\frac{1}{2}}(e_2) = \Sigma (e_2 - e_3)^{\frac{n+1}{8}} T^{\frac{1}{2}}(e_1).$$

Suppongasi per esempio $n = 3$; il secondo membro della seconda delle relazioni superiori diventa:

$$(e_2 - e_3) T(e_1) + (e_3 - e_1) T(e_2) + (e_1 - e_2) T(e_3),$$

di cui il valore è nullo essendo $T(s) = s + a_1$; quindi:

$$P_1 = 0.$$

Così se $n = 7$ essendo $T(s) = (\lambda e + \mu)^2$ (**), la terza relazione dà:

$$P_2 = 0.$$

Sieno:

$$R = k\lambda k_1\lambda_1, \qquad R_1 = \sqrt{k\lambda k_1\lambda_1}, \qquad R_2 = \sqrt[4]{k\lambda k_1\lambda_1},$$

si avranno le:

$$\text{per } \frac{n+1}{2} \text{ dispari } \quad R(e_1 - e_3)^{\frac{3(n+1)}{2}} T^6(e_2) = -\frac{\delta^{\frac{n+1}{4}}}{2^{n+1}} \Pi T^2(e)$$

(*) *Formules et Propositions*... par Schwartz, pag. 31.

(**) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*. 3.ª Partie, pag. 47.

$$\text{per } \frac{n+1}{4} \text{ dispari } R_1(e_1-e_3)^{\frac{3(n+1)}{4}} T^3(e_2) = -\frac{\delta^{\frac{n+1}{8}}}{2^{\frac{n+1}{2}}} \Pi\, T(e)$$

$$\text{»} \quad \frac{n+1}{8} \quad \text{»} \quad R_2(e_1-e_3)^{\frac{3(n+1)}{8}} T^{\frac{3}{2}}(e_2) = -\frac{\delta^{\frac{n+1}{16}}}{2^{\frac{n+1}{4}}} \Pi\, T^{\frac{1}{2}}(e).$$

Suppongansi $n=5$, $n=11$, $n=23$; siccome è noto (*) le equazioni modulari corrispondenti sono:

$$P^3+32R=0, \qquad P_1^3-16R_1=0, \qquad P_2^3+4R_2=0,$$

e quindi pei tre casi:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma(e_2-e_3)^3 T^2(e_1) &= \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} \Pi\, T^{\frac{2}{3}}(e) = \frac{\delta^{\frac{7}{6}}}{8z^4} \\
\Sigma(e_2-e_3)^3 T(e_1) &= \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{3}}} \Pi\, T^{\frac{1}{3}}(e) = -\frac{\delta^{\frac{4}{3}}}{4^2 \cdot z^2} \\
\Sigma(e_2-e_3)^3 T^{\frac{1}{2}}(e_1) &= \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{2}{3}}} \Pi\, T^{\frac{1}{6}}(e) = \frac{\delta^{\frac{17}{12}}}{4^{\frac{5}{2}} \cdot z},
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

essendo per le (23):

$$z^6 \Pi\, T(e) = \frac{\delta^{\frac{n-1}{4}}}{2^{n-1}}.$$

Consideriamo in modo speciale il caso di $n=11$. Il polinomio $T(s)$ sarà del quinto grado, e quindi:

$$T(s) = s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + a_5,$$

od anche:

$$T(s) = \frac{1}{4}\varphi(s)\left[s^2 + a_1 s + a_2 + \frac{1}{4} g_2\right] + A s^2 + 2Bs + C,$$

posto:

$$A = a_3 + \frac{1}{4} g_2 a_1 + \frac{1}{4} g_3, \qquad C = a_5 + \frac{1}{4} g_3 a_2 + \frac{1}{16} g_2 g_3$$

$$2B = a_4 + \frac{1}{4} g_2 a_2 + \frac{1}{4} g_3 a_1 + \frac{1}{16} g_2^2.$$

(*) RUSSELL, *On Modular Equations.* London Mathematical Society, vol. 19. 1887.

Si formino colle A, B, C le tre quantità:

$$H = C - \frac{1}{12} g_2 A, \qquad L = 3 g_3 A - 2 g_2 B, \qquad M = 3 g_3 B - 2 g_2 C,$$

si hanno tosto le:

$$\Sigma (e_2 - e_3)^3 T(e_1) = \frac{3}{4} \delta^{\frac{1}{2}} H$$

$$\Sigma e_1 (e_2 - e_3)^3 T(e_1) = \frac{1}{16} \delta^{\frac{1}{2}} L$$

$$\Sigma e_1^2 (e_2 - e_3)^3 T(e_1) = \delta^{\frac{1}{2}} \left[\frac{3}{16} g_2 H + \frac{1}{8} M\right],$$

e quindi per la seconda delle (29), sarà:

$$12 H = - \frac{\delta^{\frac{5}{6}}}{z^2}. \tag{30}$$

Si indichino con x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 le radici della equazione $T(s) = 0$, si otterrà da una nota relazione (*) essere:

$$12 H = (x_0 - x_1)(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)(x_2 - x_4)(x_4 - x_0);$$

ma d' altra parte dimostrasi, facendo uso di alcune formole contenute nel lavoro già citato: *Sulle equazioni modulari* (**) che:

$$- 12 H = (x_0 - x_2)(x_2 - x_1)(x_1 - x_4)(x_4 - x_3)(x_3 - x_0),$$

sarà quindi H, salve un coefficiente numerico, eguale alla radice quarta del discriminante della equazione $T(s) = 0$.

Rammentando la formola dimostrata più addietro:

$$a_1 = \frac{n}{2} D(\log z),$$

dalla relazione (30) deducesi la:

$$11 D(H) + 4 a_1 H = 0.$$

Ma operando direttamente col simbolo D sul valore di H, mediante la nota

(*) KIEPERT, *Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen.* Journal für die Mathematik, Bd. 87, pag, 202.

(**) Vedi anche GREENHILL, *Pseudo-Elliptic Integrals and their Dynamical Applications.* Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 25.

formola:

$$nD(a_r) = 2(r+1)(2r+3)a_{r+1} - 6a_1 a_r + \frac{1}{12}(n-2r+1)(n+6r)g_2 a_{r-1} -$$
$$- \frac{1}{4}(n-2r+1)(n-2r+3)g_3 a_{r-2},$$

si ottiene la:

$$11\, D(H) = -6a_1 H - \frac{5}{6} L - \frac{1}{24}\delta,$$

da cui:

$$12a_1 H + 5L + \frac{1}{4}\delta = 0.$$

Analogamente dalle relazioni:

$$11\, D(L) = -6a_1 L + 2g_2 H + 7 \cdot 8 \cdot M - \frac{1}{2}\delta a_1$$
$$11\, D(M) = -6a_1 M - 9 \cdot 11 \cdot g_3 H + \frac{8}{3} g_2 L - \frac{1}{4}\delta\left(a_2 + \frac{1}{4} g_2\right),$$

se ne dedurranno altre fra le H, L, M.

Gennajo 1895.

Di alcune superficie che ammettono un sistema di linee eguali e un secondo sistema di linee eguali, o simili.

(*Di* Geminiano Pirondini, *a Parma*.)

§ 1.

Siano:

$$\xi = U_1, \qquad \eta = U_2, \qquad \zeta = U,$$

(U_1, U_2, U funzioni di un parametro u) e

$$x = V_1, \qquad y = V_2, \qquad z = V \tag{1}$$

(V_1, V_2, V funzioni di un altro parametro v, indipendente da u) le equazioni che dànno le coordinate dei punti di due linee qualunque G *(generatrice)* e D *(direttrice)*, per rispetto a due sistemi di assi coordinati ortogonali $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$, $O(x, y, z)$, invariabilmente collegati con esse.

Il sistema Ω si muova portando seco la linea G, in modo che l'origine percorra la linea D e gli assi $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$ rimangano costantemente paralleli alle rette Ox, Oy, Oz; un tale movimento si dirà *una traslazione* definita dalla curva (1). Nel mentre si compie tale movimento, il sistema $O(x, y, z)$ ruoti intorno all'asse Oz, portando seco tutta la figura.

Chiamando allora $O(X, Y, Z)$ questo sistema d'assi nella posizione iniziale e riferendo ad esso i punti della linea G, si avrà come coordinate dei punti della superficie S generata dai due movimenti detti:

$$\left.\begin{array}{l} X = (U_1 + V_1)\cos v - (U_2 + V_2)\operatorname{sen} v \\ Y = (U_1 + V_1)\operatorname{sen} v + (U_2 + V_2)\cos v, \qquad Z = U + V. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Evidentemente gli elicoidi appartengono, come caso particolare, alla famiglia di superficie ora considerate.

Sulla superficie S le equazioni $v=\text{cost.}$, $u=\text{cost.}$ rappresentano rispettivamente la generatrice G nelle sue diverse posizioni e le trajettorie T descritte dai vari punti della G.

Ci proponiamo di determinare le condizioni del movimento di G in modo, che le trajettorie T riescano tutte eguali fra loro e che per di più si ottengano tutte nella loro effettiva posizione, facendo compiere a una determinata di esse due movimenti, l'uno di rotazione e l'altro di traslazione attorno e secondo l'asse OZ.

Le projezioni sul piano $Z=0$ delle linee $u=\text{cost.}$ sono rappresentate (in coordinate polari R, v) dall'equazione:

$$R=\sqrt{(U_1+V_1)^2+(U_2+V_2)^2};$$

e si deve, per prima cosa, soddisfare la condizione che tali projezioni siano eguali fra loro e si deducano tutte, nella loro effettiva posizione, dando ad una di esse un movimento di rotazione attorno al polo.

Poichè, per il significato geometrico che si può attribuire ai parametri u, v, si può ritenere che tale condizione sia soddisfatta quando risulti R funzione di $u+v$, dobbiamo avere:

$$(U_1+V_1)^2+(U_2+V_2)^2=\varphi(u+v), \tag{3}$$

essendo φ il simbolo di una funzione conveniente. Da questa, osservando che $\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, si ricava:

$$V_1U'_1+V_2U'_2+(U_1U'_1+U_2U'_2)=U_1V'_1+U_2V'_2+(V_1V'_1+V_2V'_2);$$

d'onde, derivando successivamente rapporto ad u e a v:

$$V'_1U''_1+V'_2U''_2=U'_1V''_1+U'_2V''_2. \tag{4}$$

Supponendo $V''_1U'_2\gtrless 0$, si può scrivere:

$$\frac{V'_1}{V''_1}\cdot\frac{U''_1}{U'_2}+\frac{V'_2}{V''_1}\cdot\frac{U''_2}{U'_2}=\frac{U'_1}{U'_2}+\frac{V''_2}{V''_1}, \tag{5}$$

e derivando quest'equazione successivamente rapporto ad u e a v:

$$\left(\frac{V'_1}{V''_1}\right)'\left(\frac{U''_1}{U'_2}\right)'+\left(\frac{V'_2}{V''_1}\right)'\left(\frac{U''_2}{U'_2}\right)'=0. \tag{6}$$

Supponendo $\left(\frac{V'_2}{V''_1}\right)'\left(\frac{U''_1}{U'_2}\right)' \gtrless 0$, si deduce:

$$\frac{\left(\frac{V'_1}{V''_1}\right)'}{\left(\frac{V'_2}{V''_1}\right)'} = - \frac{\left(\frac{U''_2}{U'_2}\right)'}{\left(\frac{U''_1}{U'_2}\right)'};$$

ed essendo il primo membro una funzione di v e il secondo una funzione di u, ciascuno dei due membri deve essere eguale a una medesima costante.

Chiamando a una tale costante, sarà dunque:

$$\left(\frac{V'_1}{V''_1}\right)' = a\left(\frac{V'_2}{V''_1}\right)'; \qquad \left(\frac{U''_2}{U'_2}\right)' = -a\left(\frac{U''_1}{U'_2}\right)';$$

e da queste equazioni, integrando, si passa alle altre:

$$U''_2 = -aU''_1 + cU'_2, \qquad V'_1 = aV'_2 + bV''_1, \tag{7}$$

nelle quali b, c sono costanti arbitrarie.

Se nell'equazione (5) si sostituiscono i valori dei rapporti $\frac{V'_1}{V''_1}$, $\frac{U''_2}{U'_2}$ forniti dalle (7), si giunge, dopo qualche trasformazione, all'equazione:

$$b\frac{U''_1}{U'_2} - \frac{U'_1}{U'_2} = \frac{V''_2}{V''_1} - c\frac{V'_2}{V''_1};$$

e poichè il primo membro è funzione di u e il secondo di v, dobbiamo avere:

$$bU''_1 - U'_1 = mU'_2, \qquad V''_2 - cV'_2 = mV''_1, \tag{8}$$

essendo m una costante.

Fra la prima delle (7) e la prima delle (8) elimino le derivate di U_2 nel modo seguente.

Dalla prima delle (8) ricavo:

$$U'_2 = \frac{bU''_1 - U'_1}{m}.$$

e conseguentemente:

$$U''_2 = \frac{bU'''_1 - U''_1}{m}.$$

Sostituendo questi valori nella prima delle (7), ho:

$$bU'''_1 + (am - bc - 1)U''_1 + cU'_1 = 0. \tag{9}$$

Fra le due medesime equazioni elimino le derivate di U_1.

Dalla prima delle (7) ricavo:

$$U''_1 = \frac{cU'_2 - U''_2}{a}, \qquad U'''_1 = \frac{cU''_2 - U'''_2}{a}.$$

Sostituendo questi valori di U''_1, U'''_1 nell'equazione che si ricava derivando rapporto ad u la prima delle (8), si ottiene:

$$bU'''_2 + (am - bc - 1)U''_2 + cU'_2 = 0. \tag{10}$$

Confrontando le (9), (10), si deduce che le funzioni U_1 e U_2 debbono essere legate fra loro da una relazione lineare; di modo che si potrà porre:

$$U_1 = pU_2 + h, \tag{11}$$

con p e h costanti.

Fra la seconda delle (7) e la seconda delle (8) si può, con processo analogo, eliminare sia le derivate di V_2, sia quelle di V_1 e si giunge alle equazioni:

$$bV'''_1 + (am - bc - 1)V'_1 + cV'_1 = 0$$

$$bV'''_2 + (am - bc - 1)V''_2 + cV_2 = 0.$$

Sarà per conseguenza:

$$V_1 = qV_2 + k, \tag{12}$$

con q e k costanti.

Le equazioni (11), (12) mostrano che la generatrice G è tracciata in un piano parallelo all'asse $\Omega\zeta$ e la direttrice D in un piano parallelo all'asse OZ. Per cui, senza togliere nulla alla generalità, si può prendere il piano coordinato $\eta = 0$ coincidente col piano di G, e il piano coordinato $y = 0$ parallelo al piano di D. Si avrà allora:

$$U_2 = 0, \qquad V_2 = k, \tag{13}$$

con k costante, e l'equazione (4) diviene:

$$V'_1 U''_1 = U'_1 V''_1. \tag{14}$$

Questa può essere soddisfatta in due modi:

1.° Quando U''_1 e V''_1 siano diversi da zero, la (14) offre:

$$\frac{U''_1}{U'_1} = \frac{V''_1}{V'_1};$$

ed essendo il primo membro funzione di u e il secondo di v, deve essere:

$$\frac{U''_1}{U'_1} = \lambda, \qquad \frac{V''_1}{V'_1} = \lambda,$$

con λ costante. Si ricava allora:

$$U_1 = A e^{\lambda u} + a, \qquad V_1 = B e^{\lambda v} + b, \tag{15}$$

con A, B, a, b costanti.

Ma siccome le quattro relazioni (13), (15) riducono il primo membro dell'equazione (3) a

$$(A e^{\lambda u} + B e^{\lambda v} + a + b)^2 + k^2,$$

si conclude che la condizione (3) non può essere soddisfatta, e il caso considerato devesi lasciare da parte.

2.° Quando poi nella (14) sia:

$$U''_1 = V''_1 = 0,$$

risulta:

$$U_1 = \alpha u + \lambda, \qquad V_1 = \beta v + \mu,$$

con α, λ, β, μ costanti; e siccome l'equazione fondamentale (3) diviene:

$$(\alpha u + \beta v + \lambda + \mu)^2 + k^2 = \varphi(u + v),$$

è necessario che sia $\alpha = \beta$.

Potendosi inoltre, senza nuocere alla generalità, supporre $\lambda = 0$, si avrà:

$$U_1 = \alpha u, \qquad U_2 = 0, \qquad V_1 = \alpha v + \mu, \qquad V_2 = k.$$

In forza di queste espressioni per le quantità U_1, U_2, V_1, V_2, risultano eguali i cilindri che projettano le curve $u = \text{cost.}$ sul piano $Z = 0$.

La condizione ulteriore necessaria e sufficiente per stabilire l'identità di tutte le trajettorie T è che, in punti corrispondenti di questi cilindri eguali, le linee $u = \text{cost.}$ seghino le generatrici rettilinee sotto lo stesso angolo.

Siccome tale angolo, che chiameremo θ, è eguale a quello formato dalle tangenti alle linee $u = \text{cost.}$ coll'asse OZ, si avrà:

$$\cos\theta = \frac{V'}{\sqrt{(\alpha - k)^2 + V'^2 + \{\alpha(u + v) + \mu\}^2}}.$$

E onde l'angolo detto soddisfi alla condizione imposta, è necessario e sufficiente che si abbia:

$$\cos\theta = \psi(u + v),$$

essendo ψ il simbolo di una funzione qualunque; il che conduce a concludere che V' deve essere una costante. Dobbiamo dunque avere:

$$V = av + b,$$

e le equazioni che definiscono la superficie S, la generatrice G e la direttrice D divengono rispettivamente:

$$\left.\begin{array}{c} X = \{\alpha(u+v)+\mu\}\cos v - k \operatorname{sen} v \\ Y = \{\alpha(u+v)+\mu\}\operatorname{sen} v + k\cos v, \qquad Z = U + a v + b; \end{array}\right\} \tag{16}$$

$$\xi = \alpha u. \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = U;$$

$$x = \alpha v + \mu, \qquad y = k, \qquad z = a v + b. \tag{17}$$

Siccome le coordinate del punto P dove la retta (17) incontra il piano coordinato $Z = 0$ sono:

$$-\frac{b\alpha}{a} + \mu, \qquad k, \qquad 0,$$

e le coordinate dell'origine Ω degli assi mobili, in una posizione qualunque, sono:

$$\alpha v + \mu, \qquad k, \qquad a v + b,$$

la distanza $P\Omega$ è così definita:

$$P\Omega = \frac{\sqrt{a^2 + \alpha^2}}{a}(a v + b) = \frac{\alpha}{a \operatorname{sen} i}(a v + b),$$

essendo i l'inclinazione della retta (17) sull'asse OZ. Nel mentre dunque che attorno all'asse OZ si compie la rotazione infinitesima dv, lungo la retta (17) il punto Ω compie la traslazione infinitesima $\frac{\alpha}{\operatorname{sen} i} \cdot dv$.

Sarà dunque:

$$\frac{\text{vel. traslazione}}{\text{vel. rotazione}} = \frac{\alpha}{\operatorname{sen} i},$$

e quindi si può enunciare il teorema:

Perchè le trajettorie descritte dai punti di una linea G dotata di due movimenti, l'uno di rotazione attorno a una retta H e l'altro di traslazione secondo una direttrice D, siano eguali fra loro e si ottengano tutte nella loro effettiva posizione dando ad una di esse due movimenti, l'uno di rotazione e l'altro di traslazione attorno e secondo la retta H, è necessario e sufficiente che siano verificate le seguenti condizioni:

1.° *Che la generatrice G sia una curva tracciata in un piano parallelo alla retta H.*

2.° *Che la direttrice D, che definisce la traslazione, sia una retta.*

3.° *Che il rapporto della velocità di traslazione lungo la direttrice D alla velocità di rotazione attorno alla retta H, sia una costante* $\left(= \frac{\alpha}{\operatorname{sen} i}\right)$.

Si osservi che questo rapporto dipende dalla direzione della retta D, ma non dipende affatto dalla sua posizione nello spazio; infatti nell'espressione di quel rapporto non entrano punto le quantità μ, k.

§ 2.

Dalle equazioni (16) si ricava per il raggio vettore R delle projezioni delle $u =$ cost. sul piano $Z = 0$:

$$R - \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{\{\alpha(u + v) + \mu\}^2 + k^2};$$

e quindi la forma di dette projezioni è indipendente dalla natura della generatrice G. Quando sia $k = 0$, le dette projezioni sono spirali d'Archimede eguali, col polo nell'origine.

Quando la direttrice D incontra normalmente l'asse OZ, si ha:

$$k = 0, \qquad i = \frac{\pi}{2},$$

e quindi: *Se una linea piana qualunque ruota attorno a una retta H del suo piano e nello stesso tempo si sposta normalmente a questa retta, colla condizione che il rapporto della velocità di traslazione a quella di rotazione sia costante, le trajettorie descritte da' suoi punti sono spirali d' Archimede eguali, aventi i loro poli sulla retta H.*

Studiamo ora la generazione della superficie S considerata precedentemente, per mezzo di una delle trajettorie T; ed anzitutto vediamo di costruire una di tali linee.

Considerando quella trajettoria che corrisponde al valore di u tale, che:

$$\alpha u + \mu = 0,$$

e chiamando U_0 il valore di U per tale valore di u, le (16) dànno:

$$X = \alpha v \cdot \cos v - k \operatorname{sen} v, \quad Y = \alpha v \cdot \operatorname{sen} v + k \cos v, \quad Z = U_0 + av + b. \tag{18}$$

Sia σ l'arco della projezione di tale linea sul piano $Z = 0$; poichè:

$$\frac{dX}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dv} = (\alpha - k)\cos v - \alpha v \cdot \operatorname{sen} v, \qquad \frac{dY}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dv} = (\alpha - k)\operatorname{sen} v + \alpha v \cdot \cos v,$$

si ha:

$$d\sigma = \sqrt{(\alpha - k)^2 + \alpha^2 v^2} \cdot dv.$$

Integrando, e determinando la costante arbitraria in modo, che sia $\sigma = 0$ per $v = 0$ risulta:

$$2\alpha\sigma = \alpha v \sqrt{(\alpha - k)^2 + \alpha^2 v^2} + (\alpha - k)^2 \cdot \log \frac{\alpha v + \sqrt{(\alpha - k)^2 + \alpha^2 v^2}}{\alpha - k}.$$

L'eliminazione di v fra quest'equazione e la terza delle (18) dà:

$$2\alpha\sigma = \frac{\alpha(Z - U_0 - b)}{a^2} \cdot \sqrt{a^2(\alpha - k)^2 + \alpha^2(Z - U_0 - b)^2} +$$
$$+ (\alpha - k)^2 \cdot \log \left\{ \frac{\alpha(Z - U_0 - b) + \sqrt{a^2(\alpha - k)^2 + \alpha^2(Z - U_0 - b)^2}}{a(\alpha - k)} \right\}. \quad (19)$$

Tale è l'equazione della trasformata della trajettoria considerata T, quando il cilindro che la projetta sul piano coordinato $Z = 0$ si sviluppa in un piano.

Si osservi ora che le projezioni sul piano $Z = 0$ delle trajettorie corrispondenti ai valori u e $u + du$ della variabile u si riducono coincidenti facendo ruotare la prima attorno al polo dell'angolo du. E poichè lo spostamento della trajettoria nel senso dell'asse delle Z è

$$(dZ)_u = U' \cdot du,$$

il rapporto di tale spostamento alla rotazione è U'.

Perciò: *La superficie considerata nel paragrafo precedente può anche essere generata così: Si prenda la curva piana che, rispetto a un sistema di assi coordinati ortogonali, è rappresentata dall'equazione* (19) *e si pieghi il suo piano in modo da adattarlo alla superficie di un cilindro, la cui sezione retta sul piano* $Z = 0$ *è rappresentata dall'equazione* $R = \sqrt{\alpha^2 v^2 + k^2}$, *colla condizione che l'asse delle* σ *si adatti a questa sezione retta e l'asse delle* Z *a quella generatrice del cilindro projettante che passa per il punto della sezione in cui* $R = k$.

Si dia quindi alla curva a doppia curvatura ottenuta, due movimenti, l'uno di traslazione e l'altro di rotazione secondo e attorno all'asse OZ *in modo, che il rapporto della velocità di traslazione a quella di rotazione sia, in ogni istante, eguale a* U'.

Si osservi che questi due movimenti corrispondono a un movimento elicoidale attorno alla retta OZ, solamente quando U' è costante, il che avviene quando la generatrice G è una retta. L'elicoide rigato può quindi generarsi anche nell'altro modo indicato al § 1.

§ 3.

Nella discussione precedente si sono fatte alcune ipotesi ristrettive, che ora bisogna esaminare a parte.

Quando dall'equazione (4) si è passato alla (5), si è esplicitamente ammesso che $V''_1 U'_2$ sia diverso da zero. Si supponga ora che sia:

$$V''_1 U'_2 = 0.$$

Questa condizione è soddisfatta quando sia:

$$V''_1 = 0, \quad \text{ovvero} \quad U'_2 = 0, \quad \text{ovvero} \quad V''_1 = 0, \qquad U'_2 = 0.$$

1.º caso. Quando $V''_1 = 0$, si ha:

$$V_1 = av + b,$$

con a e b costanti e la (4) diviene:

$$aU''_1 + V'_2 U''_2 = U'_2 V''_2.$$

Con una derivazione rapporto a v, si ha:

$$V''_2 U''_2 = U'_2 V'''_2,$$

da cui:

$$\frac{V'''_2}{V''_2} = \frac{U''_2}{U'_2} = c,$$

con c costante.

Si rileva di qui che V_2 deve necessariamente avere una delle forme:

$$V_2 = k e^{cv} + fv + g, \qquad V_2 = cv^2 + fv + g,$$

e U_2 una delle altre:

$$U_2 = k_1 e^{cu} + f_1, \qquad U_2 = c_1 u + f_1,$$

con k, k_1, c, c_1, f, f_1, g costanti.

Ma colle prime forme di V_2 e U_2 si può verificare la condizione (3) solamente se $k = k_1 = 0$; ed allora le forme di V_2 e U_2 rientrano, come casi speciali, nelle seconde.

Si ottiene per tali forme:

$$(U_1 + av + b)^2 + (c_1 u + f_1 + cv^2 + fv + g)^2 = \varphi(u + v),$$

la quale richiede che sia:

$$U_1 = au, \qquad c = 0, \qquad c_1 = f,$$

di modo che risulta:

$$U_1 = au, \qquad U_2 = fu + f_1, \qquad V_1 = av + b, \qquad V_2 = fv + g.$$

Le funzioni U_1 e U_2 sono dunque legate fra loro da una relazione lineare, e così pure le V_1 e V_2; si potrà quindi seguire l'analisi esposta al § 1 e si giungerà alle stesse conclusioni.

2.º caso. Quando $U'_2 = 0$, si ha $U_2 = a$ e la (4) diviene:

$$V'_1 U''_1 = U'_1 V''_1,$$

d'onde:

$$\frac{U''_1}{U'_1} = \frac{V''_1}{V'_1} = b,$$

con b costante. Avremo dunque:

$$\begin{matrix} V_1 = k e^{bv} + c \\ U_1 = k_1 e^{bu} + c_1; \end{matrix} \quad \text{ovvero} \quad \left.\begin{matrix} V_1 = bv + c \\ U_1 = b_1 u + c_1. \end{matrix}\right\} \tag{20}$$

Le prime forme di V_1 e U_1 non servono, e le seconde riducono la condizione (3) a

$$(b_1 u + c_1 + bv + c)^2 + (a + V_2)^2 = \varphi(u + v),$$

la quale richiede:

$$b_1 = b, \qquad V_2 = \text{costante}.$$

Le conclusioni a cui siamo giunti al § 1 restano dunque immutate.

3.º caso. Se $V''_1 = 0$, $U'_2 = 0$, la (4) diviene:

$$V'_1 U''_1 = 0;$$

e poichè la condizione $V'_1 = 0$ è contenuta, come caso speciale, nell'altra $V''_1 = 0$, basta esaminare il caso di $U''_1 = 0$.

Risulta allora:

$$V_1 = av + b, \qquad U_1 = a_1 u + b_1, \qquad U_2 = c,$$

e la condizione (3) diviene:

$$(av + b + a_1 u + b_1)^2 + (c + V_2)^2 = \varphi(u + v).$$

Questa richiede:

$$a_1 = a, \qquad V_2 = \text{costante},$$

e si cade così ancora nel caso considerato al § 1.

Quando poi dall'equazione (6) si dedusse l'altra seguente, si mise esplicitamente la condizione che il prodotto $\left(\frac{V'_2}{V''_1}\right)'\left(\frac{U''_1}{U'_2}\right)'$ fosse diverso da zero. Quando esso sia zero, deve essere zero uno dei fattori, ovvero entrambi.

1.° caso. Se i due fattori non sono zero insieme, quando sia $\left(\frac{V'_2}{V''_1}\right)' = 0$, dalla (6) si deduce che deve essere anche:

$$\left(\frac{V'_1}{V''_1}\right)' = 0.$$

Allora risulta:

$$V_1 = k\,e^{av} + b, \qquad V_2 = a_1 V'_1 + b_1,$$

e conseguentemente:

$$V_2 = a a_1 V_1 - a a_1 b + b_1.$$

La direttrice D è dunque sopra un piano parallelo all'asse OZ, e si potrà quindi (senza togliere la generalità) supporre $V_2 = k$, con k costante. Allora la condizione (4) diviene:

$$V'_1 U''_1 = U'_1 V''_1.$$

Si hanno dunque le (20) di questo paragrafo; ma le prime forme di U_1 e V_1 sono da escludere, e, adottando le seconde, la (3) diviene:

$$(b_1 u + c_1 + b v + c)^2 + (U_2 + k)^2 = \varphi(u+v).$$

Questa richiede che sia:

$$b_1 = b, \qquad U_2 = \text{costante},$$

e si cade quindi nel caso considerato al § 1.

2.° caso. Quando i due fattori non sono nulli entrambi e si abbia $\left(\frac{U''_1}{U'_2}\right)' = 0$, dalla (6) si deduce che deve pure essere:

$$\left(\frac{U''_2}{U'_2}\right)' = 0;$$

ed allora risulta:

$$U_2 = k e^{au} + b, \qquad U'_1 = a_1 U_2 + b_1,$$

e conseguentemente:

$$U_1 = m e^{au} + n u + p,$$

con m, n, p costanti. Allora la (4) diviene:

$$a e^{au}(a m V'_1 + a k V'_2 - m V''_1 - k V''_2) - n V''_1 = 0,$$

e questa, per essere soddisfatta identicamente, richiede che sia:

$$V''_1 = 0, \qquad amV'_1 + akV'_2 - mV''_2 = 0.$$

La prima ci dà:

$$V_1 = cv + d,$$

con c, d costanti; e la seconda diviene:

$$amc + akV'_2 - kV''_2 = 0,$$

da cui:

$$\frac{kV''_2}{kV'_2 + mc} = a,$$

ed integrando:

$$kV'_2 + mc = ahke^{av},$$

con h costante. Di qui si trae:

$$V_2 = he^{av} - \frac{mc}{k} v + f,$$

e la condizione fondamentale (3) diviene:

$$(me^{au} + nu + c_1 + cv + d)^2 + \left(ke^{au} + b + he^{av} - \frac{mc}{k} v + f\right)^2 = \varphi(u + v).$$

Perchè questa sia soddisfatta, occorre che si abbia:

$$m = k = h = 0, \qquad n = c,$$

ed allora:

$$U_1 = cu + p, \qquad U_2 = b, \qquad V_1 = cv + d, \qquad V_2 = f,$$

con che rimangono inalterate le conclusioni ricavate nel § 1.

3.º caso. Quando sia contemporaneamente

$$\left(\frac{V'_2}{V''_1}\right)' = 0, \qquad \left(\frac{U''_1}{U'_2}\right)' = 0,$$

si ha:

$$\frac{V'_2}{V''_1} = \frac{1}{a}, \qquad \frac{U''_1}{U'_2} = b, \tag{21}$$

con a e b costanti. Si ricava da queste equazioni:

$$V'_1 = aV_2 + m, \qquad U'_1 = bU_2 + n, \tag{22}$$

con m, n costanti. Le equazioni (21) riducono la (5) all'altra:

$$\frac{1}{a}\frac{U''_2}{U'_2} - \frac{U'_1}{U'_2} = \frac{V''_2}{V''_1} - b\frac{V'_1}{V''_1};$$

e questa, per essere soddisfatta, richiede che sia:

$$\frac{1}{a}\frac{U''_2}{U'_2} - \frac{U'_1}{U'_2} = c, \qquad \frac{V''_2}{V''_1} - b\frac{V'_1}{V''_1} = c,$$

e conseguentemente:

$$\frac{1}{a}U''_2 - U'_1 = cU'_2, \qquad V''_2 - bV'_1 = cV'_1.$$

Tenendo conto delle (22), queste si riducono alle seguenti:

$$U''_2 - acU'_2 - abU_2 = an, \qquad V''_2 - acV'_2 - abV_2 = bm.$$

Integrando queste equazioni lineari e facendo poi uso anche delle (22), si ricava:

$$\left.\begin{aligned} U_2 &= Ae^{\alpha u} + Be^{\beta u} - \frac{n}{b}, & V_2 &= Ce^{\alpha v} + De^{\beta v} - \frac{m}{a} \\ U_1 &= \frac{Ab}{\alpha}e^{\alpha u} + \frac{Bb}{\beta}e^{\beta u} - nu + p, & V_1 &= \frac{Ca}{\alpha}e^{\alpha v} + \frac{Da}{\beta}e^{\beta v} - mv + q, \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

essendo A, B, C, D, p, q costanti arbitrarie, α e β le radici dell'equazione:

$$t^2 - act - ab = 0.$$

Si trova allora, in causa dei valori (23), che l'equazione (3) non può essere soddisfatta se non quando:

$$A = B = C = D = m = n = 0,$$

nel qual caso la funzione $\varphi(u+v)$ si riduce a una costante. Abbiamo dunque:

$$U_1 = p, \qquad U_2 = 0, \qquad V_1 = q, \qquad V_2 = 0,$$

caso che non è di alcuna importanza.

§ 4.

Se nelle equazioni (2) poniamo $U_2 = 0$, $V_2 = k$, con k costante si ottiene:

$$X = (U_1 + V_1)\cos v - k \operatorname{sen} v, \qquad Y = (U_1 + V_1)\operatorname{sen} v + k\cos v,$$
$$Z = U + V,$$

le quali definiscono una superficie S generata dalla linea piana G rappresentata dalle equazioni:

$$\xi = U_1, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = U,$$

dotata di due movimenti, cioè di una traslazione sul suo piano, definita dalla linea:

$$x = V_1, \qquad y = k, \qquad z = V,$$

e di una rotazione attorno all'asse OZ.

Si vuol vedere se sia possibile determinare le condizioni del movimento di G in modo, che le trajettorie $u =$ cost. siano simili e che si possano ridurre tutte omotetiche a una di esse, per mezzo di due movimenti l'uno di traslazione e l'altro di rotazione secondo e attorno l'asse OZ.

La prima condizione da stabilire è che le projezioni delle $u =$ cost. sul piano $Z = 0$ siano tutte simili e si possano rendere omotetiche rispetto all'origine degli assi, mediante convenienti rotazioni attorno a tale punto.

Tale condizione è espressa dall'equazione:

$$\sqrt{(U_1 + V_1)^2 + k^2} = f(u) \cdot \varphi(u + v),$$

essendo f e φ i simboli di due funzioni qualunque.

Quadrando, si ha:

$$(U_1 + V_1)^2 + k^2 = f^2(u) \cdot \varphi^2(u + v), \tag{24}$$

e conseguentemente:

$$\left\{\frac{U_1 + V_1}{f(u)}\right\}^2 + \frac{k^2}{f^2(u)} = \varphi^2(u + v).$$

Derivando quest'equazione una volta rapporto ad u e una volta rapporto a v ed osservando che $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$, si ottiene:

$$\frac{U_1 + V_1}{f} \cdot \frac{U'_1 f - (U_1 + V_1) f'}{f^2} - \frac{k^2 f'}{f^3} = \frac{U_1 + V_1}{f} \cdot \frac{V'_1}{f},$$

cioè:

$$\frac{U_1 U'_1 f}{f'} + \frac{U'_1 f}{f'} \cdot V_1 - (U^2_1 + 2 U_1 V_1 + V^2_1) - k^2 = \frac{f}{f'} (U_1 + V_1) V'_1.$$

Derivando quest'equazione rapporto a v e dividendo l'equazione ottenuta per V'_1, si ha:

$$\left(\frac{U'_1 f}{f'} - 2 U_1\right) - 2 V_1 = \frac{f}{f'} \left\{U_1 \frac{V''_1}{V'_1} + \frac{(V_1 V'_1)'}{V'_1}\right\}.$$

Derivando quest'equazione rapporto ad u e l'equazione ottenuta rapporto a v, si ottiene:

$$\left(\frac{fU_1}{f'}\right)'\left(\frac{V''_1}{V'_1}\right)' + \left(\frac{f}{f'}\right)'\left\{\frac{(V_1V'_1)'}{V'_1}\right\}' = 0,$$

la quale può essere soddisfatta in due modi.

1.° Quando $\left(\frac{f}{f'}\right)' \gtrless 0$, $\left(\frac{V''_1}{V'_1}\right)' \gtrless 0$, si può scrivere:

$$\frac{\left(\frac{fU_1}{f'}\right)'}{\left(\frac{f}{f'}\right)'} = -\frac{\left\{\frac{(V_1V'_1)'}{V'_1}\right\}'}{\left(\frac{V''_1}{V'_1}\right)'}.$$

E poichè il primo membro è funzione di u e il secondo di v, deve essere:

$$\frac{\left(\frac{fU_1}{f'}\right)'}{\left(\frac{f}{f'}\right)'} = a, \qquad \frac{\left\{\frac{(V_1V'_1)'}{V'_1}\right\}'}{\left(\frac{V''_1}{V'_1}\right)'} = -a,$$

con a costante arbitraria: e da queste equazioni, dopo qualche facile calcolo, si ricava:

$$U_1 = a + b\,\frac{f'}{f}; \qquad \frac{V_1}{c} + \frac{ac-d}{c^2}\cdot\log(cV_1+d) = v + h,$$

essendo b, c, d, h costanti arbitrarie.

Ma è facile vedere che, con tali espressioni di U_1 e V_1, non si può soddisfare alla condizione fondamentale (24).

2.° Quando risulti:

$$\left(\frac{f}{f'}\right)' = 0, \qquad \left(\frac{V''_1}{V'_1}\right)' = 0,$$

si ha:

$$f = h\,e^{\alpha u}, \qquad V_1 = b\,e^{\beta v} + c,$$

con h, b, c, α, β costanti. La (24) diviene allora:

$$(U_1 + b\,e^{\beta v} + c)^2 + k^2 = h^2 e^{2\alpha u}\cdot\varphi^2(u+v),$$

la quale, per essere soddisfatta identicamente, richiede che si abbia:

$$c = 0, \qquad k = 0, \qquad \beta = -\alpha, \qquad U_1 = a\,e^{\alpha u},$$

con a costante, e perciò:

$$U_1 = a\,e^{\alpha u}, \qquad U_2 = 0, \qquad V_1 = b\,e^{-\alpha v}, \qquad V_2 = k = 0, \qquad f = h\,e^{\alpha u}. \quad (25)$$

Le projezioni delle trajettorie sul piano $Z=0$ sono in tal modo curve simili e si possono rendere omotetiche facendole ruotare convenientemente attorno all'origine degli assi.

Perchè risultino simili le trajettorie, bisogna esprimere che esse, in punti corrispondenti, segano le generatrici dei cilindri che le projettano sul piano $Z=0$, sotto lo stesso angolo θ. Ora, servendosi delle equazioni delle superficie, unitamente alle espressioni (25), si trova:

$$\cos\theta = \frac{V'}{\sqrt{V'^2 + b^2 \alpha^2 e^{-2\alpha v} + \{a e^{\alpha(u+v)} + b\}^2 \cdot e^{-2\alpha v}}}.$$

Onde sia soddisfatta la voluta condizione, è necessario e sufficiente che $\cos\theta$ risulti funzione di $u+v$, il che avviene sempre e soltanto quando

$$V = m e^{-\alpha v},$$

con m costante. Le equazioni delle superficie divengono allora:

$$X = (a e^{\alpha u} + b e^{-\alpha v}) \cdot \cos v, \qquad Y = (a e^{\alpha u} + b e^{-\alpha v}) \operatorname{sen} v,$$
$$Z = U + m e^{-\alpha v},$$

quelle della generatrice G:

$$\xi = a e^{\alpha u}, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = U,$$

e quelle della direttrice D:

$$x = b e^{-\alpha v}, \qquad y = 0, \qquad z = m e^{-\alpha v}.$$

Questa direttrice è quindi una retta posta sul piano XZ e passante per l'origine.

La distanza $O\Omega$ è data così:

$$O\Omega = \sqrt{V^2 + V_1^2} = e^{-\alpha v} \cdot \sqrt{b^2 + m^2},$$

e quindi, nel mentre che attorno all'asse OZ si compie la rotazione dv, lungo la direttrice D ha luogo la traslazione:

$$-\alpha \sqrt{b^2 + m^2} \cdot e^{\alpha v} \cdot dv.$$

Abbiamo dunque:

$$\frac{\text{vel. traslazione}}{\text{vel. rotazione}} = -\alpha \sqrt{b^2 + m^2} \cdot e^{-\alpha v} = -\alpha \cdot O\Omega.$$

Dunque: *Perchè le trajettorie descritte dai punti di una linea piana G dotata di due movimenti, l'uno di traslazione nel suo piano secondo una di-*

rettrice D e l'altro di rotazione attorno a una retta H parallela al suo piano, siano simili fra loro e si possano ridurre omotetiche mediante rotazioni e traslazioni attorno e secondo la retta H, è necessario e sufficiente:

1.° *Che la direttrice D della traslazione sia una retta.*

2.° *Che la retta H, intorno alla quale avviene la rotazione, sia nel piano di G.*

3.° *Che il rapporto della velocità di traslazione lungo la direttrice D alla velocità di rotazione attorno alla retta H, sia proporzionale alla distanza di Ω da O.*

In tal caso le trajettorie simili $u =$ cost. si projettano sul piano $Z = 0$ in curve, le quali si ottengono allungando di quantità costanti i raggi vettori uscenti dal polo di una medesima spirale logaritmica, avente il polo nell'origine degli assi.

Parma, dicembre 1894.

Deformazione di una sfera isotropa.

(*Di* Roberto Marcolongo, *a Roma.*)

Lamé (*) è stato il primo a risolvere il problema della deformazione di una sfera o di un involucro sferico isotropo, allorchè sono date le forze agenti in superficie; riferendo i punti ad un sistema di coordinate polari, e formando anzitutto le soluzioni semplici delle equazioni differenziali del problema, egli riesce ad esprimere le componenti di spostamento mediante serie doppie i cui coefficienti sono determinati mediante le condizioni ai limiti.

W. Thomson (**) ha considerato il problema più generale, in cui la sfera è soggetta all'azione di forze derivabili da un potenziale che soddisfa all'equazione di Laplace. Nella soluzione di Thomson le componenti dello spostamento secondo tre assi ortogonali sono espresse mediante serie semplici, con un metodo divenuto classico e che può essere applicato a problemi anche più generali. Il prof. H. Darwin (***) ha trasformato la soluzione di Thomson in coordinate polari, in un caso particolare; e solo negli ultimi tempi il prof. Chree (****) ha ripreso a trattare lo stesso problema in generale, valendosi ancora delle coordinate polari, ma con metodo del tutto diverso da quello di Lamé, nell'ipotesi più generale di Thomson.

(*) *Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques.* Journ. Liouville, tom. 19, pag. 51-87, année 1854; oppure *Leçons sur les coordonnées curvilignes,* pag. 290.

(**) Thomson and Tait, *Natural Philosophy,* vol. I, part. II, § 735 e seg., 1883. — W. Thomson, *Mathematical and Physical Papers,* vol. III, pag. 351-386, 1890. Si può anche consultare l'eccellente *Treatise on the Theory of Elasticity* by H. Love, vol. I, ch. X, anno 1893.

(***) Philosophical Trans. R. S., 1879 e 1882.

(****) *The equations of an Isotropic Elastic Solid in Polar and Cylindrical Co-ordinates, their Solution and Applications.* Trans. of the Cambridge Ph. S., vol. XIV, part. III, pag. 250-369, 1889.

La prima soluzione del problema mediante integrali definiti è dovuta a Borchardt. In una prima Memoria (*) egli dà le espressioni degli spostamenti di un corpo elastico isotropo mediante un certo numero di funzioni armoniche arbitrarie e trasforma poscia le espressioni ottenute in coordinate polari; quindi in un'altra Memoria mostra come si possano determinare le funzioni arbitrarie allorchè sulla superficie della sfera sono date le forze (**).

Alla soluzione del Borchardt, per tacere di tante altre, seguirono quelle del prof. Somigliana (***) e del prof. Cerruti il quale, applicando il classico metodo di integrazione del Betti, assegnò mercè integrali definiti la deformazione di una sfera o di un involucro sferico allorchè sono noti in superficie o gli spostamenti o le forze (****).

Nella prima parte di questo lavoro risolvo due nuovi problemi sulla deformazione di una sfera isotropa, supponendo che essa sia sollecitata da forze qualsiasi e che i dati, sulla superficie limite, non siano nè tutte le componenti degli spostamenti, nè tutte le componenti delle forze; ma parte degli uni e delle altre. Di uno di questi ebbi già ad occuparmi (nel caso che le forze esterne siano nulle) (*****); ma ho creduto meglio porlo qui sotto forma più semplice e più sistematica, insistendo su alcune formule e teoremi generali.

Nella seconda parte pongo le equazioni dell'equilibrio di un corpo elastico isotropo in coordinate polari, sotto una forma assai semplice e che non

---

(*) *Unters. über die Elasticität fes. isot. Körper unter Berücksictigung der Wärme.* Monts. Ber. d. Ak. d. Wiss. zu Berlin, 9 Jan. 1873; oppure *Gesam. Wer.*, pag. 248.

(**) *Ueber Deformationen isotroper Körper durch mechanische an ihrer Oberfläche wirkende Kräfte.* Idem, 24 Juli 1873; oppure *Gesam. Wer.*, pag. 309.

(***) *Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo limitato da una o due superficie sferiche.* Annali della R. Sc. Normale di Pisa, 1887.

(****) *Sur la deformation d'une sphère homogène isotrope.* Assoc. Fr. pour l'avanc. d. Sc. Comp. Ren. de la 14.me Session, 2.me partie, pag. 68-79. Grénoble, 1885. — *Sulla deformazione d'una sfera omogenea isotropa.* Rend. Acc. Lincei, pag. 461-469, 586-592, anno 1886. — *Sulla deformazione di un involucro sferico isotropo per dati spostamenti de' punti delle due superficie limiti.* Rend. Acc. Lincei, pag. 189-201, anno 1889. — *Sulla deformazione di un involucro sferico isotropo per date forze agenti sulle due superficie limiti.* Atti della R. Acc. dei Lincei. Memorie della Classe di Sc. fis., mat. e nat., anno 1891. — Queste memorie sono state recentemente, con qualche modificazione, pubblicate nel Nuovo Cimento.

(*****) *Sulla deformazione di una sfera omogenea isotropa per speciali condizioni ai limiti.* Rend. Acc. dei Lincei, pag. 349-357. 2.° Sem., 1889.

mi sembra sia stata notata; solo qualche cosa di analogo è stato fatto dallo JAERISCH (*) per lo studio delle vibrazioni trasversali di una sfera isotropa. La forma trovata conduce alla dimostrazione diretta delle formole di BORCHARDT e ad una loro generalizzazione; ed agli sviluppi in serie ottenuti dal sig. CHREE.

§ 1. Formule generali.

Una sfera omogenea ed isotropa di raggio a e di centro O, è riferita ad una terna d'assi ortogonali la cui origine è O. Indichiamo con r la distanza di un punto variabile $M(x, y, z)$ interno alla sfera, dal centro; e con R la distanza dello stesso punto da un altro punto $M_1(x_1, y_1, z_1)$ pure interno alla sfera, scelto ad arbitrio ma fisso. Sarà quindi:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \qquad R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Dette X, Y, Z le componenti delle forze riferite all'unità di massa, che sollecitano ogni elemento della sfera; L, M, N le componenti delle forze agenti in superficie, riferite alla unità di superficie; u, v, w le componenti dello spostamento del punto $M(x, y, z)$; ρ la densità e Θ la dilatazione cubica corrispondente al punto $M_1(x_1, y_1, z_1)$; sarà:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\rho\Omega^2\Theta = \rho\int_S\left(X\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x_1} + Y\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y_1} + Z\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z_1}\right)dS + \int_s\left(L\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x_1} + M\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y_1} + N\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z_1}\right)ds \\ -2\rho\omega^2\int_s\left\{u\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x_1} + v\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y_1} + w\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x_1}\right\}ds. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Questa formula, data dal BETTI (**), può essere facilmente dedotta dalle formule (3) delle *Ricerche ecc.* del prof. CERRUTI (***), qualora si osservi che nel caso attuale: $\frac{\partial x}{\partial r} = -\frac{x}{r}$ ecc.

(*) *Ueber die elastischen Schwingungen einer isotropen Kugel.* Jour. Crelle, Bd. 88, pag. 131, anno 1879.

(**) *Teoria della Elasticità.* Nuovo Cimento, tom. 7, 8, pag. 171, anno 1872.

(***) *Ricerche intorno all'equilibrio dei corpi elastici isotropi.* Atti R. Acc. dei Lincei, serie 3.ª, vol. XIII, pag. 81-122, anno 1881-82.

Applichiamo il teorema di reciprocità del Betti (*) al doppio sistema di spostamenti u, v, w corrispondenti alle forze di massa X, Y, Z e alle forze L, M, N agenti in superficie; e agli spostamenti ξ, η, ζ corrispondenti a forze di massa nulle e a forze L_0, M_0, N_0 agenti in superficie; avremo:

$$\left.\begin{array}{l} \rho\int_S (X\xi + Y\eta + Z\zeta)dS + \int_s (L\xi + M\eta + N\zeta)ds \\ \qquad -\int_s (L_0 u + M_0 v + N_0 w)ds = 0. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Sottraendo la (2) dalla (1) otteniamo:

$$\left.\begin{array}{l} 4\pi\rho\Omega^2\Theta = \rho\int_S \left\{X\left(\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x_1} - \xi\right) + \cdots\right\} dS + \int_s \left\{L\left(\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x_1} - \xi\right) + \cdots\right\} ds \\ \qquad + 2\rho\omega^2\int_s \left\{u\left(\dfrac{L_0}{2\rho\omega^2} - \dfrac{\partial}{\partial r}\,\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x_1}\right) + \cdots\right\} ds. \end{array}\right\} \tag{3}$$

I primi due problemi che vogliamo risolvere sono i seguenti:

1.° Determinare la deformazione della sfera allorquando sulla superficie limite sono date le componenti u, v dello spostamento e la componente delle forze secondo l'asse z cioè N.

2.° Determinare la deformazione allorquando sulla superficie limite sono date la componente u dello spostamento e le componenti M ed N delle forze.

In entrambi questi casi occorre anzitutto determinare una deformazione ausiliaria di componenti ξ, η, ζ tale che nel primo caso in superficie siano verificate le equazioni:

$$\xi = \frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x_1}; \qquad \eta = \frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y_1}; \qquad 2\rho\omega^2\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z_1} = N_0,$$

e allorchè su ogni elemento non agiscano forze; e nel secondo caso in superficie siano verificate le equazioni:

$$\xi = \frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x_1}; \qquad 2\rho\omega^2\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y_1} = M_0; \qquad 2\rho\omega^2\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z_1} = N_0,$$

mentre su ogni elemento non agiscano forze.

(*) Mem. cit., pag. 89.

Determinata questa speciale deformazione, e cercate le forze che occorre corrispondentemente applicare in superficie, resta determinata la dilatazione cubica nel caso generale; e allora è più facile la determinazione degli spostamenti u, v, w.

§ 2. Proprietà della deformazione ausiliaria.

Consideriamo quella speciale deformazione della sfera (su ogni elemento della quale non agiscono forze) prodotta da spostamenti superficiali le cui componenti sono:

$$\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x_1} = \frac{x - x_1}{R^3}; \qquad \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y_1} = \frac{y - y_1}{R^3}; \qquad \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z_1} = \frac{z - z_1}{R^3}.$$

Un tale spostamento è diretto secondo la MM_1, essendo M un punto della superficie, ed ha lo stesso valore per tutti i punti M simmetrici rispetto ad OM_1. Lo spostamento di un altro punto del piano OMM_1 sarà quindi contenuto nel piano stesso, e tutti i punti simmetrici rispetto ad OM_1 avranno lo stesso spostamento; e però la deformazione è simmetrica rispetto ad OM_1; infine per ogni punto del piano OMM_1 l'asse della rotazione elementare è perpendicolare al piano stesso.

Consideriamo ora la deformazione prodotta nella sfera da forze agenti in superficie e le cui componenti, a meno di un fattore costante, sono:

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y_1}, \qquad \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z_1} \qquad (r = a).$$

Poichè:

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x_1} = p \frac{x}{r} + q \frac{x_1 - x}{R}, \quad \text{ecc.},$$

dove:

$$p = \frac{1}{R^3}; \qquad q = \frac{3}{r R^4} (r^2 - x x_1 - y y_1 - z z_1),$$

si deduce che la forza suddetta è la risultante di due forze p, q rispettivamente dirette secondo la MO e la MM_1: quindi essa è contenuta nel piano OMM_1 e però tutti i punti del piano avranno spostamenti contenuti nel piano stesso; cioè la deformazione avviene in piani passanti per OM_1 e quindi per ogni punto di OMM_1 l'asse della rotazione elementare è perpendicolare al piano. Infine osservando che per tutti i punti simmetrici rispetto ad OM_1, p e q non variano, si conclude che la deformazione è simmetrica rispetto ad OM_1.

Le forze suddette sono in equilibrio; infatti se nella nota formula:

$$\int_S \Delta^2 V dS + \int_s \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0,$$

poniamo: $V = \dfrac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x_1}$ (la formula è evidentemente applicabile poichè V nel punto $x_1\ y_1\ z_1$ diventa infinita come $\frac{1}{R^2}$) otteniamo senz'altro:

$$\int_s \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x_1} ds = 0,$$

ove si rifletta che:

$$\Delta^2 \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta^2 \frac{1}{R} = 0.$$

Per mostrare che sono nulle le somme algebriche dei momenti, ricordiamo che: se V e W soddisfano in tutto S alla $\Delta^2 = 0$ si ha:

$$\int_s \left(y \frac{\partial W}{\partial n} - z \frac{\partial V}{\partial n} \right) ds + \int_S \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) dS = 0;$$

le V e W possono in qualche punto diventare infinite purchè tendano all'infinito come $\frac{1}{R^{2-2m}}$. Facciasi quindi:

$$W = \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z_1}; \qquad V = \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y_1};$$

risulterà:

$$\int_s \left(y \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z_1} - z \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y_1} \right) ds = 0.$$

Lo stesso dicasi per le altre somme.

Consideriamo finalmente la deformazione prodotta nella sfera da un sistema di spostamenti superficiali le cui componenti secondo x ed y sono:

$$\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y_1}.$$

e da un sistema di forze di cui si conosce la componente $2\rho\omega^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z_1}$ secondo l'asse z.

Potremo sempre riguardare le prime due come le componenti di uno spostamento superficiale contenuto nel piano OMM_1; e la terza come la componente di una forza contenuta nello stesso piano; e però anche in questo caso i punti del piano OMM_1 riceveranno spostamenti contenuti nello stesso piano; l'asse della rotazione elementare è normale al piano e la deformazione risultante è simmetrica rispetto ad OM_1.

Le stesse conclusioni valgono per una deformazione prodotta da uno spostamento superficiale

$$\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x_1} \text{ secondo } x \text{ e da forze } 2\rho\omega^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y_1}; \qquad 2\rho\omega^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z_1} \text{ secondo } y \text{ e } z.$$

§ 3. Dilatazione cubica e rotazioni in una deformazione simmetrica rispetto ad un asse.

Il prof. Cerruti ha dimostrato (*) il teorema, fondamentale per le quistioni di cui ci occupiamo, che se in una deformazione simmetrica rispetto ad un asse è cognita la dilatazione cubica, la rotazione elementare si può ottenere con una quadratura.

Si può giungere a questo risultato nel modo seguente. Consideriamo il caso in cui la deformazione ha luogo in piani OMM_1 e sia OM_1 l'asse di simmetria; assumiamo un sistema di coordinate polari (r, φ, ψ) per individuare la posizione del punto M, e l'asse polare sia OM_1 talchè $OM = r$; $\widehat{MOM_1} = \varphi$; la rotazione (il cui doppio si accenna con T) e la dilatazione cubica dipenderanno solamente da r e φ. Diciamo infine T_1, T_2, T_3 le com-

(*) *Ricerche ecc.*, pag. 96-97.

ponenti di T secondo la tangente al parallelo, al meridiano, e secondo il raggio vettore; sarà $T = T_1$ e $T_2 = T_3 = 0$ e però le equazioni dell'equilibrio si riducono alle:

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r\,T)}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(r \operatorname{sen}\varphi\, T) = 0.$$

Moltiplicando la prima per $d\varphi$, la seconda per dr e sommando otteniamo:

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2} d\Theta + \left\{\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(r \operatorname{sen}\varphi\, T)dr - \frac{\partial (r\,T)}{\partial r} d\varphi\right\} = 0.$$

Poniamo:

$$T = m\frac{\partial H}{\partial \varphi},$$

dove m è un coefficiente costante arbitrario, H una funzione di r e di φ che soddisfa alla $\Delta^2 = 0$ nello spazio occupato dal corpo; per modo che:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial H}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial H}{\partial \varphi}\right) = 0.$$

Quindi è:

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2} d\Theta = m\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial H}{\partial r}\right)dr + \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial Hr}{\partial r}d\varphi\right\},$$

e riflettendo che:

$$\frac{\partial^2 Hr}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial H}{\partial r}\right),$$

risulta subito:

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2}\Theta = m\frac{\partial Hr}{\partial r}.$$

La costante che dovrebbe essere aggiunta può supporsi compenetrata nella funzione H. Sarà quindi Θ (come deve effettivamente essere) funzione solamente di r e di φ, finita, continua e ad un sol valore in tutto lo spazio e ivi soddisfa la $\Delta^2 = 0$.

Le componenti di T secondo tre rette ortogonali possono essere determinate così. Le equazioni dell'equilibrio sono:

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial z} - \frac{\partial T_3}{\partial y} = 0 \quad \text{ecc.}$$

se T_1, T_2, T_3 sono le componenti di T secondo gli assi; osservando che:

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2}\Theta = m\left(x\frac{\partial H}{\partial x} + y\frac{\partial H}{\partial y} + z\frac{\partial H}{\partial z} + H\right),$$

si trova facilmente che le equazioni suddette equivalgono a:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial y}; \qquad \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial z}; \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x},$$

dove:

$$U = \frac{1}{m}T_1 + y\frac{\partial H}{\partial z} - z\frac{\partial H}{\partial y}; \qquad V = \frac{1}{m}T_2 + z\frac{\partial H}{\partial x} - x\frac{\partial H}{\partial z};$$

$$W = \frac{1}{m}T_3 + x\frac{\partial H}{\partial y} - y\frac{\partial H}{\partial x},$$

inoltre:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

e però U, V, W sono le derivate parziali di una funzione S che soddisfa la $\Delta^2 = 0$; di più

$$Ux + Vy + Wz = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{\partial S}{\partial r} = 0,$$

onde sarà $S =$ costante e quindi:

$$T_1 = m\left(z\frac{\partial H}{\partial y} - y\frac{\partial H}{\partial x}\right); \qquad T_2 = m\left(x\frac{\partial H}{\partial x} - z\frac{\partial H}{\partial x}\right);$$

$$T_3 = m\left(y\frac{\partial H}{\partial x} - x\frac{\partial H}{\partial y}\right).$$

Nel seguito di questo lavoro dovrò spesso invocare il seguente lemma. Si voglia determinare una funzione V armonica in tutta la sfera e tale che sulla superficie assuma valori dati da: $x'\varphi'$ in cui φ è pure armonica in tutta la sfera. Si ha:

$$V(x,\ y,\ z) = \frac{a^2 - r^2}{4\pi a}\int_s \frac{x'\varphi'}{e^3}\,ds; \qquad e^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2.$$

Ma del pari:

$$\varphi(x,\ y,\ z) = \frac{a^2 - r^2}{4\pi a}\int_s \frac{\varphi'}{e^3}\,ds,$$

onde:

$$V - x\varphi = \frac{a^2 - r^2}{4\pi a}\,\frac{\partial}{\partial z}\int_s \frac{\varphi'\,ds}{e}.$$

Poniamo:

$$\varphi_1 = \frac{1}{\pi a} \int\limits_s \frac{\varphi' ds}{e}.$$

Si avrà com'è noto:

$$\varphi = \frac{1}{4} \varphi_1 + \frac{r}{2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{1}{2} \sqrt{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{r} \varphi_1),$$

e quindi:

$$\varphi_1 = \frac{2}{\sqrt{r}} \int_0^r \frac{\varphi\, d r}{\sqrt{r}},$$

e l'espressione definitiva di V è la seguente:

$$V = x \varphi + \frac{a^2 - r^2}{4} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x};$$

la funzione φ_1 è del pari armonica.

Premesso questo passiamo alla risoluzione del primo problema.

§ 4. Della deformazione ausiliaria.

Diciamo ϑ la dilatazione cubica corrispondente alla deformazione ξ, η, ζ, nel punto x, y, z; τ_1, τ_2, τ_3 le componenti del doppio della rotazione elementare. Le ξ, η, ζ in tutta la sfera, oltre alle solite condizioni, debbono soddisfare alle equazioni indefinite:

$$\frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \Delta^2 \xi = 0; \qquad \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \Delta^2 \eta = 0;$$

$$\frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \Delta^2 \zeta = 0.$$

Inoltre sulla superficie della sfera ($r = a$) deve essere:

$$\xi = \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x_1}; \qquad \eta = \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y_1}; \qquad 2 \rho \omega^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z_1} = N_0.$$

Per quanto è stato osservato sulla deformazione simmetrica rispetto ad un asse, porremo:

$$\vartheta = \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial H r}{\partial r},$$

ciò che equivale a porre:

$$m = \frac{\Omega^2}{\pi(\Omega^2 - \omega^2)},$$

nelle formule del paragrafo precedente; quindi:

$$\tau_1 = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\left(z \frac{\partial H}{\partial y} - y \frac{\partial H}{\partial z}\right); \qquad \tau_2 = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\left(x \frac{\partial H}{\partial z} - z \frac{\partial H}{\partial x}\right);$$

$$\tau_3 = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\left(y \frac{\partial H}{\partial x} - x \frac{\partial H}{\partial y}\right).$$

L'equazione indefinita cui soddisfa ξ è dunque:

$$\Delta^2 \xi + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial Hr}{\partial r} = 0.$$

Ora osserviamo che la funzione: $\frac{a}{T}$ dove:

$$T^2 = a^4 + (x^2 + y^2 + z^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^3) - 2a^2(xx_1 + yy_1 + zz_1),$$

rappresenta il quadrato della distanza del punto (x, y, z) dal punto inverso di (x_1, y_1, z_1) rispetto alla sfera, è armonica in tutta la sfera e in superficie assume il valore $\frac{1}{R}$.

Di più se V è una funzione armonica sarà:

$$\Delta^2(xV) = 2 \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Posto adunque:

$$\xi = \xi' - \frac{x}{2\pi} \frac{\partial Hr}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{a}{T},$$

ξ' è armonica e in superficie assume valori dati da $\frac{x}{2\pi} \frac{\partial Hr}{\partial r}$; onde, in virtù del lemma del paragrafo precedente:

$$\xi' - \frac{x}{2\pi} \frac{\partial Hr}{\partial r} = \frac{a^2 - r^2}{8\pi} \frac{\partial H_1}{\partial x},$$

dove:

$$H_1 = \frac{2}{\sqrt{r}} \int_0^r \frac{\frac{\partial Hr}{\partial r}}{\sqrt{r}} dr = 2H + \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r \frac{H dr}{\sqrt{r}}.$$

Quindi:

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{a}{T} + \frac{a^2 - r^2}{8\pi} \frac{\partial H_1}{\partial x}.$$

Analogamente:

$$\eta = \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{a}{T} + \frac{a^2 - r^2}{8\pi}\frac{\partial H_1}{\partial y}.$$

Calcoliamo ζ che in tutta la sfera deve soddisfare alla:

$$\Delta^2 \zeta + \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial Hr}{\partial r} = 0,$$

e in superficie $(r = a)$ deve essere:

$$2\rho\omega^2 \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x_1} = N_0 = \rho\left\{2\omega^2\frac{\partial \zeta}{\partial r} + (\Omega^2 - 2\omega^2)\vartheta\frac{z}{r} + \frac{\omega^2}{r}(\tau_2 x - \tau_1 y)\right\}_{r=a}.$$

Se si nota che:

$$\frac{1}{r}(\tau_2 x - \tau_1 y) = \frac{1}{\pi}\frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\left(r\frac{\partial H}{\partial z} - z\frac{\partial H}{\partial r}\right),$$

la condizione precedente si trasforma nella:

$$2\frac{\partial \zeta}{\partial r} = \frac{1}{\pi}\frac{2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\frac{z}{r}\frac{\partial Hr}{\partial r} - \frac{1}{\pi}\frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\frac{\partial Hr}{\partial z} + 2\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial r}.$$

Sia ψ una funzione armonica in tutta la sfera e tale che in superficie:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial r} + \frac{1}{a^2}.$$

Una tale funzione esiste poichè, com'è facile verificare:

$$\int_s \frac{\partial \psi}{\partial r}\, ds = 0.$$

Allora la condizione relativa a ζ in superficie equivarrà a quest'altra:

$$2\frac{\partial \zeta}{\partial r} = \frac{1}{\pi}\frac{2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\frac{z}{r}\frac{\partial Hr}{\partial r} - \frac{1}{\pi}\frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\frac{z}{r}H - \frac{1}{\pi}\frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}r\frac{\partial H}{\partial z} + 2\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Si faccia:

$$\zeta = \zeta_1 - \frac{z}{2\pi}\frac{\partial Hr}{\partial r},$$

ζ_1 sarà armonica in tutta la sfera; ed in superficie:

$$2r\frac{\partial \zeta_1}{\partial r} = \frac{z}{\pi(\Omega^2 - \omega^2)}\left\{(\Omega^2 - \omega^2)r\frac{\partial^2 Hr}{\partial r^2} + (\Omega^2 + \omega^2)\frac{\partial Hr}{\partial r} - \Omega^2 H\right\}$$
$$+ 2\frac{\partial}{\partial z_1}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) - \frac{\Omega^2}{\pi(\Omega^2 - \omega^2)}a^2\frac{\partial H}{\partial z}.$$

Però conviene decomporre ζ_1 nella somma di altre due funzioni armoniche ζ', ζ'' tali che in superficie soddisfacciano rispettivamente alle equazioni:

$$2r\frac{\partial \zeta'}{\partial r} = 2\frac{\partial}{\partial z_1}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) - \frac{\Omega^2}{\pi(\Omega^2 - \omega^2)}a^2\frac{\partial H}{\partial z}$$

$$2r\frac{\partial \zeta''}{\partial r} = z\varphi$$

dove:

$$\varphi = \frac{1}{\pi(\Omega^2 - \omega^2)}\left\{(\Omega^2 - \omega^2)r\frac{\partial^2 Hr}{\partial r^2} + (\Omega^2 + \omega^2)\frac{\partial Hr}{\partial r} - \Omega^2 H\right\}.$$

Poichè le funzioni che compariscono a primo e secondo membro della prima equazione sono armoniche si conclude che l'equazione stessa varrà in tutta la sfera, e però integrando:

$$\zeta' = \frac{\partial \psi}{\partial z_1} - \frac{\Omega^2 a^2}{\pi(\Omega^2 - \omega^2)}\int_0^r \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial z}dr.$$

La funzione del primo membro della seconda equazione è pure armonica; inoltre $\Delta^2\varphi = 0$ e quindi per la solita formula si trae che:

$$2r\frac{\partial \zeta''}{\partial r} = z\varphi + \frac{a^2 - r^2}{4}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z},$$

essendo:

$$\varphi_1 = \frac{2}{\sqrt{r}}\int_0^r \frac{\varphi\, dr}{\sqrt{r}}.$$

Quindi:

$$\zeta'' = \frac{z}{2r}\int_0^r \varphi\, dr + \frac{a^2}{8}\int_0^r \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}dr - \frac{1}{8}\int_0^r r\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}dr.$$

Possiamo quindi ritenere come noto il valore di ζ. È facile vedere che nella espressione di ζ compariscono integrali della forma seguente:

$$\int_0^r r^k\frac{\partial V}{\partial z}dr,$$

in cui V è una funzione armonica. Ora si ha la seguente formula generale di trasformazione:

$$\int_0^r r^k\frac{\partial V}{\partial z}dr = r^{k+1}\frac{\partial}{\partial z}\left(r^{-k}\int_0^r r^{k-1}V\,dr\right).$$

Quindi:

$$\int_0^r \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\,dr = \frac{\partial}{\partial z}\left(r\int_0^r \varphi_1 \frac{dr}{r^2}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(r\int_0^r \frac{2}{r^2\sqrt{r}}\,dr\int_0^r \frac{\varphi\,dr}{\sqrt{r}}\right),$$

ed integrando per parti:

$$\int_0^r \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\,dr = \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(r\int_0^r \frac{\varphi\,dr}{r^2} - \frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^r \frac{\varphi\,dr}{\sqrt{r}}\right).$$

Così del pari:

$$\int_0^r r\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\,dr = 4r^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^r \frac{\varphi\,dr}{\sqrt{r}} - \frac{1}{r}\int_0^r \varphi\,dr\right)$$

$$\int_0^r \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial z}\,dr = \frac{\partial}{\partial z}\left(r\int_0^r \frac{H\,dr}{r^2}\right).$$

Tutto adunque si riduce ad ottenere:

$$r\int_0^r \frac{\varphi\,dr}{r^2};\qquad \frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^r \frac{\varphi\,dr}{\sqrt{r}};\qquad \frac{1}{r}\int_0^r \varphi\,dr,$$

in funzione di H; ognuna di queste funzioni è armonica, poichè in generale:

$$r^{k-1}\int_0^r \frac{\varphi\,dr}{r^k},$$

soddisfa alla $\Delta^2 = 0$.

I calcoli, alquanto prolissi, non presentano difficoltà; fatte adunque le sostituzioni risulta:

$$\zeta = \frac{\partial \psi}{\partial z_1} + \frac{1}{\pi}\frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}zH - \frac{r}{2\pi}\frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\frac{\partial}{\partial z}\int_0^r H\,dr + \frac{1}{8\pi}\left(a^2\frac{\partial H_1}{\partial z} - r^2\frac{\partial K_1}{\partial z}\right),$$

essendo:

$$K_1 = 2H - \frac{3}{\sqrt{r}}\int_0^r \frac{H\,dr}{\sqrt{r}} \quad (*).$$

La deformazione ausiliaria è quindi nota, quante volte si riesca a determinare la funzione H.

(*) Cfr. la Memoria già citata del prof. Cerruti: *Sulla deformazione di una sfera omogenea isotropa.*

§ 5. Ricerca della funzione H.

Sappiamo già che H è una funzione armonica, simmetrica rispetto ad $OM = r$ e $OM_1 = r_1$ e quindi sviluppabile in una serie della forma:

$$H = \sum_0^\infty \alpha_s \left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^s P_s(\mu),$$

dove α_s è un coefficiente da determinare, e

$$\mu = \cos(r r_1) = \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r r_1}$$

Si deduce subito che:

$$H_1 = 4 \sum_0^\infty \alpha_s \frac{s+1}{2s+1} \left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^r P_s; \qquad K_1 = 4 \sum_0^\infty \alpha_s \frac{s-1}{2s+1} \left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^s P_s.$$

Inoltre:

$$\frac{a}{T} = \frac{1}{a} \left\{ 1 - 2 \frac{r r_1}{a^2} \cos(r r_1) + \left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a} \sum_0^\infty \left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^s P_s.$$

Se poi si pone:

$$\psi = \sum_0^\infty \left(\frac{r}{a}\right)^s Y_s,$$

e si tiene conto della equazione cui ψ deve soddisfare per $r = a$, e si riflette che:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_0^\infty \left(\frac{r_1}{r}\right)^s P_s,$$

si trova:

$$\frac{1}{a} \sum_1^\infty \left(s Y_s + (s+1) \frac{r_1^s}{a^{s+1}} P_s \right) = 0,$$

onde:

$$Y_s = -\frac{s+1}{s} \frac{r_1^s}{a^{s+1}} P_s \qquad (s \neq 0),$$

e quindi ψ resta determinata a meno di una costante, che non occorre ritenere. Abbiamo adunque:

$$\psi = -\frac{1}{a} \sum_1^\infty \frac{s+1}{s} \left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^s P_s.$$

Per determinare la funzione H potremmo procedere con varî metodi; acciochè i calcoli riescano più simmetrici eguaglieremo le due diverse espressioni di τ_3, cioè:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\left(y \frac{\partial H}{\partial x} - x \frac{\partial H}{\partial y}\right),$$

oppure:

$$\frac{\partial^2 \frac{a}{T}}{\partial y_1 \partial x} - \frac{\partial^2 \frac{a}{T}}{\partial x_1 \partial y} + \frac{1}{4\pi}\left(y \frac{\partial H_1}{\partial x} - x \frac{\partial H_1}{\partial y}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\left(y \frac{\partial H}{\partial x} - x \frac{\partial H}{\partial y}\right).$$

Facilmente si deduce che:

$$y \frac{\partial H_1}{\partial x} - x \frac{\partial H_1}{\partial y} = 4 \sum_1^\infty \alpha_s \frac{s+1}{2s+1} \left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^s \frac{d P_s}{d\mu} \frac{x_1 y - x y_1}{r r_1}$$

$$y \frac{\partial H}{\partial x} - x \frac{\partial H}{\partial y} = \sum_1^\infty \alpha_s \left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^s \frac{d P_s}{d\mu} \frac{x_1 y - x y_1}{r r_1}$$

$$\frac{\partial^2 \frac{a}{T}}{\partial y_1 \partial x} - \frac{\partial^2 \frac{a}{T}}{\partial x_1 \partial y} = \frac{1}{a} \sum_2^\infty \left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^s \frac{d P_s}{d\mu} \frac{x y_1 - x_1 y}{r^2 r_1^2} \left\{ s^2 P_s - 2 s \mu \frac{d P_s}{d\mu} + \mu \frac{d P_s}{d\mu} - (1-\mu^2) \frac{d^2 P_s}{d\mu^2} \right\}.$$

Ma poichè si ha:

$$(1-\mu^2) \frac{d^2 P_s}{d\mu^2} - 2\mu \frac{d P_s}{d\mu} + s(s+1) P_s = 0,$$

la quantità in parentisi si riduce a

$$(2s+1)\left(s P_s - \mu \frac{d P_s}{d\mu}\right).$$

Ricordiamo poi le due relazioni ricorrenti:

$$\frac{d P_{s+1}}{d\mu} - \frac{d P_{s-1}}{d\mu} = (2s+1) P_s; \qquad (2s+1)\mu \frac{d P_s}{d\mu} = s \frac{d P_{s+1}}{d\mu} + (s+1) \frac{d P_{s-1}}{d\mu}.$$

Eliminando tra queste la $\frac{d P_{s+1}}{d\mu}$ si deduce:

$$\mu \frac{d P_s}{d\mu} - s P_s = \frac{d P_{s-1}}{d\mu}.$$

Cambiando poscia nella sommatoria relativa al secondo membro s in $s+1$, si deduce:

$$\frac{\partial^2 \frac{a}{T}}{\partial y_1 \partial x} - \frac{\partial^2 \frac{a}{T}}{\partial x_1 \partial y} = \frac{1}{a^3} \sum_1^\infty (2s+3) \left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^s \frac{x_1 y - x y_1}{r r_1} \frac{d P_s}{d\mu}.$$

Fatte infine le sostituzioni otterremo:

$$\sum_1^\infty \left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^s \frac{x_1 y - x y_1}{r r_1} \frac{d P_s}{d\mu} \left\{ \frac{2s+3}{a^3} + \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{(s+1)\omega^2 - s\Omega^2}{(2s+1)(\Omega^2 - \omega^2)} \right\} = 0,$$

d'onde:

$$\alpha_s = \frac{(\Omega^2 - \omega^2)\pi}{a^3} \frac{(2s+1)(2s+3)}{s\Omega^2 - (s+1)\omega^2}.$$

Quindi i coefficienti α_s restano completamente determinati ad eccezione di α_0; ma possiamo prescindere da una costante e però risulta:

$$H = \frac{\pi(\Omega^2 - \omega^2)}{a^3} \sum_1^\infty \frac{(2s+1)(2s+3)}{s\Omega^2 - (s+1)\omega^2} \left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^s P_s.$$

§ 6. Ricerca delle componenti delle forze.

Dobbiamo ora calcolare le componenti L_0, M_0, N_0, delle forze da applicare in superficie affinchè a queste forze corrisponda la deformazione di spostamenti ξ, η, ζ precedentemente calcolati. La componente N_0 è già nota; resterà dunque a calcolare L_0, M_0.

Si ha, in virtù delle equazioni che debbono valere sulla superficie della sfera,

$$\frac{L_0}{\rho} = 2\omega^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} + (\Omega^2 - 2\omega^2)\frac{x}{r} \vartheta + \omega^2 \frac{\tau_3 y - \tau_2 z}{r},$$

in cui il secondo membro è calcolato per $r = a$; quindi, ponendo:

$$\frac{2(s+1)}{2s+1} - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} = -\frac{2s}{2s+1} - \frac{2\omega^2 - \Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} = \frac{\gamma_s}{\alpha_s(s+1)},$$

si ha:

$$L_0 = 2\rho\omega^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x_1} + \rho \frac{\omega^2}{\pi} \sum_0^\infty \left(\frac{r_1}{a}\right)^s \gamma_s \left[\frac{x}{a} P_s - \frac{1}{s+1}\left(\frac{x_1}{r_1} - \frac{x\mu}{a}\right) \frac{d P_s}{d\mu}\right]_{r=a}.$$

Ma:

$$r_1 \frac{\partial \mu}{\partial x_1} = \frac{x}{r} - \frac{x_1 \mu}{r_1},$$

onde:

$$\frac{x}{a} = \left(r_1 \frac{\partial \mu}{\partial x_1} + \frac{x_1 \mu}{r_1}\right)_{r=a},$$

quindi:

$$\frac{x}{a}P_s-\frac{1}{s+1}\left(\frac{x_1}{r_1}-\frac{x\mu}{a}\right)\frac{dP_s}{d\mu}=\frac{x_1}{r_1}\left(\mu P_s-\frac{1-\mu^2}{s+1}\frac{dP_s}{d\mu}\right)$$
$$+r_1\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\left(P_s+\frac{\mu}{s+1}\frac{dP_s}{d\mu}\right).$$

Dalla relazione:

$$\mu P_s-\frac{1-\mu^2}{s+1}\frac{dP_s}{d\mu}=P_{s+1},$$

derivando rispetto a μ, si ottiene:

$$P_s+\mu\frac{dP_s}{d\mu}-\frac{1}{s+1}\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{dP_s}{d\mu}\right\}=\frac{dP_{s+1}}{d\mu},$$

oppure:

$$(s+1)\left(P_s+\frac{\mu}{s+1}\frac{dP_s}{d\mu}\right)=\frac{dP_{s+1}}{d\mu}.$$

Perciò:

$$\frac{x}{a}P_s-\frac{1}{s+1}\left(\frac{x_1}{r_1}-\frac{x\mu}{a}\right)\frac{dP_s}{d\mu}=\frac{x_1}{r_1}P_{s+1}+\frac{r_1}{s+1}\frac{dP_{s+1}}{d\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x_1}$$
$$=\frac{1}{r_1^s}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{r_1^{s+1}P_{s+1}}{s+1}\right),$$

e infine:

$$L_0=2\rho\omega^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x_1}+2\rho\omega^2\frac{\partial S}{\partial x_1},$$

essendo:

$$S=\frac{a}{2\pi}\sum_0^\infty\left(\frac{r_1}{a}\right)^{s+1}\frac{\gamma_s}{s+1}P_{s+1}=\frac{1}{2a^2}\sum_1^\infty\left(\frac{r_1}{a}\right)^s(2s+1)\frac{\Omega^2-2s\omega^2}{(s-1)\Omega^2-s\omega^2}P_s.$$

Un calcolo analogo si ripete per M_0; avremo adunque:

$$L_0=2\rho\omega^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x_1}+2\rho\omega^2\frac{\partial S}{\partial x_1}$$

$$M_0=2\rho\omega^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y_1}+2\rho\omega^2\frac{\partial S}{\partial y_1}$$

$$N_0=2\rho\omega^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z_1}.$$

§ 7. Della dilatazione cubica.

Per poter applicare la formula generale ricordata in principio dobbiamo soltanto procurarci il valore che assume ζ per $r = a$.

Abbiamo già ottenuti gli sviluppi delle funzioni H, H_1, K_1; sostituiti questi nel valore di ζ e posto:

$$\left(\frac{s}{2s+1} + \frac{2\omega^2 - \Omega^2}{2(\Omega^2 - \omega^2)}\right)\alpha_s = \frac{\pi}{2a^3}(2s+3)\frac{(4s+1)\Omega^2 - 2(3s+1)\omega^2}{s\Omega^2 - (s+1)\omega^2} = \beta_s,$$

risulta facilmente:

$$\zeta_a = \left(\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\right)_a + \frac{a}{\pi}\sum_0^\infty\left(\frac{r_1}{a}\right)^s\left\{\frac{z}{a}P_s - \left(\frac{z_1}{r_1} - \frac{z\mu}{a}\right)\frac{1}{s+1}\frac{dP_s}{d\mu}\right\}\beta_s.$$

Ma:

$$\left\{\frac{z}{a}P_s - \frac{1}{s+1}\left(\frac{z_1}{r_1} - \frac{z\mu}{a}\right)\frac{dP_s}{d\mu}\right\}_a = \frac{1}{r_1{}^s}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{r_1{}^{s+1}P_{s+1}}{s+1}\right),$$

onde:

$$\zeta_a = \frac{\partial}{\partial z_1}\left\{-\frac{1}{a}\sum_1^\infty\frac{s+1}{s}\left(\frac{r_1}{a}\right)^s P_s + \frac{a^2}{\pi}\sum_1^\infty\left(\frac{r_1}{a}\right)^s\frac{\beta_{s-1}}{s}P_s\right\},$$

cioè:

$$\zeta_a = -\frac{\partial\Pi}{\partial z_1},$$

dove:

$$\Pi = \frac{1}{a}\sum_1^\infty\left\{\frac{s+1}{s} - \frac{2s+1}{2s}\,\frac{(4s-3)\Omega^2 - 2(3s-2)\omega^2}{(s-1)\Omega^2 - s\omega^2}\right\}\left(\frac{r_1}{a}\right)^s P_s = \frac{1}{a}\sum_1^\infty\varepsilon_s\left(\frac{r_1}{a}\right)^s P_s.$$

La dilatazione cubica è quindi data da:

$$4\pi\rho\Omega^2\Theta = \rho\int_S\left\{X\left(\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x_1} - \xi\right) + Y\left(\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y_1} - \eta\right) + Z\left(\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z_1} - \zeta\right)\right\}dS$$

$$+\int_s N\left(\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z_1} + \frac{\partial\Pi}{\partial z_1}\right)ds + 2\rho\omega^2\int_s\left(u\frac{\partial S}{\partial x_1} + v\frac{\partial S}{\partial y_1}\right)ds,$$

e poichè u, v, N sono funzioni note pei punti di s, così Θ è del pari nota.

Poniamo:

$$A = 2\omega^2\int_s Su\,ds - a\int_S\frac{X}{T}\,dS,$$

cioè:

$$A = \frac{\omega^2}{a^2}\sum_1^\infty (2s+1)\frac{\Omega^2 - 2s\omega^2}{(s-1)\Omega^2 - s\omega^2}\left(\frac{r_1}{a}\right)^s \int_s P_s u\, ds - a\int_S \frac{X}{T}\, dS,$$

e ricordando che T è la distanza del punto x, y, z, interno alla sfera, dal punto inverso di M_1, esterno alla sfera, e dalla forma stessa dello sviluppo si deduce che A è una funzione armonica in tutta la sfera.

Lo stesso dicasi per

$$B = 2\omega^2 \int_s S v\, ds - a\int_S \frac{Y}{T}\, dS$$

$$C = \frac{1}{\rho}\int_s N\left(\frac{1}{R} + \Pi\right) ds = \frac{1}{a\rho}\sum_1^\infty (\varepsilon_s + 1)\left(\frac{r_1}{a}\right)^s \int_s N P_s\, ds,$$

poichè si ha:

$$\int_s N\, ds = 0.$$

Risulterà quindi:

$$4\pi\Omega^2\Theta = \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{\partial B}{\partial y_1} + \frac{\partial C}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}\int_S \frac{X}{R}\, dS + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_S \frac{Y}{R}\, dS + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_S \frac{Z}{R}\, dS$$
$$- \int_S \left\{ \frac{a^2 - r^2}{8\pi}\left(X\frac{\partial H_1}{\partial x} + Y\frac{\partial H_1}{\partial y}\right) + Z\zeta \right\} dS.$$

Conviene quindi spezzare Θ nella somma di due altre due funzioni Θ_1 e Θ_2 tali che:

$$4\pi\Omega^2\Theta_1 = \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{\partial B}{\partial y_1} + \frac{\partial C}{\partial z_1}$$

$$4\pi\Omega^2\Theta_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}\int_S \frac{X}{R}\, dS + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_S \frac{Y}{R}\, dS + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_S \frac{Z}{R}\, dS$$
$$- \int_S \left\{ \frac{a^2 - r^2}{8\pi}\left(X\frac{\partial H_1}{\partial x} + Y\frac{\partial H_1}{\partial y}\right) + Z\zeta \right\} dS,$$

Θ_1 è una funzione armonica che può porsi sotto una forma più opportuna.

Detta Φ una funzione armonica in tutta la sfera, poniamo:

$$\Theta_1 = \frac{\omega^2}{\pi(\Omega^2 - \omega^2)}\frac{\partial r_1 \Phi}{\partial r_1}.$$

Applicando una trasformazione già ricordata troviamo subito:

$$\Phi = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{4\omega^2\Omega^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{r_1}\frac{A\,dr_1}{r_1} + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_0^{r_1}\frac{B\,dr_1}{r_1} + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_0^{r_1}\frac{C\,dr_1}{r_1}\right\},$$

e ognuna delle funzioni:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{r_1}\frac{A\,dr_1}{r_1} \quad \text{ecc.}$$

non diventa infinita per $r_1 = 0$ ed è armonica in tutta la sfera; basta perciò rammentare lo sviluppo di $\frac{a}{T}$ e che $\int X\,dS = 0$ e però nello sviluppo di A secondo le potenze di r_1 non si ha termine indipendente da r_1.

§ 8. Ricerca degli spostamenti.

Diciamo u_1, v_1, w_1 e u_2, v_2, w_2 le componenti dello spostamento che rispettivamente corrispondono alle due parti Θ_1 e Θ_2 della dilatazione cubica.

Assoggetteremo le prime a soddisfare l'equazioni indefinite:

$$(\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial\Theta_1}{\partial x_1} + \omega^2\Delta^2 u_1 = 0$$

$$(\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial\Theta_1}{\partial y_1} + \omega^2\Delta^2 v_1 = 0$$

$$(\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial\Theta_1}{\partial z_1} + \omega^2\Delta^2 w_1 = 0.$$

Inoltre le u_1 e v_1 debbono in superficie assumere valori dati arbitrariamente u_s e v_s; e per la w_1, poichè è nota in superficie la N, è data la $\frac{\partial w_1}{\partial r}$.

Assoggetteremo poscia le u_2, v_2, w_2, a soddisfare l'equazioni indefinite:

$$X + (\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial\Theta_2}{\partial x_1} + \omega^2\Delta^2 u_2 = 0$$

$$Y + (\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial\Theta_2}{\partial y_1} + \omega^2\Delta^2 v_2 = 0$$

$$Z + (\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial\Theta_2}{\partial z_1} + \omega^2\Delta^2 w_2 = 0,$$

e a prendere in superficie valori nulli; onde:

$$u_2 = -\frac{1}{4\pi}\int_S \Delta^2 u_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{a}{T}\right) dS \quad \text{ecc.}$$

quindi:

$$u_2 = \frac{1}{4\pi\omega^2}\int \frac{X}{R}\, dS - \frac{a}{4\pi\omega^2}\int \frac{X}{T}\, dS + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{4\pi\omega^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\int \Theta_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{a}{T}\right) dS$$

$$v_2 = \frac{1}{4\pi\omega^2}\int \frac{Y}{R}\, dS - \frac{a}{4\pi\omega^2}\int \frac{Y}{T}\, dS + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{4\pi\omega^2}\frac{\partial}{\partial y_1}\int \Theta_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{a}{T}\right) dS$$

$$w_2 = \frac{1}{4\pi\omega^2}\int \frac{Z}{R}\, dS - \frac{a}{4\pi\omega^2}\int \frac{Z}{T}\, dS + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{4\pi\omega^2}\frac{\partial}{\partial z_1}\int \Theta_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{a}{T}\right) dS.$$

Passiamo ora alla ricerca di u_1, v_1, w_1.

La prima equazione da integrare è

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial r_1 \Phi}{\partial r_1} + \Delta^2 u_1 = 0.$$

mentre in superficie ($r_1 = a$) deve essere $u_1 = u_s$.

Poniamo:

$$U_1 = \frac{1}{4\pi a}\int_s \frac{u_s\, ds}{R},$$

e

$$u = U_1 + 2 r_1 \frac{\partial U_1}{\partial r_1} - \frac{x_1}{2\pi}\frac{\partial r_1 \Phi}{\partial r_1} + u'.$$

Risulterà in tutta la sfera:

$$\Delta^2 u' = 0,$$

e in superficie:

$$u' = \frac{x_1}{2\pi}\frac{\partial r_1 \Phi}{\partial r_1},$$

e però, per il lemma già più volte ricordato, si ha:

$$u' - \frac{x_1}{2\pi}\frac{\partial r_1 \Phi}{\partial r_1} = \frac{a^2 - r_1^2}{8\pi}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1},$$

dove:

$$\Phi_1 = \frac{2}{\sqrt{r_1}}\int_0^{r_1} \frac{\frac{\partial r_1 \Phi}{\partial r_1}}{\sqrt{r_1}}\, dr_1 = 2\Phi + \frac{1}{\sqrt{r_1}}\int_0^{r_1}\frac{\Phi}{\sqrt{r_1}}\, dr_1,$$

è una funzione analoga alla H_1 della deformazione ausiliaria; onde:

$$u_1 = U_1 + 2 r_1 \frac{\partial U_1}{\partial r_1} + \frac{a^2 - r_1^2}{8\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}.$$

Del pari si trova:

$$v_1 = V_1 + 2 r_1 \frac{\partial V_1}{\partial r_1} + \frac{a^2 - r_1^2}{8\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1},$$

dove:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi a} \int_s \frac{v_s \, ds}{R}.$$

Quanto a w_1 ricordiamo che per $r_1 = a$ deve essere:

$$\frac{N}{\rho} = 2\omega^2 \frac{\partial w_1}{\partial r_1} + (\Omega^2 - 2\omega^2) \frac{z_1}{r_1} \Theta_1 + \omega^2 \frac{T_2 x_1 - T_1 y_1}{r_1},$$

in cui T_2 e T_1 sono formate colle u_1, v_1, w_1; onde:

$$(T_2 x_1 - T_1 y_1) \frac{1}{r_1} = \left(\frac{\partial u_s}{\partial z_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_1}\right) \frac{x_1}{r_1} - \left(\frac{\partial w_1}{\partial y_1} - \frac{\partial v_s}{\partial z_1}\right) \frac{y_1}{r_1},$$

e quindi:

$$\frac{N}{\rho} = 2\omega^2 \frac{\partial w_1}{\partial r_1} + (\Omega^2 - \omega^2) \frac{z_1}{r_1} \Theta_1 - \omega^2 \left(\frac{\partial u_s}{\partial x_1} + \frac{\partial v_s}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) \frac{z_1}{r_1}$$
$$+ \omega^2 \left(\frac{\partial u_s}{\partial z_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_1}\right) \frac{x_1}{r_1} - \omega^2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial y_1} - \frac{\partial v_s}{\partial z_1}\right) \frac{y_1}{r_1},$$

cioè finalmente:

$$\frac{N}{\omega^2 \rho} = \frac{\partial w_1}{\partial r_1} + \frac{1}{\pi} \frac{z_1}{r_1} \frac{\partial r_1 \Phi}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1} \left\{ x_1 \frac{\partial u_s}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial u_s}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial v_s}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial v_s}{\partial y_1} \right\},$$

e questa può essere utilmente trasformata. Definiamo due nuove funzioni

$$U = U_1 + 2 r_1 \frac{\partial U_1}{\partial r_1}$$

$$V = V_1 + 2 r_1 \frac{\partial V_1}{\partial r_1},$$

che soddisfano alla $\Delta^2 = 0$ e in superficie assumono i valori u_s e v_s; però:

$$\frac{a N}{\omega^2 \rho} = r_1 \frac{\partial w_1}{\partial r_1} + \frac{1}{\pi} z_1 \frac{\partial r_1 \Phi}{\partial r_1} + \left\{ x_1 \frac{\partial U}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial V}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial V}{\partial y_1} \right\}.$$

Posto ancora:

$$N_1 = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2}\int_s \frac{N ds}{R},$$

la funzione:

$$N_1 + 2r_1\frac{\partial N_1}{\partial r_1},$$

è armonica e in superficie assume valori eguali ad $\frac{aN}{\omega^2\rho}$; onde:

$$r_1\frac{\partial w_1}{\partial r_1} = N_1 + 2r_1\frac{\partial N_1}{\partial r_1} - \frac{1}{\pi}z_1\frac{\partial r_1\Phi}{\partial r_1} + z_1\frac{\partial U}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial U}{\partial z_1} + z_1\frac{\partial V}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial V}{\partial z_1},$$

mentre l'equazione indefinita è:

$$\Delta^2 w_1 + \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial r_1\Phi}{\partial r_1} = 0,$$

oppure:

$$\Delta^2\left(w_1 + \frac{z_1}{2\pi}\frac{\partial r_1\Phi}{\partial r_1}\right) = 0,$$

e però conviene porre l'equazione ai limiti sotto la forma equivalente:

$$r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\left(w_1 + \frac{z_1}{2\pi}\frac{\partial r_1\Phi}{\partial r_1}\right) = \frac{z_1}{2\pi}\left\{r_1\frac{\partial^2 r_1\Phi}{\partial r_1^2} - \frac{\partial r_1\Phi}{\partial r_1}\right\}$$
$$+ N_1 + 2r_1\frac{\partial N_1}{\partial r_1} + z_1\frac{\partial U}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial U}{\partial z_1} + z_1\frac{\partial V}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial V}{\partial z_1}.$$

Spezzeremo la funzione armonica:

$$w_1 + \frac{z_1}{2\pi}\frac{\partial r_1\Phi}{\partial r_1}$$

nella somma di altre due w' e w'' pure armoniche e tali che in superficie risulti:

$$r_1\frac{\partial w'}{\partial r_1} = N_1 + 2r_1\frac{\partial N_1}{\partial r_1} + z_1\frac{\partial U}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial U}{\partial z_1} + z_1\frac{\partial V}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial V}{\partial z_1}$$

$$r_1\frac{\partial w''}{\partial r_1} = \frac{z_1}{2\pi}\left\{r_1\frac{\partial^2 r_1\Phi}{\partial r_1^2} - \frac{\partial r_1\Phi}{\partial r_1}\right\} = z_1\chi.$$

La prima di queste due equazioni è valida in tutta la sfera e ci darà agevolmente:

$$w' = 2N_1 + \int_0^{r_1}\frac{N_1 dr_1}{r_1} + z_1\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{r_1}\frac{U dr_1}{r_1} - x_1\frac{\partial}{\partial z_1}\int_0^{r_1}\frac{U dr_1}{r_1}$$
$$+ z_1\frac{\partial}{\partial y_1}\int_0^{r_1}\frac{V dr_1}{r_1} - y_1\frac{\partial}{\partial z_1}\int_0^{r_1}\frac{V dr_1}{r_1}.$$

Dalla seconda, riflettendo che il primo membro e χ sono funzioni armoniche, si deduce:

$$r_1 \frac{\partial w''}{\partial r_1} = z_1 \chi + \frac{a^2 - r_1^2}{4} \frac{\partial \chi_1}{\partial z_1},$$

dove:

$$\chi_1 = \frac{2}{\sqrt{r_1}} \int_0^{r_1} \frac{\chi \, d r_1}{\sqrt{r_1}} = \frac{1}{\pi \sqrt{r_1}} \int_0^{r_1} \left(\sqrt{r_1} \frac{\partial^2 r_1 \Phi}{\partial r_1^2} - \frac{1}{\sqrt{r_1}} \frac{\partial r_1 \Phi}{\partial r_1} \right) d r_1,$$

d'onde, con successive integrazioni per parti:

$$\chi_1 = \frac{1}{\pi} \left\{ r_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} - \frac{1}{2} \Phi - \frac{3}{4 \sqrt{r_1}} \int_0^{r_1} \frac{\Phi \, d r_1}{\sqrt{r_1}} \right\}.$$

Dedurremo quindi:

$$w'' = \frac{z_1}{r_1} \int_0^{r_1} \chi \, d r_1 + \frac{a^2}{4} \int_0^{r_1} \frac{1}{r_1} \frac{\partial \chi_1}{\partial z_1} d r_1 - \frac{1}{4} \int_0^{r_1} r_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial z_1} d r_1.$$

Ma:

$$\int_0^{r_1} \chi \, d r_1 = \frac{1}{2\pi} \left\{ r_1 \frac{\partial r_1 \Phi}{\partial r_1} - 2 r_1 \Phi \right\}$$

$$\int_0^{r_1} \frac{1}{r_1} \frac{\partial \chi_1}{\partial z_1} d r_1 = \frac{\partial}{\partial z_1} \left(r_1 \int_0^{r_1} \frac{\chi_1}{r_1^2} d r_1 \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(2\Phi + \frac{1}{\sqrt{r_1}} \int_0^{r_1} \frac{\Phi \, d r_1}{\sqrt{r_1}} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1}.$$

Basta perciò applicare le formule di trasformazione stabilite in un paragrafo precedente.

Del pari troviamo che:

$$\int_0^{r_1} r_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial z_1} d r_1 = \frac{r_1^2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(2\Phi - \frac{3}{\sqrt{r_1}} \int_0^{r} \frac{\Phi \, d r_1}{\sqrt{r_1}} \right),$$

e qui comparisce una funzione, analoga a K_1, che diremo Ψ_1, cioè:

$$\Psi_1 = 2\Phi - \frac{3}{\sqrt{r_1}} \int_0^{r_1} \frac{\Phi \, d r_1}{\sqrt{r_1}}.$$

Quindi:

$$w'' = \frac{z_1}{2\pi} \left(r_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} - \Phi \right) + \frac{1}{8\pi} \left(a^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} - r_1^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial z_1} \right).$$

La ricerca di u_1, v_1, w_1 esige adunque semplicemente la costruzione delle funzioni armoniche ben definite: N_1, U_1, V_1, Φ; e delle altre due Φ_1 e Ψ_1 che si deducono facilmente dall'ultima; nelle prime tre non figurano che integrali relativi alla superficie della sfera; mentre che in Φ compariscono le funzioni armoniche $\int \frac{X}{T} dS$ e $\int \frac{Y}{T} dS$; invece la ricerca di u_2, v_2, w_2 esige integrazioni relative a tutto lo spazio sferico; sicchè la determinazione di questo spostamento, attesa la forma complicata di Θ_2, non può in generale ridursi alla forma semplice alla quale riducesi la determinazione di u_1, v_1, w_1.

§ 9. Secondo problema.

Gli sviluppi precedenti permettono di risolvere facilmente il secondo problema; accenneremo in brevi tratti la soluzione.

La deformazione ausiliaria ha per componenti di spostamento:

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{a}{T} + \frac{a^2 - r^2}{8\pi} \frac{\partial H_1}{\partial x}$$

$$\eta = \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} y H - \frac{r}{2\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^r H dr + \frac{1}{8\pi}\left(a^2 \frac{\partial H_1}{\partial y} - r^2 \frac{\partial K_1}{\partial y}\right)$$

$$\zeta = \frac{\partial \psi}{\partial z_1} + \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} z H - \frac{r}{2\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^r H dr + \frac{1}{8\pi}\left(a^2 \frac{\partial H_1}{\partial z} - r^2 \frac{\partial K_1}{\partial z}\right).$$

Un poco diversa è la ricerca di H. Per la maggior simmetria dei calcoli eguaglieremo le due diverse espressioni di τ_1 e cioè:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\left(z \frac{\partial H}{\partial y} - y \frac{\partial H}{\partial z}\right),$$

onde:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_1 \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1 \partial z} - \frac{1}{2\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\left(\frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^r H dr - \frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^r H dr\right)$$

$$- \frac{1}{4\pi}\left(y \frac{\partial K_1}{\partial z} - z \frac{\partial K_1}{\partial y}\right) = \frac{1}{\pi}\left(z \frac{\partial H}{\partial y} - y \frac{\partial H}{\partial z}\right).$$

Tenendo presente lo sviluppo di ψ deduciamo:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_1 \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1 \partial z} = -\frac{1}{a} \sum_1^\infty \left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^s (s+1) Q_s,$$

dove:

$$Q_s - \frac{1}{s}\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial z_1} - \frac{\partial\mu}{\partial y_1}\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)\frac{d^2 P_s}{d\mu^2} + \frac{1}{s}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial z_1\,\partial y} - \frac{\partial^2\mu}{\partial y_1\,\partial z}\right)\frac{d P_s}{d\mu}$$

$$+\left\{\frac{1}{r^2}\left(y\frac{\partial\mu}{\partial z_1} - z\frac{\partial\mu}{\partial y_1}\right) + \frac{1}{r_1^2}\left(z_1\frac{\partial\mu}{\partial y} - y_1\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)\right\}\frac{d P_s}{d\mu} + s\,\frac{y z_1 - y_1 z}{r^2 r_1^2}\,P_s.$$

Ma si ha successivamente:

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial z_1} - \frac{\partial\mu}{\partial y_1}\frac{\partial\mu}{\partial z} = \frac{y_1 z - y z_1}{r^2 r_1^2}(1-\mu^2); \qquad \frac{\partial^2\mu}{\partial z_1\,\partial y} - \frac{\partial^2\mu}{\partial y_1\,\partial z} = -\frac{y_1 z - y z_1}{r^2 r_1^2}\,\mu$$

$$y\frac{\partial\mu}{\partial z_1} - z\frac{\partial\mu}{\partial y_1} = \frac{y_1 z - y z_1}{r_1^2}\,\mu; \qquad z_1\frac{\partial\mu}{\partial y} - y_1\frac{\partial\mu}{\partial z_1} = \frac{y_1 z - y z_1}{r^2}\,\mu.$$

Onde:

$$Q_s = \frac{y_1 z - y z_1}{r^2 r_1^2}\left(\frac{1-\mu^2}{s}\frac{d^2 P_s}{d\mu^2} + \frac{2s-1}{s}\,\mu\,\frac{d P_s}{d\mu} - s P_s\right)$$

$$= \frac{y_1 z - y z_1}{r^2 r_1^2}\,\frac{2s+1}{s}\left(\mu\,\frac{d P_s}{d\mu} - s P_s\right) = \frac{y_1 z - y z_1}{r^2 r_1^2}\,\frac{2s+1}{s}\,\frac{d P_{s-1}}{d\mu},$$

e quindi:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z_1\,\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y_1\,\partial z} = -\frac{1}{a}\sum_1^\infty \frac{(s+1)(2s+1)}{s}\,\frac{y_1 z - y z_1}{r^2 r_1^2}\left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^s \frac{d P_{s-1}}{d\mu}$$

$$= -\frac{1}{a^3}\sum_1^\infty \frac{(s+2)(2s+3)}{s+1}\,\frac{y_1 z - y z_1}{r r_1}\left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^s \frac{d P_s}{d\mu}.$$

Analogamente:

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{\Omega^2}{\Omega^2-\omega^2}\left\{\frac{y}{r}\,\frac{\partial}{\partial z}\int_0^r H\,dr - \frac{z}{r}\,\frac{\partial}{\partial y}\int_0^r H\,dr\right\} =$$

$$-\frac{1}{2\pi}\,\frac{\Omega^2}{\Omega^2-\omega^2}\sum_1^\infty \alpha_s\,\frac{y_1 z - y z_1}{r r_1}\left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^s \frac{d P_s}{d\mu}$$

$$\frac{1}{4\pi}\left(y\,\frac{\partial K_1}{\partial z} - z\,\frac{\partial K_1}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \alpha_s\,\frac{s-1}{2s+1}\,\frac{y_1 z - y z_1}{r r_1}\left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^s \frac{d P_s}{d\mu}.$$

Sostituendo adunque si ha:

$$\sum_1^\infty \frac{y_1 z - y z_1}{r r_1}\left(\frac{r r_1}{a^2}\right)^s \frac{d P_s}{d\mu}\left\{\frac{\Omega^2}{2\pi(\Omega^2-\omega^2)}\,\alpha_s + \frac{1}{\pi}\,\frac{s-1}{2s+1}\,\alpha_s + \frac{1}{\pi}\,\alpha_s - \frac{(s+2)(2s+3)}{a^3(s+1)}\right\} = 0.$$

Si deduce di qui:

$$\alpha_s = \frac{2\pi(\Omega^2-\omega^2)}{a^3}\,\frac{(s+2)(2s+1)(2s+3)}{(s+1)\{(2s+1)\Omega^2 + 6s(\Omega^2-\omega^2)\}}.$$

Però la funzione H resta determinata a meno di una costante, inutile pel nostro scopo; saranno quindi del pari note la dilatazione cubica, la rotazione e le componenti ξ, η, ζ dello spostamento. Le forze da applicare in superficie per produrre una tale deformazione hanno per componenti:

$$L_0 = 2\rho\omega^2 \frac{\partial S}{\partial x_1} + 2\rho\omega^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x_1}; \quad M_0 = 2\rho\omega^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y_1}; \quad N_0 = 2\rho\omega^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z_1},$$

nelle quali naturalmente i coefficienti γ_s che compariscono nello sviluppo di S sono formati coi nuovi α_s. I valori che ξ, η, ζ, assumono in superficie sono:

$$\xi = \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x_1}; \qquad \eta = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_1}; \qquad \zeta = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_1};$$

e per Π va fatta la stessa osservazione che per S.

Ora la ricerca di Θ e di u, v, w non può presentare alcuna difficoltà.

§ 10. Le equazioni dell'equilibrio in coordinate polari.

Assumiamo un sistema di coordinate polari r, θ, φ in cui θ è la colatitudine, φ la longitudine ed indichiamo con u la proiezione dello spostamento di un punto sul raggio vettore; con v la proiezione secondo la tangente al meridiano; con w la proiezione sulla tangente al parallelo, con Θ la dilatazione cubica e con T_1, T_2, T_3 le componenti del doppio della rotazione elementare sulle stesse rette. Supponiamo infine che su ogni elemento di massa agiscano forze che ammettano una funzione potenziale V armonica in tutta la sfera. Le equazioni dell'equilibrio sono, com'è noto:

$$\begin{aligned}
&\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial \theta}(r \operatorname{sen}\theta\, T_1) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\, T_2)\right\} = -\rho \frac{\partial V}{\partial r}\\
&\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left\{\frac{\partial T_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r \operatorname{sen}\theta\, T_1)\right\} = -\rho \frac{\partial V}{\partial \theta}\\
&\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} + \operatorname{sen}\theta\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r\, T_2) - \frac{\partial T_3}{\partial \theta}\right\} = -\rho \frac{\partial V}{\partial \varphi},
\end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}
r \operatorname{sen}\theta\, T_1 &= \operatorname{sen}\theta \left\{\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial r v}{\partial r}\right\}\\
r\, T_2 &= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left\{\frac{\partial (r \operatorname{sen}\theta\, w)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right\}\\
T_3 &= \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left\{\frac{\partial r v}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r \operatorname{sen}\theta\, w)}{\partial \theta}\right\}.
\end{aligned}$$

Inoltre:

$$\Theta = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left\{\frac{\partial(r^2 \operatorname{sen}\theta\, u)}{\partial r} + \frac{\partial(r \operatorname{sen}\theta\, v)}{\partial\theta} + \frac{\partial r w}{\partial\varphi}\right\}$$

$$\Delta^2 V = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

Le equazioni dell'equilibrio possono esser poste sotto una forma assai notevole. Eseguite le sostituzioni nella prima si ha:

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial r v}{\partial r}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2(r\operatorname{sen}\theta\, w)}{\partial r\,\partial\varphi}\right\} = -\rho\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Inoltre:

$$\Delta^2 u - \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\} = 0,$$

e però sommando colla precedente si ha:

$$\Delta^2 u + \frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial\Theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial r v}{\partial r}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 r\operatorname{sen}\theta w}{\partial r\,\partial\varphi}\right\} = -\rho\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Notiamo poscia che:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial r v}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 r \operatorname{sen}\theta\, v}{\partial r\,\partial\theta}$$

$$r^2 \operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \operatorname{sen}\theta\, u) - 2r\operatorname{sen}\theta\, u,$$

onde risulta:

$$\Delta^2 u + \frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial\Theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \operatorname{sen}\theta\, u) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\operatorname{sen}\theta\, v)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial r w}{\partial\varphi} - 2r\operatorname{sen}\theta\, u\right\} = -\rho\frac{\partial V}{\partial r},$$

oppure:

$$\Delta^2 u + \frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial\Theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \operatorname{sen}\theta\,\Theta - 2r\operatorname{sen}\theta\, u) = -\rho\frac{\partial V}{\partial r},$$

cioè:

$$\Delta^2 u + \frac{2}{r^2}\frac{\partial r u}{\partial r} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2}\frac{\partial\Theta}{\partial r} - \frac{2\Theta}{r} = -\rho\frac{\partial V}{\partial r},$$

e ricordando che:

$$\Delta^2(ru) = r\Delta^2 u + \frac{2}{r}\frac{\partial ru}{\partial r},$$

otteniamo la forma notevolissima:

$$\frac{\Omega^2-\omega^2}{\omega^2} r \frac{\partial\Theta}{\partial r} - 2\Theta + \Delta^2(ru) = -\rho r \frac{\partial V}{\partial r}. \tag{1}$$

Trasformiamo ora la seconda; fatte le sostituzioni si ha:

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta} = \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial r\operatorname{sen}\theta w}{\partial\varphi} - \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 rv}{\partial\varphi^2}$$
$$-\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial^2 rv}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\right) - \rho\operatorname{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}.$$

Ma dalla espressione della dilatazione cubica si trae:

$$\frac{\partial r\operatorname{sen}\theta w}{\partial\varphi} = r^2\operatorname{sen}^2\theta\left(\Theta - \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 u}{\partial r} - \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial r\operatorname{sen}\theta v}{\partial\theta}\right),$$

e quindi sostituendo nella precedente:

$$\frac{\partial^2 r\operatorname{sen}\theta v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\operatorname{sen}\theta v}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 r\operatorname{sen}\theta v}{\partial\varphi^2}$$
$$= \operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial ur^2}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}^2\theta\,\Theta)$$
$$-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta} - \rho\operatorname{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}.$$

Ora si ha:

$$\Delta^2(v\operatorname{sen}\theta) = \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\operatorname{sen}\theta\frac{\partial v\operatorname{sen}\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial v\operatorname{sen}\theta}{\partial\theta}\right)$$
$$+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 v\operatorname{sen}\theta}{\partial\varphi^2},$$

e poiçhè:

$$\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\operatorname{sen}\theta\frac{\partial v\operatorname{sen}\theta}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\operatorname{sen}\theta v}{\partial r^2},$$

così è chiaro che il primo membro dell'ultima equazione equivale ad $r\Delta^2(v\operatorname{sen}\theta)$. Quindi abbiamo:

$$r\Delta^2(v\operatorname{sen}\theta) + \frac{\Omega^2-\omega^2}{\omega^2}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta} - 2\cos\theta\,\Theta = \operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}$$
$$-\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial ur^2}{\partial r}\right) - \rho\operatorname{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}.$$

Con riduzioni assai facili troviamo che:

$$\operatorname{sen}\theta \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}^2\theta \frac{\partial u r^2}{\partial r}\right) = -\frac{2}{r}\operatorname{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u r^2}{\partial r},$$

onde la seconda equazione si riduce a questa:

$$\left.\begin{aligned} r\Delta^2(v\operatorname{sen}\theta) + \frac{\Omega^2-\omega^2}{\omega^2}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta} - 2\cos\theta\,\Theta + \frac{2}{r}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta} \\ + \frac{2\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u r^2}{\partial r} = -\rho\operatorname{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Se si trasformasse la terza delle equazioni dell'equilibrio non si troverebbe una equazione molto semplice; perciò una volta assegnata la dilatazione cubica Θ, e le componenti u e v, la w potrà essere determinata dalla

$$\frac{\partial r\operatorname{sen}\theta w}{\partial\varphi} = r^2\operatorname{sen}^2\theta\left(\Theta - \frac{1}{r^2}\frac{\partial u r^2}{\partial r} - \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial r\operatorname{sen}\theta v}{\partial\theta}\right). \qquad (3)$$

§ 11. Formule integrali.

Osserviamo anzitutto che per la ipotesi fatta sulle forze che sollecitano ogni elemento di massa la dilatazione cubica risulta una funzione armonica nello spazio in cui si studia la deformazione, e però possiamo porre:

$$\Theta = \frac{\omega^2}{\Omega^2}\frac{\partial H r}{\partial r},$$

in cui H è del pari una funzione armonica; a sua volta H potrà essere sempre posta sotto la forma:

$$H = r\frac{\partial\psi}{\partial r} + k\psi,$$

dove ψ è una funzione armonica e k un coefficiente costante per ora indeterminato.

Così Θ risulta una funzione lineare ed omogenea di

$$r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}; \qquad r\frac{\partial\psi}{\partial r}; \qquad \psi,$$

con coefficienti costanti; del pari $r\frac{\partial\Theta}{\partial r}$ risulta una funzione lineare ed omogenea di

$$r^3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3}; \qquad r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}; \qquad r \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

pure con coefficienti costanti.

Fatte le sostituzioni nella (1) risulta:

$$\Delta^2 (r u) + r \frac{\partial V \rho}{\partial r} = \alpha r^3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \beta r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \gamma r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \varepsilon \psi, \tag{4}$$

dove:

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\Omega^2}; \qquad \beta = \frac{2\omega^2}{\Omega^2} - (k+4) \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2};$$

$$\gamma = 2(k+2) \frac{\omega^2}{\Omega^2} - 2(k+1) \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2}; \qquad \varepsilon = 2k \frac{\omega^2}{\Omega^2}.$$

Ora è facile verificare che:

$$\Delta^2 \left(r^{n+2} \frac{\partial^n \psi}{\partial r^n} \right) = 4 r^{n+1} \frac{\partial^{n+1} \psi}{\partial r^{n+1}} + (6 + 4n) r^n \frac{\partial^n \psi}{\partial r^n}.$$

Poniamo inoltre:

$$\rho V = 4 \left(r \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{3}{2} W \right),$$

essendo W una nuova funzione armonica facilmente esprimibile per V; infatti:

$$W = \frac{\rho}{4 r^{3/2}} \int_0^r V \sqrt{r}\, dr.$$

Allora:

$$r \frac{\partial \rho V}{\partial r} = 4 r^2 \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + 10 r \frac{\partial W}{\partial r} = \Delta^2 \left(r^3 \frac{\partial W}{\partial r} \right),$$

e però la (4) si trasforma nella seguente:

$$\Delta^2 \left(r u + r^3 \frac{\partial W}{\partial r} \right) = \alpha r^3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \beta r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \gamma r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \varepsilon \psi.$$

Cercheremo di soddisfarla assumendo per $r u + r^3 \frac{\partial W}{\partial r}$ una funzione lineare ed omogenea di

$$r^4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}; \qquad r^3 \frac{\partial \psi}{\partial r}; \qquad r^2 \psi.$$

Poniamo cioè:

$$r u + r^3 \frac{\partial W}{\partial r} = \alpha_1 r^4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \beta_1 r^3 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \gamma_1 r^2 \psi.$$

Sostituendo ed eguagliando i coefficienti di $r^3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3}$ ecc.... facilmente si trova:

$$\alpha_1 = -\frac{\Omega^2 - \omega^2}{4\Omega^2}; \qquad \beta_1 = \frac{2\omega^2 - \Omega^2}{2\Omega^2}; \qquad \gamma_1 = \frac{\omega^2}{2\Omega^2}; \qquad k = \frac{3}{2}.$$

Alla soluzione trovata potremo aggiungere una funzione armonica arbitraria $r \frac{\partial \psi_1}{\partial r}$ in cui ψ_1 è pure armonica; quindi risulterà finalmente:

$$u + r^2 \frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{\Omega^2 - \omega^2}{4\Omega^2} r^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2\omega^2 - \Omega^2}{2\Omega^2} r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\omega^2}{2\Omega^2} r \psi + \frac{\partial \psi_1}{\partial r}.$$

Quella parte del secondo membro che è indipendente da ψ_1 si può riguardare come la somma di una espressione della forma:

$$r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} + a r \psi,$$

e della derivata di una espressione della forma:

$$a_1 r^3 \frac{\partial \psi}{\partial r} + b_1 r^2 \psi,$$

purchè:

$$a_1 = -\frac{\Omega^2 - \omega^2}{4\Omega^2}; \qquad b_1 = \frac{\omega^2 - 3\Omega^2}{4\Omega^2}; \qquad a = \frac{3}{2}.$$

Posto adunque:

$$\Psi = \psi_1 - \frac{r^2}{4}\left(\frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2} r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{3\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2} \psi\right),$$

risulta:

$$u + r^2 \frac{\partial W}{\partial r} = r H + \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \tag{5}$$

in cui W è una funzione armonica ben definita; H, ψ e ψ_1 sono semplicemente armoniche.

La funzione Ψ non è armonica; ma un calcolo assai semplice mostra che $\Delta^2 \Psi$ è una funzione lineare ed omogenea di $r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$, $r \frac{\partial \psi}{\partial r}$, ψ; onde è chiaro che:

$$\Delta^2 \Delta^2 \Psi = 0.$$

E così ancora si potrebbe mostrare che:

$$\Delta^2 \Delta^2 \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) = 0.$$

Infine notiamo che:

$$\Delta^2 \Psi - \Theta = -\left(r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{11}{2} r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{9}{2} \psi\right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^3 H)}{\partial r},$$

cioè:

$$\Delta^2 \Psi = \Theta - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^3 H)}{\partial r}, \tag{6}$$

che più specialmente ci sarà utile.

Valendoci di questa relazione e di alcune altre che ricorderemo solamente, possiamo porre la (2) sotto altra forma.

Ricordiamo che:

$$\Delta^2 (UV) = V\Delta^2 U + U\Delta^2 V + 2\left(\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)$$

$$\Delta^2 (\operatorname{sen}\theta) = \frac{\cos 2\theta}{r^2 \operatorname{sen}\theta}$$

e

$$\Delta^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\Delta^2 U + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{2\cos\theta}{r^2 \operatorname{sen}^3\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.$$

La (2) può scriversi così:

$$\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2}\frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) - 2\cos\theta\left(\Theta - \frac{1}{r^2}\frac{\partial u r^2}{\partial r}\right)$$
$$= -\rho \operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} - r\Delta^2 (v \operatorname{sen}\theta),$$

e sostituendo per u e per V le loro espressioni si ha:

$$\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2}\Theta + 2H + \frac{2}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} - 2r\frac{\partial W}{\partial r}\right)$$
$$- 2\cos\theta\left[\Theta - \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^3 H)}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4 \frac{\partial W}{\partial r}\right)\right]$$
$$= -\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\left(4r\frac{\partial W}{\partial r} + 6W\right) - r\Delta^2 (v \operatorname{sen}\theta).$$

Approfittando della (6) possiamo subito osservare che la parte che nel primo membro non contiene W equivale a

$$-\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\Delta^2 \Psi - \frac{2}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) - 2\cos\theta\left[\Delta^2 \Psi - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)\right].$$

Ma:

$$\Delta^2 \left(\frac{1}{r}\Psi\right) = \frac{1}{r}\Delta^2 \Psi - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \Psi}{\partial r},$$

e però quella espressione (cambiata di segno) equivale a

$$r \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\Delta^2 \left(\frac{1}{r}\Psi\right) + 2r\cos\theta\,\Delta^2 \left(\frac{1}{r}\Psi\right) - 2\cos\theta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2},$$

la quale, ove si rifletta che:

$$r\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta^2\left(\frac{1}{r}\Psi\right)=r\Delta^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\operatorname{sen}^3\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}$$

$$\Delta^2\left(\frac{1}{r}\Psi\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi}{r}\right)+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^3\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}+\frac{1}{r^3\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi}{r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2},$$

si trasformerà nella seguente:

$$r\left\{\operatorname{sen}\theta\,\Delta^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{\cos 2\theta}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}+\frac{2\cos\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\frac{\Psi}{r}\right\}=r\Delta^2\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right).$$

E però la (2) equivale a

$$r\Delta^2\left(v\operatorname{sen}\theta-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)=2r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 W}{\partial r\partial\theta}+\frac{2\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\frac{\partial W}{\partial r}\right)$$
$$-\operatorname{sen}\theta\left(4r\frac{\partial^2 W}{\partial r\partial\theta}+6\frac{\partial W}{\partial\theta}\right).$$

Anche il secondo membro può essere trasformato utilmente.

Osserviamo infatti che:

$$\Delta^2\left(r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)=r\operatorname{sen}\theta\,\Delta^2\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial W}{\partial\theta}\Delta^2(r\operatorname{sen}\theta)$$
$$+2\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 W}{\partial r\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}\right),$$

e poichè:

$$\Delta^2 W=0,$$

così:

$$\Delta^2\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}+\frac{2\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right).$$

Inoltre:

$$\Delta^2(r\operatorname{sen}\theta)=\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta},$$

e però:

$$\Delta^2\left(r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)=2r\cos\theta\left(\frac{\cos\theta}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial W}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right)$$
$$+2\operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 W}{\partial r\partial\theta}+\frac{2}{r}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial W}{\partial\theta}=-\frac{2\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial W}{\partial r}\right)$$
$$+2\operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 W}{\partial r\partial\theta}+\frac{2}{r}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial W}{\partial\theta}.$$

Quindi il secondo membro equivale a

$$-r\Delta^2\left(r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)+4\left(r\cos\theta\frac{\partial W}{\partial r}-\operatorname{sen}\theta\frac{\partial W}{\partial\theta}\right),$$

ed avremo definitivamente:

$$\Delta^2\left(v\operatorname{sen}\theta-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}+r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)=4\left(\cos\theta\frac{\partial W}{\partial r}-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta}\right).$$

Osserviamo da ultimo che, indicando con (r', θ', φ') le coordinate di un punto variabile del corpo e con R la sua distanza dal punto (r, θ, φ), la funzione:

$$W_1=-\frac{1}{\pi}\int\left(\cos\theta'\frac{\partial W}{\partial r'}-\frac{\operatorname{sen}\theta'}{r'}\frac{\partial W}{\partial\theta'}\right)\frac{dS}{R},$$

è tale che nel punto (r, θ, φ):

$$\Delta^2W_1=4\left(\cos\theta\frac{\partial W}{\partial r}-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta}\right).$$

Di più nella espressione del Δ^2 nelle coordinate r, θ, φ l'ultima variabile è la sola che non comparisca esplicitamente, e però se una funzione Φ soddisfa alla $\Delta^2=0$ lo stesso accadrà per $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$; avremo adunque:

$$\Delta^2\left(v\operatorname{sen}\theta-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}+r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial W}{\partial\theta}-\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)=\Delta^2W_1,$$

e quindi:

$$v\operatorname{sen}\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}-r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial W}{\partial\theta}+\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}+W_1, \tag{7}$$

nella quale espressione di v, oltre alle funzioni già introdotte per u, comparisce ancora una nuova funzione armonica Φ arbitraria.

Passiamo finalmente alla ricerca di w; a tal uopo ci varremo della:

$$\frac{\partial wr\operatorname{sen}\theta}{\partial\varphi}=r^2\operatorname{sen}^2\theta\left(\Theta-\frac{1}{r^2}\frac{\partial ur^2}{\partial r}-\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial vr\operatorname{sen}\theta}{\partial\theta}\right).$$

Sostituendo nel secondo membro per Θ, u, v i valori già trovati risulta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial wr\operatorname{sen}\theta}{\partial\varphi}=r^2\operatorname{sen}^2\theta\Big\{&\Theta-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^3H}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)\\&-\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\Big\}\\&+r^2\operatorname{sen}^2\theta\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\frac{\partial W}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r^2\operatorname{sen}\theta\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial W_1}{\partial\theta}\right\},\end{aligned}$$

cioè:

$$\frac{\partial w r \operatorname{sen}\theta}{\partial\varphi}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)-r^2\,\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}-r\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial W_1}{\partial\theta}+2r^3\operatorname{sen}^2\theta\,\frac{\partial W}{\partial r},$$

dalla quale, posto:

$$W'_1=\int W_1 d\varphi;\qquad W'=\int W d\varphi,$$

risulta:

$$w r\operatorname{sen}\theta=\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}-r\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}-r^2\,\frac{\partial W}{\partial\varphi}+2r^3\operatorname{sen}^2\theta\,\frac{\partial W'}{\partial r}-r\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial W'_1}{\partial\theta}. \tag{8}$$

Nel caso particolare in cui le forze esterne sono nulle, si ha:

$$W=W_1=W'=W'_1=0,$$

e si ottengono le formule stabilite da Borchardt con procedimento diverso dal precedente e meno diretto.

Le formule stabilite possono far risolvere semplicemente il problema della deformazione di una sfera, mediante integrali definiti, allorchè le forze esterne sono nulle, e sulla superficie limite sono date: 1.° le forze; 2.° la componente normale delle forze e le componenti tangenziali degli spostamenti; 3.° la componente normale dello spostamento e le componenti tangenziali delle forze. In tutti questi casi si tratta di determinare le quattro funzioni armoniche, H, ψ, ψ_1, Φ mediante le condizioni relative alla superficie limite. Il 1.° caso è stato trattato ampiamente dal Borchardt; ho trattato gli altri due casi in una Nota presentata all'Accad. dei Lincei (*).

§ 12. Espressione degli spostamenti in serie di funzioni sferiche.

Le formule integrali esposte nel paragrafo precedente si prestano benissimo per ottenere rapidamente gli sviluppi in serie degli spostamenti u, v, w, già dati dal sig. Chree, e a risolvere in un caso più generale i problemi ai quali abbiamo accennato.

Il potenziale delle forze soddisfi all'equazione di Laplace e sia quindi sviluppabile in una serie della forma:

$$\sum r^n V_n,$$

(*) *Risoluzione di due problemi relativi alla deformazione di una sfera omogenea isotropa.* Rend. Accad. Lincei, 1.° sem. 1892, pag. 335-343.

in cui V_n è una funzione sferica di ordine n, la quale soddisfa alla equazione differenziale:

$$n(n+1)V_n + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial V_n}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V_n}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Riteniamo per ora soltanto il termine generale: $r^n V_n$; e però poniamo:

$$V = r^n V_n.$$

Risulta quindi:

$$W = \frac{r^n V_n}{2\omega^2(2n+3)}; \qquad r^2\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{n r^{n+1} V_n}{2\omega^2(2n+3)}.$$

Dalle equazioni dell'equilibrio si ha:

$$\Omega^2 \Delta^2 \Theta = -\Delta^2 V,$$

onde:

$$\Theta = -\frac{1}{\Omega^2} r^n V_n + r^n Y_n,$$

dove Y_n è pure una funzione sferica di ordine n. Otteniamo quindi successivamente:

$$H = -\frac{1}{\omega^2}\frac{r^n V_n}{n+1} + \frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{r^n Y_n}{n+1}$$

$$\psi = -\frac{2r^n V_n}{\omega^2(n+1)(2n+3)} + \frac{2\Omega^2}{\omega^2}\frac{r^n Y_n}{(n+1)(2n+3)}$$

$$r\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{2nr^n V_n}{\omega^2(n+1)(2n+3)} + \frac{2\Omega^2}{\omega^2}\frac{nr^n Y_n}{(n+1)(2n+3)}.$$

Osserviamo infine che la funzione ψ_1 armonica in tutta la sfera può esser sempre posta sotto la forma:

$$\psi_1 = \frac{r^n Z_n}{n},$$

in cui Z_n è una nuova funzione sferica di ordine n.

Ciò premesso è facile formare l'espressione di Ψ e si trova:

$$\Psi = \frac{r^n Z_n}{n} + \frac{r^{n+2} V_n}{2\omega^2(n+1)(2n+3)}\frac{(\Omega^2-\omega^2)n + 3\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2}$$
$$- \frac{r^{n+2} Y_n}{2\omega^2(n+1)(2n+3)}\left\{(\Omega^2-\omega^2)n + 3\Omega^2 - \omega^2\right\}.$$

Quindi si deduce:

$$u = -\frac{r^{n+1}}{2(2n+3)}\left\{\frac{(n+2)V_n}{\Omega^2} + \frac{n\Omega^2 - (n+2)\omega^2}{\omega^2} Y_n\right\} + r^{n-1} Z_n.$$

Il calcolo di v esige anzitutto la ricerca della W_1, la quale, oltre ad essere finita continua e ad un sol valore, soddisfa alla:

$$\Delta^2 W_1 = 4\left(\cos\theta \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta}\right),$$

cioè:

$$\Delta^2 W_1 = \frac{2 r^{n-1}}{\omega^2(2n+3)}\left(n \cos\theta\, V_n - \operatorname{sen}\theta \frac{\partial V_n}{\partial \theta}\right).$$

Dico che potremo determinare k in modo che risulti:

$$W_1 = k r^{n+1} \operatorname{sen}\theta \frac{\partial V_n}{\partial \theta} = k r \operatorname{sen}\theta \frac{\partial (r^n V_n)}{\partial \theta}.$$

Infatti ricordiamo che, se φ è una funzione armonica si ha:

$$\Delta^2\left(r \operatorname{sen}\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) = -\frac{2\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + 2 \operatorname{sen}\theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r} \operatorname{sen}\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}.$$

Se in questa facciamo:

$$\varphi = k r^n V_n,$$

risulta:

$$\Delta^2 W_1 = -2k(n+1) r^{n-1}\left(n \cos\theta V_n - \operatorname{sen}\theta \frac{\partial V_n}{\partial \theta}\right).$$

Basta adunque porre:

$$k = -\frac{1}{\omega^2(n+1)(2n+3)},$$

e quindi:

$$W_1 = -\frac{r^{n+1} \operatorname{sen}\theta}{\omega^2(n+1)(2n+3)} \frac{\partial V_n}{\partial \theta}.$$

Essendo inoltre Φ armonica in tutta la sfera porremo:

$$\Phi = -r^n X_n.$$

Fatte le sostituzioni nell'espressione di v si ha:

$$v = -\frac{r^{n+1}}{2(2n+3)} \frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\frac{V_n}{\Omega^2} + \frac{(3+n)\Omega^2 - (n+1)\omega^2}{\omega^2(n+1)} Y_n\right\}$$
$$+ \frac{r^{n-1}}{n} \frac{\partial Z_n}{\partial \theta} + \frac{r^n}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial X_n}{\partial \varphi}.$$

Passiamo finalmente all'espressione di w.

Abbiamo anzitutto:

$$2r\frac{\partial W}{\partial r}-\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial W_1}{\partial \theta}$$

$$=\frac{r^n}{\omega^2(n+1)(2n+3)}\left\{n(n+1)V_n+\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial V_n}{\partial\theta}\right)\right\}.$$

La quantità in parentisi equivale a

$$-\frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V_n}{\partial\varphi^2},$$

però:

$$r^2\,\mathrm{sen}^2\theta\left(2r\frac{\partial W'}{\partial r}-\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial W'_1}{\partial\theta}\right)=-\frac{r^{n+2}}{\omega^2(n+1)(2n+3)}\frac{\partial V_n}{\partial\varphi}.$$

Sostituendo i valori trovati nell'espressione di w si ha:

$$w=-\frac{r^{n+1}}{2(2n+3)}\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\frac{V_n}{\Omega^2}+\frac{(3+n)\Omega^2-(n+1)\omega^2}{\omega^2(n+1)}Y_n\right\}$$

$$+\frac{r^{n-1}}{n\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial Z_n}{\partial\varphi}-r^n\frac{\partial X_n}{\partial\theta}.$$

Le espressioni trovate, coincidono (salvo il cambiamento delle costanti) con quelle del sig. Chree (*).

In queste espressioni compariscono tre funzioni sferiche indeterminate Y_n, Z_n, X_n. La loro determinazione riesce facile, mercè le condizioni relative alla superficie della sfera, nei quattro casi seguenti; allorchè cioè sulla superficie della sfera, $r=a$, sono dati: 1.° gli spostamenti; 2.° le forze; 3.° la trazione normale e gli spostamenti tangenziali; 4.° lo spostamento normale e le tensioni tangenziali.

Non insisto sui primi due casi; accennerò agli ultimi due brevemente.

Ricordiamo che:

$$\rho(\Omega^2-2\omega^2)\Theta+2\rho\omega^2\frac{\partial u}{\partial r},$$

(*) Mem. cit. In luogo delle costanti Ω^2 e ω^2 il sig. Chree adopera le due costanti m ed n di Thomson, legate alle prime dalle relazioni:

$$n=\rho\omega^2;\qquad m=\frac{\Omega^2-\omega^2}{\rho}.$$

Inoltre egli pone, non già Φ, ma

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=-r^nX_n.$$

è la componente normale della forza per unità di area:

$$\rho\,\omega^2\left(r\,\frac{\partial\frac{v}{r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right),$$

è la componente secondo la tangente al meridiano:

$$\rho\,\omega^2\left(r\,\frac{\partial\frac{w}{r}}{\partial r}+\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right),$$

quella secondo la tangente al parallelo.

Siano dunque dati in superficie la componente normale della forza, e gli spostamenti tangenziali, espressi in serie di funzioni sferiche:

$$\sum_1^\infty S_n,\qquad \sum_1^\infty v_n,\qquad \sum_1^\infty w_n.$$

Dalle espressioni di v e w per $r=a$ otterremo adunque (ritenendo per ora soltanto i termini di posto n):

$$v_n=\alpha_n\frac{\partial V_n}{\partial\theta}+\beta_n\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}+\gamma_n\frac{\partial Z_n}{\partial\theta}+\frac{a^n}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial X_n}{\partial\varphi}$$

$$w_n=\frac{\alpha_n}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial V_n}{\partial\varphi}+\frac{\beta_n}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial Y_n}{\partial\varphi}+\frac{\gamma_n}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial Z_n}{\partial\varphi}-a^n\frac{\partial X_n}{\partial\theta}\,.$$

dove:

$$\alpha_n=-\frac{a^{n+1}}{2\,\Omega^2(2n+3)};\qquad \beta_n=-\frac{a^{n+1}\{(3+n)\,\Omega^2-(n+1)\omega^2\}}{2\,\omega^2(n+1)(2n+3)};\qquad \gamma_n=\frac{a^{n-1}}{n}\,.$$

Moltiplicando la prima per $\operatorname{sen}\theta$, e poi derivando rispetto a θ e aggiungendo la seconda, derivata rispetto a φ, e tenendo conto della equazione cui soddisfano V_n, Y_n, ecc. risulta facilmente:

$$\alpha_n V_n+\beta_n Y_n+\gamma_n Z_n=-\frac{1}{n(n+1)\operatorname{sen}\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta\,v_n)+\frac{\partial w_n}{\partial\varphi}\right\}.$$

Derivando invece la prima rispetto a φ, moltiplicando la seconda per $\operatorname{sen}\theta$ e poi derivando rispetto a θ e sottraendo dalla prima, si ottiene:

$$-\,n(n+1)a^n\operatorname{sen}\theta\,X_n=\frac{\partial v_n}{\partial\varphi}-\frac{\partial(\operatorname{sen}\theta\,w_n)}{\partial\theta}\,.$$

cioè (ristabilendo il segno di sommatoria):

$$\sum_1^\infty X_n=\sum_1^\infty\frac{1}{n(n+1)a^n\operatorname{sen}\theta}\left\{\frac{\partial(\operatorname{sen}\theta\,w_n)}{\partial\theta}-\frac{\partial v_n}{\partial\varphi}\right\}.$$

Sviluppando il secondo membro in serie di funzione sferiche, ed eguagliando i termini di posto n si viene a determinare X_n.

Eguagliando le due diverse espressioni della componente normale della forza, si ottiene un'altra relazione lineare tra V_n, Y_n, Z_n e cioè:

$$\alpha'_n V_n + \beta'_n Y_n + \gamma'_n Z_n = S_n,$$

dove:

$$\alpha'_n = -\frac{\rho(\Omega^2 - 2\omega^2)a^n}{\Omega^2} - \frac{\rho\omega^2}{\Omega^2}\frac{(n+1)(n+2)}{2n+3}$$

$$\beta'_n = \rho(\Omega^2 - 2\omega^2)a^n - \frac{\rho\omega^2}{\Omega^2}\frac{n+1}{2n+3}\frac{n\Omega^2 - (n+2)\omega^2}{\omega^2}$$

$$\gamma'_n = (n-1)a^{n-2}.$$

Le due relazioni trovate permettono di assegnare Y_n e Z_n.

In modo del tutto analogo si procede nel 4.° caso.

Sulla definizione di integrale.

(*Di* G. Peano, *a Torino.*)

Il prof. G. Ascoli nel suo articolo, avente lo stesso titolo (Annali di Matematica, a. 1895, pag. 67), rimette sul tappeto questa questione importantissima.

Egli giustamente rivendica la priorità degli integrali superiori ed inferiori, che trovansi nella sua Nota *Sul concetto di integrale definito* (Atti dell'Acc. dei Lincei, a. 1875, pag. 863). Però per esattezza conviene notare che contemporaneamente il sig. Darboux, nella sua Memoria *Sur les fonctions discontinues* (Annales de l'École Normale Supérieure, a. 1875, pag. 57) considera gli stessi enti, e dimostra teoremi simili. Anzi, se invece della data del volume si bada alla data della Memoria, il lavoro del Darboux (19 marzo 1873) e 28 gennaio 1874) precede quello dell'Ascoli (6 giugno 1875).

Io intendo qui richiamare l'attenzione del lettore su alcune mie idee sopra questo soggetto, le quali credo portino una semplificazione nella questione, e che non veggo ancora adottate da alcuno.

Il concetto, che informa alcuni miei lavori, sta nella sostituzione del limite superiore (o inferiore) d'un gruppo di numeri, al posto del limite verso cui converge una funzione. Ritengo difficile l'affermare chi pel primo abbia distinti questi due concetti simili, e che tuttora si confondono spesso da chi non usa un linguaggio preciso. Si suole ciò attribuire al Weierstrass (v. Pincherle, Giornale di Matematiche, a. 1880, pag. 242); si trovano questi limiti superiore ed inferiore nei lavori citati di Darboux e Ascoli, e si possono dire entrati nel dominio comune. La definizione contenuta nel « Formulario di Matematica », parte V, § 3, prop. 1 è:

$$1.\ u \varepsilon \mathrm{Kq} \cdot u \sim= \Lambda \cdot x \varepsilon \mathrm{q} \cdot \supset \therefore$$

$$x = \mathrm{l}' u \cdot = : u \frown (x + \mathrm{Q}) = \Lambda : y \varepsilon x - \mathrm{Q} \cdot \supset_y \cdot u \frown (y + \mathrm{Q}) \sim= \Lambda$$

che si legge: « Essendo u una classe di numeri reali, classe non nulla (poichè

« in logica matematica compaiono anche classi nulle), e se x è un numero « finito, allora dire che x è il limite superiore degli u equivale a dire che:

« 1.° non esistono numeri del sistema u maggiori di x;

« 2.° e dato ad arbitrio un numero y minore di x, esistono numeri « del sistema u maggiori di y. »

Introdotto poi il limite superiore infinito, la cui definizione (Formulario, parte V, § 3, prop. 5) non vogliamo qui riportare, si ha la proprietà fondamentale (id., prop. 6):

$$2.\ \mathrm{Hyp}\,1 \cdot \supset \cdot \mathrm{l}'\, u \,\varepsilon\, \mathrm{q} \smile \iota\infty.$$

« Ogni classe u ha sempre un limite superiore, finito o infinito. »

E non sarà inutile l'osservare che la dimostrazione di questo teorema è semplicemente una trasformazione della definizione di numero irrazionale.

Riesce più complicata la definizione del limite verso cui tende una funzione. Questa funzione può dipendere da una o più variabili indipendenti, e può anche avvenire che sia variabile il numero delle variabili indipendenti, come appunto succede nelle proposizioni di cui ci occupiamo. Il concetto comune di limite d'una funzione, limitandoci ad una variabile indipendente, e supponendo che questa tenda all'infinito, caso a cui possiamo sempre ridurci, viene espresso dalla seguente proposizione (Formulario, parte VII, § 2, prop. 1):

$$3.\ u \,\varepsilon\, \mathrm{Kq} \cdot \mathrm{l}'\, u = \infty \cdot f \,\varepsilon\, \mathrm{q f} u \cdot y \,\varepsilon\, \mathrm{q} \cdot \supset ::$$

$$y = \lim_{x,\, u,\, \infty} fx \cdot = \therefore h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \cdot \supset_h : a \,\varepsilon\, \mathrm{q} \cdot f[u \frown (a + \mathrm{Q})] \supset (y - h) \quad (y + h) \cdot$$

$$\sim = _a\Lambda \cdot$$

« Sia u una classe di numeri, il cui limite superiore sia l'infinito. Sia f « la caratteristica d'una funzione reale definita pei numeri del gruppo u; « e sia y un numero finito. Allora dire che y è il limite verso cui tende la « funzione fx, ove x, variando nella classe u, tenda all'infinito, significa dire « che, comunque si prenda la quantità positiva h, si può sempre determinare « un numero a, in guisa che i valori assunti dalla funzione fx, ove la va- « riabile assuma nella classe u i soli valori maggiori di a, appartengano tutti « all'intervallo da $y - h$ a $y + h$. »

Si vede chiaramente che la definizione 3 è più complicata della 1. Esaminandole nella scrittura simbolica, si ha che nella 1 figura il solo concetto di classe (in simboli K); la 3 contiene inoltre il concetto di funzione o corrispondenza (in simboli f).

Inoltre non sussiste la proposizione analoga alla 2; mentre ogni classe ha un limite superiore, non ogni funzione converge verso un limite. Si potrebbe, è vero, stabilire una certa analogia modificando il concetto di limite d'una funzione, secondo le idee da me esposte nella « Rivista di Matematica » a. 1892, e sviluppate nell' « American Journal of Mathematics » a. 1895, ritornando così ai concetti di Cauchy e di Abel, secondo cui ogni funzione ha dei valori limiti. Ma non vogliamo dilungarci su questo punto.

In conseguenza chi definisce i limiti superiori dei gruppi di punti, e concetti analoghi, mediante i limiti verso cui tendono le funzioni, esprime un'idea semplice mediante altre più complicate; inoltre si espone ad altri inconvenienti; e credo utile l'esporne uno preso dal classico libro del Jordan, *Cours d'Analyse,* 2.ª éd., a. 1892, pag. 19 del 1.° vol. Questi dice:

« On nomme point limite d'un ensemble tout point qui est la limite « d'une suite de points de l'ensemble. »

Detto u il gruppo, questa definizione in simboli si esprime:

$$(z \varepsilon \text{ punto limite di } u) = (f \varepsilon u \mathrm{f} \mathrm{N} \cdot z = \lim fx \cdot \sim =_f \Lambda).$$

Ora siccome si può considerare una successione di numeri eguali, ossia una funzione può ridursi ad una costante, ne risulta che ogni punto del gruppo ne è un punto limite, poichè è il limite d'una successione di punti coincidenti con esso. In conseguenza l'insieme dei punti limiti di u non è la classe derivata di u (indicata nel Formulario con Du), ma bensì la classe u resa chiusa (nel Formulario Cu) (*). Le definizioni delle classi Du e Cu sono date nel « Formulario » parte V, § 5, prop. 1 e § 7, prop. 1.

Così visto che il concetto di limite superiore (o inferiore) d'una classe è in sè più semplice di quello di limite verso cui tende una funzione, esaminiamo quali semplificazioni apporti la sostituzione del primo al secondo concetto in alcune questioni di analisi.

Si definisce comunemente la lunghezza d'un arco di curva come il limite verso cui converge la lunghezza d'una poligonale inscritta, i cui lati decrescano indefinitamente. E questa definizione richiede si dimostri che, sotto certe

(*) Qui la parola *chiuso* corrisponde al *fermé, abgeschlossen* del G. Cantor; e al *parfait* del Jordan; il Cantor al *perfect* attribuisce altro significato.

condizioni, quel limite esiste, e la dimostrazione è lunga. Inoltre si presenta un'altra difficoltà che esamineremo nel libro del JORDAN. La lunghezza della poligonale inscritta nell'arco è funzione del modo in cui si scompone l'arco, cioè a dire dei valori t_1, $t_2, \ldots, t_n$ dati alla variabile indipendente, e queste variabili $t_1, \ldots, t_n$ variano anche in numero, che cresce indefinitamente. Ora l'Autore a pag. 8 definisce solamente il limite « d'une suite illimitée de valeurs $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ » cioè di una qfN; in altri termini x_n è una quantità che dipende dal numero intero positivo n; e non è definito il limite d'una quantità che dipende dal modo con cui si scompone un intervallo. Però tale lacuna si può colmare, con opportuna definizione (*).

Si eliminano ad un tempo queste difficoltà assumendo la definizione seguente: (Vedansi le mie *Applicazioni geometriche del Calcolo*, a. 1887, pag. 162.)

« Dicesi lunghezza di un arco il limite superiore delle lunghezze delle « poligonali inscritte in esso. »

Ne risulta che ogni arco ha una lunghezza finita o infinita, pel teorema 2, senza bisogno di altre dimostrazioni. Si può notare la facilità con cui si ottengono le formule per gli archi; e l'analogia, anzi coincidenza di questa definizione col postulato 2.° di Archimede (della sfera e del cilindro).

Passiamo infine alla definizione di integrale. Sia fx una funzione definita in tutto l'intervallo da a a b, avente limite superiore e inferiore finiti, cioè:

$$a,\ b\,\varepsilon\,\mathrm{q} \cdot a < b \cdot f\varepsilon\,\mathrm{q}f a \text{ ⲙ } b \cdot \mathrm{l}' f(a \text{ ⲙ } b),\ \mathrm{l}_1 f(a \text{ ⲙ } b)\,\varepsilon\,\mathrm{q}.$$

Si considerino le somme:

$$S' = \sum_{r=0}^{r=n} (x_{r+1} - x_r)\,\mathrm{l}' f(x_r \text{ ⲙ } x_{r+1})$$

$$S_1 = \sum (x_{r+1} - x_r)\,\mathrm{l}_1 f(x_r \text{ ⲙ } x_{r+1}),$$

ove $x_0 = a$, $x_1, \ldots, x_{n-1}$, $x_n = b$ sono i punti d'una divisione dell'intervallo dato; S' è la somma dei prodotti delle ampiezze degli intervalli parziali pei limiti superiori dei valori della funzione in essi. Nella somma S_1 invece dei limiti superiori compaiono gli inferiori.

(*) D'ARÇAIS, *Calcolo infinitesimale*, tom, II, pag. 3, a. 1894, Il Darboux e l'Ascoli dimostrano amendue che sia S' che S_1, col tendere a zero degli intervalli parziali, tendono ciascuna ad un limite determinato; e che se il limite verso cui converge S' coincide col limite di S_1, allora la funzione data è integrabile.

Io trovo più semplice il presentare questo teorema sotto la forma:

« Se il limite inferiore dei valori di S' è eguale al limite superiore dei « valori di S_1, la funzione è integrabile. »

E nella mia Nota *Sull'integrabilità delle funzioni* (Atti della R. Accademia di Torino, a. 1883), diedi di questa proposizione una dimostrazione diretta. In quanto precede una funzione si disse integrabile nel senso di Riemann (Werke, pag. 226). Ma parmi si possa ottenere una semplificazione maggiore, modificando ancora la definizione di integrale; e nelle mie lezioni di Analisi infinitesimale, do le definizioni seguenti:

« Chiamo *integrale superiore* $\left(\overline{\int_a^b} fx\,dx\right)$ il limite inferiore dei valori di S'; « *integrale inferiore* il limite superiore dei valori di S_1, e lo si indica con « $\underline{\int_a^b} fx\,dx$. Se gli integrali superiore e inferiore coincidono, la funzione si « dice integrabile, e il loro valore comune dicesi $\int_a^b fx\,dx$. »

Così il limite verso cui tende una funzione è completamente sostituito, nella definizione dell'integrale, dai limiti superiori e inferiori di classi.

Dimostrazione algebrica del teorema di Weierstrass sulle forme bilineari.

(*Del dott.* Benedetto Calò, *a Torino.*)

1. Si abbiano due forme bilineari f, f' nelle due serie di variabili $x_1, x_2, \dots x_n;\ y_1, y_2, \dots y_n$:

$$f = \sum_{ik} a_{ik} x_i y_k, \qquad f' = \sum_{ik} a'_{ik} x_i y_k \qquad \left(\begin{matrix} i \\ k \end{matrix} = 1,\ 2, \dots n\right);$$

diremo ch'esse sono *equivalenti* respettivamente alle due forme:

$$F = \sum_{ik} b_{ik} X_i Y_k, \qquad F' = \sum_{ik} b'_{ik} X_i Y_k \qquad \left(\begin{matrix} i \\ k \end{matrix} = 1,\ 2, \dots n\right),$$

formate con altre due serie di variabili $X_1, X_2, \dots X_n;\ Y_1, Y_2, \dots Y_n$, se è possibile passare dalle f, f' respettivamente alle F, F', passando dalle due serie di variabili $x_1, x_2, \dots x_n;\ y_1, y_2, \dots y_n$ alle altre due $X_1, X_2, \dots X_n;$ $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ respettivamente, con sostituzioni lineari di modulo diverso da zero.

2. Il determinante (*) $D = |a_{ik} - r a'_{ik}|$ eguagliato a zero darà un'equazione del grado n in r, se supponiamo che non si annulli qualunque sia r, il qual caso escluderemo sempre.

Consideriamo una radice r_1 di questa equazione; se supponiamo che essa annulli D con una certa molteplicità l, tutti i minori di ordine $n-1$ con una molteplicità l_1, ecc., tutti i minori di ordine $n-p$ con una molteplicità l_p; ma non annulli tutti i minori di ordine $n-p-1$, diremo, secondo un'espressione in uso, ch'essa rende il determinante D di *caratteristica* $n-p-1$;

(*) Indicheremo in generale con $|m_{ik}|$ il determinante di ordine n in cui m_{ik} è l'elemento generico situato nella linea i^{esima} e nella colonna s^{esima}.

poichè la derivata rispetto ad r di un qualunque determinante estratto da D è una somma di determinanti di ordine immediatamente inferiore moltiplicati respettivamente per elementi del determinante $|a'_{ik}|$, avremo:

$$l_1 < l, \qquad l_2 < l_1, \ldots \qquad l_p < l_{p-1}, \qquad 0 < l_p.$$

Posto allora:

$$l - l_1 = e_1, \qquad l_1 - l_2 = e_2, \ldots \qquad l_{p-1} - l_p = e_p, \qquad l_p = e_{p+1},$$

avremo:

$$(r - r_1)^l = (r - r_1)^{e_1} (r - r_1)^{e_2} \ldots (r - r_1)^{e_{p+1}}.$$

Quindi il determinante D conterrà come fattori:

$$(r - r_1)^{e_1}, \qquad (r - r_1)^{e_2}, \ldots \qquad (r - r_1)^{e_{p+1}},$$

che si diranno i *divisori elementari* di D relativi alla radice r_1; operando nello stesso modo su tutte le radici distinte di $D = 0$, avremo che D si potrà esprimere come un prodotto di un fattore costante per tutti i gruppi di divisori elementari corrispondenti a queste diverse radici.

3. L'importanza di questa decomposizione del determinante:

$$D = | a_{ik} - r a'_{ik} |,$$

è stata messa in rilievo dal WEIERSTRASS colla dimostrazione del seguente teorema (*):

« La condizione necessaria e sufficiente, perchè la coppia di forme bilineari:

$$f = \sum_{ik} a_{ik} x_i y_k, \qquad f' = \sum_{ik} a'_{ik} x_i y_k,$$

sia equivalente (v. § 1) all'altra coppia:

$$F = \sum_{ik} b_{ik} X_i Y_k, \qquad F' = \sum_{ik} b'_{ik} X_i Y_k,$$

è che i due determinanti:

$$|a_{ik} - r a'_{ik}|, \qquad |b_{ik} - r b'_{ik}|,$$

coincidano nei loro divisori elementari. »

Che la condizione ora espressa sia necessaria, risulta evidente. Infatti se colle sostituzioni:

$$x_s = \sum_t \lambda_{ts} X_t, \qquad y_s = \sum_t \mu_{ts} Y_t \qquad \left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix} = 1, 2, \ldots n\right),$$

(*) K. WEIERSTRASS, *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* (Monatsb. der K. Akad. der W. zu Berlin, 18 Mai 1868).

di moduli:

$$|\lambda_{ts}| \gtrless 0, \qquad |\mu_{ts}| \gtrless 0,$$

le due forme f, f' si trasformano respettivamente nelle altre F, F', fra gli elementi dei determinanti:

$$|a_{ik} - r a'_{ik}|, \qquad |b_{ik} - r b'_{ik}|, \qquad |\lambda_{ts}|, \qquad |\mu_{ts}|,$$

avranno luogo le n^2 relazioni:

$$b_{tp} - r b'_{tp} = \sum_{ik} (a_{ik} - r a'_{ik}) \lambda_{ti} \mu_{pk} \qquad \left\{ \begin{matrix} t \\ p \end{matrix} \right. = 1, 2, \ldots n;$$

quindi i minori di ordine $n - h$ del determinante $|b_{ik} - r b'_{ik}|$, essendo $0 \leqq h < n$, si esprimeranno come somme di termini, ciascuno dei quali è un prodotto di tre fattori, cioè un prodotto di tre determinanti di ordine $n - h$ estratti respettivamente da:

$$|a_{ik} - r a'_{ik}|, \qquad |\lambda_{ts}|, \qquad |\mu_{ts}|;$$

ne segue che se r_1 annulla colla molteplicità l_h tutti i suddeterminanti di ordine di $n - h$ di $|a_{ik} - r a'_{ik}|$, essa annullerà tutti i suddeterminanti di ordine $n - h$ di $|b_{ik} - r b'_{ik}|$ colla molteplicità $l'_h \geqq l_h$. Ora poichè la relazione di equivalenza tra le due coppie di forme f, f'; F, F' è perfettamente reciproca, sarà ancora $l_h \geqq l'_h$, e perciò $l_h = l'_h$, ossia i determinanti:

$$|a_{ik} - r a'_{ik}|, \qquad |b_{ik} - r b'_{ik}|,$$

coincidono nei loro divisori elementari; segue da tale coincidenza che un qualunque valore attribuito ad r rende in questo caso i due determinanti di uguale caratteristica.

Per dimostrare che la condizione sopra espressa per l'equivalenza delle coppie di forme f, f'; F, F' è ancora sufficiente, Weierstrass ricorre a sviluppi in serie, cioè ad un processo di carattere trascendente, che, data la natura essenzialmente algebrica del teorema, non sembra il più naturale e spontaneo. Il Segre ad il Predella si sono occupati dell'interpretazione geometrica del teorema stesso, cioè della classificazione delle omografie negli spazi ad n dimensioni (*); ed il Predella, mentre giunge ad una classificazione completa di queste omografie, dimostra il teorema di Weierstrass con metodo

(*) Segre C., *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (Mem. della R. Accad. dei Lincei. Roma, 1884). — Predella P. *Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni* (Annali di Matematica, tom. 17, serie 2.ª Milano, 1889-1890).

geometrico limitandosi al caso che i determinanti dei coefficienti nelle forme considerate siano diversi da zero. Ci proponiamo di dare qui una dimostrazione completa e puramente algebrica del teorema di WEIERSTRASS (*).

4. Partiamo dunque dall'ipotesi che i due determinanti:

$$|a_{ik} - r\,a'_{ik}|, \qquad |b_{ik} - r\,b'_{ik}|,$$

abbiano gli stessi divisori elementari, e dovremo dedurne l'equivalenza delle due coppie di forme f, f', F, F'.

Osserviamo intanto che potremo limitarci a considerare il caso in cui i determinanti $|a_{ik}|$, $|a'_{ik}|$ e quindi anche $|b_{ik}|$, $|b'_{ik}|$ siano diversi da zero; ed infatti, nel caso contrario, si potrebbero determinare due numeri α, β diversi tra loro, tali che fosse:

$$|a_{ik} - \alpha\,a'_{ik}| \neq 0, \qquad |a_{ik} - \beta\,a'_{ik}| \neq 0,$$

e quindi anche:

$$|b_{ik} - \alpha\,b'_{ik}| \neq 0, \qquad |b_{ik} - \beta\,b'_{ik}| \neq 0.$$

Ciò posto, se in luogo delle coppie di forme date f, f'; F, F', consideriamo le altre:

$$f_1 = \sum_{ik}(a_{ik} - \alpha\,a'_{ik})\,x_i\,y_k, \qquad f'_1 = \sum_{ik}(a_{ik} - \beta\,a'_{ik})\,x_i\,y_k$$

$$F_1 = \sum_{ik}(b_{ik} - \alpha\,b'_{ik})\,X_i\,Y_k, \qquad F'_1 = \sum_{ik}(b_{ik} - \beta\,b'_{ik})\,X_i\,Y_k,$$

avremo che se i due determinanti:

$$|a_{ik} - r\,a'_{ik}|, \qquad |b_{ik} - r\,b'_{ik}|,$$

hanno gli stessi divisori elementari, anche gli altri due determinanti:

$$|a_{ik} - \alpha\,a'_{ik} - r(a_{ik} - \beta\,a'_{ik})|, \qquad |b_{ik} - \alpha\,b'_{ik} - r(b_{ik} - \beta\,b'_{ik})|,$$

avranno gli stessi divisori elementari; di più, dimostrata l'equivalenza delle due coppie di forme f_1, f'_1; F_1, F'_1, ne resulterà dimostrata l'equivalenza delle due coppie date f, f'; F, F', poichè si ha:

$$f \equiv \frac{1}{\beta - \alpha}(\beta f_1 - \alpha f'_1), \qquad f' \equiv \frac{1}{\beta - \alpha}(f_1 - f'_1)$$

$$F \equiv \frac{1}{\beta - \alpha}(\beta F_1 - \alpha F'_1), \qquad F' \equiv \frac{1}{\beta - \alpha}(F_1 - F'_1).$$

(*) Anche il SAUVAGE (vedi Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure. Paris, 1891), esponendo la teoria dei divisori elementari, ha dato del teorema che ci preoccupa una dimostrazione ottenuta generalizzando quella data da DARBOUX per le coppie di forme quadratiche; quella che presentiamo qui ci sembra degna di nota per il processo più diretto e più semplice col quale è ottenuta.

5. Ad ogni sistema di valori $x_1, x_2, \ldots x_n$ delle variabili x si può coordinare un altro sistema di valori $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ delle stesse variabili, fissando che questi due sistemi sostituiti respettivamente nelle forme f, f' in luogo delle x rendano $f = f'$ identicamente, cioè per qualunque sistema di valori attribuiti alle variabili y; così fra i sistemi di valori delle variabili x resterà definita una corrispondenza di sistema a sistema, espressa dalle n relazioni:

$$\sum_i a_{ik} x_i = \sum_i a'_{ik} x'_i \qquad (k = 1, 2, \ldots n); \tag{1}$$

analogamente consideriamo fra i sistemi di valori delle variabili X la corrispondenza di sistema a sistema espressa dalle n relazioni:

$$\sum_i b_{ik} X_i = \sum_i b'_{ik} X'_i \qquad (k = 1, 2, \ldots n). \tag{2}$$

Ora sulle relazioni (1) osserviamo che se con una sostituzione lineare di modulo diverso da zero si cambiano le x in altre variabili z, si avrà ancora fra i sistemi di valori delle variabili z una corrispondenza definita da certe relazioni:

$$\sum_i A_{ik} z_i = \sum_i A'_{ik} z'_i \qquad (k = 1, 2, \ldots n),$$

trasformate delle (1); ed il determinante $|A_{ik} - r A'_{ik}|$ avrà gli stessi divisori elementari di $|a_{ik} - r a'_{ik}|$, infatti (v. § 3) per quella sostituzione le due forme:

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i y_k, \qquad \sum_{ik} a'_{ik} x_i y_k,$$

si trasformano respettivamente in

$$\sum_{ik} A_{ik} z_i y_k, \qquad \sum_{ik} A'_{ik} z_i y_k.$$

Osserviamo inoltre che se delle (1) formiamo n combinazioni lineari col moltiplicare per dei coefficienti q_{sk} e sommare rispetto a k, si otterranno altre n equazioni:

$$\sum_i B_{is} x_i = \sum_i B'_{is} x'_i \qquad (s = 1, 2, \ldots n); \tag{1'}$$

e se le q_{sk} son tali che il loro determinante sia $\neq 0$, anche i determinanti $|B_{is}|$, $|B'_{is}|$ risulteranno diversi da zero e le (1') si potranno considerare come equivalenti alle (1) in quanto esprimono fra i sistemi di valori delle variabili x la stessa corrispondenza espressa dalle (1); ora notiamo che il determinante $|B_{is} - r B'_{is}|$ conserverà ancora gli stessi divisori elementari di $|a_{ik} - r a'_{ik}|$: infatti, abbiamo per ipotesi:

$$\left\{ \begin{aligned} B_{is} &= \sum_k q_{sk} a_{ik}, \qquad B'_{is} = \sum_k q_{sk} a'_{ik} \\ B_{is} - r B'_{is} &= \sum_k q_{sk} (a_{ik} - r a'_{ik}) \qquad (i, s = 1, 2, \ldots n), \end{aligned} \right.$$

quindi ogni suddeterminante di ordine $n-h$ $(0 \leq h \leq n-1)$ estratto da $|B_{is}-rB'_{is}|$ sarà un aggregato di termini, di cui ciascuno è un prodotto di due fattori, cioè di due determinanti di ordine $n-h$ estratti respettivamente da $|a_{ik}-ra'_{ik}|$, $|q_{sk}|$; perciò se r_1 annulla colla moltiplicità l_h tutti i suddeterminanti di ordine $n-h$ di $|a_{ik}-ra'_{ik}|$, essa annullerà tutti i suddeterminanti di ordine $n-h$ di $|B_{is}-rB'_{is}|$ con molteplicità $l'_h \geqq l_h$; ora ritornando dalle (1') alle (1) coll'invertire le considerazioni precedenti, si avrà ancora $l_h \geqq l'_h$, e quindi $l_h = l'_h$, ossia i due determinanti:

$$|B_{is}-rB'_{is}|, \qquad |a_{ik}-ra'_{ik}|,$$

hanno gli stessi divisori elementari; e perciò un qualunque valore di r rende i due determinanti di eguale caratteristica.

Analoghe osservazioni si possono ripetere per le (2); in particolare potremo risolvere le (1) rispetto ad $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$, e le (2) rispetto ad $X'_1, X'_2, \ldots X'_n$, ed avremo:

$$x'_k = \sum_i m_{ik} x_i \tag{3}$$

$$X'_k = \sum_i p_{ik} X'_i, \tag{4}$$

avendo i due determinanti:

$$D_n(m, r) = \begin{vmatrix} m_{11}-r, \ldots & m_{n1} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ m_{1n}, \ldots & m_{nn}-r \end{vmatrix}, \tag{5}$$

$$D_n(p, r) = \begin{vmatrix} p_{11}-r, \ldots & p_{n1} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ p_{1n}, \ldots & p_{nn}-r \end{vmatrix}, \tag{6}$$

gli stessi divisori elementari che:

$$|a_{ik}-ra'_{ik}|, \qquad |b_{ik}-rb'_{ik}|.$$

6. Ora dimostriamo che se esiste una sostituzione di modulo $\neq 0$ delle x nelle X:

$$x_k = \sum_i d_{ik} X_i \qquad (k = 1, 2, \ldots n), \tag{7}$$

che trasformi le relazioni (1) in altre relazioni:

$$\sum_i c_{ik} X_i = \sum_i c'_{ik} X_i \qquad (k = 1, 2, \ldots n), \tag{8}$$

esprimenti fra i sistemi di valori delle X la stessa corrispondenza che le (2), le forme f, f' sono equivalenti respettivamente alle F, F', cioè si può determinare una sostituzione delle y nelle Y di modulo diverso da zero, che, insieme colla sostituzione (7) delle x nelle X, trasforma le forme f, f' respettivamente nelle F, F'.

Ed infatti per le (1), (2) avremo:

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i y_k = \sum_{ik} a'_{ik} x'_i y_k \tag{9}$$

$$\sum_{ik} b_{ik} X_i Y_k = \sum_{ik} b'_{ik} X'_i Y_k, \tag{9'}$$

relazioni che varranno per ogni sistema delle y_k o delle Y_k respettivamente.

Ora per la sostituzione (7) che trasforma le (1) nelle (8), le forme f, f' si trasformeranno respettivamente in altre due forme:

$$\varphi = \sum_{ik} c_{ik} X_i y_k, \qquad \varphi' = \sum_{ik} c'_{ik} X_i y_k,$$

e per le (8) avremo:

$$\sum_{ik} c_{ik} X_i y_k = \sum_{ik} c'_{ik} X'_i y_k, \tag{10}$$

per qualunque sistema di valori delle y_k.

Ora passiamo dalle y alle Y colla sostituzione:

$$\sum_k c_{ik} y_k = \sum_k b_{ik} Y_k; \tag{11}$$

questa sarà di modulo diverso da zero, poichè $|b_{ik}| \neq 0$ per ipotesi, ed anche $|c_{ik}| \neq 0$, poichè dalle (1) siamo passati alle (8) colla sostituzione (7) di modulo diverso da zero (v. paragrafo precedente).

Per la sostituzione (11) la forma φ si trasforma nella forma F, cioè il primo membro della (10) si trasforma nel primo membro della (9'); quindi anche il secondo membro della (10) si dovrà trasformare nel secondo membro della (9'), valendo le relazioni (9'), (10) per qualunque sistema di valori delle Y, y respettivamente. Ne segue che per la sostituzione (11) l'espressione $\sum_k c'_{ik} y_k$ si dovrà trasformare nell'espressione $\sum_k b'_{ik} Y_k$ e perciò la forma φ' si trasformerà per la sostituzione (11) nella F'; dunque eseguendo successivamente le due sostituzioni (7), (11) le forme f, f' si trasformano nelle F, F', come volevasi dimostrare. Potremo dunque limitarci a dimostrare che esiste una sostituzione delle x nelle X che trasforma la corrispondenza (1) nella corrispondenza (2), ossia le relazioni (3) nelle relazioni (4), quando si tenga conto che i due determinanti $D_n(m, r)$, $D_n(p, r)$ dati dalle formole (5), (6) hanno gli stessi divisori elementari.

7. Principiamo a trasformare con sostituzioni di modulo diverso da zero le relazioni (3), (4) in altre relazioni della stessa forma fra le nuove variabili, ma in cui i due determinanti analoghi a $D_n(m, r)$, $D_n(p, r)$ hanno una certa forma ridotta, per quanto debbano conservare, come sappiamo, gli stessi divisori elementari, ed avere quindi per ogni valore di r la stessa caratteristica. Sia r_1 una radice dell'equazione $D_n(m, r) = 0$ che renda il determinante $D_n(m, r)$ di caratteristica $n - h_1 = l_1$ $(h_1 \geqq 1)$; con una sostituzione sulle x di modulo diverso da zero:

$$x_k = \sum_i c_{ik} z_i \qquad (k = 1, 2, \ldots n),$$

potremo trasformare le relazioni (3) in altre relazioni della stessa forma:

$$z'_k = \sum_i M_{ik} z_i \qquad (k = 1, 2, \ldots n), \tag{12}$$

ma in cui il determinante $D_n(M, r_1)$ ottenuto da $D_n(M, r)$ sostituendo ad r il valore r_1, abbia nulli gli elementi delle ultime h_1 colonne (*); perciò basta scegliere le:

$$c_{p1}, \quad c_{p2}, \ldots \quad c_{pn} \qquad (p = l_1 + 1, \ l_1 + 2, \ldots n),$$

in modo che soddisfino alle equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_{11} - r_1) c_{p1} + \cdots + m_{n1} c_{pn} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad m_{1n} c_{p1} + \cdots + (m_{nn} - r_1) c_{pn} = 0 \end{array} \right. \qquad (p = l_1 + 1, \ l_1 + 2, \ldots n);$$

delle quali solo l_1 saranno indipendenti per ogni valore di p, poichè il determinante dei coefficienti è $D_n(m, r_1)$ che è di caratteristica l_1. Tutte le altre c rimarranno arbitrarie; di più fra le $c_{p1}, \ldots c_{pn}$, ne rimarranno arbitrarie $n - l_1 = h_1$ per ogni valore di p; ne resulta la possibilità della sostituzione richiesta. Supposta questa effettuata, saremo passati dalle (3) alle (12)

(*) Notiamo che questa trasformazione consterà di due operazioni successive, cioè sostituzione delle variabili z alle variabili x e risoluzione delle equazioni trasformate rispetto alle z'; operazioni che non avranno influenza sui divisori elementari (v. § 5).

ed avremo:

$$D_n(M,\ r) = (r_1 - r)^{h_1} \begin{vmatrix} M_{11} - r, \dots & M_{l_1 1} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ M_{1l_1}, \dots & M_{l_1 l_1} - r \end{vmatrix} = (r_1 - r)^{h_1} D_{l_1}(M,\ r),$$

ove abbiamo indicato con $D_{l_1}(M,\ r)$ il determinante di ordine l_1 nel quale s'incrociano le prime l_1 linee e colonne del determinante $D_n(M,\ r)$; ed osserviamo che $D_n(M,\ r)$ avrà gli stessi divisori elementari che $D_n(m,\ r)$ e quindi per $r = r_1$ si ridurrà ancora di caratteristica $n - h_1 = l_1$. Sia ora r_2 una radice di $D_{l_1}(M,\ r) = 0$, che rende il determinante $D_{l_1}(M,\ r)$ di caratteristica $l_1 - h_2 = l_2$ $(l_1 \geqq h_2 \geqq 1)$; con una sostituzione sulle sole $z_1, z_2, \dots z_{l_1}$ di modulo diverso da zero e quindi con una sostituzione sulle $z_1, z_2, \dots z_n$ di modulo $\neq 0$, potremo trasformare le relazioni (12) in altre relazioni della stessa forma:

$$u'_k = \sum_i N_{ik} u_i \qquad (k = 1,\ 2, \dots\ n); \tag{13}$$

ma in cui il determinante $D_{l_1}(N,\ r_2)$ ottenuto da $D_{l_1}(N,\ r)$ facendo $r = r_2$, abbia nulli gli elementi delle ultime h_2 colonne, mentre $D_n(N,\ r_1)$ ha ancora nulli tutti gli elementi delle ultime h_1 colonne. Avremo allora:

$$D_n(N,\ r) = (r_1 - r)^{h_1} (r_2 - r)^{h_2} \begin{vmatrix} N_{11} - r, \dots & N_{l_2 1} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ N_{1l_2}, \dots & N_{l_2 l_2} - r \end{vmatrix} =$$

$$= (r_1 - r)^{h_1} (r_2 - r)^{h_2} D_{l_2}(N,\ r),$$

ove abbiamo indicato con $D_{l_2}(N,\ r)$ il determinante di ordine l_2 nel quale s'incrociano le prime l_2 linee e colonne del determinante $D_n(N,\ r)$. Sia ora r_3 una radice di $D_{l_2}(N,\ r) = 0$, che renda il determinante $D_{l_2}(N,\ r)$ di caratteristica $l_2 - h_3 = l_3$; con una sostituzione sulle sole $u_1, u_2, \dots u_{l_2}$ di modulo $\neq 0$ e quindi con una sostituzione sulle $u_1, u_2, \dots u_n$ di modulo $\neq 0$ potremo trasformare le relazioni (13) in altre relazioni della stessa forma:

$$v'_k = \sum_i P_{ik} v_i \qquad (k = 1,\ 2, \dots\ n), \tag{14}$$

ma in cui il determinante $D_{l_2}(P,\ r_3)$, ottenuto da $D_{l_2}(P,\ r)$ facendo $r = r_3$, abbia nulli gli elementi delle ultime h_3 colonne, mentre $D_{l_1}(P,\ r_2)$ ha ancora nulli gli elementi delle ultime h_2 colonne, e $D_n(P,\ r_1)$ ha ancora nulli gli elementi delle ultime h_1 colonne. Avremo allora:

$$D_n(P,\ r) = (r_1 - r)^{h_1}(r_2 - r)^{h_2}(r_3 - r)^{h_3} \begin{vmatrix} P_{11} - r, \dots & P_{l_3 1} \\ \dots\dots\dots & \dots \\ P_{1 l_3}, \dots & P_{l_3 l_3} - r \end{vmatrix} =$$

$$= (r_1 - r)^{h_1}(r_2 - r)^{h_2}(r_3 - r)^{h_3} D_{l_3}(P,\ r),$$

ove abbiamo indicato con $D_{l_3}(P,\ r)$ il determinante di ordine l_3 nel quale s'incrociano le prime l_3 linee e colonne del determinante $D_n(P,\ r)$. Continuando nello stesso modo e con analoghe notazioni, con un numero finito $\sigma - 1$ di sostituzioni successive di modulo $\neq 0$ giungeremo infine a delle relazioni trasformate delle (3):

$$\eta'_k = \sum_i \alpha_{ik}\eta_i \qquad (k = 1,\ 2, \dots\ n), \tag{15}$$

ove il determinante $D_n(\alpha,\ r_1)$ ha nulli gli elementi delle ultime h_1 colonne, $D_{l_1}(\alpha,\ r_2)$ ha nulli gli elementi delle ultime h_2 colonne, ecc., $D_{l_{\sigma-2}}(\alpha,\ r_{\sigma-1})$ ha nulli gli elementi delle ultime $h_{\sigma-1}$ colonne, e $D_{l_{\sigma-1}}(\alpha,\ r)$ ha un'unica radice r_σ che lo rende di caratteristica zero; $D_{l_{\sigma-1}}(\alpha,\ r)$ dovrà avere la forma:

$$\begin{vmatrix} r_\sigma - r, \dots & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots \\ 0, \dots & r_\sigma - r \end{vmatrix},$$

ed avremo:

$$D_n(\alpha,\ r) = (r_1 - r)^{h_1}(r_2 - r)^{h_2}(r_3 - r)^{h_3} \dots (r_\sigma - r)^{h_\sigma}.$$

Quindi possiamo enunciare il seguente resultato:

« Con una sostituzione sulle x di modulo diverso da zero le relazioni (3) si possono trasformare in altre relazioni:

$$\eta'_k = \sum_i \alpha_{ik}\eta_i \qquad (k = 1,\ 2, \dots\ n), \tag{16}$$

della stessa forma, ma in cui il determinante $D_n(\alpha,\ r)$ ha la forma ridotta:

$$D_n(\alpha,\, r) =$$

$$= \left|\begin{array}{ccccccccccc}
r_\sigma - r & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0\ldots & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 \\
0 & r_\sigma - r\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0\ldots & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0\ldots & r_\sigma - r & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0\ldots & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 \\
\alpha_{1,l_{\sigma-1}+1} & \alpha_{2,l_{\sigma-1}+1}\ldots & \alpha_{l_{\sigma-1},l_{\sigma-1}+1} & r_{\sigma-1} - r\ldots & 0 & 0\ldots & 0\ldots & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_{1,l_{\sigma-2}} & \alpha_{2,l_{\sigma-2}}\ldots & \alpha_{l_{\sigma-1},l_{\sigma-2}} & 0\ldots & r_{\sigma-1} - r & 0\ldots & 0\ldots & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 \\
\alpha_{1,l_{\sigma-2}+1} & \alpha_{2,l_{\sigma-2}+1}\ldots & \alpha_{l_{\sigma-1},l_{\sigma-2}+1} & \alpha_{l_{\sigma-1}+1,l_{\sigma-2}+1}\ldots & \alpha_{l_{\sigma-2},l_{\sigma-2}+1} & r_{\sigma-2} - r\ldots & 0\ldots & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_{1,l_{\sigma-3}} & \alpha_{2,l_{\sigma-3}}\ldots & \alpha_{l_{\sigma-1},l_{\sigma-3}} & \alpha_{l_{\sigma-1}+1,l_{\sigma-3}}\ldots & \alpha_{l_{\sigma-2},l_{\sigma-3}} & 0\ldots & r_{\sigma-2} - r\ldots & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_{1,l_2+1} & \alpha_{2,l_2+1}\ldots & \alpha_{l_{\sigma-1},l_2+1} & \alpha_{l_{\sigma-1}+1,l_2+1}\ldots & \alpha_{l_{\sigma-2},l_2+1} & \alpha_{l_{\sigma-2}+1,l_2+1}\ldots & \alpha_{l_{\sigma-3},l_2+1}\ldots & r_2 - r\ldots & 0 & 0\ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_{1,l_1} & \alpha_{2,l_1}\ldots & \alpha_{l_{\sigma-1},l_1} & \alpha_{l_{\sigma-1}+1,l_1}\ldots & \alpha_{l_{\sigma-2},l_1} & \alpha_{l_{\sigma-2}+1,l_1}\ldots & \alpha_{l_{\sigma-3},l_1}\ldots & 0\ldots & r_2 - r & 0\ldots & 0 \\
\alpha_{1,l_1+1} & \alpha_{2,l_1+1}\ldots & \alpha_{l_{\sigma-1},l_1+1} & \alpha_{l_{\sigma-1}+1,l_1+1}\ldots & \alpha_{l_{\sigma-2},l_1+1} & \alpha_{l_{\sigma-2}+1,l_1+1}\ldots & \alpha_{l_{\sigma-3},l_1+1}\ldots & \alpha_{l_2+1,l_1+1}\ldots & \alpha_{l_1,l_1+1} & r_1 - r\ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_{1,n} & \alpha_{2,n}\ldots & \alpha_{l_{\sigma-1},n} & \alpha_{l_{\sigma-1}+1,n}\ldots & \alpha_{l_{\sigma-2},n} & \alpha_{l_{\sigma-2}+1,n}\ldots & \alpha_{l_{\sigma-3},n}\ldots & \alpha_{l_2+1,n}\ldots & \alpha_{l_1,n} & 0\ldots & r_1 - r
\end{array}\right|_n.$$

$D_n(\alpha,\, r)$ per $r = r_1$ si riduce di caratteristica l_1; $D_{l_1}(\alpha,\, r)$ per $r = r_2$ si riduce di caratteristica l_2; $D_{l_2}(\alpha,\, r)$ per $r = r_3$ si riduce di caratteristica l_3; ecc., $D_{l_{\sigma-2}}(\alpha,\, r)$ per $r = r_{\sigma-1}$ si riduce di caratteristica $l_{\sigma-1}$; $D_{l_{\sigma-1}}(\alpha,\, r)$ per $r = r_\sigma$ si riduce di caratteristica $l_\sigma = 0$ (*). Fra i numeri $l_1,\, l_2, \ldots\, l_\sigma$; $h_1,\, h_2, \ldots\, h_\sigma$ hanno luogo le relazioni:

$$l_1 = n - h_1, \qquad l_2 = l_1 - h_2, \qquad l_3 = l_2 - h_3, \ldots$$

$$l_{\sigma-1} = l_{\sigma-2} - h_{\sigma-1}, \qquad l_\sigma = l_{\sigma-1} - h_\sigma = 0,$$

quindi:

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_\sigma = n.$$

(*) Indichiamo ancora con $D_{l_s}(\alpha,\, r)$ il determinante in cui si incrociano le prime l_s linee e colonne di $D_n(\alpha,\, r)$.

Ora si posson subito determinare le relazioni (*) che passano fra gli esponenti dei divisori elementari di $D_n(\alpha, r)$ ed i numeri $h_1, h_2, \dots h_\sigma$. Perciò osserviamo che se fra le $r_1, r_2, \dots r_\sigma$ la r_p risulta differente da tutte le altre, essa sarà radice multipla dell'ordine h_p di $D_n(\alpha, r) = 0$ e renderà il determinante $D_n(\alpha, r)$ di caratteristica $n - h_p$, quindi annullerà $D_n(\alpha, r)$ colla molteplicità h_p, i suddeterminanti di ordine $n-1$ colla molteplicità $h_p - 1$, i suddeterminanti di ordine $n-2$ colla molteplicità $h_p - 2$ ecc. Onde i divisori elementari di $D_n(\alpha, r)$ corrispondenti alla radice r_p saranno in numero di h_p ed avranno gli esponenti:

$$\overbrace{1,\ 1, \dots 1}^{h_p};$$

quindi, se $r_1, r_2, \dots r_\sigma$ son tutte differenti tra loro, gli esponenti dei divisori elementari di $D_n(\alpha, r)$ si distribuiranno nei seguenti σ gruppi corrispondenti respettivamente ad $r_1, r_2, \dots r_\sigma$,

$$\overbrace{1,\ 1, \dots 1}^{h_1}, \quad \overbrace{1,\ 1, \dots 1}^{h_2}, \dots \quad \overbrace{1,\ 1, \dots 1}^{h_\sigma};$$

ora supponiamo che alcune delle $r_1, r_2, \dots r_\sigma$ siano tra loro eguali ed immaginiamo di averle ordinate successivamente nella trasformazione che abbiamo eseguita per passare dalle (3) alle (16); sia per es. $r_1 = r_2 = \cdots = r_p$; in luogo di questi numeri eguali poniamo in $D_n(\alpha, r)$ dei numeri differenti $a_1, a_2, \dots a_p$; il nuovo determinante avrà le radici $a_1, a_2, \dots a_p$ colle molteplicità respettive $h_1, h_2, \dots h_p$; i minori di ordine $n-1$ le avranno colle molteplicità respettive $h_1 - 1, h_2 - 1, \dots h_p - 1$; i minori d'ordine $n-2$ le avranno colle molteplicità respettive $h_1 - 2, h_2 - 2, \dots h_p - 2$; ecc.. Onde tornando a sostituire alle $a_1, a_2, \dots a_p$ l'unico valore r_1, evidentemente r_1 resulterà radice di $D_n(\alpha, r)$ colla molteplicità $h_1 + h_2 + \cdots + h_p$; dei minori di ordine $n-1$ colla molteplicità $h_1 - 1 + h_2 - 1 + \cdots + h_p - 1$; dei minori di ordine $n-2$ colla molteplicità $h_1 - 2 + h_2 - 2 + \cdots + h_p - 2$; ecc. Ora abbiamo che

$$h_1 \geqq h_2 \geqq h_3 \geqq \cdots \geqq h_p, \tag{A}$$

(*) Vedi PREDELLA, loco cit., pag. 155; la riduzione delle relazioni (3) alla forma normale (16) è stata utilizzata sotto un punto di vista geometrico dal SEGRE e dal PREDELLA nelle Memorie citate.

infatti per $r = r_1$ delle n linee del determinante $D_n(\alpha, r)$ sole h_1 risultano combinazione lineare di altre linee: delle prime l_1 linee sole h_2 risultano combinazione lineare di altre fra quelle l_1 linee; delle prime l_2 linee solo h_3 risultano combinazione lineare di altre fra quelle l_2 linee; ecc.

Se ora formiamo i divisori elementari di $D_n(\alpha, r)$ corrispondenti alla radice r_1, tenendo conto delle relazioni (A), avremo che essi saranno in numero di h_1, si distribuiranno in p gruppi ed avranno respettivamente gli esponenti:

$$\overbrace{p, p, \ldots p}^{h_p}, \quad \overbrace{p-1, p-1, \ldots p-1}^{h_{p-1} - h_p}, \quad \overbrace{p-2, p-2, \ldots p-2}^{h_{p-2} - h_{p-1}}, \ldots$$
$$\overbrace{1, 1, \ldots 1}^{h_1 - h_2}.$$

Ciò posto, operando sulle relazioni (4) come abbiamo fatto sulle (3) per trasformarle nelle (16), potremo con una sostituzione di modulo $\gtrless 0$ trasformare le (4) in altre relazioni della stessa forma:

$$H'_k = \sum_i \beta_{ik} H_k \qquad (k = 1, 2, \ldots n); \tag{17}$$

ma in cui il determinante $D_n(\beta, r)$ ha una forma ridotta analoga a quella ottenuta per $D_n(\alpha, r)$; ora poichè, per ipotesi, i due determinanti $D_n(m, r)$, $D_n(p, r)$ che si deducono dalle relazioni (3), (4) hanno gli stessi divisori elementari, considerando le radici di $D_n(p, r)$ nello stesso ordine $r_1, r_2, \ldots r_\sigma$ già considerato nel trasformare le relazioni (3) alla forma ridotta (16), dovremo trovare gli stessi numeri $h_1, h_2, \ldots h_\sigma$ e gli stessi numeri $l_1, l_2, \ldots l_\sigma$ e nello stesso ordine; perciò $D_n(\beta, r)$ avrà la forma seguente:

$$D_n(\beta,\ r) =$$

$$= \begin{vmatrix}
r_\sigma - r & 0\dots & 0 & 0\dots & 0 & 0\dots & 0\dots & 0\dots & 0 & 0\dots & 0 \\
0 & r_\sigma - r\dots & 0 & 0\dots & 0 & 0\dots & 0\dots & 0\dots & 0 & 0\dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0\dots & r_\sigma - r & 0\dots & 0 & 0\dots & 0\dots & 0\dots & 0 & 0\dots & 0 \\
\beta_{1,l_{\sigma-1}+1} & \beta_{2,l_{\sigma-1}+1}\dots & \beta_{l_{\sigma-1},l_{\sigma-1}+1} & r_{\sigma-1} - r\dots & 0 & 0\dots & 0\dots & 0\dots & 0 & 0\dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\beta_{1,l_{\sigma-2}} & \beta_{2,l_{\sigma-2}}\dots & \beta_{l_{\sigma-1},l_{\sigma-2}} & 0\dots & r_{\sigma-1} - r & 0.. & 0\dots & 0\dots & 0 & 0\dots & 0 \\
\beta_{1,l_{\sigma-2}+1} & \beta_{2,l_{\sigma-2}+1}\dots & \beta_{l_{\sigma-1},l_{\sigma-2}+1} & \beta_{l_{\sigma-1}+1,l_{\sigma-2}+1}\dots & \beta_{l_{\sigma-2},l_{\sigma-2}+1} & r_{\sigma-2} - r\dots & 0\dots & 0\dots & 0 & 0\dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\beta_{1,l_{\sigma-3}} & \beta_{2,l_{\sigma-3}}\dots & \beta_{l_{\sigma-1},l_{\sigma-3}} & \beta_{l_{\sigma-1}+1,l_{\sigma-3}}\dots & \beta_{l_{\sigma-2},l_{\sigma-3}} & 0\dots & r_{\sigma-2} - r\dots & 0\dots & 0 & 0\dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\beta_{1,l_2+1} & \beta_{2,l_2+1}\dots & \beta_{l_{\sigma-1},l_2+1} & \beta_{l_{\sigma-1}+1,l_2+1}\dots & \beta_{l_{\sigma-2},l_2+1} & \beta_{l_{\sigma-2}+1,l_2+1}\dots & \beta_{l_{\sigma-3},l_2+1}\dots & r_2 - r\dots & 0 & 0\dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\beta_{1,l_1} & \beta_{2,l_1}\dots & \beta_{l_{\sigma-1},l_1} & \beta_{l_{\sigma-1}+1,l_1}\dots & \beta_{l_{\sigma-2},l_1} & \beta_{l_{\sigma-2}+1,l_1}\dots & \beta_{l_{\sigma-3},l_1}\dots & 0\dots & r_2 - r & 0\dots & 0 \\
\beta_{1,l_1+1} & \beta_{2,l_1+1}\dots & \beta_{l_{\sigma-1},l_1+1} & \beta_{l_{\sigma-1}+1,l_1+1}\dots & \beta_{l_{\sigma-2},l_1+1} & \beta_{l_{\sigma-2}+1,l_1+1}\dots & \beta_{l_{\sigma-3},l_1+1}\dots & \beta_{l_2+1,l_1+1}\dots & \beta_{l_1,l_1+1} & r_1 - r\dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\beta_{1,n} & \beta_{2,n}\dots & \beta_{l_{\sigma-1},n} & \beta_{l_{\sigma-1}+1,n}\dots & \beta_{l_{\sigma-2},n} & \beta_{l_{\sigma-2}+1,n}\dots & \beta_{l_{\sigma-3},n}\dots & \beta_{l_2+1,n}\dots & \beta_{l_1,n} & 0\dots & r_1 - r
\end{vmatrix}$$

che differisce da quella di $D_n(\alpha,\ r)$ solo in quanto gli elementi α son sostituiti da altri elementi β. Basterà dunque limitarci a provare l'esistenza di una sostituzione di modulo $\neq 0$ che trasforma le relazioni (16) nelle (17), perchè da questa potremo risalire ad una sostituzione che trasforma le relazioni (3) nelle (4) e quindi la corrispondenza (1) nella (2).

8. Ora possiamo scrivere tanto le relazioni (16) come le (17) distinguendole in σ gruppi nel modo seguente:

$$\left.\begin{array}{ll}
\eta'_k = r_\sigma \eta_k, & (k = 1,\ 2, \dots\ l_{\sigma-1}) \\
\eta'_k = \alpha_{1k}\eta_1 + \cdots + \alpha_{l_{\sigma-1},k}\eta_{l_{\sigma-1}} + r_{\sigma-1}\eta_k, & (k = l_{\sigma-1} + 1,\ l_{\sigma-1} + 2, \dots\ l_{\sigma-2}) \\
\eta'_k = \alpha_{1k}\eta_1 + \cdots + \alpha_{l_{\sigma-2},k}\eta_{l_{\sigma-2}} + r_{\sigma-2}\eta_k, & (k = l_{\sigma-2} + 1,\ l_{\sigma-2} + 2, \dots\ l_{\sigma-3}) \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\eta'_k = \alpha_{1k}\eta_1 + \cdots + \alpha_{l_1,k}\eta_{l_1} + r_1\eta_k, & (k = l_1 + 1,\ l_1 + 2, \dots\ n)
\end{array}\right\} \quad (18)$$

$$\left.\begin{array}{ll} H'_k = r_\sigma H_k, & (k = 1,\ 2,\dots\ l_{\sigma-1}) \\ H'_k = \beta_{1k} H_1 + \cdots + \beta_{l_{\sigma-1},k} H_{l_{\sigma-1}} + r_{\sigma-1} H_k, & (k = l_{\sigma-1}+1,\ l_{\sigma-1}+2,\dots\ l_{\sigma-2}) \\ H'_k = \beta_{1k} H_1 + \cdots + \beta_{l_{\sigma-2},k} H_{l_{\sigma-2}} + r_{\sigma-2} H_k, & (k = l_{\sigma-2}+1,\ l_{\sigma-2}+2,\dots\ l_{\sigma-3}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ H'_k = \beta_{1k} H_1 + \cdots + \beta_{l_1,k} H_{l_1} + r_1 H_k, & (k = l_1+1,\ l_1+2,\dots\ n). \end{array}\right\} \quad (19)$$

Con una prima sostituzione di modulo $\gtrless 0$ sulle η della forma seguente:

$$\eta_k = \sum_1^{l_{\sigma-1}} {}_i c_{ik} H_i \qquad (k = 1,\ 2,\dots\ l_{\sigma-1}), \tag{20}$$

otterremo intanto che il primo gruppo dell'equazioni (18) si trasformi nel primo gruppo delle (19); i coefficienti c che sono k^2_σ potranno essere arbitrarii, purchè il loro determinante C_1 sia $\gtrless 0$. Questa sostituzione trasformerà le (18) in altre relazioni:

$$\left.\begin{array}{ll} H'_k = r_\sigma H_k & (k = 1,\ 2,\dots\ l_{\sigma-1}) \\ \eta'_k = \alpha'_{1k} H_1 + \cdots + \alpha'_{l_{\sigma-1},k} H_{l_{\sigma-1}} + r_{\sigma-1}\eta_k & (k = l_{\sigma-1}+1,\dots\ l_{\sigma-2}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} (18')$$

della stessa forma delle (18), ed il determinante $D_n(\alpha', r)$ corrispondente alle (18') avrà ancora la forma ridotta. Eseguiamo ora sulle attuali variabili $H_1,\dots\ H_{l_{\sigma-1}},\ \eta_{l_{\sigma-1}+1},\dots\ \eta_{l_{\sigma-2}},\dots\ \eta_n$ una seconda sostituzione che operi solo sulle $\eta_{l_{\sigma-1}+1},\dots\ \eta_{l_{\sigma-2}}$ e della forma seguente:

$$\eta_k = \sum_1^{l_{\sigma-2}} {}_i c_{ik} H_i \qquad (k = l_{\sigma-1}+1,\dots\ l_{\sigma-2}); \tag{21}$$

il modulo di una tale sostituzione sarà:

$$C_2 = \begin{vmatrix} c_{l_{\sigma-1}+1,\,l_{\sigma-1}+1},\dots & c_{l_{\sigma-2},\,l_{\sigma-1}+1} \\ \dots\dots\dots\dots & , \\ c_{l_{\sigma-1}+1,\,l_{\sigma-2}},\dots & c_{l_{\sigma-2},\,l_{\sigma-2}} \end{vmatrix};$$

vediamo se è possibile determinare le c in modo che questo determinante sia diverso da zero e la sostituzione (21) trasformi il secondo gruppo delle relazioni (18') nel secondo gruppo delle (19). Supposto possibile effettuare tale sostituzione, dall'ultima delle due condizioni ora espresse è facile dedurre che le quantità c dovranno soddisfare alle equazioni:

$$\left.\begin{array}{l}(r_\sigma - r_{\sigma-1})c_{1k} + \beta_{1,l_{\sigma-1}+1}c_{l_{\sigma-1}+1,k} + \cdots + \beta_{1l_{\sigma-2}}c_{l_{\sigma-2},k} = \alpha'_{1k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (r_\sigma - r_{\sigma-1})c_{l_{\sigma-1},k} + \beta_{l_{\sigma-1},l_{\sigma-1}+1}c_{l_{\sigma-1}+1,k} + \cdots + \beta_{l_{\sigma-1},l_{\sigma-2}}c_{l_{\sigma-2},k} = \alpha'_{l_{\sigma-1},k}\end{array}\right\} \quad (22)$$

$$(k = l_{\sigma-1}+1,\ l_{\sigma-1}+2, \ldots\ l_{\sigma-2}),$$

ed inversamente se le c verificano queste equazioni ed il determinante C_2 è diverso da zero, si deduce risolvendo l'equazioni precedenti rispetto alle β che colla sostituzione (21) si ottiene la trasformazione voluta. Ora osserviamo che il determinante $D_{l_{\sigma-2}}(\beta, r_{\sigma-1})$, ottenuto da $D_{l_{\sigma-2}}(\beta, r)$ facendo $r = r_{\sigma-1}$, è di caratteristica $l_{\sigma-1}$, quindi tenendo conto che la matrice dei coefficienti delle incognite c nell'equazioni (22) (per ciascun valore di k) ha appunto per linee le prime $l_{\sigma-1}$ colonne del determinante $D_{l_{\sigma-2}}(\beta, r_{\sigma-1})$, si conclude che queste equazioni sono tutte indipendenti fra loro, e perciò delle c ne rimarranno arbitrarie $l_{\sigma-2} - l_{\sigma-1} = h_{\sigma-1}$ per ciascun valore di k, e quindi in totale ne rimarranno arbitrarie $h^2_{\sigma-1}$. Ora ci si può valere di tale arbitrarietà facendo sì che il determinante C_2 risulti diverso da zero; ed infatti, se $r_\sigma \neq r_{\sigma-1}$ sono appunto gli elementi di questo determinante che si possono scegliere arbitrariamente, mentre le rimanenti c si possono determinare in seguito dalle (22). Se poi $r_\sigma = r_{\sigma-1}$ le (22) assumono la forma:

$$\left.\begin{array}{l}\beta_{1,l_{\sigma-1}+1}c_{l_{\sigma-1}+1,k} + \cdots + \beta_{1,l_{\sigma-2}}c_{l_{\sigma-2},k} = \alpha'_{1k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_{l_{\sigma-1},l_{\sigma-1}+1}c_{l_{\sigma-1}+1,k} + \cdots + \beta_{l_{\sigma-1},l_{\sigma-2}}c_{l_{\sigma-2},k} = \alpha'_{l_{\sigma-1},k}\end{array}\right\} \quad (22')$$

$$(k = l_{\sigma-1}+1,\ l_{\sigma-1}+2, \ldots\ l_{\sigma-2});$$

ed in questo caso (v. § 7) abbiamo $h_{\sigma-1} \geqq h_\sigma$; ora notiamo che i determinanti:

$$D_{l_{\sigma-2}}(\beta, r_{\sigma-1}), \qquad D_{l_{\sigma-2}}(\alpha', r_{\sigma-1}),$$

sono ambedue di caratteristica $l_{\sigma-1} = h_\sigma$; quindi le due matrici:

$$(B) \equiv \left\|\begin{array}{ccc}\beta_{1,l_{\sigma-1}+1}, \ldots & & \beta_{1,l_{\sigma-2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{l_{\sigma-1},l_{\sigma-1}+1}, \ldots & & \beta_{l_{\sigma-1},l_{\sigma-2}}\end{array}\right\|, \qquad (A') \equiv \left|\begin{array}{ccc}\alpha'_{1,l_{\sigma-1}+1}, \ldots & & \alpha'_{1,l_{\sigma-2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha'_{l_{\sigma-1},l_{\sigma-1}+1}, \ldots & & \alpha'_{l_{\sigma-1},l_{\sigma-2}}\end{array}\right|,$$

sono parimente di caratteristica $l_{\sigma-1} = h_\sigma$, quindi le (22') sono ancora fra loro indipendenti, e delle $h_{\sigma-1}$ incognite c che vi compariscono (per ogni singolo valore di k), ne rimarranno arbitrarie $h_{\sigma-1} - h_\sigma$; senza venir meno alla generalità, potremo supporre che siano le ultime, cioè:

$$c_{2l_{\sigma-1}+1,k},\quad c_{2l_{\sigma-1}+2,k},\dots\quad c_{l_{\sigma-2},k}\qquad (k = l_{\sigma-1}+1,\ l_{\sigma-1}+2,\dots\ l_{\sigma-2}),\qquad c)$$

e questo equivale a supporre che nella matrice (B) il determinante di ordine $l_{\sigma-1}$ formato dalle prime $l_{\sigma-1}$ colonne sia $\neq 0$

$$B = \begin{vmatrix} \beta_{1,l_{\sigma-1}+1},\dots & \beta_{1,2l_{\sigma-1}} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \beta_{l_{\sigma-1},l_{\sigma-1}+1},\dots & \beta_{l_{\sigma-1},2l_{\sigma-1}} \end{vmatrix} \neq 0;$$

ora scegliamo le arbitrarie $c)$ in modo che il determinante di ordine $h_{\sigma-1}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha'_{1,l_{\sigma-1}+1},\dots & \alpha'_{1,l_{\sigma-2}} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \alpha'_{l_{\sigma-1},l_{\sigma-1}+1},\dots & \alpha'_{l_{\sigma-1},l_{\sigma-2}} \\ c_{2l_{\sigma-1}+1,l_{\sigma-1}+1},\dots & c_{2l_{\sigma-1}+1,l_{\sigma-2}} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ c_{l_{\sigma-2},l_{\sigma-1}+1},\dots & c_{l_{\sigma-2},l_{\sigma-2}} \end{vmatrix},$$

sia diverso da zero; ciò evidentemente si può fare, perchè le prime $l_{\sigma-1}$ linee costituiscono appunto la matrice (A') e sono perciò linearmente indipendenti. Allora è chiaro che C_2 dovrà risultare diverso da zero; infatti le (22') a cui si scrivano di seguito le identità:

$$c_{2l_{\sigma-1}+1,k} = c_{2l_{\sigma-1}+1,k},\qquad c_{2l_{\sigma-1}+2,k} = c_{2l_{\sigma-1}+2,k},\dots\qquad c_{l_{\sigma-2},k} = c_{l_{\sigma-2},k},$$

dànno subito la relazione:

$$\Delta = B\cdot C_2,$$

fra i tre determinanti Δ, B, C_2. Così resta dimostrata la possibilità della sostituzione (21) di modulo $C_2 \neq 0$ che trasformi il secondo gruppo dell'equazioni (18') nel secondo gruppo delle (19), anzi dei coefficienti c, $h^2_{\sigma-1}$ rimarranno arbitrarii. Una tale sostituzione trasformerà le (18') in altre relazioni della stessa forma:

$$\left.\begin{array}{ll} H'_k = r_\sigma H_k, & (k=1,\ 2,\dots\ l_{\sigma-1}) \\ H'_k = \beta_{1k} H_1 + \cdots + \beta_{l_{\sigma-1},k} H_{l_{\sigma-1}} + r_{\sigma-1} H_k, & (k = l_{\sigma-1}+1,\ l_{\sigma-1}+2,\dots\ l_{\sigma-2}) \\ \eta'_k = \alpha''_{1k} H_1 + \cdots + \alpha''_{l_{\sigma-2},k} H_{l_{\sigma-2}} + r_{\sigma-2}\eta_k, & (k = l_{\sigma-2}+1,\ l_{\sigma-2}+2,\dots\ l_{\sigma-3}) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (18'')$$

di cui già i primi due gruppi coincidono coi primi due gruppi delle (19); ed il nuovo determinante $D_n(\alpha'', r)$ avrà ancora la forma ridotta. Eseguiamo ora sulle attuali variabili $H_1, H_2,\dots H_{l_{\sigma-2}}, \eta_{l_{\sigma-2}+1},\dots \eta_{l_{\sigma-3}},\dots \eta_n$ una terza sostituzione che operi solo sulle $\eta_{l_{\sigma-2}+1},\dots \eta_{l_{\sigma-3}}$ e della forma seguente:

$$\eta_k = \sum_1^{l_{\sigma-3}} {}_i\, c_{ik} H_i \qquad (k = l_{\sigma-2}+1,\ l_{\sigma-2}+2,\dots\ l_{\sigma-3}), \tag{23}$$

il modulo di una tale sostituzione sarà:

$$C_3 = \begin{vmatrix} c_{l_{\sigma-2}+1, l_{\sigma-2}+1}, \dots & c_{l_{\sigma-3}, l_{\sigma-2}+1} \\ \cdots & \cdots \\ c_{l_{\sigma-2}+1, l_{\sigma-3}}, \dots & c_{l_{\sigma-3}, l_{\sigma-3}} \end{vmatrix};$$

vediamo se è possibile determinare le c in modo che questo determinante sia diverso da zero e la sostituzione (23) trasformi il terzo gruppo delle relazioni (18″) nel terzo gruppo delle (19). Supposto possibile effettuare tale sostituzione, le quantità c dovranno verificare l'equazioni seguenti (*):

$$\left.\begin{array}{l} (r_\sigma - r_{\sigma-2}) c_{1,k} + \beta_{1, l_{\sigma-1}+1} c_{l_{\sigma-1}+1,k} + \cdots + \beta_{1, l_{\sigma-3}} c_{l_{\sigma-3},k} = \alpha''_{1,k} \\ \cdots\cdots\cdots \\ (r_\sigma - r_{\sigma-2}) c_{l_{\sigma-1},k} + \beta_{l_{\sigma-1}, l_{\sigma-1}+1} c_{l_{\sigma-1}+1,k} + \cdots + \beta_{l_{\sigma-1}, l_{\sigma-3}} c_{l_{\sigma-3},k} = \alpha''_{l_{\sigma-1},k} \end{array}\right\} \quad (24)$$

(*) Per ottenere queste equazioni, basterà eseguire sul 3.° gruppo delle (18″) la sostituzione indicata dalle (23); avremo allora:

$$\sum_1^{l_{\sigma-3}} {}_i\, c_{ik} H'_i = \alpha''_{1k} H_1 + \dots + \alpha''_{l_{\sigma-2},k} H_{l_{\sigma-2}} + r_{\sigma-2} \sum_1^{l_{\sigma-3}} c_{ik} H_i,$$

ove k percorre i valori $l_{\sigma-2}+1,\ l_{\sigma-2}+2,\dots\ l_{\sigma-3}$; sostituendo per le H'_i i loro valori dati dai primi tre gruppi delle (19), otteniamo una identità nelle $H_1, H_2,\dots H_{l_{\sigma-2}}$, ed eguagliando i coefficienti delle stesse variabili nei due membri di questa identità, troviamo l'equazioni (24), (24′). Analogo procedimento si usa per ottenere le (22).

$$\left.\begin{array}{l}(r_{\sigma-1}-r_{\sigma-2})c_{l_{\sigma-1}+1,k}+\beta_{l_{\sigma-1}+1,l_{\sigma-2}+1}c_{l_{\sigma-2}+1,k}+\cdots+\beta_{l_{\sigma-1}+1,l_{\sigma-3}}c_{l_{\sigma-3},k}=\alpha''_{l_{\sigma-1}+1,k}\\ \cdot\;\cdot\\ (r_{\sigma-1}-r_{\sigma-2})c_{l_{\sigma-2},k}+\beta_{l_{\sigma-2},l_{\sigma-2}+1}c_{l_{\sigma-2}+1,k}+\cdots+\beta_{l_{\sigma-2}\,l_{\sigma-3}}c_{l_{\sigma-3},k}=\alpha''_{l_{\sigma-2},k}\end{array}\right\}\quad(24')$$

$$(k=l_{\sigma-2}+1,\ l_{\sigma-2}+2,\ldots,\ l_{\sigma-3}),$$

ed inversamente se le c verificano queste equazioni ed il determinante $C_3 \neq 0$, si deduce subito che colla sostituzione (23) si ottiene la trasformazione voluta. Ora osserviamo che il determinante $D_{l_{\sigma-3}}(\beta,\ r_{\sigma-2})$, ottenuto da $D_{l_{\sigma-3}}(\beta,\ r)$ facendo $r=r_{\sigma-2}$, è di caratterisca $l_{\sigma-2}$, quindi tenendo conto che la matrice dei coefficienti delle incognite c nell'equazioni (24), (24') (per ciascun valore di k) ha appunto per linee le prime $l_{\sigma-2}$ colonne del determinante $D_{l_{\sigma-3}}(\beta,\ r_{\sigma-2})$, si conclude che queste equazioni sono tutte indipendenti fra loro, e perciò delle c ne rimarranno arbitrarie $l_{\sigma-3}-l_{\sigma-2}=h_{\sigma-2}$ per ciascun valore di k, e quindi in totale ne rimarranno arbitrarie $h^2_{\sigma-2}$. Ora ci si può valere di tale arbitrarietà facendo sì che il determinante C_3 risulti diverso da zero; ed infatti, se $r_{\sigma-1}\neq r_{\sigma-2}$, sarà ancora $r_\sigma \neq r_{\sigma-2}$, perchè abbiamo supposto di ordinare successivamente le radici uguali (v. § 7), ed in tal caso sono appunto gli elementi di questo determinante che si possono scegliere arbitrariamente, mentre le rimanenti c si possono determinare in seguito dalle (24), (24'). Se poi $r_{\sigma-1}=r_{\sigma-2}$, sarà $h_{\sigma-2}\geqq h_{\sigma-1}$ (v. § 7) e basterà occuparci delle $h_{\sigma-1}$ equazioni (24'), perchè una volta determinati per le c che vi compariscono dei valori che le verifichino, e sostituiti nelle $l_{\sigma-1}$ equazioni (24), queste risulteranno $l_{\sigma-1}$ equazioni indipendenti nelle $l_{\sigma-2}$ quantità c rimanenti, ed è $l_{\sigma-2}-l_{\sigma-1}=h_{\sigma-1}>0$. Ora le $h_{\sigma-1}$ equazioni (24') nel caso attuale di $r_{\sigma-1}=r_{\sigma-2}$ assumono la forma seguente:

$$\left.\begin{array}{l}\beta_{l_{\sigma-1}+1,l_{\sigma-2}+1}c_{l_{\sigma-2}+1,k}+\cdots+\beta_{l_{\sigma-1}+1,l_{\sigma-3}}c_{l_{\sigma-3},k}=\alpha''_{l_{\sigma-1}+1,k}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \beta_{l_{\sigma-2},l_{\sigma-2}+1}c_{l_{\sigma-2}+1,k}+\cdots+\beta_{l_{\sigma-2},l_{\sigma-3}}c_{l_{\sigma-3},k}=\alpha''_{l_{\sigma-2},k}\end{array}\right\}\quad(25)$$

$$(k=l_{\sigma-2}+1,\ l_{\sigma-2}+2,\ldots\ l_{\sigma-3}).$$

Ora notiamo che i determinanti $D_{l_{\sigma-3}}(\beta,\ r_{\sigma-2})$, $D_{l_{\sigma-3}}(\alpha'',\ r_{\sigma-2})$ sono ambedue di caratteristica $l_{\sigma-2}$, quindi in ciascuno di essi le prime $l_{\sigma-2}$ colonne sono fra loro linearmente indipendenti (essendo le rimanenti formate da zeri); ne segue subito che le due matrici:

$$(\Gamma) \equiv \left\| \begin{matrix} \beta_{l_{\sigma-1}+1, l_{\sigma-2}+1}, \dots & \beta_{l_{\sigma-1}+1, l_{\sigma-3}} \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \beta_{l_{\sigma-2}, l_{\sigma-2}+1}, \dots & \beta_{l_{\sigma-2}, l_{\sigma-3}} \end{matrix} \right\|$$

$$(A'') \equiv \left| \begin{matrix} \alpha''_{l_{\sigma-1}+1, l_{\sigma-2}+1}, \dots & \alpha''_{l_{\sigma-1}+1, l_{\sigma-3}} \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \alpha''_{l_{\sigma-2}, l_{\sigma-2}+1}, \dots & \alpha'_{l_{\sigma-2}, l_{\sigma-3}} \end{matrix} \right|,$$

saranno di caratteristica $l_{\sigma-2} - l_{\sigma-1} = h_{\sigma-1}$, perciò le (25) sono $h_{\sigma-1}$ equazioni indipendenti in $h_{\sigma-2}$ incognite c (per ogni valore di k) ed $h_{\sigma-2} \geqq h_{\sigma-1}$. Con ragionamento analogo a quello fatto sulle equazioni (22'), si può dimostrare ora che ci possiamo valere dell'arbitrarietà che rimane in queste c in modo che il loro determinante C_3 risulti diverso da zero. Così resta dimostrata la possibilità della sostituzione (23) di modulo $C_3 \neq 0$ che trasformi il terzo gruppo dell'equazioni (18'') nel terzo gruppo delle (19); anzi dei coefficienti c, $h^2_{\sigma-2}$ rimarranno arbitrarii. Una tale sostituzione trasformerà le (18'') in altre relazioni della stessa forma:

$$\left.\begin{aligned} H'_k &= r_\sigma H_k & (k &= 1, 2, \dots l_{\sigma-1}) \\ H'_k &= \beta_{1k} H_1 + \dots + \beta_{l_{\sigma-1}, k} H_{l_{\sigma-1}} + r_{\sigma-1} H_k & (k &= l_{\sigma-1} + 1, \dots l_{\sigma-2}) \\ H'_k &= \beta_{1k} H_1 + \dots + \beta_{l_{\sigma-2}, k} H_{l_{\sigma-2}} + r_{\sigma-2} H_k & (k &= l_{\sigma-2} + 1, \dots l_{\sigma-3}) \\ \eta'_k &= \alpha'''_{1k} H_1 + \dots + \alpha'''_{l_{\sigma-3}, k} H_{l_{\sigma-3}} + r_{\sigma-3} \eta_k & (k &= l_{\sigma-3} + 1, \dots l_{\sigma-4}) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \quad (18''')$$

di cui già i primi tre gruppi coincidono coi primi tre gruppi delle (19); ed il nuovo determinante $D_n(\alpha''', r)$ avrà ancora la forma ridotta. Con procedimento perfettamente analogo a quello tenuto nelle sostituzioni eseguite precedentemente potremo dimostrare che si può eseguire sulle attuali variabili $H_1, \dots H_{l_{\sigma-3}}, \eta_{l_{\sigma-3}+1}, \dots \eta_{l_{\sigma-4}}, \dots \eta_n$ una sostituzione di modulo $C_4 \neq 0$ che operi solo sulle $\eta_{l_{\sigma-3}+1}, \dots \eta_{l_{\sigma-4}}$, sia della forma:

$$\eta_k = \sum_1^{l_{\sigma-4}} {}_i c_{ik} H_i \qquad (k = l_{\sigma-3} + 1, \dots l_{\sigma-4}),$$

e trasformi il 4.° gruppo delle (18''') nel 4.° gruppo delle (19). Anzi dei coefficienti di tale sostituzione $h^2_{\sigma-3}$ si potranno scegliere arbitrariamente. Così potremo continuare trasformando successivamente con sostituzioni di modulo diverso da zero le nuove relazioni che si ottengono in altre relazioni della stessa forma, in cui ad un gruppo delle antiche variabili η si viene a sostituire un corrispondente gruppo di variabili H, mentre i nuovi determinanti analoghi a $D_n(\alpha, r)$ hanno ancora la forma ridotta, ed un nuovo gruppo delle relazioni primitive vien trasformato nel gruppo corrispondente delle relazioni (19). Così con σ sostituzioni successive di modulo diverso da zero le (18) si trasformano completamente nelle (19). Una volta scelte queste σ sostituzioni, è chiaro che invece di eseguirle successivamente, si potranno eseguire simultaneamente facendo l'unica sostituzione:

$$\left\{\begin{array}{ll}
\eta_k = \sum_1^{l_{\sigma-1}}{}_i\, c_{ik} H_i & (k = 1,\ 2, \ldots\ l_{\sigma-1}) \\
\eta_k = \sum_1^{l_{\sigma-2}}{}_i\, c_{ik} H_i & (k = l_{\sigma-1} + 1,\ l_{\sigma-1} + 2, \ldots\ l_{\sigma-2}) \\
\eta_k = \sum_1^{l_{\sigma-3}}{}_i\, c_{ik} H_i & (k = l_{\sigma-2} + 1,\ l_{\sigma-2} + 2, \ldots\ l_{\sigma-3}) \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\eta_k = \sum_1^{n} c_{ik} H_i & (k = l_1 + 1,\ l_1 + 2, \ldots\ n);
\end{array}\right.$$

e con questa sostituzione di modulo $C = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \ldots\ C_\sigma \neq 0$, e contenente $h^2_1 + h^2_2 + \cdots + h^2_\sigma$ coefficienti c arbitrarii, le (18) si trasformeranno nelle (19).

Febbraio, 1895.

Sulle funzioni σ ellittiche pari.

(*Di* Ernesto Pascal, *a Pavia.*)

La considerazione delle funzioni ellittiche prendendo per forma fondamentale la curva piana generale di 3.° ordine, risale sino a certi lavori di Aronhold, Hermite e Brioschi (vedi Crelle's Journal, vol. 63). Negli ultimi tempi il Pick (Math. Ann., vol. 28, pag. 309) ha trovato sul medesimo argomento delle formole rimarchevoli. Supposto l'integrale di 1.ª specie ellittico sotto la forma:

$$u = \int_y^x \frac{(h\,x\,d\,x)}{a^2_x\, a_h},$$

dove $a^3_x = 0$ è la cubica piana, egli ha trovato l'espressione della funzione $p(u)$, e della $\sigma(u)$ dispari, il cui campo di razionalità è lo stesso di quello dei coefficienti della cubica piana. Tali espressioni sono:

$$p(u) = \frac{(a_k\, a_x\, a_y)^2 + 2 a_k\, a^2_x \cdot a_k\, a^2_y - a^2_k\, a_x \cdot a_x\, a^2_y - a^2_k\, a_y \cdot a_y\, a^2_x}{3\,(k\,x\,y)^2}$$

$$\sigma(u) = \frac{(h\,x\,y)}{\sqrt{a_h\, a^2_x \cdot a_h\, a^2_y}}\, e^{\frac{1}{2} Q(xy)},$$

dove $Q(xy)$ è l'integrale normale di 3.ª specie, e propriamente:

$$Q(xy) = \int_y^x \int_y^x \frac{(k\,z\,d\,z)}{a_k\, a^2_z} \cdot \frac{(k'\,z'\,d\,z')}{a_{k'}\, a^2_{z'}}\, p\left(\int_{z'}^{z}\right).$$

Queste espressioni hanno la forma invariantiva e in esse le quantità h, k, k', figurano come quantità arbitrarie.

In questo lavoro io mi propongo di completare queste ricerche dando l'espressione delle tre funzioni σ ellittiche *pari*. Il campo di razionalità di queste non è più quello dei coefficienti della forma fondamentale, ma deve essere certamente un campo di razionalità più largo, un campo cioè di certe quantità, mediante cui si esprimono razionalmente i coefficienti della cubica fondamentale.

Tenendo presenti i risultati che si trovano al § 12 del lavoro di Klein (*Hyperellip. sigmaf.,* Math. Ann., vol. 32, pag. 431) dove si trovano le formole relative al caso in cui la forma fondamentale è data da un polinomio generale di 4.° grado, si può anche dedurre che nel caso in quistione, ad ogni σ pari deve essere coordinato uno dei tre sistemi di coniche di contatto della cubica fondamentale, inquantochè nel caso del polinomio generale di 4.° grado, ad ogni σ pari è coordinata una delle tre scomposizioni di quel polinomio in due fattori quadratici.

Se l'integrale di 1.ª specie fosse messo sotto la forma:

$$w = \int_{a'}^{x'} + \int_{a''}^{x''} + \int_{a'''}^{x'''},$$

dove a', a'', a''' rappresentano i tre punti d'intersezione di una retta colla cubica piana, allora la formola per una qualunque σ ellittica si potrebbe ricavare come caso particolare dalla formola (81) della pag. 39 della fondamentale Memoria di Klein: *Ueber Abel'schen Funct.* (Math. Ann., vol. 36).

Per il caso in cui l'integrale di 1.ª specie è messo sotto la forma indicata avanti (che per il caso ellittico è del resto la forma generale) il Klein ha dato nel citato lavoro (pag. 54-nota) una forma speciale delle σ abeliane pari di genere 3, forma nella quale entra la considerazione di una certa rete di quadriche (si può vedere a questo proposito anche la mia Memoria: *Sulla teoria delle funzioni abeliane pari.* Annali di Mat., vol. 18).

Ora io ho trovato che per il caso ellittico si può fare una considerazione che è assai analoga a quella ora citata, e che ci dà la risoluzione del problema che ci occupa.

Il risultato principale cui io giungo è l'espressione delle tre σ pari ellittiche mediante i coefficienti di certe reti di coniche.

§ 1. Introduzione di una rete di coniche.

Consideriamo una rete di coniche che scriveremo simbolicamente sotto la forma:

$$a_x \alpha_z^2 = 0, \tag{1}$$

dove le x sono i parametri della rete, e le z sono le coordinate di un punto del piano.

Interpretando le x anche come le coordinate di un punto del piano, si stabilirà la corrispondenza fra le coniche della rete e i punti del piano, e volendo il luogo dei punti x cui corrispondono le infinite coniche degenerate della rete, dobbiamo eliminare le z fra le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} a_x \alpha_z \alpha_1 &= 0 \\ a_x \alpha_z \alpha_2 &= 0 \\ a_x \alpha_z \alpha_3 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

che sono tre equazioni lineari in x e z, rappresentanti una trasformazione quadratica.

L'eliminazione delle z fra queste tre equazioni dà coi principii del calcolo simbolico:

$$C_3 = (\alpha\beta\gamma)^2 a_x b_x c_x = 0, \tag{3}$$

e invece l'eliminazione delle x dà:

$$I = (\alpha\beta\gamma)(abc)\alpha_z\beta_z\gamma_z = 0, \tag{4}$$

dove β, γ rappresentano simboli equivalenti ad α, e b, c simboli equivalenti ad a.

Le due equazioni così ottenute rappresentano due curve del 3.° ordine nei due piani delle x e delle z, fra le quali c'è una corrispondenza birazionale. La (4) rappresenta il luogo dei punti doppi delle coniche degenerate della rete.

Si sa dalla teoria generale della curva di 3.° ordine che ogni C_3 piana può considerarsi come la Jacobiana di una rete generale di coniche; quindi ne deduciamo che la (4) rappresenta una curva *generale* di 3.° ordine, e per effetto della corrispondenza biunivoca esistente fra (4) e (5) ne ricaviamo poi che anche (3) rappresenta una curva *generale* di 3.° ordine. Quindi data la C_3 che vuol assumersi come forma fondamentale per le funzioni ellittiche, essa potrà sempre immaginarsi messa sotto una forma (3), e i suoi coefficienti si esprimeranno allora razionalmente mediante quelli di una rete generale di coniche.

§ 2. Studio della corrispondenza fra le due cubiche C_3 e I.

Consideriamo tre punti in linea retta su C_3. Ad essi corrisponderanno su I tre punti che rappresentano i punti doppi delle tre coniche degenerate appartenenti ad un fascio di coniche compreso nella rete data. Questo fascio è naturalmente quello che viene staccato dalla rete mediante la relazione lineare fra le x che rappresenta l'equazione della retta data, Si sa che la Jacobiana di una rete di coniche è il luogo dei punti di cui le rette polari rispetto a tutte le coniche della rete, si tagliano in un punto unico che è poi un punto della Jacobiana stessa. Consideriamo nella rete data un fascio. In esso esisteranno tre coniche degenerate, i cui punti doppi sono tre punti di I, che chiameremo I', I'', I'''; mentre i punti corrispondenti su C_3 e che sono in linea retta, li chiamiamo C', C'', C'''. È facile mostrare che la retta polare di I' rispetto a tutte le coniche del fascio è unica ed è la retta $I''\,I'''$. Infatti considerando che una delle coniche del fascio è quella col punto doppio in I', e che la retta polare di I' rispetto a questa conica è indeterminata, e considerando che la retta polare di I' rispetto ad una conica qualunque del fascio si può comporre sempre come combinazione lineare delle rette polari rispetto a due qualunque coniche indipendenti del fascio stesso, si ricava che la retta polare di I' rispetto a tutte le coniche del fascio è unica, e deve inoltre passare per I'', I''', perchè questi punti sono i punti doppi di due coniche appartenenti al medesimo fascio.

La retta $I''\,I'''$ incontra la cubica I in un terzo punto I'_1. Ad ogni punto I' della cubica I possiamo così far corrispondere un punto I'_1, il quale è fisso col variare del fascio, ed è il punto per cui passano tutte le rette polari di I' rispetto a tutte le coniche della rete.

Per trovare ora come si trasforma sulla curva C_3 la corrispondenza fra $I'\,I'_1$ trovata su I, dobbiamo passare alla considerazione delle coniche di contatto di C_3. Ma prima di questo osserviamo che *la espressione analitica della trovata corrispondenza* è, in forza delle cose dimostrate, *rappresentata dall'equazione:*

$$a_h\, \alpha_z\, \alpha_{z'} = 0, \tag{5}$$

che deve essere identicamente soddisfatta, qualunque sieno le h se z, z' sono rispettivamente le coordinate di due punti corrispondenti.

§ 3. Le coniche di contatto di C_3.

Consideriamo tre punti in linea retta su I, dati dalla equazione:

$$u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 = u_z = 0. \tag{6}$$

Eliminando le z fra (6) e due qualunque delle (2) abbiamo l'equazione di una curva di 2.° ordine che taglia la C_3 in sei punti fra i quali devono essere compresi i tre punti corrispondenti ai punti d'incontro di $u_z = 0$ con I.

Scegliendo due qualunque delle (2) si hanno tre risultati diversi, che moltiplicati poi rispettivamente per v_1, v_2, v_3 (quantità arbitrarie), e sommati dànno l'equazione:

$$\Phi_{uv} = (u\alpha\beta)(v\alpha\beta)a_x b_x = 0. \tag{7}$$

Per la forma simmetrica in u, v, di quest'equazione si vede che essa rappresenta la conica passante pei sei punti corrispondenti a quei nei quali le due rette $u_z = 0$, $v_z = 0$ tagliano la I.

Se facciamo convergere i valori di v ai valori u, otteniamo:

$$\Phi_{uu} = (u\alpha\beta)^2 a_x b_x = 0, \tag{8}$$

che rappresenta dunque una conica che tocca la C_3 nei tre punti corrispondenti ai punti $u_z = 0$, e che è quindi *una conica di contatto* di C_3. Possiamo dunque dire: *a tre punti in linea retta su I corrispondono su C_3 i tre punti di contatto di una certa conica di contatto di uno dei tre sistemi esistenti di tali coniche.*

Dalle cose di avanti risulta ancora che la conica passante per i sei punti di contatto di due coniche $\Phi_{uu} = 0$, $\Phi_{vv} = 0$ del medesimo sistema ha per equazione $\Phi_{uv} = 0$.

La espressione:

$$\frac{\Phi_{uu}\Phi_{vv}}{\Phi^2_{uv}},$$

sulla curva C_3 deve essere una costante; dimostriamo che, per il modo col quale si sono scelte le Φ, questa costante è esattamente $+1$.

Infatti per le note identità del calcolo simbolico si ha:

$$\Phi_{uu}\Phi_{vv} = (v\alpha\beta)^2 (u\alpha'\beta')^2 a_x b_x a'_x b'_x = (v\alpha\beta)(u\alpha'\beta') a_x b_x a'_x b'_x \times$$
$$\times [(u\alpha\beta)(v\alpha'\beta') + 2(\alpha'\alpha\beta)(\beta' u v)].$$

Il primo termine è esattamente Φ^2_{uv} e l'altro termine è zero sulla curva di 3.° ordine. In effetti

$$(\alpha'\alpha\beta)(\beta' u v)(v\alpha\beta)(u\alpha'\beta') a_x b_x a'_x b'_x =$$
$$= (\alpha'\alpha\beta)(\beta' u v) a_x b_x a'_x b'_x [(\alpha'\alpha\beta)(u v \beta') - (\beta\alpha' v)(u\alpha\beta') + (\alpha' v \alpha)(u\beta\beta')],$$

di cui gli ultimi due termini sono eguali fra loro, e sono inoltre eguali e con segno contrario a quello da cui si è partiti, perchè da esso si possono ricavare collo scambio opportuno delle lettere α, α', β. Possiamo dunque scrivere che questa ultima espressione è eguale a

$$\frac{1}{3}(\alpha' \alpha \beta)^2 a'_x a_x b_x \cdot (u v \beta')^2 b'_x,$$

e quindi è identicamente zero sulla C_3, il cui primo membro dell'equazione è contenuto come fattore in essa.

§ 4. Corrispondenza (1, 1) sulla cubica C_3.

Mediante i risultati ottenuti possiamo trovare che cosa diventa sulla curva C_3 la corrispondenza I', I'_1 trovata sulla curva I.

Sieno, come avanti, C', C'', C''' i punti in linea retta su C_3 corrispondenti ai punti I', I'', I''' di I. Allora alla retta $I''I'''$ corrisponderà una conica di contatto C_3 e propriamente quella passante per i punti C'', C'''. Il terzo punto di contatto di questa conica colla C_3 sarà il punto C'_1 corrispondente a I'_1.

Sulla curva C_3 si ha dunque una corrispondenza (1, 1) definita così: Per un punto C' si conduca una retta qualunque che tagli la C_3 ancora in due punti C'', C'''. Si conduca la conica di contatto passante per i due punti C'', C''', e il terzo punto di contatto di tale conica con C_3 è fisso qualunque sia la retta condotta per C'.

Esaminiamo ora qual'è la proprietà, dal punto di vista delle funzioni ellittiche, di questa corrispondenza fra i punti della curva C_3.

Immaginiamo fatta la rappresentazione parametrica della curva, cioè espresse le coordinate di un punto della curva mediante funzioni ellittiche (di periodi 2ω, $2\omega'$) di un parametro u, facendo corrispondere il valore zero di u ad uno dei flessi della cubica.

Si sa allora che la somma degli argomenti che corrispondono a tre punti in linea retta è congrua a zero (mod. periodi), e la somma di tre argomenti, corrispondenti a tre punti di contatto di una conica, è congrua ad un semiperiodo, e secondochè si tratta delle coniche di contatto di ciascuno dei tre sistemi, si ha ciascuno dei tre semiperiodi ω, ω', $\omega'' = \omega + \omega'$. Indicando allora con $u_{c'}$, $u_{c''}$, $u_{c'''}$,... gli argomenti ellittici corrispondenti ai punti C', C'',... si ha:

$$u_{c'} + u_{c''} + u_{c'''} \equiv 0$$

$$u_{c''} + u_{c'''} + u_{c'_1} \equiv \text{semiperiodo},$$

e quindi:

$$u_{c'} - u_{c'_1} \equiv \text{semiperiodo}.$$

Quest'ultima equazione trascendente caratterizza la corrispondenza fra i punti C', C'_1.

Essa può anche scriversi diversamente. Avendo scelto u in maniera che sia zero in un punto di flesso a della cubica, si ha che sarà in generale:

$$u_c = \int_a^c \frac{(hz\,dz)}{a^2{}_z\, a_h},$$

dove c rappresenta il sistema delle coordinate di un punto qualunque della curva, e quindi:

$$u_{c'} - u_{c'_1} = \int_{c'_1}^{c'}.$$

Onde abbiamo che la corrispondenza fra i punti di C_3 resta definita dalla relazione trascendente:

$$\int_{c'_1}^{c'} \equiv \text{semiperiodo}. \tag{9}$$

§ 5. Formole relative alla cubica C_3.

Consideriamo le tre coniche di contatto:

$$\Phi_{11} = (\alpha_2\beta_3)^2 a_x b_x$$
$$\Phi_{22} = (\alpha_3\beta_1)^2 a_x b_x$$
$$\Phi_{33} = (\alpha_1\beta_2)^2 a_x b_x,$$

e le coniche:

$$\Phi_{12} = (\alpha_2\beta_3)(\alpha_3\beta_1) a_x b_x, \quad \text{ecc. ecc.}$$

che passano pei punti di contatto di due delle prime.

Considerando le due ultime delle relazioni (2) e risolvendole rispetto a z_1, z_2, z_3 si ha:

$$z_1 : z_2 : z_3 = (\alpha_2\beta_3)\alpha_2\beta_3 a_x b_x : (\alpha_3\beta_1)\alpha_2\beta_3 a_x b_x : (\alpha_1\beta_2)\alpha_2\beta_3 a_x b_x,$$

e pei principii del calcolo simbolico, possiamo scrivere meglio:

$$\left.\begin{aligned} z_1 : z_2 : z_3 &= (\alpha_2\beta_3)^2 a_x b_x : (\alpha_3\beta_1)(\alpha_2\beta_3) a_x b_x : (\alpha_1\beta_2)(\alpha_2\beta_3) a_x b_x \\ &= \Phi_{11} : \Phi_{12} : \Phi_{13} \\ &= \sqrt{\Phi_{11}} : \sqrt{\Phi_{22}} : \sqrt{\Phi_{33}}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

la quale ultima relazione si trova facendo uso della equazione:

$$\Phi_{12} = \sqrt{\Phi_{11}}\sqrt{\Phi_{22}},$$

e delle sue simili, equazioni che sono verificate da un punto x che si trova sulla cubica fondamentale.

Supponiamo dunque che sulla curva I le coordinate di due punti corrispondenti sieno z, z' che, come si sa, soddisfanno identicamente la relazione (5). Le coordinate dei punti corrispondenti su C_3 sieno x, y; allora la relazione (5) diventa:

$$a_h\left[\alpha_1\sqrt{\Phi_{11}}(x) + \alpha_2\sqrt{\Phi_{22}}(x) + \alpha_3\sqrt{\Phi_{33}}(x)\right]\left[\alpha_1\sqrt{\Phi_{11}}(y) + \alpha_2\sqrt{\Phi_{22}}(y) + \alpha_3\sqrt{\Phi_{33}}(y)\right] = 0, \quad (11)$$

la quale, per qualunque sistema di valori delle h, deve essere verificata dalle coordinate $(x_1 x_2 x_3)$ $(y_1 y_2 y_3)$ di due punti corrispondenti. Il primo membro di (11) lo indichiamo col simbolo $[h, x, y]$.

Mediante le formole trovate possiamo ancora dimostrarne delle altre.

Sostituendo nella (1) in luogo delle z i valori (10) si ha l'equazione della C_3. Si ha:

$$C_3 = a_x\left[\alpha_1\sqrt{\Phi_{11}}(x) + \alpha_2\sqrt{\Phi_{22}}(x) + \alpha_3\sqrt{\Phi_{33}}(x)\right]^2 = 0.$$

Inoltre eseguendo la prima polare di C_3 [vedi formola (3)] rispetto al polo h si ha:

$$(\alpha\beta\gamma)^2 a_h b_x c_x,$$

che per effetto delle formole di questo paragrafo si può scrivere:

$$a_h\left[\alpha_1\sqrt{\Phi_{11}}(x) + \alpha_2\sqrt{\Phi_{22}}(x) + \alpha_3\sqrt{\Phi_{33}}(x)\right]^2.$$

§ 6. Costruzione delle σ ellittiche pari.

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che nel campo di razionalità dei coefficienti di una rete di coniche, è razionale la cubica piana generale C_3, ed è razionale un sistema di coniche di contatto della C_3 stessa. Sapendo che esistono tre diversi sistemi di coniche di contatto, corrispondenti ai tre diversi semiperiodi ellittici, si ha che *in tre maniere diverse deve potersi porre la C_3 sotto la forma* (3). Ad ognuna di queste forme corrisponde un semiperiodo ellittico, e poichè dalla teoria ordinaria di Weierstrass delle funzioni σ ellittiche, si sa che ogni semiperiodo ellittico è coordinato ad una delle tre σ pari, così ricaviamo che ad ognuna delle tre forme di C_3 è coordinata una σ pari.

Per fissare le idee, supponiamo che il semiperiodo che figura al secondo membro della formola (9) sia propriamente ω. Allora la σ pari che vi corrisponde è quella che si suole indicare con σ_1 e che ha per caratteristica $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

È noto che nel parallelogrammo dei periodi la σ_1 si annulla una sol volta, e propriamente quando l'argomento u diventa eguale ad ω. Ne ricaviamo quindi che:

$$\sigma_1\left(\int_y^x\right),$$

considerato come funzione di x, si annulla solo quando x e y si corrispondono nella corrispondenza di cui si è parlato nel § 4, e ciò in forza della formola (9), cioè la σ_1 si annulla per lo stesso valore di x per il quale si annulla identicamente la espressione $[h, x, y]$ della formola (11).

Consideriamo ora la espressione:

$$\frac{[h, x, y]\,\sigma\left(\int_y^x\right)}{(h x y)}, \tag{12}$$

dove con σ si intende la funzione ellittica *dispari*, e che considerata come funzione di x ha per punto zero il solo punto $x = y$, e quindi lo stesso punto zero del determinante $(h x y)$.

L'ultima espressione considerata come funzione di x, non ha perciò infiniti, ed ha per punto zero il solo punto x dato dalla relazione trascendente:

$$\int_y^x = \omega,$$

che è anche il punto zero di σ_1. D'altra parte essa è indipendente dal valore di h, come faremo vedere più sotto.

Inoltre mediante le note formole della periodicità delle funzioni σ, σ_1 (vedi per es. Schwarz *Formeln*, ecc., pag. 22) è facile vedere che il *quadrato* della precedente espressione ha la stessa periodicità del quadrato della funzione σ_1, e quindi possiamo infine conchiudere che σ_1 è eguale, a meno di un fattore numerico, alla precedente espressione.

Sostituendo in luogo di σ la sua espressione segnata sul principio di questa Nota, e considerando come positivi i valori dei radicali quando x si avvicina indefinitivamente ad y, si vede che possiamo poi senz'altro scrivere, in valore e in segno:

$$\sigma_1\left(\int_y^x\right) = \frac{[h,\ x,\ y]}{\sqrt{a^2_x\,a_h \cdot a^2_y\,a_h}}\, e^{\frac{1}{2}Q(xy)}, \tag{13}$$

perchè il secondo membro per $x = y$ diventa $+1$ (vedi le ultime formole del § 5), come appunto diventa anche il primo membro, per il diventar zero dell'argomento.

Questa formola è analoga a quella data da Klein per le σ abeliane pari di genere 3.

Per completare la dimostrazione precedente resta ora ancora a far vedere che la espressione:

$$\frac{[h,\ x,\ y]}{(x\,y\,h)},$$

è indipendente da h.

Ed infatti dalle formole (2) abbiamo identicamente per qualunque z':

$$a_x\,\alpha_z\,\alpha_{z'} = 0,$$

se x, z sono due punti corrispondenti rispettivamente sulle curve C_3, e I. E quindi per le (10) si ha:

$$a_x\,[\sum_1^3 \alpha_i \sqrt{\Phi_{ii}}(x)]\,[\sum_1^3 \alpha_j \sqrt{\Phi_{jj}}(y)] = 0.$$

Ed analogamente:

$$a_y\,[\sum_1^3 \alpha_i \sqrt{\Phi_{ii}}(x)]\,[\sum_1^3 \alpha_j \sqrt{\Phi_{jj}}(y) = 0,$$

da cui:

$$\begin{aligned} a_1\,[\sum_1^3 \alpha_i \sqrt{\Phi_{ii}}(x)]\,[\sum_1^3 \alpha_j \sqrt{\Phi_{jj}}(y)] :\\ : a_2\,[\sum_1^3 \alpha_i \sqrt{\Phi_{ii}}(x)]\,[\sum_1^3 \alpha_j \sqrt{\Phi_{jj}}(y)] :\\ : a_3\,[\sum_1^3 \alpha_i \sqrt{\Phi_{ii}}(x)]\,[\sum_1^3 \alpha_j \sqrt{\Phi_{jj}}(y)] =\\ = (x_2\,y_3) : (x_3\,y_1) : (x_1\,y_2). \end{aligned}$$

Da questa relazione si ha l'eguaglianza di tre rapporti i cui denominatori sono rispettivamente uno di questi tre determinanti formati colle x e y. Moltiplicando ambo i termini dei tre rapporti per h_1, h_2, h_3 e sommando si ha esattamente il rapporto:

$$\frac{[h,\ x,\ y]}{(h x y)},$$

il cui valore è dunque indipendente da h.

Sapendo ora che anche

$$\frac{(h x y)}{\sqrt{a^2{}_x a_h \cdot a^2{}_y a_h}},$$

è indipendente da h, se h è un punto della curva del 3.° ordine (vedi Pick, Math. Ann., vol. 28, pag. 315), se ne ricava che

$$\frac{[h,\ x,\ y]}{\sqrt{a^2{}_x a_h \cdot a^2{}_y a_h}},$$

è indipendente da h, se h è un punto della curva del 3.° ordine.

§ 7. Espressione, mediante i coefficienti della rete di coniche, dei tre invarianti *irrazionali* e_1, e_2, e_3.

Quando si assume per forma fondamentale una biquadratica binaria, si sa come risultano espresse le quantità e_1, e_2, e_3 note dalla teoria di Weierstrass delle funzioni ellittiche. Se si chiamano φ, ψ due fattori quadratici della biquadratica e tali che il loro prodotto sia la biquadratica stessa (scomposizione della biquadratica che può farsi solo in tre modi diversi), allora:

$$e_1 = \frac{1}{3}(\varphi,\ \psi)^{(2)},$$

dove nel secondo membro si intende la cosiddetta *seconda spinta (ueberschiebung)* delle due forme quadratiche φ e ψ; esso è cioè una formazione invariantiva dei fattori della biquadratica (vedi Klein, Math. Ann., vol. 27, pag. 459).

Ora noi vogliamo fare la ricerca analoga nel caso in cui la forma fondamentale è data come nei paragrafi precedenti, cioè è una cubica piana formata, nel modo già indicato, mediante una rete di coniche.

La quantità e_1 riuscirà un certo *combinante* della rete di coniche, di 6.° grado nei coefficienti. Adoperando la nota formola:

$$\sqrt{p(u) - e_1} = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)},$$

e tenendo presenti le espressioni precedenti risulta:

$$e_1 = p(u) - \frac{[h,\ x,\ y]^2}{(h\,x\,y)^2},$$

e quindi ponendo la cubica sotto la forma simbolica:

$$C_3 = f^3{}_x = 0,$$

si ha:

$$\left.\begin{aligned}(h\,x\,y)^2 e_1 = \frac{1}{3}(f_h\,f_x\,f_y)^2 + \frac{2}{3} f_h f^2{}_x \cdot f_h f^2{}_y - \frac{1}{3} f^2{}_h f_x \cdot f_x f^2{}_y - \\ - \frac{1}{3} f^2{}_h f_y \cdot f_y f^2{}_x - a_h b_h \alpha_{\sqrt{\Phi(x)}} \alpha_{\sqrt{\Phi(y)}} \beta_{\sqrt{\Phi(x)}} \beta_{\sqrt{\Phi(y)}},\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

ponendo per brevità:

$$\alpha_{\sqrt{\Phi(x)}} = \alpha_1 \sqrt{\Phi_{11}}(x) + \alpha_2 \sqrt{\Phi_{22}}(x) + \alpha_3 \sqrt{\Phi_{33}}(x), \quad \text{ecc., ecc.}$$

Da questa formola già risulta che e_1 è un invariante di 6.° grado nei coefficienti della rete di coniche. Per giungere quindi a porre e_1 sotto la forma definitiva, facciamo una ricerca a parte sugli invarianti di 6.° grado della rete, e dopo ci sarà facile calcolare l'espressione di e_1.

Cominciamo coll'esaminare quante formazioni invariantive possiamo immaginare coi simboli equivalenti:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\qquad \alpha',\ \beta',\ \gamma',\qquad a,\ b,\ c,\qquad a',\ b',\ c',$$

intendendo che ciascun simbolo rappresentato da una lettera greca debba essere ripetuto due volte, e ogni simbolo rappresentato da una lettera latina debba essere ripetuto una volta sola. Bisognerà formare quattro determinanti colle lettere greche, e due colle lettere latine. Fissiamo il determinante simbolico $(\alpha\beta\gamma)$; allora un secondo determinante o contiene tutti gli elementi di questo, o ne contiene due soli, o ne contiene uno solo, o nessuno.

Nel primo caso si ha solo:

$$(\alpha\beta\gamma)^2\,(\alpha'\beta'\gamma')^2,$$

che moltiplicato per un qualunque determinante ternario formato colle lettere latine dà sempre un invariante di valore zero, perchè esso muterà sempre di segno collo scambio di due certi simboli equivalenti. Supponiamo che il secondo determinante contenga due soli degli elementi del primo, per es. α, β. Si ha allora:

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\gamma'),$$

che dobbiamo ancora moltiplicare per altri due determinanti contenenti in tutto due volte le lettere $\alpha'\beta'$, e una volta $\gamma\gamma'$. Si ha quindi la sola formazione:

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\gamma')(\alpha'\beta'\gamma)(\alpha'\beta'\gamma'). \tag{15}$$

Se poi il secondo determinante deve contenere una sola lettera del primo, per es. se esso è $(\alpha\beta'\gamma')$, allora per la formazione degli altri due determinanti si hanno solo i due casi:

$$(\alpha'\beta\gamma)(\alpha'\beta'\gamma')$$
$$(\alpha'\beta\gamma')(\alpha'\beta'\gamma),$$

di cui il primo dà luogo ad una formazione che è simile alla (15) salvo uno scambio di lettere equivalenti, e il secondo dà luogo alla formazione:

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta'\gamma')(\alpha'\beta\gamma')(\alpha'\beta'\gamma). \tag{16}$$

Nel caso in cui il secondo determinante non abbia nessuna delle lettere già comprese nel primo, sia cioè $(\alpha'\beta'\gamma')$, allora è facile vedere che non si può avere che una formazione come (15) stessa.

Bisogna ora moltiplicare ancora pei due determinanti formati colle lettere latine. Tali determinanti per la formazione (15) non potranno essere tali che in uno stesso di essi si contengano le due lettere a, b, o le due a', b'; quindi non ci sono che i casi:

$$(a b' c)(a' b c')$$
$$(a b' c')(a' b c)$$
$$(a a' c)(b b' c')$$
$$(a a' c')(b b' c).$$

E poichè la (15) resta inalterata cogli scambi di γ con γ', ovvero di α' con β', così si vede che queste formazioni si possono ridurre tutte solo alla prima di esse. Si ha dunque l'invariante:

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\gamma')(\alpha'\beta'\gamma)(\alpha'\beta'\gamma')(a b' c)(a' b c'). \tag{17}$$

In quanto agli invarianti formati colla (16) cominciamo coll'osservare che la formazione (16) resta inalterata coi seguenti scambi di lettere:

$$\binom{\alpha}{\beta}\binom{\alpha'}{\beta'}$$

$$\binom{\alpha}{\beta'}\binom{\alpha'}{\beta}; \qquad \binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'};$$

$$\binom{\alpha}{\gamma}\binom{\alpha'}{\gamma'} \quad \text{ecc., ecc.,}$$

cioè scambiando due lettere fra loro e due altre anche fra loro, fra le quattro $\alpha\alpha'\beta\beta'$, ovvero fra le quattro $\alpha\alpha'\gamma\gamma'$, ovvero finalmente fra le quattro $\beta\beta'\gamma\gamma'$.

Inoltre tutte le coppie di determinanti che si possono formare colle sei lettere latine sono dieci e sono propriamente:

$$(abc)(a'b'c')$$
$$(aba')(cb'c')$$
$$(abb')(a'cc')$$
$$(acc')(a'bb')$$
$$(abc')(a'b'c)$$
$$(ab'c)(a'bc')$$
$$(ab'c')(a'bc)$$
$$(aa'c)(bb'c')$$
$$(aa'b')(bcc')$$
$$(aa'c')(bb'c),$$

delle quali la 3.ª, 4.ª,... 10.ª con opportuni scambi di lettere [fra gli scambi indicati, pei quali la (16) resta inalterata] si riducono sempre o alla prima o alla seconda.

Si avrebbero dunque i due soli invarianti:

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta'\gamma')(\alpha'\beta\gamma')(\alpha'\beta'\gamma)(abc)(a'b'c') \tag{18}$$

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta'\gamma')(\alpha'\beta\gamma')(\alpha'\beta'\gamma)(aba')(cb'c'). \tag{19}$$

Dimostreremo che la (19) è zero, e che la (18) si esprime mediante l'invariante (17).

Infatti il prodotto dei due determinanti colle lettere latine in (19) scriviamolo così:

$$\begin{aligned}&(a_2 a'_3) b_1 [b'_1 (c_2 c'_3) + c'_1 (b'_2 c_3) + c_1 (c'_2 b'_3)] +\\ &+ (a_3 a'_1) b_2 [b'_2 (c_3 c'_1) + c'_2 (b'_3 c_1) + c_2 (c'_3 b'_1)] +\\ &+ (a_1 a'_2) b_3 [b'_3 (c_1 c'_2) + c'_3 (b'_1 c_2) + c_3 (c'_1 b'_2)].\end{aligned}$$

Ora uno qualunque di questi nove termini moltiplicato per tutta la parte colle lettere greche contenuta in (19), dà sempre un'espressione zero, perchè muta di segno coll'opportuno scambio di due simboli fra loro, e di due altri simboli fra loro. Per es. il primo di quei nove termini moltiplicato per gli altri quattro determinanti di (19) dà una espressione che muta solo di segno collo scambio di b_1 con b'_1 e c con c', e corrispondenti scambi fatti sulle omonime lettere greche. E così per gli altri termini.

Resta dunque dimostrato che l'invariante (19) è identicamente zero.

In quanto agli altri due (17), (18), adoperiamo per (17) la formola:

$$(\alpha\beta\gamma')(\alpha'\beta'\gamma') = (\alpha'\beta\gamma')(\beta'\gamma'\alpha) - (\beta'\beta\gamma')(\gamma'\alpha\alpha'),$$

e quindi l'invariante (17) si trasforma nei due

$$\begin{aligned}&(\alpha\beta\gamma)(\alpha'\beta'\gamma)(\alpha'\beta\gamma')(\alpha\beta'\gamma')(a b' c)(a' b c') +\\ &+ (\alpha\beta\gamma)(\alpha'\beta'\gamma)(\beta\beta'\gamma')(\alpha\alpha'\gamma')(a b' c)(a' b c'),\end{aligned}$$

di cui il primo collo scambio di a in a' e c in c' e quindi α con α', γ con γ' diventa l'invariante (18), e il secondo collo scambio dei simboli α con β e quindi a con b diventa una formazione che poi collo scambio dei simboli b con c', e c con b' (e corrispondenti scambi delle lettere greche omonime), diventa esattamente la (19) e quindi è zero.

Si ricava dunque che i due invarianti (17), (18) *sono fra loro eguali.*

Quindi, per le cose dette avanti, si ha anche che *la* e_1, *salvo un coefficiente numerico, deve essere eguale all'invariante* (17).

Il coefficiente numerico lo possiamo subito determinare se poniamo la rete di coniche sotto una speciale forma. Prendiamo per es. la rete di coniche sotto la forma:

$$a_x \alpha^2_z = x_1 z^2_1 + x_2 z^2_2 + x_3 z^2_3 = 0.$$

Allora si trova:

$$C_3 = f^3_x = 6 x_1 x_2 x_3 = 0,$$

e quindi possiamo calcolare il secondo membro della formola (14) e si troverà:

$$e_1 = +\frac{1}{3}.$$

Infatti:

$$\Phi_{11}(x) = (\alpha_2 \beta_3)^2 a_x b_x = 2 x_2 x_3$$
$$\Phi_{22}(x) = (\alpha_3 \beta_1)^2 a_x b_x = 2 x_3 x_1$$
$$\Phi_{33}(x) = (\alpha_1 \beta_2)^2 a_x b_x = 2 x_1 x_2$$
$$\Phi_{12}(x) = (\alpha_2 \beta_3)(\alpha_3 \beta_1) a_x b_x \equiv 0, \quad \text{ecc., ecc.}$$

e quindi:

$$a_h b_h \alpha_{\sqrt{\Phi(x)}} \alpha_{\sqrt{\Phi(y)}} \beta_{\sqrt{\Phi(x)}} \beta_{\sqrt{\Phi(y)}} =$$
$$= 4 a_h b_h [\alpha_1 \beta_1 x_2 x_3 + \alpha_2 \beta_2 x_3 x_1 + \alpha_3 \beta_3 x_1 x_2] [\alpha_1 \beta_1 y_2 y_3 + \alpha_2 \beta_2 y_3 y_1 + \alpha_3 \beta_3 y_1 y_2]$$
$$= 4 [h^2_1 x_2 x_3 y_2 y_3 + h^2_2 x_3 x_1 y_3 y_1 + h^2_3 x_1 x_2 y_1 y_2].$$

Per calcolare ora molto più speditamente il valore di e_1 dalla formola (14), osservando che questo valore deve essere indipendente dai valori di h, x, y, poniamo:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = h_3 = 0$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0$$
$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 1,$$

e allora $(hxy)^2$ diventa $+1$; $(f_x f_y f_h)^2$ diventa $+1$, e tutti gli altri termini diventano zero; dunque si ha appunto:

$$e_1 = +\frac{1}{3},$$

come avevamo annunziato.

D'altra parte si può trovare che cogli stabiliti valori pei coefficienti della rete, l'invariante (17) acquista il valore $+6$; *quindi possiamo infine scrivere:*

$$e_1 = \frac{1}{18} (\alpha \beta \gamma)(\alpha \beta \gamma')(\alpha' \beta' \gamma)(\alpha' \beta' \gamma'))(a b' c)(a' b c'). \tag{20}$$

§ 8. Passaggio dalle formole nostre a quelle ordinarie.

Se per forma fondamentale si assume la biquadratica binaria $f(x)$, cioè se si considera la curva $x^2_2 x^2_3 = f(x_1 x_3)$, allora si sa qual'è l'espressione di una σ pari. Si ha allora (vedi KLEIN, Math. Ann., vol. 27, pag. 455):

$$\sigma_1(u) = \frac{\sqrt{\varphi(x)}\sqrt{\psi(y)} + \sqrt{\varphi(y)}\sqrt{\psi(x)}}{2\sqrt[4]{f(x) f(y)}} e^{\frac{1}{2} Q(xy)},$$

dove $\varphi(x)$ $\psi(x)$ sono due forme quadratiche binarie il cui prodotto è eguale alla biquadratica $f(x)$. Se più in particolare si prende per forma fondamentale quella cosiddetta di WEIERSTRASS:

$$\begin{aligned} x_2 x^2_3 &= 4x^3_1 - g_2 x_1 x^2_3 - g_3 x^3_3 \\ &= 4(x_1 - e_1 x_3)(x_1 - e_2 x_3)(x_1 - e_3 x_3), \end{aligned}$$

e se si suppone che al punto di coordinate x della curva di 3.° ordine rappresentata da questa equazione, corrisponda l'argomento a della funzione $p(u)$, e che al punto y corrisponda l'argomento b, si ha:

$$\sigma_1(u) = \frac{\sqrt{(x_1 - e_1 x_3) x_3} \sqrt{(y_1 - e_2 y_3)(y_1 - e_3 y_3)} + \sqrt{y_3 (y_1 - e_1 y_3)} \sqrt{(x_1 - e_2 x_3)(x_1 - e_3 x_3)}}{\sqrt{x_2 y_2 x_3 y_3}} \times e^{\frac{1}{2} Q(xy)},$$

o anche:

$$\sigma_1(u) = \frac{\sqrt{p(a) - e_1} \sqrt{(p(b) - e_2)(p(b) - e_3)} + \sqrt{p(b) - e_1} \sqrt{(p(a) - e_2)(p(a) - e_3)}}{\sqrt{p'(a) p'(b)}} e^{\frac{1}{2} Q(xy)},$$

Ora vogliamo fare la seguente ricerca: vogliamo trovare queste medesime formole, come *caso particolare* della formola da noi già data avanti. Dobbiamo prima di tutto cercare quale specialità bisogna introdurre nell'equazione della rete di coniche, perchè la cubica fondamentale risulti sotto la forma di WEIERSTRASS.

Assumiamo la rete di coniche sotto la seguente forma speciale:

$$\begin{aligned} & x_1(\alpha_{111} z^2_1 + \alpha_{122} z^2_2 + \alpha_{113} z_1 z_3) + \\ & + x_2(\alpha_{212} z_1 z_2) + \\ & + x_3(\alpha_{311} z^2_1 + \alpha_{322} z^2_2 + \alpha_{333} z^2_3) = 0. \end{aligned}$$

Allora la cubica acquista la forma:

$$x^2_2 x_3 - (x_1 - e_1 x_3)\varphi_2(x_1 x_3) = 0,$$

dove φ_2 rappresenta una binaria quadratica.

Propriamente si ha:

$$f = 2(\alpha_{122} x_1 + \alpha_{322} x_3)(-\alpha^2_{113} x^2_1 + \alpha_{333}\alpha_{311} x^2_3 + \alpha_{333}\alpha_{111} x_1 x_3) + \alpha^2_{212}\alpha_{333} x^2_2 x_3.$$

Le tre coniche di contatto Φ_{11}, Φ_{22}, Φ_{33} diventano:

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(x) &= 2(\alpha_{122} x_1 + \alpha_{322} x_3)\alpha_{333} x_3 \\ \Phi_{22}(x) &= 2(-\alpha^2_{113} x^2_1 + \alpha_{333}\alpha_{311} x^2_3 + \alpha_{333}\alpha_{111} x_1 x_3) \\ \Phi_{33}(x) &= 2(-\alpha^2_{212} x^2_2 + \alpha_{311}\alpha_{322} x^2_3 + \alpha_{322}\alpha_{111} x_1 x_3). \end{aligned}$$

Formiamo ora la espressione:

$$\frac{[h, x, y]}{\sqrt{a^2_x a_h \cdot a^2_y a_h}}.$$

Essendo questa indipendente da h (punto di C_3) poniamo in particolare $h_2 = 1$, $h_1 = h_3 = 0$, che sono appunto le coordinate di un punto di C_3; si ha allora:

$$\frac{\alpha_{212}(\sqrt{\Phi_{11}(x)\Phi_{22}(y)} + \sqrt{\Phi_{11}(y)\Phi_{22}(x)})}{\sqrt{x_2 x_3 y_2 y_3}},$$

e moltiplicando per $e^{\frac{1}{2}Q(xy)}$ si vede che si torna appunto alla formola citata sul principio di questo paragrafo.

Pavia, marzo del 1895.

Sur les groupes paramètres dans la théorie des substitutions (*).

(*Par M.* Ed. Maillet, *Ingénieur des Ponts et Chaussées, à Toulouse.*)

Considérons un ensemble de transformations de la forme:

$$S = |x_i;\ f_i(x_1, \dots, x_n,\ a_1, \dots, a_r)| \qquad (\text{mod. } m), \tag{1}$$

où i prend les valeurs $1, 2, \dots, n$, où les fonctions $f_1, \dots, f_n$ restent les mêmes pour toutes les transformations de l'ensemble, et où les $a_1, \dots, a_r$ prennent tous les systèmes de valeurs entières possibles (mod. m), ainsi que les $x_1, \dots, x_n$. Les f_i seront, par exemple, des fonctions entières à coëfficients ou paramètres entiers (mod. m) de $x_1, \dots, x_n$. S désigne l'opération par laquelle on substitue f_1 à x_1, f_2 à $x_2, \dots, f_n$ à x_n.

L'ensemble en question pourra contenir des transformations qui seront des substitutions entre m^n lettres, chaque lettre étant représentée par un système des indices $x_1, \dots, x_n$ (mod. m); mais il pourra aussi en contenir qui ne seront pas des substitutions, c'est-à-dire qui substitueront à deux systèmes d'indices $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ et $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$ des systèmes $f_1(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, a_1, \dots, a_r) = f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \dots, f_n^{(0)}$ et $f_1^{(1)}, \dots, f_n^{(1)}$ respectivement tels que

$$f_1^{(0)} = f_1^{(1)}, \qquad f_2^{(0)} = f_2^{(1)}, \dots, \qquad f_n^{(0)} = f_n^{(1)}.$$

Les transformations de ce genre ne possèdent pas de transformation inverse de la forme (1), c'est-à-dire qu'il n'y a pas de transformation de la forme (1) substituant à la fois au système de valeurs $f_1^{(0)} = f_1^{(1)}, \dots, f_n^{(0)} = f_n^{(1)}$ de $x_1, \dots, x_n$ deux systèmes distincts de valeurs des f_i. Cela résulte de ce que nous supposons dans (1) que les fonctions f_i sont des fonctions bien déterminées de

(*) Les considérations qui suivent sont manifestement inspirées de la *Theorie der Transformationsgruppen* de M. Lie (tom. 1, pag. 401 et suivantes).

$x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r$. Au contraire, par définition, si S est une substitution, elle possède une transformation inverse, qui est aussi une substitution. Donc:

Suivant que S est ou non une substitution, elle possède ou non une transformation inverse.

Supposons que l'ensemble considéré forme un groupe G, c'est-à-dire que le produit ST de deux transformations quelconques:

$$S = |x_i;\ f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r)| \quad (\text{mod. } m) \tag{1}$$

$$T = |x_i;\ f_i(x_1, \dots, x_n, b_1, \dots, b_r)| \quad (\text{mod. } m), \tag{2}$$

de l'ensemble fasse partie de l'ensemble, c'est-à-dire soit de la forme:

$$ST = |x_i;\ f_i(x_1, \dots, x_n, a'_1, \dots, a'_r)| \quad (\text{mod. } m). \tag{3}$$

Si S et T sont des substitutions, ST en sera aussi une; donc:

L'ensemble des substitutions de G forme un groupe H.

A côté du groupe G, l'on peut considérer, comme l'a fait M. Lie pour des groupes analogues, deux groupes paramètres que nous allons définir: on aura, d'après (1), (2) et (3):

$$a'_j \equiv \varphi_j(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r) \quad (\text{mod. } m). \tag{4}$$

De même, si

$$V = |x_i;\ f_i(x_1, \dots, x_n. c_1, \dots, c_r)| \quad (\text{mod. } m), \tag{5}$$

$$TV = |x_i;\ f_i(x_1, \dots, x_n, b'_1, \dots, b'_r)| \quad (\text{mod. } m), \tag{6}$$

et

$$b'_j \equiv \varphi_j(b_1, \dots, b_r, c_1, \dots, c_r) \quad (\text{mod. } m). \tag{7}$$

Dès lors

$$STV = (ST)V = S(TV) = |x_i;\ f_i(x_1, \dots, x_n, d_1, \dots, d_r)| \quad (\text{mod. } m), \tag{8}$$

donne:

$$d_k \equiv \varphi_k(a'_1, \dots, a'_r, c_1, \dots, c_r) \equiv \varphi_k(a_1, \dots, a_r, b'_1, \dots, b'_r) \quad (\text{mod. } m) \tag{9}$$

d'après (4) et (7), c'est-à-dire:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_k(\varphi_1(a, b), \dots, \varphi_r(a, b), c_1, \dots, c_r) \equiv \\ &\qquad \equiv \varphi_k(a_1, \dots, a_r, \varphi_1(b, c), \dots, \varphi_r(b, c)) \quad (\text{mod. } m), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

en écrivant d'après M. Lie, pour abréger, $\varphi_l(a, b)$, par exemple, au lieu de $\varphi_l(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r)$.

Ceci posé, considérons T comme donné, et faisons varier S, c'est-à-dire laissons $b_1, \ldots, b_r$ fixes, et faisons varier $a_1, \ldots, a_r$ (mod. m), de toutes les manières possibles. La transformation (4), ou, ce qui revient au même, la transformation:

$$T' = |a_j;\ \varphi_j(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r)| \quad (\text{mod. } m), \tag{11}$$

indique quelle transformation il faut opérer dans les paramètres de S pour obtenir ST. Quand T est fixe et que S varie, T' est une transformation de la forme (1), où $a_1, \ldots, a_r$ sont les variables, et $b_1, \ldots, b_r$ les paramètres, et l'on peut faire correspondre T' à T.

Quand on fait varier T de toutes les manières possibles, on obtient un ensemble de transformations T'; je dis que:

L'ensemble des transformations T' forme un groupe G', qui est holoédriquement isomorphe à G.

En effet, à V (formule (5)) correspondra la transformation:

$$V' = |a_j;\ \varphi_j(a_1, \ldots, a_r, c_1, \ldots, c_r)| \quad (\text{mod. } m), \tag{12}$$

et l'on aura:

$$T'V' = |a_j;\ \varphi_j(\varphi_1(a, b), \ldots, \varphi_r(a, b), c_1, \ldots, c_r)| \quad (\text{mod. } m), \tag{13}$$

ou, d'après (10),

$$T'V' = |a_j;\ \varphi_j(a_1, \ldots, a_r, \varphi_1(b, c), \ldots, \varphi_r(b, c))| \quad (\text{mod. } m); \tag{14}$$

c'est-à-dire, d'après (6), (7) et (11), que $T'V'$ sera précisément la transformation de l'ensemble considéré qui correspond à TV: il en résulte que cet ensemble forme un groupe G', isomorphe à G.

De plus, T' et V', par exemple, ne pourraient coïncider que si l'on avait:

$$\varphi_j(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r) \equiv \varphi_j(a_1, \ldots, a_r, c_1, \ldots, c_r) \quad (\text{mod. } m),$$

quels que soient $a_1, \ldots, a_r$. D'après (3) et (4) on aurait $ST = SV$, quel que soit S, par suite $T = V$, ce qu'on ne suppose pas. Donc G' est holoédriquement isomorphe à G.

Soit S une substitution de G, S' la transformation correspondante de G', α l'ordre de S, en sorte que $S^\alpha = 1$. On a $S^{\alpha-1} = S^{-1}$, et à $S^{\alpha-1}$ correspond dans G' la transformation $S'^{\alpha-1}$; à $S \cdot S^{\alpha-1} = 1$ correspond $S' \cdot S'^{\alpha-1} = S'^\alpha$, et, puisque G et G' sont holoédriquement isomorphes, $S'^\alpha = 1$. Dès lors S' possède une transformation inverse, à savoir $S'^{\alpha-1}$, et, d'après ce qui précède, S' sera une substitution.

Réciproquement, soit S' une substitution de G' d'ordre α, S la transformation de G qui lui correspond: on voit de même que S est une substitution. Donc:

A toute substitution de G correspond une substitution de G', et réciproquement; au groupe H formé de l'ensemble des substitutions de G correspond le groupe H' formé de l'ensemble des substitutions de G'; H et H' sont holoédriquement isomorphes.

Si dans (1) et (2) S et T sont des substitutions quelconques de G, ST en est aussi une, et T' est une substitution faisant partie de H'. Dans (1) et (3), les deux systèmes de paramètres $a_1, \ldots, a_r$ et $a'_1, \ldots, a'_r$ sont des systèmes correspondants à des substitutions de G. Au contraire, si S n'est pas une substitution, T en étant une, ST n'en sera pas une. Donc les substitutions T' de H' permutent exclusivement entre eux, d'après (4) et (11), les systèmes de paramètres correspondant aux substitutions de G ou de H; elles les permutent transitivement, puisque, S étant donné, l'on peut choisir T de façon que ST soit une substitution arbitrairement choisie de G. Le nombre de ces systèmes est précisément l'ordre h de H ou de H'. On en conclut que H opère entre ces systèmes un groupe de substitutions H'_1 transitif, de degré et d'ordre h, c'est-à-dire, suivant une autre expression (Klein), un groupe régulier, d'ailleurs holoédriquement isomorphe à H. Donc:

H' opère entre les systèmes de paramètres $a_1, \ldots, a_r$ correspondant aux substitutions de G ou de H un groupe de substitutions H'_1 régulier et holoédriquement isomorphe à H et H'.

Nous dirons que G' est un groupe-paramètre (Parametergruppe) de G. On peut former un second groupe-paramètre G'', jouissant de propriétés en partie analogues à celles de G'.

En effet, reprenons les égalités (1) et suivantes. Considérons S comme donné, et faisons varier T, c'est-à-dire laissons $a_1, \ldots, a_r$ fixes, et faisons varier $b_1, \ldots, b_r$ (mod. m) de toutes les manières possibles. La transformation (4), ou, ce qui revient au même, la transformation:

$$S'' = | b_j;\ \varphi_j(a_1, \ldots, a_r,\ b_1, \ldots, b_r) | \qquad (\text{mod. } m), \tag{15}$$

indique quelle transformation il faut opérer dans les paramètres de T pour obtenir ST. Quand S est fixe et que T varie, S'' est une transformation de la forme (1), où $a_1, \ldots, a_r$ sont les paramètres, et $b_1, \ldots, b_r$ les variables, et l'on peut faire correspondre S'' à S. Soit:

$$U = |x_i;\ f_i(x_1, \ldots, x_n, e_1, \ldots, e_r)| \qquad (\text{mod. } m), \qquad (16)$$

une autre transformation de G, et

$$U'' = |b_j;\ \varphi_j(e_1, \ldots, e_r, b_1, \ldots, b_r)| \qquad (\text{mod. } m), \qquad (17)$$

la transformation correspondante formée comme ci-dessus; l'on a, d'après (10):

$$S''U'' = |b_j;\ \varphi_j(\varphi_1(e, a), \ldots, \varphi_r(e, a), b_1, \ldots, b_r) \qquad (\text{mod. } m). \qquad (18)$$

$S''U''$ est de la même forme que S'' et U''; donc:

L'ensemble des transformations S'' forme un groupe G''. De plus, les transformations de G' sont échangeables à celles de G'', et réciproquement.

Pour montrer cette dernière propriété il suffit d'observer que, en mettant en évidence les variables, on aura:

$$S' = |\xi_j;\ \varphi_j(\xi_1, \ldots, \xi_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)| \qquad (\text{mod. } m)$$
$$S'' = |\xi_j;\ \varphi_j(\beta_1, \ldots, \beta_r, \xi_1, \ldots, \xi_r)| \qquad (\text{mod. } m),$$

où $\xi_1, \ldots, \xi_r$ sont les variables, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ et $\beta_1, \ldots, \beta_r$ les paramètres. On voit de suite, à l'aide de (10), que l'on a $S'S'' = S''S'$, ce qui établit la propriété.

La transformation (18) montre, puisque $\varphi_1(e, a), \ldots, \varphi_r(e, a)$ sont les paramètres de US dans G, que si, dans G et G'', l'on fait correspondre S'' à S, U'' à U, W'' à $W = US$, l'on aura $W'' = S''U''$. On ne peut conclure, comme pour G', que G'' est holoédriquement isomorphe à G. Il y a cependant une propriété en partie analogue.

En effet, il est bien évident qu'à toute transformation de G en correspond une et une seule de G'', d'après le mode de formation de S''; à la transformation 1 de G correspond la transformation 1 de G''. Si donc S est une substitution de G, à S et S^{-1} correspondent dans G'' les transformations S'' et S''_1 telles que à $SS^{-1} = 1$ correspond $S''_1 S'' = 1$, c'est-à-dire que S'' est la transformation inverse de S''_1, par suite que S''_1 et S'' sont des substitutions.

La réciproque se voit de même, en observant que S'' et U'' ne peuvent être identiques que si $S = U$, c'est-à-dire qu'à deux transformations distinctes de G'' correspondent deux transformations distinctes de G; donc:

À toute substitution de G en correspond une de G'', et réciproquement; au groupe H formé de l'ensemble des substitutions de G correspond le groupe H'' formé de l'ensemble des substitutions de G''.

Je dis que:

H et H'' sont holoédriquement isomorphes.

Pour le montrer, nous nous appuierons sur le lemme suivant:

Lemme. — Soient deux groupes de substitutions L et L', d'ordres λ et λ',

$$S_1 = 1, \quad S_2, \ldots, \quad S_\lambda$$
$$S'_1 = 1, \quad S'_2, \ldots, \quad S'_\lambda,$$

leurs substitutions. Si l'on peut faire correspondre à chaque substitution de L une et une seule substitution de L', et réciproquement, de façon que si S'_j correspond à S_j, S'_i à S_i, la substitution correspondant à $S_i S_j$ soit $S'_j S'_i$, et réciproquement, ce qui exige $\lambda' = \lambda$, les deux groupes L et L' sont holoédriquement isomorphes.

En effet, établissons entre les substitutions de L et de L' une correspondance telle que S'_i corresponde à S_i^{-1}, quel que soit i, ce qui est évidemment possible d'après les hypothèses faites. Alors S'_j correspond à S_j^{-1}, et la substitution à laquelle correspond $S'_j S'_i$ est $(S_i S_j)^{-1} = S_j^{-1} S_i^{-1}$. En même temps, S_i^{-1} correspondra à S'_i, S_j^{-1} à S'_j, $S_j^{-1} S_i^{-1}$ à $S'_j S'_i$: donc L et L' sont holoédriquement isomorphes.

Corollaire. — Deux groupes de substitutions réguliers conjoints sont holoédriquement isomorphes.

On sait que si un groupe de substitutions entre p lettres est régulier, l'ensemble des substitutions entre ces lettres qui sont échangeables à toutes celles du groupe forme un groupe régulier de même ordre et de même degré p que le groupe donné: les deux groupes sont dits conjoints (*).

Le corollaire s'établit (**) en remarquant que deux conjoints peuvent toujours s'obtenir en partant d'un groupe de substitutions M d'ordre μ convenablement choisi:

$$S_1 = 1, \quad S_2, \ldots, \quad S_\mu. \tag{19}$$

Si S_i est une substitution de M, les substitutions:

$$S_1 S_i, \quad S_2 S_i, \ldots, \quad S_\mu S_i,$$

(*) Jordan, *Traité des Substitutions,* pag. 58-60. — W. Dyck, Math. Ann., tom. 20 et 22. — Capelli, Gior. d. M. (Battaglini), tom. 16.

(**) Frattini, Atti d. R. A. dei Lincei (Rendiconti, 19 marzo 1893).

désignent les substitutions (19) dans un ordre différent, et la substitution:

$$\Sigma_i = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \ldots & S_\mu \\ S_1 S_i & S_2 S_i \ldots & S_\mu S_i \end{pmatrix},$$

est une substitution entre les symboles (19). L'ensemble de ces substitutions Σ_i engendre un isomorphe régulier L de M, d'ordre μ.

De même les substitutions:

$$\Sigma'_i = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \ldots & S_\mu \\ S_i S_1 & S_i S_2 \ldots & S_i S_\mu \end{pmatrix},$$

engendrent un autre groupe régulier L', d'ordre μ; on voit facilement que c'est le conjoint de L.

Si Σ_i correspond à S_i, Σ_j à S_j, $\Sigma_i \Sigma_j$ correspond à $S_i S_j$: L et M sont holoédriquement isomorphes. Si Σ'_i correspond à S_i, Σ'_j à S_j, $\Sigma'_i \Sigma'_j$ correspond à $S_j S_i$. D'après le lemme précédent L' et M sont holoédriquement isomorphes, et il en est de même de L et L'.

Quant au résultat que nous avions annoncé pour H et H'', il est une conséquence directe de ce lemme, puisque d'après les égalités (15) à (18), H et H'' remplissent les conditions spécifiées pour L et L'.

En raisonnant sur H'' comme nous l'avons fait sur H', et se rappelant que les transformations de G'' sont échangeables à celles de G', on verra que:

H'' opère entre les systèmes des paramètres $b_1, \ldots, b_r$ correspondant aux substitutions de G ou de H un groupe de substitutions H''_1 régulier, holoédriquement isomorphe à H et H', et conjoint de H'_1.

APPLICATIONS.

Supposons m premier: on sait qu'une substitution quelconque entre les m nombres $0, 1, \ldots, m-1$ (mod. m) peut être représentée par

$$S = |x;\ a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1} x + a_m| \qquad (\text{mod. } m), \qquad (20)$$

$a_1, \ldots, a_m$ étant des entiers (mod. m). L'ensemble des transformations de cette forme, où $a_1, \ldots, a_m$ prennent tous les systèmes de valeurs possibles (mod. m) forme évidemment un groupe G, comme on le voit en s'appuyant sur le théorème de Fermat qui donne $\xi^m \equiv \xi$ (mod. m) quel que soit ξ.

Le groupe H sera formé ici de l'ensemble des substitutions de G, c'est-à-dire sera le groupe symétrique de degré m. On voit d'ailleurs de suite, en formant les quantités $\varphi_j(a, b)$, que les transformations de G' sont linéaires et homogènes par rapport aux paramètres, et celles de G'' linéaires et homogènes par rapport aux variables.

En particulier, le groupe H'' sera un groupe de substitutions linéaires homogènes, holoédriquement isomorphe au groupe symétrique de substitutions entre m lettres ou nombres. A tout groupe de substitutions entre $t \leq m$ lettres correspondra donc un isomorphe holoédrique, linéaire et homogène contenu dans H''.

GÉNÉRALISATIONS.

On peut opérer sur des groupes de transformations plus générales que (1), de la forme:

$$S = \left| \begin{array}{ll} x_{i_1}^{(1)}; & f_{i_1}^{(1)}(x_1, \ldots, x_n, a_1^{(1)}, \ldots, a_r^{(1)}) \\ x_{i_2}^{(2)}; & f_{i_2}^{(2)}(x_1, \ldots, x_n, a_1^{(2)}, \ldots, a_r^{(2)}) \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right| \quad (\text{mod. } m). \qquad (21)$$

Ici $x_1^{(1)} = x_1$, $x_2^{(1)} = x_2, \ldots$, $x_{t_1}^{(1)} = x_{t_1}$, $x_1^{(2)} = x_{t_1+1}$, $x_2^{(2)} = x_{t_1+2}, \ldots$, $x_{t_2}^{(2)} = x_{t_1+t_2}, \ldots$, en sorte que dans la première colonne du second membre figurent seulement les variables $x_1, \ldots, x_n$. De plus, i_1 prend les valeurs $1, 2, \ldots, t_1$; i_2 les valeurs $1, 2, \ldots, t_2; \ldots$ Pour toutes les transformations de l'ensemble considéré, les fonctions $f_1^{(1)}$ par exemple seront les mêmes; mais ici, pour une valeur quelconque de S, les paramètres $a_1^{(1)}, \ldots, a_r^{(1)}$, qui ont le même système de valeurs dans les t_1 fonctions $f_1^{(1)}, \ldots, f_{t_1}^{(1)}$, seront indépendants des paramètres $a_1^{(2)}, \ldots, a_r^{(2)}$, par exemple, qui figurent dans les t_2 fonctions $f_1^{(2)}, \ldots, f_{t_2}^{(2)}$.

Les groupes se définiront de la même manière, et, par la même méthode, on obtiendra des résultats analogues sur bien des points. Les nouvelles considérations seront d'ailleurs des généralisations des précédentes, puisque, pour $t_1 = n$, $t_2 = 0$, $t_3 = 0, \ldots$, les nouveaux groupes coïncident précisément avec ceux que nous avons étudiés.

Dans le cas particulier où m est premier, une substitution quelconque entre m^n lettres ou nombres caractérisés par un système de n indices prenant chacun les valeurs $0, 1, \ldots, m-1$ (mod. m), peut être représentée sous la forme (*):

$$S = |x_i;\ f(x_1, \ldots, x_n, a_1^{(i)}, \ldots, a_r^{(i)})| \qquad (\text{mod. } m), \tag{22}$$

où f est un polynome de degré $m-1$ en $x_1, \ldots, x_n$ à coëfficients ou paramètres entiers (mod. m). L'ensemble des transformations de cette forme constitue encore un groupe G, qui est ici du type (21). L'ensemble des substitutions de G forme un groupe H, qui est le groupe symétrique de m^n éléments: l'ensemble des substitutions du second groupe paramètre G'' formera un groupe H'' linéaire, homogène et holoédriquement isomorphe à H. On verrait même, d'après la forme de (22), que H'' est holoédriquement isomorphe à un groupe de substitutions H''' également linéaire et homogène, dont le nombre de variables est beaucoup moindre, et dont la forme des substitutions de H'' montre immédiatement l'existence. Dans le cas où $n=1$, on aurait $H'' = H'''$, et l'on retrouverait les résultats indiqués à propos des transformations (20).

Il nous suffira de mentionner que des résultats semblables pourraient être obtenus en considérant des transformations de la forme (20) et (22) où entreraient des imaginaires de Galois, c'est-à-dire où les paramètres seraient formés avec des racines de congruences irréductibles (mod. m), suivant les procédés connus.

Toulouse, le 27 avril 1895.

(*) On l'établit facilement en admettant que cela soit vrai pour $m, m^2, \ldots, m^{n-1}$ éléments, et montrant que cela est encore vrai pour m^n éléments. Nous supposons d'ailleurs la propriété connue.

Riemann e la sua importanza nello sviluppo della matematica moderna.

(*Per* Felix Klein, *in Göttingen* (*).)

Traduzione di Ernesto Pascal, a Pavia.

È colla massima soddisfazione che presento al pubblico matematico italiano questa traduzione di una geniale conferenza, tenuta a Vienna nel 26 settembre dell'anno scorso, dal prof. Klein alla Società tedesca dei naturalisti.

Il sentire l'opinione di un così eminente matematico sopra l'opera scientifica di Bernardo Riemann, cioè del matematico pensatore più profondo dell'ultimo mezzo secolo, sarebbe già di per sè stessa una cosa assai interessante; ma lo diventa poi tanto di più quando si pensi all'acutezza delle osservazioni di indole filosofica di cui è pieno questo discorso, e al punto di vista altissimo cui l'autore sa elevarsi per giudicare Riemann, non meno come pensatore, che come matematico. Da un tal punto di vista la matematica non è più quella così arida e così astratta cosa piena di formole e di calcoli, quale vien comunemente giudicata dai profani, ma lo svolgimento delle idee, anche nelle più astratte teorie matematiche, procede parallelamente a quello di altre scienze che prendono il loro punto di partenza direttamente dai fenomeni della natura, e con cui, a prima vista, nessuna affinità o analogia pareva possibile.

Pavia, maggio del 1895.

Ernesto Pascal.

(*) Estratto dalle « Verhandlungen d. Gesell. deutscher Naturforscher und Aerzte », 1894. Allg. Theil. Leipzig.

Onorevoli signori,

È certamente difficile parlare di cose matematiche davanti ad un pubblico numeroso, anche se si vuole solo limitarsi ad esporre considerazioni di indole affatto generale.

Una tal difficoltà vien da ciò, che le idee delle quali ci occupiamo noi, e delle quali andiamo ricercando gli intimi rapporti, sono esse stesse il risultato di un lavorio matematico che è già molto avanti, e sono perciò assai discoste dalle idee della vita ordinaria.

Nullameno io non ho esitato ad accettare l'onorevole invito, indirizzatomi ultimamente dalla Direzione della vostra Società, ed eccomi qui a tenere davanti a voi la mia prima conferenza.

Io avea presente davanti alla mia mente l'esempio di quell'eminente scienziato, ora estinto, che era stato designato quale conferenziere. Senza dubbio non è il minor merito di Hermann von Helmholtz, quello di essersi adoperato, sin dal principio della sua carriera, a popolarizzare ed esporre ai cultori delle scienze affini, nel modo più semplice possibile, i problemi e i risultati delle varie e numerose parti della scienza da lui coltivate; egli con ciò è stato di aiuto a ciascun di noi nel campo delle nostre proprie ricerche.

Per quanto a prima vista possa sembrare impossibile, fare una cosa simile per la matematica, pure le condizioni attuali della disciplina di cui mi occupo io, spingono sempre più a tentare qualche cosa di simile e vedere sino a che punto ci può essere speranza di riuscita. Io qui non parlo solo in nome mio; parlo in nome di tutti i membri della Società matematica, che da alcuni anni si è costituita come una sezione della Società dei naturalisti e medici, e che, se non nella forma, certo nella sostanza, è identica colla prima sezione della vostra Società. Noi sentiamo che sotto l'influenza dello sviluppo e dei moderni progressi della nostra scienza, sempre più si corre il pericolo di isolarsi, e di rompere la intima relazione che c'è fra la matematica e le scienze naturali. Qui vi è un pericolo grave, e che aumenta quotidianamente; ad esso, noi, membri della Società matematica, dobbiamo opporci con tutte le nostre forze, ed è perciò che ci siamo uniti alla Società generale dei naturalisti.

Noi desideriamo di imparare dalla vostra viva voce come si sviluppa nelle vostre discipline il pensiero scientifico, e dove può esser messo il punto d'appoggio per la matematica. Desideriamo poi che reciprocamente voi possiate comprendere qualche cosa delle nostre idee, e prendere interesse al loro sviluppo. È con questo intendimento che io oggi mi presento davanti a voi, e che mi propongo di darvi un' idea dell' opera scientifica di quel sommo scienziato, che, come nessun altro, ha un' importanza tutta speciale nello sviluppo della matematica moderna, di BERNARDO RIEMANN.

Io spero in ogni modo che potrò interessare quelli fra voi cui è famigliare il progresso della meccanica e della fisica matematica; ma vorrei però che tutti intendeste che nelle idee che io esporrò esistono punti di contatto con i problemi delle scienze naturali.

Della vita privata di RIEMANN non c'è niente che possa avere per voi un interesse particolare. RIEMANN fu uno scienziato tranquillo, tutto chiuso in sè stesso, e che maturava lungamente in sè stesso i suoi profondi pensieri. Avea 25 anni quando, nel 1851, fu laureato in Göttingen, con una dissertazione piena di idee originali; dopo altri tre anni fu abilitato all' insegnamento nella stessa Università. È in questo periodo di tempo che si succedono rapidamente tutti quei notevoli suoi lavori, di cui devo oggi intrattenervi.

Nel 1859 dopo la morte di DIRICHLET, fu chiamato a succedergli nella Università di Göttingen, ma, subito dopo, nel 1863, cominciò quella incurabile malattia che a soli 40 anni, nel 1866, lo trasse al sepolcro.

Le sue opere, pubblicate per la prima volta nel 1876 da ENRICO WEBER e DEDEKIND (e che ora escono nella seconda edizione) non sono molte; formano in tutto un volume in 8.° di quasi 550 pagine; e solo la metà di esse furono pubblicate vivente RIEMANN.

Non è già nel numero delle sue opere che sta la grande influenza che RIEMANN ha esercitato e continua ancora ad esercitare nello sviluppo della matematica, ma nella grande *originalità* sua, e naturalmente è proprio a questa originalità che si deve la *potenza* delle sue concezioni matematiche. E per potervi mostrare tutta l' originalità della matematica di RIEMANN, mi basterà accennare all' unica sua idea fondamentale da cui derivano tutte le altre.

Devo anzitutto ricordare che RIEMANN si occupò molto e profondamente di problemi fisici. Cresciuto nei suoi studi in mezzo a quella gran tradizione cui sono associati i nomi di GAUSS e GUGLIELMO WEBER, sentito d'altra parte l' influsso della filosofia di HERBART, egli cercò sempre e ripetutamente di trovare un fondamento matematico per formulare le leggi di tutti i fenomeni naturali. Queste ricerche, come pare, non sono mai giunte a risultati definitivi, e nelle carte lasciate da RIEMANN, si trovano solo a frammenti. Si tratta di diverse proposizioni, fondate sull' ipotesi che oggi, in virtù della teoria elettro-magnetica della luce di MAXWELL, forma la base delle ricerche, almeno dei giovani fisici, l'ipotesi, che lo spazio sia formato di un fluido esteso e continuo, che è contemporaneamente il conduttore dei fenomeni ottici, di quelli elettrici, e di quelli di gravitazione. Io non mi tratterrò sui dettagli di ciò, tanto più che oggi esso non potrebbe avere che solo un interesse storico. Mi preme solo di notare che *è qui appunto che sta la sorgente degli sviluppi di Riemann riguardanti la matematica pura.*

Ciò che è nella fisica l'esclusione dell'ipotesi di forze che operino a distanza, e la conseguente tendenza a spiegare tutti i fenomeni fisici mediante solo le forze interne di un etere sparso per tutto lo spazio, tale è in matematica la tendenza di studiare le funzioni, studiando il loro *comportarsi nell'infinitamente piccolo,* e, quindi in particolare tenendo in vista le *equazioni differenziali* cui esse soddisfanno. E come ogni fenomeno nel campo fisico dipende dalle condizioni speciali dell'esperimento, così per Riemann ogni funzione resta determinata da cosiddette particolari *condizioni ai limiti*, cui si assoggetta la funzione stessa.

La formola che definisce la funzione, e che serve per il calcolo numerico della stessa, si presenta così come ultimo risultato della ricerca, e non come punto di partenza. Se dovessi spingere ancora più oltre l'analogia, sarei quasi per dire che *Riemann nel campo della matematica e Faraday nel campo della fisica procedettero parallelamente.* E ciò prima di tutto se si tien conto del contenuto *qualitativo* delle ricerche di amendue; ma io credo per dippiù che l'analogia possa spingersi anche più in là, e che i risultati dell'uno nel campo matematico sieno da paragonarsi *anche in valore* a quelli dell'altro nel campo fisico.

Volendo ora, colla scorta di questa considerazione generale, passare ad esaminare i punti principali delle ricerche di Riemann, devo naturalmente cominciare con quella parte delle matematiche, che è intimamente legata al suo nome, quantunque egli stesso l'abbia sempre considerata solo come una prima prova per lo sviluppo di un ordine di idee assai più vasto, colla teoria cioè *delle funzioni di variabili complesse.*

Il teorema fondamentale di questa teoria è molto noto; nelle ricerche sulle funzioni di una variabile z si sostituisce a questa un'espressione due volte infinita $x + iy$, dove i rappresenta una tal grandezza che $i^2 = -1$. Di qui risulta che le ordinarie proprietà delle funzioni di una sola variabile si possono considerare da un punto di vista più generale. Per adoperare le stesse parole che Riemann scrisse nella sua « Dissertazione » del 1851 (nella quale espose le linee fondamentali della teoria di cui parliamo): *coll'introduzione* *della variabile complessa appaiono una simmetria e un' armonia che prima erano come nascoste.*

Il fondatore di questa teoria fu il gran matematico francese CAUCHY (*); ma è in Germania che essa ha acquistata la sua forma moderna, con cui è diventata per così dire il punto centrale di tutte le speculazioni matematiche. Tale è stato il risultato degli sforzi contemporanei dei due matematici che noi avremo anche altre volte occasione di porre uno di fronte all'altro, cioè di RIEMANN e di WEIERSTRASS.

Tendenti al medesimo scopo, i loro metodi sono nullameno così diversi fra loro per quanto si può immaginare; sembra quasi che essi si escludano, mentre che in fondo non fanno che completarsi a vicenda.

WEIERSTRASS definisce le funzioni di una variabile complessa, analiticamente mediante una formola di tipo unico, cioè mediante lo sviluppo in serie di potenze; egli procura di evitare l'intromissione di metodi geometrici, e il contributo specifico che egli dà sta nel rigore delle dimostrazioni.

RIEMANN invece comincia (in corrispondenza con quei principii generali cui testè accennai) con certe equazioni differenziali cui soddisfanno le funzioni di $x + iy$. Egli dà immediatamente al problema una forma fisica. Si ponga $f(x + iy) = u + iv$; allora mediante le equazioni differenziali cui soddisfanno le quantità u, v, queste ci si rivelano come potenziali nello spazio delle due variabili x e y; ciò fissato, tutti i successivi sviluppi di RIEMANN non sono altro che *l'applicazione dei teoremi fondamentali della teoria del potenziale.* Il suo punto di partenza sta perciò nel campo della fisica matematica. Voi vedete dunque che anche nella matematica c'è un campo largo abbastanza perchè l'individualità di ciascuno trovi modo di affermarsi.

Vogliate poi considerare che la teoria del Potenziale che oggi rappresenta un istrumento indispensabile, generalmente conosciuto e molto adoperato nella teorica dell'elettricità e in altri capitoli della fisica, allora era ancora una cosa nuova. È vero che GREEN già fin dal 1828 avea dettato la sua Memoria fondamentale, ma questa era rimasta per lungo tempo poco avvertita. Dopo era venuto GAUSS nel 1839; ma (volendo tener conto solo della

(*) Faccio astrazione da GAUSS, il quale anche qui, come in altre parti della matematica precedette il suo tempo, senza però nulla pubblicare al proposito. È assai notevole che in GAUSS si trovino molti teoremi di teoria delle funzioni, che rientrano perfettamente nello stesso ordine di idee dei posteriori metodi di RIEMANN, e che ci sia stato inconsapevolmente una transizione dai principii direttivi dell'uno a quelli dell'altro.

Germania) furono le lezioni di Dirichlet che crearono il vero sviluppo di tutta la parte fondamentale della teoria; e dopo immediatamente venne Riemann.

Quello che è da considerarsi come contributo speciale dato da Riemann in questo genere di ricerche, è l'aver dato alla teoria del potenziale un'importanza fondamentale per tutta la matematica, e l'avere immaginato indi una serie di *costruzioni geometriche*, o, direi quasi, di *invenzioni geometriche*, su cui vogliate permettermi di spendere due parole.

Prima di tutto Riemann considerò la equazione $u + iv = f(x + iy)$ come una rappresentazione del piano x, y, sul piano u, v; una tal rappresentazione è *conforme* cioè conserva gli angoli, e può essere caratterizzata precisamente da questa sua proprietà. Abbiamo così un nuovo mezzo per definire la funzione di $x + iy$. A questo proposito egli sviluppò l'elegante teorema che: esiste sempre una funzione f la quale rappresenta un campo arbitrario semplicemente connesso del piano x, y, su di un campo semplicemente connesso del piano u, v; e una siffatta funzione è determinata, a meno di tre costanti che restano arbitrarie.

Venne poi a stabilire il concetto di quelle superficie, che oggi sogliono chiamarsi *superficie di Riemann*, e che sono superficie che si distendono a più falde su di un piano, e le cui falde si riuniscono nei cosiddetti *punti di diramazione*. Questo fu senza dubbio il passo più difficile, ma anche il passo più fecondo di risultati. Noi vediamo quotidianamente come si presenti difficile al principiante l'immaginare l'andamento della superficie di Riemann, e come si possa dire essersi egli pienamente impossessato di tutta la teoria, quando sia riuscito a cogliere quell'idea fondamentale. Le superficie di Riemann danno il mezzo di rappresentarsi, nel loro successivo andamento, le funzioni polidrome di $x + iy$; perchè su esse esistono potenziali simili a quelli esistenti sul semplice piano, e le cui leggi si possono studiare coi medesimi mezzi; e sussiste poi ancora il metodo della rappresentazione conforme. Un primo punto di capitale importanza nella teoria di tali superficie è lo studio del cosiddetto numero di connessione, cioè del numero dei tagli che si possono fare su di essa senza spezzarla. Anche questo è un problema geometricamente del tutto nuovo, che prima di Riemann, malgrado il suo carattere elementare, non era stato ancora toccato da alcuno.

Ma forse io mi sono già un po' troppo inoltrato nei dettagli. Devo però aggiungere che tutti questi mezzi ausiliari che Riemann procurò alle matematiche pure, prendendo il punto di partenza da considerazioni fisiche, hanno poi viceversa una grande importanza per la fisica matematica stessa. Per esempio, quando si tratti di *correnti stazionarie* in campi di due dimensioni, si applicano ora quasi sempre i teoremi di Riemann; e in questo modo sono stati risoluti molti interessantissimi problemi che prima parevano insolubili. È molto nota, a questo proposito, la determinazione fatta da Helmholtz, della forma di una vena liquida libera. Forse è meno considerata un'altra specie di applicazione fisica, cui si presentano atte, in modo più brillante, le idee di Riemann. Voglio alludere alla teoria delle *superficie minime.* Le ricerche proprie di Riemann su questo soggetto furono pubblicate per la prima volta nel 1867, dopo la sua morte, quasi contemporaneamente colle ricerche parallele di Weierstrass. In seguito poi il problema è stato studiato e ampiamente svolto da Schwarz e da altri. Si tratta di determinare la forma della superficie, di minima area, che termini in una linea assegnata; ovvero, la figura che prende una lamina liquida imponderabile che si adatti in un contorno dato. Ciò che è notevole è questo, che fondandosi sui teoremi di Riemann, bastano precisamente le ordinarie funzioni note in Analisi, per risolvere i casi più semplici.

Queste applicazioni che io presento oggi, sono evidentemente solo un lato della cosa. L'importanza principale dei metodi della teoria delle funzioni sta nella matematica pura, come io cercherò ora di sviluppare con maggiore precisione, e in un modo che non presupponga speciali cognizioni. Comincerò col problema generale, prendendolo nel modo con cui esso è stato ora messo, dopo gli ultimi progressi. Deve forse sembrare ai profani che le matematiche pure si sviluppino in un modo affatto arbitrario, e ciò perchè quivi manca la concentrazione su di un soggetto bene in vista. Eppure vi è anche qui un regolatore, come notoriamente vi è in senso più stretto, in tutte le altre discipline; *la continuità storica: la matematica pura progredisce sottoponendo gli antichi problemi ai metodi nuovi. Per quanto più cerchiamo di intendere meglio gli antichi problemi, tanto più se ne presentano da sè stessi di nuovi.*

Messici da questo punto di vista, noi dobbiamo prima di tutto dare uno sguardo al materiale della teoria delle funzioni quale si presentava a Riemann sul principio dei suoi studi. Si era trovato che fra le funzioni analitiche di una variabile, cioè a dire, fra le funzioni di $x + iy$, erano da considerarsi in particolare tre classi. In primo luogo le *funzioni algebriche*, che sono definite da un numero finito di operazioni elementari cioè addizione, moltiplicazione, e divisione; e, in contrapposto a queste, le *funzioni trascendenti* per le quali occorrono serie infinite di siffatte operazioni. Fra le funzioni trascendenti si presentano naturalmente, come le più semplici, le funzioni logaritmiche da una parte, e da un'altra parte le funzioni trigonometriche cioè seni, coseni, ecc. Ma l'attenzione degli studiosi era precipuamente rivolta alle funzioni trascendenti più complicate, cioè alle funzioni *ellittiche*, che derivano dall'inversione degli integrali ellittici, e a tutte quelle altre funzioni che si correlano colla *serie ipergeometrica* di Gauss, le funzioni cilindriche, le funzioni di Bessel, le funzioni Gamma, ecc.

L'opera di Riemann può essere brevemente compendiata dicendo, che egli, per ciascuna di queste tre classi di funzioni, trovò risultati assolutamente nuovi, e nuove vedute, che, progredendo sino a oggi, sono restate pur sempre la sorgente di nuovi progressi. Dobbiamo però qui entrare un po' più nei dettagli.

Lo studio delle *funzioni algebriche* corre parallelamente allo studio delle *curve algebriche* le cui proprietà sono studiate dai geometri, i quali poi possono essere o analitici, che prendono il loro punto di partenza dalle formole, o geometri sintetici, nel senso di Steiner e di Staudt, che si occupano della generazione delle curve mediante fasci di raggi.

Il punto di vista essenzialmente nuovo introdotto da Riemann, è quello della trasformazione univoca. Da questo punto di vista, curve algebriche di forme diversissime appaiono riunite in grandi categorie, e, fatta astrazione dalle proprietà inerenti alla forma delle singole curve, si viene a stabilire una teorica sulle proprietà generali comuni a tutte le curve appartenenti ad una stessa categoria. I geometri non tardarono a servirsi dei risultati che così si ricavano, e a farli progredire, e prima fra essi è da annoverarsi il Clebsch il quale cominciò anche a tentare le ricerche analoghe per le forme algebriche a più dimensioni.

Ma c'è dippiù. I geometri non solo si sono serviti dei risultati, ma hanno cercato ancora di applicare i *metodi* stessi di Riemann. Ed il primo passo in tal senso è quello di costruire sulla curva stessa l'immagine della doppiamente estesa superficie di Riemann, il che può farsi in vari modi; indi altri passi successivi dovrebbero consistere nell'imparare il modo di studiare la forma così costruita, dal punto di vista della teoria delle funzioni.

La teoria degli *integrali ellittici* trova la sua generalizzazione nello studio degli integrali delle funzioni algebriche generali, teoria su cui, nei primi venti anni di questo secolo, il norvegese Abel pubblicò le prime fondamentali ricerche.

Si può sempre considerare come uno dei maggiori meriti di Jacobi, l'aver egli, con una specie di divinazione, stabilito per questi integrali un problema d'inversione, che, come la inversione degli integrali ellittici, dà luogo a funzioni monodrome. La effettiva risoluzione di questo problema d'inversione è il problema capitale risoluto contemporaneamente per vie diverse da RIEMANN e da WEIERSTRASS.

La gran Memoria di RIEMANN sopra le *funzioni abeliane*, in cui egli nel 1857 pubblicò la sua teoria, è stata sempre considerata come il più brillante parto del suo genio. In questa Memoria si giunge al risultato finale non per mezzo di complicati artifizi, ma sibbene seguendo una via diretta, e servendosi solo di quegli artifizi geometrici, opportunamente combinati, dei quali io testè discorreva. In un mio precedente lavoro ho fatto vedere come i risultati di RIEMANN riguardanti gli integrali e quelli che ne derivano riguardanti le funzioni algebriche, si possono ottenere in una maniera chiara, per mezzo della considerazione delle correnti liquide stazionarie, ovvero delle correnti elettriche sopra una qualunque superficie chiusa data nello spazio.

Questo è ciò che riguarda solo la prima parte della Memoria di RIEMANN. La seconda parte, che tratta delle funzioni ϑ è forse anche più importante. Vi è quivi il risultato importantissimo che le serie ϑ, che erano servite per la risoluzione del problema d'inversione di JACOBI, non sono le più generali, e quindi si propone il problema di determinare le ϑ più generali che si possono presentare nella teoria dell'inversione. Secondo una nota di HERMITE, RIEMANN conosceva già il teorema, pubblicato poi da WEIERSTRASS, e nuovamente ora trattato da PICARD e POINCARÉ, che cioè bastano le serie ϑ, per costruire le funzioni periodiche più generali di più variabili.

In questi dettagli io non posso più oltre fermarmi. Non è del resto possibile il fissare con precisione tutto ciò che nel campo delle funzioni abeliane, può attribuirsi a RIEMANN, perchè le ricerche di WEIERSTRASS sullo stesso argomento non sono state conosciute per la prima volta, che per mezzo delle sue lezioni. Mi limiterò solo ad osservare che l'importante libro di CLEBSCH e GORDAN, comparso nel 1866, ebbe per iscopo principale l'applicare i risultati di RIEMANN alle curve algebriche, giovandosi dei mezzi della geometria analitica. I metodi di RIEMANN erano una volta una specie di mistero, aperto solo ai suoi scolari diretti, ed erano guardati quasi con diffidenza dagli altri matematici, ed invece ora, ripetendo ciò che testè osservai riguardo alle curve, il progresso degli studi ha fatto vedere la necessità di accrescere anche dei metodi di RIEMANN, il corredo generale di un matematico. È interessante a questo proposito riscontrare i nuovi trattati francesi (*).

(*) Vedi PICARD, *Traité d'analyse;* APPEL e GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales.*

La terza classe di funzioni cui accennammo, dovrebbe contenere quelle funzioni che hanno relazione colla *serie ipergeometrica* di Gauss. In un senso largo queste funzioni sono quelle definite da equazioni differenziali lineari a coefficienti algebrici.

Riemann ha su questo soggetto, durante la sua vita, pubblicato solo un primo lavoro preliminare (1856), nel quale tratta esclusivamente del caso ipergeometrico, e dimostra, in una maniera inaspettata, che tutte le già note singolari proprietà della funzione ipergeometrica, si possono ricavare, senza calcolo, dallo studio del comportarsi della funzione stessa nell'intorno dei punti singolari. Noi sappiamo ora, dai suoi scritti postumi, in che modo egli pensava di stabilire la teoria generale delle equazioni differenziali lineari di n^{mo} ordine: anche qui dovevano comparire i gruppi delle sostituzioni lineari colle quali si permutano le soluzioni quando si percorrono dei giri attorno i punti singolari, e da questo punto di vista si dovea stabilire la classificazione.

Questa proposizione, che in certo modo ha relazione colla maniera con cui Riemann ha trattato gli integrali abeliani, non è stata ancora sviluppata nel modo sintetico, come l'avea immaginata Riemann; le numerose ricerche sulle equazioni differenziali lineari, che sono state fatte negli ultimi decenni, hanno in sostanza stabilite solo alcune parti della teoria; a questo proposito sono da ricordarsi particolarmente le ricerche di Fuchs. Del resto tal teoria, limitata alle equazioni differenziali lineari di 2.° ordine, è atta ad una rappresentazione geometrica semplice. Deve considerarsi la rappresentazione conforme del quoziente di due soluzioni particolari dell'equazione differenziale, nel campo delle variabili indipendenti. Nel caso il più semplice della funzione ipergeometrica si ha la rappresentazione di un semipiano su di un triangolo a lati circolari, e quindi un addentellato, assai singolare, colla trigonometria sferica. In generale esistono casi in cui è possibile un'inversione monodroma, e che danno quindi luogo a quelle notevoli funzioni di una variabile che, come le funzioni periodiche, posseggono infinite trasformazioni lineari in sè stesse, e che io indico col nome di funzioni *automorfe*. Tutte queste considerazioni appartenenti alla teoria delle funzioni, nel modo con cui è stata sviluppata negli ultimi tempi, si trovano più o meno esplicitamente tracciate nelle carte lasciate da Riemann, particolarmente nel lavoro sulle superficie minime, di cui ho sopra parlato. Io rimanderò del resto alla Memoria di Schwarz sulla serie ipergeometrica, e alle ricerche iniziate da Poincaré sulla teoria delle funzioni automorfe. Ricorderò poi ancora a questo proposito le ricerche sulle funzioni modulari ellittiche e quelle sulle funzioni dei corpi regolari, Non posso finire di discorrere dei lavori di Riemann riguardanti la teoria delle funzioni, senza ricordare una Memoria isolata, in cui egli dette un interessante contributo alla teoria degli integrali definiti, e che è diventata famosa per l'applicazione che Riemann ne fece ad un problema di teoria dei numeri. Si tratta *della legge di distribuzione dei numeri primi nel campo dei numeri naturali.* Riemann dette per essa delle espressioni approssimate, che si accostano al computo empirico molto più che tutte le regole ricavate fino allora con metodo induttivo. Ci si presentano a questo punto due osservazioni; in primo luogo, vogliate considerare come si correlano strettamente fra loro le singole parti della matematica, se un problema, che sembra appartenere agli elementi della teoria dei numeri, ha potuto ricevere un'inaspettata soluzione da sviluppi relativi ai più puri problemi di teoria delle funzioni. In secondo luogo, non si può tacere che le dimostrazioni contenute nella Memoria di Riemann, come del resto egli stesso osserva, non sono assolutamente complete, e, malgrado numerosi sforzi fatti negli ultimi tempi, non ancora si può dire che esse sono esenti da lacune; Riemann dovette lavorar molto coll'intuizione. Una simile osservazione è da farsi anche pei suoi lavori riguardanti la teoria delle funzioni. Quivi egli applicò un principio stabilito nella fisica matematica, che egli in onore del suo maestro Dirichlet, chiamò *principio di Dirichlet.* Si tratta di determinare una funzione continua che renda minimo un certo integrale doppio, e il principio cui alludiamo stabilisce come evidente, la esistenza di una siffatta funzione (*). Weierstrass ha osservato che qui vi è un errore di conclusione; perchè potrebbe accadere che il minimo che noi cerchiamo, rappresenti solo un limite che non si possa effettivamente raggiungere restando nel campo delle funzioni continue; con ciò i risultati di Riemann resterebbero in gran parte invalidati. Ma nullameno tutti i numerosi risultati che Riemann ricavò dal detto principio sono tutti esatti, come più tardi poi Carlo Neumann e Schwarz hanno dimostrato con metodi rigorosi.

Per spiegarsi la cosa bisogna immaginare che Riemann prendesse i suoi teoremi prima da considerazioni fisiche, che gli fornivano il principio inventivo, e che solo dopo egli adoperasse quel modo di argomentare per avere

(*) Io intendo qui, contro l'uso più comune, colla parola « principio » il modo di argomentare, e non i risultati che ne derivano. A questo proposito devo richiamare l'attenzione su di un lavoro di W. Thomson che sembra poco noto ai matematici tedeschi [Giorn. di Liouville, tom. 12 (1847)]. Il principio in parola è ivi enunciato con grande generalità.

uno svolgimento di pensiero, composto di sole idee matematiche. Epperò egli, come lo mostrano certi lunghi sviluppi della sua Dissertazione, era ben compreso di certe difficoltà, ma non se ne preoccupò, quanto sarebbe stato necessario, perchè vide che in casi analoghi quelle argomentazioni erano considerate come rigorose dagli altri matematici, non escluso Gauss.

E con ciò termineremo, ciò che avevamo a dire sulle funzioni di variabili complesse. Queste rappresentano l'unico sistema di ricerche connesse fra loro attorno cui Riemann lavorò; tutte le altre sono ricerche speciali. Ma si avrebbe una molto incompleta idea dell'opera matematica di Riemann, se si volessero lasciar da parte questi altri lavori. Giacchè, fatta anche astrazione dai risultati molto notevoli che ivi si ottengono, non si può fare a meno di essi per avere l'idea completa di tutta la larghezza di vedute che egli concepiva, e il programma di lavoro che egli pensava di compiere. E ognuna di tali ricerche ha portato il suo notevole contributo allo sviluppo ulteriore della scienza, come io farò ora vedere.

Cominciamo col dire che, come già accennammo, la trattazione data da Riemann della teoria delle funzioni di variabili complesse, la quale comincia colle equazioni a derivate parziali del potenziale, secondo il suo concetto, doveva essere solo un esempio per una simile trattazione di tutti gli altri problemi fisici, che conducono a equazioni e derivate parziali (o in generale a equazioni differenziali); si devono studiare volta per volta le discontinuità delle equazioni differenziali, e si deve esaminare sino a che punto la soluzione resta determinata da siffatte discontinuità, e dalle poste condizioni.

Lo sviluppo di questo programma, che dopo è stato promosso da varie parti, e che negli ultimi anni è stato, con gran successo, assunto dai geometri francesi, diventa niente altro che *una nuova base sistematica nei metodi d'integrazione della meccanica e della fisica matematica.* Riemann stesso in questo ordine di idee, trattò addentro un solo problema, che è contenuto nella Memoria sopra *la propagazione delle onde aeree piane di finita ampiezza di oscillazione* (1860).

Fra le equazioni a derivate parziali lineari della fisica matematica bisogna distinguere due tipi principali: il tipo ellittico e il tipo iperbolico, per i quali sono esempi più semplici, rispettivamente, la equazione differenziale del potenziale, e quella della corda oscillante: fra essi sta, come caso intermedio, il tipo parabolico, cui appartiene per esempio l'equazione differenziale della conduzione del calore. Nuove ricerche di Picard hanno mostrato che i metodi d'integrazione della teoria del potenziale possono trasportarsi, quasi inalterati, alle equazioni differenziali ellittiche. Ma che cosa possiamo dire degli altri tipi? A ciò il lavoro di RIEMANN dette un primo importante contributo. Egli mostrò quali rimarchevoli modificazioni devono essere apportate al problema, noto nella teoria del Potenziale, cosiddetto *dei valori al contorno*, e alla sua soluzione mediante la funzione di GREEN, perchè gli sviluppi restino validi per le equazioni differenziali iperboliche. Ma anche da un altro lato la Memoria di RIEMANN è particolarmente interessante. La riduzione del problema indicato dal titolo, ad un'equazione differenziale lineare è già di per sè stesso un importante risultato; ma c'è dippiù, ed è che per far questo egli adoperò un metodo, che ai fisici non recherà grande sorpresa, *il metodo grafico*. E ciò si presta ad un'osservazione; giacchè un tal metodo è ora molto trascurato dai matematici avvezzi alle considerazioni astratte, e fa quindi tanto più piacere, il vedere che una così grande autorità matematica quale RIEMANN, lo abbia adoperato, e da esso abbia saputo trarne così importanti conseguenze.

Resta ora a parlare ancora dei due grossi *Saggi* che RIEMANN presentò per la sua abilitazione all'insegnamento, nel 1854, in età di 28 anni; cioè quello intitolato: *Sopra le ipotesi che sono di fondamento alla geometria*, e lo scritto intitolato: *Sopra la rappresentazione di una funzione mediante serie trigonometriche.*

È notevole che questi due lavori sono stati finora diversamente apprezzati dal pubblico scientifico; le ipotesi della geometria hanno da lungo tempo trovato la stima che loro spettava, specialmente per opera di HELMHOLTZ, come molti di voi sanno; invece le ricerche sulle serie trigonometriche sono rimaste sinora note solo ad un ristretto numero di matematici. Ciò non toglie però che i risultati cui esse han dato origine, sieno dal punto di vista teorico, del più grande interesse.

Per quel che riguarda *le ipotesi della geometria*, io non mi dilungherò sulla significazione filosofica della cosa, su cui non avrei nulla di nuovo da dire. Per i matematici una tal discussione ha importanza non tanto per la origine degli assiomi geometrici, quanto per quel che si riferisce alla logica dipendenza fra essi.

Il più famoso problema è quello riguardante il posto che deve occupare l'assioma delle parallele. Le ricerche di GAUSS, LOBATSCHEWSKY e BOLYAI (per ricordare solo i nomi più illustri) hanno notoriamente mostrato che l'assioma delle parallele non è una conseguenza degli altri assiomi, e che, facendo astrazione dall'assioma delle parallele, si può costruire una geometria generale, conseguente in sè stessa, la quale contenga come caso particolare, la geometria ordinaria. Di queste importanti considerazioni Riemann dette una nuova e speciale applicazione, considerandole come premesse per passare alle idee della geometria analitica: lo spazio egli se lo figurò come un caso particolare di una varietà tre volte infinita di enti, in cui il quadrato dell'elemento lineare si esprime mediante una forma quadratica nei differenziali delle coordinate. Dello speciale risultato geometrico che egli con ciò ottenne, io non discorrerò, e similmente non tratterò degli sviluppi ulteriori che la teoria ha ricevuto in questi ultimi tempi. L'essenziale nel concetto indicato è che Riemann anche qui restò fedele al suo pensiero fondamentale, studiare le proprietà delle cose *dal loro modo di comportarsi nell'infinitamente piccolo.* Egli con ciò pose i fondamenti di un nuovo capitolo del calcolo differenziale: *la teoria delle espressioni differenziali quadratiche di qualunque numero di variabili;* in particolare degli *invarianti* appartenenti a tali espressioni.

Per completare le cose riferite in questa conferenza, voglio qui aggiungere un'osservazione. Certamente per la *ricerca* delle relazioni matematiche non è indifferente, se i simboli con cui si opera hanno una significazione determinata, ovvero non l'hanno, giacchè è proprio dal modo concreto con cui essi si concepiscono che dipende lo sviluppo ulteriore delle idee. Prova di ciò è quasi tutto quello che finora abbiamo detto sull'affinità fra la matematica di Riemann e la fisica matematica. Ma da ciò è indipendente il risultato finale della ricerca matematica, la quale è al disopra di tutte tali apposizioni particolari; è uno schema logico generale, il cui contenuto speciale resta indifferente e può essere scelto in vari modi. Da questo punto di vista non è da sorprendere che Riemann più tardi (1861) in un lavoro presentato per un concorso dell'Accademia di Parigi, abbia fatta un'applicazione della sua ricerca sulle espressioni differenziali, ad un problema di conduzione del calore, cioè ad un soggetto che non ha certamente niente a che fare colle ipotesi della geometria. Similmente si riattaccano qui le moderne ricerche sull'equivalenza e la classificazione dei problemi generali di meccanica, giacchè infatti, seguendo Lagrange e Jacobi, le equazioni differenziali della meccanica si possono esprimere in modo da farle dipendere da un'unica forma quadratica nei differenziali delle coordinate.

Passiamo ora al lavoro sulle *serie trigonometriche*, che io ho appositamente riserbato per ultimo, perchè esso lascia scorgere un ultimo essenziale carattere della mente di Riemann. Per quello che ho detto sin qui, io potrei facilmente riunire queste ricerche con quelle della fisica e con quelle della geometria. Ma l'ingegno penetrante di Riemann non si contentò qui di ado-

Sull' equazioni lineari alle derivate parziali del 2.° ordine (tipo ellittico), e sopra una classificazione dei sistemi di linee ortogonali che si possono tracciare sopra una superficie.

(*Di* Pietro Burgatti, *a Roma.*)

PREFAZIONE.

Già da qualche anno il chiar.^{mo} prof. L. Bianchi (R. Accademia dei Lincei, 1889) ed il sig. Picard (*Traité d'Analyse,* tome II) sono giunti, per vie diverse, ad estendere all'equazione lineare completa del 2.° ordine alle derivate parziali alcuni teoremi relativi all'equazione specialissima

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \tag{0}$$

che da molto tempo si conoscono. Dalla lettura delle loro Memorie e dall'interesse dell'argomento sono stato indotto a tentare uno studio più accurato sopra tale equazione. Ed anzitutto mi persuasi della necessità di generalizzare il notissimo teorema relativo all'esistenza di soluzioni *associate* (o coniugate, come dicono alcuni) dell'equazione (0).

I primi indizi di tale generalizzazione si trovano nel noto teorema del Moutard e nel lavoro citato del prof. Bianchi; ed è seguendo quelli che ho potuto qui enunciare il *teorema generale delle associate,* dando special forma all'equazione proposta.

Questa forma mi ha poi permesso di giungere, nella maniera più diretta ed elegante, all'importante teorema del prof. Bianchi, relativo al numero delle soluzioni individuate da una data successione di valori sopra un contorno chiuso, ed ai teoremi di RIEMANN che riguardano l'effettiva esistenza di tali soluzioni.

Alla fine del secondo capitolo ho trattato delle soluzioni comuni ad una equazione del 2.° ordine lineare e ad una del 1.°, o a due del 2.° ordine, con metodo analogo a quello in uso nella teoria delle equazioni lineari del 1.° ordine. Questo problema è stato studiato nella sua generalità dal prof. BIANCHI in alcune Note pubblicate nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » (serie IV, vol. 2.°); ma, per le considerazioni alle quali questo studio deve servire, conviene trattare la questione in modo diretto, e le formule finali compaiono allora sotto forma semplice ed utile.

Il terzo capitolo poi parla d'una classificazione dei sistemi di linee ortogonali che si possono tracciare sopra una superficie, la quale è intimamente legata coll'equazioni più sopra considerate. Essa mi ha condotto alla generalizzazione di alcuni importanti teoremi di geometria differenziale, e promette valido aiuto nello studio dei sistemi ortogonali in parola.

CAPITOLO I.

Invariante. — Criterio di riducibilità alla forma $\Delta_2 u = 0$. Forme speciali. — Teorema del Moutard. — Fattore integrante.

1. Consideriamo l'equazione lineare del 2.° ordine alle derivate parziali:

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2d\frac{\partial z}{\partial x}+2e\frac{\partial z}{\partial y}+fz=0.$$

Si sa, che nella regione del piano ove $b^2-ac<0$, può essere ridotta alla forma più semplice:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+l\frac{\partial z}{\partial x}+m\frac{\partial z}{\partial y}+nz=0; \tag{1}$$

è questa che prendiamo adesso in considerazione.

Operiamo la sostituzione $z=\lambda z_1$; ordinando e dividendo per λ, risulta:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}+\frac{1}{\lambda}\left(2\frac{\partial \lambda}{\partial x}+l\lambda\right)\frac{\partial z_1}{\partial x}+\frac{1}{\lambda}\left(2\frac{\partial \lambda}{\partial y}+m\lambda\right)\frac{\partial z_1}{\partial y}+\\&\quad+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+l\frac{\partial\lambda}{\partial x}+m\frac{\partial\lambda}{\partial y}+n\lambda\right)z_1=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Nascono di qui varie conseguenze:

I. Se si prende per λ una soluzione dell'equazione (1), sparisce il termine privo di derivate.

II. Prendendo $\lambda = e^{-\frac{1}{2}\int l dx}$, viene eliminato il termine del 1.° ordine in x; analogamente per y.

III. Dicendo per brevità l_1, m_1, n_1 i coefficienti della (2) e ponendo $\lambda = e^\theta$, risulta:

$$\left.\begin{aligned} \frac{l_1}{2} &= \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{l}{2} \\ \frac{m_1}{2} &= \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{m}{2} \\ n_1 &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 + l\frac{\partial \theta}{\partial x} + m\frac{\partial \theta}{\partial y} + n. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Eliminando θ, si ottiene facilmente:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial l_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial m_1}{\partial y} + \frac{l_1^2}{4} + \frac{m_1^2}{4} - n_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial m}{\partial y} + \frac{l^2}{4} + \frac{m^2}{4} - n;$$

quindi la funzione:

$$K = \frac{1}{2}\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial m}{\partial y} + \frac{l^2 + m^2}{4} - n, \tag{4}$$

è un *invariante* relativo alla sostituzione:

$$z = \lambda z. \tag{5}$$

2. Proponiamoci intanto di stabilire un criterio atto a riconoscere se una data equazione (1) è riducibile alla forma semplice:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} = 0, \tag{5'}$$

mediante una sostituzione della forma (5).

A tale scopo osserviamo, che la precedente equazione ha l'invariante K uguale a zero; ogni equazione quindi riducibile a quella forma deve appartenere a quel tipo d'equazioni (1), per le quali $K = 0$.

Supponiamo dunque la (1) ad invariante nullo; essa può allora scriversi, come è facile vedere,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + l\frac{\partial z}{\partial x} + m\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{z}{2}\frac{\partial m}{\partial y} + \frac{l^2 + m^2}{2} z = 0, \tag{6}$$

od anche,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{l}{2}z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{m}{2}z\right)+\frac{l}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{l}{2}z\right)+\frac{m}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{m}{2}z\right)=0. \quad (6')$$

Posto:

$$\alpha=e^{\frac{1}{2}\int l dx}, \qquad \beta=e^{\frac{1}{2}\int m dy},$$

si ricava:

$$\frac{1}{2}l=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}, \qquad \frac{1}{2}m=\frac{1}{\beta}\frac{\partial\beta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{l}{2}z=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{m}{2}z=\frac{1}{\beta}\frac{\partial\beta z}{\partial y};$$

e quindi l'equazione (6′) si scrive:

$$\beta\frac{\partial^2\alpha z}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial^2\beta z}{\partial y^2}=0. \quad (7)$$

Concludendo: *Ogni equazione* (1) *ad invariante nullo è riducibile alla forma* (7). (L'inversa è vera.)

Di qui segue, che essa può ridursi all'equazione di Laplace (5′) nel modo considerato quando $\alpha=\beta\cdot X(x)$ o $\alpha=\beta\cdot Y(y)$, ossia $l=\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $m=\frac{\partial\theta}{\partial y}$, essendo θ una funzione qualunque. In tal caso la sostituzione da operare è $z_1=e^{\frac{\theta}{2}}z$. Dunque:

Un'equazione (1) *è riducibile alla forma di Laplace con una sostituzione* (5), *quando il suo invariante K è nullo, e l'espressione* $l dx+m dy$ *è differenziale esatto.*

Questa proposizione si poteva ottenere immediatamente in modo diretto; ma la via ora seguita ha fatto conoscere qualche proprietà delle equazioni ad invariante nullo.

3. Aggiungiamo alcune osservazioni su questo tipo d'equazioni. Se l'equazione data (1) è ad invariante nullo, anche la sua *aggiunta*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-l\frac{\partial u}{\partial x}-m\frac{\partial u}{\partial y}+\left(n-\frac{\partial l}{\partial x}-\frac{\partial m}{\partial y}\right)u=0, \quad (8)$$

è, evidentemente, ad invariante nullo. Segue da ciò, che essa può porsi sotto la forma (7). Per avere in questo caso le espressioni dei coefficienti α e β, perare i concetti geometrico-fisici; egli passò a criticarli, e a proporsi il problema della validità o meno, delle relazioni matematiche, che di quei concetti sono la conseguenza. Detto brevemente, si tratta dei *principii del calcolo infinitesimale.* Riemann negli altri suoi lavori trattò sempre i problemi di tal natura, di sfuggita o quasi di nascosto. Non fece invece così nel lavoro sulle serie trigonometriche. Sfortunatamente trattò solo singoli problemi: il problema se una funzione possa essere discontinua in ogni punto, e quello dell'integrabilità di una siffatta funzione. Ma questi problemi li trattò così bene, che di qui poi hanno ricevuto il più potente impulso le ricerche sui fondamenti dell'analisi. La tradizione ricorda che Riemann, negli ultimi anni parlava ai suoi scolari di quel problema che la critica moderna dà come il più bello dei suoi risultati, la esistenza cioè di funzioni continue non aventi derivata in alcun punto. Più precise idee sopra siffatte singolari funzioni sono state date per la prima volta da Weierstrass, al quale si deve la maggior parte di tutto ciò che ha condotto all'attuale assetto rigoroso della teoria delle funzioni reali di variabili reali (come si vuol chiamare la teoria di cui parliamo).

Riguardo agli sviluppi di Riemann sulle serie trigonometriche io sono di avviso che egli avrebbe seguito, per quel che riguarda i fondamenti, il modo di procedere di Weierstrass, che in tali problemi ha bandita la considerazione dello spazio, e per conseguenza procede solo con definizioni aritmetiche. Ma io non posso pensare che Riemann, nel suo animo, credesse che assolutamente questa considerazione dello spazio, conducesse a risultati erronei, come ora si usa facilmente credere dagli esagerati rappresentanti dell'indirizzo moderno. Egli deve aver creduto che nella difficoltà che qui si presenta, si possa trovare un accordo.

Noi tocchiamo qui una quistione che per l'attuale sviluppo della matematica dovrebbe essere di importanza decisiva: i nostri studenti cominciano assai per tempo a conoscere tutte le intricate relazioni che ha scoperte l'analisi moderna; ciò è certamente bello, ma ha anche poi una conseguenza pericolosa, ed è che i giovani matematici temono molto di formulare dei teoremi determinati, e che ad essi manca quella freschezza senza di cui, anche nella scienza, non si può ottenere alcun successo. D'altra parte la maggior parte dei pratici crede di potere fare a meno di quelle ricerche di cui parliamo, e che offrono maggiore difficoltà. Essi si separano dalla scienza rigorosa, e sviluppano per loro uso una matematica particolare, che spunta come un pezzo di radice accanto ad una maestosa pianta. Noi faremo qualsiasi sforzo perchè sia tolta questa pericolosa scissura.

E a questo proposito mi si permetta di precisare, con due proposizioni, il mio proprio parere in questa quistione. In primo luogo io credo che i difetti che, dal lato matematico, presenta la concezione dello spazio, sieno solo temporanei, e che il metodo potrà perfezionarsi in modo, che col suo aiuto si potrà intendere la *tendenza* degli sviluppi astratti degli analisti. Io credo poi che, così ridotta la concezione dello spazio, le applicazioni della matematica al mondo esterno restano in sostanza inalterate, solo che si fissi di considerarle come una specie di *interpolazione*, che esprima i rapporti con una esattezza limitata, ma che basti per le esigenze pratiche.

E con queste osservazioni finirò la mia conferenza che ha abbastanza abusato della vostra pazienza.

Voi vi sarete convinti che anche nel campo della matematica non vi è alcuna discontinuità, e che vi è un movimento simile a quello che vi è nelle scienze naturali.

Ed è anche una legge generale che quelli che portano il loro contributo per lo sviluppo della scienza sono molti, ma che le vere spinte nuove vengono solo da pochi cultori. La cui influenza non è perciò limitata al breve spazio della loro vita; essi influiscono dopo, quando cioè sono stati meglio compresi; così certamente è avvenuto per Riemann.

Io spero che voi non vogliate considerare la mia conferenza di oggi come un ricordo di un'epoca tramontata, verso cui si suole per lo più essere pietosi, ma come la descrizione del periodo pieno di attività che attraversa presentemente la matematica.

Sull'equazioni lineari alle derivate parziali del 2.° ordine (tipo ellittico), e sopra una classificazione dei sistemi di linee ortogonali che si possono tracciare sopra una superficie.

(*Di* Pietro Burgatti, *a Roma.*)

PREFAZIONE.

Già da qualche anno il chiar.mo prof. L. Bianchi (R. Accademia dei Lincei, 1889) ed il sig. Picard (*Traité d'Analyse,* tome II) sono giunti, per vie diverse, ad estendere all'equazione lineare completa del 2.° ordine alle derivate parziali alcuni teoremi relativi all'equazione specialissima

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \tag{0}$$

che da molto tempo si conoscono. Dalla lettura delle loro Memorie e dall'interesse dell'argomento sono stato indotto a tentare uno studio più accurato sopra tale equazione. Ed anzitutto mi persuasi della necessità di generalizzare il notissimo teorema relativo all'esistenza di soluzioni *associate* (o coniugate, come dicono alcuni) dell'equazione (0).

I primi indizi di tale generalizzazione si trovano nel noto teorema del Moutard e nel lavoro citato del prof. Bianchi; ed è seguendo quelli che ho potuto qui enunciare il *teorema generale delle associate,* dando special forma all'equazione proposta.

Questa forma mi ha poi permesso di giungere, nella maniera più diretta ed elegante, all'importante teorema del prof. Bianchi, relativo al numero delle soluzioni individuate da una data successione di valori sopra un contorno chiuso, ed ai teoremi di Riemann che riguardano l'effettiva esistenza di tali soluzioni.

Alla fine del secondo capitolo ho trattato delle soluzioni comuni ad una equazione del 2.° ordine lineare e ad una del 1.°, o a due del 2.° ordine, con metodo analogo a quello in uso nella teoria delle equazioni lineari del 1.° ordine. Questo problema è stato studiato nella sua generalità dal prof. Bianchi in alcune Note pubblicate nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » (serie IV, vol. 2.°); ma, per le considerazioni alle quali questo studio deve servire, conviene trattare la questione in modo diretto, e le formule finali compaiono allora sotto forma semplice ed utile.

Il terzo capitolo poi parla d'una classificazione dei sistemi di linee ortogonali che si possono tracciare sopra una superficie, la quale è intimamente legata coll'equazioni più sopra considerate. Essa mi ha condotto alla generalizzazione di alcuni importanti teoremi di geometria differenziale, e promette valido aiuto nello studio dei sistemi ortogonali in parola.

CAPITOLO I.

Invariante. — Criterio di riducibilità alla forma $\Delta_2 u = 0$. Forme speciali. — Teorema del Moutard. — Fattore integrante.

1. Consideriamo l'equazione lineare del 2.° ordine alle derivate parziali:

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2d\frac{\partial z}{\partial x}+2e\frac{\partial z}{\partial y}+fz=0.$$

Si sa, che nella regione del piano ove $b^2-ac<0$, può essere ridotta alla forma più semplice:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+l\frac{\partial z}{\partial x}+m\frac{\partial z}{\partial y}+nz=0; \tag{1}$$

è questa che prendiamo adesso in considerazione.

Operiamo la sostituzione $z=\lambda z_1$; ordinando e dividendo per λ, risulta:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}+\frac{1}{\lambda}\left(2\frac{\partial\lambda}{\partial x}+l\lambda\right)\frac{\partial z_1}{\partial x}+\frac{1}{\lambda}\left(2\frac{\partial\lambda}{\partial y}+m\lambda\right)\frac{\partial z_1}{\partial y}+\\&\quad+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+l\frac{\partial\lambda}{\partial x}+m\frac{\partial\lambda}{\partial y}+n\lambda\right)z_1=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Nascono di qui varie conseguenze:

I. Se si prende per λ una soluzione dell'equazione (1), sparisce il termine privo di derivate.

II. Prendendo $\lambda = e^{-\frac{1}{2}\int l dx}$, viene eliminato il termine del 1.° ordine in x; analogamente per y.

III. Dicendo per brevità l_1, m_1, n_1 i coefficienti della (2) e ponendo $\lambda = e^\theta$, risulta:

$$\left.\begin{aligned} \frac{l_1}{2} &= \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{l}{2} \\ \frac{m_1}{2} &= \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{m}{2} \\ n_1 &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 + l \frac{\partial \theta}{\partial x} + m \frac{\partial \theta}{\partial y} + n. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Eliminando θ, si ottiene facilmente:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial l_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial m_1}{\partial y} + \frac{l_1^2}{4} + \frac{m_1^2}{4} - n_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial m}{\partial y} + \frac{l^2}{4} + \frac{m^2}{4} - n;$$

quindi la funzione:

$$K = \frac{1}{2}\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial m}{\partial y} + \frac{l^2 + m^2}{4} - n, \tag{4}$$

è un *invariante* relativo alla sostituzione:

$$z = \lambda z. \tag{5}$$

2. Proponiamoci intanto di stabilire un criterio atto a riconoscere se una data equazione (1) è riducibile alla forma semplice:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} = 0, \tag{5'}$$

mediante una sostituzione della forma (5).

A tale scopo osserviamo, che la precedente equazione ha l'invariante K uguale a zero; ogni equazione quindi riducibile a quella forma deve appartenere a quel tipo d'equazioni (1), per le quali $K = 0$.

Supponiamo dunque la (1) ad invariante nullo; essa può allora scriversi, come è facile vedere,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + l\frac{\partial z}{\partial x} + m\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{z}{2}\frac{\partial m}{\partial y} + \frac{l^2 + m^2}{2} z = 0, \tag{6}$$

od anche,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{l}{2}z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{m}{2}z\right)+\frac{l}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{l}{2}z\right)+\frac{m}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{m}{2}z\right)=0. \quad (6')$$

Posto:

$$\alpha=e^{\frac{1}{2}\int l dx}, \qquad \beta=e^{\frac{1}{2}\int m dy},$$

si ricava:

$$\frac{1}{2}l=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}, \qquad \frac{1}{2}m=\frac{1}{\beta}\frac{\partial\beta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{l}{2}z=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{m}{2}z=\frac{1}{\beta}\frac{\partial\beta z}{\partial y};$$

e quindi l'equazione (6') si scrive:

$$\beta\frac{\partial^2\alpha z}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial^2\beta z}{\partial y^2}=0. \quad (7)$$

Concludendo: *Ogni equazione* (1) *ad invariante nullo è riducibile alla forma* (7). (L'inversa è vera.)

Di qui segue, che essa può ridursi all'equazione di Laplace (5') nel modo considerato quando $\alpha=\beta\cdot X(x)$ o $\alpha=\beta\cdot Y(y)$, ossia $l=\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $m=\frac{\partial\theta}{\partial y}$, essendo θ una funzione qualunque. In tal caso la sostituzione da operare è $z_1=e^{\frac{\theta}{2}}z$. Dunque:

Un' equazione (1) *è riducibile alla forma di Laplace con una sostituzione* (5), *quando il suo invariante K è nullo, e l'espressione $ldx+mdy$* è *differenziale esatto.*

Questa proposizione si poteva ottenere immediatamente in modo diretto; ma la via ora seguita ha fatto conoscere qualche proprietà delle equazioni ad invariante nullo.

3. Aggiungiamo alcune osservazioni su questo tipo d'equazioni. Se l'equazione data (1) è ad invariante nullo, anche la sua *aggiunta*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-l\frac{\partial u}{\partial x}-m\frac{\partial u}{\partial y}+\left(n-\frac{\partial l}{\partial x}-\frac{\partial m}{\partial y}\right)u=0, \quad (8)$$

è, evidentemente, ad invariante nullo. Segue da ciò, che essa può porsi sotto la forma (7). Per avere in questo caso le espressioni dei coefficienti α e β, osserviamo che, essendo:

$$n - \frac{1}{2}\frac{\partial l}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{l^2 + m^2}{4},$$

l'equazione (8) si può scrivere:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - l\frac{\partial u}{\partial x} - m\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial l}{\partial x}u - \frac{1}{2}\frac{\partial m}{\partial y}u + \frac{l^2 + m^2}{4}u = 0.$$

Dal paragone colla (6) risulta, che questa può ricavarsi dalla (6) stessa col semplice cambiamento di l in $-l$, m in $-m$. Ma la (6) equivale alla (7); quindi la (8) equivale all'equazione:

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial^2 \frac{u}{\alpha}}{\partial x^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2 \frac{u}{\beta}}{\partial y^2} = 0, \tag{7'}$$

che si ricava dalla (7) sostituendo $\frac{1}{\alpha}$ ad α, $\frac{1}{\beta}$ a β.

Se consideriamo quest'ultima equazione insieme all'equazione (7), risulta subito l'identità:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \beta z}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 \alpha z}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 \frac{u}{\alpha}}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \frac{u}{\beta}}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 0,$$

essendo u e z una coppia qualunque di soluzioni dell'equazioni considerate.

Una equazione coincide colla sua *aggiunta* solo quando è riducibile alla forma semplice di LAPLACE; ma si può chiedere: Esiste qualche caso, nel quale l'integrazione dell'una *risparmia* quella dell'altra? È facile vedere che ciò avviene, quando il rapporto $\frac{\alpha}{\beta}$ è una funzione simmetrica di x e y. Infatti, posto:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \gamma, \qquad \beta z = z_1, \qquad \frac{u}{\alpha} = u_1,$$

l'equazioni (7) e (7') si scrivono:

$$\frac{\partial^2 \gamma z_1}{\partial x^2} + \gamma\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} = 0,$$

$$\gamma\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma u_1}{\partial y^2} = 0,$$

od anche:

$$\gamma\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{\partial z_1}{\partial x}+\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}z_1=0$$

$$\gamma\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial \gamma}{\partial y}\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2}u_1=0.$$

Sia ora z_1 una soluzione qualunque della prima equazione, e diciamo z_2 ciò che diventa z_1 quando si scambiano tra loro x ed y. Questa z_2 soddisfa allora l'equazione:

$$\gamma_1\left(\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial \gamma_1}{\partial y}\frac{\partial z_2}{\partial y}+\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial y^2}z_2=0,$$

la quale, se $\gamma_1=\gamma$, coincide coll'*aggiunta.*

Dunque: *Se* $z=\frac{1}{\beta}\cdot z_1(x, y)$ *è l'integrale generale d'una equazione ad invariante nullo, per la quale* $\frac{\alpha}{\beta}$ *è funzione simmetrica rispetto alle variabili* x *ed* y*, l'integrale generale della sua aggiunta è dato da* $u=\alpha\cdot z_1(y, x)$.

4. Consideriamo adesso le equazioni (1) ad invariante non nullo, per le quali sia soddisfatta la condizione:

$$l dx+m dy=d\theta.$$

Esse sono riducibili alla forma caratteristica

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}=n_1 z_1,$$

con una sostituzione della forma $z=\lambda z_1$.

Infatti, eseguita la sostituzione, si deve ottenere $l_1=0$, $m_1=0$; ma allora per le (3) risulta:

$$\frac{l}{2}=-\frac{\partial \theta}{\partial x}, \qquad \frac{m}{2}=-\frac{\partial \theta}{\partial y},$$

che dimostra quanto si voleva. Di qui si conclude ancora che la sostituzione da operare è $z=e^{-\frac{\theta}{2}}z_1$.

Mediante l'ultima delle (3) si calcola poi l'espressione di n_1; si trova subito:

$$n_1=\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2+2n\right).$$

Perchè n_1 risulti nullo, è necessario che θ soddisfi l'equazione:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2-2n=0,$$

la quale, posto:

$$e^{-\frac{\theta}{2}}=\lambda,$$

diventa:

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+n\lambda=0. \tag{9}$$

Si può dunque dire: *Se θ è tal funzione che $e^{-\frac{\theta}{2}}$ soddisfa la* (9), *l'equazione* (1), *quando sia $l\,dx+m\,dy=d\theta$, è riducibile alla forma di Laplace.* Sotto altro aspetto, è il risultato già ottenuto precedentemente.

5. Riprendiamo l'equazione (1):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+l\frac{\partial z}{\partial x}+m\frac{\partial z}{\partial y}+nz=0;$$

essa può porsi, colla conoscenza d'una sua soluzione particolare, sotto una forma notevole.

Sia, infatti, σ una sua soluzione; si avrà:

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}+l\frac{\partial\sigma}{\partial x}+m\frac{\partial\sigma}{\partial y}+n\sigma=0.$$

Eliminando il coefficiente n tra questa e la precedente, si trova subito:

$$\left(\sigma\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-z\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\right)+\left(\sigma\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-z\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\right)+l\left(\sigma\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)+$$
$$+m\left(\sigma\frac{\partial z}{\partial y}-z\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)=0;$$

la quale può anche scriversi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma\frac{\partial z}{\partial y}-z\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)+l\left(\sigma\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)+$$
$$+m\left(\sigma\frac{\partial z}{\partial y}-z\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)=0.$$

Ma

$$\sigma\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\sigma^2\frac{\partial\frac{z}{\sigma}}{\partial x}$$

$$\sigma\frac{\partial z}{\partial y}-z\frac{\partial\sigma}{\partial y}=\sigma^2\frac{\partial\frac{z}{\sigma}}{\partial y};$$

perciò la precedente equazione diventa:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma^2 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma^2 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial y}\right) + l\left(\sigma^2 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial x}\right) + m\left(\sigma^2 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial y}\right) = 0.$$

Moltiplichiamo adesso tutta l'equazione per

$$e^{\int l dx} \cdot e^{\int m dy} = \alpha \cdot \beta,$$

ed ordiniamo nella maniera seguente:

$$\beta\left\{\alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma^2 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial x}\right) + l\alpha \cdot \sigma^2 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial x}\right\} + \alpha\left\{\beta \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma^2 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial y}\right) + m\beta \cdot \sigma^2 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial y}\right\} = 0.$$

Risulta allora evidente che essa può scriversi:

$$\beta \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \cdot \sigma^2 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial x}\right) + \alpha \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta \cdot \sigma^2 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial y}\right) = 0,$$

o più semplicemente:

$$m_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(l_1 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial x}\right) + l_1 \frac{\partial}{\partial y}\left(m_1 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial y}\right) = 0, \tag{10}$$

avendo posto:

$$l_1 = \sigma^2 \cdot \alpha, \quad m_1 = \sigma^2 \cdot \beta.$$

È la forma dell'equazione (1) che si cercava.

6. Di qui si deduce immediatamente il noto teorema di Moutard, che trova applicazioni importanti nella teoria delle superficie (Bianchi, *Geometria differenziale,* Cap. XII).

Basta, infatti, supporre:

$$l dx + m dy = d\theta;$$

onde la (10) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^\theta \sigma^2 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(e^\theta \sigma^2 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial y}\right) = 0. \tag{11}$$

Questa dice che l'espressione:

$$e^\theta\left(\sigma^2 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial x} dy - \sigma^2 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial y} dx\right),$$

è differenziale esatto; possiamo quindi associare alla z una funzione φ, in guisa che si abbia:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= -e^{\theta}\sigma^2\frac{\partial\frac{z}{\sigma}}{\partial y}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= +e^{\theta}\sigma^2\frac{\partial\frac{z}{\sigma}}{\partial x}.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Allora la φ così definita soddisfa l'equazione:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{e^{\theta}\sigma^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{e^{\theta}\sigma^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=0, \tag{13}$$

il cui integrale generale si ricava da quello della (11) con una semplice quadratura:

$$\varphi=\int\left\{e^{\theta}\sigma^2\frac{\partial\frac{z}{\sigma}}{\partial x}dy-e^{\theta}\sigma^2\frac{\partial\frac{z}{\sigma}}{\partial y}dx\right\}. \tag{14}$$

Viceversa; se è noto l'integrale generale della (13), si ricava quello dell'equazione (11) mediante la quadratura:

$$z=\sigma\int\left\{\frac{1}{e^{\theta}\sigma^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx-\frac{1}{e^{\theta}\sigma^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy\right\}. \tag{14'}$$

Facendo percorrere a σ le espressioni delle differenti soluzioni della (11), si ricavano infinite equazioni (13), che si chiamano le *associate* della proposta. Si conclude dunque:

Integrata una equazione del tipo (11), *si possono costruire, coll'aiuto delle differenti sue soluzioni, infinite equazioni associate, i cui integrali generali si ricavano da quello della proposta con semplici quadrature.*

Viceversa: *Nota un'associata ed il suo integrale generale, si può ricavare con semplice quadratura l'integrale generale della proposta, e poi di tutte le altre associate.*

L'equazione (11) è di quelle riducibili alla forma:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=nz,$$

colle solite sostituzioni. Anche tutte le sue associate sono riducibili evidentemente alla stessa forma, e la sostituzione da operare si trova subito colla proposizione del n.° 4.

7. Tornando all'equazione generale (10):

$$m_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(l_1 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial x}\right) + l_1 \frac{\partial}{\partial y}\left(m_1 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial y}\right) = 0,$$

è chiaro che si può porre:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(l_1 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial x}\right) = -\rho l_1$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(m_1 \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial y}\right) = \rho m_1,$$

essendo ρ una funzione di x ed y. Se ora si suppone ρ determinato in tal guisa da rendere l'espressione:

$$-\left(\frac{1}{l_1} \cdot \int \rho l_1 dx\right) dx + \left(\frac{1}{m_1} \cdot \int \rho m_1 dy\right) dy, \tag{15}$$

un differenziale esatto, si ricava immediatamente:

$$z = \sigma \left\{ -\int \left(\frac{1}{l_1} \int \rho l_1 dx\right) dx + \int \left(\frac{1}{m_1} \int \rho m_1 dy\right) dy \right\}.$$

La conoscenza dunque di una espressione di ρ conduce alla determinazione d'una soluzione dell'equazione proposta mediante quadrature.

La funzione ρ è perciò un vero *fattore integrante,* come quelli che s'incontrano nella teoria dell'equazioni lineari del 1.° ordine.

Per completare utilmente il teorema ora dimostrato, bisognerebbe trovare l'equazione alla quale soddisfano i fattori ρ, e che è implicita nella condizione (15). Tale ricerca, eseguita in modo diretto, conduce ad una equazione assai complicata d'un ordine superiore al secondo, mentre è chiaro che deve ridursi al 2.° ordine. Non essendo giunto a tale riduzione, preferisco lasciare il teorema incompleto.

Prima d'ultimare questa parte si osservi, che l'equazione *aggiunta* della (1) si ottiene subito, analogamente a quanto si è detto per le equazioni ad invariante nullo, cambiando l in $-l$, m in $-m$, σ in λ, essendo λ una soluzione particolare qualunque dell'aggiunta stessa. Si ha perciò:

$$m' \frac{\partial}{\partial x}\left(l' \frac{\partial \frac{u}{\lambda}}{\partial x}\right) + l' \frac{\partial}{\partial y}\left(m' \frac{\partial \frac{u}{\lambda}}{\partial y}\right) = 0,$$

avendo posto:

$$l' = \frac{\lambda^2}{\alpha}, \qquad m' = \frac{\lambda^2}{\beta}.$$

Se poi si scrive questa equazione accanto alla (10), si deduce immediatamente l'identità:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(l_1 \dfrac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(m_1 \dfrac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(m' \dfrac{\partial \frac{u}{\lambda}}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(l' \dfrac{\partial \frac{u}{\lambda}}{\partial x}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

essendo z ed u una coppia qualunque di soluzioni della (10) e della sua aggiunta.

CAPITOLO II.

Teorema generale delle associate. — Teorema di Bianchi. Formule di Green. — Teoremi di Riemann. Sulle soluzioni comuni ad un'equazione del 2.° ordine ed una del 1.°, e a due equazioni del 2.° ordine.

8. Abbiamo trovato relativamente al tipo speciale delle equazioni (11) un teorema, il quale insegna la maniera per costruire le *associate,* che s'integrano poi per quadrature quando sia integrata la proposta. Vogliamo ora qui occuparci della generalizzazione completa di questo teorema.

Cominciamo a considerare, per chiarezza e semplicità, le equazioni del 2.° ordine ridotte alla forma:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + l\frac{\partial z}{\partial x} + m\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \tag{15'}$$

ove l ed m sono due funzioni qualunque di x ed y.

È facile dimostrare, che i coefficienti l ed m si possono porre in infiniti modi sotto la forma:

$$\frac{1}{b}\left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right), \qquad \frac{1}{b}\left(\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial x}\right), \tag{16}$$

essendo a e b due certe funzioni di x ed y. Infatti, perchè ciò avvenga, è necessario che le funzioni a e b soddisfino il sistema:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}&=bl\\ \frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial a}{\partial x}&=bm.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

Eliminando a fra queste equazioni, si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial b}{\partial x}-bl\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial b}{\partial y}-bm\right)=0,$$

ossia:

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}-l\frac{\partial b}{\partial x}-m\frac{\partial b}{\partial y}-\left(\frac{\partial l}{\partial x}+\frac{\partial m}{\partial y}\right)b=0,$$

che è l'equazione aggiunta della proposta.

Presa una soluzione qualunque di questa equazione e sostituita alla funzione b nel sistema (17), si potrà ricavare la corrispondente espressione di a con una quadratura. Da ciò risulta, che si possono veramente porre i due coefficienti l ed m sotto la forma (16) in una infinità di modi.

Ciò posto, prendiamo l'equazione proposta e scriviamola, in virtù dell'osservazione precedente, sotto la forma:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{1}{b}\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{b}\left(\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial a}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Aggiungendo e togliendo $a\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, dopo aver moltiplicato tutta l'equazione per b, è facile ridurla alla forma semplice:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(b\frac{\partial}{\partial x}+a\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial z}{\partial y}-a\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0.\tag{18}$$

Questa equazione esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'espressione:

$$\left(b\frac{\partial z}{\partial y}-a\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx-\left(b\frac{\partial z}{\partial x}+a\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy,$$

sia un differenziale esatto; potremo quindi associare alla z una funzione φ, tale che risulti:

$$\left.\begin{aligned}b\frac{\partial z}{\partial y}-a\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ b\frac{\partial z}{\partial x}+a\frac{\partial z}{\partial y}&=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

Ogni funzione φ così definita soddisfa pure una equazione lineare del 2.° ordine e del tipo (15'). Per ottenerla, si risolva il sistema precedente rispetto alle derivate della funzione z; si trova subito:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{a}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{b}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ -\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{b}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{a}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

avendo posto:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Eliminando ora per derivazione la z, si ottiene l'equazione cercata. Ma per averla sotto forma sviluppata con i coefficienti funzioni di a, b, l ed m, si osservi che il sistema (20) risulta immediatamente dal sistema (19) cambiando z in φ e φ in z, a in $\frac{a}{c^2}$, b in $-\frac{b}{c^2}$; cosicchè i coefficienti dell'equazione in φ, che diremo λ e μ, si otterranno dalle (16) ponendo $\frac{a}{c^2}$ in luogo di a, $-\frac{b}{c^2}$ in luogo di b, e si avrà perciò:

$$\lambda = \frac{b}{c^2}\left\{\frac{\partial \frac{b}{c^2}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{a}{c^2}}{\partial y}\right\}$$

$$\mu = -\frac{b}{c^2}\left\{\frac{\partial \frac{a}{c^2}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{b}{c^2}}{\partial y}\right\}.$$

Sviluppando adesso le derivazioni qui indicate si trova facilmente:

$$\lambda = \frac{b}{c^6}\left\{(a^2 - b^2)\left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) - 2ab\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right)\right\}$$

$$\mu = \frac{b}{c^6}\left\{(a^2 - b^2)\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right) + 2ab\left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)\right\},$$

ossia, in virtù delle (16),

$$\lambda = \frac{b^2}{c^6}\left\{(a^2 - b^2)l - 2abm\right\}$$

$$\mu = \frac{b^2}{c^6}\left\{(a^2 - b^2)m + 2abl\right\}.$$

Abbiamo così i coefficienti λ e μ della nuova equazione in φ espressi per a,

b, l ed m, come si voleva; talchè l'equazione stessa può scriversi:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{b^2}{c^6}\left\{(a^2-b^2)l-2abm\right\}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{b^2}{c^6}\left\{(a^2-b^2)m+2abl\right\}\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0. \quad (21)$$

Concludendo: *Per ogni soluzione z dell'equazione proposta si può determinare una soluzione di questa associata mediante la semplice quadratura:*

$$\varphi=\int\left[\left(b\frac{\partial z}{\partial y}-a\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx-\left(b\frac{\partial z}{\partial x}+a\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy\right].$$

Viceversa: *Nota una soluzione dell'associata, si determina una soluzione della proposta colla quadratura:*

$$z=-\int\left[\frac{1}{c^2}\left(a\frac{\partial \varphi}{\partial x}+b\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dx-\frac{1}{c^2}\left(b\frac{\partial \varphi}{\partial x}-a\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dy\right].$$

L'equazione (21) poi non è la sola equazione associata. Ricordiamo che i coefficienti a e b dell'equazione proposta si possono porre in infiniti modi sotto la forma (16); per conseguenza *si potrà costruire un'equazione associata* (21) *corrispondentemente ad ogni coppia* (a, b), *colla quale vengono formati i coefficienti l ed m.*

Che due associate siano veramente tra loro diverse, risulta evidente col ragionamento qui appresso. Rappresentiamo con (a_i, b_i) una coppia di soluzioni del sistema (17), e poniamo per brevità:

$$\frac{b_i^2}{c_i^6}(a_i^2-b_i^2)=\alpha_i, \qquad -2a_ib_i\cdot\frac{b_i^2}{c_i^6}=\beta_i.$$

Consideriamo allora le due associate:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+(\alpha_r l+\beta_r m)\frac{\partial \varphi}{\partial x}+(\alpha_r m-\beta_r l)\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+(\alpha_s l+\beta_s m)\frac{\partial \varphi}{\partial x}+(\alpha_s m-\beta_s l)\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0,$$

essendo $r \neq s$; perchè siano fra loro uguali, dovrà essere:

$$\alpha_r l+\beta_r m=\alpha_s l+\beta_s m$$
$$\alpha_r m-\beta_r l=\alpha_s m-\beta_s l,$$

ossia:

$$(\alpha_r-\alpha_s)l+(\beta_r-\beta_s)m=0$$
$$-(\beta_r-\beta_s)l+(\alpha_r-\alpha_s)m=0.$$

Se ora escludiamo il caso che l ed m siano nulle ad un tempo, queste condizioni equivalgono all'altra:

$$(\alpha_r - \alpha_s)^2 + (\beta_r - \beta_s)^2 = 0,$$

cioè:

$$\alpha_r = \alpha_s, \qquad \beta_r = \beta_s.$$

Ma l'assurdità di queste relazioni tra le coppie di soluzioni del sistema (17) risulta chiaramente. Nel caso poi di $l = m = 0$ tutte le associate coincidono coll'equazione proposta.

9. Resta facile adesso estendere il teorema anche all'equazione generale:

$$\alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + l \frac{\partial z}{\partial x} + m \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \tag{23}$$

nella regione $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$. Anzitutto osserviamo, che una tale equazione si può sempre mettere sotto la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F \frac{\partial z}{\partial y} - G \frac{\partial z}{\partial x}}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F \frac{\partial z}{\partial x} - E \frac{\partial z}{\partial y}}{H}\right) + l_1 \frac{\partial z}{\partial x} + m_1 \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \tag{24}$$

essendo:

$$E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2,$$

una forma quadratica definita, e $H = \sqrt{EG - F^2}$.

Basta, infatti, dividere tutta l'equazione per $\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2} = \delta$, ed aggiungere e togliere l'espressione:

$$\left(\frac{\partial \frac{\beta}{\delta}}{\partial y} + \frac{\partial \frac{\alpha}{\delta}}{\partial x}\right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial \frac{\beta}{\delta}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{\gamma}{\delta}}{\partial y}\right) \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Consideriamo dunque l'equazione (24), che scriveremo per semplicità e simmetria senza indici:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F \frac{\partial z}{\partial y} - G \frac{\partial z}{\partial x}}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F \frac{\partial z}{\partial x} - E \frac{\partial z}{\partial y}}{H}\right) + l \frac{\partial z}{\partial x} + m \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{25}$$

Ripetendo allora parola per parola i ragionamenti fatti nel numero precedente, si vede che, se (a, b) è una coppia di soluzioni del sistema:

$$G \frac{\partial bH}{\partial x} - F \frac{\partial bH}{\partial y} - H \frac{\partial a}{\partial y} = bHl$$

$$E \frac{\partial bH}{\partial y} - F \frac{\partial bH}{\partial x} + H \frac{\partial a}{\partial x} = bHm,$$

l'equazione (25) si può scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{b\left(G\frac{\partial z}{\partial x}-F\frac{\partial z}{\partial y}\right)+a\frac{\partial z}{\partial y}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{b\left(E\frac{\partial z}{\partial y}-F\frac{\partial z}{\partial x}\right)-a\frac{\partial z}{\partial x}\right\}=0; \quad (26)$$

quindi possiamo anche qui associare alla z una funzione φ, tale che si abbia:

$$\left.\begin{aligned} b\left(E\frac{\partial z}{\partial y}-F\frac{\partial z}{\partial x}\right)-a\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ b\left(G\frac{\partial z}{\partial x}-F\frac{\partial z}{\partial y}\right)+a\frac{\partial z}{\partial y}&=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Le φ così definite soddisfano pure un'equazione del 2.° ordine del tipo (25). Risolvendo infatti il sistema precedente rispetto alle derivate della funzione z, si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{b\left(F\frac{\partial\varphi}{\partial x}-E\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-a\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{b^2H^2+a^2}\\ -\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{b\left(F\frac{\partial\varphi}{\partial y}-G\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+a\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{b^2H^2+a^2},\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

ed eliminando poi la z, risulta:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b\left(F\frac{\partial\varphi}{\partial y}-G\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+a\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{b^2H^2+a^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b\left(F\frac{\partial\varphi}{\partial x}-E\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-a\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{b^2H^2+a^2}\right)=0. \quad (29)$$

Questa equazione differisce dalla (26) per la sostituzione di $-\frac{b}{b^2H^2+a^2}$ alla funzione b, e di $\frac{a}{b^2H^2+a^2}$ ad a.

Senza più oltre insistere, possiamo dunque concludere, conformemente a quanto si è detto nel numero precedente:

Proposta una equazione (23), *esistono infinite equazioni associate i cui integrali generali si ricavano da quello della* (23) *con una semplice quadratura:*

$$\varphi=\int\left\{\left(b\left(E\frac{\partial z}{\partial y}-F\frac{\partial z}{\partial x}\right)-a\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx-\left(b\left(G\frac{\partial z}{\partial x}-F\frac{\partial z}{\partial y}\right)+a\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy\right\}. \quad (30)$$

Viceversa: *Nota un'associata qualunque ed il suo integrale, con semplici quadrature si ricavano gli integrali generali della proposta e di tutte le sue associate. A ciò servono le formule* (28).

10. La forma (26) data all'equazione proposta conduce ancora nel modo più semplice e diretto ad un importante teorema dovuto al prof. Bianchi (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1889), e che si può enunciare:

Nella regione R del piano (o superficie) ove $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$, *non può esistere che una sola funzione* $z(x, y)$, *la quale, mantenendosi finita e continua insieme alle sue derivate prime in un' area* σ *racchiusa da un contorno s tutto compreso in R, assuma sul contorno medesimo una data successione (continua) di valori e soddisfi l' equazione* (23) *I coefficienti di questa equazione si suppongono naturalmente finiti e continui nella regione considerata.*

Siano infatti z_1 e z_2 due soluzioni dell' equazione (23) soddisfacenti alle condizioni ora accennate, o, come dice il prof. Bianchi, *regolari* nell' area σ, e che coincidono sul contorno s. La loro differenza $z = z_1 - z_2$ è pure soluzione della (23) regolare nell' area σ, e s' annulla sul contorno s. Perciò, se z_1 e z_2 non possono essere due soluzioni distinte, la z dovrà esser nulla anche in tutta l' area. È dunque questo che si tratta di dimostrare.

A tale scopo poniamo l' equazione proposta sotto la forma (26):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{b\left(G\frac{\partial z}{\partial x} - F\frac{\partial z}{\partial y}\right) + a\frac{\partial z}{\partial y}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{b\left(E\frac{\partial z}{\partial y} - F\frac{\partial z}{\partial x}\right) - a\frac{\partial z}{\partial x}\right\} = 0.$$

ove z rappresenta la soluzione anzidetta.

Moltiplicando questa equazione per z, è facile vedere che può scriversi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{zb\left(G\frac{\partial z}{\partial x} - F\frac{\partial z}{\partial y}\right) + az\frac{\partial z}{\partial y}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{zb\left(E\frac{\partial z}{\partial y} - F\frac{\partial z}{\partial x}\right) - az\frac{\partial z}{\partial x}\right\} =$$
$$= b\left\{\left(G\frac{\partial z}{\partial x} - F\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \left(E\frac{\partial z}{\partial y} - F\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y}\right\},$$

o più semplicemente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{zb\left(G\frac{\partial z}{\partial x} - F\frac{\partial z}{\partial y}\right) + az\frac{\partial z}{\partial y}\right\} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left\{zb\left(E\frac{\partial z}{\partial y} - F\frac{\partial z}{\partial x}\right) - az\frac{\partial z}{\partial x}\right\} = bH^2 \cdot \Delta_1 z,$$

ove $\Delta_1 z$ è il noto *parametro differenziale primo* di z relativo alla forma quadratica:

$$E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2.$$

Ciò posto, integriamo ambo i membri di questa equazione su tutta l' area σ.

Applicando allora al primo membro la notissima trasformazione di Gauss, si ottiene immediatamente:

$$\left.\begin{aligned} &-\int_s z\left\{\left[b\left(G\frac{\partial z}{\partial x}-F\frac{\partial z}{\partial y}\right)+a\frac{\partial z}{\partial y}\right]\frac{\partial x}{\partial n}+\right.\\ &\left.+\left[b\left(E\frac{\partial z}{\partial y}-F\frac{\partial z}{\partial x}\right)-a\frac{\partial z}{\partial x}\right]\frac{\partial y}{\partial n}\right\}ds=\int_\sigma bH^2\cdot\Delta_1 z\,d\sigma, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

ove n è la normale diretta verso l'interno di σ.

Ma l'integrale del primo membro è nullo, perchè nulla è la z sopra tutto il contorno s; resta quindi:

$$\int_\sigma bH^2\cdot\Delta_1 z\,d\sigma=0.$$

Ora, $\Delta_1 z$ è nella regione considerata essenzialmente positivo (*Parametri differenziali,* Beltrami); per conseguenza, ovunque b è diverso da zero, l'integrale precedente non può essere nullo, se non è $z=$ cost. in tutta l'area σ. Il teorema è dimostrato.

Si osserverà, volendo essere rigorosi, che la restrizione ulteriore $b \neq 0$ non è che apparente. Essa è contenuta nelle ipotesi di regolarità dei coefficienti della equazione primitiva (23).

Si aggiunga che il teorema è ancora vero, quando l'equazione data ha un termine nz indipendente dalle derivate di z, purchè n sia minore di zero nell'area considerata. Ciò è evidente (Bianchi, Nota citata).

11. Il teorema ora dimostrato dice dunque che, se esiste una funzione z soddisfacente a tutte le condizioni sopra enunciate e che prenda sul contorno una successione data di valori, essa è unica.

Nasce quindi immediatamente quest'altro problema di maggiore interesse e difficoltà: Una tale funzione esiste sempre? Riemann nella sua celebre Dissertazione Inaugurale ha dato una risposta affermativa per il caso particolarissimo dell'equazione di Laplace $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, basandosi sopra una dimostrazione, la quale, benchè non perfettamente rigorosa, è di grandissima semplicità. Tale dimostrazione essendo valida anche per un caso molto più generale, grazie alle formule stabilite nei numeri precedenti, non credo inutile di riprodurla, trovando giuste le parole del Picard: « Quoique cette démonstration ne présente pas une rigueur suffisante, elle rend tout au moins *très vraisemblable le théorème en question,* et elle est le type d'un genre de raisonnement fréquemment employé en Physique Mathématique et dont, faute de mieux, on doit souvent se contenter. » (*Traité d'Analyse,* tome II, pag. 435.)

Cominciamo a stabilire una formula, che nel caso speciale dell'equazione di LAPLACE è conosciuta sotto il nome di *formula di Green.*

Indicando con z ed u due funzioni qualunque di x ed y, consideriamo le quattro identità:

$$b\left(G\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}-F\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{ub\left(G\frac{\partial z}{\partial x}-F\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\}-u\frac{\partial}{\partial x}\left\{b\left(G\frac{\partial z}{\partial x}-F\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\}$$

$$b\left(E\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-F\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left\{ub\left(E\frac{\partial z}{\partial y}-F\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}-u\frac{\partial}{\partial y}\left\{b\left(E\frac{\partial z}{\partial y}-F\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}$$

$$a\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(ua\frac{\partial z}{\partial y}\right)-u\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$-a\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(ua\frac{\partial z}{\partial x}\right)-u\frac{\partial}{\partial y}\left(-a\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Sommate membro a membro dànno evidentemente:

$$bH^2\cdot\Delta(z,\ u)+a\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{ub\left(G\frac{\partial z}{\partial x}-F\frac{\partial z}{\partial y}\right)+au\frac{\partial z}{\partial y}\right\}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{ub\left(E\frac{\partial z}{\partial y}-F\frac{\partial z}{\partial x}\right)-au\frac{\partial z}{\partial x}\right\}-u\Pi(z),$$

ove $\Delta(z,\ u)$ rappresenta il noto parametro differenzial misto di z ed u relativo alla solita forma quadratica, e $\Pi(z)$ rappresenta il primo membro dell'equazione (26).

Supponiamo adesso che le funzioni z ed u siano *regolari* nella regione R insieme alle altre che compariscono nell'identità precedente, e diciamo σ un'area racchiusa da un contorno s tutto compreso in R. Integrando allora ambo i membri su tutta l'area σ, ed applicando ai due primi termini del secondo membro la solita trasformazione di GAUSS, si trova subito:

$$\left.\begin{aligned}&\int_\sigma bH^2\cdot\Delta(z,\ u)d\sigma+\int_\sigma a\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right)d\sigma=\\ &=-\int_s u\left\{b\left(G\frac{\partial z}{\partial x}-F\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial n}+b\left(E\frac{\partial z}{\partial y}-F\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial n}+a\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\}ds-\\ &\qquad-\int u\,\Pi(z)d\sigma,\end{aligned}\right\}\quad(32)$$

che è la formula cercata. La normale n è diretta, come al solito, verso l'interno dell' area.

Questa formula è evidentemente la generalizzazione della (31); a quella si giunge ponendo $u = z$ e supponendo z soluzione dell' equazione $\Pi(z) = 0$. Si può quindi anche partire dalla (32) per giungere al teorema di Bianchi. Da quella si possono poi ricavare parecchie altre formule, quando si facciano speciali ipotesi sulle funzioni z ed u.

Così, ad esempio, supponiamo che z soddisfi l'equazione $\Pi(z) = 0$, e che u sia la soluzione corrispondente della equazione *associata* costruita cogli attuali valori di a e b. Allora per le (27) si ha:

$$b\left(E\frac{\partial z}{\partial y} - F\frac{\partial z}{\partial x}\right) - a\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$b\left(G\frac{\partial z}{\partial x} - F\frac{\partial z}{\partial y}\right) + a\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

le quali, moltiplicate in croce, dànno evidentemente:

$$bH^2 \cdot \Delta(z,\ u) + a\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Per conseguenza nel caso presente la formula (32) diventa:

$$\int_s u\left\{b\left(G\frac{\partial z}{\partial x} - F\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial n} + b\left(E\frac{\partial z}{\partial y} - F\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial n} + a\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\}ds = 0.$$

Come secondo esempio, poniamo nella (32) $u = \text{cost.}$, e sia z una funzione qualunque; si ottiene:

$$\int_s \left\{b\left(G\frac{\partial z}{\partial x} - F\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial n} + b\left(E\frac{\partial z}{\partial y} - F\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial n} + a\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\}ds + \\ + \int_\sigma \Pi(z)\,d\sigma = 0.$$

Di qui risulta che, se per tutti i contorni s della regione R:

$$\int_s \left\{b\left(G\frac{\partial z}{\partial x} - F\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial n} + b\left(E\frac{\partial z}{\partial y} - F\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial n} + a\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\}ds = 0,$$

la funzione z soddisfa l'equazione (26):

$$\Pi(z) = 0.$$

Ma senza più oltre insistere su questi esempi, veniamo alle proposizioni di Riemann. Sia z una funzione *regolare* nell'area σ limitata da un contorno s e sul contorno medesimo, e che soddisfi l'equazione $\Pi(z)=0$. Consideriamo l'integrale:

$$J=\int_\sigma b H^2\cdot\Delta_1 u\,d\sigma+2\int_\sigma a\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right)d\sigma,$$

ove la u rappresenta una funzione soddisfacente alle stesse condizioni di *regolarità* della z, e che sul contorno prende la stessa successione di valori della z. Dimostriamo allora che, *in questa ipotesi, l'integrale precedente è minimo* (valore assoluto) *per* $u=z$.

Infatti, la funzione $V=u-z$ è nulla sul contorno, e l'integrale J si può scrivere:

$$J=\int_\sigma b H^2\Delta_1 z\,d\sigma+2\int_\sigma b H^2\Delta(z,\ V)d\sigma+\int_\sigma b H^2\Delta_1 V d\sigma+$$
$$+2\int_\sigma a\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}\right)d\sigma.$$

Ma per la (32) e per le proprietà di V e z ammesse per ipotesi risulta evidentemente:

$$\int_\sigma b H^2\cdot\Delta(z,\ V)d\sigma+\int_\sigma a\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}\right)d\sigma=0,$$

per conseguenza:

$$J=\int_\sigma b H^2\Delta_1 z\,d\sigma+\int_\sigma b H^2\Delta_1 V d\sigma.$$

Poichè b, per le cose già dette, mantiene un segno invariabile nella regione che consideriamo, si vede di qui che J è minimo in valore assoluto per $u=z$, e non già per un'altra u coincidente sul contorno con z.

Questa proposizione ammette l'inversa. Siano z ed u due funzioni che coincidono sul contorno s e che soddisfano in σ alle solite condizioni di *regolarità*.

Se l'integrale J è minimo (valore assoluto) quando si pone z al posto di u, la funzione z soddisfa l'equazione $\Pi(z)=0$.

Poniamo infatti:

$$u=z+\varepsilon V,$$

essendo ε una certa costante e V una funzione di x ed y che s'annulla sul contorno s. Sostituendo questa espressione di u in J, si ha:

$$J = \int_\sigma b H^2 \Delta_1 z \, d\sigma + 2\varepsilon \int_\sigma b H^2 \Delta_1(z, V) d\sigma + \varepsilon^2 \int_\sigma b H^2 \Delta_1 V d\sigma +$$

$$+ 2\varepsilon \int_\sigma a \left(\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\sigma,$$

ossia per la (32):

$$J = \int_\sigma b H^2 \Delta_1 z \, d\sigma + \varepsilon^2 \int_\sigma b H^2 \Delta_1 V d\sigma - 2\varepsilon \int_\sigma V \Pi(z) d\sigma.$$

Ora per ipotesi J è minimo in valore assoluto per $V = 0$, deve quindi sempre essere:

$$\varepsilon^2 \int_\sigma b H^2 \Delta_1 V d\sigma - 2\varepsilon \int_\sigma V \Pi(z) d\sigma > 0 \quad \text{oppure} \quad < 0,$$

comunque si disponga della V dentro l'area σ.

Ma questo non può avvenire se non è:

$$\int_\sigma V \Pi(z) d\sigma = 0,$$

giacchè si potrebbe altrimenti scegliere una tale ε da rendere l'espressione precedente minore o maggiore di zero come più piace. Ora la funzione V, benchè data sul contorno, è però qualunque dentro l'area σ; per conseguenza è facile concludere, che l'integrale precedente non può essere nullo se non è:

$$\Pi(z) = 0.$$

La proposizione è dimostrata.

I due teoremi di Riemann, stabiliti ora rigorosamente, sono dunque veri in generale per l'equazione $\Pi(z) = 0$. Non è così del ragionamento finale del Riemann, che ha per scopo di dimostrare l'esistenza della funzione *z regolare* soddisfacente all'equazione in parola e che prende sul contorno una successione di valori data a priori. Esso è immediatamente applicabile nel solo caso, del resto abbastanza generale, che la funzione a sia nulla, cioè che l'equazione si riduca alla forma:

$$\Pi(z) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ b \left(G \frac{\partial z}{\partial x} - F \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ b \left(E \frac{\partial z}{\partial y} - F \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right\}.$$

In questo caso l'integrale J diventa:

$$J=\int_\sigma b H^2 \cdot \Delta_1 u\, d\sigma.$$

Esso è allora essenzialmente positivo o negativo, e non può annullarsi; esiste quindi un limite sotto il quale non può discendere. Sia z la funzione che fa raggiungere all'integrale il suo minimo; in virtù del teorema precedente essa soddisfa l'equazione $\Pi(z)=0$, ed il *teorema dell'esistenza* è dimostrato.

Come si vede, nel caso che a non sia nulla i ragionamenti precedenti non sono più validi.

12. Passiamo adesso ad un problema di altro genere relativo alle stesse equazioni, il quale non è certamente di lieve interesse, e serve per chiarire le considerazioni che seguono (vedi Prefazione).

Il problema in parola è il seguente:

Riconoscere se una data equazione lineare del 2.° ordine a due variabili ed un'equazione lineare del 1.° ordine, ambedue mancanti del termine in z, ammettono o no soluzioni comuni; nel caso affermativo dire quante ne ammettono e dare un metodo per determinarle.

Comincieremo a considerare per brevità l'equazione speciale del 2.° ordine:

$$\Pi(z)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+l\frac{\partial z}{\partial x}+m\frac{\partial z}{\partial y}=0; \tag{33}$$

i ragionamenti validi per questa sono poi immediatamente estendibili al caso generale. Ed anzitutto è facilissimo trovare il numero preciso delle soluzioni che possono ammettere in comune. Consideriamo infatti unitamente alla (33) l'equazione del 1.° ordine:

$$A(z)=\alpha\frac{\partial z}{\partial x}+\beta\frac{\partial z}{\partial y}=0, \tag{34}$$

essendo α e β due funzioni qualunque di x ed y. Se λ è una soluzione particolare di questa equazione, $f(\lambda)$ è la soluzione più generale, quando si consideri f arbitraria. Per conseguenza, se esistono due soluzioni comuni all'equazioni (33) e (34), una è funzione dell'altra. Ma ciò è impossibile, giacchè, se si scrive la (33) sotto la forma (18):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(b\frac{\partial z}{\partial x}+a\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial z}{\partial y}-a\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

e si pone al posto di z la funzione $\varphi(\lambda)$, essendo λ una soluzione, risulta subito:

$$\varphi''(\lambda)\cdot b\left\{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2\right\}=0,$$

la quale non è soddisfatta che per $\varphi''(\lambda)=0$. Dunque le equazioni (33) e (34) non possono ammettere più d'una soluzione comune, se facciamo astrazione dall'aggiunta di termini o fattori costanti. Ciò posto, vediamo di stabilire un criterio per riconoscere se le due date equazioni ammettono una soluzione comune. Il metodo è analogo a quello in uso per le equazioni lineari del 1.° ordine.

Consideriamo i simboli $\Pi(z)$ e $A(z)$ come due operazioni da eseguire sulla funzione z. È evidente allora che la soluzione comune alle equazioni:

$$\Pi(z)=0,\qquad A(z)=0,$$

soddisfa in pari tempo l'equazione:

$$\Pi(A(z))-A(\Pi(z))=0.$$

Svolgendo il simbolo:

$$(\Pi,\ A)=\Pi(A(z))-A(\Pi(z)),$$

si trova, dopo aver ordinato e ridotto:

$$(\Pi,\ A)=a_1\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b_1\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+c_1\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+l_1\frac{\partial z}{\partial x}+m_1\frac{\partial z}{\partial y},\tag{35}$$

essendo:

$$a_1=2\frac{\partial\alpha}{\partial x}$$

$$b_1=\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}$$

$$c_1=2\frac{\partial\beta}{\partial y}$$

$$l_1=\Pi(\alpha)-A(l)$$

$$m_1=\Pi(\beta)-A(m).$$

Supponiamo adesso che le date equazioni ammettano la soluzione z comune; avremo per quanto si è detto:

$$\Pi(z)=0,\qquad A(z)=0$$

$$(\Pi,\ A)=0.$$

Dippiù, derivando parzialmente $A(z)=0$ rispetto ad x o ad y, risultano quest' altre due identità:

$$\left.\begin{aligned} A_x(z) &= \alpha\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \\ A_y(z) &= \beta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Da tutto ciò segue necessariamente la condizione:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & l & m \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta & 0 & \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} & \dfrac{\partial \beta}{\partial x} \\ 0 & \alpha & \beta & \dfrac{\partial \alpha}{\partial y} & \dfrac{\partial \beta}{\partial y} \\ a_1 & 2b_1 & c_1 & l_1 & m_1 \end{vmatrix} = 0,$$

giacchè, considerando le cinque identità:

$$\Pi(z)=0, \qquad A(z)=0$$

$$A_x(z)=0, \qquad A_y(z)=0, \qquad (\Pi,\, A)=0,$$

come un sistema d'equazioni algebriche tra le cinque derivate:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

queste devono potersi ricavare in funzione dei coefficienti e devono risultare differenti da zero. Ma cotesta condizione equivale evidentemente a quest'altra:

$$(\Pi,\, A) = \rho_1\Pi(z) + \rho_2 A(z) + \rho_3 A_x(z) + \rho_4 A_y(z), \tag{37}$$

essendo ρ_1, ρ_2, ρ_3 e ρ_4 quattro funzioni di x ed y; si conclude quindi: *Se le due date equazioni* (33) *e* (34) *ammettono una soluzione a comune, il simbolo* $(\Pi,\, A)$ *è necessariamente una funzione lineare delle quattro espressioni:*

$$\Pi(z), \qquad A(z), \qquad A_x(z), \qquad A_y(z),$$

intendendo che la funzione lineare sia formata con coefficienti variabili.

Di qui dunque risulta che la condizione (37) è *necessaria* per l'esistenza della soluzione comune, ma si può dimostrare che essa è ancora *sufficiente.*

A tale scopo osserviamo anzitutto, che si può sempre scegliere:

$$\Pi_1(z) = \lambda_1 \Pi(z) + \lambda_2 A(z),$$

in guisa che la (37) diventi:

$$(\Pi_1, A) = \rho_3 A_x(z) + \rho_4 A_y(z).$$

Si ha infatti:

$$(\Pi_1, A) = \lambda_1 A(A(z)) + \lambda_2 \Pi(A(z)) - A(\lambda_1) A(z) -$$
$$- \lambda_1 A(A(z)) - A(\lambda_2) \Pi(z) - \lambda_2 A(\Pi(z));$$

cioè, riducendo e tenendo conto della (37),

$$(\Pi_1, A) = \{\lambda_2 \rho_1 - A(\lambda_2)\} \Pi(z) + \{\lambda_2 \rho_2 - A(\lambda_1)\} A(z) + \lambda_2 \rho_3 A_x(z) + \lambda_2 \rho_4 A_y(z).$$

Si vede di qui che è sempre possibile determinare λ_1 e λ_2, in maniera che sia:

$$\lambda_2 \rho_1 - A(\lambda_2) = 0, \qquad \lambda_1 \rho_2 - A(\lambda_1) = 0.$$

Ciò posto, torniamo al nostro problema, e supponiamo quindi che si abbia:

$$\Pi_1(A(z)) - A(\Pi_1(z)) = \rho_3 A_x(z) + \rho_4 A_y(z).$$

Se diciamo z una soluzione di $A(z) = 0$ e φ una funzione arbitraria di z, avremo in virtù della precedente:

$$A(\Pi_1(\varphi)) = 0,$$

ossia:

$$\Pi_1(\varphi) = F(z).$$

Questa si può scrivere distesamente, essendo $A(\varphi) = 0$,

$$\lambda_1 \left\{ \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial y^2} + l \frac{\partial \varphi(z)}{\partial x} + m \frac{\partial \varphi(z)}{\partial y} \right\} = F(z);$$

od anche, sviluppando,

$$\varphi'(z) \cdot \psi(z) + \lambda_0 \varphi''(z) \Delta_1 z = F(z),$$

giacchè:

$$\lambda_1 \Pi(z) = \psi(z) \quad \text{e} \quad \Delta_1 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Di qui si ricava:

$$\lambda_1 \Delta_1 z = \frac{F(z) - \varphi'(z) \psi(z)}{\varphi''(z)};$$

l'espressione $\lambda_1 \Delta_1 z$ è perciò una funzione della sola z. Noi possiamo calcolare a priori questa espressione, ed allora è possibile ricavare una $\varphi(z)$ tale che

$F(z)$ risulti nulla. Si ha infatti che:

$$\varphi(z) = \int e^{-\int \frac{\lambda_1 \Delta_1(z)}{\psi(z)} dz} dz,$$

soddisfa alla condizione:

$$\varphi'(z) \cdot \psi(z) + \lambda_1 \Delta_1 z \cdot \varphi''(z) = 0.$$

Possiamo dunque concludere: *La* (37) *rappresenta la condizione necessaria e sufficiente, perchè le due equazioni date abbiano una soluzione a comune.*

Circa l'effettiva determinazione della $\varphi(z)$, si noti che:

$$\frac{\lambda_1 \Delta_1 z}{\psi'(z)} = \frac{\Delta_1 z}{\Pi(z)};$$

perciò, integrata l'equazione del 1.° ordine, restano semplicemente due integrali da calcolare. Di qui si deduce ancora l'elegante proposizione:

Se due equazioni (33) e (34) *ammettono una soluzione comune, il rapporto* $\frac{\Delta_1 z}{\Pi(z)}$ *è una funzione della sola z, essendo z una soluzione qualunque dell'equazione* (34) $A(z) = 0$.

13. Tutti i teoremi ora trovati valgono senza cambiamento alcuno per la equazione più generale:

$$\Pi(z) = a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + l \frac{\partial z}{\partial x} + m \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \qquad (38)$$

come risulta immediatamente. Non resta perciò che dare in questo caso l'espressione del simbolo (Π, A). Con semplici sviluppi di calcolo si trova:

$$(\Pi,\ A) = a_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c_1 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + l_1 \frac{\partial z}{\partial x} + m_1 \frac{\partial z}{\partial y},$$

essendo:

$$a_1 = 2a \frac{\partial \alpha}{\partial x} + 2b \frac{\partial \alpha}{\partial y} - A(a)$$

$$b_1 = a \frac{\partial \beta}{\partial x} + b\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\right) + c \frac{\partial \alpha}{\partial y} - A(b)$$

$$c_1 = 2c \frac{\partial \beta}{\partial y} + 2b \frac{\partial \beta}{\partial x} - A(c)$$

$$l_1 = \Pi(\alpha) - A(l)$$

$$m_1 = \Pi(\beta) - A(m).$$

Anche l'ultimo teorema del numero precedente sussiste per questa equazione, considerando però $\Delta_1 z$ come il parametro differenzial primo relativo alla forma quadratica:

$$E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2,$$

la quale risulta ponendo l'equazione data sotto la forma (25) (vedi n.° 9).

14. I teoremi dimostrati servono ancora per risolvere il problema seguente: Date due equazioni del tipo generale (38), tali però che ridotte alla forma (25):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F\dfrac{\partial z}{\partial y} - G\dfrac{\partial z}{\partial x}}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F\dfrac{\partial z}{\partial x} - E\dfrac{\partial z}{\partial y}}{H}\right) + l\frac{\partial z}{\partial x} + m\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F\dfrac{\partial z}{\partial y} - G\dfrac{\partial z}{\partial x}}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F\dfrac{\partial z}{\partial x} - E\dfrac{\partial z}{\partial y}}{H}\right) + l_1\frac{\partial z}{\partial x} + m_1\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

abbiano, come è già supposto, i due primi termini uguali, trovare un criterio per riconoscere l'esistenza di soluzioni comuni e il modo di determinarle. Basta infatti osservare, che le soluzioni comuni alle equazioni (39) è comune ad ogni altra che sia una combinazione lineare di quelle, ed in particolare all'equazione del 1.° ordine:

$$(l - l_1)\frac{\partial z}{\partial x} + (m - m_1)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Perciò al problema dato possiamo sostituire l'analogo relativo alle due equazioni:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F\dfrac{\partial z}{\partial y} - G\dfrac{\partial z}{\partial x}}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F\dfrac{\partial z}{\partial x} - E\dfrac{\partial z}{\partial y}}{H}\right) + l\frac{\partial z}{\partial x} + m\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$(l - l_1)\frac{\partial z}{\partial x} + (m - m_1)\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

il quale è già stato risolto.

CAPITOLO III.

Ancora delle soluzioni comuni in un caso speciale. Sistemi di linee ortogonali appartenenti ad un fattore K. Classificazione dei sistemi ortogonali. — Suo carattere geometrico. Teoremi ad essa relativi. — Applicazioni.

15. In questo numero tratteremo l'identico problema risolto nei tre numeri precedenti, relativo però a due equazioni di tipo speciale, ed il metodo che useremo sarà diverso dal precedente. Tutto questo serve a chiarire ciò che è esposto più innanzi.

Consideriamo un'equazione lineare del 2.° ordine sotto la forma (26), nella quale però a sia nulla; in altri termini una equazione riducibile alla forma:

$$\Pi(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho\left(G\frac{\partial u}{\partial x} - F\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\rho\left(E\frac{\partial u}{\partial y} - F\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} = 0. \tag{40}$$

Per quanto sappiamo, la sua associata è:

$$P(v) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\rho H^2}\left(G\frac{\partial v}{\partial x} - F\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\rho H^2}\left(E\frac{\partial u}{\partial y} - F\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} = 0. \tag{41}$$

Se u_1 e v_1 sono due soluzioni associate di queste equazioni, sussistono le due identità:

$$\Pi_1(u_1) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{V_1\rho\left(G\frac{\partial u_1}{\partial x} - F\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{V_1\rho\left(E\frac{\partial u_1}{\partial y} - F\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\right\} = 0$$

$$P_1(v_1) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{U_1}{\rho H^2}\left(G\frac{\partial v_1}{\partial x} - F\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{U_1}{\rho H^2}\left(E\frac{\partial v_1}{\partial y} - F\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\right\} = 0,$$

essendo V_1 e U_1 funzioni rispettivamente della sola v_1 e della sola u_1. Infatti, svolgendo convenientemente $\Pi_1(u_1)$ e rammentando che $\Pi(u_1) = 0$, si trova subito:

$$V''_1 H^2 \cdot \Delta(u_1,\ v_1) = 0,$$

essendo $\Delta(u_1, v_1)$ il parametro differenzial misto relativo alla forma quadratica:

$$E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2.$$

Ma per le (27), che legano le soluzioni d'una equazione con quelle dell'associata, si ha:

$$\Delta(u_1,\ v_1)=0;$$

la prima identità è dunque dimostrata. Lo stesso dicasi per l'altra. Possiamo dire in altre parole, che le equazioni $\Pi(u)=0$ e $\Pi_1(u)=0$ ammettono la soluzione comune u_1 qualunque sia V_1, e le altre due $P(v)=0$ e $P_1(v_1)=0$ ammettono la v_1 qualunque sia la U_1.

È facile vedere che questo è il caso più generale d'esistenza di soluzioni comuni, cioè:

Due equazioni del tipo (40) *ammettono una soluzione comune u solo quando il rapporto dei due fattori* ρ *è una funzione dell'associata di u rispetto ad una delle due equazioni.* Abbiansi infatti le due equazioni:

$$\left.\begin{aligned}\Pi(u)&=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho\left(G\frac{\partial u}{\partial x}-F\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\rho\left(E\frac{\partial u}{\partial y}-F\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\}=0\\ \Pi_1(u)&=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho_1\left(G\frac{\partial u}{\partial x}-F\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\rho_1\left(E\frac{\partial u}{\partial y}-F\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\}=0,\end{aligned}\right\}\tag{42}$$

e sia precisamente u la loro soluzione comune. La prima può scriversi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\rho}{\rho_1}\cdot\rho_1\left(G\frac{\partial u}{\partial x}-F\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\rho}{\rho_1}\cdot\rho_1\left(E\frac{\partial u}{\partial x}-F\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}=0,$$

la quale, sviluppata convenientemente diventa:

$$\frac{\rho}{\rho_1}\Pi_1(u)+\rho_1 H^2\cdot\Delta\left(u,\ \frac{\rho}{\rho_1}\right)=0,\tag{42'}$$

ossia:

$$\Delta\left(u,\ \frac{\rho}{\rho_1}\right)=0.$$

Ma, se v è l'associata di u, si ha $\Delta(u,\ v)=0$, e questa equazione è lineare del 1.° ordine nelle derivate di v, per conseguenza $\frac{\rho}{\rho_1}=f(v)$. Viceversa: se $\frac{\rho}{\rho_1}=f(v)$, allora $\Delta\left(u,\ \frac{\rho}{\rho_1}\right)=0$; per cui si ricade nella (42'). La proposizione è dunque dimostrata.

Cerchiamo adesso un criterio pratico per riconoscere se due date equazioni (42) ammettono una soluzione comune. Formiamoci l'associata della prima equazione, cioè:

$$P(v)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\rho H^2}\left(G\frac{\partial v}{\partial x}-F\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\rho H^2}\left(E\frac{\partial v}{\partial y}-F\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}=0,$$

e consideriamo l'espressione $P\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)\cdot$ Se le due date equazioni ammettono una soluzione comune, sarà in virtù del teorema precedente $\frac{\rho}{\rho_1}=f(v)$, essendo v una soluzione di $P(v)=0$; avremo per conseguenza:

$$P\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)=P(f(v))=\frac{f''(v)}{\rho}\Delta_1 v.$$

D'altra parte:

$$\Delta_1\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)=\overline{f'(v)}^2\cdot\Delta_1 v;$$

eliminando quindi $\Delta_1 v$ tra questa e la precedente, si trova:

$$\frac{P\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)}{\Delta_1\frac{\rho}{\rho_1}}=\frac{1}{\rho}\,\frac{f''(v)}{\overline{f'(v)}^2}=\frac{1}{\rho}\,\varphi\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right);$$

cioè: *il rapporto dell'espressione* $P\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)$ *al parametro differenziale primo di* $\frac{\rho}{\rho_1}$ *deve essere uguale ad una funzione di* $\frac{\rho}{\rho_1}$ *moltiplicata per il fattore* $\frac{1}{\rho}$. È il criterio richiesto.

Si vede inoltre, che l'effettiva determinazione della soluzione comune dipende dall'integrazione d'una equazione lineare del 1.° ordine, e da due quadrature.

Infatti, poichè $\frac{\rho}{\rho_1}$ è una funzione nota, consideriamo l'equazione del 1.° ordine:

$$\Delta\left(u,\,\frac{\rho}{\rho_1}\right)=0;$$

se λ è una sua soluzione, $\varphi(\lambda)$ è la soluzione più generale, quando si ritenga φ arbitraria. Si capisce allora che la soluzione comune deve essere una funzione di λ; basta quindi determinare φ in guisa che risulti:

$$\Pi(\varphi(\lambda))=\varphi'(\lambda)\cdot\Pi(\lambda)+\rho\,\varphi''(\lambda)\cdot H^2\Delta_1\lambda=0,$$

cioè:

$$\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi''(\lambda)} = -\frac{\rho H^2 \Delta_1 \lambda}{\Pi(\lambda)}.$$

Il secondo membro è certamente funzione di λ, perchè abbiamo ammesso l'esistenza della soluzione comune; perciò si ricava:

$$\varphi(\lambda) = \int e^{-\int \frac{\rho H^2 \Delta_1 \lambda}{\Pi(\lambda)} d\lambda} d\lambda.$$

Abbiamo così una maniera di trovare la soluzione comune, quando ne sia stata provata dapprima l'esistenza.

I teoremi ora dimostrati valgono con leggere modificazioni per un problema più generale. Sia u una soluzione dell'equazione $\Pi(u) = 0$, e sia data un'altra equazione $\Pi_1(z) = 0$; riconoscere se questa equazione ammette una soluzione funzione della u.

Prendendo per guida i ragionamenti precedenti il problema si risolve con facilità; non insisteremo quindi più oltre su questo argomento, e noteremo soltanto una proposizione che sarà usata più innanzi. *L'equazione* $\Pi_1(z) = 0$ *non può ammettere una soluzione funzione della* u, *se non è*:

$$\frac{\rho}{\rho_1} = f(v) \cdot \varphi(u),$$

essendo v *l'associata di* u.

Infatti, se $\varphi(u)$ è soluzione della $\Pi_1(z) = 0$, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho_1 \varphi'(u)\left(G\frac{\partial u}{\partial x} - F\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\rho_1 \varphi'(u)\left(E\frac{\partial u}{\partial y} - F\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} = 0.$$

La u soddisfa dunque questa equazione e la $\Pi(u) = 0$; per conseguenza sarà, in virtù dei teoremi precedenti,

$$\frac{\rho}{\rho_1 \varphi'(u)} = f(v),$$

cioè:

$$\frac{\rho}{\rho_1} = f(v)\,\varphi'(u).$$

La proposizione è quindi giusta.

16. Sia:

$$\varphi\, dy - \psi\, dx = 0, \tag{43}$$

l'equazione differenziale d'una famiglia di linee tracciate sopra una superficie riferita ad un sistema di coordinate curvilinee x ed y, per il quale l'elemento lineare assume la forma:

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2.$$

È noto allora, che l'equazione differenziale delle linee ortogonali a quella famiglia ha la forma:

$$(E\varphi + F\psi)dx + (F\varphi + G\psi)dy = 0. \tag{44}$$

Se ρ è un fattore integrante della (43), si avrà:

$$\rho(\varphi dy - \psi dx) = du;$$

talchè ogni altro fattore integrante ρ_1 sarà uguale a $\rho \cdot f(u)$. Analogamente, se:

$$\lambda(E\varphi + F\psi)dx + \lambda(F\varphi + G\psi)dy = dv,$$

si avrà per ogni altro fattore integrante λ_1 l'espressione $\lambda_1 = \lambda F(v)$; per cui, posto:

$$\frac{\rho}{\lambda} = K, \qquad \frac{\rho_1}{\lambda_1} = K_1,$$

risulta:

$$K_1 = K\frac{f(u)}{F(v)}.$$

Orbene, prendiamo a considerare tutti i sistemi di linee ortogonali che provengono da certe serie d'espressioni di φ e ψ, e precisamente quelle tali, per cui:

$$\varphi dy - \psi dx,$$

è differenziale esatto quando si usi costantemente una *data funzione* ρ come fattore integrante, e

$$(E\varphi + F\psi)dx + (F\varphi + G\psi)dy,$$

pure differenziale esatto quando si usi un'altra *data funzione* λ come fattore integrante. Allora tutte queste φ e ψ saranno definite dal sistema d'equazioni:

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda(E\varphi + F\psi)) - \frac{\partial}{\partial x}(\lambda(F\varphi + G\psi)) = 0,$$

e per le posizioni fatte avremo:

$$\rho\varphi = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \rho\psi = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\lambda(E\varphi + F\psi) = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \lambda(F\varphi + G\psi) = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Eliminando fra queste φ, ψ e v, si trova:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{K\left(G\frac{\partial u}{\partial x} - F\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{K\left(E\frac{\partial u}{\partial y} - F\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} = 0, \tag{45}$$

avendo posto per brevità $K = \frac{\lambda}{\rho}$; ed analogamente, eliminando φ, ψ ed u, si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{KH^2}\left(G\frac{\partial v}{\partial x} - F\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{KH^2}\left(E\frac{\partial v}{\partial y} - F\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\} = 0, \tag{45'}$$

essendo sempre $H = \sqrt{EG - F^2}$.

Di qui risulta, che tutti i sistemi ortogonali sopra definiti si ottengono uguagliando a costante due soluzioni associate u e v dell'equazione (45) e della sua associata (45'). Queste equazioni poi sono quelle del 2.° ordine precedentemente studiate.

Orbene sia u una soluzione qualunque d'una data equazione (45) e v la corrispondente associata della (45'), e consideriamo il sistema ortogonale $u =$ cost., $v =$ cost. (*). Se facciamo percorrere ad u le infinite soluzioni della (45), avremo sulla superficie infiniti sistemi di linee ortogonali. Diremo questi sistemi « *sistemi ortogonali appartenenti al fattor K* ». Si badi però di non interpretare questa denominazione troppo letteralmente per ora. Le considerazioni ed i teoremi che seguono, porranno in rilievo il giusto significato.

17. Si noti anzitutto che un dato sistema ortogonale $u =$ cost., $v =$ cost. soddisfa in generale (nel senso già attribuito a questa frase, vedi (*)) a più equazioni (45), perchè abbiamo visto che due equazioni (45) possono ammettere una soluzione comune, oppure una soluzione dell'una può essere funzione d'una soluzione dell'altra.

(*) Diremo allora per brevità che il sistema ortogonale $u =$ cost., $v =$ cost. soddisfa l'equazione (45).

Consideriamo tutti i sistemi ortogonali $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ definiti dall'equazione:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{K\left(G\frac{\partial u}{\partial x} - F\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{K\left(E\frac{\partial u}{\partial y} - F\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} = 0,$$

e vediamo a quale forma si riduce l'elemento lineare:

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2, \tag{47}$$

quando si assume uno qualunque di questi sistemi per *sistema coordinato*. È noto dalla teorica dei parametri differenziali che, quando si opera in una forma quadratica (47) un cambiamento di variabili $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, i coefficienti E_1, F_1, G_1 della forma trasformata sono dati dalle formule:

$$E_1 = \frac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u \Delta_1 v - \Delta^2(u, v)}, \qquad G_1 = \frac{\Delta_1 u}{\Delta_1 u \Delta_1 v - \Delta^2(u, v)}$$

$$F_1 = \frac{-\Delta(u, v)}{\Delta_1 u \Delta_1 v - \Delta^2(u, v)}.$$

Orbene, nel caso presente si ha:

$$\Delta(u, v) = 0,$$

ed essendo:

$$\Delta_1 v = \frac{E\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - 2F\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + G\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}{EG - F^2},$$

si trova in virtù delle (46):

$$\Delta_1 v = \frac{K^2}{H^2}\left\{E\left(F\frac{\partial u}{\partial y} - G\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 2F\left(F\frac{\partial u}{\partial y} - G\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(E\frac{\partial u}{\partial y} - F\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \right.$$
$$\left. + G\left(\frac{\partial u}{\partial y} - F\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}.$$

Svolgendo questa espressione e riducendo, si trova senza difficoltà:

$$\Delta_1 v = K^2 H^2 \Delta_1 u,$$

la quale, mentre stabilisce un legame fra $\Delta_1 u$ e $\Delta_1 v$, fa conoscere anche il significato del fattor K. Ecco allora le espressioni dei nuovi coefficienti E_1, F_1, G_1:

$$E_1 = \frac{1}{\Delta_1 u}, \qquad F_1 = 0, \qquad G_1 = \frac{1}{K^2 H^2 \Delta_1 u};$$

onde l'elemento lineare assume la forma:

$$ds^2 = \frac{1}{\Delta_1 u}\left(du^2 + \frac{dv^2}{H^2 K^2}\right). \tag{48}$$

Si può dunque dire: Tutti i sistemi ortogonali che soddisfano l'equazione (45), assunti come sistemi coordinati, riducono l'elemento lineare alla forma (48), la quale è caratterizzata dalla presenza di quel fattore K che caratterizza pure l'equazione (45). Ogni altro sistema ortogonale diverso da quelli ora considerati non può ridurre l'elemento lineare alla forma (48).

Ecco perchè diciamo che quei sistemi ortogonali *appartengono al fattore K.* Tutti i sistemi ortogonali che si possono tracciare sopra una superficie restano così divisi in gruppi, ognuno dei quali è classificato dalla forma che assume l'elemento lineare; ma si osservi bene che tale *classificazione* è, mi sia permessa la frase, *per esclusione;* cioè, i sistemi ortogonali sono aggruppati in guisa, che da ogni gruppo *restano esclusi* tutti quelli che non possono ridurre a quella certa forma l'elemento lineare comunque siano scelti i parametri, ma un sistema appartenente ad un gruppo appartiene in generale ad altri gruppi.

Se supponiamo, ad esempio,

$$K = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}},$$

l'elemento lineare (48) prende la forma:

$$ds^2 = \frac{1}{\Delta_1 u}(du^2 + dv^2),$$

e l'equazione (45) diventa l'*equazione di Beltrami:*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{G\frac{\partial u}{\partial x} - F\frac{\partial u}{\partial y}}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E\frac{\partial u}{\partial y} - F\frac{\partial u}{\partial x}}{H}\right) = 0.$$

Tutti questi sistemi formano un gruppo detto *isotermo.*

Ritroviamo così un notissimo teorema, e nel linguaggio qui adottato potremo dire: *Il gruppo isotermo appartiene al fattore* $\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}$.

18. La seguente considerazione geometrica dà una chiara idea della classificazione in parola. Indicando con ds_u, ds_v gli archi elementari positivi

delle linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, si ricava dall'espressione (48):

$$d s_u = \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 u}} \cdot \frac{d v}{K \cdot H}, \qquad d s_v = \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 u}} d u;$$

per conseguenza l'elemento d'area della superficie è dato da

$$d \sigma = \frac{1}{\Delta_1 u} \cdot \frac{du\, dv}{H K}.$$

Inoltre, se prendiamo eguali gli incrementi du e dv e facciamo il rapporto degli elementi d'arco ds_u e ds_v, si ha:

$$\frac{d s_u}{d s_v} = \frac{1}{HK}.$$

Dunque: *Ogni sistema ortogonale appartenente al fattore K forma sulla superficie considerata una rete di rettangoli infinitesimi; il rapporto dei loro lati è una funzione di u e v data precisamente da* $\frac{1}{HK}$.

Di qui risulta il carattere geometrico della classificazione considerata. Per essa i sistemi ortogonali restano aggruppati in guisa, che quelli appartenenti ad uno stesso gruppo posseggono tutti la medesima proprietà di dividere la superficie in rettangoli i cui lati stanno in un rapporto espresso sempre da $\frac{1}{H \cdot K}$. I sistemi isotermi, ad es., dividono la superficie in quadrati infinitesimi, giacchè per essi $\frac{1}{K \cdot H} = 1$, e sono i soli che godono tale proprietà.

19. Dimostreremo adesso un importante teorema:

Essendo:

$$\varphi d y = \psi d x = 0,$$

l'equazione differenziale d'una famiglia di linee, se si conosce, per una via qualunque, che esse insieme alle loro trajettorie ortogonali formano un sistema appartenente al fattore K, tale sistema si determina con semplici quadrature.

A questo risultato si giunge subito premettendo una proposizione di Lie (*): Se tra i fattori integranti ρ e λ di due equazioni differenziali del tipo (49)

(*) Lie-Scheffers, *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen transformationen*, Kap. 9.

sussiste una relazione della forma:

$$\lambda = \rho \cdot K(x, y), \tag{50}$$

essi si possono determinare con quadrature, e l'integrazione delle equazioni date è quindi ridotta alle quadrature. Allora, se diciamo rispettivamente nel caso nostro ρ e λ i fattori integranti dell'equazione (49) e di quella che dà la famiglia delle trajettorie ortogonali, si ha, per quello che è detto nel numero 16 (formule (45)):

$$\frac{\lambda}{\rho} = K(x, y),$$

che è una relazione della forma (50). Il teorema è quindi dimostrato.

Il Lie ha fatto vedere ancora (libro citato, cap. 9) che, se sussiste la relazione (50) tra i fattori integranti di due equazioni date, la superficie è divisa dal sistema di linee definite dalle equazioni stesse in parallelogrammi infinitesimi, i cui lati hanno un rapporto eguale ad una determinata funzione di x ed y. Orbene, nel caso dei sistemi ortogonali, ciò sta in perfetto accordo colle considerazioni fatte più sopra.

Come applicazioni di questo teorema si ricavano due proposizioni notissime (S. Lie):

1.° *Se delle linee d'un sistema isotermo si conosce soltanto un'equazione differenziale del 1.° ordine* (49) *di cui esse sono gli integrali, se ne potranno avere le equazioni in termini finiti con semplici quadrature.* Sappiamo, infatti, che il gruppo isotermo appartiene al fattore $K = \frac{1}{H}$.

2.° Se ricordiamo la formula di O. Bonnet relativa alla curvatura geodetica d'una linea tracciata sulla superficie e supponiamo che le $u =$ cost. siano geodetiche, si ha, per la definizione stessa di geodetica,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F\frac{\partial u}{\partial y} - G\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{(EG - F^2)\Delta_1 u}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F\frac{\partial u}{\partial x} - E\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{(EG - F^2)\Delta_1 u}}\right) = 0.$$

Allora per le cose dette risulta, che queste geodetiche con le loro trajettorie ortogonali formano un sistema appartenente al fattore $\frac{1}{\sqrt{(EG - F^2)\Delta_1 u}}$. Questo fattore è calcolabile coi dati del problema, giacchè, se la (49) è l'equazione differenziale di quella famiglia di geodetiche, risulta evidentemente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi : -\psi.$$

Dunque: *Se le linee definite dall'equazione differenziale* (49) *sono geodetiche, si potranno avere in termini finiti queste geodetiche e le loro trajettorie ortogonali con semplici quadrature.*

20. Si può ancora proporre il problema seguente: Determinare la condizione affinchè una data famiglia di linee $u = \text{cost.}$ formi, insieme alle sue trajettorie ortogonali, un sistema appartenente al fattor K.

Perchè ciò avvenga, è necessario e sufficiente che una certa funzione $f(u)$ soddisfi l'equazione:

$$\Pi(f) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{K\left(G\frac{\partial f}{\partial x} - F\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{K\left(E\frac{\partial f}{\partial y} - F\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\} = 0.$$

Sviluppando e scrivendo convenientemente, si trova:

$$\frac{\Pi(u)}{\Delta_1 u} = -KH^2 F(u). \tag{51}$$

Inversamente: Supposta questa condizione verificata, si può (seguendo la via inversa) trovare una $f(u)$ in guisa che risulti $\Pi(f) = 0$. Dunque:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè le linee $u = \text{cost.}$ *insieme colle loro trajettorie ortogonali formino un sistema appartenente al fattor* K *è che il rapporto di* $\Pi(u)$ *al parametro differenziale primo di* u *sia eguale al prodotto di* KH^2 *per una funzione della sola* u.

Come caso particolare si ricava l'analogo teorema relativo ai sistemi isotermi.

21. Indicheremo in questo numero un metodo semplice ed elegante per ridurre un dato elemento lineare alla forma speciale:

$$ds^2 = \frac{1}{\lambda^2}(d\varphi^2 + \rho^2 d\psi^2).$$

Si ottiene enunciando il problema nella maniera seguente: Siano u e v i parametri d'un sistema di linee che riduce l'elemento lineare alla forma:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2;$$

trovare l'espressione del ds quando la superficie venga riferita ad una delle due famiglie $u = \text{cost.}$ o $v = \text{cost.}$ ed alle loro trajettorie ortogonali.

Decomponiamo la forma quadratica (52) ne' suoi due fattori lineari coniugati:

$$ds^2 = \left\{\sqrt{E}\,du + (F + iH)\frac{dv}{\sqrt{E}}\right\}\left\{\sqrt{E}\,du + (F - iH)\frac{dv}{\sqrt{E}}\right\},$$

e consideriamo l'espressione differenziale:

$$\sqrt{E}\,du + \frac{F}{\sqrt{E}}\,dv.$$

Sia μ un suo fattore integrante, talchè risulti:

$$\mu\left(\sqrt{E}\,du + \frac{F}{\sqrt{E}}\,dv\right) = d\varphi;$$

abbiamo allora evidentemente le due identità:

$$\mu\left\{\sqrt{E}\,du + (F + iH)\frac{dv}{\sqrt{E}}\right\} = d\varphi + i\mu\frac{H}{\sqrt{E}}\,dv$$

$$\mu\left\{\sqrt{E}\,du + (F - iH)\frac{dv}{\sqrt{E}}\right\} = d\varphi - i\mu\frac{H}{\sqrt{E}}\,dv,$$

le quali, moltiplicate membro a membro, dànno subito:

$$ds^2 = \frac{1}{\mu^2}\left\{d\varphi^2 + \frac{\mu^2 H^2}{E}\,dv^2\right\}. \tag{53}$$

È l'espressione cercata di ds. La sua effettiva determinazione dipende dall'integrazione dell'equazione:

$$\sqrt{E}\,du + \frac{F}{\sqrt{E}}\,dv = 0.$$

In modo analogo per le $u =$ cost. si trova:

$$ds^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda^2 H^2}{G}\,du^2 + d\psi^2\right), \tag{54}$$

e la sua effettiva determinazione dipende dall'integrazione dell'equazione:

$$\frac{F}{\sqrt{G}}\,du + \sqrt{G}\,dv = 0.$$

Supponiamo, in particolare, che il fattor μ sia eguale a $\frac{\sqrt{E}}{H}$; le linee

$v=$ cost. appartengono allora ad un sistema isotermo, e si conclude quindi:

Riferiti i punti d'una superficie ad un sistema coordinato $u=$ cost., $v=$ cost., *che dà all'elemento lineare la forma* (52), *se è soddisfatta la condizione:*

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E}{H}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{H}\right),$$

le linee $v=$ cost. *appartengono ad un sistema isotermo. Analogamente, se è soddisfatta la condizione:*

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{H}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G}{H}\right),$$

le linee $u=$ cost. *appartengono ad un sistema isotermo.*

Se ambedue le condizioni sono soddisfatte, i punti della superficie sono allora riferiti a due famiglie di linee, ciascuna delle quali appartiene ad un sistema isotermo, e i parametri u e v sono isometrici.

22. Per far vedere sempre più come il metodo basato sulla nostra classificazione si presti in modo semplice e generale allo studio di qualunque sistema ortogonale, ci proponiamo di giungere in questo numero al teorema più generale che si conosca, dovuto a S. Lie, circa la determinazione delle linee di curvatura d'una superficie.

Siano x ed y i parametri che individuano le linee di curvatura sopra una superficie definita dalle sue due *forme fondamentali quadratiche*, i cui coefficienti, che denoteremo colle lettere di Gauss, soddisfano quindi le equazioni di Codazzi:

$$\frac{\partial D''}{\partial x}+\frac{M}{2}\frac{\partial G}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial D}{\partial y}+\frac{M}{2}\frac{\partial E}{\partial y}=0,$$

ove M rappresenta la curvatura media. Dicendo r_1 ed r_2 i raggi di curvatura, si ha, per cose note,

$$D''=-\frac{G}{r_1}, \qquad D=-\frac{E}{r_2}, \qquad M=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2};$$

onde le equazioni precedenti diventano:

$$\frac{\dfrac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x}}{\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{r_1}}=\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial x}, \qquad \frac{\dfrac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial y}}{\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}}=\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial y}.$$

Sottraendole membro a membro, dopo aver derivato la prima rispetto ad y e la seconda rispetto ad x, e notando che $\frac{G}{E} = \frac{1}{K^2 H^2}$ in virtù della (48), si trova facilmente:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x}}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}\right\} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial y}}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}\right\} + \frac{\partial^2 KH}{\partial x \partial y} = 0. \tag{55}$$

Essa caratterizza le superficie sulle quali il sistema delle linee di curvatura appartiene ad un determinato fattore K.

Ciò posto, consideriamo le superficie per le quali sussiste una relazione

$$f(r_1, r_2) = 0$$

fra i raggi di curvatura, che potremo sempre scrivere sotto la forma:

$$\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} = f\left(\frac{1}{r_1}\right).$$

Allora la (55) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{f\left(\frac{1}{r_1}\right)} \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x}\right\} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{f\left(\frac{1}{r_1}\right)} \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y}\right\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log\left(KHf\left(\frac{1}{r_1}\right)\right) = 0,$$

che si scrive più brevemente:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log\left\{HKf\left(\frac{1}{r_1}\right) \cdot \varphi\left(\frac{1}{r_1}\right)\right\} = 0,$$

quando si ponga:

$$\varphi\left(\frac{1}{r_1}\right) = e^{2\int f\left(\frac{1}{r_1}\right) \cdot d\frac{1}{r_1}}.$$

Integrando, si ricava subito:

$$HKf\left(\frac{1}{r_1}\right) \varphi\left(\frac{1}{r_1}\right) = X(x) \cdot Y(y).$$

Dunque: *Sulle superficie W* (così chiamano i geometri odierni le superficie in parola) *il sistema delle linee di curvatura appartiene al fattore:*

$$\frac{1}{H\cdot f\left(\frac{1}{r_1}\right)\cdot\varphi\left(\frac{1}{r_1}\right)},$$

e quindi si determina per quadrature.

In virtù della (48) vediamo poi subito, che l'elemento lineare assume per queste superficie la forma:

$$ds^2=\frac{1}{\lambda}\left\{dx^2+f\left(\frac{1}{r_1}\right)^2\varphi\left(\frac{1}{r_1}\right)^2dy^2\right\}\cdot$$

Roma, 1.° agosto 1894.

Sulle rotazioni permanenti stabili di un sistema in cui sussistono moti interni stazionarii.

(*Del prof.* Vito Volterra, *a Torino.*)

1. Le equazioni della rotazione di un sistema libero non soggetto a forze esterne e nel cui interno sussistono moti stazionarii hanno la forma:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr+m_3q-m_2r&=0\\ B\frac{dq}{dt}+(A-C)rp+m_1r-m_3p&=0\\ C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq+m_2p-m_1q&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

in cui A, B, C denotano i momenti costanti d'inerzia del sistema relativi ai suoi assi principali centrali d'inerzia ξ, η, ζ; m_1, m_2, m_3 sono le componenti della coppia di quantità di moto dei movimenti interni nelle direzioni ξ, η, ζ; e finalmente p, q, r sono le componenti della rotazione nelle medesime direzioni (*).

In una Memoria stampata nelle « Astronomische Nachrichten » (**) ho studiato la distribuzione degli assi di rotazione permanenti e delle corrispondenti rotazioni permanenti, rimandando ad altra occasione l'esame della stabilità dei detti assi. Poichè una tale questione è fondamentale nel problema che ci occupa, così ne darò qui la risoluzione.

(*) Vedi la mia Nota: *Sulla teoria dei moti del polo terrestre.* Atti della R. Accademia di Torino. Adunanza del 3 febbraio 1895.

(**) N. 3291-2. Bd. 138.

2. Cominciamo dal trasformare le (a). Pongasi:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2\sqrt{ABC}}\left[(Ap+m_1)^2+(Bq+m_2)^2+(Cr+m_3)^2\right] \\ f_2 &= \frac{1}{2\sqrt{ABC}}\left[Ap^2+Bq^2+Cr^2\right], \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

le (a) potranno scriversi (*):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)} \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)}, \end{aligned}\right\} \quad (a')$$

e si riconosce immediatamente che esse ammettono i due integrali:

$$f_1 = \text{cost.} = h_1, \qquad f_2 = \text{cost.} = h_2. \quad (2)$$

Supponiamo ora che p, q, r rappresentino le coordinate di un punto mobile P; è evidente che lo studio della rotazione del sistema equivale a quello del moto di P; quindi il problema si riduce ad *esaminare il moto di un punto P di coordinate p, q, r, tale che le componenti della sua velocità nelle direzioni ξ, η, ζ sono espresse dalle equazioni* (a').

Considerando p, q, r come coordinate correnti, e variando h_1 e h_2 in tutti i modi possibili, le (2) rappresentano due sistemi di quadriche, e il sistema doppiamente infinito di quartiche che ne formano le intersezioni ci daranno tutte le traiettorie possibili del punto mobile P (**).

3. Esaminando le cose sotto questo aspetto, il determinare le rotazioni permanenti del sistema equivale a trovare tutte le posizioni in cui il punto P sta in quiete o come diremo per semplicità *sta in equilibrio*.

(*) Cfr. la mia Nota: *Sopra un sistema di equazioni differenziali.* Atti della R. Accademia di Torino. Adunanza 31 marzo 1895.

(**) Il punto P potrebbe chiamarsi l'*indice della rotazione* per distinguerlo dal *polo di rotazione,* intendendo di denotare con questo nome la intersezione dell'asse istantaneo di rotazione coll'ellissoide d'inerzia. Fra le coordinate p, q, r di P (indice della rotazione) e quelle ξ, η, ζ del polo di rotazione passano le relazioni semplicissime:

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r} = \frac{1}{\sqrt{2h_2\sqrt[4]{ABC}}}.$$

Ora queste posizioni si avranno dove:

$$\frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} = 0, \qquad \frac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)} = 0, \qquad \frac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)} = 0, \tag{3}$$

ossia:

$$\frac{\frac{\partial f_1}{\partial p}}{\frac{\partial f_2}{\partial p}} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial q}}{\frac{\partial f_2}{\partial q}} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial r}}{\frac{\partial f_2}{\partial r}}, \tag{3'}$$

cioè dove sono tangenti fra loro le due superficie (2). Teniamo ora presente che questi punti di contatto corrispondono ai punti doppii delle quartiche (2), onde avremo il teorema:

Le posizioni di equilibrio del punto P saranno i punti doppii delle quartiche $f_1 = h_1$, $f_2 = h_2$ *ed il luogo di questi punti sarà la curva avente per equazioni le* (3').

Le (3) possono scriversi:

$$\left.\begin{aligned} (C - B)qr + m_3 q - m_2 r &= 0 \\ (A - C)rp + m_1 r - m_3 p &= 0 \\ (B - A)pq + m_2 p - m_1 q &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

quindi *la condizione necessaria e sufficiente affinchè il luogo delle posizioni di equilibrio di P si spezzi sarà*:

$$(B - C)(C - A)(A - B) m_1 m_2 m_3 = 0. \tag{4}$$

Le (3) si mettono anche sotto la forma:

$$A + \frac{m_1}{p} = B + \frac{m_2}{q} = C + \frac{m_3}{r}, \tag{5}$$

onde chiamando λ il valore comune dei tre membri si avrà:

$$p = \frac{m_1}{\lambda - A}, \qquad q = \frac{m_2}{\lambda - B}, \qquad r = \frac{m_3}{\lambda - C}. \tag{5'}$$

Consideriamo il caso generale in cui il luogo delle posizioni di equilibrio di P non si spezzi e perciò ammettiamo m_1, m_2, m_3 diversi da zero e $A > B > C$. Tutti i suoi punti si otterranno facendo variare λ fra $-\infty$ e $+\infty$.

La curva possiederà evidentemente tre assintoti consistenti nelle rette L_1, L_2, L_3 parallele agli assi, aventi rispettivamente per equazioni:

$$q = \frac{m_2}{A - B}, \qquad r = \frac{m_3}{A - C}$$

$$r = \frac{m_3}{B - C}, \qquad p = \frac{m_1}{B - A}$$

$$p = \frac{m_1}{C - A}, \qquad q = \frac{m_2}{C - B},$$

sarà quindi costituita da tre rami g_1, g_2, g_3, il primo dei quali andrà dal punto $-\infty$ di L_1 al punto $+\infty$ di L_2 e corrisponderà ad $A > \lambda > B$; il secondo andrà dal punto $-\infty$ di L_2 al punto $+\infty$ di L_3 e corrisponderà a $B > \lambda > C$; l'ultimo ramo andrà dal punto $-\infty$ di L_3 al punto $+\infty$ di L_1, passando per l'origine, e corrisponderà ai valori $\lambda > A$ oppure $\lambda < C$. La curva è quindi una *iperbola cubica*. Nella tabella contenuta nel § 8 sono indicati i vari modi nei quali essa si spezza quando la condizione (4) è soddisfatta.

Finalmente osserviamo che quando le equazioni (3′) possono ricondursi ad una sola, o sono identità allora non si potrà più dire che esse rappresentano una curva. Questi casi si presenteranno quando saranno soddisfatte uno o più dei seguenti tre sistemi di condizioni:

$$\left.\begin{aligned} C - B &= m_3 = m_2 = 0 \\ A - C &= m_1 = m_3 = 0 \\ B - A &= m_2 = m_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Se uno solo dei precedenti sistemi di condizioni sarà verificato, allora il luogo delle posizioni di equilibrio di P degenererà in un piano e in una retta. Se due, e quindi tutti e tre i sistemi di condizioni precedenti si verificheranno, ossia se sarà:

$$A = B = C; \qquad m_1 = m_2 = m_3 = 0,$$

allora tutti i punti dello spazio saranno posizioni di equilibrio di P.

4. Passiamo ora allo studio delle *posizioni di equilibrio stabile di P*. Principiamo dal darne la definizione che corrisponderà perfettamente a quella di *rotazione permanente stabile* del sistema. Diremo che una posizione P_0 di equilibrio di P è stabile, quando preso un numero σ piccolo ad arbitrio, si potrà trovare un numero ε così piccolo che portando P ad una distanza da P_0 minore di ε e lasciandolo quindi muovere colla legge rappresentata dalle (a'), esso nel suo moto non si allontanerà mai da P_0 più di σ.

Ciò premesso, seguendo un procedimento analogo a quello ben noto di Dirichlet, possiamo dimostrare il teorema seguente:

Tutti i punti isolati delle quartiche (2) *saranno posizioni di equilibrio stabile di P.*

Sia P_0 uno dei detti punti isolati, e supponiamo che sostituendo in f_1 e f_2 al posto di p, q, r le coordinate p_0, q_0, r_0 di P, queste funzioni assumano i valori f_1^0, f_2^0. Si formi:

$$I = (f_1 - f_1^0)^2 + (f_2 - f_2^0)^2,$$

e consideriamo I come funzione delle coordinate correnti p, q, r. È evidente che essa sarà una funzione continua: dico inoltre che si potrà trovare un numero α tale che costruendo una sfera qualunque col centro in P_0 di raggio β inferiore ad α, il limite inferiore dei valori che assume I sulla superficie di questa sfera sarà sempre maggiore di zero.

Infatti se, per quanto piccolo si scegliesse α, mai potesse verificarsi la condizione precedente, ciò significherebbe che vicino a P_0 tanto quanto si vuole le due quadriche $f_1 = f_1^0$, $f_2 = f_2^0$ avrebbero dei punti di intersezione reali, e per conseguenza P_0 non sarebbe un punto isolato della quartica su cui esso giace.

Chiamiamo S la sfera di centro P_0 e di raggio α; scelto un numero σ piccolo ad arbitrio, costruiamo internamente ad S una superficie sferica di centro P_0 con un raggio inferiore a σ. Denotiamola con S' e chiamiamo η' il limite inferiore di I sopra S', il qual valore sarà diverso da zero e positivo. Ora in virtù della continuità di I si potrà costruire entro S' una sfera S'' di raggio ε con il centro in P_0, tale che il limite superiore dei valori di I in tutti i punti interni ad essa sia minore di η'. Allora se lasciamo muovere il punto P, a partire da una posizione P' interna ad S'', colla legge espressa dalle (a'), dovendosi conservare I costante durante tutto il moto avrà un valore eguale a quello iniziale e perciò inferiore ad η'. Per conseguenza P non potrà mai raggiungere la superficie S' e quindi si scosterà da P_0 sempre meno di σ. Il teorema resta così dimostrato.

5. Passiamo ora ad estenderlo dimostrando la seguente proposizione:

Sia P_0 un punto isolato di una quartica del sistema (2) *e si scelga un numero σ piccolo ad arbitrio; si potranno sempre trovare due numeri ε ed ε' tali che:*

1.° *alterando inizialmente m_1, m_2, m_3 di qualità costanti inferiori ad ε';*

2.° *lasciando partire il punto P da una posizione distante da P_0 meno di ε,*
esso si conserverà durante il moto ad una distanza da P_0 minore di σ.

Infatti riprendiamo in esame le sfere S, S', S'' del paragrafo precedente. Sia η'' il limite superiore dei valori di I entro S''; avremo $\eta'' < \eta'$. Si ponga $\eta' - \eta'' = \rho$.

Per la continuità di I rispetto ad m_1, m_2, m_3, potremo trovare un numero ε' tale che alterando i valori di m_1, m_2, m_3 meno di ε' ne resulti che i valori di I entro la sfera S variino tutti meno di $\frac{\rho}{4}\cdot$ Per conseguenza cangiando m_1, m_2, m_3 di quantità costanti inferiori a ε', ne risulterà che il limite inferiore dei valori di I sopra la superficie S' sarà superiore a $\eta' - \frac{\rho}{4}$, e il limite superiore dei valori di I entro S'' non supererà $\eta'' + \frac{\rho}{4}\cdot$ Dunque, poichè $\eta'' + \frac{\rho}{4} < \eta' - \frac{\rho}{4}$, così lasciando partire P da un punto interno ad S'', durante il moto esso si manterrà internamente ad S', il che dimostra il teorema.

Abbiamo dunque una *doppia stabilità* delle rotazioni permanenti nei punti isolati delle quartiche; *l'una relativa alle alterazioni nel moto di rotazione del sistema, l'altro alle alterazioni nei moti interni.*

6. Esaminiamo ora la proposizione reciproca a quella del § 4, e perciò escludiamo il caso che si verifichi uno o più dei sistemi di condizioni (6).

In tale ipotesi sopra ogni quadrica dei sistemi (2) non esisteranno che un numero finito di posizioni di equilibrio del punto P.

Sia P_0 una di esse e f_1^0, f_2^0 i valori che assumono f_1 e f_2 sostituendo per p, q, r i valori p^0, q^0, r^0 delle sue coordinate. Potremo costruire una sfera Σ col centro in P_0, tale che nel suo interno e sulle quadriche $f_1 = f_1^0$, $f_2 = f_2^0$ non si abbia che il solo punto P_0 ove P sta in equilibrio. Se ora P_0 non è un punto isolato della quartica su cui giace, dovrà esistere un ramo reale di essa che passa per il punto stesso.

Sia VP_0 una porzione di questo ramo interna a Σ e 2σ la distanza fra i punti V e P_0.

Preso un numero comunque piccolo $\varepsilon < \sigma$, chiamiamo VV' la parte connessa di VP_0 che dista da P_0 più di $\frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Poichè non esistono su VV' punti di equilibrio, così in nessun punto di questo tratto saranno soddisfatte le (3), onde per un teorema sulle funzioni implicite potremo prendere u così piccolo che ciascun punto di VV' disti meno di $\frac{\varepsilon}{2}$ da un punto d'un ramo della quartica $f_1 = f_1^0$, $f_2 = f_2^0 + u$ priva di punti doppii. Su questo ramo esisterà dunque un punto W' che dista da P_0 meno di ε, e un punto W che dista più di σ. Lasciando partire P da W' esso dovrà pervenire in W; ossia partendo ad una distanza da P_0 minore di ε giungerà ad una maggiore di σ, il che dimostra che P_0 non è una posizione di equilibrio stabile.

Abbiamo dunque la proposizione reciproca di quella del § 4, cioè *in ogni punto di equilibrio che non sia un punto isolato, l'equilibrio è instabile.* Questa proposizione reciproca è limitata per ora al caso in cui il luogo dei punti di equilibrio sia la curva (3'). Esamineremo in appresso ciò che avviene quando essa degeneri in una retta e in un piano, oppure in tutto lo spazio.

7. La iperbole cubica avente per equazioni le (3') dà il luogo dei punti di equilibrio di P, ossia dei punti doppii delle quartiche (2). È ora importante distinguere sopra questa curva le parti su cui giacciono i *punti isolati* delle quartiche dalle parti su cui giacciono invece i *nodi;* i punti di passaggio dagli uni agli altri che corrisponderanno evidentemente a *cuspidi* delle quartiche ci daranno *il passaggio dalle rotazioni permanenti stabili a quelli instabili del sistema e viceversa.* Un tale studio può eseguirsi con grande facilità mediante le considerazioni seguenti.

Ammettiamo da principio che la cubica non si spezzi ossia si abbia $A > B > C$ ed m_1, m_2, m_3 diverse da zero. Differenziamo successivamente due volte le (2). Avremo:

$$\left.\begin{aligned} &Apdp + Bqdq + Crdr = 0 \\ &A(Ap + m_1)dp + B(Bq + m_2)dq + C(Cr + m_3)dr = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} &Adp^2 + Bdq^2 + Cdr^2 + (Apd^2p + Bqd^2q + Crd^2r) = 0 \\ &A^2dp^2 + B^2dq^2 + C^2dr^2 + (A(Ap + m_1)d^2p + B(Bq + m_2)d^2q + \\ &\qquad + C(Cr + m_3)d^2r) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

In virtù delle (5'), moltiplicando la prima delle (8) per λ e sottraendovi quindi la seconda, resulterà:

$$A(\lambda - A)dp^2 + B(\lambda - B)dq^2 + C(\lambda - C)dr^2 = 0.$$

Siccome, in causa delle (5), le (7) sono fra loro equivalenti, così basterà esaminare le due equazioni:

$$\left.\begin{aligned} &A(\lambda - A)dp^2 + B(\lambda - B)dq^2 + C(\lambda - C)dr^2 = 0 \\ &A p dp + B q dq + C r dr = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Eliminando dr, otterremo:

$$A\left[Cr^2(\lambda - A) + Ap^2(\lambda - C)\right]dp^2 + B\left[Cr^2(\lambda - B) + Bq^2(\lambda - C)\right]dq^2 + \\ + 2AB(\lambda - C)pq\,dp\,dq = 0.$$

Sostituiamo in luogo di p, q, r i valori (5'); l'equazione precedente diverrà:

$$A\left[\frac{Cm_3^2(\lambda - A)}{(\lambda - C)^2} + \frac{Am_1^2(\lambda - C)}{(\lambda - A)^2}\right]dp^2 + B\left[\frac{Cm_3^2(\lambda - B)}{(\lambda - C)^2} + \frac{Bm_2^2(\lambda - C)}{(\lambda - B)^2}\right]dq^2 + \\ + 2\frac{ABm_1m_2(\lambda - C)}{(\lambda - A)(\lambda - B)}dp\,dq = 0.$$

Evidentemente i valori di λ per cui il primo membro sarà una *forma definita* corrisponderanno ai *punti isolati;* mentre quelli per cui *la forma* non sarà *definita* corrisponderanno ai *nodi.* Basterà dunque esaminare il segno del discriminante della forma stessa.

Calcolando questo discriminante e dividendolo per $\frac{ABC}{(\lambda - C)^2}$, che è una quantità sempre positiva, otterremo:

$$\Delta = (\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)\left\{\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3}\right\}. \qquad (10)$$

Il fattore esterno $(\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)$ cambia segno quando λ passa per A, B, C; ma evidentemente per questi valori di λ, la Δ non muta segno; dunque basterà preoccuparsi dei cambiamenti di segno del fattore:

$$\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3}.$$

Facendo crescere λ, ciascuno dei termini è decrescente, dunque avverranno due soli cambiamenti di segno mentre λ varia da C a B in cui il trinomio precedente passa da $+\infty$ a $-\infty$, e mentre λ varia da B ad A in cui pure il trinomio passa da $+\infty$ a $-\infty$; mentre si conserva sempre negativo per $\lambda < C$, e positivo per $\lambda > A$.

Ne segue che Δ è positivo lungo il ramo g_3 e in due tratti dei rami g_1, g_2 adiacenti respettivamente ai punti all'∞ di L_1 ed L_2; mentre è negativo nei tratti rimanenti di g_1 e g_2, adiacenti al punto all'∞ di L_2. *I punti di passaggio da un tratto all'altro, ossia dalle rotazioni stabili a quelle in-*

stabili, corrispondono alle due radici reali dell'equazione:

$$\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3} = 0, \tag{11}$$

comprese respettivamente fra A e B e fra B e C. Osserviamo che l'equazione precedente può scriversi, tenendo presenti le (5'):

$$\frac{1}{\sqrt{ABC}}\Big\{Apdp + Bqdq + Crdr\Big\} = df_2 = \frac{1}{\lambda}\,df_1 = 0,$$

ciò dimostra che *nei punti di passaggio suddetto la iperbola cubica è tangente alle due quadriche dei sistemi* (2) *che si toccano fra loro nel punto stesso.*

8. Lo stesso procedimento ora seguito quando la iperbole cubica non si spezza, ossia la (4) non è soddisfatta, può applicarsi ad esaminare i diversi casi particolari che si presentano allorchè si annulla qualche fattore del prodotto (4) senza che siano verificate contemporaneamente uno o più dei sistemi di condizioni (6). I calcoli relativi non presentano difficoltà e si ripetono uniformemente, così noi li sopprimiamo, riportando solo la tabella seguente che ne riassume i resultati (*).

$$\text{I. } \textit{Caso} \left\{\begin{array}{c} A > B > C \\ \text{oppure} \\ A < B < C \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} m_1 = 0 \\ m_2 \gtrless 0 \\ m_3 \gtrless 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \text{la cubica si} \\ \text{spezza in} \end{array} \left\{\begin{array}{ll} \text{iperbola } p = 0,\ q = \dfrac{m_2}{\lambda - B},\ r = \dfrac{m_3}{\lambda - C} \left\{\begin{array}{l} \lambda \text{ compresa fra } A \text{ e } \dfrac{C\sqrt[3]{Bm_2^2} + B\sqrt[3]{Cm_3^2}}{\sqrt[3]{Bm_2^2} + \sqrt[3]{Cm_3^2}} \\ \lambda \text{ non compresa fra i limiti precedenti} \end{array}\right. & \begin{array}{l} \textit{rotazioni instabili} \\ \textit{rotaz. stabili} \end{array} \\ \text{retta } q = \dfrac{m_2}{A - B},\ r = \dfrac{m_3}{A - C} \quad \ldots\ldots\ldots & \textit{rot. stabili.} \end{array}\right.$$

$$\text{II. } \textit{Caso} \left\{\begin{array}{c} A > B > C \\ \text{oppure} \\ A < B < C \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} m_1 \gtrless 0 \\ m_2 = 0 \\ m_3 \gtrless 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \text{la cubica si} \\ \text{spezza in} \end{array} \left\{\begin{array}{ll} \text{iperbola } p = \dfrac{m_1}{\lambda - A},\ q = 0,\ r = \dfrac{m_3}{\lambda - C} \left\{\begin{array}{l} \lambda \text{ compresa fra } B \text{ e } \dfrac{A\sqrt[3]{Cm_3^2} + C\sqrt{Am_1^2}}{\sqrt[3]{Cm_3^2} + \sqrt[3]{Am_1^2}} \\ \lambda \text{ non compresa fra i limiti precedenti} \end{array}\right. & \begin{array}{l} \textit{rotazioni instabili} \\ \textit{rotaz. stabili} \end{array} \\ \text{retta } p = \dfrac{m_1}{B - A},\ r = \dfrac{m_3}{B - C} \quad \ldots\ldots\ldots & \textit{rot. instabili.} \end{array}\right.$$

(*) Cfr. la Memoria delle Astr. Nachr. Art. II, § 4 e Art. III, § 3.

$$\text{III. } \textit{Caso} \quad \left\{ \begin{array}{c} A > B > C \\ \text{oppure} \\ A < B < C \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 = 0 \\ m_2 = 0 \\ m_3 \gtrless 0 \end{array} \right.$$

la cubica si spezza in

- retta $p = 0$, $q = 0$
  - r compresa fra $\frac{m_3}{A-C}$ e $\frac{m_3}{B-C}$ . . . . *rot. instabili*
  - r non compresa fra i limiti precedenti . . . . *rotaz. stabili*
- retta $q = 0$, $r = \frac{m_3}{A-C}$ . . . . *rotaz. stabili*
- retta $p = 0$, $r = \frac{m_3}{B-C}$ . . . . *rot. instabili.*

$$\text{IV. } \textit{Caso} \quad \left\{ \begin{array}{c} A > B > C \\ \text{oppure} \\ A < B < C \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 = 0 \\ m_2 \gtrless 0 \\ m_3 = 0 \end{array} \right.$$

la cubica si spezza in

- retta $p = 0$, $r = 0$
  - q compresa fra $\frac{m_2}{A-B}$ e $\frac{m_2}{C-B}$ . . . . *rotaz. stabili*
  - q non compresa fra i limiti precedenti . . . . *rot. instabili*
- retta $q = \frac{m_2}{A-B}$, $r = 0$ . . . . *rotaz. stabili*
- retta $p = 0$, $q = \frac{m_2}{C-B}$ . . . . *rotaz. stabili.*

$$\text{V. } \textit{Caso} \quad \left\{ \begin{array}{l} A > B > C \\ m_1 = m_2 = m_3 = 0 \end{array} \right. \quad \text{(Caso di Eulero)}$$

la cubica si spezza in

- retta $p = 0$, $q = 0$ . . . . *rotaz. stabili.*
- retta $q = 0$, $r = 0$ . . . . *rotaz. stabili*
- retta $r = 0$, $p = 0$ . . . . *rot. instabili*

$$\text{VI. } \textit{Caso} \text{ (*)} \quad A \lessgtr B = C \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 \gtrless 0 \\ m_2 \gtrless 0 \\ m_3 = 0 \end{array} \right.$$

la cubica si spezza in

- iperbola $p = \frac{m_1}{\lambda - A}$, $q = \frac{m_2}{\lambda - B}$, $r = 0$
  - λ compresa fra B e $\frac{A\sqrt[3]{Bm_2^2} + B\sqrt[3]{Am_1^2}}{\sqrt[3]{Bm_2^2} + \sqrt[3]{Am_1^2}}$ *rotazioni instabili*
  - λ non compresa fra i limiti precedenti *rotaz. stabili*
- retta $p = \frac{m_1}{B-A}$, $q = \infty$.

(*) Quando sia $A \gtrless B = C$, possiamo scegliere sempre gli assi d'inerzia in modo che risulti $m_3 = 0$.

$$\text{VII. } \textit{Caso} \quad A \gtrless B = C \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 = 0 \\ m_2 \gtrless 0 \ (^*) \\ m_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{la cubica si} \\ \text{spezza in} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \text{retta } p = 0, \ r = 0 & \left\{ \begin{array}{ll} q > \dfrac{m_2}{A - B} \ \ldots\ldots & \textit{rotazioni instabili} \\ q < \dfrac{m_2}{A - B} \ \ldots\ldots & \textit{rotazioni stabili} \end{array} \right. \\ \text{retta } q = \dfrac{m_2}{A - B}, \ r = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & \textit{rotazioni stabili} \end{array} \right.$$

retta $p = 0$, $q = \infty$.

9. Esaminiamo ora i casi in cui il luogo dei punti di equilibrio di P degeneri in un piano ed in una retta.

$$\text{I. } \textit{Caso} \quad A \gtrless B = C \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 \gtrless 0 \quad \text{oppure} \quad m_1 = 0 \\ m_2 = 0 \\ m_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{il luogo dei punti} \\ \text{di equilibrio di } P \\ \text{degenera in} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \text{retta } q = 0, \ r = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & \textit{rotazioni stabili} \\ \text{piano } p = \dfrac{m_1}{B - A} \ (q \text{ ed } r \text{ qualunque}) & \textit{rotazioni instabili.} \end{array} \right.$$

$$\text{II. } \textit{Caso} \quad A = B = C \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 \gtrless 0 \\ m_2 = 0 \\ m_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{il luogo dei punti} \\ \text{di equilibrio di } P \\ \text{degenera in} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \text{retta } q = 0, \ r = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & \textit{rotazioni stabili} \\ \text{piano } p = \infty. & \end{array} \right.$$

Per dimostrare nel primo caso che le rotazioni corrispondenti a $p = \dfrac{m_1}{B - A}$ e q ed r qualunque sono *instabili* non si può più applicare il teorema del § 6. Si osservi che in questo caso le intersezioni delle quadriche $f_1 = h_1$, $f_2 = h_2$ divengono una coppia di cerchi. I punti doppii corrispondono al caso in cui questi due cerchi coincidono, ed allora le due quadriche sono tangenti

(*) In questo caso si è supposto (il che è sempre possibile) di scegliere le direzioni degli assi in modo che m_2 e $A - B$ siano dello stesso segno.

fra loro lungo il cerchio doppio. Tutti i cerchi di intersezione e di contatto delle quadriche $f_1 = h_1$, $f_2 = h_2$ hanno il centro sull'asse comune di simmetria delle due quadriche e giacciono in piani ad esso perpendicolari. Il punto P sta in equilibrio in tutti i punti di uno qualunque dei centri doppii i quali appartengono tutti al piano $p = \frac{m_1}{B - A}$; ma vicino quanto si vuole ad una qualunque di essi esistono delle coppie di cerchi semplici ciascuno dei quali viene percorso dal punto P con velocità costante: basta questa osservazione per rendere manifesta la instabilità dell'equilibrio di P nei punti del piano $p = \frac{m_1}{B - A}$, e quindi la instabilità delle corrispondenti rotazioni permanenti. *Il teorema del § 6 è dunque estensibile anche a questo caso precedentemente escluso.*

10. Resta da considerare il caso in cui siano soddisfatti tutti e tre i sistemi di condizioni (6), cioè sia $A = B = C$, $m_1 = m_2 = m_3 = 0$. In questo caso P sta in equilibrio in ogni punto dello spazio, e quindi possiamo concluderne immediatamente che tali posizioni di equilibrio sono stabili.

Però è facile riconoscere che in questo caso non si ha la stabilità riguardo ad alterazioni dei moti interni. Infatti, supposto di scegliere gli assi tali che sia $p \gtrless 0$, $q = 0$, $r = 0$, basterà prendere $m_1 = 0$, $m_2 \gtrless 0$, $m_3 = 0$, e per quanto piccolo sia m_2 in valore assoluto, la traiettoria di P resulterà sempre un cerchio situato nel piano $q = 0$ con il centro nell'origine e di raggio p. Quindi in questo caso le rotazioni sono *stabili* riguardo ad alterazioni nelle rotazioni stesse, ed *instabili* riguardo ai moti interni.

Così resta completata la trattazione di tutti i diversi casi che possono presentarsi e distinto in ciascuno di essi le rotazioni stabili da quelle instabili.

11. Diamo una semplice applicazione del teorema del § 5. Suppongasi $A > B > C$, $m_1 = m_2 = m_3$; siamo allora nel caso V del § 8. Possiamo quindi concludere immediatamente che quando la grandezza delle coppia di quantità di moto dei movimenti interni sarà sufficientemente piccola, prendendo la posizione iniziale del polo di rotazione abbastanza prossima all'estremità dell'asse d'inerzia di momento massimo (o a quella dell'asse di momento minimo) la corrispondente polodia si conserverà prossima tanto quanto si vuole al polo d'inerzia.

12. La teoria svolta in questa Memoria sulla stabilità delle rotazioni permanenti ci conduce ad una osservazione che credo non priva di interesse.

Noi possiamo vedere eseguire delle piccole oscillazioni al polo di rotazione di un sistema attorno ad una certa posizione, senza che il sistema cambi di forma, nè si alteri in esso la distribuzione delle masse e non per questo sarà lecito concluderne che il punto intorno a cui oscilla il polo di rotazione sia un polo d'inerzia. Basterà infatti che non possa escludersi la esistenza di moti interni stazionarii nel sistema, perchè il punto intorno a cui oscilla il polo di rotazione anzichè un polo d'inerzia sia la intersezione dell'ellissoide d'inerzia col raggio vettore che va ad un punto isolato delle quartiche che abbiamo precedentemente esaminate. (Vedi 2.ª Nota del § 2.)

Procediamo ora allo studio delle piccole vibrazioni di P intorno alle sue posizioni di equilibrio stabile. A tal fine supponiamo dapprima che la cubica (3) non si spezzi, ed in questa ipotesi chiamando λ_1 e λ_2 le due radici reali dell'equazione (11) prendiamo λ non compreso in questo intervallo. Allora (vedi (5')):

$$p_0 = \frac{m_1}{\lambda - A}, \qquad q_0 = \frac{m_2}{\lambda - B}, \qquad r_0 = \frac{m_3}{\lambda - C}, \tag{12}$$

corrisponderanno ad una posizione di equilibrio stabile di P, ossia ad una rotazione permanente stabile del sistema.

Si ponga:

$$p = p_0 + \varpi, \qquad q = q_0 + \chi, \qquad r = r_0 + \rho,$$

e consideriamo ϖ, χ, ρ come piccolissime, in modo da poter trascurare le loro potenze superiori alla prima come si suol fare nella teoria dei piccoli movimenti; allora poichè i valori costanti p_0, q_0, r_0 soddisfano le (3') otterremo che le (a) si trasformeranno nelle:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\varpi}{dt} + \frac{m_3(\lambda - B)}{\lambda - C}\chi - \frac{m_2(\lambda - C)}{\lambda - B}\rho = 0 \\ B\frac{d\chi}{dt} + \frac{m_1(\lambda - C)}{\lambda - A}\rho - \frac{m_3(\lambda - A)}{\lambda - C}\varpi = 0 \\ C\frac{d\rho}{dt} + \frac{m_2(\lambda - A)}{\lambda - B}\varpi - \frac{m_1(\lambda - B)}{\lambda - A}\chi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Per integrare queste equazioni lineari si ponga:

$$\varpi = a e^{zt}, \qquad \chi = b e^{zt}, \qquad \rho = c e^{zt},$$

con a, b, c, z costanti; avremo allora dalla nota teoria delle equazioni differenziali lineari che z sarà radice della equazione:

$$\begin{vmatrix} Az, & \frac{m_3(\lambda - B)}{\lambda - C}, & -\frac{m_2(\lambda - C)}{\lambda - B} \\ -\frac{m_3(\lambda - A)}{\lambda - C}, & Bz, & \frac{m_1(\lambda - C)}{\lambda - A} \\ \frac{m_2(\lambda - A)}{\lambda - B}, & -\frac{m_1(\lambda - B)}{\lambda - A}, & Cz \end{vmatrix} = 0,$$

che sviluppata diviene:

$$ABCz^3 + (\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3}\right]z = 0,$$

da cui si ricava:

$$z = 0, \qquad z = \pm i\sqrt{\frac{(\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)}{ABC}\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3}\right]}.$$

Le due radici di z diverse da zero sono immaginarie, per l'ipotesi fatta riguardo a λ; quindi il periodo di vibrazione di P intorno alla posizione di equilibrio stabile, sarà:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{(\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)}{ABC}\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3}\right]}}.$$

Variando λ entro i limiti stabiliti, *la formula precedente ci darà i periodi con i quali il polo di rotazione può vibrare attorno alle sue posizioni di equilibrio stabile.*

Moltiplicando rispettivamente le (13) per $\frac{m_1}{\lambda - A}$, $\frac{m_2}{\lambda - B}$, $\frac{m_3}{\lambda - C}$ sommando e integrando si ottiene:

$$\frac{Am_1}{\lambda - A}\varpi + \frac{Bm_2}{\lambda - B}\chi + \frac{Cm_3}{\lambda - C}\rho = \text{cost.}, \tag{14}$$

e moltiplicandole per $(\lambda - A)\varpi$, $(\lambda - B)\chi$, $(\lambda - C)\rho$, sommando e integrando abbiamo:

$$A(\lambda - A)\varpi^2 + B(\lambda - B)\chi^2 + C(\lambda - C)\rho^2 = \text{cost.} \tag{15}$$

Questi due integrali esprimono (cfr. form. (12) e § 7) che il moto di P ha luogo secondo una ellisse situata nel piano (13), cioè nel piano parallelo a quello comune tangente alle quadriche (2) nel punto (p_0, q_0, r_0) di equilibrio stabile.

Non staremo ad esaminare i varii casi particolari che possono presentarsi, la cui trattazione non presenta nessuna difficoltà fondandosi sopra i resultati precedentemente stabiliti.

Considereremo soltanto il caso in cui due momenti d'inerzia sono eguali, il terzo essendo differente, cioè:

$$A \gtrless B = C.$$

Allora possiamo scegliere gli assi d'inerzia in modo da rendere $m_3 = 0$, onde applicando ciò che abbiamo ottenuto nel caso VI del § 8, le rotazioni stabili resulteranno date da:

$$p_0 = \frac{m_1}{\lambda - A}, \qquad q_0 = \frac{m_2}{\lambda - B}, \qquad r_0 = 0,$$

in cui λ non è compreso fra:

$$B \quad \text{e} \quad \frac{A\sqrt[3]{Bm_2^2} + B\sqrt[3]{Am_1^2}}{\sqrt[3]{Bm_2^2} + \sqrt[3]{Am_1^2}}.$$

Quindi i periodi di vibrazione del polo di rotazione attorno alle sue posizioni stabili saranno dati da:

$$T = \frac{2\pi B}{(\lambda - B)\sqrt{\frac{\lambda - A}{A}\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3}\right]}} = \frac{2\pi}{\frac{m_2}{Bq_0}\sqrt{\frac{m_1}{Ap_0}\left[\frac{Ap_0^3}{m_1} + \frac{Bq_0^3}{m_2}\right]}}.$$

Quando non esistono moti interni vi è una sola posizione stabile del polo di rotazione (Caso I, § 9) corrispondente a $p = p_0$, $q = r = 0$, ed il periodo di vibrazione del polo attorno ad esso è il periodo euleriano $\frac{2\pi B}{(B - A)p_0}$. I moti interni dunque, oltre a dar luogo ad infinite posizioni stabili del polo, alterano anche il periodo euleriano rendendolo suscettibile di assumere i valori dati dalla formula precedente.

Torino, 2 luglio 1895.

NOTA ALLA PRECEDENTE MEMORIA.

Avendo comunicato al mio amico prof. SEGRE i resultati contenuti nella precedente Memoria, questi fece a proposito delle proposizioni contenute nel § 7, alcune eleganti considerazioni geometriche, che, dietro suo permesso, sono lieto di potere render note testualmente in ciò che segue:

« I sistemi di quadriche:

$$f_1 = \text{cost.}, \qquad f_2 = \text{cost.}, \tag{2}$$

sono fasci appartenenti ad una stessa *rete* di quadriche, la quale è caratterizzata dal contenere come quadrica degenere un *piano doppio,* il piano all'infinito; cosicchè le ∞^2 quadriche della rete si posson raggruppare in ∞^1 fasci (schiere) di quadriche concentriche e omotetiche, tra cui sono appunto i due fasci (2). Ne segue che il luogo dei punti di contatto delle quadriche di questi fasci, cioè il luogo dei vertici dei coni quadrici della rete, ossia la *curva Jacobiana* della rete, è pure il luogo dei poli di quel piano rispetto alle quadriche della rete, cioè dei centri di queste quadriche. Quel luogo è dunque una cubica.

« La proposizione con cui finisce il § 7 rientra in una più generale relativa alla curva Jacobiana di una rete qualunque di superficie: la tangente a questa curva in un suo punto P è polare del piano che ivi è toccato dalle superficie generiche della rete passanti per P, rispetto al cono quadrico tangente in P a quella particolare fra le dette superficie che ha ivi un punto doppio. Non so se questa proposizione sia nota: in ogni modo la si dimostra facilmente con procedimenti già adoperati per proposizioni analoghe. Da essa segue che se P è un punto di contatto *stazionario* per superficie della rete, cioè tale che la curva comune a queste abbia ivi una cuspide, la tangente in P a questa curva è anche la tangente in P alla curva Jacobiana. E come caso particolare per la rete attuale si ritrova (e si completa) la proposizione finale del § 7: la quale poi, mediante le equazioni (2) e (5'), ricondurrebbe subito all'equazione in λ che determina le cuspidi di quartiche della rete.

« La rete di quadriche ha 4 punti base, situati nel piano all'infinito, ed in essi rispettivamente 4 tangenti fisse (esterne a quel piano). Per ipotesi nella rete vi sono degli ellissoidi (2). Ne segue che quei 4 punti base sono due coppie di punti imaginari coniugati aa', bb'. Fra gli ∞^1 fasci di quadriche concentriche che compongono la rete, ognun dei quali dà sul piano all'infinito una determinata conica del fascio $aa'bb'$, ve ne sono tre, *reali*, che dànno sul piano all'infinito rispettivamente: la coppia di rette reali aa', bb'; la coppia di rette imaginarie coniugate ab, $a'b'$; la coppia di rette imaginarie coniugate ab', $a'b$. Il 1.° fascio sarà di paraboloidi iperbolici, il 2.° ed il 3.° di paraboloidi ellittici. I punti doppi, tutti tre reali, di quelle tre coppie di rette saranno i punti all'infinito della nostra cubica. Il ramo infinito di questa che va dal 2.° al 3.° punto sarà tutto composto di centri di ellissoidi della rete, mentre sugli altri due rami infiniti della cubica si avranno centri d'iperboloidi. Se un punto P è centro di ellissoidi della rete, esso è isolato sulla quartica base del fascio di quadriche passanti per P, giacchè le tangenti in esso alla quartica devono stare nel cono della rete che ha il centro in P e che sarà imaginario (ellissoide ridotto ad un sol punto reale). Per conseguenza sul primo ramo della cubica non vi sarà alcun punto reale che sia cuspide di quartiche della rete. — Volendo risolvere *geometricamente*, in modo completo, la questione di vedere quante fra le 6 cuspidi di quartiche della rete siano reali, si potranno forse adoperare gli ultimi ragionamenti, ulteriormente proseguiti. Ma un'altra via, assai naturale, consiste nel rappresentare (al modo di Hesse) le ∞^2 quadriche della rete coi punti di un piano, e quindi gli ∞^1 coni coi punti di una quartica piana γ^4. Si vede allora che questa curva avrà nel caso attuale un punto triplo, corrispondente al piano doppio che fa parte della rete. Le tangenti in quel punto triplo sono 3 rette reali e distinte, perchè corrispondono ai 3 fasci reali testè considerati di paraboloidi della rete. Inoltre le 4 tangenti doppie di γ^4

sono tutte imaginarie, perchè corrispondono ai fasci di quadriche della rete passanti rispettivamente per le 4 tangenti fisse (imaginarie) in a, a', b, b'. Si può allora verificare che delle 6 tangenti stazionarie (flessi) di γ^4 solo 2 saranno reali: o ricorrendo ai lavori speciali relativi alle forme reali delle quartiche piane; oppure ricorrendo alla nota formola generale del KLEIN (Math. Annalen, tom. 10, pag. 199), la quale, applicata ad una curva del 4.° ordine (deformata di γ^4) con tre nodi, e nessuna tangente doppia reale isolata, dà $w' = 2$ come numero dei flessi reali. Ora le tangenti stazionarie di γ^4 corrispondono a quei fasci della rete di quadriche i quali hanno contatti stazionarii: ossia a punti della cubica che sono cuspidi per quartiche della rete. Dunque si ritrova che fra quei 6 punti solo 2 sono reali. »

Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio elastico.

(*Del dott.* Giuseppe Lauricella, *a Pisa.*)

In una Memoria inserita negli « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa (1894) », ho risoluto il problema dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi per dati spostamenti al contorno, servendomi di un processo analogo a quello usato dal Neumann per risolvere il problema di Dirichlet. Per questo ho dovuto ammettere che la superficie limitante il corpo elastico fosse convessa e che ammettesse un piano tangente determinato in ogni suo punto, e inoltre che le velocità di vibrazioni longitudinali e trasversali differissero in valore assoluto sufficientemente poco tra di loro.

Ora qui mi propongo di risolvere il problema dell'equilibrio elastico per date forze agenti sulla superficie del corpo, nel caso che questa soddisfi alle medesime condizioni richiamate sopra e che la espressione $\alpha = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$, dove a e b sono rispettivamente le velocità di vibrazioni trasversali e longitudinali, non oltrepassi certi limiti dipendenti dalla natura della superficie. Bisogna notare che, come ho altra volta osservato (*), nei corpi elastici isotropi la quantità α è sempre negativa e compresa tra -1 e $-\frac{1}{2}$; per cui quando il limite inferiore dei valori che può prendere α supera $-\frac{1}{2}$, oppure quando il limite superiore di questi valori è minore di -1, il problema analitico risoluto non corrisponde ad alcun caso di corpo elastico isotropo.

Vari metodi sono stati dati per trovare gli spostamenti dei punti di un corpo elastico isotropo, corrispondenti a date forze in superficie (**); ma la loro applicazione offre delle difficoltà quasi sempre insormontabili, che sola-

(*) Vedi Memoria cit., pag. VI e 109.

(**) Ibid., pag. IV, V.

mente per i due casi di un corpo elastico indefinito limitato da un piano e di un corpo elastico sferico (*) si sono potuti superare.

Il metodo ch'io adopero è simile a quello di cui si serve il NEUMANN (**) per risolvere il problema di *determinare una funzione armonica in un certo spazio, per dati valori delle sue derivate normali alla superficie.*

Riguardo ai simboli ho creduto bene di adottare quelli introdotti nella sopra citata Memoria, senza richiamarne il significato, essendo del resto il presente lavoro un nuovo capitolo da aggiungere a quella Memoria.

1. Supporremo, come si può sempre fare, che le forze che agiscono nei punti della massa del corpo elastico siano nulle (vedi Mem. cit., Cap. III, § 2); onde le componenti degli spostamenti u, v, w dei punti (x_1, y_1, z_1) di S, che dobbiamo determinare, devono soddisfare alle equazioni indefinite:

$$\left.\begin{aligned} L\Delta^2 u + (L+K)\frac{\partial\theta}{\partial x_1} &= 0 \\ L\Delta^2 v + (L+K)\frac{\partial\theta}{\partial y_1} &= 0 \\ L\Delta^2 w + (L+K)\frac{\partial\theta}{\partial z_1} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ed a quelle in superficie:

$$\left.\begin{aligned} X_\sigma &= (K\theta + 2L\gamma_{11})\frac{\partial x}{\partial n} + L\gamma_{12}\frac{\partial y}{\partial n} + L\gamma_{13}\frac{\partial z}{\partial n} \\ Y_\sigma &= L\gamma_{21}\frac{\partial x}{\partial n} + (K\theta + 2L\gamma_{22})\frac{\partial y}{\partial n} + L\gamma_{23}\frac{\partial z}{\partial n} \\ Z_\sigma &= L\gamma_{31}\frac{\partial x}{\partial n} + L\gamma_{32}\frac{\partial y}{\partial n} + (K\theta + 2L\gamma_{33})\frac{\partial z}{\partial n}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Le funzioni:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, & v_1 &= \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}, & w_1 &= \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z} \\ u_2 &= \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x}, & v_2 &= \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}, & w_2 &= \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial y \partial z} \\ u_3 &= \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial z \partial x}, & v_3 &= \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial z \partial y}, & w_3 &= \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(*) Vedi ad es. CERRUTI, *Sulla deformazione di una sfera omogenea...* (Nuovo Cimento, serie 3.ª, tom. 32.)

(**) NEUMANN, *Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential,* pag. 216.

sono tre sistemi di integrali delle equazioni (1) per i quali si ha su σ, come risulta dalle (2):

$$X_\sigma^{(1)} = L\left\{(1+\alpha)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - 3\alpha\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\}$$

$$Y_\sigma^{(1)} = L\left\{(1+\alpha)\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}\right) - 3\alpha\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\}$$

$$Z_\sigma^{(1)} = L\left\{(1+\alpha)\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right) - 3\alpha\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\},$$

$$X_\sigma^{(2)} = L\left\{(1+\alpha)\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}\right) - 3\alpha\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\}$$

$$Y_\sigma^{(2)} = L\left\{(1+\alpha)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - 3\alpha\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\}$$

$$Z_\sigma^{(2)} = L\left\{(1+\alpha)\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial n}\right) - 3\alpha\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\},$$

$$X_\sigma^{(3)} = L\left\{(1+\alpha)\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}\right) - 3\alpha\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\}$$

$$Y_\sigma^{(3)} = L\left\{(1+\alpha)\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial n}\right) - 3\alpha\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\}$$

$$Z_\sigma^{(3)} = L\left\{(1+\alpha)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - 3\alpha\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\}.$$

Ora come risulta dai calcoli fatti nel § 1 del Cap. IV della citata Memoria, sono integrali delle equazioni (1) le due terne di funzioni:

$$2(1+\alpha)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - 3\alpha\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}, \qquad -3\alpha\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}, \qquad -3\alpha\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n};$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}, \qquad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}, \qquad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n};$$

onde saranno integrali delle stesse equazioni le tre funzioni dei punti (x_1, y_1, z_1):

$$X_\sigma^{(1)}, \qquad X_\sigma^{(2)}, \qquad X_\sigma^{(3)},$$

e così le altre due terne:

$$Y_\sigma^{(1)}, \quad Y_\sigma^{(2)}, \quad Y_\sigma^{(3)}; \qquad Z_\sigma^{(1)}, \quad Z_\sigma^{(2)}, \quad Z_\sigma^{(3)}.$$

2. Siano $u(m)$, $v(m)$, $w(m)$ tre funzioni arbitrarie finite e continue dei punti m di σ; n un punto qualunque dello spazio finito S interno a σ ed n' un altro punto qualunque dello spazio indefinito S' esterno a σ. Le espressioni:

$$\left.\begin{aligned}
U_1(n) &= \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \left\{u(m)\cdot X_\sigma^{(1)}(n) + v(m)\cdot Y_\sigma^{(1)}(n) + w(m)\cdot Z_\sigma^{(1)}(n)\right\} d\sigma \\
V_1(n) &= \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \left\{u(m)\cdot X_\sigma^{(2)}(n) + v(m)\cdot Y_\sigma^{(2)}(n) + w(m)\cdot Z_\sigma^{(2)}(n)\right\} d\sigma \\
W_1(n) &= \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \left\{u(m)\cdot X_\sigma^{(3)}(n) + v(m)\cdot Y_\sigma^{(3)}(n) + w(m)\cdot Z_\sigma^{(3)}(n)\right\} d\sigma,
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

e le altre:

$$\left.\begin{aligned}
U_1(n') &= \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \left\{u(m)\cdot X_\sigma^{(1)}(n') + v(m)\cdot Y_\sigma^{(1)}(n') + w(m)\cdot Z_\sigma^{(1)}(n')\right\} d\sigma \\
V_1(n') &= \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \left\{u(m)\cdot X_\sigma^{(2)}(n') + v(m)\cdot Y_\sigma^{(2)}(n') + w(m)\cdot Z_\sigma^{(2)}(n')\right\} d\sigma \\
W_1(n') &= \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \left\{u(m)\cdot X_\sigma^{(3)}(n') + v(m)\cdot Y_\sigma^{(3)}(n') + w(m)\cdot Z_\sigma^{(3)}(n')\right\} d\sigma,
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

sono evidentemente funzioni monodrome finite e continue le prime tre dei punti di S, le altre tre dei punti di S', che soddisfano alle equazioni (1) dell'equilibrio.

Nel § 3 del Cap. III della Mem. cit. fu dimostrato che, se il punto dal quale partono i raggi vettori r è in S o su σ, si ha:

$$\int_\sigma X_\sigma^{(1)} d\sigma = L\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma, \qquad \int_\sigma Y_\sigma^{(1)} d\sigma = 0, \qquad \int_\sigma Z_\sigma^{(1)} d\sigma = 0. \tag{6}$$

Similmente si può dimostrare che si ha:

$$\left.\begin{array}{lll}\int\limits_\sigma X_\sigma^{(2)}\,d\sigma=0, & \int\limits_\sigma Y_\sigma^{(2)}\,d\sigma=L\int\limits_\sigma \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma, & \int\limits_\sigma Z_\sigma^{(2)}\,d\sigma=0\\ \int\limits_\sigma X_\sigma^{(3)}\,d\sigma=0, & \int\limits_\sigma Y_\sigma^{(3)}\,d\sigma=0, & \int\limits_\sigma Z_\sigma^{(3)}\,d\sigma=L\int\limits_\sigma \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma,\end{array}\right\}\quad(7)$$

e che queste formole insieme alle (6) valgono anche quando il punto, che si considera, si trova nello spazio S'.

Ciò posto, poichè l'integrale:

$$\int\limits_\sigma \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma,$$

per i punti di S è uguale a 4π, per i punti di σ è uguale a 2π e per quelli di S' è uguale a zero, se indichiamo con μ un punto qualsiasi di σ, avremo:

$$\left.\begin{array}{l}U_1(n)=\frac{1}{2\pi L}\int\limits_\sigma\Big\{\big(u(m)-u(\mu)\big)X_\sigma^{(1)}(n)+\big(v(m)-v(\mu)\big)Y_\sigma^{(1)}(n)+\\ \qquad\qquad+\big(w(m)-w(\mu)\big)Z_\sigma^{(1)}(n)\Big\}+2u(\mu)\\ V_1(n)=\frac{1}{2\pi L}\int\limits_\sigma\Big\{\big(u(m)-u(\mu)\big)X_\sigma^{(2)}(n)+\big(v(m)-v(\mu)\big)Y_\sigma^{(2)}(n)+\\ \qquad\qquad+\big(w(m)-w(\mu)\big)Z_\sigma^{(2)}(n)\Big\}+2v(\mu)\\ W_1(n)=\frac{1}{2\pi L}\int\limits_\sigma\Big\{\big(u(m)-u(\mu)\big)X_\sigma^{(3)}(n)+\big(v(m)-v(\mu)\big)Y_\sigma^{(3)}(n)+\\ \qquad\qquad+\big(w(m)-w(\mu)\big)Z_\sigma^{(3)}(n)\Big\}+2w(\mu),\end{array}\right\}\quad(8)$$

$$\left.\begin{array}{l}U_1(\mu)=\frac{1}{2\pi L}\int\limits_\sigma\Big\{\big(u(m)-u(\mu)\big)X_\sigma^{(1)}(\mu)+\big(v(m)-v(\mu)\big)Y_\sigma^{(1)}(\mu)+\\ \qquad\qquad+\big(w(m)-w(\mu)\big)Z_\sigma^{(1)}(\mu)\Big\}+u(\mu)\\ V_1(\mu)=\frac{1}{2\pi L}\int\limits_\sigma\Big\{\big(u(m)-u(\mu)\big)X_\sigma^{(2)}(\mu)+\big(v(m)-v(\mu)\big)Y_\sigma^{(2)}(\mu)+\\ \qquad\qquad+\big(w(m)-w(\mu)\big)Z_\sigma^{(2)}(\mu)\Big\}+v(\mu)\\ W_1(\mu)=\frac{1}{2\pi L}\int\limits_\sigma\Big\{\big(u(m)-u(\mu)\big)X_\sigma^{(3)}(\mu)+\big(v(m)-v(\mu)\big)Y_\sigma^{(3)}(\mu)+\\ \qquad\qquad+\big(w(m)-w(\mu)\big)Z_\sigma^{(3)}(\mu)\Big\}+w(\mu),\end{array}\right\}\quad(9)$$

$$\left.\begin{aligned}
U_1(n') &= \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \Big\{\Big(u(m)-u(\mu)\Big)X_\sigma^{(1)}(n')+\Big(v(m)-v(\mu)\Big)Y_\sigma^{(1)}(n')+\\
&\qquad\qquad +\Big(w(m)-w(\mu)\Big)Z_\sigma^{(1)}(n')\Big\}\\
V_1(n') &= \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \Big\{\Big(u(m)-u(\mu)\Big)X_\sigma^{(2)}(n')+\Big(v(m)-v(\mu)\Big)Y_\sigma^{(2)}(n')+\\
&\qquad\qquad +\Big(w(m)-w(\mu)\Big)Z_\sigma^{(2)}(n')\Big\}\\
W_1(n') &= \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \Big\{\Big(u(m)-u(\mu)\Big)X_\sigma^{(3)}(n')+\Big(v(m)-v(\mu)\Big)Y_\sigma^{(3)}(n')+\\
&\qquad\qquad +\Big(w(m)-w(\mu)\Big)Z_\sigma^{(3)}(n')\Big\}.
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Gli integrali, che compariscono nelle formole precedenti, sono funzioni che, come fu dimostrato al § 4 del Cap. III della citata Memoria, si mantengono continue anche quando il punto di S o di S', che si considera, attraversa la superficie σ passando per μ; onde potremo scrivere:

$$\begin{aligned}
\lim_{n=\mu} U_1(n) &= \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \Big\{\Big(u(m)-u(\mu)\Big)X_\sigma^{(1)}(\mu)+\Big(v(m)-v(\mu)\Big)Y_\sigma^{(1)}(\mu)+\\
&\qquad +\Big(w(m)-w(\mu)\Big)Z_\sigma^{(1)}(\mu)\Big\}+2u(\mu)=U_1(\mu)+u(\mu),\\
\lim_{n=\mu} V_1(n) &= \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \Big\{\Big(u(m)-u(\mu)\Big)X_\sigma^{(2)}(\mu)+\Big(v(m)-v(\mu)\Big)Y_\sigma^{(2)}(\mu)+\\
&\qquad +\Big(w(m)-w(\mu)\Big)Z_\sigma^{(2)}(\mu)\Big\}+2v(\mu)=V_1(\mu)+v(\mu),\\
\lim_{n=\mu} W_1(n) &= \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \Big\{\Big(u(m)-u(\mu)\Big)X_\sigma^{(3)}(\mu)+\Big(v(m)-v(\mu)\Big)Y_\sigma^{(3)}(\mu)+\\
&\qquad +\Big(w(m)-w(\mu)\Big)Z_\sigma^{(3)}(\mu)\Big\}+2w(\mu)=W_1(\mu)+w(\mu);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n'=\mu} U_1(n') &= \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \Big\{\Big(u(m)-u(\mu)\Big)X_\sigma^{(1)}(\mu)+\Big(v(m)-v(\mu)\Big)Y_\sigma^{(1)}(\mu)+\\
&\qquad +\Big(w(m)-w(\mu)\Big)Z_\sigma^{(1)}(\mu)\Big\}=U_1(\mu)-u(\mu),\\
\lim_{n'=\mu} V_1(n') &= \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \Big\{\Big(u(m)-u(\mu)\Big)X_\sigma^{(2)}(\mu)+\Big(v(m)-v(\mu)\Big)Y_\sigma^{(2)}(\mu)+\\
&\qquad +\Big(w(m)-w(\mu)\Big)Z_\sigma^{(2)}(\mu)\Big\}=V_1(\mu)-v(\mu),\\
\lim_{n'=\mu} W_1(n') &= \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \Big\{\Big(u(m)-u(\mu)\Big)X_\sigma^{(3)}(\mu)+\Big(v(m)-v(\mu)\Big)Y_\sigma^{(3)}(\mu)+\\
&\qquad +\Big(w(m)-w(\mu)\Big)Z_\sigma^{(3)}(\mu)\Big\}=W_1(\mu)-w(\mu).
\end{aligned}$$

La continuità nel modo sopra detto degli integrali, che compariscono nelle formole (8), (10), dipende dal fatto che gli integrali delle (9) sono proprii (cfr. paragrafo citato); per cui essi, considerati come funzioni del punto variabile μ di σ, sono sempre finite e continue. Ora per ipotesi anche le funzioni $u(\mu)$, $v(\mu)$, $w(\mu)$ sono finite e continue; risulta quindi che le espressioni:

$$U_1(\mu) = u_1(\mu), \qquad V_1(\mu) = v_1(\mu), \qquad W_1(\mu) = w_1(\mu),$$

sono tre funzioni finite e continue dei punti della superficie σ. Mettendo la variabile m in luogo della μ, avremo tre funzioni:

$$u_1(m), \qquad v_1(m), \qquad w_1(m),$$

analoghe alle funzioni date $u(m)$, $v(m)$, $w(m)$, mediante le quali possiamo costruire le espressioni:

$$U_2(n) = \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \left\{u_1(m)\cdot X_\sigma^{(1)}(n) + v_1(m)\cdot Y_\sigma^{(1)}(n) + w_1(m)\cdot Z_\sigma^{(1)}(n)\right\} d\sigma$$

$$V_2(n) = \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \left\{u_1(m)\cdot X_\sigma^{(2)}(n) + v_1(m)\cdot Y_\sigma^{(2)}(n) + w_1(m)\cdot Z_\sigma^{(2)}(n)\right\} d\sigma$$

$$W_2(n) = \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \left\{u_1(m)\cdot X_\sigma^{(3)}(n) + v_1(m)\cdot Y_\sigma^{(3)}(n) + w_1(m)\cdot Z_\sigma^{(3)}(n)\right\} d\sigma,$$

e le altre:

$$U_2(n') = \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \left\{u_1(m)\cdot X_\sigma^{(1)}(n') + v_1(m)\cdot Y_\sigma^{(1)}(n') + w_1(m)\cdot Z_\sigma^{(1)}(n')\right\} d\sigma$$

$$V_2(n') = \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \left\{u_1(m)\cdot X_\sigma^{(2)}(n') + v_1(m)\cdot Y_\sigma^{(2)}(n') + w_1(m)\cdot Z_\sigma^{(2)}(n')\right\} d\sigma$$

$$W_2(n') = \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \left\{u_1(m)\cdot X_\sigma^{(3)}(n') + v_1(m)\cdot Y_\sigma^{(3)}(n') + w_1(m)\cdot Z_\sigma^{(3)}(n')\right\} d\sigma,$$

che come le (4) e (5) sono funzioni monodrome finite e continue rispettivamente dei punti n di S e dei punti n' di S', che soddisfano alle equazioni (1) dell' equilibrio.

Posto poi:

$$U_2(\mu) = u_2(\mu), \qquad V_2(\mu) = v_2(\mu), \qquad W_2(\mu) = w_2(\mu),$$

avremo anche qui:

$$\lim_{n=\mu} U_2(n) = u_2(\mu) + u_1(\mu), \qquad \lim_{n=\mu} V_2(n) = v_2(\mu) + v_1(\mu),$$
$$\lim_{n=\mu} W_2(n) = w_2(\mu) + w_1(\mu)$$
$$\lim_{n'=\mu} U_2(n') = u_2(\mu) - u_1(\mu), \qquad \lim_{n'=\mu} V_2(n') = v_2(\mu) - v_1(\mu),$$
$$\lim_{n'=\mu} W_2(n') = w_2(\mu) - w_1(\mu).$$

Così seguitando verremo a formare due serie di sistemi di integrali delle equazioni (1):

$$\left.\begin{matrix} U_1(n), & V_1(n), & W_1(n); & U_2(n), & V_2(n), & W_2(n); \ldots\ldots \\ U_1(n'), & V_1(n'), & W_1(n'); & U_2(n'), & V_2(n'), & W_2(n'); \ldots\ldots \end{matrix}\right\} \tag{11}$$

e tre serie di funzioni finite e continue dei punti della superficie σ:

$$u, \quad v, \quad w; \qquad u_1, \quad v_1, \quad w_1; \qquad u_2, \quad v_2, \quad w_2; \ldots\ldots, \tag{12}$$

per le quali si ha:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n=\mu} U_1(n) = u_1(\mu) + u(\mu), \qquad \lim\limits_{n=\mu} V_1(n) = v_1(\mu) + v(\mu), \\ \qquad\qquad \lim\limits_{n=\mu} W_1(n) = w_1(\mu) + w(\mu) \\ \lim\limits_{n=\mu} U_2(n) = u_2(\mu) + u_1(\mu), \qquad \lim\limits_{n=\mu} V_2(n) = v_2(\mu) + v_1(\mu), \\ \qquad\qquad \lim\limits_{n=\mu} W_2(n) = w_2(\mu) + w_1(\mu) \\ \lim\limits_{n=\mu} U_3(n) = u_3(\mu) + u_2(\mu), \qquad \lim\limits_{n=\mu} V_3(n) = v_3(\mu) + v_2(\mu), \\ \qquad\qquad \lim\limits_{n=\mu} W_3(n) = w_3(\mu) + w_2(\mu) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{13}$$

e

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n'=\mu} U_1(n') = u_1(\mu) - u(\mu), \qquad \lim\limits_{n'=\mu} V_1(n') = v_1(\mu) - v(\mu), \\ \qquad\qquad \lim\limits_{n'=\mu} W_1(n') = w_1(\mu) - w(\mu) \\ \lim\limits_{n'=\mu} U_2(n') = u_2(\mu) - u_1(\mu), \qquad \lim\limits_{n'=\mu} V_2(n') = v_2(\mu) - v_1(\mu), \\ \qquad\qquad \lim\limits_{n'=\mu} W_2(n') = w_2(\mu) - w_1(\mu) \\ \lim\limits_{n'=\mu} U_3(n') = u_3(\mu) - u_2(\mu); \qquad \lim\limits_{n'=\mu} V_3(n') = v_3(\mu) - v_2(\mu), \\ \qquad\qquad \lim\limits_{n'=\mu} W_3(n') = w_3(\mu) - w_2(\mu) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{14}$$

3. Indichiamo rispettivamente con G, G_1, G_2,... i massimi dei massimi e con K, K_1, K_2,... i minimi dei minimi delle terne di funzioni:

$$\begin{array}{lll} u(m), & v(m), & w(m) \\ u_1(m), & v_1(m), & w_1(m) \\ u_2(m), & v_2(m), & w_2(m) \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

e poniamo:

$$H = \frac{G_{s-1} + K_{s-1}}{2};$$

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{1}{L} X_\sigma^{(1)} = a, & \frac{1}{L} Y_\sigma^{(1)} = b, & \frac{1}{L} Z_\sigma^{(1)} = c \\ \frac{1}{L} X_\sigma^{(2)} = a_1, & \frac{1}{L} Y_\sigma^{(2)} = b_1, & \frac{1}{L} Z_\sigma^{(2)} = c_1 \\ \frac{1}{L} X_\sigma^{(3)} = a_2, & \frac{1}{L} Y_\sigma^{(3)} = b_2, & \frac{1}{L} Z_\sigma^{(3)} = c_2. \end{array}\right\} \tag{15}$$

Siano σ_u e σ'_u le due regioni in cui viene scomposta la superficie σ in modo che la funzione u_{s-1} sia su σ_u inferiore ad H, su σ'_u superiore od uguale ad H; similmente siano σ_v e σ'_v due regioni della superficie σ tali che $\sigma_v + \sigma'_v = \sigma$ e che su σ_v la funzione v_{s-1} si mantenga inferiore ad H, su σ'_v si mantenga invece superiore od uguale ad H; e finalmente siano σ_w e σ'_w le due regioni in cui viene scomposta σ in modo che la funzione w_{s-1} sia su σ_w sempre minore di H, su σ'_w sempre maggiore od uguale ad H. Indichiamo poi con μ_1, μ_2 due punti generici di σ e con a'_{01}, b'_{01}, c'_{01}; a'_{11},...; a'_{21},... e a'_{02}, b'_{02}, c'_{02}; a'_{12},...; a'_{22},... i valori che le funzioni a, b, c; a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 prendono rispettivamente nei punti μ_1, μ_2.

Bisogna osservare che, finchè si ha $\frac{1}{2} \geq \alpha \geq -1$ (*), le funzioni a, b_1, c_2 si mantengono certamente sempre positive, mentre le altre possono essere su σ in generale ora positive ed ora negative; ripetendo dunque i ragionamenti fatti nel § 3 del Cap. V della Mem. citata (vedi pag. 110,... 115) e

(*) La limitazione posta riguardo ai valori che può prendere α, non esclude il caso dei corpi elastici isotropi (vedi Introduzione).

servendosi dei simboli ivi introdotti si avrà che se si verifica una disuguaglianza almeno per ognuna delle seguenti tre terne di disuguaglianze:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\sigma_u} a'_{01}\,d\sigma-\int_{\omega'_1+\omega_2}|b'_{01}|\,d\sigma-\int_{\nu'_1+\nu_2}|c'_{01}|\,d\sigma\geqq 0\\
&\int_{\sigma_v} b'_{11}\,d\sigma-\int_{\eta'_1+\eta_2}|a'_{11}|\,d\sigma-\int_{\xi_1+\xi_2}|c'_{11}|\,d\sigma\geqq 0\\
&\int_{\sigma_w} c'_{21}\,d\sigma-\int_{\tau'_1+\tau_2}|a'_{21}|\,d\sigma-\int_{\beta_1+\beta_2}|b'_{21}|\,d\sigma\geqq 0
\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\sigma'_u} a'_{02}\,d\sigma-\int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2}|b'_{02}|\,d\sigma-\int_{\rho_1+\rho'_2}|c'_{02}|\,d\sigma\geqq 0\\
&\int_{\sigma'_v} b'_{12}\,d\sigma-\int_{\zeta_1+\zeta'_2}|a'_{12}|\,d\sigma-\int_{\lambda_1+\lambda'_2}|c'_{12}|\,d\sigma\geqq 0\\
&\int_{\sigma'_w} c'_{22}\,d\sigma-\int_{\gamma_1+\gamma'_2}|a'_{22}|\,d\sigma-\int_{\delta_1+\delta'_2}|b'_{22}|\,d\sigma\geqq 0
\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\sigma_u} a'_{01}\,d\sigma+\int_{\sigma'_u} a'_{02}\,d\sigma-\int_{\omega'_1+\omega_2}|b'_{01}|\,d\sigma-\int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2}|b'_{02}|\,d\sigma-\int_{\nu'_1+\nu_2}|c'_{01}|\,d\sigma-\int_{\rho_1+\rho'_2}|c'_{02}|\,d\sigma>0\\
&\int_{\sigma_v} b'_{11}\,d\sigma+\int_{\sigma'_v} b'_{12}\,d\sigma-\int_{\eta_1+\eta_2}|a'_{11}|\,d\sigma-\int_{\zeta_1+\zeta'_2}|a'_{12}|\,d\sigma-\int_{\xi_1+\xi_2}|c'_{11}|\,d\sigma-\int_{\lambda_1+\lambda'_2}|c'_{12}|\,d\sigma>0\\
&\int_{\sigma_w} c'_{21}\,d\sigma+\int_{\sigma'_w} c'_{22}\,d\sigma-\int_{\tau'_1+\tau_2}|a'_{21}|\,d\sigma-\int_{\gamma_1+\gamma'_2}|a'_{22}|\,d\sigma-\int_{\beta'_1+\beta_2}|b'_{21}|\,d\sigma-\int_{\delta_1+\delta'_2}|b'_{22}|\,d\sigma>0,
\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

si avrà certamente:

$$\left.\begin{aligned}
&G_s\leqq G_{s-1},\qquad K_s\geqq K_{s-1},\\
&G_s-K_s\leqq\lambda(G_{s-1}-K_{s-1}),
\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

con λ quantità positiva minore dell'unità.

Limitandoci ai soli valori negativi di α, che sono quelli che maggiormente ci interessano, potremo dire che le (19) sono certamente verificate, come risulta dalle (16), (17), (18) e dalle (15), tutte le volte che si verifica una almeno delle seguenti tre terne di disuguaglianze:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\sigma_u}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma-\int_{\omega'_1+\omega_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}\right|d\sigma-\int_{\nu'_1+\nu_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right|d\sigma+\\
&+\alpha\left\{\int_{\sigma_u}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma-3\int_{\sigma_u}\left(\frac{\partial r_1}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma+\int_{\omega'_1+\omega_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}-3\frac{\partial r_1}{\partial x}\frac{\partial r_1}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\right|d\sigma+\right.\\
&\left.+\int_{\nu'_1+\nu_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}-3\frac{\partial r_1}{\partial x}\frac{\partial r_1}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\right|d\sigma\right\}\geqq 0,\\
&\int_{\sigma_v}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma-\int_{\eta'_1+\eta_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}\right|d\sigma-\int_{\xi'_1+\xi_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial n}\right|d\sigma+\\
&+\alpha\left\{\int_{\sigma_v}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma-3\int_{\sigma_v}\left(\frac{\partial r_1}{\partial y}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma+\int_{\eta'_1+\eta_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}-3\frac{\partial r_1}{\partial y}\frac{\partial r_1}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\right|d\sigma+\right.\\
&\left.+\int_{\xi_1+\xi_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial n}-3\frac{\partial r_1}{\partial y}\frac{\partial r_1}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\right|d\sigma\right\}\geqq 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\quad(16')$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\sigma'_u}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma-\int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}\right|d\sigma-\int_{\rho_1+\rho'_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right|d\sigma+\\
&+\alpha\left\{\int_{\sigma'_u}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma-3\int_{\sigma'_u}\left(\frac{\partial r_2}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma+\int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}-3\frac{\partial r_2}{\partial x}\frac{\partial r_2}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\right|d\sigma+\right.\\
&\left.+\int_{\rho_1+\rho'_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}-3\frac{\partial r_2}{\partial x}\frac{\partial r_2}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\right|d\sigma\right\}\geqq 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\quad(17')$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\sigma_u}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\int_{\sigma'_u}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma-\int_{\omega'_1+\omega_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}\right|d\sigma-\int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}\right|d\sigma-\\
&-\int_{\nu_1+\nu_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right|d\sigma-\int_{\rho_1+\rho'_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right|d\sigma+\alpha\left\{\int_{\sigma_u}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\int_{\sigma'_u}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma-\right.\\
&-3\int_{\sigma_u}\left(\frac{\partial r_1}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma-3\int_{\sigma'_u}\left(\frac{\partial r_2}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma+\int_{\omega'_1+\omega_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}-3\frac{\partial r_1}{\partial x}\frac{\partial r_1}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\right|d\sigma+\\
&+\int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}-3\frac{\partial r_2}{\partial x}\frac{\partial r_2}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\right|d\sigma+\int_{\nu'_1+\nu_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}-\right.\\
&\left.-3\frac{\partial r_1}{\partial x}\frac{\partial r_1}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\right|d\sigma+\left.\int_{\rho_1+\rho'_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}-3\frac{\partial r_2}{\partial x}\frac{\partial r_2}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\right|d\sigma\right\}\geqq 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(18')$$

Abbiamo dunque che, se scomposta comunque la superficie σ in tante regioni finite e diverse dallo zero σ_1, σ_2; σ'_1, σ'_2; σ''_1, σ''_2 tali che

$$\sigma_1+\sigma_2=\sigma'_1+\sigma'_2=\sigma''_1+\sigma''_2=\sigma$$

accade che, scelta convenientemente la posizione degli assi, le espressioni:

$$\left.\begin{aligned}
B'&=\int_{\sigma_1}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma-3\int_{\sigma_1}\left(\frac{\partial r_1}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\int_{\omega'_1+\omega_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}-3\frac{\partial r_1}{\partial x}\frac{\partial r_1}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\right|d\sigma+\\
&\qquad+\int_{\nu'_1+\nu_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}-3\frac{\partial r_1}{\partial x}\frac{\partial r_1}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\right|d\sigma,\\
B''&=\int_{\sigma_2}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma-3\int_{\sigma_2}\left(\frac{\partial r_2}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma+\int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}-3\frac{\partial r_2}{\partial x}\frac{\partial r_2}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\right|d\sigma+\\
&\qquad+\int_{\rho_1+\rho'_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}-3\frac{\partial r_2}{\partial x}\frac{\partial r_2}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\right|d\sigma,
\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

$$
\left.\begin{aligned}
B=&\int\limits_{\sigma_1}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma+\int\limits_{\sigma_2}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma-3\int\limits_{\sigma_1}\left(\frac{\partial r_1}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma-3\int\limits_{\sigma_2}\left(\frac{\partial r_2}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma+\\
&+\int\limits_{\omega'_1+\omega_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}-3\frac{\partial r_1}{\partial x}\frac{\partial r_1}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\right|d\sigma+\int\limits_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}-\right.\\
&\left.-3\frac{\partial r_2}{\partial x}\frac{\partial r_2}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\right|d\sigma+\int\limits_{\nu'_1+\nu_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}-3\frac{\partial r_1}{\partial x}\frac{\partial r_1}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\right|d\sigma+\\
&+\int\limits_{\rho_1+\rho'_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}-3\frac{\partial r_2}{\partial x}\frac{\partial r_2}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\right|d\sigma,
\end{aligned}\right\}\quad(20)
$$

sono sempre nulle o negative, mentre le altre:

$$
\left.\begin{aligned}
A'=&\int\limits_{\sigma_1}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma-\int\limits_{\omega'_1+\omega_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}\right|d\sigma-\int\limits_{\nu_1+\nu_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right|d\sigma,\\
A''=&\int\limits_{\sigma_2}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma-\int\limits_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}\right|d\sigma-\int\limits_{\rho_1+\rho'_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right|d\sigma,\\
A=&\int\limits_{\sigma_1}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma+\int\limits_{\sigma_2}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma-\int\limits_{\omega'_1+\omega_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}\right|d\sigma-\int\limits_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}\right|d\sigma-\\
&-\int\limits_{\nu'_1+\nu_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right|d\sigma-\int\limits_{\rho_1+\rho'_2}\left|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right|d\sigma
\end{aligned}\right\}\quad(21)
$$

$$
\left\{\begin{array}{llll}
\omega_1+\omega_2=\sigma'_1, & \omega'_1+\omega'_2=\sigma'_2; & \varepsilon_1+\varepsilon_2=\sigma'_1, & \varepsilon'_1+\varepsilon'_2=\sigma'_2;\\
\nu_1+\nu_2=\sigma''_1, & \nu'_1+\nu'_2=\sigma''_2; & \rho_1+\rho_2=\sigma''_1, & \rho'_1+\rho'_2=\sigma''_2,
\end{array}\right\}
$$

sono sempre positive e le prime due anche nulle, una almeno delle (16′) una almeno delle (17′) ed una almeno delle (18′) saranno certamente verificate per tutti i valori negativi di α non minori di -1, qualunque sia l'indice s; e quindi le (19) varranno per tutti i valori interi e positivi di s e senza alcuna nuova limitazione riguardo ai valori che può prendere α. Nel caso contrario se accade che per alcuni punti di σ le espressioni (20) sono nulle o positive, mentre le (21) sono nulle o negative, le (19) non saranno possibili per alcun valore negativo di α; se accade che per alcuni punti di σ le (20) sono negative e le (21) nulle o negative, le (19) varranno certamente per tutti quei valori di α, i quali mantenendosi tra 0 e -1 sono inferiori a tutte le espressioni della forma:

$$-\frac{A}{B}, \tag{22}$$

che sono negative, e minori od uguali a quelle delle espressioni delle due forme:

$$-\frac{A'}{B'}, \qquad -\frac{A''}{B''}, \tag{23}$$

che sono pure negative; e finalmente se accade che per alcuni punti di σ le (20) sono positive o nulle e le (21) positive, le (19) saranno valevoli per tutti i valori di α compresi fra 0 e -1, che sono superiori a tutte le espressioni finite e negative della forma (22), e maggiori od uguali a quelle delle espressioni delle due forme (23), che sono finite e negative.

4. Stabiliti così i limiti entro cui sono valevoli le (19), riguardo ai valori che può prendere α, osserviamo intanto che da esse risulta:

$$\begin{aligned} G_1 - K_1 &\leqq \lambda(G-K), \\ G_2 - K_2 &\leqq \lambda^2(G-K), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ G_s - K_s &\leqq \lambda^s(G-K), \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

e quindi:

$$\lim_{s=\infty} G_s = \lim_{s=\infty} K_s = C, \tag{24}$$

con C quantità costante.

Ora se invece di partire dalle funzioni $u(m)$, $v(m)$, $w(m)$ si parte dalle altre:

$$X_\sigma(m) = u(m) - C, \qquad Y_\sigma(m) = v(m) - C, \qquad Z_\sigma(m) = w(m) - C,$$

si troveranno, ripetendo i calcoli del § 2, due serie di sistemi di integrali delle equazioni (1):

$$\begin{array}{llllll} U_1(n), & V_1(n), & W_1(n); & U_2(n), & V_2(n), & W_2(n); \ldots\ldots \\ U_1(n'), & V_1(n'), & W_1(n'); & U_2(n'), & V_2(n'), & W_2(n'); \ldots\ldots \end{array}$$

analoghe alle serie (11) e tre serie di funzioni finite e continue dei punti della superficie σ:

$$\left.\begin{array}{l} X_\sigma(m), \quad Y_\sigma(m), \quad Z_\sigma(m); \qquad X_{\sigma_1}(m), \quad Y_{\sigma_1}(m), \quad Z_{\sigma_1}(m); \ldots \\ \ldots; \quad X_{\sigma_s}(m), \quad Y_{\sigma_s}(m), \quad Z_{\sigma_s}(m); \ldots \end{array}\right\} \tag{25}$$

analoghe alle (12), e per le quali si avranno relazioni analoghe alle (13), (14).

Si ha poi ovviamente:

$$\begin{array}{lll} X_\sigma(m) = u(m) - C, & Y_\sigma(m) = v(m) - C, & Z_\sigma(m) = w(m) - C \\ X_{\sigma_1}(m) = u_1(m) - C, & Y_{\sigma_1}(m) = v_1(m) - C, & Z_{\sigma_1}(m) = w_1(m) - C \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots ; \end{array}$$

sicchè i massimi dei massimi ed i minimi dei minimi delle terne di funzioni (25) saranno rispettivamente:

$$\begin{array}{lll} G' = G - C, & G'_1 = G_1 - C, & G'_2 = G_2 - C, \ldots \\ K' = K - C, & K'_1 = K_1 - C, & K'_2 = K_2 - C, \ldots, \end{array}$$

e così avremo dalla (24):

$$\lim_{s=\infty} G'_s = \lim_{s=\infty} K'_s = 0.$$

Di qui segue, che i limiti inferiori K'_1, K'_2, $K'_3, \ldots$ debbono essere tutti nulli o negativi; onde potremo scrivere:

$$\left.\begin{array}{l} G'_1 \leqq G'_1 - K'_1 \leqq \lambda(G' - K') \\ G'_2 \leqq G'_2 - K'_2 \leqq \lambda^2(G' - K') \\ \ldots\ldots\ldots \\ G'_s \leqq G'_s - K'_s \leqq \lambda^s(G' - K') \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{26}$$

Ne concludiamo che la serie:

$$G' + G'_1 + G'_2 + \cdots + G'_s + \cdots$$

dei massimi dei termini delle tre serie:

$$\left.\begin{array}{l} P_\sigma = X_\sigma + X_{\sigma_1} + X_{\sigma_2} + \cdots + X_{\sigma_s} + \cdots \\ M_\sigma = Y_\sigma + Y_{\sigma_1} + Y_{\sigma_2} + \cdots + Y_{\sigma_s} + \cdots \\ N_\sigma = Z_\sigma + Z_{\sigma_1} + Z_{\sigma_2} + \cdots + Z_{\sigma_s} + \cdots \end{array}\right\} \tag{27}$$

converge come l'altra:

$$(G'-K')(1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\cdots);$$

e quindi che le serie (27) sono convergenti in egual grado su tutta la superficie σ.

5. Mediante le tre funzioni monodrome finite e continue:

$$P_\sigma(m),\qquad M_\sigma(m),\qquad N_\sigma(m),$$

dei punti m di σ costruiamo le espressioni:

$$\left.\begin{aligned}
R(t) &= \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \left\{P_\sigma(m)\cdot X_\sigma^{(1)}(t)+M_\sigma(m)\cdot Y_\sigma^{(1)}(t)+N_\sigma(m)\cdot Z_\sigma^{(1)}(t)\right\}d\sigma,\\
S(t) &= \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \left\{P_\sigma(m)\cdot X_\sigma^{(2)}(t)+M_\sigma(m)\cdot Y_\sigma^{(2)}(t)+N_\sigma(m)\cdot Z_\sigma^{(2)}(t)\right\}d\sigma,\\
T(t) &= \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \left\{P_\sigma(m)\cdot X_\sigma^{(3)}(t)+M_\sigma(m)\cdot Y_\sigma^{(3)}(t)+N_\sigma(m)\cdot Z_\sigma^{(3)}(t)\right\}d\sigma.
\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

Queste nei punti di S e di S' soddisfano evidentemente alle equazioni (1) dell'equilibrio. Inoltre, poichè le serie (27) sono convergenti in ugual grado, possiamo alle (28) applicare l'integrazione per serie, e così scrivere:

$$\begin{aligned}
R(t) &= U_1(t)+U_2(t)+U_3(t)+\cdots+U_s(t)+\cdots\\
S(t) &= V_1(t)+V_2(t)+V_3(t)+\cdots+V_s(t)+\cdots\\
T(t) &= W_1(t)+W_2(t)+W_3(t)+\cdots+W_s(t)+\cdots.
\end{aligned}$$

Di qui, poichè:

$$\begin{aligned}
\lim_{n'=\mu} U_s(n') &= X_{\sigma_s}(\mu)-X_{\sigma_{s-1}}(\mu),\\
\lim_{n'=\mu} V_s(n') &= Y_{\sigma_s}(\mu)-Y_{\sigma_{s-1}}(\mu),\\
\lim_{n'=\mu} W_s(n') &= Z_{\sigma_s}(\mu)-Z_{\sigma_{s-1}}(\mu),
\end{aligned}$$

e poichè le tre serie:

$$\begin{aligned}
&\{X_{\sigma_1}'(\mu)-X_\sigma(\mu)\}+\{X_{\sigma_2}(\mu)-X_{\sigma_1}(\mu)\}+\{X_{\sigma_3}(\mu)-X_{\sigma_2}(\mu)\}+\cdots\\
&\{Y_{\sigma_1}(\mu)-Y_\sigma(\mu)\}+\{Y_{\sigma_2}(\mu)-Y_{\sigma_1}(\mu)\}+\{Y_{\sigma_3}(\mu)-Y_{\sigma_2}(\mu)\}+\cdots\\
&\{Z_{\sigma_1}(\mu)-Z_\sigma(\mu)\}+\{Z_{\sigma_2}(\mu)-Z_{\sigma_1}(\mu)\}+\{Z_{\sigma_3}(\mu)-Z_{\sigma_2}(\mu)\}+\cdots.
\end{aligned}$$

sono, come risulta facilmente dalle (26), convergenti, segue:

$$\lim_{n'=\mu} R(n')=-X_\sigma(\mu),\qquad \lim_{n'=\mu} S(n')=-Y_\sigma(\mu),\qquad \lim_{n'=\mu} T(n')=-Z_\sigma(\mu).\quad(29)$$

Come si vede, le funzioni $-R(n')$, $-S(n')$, $-T(n')$ dei punti n' dello spazio indefinito S' risolvono il problema dell'equilibrio di un corpo elastico indefinito corrispondente agli spostamenti X_σ, Y_σ, Z_σ dei punti della superficie che lo limita.

6. Proponiamoci ora di *determinare le componenti M, N, P degli spostamenti dei punti di un corpo elastico isotropo S, corrispondenti a date tensioni u_σ, v_σ, w_σ nei punti della sua superficie σ.*

Osserveremo anzitutto che le tensioni u_σ, v_σ, w_σ devono necessariamente soddisfare alle sei condizioni di equilibrio dei sistemi rigidi (*), e che le funzioni M, N, P sono determinate da queste tensioni a meno di movimenti rigidi infinitesimi (**).

Formiamo gli integrali delle equazioni (1):

$$u = -\frac{1}{4\pi L}\int_\sigma \Sigma u_\sigma u_1 \, d\sigma, \qquad v = -\frac{1}{4\pi L}\int_\sigma \Sigma u_\sigma u_2 \, d\sigma, \qquad w = -\frac{1}{4\pi L}\int_\sigma \Sigma u_\sigma u_3 \, d\sigma,$$

dove le u_1, v_1, w_1; u_2;...; u_3,... sono date dalle (3).

Le funzioni u, v, w evidentemente sono finite e continue anche quando il punto (x_1, y_1, z_1), che si considera, attraversa la superficie σ; per cui si ha:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n=\mu} u(n) &= \lim_{n'=\mu} u(n') = u(\mu), \\ \lim_{n=\mu} v(n) &= \lim_{n'=\mu} v(n') = v(\mu), \\ \lim_{n=\mu} w(n) &= \lim_{n'=\mu} w(n') = w(\mu). \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Le tensioni corrispondenti U_σ, V_σ, W_σ invece sono discontinue quando il punto (x_1, y_1, z_1) attraversa la superficie σ; infatti si ha, supposto che i punti n ed n' si muovano sulla normale alla superficie σ nel punto μ (***):

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n=\mu} U_\sigma - \lim_{n'=\mu} U_\sigma &= u_\sigma(\mu), \\ \lim_{n=\mu} V_\sigma - \lim_{n'=\mu} V_\sigma &= v_\sigma(\mu), \\ \lim_{n=\mu} W_\sigma - \lim_{n'=\mu} W_\sigma &= w_\sigma(\mu). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

(*) Vedi ad es.: Cesàro, *Introduzione alla Teoria matematica dell' elasticità*, Cap. V, § 2.

(**) Vedi mia Mem. cit., pag. 6.

(***) Vedi Mem. cit., Cap. III, § 9.

Prendiamo ora per le funzioni $u(m)$, $v(m)$, $w(m)$ del § 2 le $u(\mu)$, $v(\mu)$, $w(\mu)$ definite dalle (30) e formiamo con esse le espressioni:

$$X_\sigma(m),\ Y_\sigma(m),\ Z_\sigma(m);\quad X_{\sigma_1}(m),\ Y_{\sigma_1}(m),\ Z_{\sigma_1}(m);\quad X_{\sigma_2}(m),\ Y_{\sigma_2}(m),\ Z_{\sigma_2}(m);\ldots$$
$$U_1(n),\ V_1(n),\ W_1(n);\quad U_2(n),\ V_2(n),\ W_2(n);\quad U_3(n),\ V_3(n),\ W_3(n);\ldots$$
$$U_1(n'),\ V_1(n'),\ W_1(n');\quad U_2(n'),\ V_2(n'),\ W_2(n');\quad U_3(n'),\ V_3(n'),\ W_3(n');\ldots$$
$$R(n),\ S(n),\ T(n);\quad R(n'),\ S(n'),\ T(n'),$$

considerate nei due precedenti paragrafi.

Posto:

$$M = u + R, \qquad N = v + S, \qquad P = w + T, \tag{32}$$

risulta dalle (29), (30):

$$\lim_{n'=\mu} M(n') = u(\mu) - X_\sigma(\mu), \qquad \lim_{n'=\mu} N(n') = v(\mu) - Y_\sigma(\mu),$$
$$\lim_{n'=\mu} P(n') = w(\mu) - Z_\sigma(\mu),$$

ossia:

$$\lim_{n'=\mu} M(n') = C, \qquad \lim_{n'=\mu} N(n') = C, \qquad \lim_{n'=\mu} P(n') = C, \tag{33}$$

dove C è la costante introdotta al § 4.

7. Osserviamo intanto che le funzioni M, N, P sono identicamente nulle in tutti i punti dello spazio S'. Infatti esse soddisfano dappertutto alle equazioni (1), inoltre all'infinito si annullano e su σ prendono il valore costante C; per cui si possono scrivere nel seguente modo (*):

$$\left.\begin{aligned}
4\pi L M(n') &= C\int_\sigma \Sigma(A_\sigma^{(1)} + X_\sigma^{(1)})\,d\sigma,\\
4\pi L N(n') &= C\int_\sigma \Sigma(A_\sigma^{(2)} + X_\sigma^{(2)})\,d\sigma,\\
4\pi L P(n') &= C\int_\sigma \Sigma(A_\sigma^{(3)} + X_\sigma^{(3)})\,d\sigma.
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Ora nei punti di S' si ha (cfr. § 2):

$$\int_\sigma X_\sigma^{(i)}\,d\sigma = \int_\sigma Y_\sigma^{(i)}\,d\sigma = \int_\sigma Z_\sigma^{(i)}\,d\sigma = 0.$$
$$(i = 1,\ 2,\ 3).$$

(*) Vedi Mem. cit., Cap. I, form. (16).

Inoltre poichè $A_\sigma^{(1)}$, $B_\sigma^{(1)}$, $C_\sigma^{(1)}$;... sono le tensioni corrispondenti a tre stati di equilibrio (quelli che su σ prendono valori uguali e di segno contrario agli spostamenti (3)), si deve avere:

$$\int_\sigma \Sigma A_\sigma^{(1)} d\sigma = \int_\sigma \Sigma A_\sigma^{(2)} d\sigma = \int_\sigma \Sigma A_\sigma^{(3)} d\sigma = 0.$$

Dalle (34) avremo quindi:

$$M(n') = N(n') = P(n') = 0,$$

e così ancora dalle (33):

$$C = 0.$$

8. Da questo risultato segue che le tensioni M'_σ, N'_σ, P'_σ corrispondenti agli spostamenti M, N, P nei punti della faccia esterna di σ sono identicamente nulle, ossia:

$$M'_\sigma = N'_\sigma = P'_\sigma = 0. \tag{35}$$

Ora le funzioni R, S, T sono discontinue quando il punto, al quale si riferiscono, attraversa la superficie σ (*), mentre le espressioni delle tensioni corrispondenti sono continue senza eccezione in tutto lo spazio (**); per cui se indichiamo con R_σ, S_σ, T_σ e R'_σ, S'_σ, T'_σ i valori di queste tensioni considerate rispettivamente nei punti della faccia interna di σ e nei punti della sua faccia esterna, avremo:

$$R_\sigma - R'_\sigma = S_\sigma - S'_\sigma = T_\sigma - T'_\sigma = 0. \tag{36}$$

Ciò posto, se M_σ, N_σ, P_σ sono le tensioni nella faccia interna di σ corrispondenti agli spostamenti M, N, P, risulterà:

$$M_\sigma(\mu) - M'_\sigma(\mu) = \lim_{n=\mu} U_\sigma - \lim_{n'=\mu} U_\sigma + R_\sigma - R'_\sigma,$$

$$N_\sigma(\mu) - N'_\sigma(\mu) = \lim_{n=\mu} V_\sigma - \lim_{n'=\mu} V_\sigma + S_\sigma - S'_\sigma,$$

$$P_\sigma(\mu) - P'_\sigma(\mu) = \lim_{n=\mu} W_\sigma - \lim_{n'=\mu} W_\sigma + T_\sigma - T'_\sigma,$$

e per le (31), (35), (36):

$$M_\sigma(\mu) = u_\sigma(\mu), \qquad N_\sigma(\mu) = v_\sigma(\mu), \qquad P_\sigma(\mu) = w_\sigma(\mu).$$

(*) Vedi Mem. cit., Cap. III, § 4.
(**) Cfr. Mem. cit., Cap. III, § 5.

In conclusione *le funzioni M, N, P* date dalle (32) *soddisfano nei punti di S alle equazioni* (1) *dell' equilibrio e corrispondono alle tensioni date u_σ, v_σ, w_σ nei punti di σ.* Esse quindi risolvono completamente il problema proposto.

9. Volendo poi risolvere il medesimo problema relativamente allo spazio indefinito S', si può procedere nel seguente modo.

Si considerino le tre serie:

$$E_\sigma = \{u(m) - u_1(m)\} + \{u_2(m) - u_3(m)\} + \cdots$$

$$F_\sigma = \{v(m) - v_1(m)\} + \{v_2(m) - v_3(m)\} + \cdots$$

$$G_\sigma = \{w(m) - w_1(m)\} + \{w_2(m) - w_3(m)\} + \cdots,$$

dove le u_i, v_i, w_i sono funzioni analoghe alle (12), che si possono ottenere partendo dalle funzioni u, v, w definite dalle (30).

Dalle (19) si ha ovviamente:

$$\left.\begin{aligned}
&|u_s(m) - u_{s+1}(m)| \leqq G_s - K_s \leqq \lambda^s(G-K),\\
&|v_s(m) - v_{s+1}(m)| \leqq \lambda^s(G-K),\\
&|w_s(m) - w_{s+1}(m)| \leqq \lambda^s(G-K),\\
&|u_s(m) - u_{s+2}(m)| \leqq G_s - K_s \leqq \lambda^s(G-K),\\
&|v_s(m) - v_{s+2}(m)| \leqq \lambda^s(G-K),\\
&|w_s(m) - w_{s+2}(m)| \leqq \lambda^s(G-K);
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

per cui le serie $E_\sigma(m)$, $F_\sigma(m)$, $G_\sigma(m)$ sono convergenti in egual grado su σ, e così agli integrali:

$$H(t) = \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \left\{E_\sigma(m)\cdot X_\sigma^{(1)}(t) + F_\sigma(m)\cdot Y_\sigma^{(1)}(t) + G_\sigma(m)\cdot Z_\sigma^{(1)}(t)\right\} d\sigma,$$

$$K(t) = \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \left\{E_\sigma(m)\cdot X_\sigma^{(2)}(t) + F_\sigma(m)\cdot Y_\sigma^{(2)}(t) + G_\sigma(m)\cdot Z_\sigma^{(2)}(t)\right\} d\sigma,$$

$$L(t) = \frac{1}{2\pi L}\int_\sigma \left\{E_\sigma(m)\cdot X_\sigma^{(3)}(t) + F_\sigma(m)\cdot Y_\sigma^{(3)}(t) + G_\sigma(m)\cdot Z_\sigma^{(3)}(t)\right\} d\sigma,$$

si può applicare l' integrazione per serie.

Ciò posto, si ha identicamente:

$$H(t) = \{U_1(t) - U_2(t)\} + \{U_3(t) - U_4(t)\} + \cdots$$
$$K(t) = \{V_1(t) - V_2(t)\} + \{V_3(t) - V_4(t)\} + \cdots$$
$$L(t) = \{W_1(t) - W_2(t)\} + \{W_3(t) - W_4(t)\} + \cdots,$$

dove le U_i, V_i, W_i sono analoghe alle funzioni (11); e poichè le tre serie:

$$\{u(\mu) - u_2(\mu)\} + \{u_2(\mu) - u_4(\mu)\} + \cdots$$
$$\{v(\mu) - v_2(\mu)\} + \{v_2(\mu) - v_4(\mu)\} + \cdots$$
$$\{w(\mu) - w_2(\mu)\} + \{w_2(\mu) - w_4(\mu)\} + \cdots,$$

sono, come risulta dalle (37), convergenti in egual grado su tutta la superficie σ, si avrà:

$$\lim_{n=\mu} H(n) = u(\mu) - C, \qquad \lim_{n=\mu} K(n) = v(\mu) - C, \qquad \lim_{n=\mu} L(n) = w(\mu) - C.$$

10. Le espressioni:

$$A = H - u, \qquad B = K - v, \qquad D = L - w,$$

soddisfano in tutto lo spazio alle equazioni (1) e ci dànno:

$$\lim_{n=\mu} A(n) = C, \qquad \lim_{n=\mu} B(n) = C, \qquad \lim_{n=\mu} D(n) = C;$$

quindi esse sono uguali a C in tutti i punti dello spazio S, e se indichiamo con A_σ, B_σ, D_σ le corrispondenti tensioni considerate nei punti della faccia interna di σ, si avrà:

$$A_\sigma = B_\sigma = D_\sigma = 0.$$

Le funzioni H, K, G, come le funzioni R, S, T dei paragrafi precedenti, presentano una discontinuità nell'attraversare la superficie σ, mentre le espressioni delle tensioni corrispondenti sono sempre continue; così avremo, introducendo i soliti simboli,

$$H'_\sigma - H_\sigma = K'_\sigma - K_\sigma = G'_\sigma - G_\sigma = 0.$$

Finalmente se A'_σ, B'_σ, D'_σ sono le tensioni su σ corrispondenti agli spostamenti A, B, D dei punti di S', si avrà:

$$A'_\sigma(\mu) - A_\sigma(\mu) = H'_\sigma - H_\sigma - \lim_{n'=\mu} U_\sigma + \lim_{n=\mu} U_\sigma,$$
$$B'_\sigma(\mu) - B_\sigma(\mu) = K'_\sigma - K_\sigma - \lim_{n'=\mu} V_\sigma + \lim_{n=\mu} V_\sigma,$$
$$D'_\sigma(\mu) - D_\sigma(\mu) = G'_\sigma - G_\sigma - \lim_{n'=\mu} W_\sigma + \lim_{n=\mu} W_\sigma,$$

e per conseguenza:

$$A'_\sigma(\mu) = u_\sigma(\mu), \qquad B'_\sigma(\mu) = v_\sigma(\mu), \qquad D'_\sigma(\mu) = w_\sigma(\mu).$$

In conclusione *le funzioni A, B, D soddisfano in tutto S' alle equazioni* (1) *e corrispondono alle tensioni date u_σ, v_σ, w_σ nei punti di σ*; esse quindi risolvono completamente il problema proposto.

Pisa, giugno 1895.

Un contributo alla teoria delle forme lineari alle differenze.

(*Di* Ettore Bortolotti, *in Roma*)

Quando sia data una forma lineare alle differenze:

$$A(f)=a_0(x)f(x)+\cdots+a_m(x)f(x+m),$$

e se ne voglia effettivamente determinare un integrale particolare, occorre anzitutto stabilire quale valore, z, della x debba intendersi come iniziale. Tale valore è spesso implicitamente supposto eguale allo zero (*), ma è evidente che qualunque punto del campo, in cui la x è variabile, può assumersi come iniziale.

Nella teoria generale delle forme alle differenze, non si dà ordinariamente molta importanza alla scelta di questo punto, dal quale è indipendente la proprietà, per una data funzione, di essere integrale della forma data; ma, pur rimanendo questa proprietà caratteristica, al variare di z ne varierà, in generale, la espressione analitica, per modo che il valore iniziale z, potrà riguardarsi come parametro di una varietà semplicemente infinita (discontinua) di integrali della data forma.

Sarà scopo principale di questo modesto lavoro, lo studio degli integrali di una forma alle differenze, in quanto appartengono ad una stessa varietà, e la applicazione ad alcune questioni fondamentali relative alla teoria delle equazioni alle differenze, ed alla rappresentazione approssimata di funzioni date mediante frazioni razionali.

A raggiungere tale scopo ha particolarmente giovato la generalizzazione del concetto di *continuante,* il quale fu già da tempo introdotto nella teoria

(*) Per esempio in tutte le questioni relative all'algoritmo generalizzato delle frazioni continue.

delle frazioni continue, e da me in altro luogo (*) esteso alle forme del 3.° ordine.

Per togliere poi il dubbio che i risultati ottenuti per tale mezzo non fossero immediatamente applicabili a forme non ridotte alla ordinaria espressione:

$$f(x+m)+a_1(x)f(x+m-1)+\cdots+f(x),$$

in cui i coefficienti del primo e dell'ultimo termine sono supposti eguali all'unità, dubbio già espresso a proposito delle frazioni continue (**), ho conservato alla forma l'espressione più generale possibile, senza fare alcuna speciale ipotesi sui coefficienti.

Il continuante generalizzato, considerato come funzione del numero delle linee, o colonne che lo compongono, ci offre un primo esempio di varietà di integrali della forma data. Nell'art. 1 se ne studiano le proprietà principali da cui se ne deducono alcune che appartengono ad una varietà qualunque, es. quella che: *m integrali appartenenti ad una medesima varietà, consecutivi, qualunque, formano, in generale, sistema fondamentale.*

Fra le proprietà del continuante è notevole quella di essere, considerato come funzione della z, anche integrale di una nuova forma alle differenze, e precisamente di quella che il prof. Pincherle chiama *inversa* della data.

Era naturale il cercare se proprietà analoghe sussistevano per altre varietà di integrali; la questione che all'art. 2 mi sono proposto è appunto la seguente:

Cercare fra le ∞^m varietà di integrali di una forma data, quelle i cui elementi sono anche integrali di un'altra forma arbitrariamente data.

Questa questione è stata completamente risolta sotto la forma più generale:

Trovare l'espressione generale delle funzioni di n variabili che sono contemporaneamente integrali di altrettante forme date.

L'integrazione dei sistemi alle differenze parziali del primo ordine è caso particolarissimo del problema enunciato.

I quesiti fondamentali risolti dal prof. Pincherle mediante l'algoritmo generalizzato, sono, nell'art. 3, trattati sotto questo nuovo aspetto e ridotti alla massima generalità e semplicità.

Speciali varietà di integrali, che si ottengono listando opportunamente il continuante generalizzato, sono appunto quei polinomi che il prof. Pincherle indicò con A_{hk} (A_n, B_n, C_n nel caso del 3.° ordine), e che sono *i coefficienti della relazione lineare più approssimata possibile fra m funzioni date.*

(*) Circolo matem. di Palermo, vol. 5.° e 6.°.

(**) Vedi per es. Heine, *Handbuch der Kugelfunc.*, vol. 1.°, pag. 268 nota.

E quei polinomi B_{hk} (P_n, Q_n, R_n nel caso di forme del 3.° ordine), che sono *il denominatore ed i numeratori delle frazioni razionali collo stesso denominatore che rappresentano nel modo più approssimato possibile* $m-1$ *funzioni date,* si troverà non essere altro che i polinomi precedenti ma calcolati per la forma che si ottiene dalla data colla sostituzione $x=-y$.

I due problemi dunque, in apparenza distinti, che diedero origine alla definizione di quelle serie di polinomi (*) *sono casi particolari di uno stesso quesito applicato a due forme diverse pel senso in cui il campo di variabilità della variabile principale si intende percorso.*

Le proprietà e le relazioni reciproche di questi polinomi, trovate per altra strada dal prof. PINCHERLE, risultano per tal modo evidenti. Altre se ne trovano quando si consideri variabile il valore iniziale z. Queste permettono di determinare la operazione funzionale che subisce un sistema fondamentale di integrali quando l'origine degli accrescimenti della x si trasporti da un punto z' in un altro z' arbitrariamente dati.

Si deducono pure alcune proprietà importanti, relative al modo di tendere al limite, per $x=\infty$, dei polinomi $A_r(z, x)$. Lo studio di queste proprietà parmi dovrebbe essere principalmente utile per lo studio della convergenza come fu definita dal prof. PINCHERLE (**).

Infine ho fatto l'applicazione alle forme periodiche. Ho potuto trovare *la condizione necessaria e sufficiente per la periodicità nei coefficienti di una data forma, ed ho dimostrato che, nel caso della periodicità, i limiti verso cui tendono i polinomi* A_{hk}, B_{hk}, *sono gli elementi uniti in certe omografie dell'ordine* m. Da cui, quando le condizioni di convergenza sieno verificate, il mezzo per rappresentare quegli elementi nel modo più approssimato possibile sotto forma di frazioni razionali aventi lo stesso denominatore.

Mi è grato qui il dichiarare che la lettura degli importanti lavori del ch.° prof. PINCHERLE, e specialmente di quello ultimamente pubblicato dall'Accademia di Bologna col titolo: *L'Algebra delle forme lineari alle differenze,* ed i suoi consigli benevoli e preziosi, mi hanno indotto a portare il mio debole contributo a questa teoria che ora accenna a riprendere l'importanza e l'ufficio che un tempo le furono assegnati.

(*) S. PIINCHERLE, *Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche.* Ann. di Mat., serie 2.ª, tomo 19.

(**) *Contributo alla generalizzazione delle frazioni continue.* Acc. di Bologna, serie 5.ª, tomo 4.° delle Memorie, n.i 3 e 5.

I.

1. Sia la forma alle differenze:

$$A(f) = a_m(x) f(x+m) + a_{m-1}(x) f(x+m-1) + \cdots + a_0(x) f(x). \quad (1)$$

Il campo γ di variabilità delle funzioni:

$$a_m(x), \qquad a_{m-1}(x), \ldots \qquad a_0(x),$$

può essere un insieme, continuo o discreto, di punti, arbitrariamente dato nel piano della variabile complessa colla sola condizione che preso un punto x_1 in esso, possa definirsi in modo unico l'operazione:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + 1 \\ x_3 &= x_2 + 1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= x_{n-1} + 1 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

così che i punti x_n sieno tutti contenuti nel campo, e che, quando il punto x_1 descrivendo una serie di punti contenuti nel campo vada in x_2, contemporaneamente x_n descrivendo un'altra serie di punti del campo, vada in x_{n+1} $(n = 2, 3, \ldots \infty)$.

Le funzioni:

$$a_0(x), \qquad a_1(x), \ldots \qquad a_m(x),$$

dei punti del campo possono essere date in modo interamente arbitrario. Alcune fra esse potranno anche essere identicamente nulle, ma se tali fossero la prima $a_0(x)$, o l'ultima $a_m(x)$, la forma si ridurrebbe manifestamente ad una del grado inferiore.

È noto anzi che, con opportune trasformazioni, quei due coefficienti possono entrambi ridursi ad essere costantemente eguali all'unità.

Quando diremo che una quantità c è *costante rispetto ad una variabile x*, intenderemo di non escludere il caso che quella quantità possa anche essere funzione periodica della x col periodo 1.

Tanto i coefficienti $a_r(x)$, quanto le quantità considerate come costanti c, potranno essere funzioni arbitrariamente date di altri parametri $y, z, t, \ldots$ variabili in campi determinati.

La generalizzazione del continuante.

2. Nel campo γ, dove la variabile x è data, si scelga un punto $x = z$ come origine dei valori della x.

Tutte le espressioni della forma:

$$x = z + n \qquad (n \text{ intero positivo}),$$

rappresenteranno ancora punti del campo.

Ciò posto, coi coefficienti della forma data, si formi il determinante:

$$C(z,\ x) = \Big(a_{m-1}(z),\ a_{m-1}(z+1), \dots\ a_{m-1}(x-m)\Big) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{m-1}(z), & a_m(z), & 0, & 0, \dots & 0, & 0, & 0 \\ a_{m-2}(z+1), & a_{m-1}(z+1), & a_m(z+1) & 0, \dots & 0, & 0, & 0 \\ a_{m-3}(z+2), & a_{m-2}(z+2), & a_{m-1}(z+2), & a_m(z+2), \dots & 0, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & 0, \dots & a_{m-2}(x-m-1), & a_{m-1}(x-m-1), & a_m(x-m-1) \\ 0, & 0, & 0, & 0, \dots & a_{m-3}(x-m), & a_{m-2}(x-m), & a_{m-1}(x-m) \end{vmatrix}, \quad (2)$$

in cui la linea $(r+1)^{\text{esima}}$ contiene tutti gli elementi eguali a zero ad eccezione di quelli della serie:

$$a_0(z+r), \qquad a_1(z+r), \dots \qquad a_{m-1}(z+r), \qquad a_m(z+r),$$

che possono disporsi, senza mutare l'ordine degli indici, in modo che l'elemento:

$$a_{m-1}(z+r),$$

sia sulla diagonale principale.

Questo determinante, come ognuno vede, è, per la forma data, quello che il continuante è per le ordinarie frazioni continue, potremo quindi chiamarlo: *continuante generalizzato.*

Sviluppando secondo gli elementi dell'ultima linea si trova:

$$C(z,\ x) = a_{m-1}(x-m)\, C(z,\ x-1) + \sum_{r=2}^{m} (-1)^{r+1} a_{m-r}(x-m) \cdot$$

$$\cdot\, a_m(x-m-1) \cdot a_m(x-m-2) \cdots a_m(x-m-r+1)\, C(z,\ x-r). \quad (3)$$

Si ponga ora:

$$F(z, x) = \frac{(-1)^{x-z}}{\prod_{s=z-1}^{x-m} a_m(s)} C(z, x). \tag{4}$$

Dividendo la (3) pel fattore (non identicamente nullo):

$$\prod_{s=z-1}^{x-m-1} a_m(s),$$

avremo l'identità:

$$\sum_{r=0}^{m} a_{m-r}(x-m) F(z, x-r) = 0.$$

che potremo anche scrivere:

$$a_m(x) F(z, x+m) + a_{m-1}(x) F(z, x+m-1) + \cdots + a_0(x) F(z, x) = 0. \tag{5}$$

Cioè *la funzione:*

$$F(z, x) = \frac{(-1)^{x-z} C(z, x)}{\prod_{s=z-1}^{x-m} a_m(s)},$$

è un integrale della forma $A(f)$ data.

È da notarsi che se fosse: $a_m(s) = 1$, ciò che con opportune trasformazioni può sempre ottenersi, la funzione $F(z, x)$ non differirebbe, che tutt'al più nel segno, dal continuante generalizzato.

3. Nella funzione $F(z, x)$, la z figura come parametro funzionale; facendo variare la z si hanno infinite funzioni della x costituenti una varietà di integrali della data forma; per vedere quale relazione passi fra gli elementi di questa varietà, sviluppiamo il continuante secondo gli elementi della prima colonna, avremo l'identità:

$$C(z, x) = a_{m-1}(z) C(z+1, x) + \sum_{r=1}^{m-1} (-1)^r a_{m-r}(z+r+1) \cdot$$
$$\cdot a_m(z) \cdot a_m(z+1) \cdots a_m(z+r-1) C(z+r-1, x). \tag{6}$$

Da cui dividendo per

$$\prod_{s=z}^{x-m} a_m(s),$$

si ha:

$$a_m(z-1) F(z, x) + a_{m-1}(z) F(z+1, x) + \cdots +$$
$$+ a_0(z+m-1) F(z+m, x) = 0, \tag{7}$$

la quale dimostra che: *Quando si riguardi x come punto fisso, e z come vaviabile nel campo γ, la funzione $F(z, x)$ è integrale della forma alle differenze:*

$$A^{-1}(f) = a_m(z-1)f(z) + a_m(z)f(z+1) + \cdots + a_0(z+m-1)f(z+m),$$

che, seguendo una denominazione introdotta dal prof. PINCHERLE, *dovrà chiamarsi inversa della data.*

4. Siamo dunque in grado di costruire una funzione $F(z, x)$ la quale, secondo che in essa si consideri come variabile principale la x, o la z, è integrale della forma data o della sua inversa.

Considerando la z come parametro funzionale, si hanno gli m integrali:

$$F(z, x), \qquad F(z+1, x), \ldots, \qquad F(z+m-1, x). \tag{8}$$

Considerando invece z come variabile principale, si hanno gli m integrali della forma inversa:

$$F(z, x), \qquad F(z, x+1), \ldots, \qquad F(z, x+m-1). \tag{9}$$

Dico che: *i sistemi* (8) *e* (9), *così formati, sono fondamentali della forma data e della inversa, rispettivamente.*

Infatti: se fra gli integrali del sistema (8) passasse una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti rispetto ad x, o se fra quelli del sistema (9), una relazione a coefficienti costanti rispetto a z, dovrebbe essere zero identicamente il determinante (*):

$$D(z, x) = \begin{vmatrix} F(z, x), & F(z, x+1); \ldots & F(z, x+m-1) \\ F(z+1, x), & F(z+1, x+1), \ldots & F(z+1, x+m-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ F(z+m-1, x), & F(z+m-1, x+1), \ldots & F(z+m-1, x+m-1) \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Ma, per le formule (5), si ha:

$$D(z, x) = (-1)^m \cdot \frac{a_0(x-1)}{a_m(x-1)} \cdot D(z, x-1), \tag{11}$$

e, come facilmente può verificarsi:

$$D(z, z+m-1) = \frac{(-1)^{m(m-1)}}{a_m(z-1) \cdot a_m(z) \cdots (a_m(z+m-2)}.$$

(*) Vedi per es. PINCHERLE, *Delle funzioni ipergeometriche*, ecc. ecc. Giornale di Battaglini, vol. 32, pag. 11.

Per successiva applicazione della (11) troveremo dunque:

$$D(z,\ x) = (-1)^{m(x-z)} \frac{a_0(x-1)\cdot a_0(x-2)\cdots a_0(z+m-1)}{a_m(x-1)\cdot a_m(x-2)\cdots a_m(z+m-1)\cdot a_m(z+m-2)\cdots a_m(z-1)}. \quad (12)$$

La quale dimostra appunto che il determinante $D(z,\ x)$ non è identicamente nullo.

5. Dalla dimostrazione precedente possiamo concludere che: *fra gli integrali:*

$$F(z,\ x), \qquad F(z+1,\ x),\ldots \qquad F(z+m-1,\ x),$$

non è possibile nessuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti rispetto ad x.

Non rimane con questo escluso che possa aver luogo una tale relazione quando i coefficienti non sieno costanti rispetto ad x.

Mi propongo ora di dimostrare che: *nessuna relazione della forma:*

$$\varphi_0(x)F(z,\ x) + \varphi_1(x)F(z+1,\ x) + \cdots + \varphi_{m-1}(x)F(z+m-1,\ x) = 0, \quad (13)$$

può aver luogo fra le funzioni del sistema considerato, se i coefficienti $\varphi_r(x)$, *sieno tutti costanti rispetto a* z.

Infatti, qualora la relazione (13) avesse luogo e le $\varphi_r(x)$ $(r = 0,\ 1,\ldots m)$ fossero tutte costanti rispetto a z, potremmo concludere che $F(z,\ x)$ è integrale della forma alle differenze, con coefficienti costanti:

$$C(f) = \varphi_0(x)f(z) + \varphi_1(x)f(z+1) + \cdots + \varphi_{m-1}(x)f(z+m-1), \quad (14)$$

cioè si avrebbe:

$$F(z,\ x) = G_1(x)\cdot\alpha_1^z + G_2(x)\alpha_2^z + \cdots + G_{m-1}(x)\alpha^z{}_{m-1}, \quad (15)$$

nella quale, come è noto (*), le α_r sono le radici della equazione algebrica:

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x)X + \varphi_2(x)X^2 + \cdots + \varphi_{m-1}(x)X^{m-1} = 0,$$

e le $G_r(x)$, sono costanti rispetto alle z, che si possono determinare mediante i valori iniziali.

Di queste $G_r(x)$, alcune potranno anche risultare identicamente nulle; se indichiamo con

$$G_{r_1},\quad G_{r_2},\ldots\quad G_{r_s},$$

(*) Vedi per es. LAGRANGE. Op., tomo 1.°, pag. 24 a 36. *Sur l'intégration d'une équation différentielle*, ecc. ecc.

quelle che non si annullano identicamente, la (15) potrà ridursi alla:

$$F(z, x) = G_{r_1} \alpha^z_{r_1} + G_{r_2} \alpha^z_{r_2} + \cdots + G_{r_s} \alpha^z_{r_s}. \tag{16}$$

Il numero s di questi termini sarà eguale o minore di $m - 1$.

In nessun caso però, le $\alpha_{r_1}, \alpha_{r_2}, \ldots \alpha_{r_s}$, *potranno essere tutte costanti rispetto ad* x.

Difatti, se questo fosse, fra le m equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} F(z, x) = G_{r_1} \alpha_{r_1}^z + \cdots + G_{r_s} \alpha_{r_s}^z \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F(z + m - 1, x) = G_{r_1} \alpha_{r_1}^{z+m-1} + \cdots + G_{r_s} \alpha_{r_s}^{z+m-1}, \end{array}\right\}$$

eliminando le $G_{r_1}, G_{r_2}, \ldots G_{r_s}$, giungeremmo ad una relazione lineare omogenea a coefficienti *costanti rispetto ad* x, fra le $F(z + r, x)$, $(r = 0, 1, \ldots m - 1)$, che non è possibile.

D'altra parte abbiamo dimostrato al n.° 3, che $F(z, x)$ è anche integrale della forma inversa, cioè che si ha identicamente:

$$\sum_{\mu=0}^{m} a_{m-\mu}(z + \mu - 1) F(z + \mu, x) = 0.$$

Sarà dunque per la (16)

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=1}^{s} a_{m-\mu}(z + \mu - 1) G_{r_\nu} \alpha_{r_\nu}^{z+\mu} = 0.$$

od anche:

$$\sum_{\nu=1}^{s} G_{r_\nu} \sum_{\mu=0}^{m} a_{m-\mu}(z + \mu - 1) \alpha_{r_\nu}^{z+\mu} = 0.$$

e siccome G_{r_ν} non dipende da z, e quella identità è soddisfatta per qualunque valore di z, così si avranno le s identità:

$$\left.\begin{array}{c} \sum_{\mu=0}^{m} a_{m-\mu}(z + \mu - 1) \alpha_{r_\nu}^{z+\mu} = 0 \\ \nu = 1, 2, \ldots s. \end{array}\right\}$$

Poiche le α_{r_ν} non sono tutte costanti rispetto ad x, si rappresenti in generale con α una di quelle che non lo sono e si consideri l'identità corrispondente:

$$\sum_{\mu=0}^{m} a_{m-\mu}(z + \mu - 1) \alpha^{z+\mu} = 0. \tag{17}$$

Se in questa si ponga $z+1$ al posto di z si avrà:

$$\sum a_{m-\mu}(z+\mu)\alpha^{z+\mu+1}=0. \tag{18}$$

Se invece si moltiplichi la medesima identità per z, si avrà:

$$\sum a_{m-\mu}(z+\mu-1)\alpha^{z+\mu+1}=0. \tag{19}$$

Le due identità (18) e (19), debbono coesistere per arbitrari valori di x, saranno dunque eguali i coefficienti di eguali potenze di α, cioè:

$$\left.\begin{array}{c} a_{m-\mu}(z+\mu)=a_{m-\mu}(z+\mu-1) \\ \mu=0,\ 1,\dots\ m. \end{array}\right\} \tag{20}$$

Da cui si vede che: *i coefficienti a_0, $a_1,\dots$ a_m della data forma dovrebbero essere costanti.*

Si vede ora facilmente che, sempre nella ipotesi della esistenza della relazione (13), i coefficienti della data forma non solo sarebbero tutti costanti ma sarebbero tutti identicamente nulli.

Ed infatti se i coefficienti della data forma fossero costanti, sarebbe:

$$F(z+s,\ x)=F(z,\ x-s), \tag{21}$$

ed il sistema:

$$F(z,\ x),\qquad F(z+1,\ x),\dots\qquad F(z+m-1,\ x),$$

non differirebbe dal sistema:

$$F(z,\ x),\qquad F(z,\ x-1),\dots\qquad F(z,\ x-m+1),$$

che è fondamentale per la forma inversa.

Concludiamo dunque che: *Nessuna relazione a coefficienti costanti rispetto ad una delle due variabili z, od x, è possibile fra le funzioni:*

$$F(z,\ x),\qquad F(z+1,\ x),\dots\qquad F(z+m-1,\ x).$$

Ne consegue che: *il determinante simmetrico:*

$$\delta(z,\ x)=\begin{vmatrix} F(z,\ x), & F(z+1,\ x),\dots & F(z+m-1,\ x) \\ F(z+1,\ x), & F(z+2,\ x),\dots & F(z+m,\ x) \\ \dots & \dots & \dots \\ F(z+m-1,\ x), & F(z+m,\ x),\dots & F(z+2m-2,\ x) \end{vmatrix}, \tag{22}$$

non è identicamente eguale allo zero.

Vedremo all'art. II le conseguenze di questo importante teorema.

Simili conclusioni valgono per il sistema:

$$F(z,\ x),\qquad F(z,\ x+1),\dots\qquad F(z,\ x+m-1),$$

e per il determinante:

$$\delta'(z, x) = \begin{vmatrix} F(z, x), & F(z, x+1), \ldots & F(z, x+m-1) \\ F(z, x+1), & F(z, x+2), \ldots & F(z, x+m) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F(z, x+m-1), & F(z, x+m), \ldots & F(z, x+2m-2) \end{vmatrix}. \quad (23)$$

6. Sia ora $\varphi(x)$ un integrale qualunque della forma data. Si potranno determinare in modo unico le costanti c_0, $c_1, \ldots c_{m-1}$, per modo che sia:

$$\varphi(x) = c_0 F(z, x) + c_1 F(z+1, x) + \cdots + c_{m-1} F(z+m-1, x). \quad (24)$$

Se alla z si dà un accrescimento arbitrario r, la funzione:

$$\psi(x) = c_0 F(z+r, x) + \cdots + c_{m-1} F(z+m+r-1, x),$$

è ancora integrale della forma data.

Si può dunque considerare z come parametro di una varietà semplicemente infinita di integrali.

Il sistema di costanti:

$$c_0, \quad c_1, \ldots \quad c_{m-1},$$

serve a caratterizzare la varietà.

Ad ogni sistema di costanti arbitrariamente scelto corrisponde infatti un integrale $\varphi(x)$ dato dalla formola (24) e, variando z, una speciale varietà di integrali.

Si ha dunque un insieme continuo ∞^m di varietà discontinue semplicemente infinite di integrali di una data forma.

Fra le proprietà degli integrali di una data varietà, possiamo immediatamente dimostrare la seguente:

Quegli integrali che in una stessa varietà corrispondono ad m valori consecutivi qualunque del parametro, formano sistema fondamentale.

Sieno, infatti,

$$\varphi(z, x), \qquad \varphi(z+1, x), \ldots \qquad \varphi(z+m-1, x); \quad (25)$$

si formi il determinante:

$$\Phi(z, x) = \begin{vmatrix} \varphi(z, x), \ldots & \varphi(z+m-1, x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi(z, x+m-1), \ldots & \varphi(z+m-1, x+m-1) \end{vmatrix}.$$

Indicando con c_r quello fra i coefficienti c_0, $c_1, \ldots c_m$, che per primo non è identicamente nullo e cercando il valore di quel determinante col metodo tenuto al n.° 4 per il determinante $D(z, x)$; troveremo:

$$\Phi(z, x) = c_r^m \cdot D(z + r - 1, x).$$

Il valore di $D(z + r - 1, x)$ è dato dalla formula (12) e non è identicamente nullo, anche, per ipotesi, c_r è diverso da zero, rimane dunque provato che il sistema (25) è fondamentale.

II.

La integrazione simultanea di *n* forme lineari alle differenze con una sola funzione di *n* variabili indipendenti.

7. La questione di trovare le funzioni incognite:

$$f_1(x), \qquad f_2(x), \ldots \qquad f_n(x),$$

che soddisfano un sistema di n equazioni alle differenze, lineari omogenee, si riduce, come è noto (*) alla risoluzione di una equazione, lineare omogenea, di ordine superiore contenente una sola funzione incognita; cioè al problema che fu completamente risolto all'articolo precedente.

Assai più importante è la ricerca delle soluzioni comuni a più equazioni alle differenze contenenti una sola funzione incognita, od in altri termini, degli *integrali comuni a più forme.* Anche questa può ritenersi completamente esaurita mediante il metodo della *scomposizione in fattori di primo ordine;* metodo dovuto al prof. Pincherle che ebbe occasione di adoperarlo in recenti lavori pubblicati dalla R. Accademia dei Lincei in Roma e delle Scienze in Bologna.

Rimaneva da risolvere la questione: *Essendo date in modo qualunque n forme lineari alle differenze, è in generale possibile trovare una funzione di n variabili indipendenti che, rispetto a ciascuna di queste, sia contemporaneamente integrale di tutte le forme date?*

Nel caso speciale che sieno date due sole forme, e che sieno una l'inversa dell'altra, la funzione $F(z, x)$, definita all'art. I, risponde appunto a

(*) Vedi per es. Brunacci, *Calcolo sublime,* Cap. VII.

queste condizioni perchè infatti: secondo che si considera come variabile principale la x, o la z, quella funzione è integrale di una forma, o della inversa.

Ora vedremo che anche in generale, non solo si può rispondere affermativamente alla questione proposta; ma si può dare un metodo per costruire effettivamente la funzione cercata, anzi un sistema di tali funzioni che potrà ancora chiamarsi fondamentale.

8. Sieno date le n forme, che per ora supporremo dello stesso ordine:

$$\left.\begin{array}{l} A_1(f) = a_{1,0}(x_1)f(x_1 + m) + \cdots + a_{1,m}(x_1)f(x_1) \\ A_2(f) = a_{2,0}(x_2)f(x_2 + m) + \cdots + a_{2,m}(x_2)f(x_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_n(f) = a_{n,0}(x_n)f(x_n + m) + \cdots + a_{n,m}(x_n)f(x_n). \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Incominciamo col formare un sistema fondamentale di integrali della $A_1(f)$. Sia questo:

$$\varphi_1(x_1), \qquad \varphi_2(x_1), \ldots \qquad \varphi_m(x_1). \qquad (2)$$

Coi coefficienti della $A_2(f)$ si formino poi, al modo indicato al n.° 5, le funzioni:

$$F(z_2, x_2), \qquad F(z_2 + 1, x_2), \qquad F(z_2 + 2, x_2), \ldots$$

e sulle (2) si eseguisca l'operazione funzionale:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_1(x_1, x_2) = F(z_2, x_2)\varphi_1(x_1) + \cdots + F(z_2 + m - 1, x_2)\varphi_m(x_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi_m(x_1, x_2) = F(z_2 + m - 1, x_2)\varphi_1(x_1) + \cdots + F(z_2 + 2m - 2, x_2)\varphi_m(x_1). \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Poichè il determinante $\delta(z_2, x_2)$, formato colle $F(z_2 + r_1, x_2)$, non è identicamente nullo (art. I, n.° 5), le funzioni $\psi_r(x_1, x_2)$ così formate costituiscono, al pari delle $\varphi_r(x_1)$, sistema fondamentale della $A_1(f)$ (*).

D'altra parte queste $\psi_r(x_1, x_2)$, sono espressioni lineari a coefficienti costanti (rispetto ad x_2) delle $F(z_2 + r, x_2)$, sono dunque anche integrali della forma $A_2(f)$.

Dico che formano sistema fondamentale anche di questa seconda forma. Ed infatti, se questi integrali si considerano come dipendenti, oltre che dalle

(*) Pincherle. Giornale di Battaglini, vol. 32, pag. 14.

variabili x_1, x_2, anche dal valore iniziale z_2, si scorge che per passare dalla espressione di ψ_1 a quella di ψ_r, basta sostituire z_2 con $z_2 + r - 1$, quegli m integrali dunque *corrispondono ad m valori consecutivi del parametro in una varietà della forma $A_2(f)$*, costituiscono quindi un sistema fondamentale (art. I, n.° 6) di quella forma.

Si continui ora formando, coi coefficienti della forma $A_3(f)$, le funzioni:

$$F(z_3, x_3), \qquad F(z_3+1, x_3), \qquad F(z_3+2, x_3), \ldots$$

e sulle $\psi_r(x_1, x_2)$ si eseguisca l'operazione:

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1(x_1, x_2, x_3) = F(z_3, x_3)\psi_1(x_1, x_2) + \cdots + F(z_3+m-1, x_3)\psi_m(x_1, x_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_m(x_1, x_2, x_3) = F(z_3+m-1, x_3)\psi_1(x_1, x_2) + \cdots + \\ \qquad\qquad + F(z_3+2m-2, x_3)\psi_m(x_1, x_2). \end{array}\right\} \quad (4)$$

Le funzioni $\xi_r(x_1, x_2, x_3)$; per essere diverso da zero il determinante $\delta(z_3, x_3)$; formano, al pari delle $\psi_r(x_1, x_2)$, sistema fondamentale sì della prima che della seconda forma; sono inoltre integrali della $A_3(f)$, e poichè sono elementi consecutivi in una stessa varietà formano sistema fondamentale anche di questa forma.

È chiaro ora che, *ripetendo questa operazione, giungeremo in fine al sistema:*

$$\lambda_1(x_1, \ldots x_n), \qquad \lambda_2(x_1, \ldots x_n), \ldots \qquad \lambda_m(x_1, \ldots x_n), \tag{5}$$

che, rispetto ad ognuna delle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$, è fondamentale di ciascuna forma data.

Segue dalla dimostrazione fatta che: *Qualunque espressione lineare omogenea a coefficienti costanti rispetto a tutte le variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$, delle $\lambda_1, \ldots \lambda_m$, così formate, è contemporaneamente integrale di tutte le forme date.*

E viceversa: *Qualunque funzione $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ integrale di tutte le forme date, si può esprimere in funzione lineare omogenea a coefficienti costanti delle λ_r.*

Si potrebbe dunque dire che: Quel sistema di funzioni è *fondamentale rispetto al sistema di forme dato.*

9. Il medesimo metodo può usarsi anche nel caso che le n forme del sistema dato non sieno tutte del medesimo ordine.

Sia per es. il sistema:

$$\left.\begin{array}{l} A_1(f) = a_{1,0}(x_1)f(x_1 + m_1) + \cdots + a_{1,m_1}(x_1)f(x_1) \\ A_2(f) = a_{2,0}(x_2)f(x_2 + m_2) + \cdots + a_{2,m_2}(x_2)f(x_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n(f) = a_{n,0}(x_n)f(x_n + m_n) + \cdots + a_{n,m_n}(x_n)f(x_n). \end{array}\right\} \quad (6)$$

e supponiamo:

$$m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq \cdots \geq m_n.$$

Formato un sistema fondamentale:

$$\varphi_1(x_1), \qquad \varphi_2(x_1), \ldots \qquad \varphi_{m_1}(x_1), \tag{7}$$

della prima forma, si scelgano in modo qualunque m_2 di queste funzioni, e si formi il sistema:

$$\left.\begin{array}{c} \psi_r(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{m_2} F(z_2 + r + s - 1, x_2)\varphi_s(x_1) \\ r = 1, 2, \ldots m_2. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Questo è un sistema fondamentale della forma $A_2(f)$. Le funzioni che lo compongono sono inoltre integrali indipendenti della $A_1(f)$.

Fra le m_2 funzioni del sistema (8), se ne scelgano m_3 in modo qualunque, e si formino le:

$$\left.\begin{array}{c} \xi_r(x_1, x_2, x_3) = \sum_{s=1}^{m_3} F(z_3 + r + s - 1, x_3)\psi_s(x_1, x_2) \\ r = 1, 2, \ldots m_3. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Queste formeranno sistema fondamentale della forma $A_3(f)$, e saranno integrali indipendenti delle due prime.

Seguitando a questo modo, troveremo in fine m_n funzioni:

$$\lambda_1(x_1, \ldots x_n), \ldots \qquad \lambda_{m_n}(x_1, x_2, \ldots x_n), \tag{10}$$

che formeranno sistema fondamentale della forma $A_m(f)$. e saranno integrali indipendenti di tutte le forme del sistema dato.

10. Come esempio di applicazione del metodo precedente, sia il sistema di equazioni alle differenze parziali lineari del primo ordine:

$$\left.\begin{array}{l} a_{1,0}f(x_1, x_2, \ldots x_n) + a_{1,1}f(x_1 + 1, x_2, \ldots x_n) + \cdots + a_{1,n}f(x_1, x_2, \ldots x_n + 1) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,0}f(x_1, x_2, \ldots x_n) + a_{n,1}f(x_1 + 1, x_2, \ldots x_n) + \cdots + a_{n,n}f(x_1, x_2, \ldots x_n + 1) = 0. \end{array}\right\} \quad (11)$$

Se il determinante:

$$S = (a_{11},\ a_{22}, \ldots\ a_{nn}),$$

non è identicamente nullo, si ricaverà, dal sistema dato, il seguente:

$$\left.\begin{aligned} f(x_1 + 1,\ x_2, \ldots\ x_n) - f(x_1,\ x_2, \ldots\ x_n) \sum_{s=1}^{n} \frac{S_{1,s}}{S} a_{s,0} &= 0 \\ f(x_1,\ x_2 + 1, \ldots\ x_n) - f(x_1,\ x_2, \ldots\ x_n) \sum_{s=1}^{n} \frac{S_{2,s}}{S} a_{s,0} &= 0 \\ f(x_1,\ x_2, \ldots\ x_n + 1) - f(x_1,\ x_2, \ldots\ x_n) \sum_{s=1}^{n} \frac{S_{n,s}}{S} a_{s,0} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

che ha appunto la forma (1) e che potremo quindi completamente integrare.

III.

Un problema fondamentale relativo all'algoritmo generalizzato.

11. Fra i problemi, che l'algoritmo generalizzato delle frazioni continue algebriche permette di risolvere, sono fondamentali i seguenti (*):

1.° *Date m funzioni stabilire fra di esse la relazione lineare a coefficienti razionali più approssimati possibile per un grado dato dei coefficienti.*

2.° *Date m funzioni rappresentarle con m frazioni razionali aventi lo stesso denominatore nel modo più approssimato possibile compatibilmente col grado dato del denominatore di queste frazioni.*

Vedremo che la risoluzione di questi due problemi dipende dal problema più generale:

Dati i valori che un integrale particolare di una forma alle differenze dell'ordine m assume in m punti del campo γ, trovare il valore che l'integrale stesso assume in un punto:

$$x = z + n,$$

n numero intero, positivo o negativo, qualunque.

(*) S. Pincherle, *Saggio di una generalizzazione delle frazioni continue algebriche.* Acc. di Bologna, anno 1890. — *Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche.* Annali di Matem., serie 2.ª, tomo 19.

12. Incominciamo, intanto, a risolvere il problema enunciato nel caso di n positivo.

Si consideri a tal fine il sistema di equazioni:

$$\left.\begin{array}{l}
a_m(z)\varphi(z+m)+a_{m-1}(z)\varphi(z+m-1)+\cdots+a_0(z)\varphi(z)=0\\
a_m(z+1)\varphi(z+m+1)+a_{m-1}(z+1)\varphi(z+m)+\cdots+a_0(z+1)\varphi(z+1)=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_m(x-m)\varphi(x)+a_{m-1}(x-m)\varphi(x-1)+\cdots+a_0(x-m)\varphi(x-m)=0,
\end{array}\right\} \quad (1)$$

a cui si aggiungano le equazioni identiche:

$$\left.\begin{array}{r}
\varphi(z)=\bar{\varphi}(z)\\
\varphi(z+1)=\bar{\varphi}(z+1)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varphi(z+m-1)=\bar{\varphi}(z+m-1)\\
\varphi(x)=\bar{\varphi}(x).
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Dove $\varphi(x)$ è un integrale della forma data, $\bar{\varphi}(z+r)$ indica il valore assegnato alla $\varphi(x)$ nel punto $z+r$, $(r=0, 1,\ldots m-1)$; $\bar{\varphi}(x)$ il valore, che, in conseguenza di quelli, la funzione $\varphi(x)$ assume nel punto $x=z+n$.

Avremo in tutto $x-z+2$ equazioni fra le $x-z+1$ incognite:

$$\varphi(z),\qquad \varphi(z+1),\ldots\qquad \varphi(x).$$

Dovrà dunque essere identicamente:

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & \bar{\varphi}(z)\\
0 & 1 & 0\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & \bar{\varphi}(z+1)\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0\ldots & 1 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & \bar{\varphi}(z+m-2)\\
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 1 & 0\ldots & 0 & 0 & \bar{\varphi}(z+m-1)\\
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 1 & \bar{\varphi}(x)\\
a_0(z) & a_1(z) & a_2(z)\ldots & a_{m-2}(z) & a_{m-1}(z) & a_m(z)\ldots & 0 & 0 & 0\\
0 & a_0(z+1) & a_1(z+1)\ldots & a_{m-3}(z+1) & a_{m-2}(z+1) & a_{m-1}(z+1)\ldots & 0 & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & a_m(x-m-1) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & a_{m-1}(x-m) & a_m(x-m) & 0
\end{vmatrix}=0. \quad (3)$$

Sviluppando secondo gli elementi dell'ultima colonna, tralasciando per brevità le lineette sulle φ, avremo una relazione della forma:

$$-\alpha_0(z, x)\varphi(z) - \alpha_1(z, x)\varphi(z+1) - \cdots - \alpha_{m-1}(z, x)\varphi(z+m-1) + \\ + \alpha_m(z, x)\varphi(x) = 0, \tag{4}$$

nella quale i coefficienti $\alpha_r(z, x)$ sono i determinanti che si ottengono dalla matrice:

$$M(z, x) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_0(z) & a_1(z) & a_2(z)\ldots & a_{m-1}(z) & a_m(z) & 0\ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0(z+1) & a_1(z+1)\ldots & a_{m-2}(z+1) & a_{m-1}(z+1) & a_m(z+1)\ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & a_{m-1}(x-m-1) & a_m(x-m-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & a_{m-2}(x-m) & a_{m-1}(x-m) & a_m(x-m) \end{vmatrix}, \tag{5}$$

quando, delle $m+1$ colonne che occupano i posti:

1.°, 2.°, 3.°,... m^{esimo}; ultimo;

se ne tolgano ordinatamente m, conservando, cioè, rispettivamente le colonne:

1.ª, 2.ª, 3.ª,... m^{esima}, ultima.

Se ora questi determinanti si paragonano al continuante generalizzato (art. I, n.° 2), si vedrà immediatamente che: *il coefficiente* $\alpha_r(z, x)$ $(r = 0, 1,\ldots m-1)$ *si ottiene listando il continuante generalizzato* $C(z+1, x)$, *con una prima linea formata dagli elementi:*

$$a_r(z), \quad a_m(z), \quad 0, \quad 0,\ldots \quad 0,$$

ed una prima colonna:

$$a_r(z), \quad a_{r-1}(z+1),\ldots \quad a_0(z+r),\ldots \quad 0, \quad 0,\ldots \quad 0.$$

Ne risultano le formule:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_r(z, x) = (a_r(z), a_{m-1}(z+1), a_{m-1}(z+2),\ldots a_{m-1}(x-m)) \\ &\qquad r = 0, 1,\ldots m-1 \\ &\alpha_m(z, x) = \prod_{s=z}^{x-m} a_m(s). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Dividendo la relazione (4) per $\alpha_m(z, x)$, che, come si vede, non è identicamente nullo, si ha:

$$\varphi(x)=\frac{\alpha_0(z,\ x)}{\alpha_m(z,\ x)}\varphi(z)+\frac{\alpha_1(z,\ x)}{\alpha_m(z,\ x)}\varphi(z+1)+\cdots+\frac{\alpha_{m-1}(z,\ x)}{\alpha_m(z,\ x)}\varphi(z+m-1), \quad (7)$$

e, ponendo:

$$A_r(z,\ x)=\frac{\alpha_r(z,\ x)}{\alpha_m(z,\ x)}, \quad (8)$$

si ha:

$$\varphi(x)=A_0(z,\ x)\varphi(z)+A_1(z,\ x)\varphi(z+1)+\cdots+A_{m-1}(z,\ x)\varphi(z+m-1), \quad (9)$$

che è appunto la relazione richiesta.

Con questa formula potremo infatti, dati i valori di un integrale particolare $\varphi(z)$ nei punti z, $z+1, \ldots\ z+m-1$, trovarne il valore in un punto $x=z+n$; n intero positivo qualunque.

13. Se nella (8) si sviluppa il determinante $\alpha_r(z,\ x)$ secondo gli elementi della prima colonna e si tien conto della posizione:

$$F(z,\ x)=(-1)^{x-z}\frac{C(z,\ x)}{\prod\limits_{s=z-1}^{x-m} a_m(s)},$$

troveremo le formule:

$$\left.\begin{aligned} A_r(z,\ x)=a_r(z)F(z+1,\ x)+a_{r-1}(z+1)F(z+2,\ x)+\cdots+\\ +a_0(z+r)F(z+r+1,\ x)\\ r=0,\ 1,\ldots\ m-1,\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

dalle quali risulta che il sistema:

$$A_0(z,\ x), \qquad A_1(z,\ x),\ldots \qquad A_{m-1}(z,\ x),$$

si ottiene dal sistema:

$$F(z+1,\ x), \qquad F(z+2,\ x),\ldots \qquad F(z+m,\ x),$$

mediante una sostituzione lineare di determinante:

$$\begin{vmatrix} a_0(z) & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0\\ a_1(z) & a_0(z+1) & 0\ldots & 0 & 0 & 0\\ a_2(z) & a_1(z+1) & a_0(z+2),\ldots & 0 & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0\ldots & a_2(z+m-3) & a_1(z+m-2) & a_0(z+m-1)\end{vmatrix}=$$

$$=a_0(z)\ a_0(z+1)\ldots\ a_0(z+m-1). \quad (11)$$

Poichè questo determinante non è identicamente nullo, ed il sistema delle $F(z+r, x)$, è fondamentale, potremo concludere che:

Le funzioni:

$$A_0(z, x), \qquad A_1(z, x), \ldots \qquad A_{m-1}(z, x),$$

formano un sistema fondamentale di integrali della forma alle differenze data.

Se ora si cerca il valore del determinante:

$$\Delta(z, x) = \begin{vmatrix} A_0(z, x), \ldots & A_{m-1}(z, x) \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ A_0(z, x+m-1), \ldots & A_{m-1}(z, x+m-1) \end{vmatrix}, \tag{12}$$

si troverà immediatamente:

$$\Delta(z, x) = D(z+1, x) \cdot a_0(z) \cdot a_0(z+1) \cdots a_0(z+m-1),$$

da cui (art. I, n.° 4):

$$\Delta(z, x) = (-1)^{m(x-z-1)} \prod_{s=z}^{x} \frac{a_0(s)}{a_m(s)}. \tag{13}$$

Se adunque nella forma data i coefficienti del primo e dell'ultimo termine fossero eguali all'unità, si avrebbe la formula nota:

$$\Delta(z, x) = \pm 1 \text{ (*)}. \tag{14}$$

14. In quanto si è detto finora bisogna sempre supporre che gli accrescimenti della variabile rispetto alla quale si prendono le differenze dei vari ordini, sieno numeri positivi.

Vediamo ora come i risultati ottenuti vanno modificati nel caso di accrescimenti negativi.

Essendo ancora dati gli m valori:

$$\varphi(z), \qquad \varphi(z+1), \ldots \qquad \varphi(z+m-1),$$

che un integrale della forma data assume in m punti consecutivi del campo γ, ed ammesso che il punto:

$$\left.\begin{aligned} &x = z + n' \\ &n' = -n \quad \text{intero negativo qualunque,} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

(*) Vedi per es. nel caso delle forme del terzo ordine: PINCHERLE, Annali di Matematica, loc. cit., pag. 6.

appartenga ancora al campo, si vuol trovare il valore $\varphi(x)$ che l'integrale assume nel punto x.

Si consideri perciò che la forma:

$$A(f) = a_m(x)f(x+m) + a_{m-1}(x)f(x+m-1) + \cdots + a_0(x)f(x), \quad (16)$$

può scriversi:

$$A(f) = a_m(x-m)f(x) + a_{m-1}(x-m)f(x+1) + \cdots + a_0(x-m)f(x-m),$$

od anche:

$$A(f) = a_0(x-m)f(x-m) + a_1(x-m)f(x-m+1) + \cdots + \\ + a_m(x-m)f(x). \quad (17)$$

Imaginiamo ora che il campo γ, in cui x è variabile, debba essere percorso in senso contrario a quello indicato dal segno di m; la forma data si muterà nella seguente:

$$A'(f) = a_0(x+m')f(x+m') + a_1(x+m)f(x+m'-1') + \cdots + \\ + a_m(x+m')f(x). \quad (18)$$

Questa forma, che si ottiene dalla data cambiando il senso in cui i punti del campo γ vanno percorsi, potrà chiamarsi *contraria* della data.

Se ora sieno dati i valori:

$$\varphi(z), \qquad \varphi(z+1), \ldots \qquad \varphi(z+m-1),$$

e si voglia il valore $\varphi(x)$,

$$x = z - n;$$

potremo considerare quei valori come dati ad un integrale della forma contraria, in quei medesimi punti, e cercare il valore che un tale integrale assume nel punto:

$$x = z + n'.$$

Ma questo problema è già stato risolto al n.° 12, potremo dunque immediatamente applicare i risultati ivi ottenuti, tenendo conto naturalmente che i coefficienti della forma non son più gli stessi.

Avremo dunque, per la formula (9):

$$\varphi(x) = B_0(z, x)\varphi(z+m-1) + B_1(z, x)\varphi(z+m-2) + \cdots + \\ + B_{m-1}(z, x)\varphi(z) \quad (*). \quad (19)$$

(*) Essendo cambiato il senso in cui il campo va percorso, dovremo considerare come consecutivi i punti $z+m-1$, $z+m-2, \ldots$, $z+1$, z.

I coefficienti $B_r(z, x)$ si formeranno mediante il continuante generalizzato (*):

$$C'(z, x) = \begin{vmatrix} a_1(z) & a_0(z) & 0\ldots & 0 & 0 \\ a_2(z-1) & a_1(z-1) & a_0(z-1)\ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots & a_1(x+1) & a_0(x+1) \\ 0 & 0 & 0\ldots & a_2(x) & a_1(x) \end{vmatrix},$$

della forma contraria, nello stesso modo che, mediante il continuante generalizzato della forma data, si formarono i coefficienti $A_r(z, x)$ della espressione relativa al valore $x = z + n$.

15. Per la dimostrazione fatta al n.° 13, le funzioni:

$$B_0(z, x), \quad B_1(z, x), \ldots \quad B_{m-1}(z, x),$$

formeranno sistema fondamentale di integrali della forma contraria; ed il determinante:

$$\Delta'(z, x) = \begin{vmatrix} B_0(z, x)\ldots & B_{m-1}(z, x) \\ \cdot & \cdot \\ B_0(z, x-m+1)\ldots & B_{m-1}(z, x-m+1) \end{vmatrix},$$

avrà il valore:

$$\Delta'(z, x) = (-1)^{(z+m-x)} \prod_{s=z}^{x-m+1} \frac{a_m(s)}{a_0(s)}. \tag{20}$$

16. Sempre nella ipotesi che sia:

$$x = z - n,$$

supponiamo che sieno dati i valori:

$$\varphi(x-m+1), \quad \varphi(x-m+2), \ldots \quad \varphi(x);$$

siccome è $z = x + n$ (n positivo), applicando la formula (9) avremo:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(z+m-1) = A_0(x-m+1, z+m-1)\varphi(x-m+1) + \cdots + A_{m-1}(x-m+1, z+m-1)\varphi(x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi(z) = A_0(x-m+1, z)\varphi(x-m+1) + \cdots + A_{m-1}(x-m+1, z)\varphi(x), \end{array}\right\} \tag{21}$$

(*) Può osservarsi che nel continuante generalizzato della forma $A(f)$, la diagonale è occupata dagli elementi $a_{m-1}(s)$, in quello delle forma contraria, dagli elementi $a_1(s)$.

ed il determinante delle A, per la formula (13) sarà:

$$\Delta(x - m + 1,\ z) = (-1)^{m(z+m-x)} \prod_{s=x-m+1}^{z} \frac{a_0(s)}{a_m(s)}.$$

Cioè, per la formula (20):

$$\Delta(x - m + 1,\ z) = \frac{1}{\Delta'(z,\ x)}. \tag{22}$$

Se adunque si forma lo schema:

$$\left.\begin{array}{ll} a_0(z+m-1),\ldots & a_m(z+m-1) \\ a_0(z+m-2),\ldots & a_m(z+m-2) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_0(x-m+1),\ldots & a_m(x-m+1), \end{array}\right\}$$

e con gli elementi in esso contenuti si formano i polinomi:

$$\left.\begin{array}{l} A_s(x-m+1,\ z+r) \\ B_s(z,\ x-r) \\ \begin{pmatrix} r = 0,\ 1,\ldots\ m-1 \\ s = 0,\ 1,\ldots\ m-1 \end{pmatrix}, \end{array}\right\}$$

il determinante formato cogli r^2 polinomi A è reciproco di quello formato coi polinomi B.

Se nella forma data i coefficienti del primo e dell'ultimo termine fossero eguali all'unità (ciò che può sempre ottenersi), quei due determinanti sarebbero fra di loro eguali.

Risolvendo le equazioni del sistema (21) rispetto alle $\varphi(x-m+1)$, $\varphi(x-m+2),\ldots\ \varphi(x)$, troveremo (*):

$$\left.\begin{array}{c} \varphi(x-r) = \sum\limits_{s=0}^{m-1} \dfrac{\Delta_{m-r-1,s}}{\Delta} \cdot \varphi(z+m-s-1) \\ (r = m-1,\ m-2,\ldots\ 1,\ 0). \end{array}\right\} \tag{23}$$

Ma si ha, per la formula (19):

$$\left.\begin{array}{c} \varphi(x-r) = \sum\limits_{s=0}^{m-1} B_s(z,\ x-r)\varphi(z+m-s-1) \\ r = 0,\ 1,\ldots\ m-1, \end{array}\right\} \tag{24}$$

(*) Indichiamo con $\Delta_{r,s}$, il minore che si ottiene dal determinante Δ, formato colle $A_r(x-m+1,\ z+s)$, togliendo la colonna $(r+1)^{\text{esima}}$, e la linea $(s+1)^{\text{esima}}$.

dunque:

$$\left.\begin{aligned} B_s(z,\ x-r) &= \frac{\Delta_{m-r-1,s}}{\Delta} \\ r &= 0,\ 1,\dots\ m-1 \\ s &= 0,\ 1,\dots\ m-1. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Cioè: *I polinomi* $B_0(z,\ x-r),\dots\ B_{m-1}(z,\ x-r)$ *sono i reciproci degli elementi contenuti nella colonna di posto* $m-r$ *nel determinante* Δ *formato coi polinomi* $A_r(x-m+1,\ z+s)$.

Il fattore

$$\frac{1}{\Delta} = \Pi\,\frac{a_m(s)}{a_0(s)},$$

può, con opportune trasformazioni nella forma data, sempre supporsi eguale all'unità.

Si vede in particolare che i polinomi:

$$B_{m-1}(z,\ x), \qquad B_{m-1}(z,\ x-1),\dots \qquad B_{m-1}(z,\ x-m+1), \tag{26}$$

sono gli elementi reciproci dell'ultima linea, pertanto sono quei polinomi che il prof. Pincherle indicò in generale (*) con

$$B_{0,n}, \qquad B_{1,n},\dots \qquad B_{p-1,n},$$

e, nel caso di $p=3$ (**) con

$$P_n, \qquad Q_n, \qquad R_n,$$

nei citati lavori: e che sono il denominatore ed i numeratori delle frazioni richieste dal problema II enunciato al n.° 11 di questo articolo.

Ora considerando che i polinomi $A_r(z,\ x)$, come risulta dalla formula (9) (***), e dalle proprietà trovate al n.° 13, non differiscono dai polinomi A_{hk} che sono coefficienti della relazione richiesta dal quesito I, ricordando che quelle due serie di polinomi $A_r(z,\ x)$, $B_{m-r}(z,\ x)$ sono formati esattamente nello stesso modo, gli uni coi coefficienti della forma data, gli altri con quelli della forma contraria; potremo concludere:

I due problemi:

I. « Date m funzioni stabilire fra di esse la relazione lineare a coeffi-
« cienti razionali più approssimata possibile per un grado dato dai coefficienti. »

(*) *Saggio di una generalizzazione,* ecc. ecc., n.° 18.
(**) *Sulla generalizzazione,* ecc. ecc., n.i 7 e 9.
(***) Cfr. *Sulla generalizzazione,* ecc. ecc., n.i 2, 3, 4.

II. « Date $m-1$ funzioni rappresentarle con altrettante frazioni ra-
« zionali aventi lo stesso denominatore nel modo più approssimato possibile,
« compatibilmente col grado dato del denominatore. »
sono casi particolari di uno stesso problema applicato a due forme contrarie.

Più precisamente: *Trovate le soluzioni dell'un problema si ricavano, da queste, le soluzioni dell'altro cambiando il senso in cui i punti del campo γ vanno percorsi.*

17. La proprietà (trovata per altra strada dal prof. PINCHERLE) (*) per i polinomi B_{hk}, *di essere integrali della forma inversa*, risulta immediatamente dalla definizione (**):

$$B_{m-1}(z,\ x)=\frac{\beta_{m-1}(z,\ x)}{\beta_m(z,\ x)}=\frac{(a_1(z),\ a_1(z-1),\dots\ a_1(x))}{\prod\limits_{s=z+1}^{x} a_0(s)},$$

basta infatti sviluppare il determinante che è al numeratore secondo gli elementi della prima colonna per giungere alla identità:

$$\sum_{r=s}^{m-1} a_r(z-r+1)B_{m-1}(z-r)=0.$$

In modo interamente analogo a quello tenuto al n.° 16, potrei dimostrare che, fatta astrazione dal fattore

$$\Pi\frac{a_m(s)}{a_0(s)};$$

i polinomi:

$$A_s(x-m+1,\ z+r)\qquad \begin{pmatrix} s=0,\dots\ m-1\\ r=0,\dots\ m-1\end{pmatrix},$$

sono i minori della colonna $(r+1)^{\text{esima}}$ *nel determinante* Δ' *formato colle B.*

Si deducono le importanti relazioni:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\mu=0}^{m-1} A_\mu(x-m+1,\ z+r)B_s(z,\ x+\mu)=\begin{cases}0, & \text{se } r\neq 1\\ 1, & \text{se } r=s\end{cases}\\
&\sum_{\mu=0}^{m-1} B_\mu(z,\ x-r)A_{m-s-1}(x-m+1,\ z+m-\mu-1)=\begin{cases}0, & \text{se } r\neq s\\ 1, & \text{se } r=s.\end{cases}
\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

(*) Accad. di Bologna, loc. cit., n.° 19.

(**) Applica le formule (6), (8), del n.° 12, ai coefficienti della forma contraria.

Delle quali la relazione fra i numeratori ed i denominatori delle ridotte:

$$P_n Q_{n+1} - P_{n+1} Q_n = \pm 1,$$

e le altre analoghe trovate, nel caso di forme del 3.° ordine dal prof. PINCHERLE, sono casi particolari.

IV.

Una schiera di operazioni funzionali analoghe alle trasformazioni proiettive.

18. Riprendiamo ora lo studio della dipendenza della espressione analitica di un dato integrale, o di un dato sistema di integrali, dalla scelta del valore iniziale z.

Vedremo che i risultamenti a cui, nell'art. III, siamo giunti per alcune varietà di integrali (i polinomi $A_r(z, x)$, $B_r(z, x)$), possono servire alla definizione ed allo studio della operazione funzionale, che un sistema fondamentale qualunque deve subire, quando l'origine degli accrescimenti della variabile principale si intenda trasportata da un punto z^0 ad un altro z', arbitrariamente scelti nel campo γ.

In particolare potremo determinare la operazione che, eseguita sopra gli m integrali che in una data varietà corrispondono ad m valori consecutivi del parametro, ci fa conoscere l'espressione analitica dell'integrale che, in quella varietà, corrisponde ad un altro valore del parametro dato in modo qualunque.

19. Nel campo γ si considerino due punti z^0, z', che, per fissare le idee, supponiamo si seguano nel senso positivo.

Nella formula:

$$\varphi(x) = \sum_{s=0}^{m-1} \varphi(z' + s) A_s(z', x),$$

trovata al n.° 12, si ponga $A_r(z^0, z' + s)$ al posto di $\varphi(z + s)$; avremo le formule:

$$\left.\begin{array}{c} A_r(z^0, x) = \sum\limits_{s=0}^{m-1} A_r(z^0, z' + s) A_s(z', x) \\ (r = 0, 1, \ldots m - 1). \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Da cui (art. III, n.° 13) le altre:

$$\left.\begin{array}{c} A_r(z', x) = \sum_{s=0}^{m-1} B_r(z', z^0 + m - s - 1) A_s(z^0, x) \\ r = 0, 1, \dots m - 1. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Si chiami ora con

$$S(z^0, z') = \left\{\begin{array}{ccc} A_0(z^0, z'), \dots & & A_0(z^0, z' + m - 1) \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ A_{m-1}(z^0, z'), \dots & & A_{m-1}(z^0, z' + m - 1), \end{array}\right\} \tag{3}$$

l'operazione funzionale indicata dalle formule (1) e che serve a trasformare il sistema fondamentale $A_0(z', x), \dots A_{m-1}(z', x)$, corrispondente al valore z' del parametro, nel sistema $A_0(z^0, x), \dots A_{m-1}(z^0, x)$ corrispondente al valore z^0.

L'operazione:

$$S(z', z^0) = \left\{\begin{array}{ccc} B_0(z', z^0 + m - 1), \dots & & B_0(z', z^0) \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ B_{m-1}(z', z^0 + m - 1), \dots & & B_{m-1}(z', z^0), \end{array}\right\} \tag{4}$$

rappresentata dalle formule (2), è *inversa* della precedente e trasforma il sistema $A_r(z^0, x)$ nell'altro $A_r(z', x)$.

Anche qui si verifica che: quando si cambi il senso in cui il campo γ si intende percorso, nella operazione $S(z^0, z')$, i polinomi $A_r(z^0, z')$, si cambiano nei polinomi $B_r(z^0, z')$.

La relazione fra le due operazioni funzionali $S(z^0, z')$, $S(z', z^0)$, può essere espressa dalla formula:

$$S(z^0, z') \cdot S(z', z^0) = 1, \tag{5}$$

o dall'altra:

$$S(z^0, z') = S^{(-1)}(z', z^0). \tag{6}$$

Se il sistema $A_0(z, x), \dots A_{m-1}(z, x)$, si indica brevemente con

$$[A_r(z, x)],$$

avremo in ogni caso:

$$[A_r(z^0, x)] = S(z^0, z')[A_r(z', x)], \tag{7}$$

dove z^0, z' possono essere due punti qualunque del campo γ e la $S(z^0, z')$ avrà la forma (3) o la (4) a seconda del senso in cui la z percorre il campo γ per passare da z^0 a z'.

20. Sia ora:

$$\varphi_0(x), \qquad \varphi_1(x), \ldots \qquad \varphi_{m-1}(x), \tag{8}$$

un sistema fondamentale qualunque della data forma, che immagineremo determinato nella ipotesi (espressa o sottintesa) che z' sia il punto del campo γ che si considera come origine degli accrescimenti della variabile principale.

Per far meglio risaltare questa nostra ipotesi rappresenteremo la funzione $\varphi_r(x)$ col simbolo $\varphi_r(z', x)$; e quel sistema con

$$[\varphi_r(z', x)].$$

Vediamo ora *come andrà mutata la espressione analitica delle funzioni* $\varphi(x)$ *quando si supponga di trasportare la origine dal punto* z' *al punto* z^0.

Poichè anche le $A_r(z', x)$ $(r = 0, 1, \ldots m-1)$ formano sistema fondamentale, potremo, in modo unico, determinare i coefficienti $c_{r,s}$ per modo che si abbia:

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_r(z', x) = \sum\limits_{s=0}^{m-1} c_{r,s} A_s(z', x) \\ r = 0, 1, \ldots m-1, \end{array}\right\} \tag{9}$$

o, brevemente:

$$[\varphi_r(z', x)] = S(c_{r,s})\,[A_r(z', x)],$$

ma, per la (7):

$$[A_r(z', x)] = S(z', z^0)\,[A_r(z^0, x],$$

dunque sarà, per un noto teorema sulle sostituzioni lineari:

$$[\varphi_r(z', x)] = S(c_{r,s}) \cdot S(z', z^0) \cdot S^{-1}(c_{r,s})\varphi_r(z^0, x). \tag{10}$$

Da cui:

$$[\varphi_r(z^0, x)] = S(c_{r,s}) \cdot S(z^0, z') \cdot S^{-1}(c_{r,s})\varphi_r(z', x). \tag{11}$$

Cioè:

Se il valore z di x che si considera come iniziale si trasporta dal punto z' al punto z^0, un sistema fondamentale qualunque subisce la operazione funzionale:

$$T(z^0, z', c) = S(c_{r,s}) \cdot S(z^0, z') \cdot S^{-1}(c_{r,s}), \tag{12}$$

dove $S(z^0, z')$ ha il significato indicato al numero precedente ed $S(c_{r,s})$ è la operazione, sempre determinabile, che trasforma il sistema $[A_r(z, x)]$ nel sistema dato.

Nella operazione $T(z^0, z', c_{r,s})$, sono parametri arbitrari z^0, z', $c_{r,s}$, si ha dunque una schiera (discontinua) molteplicemente infinita di tali operazioni.

Queste, in generale non formano un gruppo. Si può osservare che, quando le $c_{r,s}$ sieno mantenute costanti, si ha per il prodotto di due operazioni:

$$T(z^0,\ z',\ c_{r,s}) \cdot T(z',\ z^2,\ c_{r,s}),$$

che potrebbero chiamarsi *contigue*, la proprietà:

$$T(z^0,\ z',\ c_{r,s}) \cdot T(z',\ z^2,\ c_{r,s}) = T(z^0,\ z^2,\ c_{r,s}), \tag{13}$$

qualunque sia il senso in cui i punti z^0, z', z^2, si seguono nel campo γ.

In particolare:

$$T(z^0,\ z',\ c_{r,s}) \cdot T(z',\ z^0,\ c_{r,s}) = 1. \tag{14}$$

La operazione identica, e la inversa di una qualunque operazione data sono dunque contenute nella schiera.

21. Poichè gli m integrali, che in una stessa schiera corrispondono a valori consecutivi del parametro, formano sistema fondamentale, potremo, applicando la operazione: $T(z^0,\ z',\ c_{r,s})$ ad un tale sistema, trovare la espressione analitica dell'integrale che in quella varietà corrisponde ad un valore del parametro arbitrariamente scelto.

In questo caso la operazione $T(z^0,\ z',\ c_{r,s})$, potrà facilmente determinarsi anche direttamente.

Si consideri per esempio il sistema:

$$A_r(z^0,\ x), \qquad A_r(z^0+1,\ x), \ldots \qquad A_r(z^0+m-1,\ x). \tag{15}$$

Si hanno le formule:

$$\left.\begin{array}{r}
A_r(z^0,\ x) = \sum\limits_{s=0}^{m-1} A_r(z^0,\ z'+s) A_s(z',\ x) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_r(z^0+m-1,\ x) = \sum\limits_{s=0}^{m-1} A_r(z^0+m-1,\ z'+s) A_s(z',\ x).
\end{array}\right\} \tag{16}$$

Siccome il determinante:

$$D^{(r)}(z^0,\ z') = \begin{vmatrix} A_r(z^0,\ z'),\ldots & A_r(z^0,\ z'+m-1) \\ \cdots & \cdots \\ A_r(z^0+m-1,\ z'),\ldots & A_r(z^0+m-1,\ z'+m-1) \end{vmatrix},$$

non è identicamente nullo, anzi sappiamo (art. I, n.° 6) che ha il valore:

$$D^r(z^0,\ z') = \overline{a_r(z)}^m \frac{(-1)^{m(z'-z)},\ a_0(z'-1),\ldots\ a_0(z^0+m-1)}{a_m(z'-1),\ldots\ a_m(z^0-1)},$$

così potremo risolvere le equazioni (16) rispetto alle $A_s(z', x)$, $(s=0, 1,\dots m-1)$. In particolare avremo:

$$A_r(z', x)=\sum_{t=0}^{m-1} \frac{D^{(r)}{}_{r-1,t}}{D^{(r)}} \cdot A_r(z^0+t, x). \tag{17}$$

Mediante questa formula, dati gli m integrali $A_r(z^0, x),\dots A_r(z^0+m-1, x)$, si trova l'integrale $A_r(z', x)$ corrispondente al valore z' del parametro in quella varietà a cui quegli integrali appartengono.

La operazione $T(z^0, z', c_{r,s})$ in questo caso ha la forma:

$$T(z^0, z', r)=\begin{vmatrix} c_{r,0}(z^0, z'),\dots & c_{r,m-1}(z^0, z') \\ \dots & \dots \\ c_{r,0}(z^0, z'+m-1),\dots & c_{r,m+1}(z^0, z'+m-1) \end{vmatrix}, \tag{18}$$

con

$$c_{r,t}(z^0, z')=\frac{D^{(r)}{}_{r-1,t}(z^0, z')}{D^{(r)}(z^0, z')}.$$

22. Per lo studio della convergenza dell'algoritmo generalizzato, come fu definita dal prof. Pincherle (*), è utile la considerazione dei limiti verso cui tendono i polinomi $A_r(z, x)$, $B_r(z, x)$ quando la x tende all'infinito.

Supponiamo che questi limiti esistano e sieno [per es. per le $A_r(z, x)$]:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x=\infty} A_r(z, x)=\alpha_r(z) \\ r=0, 1,\dots m-1, \end{array}\right\} \tag{19}$$

queste $\alpha_r(z)$ saranno funzioni del punto iniziale z di cui, coll'aiuto delle formule (1) e (2), potremo trovare una proprietà importante.

Siccome in quelle formule i coefficienti:

$$\left.\begin{array}{c} A_r(z^0, z'+s), \qquad B_r(z^0, z'+s) \\ \begin{pmatrix} r=0, 1,\dots m-1 \\ s=0, 1,\dots m-1 \end{pmatrix}, \end{array}\right\}$$

non dipendono dalla x, così passando al limite per $x=\infty$ avremo:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_r(z^0)=\sum\limits_{s=0}^{m-1} A_r(z^0, z'+s)\,\alpha_s(z') \\ \alpha_r(z')=\sum\limits_{s=0}^{m-1} B_r(z', z^0+m-s-1)\,\alpha_s(z^0) \\ r=0, 1,\dots m-1, \end{array}\right\} \tag{20}$$

(*) *Contributo alla generalizzazione*, ecc. ecc. Mem. Acc. di Bologna, serie 5.ª, tomo 4.

o, se si vuole,

$$[\alpha_r(z^0)] = S(z^0,\ z')\,[\alpha_r(z')].$$

Le funzioni $\alpha_r(z)$ dunque si comportano, rispetto alla operazione funzionale $S(z^0, z')$, come gli integrali di un sistema fondamentale della forma data.

Siccome poi le $A_r(z^0,\ z'+s)$, $B_r(z',\ z^0+m-s-1)$ sono funzioni razionali di grado $z'-z^0+s$ nei coefficienti della data forma, così potremo ancora concludere:

Se per un punto z^0 del campo γ, esistono determinati e finiti i limiti:

$$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{x=\infty} A_r(z^0,\ x) = \alpha_r(z^0) \\ r = 0,\ 1, \ldots\ m-1, \end{array}\right\}$$

le funzioni $\alpha_r(z)$ avranno carattere razionale intero in tutti i punti del campo.

V.

Le forme periodiche.

23. Una forma lineare alle differenze:

$$A(f) = a_0(x) f(x) + a_1(x) f(x+1) + \cdots + a_m(x) f(x+m), \tag{1}$$

si dirà *periodica*, se i coefficienti:

$$a_0(x), \qquad a_1(x), \ldots \qquad a_m(x),$$

sono funzioni periodiche col medesimo periodo dei punti del campo γ in cui sono date.

24. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una data forma lineare alle differenze sia periodica, è che gli integrali della forma data sieno anche integrali di una forma a coefficienti costanti dell'ordine mp (essendo p il periodo), e del tipo:*

$$C(f) = c_0 f(x) + c_1 f(x+p) + \cdots + c_m f(x+mp). \tag{2}$$

La condizione è necessaria.

Infatti: se $\varphi(x)$ è un integrale qualunque della forma $A(f)$, si hanno le identità (art. III, n.° 12):

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= A_0(z,\ x)\varphi(z) + \cdots + A_{m-1}(z,\ x)\varphi(z+m-1) \\ \varphi(x+p) &= A_0(z,\ x+p)\varphi(z) + \cdots + A_{m-1}(z,\ x+p)\varphi(z+m-1) \\ \varphi(x+mp) &= A_0(z,\ x+mp)\varphi(z) + \cdots + A_{m-1}(z,\ x+mp)\varphi(z+m-1). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Dalle quali, eliminando le $\varphi(z), \ldots\ \varphi(z+m-1)$, si trova una relazione della forma:

$$c_0(x)\varphi(x) + c_1(x)\varphi(x+p) + \cdots + c_m(x)\varphi(x+mp) = 0. \quad (4)$$

Occorre dimostrare che i coefficienti $c_s(x)$, sono costanti in tutto il campo γ.

Dico, intanto, che *sono costanti per tutti i valori di x congrui fra loro rispetto al modulo p.*

Per la periodicità supposta si ha infatti:

$$A_r(z,\ x) = A_r(z+p,\ x+p), \quad (5)$$

dunque sarà ancora:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x+p) &= A_0(z,\ x)\varphi(z+p) + \cdots + A_{m-1}(z,\ x)\varphi(z+p+m-1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(x+(m+1)p) &= A_0(z,\ x+mp)\varphi(z+p) + \cdots + \\ &\quad + A_{m-1}(z,\ x+mp)\varphi(z+p+m-1). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Poichè i coefficienti delle $\varphi(z+p+s)$, in queste equazioni, sono gli stessi che i coefficienti delle $\varphi(z+s)$ nelle equazioni (3), così eliminando le $\varphi(z+p+s)$, giungeremo alla relazione:

$$c_0(x)\varphi(x+p) + c_1(x)\varphi(x+2p) + \cdots + c_m(x)\varphi(x+(m+1)p) = 0, \quad (7)$$

ed i coefficienti saranno quelli stessi che si trovarono per la (4).

Siccome poi nella formula (4) non facemmo alcuna ipotesi sul valore della x, così avremo ancora:

$$c_0(x+p)\varphi(x+p) + c_1(x+p)\varphi(x+2p) + \cdots + c_m(x+p)\varphi(x+(m+1)p) = 0.$$

Cioè:

$$\left.\begin{aligned} c_s(x+p) &= c_s(x) \\ s &= 0,\ 1, \ldots\ m. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Il che dimostra appunto la periodicità delle funzioni $c_r(x)$.

Dico ora che *quelle funzioni sono costanti in tutto il campo.*

Ed infatti: poichè i coefficienti $a_s(x)$ sono periodici, col periodo p, indicando con $\varphi(x)$ un integrale qualunque della data forma, si hanno le identità:

$$\left.\begin{array}{r} -a_0(x)\varphi(x) = \sum_{t=1}^{m} a_t(x)\varphi(x+t) \\ -a_0(x)\varphi(x+p) = \sum_{t=1}^{m} a_t(x)\varphi(x+p+t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a_0(x)\varphi(x+mp) = \sum_{t=1}^{m} a_t(x)\varphi(x+mp+t). \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Moltiplicando ordinatamente per $c_0(x)$, $c_1(x), \ldots c_m(x)$ e sommando, si ha, per le formule (4) ed (8):

$$0 = \sum_{t=1}^{m} a_t(x) \sum_{s=0}^{m} c_s(x)\varphi(x+sp+t). \qquad (10)$$

Ma questa è una conseguenza formale delle formule (9), avremo dunque le identità:

$$\sum_{s=0}^{m} c_s(x)\varphi(x+sp+t) = 0. \qquad (11)$$

D'altra parte abbiamo:

$$\sum_{s=0}^{m} c_s(x+t)\varphi(x+sp+t) = 0, \qquad (12)$$

dunque sarà:

$$\left.\begin{array}{l} c_s(x) = c_s(x+t) \\ s = 0,\ 1, \ldots\ m \\ t = 1,\ 2, \ldots\ m. \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Le funzioni $c_s(x)$ sono dunque veramente costanti in tutto il campo. Potremo dunque concludere:

Qualunque funzione $\varphi(x)$ integrale della forma data è anche integrale della forma a coefficienti costanti:

$$C(f) = c_0 f(x) + c_1 f(x+p) + \cdots + c_m f(x+mp).$$

La condizione è sufficiente.

Infatti: se $\varphi(x)$ è un integrale della $C(f)$, si avranno le identità:

$$\left.\begin{aligned}
-c_0\varphi(x) &= c_1\varphi(x+p)+\cdots+c_m\varphi(x+mp)\\
-c_0\varphi(x+1) &= c_1\varphi(x+p+1)+\cdots+c_m\varphi(x+mp+1)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
-c_0\varphi(x+m) &= c_1\varphi(x+p+m)+\cdots+c_m\varphi(x+mp+m).
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Moltiplicando ordinatamente per $a_0(x)$, $a_1(x)$,... $a_m(x)$, e ricordando che $\varphi(x)$ è, per la nostra ipotesi, anche integrale della forma data; avremo:

$$0=\sum_{t=0}^{m} a_t(x)\sum_{s=1}^{m} c_s\varphi(x+sp+t),$$

od anche:

$$\sum_{s=1}^{m} c_s\sum_{t=0}^{m} a_t(x)\varphi(x+sp+t)=0. \tag{15}$$

Questa però è una conseguenza formale delle (14), d'onde le identità:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{m} a_t(x)\varphi(x+sp+t)=0,\\
s=1,\ 2,\ldots\ m.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

D'altra parte, per essere $\varphi(x)$ integrale della forma $A(f)$, si hanno le identità:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{m} a_t(x+sp)\varphi(x+sp+t)=0\\
s=1,\ 2,\ldots\ m.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

D'onde:

$$\left.\begin{aligned}
a_t(x)=a_t(x+sp)\\
t=0,\ 1,\ldots\ m.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

I coefficienti della forma data $A(f)$ sono dunque funzioni periodiche ed hanno lo stesso periodo p, come v. d.

25. Si supponga ora che esistano i limiti:

$$\left.\begin{aligned}
\lim_{x=\infty} A_r(z,\ x)=\alpha_r(z)\\
r=0,\ 1,\ldots\ m-1.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Siccome per tutti i valori di x, è sempre:

$$A_r(z,\ x)=A_r(z+p,\ x+p),$$

così, passando al limite, avremo:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_r(z) = \alpha_r(z+p) \\ r = 0,\ 1, \ldots\ m-1. \end{array}\right\} \tag{20}$$

Cioè, anche le funzioni $\alpha_r(z)$ saranno periodiche col medesimo periodo p.

Ora abbiamo trovato (art. IV, n.° 22) la relazione:

$$[\alpha_r(z^0)] = S(z^0,\ z')\,[\alpha_r(z')],$$

si supponga:

$$z^0 \equiv z' \qquad (\text{mod. } p);$$

sarà:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_r(z^0) = \alpha_r(z') \\ r = 0,\ 1, \ldots\ m-1, \end{array}\right\}$$

dunque:

$$[\alpha_r(z^0)] = S(z^0,\ z')\,[\alpha_r(z^0)]. \tag{21}$$

Il sistema:

$$\alpha_0(z^0), \qquad \alpha_1(z^0), \ldots \qquad \alpha_{m-1}(z^0),$$

è trasformato in sè stesso da tutte le operazioni:

$$S(z^0,\ z'),$$

corrispondenti a valori di z' congrui a z^0 rispetto al modulo p.

Per ogni valore z^0, di z si ha un gruppo di tali operazioni.

Infatti: Sieno z', z'', due numeri congrui entrambi a z^0 (mod. p).

Sarà:

$$z' = z^0 + np.$$

Si ponga:

$$z''' = z'' + np.$$

Sarà ancora:

$$z''' \equiv z^0 \qquad (\text{mod. } p). \tag{22}$$

Si ha poi:

$$A_r(z^0,\ z''+s) = A_r(z^0+np,\ z''+np+s),$$

cioè:

$$A_r(z^0,\ z''+s) = A_r(z',\ z'''+s);$$

da cui [art. IV, form. (3)]:

$$S(z^0,\ z'') = S(z',\ z'''). \tag{23}$$

Si debba ora formare il prodotto:

$$S(z^0,\ z') \cdot S(z^0,\ z'').$$

Avremo per la (23):

$$S(z^0, z') \cdot S(z^0, z'') = S(z^0, z') \cdot S(z', z'''),$$

ma:

$$S(z^0, z') \cdot S(z', z''') = S(z^0, z'''),$$

dunque:

$$S(z^0, z') \cdot S(z^0, z'') = S(z^0, z'''). \tag{24}$$

Le operazioni $S(z^0, z)$ corrispondenti a valori di z congrui a z^0 (mod. p), formano dunque un gruppo.

Potremo dunque concluder che *il sistema:*

$$\alpha_0(z^0), \qquad \alpha_1(z^0), \ldots \qquad \alpha_{m-1}(z^0),$$

è invariante per quel gruppo.

È manifesta la analogia delle operazioni $S(z^0, z')$ colle ordinarie trasformazioni omografiche, potremmo dunque dire che *le funzioni* $\alpha_0(z^0)$, $\alpha_1(z^0), \ldots$ $\alpha_{m-1}(z^0)$, *sono gli elementi uniti nella omografia* $S(z^0, z)$.

Si sa che la ricerca degli elementi uniti dipende dalla risoluzione di una equazione algebrica del grado m della forma:

$$\begin{vmatrix} A_0(z, y) - \rho, \ldots & A_0(z, y + m - 1) \\ \cdots & \cdots \\ A_{m-1}(z, y), \ldots & A_{m-1}(z, y + m - 1) - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Tutte le volte che esistano i limiti (19), potremo risolvere una tale equazione o per lo meno *rappresentarne le radici mediante funzioni razionali colla massima approssimazione possibile.*

In ogni modo potremo asserire che *quei limiti sono radici di equazioni algebriche del grado m;* in analogia con quanto fu trovato per le frazioni continue algebriche periodiche (*), e pei sistemi ricorrenti periodici del terzo ordine (**).

Roma, 31 maggio 1895.

(*) Cfr. Emma Bortolotti, *Sulle frazioni continue periodiche algebriche.* Rendiconti Cir. matem. di Palermo, tomo 9.

(**) *Sulla generalizzazione delle fraz.. cont. alg. periodiche.* Rendic. Circ. matem. di Palermo, tomo 6.

Fine del ~~Tomo~~ ~~XXIII~~ ° (Serie ~~II.~~