THÉORIE DES MESURES.

INTRODUCTION A L'ÉTUDE

DES

SYSTÈMES DE MESURES

USITÉS EN PHYSIQUE.

Extrait des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux;* 1891.

THÉORIE DES MESURES.

INTRODUCTION A L'ÉTUDE
DES
SYSTÈMES DE MESURES
USITÉS EN PHYSIQUE,

PAR

J. PIONCHON,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

INTRODUCTION

A L'ÉTUDE

DES SYSTÈMES DE MESURES

USITÉS EN PHYSIQUE

AVANT-PROPOS

La théorie générale des mesures, le choix systématique des unités, la solution des problèmes relatifs à l'expression numérique des résultats de l'expérience, sont des questions capitales dans l'étude de la physique et de ses applications. Aussi n'est-il pas aujourd'hui de traité de physique pure ou appliquée où ne se trouve au moins un chapitre consacré à ces matières. Mais ce sujet est de ceux qui ne sauraient être résumés en quelques pages sans laisser subsister des obscurités, des hésitations, des difficultés dans l'esprit du lecteur non exercé qui a besoin d'apprendre. Si l'on veut donner à son examen toute la précision qu'exigent son importance et son utilité, on s'aperçoit que ce n'est pas un chapitre qu'il faut écrire, mais plusieurs, constituant une sorte de petit traité propre à servir d'Introduction aux traités généraux de physique théorique et expérimentale.

C'est ce petit traité qu'on a essayé de faire ici en exposant, dans un ordre didactique et avec des détails suffisants pour en rendre l'étude tout à fait élémentaire, les sujets indiqués dans la table suivante :

LIVRE I

Possibilité et utilité de la coordination en système des unités de mesures scientifiques, soit géométriques, soit mécaniques.

CHAPITRE I. — Définitions. Propositions générales sur les mesures.
CHAPITRE II. — Tableau des principales grandeurs géométriques

et mécaniques qui se rencontrent dans l'étude des phénomènes physiques.

CHAPITRE III. — Propositions relatives à la comparaison des principales grandeurs géométriques.

CHAPITRE IV. — Propositions relatives à la comparaison des principales grandeurs cinématiques.

CHAPITRE V. — Propositions relatives à la comparaison des principales grandeurs dynamiques.

CHAPITRE VI. — Formule générale relative à la comparaison des grandeurs géométriques et mécaniques. Tableau des cas particuliers.

CHAPITRE VII. — Grandeurs fondamentales et grandeurs dérivées. Dimensions.

CHAPITRE VIII. — Choix systématique des unités. Unités normales. Mesures absolues.

CHAPITRE IX. — De l'homogénéité et de la similitude en géométrie et en mécanique.

LIVRE II

Examen de divers systèmes pratiques d'unités absolues géométriques et mécaniques.

CHAPITRE I. — Différents types possibles de systèmes coordonnés d'unités dérivées.

CHAPITRE II. — Choix des unités fondamentales les plus convenables pour constituer un système universel.

CHAPITRE III. — Système métrique.

CHAPITRE IV. — Système (CGS).

CHAPITRE V. — Solution générale des problèmes relatifs aux changements d'unités. Exemples.

CHAPITRE VI. — Calculs symboliques.

LIVRE III

Application des systèmes absolus d'unités géométriques et mécaniques à l'étude des phénomènes physiques, et particulièrement des phénomènes électriques et magnétiques.

CHAPITRE I. — Lois physiques; influence des changements d'unités sur les formules qui les expriment.

CHAPITRE II. — Grandeurs électriques et magnétiques. Propositions relatives à leur comparaison.

APPENDICE

Le titre d'*Introduction* donné à ce petit traité est destiné à indiquer que l'étude du sujet auquel il se rapporte y est entreprise à partir des éléments. Mais cette étude est poussée assez loin pour satisfaire amplement tous ceux (étudiants, ingénieurs, etc.) qui, afin d'éviter toute erreur dans les applications, ont intérêt à se rendre un compte rigoureux des formules de la physique. En effet, de l'intelligence des formules les plus simples et de la connaissance des unités relatives à la géométrie et à la mécanique, le lecteur est conduit progressivement à l'intelligence des formules fondamentales et à la connaissance raisonnée des unités relatives à l'électricité et au magnétisme.

Le complément pratique indispensable à cette première étude se trouvera dans un second ouvrage, plus rapproché des applications, qui fera suite à celui-ci sous ce titre : *Introduction à la pratique des systèmes de mesures usités en physique,* et qui renfermera des formules et des données numériques permettant d'effectuer tous les calculs usuels relatifs aux mesures, et de nombreux exemples de conversion de mesures consistant dans l'évaluation en unités (CGS) des principales données expérimentales relatives aux diverses parties de la physique.

On trouvera plus loin un index bibliographique présentant l'énumération des publications les plus importantes auxquelles a donné lieu, envisagée sous ses aspects les plus divers, la question des mesures absolues. Le lecteur qui aura étudié avec fruit la présente Introduction sera parfaitement préparé, si ce genre de spéculations l'intéresse, à entreprendre sans difficulté la lecture de ces différents ouvrages.

LIVRE I

Possibilité et utilité de la coordination en système des unités de mesures scientifiques, soit géométriques, soit mécaniques.

CHAPITRE I

Définitions. — Propositions générales sur les mesures.

Art. 1.

Le mot *quantité* a reçu des mathématiciens modernes une grande extension [1]. Pour l'objet que nous avons en vue dans ce traité, il nous suffira de lui garder son sens étymologique. Nous l'emploierons exclusivement à désigner toute chose dont on peut concevoir des parties aliquotes, comme une longueur, un intervalle de temps, etc., c'est-à-dire toute chose à laquelle peuvent s'appliquer les notions d'égalité et d'addition.

Si rien ne limite la petitesse des parties aliquotes dont une quantité peut être considérée comme l'assemblage, cette quantité est dite *continue*.

On peut faire entre les diverses quantités une distinction

---

[1] « On appelle en général *quantité* tout ce qui peut être l'objet d'une opération mathématique.

» La définition de la quantité comprend non seulement les objets réels, considérés au point de vue du nombre et de la grandeur, mais encore les signes d'opération eux-mêmes. »

Hoüel, *Considérations sur la généralisation successive de l'idée de quantité dans l'analyse mathématique* (*Mém. de la Soc. des Sc. phys. et nat. de Bordeaux*, 1882, t. V, 2e s., p. 149).

suivant que leur notion implique ou non l'idée d'un ordre dans le groupement de leurs parties aliquotes. Une surface nous offre un exemple du premier cas : ainsi un carré et le parallélogramme construit sur la diagonale et le côté sont composés des mêmes parties aliquotes, mais diversement assemblées. Un angle plan est une quantité du second genre, car il ne saurait être question de modes divers dans l'assemblage de ses parties aliquotes.

Deux quantités du premier genre, composées de parties aliquotes égales et en même nombre sont dites *égales* si l'arrangement des parties est le même, et *équivalentes* dans le cas contraire.

Lorsque deux quantités ont été reconnues égales ou équivalentes, leur comparaison est achevée et aussi parfaite que possible.

Lorsque deux quantités ont été reconnues inégales, leur comparaison n'est complète et précise que si l'on détermine la fraction de la plus grande à laquelle la plus petite est égale ou équivalente.

Cette fraction exprime le rapport de la plus petite des deux quantités à la plus grande, et son inverse le rapport de la plus grande à la plus petite (1).

Art. 2.

Toute chose dont la comparaison avec une chose de même nature fait intervenir la notion de rapport; toute chose, en d'autres termes, dont on peut définir des multiples ou des sous-multiples est ce qu'on appelle en général une *grandeur*.

La définition d'un multiple ou d'un sous-multiple n'implique pas toujours l'idée précise d'un assemblage de parties aliquotes. Ainsi, une longueur et une vitesse étant des choses dont on peut définir des multiples ou des sous-multiples méritent éga-

(1) Ce rapport peut être commensurable ou incommensurable. Voir, pour la théorie des rapports incommensurables, Tannery : *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable imaginaire.*

lement le nom de grandeur; mais ce sont des grandeurs de caractères différents en ce sens que, tandis que la première se présente intuitivement comme une collection de parties aliquotes, il n'en est pas de même de la seconde.

Pour donner quantitativement une idée précise d'une grandeur, on ne saurait mieux faire que d'indiquer le rapport de cette grandeur à une grandeur de la même espèce qui aura été au préalable nettement conçue.

Rapporter ainsi une grandeur à une grandeur type de même nature, c'est effectuer ce qu'on appelle la *mesure* de la grandeur considérée.

La grandeur prise pour terme de comparaison se nomme l'*unité* des grandeurs en question.

On appelle *valeur numérique* d'une grandeur le nombre exprimant le rapport de cette grandeur à l'unité des grandeurs de son espèce.

Pour représenter une grandeur, nous ferons usage de l'initiale de son nom placée entre parenthèses, conformément à l'usage établi par Maxwell [1], et pour représenter sa valeur numérique, nous emploierons cette même initiale sans parenthèses. Ainsi

$$G$$

représentera la valeur numérique de la grandeur

$$|G|.$$

Art. 3. — *Propositions fondamentales.*

La valeur numérique d'une grandeur donnée dépend du choix de la grandeur de même espèce prise pour unité. Par exemple, si une grandeur $|G|$ vaut G fois une certaine unité $|\mathfrak{G}|$, elle vaudra kG fois une unité k fois plus petite que $|\mathfrak{G}|$, et $\frac{G}{k}$ fois une unité k fois plus grande.

---

(1) *Traité d'électricité et de magnétisme. — Préliminaires.*

Donc :

I. *La valeur numérique d'une grandeur déterminée varie en raison inverse de l'unité choisie.*

Soient deux grandeurs de même espèce $|G|$ et $|\mathcal{G}|$ valant respectivement G fois et $\mathcal{G}$ fois l'unité des grandeurs de leur espèce. Cette unité peut être considérée comme la $\mathcal{G}^e$ partie de $|\mathcal{G}|$, et par suite on peut dire que la première grandeur vaut G fois la $\mathcal{G}^e$ partie de la seconde ou $\frac{G}{\mathcal{G}}$ fois la seconde. Donc :

II. *Le rapport g de deux grandeurs de même espèce est égal au rapport de leurs valeurs numériques :*

$$\frac{|G|}{|\mathcal{G}|} = g = \frac{G}{\mathcal{G}}.$$

CHAPITRE II

Tableau des principales grandeurs géométriques et mécaniques qui se rencontrent dans l'étude des phénomènes physiques.

L'étude des phénomènes physiques exige la considération de divers ordres de grandeurs géométriques et mécaniques qu'on peut diviser en trois catégories :

I. — Grandeurs géométriques.

Longueurs.
Surfaces.
Volumes.
Angles (plans ou solides).
Courbures (de lignes ou de surfaces), etc.

II. — Grandeurs cinématiques.

Temps.
Vitesses (linéaires ou angulaires).
Accélérations, etc.

III. — Grandeurs dynamiques.

Forces.
Moments.
Travaux.
Puissances mécaniques.
Intensités de pressions.
Poids spécifiques.
Masses.
Densités.
Moments d'inertie.
Quantités de mouvement.
Forces vives, etc.

Ces différentes grandeurs ne se montrent pas toutes à la fois dans tous les phénomènes. Elles se présentent diversement associées et en plus ou moins grand nombre, suivant la diversité et la complication des phénomènes.

La comparaison de ces grandeurs à des grandeurs respectivement de même espèce, et par conséquent leur mesure, repose sur des définitions et des propositions qu'il est de toute nécessité d'examiner d'abord d'une façon précise.

Cet examen fera l'objet des trois chapitres suivants.

CHAPITRE III

Propositions relatives à la comparaison des principales grandeurs géométriques.

Art. 1. — *Longueurs.*

§ 1. — Lignes droites.

1. *Définition de l'égalité et de l'inégalité de deux lignes droites.* — Considérons une longueur |L| prise sur une ligne droite entre deux points A et B. Soit d'autre part une longueur |$\mathcal{L}$| prise aussi sur une ligne droite entre deux points $\mathcal{A}$

et $\mathcal{B}$. Imaginons qu'on amène l'origine A et la direction AB de $|L|$ à coïncider avec l'origine $\mathcal{A}$ et la direction $\mathcal{AB}$ de $|\mathcal{L}|$. — Trois cas peuvent se présenter : le point B peut se trouver entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, ou en coïncidence avec $\mathcal{B}$, ou au delà de $\mathcal{B}$. La longueur $|L|$ est dite : dans le premier cas *inférieure,* dans le second cas *égale,* dans le troisième cas *supérieure* à la longueur $|\mathcal{L}|$.

2. *Multiples et sous-multiples d'une longueur donnée.* — Une longueur obtenue en plaçant bout à bout suivant la même direction deux longueurs égales à une longueur donnée est dite *double* de la première. En plaçant bout à bout suivant la même direction trois longueurs égales on aura une longueur *triple,* et ainsi de suite. Étant donnée une longueur, on en concevra ainsi aisément un multiple quelconque.

La division d'une longueur en parties égales est l'opération inverse de la précédente. Étant donnée une longueur, on peut en imaginer et construire un sous-multiple quelconque.

3. *Comparaison des longueurs de deux lignes droites.* — Soient $|L|$ et $|\mathcal{L}|$ deux longueurs données. Si $|l|$ est une longueur quelconque, inférieure à la fois à $|L|$ et à $|\mathcal{L}|$, il existe deux multiples de $|l|$ consécutifs :

$$N\,|l|, \qquad (N+1)\,|l|$$

comprenant entre eux la longueur $|L|$ et deux autres :

$$\mathcal{N}\,|l|, \qquad (\mathcal{N}+1)\,|l|,$$

comprenant entre eux la longueur $|\mathcal{L}|$, N et $\mathcal{N}$ désignant les plus grands nombres de fois qu'on peut porter bout à bout la longueur $|l|$ respectivement sur $|L|$ et sur $|\mathcal{L}|$.

Ces multiples sont d'ordre d'autant plus élevé que la longueur $|l|$ est plus petite. Or si l'on suppose que $|l|$ diminue indéfiniment, les rapports

$$\frac{N}{\mathcal{N}+1} \quad \text{et} \quad \frac{N+1}{\mathcal{N}}$$

vont l'un en augmentant, l'autre en diminuant, et tendent vers une limite commune.

Le premier de ces nombres exprime le rapport d'une longueur plus petite que $|L|$ à une longueur plus grande que $|\mathfrak{L}|$; le second est le rapport d'une longueur plus grande que $|L|$ à une longueur plus petite que $|\mathfrak{L}|$. Plus la longueur $|l|$ est petite, plus les longueurs dont les nombres précédents expriment les rapports sont voisines respectivement de $|L|$ et de $|\mathfrak{L}|$. — La limite vers laquelle tendent ces rapports est ce qu'on appelle le rapport des longueurs $|L|$ et $|\mathfrak{L}|$.

On peut toujours en théorie prendre la longueur $|l|$ assez petite pour que les deux rapports

$$\frac{N}{\mathfrak{N}+1} \quad \text{et} \quad \frac{N+1}{\mathfrak{N}}$$

diffèrent entre eux, et par conséquent pour que chacun d'eux diffère de la limite d'une quantité inférieure à tout nombre donné, si petit qu'il soit. Dans la pratique, l'approximation avec laquelle on pourra évaluer le rapport des longueurs de deux lignes droites sera subordonnée au degré de petitesse que la perfection des appareils permettra de donner à $|l|$ (¹).

§ 2. — Lignes courbes.

La longueur d'une ligne courbe étant définie comme la limite d'une somme de longueurs de lignes droites, le rapport des longueurs d'une ligne courbe et d'une ligne droite et plus généralement le rapport des longueurs de deux lignes courbes se ramène à l'évaluation du rapport de deux lignes droites.

(¹) « Les déterminations métrologiques modernes... ont montré qu'il est possible d'atteindre dans la mesure des longueurs, dans de bonnes conditions de poli des surfaces et de tracés, une précision de l'ordre du dixième de micron (*). »
Benoit, *Rapport présenté par le Comité international des poids et mesures*, etc. Paris, Gauthier-Villars, 1889.

(*) Le dixième du micron vaut un dix-millième de millimètre.

Art. 2. — *Surfaces.*

§ 1. — Rectangles.

1. *Définitions.* — Si deux rectangles de même base ont des hauteurs égales, ils peuvent se superposer exactement. Leurs surfaces sont *égales.*

Si deux rectangles de même base ont des hauteurs inégales, celui qui a la hauteur la plus petite ne peut être superposé qu'à une partie de l'autre. Ces deux rectangles ont des surfaces *inégales,* et celui qui a la plus petite hauteur a aussi la surface la plus petite.

Si l'on juxtapose suivant une dimension commune deux rectangles égaux à un rectangle donné, on obtient un rectangle de surface double. En juxtaposant trois rectangles égaux, on obtient un rectangle de surface triple, et ainsi de suite. Étant donné un rectangle quelconque, on peut ainsi en imaginer un multiple quelconque.

2. *Comparaison de deux rectangles ayant une dimension commune.* — Soient deux rectangles $|R|$ et $|\mathcal{R}|$ ayant même base et des hauteurs $|L'|$ et $|\mathcal{L}'|$ différentes. Considérons un rectangle $|r|$ ayant pour base la base des deux précédents et pour hauteur une longueur $|l|$. Si cette dernière est inférieure à la fois à $|L'|$ et à $|\mathcal{L}'|$, il existe deux multiples consécutifs du rectangle $|r|$:

$$N\,|r|, \qquad |N+1|\,|r|$$

comprenant entre eux le rectangle $|R|$, et deux autres :

$$\mathcal{N}\,|r|, \qquad |\mathcal{N}+1|\,|r|$$

comprenant entre eux le rectangle $|\mathcal{R}|$.

Ces multiples sont d'ordre d'autant plus élevé que le rectangle $|r|$ est plus petit. Or, la petitesse de ce rectangle dépend de la petitesse de sa hauteur $|l|$. Si l'on suppose que cette hauteur et par suite le rectangle $|r|$ diminuent indéfiniment, les rapports

$$\frac{N}{\mathcal{N}+1} \quad \text{et} \quad \frac{N+1}{\mathcal{N}}$$

vont l'un en augmentant, l'autre en diminuant, et tendent vers une limite commune.

Le premier de ces nombres exprime le rapport d'un rectangle plus petit que $|R|$ à un rectangle plus grand que $|\mathfrak{R}|$; le second est le rapport d'un rectangle plus grand que $|R|$ à un rectangle plus petit que $|\mathfrak{R}|$. Plus le rectangle $|r|$ est petit, plus les rectangles dont les nombres précédents expriment les rapports sont voisins respectivement de $|R|$ et de $|\mathfrak{R}|$. — La limite vers laquelle tendent ces rapports est le rapport des rectangles $|R|$ et $|\mathfrak{R}|$.

Or, N et n représentant les plus grands nombres de fois que la longueur $|l|$ est contenue respectivement dans les longueurs $|L'|$ et $|\mathfrak{L}'|$, la limite en question est aussi le rapport de $|L'|$ à $|\mathfrak{L}'|$.

Donc : *deux rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

3. *Comparaison de deux rectangles quelconques.* — Soient $|R|$ et $|\mathfrak{R}|$ deux rectangles ayant respectivement pour dimensions les lignes $|L'|$, $|L''|$ d'une part, $|\mathfrak{L}'|$, $|\mathfrak{L}''|$ d'autre part.

Concevons un rectangle $|r_1|$ ayant pour base la base $|L'|$ du premier et pour hauteur une ligne $|l|$, et un rectangle $|r_2|$ ayant pour base la base $|\mathfrak{L}'|$ du second et pour hauteur la même ligne $|l|$ que le précédent. Si cette dernière est inférieure à la fois à $|L''|$ et à $|\mathfrak{L}''|$, il existe deux multiples consécutifs :

$$N\,|r_1|, \qquad (N+1)\,|r_1|$$

du rectangle $|r_1|$ comprenant entre eux le rectangle $|R|$, et deux multiples consécutifs :

$$\mathfrak{N}\,|r_2|, \qquad (\mathfrak{N}+1)\,|r_2|$$

du rectangle $|r_2|$ comprenant entre eux le rectangle $|\mathfrak{R}|$.

Ces multiples sont d'ordre d'autant plus élevé que la longueur $|l|$ est plus petite. Si l'on suppose que cette ligne est prise de plus en plus petite, les rapports

$$\frac{N\,|r_1|}{(\mathfrak{N}+1)\,|r_2|} \quad \text{et} \quad \frac{(N+1)\,|r_1|}{\mathfrak{N}\,|r_2|}$$

vont l'un en augmentant, l'autre en diminuant, et tendent vers une limite commune.

Plus les rectangles $|r_1|$ et $|r_2|$ sont petits, plus les rectangles dont les nombres précédents expriment les rapports sont voisins respectivement de $|R|$ et de $|\mathfrak{R}|$. — La limite vers laquelle tendent ces rapports est le rapport des rectangles $|R|$ et $|\mathfrak{R}|$.

Or, ces rapports sont respectivement égaux à

$$\frac{|r_1|}{|r_2|} \cdot \frac{N}{\mathfrak{N}+1} \quad \text{et} \quad \frac{|r_1|}{|r_2|} \cdot \frac{N+1}{\mathfrak{N}};$$

mais, en vertu du théorème précédent,

$$\frac{|r_1|}{|r_2|} = \frac{|L'|}{|\mathfrak{L}'|}.$$

On a donc

$$\frac{|R|}{|\mathfrak{R}|} = \frac{|L'|}{|\mathfrak{L}'|} \lim. \frac{N}{\mathfrak{N}+1}.$$

Or, N et $\mathfrak{N}$ représentent les plus grands nombres de fois que la longueur $|l|$ est contenue respectivement dans $|L''|$ et $|\mathfrak{L}''|$; il suit de là que

$$\lim \frac{N}{\mathfrak{N}+1} = \frac{|L''|}{|\mathfrak{L}''|}.$$

On a donc finalement

$$\frac{|R|}{|\mathfrak{R}|} = \frac{|L'|}{|\mathfrak{L}'|} \cdot \frac{|L''|}{|\mathfrak{L}''|}.$$

Le rapport de deux rectangles est égal au produit des rapports de leurs deux dimensions.

§ 2. — Surfaces planes quelconques.

Étant donnée une surface plane limitée par une ligne quelconque, on peut toujours définir un rectangle équivalent, les dimensions de ce rectangle étant certains multiples ou sous-multiples de deux dimensions de la figure à laquelle appartient cette surface. La comparaison de deux surfaces planes quelconques se ramène donc à la comparaison de deux rectangles.

Il en est de même des surfaces courbes, car l'aire d'une surface courbe est définie comme la limite de la somme des aires d'une série de surfaces planes.

Il est donc établi d'une manière générale que *la comparaison de deux surfaces est subordonnée à une comparaison de longueurs, savoir : deux longueurs dépendant de la première surface et deux longueurs dépendant de la seconde,* ce que nous exprimerons par la formule :

$$\frac{|S|}{|\mathcal{S}|} = \frac{|L'|}{|\mathcal{L}'|} \cdot \frac{|L''|}{|\mathcal{L}''|}.$$

De là il suit immédiatement que le rapport de deux surfaces semblables est égal au carré du rapport de similitude, et que si toutes les lignes d'une figure varient dans un rapport k, la surface varie dans le rapport k^2.

§ 3. — Exemples.

On apprend en géométrie à trouver dans chaque cas particulier les lignes qu'il convient de considérer pour obtenir le plus simplement possible le rapport de deux surfaces.

Voici quelques exemples les plus simples correspondant à divers cas usuels.

$|\mathcal{S}|$ désignant la surface d'un carré de côté $|\mathcal{L}|$, supposons que $|S|$ désigne successivement la surface :

1° D'un carré de côté $|L|$;

2° D'un rectangle de côtés $|L'|$, $|L''|$;

3° D'un cercle de circonférence $|C|$ et de rayon $|L|$;

4° D'une ellipse de demi-axes $|L'|$, $|L''|$.

On aura :

NATURE de LA SURFACE $\lvert S\rvert$	COMPOSITION du RAPPORT $\frac{\lvert S\rvert}{\lvert\mathcal{S}\rvert}$	VALEUR numérique DU RAPPORT $\frac{\lvert S\rvert}{\lvert\mathcal{S}\rvert}$
1° Carré.	$\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert} \cdot \frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}$	$\frac{L^2}{\mathcal{L}^2}$
2° Rectangle.	$\frac{\lvert L'\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert} \cdot \frac{\lvert L''\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}$	$\frac{L'L''}{\mathcal{L}^2}$
3° Cercle.	$\frac{\lvert \frac{1}{2}C\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert} \cdot \frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}$	$\pi\frac{L^2}{\mathcal{L}^2}$
4° Ellipse.		$\pi\frac{L'L''}{\mathcal{L}^2}$

Si $|\mathcal{S}|$ désignait la surface d'un cercle de rayon $|\mathcal{L}|$, on aurait :

NATURE de LA SURFACE $\lvert S\rvert$	COMPOSITION du RAPPORT $\frac{\lvert S\rvert}{\lvert\mathcal{S}\rvert}$	VALEUR numérique DU RAPPORT $\frac{\lvert S\rvert}{\lvert\mathcal{S}\rvert}$
1° Carré.	$\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\frac{1}{2}\mathcal{C}\rvert}\cdot\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}$	$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{L^2}{\mathcal{L}^2}$
2° Rectangle.	$\frac{\lvert L'\rvert}{\lvert\frac{1}{2}\mathcal{C}\rvert}\cdot\frac{\lvert L''\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}$	$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{L'L''}{\mathcal{L}^2}$
3° Cercle.	$\frac{\lvert C\rvert}{\lvert\mathcal{C}\rvert}\cdot\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}$	$\frac{L^2}{\mathcal{L}^2}$
4° Ellipse.		$\frac{L'L''}{\mathcal{L}^2}$

ART. 3. — *Volumes.*

§ 1. — Parallélipipèdes rectangles.

1. *Définitions.* — Si deux parallélipipèdes rectangles de même base ont des hauteurs égales, ils peuvent se superposer exactement. Leurs volumes sont *égaux*.

Si deux parallélipipèdes rectangles de même base ont des hauteurs inégales, celui qui a la hauteur la plus petite ne peut être superposé qu'à une partie de l'autre. Ces deux parallélipipèdes ont des volumes *inégaux,* et celui qui a la plus petite hauteur a le volume le plus petit.

Si l'on juxtapose suivant une face commune deux parallélipipèdes égaux à un parallélipipède rectangle donné, on obtient un parallélipipède de volume double. En juxtaposant trois parallélipipèdes rectangles égaux, on en obtient un volume triple, et ainsi de suite. — Étant donné un parallélipipède rectangle quelconque, on peut donc en imaginer un multiple quelconque.

2. *Comparaison de deux parallélipipèdes rectangles ayant deux dimensions communes.* — Soient deux parallélipipèdes rectangles $|P_a|$, $|\mathcal{P}_a|$ ayant même base et des hauteurs $|L'|$, $|\mathcal{L}'|$

différentes. — Considérons un parallélipipède rectangle $|p_a|$ ayant pour base la base des deux précédents et pour hauteur une longueur $|l|$. Si cette dernière est inférieure à la fois à $|L'|$ et à $|\mathcal{L}'|$, il existe deux multiples consécutifs du parallélipipède $|p_a|$:

$$N\,|p_a|, \qquad (N+1)\,|p_a|,$$

comprenant entre eux le parallélipipède $|P_a|$, et deux autres :

$$\mathcal{N}\,|p_a|, \qquad (\mathcal{N}+1)\,|p_a|,$$

comprenant entre eux le parallélipipède $|\mathcal{L}_a|$.

Ces multiples sont d'ordre d'autant plus élevé que le parallélipipède $|p_a|$ est plus petit. Or, la petitesse de ce parallélipipède dépend de la petitesse de sa hauteur $|l|$. Si l'on suppose que cette hauteur et par suite le parallélipipède $|p_a|$ diminuent indéfiniment, les rapports

$$\frac{N}{\mathcal{N}+1} \quad \text{et} \quad \frac{N+1}{\mathcal{N}}$$

vont l'un en augmentant, l'autre en diminuant et tendent vers une limite commune.

Le premier de ces nombres exprime le rapport d'un parallélipipède plus petit que $|P_a|$ à un parallélipipède plus grand que $|\mathcal{L}_a|$; le second est le rapport d'un parallélipipède plus grand que $|P_a|$ à un parallélipipède plus petit que $|\mathcal{L}_a|$. Plus le parallélipipède $|p_a|$ est petit, plus les parallélipipèdes dont les nombres précédents expriment les rapports sont voisins respectivement de $|P_a|$ et de $|\mathcal{L}_a|$. La limite vers laquelle tendent ces rapports est le rapport de $|P_a|$ à $|\mathcal{L}_a|$.

Or, N et $\mathcal{N}$ représentant les plus grands nombres de fois que la longueur $|l|$ est contenue dans les longueurs $|L'|$ et $|\mathcal{L}'|$, la limite en question est aussi le rapport de $|L'|$ à $|\mathcal{L}'|$.

Donc : *deux parallélipipèdes rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

3. *Comparaison de deux parallélipipèdes rectangles ayant une seule dimension commune.* — Soient $|P_a|$ et $|\mathcal{L}_a|$ deux

2

parallélipipèdes rectangles ayant une dimension commune, que nous désignerons sous le nom de hauteur, les deux autres étant respectivement $|L'|$, $|L''|$ d'une part, $|\mathfrak{L}'|$, $|\mathfrak{L}''|$ d'autre part.

Concevons deux parallélipipèdes rectangles $|p_{a_1}|$, $|p_{a_2}|$ ayant pour hauteur la hauteur commune des deux parallélipipèdes donnés, et pour bases, l'un un rectangle de dimensions $|L'|$ et $|l|$, l'autre un rectangle de dimensions $|\mathfrak{L}'|$ et $|l|$. Si la ligne $|l|$ est inférieure à la fois à $|L''|$ et à $|\mathfrak{L}''|$, il existe deux multiples consécutifs :

$$N\,|p_{a_1}|, \qquad |N+1|\,|p_{a_1}|$$

du parallélipipède $|p_{a_1}|$, comprenant entre eux le parallélipipède $|P_a|$, et deux multiples consécutifs :

$$\mathfrak{N}\,|p_{a_2}|, \qquad |\mathfrak{N}+1|\,|p_{a_2}|$$

du parallélipipède $|p_{a_2}|$, comprenant entre eux le parallélipipède $|\mathfrak{L}_a|$.

Ces multiples sont d'ordre d'autant plus élevé que la longueur $|l|$ est plus petite. Si l'on suppose que cette ligne est prise de plus en plus petite, les rapports

$$\frac{N\,|p_{a_1}|}{(\mathfrak{N}+1)\,|p_{a_2}|} \quad \text{et} \quad \frac{(N+1)\,|p_{a_1}|}{\mathfrak{N}\,|p_{a_2}|}$$

vont l'un en augmentant, l'autre en diminuant et tendent vers une limite commune.

Plus les parallélipipèdes $|p_{a_1}|$ et $|p_{a_2}|$ sont petits, plus les parallélipipèdes dont les nombres précédents expriment les rapports sont voisins respectivement de $|P_a|$ et de $|\mathfrak{L}_a|$. — La limite vers laquelle tendent ces rapports est le rapport des parallélipipèdes $|P_a|$ et $|\mathfrak{L}_a|$.

Or, ces rapports sont respectivement égaux à

$$\frac{|p_{a_1}|}{|p_{a_2}|}\cdot\frac{N}{\mathfrak{N}+1} \quad \text{et} \quad \frac{|p_{a_1}|}{|p_{a_2}|}\cdot\frac{N+1}{\mathfrak{N}}.$$

Mais, en vertu du théorème précédent,

$$\frac{|p_{a_1}|}{|p_{a_2}|} = \frac{|L'|}{|\mathfrak{L}'|};$$

on a donc

$$\frac{|P_a|}{|\mathfrak{P}_a|} = \frac{|L'|}{|\mathfrak{L}'|} \lim \frac{N}{\mathfrak{N} + 1}.$$

Or N et $\mathfrak{N}$ représentent les plus grands nombres de fois que la longueur $|l|$ est contenue respectivement dans $|L''|$ et $|\mathfrak{L}''|$; il suit de là que

$$\lim. \frac{N}{\mathfrak{N} + 1} = \frac{|L''|}{|\mathfrak{L}''|}.$$

On a donc finalement

$$\frac{|P_a|}{|\mathfrak{P}_a|} = \frac{|L'|}{|\mathfrak{L}'|} \cdot \frac{|L''|}{|\mathfrak{L}''|}.$$

Le rapport de deux parallélipipèdes rectangles ayant une dimension commune est égal au produit des rapports des deux autres dimensions.

4. *Comparaison de deux parallélipipèdes rectangles quelconques.* — Soient $|P_a|$ et $|\mathfrak{P}_a|$ deux parallélipipèdes rectangles ayant respectivement pour dimensions les lignes $|L'|$, $|L''|$, $|L'''|$ d'une part, $|\mathfrak{L}'|$, $|\mathfrak{L}''|$, $|\mathfrak{L}'''|$ d'autre part.

Concevons deux parallélipipèdes rectangles $|p_{a_1}|$, $|p_{a_2}|$ ayant pour hauteur une ligne $|l|$ et pour bases l'un la base de $|P_a|$, l'autre la base de $|\mathfrak{P}_a|$, dont les dimensions sont respectivement $|L'|$, $|L''|$ et $|\mathfrak{L}'|$, $|\mathfrak{L}''|$. Si la ligne $|l|$ est inférieure à la fois à $|L'''|$ et à $|\mathfrak{L}'''|$, il existe deux multiples consécutifs :

$$N\,|p_{a_1}|, \qquad (N+1)\,|p_{a_1}|$$

du parallélipipède $|p_{a_1}|$ comprenant entre eux le parallélipipède $|P_a|$ et deux multiples consécutifs :

$$\mathfrak{N}\,|p_{a_2}|, \qquad (\mathfrak{N}+1)\,|p_{a_2}|$$

du parallélipipède $|p_{a_2}|$ comprenant entre eux le parallélipipède $|\mathfrak{P}_a|$.

Ces multiples sont d'ordre d'autant plus élevé que la longueur $|l|$ est plus petite. Si l'on suppose que cette ligne est prise de plus en plus petite, les rapports :

$$\frac{N\,|p_{\alpha_1}|}{(\mathfrak{N}+1)\,|p_{\alpha_2}|} \quad \text{et} \quad \frac{(N+1)\,|p_{\alpha_1}|}{\mathfrak{N}\,|p_{\alpha_2}|}$$

vont l'un en augmentant, l'autre en diminuant et tendent vers une limite commune.

Plus les parallélipipèdes $|p_{\alpha_1}|$ et $|p_{\alpha_2}|$ sont petits, plus les parallélipipèdes dont les nombres précédents expriment les rapports sont voisins respectivement de $|P_a|$ et de $|\mathfrak{P}_a|$. La limite vers laquelle tendent ces rapports est le rapport des parallélipipèdes $|P_a|$ et $|\mathfrak{P}_a|$.

Or ces rapports sont respectivement égaux à

$$\frac{|p_{\alpha_1}|}{|p_{\alpha_2}|}\cdot\frac{N}{\mathfrak{N}+1} \quad \text{et} \quad \frac{|p_{\alpha_1}|}{|p_{\alpha_2}|}\cdot\frac{N+1}{\mathfrak{N}}.$$

Mais, en vertu du théorème précédent,

$$\frac{|p_{\alpha_1}|}{|p_{\alpha_2}|}=\frac{|L'|}{|\mathfrak{L}'|}\cdot\frac{|L''|}{|\mathfrak{L}''|};$$

on a donc

$$\frac{|P_a|}{|\mathfrak{P}_a|}=\frac{|L'|}{|\mathfrak{L}'|}\cdot\frac{|L''|}{|\mathfrak{L}''|}\lim\frac{N}{\mathfrak{N}+1}.$$

Or N et $\mathfrak{N}$ représentent les plus grands nombres de fois que la longueur $|l|$ est contenue respectivement dans $|L'''|$ et $|\mathfrak{L}'''|$; il suit de là que

$$\lim\frac{N}{\mathfrak{N}+1}=\frac{|L'''|}{|\mathfrak{L}'''|}.$$

On a donc finalement

$$\frac{|P_a|}{|\mathfrak{P}_a|}=\frac{|L'|}{|\mathfrak{L}'|}\cdot\frac{|L''|}{|\mathfrak{L}''|}\cdot\frac{|L'''|}{|\mathfrak{L}'''|}.$$

Le rapport de deux parallélipipèdes rectangles quelconques est égal au produit des rapports de leurs trois dimensions.

§ 2. — Volumes quelconques.

Étant donné un volume limité par une figure quelconque, on peut toujours définir un parallélipipède équivalent, les dimensions de ce parallélipipède étant certains multiples ou sous-multiples de trois dimensions de cette figure. La comparaison de deux volumes quelconques se ramène par suite à la comparaison de deux parallélipipèdes.

Il est donc établi d'une manière générale que *la comparaison de deux volumes est subordonnée à une comparaison de longueurs, savoir : trois longueurs dépendant du premier volume et trois longueurs dépendant du second,* ce qu'on peut exprimer par la formule

$$\frac{|V_0|}{|\mathfrak{V}_0|} = \frac{|L'|}{|\mathfrak{L}'|} \cdot \frac{|L''|}{|\mathfrak{L}''|} \cdot \frac{|L'''|}{|\mathfrak{L}'''|}.$$

Il est évident d'après cela que le rapport des volumes de deux figures solides semblables est égal au cube du rapport de similitude, et que si toutes les lignes d'une figure solide varient dans un rapport k, le volume varie dans le rapport k^3.

§ 3. — Exemples.

$|\mathfrak{V}_0|$ désignant le volume d'un cube de côté $|\mathfrak{L}|$, supposons que $|V_0|$ désigne successivement le volume :

1° D'un cube de côté $|L|$;

2° D'un parallélipipède rectangle de côtés $|L'|$, $|L''|$, $|L'''|$;

3° D'une sphère de rayon $|L|$;

4° D'un ellipsoïde de rayons principaux $|L'|$, $|L''|$, $|L'''|$.

On aura :

NATURE du VOLUME $\lvert V_0 \rvert$	COMPOSITION du RAPPORT $\frac{\lvert V_0\rvert}{\lvert\mathfrak{V}_0\rvert}$	VALEUR numérique DU RAPPORT $\frac{\lvert V_0\rvert}{\lvert\mathfrak{V}_0\rvert}$
1° Cube.	$\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert}\cdot\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert}\cdot\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert}$	$\frac{L^3}{\mathfrak{L}^3}$
2° Parallélipipède.	$\frac{\lvert L'\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert}\cdot\frac{\lvert L''\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert}\cdot\frac{\lvert L'''\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert}$	$\frac{L' L'' L'''}{\mathfrak{L}^3}$
3° Sphère.	$\frac{4}{3}\pi\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert}\cdot\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert}\cdot\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert}$	$\frac{4}{3}\pi\frac{L^3}{\mathfrak{L}^3}$
4° Ellipsoïde.	$\frac{4}{3}\pi\frac{\lvert L'\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert}\cdot\frac{\lvert L''\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert}\cdot\frac{\lvert L'''\rvert}{\lvert\mathfrak{L}\rvert}$	$\frac{4}{3}\pi\frac{L' L'' L'''}{L^3}$

Si $|\mathcal{V}_0|$ désignait le volume d'une sphère de rayon $|\mathcal{L}|$, on aurait :

NATURE du VOLUME $\|V_0\|$	COMPOSITION du RAPPORT $\frac{\|V_0\|}{\|\mathcal{V}_0\|}$	VALEUR numérique DU RAPPORT $\frac{\|V_0\|}{\|\mathcal{V}_0\|}$
1° Cube.	$\frac{3}{4\pi}\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}\cdot\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}\cdot\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}$	$\frac{3}{4\pi}\frac{L^3}{\mathcal{L}^3}$
2° Parallélipipède.	$\frac{3}{4\pi}\frac{\|L'\|}{\|\mathcal{L}\|}\cdot\frac{\|L''\|}{\|\mathcal{L}\|}\cdot\frac{\|L'''\|}{\|\mathcal{L}\|}$	$\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{L'L''L'''}{\mathcal{L}^3}$
3° Sphère.	$\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}\cdot\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}\cdot\frac{\|L\|}{\|\mathcal{L}\|}$	$\frac{L^3}{\mathcal{L}^3}$
4° Ellipsoïde.	$\frac{\|L'\|}{\|\mathcal{L}\|}\cdot\frac{\|L''\|}{\|\mathcal{L}\|}\cdot\frac{\|L'''\|}{\|\mathcal{L}\|}$	$\frac{L'.L''.L'''}{\mathcal{L}^3}$

ART. 4. — *Angles plans.*

1. *Définition de l'égalité et de l'inégalité de deux angles* — Soient $|O|$ et $|\mathcal{O}|$ deux angles donnés AOB et $\mathcal{A}\mathcal{O}\mathcal{B}$. Imaginons qu'on amène le sommet et le sens du premier à coïncider avec le sommet et le sens du second. — Trois cas peuvent se présenter : le côté OB peut se trouver entre $\mathcal{O}\mathcal{A}$ et $\mathcal{O}\mathcal{B}$, ou en coïncidence avec $\mathcal{O}\mathcal{B}$ ou au delà de $\mathcal{O}\mathcal{B}$. L'angle AOB est dit : dans le premier cas *inférieur,* dans le second cas *égal,* dans le troisième cas *supérieur* à l'angle $\mathcal{A}\mathcal{O}\mathcal{B}$.

2. *Multiples et sous-multiples d'un angle donné.* — Un angle obtenu en rendant adjacents deux angles égaux à un angle donné est un angle *double* du premier. Un groupe de trois angles contigus égaux à un angle donné constitue un angle *triple* et ainsi de suite. Étant donné un angle quelconque on en concevra ainsi aisément un multiple quelconque.

3. *Comparaison de deux angles quelconques.* — Soient $|O|$ un premier angle interceptant un arc $|\mathbf{a}|$ dans un cercle de rayon $|L|$ ayant son centre au sommet, et $|\mathcal{O}|$ un deuxième angle interceptant un arc $|\mathcal{A}|$ dans un cercle de rayon $|\mathcal{L}|$ ayant son centre au sommet.

Considérons un angle $|o|$ inférieur à la fois à $|\mathrm{O}|$ et à $|\mathcal{O}|$. Il existe deux multiples consécutifs :

$$\mathrm{N}\,|o|, \qquad (\mathrm{N}+1)\,|o|$$

de cet angle, comprenant entre eux l'angle $|\mathrm{O}|$, et deux autres :

$$\mathcal{N}\,|o|, \qquad (\mathcal{N}+1)\,|o|$$

comprenant entre eux l'angle $|\mathcal{O}|$.

Plus l'angle $|o|$ est petit, plus les nombres

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathcal{N}+1} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{N}+1}{\mathcal{N}}$$

sont voisins l'un de l'autre. Ils ont une limite commune qu'on appelle le rapport de l'angle $|\mathrm{O}|$ à l'angle $|\mathcal{O}|$.

Pour trouver cette limite, désignons par $|\mathrm{a}|$ l'arc correspondant à l'angle $|o|$ dans le cercle de rayon $|\mathrm{L}|$ et par $|a|$ l'arc correspondant à ce même angle dans le cercle de rayon $|\mathcal{L}|$. Quelle que soit la grandeur de l'angle $|o|$, le rapport $\frac{|\mathrm{a}|}{|a|}$ a la valeur $\frac{|\mathrm{L}|}{|\mathcal{L}|}$.

Les arcs $|\mathbf{a}|$ et $|\mathcal{A}|$ sont respectivement compris entre les multiples

$$\mathrm{N}\,|\mathrm{a}|, \qquad (\mathrm{N}+1)\,|\mathrm{a}| \qquad \text{de} \qquad |\mathrm{a}|$$

et

$$\mathcal{N}\,|a|, \qquad (\mathcal{N}+1)\,|a| \qquad \text{de} \qquad |a|.$$

Les rapports

$$\frac{\mathrm{N}\,|\mathrm{a}|}{(\mathcal{N}+1)\,|a|} \quad \text{et} \quad \frac{(\mathrm{N}+1)\,|\mathrm{a}|}{\mathcal{N}\,|a|},$$

équivalents respectivement à

$$\frac{|\mathrm{L}|}{|\mathcal{L}|}\cdot\frac{\mathrm{N}}{(\mathcal{N}+1)} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{L}}{\mathcal{L}}\cdot\frac{(\mathrm{N}+1)}{\mathcal{N}},$$

ont, lorsque $|o|$ diminue indéfiniment, une commune limite représentant le rapport

$$\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathcal{A}|}.$$

On a donc

$$\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|} \lim. \frac{N}{\mathfrak{N}+1} = \frac{|a|}{|\mathfrak{a}|};$$

d'où

$$\lim \frac{N}{\mathfrak{N}+1} = \frac{|0|}{|\mathcal{O}|} = \frac{|a|}{|\mathfrak{a}|} \frac{|\mathfrak{L}|}{|L|} = \frac{|a|}{|\mathfrak{a}|} \left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^{-1}.$$

La comparaison de deux angles est donc subordonnée à une comparaison de longueurs, savoir : d'une part, les arcs correspondant à ces angles sur des circonférences décrites des sommets, et, d'autre part, les rayons de ces circonférences.

Le calcul de la valeur numérique du rapport de deux angles, à l'aide des valeurs numériques de ces arcs et de ces rayons, se fera suivant la formule

$$\frac{|0|}{|\mathcal{O}|} = \frac{a}{\mathfrak{a}} \cdot \frac{\mathfrak{L}}{L} = \frac{\frac{a}{L}}{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{L}}}.$$

ART. 5. — *Angles solides.*

Par un raisonnement analogue au précédent et où, au lieu d'angles plans il s'agit d'angles solides, on établirait que :

La comparaison de deux angles solides est subordonnée à une comparaison de surfaces, savoir : d'une part, les surfaces interceptées par ces angles sur des sphères ayant leurs centres au sommet et, d'autre part, les carrés ayant pour côtés les rayons de ces sphères.

En désignant par $|\Omega|$ un angle solide découpant une surface $|S|$ sur une sphère de rayon $|L|$ ayant son centre au sommet, par $|\mathit{\Omega}|$ un autre angle solide découpant une surface $|\mathcal{S}|$ sur une sphère de rayon $|\mathfrak{L}|$ ayant son centre au sommet, on aura, d'après cela,

$$\frac{|\Omega|}{|\mathit{\Omega}|} = \left(\frac{|S|}{|\mathcal{S}|}\right) \left(\frac{|\mathfrak{L}|}{|L|}\right)^2 = \left(\frac{|S|}{|\mathcal{S}|}\right) \left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^{-2}.$$

Le calcul de la valeur numérique du rapport de deux angles solides, à l'aide des valeurs numériques de ces surfaces et des rayons des sphères, se fera suivant la formule

$$\frac{|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{S}{\mathcal{S}} \cdot \frac{\mathcal{L}^2}{L^2} = \frac{\frac{S}{L^2}}{\frac{\mathcal{S}}{\mathcal{L}^2}}.$$

ART. 6. — *Courbure des lignes.*

La circonférence d'un cercle est une courbe telle que la tangente en un point tourne d'angles égaux quand ce point parcourt sur la courbe des arcs égaux quelconques. En raison de cette propriété, on dit que la circonférence est une courbe présentant une *flexion* ou une *courbure* uniforme.

Sur des circonférences de rayons différents, à des arcs de longueurs égales correspondent des angles inégaux et inversement à des angles égaux correspondent des arcs de longueurs inégales. Des circonférences de rayons différents ont par suite des courbures inégales.

La courbure d'une circonférence est d'autant plus grande que l'angle de deux tangentes est plus grand pour une moindre distance des points de contact.

Le rapport des courbures de deux circonférences est le rapport des deux angles correspondant sur ces circonférences à des arcs égaux.

Soient $|0|$ l'angle de deux tangentes et $|\mathbf{a}|$ l'arc correspondant dans une circonférence de rayon $|L|$. Soient, d'autre part, $|\mathcal{O}|$ l'angle de deux tangentes et $|\mathcal{A}|$ l'arc correspondant dans une circonférence de rayon $|\mathcal{L}|$. Le rapport des courbures de ces deux circonférences est, par définition,

$$\frac{|C_0|}{|\mathcal{C}_0|} = \left(\frac{|0|}{|\mathcal{O}|}\right)\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathbf{a}}\right).$$

Si l'on tient compte de la formule

$$\frac{|0|}{|\mathcal{O}|} = \left(\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathcal{A}|}\right)\left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^{-1},$$

on obtient

$$\frac{|C_0|}{|\mathcal{C}_0|} = \frac{|\mathcal{L}|}{|L|}.$$

Donc : *le rapport des courbures de deux circonférences est égal à l'inverse du rapport de leurs rayons.*

La valeur numérique de ce rapport se calculera à l'aide des valeurs numériques des rayons suivant la formule

$$\frac{|C_0|}{|\mathcal{C}_0|} = \frac{\mathcal{L}}{L} = \frac{\frac{1}{L}}{\frac{1}{\mathcal{L}}}.$$

La courbure d'une courbe quelconque en un point étant définie comme celle du cercle osculateur en ce point, la comparaison des courbures de deux courbes quelconques se ramène à la comparaison des courbures de deux circonférences

---

CHAPITRE IV

Propositions relatives à la comparaison des principales grandeurs cinématiques.

Art. 1. — *Temps.*

Pour qu'un phénomène se produise, il faut le concours de certaines circonstances qui en sont les conditions nécessaires et suffisantes. Si après s'être présentées une première fois les circonstances déterminantes d'un phénomène se présentaient une seconde fois identiques à elles-mêmes, elles donneraient lieu à un second phénomène identique au premier à tous les points de vue. En particulier les deux phénomènes auraient la même durée, et si le second succédait au premier sans interruption, la durée de leur ensemble serait double de celle du premier. On concevrait de même une durée triple, quadruple, multiple quelconque de la première.

Comme exemples de séries d'événements pratiquement identiques servant à établir des divisions dans le temps, on peut citer : la série des révolutions de la terre sur elle-même, la série des vibrations d'un diapason, etc.

Un intervalle de temps présentant ainsi tous les caractères d'une quantité, le rapport de deux intervalles de temps quelconques se définit par des considérations tout à fait analogues à celles qui nous ont permis de définir le rapport de deux longueurs.

Art. 2. — *Vitesses.*

L'idée de vitesse est suggérée par la considération d'un mouvement rectiligne uniforme. — La *vitesse* est la qualité qui distingue un mouvement uniforme d'un autre mouvement uniforme.

Pour comparer deux mouvements uniformes il ne suffit pas de comparer les espaces parcourus par les mobiles qui en sont animés, il faut aussi avoir égard aux temps correspondants. Les vitesses de ces mouvements sont, par définition, en raison directe des espaces parcourus et en raison inverse des temps correspondants.

Soit $|V_i|$ la vitesse d'un mobile parcourant d'un mouvement uniforme une longueur $|L|$ en un temps $|T|$. Soit, d'autre part, $|\mathfrak{V}_i|$ la vitesse d'un mobile parcourant, également d'un mouvement uniforme, une longueur $|\mathfrak{L}|$ en un temps $|\mathfrak{T}|$. Le rapport de ces deux vitesses est, en vertu de la définition précédente,

$$\frac{|V_i|}{|\mathfrak{V}_i|} = \left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)\left(\frac{|\mathfrak{T}|}{|T|}\right) = \left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)\left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{-1}.$$

Le calcul de la valeur numérique de ce rapport à l'aide des valeurs numériques des longueurs et des temps considérés se fera suivant la formule :

$$\frac{|V_i|}{|\mathfrak{V}_i|} = \frac{L}{\mathfrak{L}} \cdot \frac{\mathfrak{T}}{T} = \frac{LT^{-1}}{\mathfrak{L}\mathfrak{T}^{-1}} = \frac{\frac{L}{T}}{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{T}}}.$$

Dans un mouvement varié on appelle vitesse à un instant donné la vitesse moyenne avec laquelle le mobile parcourt un élément infiniment petit de sa trajectoire à partir de cet instant.

Soient $|dL|$ l'élément de trajectoire et $|dT|$ le temps employé à le parcourir, on a, d'après cette définition, pour la valeur numérique du rapport de cette vitesse à la vitesse $|\mathfrak{V}_i|$ d'un mouvement uniforme l'expression :

$$\frac{|V_i|}{|\mathfrak{V}_i|} = \frac{\frac{dL}{dT}}{\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{T}}}.$$

Art. 3. — *Vitesses angulaires.*

Supposons que dans le plan d'un angle l'un des côtés tourne autour du sommet d'un mouvement continu : on dit que ce côté est animé d'un *mouvement angulaire.*

Si l'angle compris entre le côté fixe et le côté mobile varie de quantités égales dans des temps égaux quelconques, on dit que le mouvement angulaire est *uniforme.*

La *vitesse angulaire* est la qualité qui distingue un mouvement angulaire uniforme d'un autre mouvement angulaire uniforme.

Pour comparer deux semblables mouvements, il ne suffit pas de comparer les angles décrits par les côtés mobiles, il faut aussi avoir égard aux temps correspondants.

Le rapport de deux vitesses angulaires est en raison directe des angles parcourus et en raison inverse des temps correspondants.

Soit $|V_a|$ la vitesse angulaire d'une droite décrivant d'un mouvement uniforme un angle $|O|$ en un temps $|T|$. Soit, d'autre part, $|\mathfrak{V}_a|$ la vitesse angulaire d'une droite décrivant d'un mouvement uniforme un angle $|\Theta|$ en un temps $|\mathfrak{T}|$. Le rapport des vitesses angulaires de ces deux mouvements est, d'après la définition précédente,

$$\frac{|V_a|}{|\mathfrak{V}_a|} = \left(\frac{|O|}{|\Theta|}\right)\left(\frac{|\mathfrak{T}|}{|T|}\right) = \left(\frac{|O|}{|\Theta|}\right)\left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{-1}.$$

Le calcul de sa valeur numérique à l'aide des valeurs numériques O, T, Θ, $\mathfrak{T}$, peut se représenter par les formules

$$\frac{|V_a|}{|\mathfrak{V}_a|} = \frac{O}{\Theta}\cdot\frac{\mathfrak{T}}{T} = \frac{OT^{-1}}{\Theta\mathfrak{T}^{-1}} = \frac{\frac{O}{T}}{\frac{\Theta}{\mathfrak{T}}}.$$

Dans un mouvement angulaire varié on appelle vitesse angulaire à un instant donné la vitesse angulaire moyenne avec laquelle la droite mobile décrit un angle infiniment petit à partir de cet instant. Soient $d(O)$ un élément d'angle et $d(T)$ le temps employé à le parcourir, on a, d'après cette définition, pour la valeur numérique du rapport de cette vitesse angulaire à la vitesse $|\mathfrak{V}_a|$ d'un mouvement angulaire uniforme l'expression :

$$\frac{|V_a|}{|\mathfrak{V}_a|} = \frac{\frac{dO}{dT}}{\frac{\Theta}{\mathfrak{T}}}.$$

De pareilles considérations sont applicables au mouvement d'un plan autour d'un axe constitué par une de ses droites.

Art. 4. — *Accélérations.*

Un mouvement rectiligne dans lequel la vitesse varie de quantités égales dans des temps égaux est le plus simple des mouvements non uniformes.

Un pareil mouvement, auquel on donne le nom de mouvement *uniformément varié,* se distingue d'un autre de même nature par ce qu'on pourrait appeler le « taux » de la variation de vitesse, c'est-à-dire par la valeur de la variation de la vitesse pendant un temps donné. — On donne à cette grandeur le nom d'*accélération*.

Les accélérations de deux mouvements uniformément variés sont donc en raison directe des variations de vitesse et en raison inverse des temps correspondants.

Soit $|A|$ l'accélération d'un mobile animé d'un mouvement uniformément varié dont la vitesse varie de $|\Delta V_i|$ en un temps $|T|$. Soit, d'autre part, $|\mathcal{A}|$ l'accélération d'un autre mobile animé d'un mouvement de même nature dont la vitesse varie de $|\Delta \mathfrak{V}_i|$ en un temps $|\mathfrak{T}|$. Le rapport des deux accélérations est, par définition,

$$\frac{|A|}{|\mathcal{A}|} = \frac{|\Delta V_i|}{|\Delta \mathfrak{V}_i|} \cdot \frac{|\mathfrak{T}|}{|T|} = \frac{|\Delta V_i|}{|\Delta \mathfrak{V}_i|} \cdot \left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{-1}.$$

Le calcul de la valeur numérique de ce rapport à l'aide des valeurs numériques ΔV, T, $\Delta \mathfrak{V}$, $\mathfrak{T}$ se fera suivant la formule

$$\frac{|A|}{|\mathcal{A}|} = \frac{\Delta V_i}{\Delta \mathfrak{V}_i} \cdot \frac{\mathfrak{T}}{T} = \frac{\dfrac{\Delta V_i}{T}}{\dfrac{\Delta \mathfrak{V}_i}{\mathfrak{T}}}.$$

Dans un mouvement varié quelconque, on appelle accélération à un instant donné l'accélération moyenne que possède le mobile pendant qu'il décrit un élément infiniment petit de sa trajectoire à partir de cet instant.

Soit $|dV_i|$ la variation de la vitesse pendant le temps $|dT|$ qui suit l'instant considéré; on aura, d'après la définition précédente, pour la valeur numérique du rapport de l'accélération du mobile considéré à l'accélération $|\mathcal{A}|$ relative à un mouvement uniformément accéléré servant de terme de comparaison, l'expression :

$$\frac{|A|}{|\mathcal{A}|} = \frac{\dfrac{dV_i}{dT}}{\dfrac{\Delta \mathfrak{V}_i}{\mathfrak{T}}}.$$

La variation de la vitesse d'un mobile ou la différence $V_i'—V_i$ des vitesses du mobile à deux instants est une vitesse, si l'on considère le mouvement du mobile relativement à un système animé de la vitesse V_i, de sorte que le rapport de deux variations de vitesses doit être considéré comme un rapport de vitesses. Il résulte donc de ce qui précède que *la comparaison de deux accélérations est subordonnée à une comparaison de vitesses et à une comparaison de temps :*

$$\frac{|A|}{|\mathcal{A}|} = \frac{|V_i|}{|\mathfrak{V}_i|}\left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{-1};$$

mais, eu égard au résultat trouvé pour la comparaison de deux vitesses :

$$\frac{|V_i|}{|\mathfrak{V}_i|} = \frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{-1},$$

elle est, en dernière analyse, subordonnée à une comparaison de longueurs et à une comparaison de temps:

$$\frac{|A|}{|\mathcal{A}|} = \frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{-2}.$$

CHAPITRE V

Propositions relatives à la comparaison des principales grandeurs dynamiques.

Art. 1. — *Forces.*

Si deux forces sollicitant un même point, d'ailleurs soustrait à toute autre influence, suivant les deux directions opposées d'une même droite, laissent ce point en repos, on dit qu'elles sont *égales.*

Si une force $|F|$ appliquée à un point entièrement libre d'obéir à son action produit le même effet que n forces égales à une force $|\mathfrak{F}|$ qui solliciteraient en commun ce point dans la même direction, ou bien si une force $|F|$ est tenue en équilibre par n forces égales à $|\mathfrak{F}|$ agissant en même temps dans une direction opposée, elle est dite n fois plus grande que $|\mathfrak{F}|$.

En raisonnant sur les intensités de deux forces comme nous l'avons fait sur les longueurs de deux lignes, on définit ce qu'on doit entendre dans le sens le plus général par *rapport* de deux forces.

Art. 2. — *Moments.*

On nomme *couple* l'ensemble de deux forces égales, parallèles et contraires, mais non appliquées au même point.

Il est impossible de trouver une force unique produisant sur un corps le même effet qu'un couple. Un couple n'est donc pas comparable à une force, et ne peut être comparé qu'à un couple.

Un couple peut être équilibré par un autre couple.

Deux couples de sens contraires dont les plans sont parallèles se font équilibre si le rapport de leurs forces est égal à l'inverse du rapport de leurs bras de leviers. On dit que ces deux couples ont des *moments* égaux.

Si le rapport des forces de deux couples est égal à n fois le rapport inverse des bras de leviers, il faut n couples équivalents au second pour équilibrer le premier. On dit que le moment du premier couple vaut n fois le moment du second.

D'une manière générale, le rapport des moments de deux couples est égal au produit du rapport des forces par le rapport des bras de leviers.

Soient $|M_o|$ et $|\mathfrak{M}_o|$ les moments de deux couples dont les forces et les bras de leviers sont respectivement $|F|$, $|L|$, $|\mathfrak{F}|$, $|\mathfrak{L}|$. On a, par définition,

$$\frac{|M_0|}{|\mathfrak{M}_0|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|} \cdot \frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}.$$

La valeur numérique de ce rapport se calculera à l'aide des valeurs numériques des forces et des bras de leviers suivant la formule

$$\frac{|M_0|}{|\mathcal{M}_0|} = \frac{FL}{\mathcal{F}\mathcal{L}}.$$

Art. 3. — *Travaux.*

Soit une force $|\mathcal{F}|$ constante en grandeur et en direction déplaçant son point d'application d'une longueur $|\mathcal{L}|$ dans sa propre direction, on dit que cette force effectue un *travail.*

La grandeur de ce travail est définie comme proportionnelle à la fois à l'intensité de la force et à la longueur du déplacement.

Si le point d'application parcourt une ligne droite dont la direction est différente de celle de la force, on appelle travail de cette force le travail de sa composante suivant la direction du déplacement.

Si le point d'application décrit une trajectoire quelconque, on nomme *travail élémentaire* de la force le travail correspondant au déplacement du point sur un élément de la trajectoire, et *travail total* correspondant à un parcours donné du point d'application la somme des travaux élémentaires relatifs aux différents éléments de ce parcours.

Le travail d'une force placée dans les conditions simples où nous avons supposé la force $|\mathcal{F}|$ est pris comme terme de comparaison pour l'évaluation des travaux des forces dans tous les cas possibles.

La comparaison des travaux de deux forces est, de même que la comparaison de deux moments, subordonnée à une comparaison de forces et à une comparaison de longueurs.

Ainsi, soit $|\Delta L|$ le déplacement d'un point d'application; soit $|F|$ la projection de la force suivant ce déplacement; le rapport du travail $|\Delta W|$ de cette force au travail $|\mathcal{W}|$ de la force $|\mathcal{F}|$ considérée tout à l'heure sera donné par l'expression :

$$\frac{|\Delta W|}{|\mathcal{W}|} = \frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\frac{|\Delta L|}{|\mathcal{L}|}.$$

La valeur numérique de ce rapport se calculera, à l'aide des valeurs numériques des forces et des déplacements, suivant la formule

$$\frac{|\Delta W|}{|\mathfrak{W}|} = \frac{F.\Delta L}{\mathfrak{F}.\mathfrak{L}}.$$

Art. 4. — *Puissances mécaniques.*

Pour juger de ce qu'on appelle la *puissance* d'un moteur, il faut avoir égard non seulement au travail produit, mais encore au temps employé à le produire. Un moteur est regardé comme d'autant plus puissant qu'il produit plus de travail en moins de temps.

Le rapport des puissances mécaniques de deux moteurs est, par définition, en raison directe du rapport des travaux produits et en raison inverse des temps correspondants.

Ainsi soit $|P_m|$ la puissance d'un moteur qui produit un travail $|W|$ en un temps $|T|$. Soit, d'autre part, $|\mathfrak{P}_m|$ la puissance d'un autre moteur qui produit un travail $|\mathfrak{W}|$ en un temps $|\mathfrak{T}|$. Le rapport de ces deux puissances sera donné par l'expression :

$$\frac{|P_m|}{|\mathfrak{P}_m|} = \frac{|W|}{|\mathfrak{W}|}\frac{|\mathfrak{T}|}{|T|} = \frac{|W|}{|\mathfrak{W}|}\left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{-1}.$$

Mais

$$\frac{|W|}{|\mathfrak{W}|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\cdot\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|};$$

donc

$$\frac{|P_m|}{|\mathfrak{P}_m|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\cdot\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{-1}.$$

La comparaison de deux puissances mécaniques est subordonnée à la comparaison de deux travaux et de deux temps, et, en dernière analyse, à des comparaisons de forces, de longueurs et de temps.

Art. 5. — *Intensités de pressions.*

Une surface plane est dite uniformément pressée lorsque les pressions agissant sur des parties égales quelconques de cette surface sont égales.

L'état d'une surface uniformément pressée diffère de celui d'une autre surface uniformément pressée par ce qu'on nomme l'*intensité de la pression* ou, d'une manière abrégée, la *pression.*

Le rapport des *pressions* de deux surfaces uniformément pressées est égal au rapport des forces qui s'exercent normalement sur des aires égales appartenant à ces deux surfaces.

Soient $|F|$ et $|\mathcal{F}|$ les forces s'exerçant respectivement sur des aires $|S|$ et $|\mathcal{S}|$ de deux surfaces. Le rapport des pressions $|P|$ et $|\mathfrak{P}|$ auxquelles sont soumises ces surfaces est, en vertu de la définition précédente, donné par l'expression :

$$\frac{|P|}{|\mathfrak{P}|} = \frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\frac{|\mathcal{S}|}{|S|} = \frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\left(\frac{|S|}{|\mathcal{S}|}\right)^{-1}.$$

Mais on a

$$\frac{|S|}{|\mathcal{S}|} = \left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^{2}.$$

Donc

$$\frac{|P|}{|\mathfrak{P}|} = \frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^{-2}.$$

La comparaison de deux pressions est subordonnée à une comparaison de forces et à une comparaison de surfaces, ou, en dernière analyse, à une comparaison de forces et à une comparaison de longueurs.

Si une surface n'est pas uniformément pressée, on appelle *pression en un point* la pression moyenne à laquelle est soumis un élément de surface comprenant ce point. — Soit $|dF|$ la force agissant sur cet élément de surface $|dS|$; la valeur numérique du rapport de la pression $|P|$ au point considéré à la pression $|\mathfrak{P}|$ servant de terme de comparaison sera donnée par la formule

$$\frac{|P|}{|\mathfrak{P}|} = \frac{\frac{dF}{dS}}{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{S}}}.$$

ART. 6. — *Poids spécifiques.*

Dans un corps homogène, les poids de parties quelconques d'égal volume sont égaux.

Pour trouver dans l'action de la pesanteur sur un corps homogène une donnée spécifique, c'est-à-dire caractéristique de ce corps, il faut avoir égard non seulement au poids de ce corps, mais encore à son volume.

On dit qu'un corps a un *poids spécifique* d'autant plus considérable qu'il a eu un plus grand poids sous un plus petit volume. La grandeur de ce poids spécifique est définie comme proportionnelle au poids du corps et en raison inverse du volume correspondant.

Le rapport des poids spécifiques de deux corps homogènes est donc en raison directe du rapport des poids de ces corps et en raison inverse du rapport de leurs volumes.

Soient $|F|$ et $|\mathcal{F}|$ les poids de deux corps homogènes dont les volumes sont respectivement $|V_o|$ et $|\mathfrak{V}_o|$. Le rapport des poids spécifiques de ces deux corps sera donné par l'expression :

$$\frac{|P_s|}{|\mathfrak{L}_s|} = \frac{|F|}{|\mathcal{F}|} \cdot \frac{|\mathfrak{V}_o|}{|V_o|} = \frac{|F|}{|\mathcal{F}|} \left(\frac{|V_o|}{|\mathfrak{V}_o|}\right)^{-1}.$$

Or, soient $|L|$ et $|\mathfrak{L}|$ les côtés des cubes équivalents à $|V_o|$ et à $|\mathfrak{V}_o|$; on a

$$\frac{|V_o|}{|\mathfrak{V}_o|} = \left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^3 ;$$

donc

$$\frac{|P_s|}{|\mathfrak{L}_s|} = \frac{|F|}{|\mathcal{F}|} \left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^{-3}.$$

La comparaison de deux poids spécifiques est subordonnée à des comparaisons de forces et de volumes et, en dernière analyse, à des comparaisons de forces et de longueurs.

Le calcul de la valeur numérique du rapport $\frac{|P_s|}{|\mathfrak{L}_s|}$ se fera, à l'aide des valeurs numériques des forces et des longueurs considérées suivant la formule

$$\frac{|P_s|}{|\mathfrak{L}_s|} = \frac{\frac{F}{L^3}}{\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{L}^3}}.$$

Art. 7. — *Masses.*

1. *Définitions.* — Si une même force appliquée successivement, dans les mêmes circonstances, à différents mobiles leur imprime des mouvements différents, on dit que ces mobiles ont des *masses* différentes.

Deux masses sont dites *égales* si, sollicitées par une même force dans les mêmes circonstances, elles prennent des mouvements identiques.

La réunion de n masses identiques à une masse donnée constitue une masse n fois plus grande que la première.

Une masse offre donc tous les caractères d'une quantité. L'égalité et l'addition étant définies, un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut à propos des longueurs permet de définir le rapport de deux masses quelconques.

2. *Comparaison des masses à l'aide des forces.* — Aucun désaccord entre la théorie et l'expérience n'est venu démontrer jusqu'ici qu'on ait eu tort d'admettre au nombre des principes de la dynamique :

1° Que la masse d'un corps peut être envisagée comme un groupe de masses indépendantes $|\mu|$ respectivement égales à ses parties aliquotes;

2° Qu'il revient au même de considérer chacune de ces masses $|\mu|$ comme sollicitée par une force $|\varphi|$, ou bien le corps de masse N $|\mu|$ qu'elles constituent comme sollicité par une force N $|\varphi|$ appliquée à son centre de gravité.

Il résulte de ces suppositions qu'un corps de masse N $|\mu|$ sollicité par une force N $|\varphi|$ prend le même mouvement qu'un corps de masse $|\mu|$ sollicité par une force $|\varphi|$, ou, en termes généraux, que *deux corps dont les masses sont entre elles dans un certain rapport prennent des mouvements identiques si les forces qui les sollicitent sont entre elles dans ce même rapport.*

Et réciproquement : *Si deux corps de masses différentes prennent des mouvements identiques sous l'action de deux forces, les masses de ces deux corps sont entre elles dans le même rapport que ces forces.*

Deux corps différents prennent en un même lieu, sous l'action de la pesanteur, des mouvements identiques. Donc, en vertu de la proposition précédente, les masses de deux corps sont entre elles comme leurs poids en un même lieu. Soient $|M|$ et $|\mathcal{M}|$ les masses de deux corps dont les poids en un même lieu sont respectivement $|P_0|$ et $|\mathcal{P}_0|$; on a

$$\frac{|M|}{|\mathcal{M}|} = \frac{|P_0|}{|\mathcal{P}_0|}.$$

Les comparaisons de masses peuvent donc se faire avec la balance.

Diverses forces constantes agissant successivement sur une même masse partant du repos lui communiquent des accélérations différentes. — La machine d'Atwood permet d'établir que le rapport des accélérations est égal au rapport des forces.

Cette relation, jointe à la proposition précédente, permet de comparer entre elles les masses de deux corps différents à l'aide des effets produits sur ces corps par des forces constantes différentes.

Soient $|A|$ et $|\mathcal{A}|$ les accélérations communiquées par des forces constantes $|F|$ et $|\mathcal{F}|$ à des masses $|M|$ et $|\mathcal{M}|$. — Le rapport des forces sollicitant des masses égales dans ces deux corps est

$$\frac{|F|}{|\mathcal{F}|} \cdot \frac{|\mathcal{M}|}{|M|}.$$

D'après la proposition précédente, ce rapport est égal au rapport des accélérations acquises par ces masses, lequel n'est autre que $\frac{|A|}{|\mathcal{A}|}$. On a donc

$$\frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\frac{|\mathcal{M}|}{|M|}=\frac{|A|}{|\mathcal{A}|};$$

d'où

$$\frac{|M|}{|\mathcal{M}|}=\frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\cdot\frac{|\mathcal{A}|}{|A|}=\frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\left(\frac{|A|}{|\mathcal{A}|}\right)^{-1}.$$

Mais on a vu que

$$\frac{|A|}{|\mathcal{A}|}=\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\left(\frac{|T|}{|\mathcal{T}|}\right)^{-2};$$

donc

$$\frac{|M|}{|\mathcal{M}|}=\frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^{-1}\left(\frac{|T|}{|\mathcal{T}|}\right)^{2}.$$

La comparaison de deux masses est subordonnée à une comparaison de forces et à une comparaison d'accélérations, ou, en dernière analyse, à une comparaison de forces, à une comparaison de longueurs et à une comparaison de temps.

Ainsi, quand on détermine le rapport de deux masses à l'aide de la balance, on s'appuie sur une comparaison de poids, c'est-à-dire de forces, et sur une comparaison d'accélérations, savoir la constatation de l'égalité des accélérations communiquées en un même lieu par la pesanteur à ces deux corps.

Art. 8. — *Densités.*

On dit qu'un corps a une ***densité uniforme*** lorsque les masses de parties égales quelconques de ce corps sont égales.

Le rapport des densités de deux corps de densités uniformes est égal au rapport des masses de volumes égaux de ces corps.

Soient $|M|$ et $|\mathcal{M}|$ les masses correspondant dans ces corps à des volumes $|V_0|$ et $|\mathcal{V}_0|$. Le rapport des densités $|D|$ et $|\mathcal{D}|$ de ces corps sera, en vertu de la définition précédente,

$$\frac{|D|}{|\mathcal{D}|}=\frac{|M|}{|\mathcal{M}|}\frac{|\mathcal{V}_0|}{|V_0|}=\frac{|M|}{|\mathcal{M}|}\left(\frac{|V_0|}{|\mathcal{V}_0|}\right)^{-1}.$$

Mais on a

$$\frac{|M|}{|\mathfrak{M}|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^{-1}\left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{2}$$

et

$$\frac{|V_0|}{|\mathfrak{V}_0|} = \left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^{3};$$

donc

$$\frac{|D|}{|\mathfrak{D}|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^{-4}\left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{2}.$$

La comparaison de deux densités est subordonnée à la comparaison de deux forces et à la comparaison de deux volumes, ou, en dernière analyse, à des comparaisons de forces, de longueurs et de temps.

Si un corps n'a pas une densité uniforme, on appelle *densité en un point* la densité moyenne d'un élément de volume comprenant ce point.

Soit $|dM|$ la masse correspondant à l'élément de volume $|dV_0|$ comprenant le point considéré. La valeur numérique du rapport de la densité $|D|$ en ce point à la densité $|\mathfrak{D}|$ d'un corps homogène pris pour terme de comparaison se calculera suivant la formule

$$\frac{|D|}{|\mathfrak{D}|} = \frac{\dfrac{dM}{dV_0}}{\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{V}_0}}.$$

Art. 9. — *Moments d'inertie.*

Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe est le même que celui d'une masse égale à la masse du corps qui serait situé à une certaine distance de l'axe dépendant de la forme et de la position du corps et qu'on nomme *rayon de giration* de ce corps.

Soient $|M|$ et $|\mathfrak{M}|$ les masses de deux corps dont les rayons de giration sont respectivement $|L|$ et $|\mathfrak{L}|$. Le rapport des moments d'inertie $|K|$ et $|\mathcal{K}|$ de ces deux corps sera, par définition,

$$\frac{|K|}{|\mathcal{K}|} = \frac{|M|}{|\mathcal{M}|}\left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^2$$

ou

$$\frac{|K|}{|\mathcal{K}|} = \frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\,\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\left(\frac{|T|}{|\mathcal{T}|}\right)^2.$$

La comparaison de deux moments d'inertie est donc subordonnée à la comparaison de deux masses et à la comparaison de deux longueurs, ou, en dernière analyse, à des comparaisons de forces, de longueurs et de temps.

ART. 10. — *Quantités de mouvement.*

Lorsqu'un point matériel est animé d'une certaine vitesse, on dit qu'il possède une certaine *quantité de mouvement,* dont la grandeur est définie comme proportionnelle à la fois à la masse et à la vitesse.

Si $|V_i|$ et $|\mathcal{V}_i|$ sont respectivement les vitesses que possèdent à un certain instant des masses $|M|$ et $|\mathcal{M}|$, le rapport des quantités de mouvement de ces masses à cet instant sera, en vertu de la définition précédente,

$$\frac{|Q_m|}{|\mathcal{Q}_m|} = \frac{|M|}{|\mathcal{M}|}\cdot\frac{|V_i|}{|\mathcal{V}_i|}$$

ou, en remplaçant les rapports $\frac{|M|}{|\mathcal{M}|}$ et $\frac{|V|}{|\mathcal{V}|}$ par leurs expressions,

$$\frac{|Q_m|}{|\mathcal{Q}_m|} = \frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\cdot\frac{|T|}{|\mathcal{T}|}.$$

La comparaison de deux quantités de mouvement est subordonnée à la comparaison de deux masses et à la comparaison de deux vitesses, ou, en dernière analyse, à la comparaison de deux forces et à la comparaison de deux temps.

ART. 11. — *Forces vives.*

Lorsqu'un point matériel est animé d'une certaine vitesse, on dit qu'il possède une certaine ***énergie cinétique*** ou une certaine *force vive* dont la grandeur est définie comme proportionnelle à la masse et au carré de la vitesse.

Si $|V_i|$ et $|\mathfrak{V}_i|$ sont respectivement les vitesses que possèdent à un certain instant les masses $|M|$ et $|\mathfrak{M}|$, le rapport des forces vives de ces masses à cet instant est, par définition,

$$\frac{|W|}{|\mathfrak{W}|} = \frac{|M|}{|\mathfrak{M}|} \cdot \left(\frac{|V_i|}{|\mathfrak{V}_i|}\right)^2$$

ou, en remplaçant les rapports $\frac{|M|}{|\mathfrak{M}|}$ et $\frac{|V_i|}{|\mathfrak{V}_i|}$ par leurs expressions,

$$\frac{|W|}{|\mathfrak{W}|} = \frac{|F|}{|\mathcal{F}|} \cdot \frac{|L|}{|\mathcal{L}|}.$$

La comparaison de deux forces vives est subordonnée à une comparaison de masses et à une comparaison de vitesses ou, en dernière analyse, à une comparaison de forces et à une comparaison de longueurs, exactement comme la comparaison de deux travaux.

CHAPITRE VI

Formule générale relative à la comparaison des principales grandeurs géométriques et mécaniques. — Tableau des cas particuliers.

Toutes les propositions établies dans les trois chapitres précédents peuvent être rassemblées dans l'énoncé général suivant :

La comparaison de deux grandeurs géométriques ou *mécaniques de même espèce* $|G|$ *et* $|\mathcal{G}|$ *est subordonnée en général à des comparaisons de longueurs, de temps et de forces, ces quantités se rapportant aux grandeurs en question et servant à les spécifier.*

Le symbole général des opérations à faire pour obtenir la valeur du rapport $\frac{|G|}{|\mathcal{G}|}$ *est*

$$\frac{|G|}{|\mathcal{G}|} = h\left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^{\lambda}\left(\frac{|L_o|}{|\mathcal{L}_o|}\right)^{-\lambda_o}\left(\frac{|T|}{|\mathcal{T}|}\right)^{\tau}\left(\frac{|F|}{|\mathcal{F}|}\right)^{\varphi}.$$

Il indique que pour avoir le nombre $\frac{|G|}{|\mathcal{G}|}$ *il faut multiplier un certain coefficient h par* λ *rapports de longueurs,* τ *rapports de temps,* φ *rapports de forces, et le diviser par* λ_0 *rapports de longueurs.*

Passons, en effet, en revue les différentes formules établies précédemment; nous verrons qu'elles rentrent toutes dans ce type général, pourvu qu'on considère λ, λ_0, τ, φ comme pouvant recevoir, suivant les cas, des valeurs positives, nulles ou négatives.

NATURE des GRANDEURS	COMPOSITION des RAPPORTS	VALEURS numériques DES RAPPORTS
I. Longueurs.	$\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}$	L
Surfaces.	$h\left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^2$	$h\,\frac{L^2}{\mathcal{L}^2}$
Volumes.	$h\left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^3$	$h\,\frac{L^3}{\mathcal{L}^3}$
Angles plans.	$\left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)\left(\frac{|L_o|}{|\mathcal{L}_o|}\right)^{-1}$	$\frac{LL_0^{-1}}{\mathcal{L}\mathcal{L}_0^{-1}}$
Angles solides.	$\left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^2\left(\frac{|L_o|}{|\mathcal{L}_o|}\right)^{-2}$	$\frac{L^2L_0^{-2}}{\mathcal{L}^2\mathcal{L}_0^{-2}}$
Courbures.	$\left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^{-1}$	$\frac{L^{-1}}{\mathcal{L}^{-1}}$

II. Temps.	$\dfrac{\lvert T\rvert}{\lvert \mathfrak{T}\rvert}$	$\dfrac{T}{\mathfrak{T}}$
Vitesses.	$\left(\dfrac{\lvert L\rvert}{\lvert \mathfrak{L}\rvert}\right)\left(\dfrac{\lvert T\rvert}{\lvert \mathfrak{T}\rvert}\right)^{-1}$	$\dfrac{LT^{-1}}{\mathfrak{L}\mathfrak{T}^{-1}}$
Vitesses angulaires.	$\left(\dfrac{\lvert L\rvert}{\lvert \mathfrak{L}\rvert}\right)\left(\dfrac{\lvert L_0\rvert}{\lvert \mathfrak{L}_0\rvert}\right)^{-1}\left(\dfrac{\lvert T\rvert}{\lvert \mathfrak{T}\rvert}\right)^{-1}$	$\dfrac{LL_0^{-1}T^{-1}}{\mathfrak{L}\mathfrak{L}_0^{-1}\mathfrak{T}^{-1}}$
Accélérations.	$\left(\dfrac{\lvert L\rvert}{\lvert \mathfrak{L}\rvert}\right)\left(\dfrac{\lvert T\rvert}{\lvert \mathfrak{T}\rvert}\right)^{-2}$	$\dfrac{LT^{-2}}{\mathfrak{L}\mathfrak{T}^{-2}}$
III. Forces.	$\dfrac{\lvert F\rvert}{\lvert \mathfrak{F}\rvert}$	$\dfrac{F}{\mathfrak{F}}$
Moments.	$\left(\dfrac{\lvert F\rvert}{\lvert \mathfrak{F}\rvert}\right)\left(\dfrac{\lvert L\rvert}{\lvert \mathfrak{L}\rvert}\right)$	$\dfrac{FL}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}}$
Travaux.	$\left(\dfrac{\lvert F\rvert}{\lvert \mathfrak{F}\rvert}\right)\left(\dfrac{\lvert L\rvert}{\lvert \mathfrak{L}\rvert}\right)$	$\dfrac{FL}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}}$
Puissances mécaniques.	$\left(\dfrac{\lvert F\rvert}{\lvert \mathfrak{F}\rvert}\right)\left(\dfrac{\lvert L\rvert}{\lvert \mathfrak{L}\rvert}\right)\left(\dfrac{\lvert T\rvert}{\lvert \mathfrak{T}\rvert}\right)^{-1}$	$\dfrac{FLT^{-1}}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}\mathfrak{T}^{-1}}$
Pressions.	$\left(\dfrac{\lvert F\rvert}{\lvert \mathfrak{F}\rvert}\right)\left(\dfrac{\lvert L\rvert}{\lvert \mathfrak{L}\rvert}\right)^{-2}$	$\dfrac{FL^{-2}}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}^{-2}}$
Poids spécifiques.	$\left(\dfrac{\lvert F\rvert}{\lvert \mathfrak{F}\rvert}\right)\left(\dfrac{\lvert L\rvert}{\lvert \mathfrak{L}\rvert}\right)^{-3}$	$\dfrac{FL^{-3}}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}^{-3}}$
Masses.	$\left(\dfrac{\lvert F\rvert}{\lvert \mathfrak{F}\rvert}\right)\left(\dfrac{\lvert L\rvert}{\lvert \mathfrak{L}\rvert}\right)^{-1}\left(\dfrac{\lvert T\rvert}{\lvert \mathfrak{T}\rvert}\right)^{2}$	$\dfrac{FL^{-1}T^{2}}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{T}^{2}}$
Densités.	$\left(\dfrac{\lvert F\rvert}{\lvert \mathfrak{F}\rvert}\right)\left(\dfrac{\lvert L\rvert}{\lvert \mathfrak{L}\rvert}\right)^{-4}\left(\dfrac{\lvert T\rvert}{\lvert \mathfrak{T}\rvert}\right)^{2}$	$\dfrac{FL^{-4}T^{2}}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}^{-4}\mathfrak{T}^{2}}$
Moments d'inertie.	$\left(\dfrac{\lvert F\rvert}{\lvert \mathfrak{F}\rvert}\right)\left(\dfrac{\lvert L\rvert}{\lvert \mathfrak{L}\rvert}\right)\left(\dfrac{\lvert T\rvert}{\lvert \mathfrak{T}\rvert}\right)^{2}$	$\dfrac{FLT^{2}}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}\mathfrak{T}^{2}}$
Quantités de mouvement.	$\left(\dfrac{\lvert F\rvert}{\lvert \mathfrak{F}\rvert}\right)\left(\dfrac{\lvert T\rvert}{\lvert \mathfrak{T}\rvert}\right)$	$\dfrac{FT}{\mathfrak{F}\mathfrak{T}}$
Forces vives.	$\left(\dfrac{\lvert F\rvert}{\lvert \mathfrak{F}\rvert}\right)\left(\dfrac{\lvert L\rvert}{\lvert \mathfrak{L}\rvert}\right)$	$\dfrac{FL}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}}$

On peut remarquer que λ_0 n'est différent de zéro que dans les seuls rapports où interviennent des angles. La grande majorité des formules précédentes correspond donc au type :

$$h\left(\frac{\lvert L\rvert}{\lvert \mathfrak{L}\rvert}\right)^{\lambda}\left(\frac{\lvert T\rvert}{\lvert \mathfrak{T}\rvert}\right)^{\tau}\left(\frac{\lvert F\rvert}{\lvert \mathfrak{F}\rvert}\right)^{\varphi}.$$

CHAPITRE VII

Grandeurs fondamentales et grandeurs dérivées. — Dimensions.

Nous avons vu dans les chapitres précédents que, soit isolément, soit par groupes de deux ou de trois, trois sortes de grandeurs, et trois seulement, interviennent nécessairement dans les expressions des rapports de toutes les grandeurs géométriques ou mécaniques.

Ces trois grandeurs : *longueur, temps, force,* à la comparaison desquelles les comparaisons de toutes les autres sont essentiellement subordonnées, méritent, à ce point de vue, d'être appelées *fondamentales*. Aussi désignerons-nous les unités servant à leur évaluation sous le nom d'unités *fondamentales*.

Par opposition, les autres grandeurs seront appelées des grandeurs *dérivées*.

Cette dernière expression ne doit pas être prise à la lettre. On ne saurait dire que des choses d'essences différentes dérivent les unes des autres. Par ce mot « dérivées » on doit entendre simplement que la grandeur à laquelle il s'applique est telle que l'expression de son rapport à une grandeur de même espèce se *déduit* de certains rapports de grandeurs fondamentales.

Deux grandeurs de même espèce dépendent des mêmes grandeurs fondamentales et en dépendent de la même manière ; elles ne se distinguent l'une de l'autre que par les valeurs numériques de ces dernières. — Ainsi tout cube est défini par une longueur, par exemple la longueur de son arête, et il se distingue de tout autre cube par la valeur numérique de cette longueur. — Toute vitesse exige, pour être définie, la considération d'une longueur et d'un temps. Ce qui établit une diversité entre les vitesses, ce sont les différentes valeurs que peuvent présenter cette longueur et ce temps.

Deux grandeurs d'espèces différentes $|X|$, $|Y|$ dépendent, en général, de grandeurs fondamentales différentes, ou, si elles dépendent des mêmes grandeurs fondamentales, elles n'en dépendent pas de la même manière : l'un au moins des nombres λ, λ_o, τ, φ qui représentent les nombres de rapports fondamentaux intervenant dans les expressions des rapports $\frac{|X|}{|\mathfrak{X}|}$, $\frac{|Y|}{|\mathfrak{Y}|}$, est *différent* d'une de ces grandeurs à l'autre. — Ainsi une surface et un volume dépendent d'une seule et même grandeur fondamentale : une longueur; mais dans l'expression du rapport $\frac{|S|}{|\mathcal{S}|}$ λ a la valeur 2, tandis que dans l'expression du rapport $\frac{|V_o|}{|\mathfrak{V}_o|}$ il a la valeur 3; en d'autres termes, dans l'expression du premier rapport on voit figurer deux rapports de longueurs, tandis que l'expression du second en renferme trois. — On exprime ce fait en disant qu'une surface est une grandeur du degré 2 par rapport à la longueur, tandis qu'un volume est du degré 3; ou bien encore en disant que les *dimensions* d'une surface et d'un volume relativement à la grandeur fondamentale $|L|$ sont respectivement 2 et 3.

Autre exemple : une vitesse et une accélération dépendent l'une et l'autre des grandeurs fondamentales longueur et temps. Dans les expressions des rapports $\frac{|V|}{|\mathfrak{V}|}$, $\frac{|A|}{|\mathfrak{A}|}$, λ a la même valeur : 1; mais tandis que dans l'une $\tau = -1$, dans l'autre $\tau = -2$. On dira en conséquence que les *dimensions* de ces deux grandeurs sont les mêmes, et égales à 1 par rapport à la longueur, mais qu'elles sont différentes, et égales respectivement à -1 et -2 par rapport au temps.

Pour indiquer d'une manière abrégée les *dimensions* d'une grandeur, on est convenu d'écrire à la suite de l'initiale de cette grandeur le signe $=$ suivi des initiales des grandeurs fondamentales dont elle dépend, affectées d'exposants marquant respectivement les nombres de rapports fondamentaux figurant dans l'expression du rapport de deux grandeurs de l'espèce en question.

Ainsi, le symbole

$$|G| = L^{\lambda-\lambda_0}T^{\tau}F^{\varphi}$$

signifiera que la grandeur G est du degré $\lambda - \lambda_0$ par rapport à $|L|$, du degré τ par rapport à $|T|$, du degré φ par rapport à $|F|$, ce qui ne voudra pas dire autre chose sinon que l'expression du rapport

$$\frac{|G|}{|\mathcal{G}|}$$

est formée en multipliant λ rapports de longueurs tels que $\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}$ par τ rapports de temps tels que $\frac{|T|}{|\mathcal{T}|}$, par φ rapports de forces tels que $\frac{|F|}{|\mathcal{F}|}$, et divisant le produit par λ_0 rapports de longueurs tels que $\frac{|L_0|}{|\mathcal{L}_0|}$.

Le symbole des dimensions d'une grandeur n'est qu'une indication abrégée de l'expression du rapport de deux grandeurs de l'espèce en question.

En se reportant au tableau qui termine le chapitre VI, on formera pour les diverses grandeurs qui y ont été considérées le tableau suivant des symboles de dimensions :

	NOMS DES GRANDEURS		SYMBOLES DE DIMENSIONS
I.	Longueur.	$\|L\|$	L
	Surface.	$\|S\|$	L^2
	Volume.	$\|V_o\|$	L^3
	Angle plan.	$\|O\|$	L^{1-1}
	Angle solide.	$\|\Omega\|$	L^{2-2}
	Courbure.	$\|C_o\|$	L^{-1}
II.	Temps.	$\|T\|$	T
	Vitesse linéaire.	$\|V\|$	LT^{-1}
	Vitesse angulaire.	$\|V_a\|$	$L^{1-1}T^{-1}$
	Accélération.	$\|A\|$	LT^{-2}

III. Force.	$\|F\|$	F
Moment.	$\|M_o\|$	FL
Travail.	$\|W\|$	FL
Puissance mécanique.	$\|P_m\|$	FLT^{-1}
Pression.	$\|P\|$	FL^{-2}
Poids spécifique.	$\|P_s\|$	FL^{-3}
Masse.	$\|M\|$	$FL^{-1}T^2$
Densité.	$\|D\|$	$FL^{-4}T^2$
Moment d'inertie.	$\|K\|$	FLT^2
Quantités de mouvement.	$\|Q\|$	FT
Force vive.	$\|W\|$	FL

CHAPITRE VIII

Choix systématique des unités. — Unités normales : mesures absolues.

Art. 1.

Définir une unité pour la mesure des grandeurs d'une certaine espèce $|G|$, c'est, parmi toutes les grandeurs de cette espèce, en assigner une $|\mathcal{G}|$ à laquelle il sera convenu qu'on rapportera toutes les autres.

Or, la désignation précise, le signalement en quelque sorte de la grandeur $|\mathcal{G}|$ sur laquelle on veut porter ce choix, se fait en indiquant les valeurs des grandeurs fondamentales dont elle dépend. — Ainsi nous aurons défini une unité pour les grandeurs $|G|$ en disant : on rapportera les grandeurs de cette espèce à la grandeur de même espèce $|\mathcal{G}|$ pour laquelle les grandeurs fondamentales ont les valeurs particulières $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_o$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$, c'est-à-dire valent respectivement $\mathcal{L}$ fois, $\mathcal{L}_o$ fois, $\mathcal{T}$ fois,

$\mathcal{F}$ fois la longueur, le temps, la force choisis au préalable arbitrairement pour unités de longueur, de temps et de force.

Soient L, L_0, T, F, relativement aux mêmes unités fondamentales, les valeurs numériques des grandeurs fondamentales dont dépend une grandeur $|G|$ de l'espèce considérée, on aura

$$\frac{|G|}{|\mathcal{G}|} = h\left(\frac{L}{\mathcal{L}}\right)^{\lambda}\left(\frac{L_0}{\mathcal{L}_0}\right)^{-\lambda_0}\left(\frac{T}{\mathcal{T}}\right)^{\tau}\left(\frac{F}{\mathcal{F}}\right)^{\varphi}$$
$$= h\frac{L^{\lambda} L_0^{-\lambda_0} T^{\tau} F^{\varphi}}{\mathcal{L}^{\lambda} \mathcal{L}_0^{-\lambda_0} \mathcal{T}^{\tau} \mathcal{F}^{\varphi}},$$

d'où

$$|G| = h\frac{L^{\lambda} L_0^{-\lambda_0} T^{\tau} F^{\varphi}}{\mathcal{L}^{\lambda} \mathcal{L}_0^{-\lambda_0} \mathcal{T}^{\tau} \mathcal{F}^{\varphi}} \cdot |\mathcal{G}|.$$

Le nombre

$$h\frac{L^{\lambda} L_0^{-\lambda_0} T^{\tau} F^{\varphi}}{\mathcal{L}^{\lambda} \mathcal{L}_0^{-\lambda_0} \mathcal{T}^{\tau} \mathcal{F}^{\varphi}}$$

ou

$$\frac{h}{\mathcal{L}^{\lambda} \mathcal{L}_0^{-\lambda_0} \mathcal{T}^{\tau} \mathcal{F}^{\varphi}} \cdot L^{\lambda} L_0^{-\lambda_0} T^{\tau} F^{\varphi}$$

est la valeur numérique de la grandeur $|G|$.

Pour obtenir la valeur numérique d'une grandeur $|G|$ *il faut donc sur les nombres* L, L_0, T, F *fournis par la mesure des grandeurs fondamentales dont elle dépend effectuer les opérations indiquées par le symbole*

$$L^{\lambda} L_0^{-\lambda_0} T^{\tau} F^{\varphi},$$

c'est-à-dire par le symbole même des dimensions de cette grandeur, et multiplier le résultat par le facteur

$$\frac{h}{\mathcal{L}^{\lambda} \mathcal{L}_0^{-\lambda_0} \mathcal{T}^{\tau} \mathcal{F}^{\varphi}}$$

calculé une fois pour toutes après le choix fait de l'unité.

Ainsi pour une première grandeur $|G_1|$, on aura

$$g_1 = \frac{h}{\mathcal{L}^{\lambda} \mathcal{L}_0^{-\lambda_0} \mathcal{T}^{\tau} \mathcal{F}^{\varphi}} \cdot L_1^{\lambda} L_{01}^{-\lambda_0} T_1^{\tau} F_1^{\varphi};$$

pour une seconde,

$$g_2 = \frac{h}{\mathfrak{L}^\lambda \mathfrak{L}_0^{-\lambda_0} \mathfrak{T}^\tau \mathfrak{F}^\varphi} \cdot L_2^\lambda L_{0\,2}^{-\lambda_0} T_2^\tau F_2^\varphi,$$

et ainsi de suite.

Le facteur

$$\frac{h}{\mathfrak{L} \ \mathfrak{L}_0^{-\lambda_0} \mathfrak{T}^\tau \mathfrak{F}^\varphi}$$

dépend par son numérateur h de la nature des grandeurs $|G|$ et par son dénominateur $\mathfrak{L}^\lambda \mathfrak{L}_0^{-\lambda_0} \mathfrak{T}^\tau \mathfrak{F}^\varphi$ du *signalement* de celle de ces grandeurs qui a été choisie pour unité.

EXEMPLES.

I

Dans l'ancien système de mesures françaises, l'unité de superficie pour l'évaluation des terrains était la surface d'un carré de 22 pieds de côté qu'on appelait *perche des eaux et forêts.*

Soit à évaluer en perches une surface donnée.

La formule générale exprimant la valeur numérique du rapport de deux surfaces est

$$\frac{|S|}{|\mathcal{S}|} = h \frac{L' L''}{\mathfrak{L}' \mathfrak{L}''}.$$

Dans l'exemple proposé, on a $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}'' = 22$; donc

$$\frac{h}{\mathfrak{L}' \mathfrak{L}'} = \frac{h}{(22)^2} = \frac{h}{484}.$$

Si la surface à évaluer est celle d'un carré de côté $|L|$, on cherchera la valeur numérique de $|L|$ en pieds, soit L, et l'on aura pour la valeur numérique s de la surface de ce carré

$$s = \frac{1}{484} \cdot L^2,$$

(h ayant dans ce cas la valeur 1). — Ainsi, la surface d'un carré ayant une toise (6 pieds) de côté vaudra

$$\frac{1}{484} \cdot 36.$$

Si la surface à évaluer est celle d'un cercle de rayon $|L|$, on évaluera $|L|$ en pieds, et l'on aura pour valeur numérique de la surface du cercle

$$s = \frac{\pi}{484} L^2$$

(h ayant dans ce cas la valeur π).

II

Soit à évaluer un angle.

On fera usage pour cela de la formule

$$0 = \frac{|O|}{|\Theta|} = \frac{\frac{\mathbf{a}}{L}}{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{L}}} = \frac{1}{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{L}}} \cdot \frac{\mathbf{a}}{L}.$$

Si l'angle choisi comme unité d'angle est l'*angle droit*, cette convention se traduit dans la formule générale en posant

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{L}} = \frac{\frac{1}{4}\text{ circonf.}}{\frac{1}{2}\text{ diam.}} = \frac{\pi}{2},$$

et la valeur numérique d'un angle interceptant un arc $\mathbf{a}$ dans un cercle de rayon L ayant son centre au sommet est donnée par la formule

$$0 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mathbf{a}}{L}.$$

Si l'angle pris pour unité d'angle est l'angle appelé *degré,* ou la 90e partie d'un angle droit, on doit faire

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{L}} = \frac{1}{90} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{180},$$

et l'on a par suite

$$0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\mathbf{a}}{L}.$$

Si l'angle unité était le *grade* ou la 100e partie d'un angle droit, on aurait

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{L}} = \frac{1}{100} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{200},$$

et par suite

$$0 = \frac{200}{\pi} \cdot \frac{a}{L} \cdot$$

III

Soit à évaluer le travail d'une force.

Cette évaluation exige des mesures de longueurs et de forces. Convenons d'évaluer les longueurs en mètres et les forces en kilogrammes, et adoptons pour unité de travail le travail d'une force de 75 kilogrammes dont le point d'application est déplacé dans la direction de la force d'une longueur égale à un mètre, travail que nous désignerons sous le nom de *cheval-vapeur*.

La formule générale exprimant la valeur numérique d'un rapport de travaux est

$$w = \frac{\mathrm{FL}}{\mathfrak{F}.\mathfrak{L}} = \frac{1}{\mathfrak{F}\mathfrak{L}} \cdot \mathrm{FL}.$$

Le choix que nous avons fait de l'unité de travail se traduit dans cette formule par les valeurs

$$\mathfrak{F} = 75, \qquad \mathfrak{L} = 1,$$

et par suite

$$\mathfrak{F}\mathfrak{L} = 75.$$

Le travail d'une force de F kilogrammes pour un déplacement de son point d'application égal à L mètres sera alors exprimé par le nombre

$$w = \frac{1}{75} \cdot \mathrm{FL}.$$

Si l'on prenait pour unité de travail le travail correspondant à une calorie, lequel est égal au travail d'une force de 424,2 kilogrammes déplaçant son point d'application de 1 mètre, on devrait donner à $\mathfrak{F}\mathfrak{L}$ la valeur 424,2, et l'on aurait pour l'expression de la valeur numérique d'un travail quelconque

$$w = \frac{1}{424{,}2} \cdot \mathrm{FL}.$$

ART. 2.

Parmi toutes les grandeurs d'une espèce donnée $|G|$, il en est une qui, choisie pour unité, apporterait dans les expressions des valeurs numériques des autres une simplification très grande; c'est celle pour laquelle le nombre

$$\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{L}_0^{-\lambda_0}\mathfrak{T}^{\tau}\mathfrak{F}^{\varphi}$$

serait égal à 1, et qui peut être définie par les valeurs

$$\mathfrak{L}=1,\qquad \mathfrak{L}_0=1,\qquad \mathfrak{T}=1,\qquad \mathfrak{F}=1.$$

Dans ce cas particulier les valeurs numériques des diverses grandeurs $|G_1|$, $|G_2|$... de l'espèce considérée seraient

$$g_1 = h.L_1^{\lambda}L_{01}^{-\lambda_0}T_1^{\tau}F_1^{\varphi},$$
$$g_2 = h.L_2^{\lambda}L_{02}^{-\lambda_0}T_2^{\tau}F_2^{\varphi},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Avec cette unité particulière, il suffirait, on le voit, pour calculer la valeur numérique d'une grandeur, à l'aide des valeurs numériques L, L_o, T, F des grandeurs fondamentales dont elle dépend, d'effectuer les opérations marquées par le symbole des dimensions et de multiplier le produit par h. — On serait dispensé du soin de chercher et de retenir la valeur du facteur: $\frac{1}{\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{L}_o^{-\lambda_0}\mathfrak{T}^{\tau}\mathfrak{F}^{\varphi}}$ puisque alors ce facteur aurait la valeur 1.

Appliquons cette remarque aux exemples de tout à l'heure.

I

Si, au lieu de la perche, nous prenons pour unité de superficie la surface d'un carré d'un pied de côté, la valeur numérique de la surface d'un carré de L pieds de côté sera donnée par l'expression très simple

$$s = L^2;$$

celle de la surface d'un cercle de L pieds de rayon, par

$$s = \pi.L^2,\qquad \text{etc,}$$

II

Si, au lieu de l'angle droit, du degré ou du grade, nous prenons pour unité d'angle l'angle pour lequel $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{L}}$ est égal à 1, c'est-à-dire l'angle qui intercepte un arc égal au rayon dans un cercle ayant son centre au sommet, la valeur numérique d'un angle interceptant un arc **a** dans un cercle de rayon L ayant son centre au sommet sera donnée par l'expression

$$o = \frac{\mathbf{a}}{L}.$$

Dans ce cas, l'angle unité est désigné sous le nom de *radian*.

C'est de cette unité qu'il est toujours fait usage dans les formules d'analyse.

III

Si, au lieu des unités de travail précédemment définies, nous choisissons comme unité de travail le travail d'une force d'un kilogramme dont le point d'application se déplace d'une longueur égale à 1 mètre, travail désigné sous le nom de *kilogrammètre,* le travail d'une force de F kilogrammes dont le point d'application se déplace de L mètres aura pour valeur numérique simplement :

$$w = FL.$$

Art. 3.

Parmi toutes les grandeurs d'une espèce donnée, nous nommerons grandeur *normale* celle pour laquelle $\mathfrak{L} = 1$, $\mathfrak{L}_0 = 1$, $\mathfrak{T} = 1$, $\mathfrak{F} = 1$.

Si elle est prise pour terme de comparaison des grandeurs de son espèce, elle sera appelée *unité normale* des grandeurs de cette espèce.

Substituer à diverses conventions arbitraires dans le choix des unités une règle uniforme consistant à prendre pour chaque espèce de grandeur ce que nous venons d'appeler l'unité normale, c'est substituer, ainsi que nous venons de le voir, à des formules plus ou moins compliquées les formules

les plus simples possible; c'est mettre de l'ordre, de la méthode, de la clarté à la place de la confusion, de l'incohérence et de l'obscurité; c'est constituer ce qu'on appelle un *système coordonné* d'unités dérivées.

Dans un pareil système tous les choix d'unités se font suivant la même règle, qui consiste à prendre pour unité des grandeurs de chaque espèce l'*unité normale*.

Trois choix seulement restent arbitraires : les choix des unités des grandeurs fondamentales, c'est-à-dire le choix de l'unité de longueur, celui de l'unité de temps et celui de l'unité de force.

Un pareil système d'unités étant exempt de tout l'arbitraire qui ne tient pas à la nature même des choses, est qualifié de *système absolu*.

Les unités de ce système sont appelées *unités absolues*, et les mesures faites à l'aide de ces unités sont dites *mesures absolues*.

Ce caractère appartient aux mesures exprimées dans les formules classiques de la géométrie et de la mécanique, car les unités choisies par les géomètres pour les grandeurs géométriques et mécaniques sont précisément des unités normales.

CHAPITRE IX

De l'homogénéité et de la similitude en géométrie et en mécanique.

ART. 1. — *De l'homogénéité et de la similitude en géométrie.*

Soit, d'une part, $|\mathfrak{M}|$ un groupe d'objets géométriques comprenant des longueurs $|L|$..., des surfaces $|S|$..., des volumes $|V_0|$..., des angles $|O|$..., etc. Soit, d'autre part, un second groupe : $|\mathfrak{N}|$, comprenant des éléments $|\mathfrak{L}|\ldots$, $|\mathfrak{S}|\ldots$, $|\mathfrak{V}_0|\ldots$, $|\mathcal{O}|\ldots$, respectivement de même nature que les précédents et leur servant de termes de comparaison. — L'établissement de relations entre les rapports résultant de ces comparaisons est un des principaux objets de la géométrie.

Nous avons vu (chap. III) que, sous forme explicite, les rapports

$$\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\ldots, \frac{|S|}{|\mathfrak{S}|}\ldots, \frac{|V_0|}{|\mathfrak{V}_0|}\ldots, \frac{|O|}{|\mathcal{O}|}\ldots$$

étaient nécessairement des produits de rapports de lignes; ils ne peuvent donc être comparés entre eux que sous les formes suivantes :

$$h_1\frac{|L_1|}{|\mathfrak{L}_1|}, \quad h_2\frac{|L_2'|}{|\mathfrak{L}_2'|}\cdot\frac{|L_2''|}{|\mathfrak{L}_2''|}, \quad h_3\frac{|L_3'|}{|\mathfrak{L}_3'|}\cdot\frac{|L_3''|}{|\mathfrak{L}_3''|}\cdot\frac{|L_3'''|}{|\mathfrak{L}_3'''|}\ldots,$$

et toute relation entre ces rapports sera en définitive représentée par une équation telle que

$$F\left(h_1\frac{|L_1|}{|\mathfrak{L}_1|}, \quad h_2\frac{|L_2'|}{|\mathfrak{L}_2'|}\frac{|L_2''|}{|\mathfrak{L}_2''|},\ldots\right) = 0,$$

que nous désignerons d'une manière abrégée par

$$F\left(\frac{|L_i|}{|\mathfrak{L}_i|}\right) = 0.$$

THÉORÈME. — *Si la fonction* F *est algébrique et homogène par rapport aux quotients* $\frac{|L_i|}{|\mathfrak{L}_i|}$, *elle convient à tous les systèmes* $|N_K|$ $|\mathfrak{N}|_{\mathfrak{K}}$ *formés de groupes de figures respectivement semblables à celles qui composent* $|N|$ *et* $|\mathfrak{N}|$, K *et* $\mathfrak{K}$ *étant les rapports de similitude.*

En effet, si, dans la relation précédente, on multiplie chaque rapport de lignes par $\frac{K}{\mathfrak{K}}$, on a, en vertu de l'homogénéité,

$$F\left(\frac{K}{\mathfrak{K}}\frac{|L_i|}{|\mathfrak{L}_i|}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{K}}\right)^n F\left(\frac{|L_i|}{|\mathfrak{L}_i|}\right) = 0.$$

Or, la relation

$$F\left(\frac{K}{\mathcal{K}}\frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}\right)=0$$

est formée avec les quantités relatives à $|N|_K$ et $|\mathfrak{N}|_k$ comme la première l'était avec les quantités relatives aux systèmes $|N|$, $|\mathfrak{N}|$.

Réciproquement, pour que la relation exprimée par l'équation

$$F\left(\frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}\right)=0$$

convienne à tous les systèmes semblables au premier, il faut que la fonction F *soit homogène par rapport aux quotients* $\frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}$.

En effet, l'application à un système semblable au premier des opérations représentées par $F\left(\frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}\right)$ change cette expression en

$$F\left(\frac{K}{\mathcal{K}}\frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}\right)$$

et pour que sa valeur reste égale à zéro quels que soient K et $\mathcal{K}$, il faut qu'elle soit homogène par rapport aux quotients $\frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}$.

Il y a ainsi la plus étroite corrélation entre la similitude des systèmes géométriques et la qualité d'homogénéité des relations qui leur sont communes, de telle sorte que la généralité d'une relation entraîne son homogénéité et réciproquement.

Soient, par exemple, une sphère de rayon L et un cube d'arête $|\mathcal{L}|$. En comparant la surface $|S|$ et le volume $|V_o|$ de la sphère à la surface $|\mathcal{S}|$ et au volume $|\mathcal{V}_o|$ du cube, on peut écrire la relation

$$\frac{|S|}{|\mathcal{S}|}=\varepsilon\frac{|V_o|}{|\mathcal{V}_o|}\frac{|\mathcal{L}|}{|L|}$$

ou

$$h_2\left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^2=\varepsilon\left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^3\frac{|\mathcal{L}|}{|L|}.$$

Cette relation est homogène; elle convient à tous les systèmes semblables à celui que nous venons de considérer.

Par contre, si pour le système considéré on écrit la relation

$$\frac{|S|}{|\mathcal{S}|} = \eta \frac{|V_0|}{|\mathfrak{V}_0|},$$

qui revient à

$$h_2 \left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^2 = \eta \left(\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}\right)^3,$$

et par conséquent n'est pas homogène, on ne pourra pas, en y regardant η comme une constante, l'appliquer à une autre sphère et à un autre cube.

Lorsqu'une relation n'est pas homogène, elle ne convient qu'à un seul système $|N|$, $|\mathfrak{N}|$; elle est contingente.

Il est rare qu'on ait à prendre en considération de telles relations.

2. *Les propositions de la géométrie ordinaire conduisent à des relations homogènes et permettent de trouver toutes celles qui sont possibles.*

Soit $|\Lambda|$ une ligne quelconque. La relation

$$F\left(\frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}\right) = 0$$

peut s'écrire

$$F\left(\frac{|\Lambda|}{|\mathcal{L}_i|} \cdot \frac{|L_i|}{|\Lambda|}\right) = 0$$

ou

$$\Phi\left(\frac{|L_i|}{|\Lambda|}\right) = 0.$$

Les relations

$$\Phi\left(\frac{K}{\mathcal{K}} \cdot \frac{|L_i|}{|\Lambda|}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{K}{\mathcal{K}}\right)^n \Phi\left(\frac{|L_i|}{|\Lambda|}\right)$$

sont respectivement équivalentes à

$$F\left(\frac{K}{\mathcal{K}} \frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{K}{\mathcal{K}}\right)^n F\left(\frac{|L_i|}{|\mathcal{L}_i|}\right),$$

et si l'on a

$$\mathrm{F}\left(\frac{\mathrm{K}}{\mathfrak{K}}\,\frac{|\mathrm{L}_i|}{|\mathfrak{L}_i|}\right)=\left(\frac{\mathrm{K}}{\mathfrak{K}}\right)^n\mathrm{F}\left(\frac{|\mathrm{L}_i|}{|\mathfrak{L}_i|}\right),$$

on a par suite

$$\Phi\left(\frac{\mathrm{K}}{\mathfrak{K}}\,\frac{|\mathrm{L}_i|}{|\Lambda|}\right)=\left(\frac{\mathrm{K}}{\mathfrak{K}}\right)^n\Phi\left(\frac{|\mathrm{L}_i|}{|\Lambda|}\right);$$

c'est-à-dire que l'existence d'une relation homogène telle que F( ) entraîne celle d'une relation homogène telle que Φ( ), et réciproquement.

Il n'y a donc pas plus de généralité à concevoir les relations géométriques sous la forme F( ) que sous la forme Φ( ). Recherchons donc la condition d'existence de relations homogènes du type Φ( ).

Et d'abord, observons que l'établissement d'une relation telle que Φ( ) revient à comparer le groupe |N| à un groupe $|\mathfrak{N}|$ dont les éléments sont définis et complètement déterminés par la donnée d'une seule longueur |Λ|.

Or, tel est le cas des relations établies en géométrie lorsqu'on convient de comparer les lignes à une certaine ligne droite |Λ|, les surfaces à la surface d'un carré de côté |Λ|, les volumes au volume d'un cube d'arête |Λ|; en un mot, lorsqu'on convient d'évaluer les diverses grandeurs à l'aide d'un système d'*unités normales.*

Les relations exprimées, en suivant cette méthode, par les formules classiques de la géométrie, ont été établies sans rien supposer sur la grandeur particulière de la ligne |Λ|. Elles sont donc valables pour toutes les valeurs de |Λ|. Elles ne doivent pas être altérées si l'on substitue $k|\Lambda|$ à |Λ|, quel que soit k. Elles sont donc homogènes par rapport aux quotients $\frac{|\mathrm{L}_i|}{|\Lambda|}$.

En résumé, les relations de la géométrie classique appartiennent à un type spécial et sont homogènes. Elles doivent leur constitution particulière (type Φ( )) à l'emploi dans les mesures d'un système d'unités normales, et leur homogénéité à l'indétermination de la base de ce système.

Si une relation géométrique se présente sous forme d'une égalité entre deux expressions, l'homogénéité de la relation exige que ces deux expressions soient homogènes et du même degré par rapport à $\frac{|L_i|}{|A|}$, ou, en d'autres termes, aient le même symbole de dimensions : L^n. Il est bon de toujours faire cette vérification dans le cours ou à la fin d'une série de calculs, car l'absence d'homogénéité dans un résultat serait l'indice d'une erreur commise soit dans l'écriture des formules prises comme point de départ, soit dans l'exécution des opérations subséquentes [1].

Art. 2. — *De l'homogénéité en mécanique.*

Les équations de la mécanique expriment des relations entre des rapports de diverses grandeurs géométriques, cinématiques et dynamiques.

Elles sont établies à l'aide de principes et de raisonnements qui permettent de laisser complètement arbitraires trois des grandeurs qui servent de termes de comparaison, par exemple les trois grandeurs fondamentales : longueur, temps, force. Mais il est convenu que les autres grandeurs choisies pour unités sont les unités normales du système absolu ayant pour bases les premières.

Il suit de là que toute équation de mécanique jouit, par rapport à chacune des trois grandeurs dont les unités sont laissées arbitraires, de la propriété d'homogénéité que présentent les équations de la géométrie relativement à la seule longueur. — Les différents termes d'une telle équation devront donc avoir les mêmes dimensions par rapport à $|L|$, les mêmes dimensions par rapport à $|T|$, les mêmes dimensions par rapport à $|F|$, à condition, bien entendu, d'avoir égard à la dépendance convenue entre les grandeurs dérivées et les grandeurs fondamentales.

---

(1) Voir la note I.

Ainsi, dans la formule

$$v = \sqrt{\frac{e}{d}}$$

donnée par Newton pour représenter la vitesse de propagation du son dans l'air, e désignant une pression (dimens. FL^{-2}), et d une densité (dimens. $FL^{-4}T^2$), les symboles de dimensions des deux membres sont respectivement

$$LT^{-1} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{FL^{-2}}{FL^{-4}T^2}} = LT^{-1},$$

c'est-à-dire que les deux membres sont de degré 1 en L, de degré — 1 en T et de degré 0 en F.

Ainsi encore dans la formule

$$t = \sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{\mathcal{M}_0}},$$

qui exprime la durée de l'oscillation d'un corps suspendu à un fil élastique, autour de l'axe de ce fil, sous l'influence d'une torsion, Σmr^2 désignant le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe du fil et $\mathcal{M}_0$ le moment du couple de torsion par unité d'angle, les symboles de dimensions des deux membres sont respectivement

$$T \text{ et } \sqrt{\frac{ML^2}{FL}} = \sqrt{\frac{M}{F}L} = \sqrt{\frac{T^2}{L}L} = T.$$

Ce caractère d'homogénéité permet de prévoir la forme que doit présenter une équation de mécanique entre des grandeurs données.

Cette remarque paraît avoir été nettement formulée et appliquée par le chevalier Daviet de Foncenex, qui s'en est servi pour donner une solution du problème de la composition des forces (1). M. Bertrand l'a remise en lumière de nos jours et en a montré, par de nombreux exemples, toute la fécondité (2).

(1) *Sur les principes fondamentaux de la mécanique. — Mélanges de la Soc. de Turin*, t. II, p. 299; 1760-61.

(2) *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, 1878, et *Théorie mathém. de l'électricité*, chap. XIII, p. 272.

Supposons que la solution d'un problème doive donner une relation

$$L = \varphi(T, F, M)$$

entre les valeurs numériques d'une longueur, d'un temps, d'une force et d'une masse.

Le second membre de cette relation doit être, comme le premier, de degré 1 en L, de degré 0 en T et de degré 0 en F. Or, il ne dépend de L que par M. Pour être de degré 1 en L, il faut qu'il soit de degré — 1 en M. On doit donc avoir

$$L = \frac{\psi(T.F)}{M}.$$

Pour que le second membre soit de degré 0 en T, il faut que son numérateur soit, comme son dénominateur, de degré 2 en T. Donc

$$L = \frac{T^2.\chi(F)}{M}.$$

Enfin, pour que cette expression soit de degré 0 en F, il faut que le numérateur soit, ainsi que M, de degré 1 en F. On a donc nécessairement

$$L = h\,\frac{FT^2}{M},$$

h étant un coefficient sans dimensions.

Telle doit être par exemple la relation existant entre la durée T d'oscillation d'un pendule, la longueur L du fil, la masse M qui oscille et le poids F de cette masse. On a donc pour représenter cette durée d'oscillation la formule

$$T = \frac{1}{\sqrt{h}}\sqrt{L\frac{M}{F}} = \Theta\sqrt{\frac{L}{\frac{F}{M}}},$$

ou, en posant $\frac{F}{M} = g$,

$$T = \Theta\sqrt{\frac{L}{g}},$$

Θ étant une fonction de l'angle d'écart qui reste à déterminer.

Considérons encore, avec M. Bertrand, la durée de l'oscillation d'une corde vibrante. Elle dépend de la longueur de la corde, de sa masse M et du poids tenseur F. Elle est donc liée à ces quantités par la formule précédente

$$T = \Xi \sqrt{\frac{LM}{F}},$$

Ξ désignant un facteur numérique qui ne sera évidemment pas le même que dans le problème précédent.

Soient, suivant les notations habituelles, ρ la masse spécifique de la corde et r le rayon de sa section; on a

$$M = \pi r^2 L \rho.$$

Donc

$$T = \Xi r L \sqrt{\frac{\pi \rho}{F}},$$

et si N désigne le nombre de vibrations de la corde dans l'unité de temps, on déduit de là

$$N = \frac{1}{\Xi r L} \sqrt{\frac{F}{\pi \rho}},$$

ou, en exprimant ρ au moyen du poids spécifique d,

$$N = \frac{1}{\Xi r L} \sqrt{\frac{gF}{\pi d}}.$$

Comme en géométrie, on fait d'ailleurs en mécanique constamment usage de ces considérations d'homogénéité pour vérifier l'exactitude des calculs effectués sur les formules.

ART. 3. — *De la similitude en mécanique.*

Soit

$$F\left[\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}, \frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}, \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}, \frac{|V_i|}{|\mathfrak{V}_i|}, \frac{|A|}{|\mathfrak{A}|}, \frac{|M|}{|\mathfrak{M}|} \cdots\right] = 0$$

une équation fournie par un problème de mécanique, les grandeurs

$$|L| \; |T| \; |F| \; |V_i| \; |A| \; |M|$$

se rapportant au système étudié, et

$$|\mathfrak{L}| \; |\mathfrak{T}| \; |\mathfrak{F}| \; |\mathfrak{V}_i| \; |\mathfrak{A}| \; |\mathfrak{M}|$$

représentant les grandeurs prises respectivement pour unités.

On peut, comme nous l'avons remarqué plus haut, sans troubler l'équation, changer

$$|\mathfrak{L}| \quad \text{en} \quad \frac{|\mathfrak{L}|}{l},$$

$$|\mathfrak{T}| \quad \text{en} \quad \frac{|\mathfrak{T}|}{t},$$

$$|\mathfrak{F}| \quad \text{en} \quad \frac{|\mathfrak{F}|}{f},$$

à condition de changer en même temps (puisque toutes les unités sont des unités normales)

$$|\mathfrak{V}_i| \quad \text{en} \quad \frac{|\mathfrak{V}_i|}{lt^{-1}} = \frac{|\mathfrak{V}_i|}{v},$$

$$|\mathfrak{A}| \quad \text{en} \quad \frac{|\mathfrak{A}|}{lt^{-2}} = \frac{|\mathfrak{A}|}{a},$$

$$|\mathfrak{M}| \quad \text{en} \quad \frac{|\mathfrak{M}|}{fl^{-1}t^{2}} = \frac{|\mathfrak{M}|}{m},$$

Etc.

La nouvelle équation

$$F\left[\frac{l|L|}{|\mathfrak{L}|}, \frac{t|T|}{|\mathfrak{T}|}, \frac{f|F|}{|\mathfrak{F}|}, \frac{v|V_i|}{|\mathfrak{V}_i|}, \frac{a|A|}{|\mathfrak{A}|}, \frac{m|M|}{|\mathfrak{M}|}, \dots\right] = 0$$

peut être aussi considérée comme correspondant au maintien des unités

$$|\mathfrak{L}| \quad |\mathfrak{T}| \quad |\mathfrak{F}| \quad |\mathfrak{V}_i| \quad |\mathfrak{A}| \quad |\mathfrak{M}|$$

et au changement de

$$|L| \quad \text{en} \quad l|L|,$$

$$|T| \quad \text{en} \quad t|T|,$$

$$|F| \quad \text{en} \quad f|F|,$$

$$|V_i| \quad \text{en} \quad v|V_i|,$$

$$|A| \quad \text{en} \quad a|A|,$$

$$|M| \quad \text{en} \quad m|M|,$$

Etc.

Cette simple remarque est toute la théorie de ce qu'on peut appeler la similitude en mécanique.

Une relation de mécanique ne change pas si l'on change toutes les longueurs du système auquel elle s'applique dans le rapport l, tous les temps dans le rapport t, toutes les forces dans le rapport f, les angles étant conservés, pourvu qu'en même temps on change toutes les vitesses dans le rapport $v = lt^{-1}$, toutes les accélérations dans le rapport $a = lt^{-2}$, toutes les masses dans le rapport $m = fl^{-1}t^2$, etc.

Et réciproquement, *si deux systèmes offrent une telle corrélation que les mêmes formules leur conviennent, l, t, f étant les rapports des longueurs, des temps et des forces, on a nécessairement pour les rapports des vitesses, des accélérations, des masses, etc., les valeurs*

$$v = lt^{-1},$$
$$a = lt^{-2},$$
$$m = fl^{-1}t^2,$$

Etc.

Supposons qu'on puisse à chaque point d'un premier système faire correspondre un point homologue dans un second système et que le rapport des dimensions homologues soit le même, l; les deux systèmes seront *géométriquement semblables.*

Supposons que les vitesses de deux points homologues quelconques, après des temps respectifs $|T|$ et $t|T|$, soient dirigées semblablement dans les deux systèmes et soient dans un rapport constant v; les deux systèmes pourront être dits *cinématiquement semblables.*

Supposons que les forces agissant, aux temps indiqués plus haut, sur deux points homologues quelconques, soient semblablement placées et dans le rapport constant f; les deux systèmes pourront être dits *dynamiquement semblables.*

Supposons enfin que la masse d'un point matériel quelconque du second système soit dans un rapport constant avec la masse du point homologue du premier; les deux systèmes pourront être dits *matériellement semblables.*

La loi de similitude en mécanique signifie que pour que toutes ces conditions soient réalisées à la fois, il faut et il suffit que l'on ait

$$v = lt^{-1},$$
$$m = fl^{-1}t^{2}.$$

Ces considérations importantes n'avaient pas échappé à Newton, ainsi qu'on peut le voir dans l'énoncé de la proposition suivante du livre III des *Principes* (1) :

« Si corporum systemata duo similia ex aequali particularum numero constent, et particulae correspondentes similes sint et proportionales, singulae in uno systemate singulis in altero, et similiter sitae inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, et inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant (eae inter se quae in uno sunt systemate et eae inter se quae sunt in altero) et si non tangant se mutuo quae in eodem sunt systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant, vel fungent se mutuò nisi viribus acceleraticcibus quae sint est particularum correspondentium diametri inversì et quadrata velocitatum directi : dico quod systematum particulae illae pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri. »

Cet énoncé revient, avec nos notations, à présenter la condition

$$m = fl^{-1}t^{2},$$

sous la forme équivalente

$$\frac{f}{m} = lt^{-2}$$

ou

$$\frac{f}{m} = \frac{v^{2}}{l}.$$

M. Bertrand, en rappelant l'attention sur ce théorème de Newton (2), en a indiqué une démonstration fondée sur la considération de l'équation générale, d'où l'on peut déduire la solution de tous les problèmes de mécanique, savoir :

$$\Sigma\left[\left(X - \mu\frac{d^{2}x}{dt^{2}}\right)\delta x + \left(Y - \mu\frac{d^{2}y}{dt^{2}}\right)\delta y + \left(Z - \mu\frac{d^{2}z}{dt^{2}}\right)\delta z\right] = 0.$$

(1) *Principia*, lib. III, prop. XXXII, theor. XXVI.
(2) *Journal de l'École polytechnique*, t. XIX, 32e cahier, p. 189; 1848.

Si, dans un système mécanique auquel on a fait l'application de cette équation, toutes les longueurs sont altérées dans un rapport l, toutes les forces dans un rapport f, toutes les masses dans un rapport m et tous les temps dans un rapport t, l'expression Σ se change en la suivante :

$$\Sigma\left[\left(fX-\frac{ml}{t^2}\mu\frac{d^2x}{dt^2}\right)l\delta x+\left(fY-\frac{ml}{t^2}\mu\frac{d^2y}{dt^2}\right)l\delta y+\left(fZ-\frac{ml}{t^2}\mu\frac{d^2z}{dt^2}\right)l\delta z\right]$$

qui sera égale à zéro à condition que l'on ait

$$f=\frac{ml}{t^2}.$$

La démonstration de Newton, ainsi que le fait remarquer M. Bertrand, « permet de mieux comprendre la véritable raison du théorème et semble en même temps plus propre à guider dans les nombreuses applications dont il est susceptible ». Mais cette démonstration est un peu longue et éparse en plusieurs endroits du livre des *Principes*. La démonstration fondée sur l'examen des conditions d'homogénéité des équations de la mécanique et la considération des dimensions des grandeurs qui y figurent, semble avoir l'avantage d'unir la brièveté à toute la clarté désirable.

On pourra juger de la variété et de l'intérêt des applications dont est susceptible le théorème en question par les exemples suivants, empruntés à M. Bertrand (1) :

I. Soit un point matériel de masse μ sollicité vers un centre O par une force proportionnelle à la distance. Considérons les systèmes obtenus en plaçant le point μ sans vitesse initiale à deux distances différentes du centre; ce sont deux systèmes mécaniquement semblables. Le rapport des masses est égal à l'unité. Si l est le rapport des distances, celui des forces, par suite de la loi supposée de l'attraction, sera aussi l. On a donc dans ce cas particulier

$$m=1,$$
$$f=l.$$

(1) *Loc. cit.*

Si l'on introduit ces valeurs dans la relation générale

$$f = mlt^{-2},$$

on en tire

$$t = 1,$$

ce qui signifie qu'au bout de temps égaux les deux mobiles sont en des points homologues. En particulier, les deux mobiles arriveront en même temps au point O, ou, en d'autres termes, le temps employé par un mobile attiré par un point O, suivant la loi supposée plus haut pour parvenir à ce point, est indépendant de la distance initiale.

La formule $v = lt^{-1}$ donne dans ce cas $v = l$, d'où il suit que le rapport des vitesses est égal au rapport des distances, ou que la vitesse du mobile est proportionnelle à sa distance au centre et par suite à la force. Si donc, en outre de l'attraction supposée, s'exerçait sur le mobile une résistance proportionnelle à la vitesse, le problème ne serait pas changé; on aurait toujours

$$m = 1,$$
$$f = l,$$

et par suite $t = 1$, c'est-à-dire que le temps employé par le mobile pour atteindre le centre O serait encore indépendant de la distance initiale.

Comme c'est à la considération d'un mouvement tel que celui que nous venons d'examiner que se ramène l'étude du mouvement d'un point pesant sur une cycloïde, on démontre immédiatement par les considérations qui précèdent le tautochronisme de cette courbe, soit dans le cas du vide, soit dans le cas d'un milieu résistant proportionnellement à la vitesse.

II. Considérons deux pendules simples, de même masse, de longueurs inégales et écartés du même angle. Ils forment deux systèmes mécaniquement semblables, pour lesquels $m = 1$. La formule

$$f = mlt^{-2}$$

devient ici

$$f = lt^{-2}$$

et donne

$$t = \sqrt{\frac{l}{f}}$$

ou

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\frac{L_1}{L_2}}{\frac{F_1}{F_2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{L_1}{L_2}}{\frac{g_1}{g_2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{L_1}{g_1}}}{\sqrt{\frac{L_2}{g_2}}}.$$

On voit par là que T est proportionnel à $\sqrt{\frac{L}{g}}$, le coefficient de proportionnalité dépendant de l'angle d'écart.

III. Soient deux cordes de longueurs inégales tendues par des poids égaux et munies de curseurs semblablement placés dont les masses sont entre elles dans le rapport même des distances, qui est le rapport l des longueurs.

Elles offrent un cas de similitude mécanique dans lequel

$$f = 1$$
$$m = l.$$

La formule

$$f = mlt^{-2}$$

donne alors

$$t = l.$$

On en conclut que les durées d'oscillation des deux cordes sont entre elles dans le même rapport que leurs longueurs et aussi dans le même rapport que les masses des curseurs, résultat conforme à celui auquel est arrivé Duhamel dans l'étude analytique du problème.

IV. Considérons enfin la propagation d'un ébranlement dans deux colonnes élastiques de mêmes dimensions, mais de natures différentes, l'une d'élasticité e_1 et de densité d_1, l'autre d'élasticité e_2 et de densité d_2. Les colonnes en question forment deux systèmes semblables pour lesquels on a

$$l = 1,$$

$$f = \frac{e_1}{e_2},$$

$$m = \frac{d_1}{d_2}.$$

La formule

$$f = mlt^{-2}$$

conduit à la relation

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{1}{t^2},$$

d'où

$$t = \sqrt{\frac{\frac{d_1}{d_2}}{\frac{e_1}{e_2}}}.$$

Mais ici

$$v = \frac{1}{t};$$

donc

$$v = \sqrt{\frac{\frac{e_1}{e_2}}{\frac{d_1}{d_2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{e_1}{d_1}}{\frac{e_2}{d_2}}}.$$

La vitesse de propagation d'un ébranlement dans une colonne élastique est proportionnelle à $\sqrt{\frac{e}{d}}$, résultat conforme à la formule de Newton.

Les considérations qui font l'objet de ce chapitre ont un intérêt pratique très considérable; elles expliquent pourquoi des systèmes mécaniques qui réussissent en petit, souvent, à la grande surprise des inventeurs, ne réussissent pas en grand. Voici un exemple très simple, emprunté à Galilée, qui fera clairement saisir cette importante remarque :

Soit une poutre homogène, de section uniforme S, encastrée normalement dans un mur vertical et faisant saillie en dehors sur une longueur 2L. Considérons la section de la poutre située au ras du mur. On peut assimiler la résistance qui la maintient en place à une force normale qui sera représentée par φ.S, si φ désigne sa valeur par unité de surface, valeur qui dépend de la nature de la substance constituant la poutre. Si H désigne le bras de levier de cette force par rapport au point d'appui inférieur de la section, son moment par rapport à ce point sera

$$\varphi SH.$$

La section est sollicitée à tourner autour de ce point par l'action de la pesanteur sur la partie saillante de la poutre. Soit P le poids de cette partie. Il est appliqué à une distance L du mur; son moment par rapport au point d'appui de la section est donc

$$PL.$$

La poutre résistera ou se rompra suivant que l'on aura

$$\varphi SH > PL$$

ou

$$\varphi SH < PL,$$

et l'état critique sera caractérisé par la relation

$$\varphi SH = PL.$$

En désignant par p le poids spécifique de la substance constituant la poutre, on a $P = S.2L.p$, et la relation précédente peut s'écrire

$$\varphi SH = S.2L.pL.$$

Supposons une première poutre dans l'état critique et considérons une deuxième poutre de même substance, semblable à la première et semblablement encastrée, le rapport de similitude ayant la valeur l. Pour cette seconde poutre, le moment de la résistance sera

$$\varphi.l^2S.lH$$

et le moment de la puissance

$$l^2S.2lL.p.lL,$$

φ et p conservant les mêmes valeurs, puisque la nature de la substance est la même. Or, ces deux moments ne sont plus égaux. On se serait donc trompé si l'on avait voulu conclure de la stabilité de la première poutre celle de la seconde.

Si, en changeant ainsi l'échelle d'un système mécanique, il peut arriver qu'on trouve un changement dans les lois qui le régissent, c'est que lorsqu'on passe du petit au grand on n'est souvent pas maître de faire varier toutes les quantités suivant les rapports exigés par les règles de la similitude mécanique exposées tout à l'heure.

Ainsi, dans l'exemple précédent, on n'était pas maître de faire varier φ et p.

LIVRE II

Examen de divers systèmes pratiques d'unités absolues géométriques et mécaniques.

CHAPITRE I

Différents types possibles de systèmes coordonnés d'unités dérivées.

Considérons trois grandeurs $|X|$, $|Y|$, $|Z|$ telles que les égalités

$$\frac{|X|}{|\mathfrak{X}|} = h' \left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^{\lambda'} \left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{\tau'} \left(\frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\right)^{\varphi'},$$

$$\frac{|Y|}{|\mathfrak{Y}|} = h'' \left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^{\lambda''} \left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{\tau''} \left(\frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\right)^{\varphi''},$$

$$\frac{|Z|}{|\mathfrak{Z}|} = h''' \left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^{\lambda'''} \left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{\tau'''} \left(\frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\right)^{\varphi'''},$$

fournies par le tableau du chapitre VI (livre I), puissent être résolues par rapport à $\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}$, $\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}$, $\frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}$.

A l'aide des expressions

$$\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|} = k' \left(\frac{|X|}{|\mathfrak{X}|}\right)^{x'} \left(\frac{|Y|}{|\mathfrak{Y}|}\right)^{y'} \left(\frac{|Z|}{|\mathfrak{Z}|}\right)^{z'},$$

$$\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|} = k'' \left(\frac{|X|}{|\mathfrak{X}|}\right)^{x''} \left(\frac{|Y|}{|\mathfrak{Y}|}\right)^{y''} \left(\frac{|Z|}{|\mathfrak{Z}|}\right)^{z''},$$

$$\frac{|F|}{|\mathfrak{F}|} = k''' \left(\frac{|X|}{|\mathfrak{X}|}\right)^{x'''} \left(\frac{|Y|}{|\mathfrak{Y}|}\right)^{y'''} \left(\frac{|Z|}{|\mathfrak{Z}|}\right)^{z'''},$$

qui en seront déduites, on pourra exprimer tous les rapports

$$\frac{|G|}{|\mathcal{G}|}$$

au moyen des rapports

$$\frac{|X|}{|\mathcal{X}|}, \quad \frac{|Y|}{|\mathcal{Y}|}, \quad \frac{|Z|}{|\mathcal{Z}|},$$

et l'on formera un tableau dans lequel ces derniers joueront un rôle analogue à celui que jouaient dans le tableau du chapitre VI (livre I) les rapports des trois grandeurs fondamentales

$$\frac{|L|}{|\mathcal{L}|}, \quad \frac{|T|}{|\mathcal{T}|}, \quad \frac{|F|}{|\mathcal{F}|}.$$

On pourra ainsi, avec les grandeurs

$$|X|, \quad |Y|, \quad |Z|,$$

faire ce que l'on avait fait avec les grandeurs

$$|L|, \quad |T|, \quad |F|,$$

c'est-à-dire définir un système coordonné d'unités dans lequel les unités des grandeurs

$$|X|, \quad |Y|, \quad |Z|$$

serviront de bases, la définition des unités dérivées se déduisant du symbole des dimensions des diverses grandeurs par rapport à $|X|$, $|Y|$, $|Z|$, suivant la même règle que dans le système ayant pour base le groupe $|L|$, $|T|$, $|F|$.

On peut ainsi concevoir un assez grand nombre de systèmes coordonnés d'unités dérivées différant entre eux par la nature d'une ou plusieurs des grandeurs dont les unités sont arbitraires.

Le *type* d'un système est indiqué par le groupe

$$(X, \quad Y, \quad Z)$$

des symboles désignant les grandeurs qui lui servent de base.

Deux systèmes qui, ayant pour bases des grandeurs de même nature, ne diffèrent que par les valeurs d'une ou plusieurs de ces grandeurs, ne sont que des variétés d'un même type. Le nombre des variétés possibles d'un type donné est illimité.

Le lecteur fera un utile exercice en cherchant dans le tableau du chapitre VI (livre I) tous les groupes de trois grandeurs en fonction desquelles peuvent être exprimées toutes les autres, suivant la méthode indiquée tout à l'heure.

Un groupe ne peut évidemment renfermer plus d'une grandeur géométrique ni plus de deux grandeurs cinématiques ; de sorte que si l'on désigne par |G| une grandeur géométrique, par |C| une grandeur cinématique et par |D| une grandeur dynamique, les divers types de systèmes possibles appartiendront à l'une des cinq classes représentées par les symboles suivants :

I	|G|	|C|	|D|
II	|G|	|D|	|D|
III	|C|	|D|	|D|
IV	|C|	|C|	|D|
V	|D|	|D|	|D|

La considération du type d'un système d'unités formé suivant la règle que nous avons adoptée n'a de signification en quelque sorte qu'au moment même de la définition du système. Il faut remarquer qu'étant donné un système constitué, rien ne signale particulièrement les trois unités qui ont joué le rôle d'unités fondamentales. On peut dans ce système, en suivant la marche qui vient d'être indiquée, former un grand nombre de groupes de trois unités d'où peuvent découler toutes les autres ; en sorte qu'un même système peut être envisagé successivement comme la réalisation de plusieurs types très divers.

Dans la pratique, ainsi qu'on le verra plus loin, il n'y a que deux types qu'il soit utile de considérer : le type

(L T F)

et le type

(L T M).

CHAPITRE II

Choix des unités fondamentales les plus convenables pour constituer un système universel.

Si, au point de vue théorique, le choix des unités fondamentales devant servir à la constitution d'un système absolu peut, comme on vient de le voir, se porter sur des groupes de grandeurs très nombreux et très divers, il n'en est pas de même au point de vue pratique.

Puisque dans un système coordonné d'unités toutes les mesures se ramènent en définitive à des mesures de grandeur fondamentales, le meilleur système, en pratique, sera celui dans lequel les mesures fondamentales pourront se faire dans les meilleures conditions possible.

Or, pour présenter tous les avantages désirables, une mesure fondamentale devra être *directe, facile, précise, possible en tous temps et en tous lieux*.

Elle possédera toutes ces qualités si l'unité peut être réalisée, matérialisée en quelque sorte en un *étalon;* si la comparaison des grandeurs de même espèce à cet étalon peut se faire au moyen d'une expérience simple; si l'on peut apprécier des sous-multiples de l'étalon d'un ordre très élevé; si cet étalon n'est susceptible d'éprouver aucune altération permanente, et si enfin on peut le retrouver identique à lui-même en tous temps et en tous lieux.

Le choix d'une *longueur* pour l'une des trois grandeurs fondamentales réunit tous ces avantages. Cette longueur peut être représentée par un étalon, savoir : la distance de deux lignes sur une règle de métal à une certaine température. D'ailleurs, on peut assigner une température qu'il est très facile de réaliser en tous temps et en tous lieux : c'est celle de la glace fondante. On pourra, par l'emploi d'une matière spéciale, comme le platine, pur ou allié à un autre métal de sa famille, assurer à la règle une parfaite inaltérabilité chimique, et par le choix d'une forme et de dimensions convenables éviter les flexions qui pourraient en amener une déformation permanente.

Comparer une longueur |L| à une longueur étalon |$\mathcal{L}$|, c'est trouver deux longueurs |$\mathcal{L}_1$| et |$\mathcal{L}_2$|, multiples ou sous-multiples connus de l'étalon, comprenant entre elles la longueur |L| et aussi voisines l'une de l'autre que possible. En prenant pour valeur numérique de |L| le nombre

$$\tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2),$$

on commettra une erreur moindre que

$$\tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2).$$

Plus la différence |$\mathcal{L}_1$| — |$\mathcal{L}_2$| sera petite, plus la précision de la mesure sera grande. Or, grâce au vernier, à la vis micrométrique et surtout à certains phénomènes optiques, on peut apprécier des différences de longueur extrêmement petites. La comparaison d'une longueur à un étalon de longueur est parmi toutes les opérations métrologiques l'une des plus précises.

Grâce à la perfection des horloges et des observations astronomiques, il est possible de réaliser en tous temps et en tous lieux une durée qui soit de la durée de la rotation de la terre sur elle-même (jour sidéral) une fraction définie connue avec une approximation très grande, et qui puisse servir, par conséquent, d'unité de durée. La comparaison d'une durée à cette unité est d'ailleurs une opération facile et très précise, car on dispose de moyens de réaliser et d'estimer des intervalles de temps extrêmement petits.

Considérons enfin un échantillon de platine. La nature de ce métal est telle que cet échantillon est aussi peu sujet que possible à des modifications physiques ou chimiques. Si l'on évite de le soumettre à des manipulations susceptibles, soit par leur nature, soit par leur fréquence, d'en déterminer une usure sensible, il pourra demeurer indéfiniment identique à lui-même. On peut l'employer à définir une unité de force, en convenant de prendre pour cette unité son poids en un lieu déterminé. Mais ainsi il ne réalise pas, à proprement parler, un étalon de force, car le poids en question dépend de la position qu'occupe l'échantillon considéré à la surface de la terre, et n'est égal à l'unité de force qu'en un lieu particulier.

Mais si l'on emploie cet échantillon de platine à définir une unité de masse, on ne rencontre plus le même inconvénient. Sa masse est indépendante de sa position. Elle constitue un étalon possédant toutes les qualités désirables : inaltérabilité, durée, ubiquité. Les comparaisons des masses avec cet étalon seront susceptibles d'une extrême précision, puisqu'elles se feront avec la balance, qui de tous les instruments de physique est un de ceux auxquels on peut donner le plus de sensibilité.

Le choix, plus avantageux en théorie, des grandeurs fondamentales : *longueur, temps, force,* pour constituer un système coordonné d'unités dérivées, est celui qui a été fait, à l'exemple des géomètres, par les auteurs du *Système métrique.*

Le choix, plus avantageux en pratique, des grandeurs : *longueur, temps, masse,* proposé par Gauss (1) pour constituer un système de mesures scientifiques, est aujourd'hui adopté par les savants du monde entier.

CHAPITRE III

Système métrique.

Le système métrique peut être défini un système coordonné d'unités dérivées du type

(L T F).

---

(1) *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata,* auctore Carlo-Frederico Gauss. Gottingae, sumtibus Dieterichianis, 1833.

Les symboles de dimensions des diverses grandeurs dans ce système sont ceux mêmes qui figurent dans le tableau du chapitre VII (livre I).

Pour distinguer ce système de tout autre du même type, il faut définir la longueur, le temps, la force qui lui servent d'unités fondamentales.

Ces unités sont respectivement le *mètre,* la *seconde,* le *kilogramme.*

Art. 1. — *Mètre.*

Le mètre a été déduit de la longueur d'un arc de méridien compris entre le parallèle de Dunkerque et le parallèle de la tour du fort de Montjouy, près de Barcelone.

Cet arc, correspondant à

$$9^{\circ},67380,$$

fut déterminé par une chaîne de 90 triangles. Une base, mesurée entre Melun et Lieursaint, servit à calculer la partie de cette méridienne comprise entre Dunkerque et Évaux; une autre base, mesurée près de Perpignan, entre Vernet et Salces, servit à calculer la partie comprise entre Évaux et Montjouy. Ces deux bases furent mesurées par Delambre à l'aide de quatre règles bi-métalliques que Borda avait comparées entre elles et à la Toise du Pérou.

On trouva que la longueur de la méridienne allant de Dunkerque à Barcelone valait 551585 fois la longueur que possède à 13° Réaumur la Toise du Pérou (1). Ayant calculé d'après cela la longueur que devait avoir le quart du méridien auquel appartenait cet arc, on la trouva de

5 130 740 toises.

Le mètre, défini comme la dix-millionième partie du quart d'un méridien, devait donc être une longueur de

$$0^{\text{toise}},5\,130\,740$$

(1) Voir la note II.

ou

$3^{\text{pieds}}\ 11^{\text{lignes}},296.$

Au sujet de l'étalon destiné à représenter cette longueur, la loi du 18 germinal an III (7 avril 1795) édictait les prescriptions suivantes :

« Il n'y aura qu'un seul étalon des poids et mesures pour toute la République; ce sera une règle en platine sur laquelle sera tracé le mètre, qui a été adopté pour l'unité fondamentale de tout le système de mesures. Cet étalon sera exécuté avec la plus grande précision, d'après les expériences et les observations des commissaires chargés de sa détermination, et il sera déposé près du Corps législatif, ainsi que le procès-verbal des opérations qui auront servi à le déterminer. »

Pris à la lettre, ce texte indiquait que le mètre étalon prototype devait être une mesure à *traits,* c'est-à-dire portant près de ses extrémités deux traits dont la distance devait représenter le mètre. En fait, les commissaires des poids et mesures construisirent un étalon à *bouts,* c'est-à-dire une règle sur laquelle la longueur du mètre était représentée par la distance même des extrémités.

Pour étalonner le mètre définitif, Borda s'était proposé de suivre la méthode qui lui avait si bien réussi pour le mètre provisoire. La commission qui eut à s'occuper de cette opération s'écarta un peu de ce plan. Elle étudia d'abord 12 mètres en fer construits par Lenoir. L'un d'eux se trouva juste de la longueur requise et servit ensuite à étalonner tous les autres.

Une règle de platine, regardée par la commission comme ayant à la température de 0° exactement la longueur désirée, fut présentée le 4 messidor an VII au Corps législatif comme l'étalon prototype du mètre et déposée le même jour aux Archives nationales, où elle est encore actuellement dans un état parfait de conservation.

Des nombreuses mesures géodésiques effectuées dans le cours de ce siècle il résulte, d'après M. Faye, que la longueur de cette règle est contenue dans le quart d'un méridien, non pas 10 000 000 fois, mais 10 002 008 fois.

La longueur qui sert de base au système métrique et qui porte le nom de *mètre* n'est donc pas, comme le désiraient les fondateurs du système, la dix-millionième partie du quart d'un méridien ; en fait, elle est simplement la longueur que possède à la température de la glace fondante la règle de platine déposée, le 4 messidor an VII, aux Archives nationales.

Art. 2. — *Seconde.*

L'unité de temps actuellement adoptée dans le système métrique est la seconde sexagésimale de temps moyen, c'est-à-dire la fraction

$$\frac{1}{86\,400}$$

du jour solaire moyen ou la fraction

$$\frac{1}{86\,164} \text{ environ}$$

du jour sidéral.

A l'origine du système, il avait été convenu que la division décimale serait exclusivement employée dans toutes les mesures. L'unité de temps choisie en conséquence avait été tout d'abord la seconde dite *décimale,* qui était la fraction

$$\frac{1}{100\,000}$$

du jour solaire moyen.

Cette unité, que quelques auteurs ont employée, a été abandonnée lorsqu'on est revenu de la division décimale du cercle à la division sexagésimale.

Art. 3. — *Kilogramme.*

L'unité de poids ou de force du système métrique est un certain poids appelé *kilogramme,* dont les auteurs du système voulurent rattacher la définition d'une façon très simple à celle du mètre, en proposant de prendre pour ce poids le poids absolu à Paris d'un décimètre cube d'eau pure à son maximum de densité.

Lefèvre-Gineau et Fabroni l'ont déduit, en reprenant les expériences de Lavoisier et Haüy, du poids d'un volume connu d'eau distillée dans les conditions requises.

Un cylindre creux de laiton étant suspendu à l'un des plateaux d'une balance par une tige creuse qui permettait à l'air intérieur de communiquer avec l'extérieur, ces physiciens déterminèrent l'effort exercé sur le fléau de la balance par ce cylindre successivement plongé dans de l'eau à 0°,3, puis dans l'air. Le volume sur lequel s'exerçait la poussée de l'eau dans la première expérience était égal au volume extérieur du cylindre augmenté du volume extérieur de la partie plongée de la tige. D'après les mesures du diamètre moyen (0^m,2428368 à 17°,6), de la hauteur moyenne (0^m,2437672 à 17°,6), du cylindre, du diamètre (1^{mm},285), et de la longueur de la partie plongée (43^{mm}) de la tige, le volume immergé dans l'eau à 0°,3 fut trouvé égal à 11^{dm^3},2796202.

Des résultats des deux pesées on déduisit que le poids dans le vide de 11^{dm^3},2796202 d'eau à 0°,3 était égal au poids dans le vide du multiple 11,2692387 de la masse de laiton unité employée dans les pesées comme terme de comparaison.

Ayant déterminé la variation qu'éprouve la densité de l'eau avec la température, Lefèvre-Gineau calcula que, pour avoir le poids de 11^{dm^3},2796202 d'eau à la température du maximum de densité, il fallait ajouter au poids précédent la fraction 0,00144, ce qui donnait 11,2706787. Par là, le poids d'un décimètre cube d'eau à la température du maximum de densité fut fixé à la fraction 0,9992072 de l'unité de poids arbitraire employée; et celle-ci ayant été comparée au marc moyen de la pile de Charlemagne (1), on trouvera finalement que le kilogramme devrait être équivalent à .

18 827^{grains},15.

(1) Voir la note III.

Une masse de platine que la Commission jugea avoir un poids, dans le vide, égal à cette valeur fut, en même temps que le mètre, présenté au Corps législatif et déposé, comme étalon prototype du kilogramme, aux Archives nationales.

De nombreuses mesures, effectuées depuis l'établissement du système métrique, ont montré que le kilogramme réel diffère légèrement du kilogramme théorique, c'est-à-dire du poids absolu à Paris d'un décimètre cube d'eau pure à son maximum de densité.

On doit donc définir le kilogramme comme étant le poids absolu à Paris de la masse de platine déposée le 4 messidor an VII aux Archives nationales.

L'unité de force du système métrique (1 kilog.) agissant sur la masse de platine déposée aux Archives (kilogramme-masse) lui communiquerait une accélération égale à la valeur de g à Paris, soit une accélération représentée en unités métriques par 9,8096. La masse à laquelle cette même force communiquerait une accélération 1 vaudrait donc 9,8096 kilogrammes-masse. Telle est la masse unité du système métrique. Nous la représenterons par $|M_1|$.

Au même type (LTF) que le système métrique appartiennent les systèmes : pied (français), seconde, livre (française) ; pied (anglais), seconde, livre (anglaise), employés dans un grand nombre de mémoires scientifiques antérieurs à l'époque actuelle.

Dans certains cas, il pourra être utile, en vertu de la remarque faite à la fin du chapitre I (livre II), de considérer le système métrique comme un système du type (LTM) ayant pour bases le *mètre*, la *seconde* et la *masse* $|M_1|$.

Lorsque la comparaison d'une grandeur à une grandeur de son espèce prise pour unité conduit à un rapport exprimé par un nombre très grand ou très petit, ce rapport ne donne à l'esprit qu'une idée peu nette de la grandeur mesurée. Aussi est-on conduit nécessairement à employer, concurremment avec l'unité principale, dès unités secondaires plus appropriées que l'unité principale à l'évaluation des quantités beaucoup plus grandes ou beaucoup plus petites que cette dernière.

Dans le système métrique, on emploie comme unités secondaires des multiples ou sous-multiples décimaux des unités principales. On désigne les multiples par les préfixes *déca, hecto, kilo,* et les sous-multiples par les préfixes *déci, centi, milli, micro.*

Voici, pour les grandeurs les plus usuelles, le tableau des unités secondaires, avec les notations abrégées par lesquelles on est convenu de les désigner (1) :

		LONGUEURS		SURFACES	
		mètre	m	mètre carré	m^2
mille	(k)	kilomètre	km	kilom. —	km^2
cent	(h)	hectomètre	hm	hectom. —	hm^2
dix	da	décamètre	dam	décam. —	dam^2
dixième	d	décimètre	dm	décim. —	dm^2
centième	c	centimètre	cm	centim. —	cm^2
millième	m	millimètre	mm	millim. —	mm^2
millionième	μ	micromètre ou micron	μ	»	»

		VOLUMES		CAPACITÉS		POIDS	
		mètre cube	m^3	litre	l	gramme	g
mille	(k)	»		»		kilogramme	kg
cent	(h)	»		hectolitre	hl	hectogramme	hg
dix	da	»		décalitre	dal	décagramme	dag
dixième	d	décim. cube	dm^3	décilitre	dl	décigramme	dg
centième	c	centim. —	cm^3	centilitre	cl	centigramme	cg
millième	m	millim. —	mm^3	millilitre	ml	milligramme	mg
millionième	μ	»	»	microlitre	λ	microgramme	γ

(1) Ch.-Ed. Guillaume, *Symboles et abréviations* (*Arch. des sc. phys. et nat.*, 1889, 3, XXII, p. 438).

CHAPITRE IV

Système CGS.

Reprenant une proposition faite en 1861 par l'Association britannique pour l'avancement des sciences, laquelle s'était inspirée de l'exemple de Gauss, un Congrès international d'électriciens, réuni à Paris en 1881, a voté l'adoption, pour les mesures scientifiques, d'un système coordonné d'unités ayant pour bases :

Une longueur : le *centimètre*.
Un temps : la *seconde*.
Une masse : le *gramme-masse*.

Le centimètre est la centième partie de la longueur à 0° C. de la règle de platine étalon des Archives.

La seconde est la seconde sexagésimale de temps moyen.

Le gramme-masse est la millième partie de la masse de platine déposée aux Archives pour représenter le kilogramme étalon du système métrique.

Les initiales des noms de ces trois unités fondamentales étant respectivement C, S, G, on devrait désigner le système auquel elles servent de bases par le symbole (C,S,G). Par raison d'euphonie, on a adopté le symbole

(CGS).

La définition des unités dérivées géométriques ou cinématiques dans le système (CGS) se fait de la même façon, aux valeurs près des unités fondamentales, que dans le système métrique.

Ainsi, l'unité (CGS) de surface est le *centimètre carré*.

L'unité de volume est le *centimètre cube*.

L'unité de vitesse est la *vitesse avec laquelle un centimètre est parcouru d'un mouvement uniforme en une seconde.*

L'unité d'accélération est l'*accélération en vertu de laquelle une vitesse d'un centimètre par seconde est gagnée en une seconde.*

Cette dernière unité est 100 fois plus petite que l'unité métrique. Ainsi, la valeur métrique de l'accélération de la pesanteur à Paris étant

$$9{,}8096,$$

sa valeur (CGS) sera

$$980{,}96.$$

L'unité de force est la *force capable d'imprimer au gramme-masse une accélération égale à l'unité d'accélération.* — On est convenu de désigner cette force sous le nom de *dyne* (du grec δυναμις).

Il est aisé de trouver en poids la valeur de la dyne.

Soit, en général, à trouver en poids la force unité d'un système ayant pour bases les grandeurs |L|, |T|, |M|.

Désignons par g la valeur numérique de l'accélération de la pesanteur en un lieu particulier dans ce système. L'action (f^{gr}) de la pesanteur sur la masse |M| lui communique une accélération g; la force unité du système |F|, qui ne communiquerait à cette même masse qu'une accélération 1, vaut g fois moins, soit

$$\frac{f^{gr}}{g}.$$

L'unité de force d'un système est donc une fraction $\frac{1}{g}$ *du poids de l'unité de masse de ce système en un lieu où la valeur numérique de l'accélération de la pesanteur dans ce système est* g.

Appliquons ce résultat au système (CGS).

On a, à Paris,

$$f = 1^{gr},$$
$$g = 980{,}96;$$

donc

$$1 \text{ dyne} = \frac{1^{gr}}{980{,}96},$$

et par suite

$$1^{gr} = 980{,}96 \text{ dynes},$$
$$1^{kg} = 980960 \text{ dynes}.$$

On remarquera que la dyne est un peu supérieure à 1 milligramme.

Les unités dérivées dynamiques sont liées au centimètre, à la seconde et à la dyne, comme les unités de même nature du système métrique sont liées au mètre, à la seconde et au kilogramme.

Ainsi, l'unité (CGS) de travail est la *dyne centimètre,* c'est-à-dire le *travail effectué par une dyne déplaçant d'un centimètre, dans sa propre direction, son point d'application.* — Cette unité de travail est désignée sous le nom d'*erg* (du grec ἔργον).

L'unité (CGS) de pression est la pression produite par le poids d'une dyne réparti uniformément sur une surface d'un centimètre carré. — Une pression valant un million de fois la précédente diffère peu de la pression d'un kilogramme par centimètre carré. On la désigne sous le nom de *barie.*

Dans le système (CGS), comme dans le système métrique, on emploie, outre les unités normales, des unités secondaires formées avec des multiples ou des sous-multiples décimaux des unités normales. On désigne ces unités secondaires par les préfixes *déca, hecto, kilo, méga,* dans le cas des multiples, et par *déci, centi, milli, micro,* dans le cas des sous-multiples. Les plus usités sont les multiples et sous-multiples correspondant aux puissances de 1000.

Voici, pour les principales grandeurs, le tableau de ces multiples et sous-multiples avec l'indication des symboles abréviatifs par lesquels on peut les désigner [1] :

		FORCE		TRAVAIL		PRESSION	
		Dyne	d	Erg	e	barie $= \frac{\text{Md}}{\text{cm}^2}$	$=$ b
million	(M)	Megadnye	Md	Megerg	Me	Megabarie	Mb
mille	(k)	kilodyne	kd	kiloerg	ke	kilobarie	kb
millième	(m)	millidyne	md	millierg	me	millibarie	mb
millionième	(μ)	microdyne	μd	microerg	μe	microbarie	μb

Le système (CGS) comprenant parmi ses grandeurs fondamentales, comme le système métrique, une longueur et un temps, les symboles de dimensions des grandeurs géométriques et cinématiques sont les mêmes dans les deux systèmes et sont ceux qui se trouvent indiqués dans le tableau du chapitre VII (livre I).

Seules les dimensions des grandeurs dynamiques sont différentes. En tirant de la relation

$$\frac{|M|}{|\mathfrak{M}|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|} \left(\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}\right)^{-1} \left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{2}$$

l'expression du rapport $\frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}$, soit

$$\frac{|F|}{|\mathfrak{F}|} = \frac{|M|}{|\mathfrak{M}|} \frac{|L|}{|\mathfrak{L}|} \left(\frac{|T|}{|\mathfrak{T}|}\right)^{-2},$$

et l'introduisant dans les expressions, relatives aux systèmes du type (LTF), des rapports des diverses grandeurs dynamiques, on formera, pour l'application des systèmes du type (LTM), et en particulier du système (CGS), le tableau suivant :

---

[1] Ch.-Ed. Guillaume, *Symboles et abréviations* (*Arch. des sc. phys. et nat.*, 1889, 3, XXII, p. 438).

NATURE des GRANDEURS	COMPOSITION des RAPPORTS	VALEURS numériques DES RAPPORTS	SYMBOLES de DIMENSIONS
Forces.	$\frac{\lvert M\rvert}{\lvert\mathcal{M}\rvert}\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}\left(\frac{\lvert T\rvert}{\lvert\mathcal{T}\rvert}\right)^{-2}$	$\frac{M.L.T^{-2}}{\mathcal{M}.\mathcal{L}.\mathcal{T}^{-2}}$	MLT^{-2}
Moments.	$\frac{\lvert M\rvert}{\lvert\mathcal{M}\rvert}\left(\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}\right)^{2}\left(\frac{\lvert T\rvert}{\lvert\mathcal{T}\rvert}\right)^{-2}$	$\frac{ML^2T^{-2}}{\mathcal{M}\mathcal{L}^2\mathcal{T}^{-2}}$	ML^2T^{-2}
Travaux.	$\frac{\lvert M\rvert}{\lvert\mathcal{M}\rvert}\left(\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}\right)^{2}\left(\frac{\lvert T\rvert}{\lvert\mathcal{T}\rvert}\right)^{-2}$	$\frac{ML^2T^{-2}}{\mathcal{M}\mathcal{L}^2\mathcal{T}^{-2}}$	ML^2T^{-2}
Puissances mécaniques.	$\frac{\lvert M\rvert}{\lvert\mathcal{M}\rvert}\left(\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}\right)^{2}\left(\frac{\lvert T\rvert}{\lvert\mathcal{T}\rvert}\right)^{-3}$	$\frac{ML^2T^{-3}}{\mathcal{M}\mathcal{L}^2\mathcal{T}^{-3}}$	ML^2T^{-3}
Pressions.	$\frac{\lvert M\rvert}{\lvert\mathcal{M}\rvert}\left(\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}\right)^{-1}\left(\frac{\lvert T\rvert}{\lvert\mathcal{T}\rvert}\right)^{-2}$	$\frac{ML^{-1}T^{-2}}{\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{T}^{-2}}$	$ML^{-1}T^{-2}$
Masses.	$\frac{\lvert M\rvert}{\lvert\mathcal{M}\rvert}$	$\frac{M}{\mathcal{M}}$	M
Densités.	$\frac{\lvert M\rvert}{\lvert\mathcal{M}\rvert}\left(\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}\right)^{-3}$	$\frac{ML^{-3}}{\mathcal{M}\mathcal{L}^{-3}}$	ML^{-3}
Moments d'inertie.	$\frac{\lvert M\rvert}{\lvert\mathcal{M}\rvert}\left(\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}\right)^{2}$	$\frac{ML^2}{\mathcal{M}\mathcal{L}^2}$	ML^2
Quantités de mouvement.	$\frac{\lvert M\rvert}{\lvert\mathcal{M}\rvert}\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}\left(\frac{\lvert T\rvert}{\lvert\mathcal{T}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{MLT^{-1}}{\mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{T}^{-1}}$	MLT^{-1}
Forces vives.	$\frac{\lvert M\rvert}{\lvert\mathcal{M}\rvert}\left(\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}\right)^{2}\left(\frac{\lvert T\rvert}{\lvert\mathcal{T}\rvert}\right)^{-2}$	$\frac{ML^2T^{-2}}{\mathcal{M}\mathcal{L}^2\mathcal{T}^{-2}}$	ML^2T^{-2}

Pour comparer les unités (CGS) à celles d'un système du type (LTF), il sera nécessaire de considérer, conformément à la remarque qui termine le chapitre I (livre II), les unités (CGS) comme formant un système du type (LTF) dérivé du *centimètre,* de la *seconde* et de la *dyne,* et alors on fera usage des formules du chapitre VI (livre I).

Au même type (LTM) que le système (CGS) appartiennent les systèmes :

millimètre, — seconde, — milligramme-masse,
mètre, — seconde, — gramme-masse,

employés l'un par Gauss et Weber, l'autre par l'Association britannique.

En appliquant le raisonnement fait plus haut à propos de la dyne, on trouve que l'unité de force du système de Gauss vaut

$$\frac{1^{\text{mgr}}}{9809,6} \text{ ou } \frac{1}{10000} \text{ dyne,}$$

et celle du système de l'Association britannique

$$\frac{1^{\text{gr}}}{9,8096} \text{ ou } 100 \text{ dynes.}$$

On peut donc considérer ces deux systèmes comme appartenant au type (LTF) et ayant pour bases, l'un :

le millimètre, — la seconde, — $\frac{1}{10000}$ dyne;

l'autre :

le mètre, — la seconde, — 100 dynes.

CHAPITRE V

Solution générale des problèmes relatifs aux changements d'unités. Exemples.

Art. 1.

Soient g_1 et g_2 les valeurs numériques d'une même grandeur $|G|$ comparée successivement à deux grandeurs $|\mathcal{G}_1|$ et $|\mathcal{G}_2|$ de son espèce. On a

$$|G| = g_1 |\mathcal{G}_1| = g_2 |\mathcal{G}_2|;$$

d'où

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{|\mathcal{G}_1|}{|\mathcal{G}_2|}.$$

Le rapport $\frac{|\mathcal{G}_1|}{|\mathcal{G}_2|}$ est déterminé par des rapports de grandeurs fondamentales qui, dans le cas le plus général, sont au nombre de trois. On a donc

$$\frac{g_2}{g_1} = \left(\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|}\right)^x \left(\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|}\right)^y \left(\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|}\right)^z,$$

$|\mathcal{G}_1|$ étant définie par les grandeurs $|\mathcal{X}_1|$, $|\mathcal{Y}_1|$, $|\mathcal{Z}_1|$, et $|\mathcal{G}_2|$ par les grandeurs $|\mathcal{X}_2|$, $|\mathcal{Y}_2|$, $|\mathcal{Z}_2|$.

Dans cette égalité, x, y, z sont connus dès qu'on sait de quelle espèce de grandeur $|G|$ il est question, tandis que les rapports

$$\frac{g_2}{g_1}, \frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|}, \frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|}, \frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|}$$

peuvent, séparément ou par groupes, se présenter comme inconnus et par conséquent donner lieu à des problèmes.

Si, dans une égalité telle que la précédente, un seul rapport est inconnu, l'égalité permettra de le déterminer.

Si deux rapports sont inconnus, il est nécessaire, pour les déterminer, d'adjoindre à cette égalité une seconde égalité renfermant au moins un des rapports inconnus.

Pareillement, on peut imaginer des groupes de trois ou quatre égalités capables de conduire à la détermination de trois ou quatre de ces rapports.

Rendons ces considérations générales plus saisissables en montrant par quelques exemples comment l'application en devra être faite.

I

Dans l'ancien système des mesures françaises, l'unité de longueur était une certaine longueur appelée *toise*.

Les sous-multiples de la toise usités concurremment avec elle étaient :

Le *pied* $= \frac{1}{6}$ toise.
Le *pouce* $= \frac{1}{12}$ pied $= \frac{1}{72}$ toise.
La *ligne* $= \frac{1}{12}$ pouce $= \frac{1}{144}$ pied $= \frac{1}{864}$ toise.

Un lecteur habitué à se représenter les longueurs en les comparant au mètre doit donc, en parcourant les mémoires où il est fait usage des anciennes unités, résoudre la question suivante :

Combien une longueur $|L|$ *donnée comme égale à* θ *toises* P *pieds* p *pouces* l *lignes et une fraction* ε *vaut-elle de mètres?*

La longueur $|L|$ est donnée comme une somme, dont les parties sont respectivement des fractions de la toise égales à

$$\theta, \quad \frac{P}{6}, \quad \frac{p}{72}, \quad \frac{l}{864}, \quad \varepsilon\frac{l}{864};$$

elle est par suite une fraction de toise égale à

$$\left(\theta + \frac{P}{6} + \frac{p}{72} + \frac{l}{864} + \varepsilon\frac{l}{864}\right).$$

La question qui se pose est donc la suivante :

Une longueur est une fraction l_1 *d'une longueur* $|\mathcal{L}_1|$; *quelle fraction* l_2 *est-elle d'une autre longueur* $|\mathcal{L}|_2$?

De l'égalité

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{|\mathcal{L}_2|}{|\mathcal{L}_1|}$$

on déduit

$$l_2 = l_1\frac{|\mathcal{L}_1|}{|\mathcal{L}_2|}.$$

Soit, dans le cas actuel, x la fraction de mètre cherchée; on aura

$$x = \left(\theta + \frac{P}{6} + \frac{p}{72} + \frac{l}{864} + \varepsilon\frac{l}{884}\right)\frac{\text{toise}}{\text{mètre}}.$$

Or, le rapport de la toise au mètre est égal à 1,94904 (1); donc

$$x = \left(\theta + \frac{P}{6} + \frac{p}{72} + \frac{l}{864} + \varepsilon\frac{l}{864}\right) 1{,}94904.$$

II

Toute pareille est la question de la conversion des heures, minutes et secondes sidérales, ou des heures, minutes et secondes décimales en heures, minutes et secondes sexagésimales.

---

(1) Log = 0,2898207.

III

Semblable aussi est la question de la conversion en grammes d'un poids exprimé à l'aide des anciennes unités de poids.

L'ancienne unité de poids était un poids appelé *livre*, dont les sous-multiples usités étaient :

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Le } \textit{marc} = & & & & & \tfrac{1}{2} \text{ livre.} \\
\text{L'}\textit{once} = & & & & \tfrac{1}{8} \text{ marc} = & \tfrac{1}{16} \text{ livre.} \\
\text{Le } \textit{gros} = & & & \tfrac{1}{8} \text{ once} = & \tfrac{1}{64} \text{ marc} = & \tfrac{1}{128} \text{ livre.} \\
\text{Le } \textit{grain} = & \tfrac{1}{72} \text{ gros} = & & \tfrac{1}{576} \text{ once} = & \tfrac{1}{4608} \text{ marc} = & \tfrac{1}{9216} \text{ livre.}
\end{array}
$$

Le rapport de la livre au gramme étant égal à

$$489{,}505847 \ (1),$$

un poids évalué à $\mathfrak{l}$ *livres*, $\mathfrak{m}$ *marcs*, $\mathfrak{o}$ *onces*, $\mathfrak{G}$ *gros*, $\mathfrak{g}$ *grains* vaudra un nombre de grammes égal à

$$\left(\mathfrak{l} + \frac{1}{2}\mathfrak{m} + \frac{1}{16}\mathfrak{o} + \frac{1}{128}\mathfrak{G} + \frac{1}{9216}\mathfrak{g}\right) 489{,}505847.$$

IV

Des expériences faites par les académiciens français le 16 avril 1738 (2), il résulte que le son a parcouru la distance de l'Observatoire à Montléry en 1 minute 8 secondes ou 68 secondes. Cette distance est donnée par les observateurs comme égale à 11756 toises. On demande d'évaluer en mètres le parcours du son en une seconde dans les mêmes circonstances.

Désignons par $\mathfrak{V}_1$ la vitesse en vertu de laquelle une longueur d'une toise est parcourue en 68 secondes, et par $\mathfrak{V}_2$ la vitesse en vertu de laquelle une longueur d'un mètre est parcourue en une seconde. Soit x le nombre de mètres cherché. On aura pour la vitesse V de propagation du son les deux évaluations

$$V = 11756\,\mathfrak{V}_1 = x\mathfrak{V}_2;$$

d'où

$$x = 11756\,\frac{|\mathfrak{V}_1|}{|\mathfrak{V}_2|}.$$

(1) Log = 2,6897569.

(2) *Mém. de l'Ac. des Sciences pour 1738.*

Mais

$$\frac{|\mathfrak{V}_1|}{|\mathfrak{V}_2|} = \frac{|\mathfrak{L}_1|}{|\mathfrak{L}_2|}\left[\frac{|\mathfrak{T}_1|}{|\mathfrak{T}_2|}\right]^{-1},$$

et ici

$$\mathfrak{L}_1 = \text{toise}, \qquad \mathfrak{T}_1 = 68 \text{ sec},$$
$$\mathfrak{L}_2 = \text{mètre}, \qquad \mathfrak{T}_2 = 1 \text{ sec};$$

donc

$$\frac{|\mathfrak{V}_1|}{|\mathfrak{V}_2|} = \left(\frac{\text{toise}}{\text{mètre}}\right)\left(\frac{68 \text{ sec}}{\text{sec}}\right)^{-1}$$
$$= 1.94904 . \frac{1}{68};$$

par suite,

$$x = 11756 . 1{,}94904 . \frac{1}{68}.$$

On trouve ainsi,

$$x = 336^{m},96.$$

V.

Dans quelques-unes de ses expériences sur le pendule, de Mairan se servit de sphères de cristal de roche. L'une de ces sphères lui ayant paru particulièrement bien travaillée, il eut l'idée d'en déterminer le diamètre et le poids pour calculer le poids spécifique du cristal de roche. Il évalue le diamètre à 1368 vingtièmes de ligne et le poids à 97200 grains. — Pour comparer cette détermination du poids spécifique du cristal de roche aux déterminations modernes, il faut chercher quel serait, d'après les nombres indiqués par de Mairan, le poids en grammes d'un centimètre cube de cette substance.

Le volume de la sphère de cristal vaut $\frac{1}{6}\pi(1368)^3$ fois le volume du cube ayant un vingtième de ligne de côté.

Le rapport de deux poids spécifiques étant en raison directe des poids et en raison inverse des volumes correspondants, si nous désignons par ps_1 le poids spécifique correspondant à 1 grain par cube d'un vingtième de ligne de côté, le poids spécifique du cristal de roche vaudra

$$\frac{97200}{\frac{1}{6}\pi(1368)^3}\, ps_1.$$

Si, d'autre part, nous désignons par ps_2 le poids spécifique correspondant à 1 gramme par centimètre cube, le poids spécifique du cristal sera exprimé par

$$x p s_2,$$

x étant le nombre qu'il s'agit de déterminer. On posera l'équation

$$\frac{97200}{\frac{1}{6}\pi(1368)^3} p s_1 = x p s_2;$$

d'où

$$x = \frac{97200}{\frac{1}{6}\pi(1368)^3} \cdot \frac{p s_1}{p s_2}.$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{p s_1}{p s_2} &= \left(\frac{\text{grain}}{\text{gramme}}\right)\left(\frac{\text{cube de } \frac{1}{20} \text{ ligne}}{\text{centim cube}}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\text{grain}}{\text{gramme}}\right)\left(\frac{\frac{1}{20} \text{ ligne}}{\text{centim}}\right)^{-3} \\ &= \left(\frac{\text{grain}}{\text{gramme}}\right)\left(\frac{\text{ligne}}{\text{centim}}\right)^{-3} \cdot 20^3. \end{aligned}$$

Or (voir ci-dessus),

$$9216 \text{ grains} = 489{,}505847 \text{ grammes},$$

d'où

$$\frac{\text{grain}}{\text{gramme}} = \frac{489{,}505847}{9216};$$

d'autre part,

$$864 \text{ lignes} = 194{,}904 \text{ centim},$$

d'où

$$\frac{\text{ligne}}{\text{centim}} = \frac{194{,}904}{864}.$$

En portant ces valeurs dans l'expression de x, on trouve finalement

$$x = 2{,}684 \text{ (1)}.$$

---

(1) Les déterminations les plus récentes et les plus exactes faites à l'aide de pesées hydrostatiques ont donné comme valeur moyenne

$$x = 2{,}6508.$$

ART. 2.

De tous les problèmes que fait surgir dans la pratique le changement des unités, le plus fréquent est précisément le plus simple, savoir : celui qui consiste à passer de la valeur numérique d'une grandeur, obtenue dans un certain système d'unités, à la valeur numérique de cette même grandeur dans un autre système.

On a (article précédent)

$$g_2 = g_1 \frac{|\mathcal{G}_1|}{|\mathcal{G}_2|}.$$

Or ici

$$\frac{|\mathcal{G}_1|}{|\mathcal{G}_2|} = \left(\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|}\right)^x \left(\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|}\right)^y \left(\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|}\right)^z,$$

$|\mathcal{X}_1|$, $|\mathcal{Y}_1|$, $|\mathcal{Z}_1|$ étant les bases du premier système, $|\mathcal{X}_2|$, $|\mathcal{Y}_2|$, $|\mathcal{Z}_2|$ celles du second, et x, y, z les dimensions de l'espèce de grandeur considérée.

EXEMPLES.

I

Pour la conversion des mesures métriques en mesures (CGS), on aura

$$\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|} = \frac{\text{mètre}}{\text{cm}} = 100,$$

$$\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|} = \frac{\text{sec}}{\text{sec}} = 1,$$

$$\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|} = \frac{\text{M}_1}{\text{grm}} = 9809{,}6,$$

ou

$$\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|} = \frac{\text{mètre}}{\text{cm}} = 100,$$

$$\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|} = \frac{\text{sec}}{\text{sec}} = 1,$$

$$\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|} = \frac{\text{kilog}}{\text{dyne}} = 980960,$$

suivant qu'on envisagera les deux systèmes en question comme correspondant au type

$$(LTM)$$

ou au type

$$(LTF).$$

Ainsi, ayant trouvé directement (chapitre III, livre II) le rapport $\frac{\mathcal{M}_1}{\text{grm}}$, on peut en déduire le rapport $\frac{\text{kilog}}{\text{dyne}}$ par la formule

$$\frac{\text{kilog}}{\text{dyne}} = \left(\frac{\mathcal{M}_1}{\text{grm}}\right)\left(\frac{\text{mètre}}{\text{cm}}\right)\left(\frac{\text{sec}}{\text{sec}}\right)^{-2},$$

qui donne

$$\frac{\text{kilog}}{\text{dyne}} = 9809{,}60 . 100 . 1 = 980960.$$

Inversement, de la connaissance du rapport $\frac{\text{kilog}}{\text{dyne}}$ (chap. IV, liv. II), on peut tirer celle du rapport $\frac{\mathcal{M}_1}{\text{grm}}$ par la formule

$$\frac{\mathcal{M}_1}{\text{grm}} = \left(\frac{\text{kilog}}{\text{dyne}}\right)\left(\frac{\text{mètre}}{\text{cm}}\right)^{-1}\left(\frac{\text{sec}}{\text{sec}}\right)^{2},$$

qui donne

$$\frac{\mathcal{M}_1}{\text{grm}} = 980960 \cdot \frac{1}{100} \cdot 1 = 9809{,}60.$$

II

Soit $\mathcal{M}'_1$ l'unité de masse de l'ancien système français :

pied, seconde, livre.

Elle peut être aisément évaluée en fonction de $\mathcal{M}_1$. On a, d'après la formule générale relative à la comparaison de deux masses :

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{M}'_1}{\mathcal{M}_1} &= \left(\frac{\text{livre}}{\text{kilog}}\right)\left(\frac{\text{pied}}{\text{mètre}}\right)^{-1}\left(\frac{\text{sec}}{\text{sec}}\right)^{2} \\ &= \frac{489{,}505847}{1000}\left(\frac{1}{6}\,\frac{\text{toise}}{\text{mètre}}\right)^{-1} \\ &= \frac{489{,}505847}{1000}\left(\frac{1{,}94904}{6}\right)^{-1},\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{M}_1' = \frac{6.489,505847}{1949,04}\,\mathcal{M}_1$$
$$= \frac{6.489,505847}{1949,04}\cdot 9809,6 \text{ grm}.$$

Pour la conversion des mesures de ce système en mesures (CGS), on aura donc

$$\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|} = \frac{\text{pied}}{\text{cm}} = 32.484,$$
$$\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|} = \frac{\text{sec}}{\text{sec}} = 1,$$
$$\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|} = \frac{\mathcal{M}_1'}{\text{grm}} = \frac{6.489,505847.9809,6}{1949,04} \overset{(1)}{=} 14782,3,$$

ou

$$\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|} = \frac{\text{pied}}{\text{cm}} = 32,484,$$
$$\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|} = \frac{\text{sec}}{\text{sec}} = 1,$$
$$\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|} = \frac{\text{livre}}{\text{dyne}} = 489,505847.98096 \overset{(2)}{=} 480185,6,$$

suivant qu'on fera usage des symboles en (LTM) ou en (LTF).

III

Soit $\mathcal{M}_1''$ l'unité de masse de l'ancien système anglais :

pied, seconde, livre [3],

(1) Log = 4.1697408.

(2) Log = 5.6814091.

(3) Pour faire ces conversions, nous adopterons les rapports des mesures anglaises aux mesures françaises qui résultent des plus récentes comparaisons, savoir :

1 mètre = 39.36980 pouces anglais;

d'où 1 yard = 3 pieds = 36 pouces = 91^{cm},44064

(U. S. Coast and Geodetic Survey's. — Bulletin n° 9, 15 juin 1889.)

et 1 kilog = 15432,35639 grains;

d'où 1 livre = 7000 grains = 453.5924.

On a

$$\frac{\mathcal{M}_1''}{\mathcal{M}_1} = \left(\frac{\text{livre}}{\text{kilog}}\right)\left(\frac{\text{pied}}{\text{mètre}}\right)^{-1}\left(\frac{\text{sec}}{\text{sec}}\right)^2$$
$$= \frac{453,5924}{1000}\left(\frac{1}{3}\,\frac{\text{yard}}{\text{mètre}}\right)^{-1}$$
$$= \frac{453,5924}{1000}\left(\frac{0,9144064}{3}\right)^{-1},$$

d'où

$$\mathcal{M}_1'' = \frac{453,5924.3}{914,4064}\cdot 9809,6 \text{ grm.}$$

Pour les conversions des mesures anglaises en mesures (CGS), on aura donc

$$\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|} = \frac{\text{pied}}{\text{cm}} = \frac{91,44064}{3} = 30,48021,^{(1)}$$
$$\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|} = \frac{\text{sec}}{\text{sec}} = 1,$$
$$\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|} = \frac{\mathcal{M}_1''}{\text{grm}} = \frac{453,5924.3.9809,6}{914,4064} = 14598,1,^{(2)}$$

ou

$$\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|} = \frac{\text{pied}}{\text{cm}} = \frac{91,44064}{3} = 30,48021,$$
$$\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|} = \frac{\text{sec}}{\text{sec}} = 1,$$
$$\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|} = \frac{\text{livre}}{\text{dyne}} = 453,5924.980,96 = 444956.^{(3)}$$

IV

Pour la conversion des mesures de Gauss en mesures (CGS), on aura

$$\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|} = \frac{\text{millim}}{\text{cm}} = 0,1,$$
$$\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|} = \frac{\text{sec}}{\text{sec}} = 1,$$
$$\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|} = \frac{\text{milligm}}{\text{grm}} = 0,001.$$

(1) Log = 1.4840192.
(2) Log = 4.1642979.
(3) Log = 5.6483171.

V

Enfin, les conversions des mesures de l'Association britannique en mesures (CGS) se feront au moyen des valeurs

$$\frac{|\mathfrak{X}_1|}{|\mathfrak{X}_2|} = \frac{\text{mètre}}{\text{cm}} = 100,$$

$$\frac{|\mathfrak{Y}_1|}{|\mathfrak{Y}_2|} = \frac{\text{sec}}{\text{sec}} = 1,$$

$$\frac{|\mathfrak{Z}_1|}{|\mathfrak{Z}_2|} = \frac{\text{grm}}{\text{grm}} = 1.$$

Par exemple, cherchons les valeurs (CGS) de l'unité de densité dans les deux derniers systèmes. On a en général

$$\frac{|\mathfrak{D}_1|}{|\mathfrak{D}_2|} = \frac{|\mathfrak{M}_1|}{|\mathfrak{M}_2|} \left(\frac{|\mathfrak{L}_1|}{|\mathfrak{L}_2|}\right)^{-3},$$

ce qui donne :

1° Pour le système de Gauss :

$$\begin{aligned} |\mathfrak{D}_1| &= 0{,}001\,(0{,}1)^{-3}\,|\mathfrak{D}_2| \\ &= \frac{0{,}001}{(0{,}1)^3}\,|\mathfrak{D}_2| \\ &= |\mathfrak{D}_2|; \end{aligned}$$

2° Pour le système de l'Association britannique :

$$\begin{aligned} |\mathfrak{D}_1| &= 1.(100)^{-3}\,|\mathfrak{D}_2| \\ &= \frac{1}{1000000}\,|\mathfrak{D}_2|. \end{aligned}$$

La densité d'un corps donné sera donc représentée dans le système de Gauss par le même nombre que dans le système (CGS), et dans le système de l'Association britannique par un nombre 1,000,000 fois plus grand.

On peut le vérifier en cherchant par exemple la valeur de la densité de l'eau à 4° dans les systèmes en question. Pour cela, il suffira de considérer dans chaque système l'unité de volume d'eau et de calculer sa masse, en divisant la valeur numérique de son poids par la valeur numérique de g.

Dans le système (CGS), l'unité de volume est le centimètre cube, dont le poids (1 gr.) vaut 980,96. D'ailleurs $g = 980,96$. Donc

$$d = \frac{980,96}{980,96} = 1.$$

Dans le système de Gauss, l'unité de volume est le millimètre cube, dont le poids (1 mgr.) vaut 9809,6 fois l'unité de force de ce système (voir chapitre IV). D'ailleurs $g = 9809,6$. Donc

$$d = \frac{9809,6}{9809,6} = 1.$$

Dans le système de l'Association britannique, l'unité de volume est le mètre cube, dont le poids (100^3 gr.) vaut 9809600 fois l'unité de force de ce système (voir chapitre IV). D'ailleurs $g = 9,8096$. Donc

$$d = \frac{9809600}{9,8096} = 100^3.$$

Dans le système (CGS), la densité de l'eau à 4° est égale à l'unité de densité. C'est pour cette raison que ce système a été préféré à celui de l'Association britannique, où cette relation simple n'a pas lieu.

Art. 3.

Pour donner une idée des questions dans lesquelles se présenteraient plusieurs inconnues à la fois et montrer que les considérations générales exposées au commencement de ce chapitre s'appliquent avec une égale facilité à tous les cas, nous résoudrons le problème suivant :

On dispose, pour évaluer les longueurs, d'une règle de longueur $|\mathfrak{L}|$, et pour évaluer les intervalles de temps, d'un appareil marquant un intervalle de temps $|\mathfrak{T}|$.

D'une part, on observe que le son parcourt une distance valant n fois $|\mathfrak{L}|$ pendant le temps $|\mathfrak{T}|$, dans des circonstances où l'on sait que sa vitesse est de v mètres par seconde.

D'autre part, on trouve que pour faire une oscillation pendant l'intervalle de temps $|\mathfrak{T}|$, un pendule doit avoir une longueur égale à l fois $|\mathfrak{L}|$ en un lieu où l'on sait que l'accélération due à la pesanteur est de g mètres par seconde.

Il s'agit de déduire de ces deux résultats le rapport de $|\mathfrak{L}|$ au mètre et de $|\mathfrak{T}|$ à la seconde.

Désignons par $|V_1|$ la vitesse par laquelle une longueur $|\mathcal{L}|$ est parcourue en un temps $|\mathcal{T}|$ et par $|V_2|$ la vitesse par laquelle un mètre est parcouru en une seconde. D'après l'énoncé, la vitesse du on vaut n fois la première et v fois la seconde. On a donc l'équation

$$n|V_1| = v|V_2|,$$

ou

$$\frac{v}{n} = \frac{|V_1|}{|V_2|},$$

ou

$$\frac{v}{n} = \frac{|\mathcal{L}_1|}{|\mathcal{L}_2|} \cdot \left(\frac{|\mathcal{T}_1|}{|\mathcal{T}_2|}\right)^{-1};$$

ou enfin

(1) $$\frac{v}{n} = \frac{|\mathcal{L}|}{(\text{mètre})} \cdot \left(\frac{|\mathcal{T}|}{(\text{sec})}\right)^{-1}.$$

Désignons par $|A_1|$ l'accélération par laquelle la vitesse $|V_1|$ est gagnée en un temps $|\mathcal{T}|$, et par $|A_2|$ l'accélération par laquelle la vitesse $|V_2|$ est gagnée en une seconde. L'accélération de la pesanteur au lieu considéré vaut a fois la première et g fois la seconde, d'où l'équation

$$a|A_1| = g|A_2|.$$

Or, d'après la théorie du pendule, on a

$$1 = \pi\sqrt{\frac{l}{a}}$$

ou

$$a = \pi^2 l.$$

Donc

$$\pi^2 l|A_1| = g|A_2|$$

ou

$$\frac{g}{\pi^2 l} = \frac{|A_1|}{|A_2|}$$

ou

$$\frac{g}{\pi^2 l} = \frac{|\mathcal{L}_1|}{|\mathcal{L}_2|} \cdot \left(\frac{|\mathcal{T}_1|}{|\mathcal{T}_2|}\right)^{-2}$$

ou enfin

(2) $$\frac{g}{\pi^2 l} = \frac{|\mathcal{L}|}{(\text{mètre})} \cdot \left(\frac{|\mathcal{T}|}{(\text{sec})}\right)^{-2}.$$

Les équations (1) et (2) résolvent la question.

En divisant la première par la seconde, on aura

$$\frac{v}{n}\cdot\pi^2\frac{l}{g}=\frac{|\mathfrak{T}|}{(\text{sec})},$$

et en multipliant les deux termes de la première respectivement par ceux de l'égalité précédente :

$$\frac{v^2}{n^2}\cdot\pi^2\frac{l}{g}=\frac{|\mathfrak{L}|}{(\text{mètre})}.$$

Tous les problèmes que l'on pourra rencontrer à propos des changements d'unités seront, on le voit, faciles à résoudre si l'on sait ramener au type général que nous avons considéré au commencement de ce chapitre l'égalité à laquelle équivaut chaque donnée.

Pour être complet, un énoncé doit fournir le moyen d'écrire autant d'égalités qu'il signale d'inconnues à déterminer.

CHAPITRE VI

Calculs symboliques.

Lorsqu'on a acquis la parfaite intelligence des questions relatives aux changements d'unités, on peut abréger notablement l'écriture dans la solution des problèmes, en faisant usage d'une notation particulière et d'un calcul symbolique dont voici les principes fort simples.

Une grandeur $|\mathcal{G}_1|$ de l'espèce $|\mathcal{G}|$ se distingue de toute autre de la même espèce par les valeurs $\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1$ des grandeurs fondamentales dont elle dépend, valeurs qui spécifient cette grandeur et sont indispensables à connaître pour calculer son rapport aux autres grandeurs de son espèce.

Au lieu de représenter la grandeur $|\mathcal{G}_1|$ par son nom ou son initiale, il y a avantage à se servir d'un symbole réalisant en quelque sorte son signalement, qui est composé avec les noms des grandeurs $|\mathfrak{X}_1|$, $|\mathfrak{Y}_1|$, $|\mathfrak{Z}_1|$ disposés de la même façon que les lettres $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ dans le symbole des dimensions de l'espèce de grandeur en question.

Ce mode de notation consistera, par exemple, à représenter la surface d'un mètre carré par le symbole

$$(\text{mètre})^2;$$

la vitesse d'un mètre par seconde, par le symbole

$$\frac{\text{mètre}}{\text{sec}};$$

l'accélération en vertu de laquelle une vitesse d'un mètre par seconde est gagnée en une seconde, par le symbole

$$\frac{\text{mètre}}{(\text{sec})^2};$$

l'accélération de la pesanteur à Paris, par le symbole

$$\frac{9{,}8096 \text{ mètres}}{(\text{sec})^2};$$

la force d'une dyne, par le symbole

$$\frac{\text{grm}.\text{cm}}{(\text{sec})^2};$$

la masse d'un gramme, par le symbole

$$\frac{\text{dyne}.\text{sec}^2}{\text{cm}},$$

etc.

A cette définition des symboles, nous joindrons la convention qu'un symbole précédé d'un nombre k représentera une grandeur valant k fois la première. Ainsi, le symbole

$$9{,}8096 \frac{\text{mètre}}{\text{sec}^2}$$

représentera une accélération valant 9,8096 fois l'accélération $\frac{\text{mètre}}{\text{sec}^2}$.

Ces symboles sont particulièrement clairs et précis. Par leur construction, tirée du symbole des dimensions de la grandeur qu'ils représentent, ils rappellent le genre de cette grandeur; par les noms des grandeurs qu'ils renferment ils la spécifient et offrent ainsi tout ce qui est nécessaire pour trouver son rapport à toute autre grandeur de la même espèce, donnée de la même façon. Mais ce qui en constitue le principal intérêt et la réelle utilité, c'est qu'ils peuvent être l'objet d'un calcul conduisant rapidement à la solution des questions relatives aux transformations de mesures.

La justification de toutes les opérations constituant ce calcul repose sur cette remarque fondamentale, ressortant immédiatement de la définition même des symboles, que le rapport de deux grandeurs $|\mathcal{G}_1|$, $|\mathcal{G}_2|$ de même espèce est une expression qu'on peut obtenir en divisant l'un par l'autre, suivant les règles du calcul algébrique, les symboles

$$|\mathcal{X}_1|^x \; |\mathcal{Y}_1|^y \; |\mathcal{Z}_1|^z,$$
$$|\mathcal{X}_2|^x \; |\mathcal{Y}_2|^y \; |\mathcal{Z}_2|^z,$$

qui les représentent. — En effet, l'expression de ce rapport est

$$\left(\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|}\right)^x \left(\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|}\right)^y \left(\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|}\right)^z.$$

Traiter les symboles en question en tous points comme les monômes algébriques dont ils ont l'apparence, telle est la règle unique et fort simple de ce calcul symbolique.

Toutefois, pour bien pénétrer le sens de cette règle et en faire aisément l'application, il n'est pas inutile d'en chercher et d'en formuler les principales conséquences.

Définitions. — Pour la commodité des énoncés, les explications qui précèdent étant de nature à éviter toute méprise, nous appliquerons aux symboles la terminologie en usage dans la théorie des fractions; c'est-à-dire que nous désignerons par *numérateur* du symbole l'ensemble des symboles élémentaires (noms et chiffres) écrits au-dessus du trait horizontal, et par *dénominateur* tout ce qui figurera au-dessous. — Si un nombre est détaché en vedette au-devant du trait, nous l'appellerons *coefficient*, qu'il soit d'ailleurs entier ou fractionnaire. — Nous dirons que chaque terme (numérateur ou dénominateur) du symbole est formé d'autant de *facteurs* qu'il comprendra de nombres ou de noms, chaque facteur devant être compté autant de fois que son exposant renferme d'unités.

Pour exprimer que deux symboles représentent la même grandeur ou sont *échangeables*, nous écrirons entre eux le signe $=$, et nous donnerons à l'expression ainsi obtenue le nom d'*équation symbolique*.

I

Opérations relatives aux symboles considérés isolément.

1. Considérons la grandeur $|\mathcal{G}_1|$ représentée par le symbole

$$|\mathcal{X}_1|^x\,|\mathcal{Y}_1|^y\,|\mathcal{Z}_1|^z$$

et la grandeur $|\mathcal{G}'_1|$ représentée par le symbole

$$|\mathcal{X}'_1|^x\,|\mathcal{Y}'_1|^y\,|\mathcal{Z}'_1|^z,$$

formé en remplaçant $|\mathcal{X}_1|$ $|\mathcal{Y}_1|$ $|\mathcal{Z}_1|$ respectivement par des grandeurs équivalentes. Leurs rapports à une troisième grandeur $|\mathcal{G}_2|$ de la même espèce sont respectivement, en vertu de la définition même des symboles,

$$\frac{|\mathcal{G}_1|}{|\mathcal{G}_2|}=\left(\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|}\right)^x\left(\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|}\right)^y\left(\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|}\right)^z,$$

$$\frac{|\mathcal{G}'_1|}{|\mathcal{G}_2|}=\left(\frac{|\mathcal{X}'_1|}{|\mathcal{X}_2|}\right)^x\left(\frac{|\mathcal{Y}'_1|}{|\mathcal{Y}_2|}\right)^y\left(\frac{|\mathcal{Z}''_1|}{|\mathcal{Z}_2|}\right)^z.$$

Or, ces expressions sont égales. Donc

$$\mathcal{G}'_1=\mathcal{G}_1,$$

et par conséquent *un symbole ne cesse pas de représenter une même grandeur si l'on remplace un ou plusieurs de ses facteurs par des expressions équivalentes.*

Ainsi, les symboles

$$\frac{9.8096 \text{ mètre}}{\text{sec}^2}, \quad \frac{9.8096.100 \text{ cm}}{\text{sec}^2}, \quad \frac{9.8096.100 \text{ cm}}{(\frac{1}{60} \text{ min})^2}$$

représentent la même accélération et sont échangeables.

2. Considérons la grandeur $|\mathcal{G}_1|$ représentée par le symbole

$$|k\mathcal{X}_1|^x \, |\mathcal{Y}_1|^y \, |\mathcal{Z}_1|^z$$

et la grandeur $|\mathcal{G}'_1|$ représentée par le symbole

$$k^x |\mathcal{X}_1|^x \, |\mathcal{Y}_1|^y \, |\mathcal{Z}_1|^z,$$

formé en appliquant au premier, pour isoler le facteur k, les règles du calcul algébrique. Leurs rapports à une troisième grandeur $|\mathcal{G}_2|$ sont respectivement

$$\frac{|\mathcal{G}_1|}{|\mathcal{G}_2|} = \left(\frac{|k\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|}\right)^x \left(\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|}\right)^y \left(\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|}\right)^z,$$

$$\frac{|\mathcal{G}'_1|}{|\mathcal{G}_2|} = k^x \left(\frac{|\mathcal{X}_1|}{|\mathcal{X}_2|}\right)^x \left(\frac{|\mathcal{Y}_1|}{|\mathcal{Y}_2|}\right)^y \left(\frac{|\mathcal{Z}_1|}{|\mathcal{Z}_2|}\right)^z.$$

Or, il est clair que ces rapports sont égaux et que par suite

$$\mathcal{G}'_1 = \mathcal{G}_1.$$

Donc deux symboles tels que

$$|k\mathcal{X}_1|^x \, |\mathcal{Y}_1|^y \, |\mathcal{Z}_1|^z,$$
$$k^x |\mathcal{X}_1|^x \, |\mathcal{Y}_1|^y \, |\mathcal{Z}_1|^z,$$

représentent une seule et même grandeur.

En d'autres termes, *un symbole ne cesse pas de représenter la même grandeur si l'on détache et met en coefficient, suivant les règles du calcul algébrique, un facteur numérique impliqué dans le numérateur ou le dénominateur.*

Ainsi, les symboles

$$\frac{9\,8096 \text{ mètre}}{(\frac{1}{60}\text{ min})^2}, \quad 9{,}8096 \frac{\text{mètre}}{(\frac{1}{60}\text{ min})^2}, \quad \frac{9{,}8096}{\frac{1}{3600}} \cdot \frac{\text{mèt}}{(\text{min})^2}$$

représentent la même accélération et sont échangeables.

3. Quand un facteur numérique est ainsi mis en coefficient dans le symbole d'une grandeur $|\mathcal{G}'_1|$, l'expression qui vient après représente une grandeur $|\mathcal{G}''_1|$ de même espèce que la première, et $|\mathcal{G}'_1|$ vaut $|\mathcal{G}''_1|$ un nombre de fois marqué par ce coefficient.

Ainsi,

$$k^x |\mathcal{X}_1|^x |\mathcal{Y}_1|^y |\mathcal{Z}_1|^z$$

représentant une grandeur $|\mathcal{G}'_1|$, le symbole

$$|\mathcal{X}_1|^x |\mathcal{Y}_1|^y |\mathcal{Z}_1|^z$$

représente une grandeur $|\mathcal{G}''_1|$ que $|\mathcal{G}'_1|$ vaut k^x fois, car on a

$$\frac{|\mathcal{G}'_1|}{|\mathcal{G}_2|} = k^x \frac{|\mathcal{G}''_1|}{|\mathcal{G}_2|}.$$

Exemple. — Le symbole

$$\frac{100 \text{ cm}}{\frac{1}{60}\text{ min}}$$

représente la vitesse d'un mètre par seconde; le symbole

$$\frac{\text{cm}}{\text{min}},$$

la vitesse d'un centimètre par minute, et le facteur

$$\frac{100}{\frac{1}{60}} \text{ ou } 6000,$$

le rapport de la première à la seconde.

II

Opérations relatives aux équations symboliques.

1. Une équation symbolique n'est pas troublée si l'on modifie un des membres ou tous les deux en effectuant sur un les

opérations 1 et 2 qui viennent d'être définies, car ces opérations n'altérant pas la signification des symboles, ceux-ci demeurent échangeables.

Ainsi, l'équation

$$\frac{9,8096\ \text{mètre}}{\text{sec}^2} = 9,8096\ \frac{100\ \text{cm}}{\text{sec}^2}$$

entraîne les suivantes :

$$\frac{9,8096\ \text{mètre}}{(\frac{1}{60}\ \text{min})^2} = 980,96\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2},$$

$$\frac{9,8096\ \text{mètre}}{\frac{1}{3600}\ (\text{min})^2} = 980,96\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

2. Une équation symbolique n'est pas troublée si l'on multiplie ou si l'on divise les deux membres par un même nombre k, car en opérant ainsi on transforme les symboles primitifs qui représentent une même grandeur $|\mathcal{G}_1|$ en d'autres qui représentent une même grandeur $k|\mathcal{G}_1|$ ou $\frac{1}{k}|\mathcal{G}_1|$.

Ainsi, de l'équation

$$\frac{3600 . 9,8086\ \text{mètre}}{\text{min}^2} = 980,86\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$$

on déduit

$$36\ \frac{\text{mètre}}{\text{min}^2} = \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

3. Si des deux membres d'une équation symbolique on supprime des facteurs non numériques équivalents jouant le même rôle, on transforme la première équation en une autre, car les symboles qui restent sont composés de symboles élémentaires respectivement équivalents et semblablement disposés.

On passe ainsi d'une équation entre deux symboles représentant une grandeur $|\mathcal{G}|$ à une équation entre deux symboles représentant une grandeur de nature différente $|\Gamma|$.

Ainsi, de l'équation

$$\frac{\text{mètre}}{(\frac{1}{60}\ \text{min})^2} = 100\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2},$$

on déduit

$$\frac{\text{mètre}}{\frac{1}{60}\ \text{min}} = 100\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

ou

$$60\,\frac{\text{mètre}}{\text{min}} = 100\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

ou

$$6\,\frac{\text{mètre}}{\text{min}} = 10\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

et enfin

$$6\ \text{mètre} = \frac{10\ \text{cm}}{\frac{1}{60}}.$$

4. On peut aussi faire l'inverse de l'opération précédente et transformer une équation symbolique en une autre par l'introduction dans les deux membres de facteurs non numériques équivalents.

Ainsi, de l'équation

$$\text{mètre} = 100\ \text{cm},$$

on peut déduire

$$\frac{\text{mètre}}{(\frac{1}{60}\ \text{min})^2} = 100\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

On a pu déjà pressentir, dans le cours de cet exposé, la grande facilité que doit offrir le calcul symbolique pour la solution des problèmes relatifs aux changements d'unités. Ce calcul permet d'effectuer aisément et rapidement les transformations de symboles les plus variées. Or les problèmes en question ne sont, au fond, pas autre chose que des recherches d'équivalences de symboles. Leur mise en équations consiste simplement à égaler, autant de fois que l'exige le nombre des inconnues, deux symboles équivalents formés au moyen des données et des inconnues. Leur solution repose sur la remarque suivante, conséquence de celles qui précèdent :

On obtient une expression représentant la valeur symbolique d'un facteur, numérique ou autre, figurant dans une équation symbolique en résolvant, par rapport à ce facteur, l'équation symbolique suivant les règles du calcul algébrique; en sorte qu'on peut obtenir les valeurs des facteurs inconnus en traitant les systèmes d'équations symboliques comme les systèmes d'équations algébriques.

Pour mettre cette méthode de calcul en parallèle avec la méthode ordinaire et ne laisser, par suite, aucun doute sur ses avantages, nous ne saurions mieux faire que de l'appliquer d'abord à la solution des problèmes examinés au commencement du chapitre précédent.

La question qui fait l'objet du problème IV (art. 1) revient, si l'on se place au point de vue du calcul symbolique, à chercher de quel coefficient x il faut affecter le symbole $\frac{\text{mètre}}{\text{sec}}$ pour avoir l'expression de la vitesse du son, dont les données fournissent d'autre part l'expression $\frac{11756.\text{toises}}{68 \text{ sec}}$. Ce coefficient sera donc déterminé par l'équation

$$x.\frac{\text{mètre}}{\text{sec}} = \frac{11756.\text{toise}}{68 \text{ sec}},$$

d'où

$$x = \frac{11756}{68}.\frac{\text{toise}}{\text{mètre}}.$$

De même la solution du problème V consiste à trouver le coefficient x, dont il faut affecter le symbole $\frac{\text{gr}}{(\text{cm})^3}$ pour pouvoir l'identifier avec l'expression symbolique du poids spécifique du cristal de roche que fournissent les données. On est ainsi conduit à résoudre l'équation symbolique

$$x.\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} = \frac{97200.\text{grains}}{\frac{1}{6}\pi(1368)^3(\frac{1}{20}\text{ ligne})^3},$$

qui donne

$$x = \frac{97200}{\frac{1}{6}\pi(1368)^3(\frac{1}{20})^3}\frac{\text{grain}}{\text{gr}}\left(\frac{\text{cm}}{\text{ligne}}\right)^3.$$

Les problèmes de l'article 2 sont du même genre.

Soit, en général, à trouver en fonction du gramme-masse la masse unité $|\mathfrak{M}| = (x \,\text{grm})$ d'un système ayant pour bases les grandeurs

$$|\mathfrak{L}|, \quad |\mathfrak{T}|, \quad |\mathfrak{F}|.$$

On écrira l'équation

$$\frac{|\mathfrak{F}|\,|\mathfrak{T}|^2}{|\mathfrak{L}|} = x\,\frac{\text{dyne}\,(\text{sec})^2}{\text{cm}},$$

d'où

$$|\mathfrak{M}| = \left(\frac{|\mathfrak{F}|}{\text{dyne}}\right)\left(\frac{\text{cm}}{|\mathfrak{L}|}\right)\left(\frac{|\mathfrak{T}|}{\text{sec}}\right)^2 \text{grm}.$$

De même pour trouver en fonction de la dyne la force unité, $|\mathfrak{F}| = x$ dynes, d'un système ayant pour base les grandeurs

$$|\mathfrak{L}|, \quad |\mathfrak{T}|, \quad |\mathfrak{M}|,$$

on aura l'équation

$$\frac{|\mathfrak{M}|\,|\mathfrak{L}|}{|\mathfrak{T}|^2} = x\,\frac{\text{grm.cm}}{(\text{sec})^2},$$

d'où

$$|\mathfrak{F}| = \left(\frac{|\mathfrak{M}|}{\text{grm}}\right)\left(\frac{|\mathfrak{L}|}{\text{cm}}\right)\left(\frac{\text{sec}}{|\mathfrak{T}|}\right)^2 \text{dyne}.$$

Pour la solution du problème de l'art. 3, on traduira immédiatement l'énoncé par les deux équations

$$\frac{n\,|\mathfrak{L}|}{|\mathfrak{T}|} = v\,\frac{\text{mèt}}{\text{sec}},$$

$$\pi^2 l\,\frac{|\mathfrak{L}|}{|\mathfrak{T}|^2} = g\,\frac{\text{mèt}}{\text{sec}^2}.$$

Voici enfin, avec leur mise en équation, quelques exercices supplémentaires :

I

Trouver la valeur du nœud marin par la condition qu'un nœud par demi-minute représente une vitesse d'un mille (1852^{m},2) par heure.

$$\frac{\text{nœud}}{\frac{1}{2}\,\text{min}} = \frac{1852{,}2\ \text{mèt}}{\text{heure}}.$$

II

Trouver la valeur numérique de l'accélération de la pesanteur à Paris dans le système pied-seconde-livre.

$$x \frac{\text{pied}}{\text{sec}^2} = 980{,}96 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

III

Exprimer la densité de l'eau à 4° dans le système métrique et dans le système pied-seconde-livre.

$$x \frac{M_1}{\text{mèt}^3} = 1 \cdot \frac{\text{grm}}{\text{cm}^3},$$

$$x' \frac{M_1'}{\text{pied}^3} = 1 \cdot \frac{\text{grm}}{\text{cm}^3}.$$

IV

Quelle masse m faudrait-il adjoindre au centimètre et à la seconde pour que l'unité de force du système fondé sur ces bases fût égale à 1 gr.?

$$\frac{m.\text{cm}}{\text{sec}^2} = 980{,}96 \frac{\text{grm.cm}}{\text{sec}^2}.$$

V

Que vaut en kilomètre par seconde l'unité de vitesse d'un système dans lequel l'unité de longueur serait le quart d'un méridien terrestre et l'unité de temps $\frac{1}{30}$ de seconde?

$$x \frac{\text{kilom}}{\text{sec}} = \frac{\text{quadrant}}{\frac{1}{30}\,\text{sec}}.$$

LIVRE III

Application des systèmes absolus d'unités géométriques et mécaniques à l'étude des phénomènes physiques et en particulier des phénomènes électriques et magnétiques.

CHAPITRE I

Lois physiques. Influence des changements d'unités sur les formules qui les expriment.

Art. 1.

Les objets immédiats de nos mesures dans l'étude des phénomènes physiques ne sont et ne sauraient être que des grandeurs géométriques et mécaniques nous servant à caractériser soit l'état des corps, soit leurs relations mutuelles, soit les changements qui surviennent dans cet état ou ces relations.

Dans tout phénomène l'analyse découvre au moins deux grandeurs dépendant l'une de l'autre, de telle sorte que la variation de l'une détermine la variation de l'autre. — Ainsi, dans le phénomène de la chute d'un corps, la vitesse finale dépend de la hauteur de chute; dans le phénomène de l'étirement d'une tige, l'allongement dépend de la force de traction, etc.

Il arrive le plus souvent qu'une grandeur est liée de cette façon à plusieurs autres : par exemple, l'allongement d'une tige étirée dépend non seulement de la force de traction, mais encore de la longueur initiale et de la section de la tige.

Les variations des grandeurs ainsi liées ne sont pas seulement concomitantes; elles ont entre elles une connexion plus étroite : elles se déterminent les unes les autres quantitativement. En d'autres termes, il existe entre leurs mesures des relations numériques déterminées.

Ces relations constituent ce qu'on appelle les *lois* des phénomènes en question.

Par exemple, entre la valeur numérique V_i de la vitesse acquise par un corps qui tombe en chute libre et la valeur numérique L de la hauteur de chute existe la relation

$$\frac{V_i}{\sqrt{L}} = \text{const.} = K.$$

Entre la valeur numérique l de l'allongement d'une tige étirée et les valeurs numériques F, L, S de la force de traction, de la longueur initiale de la tige et de sa section existe la relation

$$\frac{l}{\frac{FL}{S}} = \text{const.} = H.$$

Il est des phénomènes dont les circonstances déterminantes peuvent être entièrement définies par des données géométriques ou mécaniques assignables explicitement. Ces phénomènes sont déterminables à l'avance et leurs effets sont calculables par la simple application des principes de la mécanique, sans aucun appel supplémentaire à l'expérience. — Ainsi les seuls principes de la mécanique rationnelle permettent d'établir que dans un mouvement produit par une force constante existe entre les valeurs numériques V, A, L de la vitesse du mobile, de l'accélération et de l'espace parcouru, la relation

$$\frac{V_i}{\sqrt{A.L}} = \sqrt{2}.$$

Il est des phénomènes, en bien plus grand nombre, dont nous ne sommes en état d'assigner qu'en partie les circonstances géométriques et mécaniques déterminantes. Entre les valeurs numériques des effets et les valeurs numériques des quelques données que nous pouvons atteindre existent des relations; mais ces relations doivent être demandées à l'expérience, car elles impliquent des données qui nous manquent et résultent d'un mécanisme qui nous est inconnu.

C'est le cas, par exemple, des phénomènes dépendant de ce que nous appelons la *nature* des corps qui en sont le siège. — Ainsi dans l'ignorance où nous sommes des caractères géométriques ou mécaniques qui distinguent une substance d'une autre; dans l'ignorance aussi où nous sommes du mécanisme suivant lequel une traction produit l'allongement d'une tige, nous ne pouvons établir *a priori* la relation existant entre les valeurs numériques de la cause, de l'effet et de toutes les grandeurs qui influent sur ce phénomène.

Tel est aussi le cas des phénomènes relatifs à l'*attraction universelle,* aux *attractions et répulsions électriques,* aux *attractions et répulsions magnétiques,* aux *attractions et répulsions électromagnétiques,* aux *attractions et répulsions électrodynamiques.* On a toutefois reconnu que dans une étude élémentaire de ces phénomènes on peut supposer que tout se passe comme si les actions qu'on observe étaient des résultantes d'actions s'exerçant entre les éléments des corps en présence; et le rôle de l'expérience dans cette étude s'est trouvé par là réduit à l'établissement de la formule de ces actions élémentaires et à la vérification des conséquences que le calcul en déduit.

Par exemple, les observations astronomiques vérifient tous les jours que les mouvements des corps célestes peuvent être calculés en supposant, comme l'a indiqué Newton, que les éléments de ces corps s'attirent deux à deux proportionnellement au produit de leurs masses et en raison inverse du carré de leurs distances. Si l'on désigne par dF la valeur numérique de l'attraction supposée entre deux éléments de masses valant respectivement dM dM' et placés à une distance L l'un de l'autre, la proposition fondamentale sur laquelle repose la théorie de l'attraction universelle se traduira par la formule

$$\frac{dF}{\frac{dM.dM'}{L^2}} = \text{const.} = N.$$

On déduit de là que deux sphères sont sollicitées à se porter l'une vers l'autre par une force telle qu'entre sa valeur numérique F, les valeurs numériques MM' des deux masses et la valeur numérique L de la distance des centres existe la relation

$$\frac{F}{\frac{MM'}{L^2}} = N.$$

La réalisation expérimentale de ce cas particulier permet de déterminer N, et l'étude de tous les autres cas peut ensuite être faite numériquement.

Dans toutes les parties de la physique les efforts des théoriciens tendent ainsi à ramener l'étude des phénomènes au développement des conséquences d'une ou plusieurs lois fondamentales suggérées par l'expérience.

Art. 2.

Si l'on jette un coup d'œil d'ensemble sur les formules algébriques exprimant les lois relatives aux divers phénomènes physiques, on y voit intervenir six espèces de lettres correspondant à autant d'espèces de nombres :

1° Des lettres représentant des coefficients numériques absolument déterminés et invariables.

Telle est la lettre π de la formule

$$T = \pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

relative au pendule simple.

2° Des lettres représentant des valeurs numériques de grandeurs géométriques ou mécaniques.

Telles sont les lettres l, F, L, S de la formule

$$\frac{l}{\frac{FL}{S}} = H,$$

ou encore les lettres F, M, M', L, de la formule

$$\frac{F}{\frac{MM'}{L^2}} = N.$$

3° Des lettres représentant des paramètres dépendant de la température.

Telle est la lettre Θ dans la formule

$$\frac{PV}{\Theta} = R,$$

relative aux gaz parfaits.

4° Des lettres représentant des coefficients parasites introduits par un choix défectueux d'unités.

Telle serait une lettre représentant l'équivalent d'un degré en radians; telle est la lettre E représentant dans les formules de la thermodynamique l'équivalent mécanique de la caloric.

5° Des lettres représentant des paramètres caractéristiques soit de la nature des corps, soit de la nature des milieux qui sont le siège des phénomènes.

Telles sont les lettres H, R, N des formules

$$\frac{l}{\frac{FL}{S}} = H,$$

$$\frac{P.V}{\Theta} = R,$$

$$\frac{F}{\frac{MM'}{L^2}} = N,$$

rappelées tout à l'heure.

6° Des lettres représentant des grandeurs spéciales à certains ordres de phénomènes et servant à exprimer dans un langage de convention les liens existant entre les grandeurs géométriques et mécaniques que nous pouvons saisir dans ces phénomènes, dont le véritable mécanisme nous est en partie ou en totalité inconnu.

Telles sont les lettres représentant des masses électriques, des masses magnétiques, des intensités de courants et toutes les grandeurs définies au moyen de celles-là dans l'étude des phénomènes électriques et magnétiques.

Toutes les formules fondamentales qui se rencontrent dans l'étude des phénomènes physiques peuvent être envisagées comme exprimant la constance, dans les cas particuliers d'un même phénomène, d'un monôme constitué avec les valeurs de diverses grandeurs et de divers paramètres relatifs à ce phénomène dans ces cas particuliers; en sorte que si l'on désigne par h un coefficient numérique; par X, ..., F les mesures de grandeurs géométriques et mécaniques; par Θ une fonction du paramètre t caractérisant la température; par U un coefficient parasite; par $\mathcal{G}\mathcal{G}'$ les mesures de diverses grandeurs spéciales; par K un paramètre spécifique, on peut rapporter toutes ces formules à un type général représenté par le symbole

$$h.\mathrm{X}^{x}...\mathrm{F}.\Theta.\mathrm{U}.\mathcal{G}^{\gamma}.\mathcal{G}'^{\gamma'} = \text{const.} = \mathrm{K},$$

où sont réunies toutes les catégories de lettres que nous avons distinguées tout à l'heure.

Supposons que pour les mesures immédiates auxquelles donne lieu l'étude quantitative des divers phénomènes physiques on fasse usage du meilleur ensemble d'unités géométriques et mécaniques qu'il soit possible de constituer, c'est-à-dire, ainsi que nous l'avons reconnu, d'un système absolu ayant pour bases trois unités fondamentales, et cherchons quelle influence le choix de ces unités fondamentales peut avoir sur les valeurs numériques représentées par les diverses catégories de lettres que nous avons passées en revue, et par suite quel changement occasionne dans les formules un changement de ces unités.

Le choix en question est sans influence sur les coefficients numériques absolus qui, comme π, représentent des rapports de quantités fixes.

Nous connaissons, d'autre part, son influence sur les mesures des grandeurs géométriques et mécaniques. Nous savons que l'emploi d'unités absolues offre l'avantage de n'introduire, dans les formules, du chef des grandeurs de cette nature, aucun coefficient parasite. De cette façon, par exemple, les formules de la thermodynamique ne renferment qu'un coefficient parasite : l'équivalent mécanique de la chaleur, dont on peut d'ailleurs facilement les débarrasser par un choix convenable de l'unité de quantité de chaleur.

Le paramètre par lequel on est convenu de caractériser, dans l'échelle normale actuellement adoptée, l'état calorifique désigné sous le nom de température se calcule, en dernière analyse, au moyen de nombres fournis par des mesures de pression. Soient P_G et P_{Aq} les valeurs numériques de la force élastique d'une masse d'hydrogène, de volume constant, à la température de la glace fondante et à la température d'ébullition de l'eau sous la pression normale. Soit, d'autre part, P_t la valeur numérique de la force élastique de cette même masse d'hydrogène à une autre température qu'il s'agit de désigner par un paramètre t. On est convenu de prendre pour ce paramètre le nombre

$$t = \frac{P_t - P_G}{\frac{1}{100}(P_{Aq} - P_G)}.$$

Ce nombre est évidemment indépendant de l'unité de pression employée à la détermination des forces élastiques P_G, P_{Aq}, P_t. Le choix des unités géométriques et mécaniques est donc sans influence sur la valeur numérique du paramètre désignant, dans l'échelle normale, une température donnée, et par suite sur la valeur d'une fonction quelconque de ce paramètre.

Un changement d'échelle de températures fait varier la valeur numérique du paramètre t désignant un intervalle de température donné de la même façon que si ce paramètre représentait la valeur numérique d'une grandeur dont l'unité éprouverait une certaine variation. Il en résulte nécessairement un changement dans la valeur numérique des expressions qui renferment explicitement le paramètre t. Pour apprécier ce changement, on peut traiter la température comme une quatrième grandeur fondamentale indépendante par rapport à laquelle les diverses grandeurs qui en dépendent seraient regardées comme ayant des dimensions déterminées par leurs formules de définition (1).

Relativement aux grandeurs spéciales $|\mathcal{G}|$, $|\mathcal{G}'|$, ..., dont les mesures figurent dans le premier membre des formules mises sous la forme

$$h.X^x...F.\Theta.U.\mathcal{G}^{\gamma}.\mathcal{G}'^{\gamma'}... = K,$$

il y a deux cas à distinguer :

Ou bien les mesures de ces grandeurs ne supposent pas la connaissance préalable du paramètre K ;

Ou bien les mesures de certaines d'entre elles au moins la supposent.

Le premier cas est celui qui se rencontre dans toutes les formules de la physique, sauf celles qui concernent l'électricité et le magnétisme.

Le second cas, qui est celui des formules relatives aux phénomènes électriques et magnétiques, sera, plus loin, l'objet d'un examen spécial et détaillé.

Considérons tout d'abord le premier cas.

Art. 3. — *Influence du choix des unités sur la valeur des constantes physiques.*

Nous supposerons d'abord que les divers cas particuliers auxquels une formule donnée est destinée à s'appliquer cor-

(1) Voir la note IV.

respondent à la même température. Dans ce cas le paramètre désignant cette température n'est pas explicitement introduit dans la formule dont le type est

$$h.X^{x}\ldots F.\mathcal{G}^{\gamma}.\mathcal{G}'^{\gamma'}\ldots = K.$$

Une telle formule exprime que, dans les divers cas particuliers où elle est applicable, l'expression

$$hX_i^{x}\ldots F_i.\mathcal{G}_i^{\gamma}.\mathcal{G}_i'^{\gamma'}\ldots$$

obtenue à l'aide des mesures des diverses grandeurs associées dans le phénomène étudié, conserve la valeur

$$hX_1^{x}\ldots F_1.\mathcal{G}_1^{\gamma}.\mathcal{G}_1'^{\gamma'}\ldots = K_1$$

qu'on lui a trouvée dans un premier cas. En d'autres termes la formule proposée équivaut à la suivante :

$$h.X_i^{x}\ldots F_i.\mathcal{G}_i^{\gamma}.\mathcal{G}'^{\gamma'}\ldots = hX_1^{x}\ldots F_1.\mathcal{G}_1^{\gamma}.\mathcal{G}_1'^{\gamma'}\ldots$$

Si l'expression

$$X^{x}\ldots F.\mathcal{G}^{\gamma}.\mathcal{G}'^{\gamma'}$$

était de dimensions nulles par rapport aux diverses grandeurs qui y figurent, sa valeur serait indépendante de tout choix d'unités et K serait une constante numérique absolue.

Tel n'est pas le cas des formules du genre de celles qui nous occupent. Aussi la valeur obtenue pour K à l'aide des mesures prises dans un cas particulier dépend-elle des unités à l'aide desquelles ces mesures ont été faites.

Considérons, par exemple, la constante K de la formule

$$\frac{V}{\sqrt{L}} = K.$$

Avec un premier choix d'unités de vitesse et de longueur, on trouvera dans une expérience particulière

$$V = V_1,$$
$$L = L_1,$$

et par suite

$$K = \frac{V_1}{\sqrt{L_1}} = K_1.$$

Si l'on vient à changer d'unités et à en prendre qui soient, par exemple, respectivement v fois et l fois plus grandes que les premières, on trouvera, dans la même expérience particulière,

$$V = V_2 = \frac{V_1}{v},$$

$$L = L_2 = \frac{L_1}{l},$$

et par suite

$$K = \frac{V_2}{\sqrt{L_2}} = K_2 = \frac{\frac{V_1}{v}}{\sqrt{\frac{L_1}{l}}} = \frac{1}{\frac{v}{\sqrt{l}}} \frac{V_1}{\sqrt{L_1}} = \frac{1}{\frac{v}{\sqrt{l}}} K_1.$$

La formule à employer avec le premier système d'unités étant

$$\frac{V}{\sqrt{L}} = K_1,$$

celle qu'on devra employer avec le second sera

$$\frac{V}{\sqrt{L}} = K_2 = \frac{1}{\frac{v}{\sqrt{l}}} K_1.$$

Les paramètres tels que K dépendent, toutes choses égales d'ailleurs, soit de la nature des corps auxquels est applicable la formule considérée, soit de la nature du milieu où se manifeste le phénomène.

Ainsi, dans les formules

$$pv = K,$$

$$\frac{l}{\frac{FL}{S}} = H,$$

les paramètres K, H doivent recevoir, toutes choses égales d'ailleurs, des valeurs spéciales pour chaque corps, tandis que dans les formules

$$\frac{V}{\sqrt{2L}} = g,$$

$$\frac{F}{\frac{MM'}{L^2}} = N,$$

les constantes g et N ont des valeurs indépendantes de la nature des corps considérés, mais caractéristiques du milieu.

On désigne dans tous les cas ces paramètres sous les noms de *paramètres spécifiques ou de constantes physiques.*

Si dans l'expression

$$X^{\alpha}.F.\mathcal{G}^{\gamma}.\mathcal{G}'^{\gamma'}\ldots$$

on substitue aux diverses grandeurs géométriques et mécaniques les symboles exprimant leurs dimensions par rapport à trois grandeurs fondamentales, on obtiendra un monôme constituant le symbole des dimensions de K. Ce symbole montrera aisément l'influence que doit avoir sur la valeur numérique de K un changement des unités fondamentales.

Soit

$$X^x\, Y^y\, Z^z$$

le symbole des dimensions d'une constante physique K. Si l'on substitue aux unités

$$|\mathcal{X}|,\ |\mathcal{Y}|,\ |\mathcal{Z}|$$

d'un premier système, dans lequel la constante avait la valeur K_1, des unités valant respectivement ξ fois, η fois, ζ fois les premières, la constante recevra, par suite de ce changement, la valeur

$$K_2 = \frac{K_1}{\xi^x \eta^y \zeta^z}.$$

Ainsi, la constante H de la formule

$$\frac{l}{\frac{FL}{S}} = H$$

a les dimensions du quotient $\frac{S}{F}$ ou

$$\frac{L^2}{F}.$$

Tout changement de l'unité de longueur et de l'unité de force changera donc la valeur de cette constante pour un corps donné. Si l'unité de longueur et l'unité de force deviennent respectivement l fois et f fois plus grandes, la valeur de la constante deviendra $\frac{l^2}{f}$ fois plus petite.

La constante N de la formule de Newton a les dimensions du quotient $\frac{FL^2}{M^2}$, qui sont exprimées par les symboles

$$\frac{L^4}{FT^4}$$

ou

$$\frac{L^3}{MT^2},$$

suivant qu'on prend (LTF) ou (LTM) comme grandeurs fondamentales. Si l'on passe d'un premier système à un second dans lequel les unités de longueur, de temps, de force et de masse valent respectivement l, t, f, m fois les premières, la nouvelle valeur de la constante se déduira de la première N_1 par les formules

$$N_2 = \frac{1}{\frac{l^4}{ft^4}} N_1,$$

$$N_2 = \frac{1}{\frac{l^3}{mt^2}} N_1.$$

D'une manière générale, on voit que pour effectuer correctement l'application numérique des formules représentant les lois physiques, il faut faire usage des mêmes unités dans l'évaluation des grandeurs géométriques et mécaniques dont elles offrent l'indication, et dans l'évaluation des constantes physiques qu'elles renferment, car c'est la convention même qui a été faite dans l'établissement des formules. Tout changement d'unités entraîne donc un changement dans les nombres représentant ces constantes, conformément à la règle suivante :

Règle. — *Pour passer de la valeur du paramètre représentant une constante dans un système d'unités, à la valeur correspondant à un autre système, il faut traiter ce paramètre comme la* mesure *d'une grandeur dont les dimensions par rapport aux grandeurs géométriques et mécaniques figurant dans l'expression de la loi sont indiquées par le symbole obtenu en résolvant cette expression par rapport au paramètre en question.*

Si, à une certaine température, dans le phénomène représenté par une formule donnée, l'effet résultant des valeurs numériques X... $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$... données aux grandeurs déterminantes est une grandeur de valeur numérique F_{t_0}; à une autre température t, l'effet, toujours mesuré de la même façon, qui correspondra aux mêmes données, sera une grandeur de valeur numérique F_t différente de la première.

A cette seconde température, l'expression hX^x... F... G^γ. $G'^{\gamma'}$... aura donc une valeur K_t différente de la première K_{t_0}. Ainsi, toutes choses égales d'ailleurs, l'influence de la température sur l'expression d'une loi se traduira par un changement de valeur de la constante. On donnera le moyen d'appliquer la formule à toutes les températures en faisant connaître K_{t_0} et la fonction de t exprimant le rapport $\frac{K_t}{K_{t_0}}$.

Art. 4.

Parmi les effets que peut produire sur la valeur de la constante d'une loi physique un changement d'unités fondamentales, deux méritent par leur simplicité et leur importance d'être examinés en particulier.

I

Le changement des unités fondamentales peut être fait *de telle façon que la constante soit représentée, dans le second système, par le même nombre que dans le premier.*

Ainsi que le montre la formule

$$K_2 = \frac{K_1}{\xi^x \eta^y \zeta^z},$$

cela arrivera si les rapports ξ, η, ζ des nouvelles unités fondamentales aux anciennes satisfont à la relation

$$\xi^x . \eta^y . \zeta^z = 1.$$

En choisissant arbitrairement deux de ces rapports et déterminant le troisième à l'aide de cette relation même, on peut définir une infinité de changements jouissant de la propriété considérée.

On peut représenter géométriquement cette classe de changements en considérant les rapports ξ, η, ζ, comme les coordonnées des points d'une surface définie par l'équation

$$\xi^x \eta^y \zeta^z = 1.$$

Ainsi tous les groupes de valeurs de l, t, m laissant à la constante N sa valeur, dans la formule de Newton, sont représentés par des coordonnées des points de la surface

$$\frac{\xi^3}{\xi \eta^2} = 1.$$

Si la constante K ne dépend que de deux grandeurs fondamentales, la représentation géométrique des changements en question se fera au moyen d'une ligne.

Remarque. — Si l'on a

$$x + y + z = 0,$$

la relation

$$\xi^x \eta^y \zeta^z$$

sera satisfaite en particulier pour

$$\xi = \eta = \zeta.$$

Cette remarque s'applique à la constante N de la loi de Newton si l'on prend LTM comme grandeurs fondamentales. Alors, en effet, ses dimensions étant

$$\frac{L^3}{T^2M},$$

on a

$$x = 3, \qquad y = -2, \qquad z = -1$$

et

$$x + y + z = 0.$$

La constante N ne doit donc pas changer si l'on fait varier dans un même rapport l'unité de longueur, l'unité de temps et l'unité de masse.

II

Le changement des unités fondamentales peut être fait de telle façon que la nouvelle valeur de la constante soit le nombre 1.

La formule générale

$$K_2 = \frac{K_1}{\xi^x \eta^y \zeta^z}$$

montre que cela arrivera si les rapports ξ, η, ζ des nouvelles unités fondamentales aux anciennes satisfont à la relation

$$\xi^x \eta^y \zeta^z = K_1.$$

Ces changements, généralement en nombre infini, peuvent, de la même façon que ceux de tout à l'heure, être représentés à l'aide d'une figure géométrique, surface ou ligne, suivant que les rapports seront au nombre de trois ou de deux seulement.

Exemples.

I

Le centimètre étant l'unité de longueur et la seconde l'unité de temps, quelle devrait être l'unité de masse pour que la constante de la formule de Newton eût la valeur 1 ?

Soient l, t, m les rapports des unités fondamentales du système proposé aux unités fondamentales du système CGS. On doit avoir

$$\frac{l^3}{t^2 m} = \mathrm{N},$$

ou, puisque $l = 1$ et $t = 1$,

$$\frac{1}{m} = \mathrm{N},$$

N étant la valeur de la constante de la formule de Newton dans le système CGS, savoir :

$$6{,}7.10^{-8}.$$

Par suite,

$$m = \frac{1}{6.7} \cdot 10^8.$$

L'unité de masse cherchée devrait être

$$\frac{1}{6.7} \cdot 10^8 \text{ gramme-masse.}$$

II

La seconde étant l'unité de temps et la vitesse de la lumière l'unité de vitesse, quelle devrait être l'unité de masse pour que la constante de la formule de Newton eût la valeur 1 ?

Les conditions énoncées s'expriment par les relations

$$t = 1,$$
$$l = 3.10^{10},$$
$$\frac{l^3}{t^2 m} = 6{,}7.10^{-8},$$

d'où

$$\frac{(3.10^{10})^3}{m} = 6{,}7.10^{-8}$$

et

$$m = \frac{27}{6{,}7} 10^{38}.$$

L'unité de masse devrait être

$$\frac{27}{6{,}7}\, 10^{38} \text{ gramme masse.}$$

ART. 5. — *Formules renfermant plusieurs constantes physiques. Équations réduites.*

Soit

$$F(X, Y, Z, \ldots, a, b, c \ldots) = 0 \qquad (1)$$

une formule établissant, d'après l'étude d'un certain phénomène sur une classe particulière de corps, une relation entre les mesures X, Y, Z... de diverses grandeurs |X|, |Y|, |Z|, ... et dans laquelle figurent, outre ces mesures, plusieurs paramètres *a, b, c*..., variables d'un corps à l'autre, et constituant des constantes physiques des corps en question.

Soient

$$\begin{array}{l} X^{\alpha'}\, Y^{\alpha''}\, Z^{\alpha'''}, \\ X^{\beta'}\, Y^{\beta''}\, Z^{\beta'''}, \\ X^{\gamma'}\, Y^{\gamma''}\, Z^{\gamma'''}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

les symboles de dimensions des paramètres *a, b, c* par rapport aux grandeurs X, Y, Z.

Si aux unités $|\mathfrak{X}|$, $|\mathfrak{Y}|$, $|\mathfrak{Z}|$ à l'adoption desquelles ces paramètres doivent les valeurs *a, b, c*..., on substitue d'autres unités $\xi|\mathfrak{X}|$, $\eta|\mathfrak{Y}|$, $\zeta|\mathfrak{Z}|$ valant respectivement ξ fois, η fois, ζ fois les précédentes, les constantes physiques du corps considéré seront représentées par de nouveaux nombres :

$$\begin{array}{l} A = \dfrac{a}{\xi^{\alpha'}\, \eta^{\alpha''}\, \zeta^{\alpha'''}}, \\ B = \dfrac{b}{\xi^{\beta'}\, \eta^{\beta''}\, \zeta^{\beta'''}}, \\ C = \dfrac{c}{\xi^{\gamma'}\, \eta^{\gamma''}\, \zeta^{\gamma'''}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Inversement, si les égalités précédentes sont telles qu'elles puissent être résolues par rapport à ξ, η, ζ, elles permettront, étant donné un système d'unités $|\mathfrak{X}|$, $|\mathfrak{Y}|$, $|\mathfrak{Z}|$, d'en définir un autre $\xi|\mathfrak{X}|$, $\eta|\mathfrak{Y}|$, $\zeta|\mathfrak{Z}|$ donnant aux constantes physiques du corps considéré telles valeurs A, B, C qu'on voudra.

Pour chacun des corps auxquels s'applique la formule (1) on pourra ainsi faire un choix d'unités tel que la formule renferme un seul et même système de valeurs : A, B, C des paramètres associés aux mesures des grandeurs $|X|$, $|Y|$, $|Z|$. Une seule et même formule pourra ainsi, mais en exigeant pour chaque corps un choix convenable d'unités, représenter pour toute une classe de corps l'étude du phénomène en question.

D'après une ingénieuse remarque de M. Curie (1), l'équation réduite de Van der Walls peut être considérée comme résultant de l'application de cette méthode générale.

La formule proposée par Van der Waals pour représenter les transformations d'un fluide quelconque est :

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = R\theta.$$

Elle renferme, outre les mesures p, v, θ, de la pression, du volume et de la température du fluide, trois constantes physiques : a, b, R, caractéristiques du fluide et ayant respectivement pour symboles de dimensions relativement aux grandeurs P, V, Θ :

$$\begin{aligned} \text{dim. } a &= PV^2, \\ \text{dim. } b &= V, \\ \text{dim. } R &= \frac{PV}{\Theta}. \end{aligned}$$

Si donc aux unités de pression, de volume et de température primitivement employées on en substitue d'autres valant respectivement p_i fois, v_i fois, θ_i fois les précédentes, les

(1) *Quelques remarques relatives à l'équation réduite de Van der Waals.* (*Archives des Sciences phys. et nat.*, 3e pér., t. XXVI, p. 13.)

constantes physiques du fluide considéré prendront les valeurs :

$$\mathcal{A}_i = \frac{a}{p_i v_i},$$

$$\mathcal{B}_i = \frac{b}{v_i},$$

$$\mathcal{R}_i = \frac{\mathrm{R}}{\frac{p_i v_i}{\Theta_i}}.$$

Pour nouvelles unités on peut prendre, si l'on veut, la pression, le volume et la température correspondant à un état quelconque du fluide.

Parmi tous les changements d'unités qu'on peut ainsi faire, il en est un qui donne pour $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{R}$ des valeurs indépendantes de la nature du fluide considéré, c'est celui qui consiste à prendre pour termes de comparaison des pressions, des volumes et de la température, la pression, le volume et la température du fluide au point critique.

En effet, on a dans ce cas

$$p_i = p_c,$$
$$v_i = v_c,$$
$$\theta_i = \theta_c,$$

et

$$\mathcal{A}_c = \frac{a}{p_c v_c},$$

$$\mathcal{B}_c = \frac{b}{v_c},$$

$$\mathcal{R}_c = \frac{\mathrm{R}}{\frac{p_c v_c}{\theta_c}}.$$

Or, d'après la formule de Van der Waals, les valeurs numériques p_c, v_c, θ_c, de la pression, du volume et de la température critiques satisfont aux relations

$$\frac{a}{p_c v_c^2} = 3,$$

$$\frac{b}{v_c} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\mathrm{R}}{\frac{p_c v_c}{\theta_c}} = \frac{8}{3}.$$

On a donc, en prenant la pression, le volume et la température critiques δ pour unités, et quel que soit le fluide considéré :

$$\mathcal{A}_c = 3,$$

$$\mathcal{B}_c = \frac{1}{3},$$

$$\mathcal{R}_c = \frac{8}{3}.$$

A cette condition la formule

$$\left(p + \frac{3}{v^2}\right)\left(v - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\,\theta$$

convient à tous les fluides.

C'est l'équation *réduite* de Van der Waals.

On peut former une infinité d'équations réduites de ce genre, puisqu'on peut donner aux constantes a, b, R de la formule générale

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = \mathrm{R}\,\theta$$

telles valeurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{R}$, qu'on voudra. Il suffit pour cela de prendre comme unités la pression, le volume et la température dont les valeurs numériques p_i, v_i, θ_i par rapport aux anciennes unités satisfont aux relations :

$$\frac{a}{p_i v_i^2} = \mathcal{A},$$

$$\frac{b}{v_i} = \mathcal{B},$$

$$\frac{\mathrm{R}}{\frac{p_i v_i}{\theta_i}} = \mathcal{R}.$$

Mais la pression p_i, le volume v_i et la température θ_i ne correspondront pas nécessairement à un état du fluide. Il n'en sera ainsi que dans le cas où les valeurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{R}$ assignées aux constantes de l'équation réduite satisferont à la relation

$$(1 + \mathcal{A})(1 - \mathcal{B}) = \mathcal{R}.$$

L'équation réduite de Van der Waals est un cas particulier des équations de cette seconde catégorie pour lesquelles les unités sont empruntées à un état du corps.

ART. 6.

Ici se pose encore une question dont celle de la similitude des systèmes géométriques et mécaniques n'est qu'un cas particulier :

Lorsqu'un groupe de nombres représente, dans un premier système d'unités, des grandeurs associées entre elles suivant la loi d'un certain phénomène, à quelle condition les grandeurs de même espèce qui, dans un autre système d'unités, auraient les mêmes valeurs numériques que les premières, sont-elles susceptibles aussi de se trouver associées dans un phénomène de nature identique?

Soient $|X|$, $|Y|$, ..., des grandeurs associées dans un certain phénomène. Dans un système où les unités sont respectivement

$$|\mathfrak{X}| \cdot |\mathfrak{Y}| \ldots,$$

les valeurs numériques de ces grandeurs sont

$$\frac{|X|}{|\mathfrak{X}|} = X, \quad \frac{|Y|}{|\mathfrak{Y}|} = Y \ldots$$

et satisfont à une certaine relation

$$X^{\alpha} . Y^{\nu} \ldots = K$$

caractéristique du phénomène en question.

Considérons un nouveau système d'unités

$$\xi |\mathfrak{X}|, \quad \eta |\mathfrak{Y}| \ldots$$

Les grandeurs de la nature des premières et ayant dans ce système les valeurs numériques

$$X . Y \ldots$$

seraient

$$X.\xi|\mathfrak{X}|, \qquad Y.\eta|\mathfrak{Y}|\ldots$$

Pour que ces grandeurs soient susceptibles de se trouver associées dans un phénomène de l'ordre considéré, il faut que leurs valeurs numériques, prises dans le premier système, satisfassent à la relation qui, dans ce système, représente la loi du phénomène. Or, ces valeurs numériques sont

$$X\xi, \qquad Y\eta\ldots$$

On devrait donc avoir

$$(X\xi)^x (Y\eta)^y\ldots = K,$$

ou, en tenant compte de la relation $X^x. Y^y\ldots = K$,

$$\xi^x \eta^y\ldots = 1.$$

Ainsi les changements d'unités satisfaisant à la condition qui vient d'être examinée sont les changements qui laissent intactes les constantes des formules.

Cette particularité qui ne se présente que pour une certaine catégorie de changements d'unités fondamentales quand il s'agit de questions où interviennent des formules renfermant des constantes physiques, a lieu pour tous les changements possibles quand il s'agit de questions de géométrie ou de mécanique, car dans les formules de ces deux dernières sciences, telles que les fournit un système coordonné de mesures absolues, les constantes, ainsi que nous l'avons vu, sont absolument indépendantes du choix des unités fondamentales.

Ainsi, dans tous les systèmes géométriques absolus possibles, un triangle dont la base et la hauteur auront pour valeurs numériques 5 et 6 aura une surface représentée par 15; dans tous les systèmes mécaniques absolus possibles, une accélération 5 communiquée à une masse 3 sera l'effet d'une force 15. Mais supposons qu'on trouve, en étudiant l'étirement d'un métal et effectuant les mesures dans le système (C G S), qu'un allongement 1 éprouvé par une tige de longueur 20 et de section 1 soit l'effet d'une force 10^{10}. Considérons tous les systèmes absolus définis par les unités fondamentales

$$l \text{ cm}, \qquad \text{seconde}, \qquad f \text{ dynes},$$

l et f satisfaisant à la relation

$$\frac{l^2}{f} = 1.$$

Dans ces systèmes, mais dans ceux-là seulement, un allongement représenté par 1 éprouvé par une tige de longueur 20 et de section 1 sera aussi l'effet d'une force 10^{10}. Dans tous les autres systèmes, aux données 20, 1, 10^{10} correspondront des effets représentés par des nombres différents de 1.

CHAPITRE II

Principales grandeurs électriques et magnétiques. Propositions relatives à leur comparaison.

Art. 1.

Les formules fondamentales relatives aux phénomènes électriques et magnétiques sont :

1° La formule de Coulomb

$$F = k\frac{QQ'}{L^2},$$

qui exprime l'action mutuelle F de deux petits corps électrisés séparés par une distance L; Q et Q′ étant des paramètres caractéristiques de l'état électrique de ces corps et représentant ce qu'on est convenu d'appeler leurs *charges électriques* ou *quantités d'électricité*, k étant d'autre part un paramètre caractéristique du milieu.

On remarquera que Q et Q′ jouent, dans la formule de Coulomb, le même rôle que M et M′ dans la formule de Newton.

2° La formule

$$F = k'\frac{\mathcal{M}\mathcal{M}'}{L^2},$$

du même type que la précédente, également due à Coulomb, et qui représente l'action mutuelle de deux *masses magnétiques* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, séparées par une distance L, k' étant un coefficient caractéristique du milieu.

3° La formule

$$I = j\,\frac{Q}{T},$$

exprimant que ce qu'on est convenu d'appeler l'*intensité d'un courant* est une grandeur proportionnelle au débit d'électricité dont un conducteur peut, d'une façon symbolique, être regardé comme le siège, ou, en d'autres termes, que cette intensité est une grandeur directement proportionnelle à la quantité d'électricité mise en jeu et inversement proportionnelle au temps correspondant.

4° La formule de Biot et Savart

$$dF = \frac{h I \mathfrak{M} ds \sin\theta}{l^2},$$

qui exprime l'action exercée par un élément de courant ds d'intensité I, sur un pôle magnétique m, situé à une distance l du milieu de l'élément, θ étant l'angle que fait la droite l avec ds.

5° La formule d'Ampère, qu'on peut écrire :

$$d^2F = a I I' \frac{ds\,ds'}{l^2} (2\cos\omega - 3\cos\theta\cos\theta'),$$

et qui exprime l'action mutuelle de deux éléments de courants (I, ds), (I', ds'), séparés par une distance l, faisant entre eux un angle ω et avec la droite l des angles θ, θ'.

En écrivant ces formules de la façon suivante :

$$\frac{F}{\frac{QQ'}{L^2}} = k,$$

$$\frac{F}{\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{L^2}} = k',$$

$$\frac{\mathrm{I}}{\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{T}}} = j,$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{d\mathrm{F}}{\frac{\mathfrak{M}\,\mathrm{I}\,ds}{l^2}} = h,$$

$$\frac{1}{2\cos\omega - 3\cos\theta\cos\theta'}\,\frac{d^2\mathrm{F}}{\mathrm{I}\mathrm{I}'\,\frac{ds\,ds'}{l^2}} = a,$$

on voit qu'elles se rapportent toutes au type général que nous avons considéré dans le chapitre précédent.

ART. 2.

Outre des grandeurs géométriques et mécaniques, les formules précédentes renferment des grandeurs particulières spécialement affectées à l'étude des phénomènes électriques et magnétiques. Ces grandeurs particulières, au nombre de trois, sont :

la *quantité d'électricité* Q;
la *masse magnétique* $\mathfrak{M}$;
l'*intensité de courant* I.

Un grand nombre d'autres grandeurs spéciales sont en outre envisagées dans l'étude des phénomènes électriques et magnétiques; mais toutes sont définies au moyen des précédentes et de diverses grandeurs géométriques ou mécaniques. Passons, en effet, en revue les principales d'entre elles.

I

ÉLECTROSTATIQUE.

1. Densités électriques.

Dans la théorie des phénomènes électrostatiques on est conduit à imaginer des distributions continues de masses électriques dans des espaces linéaires, superficiels ou solides.

La distribution électrique dans un espace est dite *uniforme* lorsque les masses électriques attribuées à des parties égales prises n'importe où dans cet espace sont égales.

On nomme rapport des *densités électriques* de deux espaces à distribution uniforme le rapport des masses attribuées à des parties égales de ces espaces.

Soient $|Q|$ et $|\mathfrak{Q}|$ les quantités d'électricité attribuées respectivement à des parties $|N|$ et $|\mathfrak{N}|$ de deux espaces électrisés uniformément. Le rapport des densités électriques de ces espaces est, en vertu de la définition précédente,

$$\frac{|D_e|}{|\mathfrak{D}_e|} = \frac{|Q|}{|\mathfrak{Q}|} \cdot \frac{|\mathfrak{N}|}{|N|} = \left(\frac{|Q|}{|\mathfrak{Q}|}\right) \left(\frac{|N|}{|\mathfrak{N}|}\right)^{-1}.$$

La comparaison de deux densités électriques est donc subordonnée à la comparaison de deux quantités d'électricité et à la comparaison de deux portions d'espace.

Le calcul du rapport $\frac{D_e}{\mathfrak{D}_e}$, qui sera la valeur numérique de $|D_e|$ si $|\mathfrak{D}_e|$ est l'unité de densité choisie, se fera au moyen des valeurs numériques de $|Q|$, $|N|$, $|\mathfrak{Q}|$, $|\mathfrak{N}|$, suivant la formule

$$\frac{|D_e|}{|\mathfrak{D}_e|} = \frac{Q}{\mathfrak{Q}} \cdot \frac{\mathfrak{N}}{N} = \frac{Q\,N^{-1}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{N}^{-1}}.$$

Si l'on veut donner à ce calcul de la valeur numérique d'une densité électrique le maximum de simplicité, il faut adopter pour unité de densité électrique la densité d'un espace électrisé uniformément dans lequel on aurait $\mathfrak{Q} = 1$ pour $\mathfrak{N} = 1$.

Pour désigner cette densité particulière, nous l'appellerons *unité normale de densité électrique*.

Dans le cas d'une distribution non uniforme, on nomme *densité en un point* la densité moyenne d'un espace infiniment petit comprenant ce point.

Lorsque l'unité de densité est l'unité normale, la valeur numérique d'une densité électrique est égale au quotient de la valeur numérique d'une masse électrique par la valeur numérique de la portion d'espace qu'elle occupe, ainsi que l'indique la formule suivante à laquelle se réduit alors la formule générale :

$$D_e = \frac{Q}{N}.$$

2. Champs électriques.

On nomme *champ électrique* tout espace dans lequel se manifestent des actions électriques.

On appelle rapport des *intensités* de deux champs électriques en des points P et $\mathfrak{P}$ appartenant respectivement à chacun d'eux le rapport des forces qui solliciteraient en ces points des masses électriques égales.

Soit $|F|$ l'action qu'éprouverait une masse électrique $|Q|$ en un point P d'un champ électrique. Soit, d'autre part, $|\mathfrak{F}|$ l'action qu'éprouverait en un point $\mathfrak{P}$ d'un autre champ une masse électrique $|\mathfrak{Q}|$. Le rapport des intensités de ces champs en ces points est, en vertu de la définition précédente,

$$\frac{|H_e|}{|\mathcal{H}_e|} = \frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\frac{|\mathfrak{Q}|}{|Q|} = \left(\frac{|F|}{|\mathfrak{F}|}\right)\left(\frac{|Q|}{|\mathfrak{Q}|}\right)^{-1}.$$

La comparaison des intensités de deux champs électriques est donc subordonnée à la comparaison de deux forces et à la comparaison de deux quantités d'électricité.

Le calcul de la valeur numérique du rapport $\frac{|H_e|}{|\mathcal{H}_e|}$, qui sera la valeur numérique de $|H_e|$ si $|\mathcal{H}_e|$ est l'unité de champ électrique choisie, se fera au moyen des valeurs numériques de $|F|$, $|Q|$, $|\mathfrak{F}|$, $|\mathfrak{Q}|$ suivant la formule

$$\frac{|H_e|}{|\mathcal{H}_e|} = \frac{F}{\mathfrak{F}}\cdot\frac{\mathfrak{Q}}{Q} = \frac{F\,Q^{-1}}{\mathfrak{F}\,\mathfrak{Q}^{-1}}.$$

Si l'on veut donner au calcul de la valeur numérique de l'intensité d'un champ électrique le maximum de simplicité, il faut adopter pour unité d'intensité celle d'un champ en un point pour lequel on aurait $\mathfrak{F} = 1$ pour $\mathfrak{Q} = 1$, c'est-à-dire l'*unité normale d'intensité.* La mesure de l'intensité d'un champ en un point est, dans ce cas, égale au quotient de la valeur numérique de l'action éprouvée par une masse électrique placée en ce point par la valeur numérique de cette masse et, en particulier, égale à la valeur numérique de l'action éprouvée par l'unité de quantité d'électricité supposée placée en ce point, ainsi que l'indique la formule suivante, à laquelle se réduit, dans ce cas, la formule générale :

$$H_e = \frac{F}{Q}.$$

3. Flux de forces électriques.

Soit $|H_e|$ la composante d'un champ électrique uniforme suivant la normale à une surface plane $|S|$. Soit, de même $|\mathcal{H}_e|$, la composante d'un champ électrique uniforme suivant la normale à une surface plane $|\mathcal{S}|$. On dit que ces surfaces sont traversées par des flux de forces $|F_f|$, $|\mathcal{F}_f|$, dont le rapport est défini comme égal au produit du rapport des composantes normales des champs par le rapport des surfaces

$$\frac{|F_f|}{|\mathcal{F}_f|} = \frac{|H_e|}{|\mathcal{H}_e|} \cdot \frac{|S|}{|\mathcal{S}|}.$$

La comparaison de deux flux de force est donc, par définition, subordonnée à la comparaison de deux champs électriques et à la comparaison de deux surfaces.

Le calcul de la valeur numérique du rapport $\frac{|F_f|}{|\mathcal{F}_f|}$ qui sera la valeur numérique de $|F_f|$ si $|\mathcal{F}_f|$ est l'unité de flux de force choisie, se fera au moyen des valeurs numériques de $|H_e|$, $|\mathcal{H}_e|$, $|S|$, $|\mathcal{S}|$ suivant la formule

$$\frac{|F_f|}{|\mathcal{F}_f|} = \frac{H_e}{\mathcal{H}_e} \cdot \frac{S}{\mathcal{S}} = \frac{H_e S}{\mathcal{H}_e \mathcal{S}}.$$

Soit $|H_e|$ la composante d'un champ électrique quelconque en un point suivant la normale à un élément de surface $|dS|$ passant par ce point. La valeur numérique du rapport du flux électrique $d|F_f|$ traversant cet élément de surface au flux $|\mathcal{F}_f|$, défini tout à l'heure, sera donnée par la formule

$$\frac{d\,|F_f|}{|\mathcal{F}_f|} = \frac{H_e\,dS}{\mathcal{H}_e . \mathcal{S}}.$$

Si l'on veut donner au calcul de la valeur numérique d'un flux de force le maximum de simplicité, il faut prendre comme unité le flux qui traverserait l'unité de surface dans un champ dont la composante normale aurait une intensité égale à l'unité. Dans ce cas, la valeur numérique d'un flux de force est égale au produit des valeurs numériques de la composante normale du champ et de la surface considérée, ainsi que l'indique la formule suivante, à laquelle se réduit alors la formule générale :

$$d\,|F_f| = H_e\,dS.$$

4. Potentiels électriques.

Soit, d'une part, $|W|$ le travail qui serait nécessaire pour amener une masse électrique $|Q|$ de l'infini en un point P d'un champ électrique ; soit, d'autre part, $|\mathfrak{W}|$ le travail qu'exigerait de même le transport d'une masse $|\mathfrak{Q}|$ en un point $\mathfrak{P}$ d'un autre champ.

Le rapport des *potentiels* $|V|$ et $|\mathfrak{V}|$ de ces deux champs aux points considérés est

$$\frac{|V|}{|\mathfrak{V}|} = \frac{|W|}{|\mathfrak{W}|}\,\frac{|\mathfrak{Q}|}{|Q|} = \left(\frac{|W|}{|\mathfrak{W}|}\right)\left(\frac{|Q|}{|\mathfrak{Q}|}\right)^{-1}.$$

La comparaison de deux potentiels électriques est donc subordonnée à la comparaison de deux travaux et à la comparaison de deux quantités d'électricité.

Le calcul de la valeur numérique du rapport $\frac{|V|}{|\mathfrak{V}|}$, qui sera la valeur numérique de $|V|$ si $|\mathfrak{V}|$ est l'unité de potentiel choisie, se fera au moyen des valeurs numériques de $|W|$, $|Q|$, $|\mathfrak{W}|$, $|\mathfrak{Q}|$, suivant la formule

$$\frac{|V|}{|\mathfrak{V}|} = \frac{W}{\mathfrak{W}} \cdot \frac{\mathfrak{Q}}{Q} = \frac{W\,Q^{-1}}{\mathfrak{W}\,\mathfrak{Q}^{-1}}.$$

Si l'on veut donner à ce calcul de la valeur numérique d'un potentiel électrique le maximum de simplicité, il faut adopter pour unité de potentiel le potentiel d'un champ en un point où l'on aurait $\mathfrak{W} = 1$ pour $\mathfrak{Q} = 1$. Ce potentiel serait l'*unité normale de potentiel.*

La mesure du potentiel d'un champ en un point est alors égale au quotient de la valeur numérique du travail nécessaire pour amener de l'infini en ce point une masse électrique par la valeur numérique de cette masse, et en particulier égale à la mesure du travail nécessaire pour transporter de l'infini en ce point une quantité d'électricité égale à l'unité, ce qu'indique la formule suivante, à laquelle se réduit, dans ce cas, la formule générale :

$$V = \frac{W}{Q}.$$

5. Capacités électriques.

Concevons un conducteur électrisé situé dans un milieu isolant, à une distance infiniment grande de tout autre conducteur, de façon que son potentiel ne dépende que de sa charge. Si cette charge varie dans un certain rapport, le potentiel varie dans le même rapport. En d'autres termes, entre la valeur numérique Q de la charge de ce conducteur et la valeur numérique V de son potentiel existe la relation

$$\frac{Q}{V} = \text{const} = C.$$

Soit un conducteur A électrisé situé dans un milieu isolant et soumis à l'influence d'autres conducteurs A′, A″.... Si ces conducteurs sont maintenus à un potentiel nul, le potentiel de A est encore proportionnel à sa charge.

Dans ce cas, la charge correspondant à un potentiel donné est plus grande que si les conducteurs A′, A″... n'existaient pas.

Pour un même système de conducteurs elle dépend de la nature du milieu isolant qui les sépare.

On donne au système de conducteurs A, A', A'' le nom de *condensateur*.

Soient $|Q|$ et $|\mathfrak{Q}|$ les charges de deux conducteurs placés dans des conditions où s'appliquent les observations précédentes, et soient $|V|$ et $|\mathfrak{V}|$ leurs potentiels respectifs. Le rapport des *capacités électriques* de ces conducteurs, c'est-à-dire le rapport des charges correspondant à un même potentiel sera

$$\frac{|C|}{|\mathfrak{C}|} = \frac{|Q|}{|\mathfrak{Q}|}\frac{|V|}{|\mathfrak{V}|} = \left(\frac{|Q|}{|\mathfrak{Q}|}\right)\left(\frac{|V|}{|\mathfrak{V}|}\right)^{-1}.$$

La comparaison de deux capacités électriques est donc subordonnée à la comparaison de deux quantités d'électricité et à la comparaison de deux potentiels.

Le calcul de la valeur numérique du rapport $\frac{|C|}{|\mathfrak{C}|}$, qui sera la valeur numérique de $|C|$ si $|\mathfrak{C}|$ est l'unité de capacité choisie, se fera au moyen des valeurs numériques de $|Q|$, $|V|$, $|\mathfrak{Q}|$, $|\mathfrak{V}|$ suivant la formule

$$\frac{|C|}{|\mathfrak{C}|} = \frac{Q}{\mathfrak{Q}}\cdot\frac{\mathfrak{V}}{V} = \frac{Q\,V^{-1}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{V}^{-1}}.$$

Si l'on veut donner à ce calcul le maximum de simplicité, il faut adopter pour unité de capacité celle d'un conducteur pour lequel une charge $\mathfrak{Q} = 1$ correspondrait à un potentiel $\mathfrak{V} = 1$, c'est-à-dire l'*unité normale de capacité*. La mesure de la capacité d'un conducteur est alors égale au quotient de la valeur numérique de sa charge par la valeur numérique de son potentiel, ou, en particulier, égale à la mesure de la charge nécessaire pour le porter au potentiel unité, ce qu'indique la formule suivante, à laquelle se réduit, dans ce cas, la formule générale :

$$C = \frac{Q}{V}.$$

Remarquons qu'en vertu de la relation

$$\frac{|V|}{|\mathfrak{V}|} = \frac{|W|}{|\mathfrak{W}|}\,\frac{|\mathfrak{Q}|}{|Q|},$$

on a

$$\frac{|C|}{|\mathcal{C}|} = \left(\frac{|Q|}{|\mathcal{Q}|}\right)^2 \frac{|\mathcal{W}|}{|W|}.$$

Donc *la comparaison de deux capacités peut aussi être considérée comme se ramenant à des comparaisons de travaux de forces et à des comparaisons de quantités d'électricité.*

II

Magnétisme.

Dans la théorie élémentaire du magnétisme on considère des *densités magnétiques,* des *intensités de champs magnétiques,* des *flux de forces magnétiques,* des *potentiels magnétiques,* dont les définitions sont fondées sur la considération de la masse magnétique exactement comme celles des grandeurs électriques de mêmes noms sont fondées sur la considération de la quantité d'électricité. Les formules relatives à la comparaison de ces grandeurs magnétiques peuvent se déduire des formules électriques correspondantes, par la substitution pure et simple du symbole $\mathcal{M}$ au symbole $\mathcal{Q}$.

Outre ces grandeurs, on en envisage encore un certain nombre d'autres parmi lesquelles nous nous bornerons à signaler les moments magnétiques et les puissances de feuillets magnétiques.

1. Moments magnétiques.

On appelle *moment magnétique* d'un aimant une grandeur proportionnelle à la somme des masses magnétiques de même signe qu'il est censé contenir et à la distance des pôles.

Soient, pour un premier aimant, $|\mathcal{M}|$ la somme des masses magnétiques de même signe et $|L|$ la distance des pôles; soient, d'autre part, $|\mathfrak{M}|$ et $|\mathcal{L}|$ les grandeurs analogues relatives à un second aimant. Le rapport des moments magnétiques de ces deux aimants est, en vertu de la définition précédente,

$$\frac{|\mathcal{M}_0|}{|\mathfrak{M}_0|} = \frac{|\mathcal{M}|}{|\mathfrak{M}|} \cdot \frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}.$$

La comparaison de deux moments magnétiques est donc, par définition, subordonnée à la comparaison de deux masses magnétiques et à la comparaison de deux longueurs.

Le calcul de la valeur numérique du rapport $\frac{|\mathcal{M}_0|}{|\mathfrak{M}_0|}$, qui sera la valeur numérique du moment magnétique $|\mathcal{M}_0|$ si $|\mathfrak{M}_0|$ est l'unité de moment choisie, se fera au moyen des valeurs numériques de $|\mathcal{M}|$, $|L|$, $|\mathfrak{M}|$, $|\mathfrak{L}|$ suivant la formule

$$\frac{|\mathcal{M}_0|}{|\mathfrak{M}_0|} = \frac{\mathcal{M}}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{L}{\mathfrak{L}} = \frac{\mathcal{M} L}{\mathfrak{M}\mathfrak{L}}.$$

Si l'on veut donner à ce calcul de la valeur numérique d'un moment magnétique le maximum de simplicité, il faut adopter pour unité de moment le moment d'un aimant pour lequel on aurait $\mathfrak{M} = 1$ et $\mathfrak{L} = 1$, c'est-à-dire l'*unité normale de moment magnétique.* La mesure d'un moment magnétique est alors égale au produit de la valeur numérique de la somme des masses magnétiques de même signe constituant l'aimant par la valeur numérique de la distance des pôles, ce que représente la formule suivante, à laquelle se réduit dans ce cas la formule générale

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M} L.$$

2. Feuillets magnétiques.

On nomme *feuillet magnétique* l'ensemble de deux surfaces voisines équidistantes possédant des couches magnétiques égales et de signes contraires. — La distance de ces surfaces se nomme l'épaisseur du feuillet.

On désigne sous le nom de *puissance magnétique d'un* *feuillet* une grandeur proportionnelle à la fois à la densité superficielle des couches magnétiques qui le constituent et à leur distance.

Soit $|\sigma|$ la densité magnétique sur les faces d'un feuillet d'épaisseur $|L|$. Soit, de même, $|\varsigma|$ la densité magnétique sur les faces d'un autre feuillet d'épaisseur $|\mathfrak{L}|$. Le rapport des puissances magnétiques $|P_m|$, $|\mathfrak{P}_m|$ de ces deux feuillets est, par définition,

$$\frac{|P_m|}{|\mathfrak{P}_m|} = \frac{|\sigma|}{|\varsigma|}\frac{|L|}{|\mathfrak{L}|}.$$

La comparaison des puissances magnétiques de deux feuillets est donc subordonnée à la comparaison de deux densités magnétiques superficielles et à la comparaison de deux longueurs, ou, puisque $\frac{|\sigma|}{|\varsigma|} = \frac{|\mathcal{M}|}{|\mathfrak{M}|}\left(\frac{|\mathfrak{L}|}{|L|}\right)^2$, *à des comparaisons de masses magnétiques et à des comparaisons de longueurs.*

Le calcul de la valeur numérique du rapport $\frac{|P_m|}{|\mathfrak{P}_m|}$, qui sera la valeur numérique de $|P_m|$ si $|\mathfrak{P}_m|$ est l'unité de puissance magnétique choisie, se fera à l'aide des valeurs numériques de $|\sigma|$, $|L|$, $|\varsigma|$, $|\mathfrak{L}|$, suivant la formule

$$\frac{|P_m|}{|\mathfrak{P}_m|} = \frac{\sigma}{\varsigma}.\frac{L}{\mathfrak{L}} = \frac{\sigma L}{\varsigma \mathfrak{L}}.$$

Pour donner à ce calcul le maximum de simplicité, il faut adopter pour unité de puissance magnétique celle d'un feuillet pour lequel on aurait $\varsigma = 1$ et $\mathfrak{L} = 1$, c'est-à-dire l'*unité normale de puissance magnétique*. La valeur numérique de la puissance magnétique d'un feuillet est alors égale au produit de la valeur numérique de la densité superficielle par la valeur numérique de l'épaisseur, ainsi que l'indique la formule suivante, à laquelle se réduit dans ce cas la formule générale :

$$|P_m| = \sigma.L.$$

III

Électrocinétique.

1. Conductibilités.

Si l'on établit entre les deux extrémités d'un conducteur homogène une différence de potentiel, ce conducteur devient le siège d'un courant électrique.

Ce conducteur est dit avoir une *conductibilité électrique* d'autant plus grande qu'on y développe un courant plus intense avec une moindre différence de potentiel.

Soient $|I|$ et $|\mathfrak{J}|$ les intensités des courants développés dans deux conducteurs homogènes par des différences de potentiel $|V| - |V'|$, $|\mathfrak{V}| - |\mathfrak{V}'|$. Le rapport des conductibilités de ces deux conducteurs est, par définition,

$$\frac{|C_0|}{|\mathfrak{C}_0|} = \frac{|I|}{|\mathfrak{J}|} \cdot \frac{|\mathfrak{V}| - |\mathfrak{V}'|}{|V| - |V'|} = \left(\frac{|I|}{|\mathfrak{J}|}\right)\left(\frac{|V| - |V'|}{|\mathfrak{V}| - |\mathfrak{V}'|}\right)^{-1},$$

ou, si l'on appelle forces électromotrices et si l'on désigne par $|E|$ et $|\mathfrak{E}|$ les différences de potentiel en question,

$$\frac{|C_0|}{|\mathfrak{C}_0|} = \frac{|I|}{|\mathfrak{J}|}\frac{|\mathfrak{E}|}{|E|} = \left(\frac{|I|}{|\mathfrak{J}|}\right)\left(\frac{|E|}{|\mathfrak{E}|}\right)^{-1}.$$

La comparaison de deux conductibilités est donc subordonnée à la comparaison de deux intensités de courant et à la comparaison de deux différences de potentiel ou forces électromotrices.

Le calcul de la valeur numérique du rapport $\frac{|C_0|}{|\mathfrak{C}_0|}$, qui sera la valeur numérique de $|C_0|$ si $|\mathfrak{C}_0|$ est l'unité de conductibilité adoptée, se fera au moyen des valeurs numériques de $|I|$, $|E|$, $|\mathfrak{J}|$, $|\mathfrak{E}|$, suivant la formule

$$\frac{|C_0|}{|\mathfrak{C}_0|} = \frac{I}{\mathfrak{J}} \cdot \frac{\mathfrak{E}}{E} = \frac{I.E^{-1}}{\mathfrak{J}.\mathfrak{E}^{-1}}.$$

Si l'on veut donner à ce calcul de la valeur numérique d'une conductibilité le maximum de simplicité, il faut adopter pour unité de conductibilité celle d'un conducteur pour lequel on aurait $\mathfrak{J} = 1$ pour $\mathcal{E} = 1$, c'est-à-dire l'*unité normale de conductibilité.*

La mesure d'une conductibilité est alors égale au quotient de la valeur numérique de l'intensité du courant existant dans le conducteur par la valeur numérique de la force électromotrice, ce qu'indique la formule suivante, à laquelle se réduit dans ce cas la formule générale :

$$C_0 = \frac{I}{E}.$$

2. Résistances.

La *résistance* d'un conducteur est une grandeur définie comme l'inverse de sa conductibilité.

Le rapport des résistances de deux conducteurs est donc en raison directe des forces électromotrices et en raison inverse des intensités correspondantes, en sorte que l'on a

$$\frac{|R|}{|\mathfrak{R}|} = \frac{|E|}{|\mathcal{E}|}\frac{|\mathfrak{J}|}{|I|} = \left(\frac{|E|}{|\mathcal{E}|}\right)\left(\frac{|I|}{|\mathfrak{J}|}\right)^{-1}$$

ou, puisque $\frac{|E|}{|\mathcal{E}|} = \frac{|W|}{|\mathfrak{W}|}\left(\frac{|Q|}{|\mathfrak{Q}|}\right)^{-1}$,

$$\frac{|R|}{|\mathfrak{R}|} = \left(\frac{|W|}{|\mathfrak{W}|}\right)\left(\frac{|Q|}{|\mathfrak{Q}|}\right)^{-1}\left(\frac{|I|}{|\mathfrak{J}|}\right)^{-1}.$$

La valeur numérique du rapport $\frac{|R|}{|\mathfrak{R}|}$, qui sera la mesure de $|R|$ si $|\mathfrak{R}|$ est l'unité de résistance choisie, s'obtiendra à l'aide des valeurs numériques de $|E|$, $|I|$, $|\mathcal{E}|$, $|\mathfrak{J}|$ suivant la formule

$$\frac{|R|}{|\mathfrak{R}|} = \frac{E}{\mathcal{E}}\cdot\frac{\mathfrak{J}}{I} = \frac{E I^{-1}}{\mathcal{E}\mathfrak{J}^{-1}}.$$

Pour donner à ce calcul de la valeur numérique d'une résistance le maximum de simplicité, il faut adopter pour unité de résistance la résistance d'un conducteur pour lequel on aurait $\mathcal{I} = 1$ pour $\mathcal{E} = 1$, c'est-à-dire la résistance d'un conducteur dont la conductibilité serait égale à l'unité normale de conductibilité. La valeur numérique d'une résistance est alors égale au quotient de la valeur numérique de la force électromotrice par la valeur numérique de l'intensité du courant correspondant, ainsi que l'indique la formule suivante, à laquelle se réduit dans ce cas la formule générale :

$$R = \frac{E}{I}.$$

3. Résistances spécifiques.

Entre les valeurs numériques de la résistance $|R|$ d'un fil conducteur homogène à section uniforme, de sa longueur $|L|$ et de sa section $|S|$, existe la relation

$$\frac{R}{\frac{L}{S}} = \text{const} = \rho.$$

Le paramètre ρ, qui dépend de la nature de la substance constituant le conducteur, se nomme la ***résistance spécifique*** de cette substance.

Soient $|R|$ et $|\mathcal{R}|$ les résistances de deux conducteurs de natures différentes, de longueurs et de sections respectivement égales à $|L|$, $|S|$ d'une part, $|\mathcal{L}|$, $|\mathcal{S}|$ d'autre part. Le rapport des résistances spécifiques des substances constituant ces conducteurs est par définition

$$\frac{|\rho|}{|P|} = \frac{|R|}{|\mathcal{R}|}\,\frac{|\mathcal{L}|}{|L|}\,\frac{|S|}{|\mathcal{S}|}.$$

La comparaison de deux résistances spécifiques est subordonnée à la comparaison de deux résistances, à la compa-

raison de deux longueurs et à la comparaison de deux surfaces.

La valeur numérique du rapport $\frac{\rho}{P}$, qui sera la mesure de $|\rho|$ si $|P|$ est l'unité de résistance spécifique choisie, s'obtiendra à l'aide des valeurs numériques de $|R|$, $|L|$, $|S|$, $|\mathfrak{R}|$, $|\mathcal{L}|$, $|\mathcal{S}|$, suivant la formule

$$\frac{|\rho|}{|P|}=\frac{R}{\mathfrak{R}}\frac{\mathcal{L}}{L}\frac{S}{\mathcal{S}}=\frac{R L^{-1} S}{\mathfrak{R}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{S}}.$$

Pour donner à ce calcul de la valeur numérique d'une résistance spécifique le maximum de simplicité, il faut adopter pour unité la résistance spécifique d'une substance pour laquelle on aurait $\mathfrak{R}=1$ pour $\mathcal{L}=1$ et $\mathcal{S}=1$, c'est-à-dire l'unité normale de résistance spécifique. La valeur numérique de la résistance spécifique d'un conducteur est alors égale au produit de la valeur numérique de sa résistance par la valeur numérique de sa section et par l'inverse de la valeur numérique de sa longueur, ainsi que l'indique la formule suivante, à laquelle se réduit dans ce cas la formule générale :

$$\rho=\frac{RS}{L}.$$

Art. 3.

En résumé, les grandeurs électriques et magnétiques peuvent être divisées en deux classes : *grandeurs fondamentales* et *grandeurs dérivées.*

La comparaison des grandeurs dérivées de même espèce est subordonnée, en vertu de la définition même de ces grandeurs, à des comparaisons de grandeurs fondamentales et à des comparaisons de grandeurs géométriques ou mécaniques, de la façon indiquée par le tableau suivant :

I

Électrostatique.

NATURE des GRANDEURS	COMPOSITION des RAPPORTS	VALEURS numériques DES RAPPORTS
Densités électriques — linéaires.	$\left(\frac{\lvert Q\rvert}{\lvert\mathcal{Q}\rvert}\right)\left(\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{QL^{-1}}{\mathcal{Q}\mathcal{L}^{-1}}$
Densités électriques — superficielles.	$\left(\frac{\lvert Q\rvert}{\lvert\mathcal{Q}\rvert}\right)\left(\frac{\lvert S\rvert}{\lvert\mathcal{S}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{QS^{-1}}{\mathcal{Q}\mathcal{S}^{-1}}$
Densités électriques — solides.	$\left(\frac{\lvert Q\rvert}{\lvert\mathcal{Q}\rvert}\right)\left(\frac{\lvert V_0\rvert}{\lvert\mathcal{V}_0\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{QV_0^{-1}}{\mathcal{Q}\mathcal{V}_0^{-1}}$
Champs électriques.	$\left(\frac{\lvert F\rvert}{\lvert\mathcal{F}\rvert}\right)\left(\frac{\lvert Q\rvert}{\lvert\mathcal{Q}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{FQ^{-1}}{\mathcal{F}\mathcal{Q}^{-1}}$
Flux de force.	$\left(\frac{\lvert F\rvert}{\lvert\mathcal{F}\rvert}\right)\left(\frac{\lvert Q\rvert}{\lvert\mathcal{Q}\rvert}\right)^{-1}\left(\frac{\lvert S\rvert}{\lvert\mathcal{S}\rvert}\right)$	$\frac{FQ^{-1}S}{\mathcal{F}\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{S}}$
Potentiels électriques.	$\left(\frac{\lvert W\rvert}{\lvert\mathcal{W}\rvert}\right)\left(\frac{\lvert Q\rvert}{\lvert\mathcal{Q}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{WQ^{-1}}{\mathcal{W}\mathcal{Q}^{-1}}$
Capacités.	$\frac{\lvert Q\rvert}{\lvert\mathcal{Q}\rvert}\left(\frac{\lvert V\rvert}{\lvert\mathcal{V}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{QV^{-1}}{\mathcal{Q}\mathcal{V}^{-1}}$

II

Magnétisme.

Densités magnétiques — linéaires.	$\frac{\lvert\mathscr{M}\rvert}{\lvert\mathfrak{M}\rvert}\left(\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{\mathscr{M}L^{-1}}{\mathfrak{M}\mathcal{L}^{-1}}$
Densités magnétiques — superficielles.	$\frac{\lvert\mathscr{M}\rvert}{\lvert\mathfrak{M}\rvert}\left(\frac{\lvert S\rvert}{\lvert\mathcal{S}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{\mathscr{M}S^{-1}}{\mathfrak{M}\mathcal{S}^{-1}}$
Densités magnétiques — solides.	$\frac{\lvert\mathscr{M}\rvert}{\lvert\mathfrak{M}\rvert}\left(\frac{\lvert V_0\rvert}{\lvert\mathcal{V}_0\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{\mathscr{M}V_0^{-1}}{\mathfrak{M}\mathcal{V}_0^{-1}}$
Puissances de feuillets.	$\frac{\lvert\mathscr{M}\rvert}{\lvert\mathfrak{M}\rvert}\left(\frac{\lvert S\rvert}{\lvert\mathcal{S}\rvert}\right)^{-1}\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}$	$\frac{\mathscr{M}.S^{-1}}{\mathfrak{M}.\mathcal{S}^{-1}}\frac{L}{\mathcal{L}}$
Champs magnétiques.	$\frac{\lvert F\rvert}{\lvert\mathcal{F}\rvert}\left(\frac{\lvert\mathscr{M}\rvert}{\lvert\mathfrak{M}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{F\mathscr{M}^{-1}}{\mathcal{F}\mathfrak{M}^{-1}}$
Potentiels magnétiques.	$\frac{\lvert W\rvert}{\lvert\mathcal{W}\rvert}\left(\frac{\lvert\mathscr{M}\rvert}{\lvert\mathfrak{M}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{W\mathscr{M}^{-1}}{\mathcal{W}\mathfrak{M}^{-1}}$
Moments magnétiques.	$\frac{\lvert\mathscr{M}\rvert}{\lvert\mathfrak{M}\rvert}\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}$	$\frac{\mathscr{M}L}{\mathfrak{M}\mathcal{L}}$

III

Électrocinétique.

Forces électromotrices.	$\frac{\lvert W\rvert}{\lvert\mathcal{W}\rvert}\left(\frac{\lvert Q\rvert}{\lvert\mathcal{Q}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{WQ^{-1}}{\mathcal{W}\mathcal{Q}^{-1}}$
Conductibilités.	$\left(\frac{\lvert E\rvert}{\lvert\mathcal{E}\rvert}\right)^{-1}\frac{\lvert I\rvert}{\lvert\mathcal{I}\rvert}$	$\frac{W^{-1}QI}{\mathcal{W}^{-1}\mathcal{Q}\mathcal{I}}$
Résistances.	$\frac{\lvert E\rvert}{\lvert\mathcal{E}\rvert}\left(\frac{\lvert I\rvert}{\lvert\mathcal{I}\rvert}\right)^{-1}$	$\frac{WQ^{-1}I^{-1}}{\mathcal{W}\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{I}^{-1}}$
Résistances spécifiques.	$\frac{\lvert E\rvert}{\lvert\mathcal{E}\rvert}\left(\frac{\lvert I\rvert}{\lvert\mathcal{I}\rvert}\right)^{-1}\left(\frac{\lvert L\rvert}{\lvert\mathcal{L}\rvert}\right)^{-1}\left(\frac{\lvert S\rvert}{\lvert\mathcal{S}\rvert}\right)$	$\frac{WLQ^{-1}I^{-1}}{\mathcal{W}\mathcal{L}\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{I}^{-1}}$

Ces diverses grandeurs ont, relativement aux grandeurs fondamentales L, T, F, Q, $\mathcal{M}$, I, des *dimensions* représentées par les symboles suivants :

I

Électrostatique.

NATURE des GRANDEURS		SYMBOLES de DIMENSIONS
Densité électrique	linéaire.	QL^{-1}
	superficielle.	QL^{-2}
	solide.	QL^{-3}
Champ électrique.		FQ^{-1}
Flux de force.		FL^2Q^{-1}
Potentiel électrique.		FLQ^{-1}
Capacité.		$F^{-1}L^{-1}Q^2$

II

Magnétisme.

Densité magnétique	linéaire.	$\mathcal{M}L^{-1}$
	superficielle.	$\mathcal{M}L^{-2}$
	solide.	$\mathcal{M}L^{-3}$
Puissance d'un feuillet.		$\mathcal{M}L^{-1}$
Champ magnétique.		$F\mathcal{M}^{-1}$
Potentiel magnétique.		$FL\mathcal{M}^{-1}$
Moment magnétique.		$\mathcal{M}L$

III

Électrocinétique.

Force électromotrice.	FLQ^{-1}
Conductibilité.	$F^{-1}L^{-1}QI$
Résistance.	$FLQ^{-1}I^{-1}$
Résistance spécifique.	$FL^2Q^{-1}I^{-1}$

Si, dans les expressions précédentes, on remplace Q, $\mathfrak{M}$, I par leurs symboles de dimensions tirés des formules

$$F = \frac{kQ^2}{L^2},$$

$$F = \frac{k'\,\mathfrak{M}^2}{L^2},$$

$$dF = \frac{h\,\mathfrak{M}\,I\,ds \sin\theta}{l^2},$$

$$I = j\,\frac{Q}{T},$$

on obtient les symboles suivants :

I

Électrostatique.

NATURE des GRANDEURS	SYMBOLES de DIMENSIONS
Densité électrique linéaire.	$k^{-\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}$
Densité électrique superficielle.	$k^{-\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}L^{-1}$
Densité électrique solide.	$k^{-\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}L^{-2}$
Champ électrique.	$k^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}L^{-1}$
Flux de force.	$k^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}L$
Potentiel électrique.	$k^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}$
Capacité.	$k^{-1}L$

II

Magnétisme.

Densité magnétique	linéaire.	$k'^{-\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}}$
	superficielle.	$k'^{-\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} L^{-1}$
	solide.	$k'^{-\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} L^{-2}$
Puissance d'un feuillet.		$k'^{-\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}}$
Champ magnétique.		$k'^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} L^{-1}$
Potentiel magnétique.		$k'^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}}$
Moment magnétique.		$k'^{-\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} L^{2}$

III

Électrocinétique.

Force électromotrice.	$k^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}}$		
Conductibilité.	$\dfrac{k'^{\frac{1}{2}}}{h k^{\frac{1}{2}}}$	ou	$k^{-1} j \dfrac{L}{T}$
Résistance.	$\dfrac{h k^{\frac{1}{2}}}{k'^{\frac{1}{2}}}$	ou	$k j^{-1} \dfrac{T}{L}$
Résistance spécifique.	$\dfrac{h k^{\frac{1}{2}}}{k'^{\frac{1}{2}}} L$	ou	$k j^{-1} T$

CHAPITRE III

Choix systématique des unités électriques et magnétiques.

Dans l'étude des phénomènes électriques et magnétiques, moins encore que dans celle des autres phénomènes physiques, le choix des unités employées dans les mesures ne saurait être livré à l'arbitraire. Prendre des unités en dehors de toute règle, ce serait ajouter gratuitement la complication de relations numériques tout à fait incohérentes à la complication déjà assez grande des lois des phénomènes.

Puisque l'étude de tous les phénomènes physiques implique des mesures de grandeurs géométriques et mécaniques, il est clair que l'on doit avant tout faire profiter cette étude des avantages que comporte l'emploi dans ces mesures d'un système d'unités normales.

La première règle à suivre dans la constitution d'un système rationnel aussi parfait que possible d'unités physiques est donc de faire usage d'unités absolues géométriques et mécaniques.

Le calcul de la valeur numérique d'une grandeur dérivée à l'aide des valeurs numériques des grandeurs fondamentales dont elle dépend ayant son maximum de simplicité, si l'on choisit pour unité l'*unité normale* des grandeurs en question, la seconde règle à suivre sera évidemment d'adopter pour la mesure des grandeurs dérivées un système d'unités normales.

Pour constituer, suivant ces règles, un système rationnel d'unités électriques et magnétiques, il faut donc assigner : 1° des unités pour les grandeurs fondamentales géométriques et mécaniques; 2° des unités pour les grandeurs fondamentales électriques et magnétiques, et ensuite adopter pour les grandeurs dérivées les unités normales définies au moyen de ces unités fondamentales.

Mais les unités fondamentales électriques et magnétiques peuvent-elles, de même que les unités fondamentales géométriques et mécaniques, être prises d'une façon arbitraire?

Les formules

$$F = k \frac{QQ'}{L^2}, \tag{1}$$

$$F = k' \frac{\mathcal{M}\mathcal{M}'}{L^2}, \tag{2}$$

$$I = j \frac{Q}{T}, \tag{3}$$

$$dF = \frac{h \mathcal{M} I \, ds \sin\theta}{l^2}, \tag{4}$$

$$(5) \qquad d^2F = a\frac{II'\,ds\,ds'}{l^2}(2\cos\omega - 3\cos\theta\cos\theta'),$$

dans lesquelles des mesures de grandeurs fondamentales électriques et magnétiques sont associées à des mesures de grandeurs fondamentales géométriques et mécaniques, peuvent trancher la question.

La formule

$$F = k\frac{QQ'}{L^2}$$

suppose que la quantité d'électricité prise pour unité est celle qui exerce sur une quantité égale placée à l'unité de distance une répulsion égale à k fois l'unité de force.

La formule

$$F = k'\frac{\mathcal{M}\mathcal{M}'}{L^2}$$

suppose que la masse magnétique prise pour unité est la masse qui, placée à l'unité de distance d'une masse égale, exerce sur elle une répulsion égale à k' fois l'unité de force.

La formule

$$I = j\frac{Q}{T}$$

suppose que l'intensité unité est celle d'un courant qui met en jeu dans l'unité de temps une quantité d'électricité égale à la fraction $\frac{1}{j}$ de l'unité de quantité.

De la formule

$$dF = \frac{h\mathcal{M}I\,ds\sin\theta}{l^2}$$

on déduit, pour l'expression de l'action exercée par un courant rectiligne indéfini sur une masse m située à une distance L,

$$F = \frac{2h\mathcal{M}I}{L^2}.$$

Cette formule suppose que l'intensité unité est l'intensité d'un courant rectiligne indéfini exerçant sur la masse magnétique unité placée à l'unité de distance une action égale à $2h$ fois l'unité de force.

Enfin, de la formule

$$d^2F = a \frac{II' \, ds \, ds'}{l^2} (2 \cos \omega - 3 \cos \theta \cos \theta')$$

on déduit, pour l'expression de l'action exercée par un courant rectiligne indéfini sur un courant parallèle de longueur L et situé à une distance D du premier,

$$F = \frac{2aII'L}{D}.$$

Cette formule suppose qu'un courant indéfini d'intensité égale à l'unité exerce sur un courant parallèle de même intensité ayant une longueur égale à l'unité et placé à l'unité de distance du premier une action égale à $2a$ fois l'unité de force.

La définition des unités fondamentales électriques et magnétiques se trouve ainsi subordonnée à la considération des valeurs numériques des paramètres

$$k, \quad k', \quad j, \quad h, \quad a.$$

Si ces paramètres peuvent recevoir des valeurs arbitraires indépendantes du choix des unités fondamentales géométriques et mécaniques, les unités fondamentales électriques et magnétiques seront aussi arbitraires.

Si, au contraire, il existe entre ces paramètres des relations nécessaires et si leurs valeurs numériques dépendent du choix des unités fondamentales géométriques et mécaniques, les unités fondamentales électriques et magnétiques seront assujetties à une certaine corrélation.

Dans le premier cas, la façon la plus simple de profiter de l'indétermination absolue du choix des paramètres consisterait à les prendre tous égaux à l'unité.

Dans le second cas, les formules ne pourraient pas recevoir toutes à la fois une pareille simplification pour tous les systèmes possibles d'unités géométriques et mécaniques.

La question est donc de savoir si les paramètres k, k', j, h, a peuvent être considérés comme des coefficients sans dimensions, invariables et indépendants les uns des autres, ou s'ils doivent être considérés comme dépendant des unités fondamentales géométriques et mécaniques et liés entre eux.

Les formules (1), (2), (3), (4), (5) supposent entre les dimensions des diverses grandeurs qui y figurent les relations suivantes :

$$\text{dim. } Q = \text{dim. } \frac{F^{\frac{1}{2}} L}{\sqrt{k}},$$

$$\text{dim. } \mathcal{M} = \text{dim. } \frac{F^{\frac{1}{2}} L}{\sqrt{k'}},$$

$$\text{dim. } I = \text{dim. } j \frac{Q}{T},$$

$$\text{dim. } I = \text{dim. } \frac{F L}{h \mathcal{M}},$$

$$\text{dim. } I = \text{dim. } \frac{F^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}.$$

Entre ces relations, on peut éliminer dim. Q, dim. $\mathcal{M}$, dim. I, ce qui se fait très simplement en égalant entre elles les expressions de dim. I fournies par les trois dernières égalités et y introduisant les expressions de dim. Q et de dim. $\mathcal{M}$ données par les deux premières. On obtient ainsi les relations

$$\text{dim. } \frac{j}{T} \frac{F^{\frac{1}{2}} L}{\sqrt{k}} = \text{dim. } \frac{F L}{h \dfrac{F^{\frac{1}{2}} L}{\sqrt{k'}}} = \text{dim. } \frac{F^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$$

ou

$$\text{dim. } \frac{j}{\sqrt{k}} \frac{L}{T} = \text{dim. } \frac{\sqrt{k'}}{h} = \text{dim. } \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$$

ou

$$\text{dim. } a = \text{dim. } \frac{h^2}{k'}$$

et

$$\text{dim.}\ \frac{\sqrt{kk'}}{jh} = \text{dim.}\ \frac{\text{L}}{\text{T}}.$$

Ces relations montrent que les paramètres k, k', j, h, a ne sauraient être des coefficients sans dimensions, mais qu'au contraire leurs valeurs numériques dépendent des unités fondamentales qu'elles changent avec ces dernières et que ces changements sont liés entre eux d'une manière déterminée.

La première relation

$$\text{dim.}\ a = \text{dim.}\ \frac{h^2}{k'}$$

indique qu'un changement des unités fondamentales géométriques et mécaniques fait varier dans un même rapport la valeur numérique de a et la valeur numérique de $\frac{h^2}{k'}$, ou bien que ce changement laisse invariable le quotient

$$\frac{a}{\frac{h^2}{k'}}.$$

La seconde relation

$$\text{dim.}\ \frac{\sqrt{kk'}}{jh} = \text{dim.}\ \frac{\text{L}}{\text{T}}$$

indique qu'un changement des unités fondamentales fait varier la valeur numérique de $\frac{\sqrt{kk'}}{jh}$ dans le même rapport que la valeur numérique d'une vitesse déterminée. Désignons par $|\text{V}_i|$ la vitesse qui, dans un système particulier d'unités, a une valeur numérique égale à la valeur numérique, dans le même système, de l'expression $\frac{\sqrt{kk'}}{jh}$. La relation

$$\text{val. numér.}\ \frac{\sqrt{kk'}}{jh} = \text{val. numér.}\ |\text{V}_i|$$

subsistera dans tous les systèmes d'unités.

Soit V_i la valeur numérique, dans un système déterminé, de la vitesse en question. On a, entre les valeurs numériques des paramètres k, k', j, h, dans ce même système, la relation

$$\frac{\sqrt{kk'}}{jh} = V_i$$

ou

$$\frac{kk'}{j^2h^2} = V_i^2.$$

L'incertitude qui existe encore, dans l'état actuel de la science, relativement à la nature des grandeurs représentées par ces divers paramètres, laisse subsister une certaine indétermination dans la fixation de leurs valeurs numériques et peut donner lieu à une infinité de systèmes d'unités électriques et magnétiques. On peut mettre à profit cette indétermination pour prendre égaux à l'unité et considérer comme étant sans dimensions certains d'entre ces paramètres.

Relativement à la valeur à attribuer à la constante

$$\frac{\frac{a}{h^2}}{k'},$$

il n'y a pas d'hésitation possible si l'on remarque qu'en adoptant pour cette constante la valeur 1, on rend identiques les valeurs numériques de l'action d'un courant sur un autre courant calculée, soit directement en faisant usage de la formule d'Ampère, soit d'une manière indirecte en faisant usage de la formule élémentaire de l'électromagnétisme, c'est-à-dire en ayant égard au champ magnétique créé par le courant considéré.

Si l'on adopte la relation

$$\frac{\frac{a}{h^2}}{k'} = 1$$

ou $\frac{k'}{h^2} = \frac{1}{a}$, la relation

$$\frac{kk'}{j^2 h^2} = V_i^2$$

devient

$$\frac{k}{j^2 a} = V_i^2.$$

Un courant d'intensité I et un feuillet magnétique de même contour et de puissance Φ donnent lieu au même champ magnétique s'il existe entre I et Φ la relation

$$hI = k'\Phi.$$

L'équivalence entre un courant et un feuillet magnétique de même contour serait caractérisée par la relation simple

$$I = \Phi,$$

si l'on avait

$$h = k'.$$

Il y aura donc avantage à joindre cette relation simplificatrice aux précédentes.

En résumé, si l'on n'a en vue que la plus grande simplification des formules, on choisira les valeurs numériques des paramètres en tenant compte des relations

$$\frac{a}{\frac{h^2}{k'}} = 1,$$

$$h = k',$$

$$\frac{k}{j^2 a} = V_i^2,$$

qui équivalent aux suivantes :

$$a = k' = h,$$

$$\frac{k}{j^2 a} = V_i^2.$$

D'après cela, les divers paramètres seront complètement déterminés si l'on se donne deux de ceux qui figurent dans la relation

$$\frac{k}{j^2 a} = V_i^2.$$

En prenant égaux à l'unité deux de ces trois paramètres, on a les trois systèmes de valeurs qui suivent :

$$(1) \qquad k = 1, \quad j = 1, \quad a = \frac{1}{V_i^2}, \quad k' = \frac{1}{V_i^2}, \quad h = \frac{1}{V_i^2}.$$

$$(2) \qquad k = V_i^2, \quad j = 1, \quad a = 1, \quad k' = 1, \quad h = 1.$$

$$(3) \qquad k = 1, \quad j = \frac{1}{V_i^2}, \quad a = 1, \quad k' = 1, \quad h = 1.$$

Pour avoir à la fois

$$k = 1, \quad j = 1, \quad h = 1,$$

il faudrait renoncer à la relation

$$h = k'.$$

On aurait alors le système suivant, indiqué par Maxwell :

$$(4) \qquad k = 1, \quad j = 1, \quad a = \frac{1}{V_i^2}, \quad k' = V_i^2, \quad h = 1.$$

Le système (1) a été proposé par Clausius, le système (2) par Weber et par l'Association britannique, le système (3) par M. Bertrand.

A ces divers systèmes de valeurs des paramètres correspondent autant de modes différents de définition des grandeurs fondamentales électriques et magnétiques, et par conséquent autant de systèmes différents d'unités électriques et magnétiques.

Les systèmes tels que (1) et (4) donnent la forme la plus simple possible aux formules de l'électrostatique. On les désigne sous le nom de *systèmes électrostatiques*.

Le système (2) donne la forme la plus simple possible aux formules du magnétisme et de l'électromagnétisme. On le désigne sous le nom de *système électromagnétique*.

Le système (3) jouit de l'un et de l'autre avantage.

Examinons en détail ces différents systèmes.

CHAPITRE IV

Systèmes électrostatiques.

Art. 1. — *Système électrostatique de Clausius.*

1. Formules et unités fondamentales.

Dans ce système, les formules fondamentales s'écrivent :

$$(1') \qquad F = \frac{QQ'}{L^2},$$

$$(2') \qquad F = \frac{1}{V_i^2} \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{L^2},$$

$$(3') \qquad I = \frac{Q}{T},$$

$$(4') \qquad dF = \frac{1}{V_i^2} \frac{\mathfrak{M} I \, ds \sin\theta}{l^2},$$

$$(5') \qquad d^2F = \frac{1}{V_i^2} \frac{II' \, ds \, ds'}{l^2} (2 \cos \theta - 3 \cos \theta \cos \theta').$$

La quantité d'électricité unité est la quantité qui exerce sur une quantité égale placée à l'unité de distance, dans le vide, une répulsion égale à l'unité de force.

La masse magnétique unité est celle qui exerce sur une masse égale placée à l'unité de distance, dans le vide, une répulsion dont la valeur numérique est égale à l'inverse du carré de la valeur numérique de la vitesse $|V_i|$.

L'intensité unité est celle d'un courant transportant dans l'unité de temps une quantité d'électricité égale à l'unité de quantité.

Les unités des diverses autres grandeurs sont les unités normales basées sur les précédentes suivant les définitions données dans le chapitre II (livre III).

2. Dimensions des principales grandeurs.

Adopter les formules précédentes, c'est assigner aux grandeurs fondamentales électriques et magnétiques les dimensions exprimées par les symboles suivants :

$$Q = F^{\frac{1}{2}} L,$$
$$\mathcal{M} = F^{\frac{1}{2}} L^2 T^{-1},$$
$$I = F^{\frac{1}{2}} L T^{-1}.$$

D'après le tableau qui termine le chapitre II (livre III), il en résulte pour les grandeurs dérivées les dimensions suivantes :

I. — *Électrostatique.*

		UNITÉS FONDAMENTALES (L, T, F)	UNITÉS FONDAMENTALES (L, T, M)
Densité électrique	linéaire.	$F^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
	superficielle.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
	solide.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-2}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$
Champ électrique.		$F^{\frac{1}{2}} L^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
Flux de force.		$F^{\frac{1}{2}} L$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
Potentiel électrique.		$F^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Capacité.		L	L

II. — *Magnétisme.*

Densité magnétique	linéaire.	$F^{\frac{1}{2}} L T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$
	superficielle.	$F^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2}$
	solide.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-1} T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2}$
Puissance d'un feuillet.		$F^{\frac{1}{2}} L T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$
Champ magnétique.		$F^{\frac{1}{2}} L^{-2} T$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}}$
Potentiel magnétique.		$F^{\frac{1}{2}} L^{-1} T$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}}$
Moment magnétique.		$F^{\frac{1}{2}} L^{3} T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2}$

III. — *Électrocinétique.*

Force électromotrice.	$F^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Conductibilité.	$L T^{-1}$	$L T^{-1}$
Résistance.	$L^{-1} T$	$L^{-1} T$
Résistance spécifique.	T	T

Dans ce système, un potentiel électrique a les mêmes dimensions ($F^{\frac{1}{2}}$) qu'une densité linéaire, et par suite une capacité a les mêmes dimensions (L) qu'une longueur; la dérivée première d'un potentiel suivant une ligne a les mêmes dimensions ($F^{\frac{1}{2}} L^{-1}$) qu'un champ électrique; un flux de force a les mêmes dimensions ($F^{\frac{1}{2}} L$) qu'une quantité d'électricité; un champ électrique a les mêmes dimensions qu'une densité superficielle; la dérivée seconde d'un potentiel a les mêmes dimensions ($F^{\frac{1}{2}} L^{-2}$) qu'une densité électrique en un point.

Ces relations sont évidentes dans les formules simples, déduites de la loi de Coulomb, qui forment les éléments du calcul des phénomènes électrostatiques.

Ainsi, entre la valeur numérique V du potentiel en un point d'un champ dû à une masse électrique et les valeurs numériques Q, L de cette masse et de sa distance au point considéré, existe la relation

$$V = \frac{Q}{L}.$$

Entre la valeur numérique du potentiel d'une sphère conductrice et les valeurs numériques Q et L de sa charge et de son rayon existe la relation

$$V = \frac{Q}{L},$$

d'où il suit que la capacité d'une sphère est numériquement égale à son rayon.

Entre la valeur numérique de la composante d'un champ électrique suivant une direction donnée et la valeur numérique de la dérivée du potentiel suivant cette direction existe la relation

$$H_e = -\frac{\partial V}{\partial l}.$$

Entre la valeur numérique $\int H_e \, ds$ du flux de force émanant d'une surface fermée et la valeur numérique ΣdQ de la somme des masses électriques situées à l'intérieur de la surface existe la relation

$$\int H_e \, ds = 4\pi \Sigma dQ.$$

Entre la valeur numérique H_e du champ électrique en un point infiniment voisin d'un conducteur électrisé et la valeur numérique σ de la densité superficielle au point correspondant de la surface du conducteur existe la relation

$$H_e = 4\pi\sigma.$$

Entre la valeur numérique de la somme des trois dérivées secondes du potentiel en un point et la valeur numérique ρ de la densité électrique en ce point existe la relation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho.$$

3. Remarques relatives aux résistances.

I

Une résistance a les mêmes dimensions que l'inverse d'une vitesse.

Voici, suivant S.-W. Thomson, une façon très simple d'imaginer une vitesse ayant une valeur numérique dont l'inverse est égale à la valeur numérique d'une résistance estimée suivant le système électrostatique :

Soit une sphère de rayon L possédant une charge Q. Si elle est mise en communication avec le sol par un fil conducteur, elle éprouve pendant le temps dt une perte de charge dQ. Imaginons qu'en même temps le rayon diminue de telle façon que le potentiel demeure constant. On aura

$$dQ = V dL.$$

L'une des extrémités du fil étant maintenue au potentiel V et l'autre au potentiel O, ce fil, de résistance R, est parcouru par un courant dont la valeur numérique est

$$I = \frac{V}{R}.$$

La quantité d'électricité qui s'écoule pendant le temps dt est par suite

$$I\,dt = \frac{V}{R}\,dt.$$

On a donc

$$dQ = V\,dL = \frac{V}{R}\,dt,$$

d'où

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{R}.$$

$\frac{dL}{dt}$ est la valeur numérique de la vitesse avec laquelle chaque point de la sphère se rapproche du centre et qu'on peut appeler vitesse de contraction.

Donc *la valeur numérique de la résistance d'un fil conducteur dans le système électrostatique est l'inverse de la valeur numérique de la vitesse avec laquelle une sphère électrisée reliée au sol par ce fil devrait se contracter pour conserver un potentiel constant, quelle que soit d'ailleurs la valeur de ce potentiel.*

II.

Dans le système que nous considérons, une résistance spécifique a les dimensions d'un temps.

M. Lippmann (1) a indiqué une ingénieuse expérience permettant de réaliser une durée dont la valeur numérique soit une fraction connue de la valeur numérique d'une résistance spécifique donnée.

Soit un galvanomètre différentiel dont l'un des circuits est parcouru par un courant continu dû à une pile de force électromotrice E, l'autre circuit recevant une série discontinue de décharges obtenues à l'aide d'un condensateur de capacité C chargé périodiquement par la même pile.

Le premier circuit, de résistance R, débite pendant un temps τ une quantité d'électricité égale à

$$\frac{E}{R}\tau.$$

(1) *Sur une unité de temps absolue. Étalons électriques de temps et chronoscopes des variations.* (*Journ. de phys.*, 2e s., t. VI (1887), p. 261.)

Si t est l'intervalle de temps qui sépare deux décharges du condensateur, le nombre de décharges effectuées pendant le temps τ est $\frac{\tau}{t}$, et la quantité d'électricité débitée par le deuxième circuit pendant ce temps est

$$\frac{\tau}{t}\,\mathrm{CE}.$$

On peut supposer l'intervalle de deux décharges réglé de façon que le débit de ce dernier circuit soit égal à celui du premier. L'aiguille du galvanomètre n'éprouvera alors aucune déviation. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait

$$\frac{\tau}{t}\,\mathrm{CE} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\tau$$

ou

$$t = \mathrm{CR}.$$

Or, soit p le rapport de la capacité du condensateur à celle d'une sphère isolée de rayon l. Soit q le rapport de la résistance du premier circuit à la résistance d'un cube de mercure à 0° ayant pour côté une longueur l. On a

$$\mathrm{C} = pl,$$

$$\mathrm{R} = q\rho\,\frac{l}{l^2} = q\,\frac{\rho}{l},$$

$$\mathrm{CR} = pq\rho,$$

et par suite

$$t = pq\rho.$$

Donc lorsque dans l'appareil défini tout à l'heure l'aiguille du galvanomètre est au zéro, la valeur numérique t de l'intervalle de deux décharges est une fraction pq de la valeur numérique ρ de la résistance spécifique du mercure à 0°.

« Indépendamment de l'usage qu'on peut en faire pour mesurer le temps en valeur absolue, conclut M. Lippmann, l'appareil qui vient d'être décrit jouit de propriétés particulières. Il constitue une sorte d'horloge qui indique, qui enregistre et peut au besoin corriger elle-même ses variations de vitesse. L'appareil étant réglé de manière que l'aiguille aimantée soit au zéro, il suffit que la vitesse du commutateur augmente légèrement pour que l'équilibre soit troublé et que l'aiguille aimantée dévie dans le sens correspondant; si la vitesse, au contraire, diminue, c'est l'action du circuit antagoniste qui l'emporte et l'aiguille dévie en sens contraire. Ces déviations, quand elles sont petites, sont proportionnelles aux variations de vitesse. Or, on peut d'abord les noter; on peut, en outre, les enregistrer soit par la photographie, soit en employant un appareil Rédier, comme celui que M. Mascart a adapté à son électromètre à quadrant; enfin, on peut charger ledit Rédier de réagir sur la vitesse de manière à réduire à zéro ses variations. Si ces variations ne sont pas complètement annulées, elles n'en seront pas moins enregistrées, de sorte qu'on en pourra tenir compte. »

ART. 2. — *Système électrostatique de Maxwell.*

1. Formules et unités fondamentales.

Dans ce système, les formules fondamentales s'écrivent :

$$F = \frac{QQ'}{L^2},$$

$$F = V_i^2 \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{L^2},$$

$$I = \frac{Q}{T},$$

$$dF = \frac{\mathfrak{M} I\, ds \sin\theta}{l^2},$$

$$d^2F = \frac{1}{V_i^2} \frac{II'\, ds\, ds'}{l^2} (2\cos\omega - 3\cos\theta\cos\theta').$$

La quantité d'électricité unité et par suite l'intensité unité sont les mêmes que dans le système précédent.

La masse magnétique unité est celle qui exerce sur une masse égale placée à l'unité de distance une répulsion dont la valeur numérique est égale au carré de la valeur numérique de la vitesse $|V_i|$.

2. Dimensions des principales grandeurs.

Les dimensions des grandeurs électriques sont les mêmes que dans le système précédent.

Les dimensions des grandeurs magnétiques sont différentes, ainsi que le montre le tableau suivant :

Masse magnétique.	$F^{\frac{1}{2}}T$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$
Densité magnétique — linéaire.	$F^{\frac{1}{2}}L^{-1}T$	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}$
Densité magnétique — superficielle.	$F^{\frac{1}{2}}L^{-2}T$	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{3}{2}}$
Densité magnétique — solide.	$F^{\frac{1}{2}}L^{-3}T$	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{5}{2}}$
Puissance d'un feuillet.	$F^{\frac{1}{2}}L^{-1}T$	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}$
Champ magnétique.	$F^{\frac{1}{2}}T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-2}$
Potentiel magnétique.	$F^{\frac{1}{2}}LT^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-2}$
Moment magnétique.	$F^{\frac{1}{2}}LT$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}$

Puisque dans ce système on n'a pas

$$k' = h,$$

la valeur numérique de l'intensité d'un courant n'est pas égale à la valeur numérique de la puissance du feuillet magnétique de même contour équivalent. Entre ces valeurs numériques existe la relation

$$I = V_i^2 \Phi.$$

Art. 3. — *Mesures électrostatiques.*

Les grandeurs qui forment les principaux objets des mesures électriques ou magnétiques sont :

Dans le domaine de l'électrostatique,
- les potentiels,
- les capacités,
- les charges électriques ;

Dans le domaine de l'électrocinétique,
- les forces électromotrices,
- les intensités de courants,
- les résistances ;

Dans le domaine du magnétisme,
- les champs magnétiques,
- les moments magnétiques.

Les autres grandeurs sont plutôt des objets de calcul.

Les grandeurs dont les mesures en unités électrostatiques s'obtiennent le plus directement sont les grandeurs électrostatiques.

Les appareils nommés électromètres absolus permettent de déduire immédiatement de mesures géométriques et mécaniques la valeur absolue des différences de potentiel et par suite des forces électromotrices.

Un condensateur sphérique, un condensateur plan présentent des capacités électrostatiques pouvant être évaluées directement d'après leurs dimensions. Par comparaison, ils permettent d'évaluer la capacité électrostatique d'un conducteur ou d'un condensateur quelconques.

Des valeurs numériques de la différence de potentiel aux armatures et de la capacité d'un condensateur quelconque, on peut déduire la valeur numérique de sa charge à l'aide de la formule

$$Q = CV.$$

Si ce condensateur, mis en relation avec une source capable d'établir entre ses deux armatures la différence de potentiel V, est déchargé dans un circuit n fois par seconde, ce circuit est le siège d'un débit d'électricité égal à

$$nCV.$$

On a alors le moyen d'évaluer l'intensité d'un courant en cherchant quelle valeur doit avoir le nombre n pour que la décharge périodique du condensateur dans un circuit identique à celui du courant produise le même effet que ce dernier. Le débit d'électricité étant le même de part et d'autre, on a

$$I = nCV.$$

De la mesure de l'intensité d'un courant et de celle de la différence de potentiel existant entre deux points de circuit, on déduit la valeur numérique de la résistance comprise entre ces deux points par la formule

$$R = \frac{E}{I}.$$

La connaissance de l'intensité d'un courant conduit à celle du champ magnétique créé par ce courant, et par comparaison, avec ce champ magnétique, on arrive à connaître le champ magnétique terrestre. On peut alors, d'après la méthode de Gauss, déterminer le moment magnétique d'un aimant quelconque.

On voit ainsi comment, dans une première mise en pratique du système électrostatique, devraient être enchaînées les mesures correspondant aux divers ordres de phénomènes.

La possibilité d'utiliser les résultats des mesures une fois faites simplifie ensuite considérablement les mesures subséquentes.

Si l'on est en possession d'un conducteur dont la résistance est connue, la mesure d'une résistance quelconque se fera par une simple comparaison avec la première.

La détermination de l'intensité d'un courant pourra s'obtenir à l'aide de la différence de potentiel V existant entre les extrémités d'une résistance R faisant partie du circuit, d'après la formule

$$I = \frac{V}{R},$$

ou bien directement à l'aide d'un galvanomètre, d'un électrodynamomètre, d'un voltamètre et en général d'un appareil fondé sur un effet quelconque des courants, gradué une fois pour toutes.

La connaissance de l'intensité d'un courant conduit à celle de la différence de potentiel que ce courant établit entre les extrémités d'une résistance connue, et cette différence de potentiel peut servir à évaluer une différence de potentiel ou une force électromotrice quelconque.

La multiplicité des relations existant entre les diverses grandeurs que l'on peut avoir à évaluer; la possibilité de considérer à volonté comme inconnue l'une quelconque des grandeurs figurant dans chaque relation rendent, comme on le voit, extrêmement variée et fertile en ressources la pratique courante des mesures électriques.

CHAPITRE V

Système électro-magnétique.

1. Formules et unités fondamentales.

Dans ce système les formules fondamentales s'écrivent :

(1') $$F = V_i^2 \frac{QQ'}{L^2},$$

(2') $$F = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{L^2},$$

(3') $$I = \frac{Q}{T},$$

(4') $$dF = \frac{\mathfrak{M} I\, ds \sin\theta}{l^2},$$

(5') $$d^2F = \frac{II'\, ds\, ds'}{l^2}(2\cos\omega - 3\cos\theta\cos\theta').$$

La quantité d'électricité prise pour unité est celle qui exerce sur une quantité égale placée à l'unité de distance, dans le vide, une répulsion dont la valeur numérique est égale au carré de la valeur numérique de la vitesse $|V_i|$.

La masse magnétique unité est celle qui exerce sur une masse égale placée à l'unité de distance une répulsion égale à l'unité de force.

L'intensité unité est celle d'un courant transportant dans l'unité de temps une quantité d'électricité égale à l'unité de quantité.

Le champ magnétique créé par un courant rectiligne indéfini en un point situé à une distance L de ce courant est donné par l'expression

$$H = \frac{2I}{L}.$$

Le champ magnétique créé en son centre par un courant circulaire de rayon L est donné par l'expression

$$H = \frac{2\pi I}{L}.$$

On peut donc définir l'unité d'intensité dans le système électromagnétique comme étant l'intensité que devrait avoir un courant rectiligne indéfini pour donner lieu, en un point distant de l'unité de longueur, à un champ magnétique égal à 2 fois le champ magnétique unité; ou encore comme étant l'intensité que devrait avoir un courant circulaire de rayon 1, pour donner lieu en son centre à un champ magnétique ayant une valeur numérique égale à 2π.

Les unités des diverses autres grandeurs sont les unités normales définies comme on l'a vu au chap. II (liv. III).

La formule

$$W = RI^2T$$

permet de définir l'unité de résistance comme égale à la résistance d'un conducteur dans lequel un courant d'intensité égale à l'unité dégagerait pendant l'unité de temps une quantité d'énergie égale à l'unité.

2. Dimensions des principales grandeurs.

Adopter les formules écrites en tête de ce chapitre, c'est assigner aux grandeurs fondamentales électriques et magnétiques les dimensions exprimées par les symboles suivants :

$$Q = F^{\frac{1}{2}}T,$$
$$\mathcal{M} = F^{\frac{1}{2}}L,$$
$$I = F^{\frac{1}{2}}.$$

D'après le tableau du chap. II (liv. III), il en résulte pour les grandeurs dérivées les dimensions suivantes :

I

Électrostatique.

		UNITÉS FONDAMENTALES (L, T, F)	UNITÉS FONDAMENTALES (L, T, M)
Densité électrique	linéaire.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-1} T$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}}$
	superficielle.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-2} T$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}}$
	solide.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-3} T$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{5}{2}}$
Champ électrique.		$F^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2}$
Flux de force.		$F^{\frac{1}{2}} L^{2} T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{5}{2}} T^{-2}$
Potentiel électrique.		$F^{\frac{1}{2}} L T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$
Capacité.		$L^{-1} T^{2}$	$L^{-1} T^{2}$

II

Magnétisme.

Densité magnétique	linéaire.	$F^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
	superficielle.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
	solide.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-2}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$
Puissance d'un feuillet.		$F^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Champ magnétique.		$F^{\frac{1}{2}} L^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
Potentiel magnétique.		$F^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Moment magnétique.		$F^{\frac{1}{2}} L^{2}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{5}{2}} T^{-1}$

III

Électrocinétique.

Force électromotrice.	$F^{\frac{1}{2}} L T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$
Conductibilité.	$L^{-1} T$	$L^{-1} T$
Résistance.	$L T^{-1}$	$L T^{-1}$
Résistance spécifique.	$L^{2} T^{-1}$	$L^{2} T^{-1}$

Dans ce système, les dimensions des diverses grandeurs magnétiques sont les mêmes que celles des grandeurs électriques de mêmes noms dans le système électrostatique.

L'exposant de F ou de M dans le symbole électromagnétique d'une grandeur donnée est le même que dans le symbole électrostatique.

Le symbole des dimensions d'une résistance est celui d'une vitesse, c'est-à-dire l'inverse de ce qu'il est dans le système électrostatique.

La réalisation d'une vitesse numériquement égale à une résistance donnée pourrait être obtenue à l'aide de l'expérience suivante :

Soit une boussole des tangentes de résistance R mise en relation avec deux barres parallèles de résistance négligeable, séparées par un intervalle L et sur lesquelles une barre perpendiculaire aux premières et comme elles sans résistance appréciable peut glisser parallèlement à leur direction. — Supposons les barres parallèles placées dans un champ magnétique ayant une composante $\mathcal{H}$ perpendiculaire à leur plan. Le déplacement de la barre mobile fait varier le flux de force magnétique traversant le circuit du galvanomètre. Si $\mathcal{V}$ est la vitesse de translation de cette barre, la variation du flux de force pendant l'unité de temps est égale à

$$\mathcal{H}\mathcal{V}L.$$

Telle est aussi la valeur numérique de la force électromotrice induite dans le circuit. L'intensité du courant induit a donc une valeur numérique égale à

$$\frac{\mathcal{H}\mathcal{V}L}{R}.$$

Une seconde expression de cette intensité est donnée par la boussole, savoir :

$$\frac{H}{G} \operatorname{tg} \delta,$$

G étant la constante de la boussole calculable d'après ses dimensions, H la composante horizontale du champ magnétique terrestre et δ la déviation observée.

De l'égalité

$$\frac{\mathcal{H}\mathcal{V}L}{R} = \frac{H}{G} \operatorname{tg} \delta$$

on déduit

$$R = \mathfrak{V} \frac{\mathcal{H}}{H} G L \frac{1}{\operatorname{tg} \delta}.$$

Supposons le plan des barres parallèles vertical et perpendiculaire au méridien magnétique. Alors on a $\mathcal{H} = H$. Si, de plus, l'écartement L de ces barres est tel que $GL = 1$, on a

$$R = \mathfrak{V} \frac{1}{\operatorname{tg} \delta}.$$

Dans ces conditions, la résistance du fil de la boussole est numériquement égale à la vitesse avec laquelle devrait se produire le déplacement de la barre mobile pour donner lieu à une déviation de 45° (1).

3. Mesures électromagnétiques.

Les grandeurs dont la mesure en unités électromagnétiques peut s'obtenir directement à l'aide de mesures géométriques et mécaniques sont :

L'intensité du champ magnétique terrestre;

Le moment magnétique d'un aimant;

L'intensité d'un courant.

La valeur absolue du champ magnétique terrestre est donnée par la méthode de Gauss.

La valeur absolue de l'intensité d'un courant peut être obtenue à l'aide de la mesure d'actions électrodynamiques.

La comparaison du champ magnétique d'un courant au champ magnétique terrestre conduit à la mesure des intensités de courants à l'aide des appareils électromagnétiques.

Les phénomènes d'induction dus au champ terrestre donnent des forces électromotrices directement calculables.

La mesure absolue d'une intensité de courant et la mesure absolue d'une force électromotrice permettent d'obtenir la mesure absolue d'une résistance.

L'établissement d'un étalon absolu de résistance a été l'objet de travaux considérables, en raison de la grande importance

(1) Voir la note V.

pratique que présentent, grâce à leur simplicité, les méthodes de mesure fondées sur l'emploi de résistances connues.

4. Remarque sur le système électrodynamique employé par Ampère.

Dans ses calculs relatifs aux phénomènes électrodynamiques, Ampère a fait usage de la formule élémentaire suivante :

$$d^2F = \frac{II' \, ds \, ds'}{l^2} (\cos\omega - \tfrac{3}{2} \cos\theta \cos\theta').$$

Dans le système électromagnétique, on emploie la formule

$$d^2F = \frac{II' \, ds \, ds'}{l^2} (2\cos\omega - 3\cos\theta \cos\theta').$$

Ces deux formules sont des cas particuliers de la formule générale

$$d^2F = a \frac{II' \, ds \, ds'}{l^2} (2\cos\omega - 3\cos\theta \cos\theta'),$$

correspondant l'un à la valeur $\frac{1}{2}$, l'autre à la valeur 1 du coefficient a.

D'une manière générale si l'on donne à a successivement deux valeurs différentes : a_1, a_2, sans changer d'ailleurs les unités géométriques et mécaniques, les valeurs numériques I_1, I_2 d'un même courant, calculées à l'aide de la formule précédente, ont entre elles la relation suivante :

$$I_1 \sqrt{a_1} = I_2 \sqrt{a_2}.$$

Soient I_a et I_m les valeurs numériques d'un même courant dans le système d'Ampère et dans le système électromagnétique. On a, en faisant $a_1 = \frac{1}{2}$ et $a_2 = 1$,

$$I_a \sqrt{\tfrac{1}{2}} = I_m.$$

L'unité d'intensité de courant adoptée par Ampère est donc la fraction $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de l'unité électromagnétique.

CHAPITRE VI

Système de M. Bertrand.

1. Formules et unités fondamentales.

Dans ce système les formules fondamentales s'écrivent :

$$F = \frac{QQ'}{L^2},$$

$$F = \frac{\mathcal{M}\mathcal{M}'}{L^2},$$

$$I = \frac{1}{V_i}\frac{Q}{T},$$

$$dF = \frac{\mathcal{M} I\, ds \sin\theta}{l^2},$$

$$d^2F = \frac{II'\, ds\, ds'}{l^2}(2\cos\varepsilon - 3\cos\theta\cos\theta').$$

L'unité de quantité d'électricité est la même que dans le système électrostatique.

L'unité de masse magnétique est la même que dans le système électromagnétique.

L'unité d'intensité est celle d'un courant transportant dans l'unité de temps une quantité d'électricité dont la valeur numérique est égale à la valeur numérique de la vitesse $|V_i|$.

Les unités des diverses autres grandeurs sont les unités normales déduites des précédentes.

2. Dimensions des principales grandeurs.

Les formules précédentes assignent aux grandeurs fondamentales Q, $\mathcal{M}$, I les dimensions exprimées par les symboles suivants :

$$Q = F^{\frac{1}{2}} L,$$

$$\mathcal{M} = F^{\frac{1}{2}} L,$$

$$I = \frac{Q}{L} = F^{\frac{1}{2}}.$$

Il en résulte pour les grandeurs dérivées les dimensions suivantes :

Densité électrique	linéaire.	$F^{\frac{1}{2}}$
	superficielle.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-1}$
	solide.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-2}$
Champ électrique.		$F^{\frac{1}{2}} L^{-1}$
Flux de force.		$F^{\frac{1}{2}} L$
Potentiel électrique.		$F^{\frac{1}{2}}$
Capacité.		L
Densité magnétique	linéaire.	$F^{\frac{1}{2}}$
	superficielle.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-1}$
	solide.	$F^{\frac{1}{2}} L^{-2}$
Puissance d'un feuillet.		$F^{\frac{1}{2}}$
Champ magnétique.		$F^{\frac{1}{2}} L^{-1}$
Potentiel magnétique.		$F^{\frac{1}{2}}$
Moment magnétique.		$F^{\frac{1}{2}} L^{2}$
Force électromotrice.		$F^{\frac{1}{2}}$
Conductibilité.		$F^{0} L^{0}$
Résistance.		$F^{0} L^{0}$

Dans ce système les dimensions des grandeurs relatives à l'électrostatique sont les mêmes que dans le système électrostatique; les dimensions des grandeurs magnétiques, celles d'une intensité de courant et d'une force électromotrice sont les mêmes que dans le système électromagnétique; par contre la conductibilité et la résistance sont des coefficients sans dimensions.

Pour voir nettement ce qu'est, dans ce système, la valeur numérique d'une résistance, considérons, comme nous l'avons fait à propos du système électrostatique, une sphère électrisée mise en communication avec le sol par un fil conducteur et se contractant de façon que son potentiel conserve une valeur constante.

On a toujours

$$dQ = V dL,$$
$$I = \frac{V}{R};$$

mais dans le système actuel on a

$$dQ = V_i I\, dt,$$

par suite

$$V dL = V_i \frac{V}{R}\, dt,$$

d'où

$$R = \frac{V_i}{\frac{dL}{dt}},$$

ce qui signifie que la valeur numérique de la résistance du fil est égale au rapport de la vitesse $|V_i|$ à la vitesse de contraction de la sphère. Cette valeur numérique est évidemment indépendante du choix des unités de longueur de temps et de force.

CHAPITRE VII

Détermination du coefficient V_i. — Rapport des unités électrostatiques et électromagnétiques.

ART. 1. — *Comparaison des valeurs numériques d'une même grandeur dans les systèmes électrostatique et électromagnétique.*

1. Valeurs numériques d'une même quantité d'électricité.

Considérons deux petits corps électrisés possédant une même charge électrique. Soient Q_e et Q_m les valeurs numériques de cette charge dans le système électrostatique et dans le système électromagnétique. Le produit de la valeur numérique F de la répulsion de ces deux corps par le carré de la valeur numérique de leur distance L est lié aux valeurs numériques Q_s et Q_m par les relations

$$FL^2 = Q_s^2,$$
$$FL^2 = V_i^2 Q_m^2.$$

On a donc entre les valeurs numériques d'une même quantité d'électricité dans les deux systèmes la relation

$$Q_s^2 = V_i^2 Q_m^2$$

ou

$$\frac{Q_s}{Q_m} = V_i.$$

2. Valeurs numériques d'une même intensité de courant.

Soient Q_s et Q_m les valeurs numériques de la quantité d'électricité $|Q|$ transportée par un courant en un temps $|T|$. Les valeurs numériques de l'intensité de ce courant dans les deux systèmes considérés sont respectivement

$$I_s = \frac{Q_s}{T},$$
$$I_m = \frac{Q_m}{T}.$$

On a donc entre les deux valeurs numériques de l'intensité d'un même courant la relation

$$\frac{I_s}{I_m} = \frac{Q_s}{Q_m}$$

ou

$$\frac{I_s}{I_m} = V_i.$$

3. Valeurs numériques d'un même potentiel ou d'une même force électromotrice.

Considérons le travail $|W|$ nécessaire pour amener une certaine quantité d'électricité $|Q|$ d'un point où le potentiel est nul en un point où le potentiel est |V|. La valeur numérique de ce travail sera donnée par l'une ou l'autre des deux expressions

$$W = V_s\, Q_s,$$
$$W = V_m Q_m,$$

suivant qu'on évaluera |V| et |Q| dans le système électrostatique ou dans le système électromagnétique.

On a donc entre les valeurs numériques d'un même potentiel dans ces deux systèmes la relation

$$\frac{V_s}{V_m} = \frac{Q_m}{Q_s}$$

ou

$$\frac{V_s}{V_m} = \frac{1}{V_i}.$$

4. Valeurs numériques d'une même capacité.

La capacité d'un condensateur entre les deux armatures duquel une charge |Q| établit une différence de potentiel |V| sera représentée par le nombre

$$C_s = \frac{Q_s}{V_s}$$

dans le système électrostatique, et par le nombre

$$C_m = \frac{Q_m}{V_m}$$

dans le système électromagnétique.

Il existe entre ces deux nombres la relation

$$\frac{C_s}{C_m} = \frac{Q_s}{Q_m} \frac{V_m}{V_s},$$

ou, si l'on tient compte des relations précédentes,

$$\frac{C_s}{C_m} = V_i^2.$$

5. Valeurs numériques d'une même résistance.

La résistance d'un conducteur dans lequel une force électromotrice $|V|$ établit un courant $|I|$ sera représentée par le nombre

$$R_s = \frac{V_s}{I_s}$$

dans le système électrostatique, et par le nombre

$$R_m = \frac{V_m}{I_m}$$

dans le système électromagnétique.

Il existe entre ces deux nombres la relation

$$\frac{R_s}{R_m} = \frac{V_s}{V_m}\frac{I_m}{I_s}$$

ou, en tenant compte des relations précédentes,

$$\frac{R_s}{R_m} = \frac{1}{V_i^2}.$$

6. Valeurs numériques d'une même grandeur quelconque.

Soit en général $|G|$ une grandeur quelconque électrique ou magnétique. Si ses symboles de dimensions dans le système électrostatique et dans le système électromagnétique sont respectivement :

$$L^{\lambda}\, T^{\tau}\, F^{\varphi},$$
$$L^{\lambda'} T^{\tau'} F^{\varphi},$$

on a

$$G_m = V_i^{\nu} G_s,$$

ν ayant la valeur $\lambda' - \lambda$ ou $\tau - \tau'$. Donc

$$\frac{G_s}{G_m} = V_i^{\lambda - \lambda'}$$

ou

$$\frac{G_e}{G_m} = V_i^{\tau'-\tau}.$$

On retiendra aisément la relation simple qui lie λ, λ', τ et τ' si on la met sous la forme

$$\lambda + \tau = \lambda' + \tau'.$$

Art. 2. — *Détermination expérimentale du coefficient* V_i.

Toutes les grandeurs électriques ne se prêtent pas également bien à une mesure électrostatique en même temps qu'à une mesure électromagnétique. Celles dont la mesure électrostatique est la plus directe, savoir : *la quantité d'électricité, la force électromotrice et la capacité électrique,* se sont offertes naturellement comme étant les plus propres à la détermination expérimentale du coefficient V_i.

La première détermination de ce coefficient a été faite en 1856 par Weber et Kohlrausch (1) au moyen d'une double mesure de quantité.

Les nombreuses déterminations faites depuis lors par divers expérimentateurs reposent toutes soit sur une double mesure de force électromotrice à l'exemple de celle qu'imagina en 1869 sir W. Thomson (2), soit sur une double mesure de capacité dont MM. Ayrton et Perry ont donné en 1879 le premier exemple (3).

Voici, en rapportant toutes les mesures aux unités fondamentales (CGS), le tableau des résultats obtenus :

1856.	Weber et Kohlrausch.	$3{,}107.10^{10}$
1869.	W. Thomson et King.	2,846
1869.	Maxwell (4).	2,88

(1) *Electr. Maasb. Abh. der K. S. Ges. der Wissensch.*, t. V, p. 219.
(2) *Brit. Assoc. Rep.* (1869), p. 434.
(3) *Journal of tel. Eng.*, t. VIII (1879), p. 126, et *Phil. mag.*, 5e s., t. VII (1879), p. 277.
(4) *Brit. Assoc. Rep.* (1869), p. 436.

1872.	Dugald M'Kichan (1).	2,935
1879.	Ayrton et Perry.	2,980
1880.	Shida (2).	2,995
1883.	J.-J. Thomson (3).	2,920
1884.	Klemencie (4).	3,019
1886.	Colley (5).	3,015
1888.	Himstedt (6).	3,007
1888.	W. Thomson, Ayrton et Perry (7).	3,004
1889.	Rosa (8).	3,000
1890.	J.-J. Thomson (9).	2,9956
1891.	Pellat (10).	3,009

Les premières déterminations faites en Angleterre sont affectées d'une erreur assez notable provenant d'une évaluation trop forte de l'étalon de résistance de l'Association britannique employé dans les mesures électromagnétiques. Pour être corrigés de cette erreur, les résultats de ces déterminations doivent être diminués d'environ 0,013 de leur valeur.

On a alors le tableau suivant :

1856.	Weber et Kohlrausch.	$3{,}107.10^{10}$
1869.	W. Thomson et King.	2,808
1869.	Maxwell.	2,843
1872.	Dugald M'Kichan.	2,896
1879.	Ayrton et Perry.	2,960
1880.	Shida.	2,955
1883.	J.-J. Thomson.	2,920
1884.	Klemencie.	3,019
1886.	Colley.	3,015
1888.	Himstedt.	3,007
1889.	W. Thomson.	3,004

(1) *Philos. trans. L. R. S.*, for. 1879, p. 409-427.
(2) *Philos. mag.*, 5e s., t. X (1880), p. 431.
(3) *Philos. trans. L. R. S.*, for. 1883, p. 707.
(4) *Wiener Ber.*, 3e s., t. LXXXIII (1884), p. 88.
(5) *Wied. Ann.*, XXVIII (1885), p. 1-21.
(6) *Wied. Ann.*, XXIX (1888), p. 560.
(7) *Rep. of the Brith. assoc. Bath* (1888), p. 616.
(8) *Philos. mag.*, 5e s., t. XXVIII, p. 315.
(9) *Soc. roy. de Londres*, 27 mars 1890.
(10) *Comptes rend. de l'Ac. des Sc.*, 13 avril 1891.

1889.	B. Rosa.	3,000
1890.	J.-J. Thomson.	2,9956
1891.	Pellat.	3,009

La moyenne des plus récentes déterminations permet d'adopter avec une assez grande approximation, comme valeur (CGS) du coefficient V_i, le nombre

$$3.10^{10}.$$

Or, voici les valeurs (CGS) assignées par les meilleures expériences pour la vitesse de la lumière :

1876.	Helmert (1).	2,9999
1874.	Cornu (2).	3,004
1879.	Michelson (3).	2,9994
1881.	Young-Forbes (4).	3,0138
1882.	Michelson (5).	2,9985
1885.	Newcomb (6).	2,9986
	Moyenne.	3,0023

La valeur $|V_i|$ *dont la valeur numérique est égale, dans un système absolu quelconque, à celle du coefficient* $|V_i|$, *est donc la* VITESSE DE LA LUMIÈRE.

Une telle coïncidence n'a point paru l'effet du hasard. Avec Maxwell, les physiciens y ont vu l'indice d'un rapport étroit entre les phénomènes électriques et les phénomènes lumineux. Ce rapport, expliqué par une théorie de Maxwell qui embrasse dans une étude unique les phénomènes électriques et lumineux comme des manifestations diverses d'un même milieu, ouvre aux recherches électriques une voie toute nouvelle, dans laquelle ont déjà été faites de nombreuses et importantes découvertes.

(1) *Astronom. Nachricht.*, LXXXVII, S. 126.
(2) *Mém. de l'Observat. de Paris*, t. XIII, p. 293.
(3) *Proc. Amer. Assoc.*, p. 124-160.
(4) *Nature*, XXIV, p. 303.
(5) *Am. Assoc. of Sc. Am. J.*, n° 193; Supplém. 13 septemb. 1879, p. 3069-73. Sill. J. (3), XVIII, p. 390-393, 1879.
(6) *Astr. Papers prepared for the use of the Amer. Ephemeris and Nautical Almanac 1885*, p. 112-230.

Art. 3. — *Rapport des unités électrostatiques et électromagnétiques.*

Le rapport de deux unités est égal au rapport inverse des valeurs numériques d'une même grandeur rapportée successivement à chacune d'elles.

Si donc on désigne respectivement par

$$|\mathfrak{Q}_s|, \ |\mathfrak{I}_s|, \ |\mathcal{E}_s|, \ |\mathcal{C}_s|, \ |\mathfrak{R}_s|,$$

et

$$|\mathfrak{Q}_m|, \ |\mathfrak{I}_m|, \ |\mathcal{E}_m|, \ |\mathcal{C}_m|, \ |\mathfrak{R}_m|,$$

les unités électrostatiques et électromagnétiques de quantité d'électricité, d'intensité de courant, de force électromotrice, de capacité et de résistance, on aura :

$$\frac{|\mathfrak{Q}_s|}{|\mathfrak{Q}_m|} = \frac{Q_m}{Q_s} = \frac{1}{V_i},$$

$$\frac{|\mathfrak{I}_s|}{|\mathfrak{I}_m|} = \frac{I_m}{I_s} = \frac{1}{V_i},$$

$$\frac{|\mathcal{E}_s|}{|\mathcal{E}_m|} = \frac{E_m}{E_s} = V_i,$$

$$\frac{|\mathcal{C}_s|}{|\mathcal{C}_m|} = \frac{C_m}{C_s} = \frac{1}{V_i^2},$$

$$\frac{|\mathfrak{R}_s|}{|\mathfrak{R}_m|} = \frac{R_m}{R_s} = V_i^2.$$

D'une manière générale, soient $|\mathcal{G}_s|$ et $|\mathcal{G}_m|$ les unités électrostatique et électromagnétique d'une grandeur $|G|$, on aura, en vertu des relations $\frac{G_s}{G_m} = V_i^{\lambda-\lambda'} = V_i^{\tau'-\tau}$,

$$\frac{|\mathcal{G}_s|}{|\mathcal{G}_m|} = \frac{G_m}{G_s} = V^{\lambda'-\lambda} = V_i^{\tau-\tau'}.$$

Art. 4. — *Formules communes au système électrostatique et au système électromagnétique.*

Soient respectivement

$$Q_s, \ E_s, \ C_s, \ I_s, \ R_s,$$

$$Q_m, \ E_m, \ C_m, \ I_m, \ R_m,$$

les valeurs numériques d'une quantité d'électricité, d'une force électromotrice, d'une capacité, d'une intensité de courant et d'une résistance données. Les relations précédentes montrent que l'on a

$$
\begin{aligned}
Q_m E_m &= Q_s E_s, \\
C_m E_m^2 &= C_s E_s^2, \\
\frac{Q_m^2}{C_m} &= \frac{Q_s^2}{C_s}, \\
E_m I_m &= E_s I_s, \\
R_m I_m^2 &= R_s I_s^2.
\end{aligned}
$$

Il suit de là que pour appliquer les formules :

$$
\begin{aligned}
W &= \tfrac{1}{2} QE, \\
W &= \tfrac{1}{2} CE^2, \\
W &= \tfrac{1}{2} \frac{Q^2}{C}, \\
W &= EIT, \\
W &= RI^2T,
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire pour faire le calcul d'une énergie électrique dans les différents cas qui peuvent se présenter, on peut employer aussi bien les mesures électromagnétiques des grandeurs que l'on a à prendre en considération, que leurs mesures électrostatiques. Il est bien entendu qu'il s'agit de mesures basées de part et d'autre sur les mêmes unités fondamentales géométriques et mécaniques.

CHAPITRE VIII

Influence du choix des unités fondamentales géométriques et mécaniques sur l'expression des grandeurs électriques et magnétiques dans les différents systèmes.

Art. 1.

Un changement de grandeur des unités fondamentales géométriques et mécaniques entraîne un changement des unités électriques et magnétiques et par conséquen un changement de la valeur numérique d'une grandeur électrique ou magnétique déterminée.

Ces changements se déduisent très simplement des symboles de dimensions des grandeurs considérées. Les raisonnements qui ont été faits au chapitre V (livre II) s'appliquent aux grandeurs électriques et magnétiques comme aux grandeurs géométriques et mécaniques.

Si aux bases

$$|\mathcal{X}_1|, \quad |\mathcal{Y}_1|, \quad |\mathcal{Z}_1|$$

on substitue les bases

$$|\mathcal{X}_2|, \quad |\mathcal{Y}_2|, \quad |\mathcal{Z}_2|,$$

à une unité $|\mathcal{G}_1|$ se trouve par ce fait substituée une unité $|\mathcal{G}_2|$ dont le rapport à la première est

$$\frac{|\mathcal{G}_2|}{|\mathcal{G}_1|} = \left(\frac{|\mathcal{X}_2|}{|\mathcal{X}_1|}\right)^x \left(\frac{|\mathcal{Y}_2|}{|\mathcal{Y}_1|}\right)^y \left(\frac{|\mathcal{Z}_2|}{|\mathcal{Z}_1|}\right)^z,$$

x, y, z étant les exposants de dimensions de l'espèce de grandeur considérée relativement aux grandeurs

$$|\mathcal{X}|, \quad |\mathcal{Y}|, \quad |\mathcal{Z}|.$$

Si, par exemple, aux bases

$$|\mathcal{L}|, \quad |\mathcal{T}|, \quad |\mathcal{F}|$$

on substitue les bases

$$l|\mathcal{L}|, \quad t|\mathcal{T}|, \quad f|\mathcal{F}|,$$

à une unité $|\mathcal{G}_1|$ se trouve substituée une unité $|\mathcal{G}_2|$ $l^\lambda t^\tau f^\varphi$ *fois plus grande que la première,* d'où il suit que la valeur numérique d'une grandeur donnée de l'espèce en question devient $l^\lambda t^\tau f^\varphi$ *fois plus petite* qu'auparavant.

Si aux bases

$$|\mathcal{L}|, \quad |\mathcal{T}|, \quad |\mathcal{M}|$$

on substitue les bases

$$l|\mathfrak{L}|,\quad t|\mathfrak{T}|,\quad m|\mathfrak{M}|,$$

à une unité $|\mathfrak{G}_1|$ se trouve substituée une unité $|\mathfrak{G}_2|$ $l^\lambda t^\tau m^\mu$ *fois plus grande que la première,* et la valeur numérique d'une grandeur donnée de l'espèce considérée devient $l^\lambda t^\tau m^\mu$ *fois plus petite* qu'auparavant.

Les expressions des coefficients

$$l^\lambda t^\tau f^\varphi$$

et

$$l^\lambda t^\tau m^\mu$$

pour les diverses grandeurs électriques et magnétiques sont données par les symboles mêmes des dimensions de ces grandeurs. On n'a donc pour les écrire qu'à se reporter aux tableaux des chapitres IV et V (livre III) (1).

Si les bases

$$l|\mathfrak{L}|,\quad t|\mathfrak{T}|,\quad f|\mathfrak{F}|,$$
$$l|\mathfrak{L}|,\quad t|\mathfrak{T}|,\quad m|\mathfrak{M}|$$

sont celles du système (CGS), on aura pour

$$l,\quad t,\quad f,\quad m,$$

suivant la nature du premier système, les valeurs suivantes :

	l	t	f	m
Ancien système français.	$\frac{1}{32,484}$	1	$\frac{1}{480185,6}$	$\frac{1}{14782,3}$
Ancien système anglais.	$\frac{1}{30,48021}$	1	$\frac{1}{444956,3}$	$\frac{1}{14598,1}$
Système métrique.	$\frac{1}{100}$	1	$\frac{1}{980960}$	$\frac{1}{9809,6}$
Système de Gauss.	10	1	10000	1000
1er système BA (MGS).	$\frac{1}{100}$	1	$\frac{1}{100}$	1

(1) Voir la note VI.

Un changement des unités fondamentales affecte le paramètre V_i (voir chap. VII, liv. III) comme la valeur numérique d'une vitesse. Si donc les unités de longueur et de temps deviennent respectivement l fois et t fois plus grandes, ce paramètre devient $\frac{l}{t}$ fois plus petit. Sa valeur n'est pas affectée par un changement de l'unité de force seule ou de l'unité de masse seule.

Parmi tous les changements possibles, il convient de remarquer ceux qui le rendent égal à 1 et ceux qui le laissent invariable.

1. Soit V_i la valeur de ce paramètre dans un système ayant pour bases

$$|\mathfrak{L}|, \qquad |\mathfrak{T}|, \qquad \text{masse quelconque.}$$

Il aura la valeur 1 dans tous les systèmes ayant pour bases

$$l|\mathfrak{L}|, \qquad t|\mathfrak{T}|, \qquad \text{masse quelconque,}$$

si l et t sont deux nombres tels que

$$\frac{l}{t} = V_i,$$

c'est-à-dire dans tous les systèmes ayant pour bases

$$V_i n|\mathfrak{L}|, \qquad n|\mathfrak{T}|, \qquad \text{masse quelconque.}$$

n étant un nombre quelconque.

Ainsi, ce paramètre ayant dans le système (CGS) la valeur

$$3.10^{10},$$

il aura la valeur 1 dans tous les systèmes ayant pour bases

$$3.10^{10}\, n \text{ cm}, \qquad n \text{ sec}, \qquad \text{masse quelconque,}$$

c'est-à-dire dans *tous les systèmes où la vitesse de la lumière est l'unité de vitesse.*

2. Tous les changements en nombre infini pour lesquels $l = t$ laissent invariable le paramètre V_i.

Ainsi il aura la même valeur 3.10^{10} que dans le système (CGS) dans tous les systèmes ayant pour bases

n cm, n sec, masse quelconque.

Les changements caractérisés par la relation $l = t$ et par suite par l'invariabilité du paramètre V_i, sont les seuls qui laissent intactes toutes les formules fondamentales électriques et magnétiques.

On a vu chapitre I (livre III) de quelle propriété jouissent les systèmes d'unités dans lesquels les constantes physiques des formules possèdent la même valeur. Si, dans l'un des systèmes, un certain groupe de nombres représente les valeurs des données et des résultats d'un certain problème, le même groupe de nombres représente les données et les résultats d'un problème similaire dans tout autre de ces systèmes.

Dans le système d'unités électriques et magnétiques proposé par M. Bertrand (voir chapitre VI, livre III), le paramètre V_i ne figure que dans une formule de définition :

$$I = \frac{1}{V_i} \frac{Q}{T}$$

et nullement dans les formules qui intéressent la solution pratique des problèmes relatifs aux phénomènes électriques et magnétiques. Il en résulte que, dans ce système, aucun changement de bases n'oblige à modifier les formules employées à la solution des problèmes que l'on a à considérer dans les applications de la science ; et si un certain groupe de nombres représente les données et les résultats d'un problème, ce même groupe de nombres définit les données et les résultats d'un problème similaire, quelles que soient les bases des unités géométriques et mécaniques.

ART. 2. — *Application des considérations d'homogénéité et de similitude à la recherche de certaines formules.*

En électricité, de même qu'en mécanique, la considération des conditions d'homogénéité et de similitude permet souvent de fixer *à priori* la constitution des formules devant lier entre elles des quantités données.

La démonstration classique donnée par Laplace de la proportionnabilité de l'action élémentaire électromagnétique à la raison inverse du carré de la distance du pôle à l'élément de courant en est un premier exemple.

Ampère a montré ensuite que la formule élémentaire des actions électrodynamiques pouvait donner lieu à des considérations semblables. On trouve à ce sujet, dans le célèbre *Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience* (1), la note suivante :

« I. *Sur la manière de démontrer, par les quatre cas d'équilibre exposés au commencement de ce Mémoire, que la valeur de l'action mutuelle de deux éléments de fils conducteurs est*

$$-\frac{2ii'}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}\,ds\,ds'.$$

» En suivant l'ordre des transformations que j'ai successivement fait subir à cette valeur, on trouve d'abord, en vertu des deux premiers cas d'équilibre, qu'elle est

$$\frac{ii'(\sin\theta\sin\theta'\cos\omega + k\cos\theta\cos\theta')\,ds\,ds'}{r^n};$$

on déduit du troisième, entre n et k, la relation $n + 2k = 1$, et du quatrième $n = 2$, d'où $k = -\frac{1}{2}$; ce quatrième cas d'équilibre est alors celui qu'on emploie en dernier lieu à la détermination de la valeur de la force qui se développe entre deux éléments de fils conducteurs. Mais on peut suivre une autre marche en partant d'une considération dont s'est servi M. de Laplace, quand il a conclu des premières expériences de M. Biot sur l'action mutuelle d'un aimant et d'un conducteur rectiligne indéfini, que celle qu'un élément exerce sur un des pôles de l'aimant est en raison inverse du carré de leur distance, lorsque cette distance change seule de valeur et que l'angle

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences* [2], t. VI, p. 175-388.

compris entre la droite qui la mesure et la direction de l'élément reste la même. En appliquant cette considération à l'action mutuelle de deux éléments de fils conducteurs, il est aisé de voir, indépendamment de toute recherche préliminaire sur la valeur de la force qui en résulte, que cette force est aussi réciproquement proportionnelle au carré de la distance quand elle varie seule et que les angles qui déterminent la situation relative des deux éléments n'éprouvent aucun changement. En effet, d'après les considérations développées au commencement de ce Mémoire, la force dont il est ici question est nécessairement dirigée suivant la droite r et a pour valeur

$$ii' f(r, \theta, \theta', \omega)\, ds\, ds' ;$$

d'où il suit qu'en nommant α, β, γ les angles que cette droite forme avec les trois axes, ses trois composantes seront exprimées par

$$\begin{gathered} ii' f(r, \theta, \theta', \omega) \cos\alpha\, ds\, ds', \\ ii' f(r, \theta, \theta', \omega) \cos\beta\, ds\, ds', \\ ii' f(r, \theta, \theta', \omega) \cos\gamma\, ds\, ds', \end{gathered}$$

et les trois forces parallèles aux trois axes qui en résultent entre deux circuits par les doubles intégrales de ces expressions, i et i' étant des constantes.

» Or, il suit du quatrième cas d'équilibre, en remplaçant les trois cercles par des courbes semblables quelconques dont les dimensions homologues soient en progression géométrique continue, que ces trois forces ont des valeurs égales dans deux systèmes semblables; il faut donc que les intégrales qui les expriment soient de dimension nulle relativement à toutes les lignes qui y entrent, d'après la remarque de M. de Laplace que je viens de rappeler, et qu'il en soit par conséquent de même des différentielles dont elles se composent, en comprenant ds et ds' parmi les lignes qui y entrent, parce que le nombre de ces différentielles, quoique infini du second ordre, doit être considéré comme le même dans les deux systèmes.

» Or le produit $ds\, ds'$ est de deux dimensions; il faut donc que

$$f(r, \theta, \theta', \omega) \cos\alpha, \quad f(r, \theta, \theta', \omega) \cos\beta, \quad f(r, \theta, \theta', \omega) \cos\gamma,$$

soient de la dimension -2; et comme les angles θ, θ', ω, α, β, γ sont exprimés par des nombres qui n'entrent pour rien dans les dimensions des valeurs des différentielles, et que $f(r, \theta, \theta' \omega)$ ne contient que la seule ligne r, il faut nécessairement que cette fonction soit proportionnelle à $\frac{1}{r'^2}$, en sorte que la force qu'exercent l'un sur l'autre deux éléments de fils conducteurs est exprimée par

$$\frac{ii'\varphi(0, 0', \omega)}{r'^2} ds\,ds'. \text{ »}$$

M. Bertrand, qui, ainsi qu'on l'a vu plus haut (chapitre IX, livre I), a su tirer des considérations d'homogénéité et de similitude de si élégantes démonstrations de mécanique, en a indiqué aussi d'intéressantes applications à des questions d'électricité. C'est ainsi qu'il démontre, par un raisonnement analogue à celui d'Ampère, la proportionnalité de l'action de deux circuits plans infiniment petits à la raison inverse de la quatrième puissance de la distance.

« L'action élémentaire de deux éléments pour des circuits d'intensité donnée est proportionnelle au produit $\frac{ds\,ds'}{r^2}$; les autres facteurs ne contiennent que des lignes trigonométriques dont la valeur est la même pour les éléments homologues de deux systèmes semblables. Si l'on considère deux surfaces S_1 et S'_1 situées dans le même plan et deux autres surfaces S_2 et S'_2 formant un système géométriquement semblable à celui des deux premières, les forces homologues auront même valeur, car $\frac{ds\,ds'}{r^2}$ est de degré zéro par rapport à l'unité de longueur. Les résultantes, par conséquent, seront égales, l'accroissement de longueur des éléments compensant exactement l'accroissement de distance. En nommant K le rapport de similitude, le produit $S_2 S'_2$ est égal à $K^4 S_1 S'_1$. Si donc l'attraction des circuits S_1 et S'_1 est $G S_1 S'_1$, celle de S_2 et de S'_2, qui lui est égale, sera $\frac{G}{K^4} S_2 S'_2$. Le facteur par lequel il faut multiplier le produit des deux surfaces est donc inversement proportionnel à la quatrième puissance des dimensions.

» Si les actions mutuelles des deux éléments produisaient un couple, la force de ce couple serait la même dans les deux systèmes, mais le rapport des bras de levier serait égal au rapport de similitude. Le moment du couple serait donc multiplié par K, et si dans l'un des deux systèmes il est représenté par $S_1 S'_1 H$, S_1 et S'_1 étant les deux surfaces enfermées dans les circuits, il le sera dans l'autre par $S_2 S'_2 \frac{H}{K^3}$.

Le couple qui tend à faire tourner deux circuits infiniment petits qui agissent l'un sur l'autre est inversement proportionnel, quand il existe, au cube de la distance ([1]). »

Le premier exemple donné par M. Bertrand de ce mode de raisonnement se rapportait à l'étude élémentaire de la propagation du courant sur une ligne électrique ([2]). Voici la forme très simple donnée par M. Vaschy à la démonstration de la loi dite de *similitude* relative à ce phénomène ([3]) :

« Sur une ligne télégraphique de longueur l, de capacité C, de résistance R, on envoie le courant d'une pile de force électromotrice E (la force électromotrice est de la nature d'un potentiel). On demande quelle sera l'intensité i du courant au poste d'arrivée au temps t.

» La fonction i ne dépend que de t, l, C, R, E; on posera

$$i = f(t, l, \mathrm{C}, \mathrm{R}, \mathrm{E}),$$

f étant *à priori* une fonction inconnue de ces cinq paramètres. Mais cette relation peut s'écrire

$$i = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}} \varphi\left(t, l, \mathrm{E}, \mathrm{CE}^2 \frac{t}{\mathrm{CR}}\right).$$

$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$ ayant les dimensions d'une intensité, la fonction φ doit être de dimensions nulles. Les produits CR et CE^2 ayant respectivement les dimensions d'un temps T et d'une énergie W (soit dans le système électrostatique, soit dans le système électromagnétique ou dans tout autre, comme il est facile de s'en assurer), si l'on prend comme unités fondamentales L, T, W et E, on voit qu'en réalité la fonction φ est indépendante des paramètres t, l, E et CE^2, et que la fonction i se réduit à la forme

$$i = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}} \varphi\left(\frac{t}{\mathrm{CR}}\right).$$

. . . .

» En d'autres termes, la fonction φ, qui représente le rapport de

---

([1]) *Théorie mathématique de l'électricité.* Paris, Gauthier-Villars (1889), chap. X, p. 103.

([2]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. LXXXVI, p. 916.

([3]) *Traité d'électricité et de magnétisme,* t. I, préliminaires, p. 10, et t. II, chap. II, p. 46.

l'intensité variable i à la valeur finale $\frac{E}{R} = I$, ne dépend que du paramètre $\frac{t}{CR}$; de telle sorte que si l'on porte les valeurs de $\frac{t}{CR}$ en abscisses et le rapport $\frac{i}{I}$ en ordonnées, on obtient une courbe qui est la même pour toutes les lignes..... Si l'on considère deux lignes dont les éléments sont respectivement l, C, R et l', C', R', les époques t et t' auxquelles une même fraction quelconque $\frac{i}{I}$ de l'intensité finale sera atteinte seront entre elles dans le même rapport que les produits CR et C'R' :

$$\frac{t}{t'} = \frac{CR}{C'R'}.$$

» On regarde quelquefois $\frac{t}{t'}$ comme représentant le rapport des durées des périodes variables sur les deux lignes. On dira donc, dans ce sens, que la durée de la période variable sur diverses lignes est proportionnelle à la capacité et à la résistance par unité de longueur et au carré de la longueur du circuit. C'est la loi de similitude énoncée par sir W. Thomson en 1856 et qui s'applique assez bien aux longs câbles sous-marins. »

Suivant le mode de raisonnement d'Ampère et de M. Bertrand, M. Marcel Desprez a établi d'intéressantes propositions relatives aux machines électriques (1).

Art. 3. — *Calculs symboliques.*

Les précieux avantages du mode de représentation symbolique des grandeurs exposé au chapitre VI, livre I, en recommandent tout naturellement l'usage dans les questions de changements d'unités relatives aux grandeurs électriques et magnétiques. Les règles établies à propos des grandeurs géométriques et mécaniques sont applicables, sans modification aucune, aux grandeurs électriques et magnétiques.

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XCIV (1882), p. 431.

La question suivante donnera une idée de l'utilité et de la commodité de l'emploi de ce symbolisme :

Étant données, par leurs valeurs numériques u, v, w dans un système absolu déterminé, trois grandeurs électriques ou mécaniques $|\mathfrak{U}|$, $|\mathfrak{V}|$, $|\mathfrak{W}|$, *reconnaître si elles peuvent servir de bases à la définition d'un système de mesures absolues du même type que celui dans lequel elles sont évaluées et trouver les bases de ce système.*

Soient

$$|X|, \quad |Y|, \quad |Z|$$

les bases du système dans lequel sont évaluées les grandeurs proposées. Ces dernières peuvent être représentées par les symboles

$$\begin{aligned} |\mathfrak{U}| &= u\,|X|^{x_1}\,|Y|^{y_1}\,|Z|^{z_1}, \\ |\mathfrak{V}| &= v\,|X|^{x_2}\,|Y|^{y_2}\,|Z|^{z_2}, \\ |\mathfrak{W}| &= w\,|X|^{x_3}\,|Y|^{y_3}\,|Z|^{z_3}. \end{aligned}$$

Mais si les grandeurs $|\mathfrak{U}|$, $|\mathfrak{V}|$, $|\mathfrak{W}|$ peuvent être regardées comme faisant partie d'un système absolu du même type que le premier et de bases

$$|\mathfrak{X}|, \quad |\mathfrak{Y}|, \quad |\mathfrak{Z}|,$$

elles peuvent être représentées par les symboles

$$\begin{aligned} |\mathfrak{U}| &= |\mathfrak{X}|^{x_1}\,|\mathfrak{Y}|^{y_1}\,|\mathfrak{Z}|^{z_1}, \\ |\mathfrak{V}| &= |\mathfrak{X}|^{x_2}\,|\mathfrak{Y}|^{y_2}\,|\mathfrak{Z}|^{z_2}, \\ |\mathfrak{W}| &= |\mathfrak{X}|^{x_3}\,|\mathfrak{Y}|^{y_3}\,|\mathfrak{Z}|^{z_3}. \end{aligned}$$

Donc pour que les grandeurs données puissent définir un système absolu du type proposé, il faut et il suffit que les équations symboliques

$$\begin{aligned} |\mathfrak{X}|^{x_1}\,|\mathfrak{Y}|^{y_1}\,|\mathfrak{Z}|^{z_1} &= u\,|X|^{x_1}\,|Y|^{y_1}\,|Z|^{z_1}, \\ |\mathfrak{X}|^{x_2}\,|\mathfrak{Y}|^{y_2}\,|\mathfrak{Z}|^{z_2} &= v\,|X|^{x_2}\,|Y|^{y_2}\,|Z|^{z_2}, \\ |\mathfrak{X}|^{x_3}\,|\mathfrak{Y}|^{y_3}\,|\mathfrak{Z}|^{z_3} &= w\,|X|^{x_3}\,|Y|^{y_3}\,|Z|^{z_3}, \end{aligned}$$

soient compatibles et capables de fournir un système de valeurs des rapports

$$\frac{|\mathfrak{X}|}{|X|}, \quad \frac{|\mathfrak{Y}|}{|Y|}, \quad \frac{|\mathfrak{Z}|}{|Z|}.$$

On peut voir ainsi qu'une résistance $|\mathfrak{R}|$, une force électromotrice $|\mathcal{E}|$ et un temps $|\mathcal{T}|$ peuvent servir de bases à la définition d'un système d'unités absolues, du type (LTM), en ce qui concerne les grandeurs géométriques et mécaniques, et du type électromagnétique en ce qui concerne les grandeurs électriques et magnétiques.

En effet, soient t, e, t les valeurs absolues (CGS) des trois grandeurs en question. On a, en supposant qu'elles fassent partie d'un système d'unités absolues de bases,

$$|\mathcal{L}|, \quad |\mathcal{T}|, \quad |\mathcal{M}|,$$

les équations symboliques

$$|\mathfrak{R}| = \frac{|\mathcal{L}|}{|\mathcal{T}|} = r\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

$$|\mathcal{E}| = \frac{|\mathcal{M}|^{\frac{1}{2}}\,|\mathcal{L}|^{\frac{3}{2}}}{|\mathcal{T}|^{2}} = e\,\frac{(\text{grm})^{\frac{1}{2}}(\text{cm})^{\frac{3}{2}}}{(\text{sec})^{2}},$$

$$|\mathcal{T}| = |\mathcal{T}| = t\,\text{sec},$$

d'où l'on tire

$$|\mathcal{L}| = rt\,\text{cm},$$

$$|\mathcal{T}| = t\,\text{sec},$$

$$|\mathcal{M}| = \frac{e^{2}t}{r^{3}}\,\text{grm}.$$

CHAPITRE IX

Définition des systèmes d'unités électriques et magnétiques adoptés dans les recherches scientifiques.

Art. 1.

La mesure absolue de l'intensité du champ magnétique terrestre par la méthode de Gauss repose uniquement sur des mesures de longueurs, de temps et de masses. Pour appliquer cette méthode, Gauss et Weber avaient adopté comme unités fondamentales le *millimètre,* la *seconde,* le *milligramme-masse* (1). Ces unités étaient d'une grandeur parfaitement appropriée à l'objet pour lequel elles avaient été choisies, car

(1) *Intensitas vis magneticae terrestris,* etc., p. 23. (Voir aussi note VI.)

il en résultait pour la valeur numérique de la composante horizontale du champ magnétique terrestre au lieu où avaient été faites les observations de Gauss et Weber, la valeur : 1,7 environ.

La substitution du mètre au millimètre et du gramme au milligramme eût d'ailleurs conduit à la même valeur, car les dimensions électromagnétiques d'un champ magnétique étant :

$$\frac{M^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}},$$

si l'on rend l'unité de masse et l'unité de longueur le même nombre de fois plus grandes ou plus petites, l'unité de champ magnétique n'est pas modifiée (1).

Weber conserva tout naturellement pour ses mesures électriques absolues (2) les unités fondamentales à l'aide desquelles avait été obtenue la mesure du champ magnétique terrestre, dont il avait d'ailleurs à se servir (3).

On peut caractériser les unités adoptées par Gauss et Weber en disant que ce sont des unités électromagnétiques normales dérivant des unités fondamentales, millimètre, seconde, milligramme-masse.

L'idée d'évaluer les grandeurs électriques en unités absolues fut, dès l'année même où parut le premier mémoire de Weber (1851), adoptée et mise en pratique par Sir W. Thomson, qui, toutefois, prit pour unités fondamentales les unités anglaises (4).

Après avoir réclamé pendant dix ans l'emploi d'unités absolues pour les mesures relatives, soit aux recherches purement scientifiques, soit aux opérations de la télégraphie, Sir W. Thomsom obtient enfin, en 1861, la nomination par

(1) Voir la note VI.

(2) Voir la note VI.

(3) *Messungen galvanischer Leitungswiderstände nach einem absoluten Maasse* (*Pogg. Ann.*, t. LXXXII, mars 1851).

(4) *On the mechanical Theory of Electrolysis* (*Philos. Mag.*, déc. 1851).

Applications of the principle of mechanical effect to the measurement of electromotive forces, and of galvanic resistances in absolutes units (*Philos. Mag.*, déc. 1851), l'Association britannique pour l'avancement des sciences d'une Commission spécialement chargée de l'établissement d'un système d'unités électriques.

Cette Commission adopta pour ses mesures le système électromagnétique et prit d'abord pour unités fondamentales le *mètre*, la *seconde* et le *gramme-masse*, auxquelles elle substitua ensuite (1873) le *centimètre*, la *seconde* et le *gramme-masse*. Voici, au sujet de ce choix des unités fondamentales, les termes mêmes du rapport présenté par la Commission (1) :

« Sur la question première d'unités particulières de masse, de longueur et de temps à recommander comme base de tout le système, une discussion prolongée s'est engagée, principalement sur l'adoption du gramme du *mètre* et de la seconde, ou du gramme du *centimètre* et de la seconde, la première combinaison ayant pour elle la simplicité du mot *mètre*, et la seconde ayant l'avantage de rendre l'unité de masse pratiquement identique à la masse de l'unité de volume d'eau, de rendre, en d'autres termes, la valeur de la densité de l'eau pratiquement égale à l'unité.

» Nous sommes maintenant presque unanimes à considérer ce dernier élément de simplicité comme le plus important des deux ; à l'appui de cette manière de voir, nous invoquerons l'autorité de sir W. Thomson qui, depuis longtemps, a très fortement insisté sur la nécessité d'employer des unités remplissant cette condition.

» En conséquence, nous recommandons l'adoption générale du *centimètre*, du *gramme* et de la *seconde* pour les trois unités fondamentales ; et, en attendant que l'on donne des noms spéciaux aux unités électriques et magnétiques qui en dérivent, nous recommandons de les distinguer des unités *absolues* d'autre provenance, en les faisant suivre de lettres C. G. S., initiales des noms des trois unités fondamentales (2). »

Cette proposition de la Commission de l'Association britannique a été sanctionnée par le Congrès des Électriciens tenu à Paris en 1881 (séance du 19 septembre) et a été depuis cette époque universellement adoptée.

Au lieu d'un système unique d'unités électriques définies

---

(1) La Commission était composée de sir W. Thomson, G.-C. Foster, J.-C. Maxwell, G.-J. Stoney, Flaming Jenkin, Siemens, F.-J. Bramwell, Everett, rapporteur.

(2) *Unités et constantes physiques*, par Everett. — Trad. Raynaud. — Appendice.

à l'aide des unités fondamentales (CGS), on emploie généralement deux systèmes partiels fondés sur les mêmes bases.

Pour les calculs relatifs à l'électrostatique, on emploie des unités dérivant des unités (CGS) suivant le système électrostatique. On a vu en effet que ce système est celui qui donne aux formules électrostatiques leur forme la plus simple.

Pour les calculs relatifs au magnétisme, à l'électromagnétisme et à l'électrodynamique, on fait usage d'unités dérivant des unités (CGS) suivant le système électromagnétique, car c'est dans ce dernier système que les formules magnétiques, électromagnétiques et électrodynamiques se présentent sous la forme la plus simple.

Les unités électriques usitées actuellement dans les recherches scientifiques sont donc soit les *unités électrostatiques* (CGS), soit les *unités électromagnétiques* (CGS).

Le passage d'un système à l'autre s'effectue aisément à l'aide de la valeur (CGS) du coefficient V_i qui est :

$$3.10^{10}.$$

ART. 2. — *Principales unités du système électrostatique* (CGS).

Unité de quantité d'électricité. — L'unité de quantité d'électricité est la quantité exerçant sur une quantité égale placée dans le vide à un centimètre de la première une répulsion égale à une dyne.

Unité de capacité. — L'unité de capacité est égale à la capacité d'une sphère isolée d'un centimètre de rayon.

La capacité électrostatique (CGS) de la Terre supposée sphérique est donc représentée par le nombre :

$$637110400.$$

Unité de potentiel. — L'unité de potentiel est égale au potentiel d'une sphère isolée d'un centimètre de rayon possédant une charge égale à l'unité de quantité.

D'après sir W. Thomson, la différence de potentiel entre deux plateaux donnant une étincelle de $0^c,1$ dans l'air vaut en unités électrostatiques (CGS)

14,7.

Suivant le même physicien, la valeur électrostatique (CGS) de la force électromotrice d'un élément Daniell est représentée par le nombre :

0,00374.

Art. 3. — *Principales unités du système électromagnétique* (CGS).

Unité de masse magnétique. — L'unité de masse magnétique est la masse exerçant sur une masse égale placée dans le vide à un centimètre de la première une répulsion égale à une dyne.

Unité de champ magnétique. — L'unité de champ magnétique est égale au champ que créerait une masse magnétique égale à l'unité en un point distant de cette masse d'une longueur égale à un centimètre.

La valeur numérique (CGS) de la composante horizontale du champ magnétique terrestre à Paris (Parc Saint-Maur) au 1er janvier 1891 est [1] :

0,19554.

L'inclinaison ayant la valeur

$65°10',6$

la valeur numérique du champ total au même lieu est :

0,46576.

Unité d'intensité de courant. — L'unité d'intensité de courant est l'intensité d'un courant qui, ayant pour siège un conducteur rectiligne indéfini, créerait un champ magnétique ayant en un point situé à un centimètre du conducteur une valeur numérique égale à 2.

Un courant d'intensité égale à l'unité électromagnétique (CGS)

---

(1) Th. Moureaux, *Sur la valeur absolue des éléments magnétiques au 1er janvier 1891* (*Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, 5 janvier 1891).

dégage en une seconde dans un voltamètre une masse d'argent égale à

$$11^{mgr},192$$

ou une masse d'hydrogène égale à

$$0^{mgr},103696$$

dont le volume dans les conditions normales est :

$$1^{cm^3},1623.$$

Unité de résistance. — L'unité de résistance peut être définie comme égale à la résistance d'un conducteur dans lequel un courant ayant une intensité égale à l'unité dégagerait en une seconde uue quantité d'énergie égale à un erg, c'est-à-dire une quantité de chaleur égale à la fraction :

$$\frac{1}{41612323}$$

d'une petite calorie.

Cette résistance est à peu près celle de $\frac{1}{20000}$ de millimètre d'un fil de cuivre ayant un millimètre de diamètre, ou de $\frac{1}{120000}$ de millimètre d'un fil de fer de ce même diamètre.

Unité de force électromotrice. — L'unité de force électromotrice est égale à la différence de potentiel existant aux deux extrémités d'un conducteur de résistance égale à l'unité parcouru par un courant d'intensité égale à l'unité.

Cette différence de potentiel est à peu près la fraction :

$$\frac{1}{112\ 200\ 000}$$

de celle qui existe entre les deux pôles d'une pile de Daniell.

Art. 4. — *Rapport des unités correspondantes des deux systèmes.*

Le coefficient V_i ayant en mesure (CGS) la valeur :

$$3.10^{10},$$

on a (voir chapitre VII, livre III)

$$|\mathcal{Q}_m|_{(CGS)} = 3.10^{10}\,|\mathcal{Q}_s|_{(CGS)}$$
$$|\mathcal{J}_m|_{(CGS)} = 3.10^{10}\,|\mathcal{J}_s|_{(CGS)}$$
$$|\mathcal{E}_m|_{(CGS)} = \frac{1}{3.10^{10}}\,|\mathcal{E}_s|_{(CGS)}$$
$$|\mathcal{C}_m|_{(CGS)} = 9.10^{20}\,|\mathcal{C}_s|_{(CGS)}$$
$$|\mathcal{R}_m|_{(CGS)} = \frac{1}{9.10^{20}}\,|\mathcal{R}_s|_{(CGS)}.$$

On voit que l'unité électromagnétique (CGS) de quantité d'électricité est telle qu'elle exercerait, en vertu de la loi de Coulomb, sur une quantité égale placée à un kilomètre de distance une action égale à :

$$\frac{(3.10^{10})^2}{(10^5)^2}\ \text{dynes},$$

c'est-à-dire à

90000 kg.

environ.

L'unité électromagnétique CGS de capacité est égale à la capacité d'une sphère isolée d'un rayon égal à

$$9\,.\,10^{20}\ \text{cm}.$$

ou environ

60 millions de fois

la distance moyenne du soleil à la terre.

CHAPITRE X

Définition du système d'unités électriques et magnétiques adopté dans la pratique industrielle.

Art. 1. — *Système d'unités pratiques de l'Association britannique.*

Les applications industrielles de l'électricité se rapportant principalement aux courants et à leurs différents effets, le système d'unités qui s'offre comme le plus avantageux pour les mesures et les calculs auxquels donnent lieu ces applications est le système électromagnétique, grâce auquel les formules magnétiques, électromagnétiques, électrodynamiques, dont l'usage est le plus fréquent, sont réduites au maximum de simplicité. Aussi, adoptant sur ce point l'opinion de l'Association britannique, le Congrès des électriciens tenu à Paris en 1881 a-t-il décidé que dans la pratique industrielle il serait fait usage exclusivement d'unités de ce système.

En raison de la disproportion considérable existant entre certaines unités du système électromagnétique (CGS), telles que l'unité de résistance, l'unité de force électromotrice (voir le chapitre précédent) et les grandeurs de l'ordre de celles qui s'offrent le plus habituellement aux mesures, l'Association britannique avait proposé comme unités secondaires pratiques certains multiples de ces unités (CGS) choisis de façon à représenter des grandeurs de même ordre que les étalons arbitraires dont les praticiens, et notamment les télégraphistes, avaient trouvé l'emploi avantageux.

Les principales unités arbitraires de résistance en usage à l'époque où l'Association britannique commença ses travaux étaient :

L'*unité Wheatstone,* c'est-à-dire la résistance du pied anglais d'un fil de cuivre pesant 100 grains par pied de longueur;

L'*unité Varley,* c'est-à-dire la résistance d'un pied anglais d'un fil de cuivre de $\frac{1}{16}$ de pouce de diamètre;

L'*unité télégraphique française,* c'est-à-dire la résistance d'un kilomètre de fil de fer de 4 millimètres de diamètre;

L'*unité Siemens,* c'est-à-dire la résistance à 0° d'une colonne de mercure ayant un millimètre carré de section et un mètre de longueur.

L'indication du diamètre et de la longueur d'un conducteur métallique autre que le mercure ne suffit pas pour définir une résistance, car la résistance spécifique d'une substance est variable d'un échantillon à l'autre, et, pour un même échantillon, elle dépend de la température. De toutes les résistances qui viennent d'être énumérées, la seule qui fût bien définie était l'unité Siemens. Relativement à cette dernière, les autres avaient approximativement les valeurs suivantes :

NOMS DES UNITÉS.	VALEURS EN UNITÉS SIEMENS.
Unité Wheatstone.	$\frac{1}{80}$
Unité Warley.	25
Unité française.	10

D'après les mesures absolues de Weber, on pouvait calculer que le multiple décimal de l'unité de résistance électromagnétique (CGS) approchant le plus de l'unité Siemens était :

$$10^9 (\mathcal{R}_m)_{CGS}.$$

C'est ce multiple que l'Association britannique choisit pour en faire une unité pratique, à laquelle elle donna le nom d'*ohm* [1].

La force électromotrice la plus communément employée comme terme de comparaison dans les mesures pratiques était la force électromotrice du couple Daniell. Le multiple décimal de l'unité électromagnétique (CGS) de force électromotrice le plus voisin de celle-là et aussi de celle du couple de Volta étant

$$10^8 (\mathcal{E}_m)_{CGS},$$

l'Association britannique en fit une unité pratique sous le nom de *volt*.

Pour conserver dans les calculs pratiques les formules simples :

$$I = \frac{E}{R},$$
$$Q = IT,$$
$$Q = CV,$$
$$W = RI^2T,$$

(1) Ce fut sur la proposition de Ch. Bright et de Latimer Clark que l'Association britannique proposa de distinguer les unités pratiques par des noms rappelant ceux des physiciens illustres dont les travaux avaient principalement porté sur les grandeurs électriques ou magnétiques correspondantes.

il faut joindre à l'ohm et au volt des unités d'intensité, de quantité, de capacité, de travail convenablement choisies.

Le quotient de la valeur numérique en volts de la force électromotrice existant dans un circuit par la valeur numérique en ohms de la résistance, ne représente la valeur numérique de l'intensité du courant que si l'intensité prise pour unité est celle du courant produit par un volt dans un circuit de résistance égale à un ohm.

Le produit de la valeur numérique pratique de l'intensité d'un courant par la valeur numérique d'un temps ne représente la valeur numérique de la quantité d'électricité transportée par ce courant pendant ce temps que si la quantité prise pour unité est celle que transporte pendant l'unité de temps un courant ayant une intensité égale à l'unité pratique.

Le produit de la valeur numérique en volts de la différence de potentiel existant entre les armatures d'un condensateur par la valeur numérique de la capacité de ce dernier, ne représente la valeur numérique pratique de la charge que si la capacité prise pour unité est celle d'un condensateur dans lequel une charge égale à l'unité pratique de quantité établit une différence de potentiel d'un volt.

Le produit de la valeur numérique pratique de la résistance d'un conducteur par le carré de la valeur numérique pratique de l'intensité du courant dont il est le siège et par la valeur numérique d'un temps, ne représente la valeur numérique de l'énergie dégagée dans ce conducteur pendant ce temps que si l'énergie prise pour unité est celle que dégage, pendant l'unité de temps, dans un conducteur ayant une résistance d'un ohm, un courant d'intensité égale à l'unité pratique.

On peut ainsi, en prenant pour bases l'ohm, le volt et la seconde, définir de proche en proche un système complet d'unités géométriques, mécaniques, électriques et magnétiques dans lequel, en raison des formules adoptées, les relations entre les diverses unités sont les mêmes que dans le système électromagnétique (CGS).

C'est ce système que l'Association britannique a proposé comme système pratique.

On peut l'envisager comme un système électromagnétique absolu ayant pour bases :

Une certaine longueur $|\mathfrak{L}|$,
La seconde,
Une certaine masse $|\mathfrak{M}|$.

Il est facile de trouver (voir chapitre VIII, livre III) les valeurs numériques (CGS) de la longueur $|\mathfrak{L}|$ et de la masse $|\mathfrak{M}|$. — L'unité de résistance du système est représentée symboliquement par l'expression

$$\frac{|\mathfrak{L}|}{\text{sec}}.$$

Mais on sait par définition qu'elle vaut 10^9 unités (CGS). On a donc l'équation symbolique

$$\frac{|\mathfrak{L}|}{\text{sec}} = 10^9 \, \frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

d'où l'on déduit

$$|\mathfrak{L}| = 10^9 \text{ cm}.$$

D'autre part, l'unité de force électromotrice, représentée symboliquement par

$$\frac{|\mathfrak{M}|^{\frac{1}{2}} \cdot |\mathfrak{L}|^{\frac{3}{2}}}{\text{sec}^2},$$

vaut 10^8 unités (CGS) ; on a donc l'équation symbolique

$$\frac{|\mathfrak{M}|^{\frac{1}{2}} \, |\mathfrak{L}|^{\frac{3}{2}}}{\text{sec}^2} = 10^8 \, \frac{|\text{grm}|^{\frac{1}{2}} \, |\text{cm}|^{\frac{3}{2}}}{\text{sec}^2},$$

d'où l'on déduit

$$|\mathfrak{M}|^{\frac{1}{2}} = 10^8 \, |\text{grm}|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\text{cm}}{|\mathfrak{L}|}\right)^{\frac{3}{2}},$$

ou, en tenant compte de la valeur de $|\mathfrak{L}|$,

$$\mathfrak{M} = 10^{-11} \text{ grm}.$$

Le système pratique a donc pour bases les grandeurs suivantes :

$$10^9\ \mathrm{cm}, \qquad \mathrm{sec}, \qquad 10^{-11}\ \mathrm{grm},$$

si on le rapporte au type (LTM), ou

$$10^9\ \mathrm{cm}, \qquad \mathrm{sec}, \qquad 10^{-2}\ \mathrm{dyne},$$

si on le rapporte au type (LTF).

La connaissance de ces bases permettra de trouver aisément, à l'aide des symboles de dimensions, la valeur (CGS) d'une unité pratique quelconque.

Par exemple, soit à trouver la valeur en ergs de l'unité pratique de travail. On écrira l'équation symbolique :

$$|\mathcal{M}|\ |\mathcal{L}|^2\ |\mathrm{sec}|^{-2} = x\,|\mathrm{gr}|\ |\mathrm{cm}|^2|\ |\mathrm{sec}|^{-2},$$

d'où

$$x = \left(\frac{|\mathcal{M}|}{\mathrm{gr}}\right)\left(\frac{|\mathcal{L}|}{\mathrm{sec}}\right)^2 = 10^{-11}\,10^{18} = 10^7;$$

donc, *unité prat. de travail* $= 10^7$ ergs.

D'une manière générale, soient $|\mathcal{G}|$ et $|\mathcal{G}_m|$ l'unité pratique et l'unité électromagnétique (CGS) d'une grandeur quelconque dont le symbole de dimensions électromagnétiques est

$$L^{\lambda'}\,T^{\tau'}\,F^{\varphi'}.$$

On a

$$|\mathcal{G}| = (10^9)^{\lambda'}\,(10^{-2})^{\varphi'}\,|\mathcal{G}_m|$$

ou

$$|\mathcal{G}| = 10^{9\lambda'-2\varphi'}\,|\mathcal{G}_m|,$$

et par suite, en se reportant à la relation générale entre $|\mathcal{G}_m|$ et $|\mathcal{G}_s|$:

$$|\mathcal{G}| = V_i^{\lambda-\lambda'}\,10^{9\lambda-2\varphi'}\,|\mathcal{G}_s|$$

ou

$$|\mathcal{G}| = 3^{\lambda-\lambda'}\,10^{10\lambda-2\varphi'-\lambda'}\,|\mathcal{G}_s|.$$

Art. 2. — *Nomenclature des principales unités pratiques.*

Le Congrès international des électriciens, réuni à Paris en 1881, a sanctionné le système d'unités établi par l'Association britannique en votant à l'unanimité les résolutions suivantes :

« 1° *On adoptera pour les mesures électriques les unités fondamentales : centimètre, masse du gramme, seconde* (CGS) ;

» 2° *Les unités pratiques l'*OHM *et le* VOLT *conserveront leurs définitions actuelles :* 10^9 *pour l'ohm et* 10^8 *pour le volt ;*

» 3° *L'unité de résistance (ohm) sera représentée par une colonne de mercure d'un millimètre carré de section à la température de zéro degré centigrade ;*

» 4° *Une Commission internationale sera chargée de déterminer, par de nouvelles expériences, pour la pratique, la longueur de la colonne de mercure d'un millimètre carré de section à la température de zéro degré centigrade, qui représentera la valeur de l'ohm ;*

» 5° *On appelle* AMPÈRE *le courant produit par un volt dans un ohm ;*

» 6° *On appelle* COULOMB *la quantité d'électricité définie par la condition qu'un ampère donne un coulomb par seconde ;*

» 7° *On appelle* FARAD *la capacité définie par la condition qu'un coulomb dans un farad donne un volt.* »

La nomenclature des unités pratiques a été complétée au deuxième Congrès international des électriciens tenu à Paris en 1889 par les résolutions suivantes :

« *L'unité pratique de travail est le* JOULE. *Le joule vaut* 10^7 *unités CGS de travail. C'est l'énergie équivalente à la chaleur dégagée pendant une seconde par un ampère dans un ohm.*

» *L'unité pratique de puissance est le* WATT. *C'est la puissance d'un joule par seconde. Le watt vaut* 10^7 *unités CGS.*

» *Le Congrès exprime le vœu que dans la pratique industrielle on exprime la puissance des machines en kilowatts, au lieu de l'exprimer en chevaux-vapeur.*

» *L'unité pratique de coefficient d'induction est le* QUADRANT. *Le quadrant vaut* 10^9 *centimètres.* »

Dans l'évaluation pratique des grandeurs électriques, il est, dans certains cas, nécessaire, pour éviter les trop grands nombres, d'avoir recours à des unités secondaires formées de multiples ou de sous-multiples des unités principales. Voici le tableau des multiples et sous-multiples généralement adoptés :

		RÉSISTANCES.	FORCES ÉLECTROMOTRICES.
million	= mega	Megohm : Mω	Megavolt : Mv
mille	= kilo	kilohm : $k\omega$	kilovolt : kv
millième	= milli	milliohm : $m\omega$	millivolt : mv
millionième	= micro	microhm : $\mu\omega$	microvolt : μv

INTENSITÉS DE COURANT.	QUANTITÉS D'ÉLECTRICITÉ.	CAPACITÉS.
Megampère : Ma	Megacoulomb : Mc	Megafarad : Mf
kiloampère : ka	kilocoulomb : kc	kilofarad : kf
milliampère : ma	millicoulomb : mc	millifarad : mf
microampère : μa	microcoulomb : μc	microfarad : μf

Art. 3. — *Représentation des principales unités pratiques.*

1. Unité de résistance. — Ohm.

Des mesures absolues de résistance faites en 1863-1864 à King's-Collège par Clark Maxwell, Flaming Jenkin et Balfour Stewart, suivant une méthode due à sir W. Thomson, l'Association britannique avait conclu que l'*ohm* pouvait être représenté par la résistance à 0° d'une colonne de mercure ayant une section d'un millimètre carré et une longueur égale à

$$104^{\text{cm}},83.$$

Mais toutes les expériences faites ensuite par de nombreux observateurs indiquèrent que ce nombre devait être trop faible de plus d'un centimètre. C'est pourquoi le Congrès des électriciens de 1881 émit le vœu que des expériences décisives fussent faites à ce sujet.

En 1884, la Conférence internationale des unités électriques se trouvait en possession des résultats suivants :

DATES.	OBSERVATEURS.	RÉSULTATS.	MÉTHODES EMPLOYÉES.
1881	Rayleigh et Schuster.	105,98	British Association.
1882	Rayleigh.	106,28	British Association.
1882	H. Weber.	106,14	British Association.

1874	Kohlrausch.	105,91	Weber (Induction par la terre).
1884	Mascart.	106,33	
1884	Wiedemann.	106,19	
1878	Rowland.	105,79	Induction voltaïque.
1882	Glazebrook.	106,30	
1884	Mascart.	106,33	
1884	Fr. Weber.	105,33	
1884	Roiti.	105,90	
1873	Lorenz.	107,10	Lorenz.
1884	Lorenz.	106,19	
1883	Rayleigh.	106,24	
1884	Lenz.	106,13	
1882	Dorn.	105,46	Weber (Amortissement).
1883	Wild.	105,68	
1884	Fr. Weber.	105,26	
1866	Joule.	106,23	Joule.
	Moyenne.	106,04	

Une sous-commission, composée en grande partie des différents expérimentateurs présents à la Conférence, discuta ces résultats et formula les conclusions suivantes :

« La sous-commission a examiné les différents travaux relatifs à la détermination de l'ohm, en les classant soit par ordre de date, soit d'après les méthodes d'observation. Il eût été sans doute très utile de discuter la valeur des méthodes et les détails des expériences; mais on n'a pas tardé à reconnaître que cette discussion présentait les plus grandes difficultés si l'on voulait aboutir à rallier tous les suffrages.

» Il s'est trouvé que la moyenne des résultats classés de diverses manières était voisine de 106^{cm}.

» La sous-commission s'est arrêtée à cette valeur, non pas à cause du résultat moyen des observations, ni parce qu'elle la considérait comme la plus probable, mais surtout parce que les trois premiers chiffres qui représentent la longueur de la colonne mercurielle sont acceptés par tout le monde et paraissent avoir toutes les garanties d'exactitude. Quelques membres pensaient que ce nombre est trop élevé; plusieurs autres étaient d'avis qu'il est sensiblement trop bas, mais sans pouvoir donner de leur opinion une preuve tout à fait démonstrative. Dans tous les cas, l'erreur commise est sûrement faible, de quelques unités seulement du quatrième chiffre et sans importance pour la pratique. La nécessité de donner à l'industrie une solution qu'elle réclame avec quelque impatience a paru assez grave pour qu'on ne crût pas devoir la retarder davantage. Les recherches scientifiques absolues ne seront en aucune façon compromises par la différence qui existe entre la valeur théorique de l'ohm et le chiffre admis par l'unité pratique (1). »

En conséquence, sur la proposition de la sous-commission, la Conférence adopta, à l'unanimité, la résolution suivante (2) :

L'ohm légal est la résistance d'une colonne de mercure de 1 millimètre carré de section et de 106 centimètres de longueur à la température de la glace fondante.

D'après les meilleures expériences faites depuis 1884, la longueur de la colonne de mercure représentative de l'ohm semble pouvoir être fixée à

$$106^{\text{cm}},3$$

avec une erreur probablement inférieure à $\frac{1}{2000}$.

Voici, en effet, les résultats des plus récentes déterminations :

1887	Rowland (3).	106,32
	Kohlrausch (4).	106,32
1888	Dorn (5),	106,24
1888	Wuilleumier (6).	106,27

Pour passer de l'unité Siemens à l'ohm légal, on fera usage de la relation

$$\text{U.S} = \frac{1}{1,06} \text{ ohm légal.}$$

(1) Extrait du rapport présenté à la seconde séance de la Conférence internationale des unités électriques, par M. Mascart, président et rapporteur de la sous-commission.

(2) Séance du 3 mai 1884.

(3) Communication à l'Association britannique à Manchester.

(4) *Abhandl. der k. bayer. Akad. der Wissensch.*, IIe classe, vol. 16.

(5) *Ac. des Sc. de Berlin*, 1888.

(6) *Comptes rend. de l'Ac. des Sc.*, 1888.

Pour passer de l'unité de l'Association britannique à l'ohm légal, le Comité de cette Association a adopté la relation

$$U.S = 0{,}95412 \ B.A.U,$$

résultant des expériences de lord Rayleigh et Mrs. Sidgwick (1), d'où l'on déduit

$$0{,}95412 \ B.A.U = \frac{1}{1{,}06} \text{ ohm légal.}$$

D'après Glazebrook et Fitzpatrick (2), on aurait plus exactement

$$U.S = 0{,}95352 \ B.A.U,$$

d'où

$$0{,}95352 \ B.A.U = \frac{1}{1{,}06} \text{ ohm légal.}$$

2. Unité de force électromotrice. — Volt.

Le volt étant égal à

$$10^8 \, |\mathcal{E}_m|_{CGS}$$

vaut

$$10^8 \, \frac{|\mathcal{E}_s|_{CGS}}{3.10^{10}}$$

ou

$$\frac{1}{300} \, |\mathcal{E}_s|_{CGS}.$$

L'unité électrostatique (CGS) de force électromotrice vaut donc

300 volts.

La différence de potentiel capable de produire entre deux plateaux une étincelle de $0^c{,}1$ étant égale à $14{,}7 \, |\mathcal{E}_s|_{CGS}$, vaut, par suite,

4410 volts.

Ainsi que le montre le tableau suivant, le volt est une force

(1) *Phil. Trans.*, 1883.
(2) *Phil. Trans.*, 1888.

électromotrice de l'ordre de grandeur des forces électromotrices des éléments de piles hydroélectriques usuels.

I. *Couples étalons à 15°.*

		Forces électromotrices.
Sir W. Thomson.	Zinc. Solution saturée de sulfate de zinc. Solution demi-saturée de sulf. de cuivre. Cuivre.	1,074
Latimer Clark.	Zinc. Sulfate de zinc fondu. Sulfate de mercure pâteux. Mercure.	1,435
Latimer Clark à liquide.	Zinc. Solution de sulfate de zinc à 15 °/₀. Sulfate mercureux. Mercure.	1,465
Gouy.	Zinc. Solution de sulfate de zinc à 15 °/₀. Oxyde de mercure. Mercure.	1,390

II. *Couples usuels.*

Volta.	Zinc. Eau ordinaire. Cuivre.	0,98
Daniell.	Zinc amalgamé. 1 acide sulfurique + 12 eau. Solution saturée de sulfate de cuivre. Cuivre.	0,97
Bunsen.	Zinc amalgamé. 1 acide sulfurique + 12 eau. Acide azotique fumant. Charbon.	1,94
Leclanché.	Zinc amalgamé. Solution de sel ammoniac. Bioxyde de manganèse et charbon.	1,46
Poggendorf.	Zinc amalgamé. 12 bichromate de potasse + 25 acide sulfurique + 100 eau. Charbon.	2,01

Les forces électromotrices des couples thermoélectriques entre 0° et 100° sont de l'ordre des millièmes de volt. Ainsi la force électromotrice du couple bismuth-cuivre entre 0° et 100° est égale environ à

$$0^{v},004.$$

L'établissement d'un arc électrique entre deux charbons exige une force électromotrice supérieure à

30 volts.

La différence de potentiel entre les deux extrémités d'une lampe à incandescence est variable, suivant les modèles, de quelques volts à plus de 100 volts.

3. Unité d'intensité de courant. — Ampère.

La valeur (CGS) d'un ampère est donnée par l'équation symbolique

$$1 \text{ amp} = \frac{\text{volt}}{\text{ohm}} = \frac{10^8 \, |\mathcal{E}_m|_{(CGS)}}{10^9 \, |\mathcal{R}_m|_{(CGS)}},$$

d'où

$$1 \text{ amp} = \frac{1}{10} \, |\mathfrak{I}_m|_{(CGS)}.$$

Un ampère vaut donc $\frac{1}{10}$ de l'unité électromagnétique (CGS) d'intensité.

Au sujet du nom donné à cette unité, M. Helmoltz a présenté au Congrès des électriciens (séance du 21 septembre 1881) les observations suivantes :

« Il existait deux systèmes de mesures absolues : l'un, employé en Allemagne d'après Gauss et Weber, prenait pour unités fondamentales le millimètre et le milligramme; l'autre, en usage en Angleterre, partait du centimètre et du gramme. Il n'y avait donc pas concordance parfaite entre les mesures des deux pays. Or, la Commission française ayant défini le gramme par le poids d'un centimètre cube d'eau, il était naturel de conserver les mêmes bases pour étendre le système métrique à d'autres quantités. En fait, l'Association britannique n'avait défini que l'ohm et le volt, mais n'avait point donné d'étalon d'intensité; et ce n'est que peu à peu qu'on s'accoutuma en Angleterre à employer, sous le nom de *weber,* une unité d'intensité (un volt dans un ohm) qui se trouvait être dix fois plus grande que l'unité employée par Weber lui-même et que l'on appelait aussi *weber* en Allemagne. Déjà des confusions s'établissent dans les ouvrages de physique entre ces deux webers, et si, après la revision de l'étalon de résistance, on eût conservé le nom de weber au courant produit par un volt dans le nouvel ohm, la confusion eût été inextricable. On a donc jugé préférable de supprimer ce nom, de mettre à la place, pour la nouvelle unité d'intensité, le nom d'Ampère, et ce choix est amplement justifié par les importants travaux du grand savant auquel on doit la connaissance claire des phénomènes électromagnétiques; il a, en outre, l'avantage de joindre le nom d'un Français à ceux des illustrations allemandes, anglaises et italiennes qui ont déjà servi de parrains aux autres unités. »

Le rapport qui vient d'être indiqué entre le weber anglais et le weber allemand est facile à vérifier. Le premier weber est l'unité d'intensité d'un système dont les unités fondamentales sont :

$$\mathcal{L}_1 = 10^9 \text{ cm}, \qquad \mathcal{T}_1 = \text{sec}, \qquad \mathcal{M}_1 = 10^{-11} \text{ grm}.$$

Le second est l'unité d'intensité d'un système dont les unités fondamentales sont :

$$\mathcal{L}_2 = 10^{-1} \text{ cm}, \qquad \mathcal{T}_2 = \text{sec}, \qquad \mathcal{M}_2 = 10^{-3} \text{ grm}.$$

Les dimensions d'une intensité étant

$$F^{\frac{1}{2}} = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1},$$

le rapport de ces deux intensités est

$$\left(\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(10^{-8} . 10^{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 10.$$

Si l'on se rappelle (voir chapitre IV, livre II) que l'unité de force du système de Gauss est 10.000 fois plus petite que celle du système CGS, il est encore plus simple de remarquer que l'unité d'intensité de ce système, ou weber allemand, doit être $(10.000)^{\frac{1}{2}} = 100$ fois plus petite que l'unité CGS. Or, le weber anglais, identique à l'ampère, est 10 fois plus petit que cette dernière; il vaut donc 10 fois le weber allemand.

Un courant d'un ampère dégage, en une seconde, dans un voltamètre, une masse d'argent égale à

$$1^{mgr},1192 \text{ [1]},$$

ou une masse d'hydrogène égale à

$$0^{mgr},0103696,$$

dont le volume dans les conditions normales est

$$0^{cm^3},11623.$$

Un élément Daniell de taille moyenne, dont les pôles sont réunis par un circuit de résistance négligeable, donne un courant d'environ un ampère.

Un élément Bunsen moyen, dans les mêmes circonstances, donne un courant d'une quinzaine d'ampères.

4. Unité de quantité. — Coulomb.

Un courant d'un ampère débite un coulomb par seconde.

La quantité de matière décomposée par un courant dans un voltamètre est proportionnelle à l'intensité du courant et au temps, et par conséquent à la quantité d'électricité mise en jeu. I et T peuvent recevoir des valeurs très diverses ; à une même valeur du produit IT correspond toujours un même effet électrochimique. En d'autres termes, de quelque façon qu'il soit mis en jeu, un même nombre de coulombs décompose toujours une même masse d'un électrolyte donné.

Un coulomb met en liberté une masse d'hydrogène égale à

$$0^{gr},0000103696$$

et une masse

$$0^{gr},0000103696\,\varepsilon$$

d'un corps dont l'équivalent électrochimique est ε, celui de l'hydrogène étant 1.

D'après cela, pour mettre en liberté un équivalent électrochimique (ε^{gr}) d'un corps, il faut

$$\frac{1}{0,0000103696} = 96435 \text{ coulombs.}$$

[1] Potier et Pellat, *Soc. franç. de Physique,* 15 mars 1889.

Puisqu'un courant d'un ampère débite un coulomb en une seconde, il débite en une heure

3600 coulombs.

On emploie quelquefois cette quantité comme unité secondaire sous le nom d'*ampère-heure.*

D'une manière générale, la quantité débitée par un courant de I ampères pendant T secondes est IT coulombs. — A ce débit correspond la mise en liberté d'une masse

$$0{,}0000103696\, \varepsilon \mathrm{IT}$$

d'un corps d'équivalent électrochimique ε.

Il existe entre le coulomb et l'unité (CGS) électromagnétique de quantité la même relation qu'entre l'ampère et l'unité (CGS) électromagnétique d'intensité. On a donc

$$1 \text{ coulomb} = \frac{1}{10}\, |\mathcal{Q}_m|_{(\mathrm{CGS})},$$

et par suite

$$1 \text{ coulomb} = 3.10^9\, |\mathcal{Q}_s|_{(\mathrm{CGS})}.$$

5. Unité de capacité. — Farad.

Puisqu'on a par définition

$$1 \text{ farad} = \frac{\text{coulomb}}{\text{volt}},$$

il en résulte

$$1 \text{ farad} = \frac{\frac{1}{10}\, |\mathcal{Q}_m|_{\mathrm{CGS}}}{10^8\, |\mathcal{E}_m|_{\mathrm{CGS}}} = \frac{1}{10^9}\, |\mathcal{C}_m|_{\mathrm{CGS}} = 9.10^{11}\, |\mathcal{C}_s|_{\mathrm{CGS}}.$$

Un farad est donc égal à la capacité d'une sphère isolée d'un rayon de

$$9.10^{11} \text{ cm},$$

valant environ 1400 fois le rayon moyen de la terre ou environ 14 fois le rayon du soleil.

Dans la pratique, on évalue ordinairement les capacités en *microfarads* ou millionièmes de farad.

Puisque

$$1 \text{ farad} = 9.10^{11} |\mathcal{C}_s|_{CGS},$$

on a

$$1 \text{ microfarad} = 9.10^{5} |\mathcal{C}_s|_{CGS}.$$

La capacité de la terre étant égale à

$$637110400 \, |\mathcal{C}_s|_{CGS}$$

vaut

$$\frac{637110400}{9.10^5} \text{ microfarad}$$

ou environ

$$707 \text{ microfarads.}$$

Les câbles sous-marins ont une capacité moyenne de

$$0^{\mu f},4$$

par nœud (1852^m) de longueur.

6. Unité de travail ou d'énergie. — Joule.

D'après la remarque faite au chapitre VII (livre III), on peut, pour faire usage des formules :

$$W = \tfrac{1}{2} QE,$$
$$W = \tfrac{1}{2} CE^2,$$
$$W = \tfrac{1}{2} \frac{Q^2}{C},$$
$$W = EIT,$$
$$W = RI^2T,$$

se servir des valeurs numériques en unités pratiques des grandeurs qui y figurent. Le résultat est le même que si l'on effectuait le calcul dans le système électrostatique ayant les mêmes bases géométriques et mécaniques que le système électromagnétique pratique. Une énergie électrique se trouve alors exprimée en fonction de l'unité d'énergie déduite de ces bases, laquelle, ainsi que nous l'avons vu plus haut (art. 1), est égale à

$$10^7 \text{ ergs.}$$

Cette unité a reçu le nom de *joule.*

Ainsi, on obtiendra la valeur en joules de l'énergie d'un condensateur en prenant :

La moitié du produit du nombre de coulombs représentant la charge par le nombre de volts représentant la différence de potentiel des armatures ;

Ou la moitié du produit du nombre de farads représentant la capacité par le carré du nombre de volts représentant la différence de potentiel des armatures ;

Ou enfin la moitié du quotient du carré du nombre de coulombs représentant la charge par le nombre de farads représentant la capacité.

On aura la valeur en joules de l'énergie mise en jeu dans un circuit pendant un temps donné en faisant le produit du nombre de volts représentant la force électromotrice par le nombre d'ampères représentant l'intensité du courant et par le nombre de secondes représentant le temps ; ou encore en faisant le produit du nombre de volts représentant la force électromotrice par le nombre de coulombs mis en jeu dans le circuit pendant le temps donné.

Enfin, on obtiendra l'équivalent en joules de la chaleur dégagée dans une portion de circuit pendant un temps donné en faisant le produit du nombre d'ohms représentant la résistance par le carré du nombre d'ampères représentant l'intensité et par le nombre de secondes représentant le temps.

Une grande calorie équivaut à

$$424{,}2 \text{ Kg.m} = 4{,}161.10^{10} \text{ ergs.}$$

Une petite calorie (gramme-degré) équivaut par suite à

$$4{,}161.10^7 \text{ ergs} = 4{,}161 \text{ joules.}$$

Donc

$$1 \text{ joule} = \frac{1}{4{,}161} \text{ petite calorie} = 0{,}240 \text{ petite calorie.}$$

Si l'on remarque que la chaleur spécifique de l'air à pression constante est

$$0{,}2381,$$

on voit qu'un joule est à très peu près l'équivalent de la chaleur nécessaire pour élever de 1° la température d'une masse d'air de 1^{gr} [1].

7. Unité de puissance. — Watt.

L'unité pratique de puissance ou *watt* est la puissance d'une source d'énergie qui produirait un joule par seconde.

Un appareil électrique présentant une force électromotrice E et traversé par un courant d'intensité I met en jeu une puissance représentée par

$$EI.$$

Si le nombre E désigne des volts et le nombre I des ampères, le nombre EI désigne des watts.

Puisque le joule vaut 10^7 ergs, le watt vaut 10^7 fois l'unité CGS de puissance mécanique. On a donc

$$1 \text{ watt} = 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{sec}}.$$

Suivant les règles du calcul symbolique (voir chapitre VI, livre II), de cette égalité on déduit les suivantes :

$$\begin{aligned} 1 \text{ watt} &= 10^7 \frac{\text{dyne.cm}}{\text{sec}} \\ &= 10^7 \frac{\text{Kg}}{980960} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \\ &= \frac{10^5}{980960} \frac{\text{Kg.met}}{\text{sec}} \text{ [2]}. \end{aligned}$$

---

[1] Blakesley. — *On some fact, connected with the systeme of scientific units of measurement.* (*Philos. mag.*, 5e s., t. XXVII, 1889, p. 373.)

[2] C'est-à-dire environ $\frac{1}{10} \frac{\text{Kg.met}}{\text{sec}}$.

Les unités de puissance actuellement employées par les ingénieurs mécaniciens sont, dans les pays qui ont adopté le système métrique : *le kilogrammètre par seconde, le cheval-vapeur,* et enfin une unité de création toute récente [1] : *le poncelet,* valant 100 kilogrammètres par seconde.

En Angleterre, l'unité industrielle de puissance est le *Horse-Power,* défini par Watt comme valant *33,000 foot-pound par minute* ou *550 foot-pound* par seconde, ce qui fait 75,9 kilogrammètres par seconde.

Les valeurs en watt de ces diverses unités de puissance sont données par les égalités suivantes :

$$1\,\frac{\text{Kg.met}}{\text{sec}} = 9{,}8096 \text{ watt},$$

$$1 \text{ Cheval vap} = 75.9{,}8096 \text{ watt} = 0{,}73572 \text{ kilowatt.}$$

$$1 \text{ Poncelet} = 100.9{,}8096 \text{ watt} = 0{,}98096 \text{ kilowatt.}$$

$$1 \text{ Horse-Power} = 75{,}9.9{,}8096 \text{ watt} = 0{,}74454 \text{ kilowatt.}$$

8. Résumé des relations entre les nouvelles mesures pratiques et les anciennes.

En résumé, pour appliquer les formules avec les unités pratiques, il faudra y introduire comme valeur numérique :

D'une longueur, sa valeur en mètres divisée par 10^7;

D'un temps, sa valeur en secondes;

D'une masse, sa valeur en grammes-masses multipliée par 10^{11};

D'une force, sa valeur en grammes multipliée par 98096;

D'un travail, sa valeur en kilogrammètres multipliée par 9,8096;

D'une quantité de chaleur, sa valeur en calories-kilogrammes multipliée par 4161;

D'une puissance, sa valeur en chevaux-vapeur multipliée par 735,72.

---

[1] Cette unité a été adoptée par le Congrès de la mécanique appliquée tenu à Paris à l'occasion de l'Exposition universelle de 1889. — Elle ne sera qu'une transition entre le cheval-vapeur si incommode et le kilowatt.

Réciproquement, si l'on veut interpréter en anciennes unités les résultats fournis par un calcul basé sur les unités pratiques, il faudra pour avoir :

Une longueur en mètres, multiplier le nombre obtenu par 10^7;

Une masse en grammes-masses, diviser le nombre obtenu par 10^{11};

Une force en grammes, diviser le nombre obtenu par 98096;

Un travail en kilogrammètres, diviser le nombre obtenu par 98096;

Une quantité de chaleur en calories-kilogrammes, diviser le nombre obtenu par 4161;

Une puissance en chevaux-vapeur, diviser le nombre obtenu par 735,72.

Quant au temps, il sera immédiatement exprimé en secondes.

NOTE I

Sur l'homogénéité en géométrie.

Un esprit aussi pénétrant que celui de Legendre ne pouvait manquer d'être frappé de l'importance de la considération de l'homogénéité en géométrie. Non seulement l'éminent géomètre a accordé à l'homogénéité des formules géométriques l'attention qu'elle mérite ; il a même tenté de l'ériger en un principe qui, posé *a priori,* devait conduire à la démonstration facile d'une foule de propositions particulières. Une note de la douzième édition de sa *Géométrie* est consacrée à en donner des exemples. Cette méthode n'a pas été suivie. Il semble, en effet, qu'on a de l'homogénéité une idée plus complète et plus juste en la regardant non comme un dogme mystérieux, mais comme une conséquence toute naturelle et nécessaire des propositions fondamentales relatives à la comparaison des diverses grandeurs géométriques. Quoique réduite ainsi à l'état de simple conséquence des premiers principes, elle n'en constitue pas moins une proposition éminemment utile par sa grande généralité, et elle peut servir non seulement à contrôler l'exactitude des calculs effectués sur les formules, mais aussi à trouver la forme même de certaines relations. A ce point de vue, la note de Legendre peut être pour le lecteur l'objet d'un intéressant et profitable exercice. En voici les passages principaux (1) :

. . . .

« On démontre immédiatement par la superposition et sans aucune proposition préliminaire que *deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.*

(1) *Éléments de Géométrie,* 12e édit. Paris, Didot, 1823, note II, p. 281 et suiv.

Appelons p le côté dont il s'agit, A et B les deux angles adjacents, C le troisième angle. Il faut donc que l'angle C soit entièrement déterminé, lorsqu'on connaît les angles A et B avec le côté p; car, si plusieurs angles C pouvaient correspondre aux trois données A, B, p, il y aurait autant de triangles différents qui auraient un côté égal adjacent à deux angles égaux, ce qui est impossible. Donc l'angle C doit être une fonction déterminée des trois quantités A, B, p, ce que j'exprime ainsi : $C = \varphi : (A, B, p)$.

» Soit l'angle droit égal à l'unité; alors les angles A, B, C seront des nombres compris entre 0 et 2; et puisque $C = \varphi : (A, B, p)$, je dis que la ligne p ne doit point entrer dans la fonction φ. En effet, on a vu que C doit être entièrement déterminé par les seules données A, B, p, sans autre angle ni ligne quelconque, mais la ligne p est hétérogène avec les nombres A, B, C; et si on avait une équation quelconque entre A, B, C, p, on en pourrait tirer la valeur de p en A, B, C, d'où il résulterait que p est égal à un nombre, ce qui est absurde : donc p ne peut entrer dans la fonction φ et on a simplement $C = \varphi : (A, B)$ [1].

» Cette formule prouve déjà que si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième doit être égal au troisième, et, cela posé, il est facile de parvenir au théorème que nous avons en vue.

» Soit d'abord ABC un triangle rectangle en A; du point A abaissez AD perpendiculaire sur l'hypoténuse. Les angles B et D du triangle ABD sont égaux aux angles B et A du triangle BAC; donc, suivant ce qu'on vient de démontrer, le troisième BAD est égal au troisième C. Par la même raison, l'angle $DAC = B$; donc $BAD = DAC$, ou $BAC = B + C$: or, l'angle BAC est droit; donc les *deux angles aigus d'un triangle rectangle, pris ensemble, valent un angle droit.*

---

(1) On a objecté contre cette démonstration que si elle était appliquée, mot pour mot, aux triangles sphériques, il en résulterait que deux angles connus suffisent pour déterminer le troisième, ce qui n'a pas lieu dans ces sortes de triangles. La réponse est que, dans les triangles sphériques, il y a un élément de plus que dans les triangles plans, et cet élément est le rayon de la sphère, dont on ne doit pas faire abstraction. Soit donc r le rayon, alors, au lieu d'avoir $C = \varphi(A, B, p)$, on aura $C = \varphi(A, B, p, r)$ ou seulement $C = \varphi\left(A, B, \frac{p}{r}\right)$, en vertu de la loi des homogènes. Or, puisque le rapport $\frac{p}{r}$ est un nombre, ainsi que A, B, C, rien n'empêche que $\frac{p}{r}$ ne se trouve dans la fonction φ, et alors on n'en peut plus conclure $C = \varphi(A, B)$.

» Soit ensuite BAC un triangle quelconque et BC un côté qui ne soit pas moindre que chacun des deux autres : si de l'angle opposé A on abaisse la perpendiculaire AD sur BC, cette perpendiculaire tombera au dedans du triangle ABC et le partagera en deux triangles rectangles BAD, DAC : or, dans le triangle rectangle BAD, les deux angles BAD, ABD valent ensemble un angle droit; dans le triangle rectangle DAC, les deux angles DAC, ACD valent aussi un angle droit. Donc les quatre réunis, ou seulement les trois BAC, ABC, ACB, valent ensemble deux angles droits; donc, *dans tout triangle, la somme des trois angles est égale à deux angles droits.*

» On voit par là que ce théorème, considéré *a priori,* ne dépend point d'un enchaînement de propositions, et qu'il se déduit immédiatement du principe de l'homogénéité, principe qui doit avoir lieu dans toute relation entre des quantités quelconques. Mais poursuivons, et faisons voir qu'on peut tirer de la même source les autres théorèmes fondamentaux de la géométrie.

» Conservons les mêmes dénominations que ci-dessus, et appelons de plus m le côté opposé à l'angle A et n le côté opposé à l'angle B. La quantité m doit être déterminée par les seules quantités A, B, p; donc m est une fonction de A, B, p, et $\frac{m}{p}$ en est une aussi, de sorte qu'on peut faire $\frac{m}{p} = \psi : (A, B, p)$. Mais $\frac{m}{p}$ est un nombre, ainsi que A et B; donc la fonction ψ ne doit point contenir la ligne p, et on a simplement $\frac{m}{p} = \psi : (A, B)$ ou $m = p\psi : (A, B)$. On a donc semblablement $n = p\psi : (B, A)$.

» Soit maintenant un autre triangle formé avec les mêmes angles A, B, C, auxquels soient opposés les côtés m', n', p' respectivement. Puisque A et B ne changent pas, on aura dans ce nouveau triangle $m' = p'\psi(A, B)$ et $n' = p'\psi(B, A)$. Donc $m : m' :: n : n' :: p : p'$. Donc, *dans les triangles équiangles, les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels.*

» De cette proposition générale on déduit comme cas particulier celle que nous avons supposée dans le texte pour la démonstration de la proposition XX. En effet, les triangles AFG, AML ont deux angles égaux, chacun à chacun, savoir : l'angle A commun et un angle droit. Donc ces triangles sont équiangles, donc on a la proportion AF : AL :: AG : AM, au moyen de laquelle la proposition XX est pleinement démontrée.

» La proposition du carré de l'hypoténuse est, comme on sait, une suite de celle des triangles équiangles. Voilà donc trois propositions fondamentales de la géométrie, celle des trois angles d'un triangle, celle des triangles équiangles et celle du carré de l'hypoténuse, qui se déduisent très simplement et très immédiatement de la considération des fonctions. On peut par la même voie démontrer très succinctement les propositions concernant les figures semblables et les solides semblables.

» Soit ABCD un polygone quelconque; ayant choisi un côté AB comme base, formez autant de triangles ABC, ABD, etc., sur cette base, qu'il y a d'angles C, D, E, etc., au dehors. Soit la base $AB = p$, soient A et B les deux angles du triangle ABC adjacents au côté AB, soient A′ et B′ les deux angles du triangle ABD adjacents au même côté AB, et ainsi de suite. La figure ABCDE sera entièrement déterminée si on connaît le côté p avec les angles A, B, A′, B′, A″, B″, etc., et le nombre des données sera en tout $2n - 3$, n étant le nombre des côtés du polygone. Cela posé, un côté ou une ligne quelconque x, menée comme on voudra dans le polygone, avec les seules données qui constituent ce polygone, sera une fonction de ces données; et comme $\frac{x}{p}$ doit être un nombre, on pourra supposer $\frac{x}{p} = \psi : (A, B, A', B', \text{etc.})$ ou $x = p\psi : (A, B, A', B', \text{etc.})$, et la fonction ψ ne contiendra point p. Si, avec les mêmes angles A, B, A′, B′, etc., et un autre côté p', on forme un second polygone, on aura pour la ligne x', correspondante ou homologue à x, la valeur $x' = p'\psi\,(A, B, A', B', \text{etc.})$; donc $x' = x :: p : p'$. On peut définir les figures ainsi construites *figures semblables;* donc *dans les figures semblables les lignes homologues sont proportionnelles*. Ainsi, non seulement les côtés homologues, les diagonales homologues, mais les lignes terminées de la même manière dans les deux figures, sont entre elles comme deux autres lignes homologues quelconques.

» Appelons S la surface du premier polygone; cette surface est homogène au carré p^2; il faut donc que $\frac{S}{p^2}$ soit un nombre qui ne contienne que les angles A, B, A′, B′, etc., de sorte qu'on aura $S = p^2\varphi : (A, B, A', B', \text{etc.})$. Par la même raison, si S′ est la surface du second polygone, on aura $S' = p'^2\varphi : (A, B, A', B', \text{etc.})$. Donc $S : S' :: p^2 : p'^2$; donc *les surfaces des figures semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues*.

» Venons maintenant aux polyèdres. On peut supposer qu'une face est déterminée au moyen d'un côté connu p et de plusieurs angles A, B, C, etc. Ensuite les sommets des angles solides, hors de cette base, seront déterminés chacun par le moyen de trois données, qu'on peut regarder comme autant d'angles; de sorte que la détermination entière du polyèdre dépend d'un côté p et de plusieurs angles A, B, C, etc., dont le nombre varie suivant la nature du polyèdre. Cela posé, une ligne qui joint deux sommets, ou, plus généralement, toute ligne x menée d'une manière déterminée dans le polyèdre, avec les seules données qui constituent ce solide, sera une fonction des données p, A, B, C, etc.; et comme $\frac{x}{p}$ doit être un nombre, la fonction égale à $\frac{x}{p}$ ne contiendra que les angles A, B, C, etc., et on pourra supposer $x = p\varphi : (A, B, C, \text{etc.})$. La surface du solide est homogène à p^2; ainsi, cette surface peut se représenter par $p^2\psi\,(A,B,C,\text{etc.})$; sa solidité est homogène à p^3, et peut se représenter par $p^3\pi(A,B,C,\text{etc.})$, les fonctions désignées par ψ et π étant indépendantes de p.

» Supposons qu'on construise un second solide avec les mêmes angles A, B, C, etc., et un côté p' différent de p. Nous appellerons les solides ainsi construits *solides semblables;* et, cela posé, la ligne qui était $p\varphi$ (A, B, C, etc.), ou simplement $p\varphi$ dans un solide, sera $p'\varphi$ dans un autre; la surface qui était $p^2\psi$ dans l'un sera $p'^2\psi$ dans l'autre, et enfin la solidité qui était $p^3\pi$ dans l'un sera $p'^3\pi$ dans l'autre. Donc, 1° *dans les solides semblables, les côtés ou lignes homologues sont proportionnels;* 2° *leurs surfaces sont comme les carrés des côtés homologues;* 3° *leurs solidités sont comme les cubes de ces mêmes côtés.*

» Les mêmes principes s'appliquent aisément au cercle. Soient c la circonférence et s la surface du cercle dont le rayon est r: puisqu'il ne peut y avoir deux cercles inégaux décrits du même rayon, les quantités $\frac{c}{r}$ et $\frac{s}{r^2}$ doivent être des fonctions déterminées de r : mais comme ces quantités sont des nombres, elles ne doivent point contenir dans leur expression la ligne r; ainsi on aura $\frac{c}{r} = \alpha$ et $\frac{s}{r^2} = \beta$, α et β étant des nombres constants. Soit c' la circonférence et s' la surface d'un autre cercle dont le rayon est r'; on aura donc aussi $\frac{c'}{r'} = \alpha$ et $\frac{s'}{r'^2} = \beta$. Donc $c : c' :: r : r'$, et $s : s' :: r^2 : r'^2$; donc *les circonférences des cercles sont comme les rayons, et leurs surfaces comme les carrés des rayons.*

» Considérons un secteur dont r soit le rayon et A l'angle au centre; soit x l'arc qui termine le secteur, et y la surface de ce même secteur. Puisque le secteur est entièrement déterminé lorsqu'on connaît r et A, il faut que x et y soient des fonctions déterminées de r et de A, donc $\frac{x}{r}$ et $\frac{y}{r^2}$ sont aussi de pareilles fonctions. Mais $\frac{x}{r}$

est un nombre, ainsi que $\frac{y}{r^2}$; donc ces quantités ne doivent point contenir r, et elles sont simplement fonctions de A, de sorte qu'on aura $\frac{x}{r} = \psi(A)$ et $\frac{y}{r^2} = \psi(A)$. Soient x' et y' l'arc et la surface d'un autre secteur dont l'angle est A et le rayon r'; nous appellerons ces deux secteurs *secteurs semblables;* et puisque l'angle A est égal de part et d'autre, on aura $\frac{x'}{r'} = \varphi(A)$ et $\frac{y'}{r'^2} = \psi(A)$. Donc $x : x' :: r : r'$ et $y : y' :: r^2 : r'^2$; donc *les arcs semblables ou les arcs des secteurs semblables sont proportionnels aux rayons, et les secteurs eux-mêmes sont proportionnels aux carrés des rayons.*

» Il est clair qu'on prouverait, de la même manière, que les sphères sont comme les cubes de leurs rayons.

» On suppose, dans tout ce qui précède, que les surfaces se mesurent par le produit de deux lignes, et les solidités par le produit de trois; c'est ce qu'il est facile de démontrer aussi par voie d'analyse. Considérons un rectangle dont les dimensions sont p et q, et sa surface qui est une fonction de p et q, représentons-la par $\varphi\,(p\,q)$. Si on considère un autre rectangle dont les dimensions sont $p + p'$ et q, il est clair que ce rectangle est composé de deux autres, l'un qui a pour dimensions p et q, l'autre qui a pour dimensions p' et q'; de sorte qu'on aura

$$\varphi(p + p', q) = \varphi(p, q) + \varphi(p', q).$$

» Soit $p' = p$, on aura

$$\varphi\,(2p, q) = 2\varphi\,(p, q).$$

» Soit $p' = 2p$, on aura

$$\varphi\,(3p, q) = \varphi\,(p, q) + \varphi\,(2p, q) = 3\varphi\,(p, q).$$

» Soit $p' = 3p$, on aura

$$\varphi\,(4p, q) = \varphi\,(p, q) + \varphi\,(3p, q) = 4\varphi\,(p, q).$$

» Donc, en général, si k est un nombre entier quelconque, on aura

$$\varphi\,(kp, q) = k\varphi\,(p, q)$$

ou

$$\frac{\varphi\,(p, q)}{p} = \frac{\varphi\,(kp, q)}{kp}.$$

» Il résulte de là que $\frac{\varphi\,(p, q)}{p}$ est une telle fonction de p qu'elle ne change pas en mettant à la place de p un multiple quelconque kp. Donc cette fonction est indépendante de p et ne doit renfermer que q. Mais, par une raison semblable, $\frac{\varphi(p, q)}{q}$ doit être indépendante de q; donc $\frac{\varphi(p, q)}{pq}$ ne renferme ni p ni q, et ainsi cette quantité doit se réduire à une constante α. Donc on aura $\varphi(pq) = \alpha pq$; et comme rien n'empêche de prendre $\alpha = 1$, on aura $\varphi(p, q) = pq$; ainsi la surface d'un rectangle est égale au produit de ses deux dimensions.

» On démontrerait, d'une manière absolument semblable, que la solidité d'un parallélipipède rectangle dont les dimensions sont p, q, r est égale au produit pqr de ses trois dimensions. »

NOTE II

Sur l'ancienne unité de longueur ou Toise.

Jusqu'en 1668, l'étalon de la toise se trouvait à Paris, au vieux Châtelet, appliqué, en dehors, dans la cour, contre un des piliers du bâtiment. A cette époque, la toise, qui avait été faussée, fut reformée. A cet effet, on plaça au pied de l'escalier du grand Châtelet, contre un mur, un étalon, ou espèce de compas d'épaisseur, c'est-à-dire une barre de fer terminée par deux éminences, deux redents ou talons, qui sont perpendiculaires à la barre, et entre lesquels une toise devait entrer exactement. Ce rétablissement de la toise fut fait, au dire de La Hire, à l'aide d'un très ancien instrument de mathématiques où le pied était marqué.

Cet étalon du Châtelet servit à ajuster toutes les toises employées au XVII^{e} et au XVIII^{e} siècle dans les opérations géodésiques. Mais exposé aux injures de l'air, usé par les fréquentes présentations des toises usuelles, il n'exista pas longtemps dans son intégrité. Dès 1758, La Condamine proposait à l'Académie des sciences de reconnaître comme type de la toise la règle qu'il avait employée au Pérou et qui, de toutes les toises authentiques, présentait les meilleures garanties de conservation. Une déclaration du roi Louis XV, du 16 mai 1766, rendue par les soins de M. Trudaine de Montigny et réalisant le vœu de La Condamine, substitua la toise du Pérou à l'ancienne toise du Châtelet comme étalon des mesures de longueur. [Lalande, *Astronomie*, liv. XV, *passim* (1).]

NOTE III

Sur l'ancienne unité de poids ou Livre.

Les poids considérés en France comme étalons avant l'établissement du système métrique et qui ont servi à déterminer le rapport du kilogramme à la livre étaient les poids de la *pile* dite *de Charlemagne*, dont la construction passait pour remonter au quatorzième siècle.

Au moment où les commissaires des poids et mesures eurent à s'en servir, cette pile était conservée par l'Administration de la Monnaie. Elle se composait d'une boîte en cuivre pesant 20 marcs, d'une seconde pièce du poids de 14 marcs, entrant dans la boîte, ensuite d'autres pièces de 8, 4, 2 et 1 marcs, enfin d'un marc divisé, entrant les uns dans les autres et remplissant la boîte entière. La pile avait donc un poids total de 50 marcs ou 25 livres.

Le marc plein et le marc creux de la pile étaient inférieurs, l'un de $0^{grain},87$, l'autre de $1^{grain},72$, à la cinquantième partie de la pile entière ou marc moyen. Ces différences sont bien infé-

(1) Voir pour plus de détails : Wolf, *Recherches historiques sur les étalons de l'Observatoire* (*Annales de chimie et de physique*, 5e s., t. XXV, 1882, p. 5).

rieures à celles auxquelles on aurait pu s'attendre eu égard à l'imperfection des moyens de vérification en usage à l'époque de la construction de la pile.

NOTE IV

Sur les dimensions des grandeurs considérées dans la théorie de la chaleur.

C'est dans le traité de Fourier sur la *Théorie analytique de la chaleur* (1) qu'on trouve les premières considérations systématiques relatives aux dimensions des différentes grandeurs qui figurent dans les formules de physique et aux lois de l'homogénéité de ces formules. Maxwell n'est donc pas, comme cela a été souvent répété, l'inventeur de ce qu'on peut appeler la théorie des dimensions; mais il a eu le très grand mérite de saisir toute l'importance des indications de Fourier, et en les étendant à toutes les branches de la physique, particulièrement à l'électricité et au magnétisme, il a fait faire à la science un immense progrès.

Voici le passage en question du livre de Fourier (2) :

160

« Il faut maintenant remarquer que chaque grandeur indéterminée ou constante a une *dimension* qui lui est propre et que les termes d'une même équation ne pourraient pas être comparés, s'ils n'avaient point le même *exposant de dimension*. Nous avons introduit cette considération dans la théorie de la chaleur pour rendre nos définitions plus fixes et servir à vérifier le calcul; elle dérive des notions primordiales sur les quantités : c'est pour cette raison que, dans la géométrie et dans la mécanique, elle équivaut aux lemmes fondamentaux que les Grecs nous ont laissés sans démonstration.

---

(1) Paris, Didot, 1822, et *Œuvres de Fourier*, publiées par les soins de M. G. Darboux, t. I. Paris, Gauthier-Villars, 1888.

(2) *Œuvres*, t. I, p. 137.

161

» Dans la théorie analytique de la chaleur, toute équation (E) exprime une relation nécessaire entre des grandeurs subsistantes x, t, v, c, h, k [1]. Cette relation ne dépend point du choix de l'unité de longueur, qui de sa nature est contingent; c'est-à-dire que, si l'on prenait une unité différente pour mesurer les dimensions linéaires, l'équation (E) serait encore la même. Supposons donc que l'unité de longueur soit changée et que sa seconde valeur soit équivalente à la première divisée par m. Une quantité quelconque x qui, dans l'équation (E), représente une certaine ligne ab et qui, par conséquent, désigne un certain nombre de fois l'unité de longueur, deviendra mx, afin de correspondre à la même grandeur ab; la valeur t du temps et la valeur v de la température ne seront point changées; il n'en sera pas de même des éléments spécifiques h, k, c : le premier h deviendra $\frac{h}{m^2}$; car il exprime la quantité de chaleur qui sort, pendant l'unité de temps, de l'unité de surface à la température t. Si l'on examine avec attention la nature du coefficient k tel que nous l'avons défini dans les articles 68 et 135, on reconnaîtra qu'il devient $\frac{k}{m}$; car le flux de chaleur est en raison directe de l'étendue de la surface et en raison inverse de la distance des deux plans infinis (art. 72). Quant au coefficient c qui représente le produit CD, il dépend aussi de l'unité de longueur et devient $\frac{c}{m^3}$; donc l'équation (E) ne doit subir aucun changement si l'on écrit, au lieu de x, xm, et en même temps $\frac{K}{m}, \frac{h}{m^2}, \frac{c}{m^3}$ au lieu de K, h, c; le nombre m disparaîtra de lui-même après ces substitutions : ainsi la dimension de x par rapport à l'unité de longueur est 1; celle de K est -1, celle de h est -2, et celle de c est -3. Si l'on attribue à chaque quantité son *exposant de dimension*, l'équation sera homogène, parce que chaque terme aura le même exposant total. Les nombres tels que s, qui représenteraient des surfaces ou des solides, ont la

---

(1) Dans les formules de Fourier

x	représente	une longueur.
t	—	un temps.
v	—	la température.
c	—	la capacité calorifique de l'unité de volume.
h	—	le coefficient de conductibilité extérieur.
k	—	le coefficient de conductibilité intérieur

P.

dimension 2 dans le premier cas, et la dimension 3 dans le second. Les angles, les sinus et autres fonctions trigonométriques, les logarithmes ou exposants de puissance sont, d'après les principes du calcul, des nombres *absolus* qui ne changent point avec l'unité de longueur; on doit donc trouver leur dimension égale à 0, qui est celle de tous les nombres abstraits.

» Si l'unité de temps, qui était d'abord 1, devient $\frac{1}{n}$, le nombre t sera nt et les nombres x et v ne changeront point. Les coefficients K, h, c seront $\frac{K}{n}\frac{h}{n}$ c. Ainsi, les dimensions de x, t, v par rapport à l'unité de temps sont 0, 1, 0 et celles de K, h, c sont -1, -1, 0.

» Si l'unité de température était changée, en sorte que la température 1 devînt celle qui répond à un autre effet que l'ébullition de l'eau, et si cet effet exigeait une température moindre, qui fût à celle de l'eau bouillante dans le rapport de 1 au nombre p, v deviendrait vp, x et t conserveraient leurs valeurs et les coefficients K, h, c seraient $\frac{K}{p}$, $\frac{h}{p}$, $\frac{c}{p}$.

» Le tableau suivant représente les dimensions des trois indéterminées et des trois constantes, par rapport à chaque sorte d'unité :

		LONGUEUR	DURÉE	TEMPÉRATURE
Exposant de dimension de	x	1	0	0
— —	t	0	1	0
— —	v	0	0	1
La conductibilité spécifique	k	-1	-1	-1
La conductibilité de la surface	h	-2	-1	-1
La capacité de chaleur	c	-3	0	-1

162

» Si l'on conservait les coefficients C et D [1] dont le produit a été représenté par c, on aurait encore à considérer l'unité de poids et l'on trouverait que l'exposant de dimension, par rapport à l'unité de longueur, est -3 pour la densité D et 0 pour C.

» En appliquant la règle précédente aux différentes équations et à leurs transformées, on trouvera qu'elles sont homogènes par rapport à chaque sorte d'unité et que la dimension de toute quantité angulaire ou exponentielle est nulle. Si cela n'avait point lieu, on aurait commis quelque erreur dans le calcul ou l'on y aurait introduit des expressions abrégées.

(1) Chaleur spécifique et poids spécifique

P.

NOTE V

Sur l'identité des dimensions d'une vitesse et d'une résistance dans le système électromagnétique.

La liaison existant entre l'unité absolue de résistance et l'unité absolue de vitesse a été signalée très nettement par Weber dans l'exposé du principe de sa méthode de mesure des résistances électriques, dont voici les traits principaux (1) :

« Faisons avec le fil conducteur dont on cherche la résistance deux cercles A et B réunis par deux portions du fil rectilignes et parallèles à la ligne des centres, le circuit étant fermé et la ligne des centres étant parallèle à la méridienne magnétique. Désignons par T la force magnétique terrestre mesurée en valeur absolue et par r les rayons des deux cercles égaux A et B. Projetons le cercle A sur un plan perpendiculaire à la méridienne magnétique. Sa projection a une surface nulle. Supposons que la flexibilité du fil réunissant les deux cercles permette de tourner le cercle A et de le rendre normal à la direction AB. La surface de sa projection deviendra πr^2. Si cette rotation s'exécute dans un temps très court et de façon que la surface de la projection croisse uniformément de 0 à πr^2 pendant le temps s, une force électromotrice due à l'action magnétique terrestre T sur le circuit A prend naissance, et, relativement à l'unité précédemment définie, cette force électromotrice a pour expression eE, e ayant la valeur

$$e = \frac{\pi r^2}{s} \text{T}.$$

» Cette force électromotrice produit pendant le temps s, dans tout le circuit, un courant dont l'intensité rapportée à l'unité définie au paragraphe précédent est

$$i\text{J}.$$

Ce courant, passant dans le cercle B, agit sur une aiguille aimantée placée à grande distance en C et ayant son axe de rotation perpendiculaire à la direction du magnétisme terrestre et situé dans le plan

---

(1) Weber, *Messungen Galvanischer Leitungswiderstände nach einem absoluten Maasse* (*Ann. der Phys. und Chem.*, t. LXXXII, 1851, p. 337).

du cercle. D'après les lois de l'électromagnétisme, le moment de rotation de l'aiguille C sous l'action du courant B est égal à celui qui serait dû à un aimant perpendiculaire à B en son centre et de moment magnétique M exprimé en valeur absolue par

$$M = \pi r^2 i.$$

» Le moment magnétique de l'aiguille C étant exprimé en valeur absolue par m, la distance de B à C étant R et l'angle dont l'axe de l'aiguille est écarté du méridien magnétique étant φ, le moment de rotation dû à l'action d'un aimant M sur l'aiguille est, en vertu des lois du magnétisme :

$$\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{R}^3}\cos\varphi = \frac{\pi r^2}{\mathrm{R}^3}\, im\cos\varphi.$$

Si K représente le moment d'inertie de l'aiguille, l'accélération du mouvement est

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} = \frac{\pi r^2}{\mathrm{R}^3}\,\frac{im}{\mathrm{K}}\cos\varphi,$$

et par suite, si au début l'aiguille était au repos, la vitesse du mouvement à la fin du temps très court s est

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\pi r^2}{\mathrm{R}^3}\,\frac{im}{\mathrm{K}}\, s.$$

» L'élongation maxima α de l'aiguille peut être déterminée par une observation directe, et on peut la calculer en multipliant par $\frac{t}{\pi}$ l'expression de la vitesse, t étant la durée de l'oscillation :

$$\alpha = \frac{r^2}{\mathrm{R}^3}\,\frac{im}{\mathrm{K}}\, st.$$

La durée de t se déduit de l'expression connue

$$m\mathrm{T} = \frac{\pi^2\mathrm{K}}{t^2},$$

d'où

$$\frac{mt}{\mathrm{K}} = \frac{\pi^2}{t.\mathrm{T}}$$

et

$$\alpha = \frac{\pi^2 r^2}{\mathrm{R}^3}\,\frac{i.s}{t.\mathrm{T}}.$$

α étant déterminé par l'observation, on en déduit

$$i = \frac{R^3}{\pi^2 r^2} \frac{t}{s} T\alpha.$$

» Il faudrait, en outre, calculer l'action du courant qui circule dans le cercle A (courant qui est le même qu'en B); mais pour simplifier on peut admettre que la distance AC soit assez grande pour que l'action de A soit négligeable par rapport à celle de B; alors l'élongation observée a bien la valeur α.

» Ainsi, la force électromotrice dont l'expression en valeur absolue est eE et pour laquelle on a trouvé

$$e = \frac{\pi r^2}{s} T$$

a produit dans un circuit fermé dont il s'agit de mesurer la résistance un courant dont l'intensité exprimée en valeur absolue est iJ et pour laquelle on a trouvé

$$i = \frac{R^3}{\pi^2 r^2} \frac{t}{s} T\alpha.$$

» La résistance du circuit exprimée en fonction de l'unité définie au paragraphe précédent a pour expression wW, w ayant la valeur $\frac{e}{i}$ ou

$$w = \frac{\pi^3 r^4}{R^3 t \alpha} = \pi^3 \left(\frac{r}{R}\right)^3 \frac{r}{t} \frac{1}{\alpha}.$$

» La détermination d'une résistance électrique en valeur absolue dépend ainsi des quatre quantités r, R, t, α. Il faut donc évaluer : 1° l'élongation α en fonction du rayon; 2° le rapport $\frac{R}{r}$ du rayon des cercles à la distance BC; 3° la vitesse $\frac{r}{t}$ que devrait avoir un mobile pour parcourir le rayon des cercles A ou B pendant une oscillation de l'aiguille.

» On voit ainsi de nouveau que l'*unité de vitesse* est la seule qui soit requise pour la détermination d'une résistance électrique en valeur absolue. »

NOTE VI

Dans les mémoires scientifiques un peu anciens, les considérations relatives à l'influence du choix des unités sur les résultats fournis par l'application des formules sont souvent un peu longues et partant un peu pénibles à suivre. Parvenu au chapitre VIII (livre III) du présent ouvrage, le lecteur n'éprouvera aucune difficulté à les traduire dans la langue concise et claire des formules de dimensions.

En voici deux exemples, empruntés l'un à Gauss, l'autre à Weber, qui, par leur importance historique, ainsi que par leur intérêt propre, méritent de figurer ici à titre d'exercices.

I

Influence du choix des unités sur la valeur numérique de l'intensité du champ magnétique terrestre en un lieu.

« Dum intensitas magnetismi terrestris T per *numerum k* exprimitur, hinc subest unitas certa V, puta vis cum illa homogenea, cujus nexus cum aliis unitatibus immediate datis in praecedentibus quidem continetur, attamen modo aliquantulum complicatiori : operae itaque pretium erit, hunc nexum hic denuo producere, ut quam mutationem patiatur numerus k, si loco unitatem fundamentalium ab aliis proficiscamur, elementari claritate ob oculos ponatur.

» Ad stabiliendam unitatem V proficisci oportuit ab unitate magnetismi liberi M atque unitate distantiae R, statuimusque V aequalem vi ipsius M in distantia R.

» Pro unitate M adoptavimus eam quantitatem fluidi magnetici, quae in quantitatem aequalem M in distantia R collocatam agens producit vim motricem (aut si mavis pressionem) aequalem ei W, quae pro unitate accipitur, i. e. aequalem vi, quam exercet vix acceleratrix A pro unitate accepta in massam P pro unitate acceptam.

» Ad stabiliendam unitatem A duplex via patet : scilicet vel depromi potest a vi simili immediate data, e. g. a gravitate in loco observationis, vel ab ipsius effectu in corporibus movendis. In modo posteriori, quem in calculis nostris secuti sumus, duae novae unitates requiruntur, puta unitas temporis S atque unitas celeritatis C, ut pro unitate A accipiatur vix acceleratrix ea quae per tempus S agens producit velocitatem C : denique pro hac ipsa accipitur ea quae motui uniformi per spatium R inter tempus S respondet.

» Ita patet, unitatem V a tribus unitatibus vel R P A vel R, P, S pendere.

» Supponamus jam, loco unitatum V, R, M, W, A, P, C, S alias accipi V', R', M', W', A', P', C', S' simili quo priores modo inter se nexas, atque utendo mensura V' magnetismum terrestrem per numerum k' exprimi, qui quomodo se habeat ad k inquirendum est.

» Statuendo

$$\begin{aligned} V &= vV', \\ R &= rR', \\ M &= mM', \\ W &= wW'', \\ A &= aA', \\ P &= pP', \\ C &= cC', \\ S &= sS', \end{aligned}$$

erunt $v\ r\ m\ w\ a\ p\ c\ s$ numeri abstracti, atque

$$kV = k'V' \text{ sive } kv = k',$$

$$v = \frac{m}{r.r},$$

$$\frac{m.m}{r.r} = w = pa,$$

$$a = \frac{c}{s},$$

$$c = \frac{r}{s},$$

e quarum equationum combinatione obtinemus

$$\text{I} \qquad k' = k\sqrt{\frac{p}{rss}}.$$

$$\text{II} \qquad k' = k\sqrt{\frac{pa}{rr}}.$$

» Quamdiu modum, quem in calculis nostris secuti sumus, retinemus, formula priori uti oportet; e. g. si loco millimetri et milligrammatis metrum et gramma pro unitatibus accipimus, erit

16.

$r = \frac{1}{1000}$, $p = \frac{1}{1000}$, adeoque $k' = k$; si lineam Parisiensem et libram Berolinensem, habebimus

$$r = \frac{1}{2,255829}, \qquad p = \frac{1}{467711,4},$$

adeoque $k' = 0,002196161\, k$, unde e. g. experimenta VIII producunt valorem $T = 0,0039131$.

» Si modum alterum sequi, atque gravitatem pro unitate virium acceleratricium adoptare malumus, statuemus pro observatorio Gottingensi $a = \frac{1}{9811,63}$, unde, quamdiu millimetrum et milligramma retinemus, numeri k per 0,01009554 multiplicandi, mutationesque illarum unitatum secundum formulam II tractandae erunt [1]. »

II

Définition de l'unité absolue de résistance électrique.

« De même qu'on n'a pas à établir d'unité fondamentale pour la vitesse quand on s'est donné les unités de longueur et de temps, de même on n'a pas à établir d'unité fondamentale pour la résistance électrique quand on a défini les unités de force électromotrice et d'intensité de courant; car on peut prendre *pour unité de résistance, la résistance d'un circuit fermé dans lequel l'unité de force électromotrice développe un courant d'intensité égale à l'unité.* Ainsi la détermination des résistances électriques repose sur une unité absolue...

» Voyons maintenant quelles sont les unités de *force électromotrice* et d'*intensité*. Ici encore nous n'avons pas besoin d'établir des unités fondamentales; nous pouvons estimer ces grandeurs en valeur absolue en nous donnant seulement les unités de *magnétisme aimant*, de *magnétisme terrestre*, de *longueur* et de *temps*.

» Nous pouvons prendre pour *unité absolue de force électromotrice la force électromotrice créée par l'unité de magnétisme terrestre dans un circuit fermé quand celui-ci tourne de façon que l'aire de sa projection sur un plan normal à la direction du magnétisme terrestre augmente ou diminue de l'unité de surface pendant l'unité de temps*. Pour *unité absolue d'intensité de courant on*

---

[1] *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata.* (Gottingae, sumtibus Dieterichianis, 1833. — Art. 26, pag. 42.)

peut prendre l'intensité d'un courant circonscrivant l'unité de surface et dont l'action extérieure calculée d'après les lois de l'électromagnétisme est égale à celle d'un barreau aimanté qui contiendrait l'unité de magnétisme d'aimant. Quant aux unités absolues de *magnétisme d'aimant* et de *magnétisme terrestre,* elles sont connues par le travail de Gauss : *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata.* Gottingae, 1833. (*Ann.*, Bd XXVII, S. 241 und 591).

» De ce qui précède, il ressort évidemment que les mesures de résistances électriques peuvent être obtenues en valeur absolue si l'on se donne seulement trois grandeurs fondamentales : celles de *longueur,* de *temps* et de *masse,* car les valeurs absolues récemment obtenues par Gauss du magnétisme d'aimant et du magnétisme terrestre ne dépendent que de ces trois grandeurs fondamentales. Un examen plus approfondi montre que, de ces trois grandeurs, celle de masse n'entre pas en considération ; on peut le voir à l'inspection des relations simples suivantes établies pour la mesure absolue des diverses grandeurs considérées tout à l'heure.

» Nous avons comme unités fondamentales l'unité de longueur R et celle de temps S ; comme unités absolues, l'unité de surface F, celles de magnétisme d'aimant et de magnétisme terrestre M et T, de force électromotrice E, d'intensité de courant J et de résistance W.

» 1° Si wW représente la résistance d'un circuit fermé quelconque, eE la force électromotrice agissant dans ce circuit, iJ l'intensité du courant produit par cette force électromotrice, on a entre les trois nombres w, e, i la relation

$$w = \frac{e}{i}.$$

Donc si on a obtenu les valeurs numériques e et i, on calcule immédiatement w sans avoir à faire de mesure particulière.

» 2° Soient eE la force électromotrice agissant dans un circuit fermé quelconque, fF l'aire circonscrite par ce circuit, tT le magnétisme terrestre dont dépend cette force électromotrice et sS le temps dans lequel le plan du circuit a tourné d'une position parallèle à la direction du magnétisme terrestre à une position normale à cette direction, de telle façon que l'aire limitée par sa projection sur un plan perpendiculaire à la direction du magnétisme terrestre croisse proportionnellement au temps, on a

$$e = \frac{ft}{s},$$

et e se déduit sans mesure particulière des valeurs numériques déterminées pour f, t, s.

» 3° Soient iJ l'intensité d'un courant dans un circuit plan quelconque, fF la surface de ce circuit et mM le magnétisme d'un aimant qui, mis à la place du circuit, son axe étant normal au plan du circuit, produirait, d'après les lois de l'électromagnétisme, les mêmes effets que le courant; on a

$$i = \frac{m}{f}$$

et i se déduit des mesures de m et de f.

» Ces trois relations donnent

$$w = \frac{e}{i} = \frac{f^2 t}{m s},$$

et w se déduit immédiatement des mesures f, t, m, s.

» La valeur numérique de f s'obtient en mesurant la surface circonscrite par le conducteur; celle de s, en mesurant le temps; celles de m et de t ont été trouvées, d'après l'indication de Gauss dans l'ouvrage précité, par une mesure de moment magnétique et de magnétisme d'aimant.

» L'invariabilité de l'unité de résistance électrique peut par suite être garantie aussi longtemps que ces quatre grandeurs : surface, temps, unités de magnétisme d'aimant et de magnétisme terrestre, demeureront invariables.

» Désignons par tT le magnétisme terrestre dont dépend la force électromotrice qui agit dans un circuit fermé dont la résistance a été mesurée, et par m'M le moment magnétique d'un barreau aimanté dont l'axe est parallèle au méridien magnétique, tandis que la droite, menée de son milieu au milieu de la surface du circuit, est normale à ce méridien; ce barreau étant tel que d'après les lois magnétiques il exercerait à la grande distance où se trouve le circuit une action exactement égale à celle que produirait le magnétisme terrestre représenté par tT; enfin désignons par rR la distance du milieu du barreau au milieu de la surface du circuit, on a, d'après *Intensitas,*

$$t = \frac{m'}{r^3}.$$

Portons cette valeur de t dans l'expression de w,

$$w = \frac{f^2}{r^3} \frac{m'}{m} \frac{1}{s}.$$

Désignons par $r'R$ le côté d'un carré dont la surface égale celle du circuit, on a la relation :

$$f = r'^2,$$

d'où

$$w = \frac{r'^3}{r^3} \cdot \frac{m'}{m} \frac{r'}{s}.$$

» Un changement dans les unités données n'a évidemment aucune influence sur la valeur du facteur $\left(\frac{r'^3}{r^3} \frac{m'}{m}\right)$, tandis qu'un changement des unités de longueur ou de temps influe sur la valeur de $\frac{r'}{s}$ et par suite sur celle de w, à moins que ces deux unités ne varient proportionnellement. La valeur de w est donc indépendante de tout changement d'unités qui n'affecte pas la valeur des vitesses. Mais, si par un changement d'unité la valeur de l'unité de vitesse devient n fois plus grande ou plus petite, w devient n fois plus petit ou plus grand parce que la résistance est mesurée avec une unité n fois plus grande ou plus petite. L'invariabilité de l'unité de résistance ne dépend donc que de l'invariabilité de l'unité de vitesse : toutes deux varient dans le même rapport (1). »

---

(1) Weber, *Messungen galvanischer Leitungswiderstände nach einem absoluten Maasse* (*Annal. der Phys. und Chem.*, Bd LXXXII, 1851, p. 337).

BIBLIOGRAPHIE

1873. J. Clerk Maxwell. — *A treatise on Electricity and Magnetism*, passim.

1873. — *Reports of the committee on electrical standard's appointed by the Brit. Assoc. for the advancement of science*, reprinted by permission of the councill. London, E. et F.-N. Spon.

1881. Blavier. — *Des grandeurs électriques et de leur mesure en unités absolues*. Paris, Dunod.

1881. *Congrès international des électriciens*. — *Comptes rendus des travaux*. Paris, Masson, 1882.

1882. Clausius. — *Ueber die verschiedenen Maassystem zur Messung electrischer und magnetischer Grossen*. — *Separat Absdruck aus den Verhanderungen der naturhist. Vereins der preusser Rheinland und Wesfalens*. Band XXXIX.

Des différents systèmes de mesure des grandeurs électriques et magnétiques (*Annales de chimie et de phys.*, 5e série, t. XXVIII, p. 81.—*Journal de phys.*, 2e série, t. I, 1882, p. 273).

1882. J.-D. Everett. — *On the dimensions of a magnetic pole in the electromagnetic system of units* (*Phil. Mag.*, mai et juin 1882).

1882. J.-J. Thomson. — *On the dimensions of a Magnetic pole in the electrostatic system of units* (*Phil. Mag.*, 5e série, t. XIII, p. 427, juin 1882).

Sur les dimensions d'un pôle magnétique dans le systèmе d'unités électrostatiques (*Journ. de phys.*, 2e série, t. I, 1882, p. 318).

1882. Maurice Lévy. — *Sur les unités électriques*. Conférence faite à la Société d'encouragement. Paris, Gauthier-Villars, 1882.

1882. J. Bertrand. — *Sur les unités électriques* (*Journal des Savants*, nov. 1882).

1882. Helmholtz. — *Ueber absolute Maassystem fur electrische und magnetisch. Grossen* (*Wied. Ann.*, N. F. XVII, 1882, 42).

1883. W. Thomson. — *Electrical units of measurement* (A Lecture delivered at the Institution of civil Engineers, may 3 1883).

1883. Mercadier. — *Sur les unités mécaniques et électriques* (*Lumière électrique*, t. VIII, 1883, pp. 6, 44, 70, 114).

1883. Vaschy. — *Sur les divers systèmes d'unités électriques* (*Lumière électrique*, t. VIII, 1883, pp. 46, 116, 182).

1883. MERCADIER et VASHY. — *Sur les dimensions des grandeurs électriques et magnétiques* (*Journ. de phys.*, 2e série, t. II, 1883, p. 245).

1883. J. BORGMANN. — *Sur les dimensions des grandeurs électriques et magnétiques* (*Journ. de phys.*, 2e série, t. II, 1883, p. 551).

1884. Y. MACHAI. — *Mémoires sur les dimensions des quantités électriques et le choix d'un système absolu d'unités dérivées* (*Ann. de chimie et de phys.*, 6e série, t. I, 1884, p. 412).

1884. SZARVADY. — *Sur les systèmes absolus d'unités* (*Lumière électrique*, t. XIV, 1884, pp. 321, 375, 413).

1885. H. HERTZ. — *Ueber die Dimensionen der magnetischen Pols in verschiedenen Maassystemen* (*Wied. Ann.*, t. XXIV, 1885, p. 114. — *Journ. de phys.*, 2e série, t. IV, 1885, p. 325).

1885. J. BOULANGER. — *Des systèmes d'unités dits absolus* (*Lumière électrique*, t. XXVI, 1885, p. 5).

1887. RAVEROT. — *Essai sur les dimensions des grandeurs physiques* (*Lumière électrique*, t. XXIII, 1887, p. 101).

1889. BERTRAND. — *Théorie mathématique de l'électricité.* Paris, Gauthier-Villars, chap. XIII.

1889. A.-W. RUCKER. — *On the suppressed dimensions of physical quantities* (*Phil. Mag.*, 5e série, t. XXVII, 1889, p. 104).

1890. RAVEROT. — *Les dimensions des grandeurs physiques dans les divers systèmes absolus de mesures* (*Lumière électrique*, 28 juin 1890, t. XXXVI, p. 601).

INDEX

(Les livres et les chapitres sont désignés en chiffres romains, les pages en chiffres arabes.)

Bordeaux. — Impr. G. GOUNOUILHOU, rue Guiraude, 11.