ANNALI
DI
MATEMATICA
PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Guido Fubini in Torino | **Salvatore Pincherle** in Bologna
Tullio Levi-Civita in Roma | **Francesco Severi** in Roma

SERIE QUARTA - TOMO VII
(LXIV DELLA RACCOLTA)

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
MCMXXX

Bologna, Cooperativa Tipografica Azzoguidi, 1930

La risoluzione apiristica delle congruenze cubiche.

Memoria II di GIOVANNI SANSONE (a Firenze).

Sunto. - *L'A. in una precedente Memoria degli* « Annali » *ha dimostrato che alle congruenze cubiche può assegnarsi la forma normale* $x^3 + ax + a \equiv 0$ (*mod.* p) *con* p *primo, ed ha dato una formula apiristica di risoluzione nel caso che le tre radici della congruenza non abbiano lo stesso carattere quadratico modulo* p. *È ripresa ora la questione e l'A. dimostra che la congruenza proposta può sempre trasformarsi linearmente in un'altra le cui radici non hanno lo stesso carattere quadratico modulo* p. *Nel caso* $p = 6h + 7$, *e nell'ipotesi che le tre radici della congruenza non abbiano lo stesso carattere cubico modulo* p, *l'A. trova una nuova formula risolutiva della congruenza. Segue infine l'estensione del procedimento di* NEWTON *per la risoluzione approssimata delle equazioni alla risoluzione delle congruenze modulo* p^n *con* $n \geq 2$.

PREFAZIONE

Questa Memoria fa seguito ad un'altra pubblicata con lo stesso titolo nel Tomo VI (4) di questi « Annali » (1), e a due note pubblicate nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » (2).

Abbiamo visto che data la congruenza

$$(1) \qquad x^3 + ax + a \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

con a intero, p primo, $p > 3$, supposto che essa abbia tre radici incongrue modulo p, sia cioè

$$D_{p-2}(a) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

se le sue radici *non* hanno lo stesso carattere quadratico modulo p, ossia

(1) G. SANSONE, *La risoluzione delle congruenze cubiche.* Memoria I. « Annali di Matematica pura e applicata »; t. VI (4^a), p. 127.

(2) G. SANSONE: *a)* Determinazione del numero delle congruenze $x^3 + ax + a \equiv 0$ (mod. p) aventi tre radici con lo stesso carattere quadratico (mod. p). [« Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », 1928, fasc. 6-7, 2° sem.]. *b)* L'equazione cui soddisfa il coefficiente a della congruenza $a^3ax^3 + ax + a \equiv 0$ (mod. p) con p primo, $p > 3$, perchè essa abbia tre radici con lo stesso carattere quadratico (mod. p), [« Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », 1928, fasc. 7-8, 2° sem., p. 280].

se a *non* verifica la congruenza

$$D_{\frac{p-3}{2}}(a) + \frac{3}{2}(-1)^{\frac{p-3}{2}} D_{\frac{p-5}{2}}(a) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p), \tag{2}$$

la formula

$$x \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} D_{\frac{p-3}{2}}(a)/D_{\frac{p-5}{2}}(a) \qquad (\text{mod. } p), \tag{I}$$

fornisce la radice della (1) che non ha modulo p il carattere quadratico delle altre due. In ogni caso i polinomi $D_h(a)$ qualunque sia l'indice h sono definiti, secondo che l'indice sia pari o dispari dalle formule

$$D_{2k}(a) = \binom{k}{0}a^k - \binom{k-1}{2}a^{k-1} + \binom{k-2}{4}a^{k-2} - \\ - \binom{k-3}{6}a^{k-3} + \ldots + (-1)^r\binom{k-r}{2r}a^{k-r},$$

$$D_{2k+1}(a) = -\binom{k}{1}a^k + \binom{k-1}{3}a^{k-1} - \binom{k-2}{5}a^{k-2} + \\ + \binom{k-3}{7}a^{k-3} - \ldots + (-1)^{r+1}\binom{2r+1}{k-r}a^{k-r},$$

avendosi rispettivamente nei due casi $r = \left[\frac{k}{3}\right]$, $r = \left[\frac{k-1}{3}\right]$.

Abbiamo quindi che se a verifica la (2) non è possibile applicare la formula (I). Nel § 1 di questa memoria indichiamo la forma da assegnare ad una trasformazione lineare, perchè la (1) si muti in un'altra congruenza dello stesso tipo le cui radici non abbiano il medesimo carattere quadratico modulo p, e per le quali è possibile quindi applicare la (I).

Prendiamo poi a studiare particolarmente il caso $p = 6h + 7$ e sempre nella ipotesi che la (1) abbia tre radici dimostriamo che se per α prendiamo una radice della congruenza [possibile]

$$a - 9\alpha - 3\alpha^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

la trasformazione lineare

$$x = (\alpha y + 1)/\left(y + \frac{9\alpha - 2a}{a(2\alpha + 3)}\right) \tag{3}$$

muta la (1) nella congruenza binomia [risolubile con la formula del CIPOLLA]

$$y^3 + \frac{(2y+4a)(2a-9\alpha)}{a^2(2\alpha+3)^3} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p). \tag{3'}$$

Sempre nel caso $p = 6h + 7$ e nelle ipotesi:

1°) che le tre radici della (1) non abbiano lo stesso carattere cubico, cioè per a valgano le relazioni

$$D_{\frac{p-4}{3}}(a) \not\equiv 0, \quad D_{\frac{p-7}{3}}(a) \not\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

2°) che per il numero a si abbia

$$3D_{\frac{p-10}{3}}(a) \not\equiv 2(-1)^{\frac{p+2}{3}} D_{\frac{p-7}{3}}(a) \qquad (\text{mod. } p),$$

allora posto

$$\alpha \equiv (-1)^{\frac{p+2}{3}} D_{\frac{p-4}{3}}(a) / D_{\frac{p-7}{3}}(a) \qquad (\text{mod. } p) \tag{4}$$

questo numero α è una radice della congruenza (1).

Se abbiamo invece:

$$D_{\frac{p-4}{3}}(a) \not\equiv 0, \quad D_{\frac{p-7}{3}}(a) \not\equiv 0, \quad 3D_{\frac{p-10}{3}}(a) \equiv 2(\quad 1)^{\frac{p+2}{3}} D_{\frac{p-7}{3}}(a) \qquad (\text{mod } p)$$

allora se nella (3) poniamo per α il valore fornito dalla (4), essa si trasforma nella congruenza binomia (3').

Diamo ancora la risoluzione delle congruenze cubiche rispetto ai moduli p^n; qui abbiamo fatto notare esplicitamente come data una radice semplice α della congruenza $f(x) \equiv 0$ (mod. p), l'ordinario metodo di Newton per la risoluzione numerica approssimata delle equazioni algebriche, applicato alla radice α successivamente 1, 2, 3,... volte permette di costruire una radice della congruenza $f(x) \equiv 0$ (mod. p) rispettivamente per i moduli p^2, p^{2^2}, p^{2^3},...

Abbiamo infine fatto seguire al lavoro due *Tavole numeriche* per la risoluzione delle congruenze cubiche col modulo p primo inferiore a 100, le quali ammettono tre radici oppure una sola radice.

§ 1. Trasformazioni lineari delle congruenze $x^3 + ax + a \equiv 0$ (mod. p). Riduzione alla forma binomia nel caso $p = 6h + 7$. Trasformazione lineare delle congruenze in altre con le tre radici aventi diverso carattere quadratico modulo p.

1. Data la congruenza

$$x^3 + ax + a \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p), \tag{1}$$

$$a \not\equiv 0, \quad 27 + 4a \not\equiv 0$$

ci è utile determinare quelle sostituzioni lineari a coefficienti interi

$$(2) \qquad x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \not\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

che trasformano la (1) in un' altra della forma

$$(1') \qquad y^3 + Ay + A \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

e cioè allo scopo di ottenere delle congruenze per le quali sia lecito applicare la formula (I) della prefazione.

La (1) per effetto della (2) diventa

$$(3) \qquad \begin{aligned} &(\alpha^3 + a\alpha\gamma^2 + a\gamma^3)y^3 + (3\alpha^2\beta + 2a\alpha\gamma\delta + a\beta\gamma^2 + 3a\gamma^2\delta)y^2 + \\ &+ (3\alpha\beta^2 + a\alpha\delta^2 + 2a\beta\gamma\delta + 3a\gamma\delta^2)y + (\beta^3 + a\beta\delta^2 + a\delta^3) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p) \end{aligned}$$

e per identificare questa congruenza con la (1′) occorre che si abbia

$$(4) \qquad 3\alpha^2\beta + 2a\alpha\gamma\delta + a\beta\gamma^2 + 3a\gamma^2\delta \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

$$(5) \qquad 3\alpha\beta^2 + a\alpha\delta^2 + 2a\beta\gamma\delta + 3a\gamma\delta^2 \equiv \beta^3 + a\beta\delta^2 + a\delta^3 \qquad (\text{mod. } p)$$

$$(5') \qquad \alpha^3 + a\alpha\gamma^2 + a\gamma^3 \not\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Quest' ultima la supponiamo senz' altro verificata, in caso opposto si conoscerebbe già una radice della (1).

Notiamo quello che accade delle (4) e (5) quando si suppone $\beta \equiv 0$ (mod. p). Esse diventano rispettivamente:

$$a\gamma\delta(2\alpha + 3\gamma) \equiv 0, \quad a\delta^2(\alpha + 3\gamma - \delta) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p);$$

e si ha poi $a \not\equiv 0$ (mod. p), $\alpha\delta \not\equiv 0$ (mod. p), e poichè non può essere $\gamma \equiv 0$, perchè in questo caso si avrebbe $\alpha = \delta$ e la (2) si riduce all' identità, dalle due relazioni precedenti si ricava:

$$2\alpha + 3\gamma \equiv 0 \quad \alpha + 3\gamma \equiv \delta \qquad (\text{mod. } p),$$

ovvero

$$2\alpha \equiv -3\gamma \quad 2\delta \equiv 3\gamma \qquad (\text{mod. } p).$$

La sostituzione (2) in queste ipotesi diventa:

$$(6) \qquad x = \frac{-3y}{2y + 3},$$

e *con questa sostituzione la* (1) *diventa*:

$$y^3 - \frac{27a}{27 + 4a}\, y - \frac{27a}{27 + 4a} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Possiamo subito verificare che la (6) è l'unica sostituzione indipendente da a che trasforma la (1) in un'altra congruenza dello stesso tipo.

In questa ipotesi infatti la (4) e la (5) debbono risultare identicamente soddisfatte rispetto ad a; dalla (4) segue allora $3\alpha^2\beta \equiv 0$ (mod. p) e perciò se $\alpha \equiv 0$ la (4) dà $\beta \equiv -3\delta$ e la (5) identicamente $a(3\gamma - 2\delta) \equiv 27\delta$ ossia $\delta \equiv 0$, $\gamma \equiv 0$ e ciò è impossibile; l'ipotesi $\beta \equiv 0$ porta invece alla sostituzione (6).

Concludendo: *l'unica sostituzione lineare che trasforma qualunque congruenza* (1) *in un'altra dello stesso tipo, è la sostituzione* (6) [che è a periodo 2].

Se ora supponiamo $\beta \not\equiv 0$, nella (2) possiamo supporre senz'altro $\beta = 1$, cioè della forma

$$x = \frac{\alpha y + 1}{\gamma y + \delta}. \tag{2'}$$

È subito visto che esiste una di queste sostituzioni con $\alpha \equiv 0$ che produce sulla congruenza (1) l'effetto voluto. Difatti per $\alpha = 0$, $\beta = 1$ la (4) dà $\delta \equiv -\frac{1}{3}$ e la (5) $\gamma \equiv -\frac{27+2a}{9a}$, e abbiamo allora: *la sostituzione*

$$x = \frac{-9a}{(27+2a)y + 3a} \tag{7}$$

trasforma la congruenza (1) *nella congruenza*:

$$y^3 - \frac{27a^2}{(27+2a)^2}\, y - \frac{27a^2}{(27+2a)^2} \equiv 0 \quad (\text{mod. } p). \tag{7'}$$

Tale trasformazione non è lecita se $27 + 2a \equiv 0$, cioè $a \equiv -\frac{27}{2}$, cioè quando la (1) ha la forma

$$x^3 - \frac{27}{2}x - \frac{27}{2} \equiv 0 \quad (\text{mod. } p) \tag{8}$$

ovvero l'altra

$$(x+3)\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{27}{4}\right] \equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

Si ha da qui che *se è* $\left(\frac{3}{p}\right) = 1$, *cioè* $p = 12k \pm 1$ *la* (8) *ha tre radici incongrue, se è invece* $p = 12k \pm 5$ *la congruenza* (8) *ammette soltanto la radice* -3.

Osserviamo ancora che nella sostituzione (2′) dobbiamo supporre $\gamma \not\equiv 0$, perchè per $\gamma \equiv 0$ la (4) dà $3\alpha^2 \equiv 0$ ossia $\alpha \equiv 0$ e ciò non può essere, la (2′) è quindi il prodotto delle due sostituzioni:

$$x = \frac{\alpha\gamma^{-1}t + 1}{t + \delta}, \quad t = \gamma y.$$

Esaminiamo quindi il caso in cui una sostituzione lineare della forma:

(9) $$x = \frac{\alpha y + 1}{y + \delta}$$

applicata alla congruenza (1) elimina nella (3) il termine di secondo grado in y.

La (4) per $\beta = \gamma = 1$ dà $3\alpha^2 + a + a\delta(2\alpha + 3) \equiv 0$, e siccome non può ossere $\alpha \equiv -\frac{3}{2}$ perchè in questo caso si avrebbe anche $3\alpha^2 + a = \frac{27 + 4a}{4} \equiv 0$ cioè la (1) avrebbe radici multiple, caso da noi escluso, ne segue:

(9′) $$\delta = -\frac{3\alpha^2 + a}{a(2\alpha + 3)}.$$

Quando nella sostituzione (9) si dà a δ l'espressione (9′), la (1) si trasforma nella congruenza:

(10) $$y^3 + \frac{3(3\alpha^2 + 9\alpha - a)}{a(2\alpha + 3)^2}\, y + \frac{-27\alpha^3 + 18a\alpha^2 + 27a\alpha + 27a + 2a^2}{a^2(2\alpha + 3)^3} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Notiamo che il determinante della (9) è $\alpha\delta - 1 = -\frac{3(\alpha^3 + a\alpha + a)}{a(2\alpha + 3)}$, escluderemo perciò per α il valore $-\frac{3}{2}$ e le eventuali radici della congruenza (1).

2. La (10) assume la forma binomia quando α soddisfa la congruenza

(11) $$3\alpha^2 + 9\alpha - a \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ora, supposto che la (1) abbia tre radici incongrue, abbiamo visto che è $\left(\frac{-27 - 4a}{p}\right) = 1$, e siccome per il discriminante della congruenza (11) abbiamo:

$$\left(\frac{81 + 12a}{p}\right) = \left(\frac{-3}{p}\right)\left(\frac{-27 - 4a}{p}\right) = \left(\frac{-3}{p}\right)$$

segue che esiste una trasformazione lineare (9) che trasforma la (1) in una congruenza binomia allora soltanto che sia $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$ cioè p della forma $6h + 7$.

Abbiamo allora il teorema: *Se la congruenza*

$$(1) \qquad x^3 + ax + a \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

ammette tre radici incongrue, e il modulo p *ha la forma* 6h + 7, *la sostituzione lineare*

$$x = \frac{\alpha y + 1}{y + \frac{9\alpha - 2a}{a(2\alpha + 3)}},$$

ove α *è una radice della congruenza di secondo grado*:

$$(11) \qquad 3\alpha^2 + 9\alpha - a \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

trasforma la (1) *nella congruenza binomia*:

$$(12) \qquad y^3 + \frac{(27 + 4a)(2a - 9\alpha)}{a^2(2\alpha + 3)^3} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

risolubile con le formule apiristiche del prof. Cipolla ([1]).

Siccome la (12) deve avere tre radici incongrue è evidente che non può avere nullo il termine noto; possiamo verificare del resto direttamente questo fatto. Il termine noto della (12) è nullo per $\alpha = \frac{2}{3} a$, e perciò per la (11) per $4a + 27 \equiv 0$ (mod. p), e ciò non è.

3. Supposto nella (10) il secondo coefficiente non nullo, essa con la sostituzione

$$y = \frac{-27\alpha^3 + 18a\alpha^2 + 27a\alpha + 27a + 2a^2}{3a(2\alpha + 3)(3\alpha^2 + 9\alpha - a)} t$$

si trasforma in una congruenza della forma

$$t^3 + At + A \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

con

$$(14') \qquad A = 27a \frac{(3\alpha^2 + 9\alpha - a)^3}{(-27\alpha^3 + 18a\alpha^2 + 27a\alpha + 27a + 2a^2)^2}.$$

([1]) Cfr. M. Cipolla, « Math. Ann. », Bd. LXIII, 1906.

Combinando la sostituzione precedente con la (9) abbiamo: *la congruenza*

(1) $$x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$$

con la sostituzione lineare

(13) $$x = \begin{pmatrix} \alpha(-27\alpha^3 + 18a\alpha^2 + 27a\alpha + 27 + 2a^2); & 3a(2\alpha + 3)(3\alpha^2 + 9\alpha - a) \\ -27\alpha^3 + 18a\alpha^2 + 27a\alpha + 27 + 2a^2; & -3(3\alpha^2 + a)(3\alpha^2 + 9\alpha - a) \end{pmatrix} y$$

si trasforma nella congruenza

(14) $$y^3 + Ay + A \equiv 0 \pmod{p}$$

essendo A *dato dalla* (14').

La (13) rappresenta un'effettiva sostituzione quando per il suo determinante si ha:

$$-9(3\alpha^2 + 9\alpha - a)(\alpha^3 + a\alpha + a)(-27\alpha^3 + 18a\alpha^2 + 27a\alpha + 27a + 2a^2) \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Sempre nell'ipotesi che la (1) abbia tre radici incongrue, *i valori di* α *che dobbiamo escludere sono:*

1°) *Le tre radici della congruenza*

(15_1) $$\alpha^3 + a\alpha + a \equiv 0 \pmod{p}.$$

2°) *Le tre radici della congruenza*

(15_2) $$-27\alpha^3 + 18a\alpha^2 + 27a\alpha + 27a + 2a^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

[Questa ha tre radici incongrue perchè la (1) con la sostituzione $x = \dfrac{-9\alpha + 2a}{6\alpha + 9}$ a determinante $3(-27 - 4a) \not\equiv 0$ si trasforma appunto nella (15_2)].

3°) *Per* $p = 6h + 7$ *i due valori di* α *per i quali si ha:*

(15_3) $$3\alpha^2 + 9\alpha - a \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Osserviamo poi che le congruenze (15_1), (15_2), (15_3) non hanno radici comuni. Infatti si ha:

$$3(\alpha^3 + a\alpha + a) = (3\alpha^2 + 9\alpha - a)(\alpha - 3) + \alpha(4a + 27)$$

e siccome la (15_1) non ha la radice $\alpha \equiv 0$ ed è $4a + 27 \not\equiv 0$ segue che la (15_1) e (15_3) non hanno radici comuni.

Così pure è

$$-27\alpha^3+18a\alpha^2+27a\alpha+27a+2a^2=$$
$$=(3\alpha^2+9\alpha-a)(-9\alpha+6a+27)+(27+4a)(2a-9\alpha)$$

ed essendo $27+4a \not\equiv 0$ e non potendo avere la (15_3) la radice $\alpha=\frac{2}{9}a$ segue che la (15_1) e (15_3) non hanno radici comuni.

Infine si ha:

$$-27\alpha^3+18a\alpha^2+27a\alpha+27a+2a^2=$$
$$=-27(\alpha^3+a\alpha+a)+18a\alpha^2+54a\alpha+54a+2a^2$$
$$18a(\alpha^3+a\alpha+a)=(18a\alpha^2+54a\alpha+54a+2a^2)(\alpha-3)+2(27+4a)(2\alpha+3)$$

e siccome la (15_1) non può avere la radice $\alpha=-\frac{3}{2}$ ne segue che la (15_1) e la (15_2) non hanno radici comuni.

Se conveniamo che per $\alpha=\infty$ la (13) rappresenti l'identità, abbiamo che dei $p+1$ valori possibili per α

$$0,\ 1,\ 2, \ldots,\ p-1,\ \infty$$

dobbiamo escludere nella sostituzione (13) sei valori se $p+1=6h+6$, ed otto valori se $p+1=6h+8$, restano quindi in ogni caso $6h$ valori disponibili per α.

Vediamo quando accade che a due valori distinti di α la (13) fa corrispondere uno stesso valore A nella (14).

Siano x_1, x_2, x_3 le radici della (1) e y_1, y_2, y_3 le radici della (14); la sostituzione

$$y=\begin{pmatrix} x_1y_1(y_2-y_3)+x_2y_2(y_3-y_1)+x_3y_3(y_1-y_2); \\ x_2x_3y_1(y_2-y_3)+x_1x_3y_2(y_3-y_1)+x_1x_2y_3(y_1-y_2) \\ x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2); \\ x_2x_3(y_2-y_3)+x_1x_3(y_3-y_1)+x_1x_3(y_1-y_2) \end{pmatrix} x$$

trasforma la terna (x_1, x_2, x_3) nella terna (y_1, y_2, y_3) e quindi la (1) nella (14), e alle sei permutazioni distinte della terna y_1, y_2, y_3 corrispondono sei sostituzioni distinte e perciò 6 valori di α che trasformano la (1) nella (14).

Concludiamo che data la congruenza (1) con tre radici incongrue, esistono h sostituzioni lineari (13) distinte, l'identità inclusa, che trasformano la congruenza (1) in h congruenze distinte con tre radici incongrue.

Ritroviamo così il resultato stabilito al n° 3 della Memoria I « *esistono* h *congruenze* (1) *le quali ammettono* 3 *radici incongrue* ».

Osserviamo che in particolare esistono 6 sostituzioni lineari (13) le quali trasformano la oongruenza (1) in sè, cioè il *gruppo automorfo* della (1) è un G_6.

Quelle a periodo 3 sono le due sostituzioni:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{9 \pm \sqrt{-(4a+27)}}{-3}; & \frac{-a}{-9 \pm \sqrt{-(4a+27)}} \end{pmatrix} y,$$

i cui coefficienti si determinano risolvendo una congruenza di secondo grado, le sostituzioni a periodo 2 sono le tre:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \;, & x_i + 3 \\ -\frac{3x_i}{a}, & -1 \end{pmatrix} y, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,$$

le quali sono note soltanto quando sia risoluta la congruenza proposta.

4. Si voglia risolvere la congruenza

$$x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p} \tag{1}$$

ed essa abbia tre radici incongrue aventi lo stesso carattere quadratico modulo p, cioè a sia una radice della congruenza (II_1) o (II_2) della nostra nota *b*) citata nella prefazione. Non è possibile allora applicare per la risoluzione della (1) la formula (V′) del n. 16 della citata Memoria, ma se effettuando una sostituzione lineare (13) otteniamo un numero

$$A = 27a \frac{(3\alpha^2 + 9\alpha - a)^3}{(-27\alpha^3 + 18a\alpha^2 + 27a\alpha + 27a + 2a^2)^2} \tag{14′}$$

che non soddisfa le equazioni (II_1), (II_2) ora citate alla nuova trasformata possiamo applicare la (V′) e troveremo contemporaneamente una radice della (1).

Si presenta quindi il *problema, supposto a radice della* (VI_1) *se* $p \equiv 1 \pmod{4}$ *o della* (VI_2) *se* $p \equiv 3 \pmod{4}$, *scegliere nella* (14′) α *in guisa che nei due casi rispettivamente* A ***non*** *soddisfi la* (II_1) *o la* (II_2).

Osserviamo subito che i valori di α cui corrispondono valori di A che soddisfano le (VI) sono in numero di $6\left[\frac{h}{4}\right]$ se $p \equiv 5 \pmod{6}$ e $6\left[\frac{h+1}{4}\right]$ se $p \equiv 7 \pmod{6}$, abbiamo così che *al più dopo* $6\left[\frac{h}{4}\right]$ *o* $6\left[\frac{h+1}{4}\right]$ *prove potremo trovare un valore di* α *che risolve il problema, e perciò mentre la risolu-*

zione della congruenza (1) *richiede teoricamente* $6h+2$ *o* $6h+4$ *prove, ora dopo* $6\left[\frac{h}{4}\right]$ *o* $6\left[\frac{h+1}{4}\right]$ *prove si può risolvere la* (1) ([1]).

Le più semplici trasformazioni lineari che conviene operare sulla congruenza

(1) $$x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p},$$

con $a \not\equiv \frac{27}{2}$, sono le sostituzioni:

$$x = -\frac{3y}{2y+3}, \quad x = -\frac{9a}{(27+2a)y+3a}, \quad x = \frac{2ay+3a}{9y-a}$$

per le quali la (1) diventa rispettivamente [cfr. n. 1]

(16_1) $$y^3 - \frac{27a}{27+4a}y - \frac{27a}{27+4a} \equiv 0 \pmod{p},$$

(16_2) $$y^3 - \frac{27a^2}{(27+2a)^2}y - \frac{27a^2}{(27+2a)^2} \equiv 0 \pmod{p},$$

(16_3) $$y^3 + \frac{a^2}{27+4a}y + \frac{a^2}{27+4a} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Quando una di queste tre non abbia le sue radici con lo stesso carattere quadratico essa è risolubile con la formula (I) ed è perciò risolubile la (1).

Con questo metodo siamo riusciti a costruire la tabella I di questo lavoro nella quale sono riportate tutte le soluzioni delle congruenze (1) con tre radici incongrue e con il modulo $p < 100$.

§ 2. Relazioni di terzo grado fra i determinanti D_h. Formula risolutiva della congruenza $x^3+ax+a \equiv 0 \pmod{p}$. quando le sue tre radici non hanno lo stesso carattere cubico modulo p, e sia p della forma $6h+7$.

5. Se p è della forma $6h+7$, abbiamo visto nel n. 2 come la risoluzione della congruenza

(1) $$x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$$

([1]) Sarebbe preferibile assegnare ad α una forma esplicita in funzione di a in guisa che il valore A ricavato dalle (14') non soddisfi le (II_1), (II_2). La questione, sotto altra forma, è totalmente risolta in una Memoria in pubblicazione presso la « Reale Soc. di Sc. Fis. e Mat. » di Napoli.

si possa far dipendere dalla risoluzione di una congruenza di secondo grado e di una congruenza binomia cubica, entrambi risolubili con le formule del prof. CIPOLLA.

Senza ricorrere a questo metodo, oltre la formula risolutiva (I) applicabile nel caso già dichiarato, vogliamo stabilire un' altra formula risolutiva della (1) dipendente dal carattere cubico delle radici della (1).

Stabiliremo per questo preventivamente delle relazioni del terzo ordine fra i determinanti D_h. Dalla formula fondamentale (I) del n. 6 della nostra prima memoria

$$\text{(I')} \qquad (-1)^{\frac{h(h-1)}{2}} x^h \equiv (-1)^{h+1} D_{h-2}(a)x^2 + \\ + D_{h-1}(a)x + aD_{h-3}(a) \qquad [\text{mod. } x^3 + ax + a],$$

cambiando h in $3h$ si ha:

$$(2) \qquad (-1)^{\frac{3h(h-1)}{2}} x^{3h} \equiv (-1)^{3h+1} D_{3h-2}(a)x^2 + \\ + D_{3h-1}(a)x + aD_{3h-3}(a) \qquad (\text{mod. } x^3 + ax + a),$$

Elevando al cubo la (I') e riducendo rispetto al modulo $x^3 + ax + a$, e confrontando quindi con le (1) otteniamo le identità del terzo ordine cercate:

$$(-1)^{3h+1}a^2D^3{}_{h-2}(a) - 3aD_{h-1}(a)D^2{}_{h-2}(a) - 3a^2D^2{}_{h-2}(a)D_{h-3}(a) - \\ - 3(-1)^{h+1}aD^2{}_{h-1}(a)D_{h-2}(a) + \\ + 3aD^2{}_{h-1}(a)D_{h-3}(a) + 3(-1)^{h+1}a^2D_{h-2}(a)D^2{}_{h-3}(a) = -D_{3h-2}(a),$$

$$\text{(II)} \quad 2(-1)^{3h+1}a^2D^3{}_{h-2}(a) + 3a^2D_{h-1}(a)D^2{}_{h-2}(a) - 3a^2D^2{}_{h-2}(a)D_{h-3}(a) - \\ - 3(-1)^{h+1}aD^2{}_{h-1}(a)D_{h-2}(a) - \\ - aD^3{}_{h-1}(a) - 6(-1)^{h+1}a^2D_{h-1}(a)D_{h-2}(a)D_{h-3}(a) + \\ + 3a^2D_{h-1}(a)D^2{}_{h-3}(a) = (-1)^hD_{3h-1},$$

$$(-1)^{3h+1}aD^3{}_{h-2}(a) + 3aD_{h-1}(a)D^2{}_{h-2}(a) - D^3{}_{h-1}(a) - \\ - 6(-1)^{h+1}aD_{h-1}(a)D_{h-2}(a)D_{h-3}(a) + a^2D^3{}_{h-3}(a) = (-1)^hD_{3h-3}(a).$$

Supponiamo ora che *non sia* contemporaneamente

$$x_1{}^h \equiv x_2{}^h \equiv x_3{}^h \qquad (\text{mod. } p)$$

o ciò che è lo stesso per la (I), ***non*** *sia simultaneamente*

$$D_{h-1}(a) \equiv 0, \quad D_{h-2}(a) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

e *sia* invece

$$x_1{}^{3h} \equiv x_2{}^{3h} \equiv x_3{}^{3h} \qquad (\text{mod. } p)$$

cioè sia per la (2)

$$(3)\qquad D_{3h-2}(a) \equiv 0, \quad D_{3h-1}(a) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Segue subito che deve essere simultaneamente

$$D_{h-1}(a) \not\equiv 0, \quad D_{h-2}(a) \not\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Se si avesse infatti $D_{h-1}(a) \equiv 0$, dalla prima delle (II) segue

$$aD_{h-2}(a)[(-1)^{h+1}D^2_{h-2}(a) - 3D_{h-2}(a)D_{h-3}(a) + 3(-1)^{h+1}D^2_{h-3}(a)] = 0$$

ed essendo $a \not\equiv 0$, o si ha $D_{h-2}(a) \equiv 0$ oppure

$$(4)\qquad (-1)^{h+1}D^2_{h-2}(a) - 3D_{h-2}(a)D_{h-3}(a) + 3(-1)^{h+1}D^2_{h-3}(a) \equiv 0.$$

La seconda delle (II) sempre nell'ipotesi $D_{h-1}(a) \equiv 0$ dà:

$$[2(-1)^{h+1}D_{h-2}(a) - 3D_{h-3}(a)]aD^2_{h-2}(a) \equiv 0$$

e perciò se $D_{h-2}(a) \not\equiv 0$

$$(4')\qquad 2(-1)^{h+1}D_{h-2}(a) = 3D_{h-3}(a)$$

e dal confronto delle (4) e (4′) segue $\frac{1}{3}(-1)^{h+1}D^2_{h-2}(a) \equiv 0$ (mod. p) cioè $D_{h-2}(a) \equiv 0$.

Abbiamo quindi che se è $D_{h-1}(a) \equiv 0$ è anche $D_{h-2}(a) \equiv 0$, e ciò è contro le ipotesi fatte.

Analogamente supponiamo $D_{h-2}(a) \equiv 0$, dalla prima delle (II) segue $3aD^2_{h-1}(a)D_{h-3}(a) \equiv 0$, e siccome non può essere $D_{h-1}(a) \equiv 0$ si avrà $D_{h-3} \equiv 0$, ma allora dalla seconda delle (II) segue $aD^3_{h-1}(a) \equiv 0$ e perciò $D_{h-1}(a) \equiv 0$, contro le ipotesi.

Avendosi $D_{h-1}(a) \not\equiv 0$, $D_{h-2}(a) \not\equiv 0$, consideriamo il numero X [non nullo] che soddisfa la congruenza

$$(5)\qquad (-1)^{h+1}D_{h-2}(a)X \equiv D_{h-1}(a) \qquad [\text{mod. } p].$$

Le prime due identità (II) tenute conto delle (3) e (5) diventano:

$$(-1)^{h+1}[a - 3X - 3X^2]D^2_{h-2}(a) + (-3a + 3X^2)D_{h-2}(a)D_{h-3}(a) + \\ + 3a(-1)^{h+1}D^2_{h-3}(a) \equiv 0$$

$$(-1)^{h+1}[2a + 3aX - 3X^2 - X^3]D^2_{h-2}(a) - (3a + 6aX)D_{h-2}(a)D_{h-3}(a) + \\ + 3a(-1)^{h+1}XD^2_{h-3}(a) \equiv 0.$$

Moltiplicando la prima per X, sottraendo, e prescindento dal fattore $D_{h-2}(a) \not\equiv 0$ otteniamo la notevole relazione:

$$[X^3 + aX + a][-2(-1)^{h+1}D_{h-2}(a) + 3D_{h-3}(a)] \equiv 0 \pmod{p} \tag{6}$$

ove l'intero X è dato dalla (5).

Se noi supponiamo allora

$$3D_{h-3}(a) \not\equiv 2(-1)^{h+1}D_{h-2}(a) \pmod{p}$$

segue per la (6)

$$X^3 + aX + a \equiv 0 \pmod{p},$$

cioè il numero X fornito dalla (5) è una radice della congruenza proposta. Abbiamo quindi il teorema:

Data la congruenza

$$x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p} \tag{1}$$

con tre radici incongrue, se per l'indice h *valgono le relazioni*:

a) $D_{3h-1}(a) \equiv 0, \quad D_{3h-2}(a) \equiv 0 \pmod{p}$

$[x_1^{3h} \equiv x_2^{3h} \equiv x_3^{3h}] \pmod{p}$

b) $D_{h-1}(a) \not\equiv 0, \quad D_{h-2}(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$

[*non* simultaneamente $x_1^h \equiv x_2^h \equiv x_3^k$] $\pmod{p}$

c) $3D_{h-3}(a) \not\equiv 2(-1)^{h+1}D_{h-2}(a) \pmod{p}$

allora una radice della congruenza (1) *è data dalla formula*:

$$x \equiv (-1)^{h+1}D_{h-1}(a)/D_{h-2}(a) \pmod{p}. \tag{III}$$

Supponiamo invece valgano le condizioni *a*) e *b*) e non valga la *c*), sia cioè

c') $3D_{h-3}(a) \equiv 2(-1)^{h+1}D_{h-2}(a) \pmod{p}.$

Tenuto conto della (5) abbiamo:

$$D_{h-2}(a) \equiv \frac{3}{2}(-1)^{h+1}D_{h-3}(a), \quad D_{h-1}(a) \equiv \frac{3}{2}XD_{k-3}(a)$$

e dalla prima delle (II) dividendo per $D_{h-3}(a) \not\equiv 0$ (1) si ottiene:

$$a - 9X - 3X^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

(1) L'ipotesi $D_{h-3}(a) \equiv 0$ porta $D_{h-2}(a) \equiv 0$, $D_{h-1}(a) \equiv 0$ e perciò per la (27) del § 4 (Mem. I), essendo $a \not\equiv 0$, si dovrebbe avere qualunque sia l'indice h, $D_h(a) \equiv 0$, e ciò non può essere, perchè ad es. $D_3(a) = a$ si annulla soltanto per $a = 0$.

e il numero X per i resultati del n. 3 non può essere radice della congruenza (1).

Ricordando allora i resultati del n. 2 del § 1 abbiamo l'altro teorema:

Data la congruenza

$$x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$$

con tre radici incongrue, se per l'indice h *valgono le relazioni*:

a) $$D_{3h-1}(a) \equiv 0, \quad D_{3h-2}(a) \equiv 0 \pmod{p}$$

b) $$D_{h-1}(a) \not\equiv 0, \quad D_{h-2}(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$$

ed è anche

c') $$3D_{h-3}(a) \equiv 2(-1)^{h+1} D_{h-2}(a) \pmod{p}$$

allora posto

$$\alpha \equiv (-1)^{h+1} D_{h-1}(a)/D_{h-2}(a) \pmod{p}$$

la congruenza (1) *si trasforma con la sostituzione lineare*:

$$x = \frac{\alpha y + 1}{y + \dfrac{9\alpha - 2a}{a(2\alpha + 3)}}$$

nella congruenza binomia:

$$y^3 + \frac{(27 + 4a)(2a - 9\alpha)}{a^2(2\alpha + 3)^3} \equiv 0 \pmod{p}$$

risolubile con la formula ipiristica del prof. Cipolla.

6. *a*) Avendo supposto $p = 6h + 7$ un esponente per il quale vale la *a*) esiste, esso è $p - 1$; è infatti per il teorema di Fermat

$$x_1^{3\frac{p-1}{3}} \equiv x_2^{3\frac{p-1}{3}} \equiv x_3^{3\frac{p-1}{3}} \pmod{p}.$$

Se perciò non è simultaneamente

$$x_1^{\frac{p-1}{3}} \equiv x_2^{\frac{p-1}{3}} \equiv x_3^{\frac{p-1}{3}} \pmod{p}$$

cioè le tre radici della congruenza (1) non hanno lo stesso carattere cubico, o ciò che è lo stesso si ha:

b) $$D_{\frac{p-4}{3}}(a) \not\equiv 0, \quad D_{\frac{p-7}{3}}(a) \not\equiv 0,$$

e se è anche

c) $$3D_{\frac{p-10}{3}}(a) \not\equiv 2(-1)^{\frac{p+2}{3}} D_{\frac{p-7}{3}}(a),$$

allora una radice della (1) è data dalla formula:

$$x \equiv (-1)^{\frac{p+2}{3}} D_{\frac{p-4}{3}}(a)/D_{\frac{p-7}{3}}(a) \qquad (\text{mod. } p).$$

Abbiamo quindi dimostrato il teorema:

Se le tre radici della congruenza

(1) $$x^3 + ax + a \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

non hanno lo stesso carattere cubico modulo p, *se cioè si ha:*

$$D_{\frac{p-4}{3}}(a) \not\equiv 0, \quad D_{\frac{p-7}{3}}(a) \not\equiv 0$$

e se è anche:

$$3D_{\frac{p-10}{3}}(a) \not\equiv 2(-1)^{\frac{p+2}{3}} D_{\frac{p-7}{3}}(a) \qquad (\text{mod. } p),$$

allora una radice della congruenza (1) *è data dalla formula:*

(III') $$\alpha \equiv (-1)^{\frac{p+2}{3}} D_{\frac{p-4}{3}}(a)/D_{\frac{p-7}{3}}(a) \qquad (\text{mod. } p).$$

Se invece si ha

$$D_{\frac{p-4}{3}}(a) \not\equiv 0, \quad D_{\frac{p-3}{3}}(a) \not\equiv 0, \quad 3D_{\frac{p-10}{3}}(a) \equiv 2(-1)^{\frac{p+2}{3}} D_{\frac{p-7}{3}}(a) \qquad (\text{mod. } p)$$

e poniamo ancora:

$$\alpha \equiv (-1)^{\frac{p+2}{3}} D_{\frac{p-4}{3}}(a)/D_{\frac{p-7}{3}}(a) \qquad (\text{mod. } p)$$

[il numero α soddisfa la congruenza $a - 9\alpha - 3\alpha^2 \equiv 0$ (mod. p)], *la congruenza* (1) *con la sostituzione lineare* $\mathrm{x} = (\alpha \mathrm{y} + 1)/\left(\mathrm{y} + \frac{9\alpha - 2\mathrm{a}}{\mathrm{a}(2\alpha + 3)}\right)$ *si trasforma nella congruenza binomia:*

$$y^3 + \frac{(27 + 4a)(2a - 9\alpha)}{a^2(2\alpha + 3)^3} \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

risolubile con la formula apiristica del prof. Cipolla.

Diamo per maggiore chiarezza qualche esempio.

Sia $p = 31$; le formule (V') del n. 16 della nostra prima memoria, e (III') diventano rispettivamente

$$\text{(V')} \qquad x \equiv \frac{a^2 - 15a + 5}{-6a + 10}, \qquad (\text{mod. } p)$$

$$\text{(III')} \qquad x \equiv \frac{4a - 1}{a - 3}, \qquad (\text{mod. } p).$$

Per $a \equiv 12$, cioè per la congruenza $x^3 + 12x + 12 \equiv 0$ (mod. 31) non si può applicare la (V'), mentre la (III') fornisce la radice $x \equiv 19$.

Per $a \equiv 18$, cioè per la congruenza $x^3 + 18x + 18 \equiv 0$ (mod. 31) entrambi le formule dànno $x = 13$.

Per $a = 23$, cioè per la congruenza $x^3 + 23x + 23 \equiv 0$ (mod. 31) la (V') dà la radice $x = 7$; la (III') dà $\alpha = 3$, e siccome è $a - 9\alpha - 3\alpha^2 \equiv 0$ (mod. 31) la congruenza proposta con la sostituzione lineare

$$x = \frac{3y + 1}{y + 5}$$

diventa $y^3 \equiv 2$ (mod. 31) che ha le radici $y \equiv 7, 20, 4$ cui corrispondono le radici $x \equiv 7, 26, 29$.

Infine per $a = 25$, cioè per la congruenza $x^3 + 25x + 25 \equiv 0$ (mod. 31) la (V') da $x \equiv 17$, la (III') $x \equiv 20$ perciò la terza radice della congruenza è $x \equiv 25$; la congruenza proposta si risolve quindi con l'uso simultaneo delle (V') e (III').

Diamo poi un es. in cui non si può applicare nè la (V') nè la (III').

La congruenza $x^3 + 38x + 38 \equiv 0$ (mod. 61) ha le radici $x = 2, 8, 51$ che hanno lo stesso carattere quadratico modulo 61, non si può perciò applicare la (V'); si verifica pure che è $3D_{17}(38) + 2D_{18}(38) \equiv 0$ (mod. 61), non si può perciò applicare la (III'); avendosi poi $-D_{19}(38)/D_{18}(38) = 38$, con la sostituzione $x = \dfrac{38y + 1}{y - 3}$ la congruenza proposta si trasforma nella congruenza $y^3 \equiv 11$ che ha le radici $y = 11, 21, 32$ cui corrispondono i valori di $x = 8, -10, 2$.

b) Siccome per $h = \dfrac{p-1}{3}$ è $x_1^{3h} \equiv x_2^{3h} \equiv x_3^{3h}$ (mod. p) è lecito considerare il *più piccolo* esponente positivo 3λ per il quale le radici della congruenza (1) soddisfano la condizione:

$$x_1^{3\lambda} \equiv x_2^{3\lambda} \equiv x_3^{3\lambda} \qquad (\text{mod. } p).$$

È subito visto che λ è un divisore di $\frac{p-1}{3}$, e se per un esponente $3h$ si ha:

$$x_1^{3h} \equiv x_2^{3h} \equiv x_3^{3h} \pmod{p}$$

h è multiplo di λ, ossia posto $h = \lambda q$, deve aversi perchè sia lecito applicare la (III)

$$x_1^{3\lambda q} \equiv x_2^{3\lambda q} \equiv x_3^{3\lambda q} \pmod{p}$$

e *non* deve essere

$$x_1^{\lambda q} \equiv x_2^{\lambda q} \equiv x_3^{\lambda q} \pmod{p}.$$

Si ha allora che se 3λ è il più piccolo esponente positivo per il quale si ha

$$x_1^{3\lambda} \equiv x_2^{3\lambda} \equiv x_3^{3\lambda} \pmod{p}$$

cioè *se* 3λ *è il più piccolo indice positivo multiplo di* 3 *per il quale si ha simultaneamente*

$$D_{3\lambda-1}(a) \equiv 0, \quad D_{3\lambda-2}(a) \equiv 0 \pmod{p},$$

e se non è simultaneamente $x_1^\lambda \equiv x_2^\lambda \equiv x_3^\lambda \pmod{p}$, *cioè si ha:*

$$D_{\lambda-1}(a) \not\equiv 0, \quad D_{\lambda-2}(a) \not\equiv 0 \pmod{p},$$

se per a *si verifica anche la condizione* $3D_{\lambda-3}(a) \not\equiv 2(-1)^{\lambda+1}D_{\lambda-2}(a) \pmod{p}$ *allora si può applicare la formula* (III); *mentre se si ha*

$$D_{\lambda-1}(a) \equiv 0, \quad D_{\lambda-2}(a) \equiv 0 \pmod{p}$$

allora qualunque sia l'esponente h *considerato non si può applicare la* (III).

§ 3. Trasformazioni lineari delle congruenze cubiche

$$\boldsymbol{x^2 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}}$$

con $p = 6h + 7$, e aventi le tre radici con lo stesso carattere cubico modulo p, in altre le cui radici non hanno lo stesso carattere cubico modulo p.

7. *a*) Sia $p = 6h + 7$, ed ε una radice cubica dell'unità modulo p, sia cioè:

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

I caratteri cubici di un numero modulo p sono 1, ε, ε^2, perciò se tre numeri x_1, x_2, x_3 hanno lo stesso carattere cubico modulo p, sarà:

$$x_1^{\frac{p-1}{3}} x_2^{\frac{p-1}{3}} x_3^{\frac{p-1}{3}} \equiv \varepsilon^i \varepsilon^i \varepsilon^i \equiv \varepsilon^{3i} \equiv 1 \quad (\text{mod. } p).$$

Si ha da qui, che avendosi per le tre radici della congrueuza

$$(1) \qquad x^3 + ax + a \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

$x_1 x_2 x_3 \equiv - a$ (mod. p) e perciò $(x_1 x_2 x_3)^{\frac{p-1}{3}} \equiv (-a)^{\frac{p-1}{3}}$ (mod. p), che *se la* (1) *ha tre radici incongrue, ed è*

$$(-a)^{\frac{p-1}{3}} \not\equiv 1 \quad (\text{mod. } p)$$

o possiamo applicare la (III') *e risolvere quindi la congruenza proposta, oppure possiamo trasformare la* (1) *con una sostituzione lineare nota in una congruenza binomia cubica.*

b) Supponiamo che la (1) abbia tre radici con lo stesso carattere cubico modulo p, sia cioè

$$(-a)^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \quad (\text{mod. } p);$$

essa con la trasformazione lineare [cfr. n. 1]

$$(2) \qquad x \equiv \frac{-3y}{2y+3}$$

diventa:

$$(2') \qquad y^3 - \frac{27a}{27+4a} y - \frac{27a}{27+4a} \equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

Abbiamo allora che se per a vale la relazione

$$(-27 - 4a)^{\frac{p-1}{3}} \not\equiv 1 \quad (\text{mod. } p),$$

si può risolvere la (2') come abbiamo indicato e poi con la (2) risolvere la (1).

c) Supponiamo invece

$$(3) \qquad (\ \ a)^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1, \quad (-27 - 4a)^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \quad (\text{mod. } p)$$

e supponiamo ancora

$$(3') \qquad 2^{\frac{p-1}{3}} \not\equiv 1 \quad (\text{mod. } p),$$

e più in generale siano g e g_1 due non resuidi cubici di p per i quali si abbia

$$(3) \qquad \frac{1}{g} + \frac{1}{g_1} \equiv 1 \quad (\text{mod. } p).$$

[Se 2 è non residuo cubico di p, basta prendere $g = g_1 = \frac{1}{2}$; si prenderà $g = \frac{1}{3}$ e $g_1 = \frac{2}{3}$ se 2 è residuo cubico e 3 nen residuo cubico; $g = \frac{1}{5}$, $g_1 = \frac{4}{5}$ se 2 è residuo cubico e 5 non residuo cubico].

La congruenza

$$\beta^3 - \frac{27ag_1^2}{4a+27}\beta_1 - \frac{27ag_1^2}{4a+27} \equiv 0, \tag{4}$$

è per quanto si è detto in a) risolubile apiristicamente; sia β una sua radice, posto

$$\alpha = \frac{4a+27}{27g_1}\beta + \frac{2}{9}a \tag{5}$$

troviamo

$$-27\alpha^3 + 18a\alpha^2 + 27a\alpha + 27a + 2a^2 \equiv \frac{1}{27g}a(4a+27)^2 \pmod{p} \tag{6}$$

dove il secondo membro, e perciò anche il orimo membro rappresenta un numero non residuo cubico di p. E allora se nella sostituzione (13) del n. 3 prendiamo per α il valore dato dalla (5) la (1) si trasforma nella congruenza cubica (14) del numero ora citato, che a motivo della (6), per le cose dette in a), è risolubile apiristicamente.

§ 4. Risoluzione delle congruenze cubiche con moduli potenze di numeri primi.

8. a) Sia α_1 una *radice semplice* della congruenza:

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{1}$$

si abbia cioè:

$$f(\alpha_1) \equiv 0, \quad f'(\alpha_1) \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Vogliamo far notare come il procedimento di NEWTON per la risoluzione numerica approssimata delle equazioni algebriche permette di dedurre dalla radice α_1 una radice (semplice) della congruenza:

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^n};\ n > 2. \tag{2}$$

Essendo $f'(\alpha_1)$ primo con p, e perciò con p^2, possiamo calcolare il socio

$\frac{1}{f'(\alpha_1)}$ di $f'(\alpha_1)$ modulo p^2, e se prendiamo α_2 determinato dalla relazione

$$\alpha_2 \equiv \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} \pmod{p^2} \tag{3}$$

avremo per questo numero α_2:

$$f(\alpha_2) = f\left[\alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}\right] = f(\alpha_1) - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} f'(\alpha_1) + \frac{f^2(\alpha_1)}{f'^2(\alpha_1)} f''(\alpha_1) - \frac{f^3(\alpha_1)}{f'^3(\alpha_1)} f'''(\alpha_1) + \ldots$$

cioè:

$$f(\alpha_2) = \frac{f^2(\alpha_1)}{f'^2(\alpha_1)} f''(\alpha_1) \quad \frac{f^3(\alpha_1)}{f'^3(\alpha_1)} f'''(\alpha_1) + \ldots$$

e quindi essendo $f(\alpha_1)$ divisibile per p:

$$f(\alpha_2) \equiv 0 \pmod{p^2},$$

cioè α_2 è una radice della congruenza

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^2}. \tag{4}$$

Avendosi poi $f'(\alpha_2) \equiv f'(\alpha_1) \not\equiv 0 \pmod{p}$ segue che α_2 è una radice semplice della congruenza (4).

Analogamente se consideriamo il numero:

$$\alpha_3 \equiv \alpha_2 - \frac{f(\alpha_2)}{f'(\alpha_2)} \pmod{p^{2^2}}$$

si avrà

$$f(\alpha_3) \equiv 0, \quad f'(\alpha_3) \not\equiv 0 \pmod{p^{2^2}}.$$

Così continuando abbiamo il teorema:

Sia α_1 una radice semplice della congruenza:

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p},$$

sia cioè

$$f(\alpha_1) \equiv 0, \quad f'(\alpha_1) \not\equiv 0 \pmod{p},$$

e consideriamo la successione dei numeri:

$$\alpha_2 \equiv \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} \pmod{p^2}$$

$$\alpha_3 \equiv \alpha_2 - \frac{f(\alpha_2)}{f'(\alpha_2)} \pmod{p^{2^2}}$$

. . . .

$$\alpha_{m+1} \equiv \alpha_m - \frac{f(\alpha_m)}{f'(\alpha_m)} \pmod{p^{2^m}}$$

. . . .

dove $\frac{1}{f'(\alpha_1)}, \frac{1}{f'(\alpha_2)}, \dots, \frac{1}{f'(\alpha_m)}$ sono i soci di $f'(\alpha_1), f'(\alpha_2), \dots, f'(\alpha_m)$ calcolati rispettivamente rispetto ai moduli $p^2, p^{2^2}, \dots, p^{2^m}$.

Qualunque sia l'indice m, *abbiamo*

(5) $$f(\alpha_{m+1}) \equiv 0 \pmod{p^{2^m}}$$

cioè α_{m+1} *è una radice* (semplice) *della congruenza* (2), *per tutti gli esponenti* $n \leq 2^m$ [1].

Per la (5) abbiamo

$$f(x) = (x - \alpha_{m+1}) f_1(x) + p^n R$$

con $f_1(x)$ polinomio a coefficienti interi, R intero. Per trovare della congruenza

(6) $$f(x) \equiv 0 \pmod{p^n}$$

le eventuali radici oltre α_{m+1}, basterà risolvere la congruenza

$$f_1(x) \equiv 0 \pmod{p^n}$$

ove $f_1(x)$ è di grado minore di $f(x)$.

Si osservi infatti che non può aversi simultaneamente con $0 < r < n$

$$x \equiv \alpha_{m+1} \pmod{p^r}, \qquad f_1(x) \equiv 0 \pmod{p^{n-r}}$$

perchè seguirebbe da queste:

$$x \equiv \alpha_1 \pmod{p}, \qquad f_1(x) \equiv 0 \pmod{p},$$

cioè α_1 sarebbe radice almeno doppia per la (1), e ciò è contro l'ipotesi.

b) Sia invece data la congruenza:

(6) $$f(x) \equiv 0 \pmod{p^n}, \qquad n \geq 2,$$

e sia α una radice doppia della congruenza

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p},$$

sia cioè:

$$f(\alpha) \equiv 0, \quad f'(\alpha) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ci domandiamo *se* esistono radici x della (6) della forma

$$x = \alpha + py.$$

Deve essere intanto

$$f(\alpha) + pf'(\alpha)y + \frac{p^2 f^{(2)}(\alpha)}{2!} y^2 + \dots \equiv 0 \pmod{p^2}$$

[1] Non sembra che il procedimento indicato sia stato esplicitamente notato.

e perciò

$$f(\alpha) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^2).$$

Abbiamo quindi che *per*

(7) $\quad f(\alpha) \equiv 0 \ (\text{mod. } p), \qquad f(\alpha) \not\equiv 0 \ (\text{mod. } p^2), \qquad f'(\alpha) \equiv 0 \ (\text{mod. } p)$

non esistono radici della congruenza (1) *della forma* $\alpha + py$.

Se invece abbiamo

$$f(\alpha) \equiv 0 \ (\text{mod. } p^2), \qquad f'(\alpha) \equiv 0 \ (\text{mod. } p)$$

la (6) *avrà radici della forma*

$$x = \alpha + py$$

se y *soddisfa la congruenza*

$$\frac{f(\alpha)}{p^2} + \frac{f'(\alpha)}{p} y + \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2!} y^2 + \frac{f^{(3)}(\alpha)}{3!} py^3 + \dots \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^{n-2});$$

perciò la ricerca di una radice della forma voluta è ricondolta alla risoluzione di una congruenza con modulo p^{n-2}.

c) In generale sia da risolvere la congruenza

(6) $$f(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^n)$$

e si conosca una radice α di essa; sia cioè

$$f(x) \equiv (x - \alpha)^r f_1(x) \qquad (\text{mod. } p^n).$$

Si soddisfa allora la (6) oltre che col valore $x \equiv \alpha$ con tutti gli altri valori di x per i quali si ha simultaneamente:

$$x \equiv \alpha \ (\text{mod. } p^r) \qquad f_1(x) \equiv 0 \ (\text{mod. } p^{n-r}) \qquad r = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

La risoluzione della congruenza (6) è ricondotta quindi alla risoluzione di congruenze di grado minore.

Dalle cose dette in *a*) *b*) *c*) segue che la risoluzione delle congruenze di grado qualunque modulo p^n è ricondotta alla risoluzione delle congruenze di grado minore, e alla risoluzione di congruenze di modulo p^{n-t} con $t > 0$. Ed allora ne segue che siccome noi sappiamo risolvere le congruenze di secondo grado e quelle cubiche di modulo p, *sappiamo risovere tutte le congruenze cubiche modulo* p^n.

9. Vogliamo vedere da vicino come si applicano le cose dette alle congruenze cubiche di modulo p^n con $n \geq 2$; e supponiamo $p \neq 2, 3$ (1).

(1) **I casi $p = 2, 3$ si esamineranno col procedimento indicato nel numero precedente.**

Sia allora da risolvere la congruenza

(8) $$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \equiv 0 \pmod{p^n}; \qquad n \geq 2,\ p \neq 2, 3.$$

Se in questa è a_0 primo con p, moltiplicando per il socio di a_0, modulo p^n, si avrà una congruenza del tipo:

(9) $$x^3 + \alpha_1x^2 + \alpha_2x + \alpha_3 \equiv 0 \qquad \pmod{p^n}.$$

Se invece a_0 è divisibile per p, e a_3 non è divisibile per p, opereremo la trasformazione ora indicata sulla congruenza ottenuta dalla (8), colla trasformazione lecita $x = \frac{1}{y}$; se a_0 e a_3 sono invece entrambi multipli di p, è lecito supporre che a_1 e a_2 non siano anch'essi multipli di p, [nel qual caso la congruenza (8) può ridursi ad un'altra di modulo p^{n-t}] e se indichiamo con ρ un intero tale per il quale si abbia:

$$\rho \not\equiv 0, \quad a_1\rho + a_2 \not\equiv 0 \qquad \pmod{p}$$

si avrà

$$f(\rho) = a_0\rho^3 + \rho(a_1\rho + a_2) + a_3 \not\equiv 0 \qquad \pmod{p}$$

e perciò la (8) con la trasformazione $x = \rho + y$ diventa

$$f(\rho) + \frac{f'(\rho)}{1!}y + \frac{f^{(2)}(\rho)}{2!}y^2 + \frac{f^{(3)}(\rho)}{3!}y^3 \equiv 0 \qquad \pmod{p^n}$$

ed essendo in essa $f(\rho) \not\equiv 0 \pmod{p}$ possiamo applicare la trasformazione prima indicata.

È lecito quindi supporre la congruenza cubica data sotto la forma (9), ed allora essendo $p \neq 3$, con la trasformazione lecita

$$x \equiv y - \frac{a_1}{3} \qquad \pmod{p^n},$$

essa assume la forma:

(10) $$x^3 + \alpha p^r x + \beta p^s \equiv 0 \qquad \pmod{p^n}$$

con $r \geq 0$, $s \geq 0$, α e β primi con p. Supponiamo anche $r < n$, $s < n$ per non ridursi ai tipi noti. Distinguiamo ora vari casi.

a) Sia $r > 0$, $s = 0$, la (10) diventa:

(11) $$x^3 + \alpha p^r x + \beta \equiv 0 \qquad \pmod{p^n};$$

le sue radici sono anche radici della congruenza binomia

$$x^3 + \beta \equiv 0 \qquad \pmod{p}.$$

Questa sappiamo risolverla colle formule del prof. CIPOLLA, e avendo le sue radici tutte semplici $[f'(x) \equiv 3x^2 \not\equiv 0 \pmod{p}]$ possiamo anche risolvere col procedimento indicato al n. 8 *a*) la (11).

b) Sia $r = 0$ e $s > 0$; la (10) diventa:

$$x^3 + \alpha x + \beta p^3 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^n). \tag{12}$$

Dovrà essere

$$x(x^2 + \alpha) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

e perciò x deve soddisfare una almeno delle congruenze

$$x^2 + \alpha \equiv 0, \quad x \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Sulle radici della congruenza $x^2 + \alpha \equiv 0 \pmod{p}$ operando come al n.° 8 *a)* otteniamo le corrispondenti radici della (12) $[f'(x) = 3x^2 + \alpha \equiv -2\alpha \not\equiv 0 \pmod{p}]$.

Se cerchiamo invece le radici della (12) della forma $x = py$ effettuando tale sostituzione, essa diventa:

$$p^2 y^3 + \alpha y + \beta p^{s-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^{n-1}). \tag{13}$$

Allora dalla radice della congruenza $\alpha y + \beta p^{s-1} \equiv 0 \pmod{p}$ dedurremo col solito procedimento del n.° 8 *a)* una radice della (13) $[f'(y) = 3p^2y^2 + \alpha \not\equiv 0]$.

c) Sia $s > 0$ e $r \geq s$. Deve essere per la (10) x^3 divisibile per p^s, potremo porre quindi

$$x = p^k y \qquad [k > 0]$$

con y intero e k il più piccolo intero per il quale si ha $3k \geq s$. La congruenza (10) diventa ora

$$p^{3k-s} y^3 + \alpha p^{(r-s)+k} y + \beta \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^{n-s}),$$

e avendosi $(r - s) + k > 0$, se è anche $3k - s > 0$ essa è impossibile, per $3k - s = 0$ assume la forma (11) che sappiamo risolvere.

d) Sia $s > r > 0$. Deve essere per la (10) x^3 divisibile per p^r, potremo perciò porre

$$x = p^k y$$

con y intero e k il più piccolo intero (positivo) per il quale si ha $3k \geq r$.

La congruenza (10) diventa ora:

$$p^{3k-r} y^3 + \alpha p^k y + \beta p^{s-r} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^{n-r}), \tag{14}$$

essendo $3k - r = 0, 1, 2$.

Per $3k - r = 0$, la congruenza ha la forma

$$y^3 + \alpha p^k y + \beta p^{s-r} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^{n-r})$$

che ha lo stesso tipo (11) ma è riferita al modulo p^{n-r}.

Per $3k - r = 1$ dalla (14) si ha

$$y^3 + \alpha p^{k-1} y + \beta p^{s-r-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^{n-r-1})$$

che ha lo stesso tipo (11) ma è riferita al modulo p^{n-r-1}.

Per $3k - r = 2$ la (14) diventa

$$p^2 y^3 + \alpha p^k y + \beta p^{s-r} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^{n-r}).$$

Questa se $k \geq 2$ sarà possibile soltanto per $s - r \geq 2$ e si riduce alla forma (11)

$$y^3 + \alpha p^{k-2} y + \beta p^{s-r-2} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^{n-r-2})$$

col modulo p^{n-r-2}; se è invece $k = 1$ e perciò $r = 1$ abbiamo:

$$py^3 + \alpha y + \beta p^{s-2} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^{n-2}). \tag{15}$$

Questa per $s = 2$ ha la forma

$$py^3 + \alpha y + \beta \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^{n-2}),$$

e si risolve operando come abbiamo indicato al n.° 8 *a)* sulla radice della congruenza

$$\alpha y + \beta \equiv 0 \ (\text{mod. } p), \qquad [f'(y) = 3py^2 + \alpha \not\equiv 0 \ (\text{mod. } p)].$$

Se $s - 2 > 0$ alla (15) possiamo dare la forma

$$py^3 + \alpha y + \beta p^{\lambda} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^{n-2}).$$

Si ha da qui $y = pt$ ed essa diventa

$$p^3 t^3 + \alpha t + \beta p^{\lambda - 1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^{n-3}). \tag{16}$$

Per $\lambda = 1$, basta operare come abbiamo indicato nel n.° 8 *a)* sulla radice della congruenza $\alpha y + \beta \equiv 0$ (mod. p); per $\lambda - 1 > 0$ si avrà $t = pz$ e la (16) diventa

$$p^5 z^3 + \alpha z + \beta p^{\lambda - 2} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^{n-4}).$$

E così continuando dopo un numero finito di volte risolveremo la congruenza proposta.

e) Resta infine il caso $r = s = 0$; la (11) si scrive allora

$$x^3 + \alpha x + \beta \equiv 0 \pmod{p^n}$$

la quale con la trasformazione lecita $x \equiv \beta\alpha^{-1} y \pmod{p^n}$ assume la forma

$$y^3 + ay + a \equiv 0 \pmod{p^n}. \tag{17}$$

Per i risultati dei paragrafi precedenti sappiamo discutere e risolvere questa congruenza riferita al modulo p, sappiamo perciò risolverla per le cose dette al n.° 8 per il modulo p^n.

In particolare se $4a + 27 \not\equiv 0 \pmod{p}$ ed è impossibile la congruenza

$$y^3 + ay + a \equiv 0 \pmod{p} \tag{18}$$

impossibile è anche la congruenza (17); se invece questa ha una sola radice oppure tre radici incongrue, possiamo operare su di esse come abbiamo indicato nel n.° 8 *a)* per ottenere corrispondenti radici della (17).

Infine se $4a + 27 \equiv 0 \pmod{p}$ la (18) ha la radice doppia $-\frac{3}{2}$ e la semplice 3, e operando su quest' ultima come abbiamo indicato nel citato n.° 8 *a)*, otteniamo una radice semplice della (17).

I.

Tabella numerica per la risoluzione delle congruenze cubiche della forma $x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$ col modulo p primo inferiore a 100, le quali ammettono tre radici x_1, x_2, x_3 incongrue.

Modulo p	Valore del parametro a	Radici x_1	x_2	x_3	Carattere quadratico delle radici $\left(\frac{x_1}{p}\right)$	$\left(\frac{x_2}{p}\right)$	$\left(\frac{x_3}{p}\right)$
11	3	5	8	9	+1	−1	+1
13	6	1	2	10	+1	−1	+1
17	7	9	12	13	+1	−1	+1
	8	1	6	10	+1	−1	−1
19	10	2	4	13	−1	+1	−1
	11	10	11	17	−1	+1	+1
23	6	5	7	11	−1	−1	−1
	9	13	15	18	+1	−1	+1
	21	12	14	20	+1	−1	−1
29	9	17	18	23	−1	−1	+1
	14	1	8	20	+1	−1	+1
	21	12	19	27	−1	−1	−1
	22	4	11	14	+1	−1	−1
31	12	4	8	19	+1	+1	+1
	18	2	13	16	+1	−1	+1
	23	7	26	29	+1	−1	−1
	25	17	20	25	+1	−1	+1
37	5	16	24	34	+1	−1	+1
	10	5	10	22	−1	+1	−1
	18	1	15	21	+1	−1	+1
	22	2	6	29	−1	−1	−1
	28	18	23	33	−1	−1	+1
41	3	24	25	33	−1	+1	+1
	6	10	35	37	+1	−1	+1
	16	6	8	27	−1	+1	−1
41	20	1	4	36	+1	+1	+1
	33	14	29	39	−1	−1	+1
	34	7	16	18	−1	+1	+1
43	6	6	12	25	+1	−1	+1
	11	21	31	34	+1	+1	−1
	12	13	14	16	+1	+1	+1
	26	2	9	32	−1	+1	−1
	36	11	36	39	+1	+1	−1
	37	24	29	33	+1	−1	−1
47	1	25	34	35	+1	+1	−1
	4	20	32	42	−1	+1	+1
	10	7	43	44	+1	−1	−1
	27	14	15	18	+1	−1	+1
	34	5	11	31	−1	−1	−1
	43	6	17	24	+1	+1	+1
	44	27	29	38	+1	−1	−1
53	5	29	38	39	+1	+1	−1
	22	12	14	27	−1	−1	−1
	26	1	11	41	+1	+1	−1
	40	26	34	46	−1	−1	+1
	42	30	33	43	−1	−1	+1
	44	10	21	22	+1	−1	−1
	48	17	44	45	+1	+1	−1
	49	9	16	28	+1	+1	+1
59	4	24	41	53	−1	+1	+1
	14	15	19	25	+1	+1	+1
	16	18	44	56	−1	−1	−1
59	18	20	43	55	+1	−1	−1
	38	33	37	48	−1	−1	+1
	45	6	17	36	−1	+1	+1
	48	5	8	46	+1	−1	+1
	51	9	52	57	+1	−1	+1
	58	4	13	42	+1	−1	−1
61	5	31	43	48	−1	−1	+1
	14	15	53	54	+1	−1	−1
	17	20	44	58	+1	−1	+1
	20	10	19	32	−1	+1	−1
	30	1	5	55	+1	+1	−1
	36	4	12	45	+1	+1	+1
	38	2	8	51	−1	−1	−1
	43	9	18	34	+1	−1	+1
	53	27	36	59	+1	+1	−1
67	1	13	58	63	−1	−1	−1
	13	30	45	59	−1	−1	+1
	17	6	28	33	+1	−1	+1
	21	18	56	60	−1	+1	+1
	37	10	20	37	+1	−1	+1
	41	9	22	36	+1	+1	+1
	42	2	24	41	−1	+1	−1
	51	11	25	31	−1	+1	−1
	53	39	44	51	+1	−1	−1
	55	38	47	49	−1	+1	+1
71	2	28	50	64	−1	+1	+1
	8	25	54	63	+1	+1	−1
	18	16	20	35	+1	+1	−1

Modulo p	Valore del parametro a	Radici x_1	x_2	x_3	Carattere quadratico delle radici $\left(\frac{x_1}{p}\right)$	$\left(\frac{x_2}{p}\right)$	$\left(\frac{x_3}{p}\right)$
71	22	8	66	68	+1	−1	−1
	24	39	45	58	−1	+1	+1
	37	7	11	53	−1	−1	−1
	42	15	62	65	+1	−1	−1
	44	4	19	48	+1	+1	+1
	62	5	9	47	+1	+1	+1
	63	18	55	69	+1	−1	−1
	64	10	23	38	+1	−1	+1
73	2	10	14	49	−1	−1	+1
	21	7	16	50	−1	+1	+1
	23	33	43	70	−1	−1	+1
	29	11	22	40	−1	−1	−1
	36	1	13	59	+1	−1	−1
	40	5	15	53	−1	−1	−1
	42	25	60	61	+1	−1	+1
	46	2	29	42	+1	−1	−1
	52	26	55	65	−1	+1	+1
	60	32	46	68	+1	+1	−1
	64	20	62	64	−1	−1	+1
79	3	4	6	69	+1	−1	−1
	4	42	54	62	+1	−1	+1
	5	35	48	75	−1	−1	−1
	19	12	24	43	−1	−1	−1
	20	39	46	73	−1	+1	+1
	28	25	59	74	+1	−1	−1

Modulo p	Valore del parametro a	Radici x_1	x_2	x_3	Carattere quadratico delle radici $\left(\frac{x_1}{p}\right)$	$\left(\frac{x_2}{p}\right)$	$\left(\frac{x_3}{p}\right)$
79	46	7	32	40	−1	+1	+1
	50	2	36	41	+1	+1	−1
	54	45	56	57	+1	−1	−1
	56	19	27	33	+1	−1	−1
	66	8	22	49	+1	+1	+1
	71	21	60	77	+1	−1	−1
83	2	45	53	68	−1	−1	+1
	28	21	65	80	+1	+1	−1
	34	30	57	79	+1	−1	−1
	36	17	23	43	+1	+1	−1
	38	20	24	39	−1	−1	−1
	53	26	28	29	+1	+1	+1
	57	46	56	64	−1	−1	+1
	59	47	49	70	−1	+1	+1
	60	10	18	55	+1	−1	−1
	64	6	15	62	−1	−1	−1
	70	38	61	67	+1	+1	−1
	76	5	36	42	−1	+1	−1
	81	32	59	75	−1	+1	+1
89	5	4	26	59	+1	−1	−1
	10	39	67	72	+1	+1	+1
	13	22	32	35	+1	+1	−1
	20	6	21	62	−1	+1	−1
	28	40	55	83	+1	+1	−1
	35	7	18	64	−1	+1	+1

Modulo p	Valore del parametro a	Radici x_1	x_2	x_3	Carattere quadratico delle radici $\left(\frac{x_1}{p}\right)$	$\left(\frac{x_2}{p}\right)$	$\left(\frac{x_3}{p}\right)$
89	38	24	69	85	−1	+1	+1
	42	8	30	51	+1	−1	−1
	44	1	27	61	+1	−1	−1
	59	52	56	70	−1	−1	−1
	62	19	34	36	−1	+1	+1
	77	48	57	73	−1	+1	+1
	80	29	65	84	−1	−1	+1
	81	20	71	87	+1	+1	+1
97	5	34	79	81	−1	+1	+1
	18	29	77	88	−1	−1	+1
	19	44	66	84	+1	+1	−1
	30	18	33	46	+1	+1	−1
	35	35	65	94	+1	+1	+1
	42	7	21	69	−1	−1	−1
	44	13	20	64	−1	−1	+1
	48	1	37	59	+1	−1	−1
	60	5	22	70	−1	+1	+1
	62	2	40	55	+1	−1	−1
	65	53	58	83	+1	−1	−1
	74	15	30	52	−1	−1	−1
	75	11	41	45	+1	−1	−1
	77	54	62	78	+1	+1	−1
	90	16	86	92	+1	+1	−1

II.

Tabella numerica per la risoluzione delle congruenze cubiche della forma $x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$ col modulo p primo inferiore a 100, le quali ammettono una sola radice.

Modulo p	Parametro a	Radice x
5	4	2
7	3	1
	4	4
	6	5
11	1	2
	5	1
	8	7
	10	6
13	1	7
	5	11
	7	9
	8	4
	10	6
	11	8
17	1	11
	3	2
	9	15
	11	4
	12	14
	13	8
	16	5
19	2	14
	3	12
	4	15
	5	9
	7	7

Modulo p	Parametro a	Radice x
19	9	1
	14	5
	15	16
	18	6
23	1	4
	2	6
	3	9
	5	2
	7	8
	8	16
	11	1
	12	17
	15	21
	17	19
29	1	26
	3	16
	4	10
	5	24
	7	2
	12	15
	13	5
	17	9
	18	21
	23	6
	25	22
	26	7
	27	25

Modulo p	Parametro a	Radice x
31	2	28
	3	12
	5	5
	6	21
	8	15
	9	6
	10	24
	11	23
	15	1
	17	9
	19	10
	20	27
	21	18
	26	11
	29	22
37	1	25
	2	4
	3	19
	4	27
	6	28
	7	14
	8	7
	13	8
	15	32
	16	31
	19	20
	23	30
	26	26

Modulo p	Parametro a	Radice x
37	27	9
	29	35
	34	11
	35	12
	36	13
41	2	26
	5	9
	7	38
	8	11
	9	12
	10	13
	11	2
	12	15
	13	22
	17	21
	18	34
	21	31
	27	5
	30	17
	31	20
	35	30
	37	32
	38	23
	39	28
43	1	38
	2	26
	4	22

Modulo p	Parametro a	Radice x
43	5	27
	8	40
	10	8
	13	4
	14	30
	15	5
	17	37
	18	23
	19	35
	21	1
	23	28
	27	7
	28	18
	29	19
	35	41
	39	15
	40	17
	42	10
47	6	4
	7	9
	8	28
	9	37
	11	8
	12	23
	13	2
	14	26
	17	21
	19	30

Modulo p	Parametro a	Radice x
47	21	13
	22	36
	23	1
	26	19
	29	40
	30	16
	32	41
	33	10
	37	12
	39	45
	41	39
	42	33
53	1	36
	2	8
	3	35
	6	32
	7	6
	10	42
	11	15
	12	23
	13	50
	14	49
	15	2
	19	4
	21	13
	25	18
	28	31
	30	7

Modulo p	Parametro a	Radice x	Modulo p	Parametro a	Radice x	Modulo p	Parametro a	Radice x	Modulo p	Parametro a	Radice x	Modulo p	Parametro a	Radice x	Modulo p	Parametro a	Radice x
53	31	47	59	49	50	61	60	57	67	66	7	71	68	22	73	65	71
	35	48		53	7	67	2	35	71	1	14		69	24		68	38
	36	19		54	30		3	52		4	47	73	3	69		69	24
	38	20		57	14		5	42		6	36		4	58		70	51
	41	5	61	1	37		8	57		10	51		5	41		72	23
	45	51		2	25		11	15		12	31		6	37	79	1	11
	47	24		4	6		14	4		13	29		8	8		6	29
	51	40		6	11		16	46		14	41		9	48		7	58
	52	37		7	35		19	62		15	17		14	27		10	16
59	2	16		8	52		20	64		16	60		15	17		14	9
	6	38		9	23		24	26		17	49		17	45		15	51
	9	40		10	39		25	8		19	42		18	44		17	68
	10	32		11	26		26	53		20	12		19	39		18	13
	11	10		13	13		28	50		21	2		20	34		21	66
	12	11		15	28		29	29		23	61		22	9		22	26
	13	54		16	46		31	16		26	67		26	56		23	23
	15	29		18	24		32	12		27	40		27	21		24	10
	17	2		21	16		33	1		28	59		28	66		26	76
	20	49		22	41		34	43		29	32		31	4		29	50
	22	23		28	40		35	5		30	6		33	19		31	15
	23	39		29	42		36	17		31	33		34	31		32	65
	24	27		31	21		38	14		35	1		35	18		33	14
	25	34		32	38		39	34		36	30		37	52		34	18
	27	22		33	22		43	23		38	26		38	30		35	72
	28	51		37	49		45	21		40	27		41	28		36	52
	29	1		41	7		46	27		41	52		43	63		38	61
	30	35		45	56		47	48		47	21		53	57		39	1
	33	26		46	30		49	19		48	56		55	36		44	67
	34	45		47	47		50	55		51	13		58	12		45	5
	35	12		49	17		56	61		54	44		59	67		49	30
	36	47		50	33		57	54		56	46		61	54		51	71
	37	31		56	50		59	65		59	37		62	47		53	34
	43	21		57	14		65	40		60	43		63	6		55	55

Modulo p	Parametro a	Radice x
79	57	70
	58	64
	59	31
	62	37
	63	28
	64	63
	65	17
	68	53
	75	44
	77	47
	78	20
83	1	35
	6	69
	8	72
	9	7
	12	76
	15	13
	17	22
	18	73
	21	41
	23	74
	24	71
	25	2
	26	50

Modulo p	Parametro a	Radice x
83	30	51
	31	78
	35	9
	37	4
	39	54
	40	44
	41	1
	42	63
	43	19
	44	33
	45	48
	47	27
	48	34
	50	52
	51	58
	52	16
	54	37
	55	14
	63	8
	65	12
	72	11
	73	77
	75	81
	77	60

Modulo p	Parametro a	Radice x
83	78	31
	79	25
	82	66
89	1	14
	2	13
	4	12
	6	15
	8	75
	9	80
	12	46
	14	41
	17	82
	19	54
	22	68
	23	31
	25	9
	27	2
	29	77
	30	11
	31	86
	32	76
	33	38
	36	78
	37	45

Modulo p	Parametro a	Radice x
89	39	49
	41	63
	45	74
	46	25
	47	16
	48	50
	53	23
	57	79
	63	53
	64	81
	66	33
	67	44
	72	58
	73	60
	74	66
	75	47
	79	10
	83	5
	84	37
	86	42
	87	28
	88	17
97	3	57
	6	56

Modulo p	Parametro a	Radice x
97	7	71
	8	49
	9	28
	10	89
	14	42
	15	95
	20	63
	21	36
	24	14
	25	43
	26	4
	27	32
	28	27
	29	87
	32	72
	33	93
	36	31
	37	25
	38	75
	40	73
	43	82
	45	17
	46	26
	47	68

Modulo p	Parametro a	Radice x
97	49	67
	51	74
	52	50
	53	38
	56	90
	59	10
	61	61
	71	23
	73	48
	76	12
	79	19
	80	6
	81	85
	83	60
	85	76
	86	39
	87	80
	89	95
	92	9
	94	8
	95	24
	96	51

Sopra un gruppo di operatori funzionali che interessano la Fisica.

Memoria di FRANCESCO SBRANA (a Genova).

Sunto. - *Scopo principale di questa Nota è di indicare un procedimento per la valutazione di un gruppo di operatori funzionali che si presentano nell'Elettrodinamica e in altri rami della Fisica, e che si possono ricondurre al tipo*

$$\left(\frac{m+l\Delta}{g+k\Delta}\right)^n,$$

dove $\Delta=\frac{\partial}{\partial t}$, *mentre* m, l, g, k *sono quantità positive, indipendenti da* t, *ed* n *è una costante reale.*

1. Scopo principale di questa Nota è di indicare un procedimento per la valutazione di un gruppo di operatori che si presentano nell'Elettrodinamica e in altri rami della Fisica, e che si possono ricondurre al tipo

$$\left(\frac{m+l\Delta}{g+k\Delta}\right)^n, \tag{1}$$

dove $\Delta=\frac{\partial}{\partial t}$, mentre m, l, g, k sono quantità positive, indipendenti da t, ed n è una costante reale.

Premettiamo alcune osservazioni sulla valutazione generale degli operatori funzionali che interessano la Fisica Matematica (1); e terminiamo con una

(1) Sull'argomento in questione vertono le opere seguenti:
O. HEAVISIDE, *Electromagnetic theory*, vol. II, (1890); *On operators in physical mathematics*, « Proceedings of the Royal Soc. of London ». Sect. A, vol. 52, (1893), pp. 504-529, e vol. 54, (1894), pp. 105-143. G. GIORGI, *Il metodo simbolico nello studio delle correnti variabili*, « Atti dell'Associaz. Elettrotecnica Italiana », vol. VIII, (1904), pp. 65-141; *Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate dai problemi di Elettrodinamica*, ibid., vol. IX, pp. 651-699; *On the functional dependance of physical variables*, « Proceedings of the mathem. Congress of Toronto », 1924. J. R. CARSON, *Electric circuit theory and the operational calculus*, (Mc. Graw-Hill Book Co., New York, 1926). N. WIENER, *The operational calculus*, « Mathematische Annalen », 95 Bd., (1926), pp. 557-584. H. JEFFEYS, *The operational methods in mathematical physics*, (Cambridge, University Press, 1927). V. anche i recenti lavori di HILBERT, NORDHEIM e altri autori.

interpretazione semplice della nota derivazione a indice qualunque, [che si deduce da (1), dando opportuni valori ai parametri m, l, g, k].

2. Valutazione generale. — Sia $V(t)$ una funzione reale, definita per ogni valore reale di t, integrabile tra $-\infty$ e $+\infty$ [1], e coincidente con la derivata del proprio integrale, per ogni valore di t. Con queste ipotesi, si ha

$$V(t) = \frac{1}{2}\Delta \left\{ \int_{-\infty}^{t} V(\tau)d\tau - \int_{t}^{\infty} V(\tau)d\tau \right\}. \tag{2}$$

Ricordiamo ora che, posto

$$I(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{\lambda}\, d\lambda, \tag{3}$$

sussiste la nota identità (di DIRICHLET),

$$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{per } t > 0, \\ -1, & \text{per } t < 0, \end{cases} \tag{4}$$

per mezzo della quale la (2) diviene

$$V(t) = \frac{1}{2}\Delta \int_{-\infty}^{+\infty} V(\tau) I(t-\tau) d\tau. \tag{5}$$

Si ha così una rappresentazione, che crediamo nuova, della funzione $V(t)$, analoga a quella di DIRICHLET, ma evidentemente più generale. Derivando sotto il segno integrale, se ne dedurrebbe, nel simbolismo usato dal GIORGI:

$$V(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\tau) Fu(t-\tau) d\tau,$$

dove $Fu(t)$ denota la *funzione impulsiva unitaria*.

Indichiamo ora con $f(\Delta)$ un operatore generico, indipendente dal tempo [2];

---

[1] Questa restrizione, che poniamo per semplicità di esposizione, potrebbe esser tolta, [cfr. GIORGI, *Sul calcolo delle soluzioni funzionali*, op. cit. (1), § 4]; basterebbe supporre $V(t)$ integrabile in ogni intervallo finito, (e coincidente con la derivata del proprio integrale).

[2] Per il significato e la portata di questa espressione, ved. GIORGI, *Il metodo simbolico*, nn.i 10, 11, 12.

dalla (5) si trae, formalmente,

$$f(\Delta)V(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}V(\tau)G(t-\tau)d\tau, \tag{6}$$

dove

$$G(t)=\frac{1}{2}\Delta f(\Delta)I(t). \tag{7}$$

Diremo, col Giorgi, che $G(t)$ è la *funzione generatrice* di $f(\Delta)$.

Osserviamo poi che dalla (3) segue

$$I(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\lambda t}-e^{-i\lambda t}}{\lambda}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{\omega}d\omega, \quad (i^2=-1). \tag{8}$$

L'ultima integrazione può essere eseguita, nel piano della variabile complessa ω, lungo l'asse immaginario, nel senso che va da $\omega=-i\infty$, a $\omega=+i\infty$, o lungo una qualunque altra linea s, che congiunga gli stessi punti, nello stesso verso. Se questa linea non passa per l'origine, si ha pure

$$I(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(s+s')}\frac{e^{\omega t}}{\omega}d\omega,$$

dove s' è la linea simmetrica di s rispetto all'origine, percorsa, come s, nel senso che va da $-i\infty$ a $+i\infty$.

Ricordiamo ora che quando p è una costante (rispetto a t), si ha

$$f(\Delta)e^{pt}=f(p)e^{pt};$$

per cui dalle (7), (8) discende

$$G(t)=\frac{1}{4\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}[f(\omega)e^{\omega t}+f(-\omega)e^{-\omega t}]d\omega. \tag{9}$$

Per l'esistenza di $G(t)$ si richiede, naturalmente, che $f(\omega)$ sia definita lungo una qualche linea s che vada da $-i\infty$ a $+i\infty$, ed in forma tale che l'ultimo integrale, calcolato lungo s, risulti convergente; e quando ciò si verifichi, si ha pure

$$G(t)=\frac{1}{4\pi i}\int_{(s+s')}f(\omega)e^{\omega t}d\omega,$$

dove s' ha il significato che già gli abbiamo attribuito. Ma si riscontra subito una indeterminazione nella valutazione di $G(t)$, dipendente dalle diverse possibilità di scelta per il percorso di integrazione. Questa indeterminazione fu posta in chiara luce dal prof. Giorgi.

Supponiamo che $f(\omega)$ sia definita lungo tutto l'asse immaginario, in maniera tale, che si verifichi la convergenza dell'integrale (9) lungo lo stesso asse. Intendendo allora che l'integrazione sia eseguita appunto con questo percorso, si ottiene

$$G(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} f(\omega)e^{\omega t}d\omega. \tag{10}$$

Se, per di più, $f(\omega)$ è analitica, e non presenta singolarità in tutto il semipiano a destra dell'asse immaginario, la valutazione indicata obbedisce alla *legge di successione* (secondo Giorgi); in altri termini, la valutazione corrispondente di $f(\Delta)V(t)$ dipende unicamente dai valori di $V(t)$ antecedenti a t (1). Infatti si potrà assumere come linea d'integrazione una qualunque linea che vada da $-i\infty$ a $+i\infty$, lasciando a sinistra l'asse immaginario; p. es. il semicerchio infinito di destra. Si trova allora

$$G(t)=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(re^{i\theta})e^{re^{i\theta}t+i\theta}d\theta\,;$$

d'altra parte, se nel semipiano considerato è

$$|f(\omega)|\leq A,$$

risulta

$$\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(re^{i\theta})e^{re^{i\theta}t+i\theta}d\theta\right|\leq A\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{rt\cos\theta}d\theta\,;$$

e per $t<0$ l'ultimo integrale tende a zero, al divergere di r. Ciò basta per riconoscere, in base alla (6), che

$$f(\Delta)V(t)=\int_{-\infty}^{t} V(\tau)G(t-\tau)d\tau \quad (^2). \tag{11}$$

(1) Cfr. Giorgi, ***Sul calcolo delle soluzioni funzionali***, op. cit. all'art. 1, parte III.

(2) Una tale determinazione è detta da Wiener « retrospettiva », [cfr. Wiener, op. cit. all'art. 1. § 7]. Essa era stata molto tempo prima considerata, ed esaurientemente discussa dal

Non tutte le condizioni specificate sopra per $f(\omega)$ sono verificate dall'operatore (1). Ma mostreremo in seguito che esso si esprime facilmente per mezzo dell'altro

$$(a + \Delta)^{-n},$$

con $n > 1$, e a costante (rispetto a t) positiva; ed a quest'ultimo sono evidentemente applicabili le osservazioni precedenti.

3. Valutazione dell'operatore $(g + k\Delta)^{-n}$. — Trascurando il fattore costante k^{-n}, ci riferiremo all'operatore $(a + \Delta)^{-n}$, con $a = g : k$; e supporremo dapprima $n > 1$. Dalla (10) si ha subito l'espressione corrispondente di $G(t)$; ma sostituiremo a quella la formula equivalente

$$G(t) = \frac{1}{4\pi i} \Delta \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left[\frac{e^{\omega t}}{(a + \omega)^n} - \frac{e^{-\omega t}}{(a - \omega)^n}\right] \frac{d\omega}{\omega}, \tag{12}$$

che ne rende più agevole il calcolo. Nella (12) l'integrazione deve essere eseguita lungo l'asse immaginario (o lungo una linea che vada da $-i\infty$ a $+i\infty$, lasciando a sinistra questo asse), se, come noi vogliamo, si desidera una valutazione *retrospettiva.*

La convergenza dell'integrale (12) è allora facilmente controllabile; l'unico punto, in cui non è palese la regolarità della funzione sotto il segno, è l'origine, ma con un semplice calcolo si trova che tale funzione si mantiene ivi finita.

Ciò posto, ricordiamo la formula

$$\int_0^\infty e^{-k\tau} \tau^{p-1} d\tau = \frac{\Gamma(p)}{k^p}, \tag{13}$$

dove p e k sono costanti rispetto a τ, la prima positiva, la seconda reale o complessa, con parte reale positiva, e $\Gamma(p)$ è la nota funzione euleriana [1]. Posto, nella (13), $p = n$, e, successivamente, $a + \omega$, e $a - \omega$, in luogo di k,

---

GIORGI, [*Sul calcolo delle soluzioni funzionali*, parte III]. Le considerazioni fatte sopra (implicitamente contenute in quelle, più generali, del GIORGI), valgono per lo speciale gruppo di operatori che abbiamo indicato in principio.

[1] Cfr. p. es. RIEMANN-WEBER, *Partielle differential gleichungen der Mathematischen Physik*, (1919), Bd. I, § 15.

(ciò che è lecito, giacchè $a > 0$), risulta

$$(a+\omega)^{-n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-\tau(a+\omega)}\tau^{n-1}d\tau,$$

$$(a-\omega)^{-n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-\tau(a-\omega)}\tau^{n-1}d\tau.$$

Sostituendo nella (12), ed eseguendo uno scambio nell'ordine delle integrazioni, si trova

$$G(t) = \frac{1}{4\pi i}\Delta\int_0^\infty \frac{e^{-a\tau}\tau^{n-1}}{\Gamma(n)}d\tau\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{e^{\omega(t-\tau)}-e^{-\omega(t-\tau)}}{\omega}d\omega,$$

ovvero, per la (8),

$$G(t) = \frac{1}{2}\Delta\int_0^\infty \frac{e^{-a\tau}\tau^{n-1}}{\Gamma(n)}I(t-\tau)d\tau.$$

Finalmente dalla (6) discende che l'ultimo integrale vale zero per $t < 0$, ed

$$\frac{e^{-at}t^{n-1}}{\Gamma(n)},$$

per $t < 0$. Si ha dunque

$$G(t) = \begin{cases} 0, & \text{per } t < 0, \\ \dfrac{e^{-at}t^{n-1}}{\Gamma(n)}, & \text{per } t > 0. \end{cases}$$

Ricorrendo poi nuovamente alla (6), si ottiene

$$(a+\Delta)^{-n}V(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_{-\infty}^t V(\tau)e^{-a(t-\tau)}(t-\tau)^{n-1}d\tau. \tag{14}$$

È facile ora riconoscere che questa valutazione, ottenuta per $n > 1$, sussiste, più generalmente, per $n > 0$. Posto, infatti

$$n = m+1, \quad \text{con} \quad m > 0,$$

dalla (14), eseguendo ulteriormente l'operazione $a+\Delta$, si trae

$$(a+\Delta)\left[\frac{1}{(a+\Delta)^n}V(t)\right] = (a+\Delta)^{-m}V(t) = \frac{a+\Delta}{\Gamma(m+1)}\int_{-\infty}^t V(\tau)e^{-a(t-\tau)}(t-\tau)^m d\tau,$$

da cui, poichè

$$(a+\Delta)\int_{-\infty}^{t} V(\tau)e^{-a(t-\tau)}(t-\tau)^m d\tau = m\int_{-\infty}^{t} V(\tau)e^{-a(t-\tau)}(t-\tau)^{m-1}d\tau,$$

$$\Gamma(m+1) = m\Gamma(m),$$

si deduce senz'altro là (14), con lo scambio di n in m:

$$(a+\Delta)^{-m}V(t) = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_{-\infty}^{t} V(\tau)e^{-a(t-\tau)}(t-\tau)^{m-1}d\tau, \qquad (m>0).$$

Da quest'ultima si può poi dedurre la valutazione analoga per $(a+\Delta)^N$, con $N>0$.

Supposto $N=p-m$, con $0<m<1$, e p intero positivo, si ha

$$(a+\Delta)^N V(t) = (a+\Delta)^p[(a+\Delta)^{-m}V(t)] = \frac{(a+\Delta)^p}{\Gamma(m)}\int_{-\infty}^{t} V(t)e^{-a(t-\tau)}(t-\tau)^{m-1}d\tau.$$

Si è così ridotti a operazioni di derivazione (ordinaria). Occorre notare però che non è lecita la derivazione sotto il segno, poichè la funzione integranda diviene infinita per $\tau = t$.

Osserviamo ancora che per $n=1$ la (14) si riduce alla formula nota

$$\frac{1}{a+\Delta}V(t) = \int_{-\infty}^{t} V(\tau)e^{-a(t-\tau)}d\tau \ (^1).$$

4. L'operatore $(a+\Delta)^{-n}(b+\Delta)^{-p}$. — Supporremo, al solito, a, b, n, p indipendenti da t, e positlve.

Posto, in base alla (14),

$$(15) \qquad W(\tau) = (a+\Delta)^{-n}V(\tau) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_{-\infty}^{\tau} V(\theta)e^{-a(\tau-\theta)}(\tau-\theta)^{n-1}d\theta,$$

risulta, per la (14) stessa, con lo scambio di a ed n in b e p rispettivamente, e di $V(t)$ in $W(t)$,

$$(16) \quad (b+\Delta)^{-p}(a+\Delta)^{-n}V(t) = (b+\Delta)^{-p}W(t) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_{-\infty}^{t} W(\tau)e^{-b(t-\tau)}(t-\tau)^{p-1}d\tau.$$

---

(1) Cfr. i lavori di Boole ed altri; per una discussione completa, ved. Giorgi, *Il metodo simbolico*, op. cit. all'art. 1, n. 38.

Ma per poter applicare questa formula occorre accertare la convergenza dell'ultimo integrale. Dalla (15) risulta intanto che $W(\tau)$ è continua in ogni intervallo finito; basterà dunque esaminarne il comportamento per $\tau \to -\infty$. Osserviamo per questo che abbiamo supposto in principio $V(t)$ integrabile tra $-\infty$ e $+\infty$, e quindi limitata per t sufficientemente grande in valore assoluto [1]. Sarà dunque possibile trovare un numero $T > 0$, tale che per $\tau < -T$ sia

$$| V(t) | < k,$$

con k costante (positiva). Allora, per

$$-T_1 < \tau < -T,$$

si ha

$$\left|\int_{-T_1}^{\tau} V(\theta)e^{-a(\tau-\theta)}(\tau-\theta)^{n-1}d\theta\right| \leq k\int_{-T_1}^{\tau} e^{-a(\tau-\theta)}(\tau-\theta)^{n-1}d\theta. \tag{17}$$

Ma per $T_1 \to -\infty$ l'ultimo integrale tende a

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{-a(\tau-\theta)}(\tau-\theta)^{n-1}d\theta = \int_{0}^{\infty} e^{-a\theta}\theta^{n-1}d\theta,$$

e quindi, per la (13), a

$$\frac{\Gamma(n)}{a^n}.$$

Per conseguenza, dalle (15), (17), discende

$$| W(\tau) | \leq \frac{k}{a^n}, \qquad (\tau < -T);$$

e di qui segue senz'altro la convergenza dell'integrale (16).

Dalle (15), (16), risulta ancora

$$(a+\Delta)^{-n}(b+\Delta)^{-p}V(t) = \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(p)}\int_{-\infty}^{t} e^{-b(t-\tau)}(t-\tau)^{p-1}d\tau\int_{-\infty}^{\tau} V(\theta)e^{-a(\tau-\theta)}(\tau-\theta)^{n-1}d\theta.$$

Nel secondo membro è possibile uno scambio nell'ordine delle integra-

[1] Se $V(t)$ fosse soltanto integrabile in ogni intervallo finito, la dimostrazione che segue resterebbe valida, aggiungendo l'ipotesi che $V(t)$ sia limitata per $t \to -\infty$.

zioni, per mezzo della nota formula di DIRICHLET; con ciò esso diviene

$$\frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(p)}\int_{-\infty}^{t} V(\theta)d\theta\int_{\theta}^{t} e^{-b(t-\tau)-a(\tau-\theta)}(t-\tau)^{p-1}(\tau-\theta)^{n-1}d\tau,$$

ovvero, sostituendo a τ la variabile s definita dall'uguaglianza

$$\tau-\theta=(t-\theta)s,$$

$$\frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(p)}\int_{-\infty}^{t} V(\theta)(t-\theta)^{n+p-1}d\theta\int_{0}^{1} e^{-(t-\theta)[as+b(1-s)]}s^{n-1}(1-s)^{p-1}ds.$$

Risulta infine

$$(a+\Delta)^{-n}(b+\Delta)^{-p}V(t)=\int_{-\infty}^{t} V(\theta)(t-\theta)^{n+p-1}H_{n,p}(t-\theta)d\theta, \tag{18}$$

ove si è posto, per brevità,

$$H_{n,p}(t)=\frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(p)}\int_{0}^{1} e^{-t[as+b(1-s)]}s^{n-1}(1-s)^{p-1}ds. \tag{19}$$

Nel caso attuale è dunque

$$G(t)=t^{n+p-1}H_{n,p}(t),$$

per $t>0$, e, naturalmente, $G(t)=0$, per $t<0$. Si riconosce subito che $G(t)$ è una trascendente intera. Interessa esaminare il comportamento di $G(t)$, per $t\to\infty$. Supposto, per es., $b<a$, si ha intanto

$$e^{-t[as+b(1-s)]}\leq e^{-bt},$$

e per conseguenza

$$0<H_{n,p}(t)\leq\frac{e^{-bt}}{\Gamma(n)\Gamma(p)}\int_{0}^{1} s^{n-1}(1-s)^{p-1}ds=e^{-bt}\Gamma(n+p),$$

(come risulta subito da una nota proprietà degli integrali euleriani di prima specie). Di qui segue che $G(t)$ tende esponenzialmente a zero, per $t\to\infty$. Con ciò resta assicurata la convergenza dell'integrale (18). Se poi fosse $b>a$, basterebbe nella (19) cambiare s in $1-s$, per giungere alle stesse conclusioni.

5. L'operatore (1). — Dagli operatori considerati si passa, senza alcuna difficoltà sostanziale, all'operatore generico

$$\frac{(a_1 + \Delta)^{n_1}(a_2 + \Delta)^{n_2} \dots (a_h + \Delta)^{n_h}}{(b_1 + \Delta)^{p_1}(b_2 + \Delta)^{p_2} \dots (b_k + \Delta)^{p_k}},$$

dove le a_i, n_i (per $i = 1, 2, \dots, h$), e le b_i, p_i (per $i = 1, 2, \dots, h$) siano quantità positive, indipendenti da t. Noi ci fermeremo in particolare sull'operatore (1), per il quale si hanno semplificazioni notevoli nei calcoli.

Supposto, dapprima, $0 < n < 1$, dalla (18), ove si ponga $p = 1 - n$, e si applichi ulteriormente l'operazione $b + \Delta$, discende

$$\left(\frac{b + \Delta}{a + \Delta}\right)^n V(t) = (b + \Delta)\int_{-\infty}^{t} V(\theta)H_{n,1-n}(t - \theta)d\theta\,; \tag{20}$$

e dalla (19),

$$H_{n,1-n}(t) = \frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{\pi}\int_0^1 e^{-t[as + b(1-s)]}s^{n-1}(1 - s)^{-n}ds \text{ (1)}. \tag{21}$$

Al secondo membro della (20) è possibile la derivazione sotto il segno. Tenuto conto che

$$H_{n,1-n}(0) = 1,$$

si trova

$$\left(\frac{b + \Delta}{a + \Delta}\right)^n V(t) = V(t) + \int_{-\infty}^{t} V(\theta)\left(b + \frac{\partial}{\partial t}\right)H_{n,1-n}(t - \theta)d\theta, \tag{22}$$

e quindi, con le notazioni del GIORGI,

$$G(t) = Fu(t) + (b + \Delta)H_{n,1-n}(t).$$

Per riconoscere la convergenza dell'integrale (22) è sufficiente esaminare il comportamento di $\Delta H_{n,1-n}(t)$, per $t \to \infty$. Con un procedimento simile a quello usato nel numero precedente per l'integrale (19), si trova che anche questa ultima funzione tende esponenzialmente a zero (per $t \to \infty$).

Particolare interesse presenta il caso di $n = \frac{1}{2}$. Si verifica allora una circostanza notevole: la funzione generatrice corrispondente è legata in modo

---

(1) Si tenga presente che

$$\Gamma(n)\Gamma(1 - n) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(n\pi)}, \quad \text{per} \quad 0 < n < 1.$$

semplice alla funzione di BESSEL di prima specie e di ordine zero, $J_0(t)$. Si ha infatti, dalla (21),

$$H_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(t) = \frac{e^{-bt}}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-t(a-b)u}}{\sqrt{u(1-u)}}\,du,$$

ovvero, posto

$$I_0(z) = \frac{e^z}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-2zu}}{\sqrt{u(1-u)}}\,du, \tag{23}$$

$$H_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(t) = e^{-\frac{a+b}{2}t} I_0\left(\frac{a-b}{2}\,t\right). \tag{24}$$

Dalla (23) risulta

$$I_0(z) = J_0(iz) \text{ [1]}.$$

Indicando, ancora, con $I_1(z)$ la derivata di $I_0(z)$, (rapporto a z), si ha

$$(b+\Delta)H_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(t) = \frac{a-b}{2}\,e^{-\frac{a+b}{2}}\left\{ I_1\left(\frac{a-b}{2}\,t\right) - I_0\left(\frac{a-b}{2}\,t\right)\right\},$$

e sostituendo nella (22)

$$\sqrt{\frac{b+\Delta}{a+\Delta}}\,V(t) = V(t) + \frac{a-b}{2}\int_{-\infty}^{t} V(\theta)e^{-\frac{a+b}{2}(t-\theta)}\left\{ I_1\left[\frac{a-b}{2}(t-\theta)\right] - I_0\left[\frac{a-b}{2}(t-\theta)\right]\right\} d\theta. \tag{25}$$

Resta ora da esaminare l'operatore (1) nel caso in cui è $n > 1$. Ma se

$$N = n + p,$$

con $0 < n < 1$, e p intero positivo, si ha, identicamente,

$$\left(\frac{b+\Delta}{a+\Delta}\right)^N V(t) = (b+\Delta)^{p+1}(b+\Delta)^{n-1}(a+\Delta)^{-n-p}V(t) =$$

$$= (b+\Delta)^{p+1}\int_{-\infty}^{t} V(\theta)H_{1-n,\,n+p}(t-\theta)\cdot(t-\theta)^p d\theta,$$

come risulta dalla (18). Si è quindi ridotti ad operazioni di derivazione (ordinaria).

---

(1) Cfr. RIEMANN-WEBER, loco cit. (6), § 75.

La funzione $I_0(z)$ è detta da qualche autore funzione di BESSEL *non oscillante*. Importanti considerazioni intorno ad essa si trovano in una recente Memoria del prof. GIORGI: *Sugli integrali dell'equazione di propagazione in una dimensione*, « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », T. LII, (1928), pp. 1-48.

6. La derivazione ad indice qualunque. — Facendo nella (14) $a = 0$, si ottiene la formula nota

$$\Delta^{-n} V(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{-\infty}^{t} V(\tau)(t-\tau)^{n-1} d\tau \quad (26)$$ [1].

Ma sebbene la (14) conservi un significato per $a = 0$, noi l'abbiamo potuta stabilire supponendo $a > 0$. Mostreremo in ciò che segue come si possa in modo agevole pervenire direttamente alla (26). Notiamo intanto che, volendo ottenere una valutazione retrospettiva, è lecito valersi della (10), purchè sia $0 < n < 1$; essa ci porge

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{\omega t}}{\omega^n} d\omega,$$

e l'integrazione può essere eseguita lungo l'asse immaginario. Posto quindi $\omega = i\lambda$, si ha

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{(i\lambda)^n} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [i^{-n} e^{i\lambda t} + (-i)^{-n} e^{-i\lambda t}) \frac{d\lambda}{\lambda^n},$$

ovvero, essendo

$$i^{-n} e^{i\lambda t} + (-i)^{-n} e^{-i\lambda t} = 2 \cos\left(\lambda t - n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$G(t) = \frac{1}{\pi} \left\{ \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda t}{\lambda^n} d\lambda + \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{\lambda^n} d\lambda \right\}. \quad (27)$$

Ora è noto che

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^n} dx = \frac{1}{2\Gamma(n)} \frac{\pi}{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}, \qquad (0 < n < 1),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^n} dx = \frac{1}{2\Gamma(n)} \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)}, \qquad (0 < n < 2)$$ [2],

(1) Cfr. GIORGI, *Sul calcolo delle soluzioni funzionali*, (44), p. 38.
(2) Cfr., p. es., CESÀRO, *Elementi di calcolo infinitesimale*, 1897, p. 314.

da cui, facendo $x = \lambda\,|\,t\,|$,

$$(28)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\lambda t}{\lambda^n}\,d\lambda = \frac{1}{2\Gamma(n)}\,\frac{\pi}{\cos\left(n\,\dfrac{\pi}{2}\right)}\,|\,t\,|^{n-1}, & (0 < n < 1), \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\lambda\,|\,t\,|}{\lambda^n}\,d\lambda = \pm\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\lambda t}{\lambda^n}\,d\lambda = \frac{1}{2\Gamma(n)}\,\frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(n\,\dfrac{\pi}{2}\right)}\,|\,t\,|^{n-1}, & (0 < n < 2), \end{cases}$$

dove varrà il segno superiore o l'inferiore, secondoche è t positivo o negativo.

Dalle (27), (28), si trae, com'è naturale, che $G(t)$ si annulla per $t < 0$, mentre per $t > 0$ risulta

$$G(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}\,t^{n-1}.$$

Cambiando poi t in $t - \tau$, e sostituendo nella (6), si ottiene senz'altro la (26).

Quanto alla convergenza dell'integrale (26) essa è assicurata, quando $V(t)$ si annulla del 1° ordine per $t \to \infty$. La (26) stessa si estende subito al caso di $n > 1$, se $V(t)$ si annulla per $t \to -\infty$, di ordine uguale alla parte intera di n, aumentata di uno. Posto infatti, ancora, $n = m + p$, con p intero positivo e $0 < m < 1$, cambiando nella (26) n in m, con p integrazioni successive si trova, [tenuto conto che è $\Gamma(m+p) = (m+p-1)(m+p-2)\ldots m\Gamma(m)$]:

$$\Delta^{-m-p}\,V(t) = \frac{1}{\Gamma(m+p)}\int_{-\infty}^{t} V(\tau)(t-\tau)^{m+p-1}d\tau.$$

Infine, se p ed m sono due numeri del tipo ora indicato, si ottiene la valutazione di Δ^n, con $n = p - m$, mediante la formula

$$\Delta^n\,V(t) = \frac{\Delta^p}{\Gamma(m)}\int_{-\infty}^{t} V(\tau)(t-\tau)^{m-1}d\tau,$$

nella quale però, [come già nella (14)], non è lecita la derivazione sotto il segno d'integrale.

Sui processi integrali di Stieltjes.

Nota di PIA NALLI e GIULIO ANDREOLI (a Catania).

Sunto. - *Nella Nota gli Autori riprendono lo sviluppo di idee già svolte in altra precedente, introducendo altresì nuovi oggetti e sviluppi degli stessi. Dal loro punto di vista, nella definizione di integrale si presentano due concetti fondamentali: uno algoritmico, che conduce alle definizioni di* CAUCHY, RIEMANN, LEBESGUE, TONELLI *ecc., l'altro di natura concettuale relativa a quello di* STIELTJES.

Gli Autori sviluppano quanto può ottenersi dall'applicazione simultanea dei due concetti, mostrando fra l'altro che l'integrale del TONELLI *si può riattaccare a quello di* STIELTJES.

Ulteriori indicazioni di altri processi, nati spontaneamente dalla teoria delle equazioni funzionali, sono dati dagli Autori.

1. Nella presente Nota, facente seguito ad altra nostra [1], ci occupiamo ancora del concetto di integrale di STIELTJES.

Principalmente in questa, procuriamo di porre in luce la vera essenza di tale processo, sviluppando però le nostre teorie quasi esclusivamente pel caso di una variabile, mentre nella già citata Nota consideravamo quasi esclusivamente l'estensione dell'integrale ordinario di STIELTJES al caso di più variabili.

In sostanza noi mostriamo come nella definizione di integrale si presentino due fatti del tutto staccati, di cui uno avente valore di processo algoritmico (e che conduce quindi agli integrali di CAUCHY, RIEMANN, DARBOUX ecc.) ed uno di natura diversa, connesso alle definizioni di STIELTJES.

Collegando le due cose, si ha tutto un vasto campo di processi integrali che daranno luogo ad integrali di CAUCHY-STIELTJES, di RIEMANN-STIELTJES e così via. È tipico il fatto che la recente definizione d'integrale del TONELLI [2] rientri appunto in tali processi.

---

[1] La presente Nota che fa seguito ad altra nostra, e che redatta fin dal 1928 è pubblicata ora, coincide con parecchie delle definizioni date dal LEBESGUE nella ultima edizione della « Intégration ». Tuttavia, siccome oltre quelle vi sono ancora altre idee formanti un tutto organico, così ci decidiamo a pubblicarla lo stesso nonostante la comparsa del libro detto. Le cause del ritardo si devono al richiamo in servizio militare dell'ANDREOLI.

Cfr. P. NALLI e G. ANDREOLI, « Rend. Circolo Matematico di Palermo », 1928.

[2] Cfr. L. TONELLI, « Annali di Matematica ».

2. Integrale di Cauchy-Stieltjes. — Consideriamo una funzione $f(x)$ continua in (a, b) ed un'altra funzione $\alpha(x)$ a variazione limitata nello stesso intervallo.

Diviso (a, b) in intervalli parziali per mezzo dei punti $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$

$$a < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < b \qquad (x_0 = a, \ x_n = b)$$

e detto f_i uno qualunque dei valori della f in (x_{i-1}, x_i), la somma

$$S = \Sigma f_i[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]$$

al tendere a zero degli intervalli di divisione, tende ad un limite che si indica col simbolo

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)$$

e che si chiama integrale di STIELTJES.

Allorchè $\alpha(x) = x$ si ha l'integrale di CAUCHY della funzione $f(x)$.

Si osservi sin da ora che, in sostanza, un integrale di STIELTJES equivale o ad un integrale curvilineo o a una trasformazione di variabile.

Infatti se L è una linea rappresentata dalle equazioni $Y = \alpha(x)$, $X = \beta(x)$, β essendo anche essa a variazione limitata in (a, b), [in particolare $X \equiv 0$ oppure $X \equiv x$] e se $F(x, y)$ è una funzione definita nei punti di L e tale che

$$F[\alpha(x), \ \beta(x)] = f(x)$$

si ha ovviamente

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_L F(X, \ Y)dY.$$

D'altro canto, se $\alpha(x)$ è monotona, l'integrale dianzi scritto equivale a trasformare (a, b) nell'intervallo $[\alpha(a), \alpha(b)]$ facendo corrispondere al punto x del primo il punto $\alpha(x)$ del secondo se in x la funzione è continua; ed invece facendo corrispondere ad x tutto l'intervallo $[\alpha(x-0), \alpha(x+0)]$ se in x la $\alpha(x)$ ha un salto. In tal modo dalla $f(x)$ definita in (a, b) si passa a $g(\alpha)$ definita in $[\alpha(a), \alpha(b)]$.

Quindi, in questo caso, il processo di STIELTJES si riduce ad applicare la definizione di CAUCHY alla $g(\alpha)$ nel nuovo intervallo.

In generale, la $\alpha(x)$ può avere dei salti in numero finito, o in infinità numerabile nei punti $c_1, c_2, c_3, \ldots$.

Posto

$$s_g(c_i) = \alpha(c_i) - \alpha(c_i - 0)\,; \quad s_d(c_i) = \alpha(c_i + 0) - \alpha(c_i)$$
$$s(c_i) = \alpha(c_i + 0) - \alpha(c_i - 0) = s_d(c_i) + s_g(c_i)$$

la s_g dà il salto a sinistra, s_d quello a destra di c_i; e la s dà il salto in c_i.

La funzione dei salti resta definita da

$$S(x) = \sum_{a \leq c_i < x} s_d(c_i) + \sum_{a < c_i \leq x} s_g(c_i)$$

e risulta ovviamente

$$\alpha(x) = \gamma(x) + S(x)$$

γ essendo funzione *continua* a variazione limitata in (a, b) ed inoltre avendo

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)d\gamma(x) + \int_a^b f(x)dS(x)$$

con

$$\int_a^b f(x)dS(x) = \sum_i s(c_i)f(c_i).$$

3. Integrale di Riemann-Stieltjes. — Ove la funzione integranda f non sia più continua, nell'integrazione ordinaria si passa — come prima estensione — all'integrale di RIEMANN. Si tratta quindi di ricercare sotto quali condizioni la somma introdotto da CAUCHY,

$$\Sigma\,(x_i - x_{i-1})f_i$$

tenda ancora ad un limite al tendere a zero degli intervalli (x_{i-1}, x_i) nel caso di f discontinua.

Il limite stesso si dice integrale di RIEMANN della f, e le condizioni si danno esplicitamente sotto diverse forme.

La analoga estensione si può fare per gli integrali di STIELTJES.

Sia dunque f *soltanto* limitata in (a, b) invece che continua, ed α una qualunque funzione a variazione limitata nello stesso intervallo: ove sia $\alpha(x) = x$, si ricade nell'ordinario integrale di RIEMANN.

Consideriamo ora di nuovo la somma

$$S = \Sigma f_i \cdot [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]\,;$$

se essa tende ad un limite allorchè gli (x_{i-1}, x_i) tendono a zero e le f_i sono scelte comunque, allora diremo che la $f(x)$ è integrabile $(S - R)$ secondo α, in a, b, segnando ancora tale limite con

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

Ricerchiamo ora le condizioni di esistenza di tale limite, ovverosia quelle di integrabilità di $f(x)$ secondo α, nel modo $(S - R)$.

Operiamo dunque la solita suddivisione di (a, b) in intervalli parziali ed indichiamo con M_i, m_i rispettivamente estremo superiore ed estremo inferiore di f in (x_{i-1}, x_i).

Formiamo una somma $\overline{S}$ analoga alla S, sostituendo ad f_i il valore M_i oppure m_i secondo che $\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$ sia positivo o negativo; ed in modo analogo formiamo una somma $\underline{S}$ scambiando M_i con m_i.

Risulta subito ehe si avrà

$$\overline{S} - \underline{S} = \Sigma \mid \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \mid \cdot \omega_i$$

dove ω_i è l'oscillazione di f in (x_{i-1}, x_i).

Se la funzione f è integrabile $(S - R)$, le somme S ed $\underline{S}$ tendono allo stesso limite quando gli intervalli tendono a zero; dunque in tal caso la loro differenza, che chiameremo σ, tende a zero.

In altri termini, fissato un numero $\varepsilon > 0$, se ne deve poter trovare un altro η, anch'esso maggiore di zero, tale che se

$$x_i - x_{i-1} < \eta$$

risulti anche

$$\sigma < \varepsilon.$$

Fissato ora un numero h, denotiamo con $G(h)$ l'insieme dei punti dove l'oscillazioue di $f(x)$ è $\geq h$; e avendo operata la suddivisione di (a, b) consideriamo soltanto quegli intervalli che racchiudono punti di $G(h)$: li denoteremo con (x'_{j-1}, x'_j).

Risulta ovviamente

$$\sigma > \Sigma \mid \alpha(x'_j) - \alpha(x'_{j-1}) \mid \cdot h$$

e quindi se nella suddivisione gli intervalli scendono al disotto di η, dovrà essere

$$\Sigma \mid \alpha(x'_j) - \alpha(x'_{j-1}) \mid < \frac{\varepsilon}{\eta}.$$

Quindi per l'integrabilità $(S - R)$ occorre: *che fissato* $\varepsilon > 0$ *ed* $h > 0$ *si possa determinare* δ *in modo tale che in una qualunque suddivisione* (*ad intervalli minori di* δ), *quegli intervalli nei quali l'oscillazione di* f *supera* h *siano chiusi in intervalli tali che la variazione di* α (¹) *negli estremi non superi* ε.

La condizione è anche sufficiente. In effetti, se si considerano oltre S, la somma S', ottenuta aggiungendo nuovi punti a quelli di divisione occorrenti a definire la S, sarà ovviamente

$$|S - S'| < h \cdot \varepsilon + h V_a^b(\alpha) \quad (^2)$$

e quindi tale differenza si può rendere arbitrariamente piccola, impiccolendo δ.

Se consideriamo più generalmente la somma S' ottenuta con una qualunque altra suddivisione, basta col solito procedimento formare una nuova divisione sovrapponendo quella di S e quella di S', chiamare S'' la somma ottenuta da questa nuova sncldivisione e ricondursi così al confronto di S ed S'', di S' ed S'' col procedimento dianzi usato.

In particolare ne segue che la $f(x)$ *deve essere continua nei punti di salto*, C_i, *della* α (condiz. necessaria).

Nel caso che la $\alpha(x)$ risulti monotona, per poter soddisfare la condizione dianzi enunciata, occorre e basta che si possa trovare una suddivisione qualunque di (a, b) che soddisfi all'enunciato. Quindi: *per l'integrabilità* (S — R) *rispetto ad una funzione* α *monotona occorre e basta che, fissato* $\varepsilon > 0$, *si possano racchiudere i punti di discontinuità di* f *in un numero finito od in un'infinità numerabile d'intervalli, tali che la variazione di* α *su tale plurintervallo sia minore di* ε.

Per $\alpha(x) = x$ si ritrova così la ben nota condizione di VITALI-LEBESGUE per l'integrabilità secondo RIEMANN.

La condizione enunciata come necessaria e sufficiente per una α monotona, resta semplicemente *necessaria* ma *non sufficiente* per un α qualunque, a variazione limitata, non monotona.

Del resto se $\alpha(x)$ è monotona, la condizione di integrabilità $(S - R)$ secondo α può assumere diverse forme che, per $\alpha(x) = x$, diventano le ben note per l'integrabilità secondo RIEMANN; anche tali forme, naturalmente sono necessarie ma non più sufficienti per una α a variazione limitata ma non monotona.

(¹) *Variazione* in un plurintervallo sarà la somma dei valori assoluti delle differenze dei valori di α agli estremi di ciascun intervallo costituente il plurintervallo.

(²) $V_a^b(\alpha)$ è la variazione di α in (a, b).

Tali forme sono ad esempio:

Affinchè $f(x)$ sia integrabile $(S - R)$ secondo α monotona, occorre e basta che:

1°) fissate $\varepsilon > 0$, si possa formare una $\sigma < \varepsilon$;

2°) fissate $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, si possa dividere (a, b) in parti tali che la di α risulti *minore* di ε, in quegli intervalli nei quali la oscillazione di f superi η;

3°) fissate $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, si possano chiudere i punti di discontinuità di f, con oscillazione *maggiore* di η, in un numero *finito* d'intervalli nei quali la variazione di α sia *minore* di ε.

Per una funzione α qualunque, avendola scomposta nella somma delle due funzioni γ, continua, ed $S(x)$ funzione dei salti, risulta che se $f(x)$ è integrabile (S, R) rispetto ad α, lo sarà anche rispetto a γ e rispetto ad $S(x)$ [poichè per l'integrabilità rispetto ad una funzione quali sono le $S(x)$, la continuità di $f(x)$ nei punti di salto è ovviamente non solo necessaria ma anche sufficiente] e si ha

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)d\gamma(x) + \int_a^b f(x)dS(x)$$

ove il secondo termine a destra, resta lo stesso che nel caso di $f(x)$ continua, cioè

$$\sum_{i-0}^{\infty}{}' s(c_i)f(c_i).$$

In particolare *qualunque funzione a variazione limitata* (o più generalmente qualunque funzione limitata avente al più un'infinita numerabile di discontinuità) *è integrabile* $(S - R)$, con le solite avvertenze circa i punti di continuità di f nelle discontinuità di α, cioè nei punti c_i.

4. Ulteriori generalizzazioni nel senso di Lebesgue, Denjoy, ecc. — Come per l'integrale ordinario si passa successivamente dall'integrale di CAUCHY a quello di RIEMANN e poi alle più generali definizioni di integrali allargando sempre più il campo funzionale cui si può applicare l'integrazione, lo stesso si può fare servendosi di una $\alpha(x)$, a variazione limitata, almeno se è monotona, servendosi appunto dell'ultima proprietà trovata.

Supposto dunque $\alpha(x)$ monotona e già decomposta nella parte continua e nella funzione dei salti, ambedue a lor volta monotone,

$$\alpha(x) = \gamma(x) + S(x)$$

cominceremo col definire

$$\int_a^b f(x)dS(x)$$

per ***tutte le funzioni limitate*** in (a, b) ponendolo eguale a $\Sigma s(c_i)f(c_i)$; e quando avremo dato significato a

$$\int_a^b f(x)d\gamma(x)$$

porremo per definizione

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)d\gamma(x) + \int_a^b f(x)dS(x);$$

in altri termini riconduciamo il problema a dare un significato all'integrale nel caso che $\alpha(x)$ *sia monotona e continua,* per quelle funzioni $f(x)$ di un campo che contenga almeno quelle integrabili $(S' — R)$.

Se si vuol giungere ad una generalizzazione del tipo LEBESGUE, definendo gli integrali $(S — L)$, occorre anzitutto definire [1] per un insieme E, la misura esterna e la misura interna rispetto ad $\alpha(x)$. Racchiuso quindi E in un'infinità numerabile di intervalli, si formi la variazione di α nel plurintervallo: *l'estremo inferiore di tali variazioni si dirà misura esterna di* E *rispetto ad* α. *La differenza fra la variazione totale di* α *in* (a, b) *e la misura interna del complementare di* E *si chiamerà misura interna di* E *rispetto ad* α.

Quando le due misure coincidono, E si dirà misurabile secondo α ed il loro valore comune si chiamerà *misura di* E *secondo* α.

In fondo ciò equivale (come si è detto fin da principio) ad una trasformazione di variabili. Si stabilisce cioè una corrispondenza tra i punti di (a, b) e quelli di $[\alpha(a), \alpha(b)]$ facendo corrispondere ad x del primo, $\alpha(x)$ del secondo.

La corrispondenza è univoca dal primo verso il secondo intervallo; l'inversa invece non è univoca, potendo ad un punto del secondo intervallo corrispondere tutto un intervallo parziale del primo: ciò avverrà al più per un'infinità numerabile di punti.

In tal modo un insieme E di (a, b) viene trasformato in un altro $E' = \alpha(E)$ del secondo intervallo $[\alpha(a), \alpha(b)]$; e la misura esterna ed interna di E rispetto

---

[1] Data tale definizione, la costruzione dell'integrale non offre alcuna diversità da quello ordinario di LEBESGUE.

ad α si ridurranno rispettivamente alla misura esterna ed interna di E' secondo Lebesgue.

Quindi, gli insiemi E misurabili secondo α sono quelli che mediante la α si trasformano in insiemi E' misurabili $\mathfrak{L}$.

Si presenta la quistione fondamentale se ogni insieme misurabile secondo α sia oppur no misurabile $\mathfrak{L}$, quistione che resta anche se ci si limiti a funzioni α monotone in senso stretto.

Accettando il postulato di Zermelo, ciò non è: lo ha dimostrato implicitamente Carathéodory col far vedere che se $f(x)$ è misurabile e $y = g(x)$ è crescente, $f[g^{-1}(y)]$ non è sempre misurabile: ma, allo stato attuale della scienza, non c'è nulla che possa far ritenere che lo stesso risultato non continui a valere anche senza il suddetto postulato.

Anzi c'è proprio da pensare che per ogni funzione monotona $\alpha(x)$ vi sia una classe di insiemi misurabili; in particolare se $\alpha(x) = x$, si hanno gli insiemi misurabili $\mathfrak{L}$.

Infine, siccome in ogni caso, qualsiasi intervallo di (a, b) viene trasformato in un intervallo di $[\alpha(a), \alpha(b)]$, e viceversa, ne segue che gli insiemi misurabili Borel, sono misurabili rispetto ad una qualunque $\alpha(x)$.

Così, per ogni funzione $\alpha(x)$ monotona, c'è una classe di funzioni misurabili; se $\alpha(x)$ è assolutamente continua e la sua derivata si annulla al più su un insieme di misura nulla secondo Lebesgue, la classe è quella delle funzioni misurabili $\mathfrak{L}$. Per un α monotona ma qualunque, non c'è nulla che possa far asserire che ciò avvenga ancora.

Si presentano poi diverse quistioni: Per una funzione $f(x)$ limitata qualunque, esiste sempre qualche α rispetto alla quale f risulti integrabile?

E se ciò non è, come si potranno caratterizzare le funzioni per cui questo avviene?

È appena necessario far osservare che, come la definizione di integrale di Lebesgue, anche le altre (Denjoy, Borel, Young, Tonelli, ecc.) ne hanno una corrispondente rispetto ad una funzione α a variazione limitata.

È da ritenere anzi che tali definizioni possano avere notevole importanza, e che la considerazione di integrali di tipo generale

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)$$

si debba presentare naturalmente nella trattazione di numerosi problemi analitici fondamentali.

Basta pensare al teorema di RIESZ sulla rappresentazione delle operazioni funzionali lineari; basti pensare che un integrale di variabile complessa è un integrale di STIELTJES.

E ciò senza contare che l'integrale di STIELTJES potrebbe forse permettere di dare una definizione di integrale, per classi di funzioni diverse da quelle misurabili LEBESGUE: come vedremo ora.

5. Relazione con gli integrali di Tonelli. Possibilità di integrare funzioni non misurabili *L*. — Supponiamo di aver potuto dare la definizione di integrale

$$\int f(x)d\alpha(x)$$

per una certa classe di funzioni f, e ciò qualunque sia la funzione α scelta in un'altra certa classe di funzioni a variazione limitata (monotona per semplicità).

Inoltre per ogni f, si possa determinare una successione

$$\alpha_1(x),\ \alpha_2(x), \dots\ \alpha_n(x), \dots$$

tale che per u, v compresi in (a, b) si abbia sempre

$$\lim_{n=\infty} [\alpha_n(v) - \alpha_n(u)] = v - u$$

e che esista

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(x)d\alpha_n(x).$$

Se questo limite è indipendente dalla particolare successione α scelta, esso si chiamerà integrale di f in (a, b), segnando al solito:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Così, per esempio, consideriamo la classe delle funzioni quasi-continue in (a, b) secondo la definizione del TONELLI: basta modificare il processo ideato dal TONELLI stesso per avere l'applicazione di quanto abbiamo asserito.

Basta ricordare brevemente la definizione del TONELLI di funzioni quasi continue $f(x)$, di plurintervallo e delle funzioni $f_n(x)$ continue che tendono a $f(x)$: per giungere alla definizione

$$\int f(x)dx = \lim_{n=\infty} \int f_n(x)dx.$$

Il TONELLI dimostra che tale limite è indipendente dalla scelta della successione dei plurintervalli e quindi da quella delle $f_n(x)$.

Orbene, *invece di modificare la funzione* f(x) *noi modificheremo il differenziale d'integrazione, servendoci di integrali di Stieltjes, secondo lo schema ora esposto.*

Precisamente, considerando l'n-simo plurintervallo del TONELLI, attaccato ad $f(x)$, noi definiamo una funzione continua, monotona, costante in ciascun intervallo costituente il plurintervallo, ponendo

$$\alpha_n(x) = x - m_n(a, x)$$

ove il secondo termine rappresenta la somma di tutta la parte del plurintervallo n-simo comune ad (a, x). Si vede che, ovviamente, essa è costante in ognuno degli intervalli costituenti il plurintervallo.

Ripetendo in sostanza gli stessi ragionamenti del TONELLI, si verifica che

$$\lim_{n-\infty}\int_u^v d\alpha_n(x) = \lim_{n=\infty}[\alpha_n(v) - \alpha_n(u)] = v - u \qquad a \leq u \leq v \leq b$$

e, inoltre, per le funzioni quasi continue almeno, esisterà il limite

$$\lim_{n=\infty}\int_u^v f(x)d\alpha_n(x)$$

che assumeremo come definizione di

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Ciò ripetendo passo per passo la teoria del TONELLI; ed inoltre tale limite è indipendente dalla successione dei plurintervalli.

In sostanza, del resto, fatta la differenza

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)d\alpha_n(x)\right|$$

si verifica facilmente che essa è minore o tutt'al più eguale all'estremo superiore di $|f|$ in (a, b) moltiplicato per la misura dell'n-simo plurintervallo, e quindi tende a zero col divergere di n: e pertanto l'esistenza dell'integrale di f secondo TONELLI equivale all'esistenza dell'integrale di f secondo la nuova definizione.

6. Altri procedimenti integrali di Stieltjes. Integrali curvilinei S. — Nella risoluzione di equazioni funzionali, altri tipi ancora di processi integrali di STIELTJES si presentano naturalmente.

Sia data ad esempio una funzione $n(x, y)$ definita in un certo quadrato $[x, y \text{ in } (a, b)]$ e consideriamo — per fissare le idee — la retta $y = x$. Assieme alla n sia assegnata l'altra funzione f, per semplicità continua e limitata (integrali di CAUCHY, come partenza).

Dividiamo (a, b) nel solito modo e formiamo la somma

$$\Sigma' f_i[n(x_{i+1}, x_i) - n(x_i, x_i)].$$

Se al tendere di (x_{i-1}, x_i) a zero la somma detta tende ad un limite, indipendente dalla scelta della suddivisione e delle f_i, questo limite si segnerà

$$\int f(x) d_1 n(x, x) = \int f(x)[d_x n(x, y)]_{x=y}$$

intendendo che il d_1 fissi il tipo di somme da noi indicato.

Più generalmente un integrale S, rispetto ad una curva $\mathfrak{L}$, avrà il significato che segue.

Sia assegnata la n, la f ed una curva $\mathfrak{L}$ nel quadrato di definizione di n.

Tale curva risulti definita al modo di JORDAN, ponendo cioè

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

con φ, ψ funzioni a variazione limitata e continua.

Partiamo (1) dall'elemento iniziale

$$\Sigma f_i \cdot [n(x_{i+1}, y_i) - n(x_i, y_i)]$$

ove i punti (x_1, y_1), (x_2, y_2),... siano punti della curva $\mathfrak{L}$, e quindi i punti (x_{i+1}, y_i) abbiano l'ordinata di un punto di quelli e l'ascissa del successivo, formando una « scaletta » che approssimi la $\mathfrak{L}$.

7. Estensione del concetto di variazione totale. — La possibilità di sviluppo delle precedenti definizioni è intimamente connessa al concetto di va-

(1) Accenneremo appena alla possibilità di ulteriori sviluppi in tale senso; sia cioè utilizzando curve spaziali e funzioni $n(x, y, z)$ ecc.; sia col tracciare invece del reticolato cartesiano nel piano (x, y) un qualunque altro reticolato curvilineo e considerando poi gli incrementi della n non più secondo le maglie del reticolato cartesiano attorno ad L (come si è fatto testè) ma secondo le maglie del nuovo reticolato.

Resta, beninteso, aperta la quistione di svolgere tutte le condizioni di integrabilità e di definire le classi di funzioni integrabili con ciascuno di tali procedimenti.

riazione totale e di funzione monotona secondo gli stessi criteri adottati per arrivare all'integrale.

Anzitutto è fondamentale la « *variazione su insieme di una funzione* α(x) », definita nel seguente modo. Assegnate l'insieme E, si consideri la sua funzione indicatrice $\varphi_E(x)$; e si operi la solita suddivisione dell'intervallo (a, b), però utilizzando segmenti i cui estremi appartengano ad E.

Si consideri la somma delle oscillazioni di $\varphi(x)\cdot\alpha(x)$ sulle porzioni di E contenute in ciascuno di questi intervalli.

L'estremo superiore di tale somme, allorchè tendono a zero i soli segmenti che contengono punti di E (mentre restano non ulteriormente suddivisi quelli in cui non cadono punti di E), darà la variazione totale di α su E.

Osserviamo ora che la variazione totale di α in un intervallo può definirsi oltre che come estremo superiore di tutte le somme

$$\Sigma \mid \alpha(x_{i-1}) - \alpha(x_i) \mid$$

anche come limite superiore delle altre somme

$$\Sigma\, O_\alpha(x_{i-1}, x_i)$$

ove $O_\alpha(x_{i-1}, x_i)$ indichi l'oscillazione di a in (x_{i-1}, x_i).

Allora, per poter esaminare da vicino tutti gli accenni da noi dati nel paragrafo precedente, bisogna estendere quello di variazione totale di $n(x, y)$ lungo la curva $\mathfrak{L}$, in relazione ai reticolati di cui ci serviamo.

Il primo e più ovvio, è quello abituale: definito cioè dalla variazione totale della funzione $\nu(t)$ che si ottiene dalla n sostituendo ad x, y le due funzioni $\varphi(t)$ e $\psi(t)$.

Per le altre definizioni converrà invece operare come segue.

Data la curva $\mathfrak{L}$ immersa nel reticolato piano (u, v), siano $t_1, \ldots.\ t_n$ i valori che suddividono l'intervallo di variabilità di t.

Siano $P_1, P_2, \ldots.\ P_n$ i corrispondenti punti della curva; siano $Q_1, Q_2, \ldots.\ Q_n$ i vertici delle maglie del reticolato coordinato (sempre da una stessa banda della curva) tali che le mezze-maglie risultino costituite da $P_1Q_1P_2$, $P_2Q_2P_3, \ldots.$ formanti una « scala » che approssimi la curva $\mathfrak{L}$ nel reticolato (u, v).

Diremo *variazione totale della* n(x, y) *relativa alla curva* $\mathfrak{L}$ *ed al reticolato* (u, v), *l'estremo superiore di*

$$\Sigma\, O[n(x, y);\ P_iQ_i]$$

ove il simbolo O *indichi l'oscillazione della funzione* n *lungo l'arco di linea coordinata* u *che va da* $\mathrm{P_i}$ *a* $\mathrm{Q_i}$.

Tale concetto, nel caso che il reticolato lungo la $\mathfrak{L}$ si schiacci nella $\mathfrak{L}$ stessa (e quindi questa appartenga simultaneamente alle u ed alle v) si riduce alla precedente definizione.

Funzioni monotone n(x, y) *lungo* C *e in* (u, v) *saranno quelle di cui la variazione totale su un qualsiasi arco parziale risulta eguale alla differenza dei valori negli estremi dell'arco stesso.*

In tale caso le teorie precedenti risultano agevolmente estese agli ultimi tipi di integrali dati nel paragrafo precedente.

Di già per se stesso l'integrale curvilineo di una forma differenziale è un integrale di STIELTJES: tuttavia ad esso si può riapplicare il processo, ottenendo integrali di forme differenziali di STIELTJES. Almeno formalmente ed algoritmicamente esso resta definito, aggruppando le definizioni sinora date, ed applicandole al simbolo di significato ovvio ormai:

$$\int_{\mathfrak{L}} A(x,\ y)d\xi + B(x,\ y)d\eta$$

ove $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, ed $\mathfrak{L}$ è la solita linea immersa nel reticolato (n, v).

Osserviamo infine che le discontinuità della n influiscono in modo diverso a seconda del reticolato (u, v) d'immersione di $\mathfrak{L}$. Così ad esempio se $\mathfrak{L}$ coincide con la retta $y = x$ e se n ha una discontinuità a salto lungo tale retta restando costante dalle due bande di questa ed assumendo invece su di essa i valori d'una certa funzione monotona (di x), si vede subito che il far parte del reticolato di porzioni di $y = x$, o il non farne parte conduce a risultati volta a volta diversi.

Del resto, anche in un reticolato si presentano quattro diversi integrali non sempre eguali, secondo che si facciano lungo le u o lungo le v, oppure a destra o a sinistra di $\mathfrak{L}$.

Sull' approssimazione dell' integrale di Lebesgue mediante integrali di Riemann.

Memoria di GIUSEPPE SCORZA-DRAGONI (a Napoli).

Sunto. - *In questa Memoria viene assegnata una legge che ad ogni funzione misurabile fa corrispondere una successione di integrali di* RIEMANN *convergente verso il relativo integrale di* LEBESGUE.

Nel cercare di rendere indipendenti dal postulato di ZERMELO le dimostrazioni di alcuni teoremi sulle funzioni misurabili, mi sono accorto che, senza fare alcun ricorso a quel postulato, poteva essere istituito un procedimento atto a fornire, per ciascuna funzione misurabile, una successione di integrali di RIEMANN (superiori o inferiori) avente per limite il relativo integrale di LEBESGUE, e che da ciò, con opportune modificazioni ed ampliamenti, poteva esser dedotta una definizione dell' integrale di una funzione di variabile reale, avente senz' altro l' identica portata di quella data da LEBESGUE, se si ammette il postulato di ZERMELO.

Avendo comunicato a mio padre i rilievi da me fatti ed avendo egli, in seguito a ciò, richiamata la mia attenzione su di una Memoria del prof. B. LEVI, pubblicata tre anni fa [1], ho visto che la definizione di integrale che avrei potuto dedurre dal detto procedimento sarebbe stata del tutto simile a quella già proposta dal prof. LEVI.

Posto ciò, non è il caso di fermarsi ad illustrare la definizione in discorso [2]; ma, se non mi inganno, non è del tutto inutile esporre in questa

[1] BEPPO LEVI, *Sulla definizione dell' integrale*, « Annali di Matematica », serie IV, tomo I (1923-1924). Vedi anche: GIUSEPPE VITALI, *Sulla definizione di integrale delle funzioni di una variabile*, « Annali di Matematica », serie IV, tomo II (1924-1925). (Nel testo dico « tre anni fa » perchè il manoscritto di questo lavoro fu inviato nel dicembre del 1927).

[2] Tanto più che ormai si posseggono sistemazioni della teoria degli integrali di LEBESGUE che, anche dal punto di vista della semplicità didattica, nulla lasciano a desiderare. Intendo alludere con ciò in modo particolare alla esposizione di quella teoria che si trova nei *Fondamenti di Calcolo delle variazioni* del prof. TONELLI (Bologna, Zanichelli, 1922, vol. I, pagg. 143-198) e, ancora meglio, a quella svolta dal medesimo Autore nella Memoria: *Sulla nozione di integrale* (questi « Annali », serie IV, tomo I), alla quale rimando per la bibliografia dell' argomento.

Nota il procedimento da cui potrebbe essere dedotta per le funzioni misurabili.

1. I punti

$$\ldots. x = -\frac{3}{2^n}, \quad x = -\frac{1}{2^{n-1}}, \quad x = -\frac{1}{2^n}, \quad x = 0, \quad x = \frac{1}{2^n}, \quad x = \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots.$$

determinano sull'asse delle x, per ogni valore intero e positivo di n, un'infinità numerata di intervalli

$$\ldots. -\frac{1}{2^{n-1}} \leq x \leq -\frac{1}{2^n}, \quad -\frac{1}{2^n} \leq x \leq 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2^n}, \ldots.$$

Al variar di n gli intervalli considerati descrivono un insieme numerato I' di insiemi numerati di intervalli. L'insieme I degli intervalli di tutti gli insiemi di I' è quindi numerabile ed i suoi elementi si possono ordinare in un'unica successione

$$I : I_1, \quad I_2, \ldots. \tag{1}$$

Dalla (1) estragghiamo p intervalli $I_{n_1}, \ldots., I_{n_p}$ e consideriamo l'insieme

$$J' = I_{n_1} \dotplus \ldots. \dotplus I_{n_p}.$$

Dico che l'insieme J *degli insiemi* J' *è numerabile.*

Ciò è immediato: ad ogni punto intero di S_p $(p = 1, 2, \ldots.)$, $n_1, \ldots., n_p$, si può far corrispondere uno ed un solo elemento di J, l'insieme $J' = I_{n_1} \dotplus \ldots. \dotplus I_{n_p}$; ora la totalità dei punti interi di $S_1, S_2, \ldots.$ è numerabile, quindi anche J è numerabile ed i suoi elementi si possono ordinare

$$J : J_1, \quad J_2, \ldots.$$

2. É noto che la misura di LEBESGUE di un insieme E misurabile e di misura finita è l'estremo superiore delle porzioni chiuse e limitate di E; in altri termini, fissato un numero positivo ε, esiste sempre un insieme chiuso e limitato C tale che sia

$$C < E, \quad mC \leq mE \leq mC + \varepsilon. \tag{2}$$

Ora la misura secondo LEBESGUE e la misura esterna secondo JORDAN dell'insieme chiuso e limitato C coincidono [1]; ma la misura esterna di C

[1] CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen.* Teubner, 1918, pag. 297, § 287.

seondo JORDAN non è altro che l'estremo inferiore delle misure degli elementi di J che ricoprono C, quindi fissato il numero positivo ε esiste un J_n per il quale è

(3) $$C < J_n, \quad mC \leq mJ_n \leq mC + \varepsilon.$$

Da $C < J_n$ e $C < E$ si deduce

$$C < J_n \cdot E \quad \text{e quindi} \quad mC \leq mE \cdot J_n \leq mC + \varepsilon;$$

confrontando la seconda di queste diseguaglianze con la seconda delle (2) e delle (3), si ottiene

$$mE - mE \cdot J_n \leq \varepsilon, \quad mJ_n - mE \cdot J_n \leq \varepsilon,$$

dalla seconda delle quali discende

$$mJ_n \leq mE \cdot J_n + \varepsilon \leq mE + \varepsilon;$$

per conseguenza.

Se E *è un insieme misurabile di misura finita ed* ε *è un numero positivo, esiste almeno un elemento* J_n *di* J *tale che sia*

(4) $$m(E - E \cdot J_n) \leq \varepsilon, \quad m(J_n - E \cdot J_n) \leq \varepsilon, \quad mJ_n \leq mE + \varepsilon.$$

Ad ogni ε si può naturalmente far corrispondere l'elemento di J che nell'ordinamento fissato è il primo a verificare le (4).

3. Sia adesso

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad \text{di modo che è} \quad \sum_n^{1 \dots \infty} \varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Indichiamo con J_{n_1} il primo degli elementi di J per il quale è

$$m(E - E \cdot J_{n_1}) \leq \varepsilon_1, \quad m(J_{n_1} - E \cdot J_{n_1}) \leq \varepsilon_1.$$

Poniamo

$$E_1 = E - E \cdot J_{n_1}$$

ed indichiamo con J_{n_2} il primo elemento di J per il quale è

$$m(E_1 - E_1 \cdot J_{n_2}) \leq \varepsilon_2, \quad mJ_{n_2} \leq mE_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Sia

$$E_2 = E_1 - E_1 \cdot J_{n_2}$$

e sia J_{n_3} il primo elemento di J per il quale è

$$m(E_2 - E_2 \cdot J_{n_3}) \leq \varepsilon_3, \quad mJ_{n_3} \leq mE_2 + \varepsilon_3 \leq \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Si ponga

$$E_3 = E_2 - E_2 \cdot J_{n_3}$$

e si applichi ad E_3 il discorso fatto per E, E_1, E_2.

Così proseguendo indefinitamente, si ottengono due successioni di insiemi

$$E > E_1 > E_2 > \dots,$$
$$J_{n_1},\ J_{n_2},\ J_{n_3}, \dots$$

che verificano le seguenti disuguaglianze

$$mE_1 \leq \varepsilon_1, \quad m(J_{n_1} - E \cdot J_{n_1}) \leq \varepsilon_1,$$
$$mE_p \leq \varepsilon_p, \quad mJ_{n_p} \leq \varepsilon_{p-1} + \varepsilon_p \qquad (p = 2, 3, \dots).$$

Posto

$$E_0 = J_{n_1} \dot{+} J_{n_2} \dot{+} \dots$$

si ha che E_0 è misurabile, perchè somma di un'infinità numerabile di intervalli chiusi;

che l'insieme $(E - E \cdot E_0)$ è contenuto in E_1, $E_2, \dots$, e, poichè è $\lim\limits_{p \to \infty} mE_p \leq \leq \lim\limits_{p \to \infty} \varepsilon_p = 0$, è anche

$$m(E - E \cdot E_0) = 0;$$

e che l'insieme $(E_0 - E \cdot E_0)$ è contenuto in

$$(J_{n_1} - E \cdot J_{n_1}) \dot{+} J_{n_2} \dot{+} \dots$$

e quindi è

$$m(E_0 - E \cdot E_0) \leq m\{(J_{n_1} - E \cdot J_{n_1}) \dot{+} J_{n_2} \dot{+} \dots\} \leq m(J_{n_1} - E \cdot J_{n_1}) + mJ_{n_2} + \dots \leq {}^{(1)}$$
$$\leq \varepsilon_1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \dots = 2 \sum_n^{1\dots\infty} \varepsilon_n = \varepsilon.$$

Riassumendo: *Se* E *è un insieme misurabile di misura finita, esiste una legge che ci consente di far corrispondere ad ogni* $\varepsilon > 0$ *un insieme* E_0, *somma di un'infinità numerata di intervalli, tale che siano verificate le relazioni*

$$m(E - E \cdot E_0) = 0, \quad m(E_0 - E \cdot E_0) \leq \varepsilon.$$

In parole, l'insieme E_0 ricopre E a meno di un insieme di misura

(1) Si badi bene che, nel caso particolare in esame, questa diseguaglianza si giustifica senza ricorrere al principio delle infinite scelte arbitrarie.

nulla e la porzione di E_0 che non appartiene ad E ha una misura minore di ε (1).

4. Per raggiungere maggior chiarezza nelle dimostrazioni dei numeri seguenti, sarà bene premettere qualche considerazione sugli insiemi esternamente quadrabili.

Sia E un insieme misurabile di misura finita ed F la sua frontiera (2), frontiera che è un insieme chiuso e quindi misurabile; se è

$$m(F - E \cdot F) = 0,$$

cioè se ha misura nulla la porzione di F che non appartiene ad E, diremo che E è esternamente quadrabile (3).

Evidentemente: *Ogni insieme chiuso di misura finita è esternamente quadrabile* (4)*; e l'insieme somma di un numero finito di insiemi esternamente quadrabili, privi a due a due di punti comuni o non, è esternamente quadrabile* (5).

Dimostriamo adesso che: *Se* E *è un insieme esternamente quadrabile ed* E' *è una porzione di* E *di misura nulla, l'insieme* $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E} - \mathrm{E}'$ *è esternamente quadrabile.*

Indichiamo con F la frontiera di E, con F_1 la frontiera di E_1; dobbiamo dimostrare che è

$$m(F_1 - E_1 \cdot F_1) = 0.$$

È chiaro infatti che un punto di F_1 che non appartiene ad E_1 o è un punto di $(F - E \cdot F)$ o è un punto di E'; sicchè si ha

$$(F_1 - E_1 \cdot F_1) < (F - F \cdot E) + E',$$

e di qui discende

$$m(F_1 - E_1 \cdot F_1) \leq m(F - F \cdot E) + mE' = 0.$$

Censideriamo adesso un'infinità numerata di intervalli chiusi

$$\bar{i}_1, \quad \bar{i}_2, \ldots \tag{5}$$

---

(1) La proposizione del testo è un caso particolare di un teorema geometrico del prof. VITALI (*Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali.* « Atti della R. Accademia di Torino », 43, 1908) nella forma datagli dal CARATHÉODORY (loc. cit., pagg. 299-306); però del teorema del VITALI non conosco dimostrazioni indipendenti dal postulato di ZERMELO.

(2) CARATHÉODORY, loc. cit., pag. 216.

(3) CARATHÉODORY, loc. cit., pag. 289.

(4) CARATHÉODORY, loc. cit., pag. 291.

(5) CARATHÉODORY, loc. cit., pag. 290.

contenuti in un intervallo I ed indichiamo con i_n il segmento $\bar{i}_n$ privato dei punti estremi.

L'insieme

$$I - \{ \bar{i}_1 \dot{+} \bar{i}_2 \dot{+} \ldots \}$$

si ottiene sopprimendo dall'insieme *chiuso*

$$I - \{ i_1 \dot{+} i_2 \dot{+} \ldots \}$$

gli estremi degli intervalli (5). Ora questi estremi formano un insieme numerabile, e (quindi) di misura nulla; di conseguenza, per il lemma precedente, possiamo dire che:

Se $\bar{\mathrm{i}}_1$, $\bar{\mathrm{i}}_2$,.... *è una successione di intervalli contenuti in un segmento* I, *l'insieme* $\mathrm{I} - \{ \bar{\mathrm{i}}_1 \dot{+} \bar{\mathrm{i}}_2 \dot{+} \ldots \}$ *è esternamente quadrabile.*

5. Ciò posto, dal teorema dimostrato al n.° 3 si deduce che:

Se E *è un insieme misurabile di misura finita, esiste una legge che ad ogni* $\varepsilon > 0$ *fa corrispondere una porzione* E_1 *di* E *esternamente quadrabile e tale che sia*

$$m(E - E_1) \leq \varepsilon.$$

Supponiamo in un primo momento che E sia limitato ed indichiamo con I il primo degli intervalli chiusi $(-1, 1)$, $(-2, 2)$,.... che contiene E.

Posto $E' = I - E$, dalla misurabilità di E segue

$$mE = mI - mE'.$$

Per il teorema precedente, ad ε possiamo far corrispondere un insieme ben determinato E_0', somma di un'infinità numerata di intervalli chiusi i_1, i_2,.... (che possiamo evidentemente supporre) contenuti in I e che ricopre E' a meno di un insieme di misura nulla, per il quale è

$$m(E_0' - E' \cdot E_0') \leq \varepsilon, \quad \text{cioè} \quad mE_0' \leq mE' + \varepsilon.$$

Per il n.° 4 l'insieme $I - E_0'$ è esternamente quadrabile; inoltre è

$$\begin{aligned} m(I - E_0') = mI - mE_0' &\geq \\ &\geq mI - mE' - \varepsilon \\ &\geq mE - \varepsilon; \end{aligned}$$

quindi, se poniamo

$$E_1 = (I - E_0') - (E' - E' \cdot E_0'),$$

abbiamo che l'insieme E_1 è esternamente quadrabile perchè differenza del-

l'insieme esternamente quadrabile $(I - E_0')$ e dell'insieme di misura nulla $(E' - E' \cdot E_0')$ (n.° 4);
che l'insieme E_1 è contenuto in E;
e che è

$$mE_1 = m(I - E_0') \geq mE - \varepsilon,$$

cioè

$$m(E - E_1) = mE - mE_1 \leq \varepsilon.$$

Supponiamo in secondo luogo che E non sia limitato ed indichiamo con I il primo degli intervalli $(-1, 1)$,.... per il quale è

$$mE - mE \cdot I \leq \frac{\varepsilon}{2};$$

indichiamo con E_1 la porzione esternamente quadrabile di $I \cdot E$, costruita nel modo già detto, per la quale è

$$mI \cdot E - mE_1 \leq \frac{\varepsilon}{2};$$

evidentemente sarà anche

$$m(E - E_1) = mE - mI \cdot E + mI \cdot E - mE_1 \leq \varepsilon, ;$$

cioè l'insieme E_1 è l'insieme richiesto.

6. Sia adesso $f(x)$ una funzione misurabile, limitata, non negativa e definita in un insieme E misurabile e di misura finita, e siano ε e σ due numeri positivi arbitrarî.

Poichè $f(x)$ è limitata, esiste un primo numero intero e positivo n per il quale riesce in tutto E

$$f(x) < n\sigma;$$

e quindi, se indichiamo con

$$E_1, \quad E_2, \ldots, \quad E_n$$

gli insiemi misurabili in cui è, rispettivamente,

$$0 \leq f(x) < \sigma, \quad \sigma \leq f(x) < 2\sigma, \ldots, \quad (n-1)\sigma \leq f(x) < n\sigma,$$

avremo che gli insiemi $E_1, \ldots, E_n$ sono a due a due privi di punti comuni e che è

$$E = E_1 + \ldots + E_n \quad \text{e quindi} \quad mE = mE_1 + \ldots + mE_n.$$

Col procedimento del numero precedente determiniamo n porzioni $E_1', \ldots, E_n'$ di $E_1, \ldots, E_n$ esternamente quadrabili e tali che sia

$$m(E_1 - E_1') \leq \frac{\varepsilon}{n}, \ldots, \quad m(E_n - E_n') \leq \frac{\varepsilon}{n}. \tag{6}$$

Indichiamo con $F_1, \ldots, F_n$ le frontiere di $E_1', \ldots, E_n'$; di guisa che gli insiemi

$$G_1' = F_1 - F_1 \cdot E_1', \ldots, \quad G_n' = F_n - F_n \cdot E_n'$$

avranno tutti misura nulla, perchè gli $E_1', \ldots, E_n'$ sono esternamente quadrabili.

Poniamo adesso

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1'' = E_1' - (G_1' \dotplus \ldots \dotplus G_n') \cdot E_1', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_n'' = E_n' - (G_1' \dotplus \ldots \dotplus G_n') \cdot E_n'; \end{array} \right. \tag{7}$$

ed

$$E' = E_1'' + \ldots + E_n''.$$

Dico che E' è esternamente quadrabile, che la sua misura differisce da quella di E di meno di ε e che in ogni suo punto l'oscillazione della $f(x)$, considerata come definita solo in E', è minore di σ.

Dimostriamo che E' è esternamente quadrabile. È chiaro intanto che E_i'' $(i = 1, \ldots, n)$ è tale perchè differenza dell'insieme esternamente quadrabile E_i' e dell'insieme di misura nulla $(G_1' \dotplus \ldots \dotplus G_n') \cdot E_i'$ (n.° 4). Ora E' è somma di un numero finito di insiemi esternamente quadrabili, dunque anche E' è tale.

Dalle (7) si ricava

$$mE_i'' = mE_i' \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

inoltre è

$$E - E' = (E_1 - E_1'') + \ldots + (E_n - E_n''),$$

e quindi

$$\begin{aligned} mE - mE' &= mE_1 - mE_1'' + \ldots + mE_n - mE_n'' = \\ &= mE_1 - mE_1' + \ldots + mE_n - mE_n', \end{aligned}$$

cioè, per le (6),

$$mE - mE' \leq \varepsilon.$$

Resta a dimostrare l'ultima delle affermazioni fatte. Sia x_0 un punto di E'; x_0 apparterrà ad uno e ad uno solo degli insiemi $E_1'', \ldots, E_n''$; supponiamo che appartenga ad E_1''. Per la costruzione stessa di E_1'', x_0 non può essere punto frontiera di $E_2'', \ldots, E_n''$, quindi esiste un intervallo δ di centro in x_0 e tale che tutti i punti di E' che appartengono a δ appartengono anche ad E_1''; ma in E_1'' è

$$0 \leq f(x) < \sigma,$$

dunque, ecc..

7. All'insieme E del numero precedente imponiamo la condizione ulteriore di essere limitato; e consideriamo due successioni di numeri positivi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...; \sigma_1, \sigma_2, ...$ con

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = \lim_{n \to \infty} \sigma_n = 0.$$

Indichiamo con E_n l'insieme che secondo la costruzione del numero precedente viene a corrispondere alla coppia ε_n, σ_n.

Siano

$$\overline{\int_{E_1}} f(x)dx, \quad \overline{\int_{E_2}} f(x)dx, ... \tag{8}$$

$$\underline{\int_{E_1}} f(x)dx, \quad \underline{\int_{E_2}} f(x)dx, ... \tag{9}$$

gli integrali Riemanniani superiori ed inferiori di $f(x)$ estesi agli insiemi *limitati* $E_1, E_2, ...$

Dico che *le successioni* (8) *e* (9) *convergono entrambe verso l'integrale di Lebesgue di* f(x) *esteso all'insieme* E:

$$\lim_{n \to \infty} \overline{\int_{E_n}} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \underline{\int_{E_n}} f(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

Siccome gli insiemi $E_1, E_2, ...$ sono esternamente quadrabili, è [1]

$$\underline{\int_{E_n}} f(x)dx \leq \int_{E_n} f(x)dx \leq \overline{\int_{E_n}} f(x)dx;$$

inoltre è

$$\overline{\int_{E_n}} f(x)dx - \underline{\int_{E_n}} f(x)dx \leq \sigma_n \cdot mE;$$

[1] CARATHÉODORY, loc. cit., pag. 459.

e da $\lim_{n \to \infty} mE_n = mE$ segue

$$\lim_{n \to \infty} \int_{E_n} f(x)dx = \int_E f(x)dx\,;$$

da queste tre relazioni e da $\lim_{n \to \infty} \sigma_n = 0$ si deducono immediatamente le uguaglianze da dimostrare (¹).

(¹) Nella mia Nota: *A proposito di un teorema sugli insiemi non misurabili* (Rend. dell' Istituto Lombardo, 1928) ho esteso agli insiemi di punti non misurabili alcune delle dimostrazioni date in questo lavoro.

Sui moduli delle curve algebriche [1].

Memoria di BENIAMINO SEGRE (a Roma).

Sunto. - *In questo lavoro l'A. studia certi sistemi continui di curve piane algebriche, dal punto di vista dei* moduli *delle loro curve, facendone applicazione all'importante questione di sapere se la varietà degli enti algebrici* ∞^1 *di dato genere* p *è razionale od unirazionale.*

1. È noto che la varietà H i cui elementi sono le famiglie di curve algebriche di dato genere p, birazionalmente equivalenti, è *algebrica* ed *irriducibile* [2]. Il prof. SEVERI, in una Nota lincea del 1915 [3], enunciò come probabile che la varietà H sia *razionale*, o quanto meno riferibile ad una involuzione di gruppi di punti in uno spazio lineare (*unirazionale*, come per brevità diremo): o, in altri termini, che si possano ottenere modelli proiettivi piani di tutte le curve di dato genere p, da un'equazione in cui entrino razionalmente certi parametri variabili (i moduli) [4].

Egli soggiungeva che il fatto asserito è vero per $p < 11$ [5] (per $p = 1$ si vede anzi senz'altro che la varietà H, ∞^1, è razionale), ed accennava che, appunto per $p < 11$, la dimostrazione si ottiene subito considerando le curve piane minime di genere p. La dimostrazione cui l'A. alludeva, è manifestamente la seguente. L'ordine minimo di un modello piano di una curva a moduli generali di genere p, è il minimo intero n soddisfacente alla disuguaglianza

$$3(n-2) \geq 2p \quad (^6).$$

(1) I risultati contenuti in questo lavoro, furono oggetto di una Comunicazione all'ultimo Congresso internazionale dei Matematici (Bologna, 1928).

(2) Ciò segue subito, ad esempio, dal modo come vengono introdotti i moduli nel Trattato di F. SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1921), pp. 151 e 157. Può ovviamente supporsi $p > 0$, poichè per $p = 0$ non vi sono moduli, e la varietà H riducesi ad un solo elemento.

(3) F. SEVERI, *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema d'esistenza di Riemann*, « Atti R. Acc. dei Lincei », serie V, **24** $(1915)_1$, Nota I, p. 877, n.° 2.

(4) Ciò è notoriamente possibile, se ci si limita alle curve *iperellittiche* di genere p.

(5) Per errore di stampa nella Nota citata sta scritto $p \leq 11$ invece che $p < 11$.

(6) È questo un ben noto risultato enunciato da BRILL e NOETHER, che nelle citate *Vorlesungen* del SEVERI (*Anhang G*, n.° 10) si trova posto al riparo da ogni obbiezione. Il SEVERI dimostra anzi (a p. 398), che la generica curva di quell'ordine e di quel genere possiede soltanto *nodi*.

Si hanno dunque per n, p, i seguenti valori:

$$p=1,\ n=3;\quad p=2,\ n=4;\quad p=3,\ n=4;\quad p=4,\ n=5;\quad p=5,\quad n=6;$$
$$p=6,\ n=6;\quad p=7,\ n=7;\quad p=8,\ n=8;\quad p=9,\ n=8;\quad p=10,\ n=9;$$

e si verifica che il numero $d \geq 0$ dei nodi che la curva minima deve possedere per essere del genere voluto ($p < 11$), è tale che $3d$ non supera $\frac{1}{2} n(n+3)$; perciò fino al genere $p=10$ si può costruire un modello piano minimo della curva più generale di genere p, assegnandone del tutto ad arbitrio i nodi.

Per un dato p ($p < 11$) le curve minime formano dunque un sistema continuo Σ, costituito da infiniti sistemi lineari (da uno solo, per certi valori del genere) di dimensione $k \geq 0$, corrispondenti birazionalmente ai gruppi di d punti del piano [7]. Il sistema Σ, pertanto, è *razionale*.

Le curve di Σ birazionalmente equivalenti ad una data, riempiono un sistema S, e la varietà W avente per elementi i sistemi S è birazionalmente equivalente ad H. Ora la varietà W è *razionale* od *unirazionale* [8], e tale è dunque pure H.

Per $p=3$ il sistema Σ è addirittura un sistema lineare. Il ragionamento precedente trovasi sviluppato per tale caso nel Trattato di F. ENRIQUES ed O. CHISINI [9]: però, se lo si limita a sistemi *lineari*, esso non può venir esteso al di là del valore $p=6$ del genere, poichè, al § I di questo lavoro, io dimostro che *mentre per* p ≤ 6 *esistono sistemi lineari di curve piane di genere* p *a moduli generali, sistemi lineari siffatti non esistono per* p > 6.

2. Il prof. SEVERI, richiamando la mia attenzione sul procedimento generale esposto dianzi, mi ha proposto di cercare se esso possa estendersi a curve

---

(7) Nello spazio lineare S_N, i cui punti rappresentano le curve di ordine n del piano, il sistema Σ ha per imagine una varietà V luogo di *spazi lineari* S_k, tale che per un punto generico della varietà passa un solo S_k generatore. E poichè la varietà è razionale quando se ne prendano come elementi quegli spazi lineari, *risulta razionale anche come luogo di punti* (il che, notoriamente, si vede considerando sulla varietà il sistema lineare ∞^k di varietà unisecanti degli spazi generatori, staccate su V dagli S_{N-k} per uno S_{N-k-1}).

(8) Invero, il sistema Σ essendo razionale, le sue curve possono rappresentarsi coi punti di uno spazio lineare S_r, in cui i sistemi S hanno per imagini varietà algebriche M_s tali che per un punto generico di S_r ne passa una sola. Segando quelle M_s con uno spazio S_{r-s}, otteniamo in S_{r-s} un'*involuzione* birazionalmente equivalente all'insieme delle M_s, cioè dei sistemi S.

(9) F. ENRIQUES-O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. III (Bologna, Zanichelli, 1924), p. 376.

di genere superiore a 10, se cioè per $p > 10$ si possano costruire sistemi razionali di curve a moduli generali del tipo di Σ. La risposta alla questione è negativa. Al § II io dimostro infatti che *per* $p > 10$, *la curva variabile in un sistema continuo* Σ, *luogo di sistemi lineari i cui gruppi base sieno assegnabili ad arbitrio, è a moduli particolari* ([10]). All'uopo faccio vedere che, se si supponessero le curve di Σ a moduli generali, sarebbe possibile di abbassare indefinitamente l'ordine delle curve del generico sistema lineare di Σ, mediante successive trasformazioni quadratiche, il che è manifestamente assurdo ([11]).

Considerazioni analoghe possono venir fatte per sistemi continui assai generali di curve piane di genere p, e precisamente pei sistemi Ξ la cui curva generica individua un sistema lineare, la cui dimensione virtuale (che può esser negativa) non è inferiore a $-p$, per il che basta che quel sistema lineare sia *infinito*. Nei §§ III e IV dimostro che per $p > 36$ le curve di un sistema Ξ siffatto non possono essere a moduli generali, e quindi

Le curve di un qualunque sistema continuo di curve piane di genere $p > 36$ ***a moduli generali****, sono* ***isolate****, nel senso che una generica di esse individua un sistema lineare la cui dimensione effettiva è nulla; inoltre la dimensione virtuale di detto sistema lineare è inferiore a* $-p$.

La dimostrazione di questo teorema procede per assurdo (§ III), ragionando su d'un sistema Ξ qualunque in modo simile a quello indicato poc'anzi pel sistema Σ. Ora però si presenta un fatto nuovo, poichè i punti base del

---

([10]) Per questa via, pertanto, non si riesce ad estendere oltre il valore $p = 10$ del genere, la presunta razionalità od unirazionalità della varietà H.

Sotto forma meno precisa, ma più espressiva, la precedente proposizione può anche enunciarsi così:

Se una curva piana algebrica irriducibile, di genere $p > 10$, *è* ***a moduli generali****, il gruppo dei suoi punti multipli occupa nel piano una posizione* ***particolare****, ed il sistema lineare da essa individuato è* ***sovrabbondante.***

Oltre a rispondere alla questione posta al principio di questo numero, il suddetto risultato (in un cogli altri che vengono enunciati più sotto) ha interesse dal punto di vista della *teoria generale dei* ***sistemi continui*** *di curve algebriche,* Tale teoria, specialmente per ciò che concerne l'esistenza, la dimensione e l'unicità di sistemi continui completi di curve piane algebriche con date singolarità, verrà svolta in un prossimo lavoro, che trovasi riassunto in alcune recenti Note lincee.

([11]) Nel corso della dimostrazione faccio uso del fatto che: « *Un sistema lineare di curve piane irriducibili i cui punti base sieno assegnati nel piano in modo generico, è regolare* ». Di questa proposizione, che si ammette come ovvia in taluni sviluppi della teoria dei sistemi lineari di curve piane, non sono riuscito a trovare una dimostrazione esauriente.

Però, senza ricorrere ad essa, al § V stabilisco di nuovo la validità del teorema enunciato nel testo, per valori convenientemente grandi del genere p ($p > 36$).

generico sistema lineare di Ξ non essendo necessariamente in posizione generale nel piano, posson anche esser fra loro infinitamente vicini, onde può accadere che non sia possibile di *abbassare l'ordine delle sue curve* mediante una sola trasformazione quadratica. Questa difficoltà vien superata (§ IV), mostrando che in tal caso lo stesso scopo può venir raggiunto per mezzo di una conveniente successione di trasformazioni quadratiche (di cui le prime innalzano l'ordine delle curve del sistema lineare, e le ultime lo abbassano al di sotto del valore primitivo).

I.

3. Per provare l'asserzione fatta alla fine del n. 1, incominciamo col far vedere che per $p \leq 6$ *esistono nel piano sistemi lineari di curve di genere* p *a moduli generali.*

La cosa è evidente per $p = 0, 1, 2, 3$. Per $p = 4$, poichè ogni C_4^6 canonica si proietta da un suo punto secondo una quintica piana con due punti doppi, basta considerare *il sistema lineare* ∞^{14} *delle quintiche piane passanti doppiamente per due distinti punti assegnati.*

Per $p = 5$, consideriamo in S_4 la C_4^8 canonica. Essa si proietta da una sua corda su d'un piano, secondo una sestica con 5 punti doppi; ammesso che scegliendo convenientemente la corda da cui si proietta C_4^8, sia possibile di ottenere nel piano una sestica i cui 5 punti doppi si possano trasformare con una collineazione in una 5-pla di punti assegnati genericamente nel piano, potremo asserire che *il sistema lineare* ∞^{12} *delle sestiche piane passanti doppiamente per* 5 *punti assegnati genericamente nel piano, è costituito da curve di genere* 5 *a moduli generali.*

L'ipotesi ammessa, che è suggerita da un semplice conto di costanti, equivale a supporre che nel suddetto sistema lineare, una curva generica non sia birazionalmente identica ad *infinite* altre. Questi fatti equivalenti fra loro sono dimostrati, se si riesce a provare ch'essi sussistono per una scelta particolare della 5-pla dei punti doppi; e siccome noi proveremo ch'essi valgono supponendo che dei 5 punti doppi due coppie sieno costituite da punti infinitamente vicini, così essi varranno in generale.

La figura piana formata da tre punti non allineati e da due rette passanti genericamente per due di essi, non ha invarianti proiettivi. Dunque, se dimostriamo che fra le varie sestiche piane ottenute proiettando una data C_4^8 canonica da una sua corda, ve ne è sempre (almeno) una avente due tacnodi ed un punto doppio ulteriore, con ciò risulterà provato che il sistema lineare cui appartiene una curva siffatta è costituito da curve a moduli generali.

Una C_4^8 canonica è la curva base di una *rete di quadriche di* S_4 (che possiam supporre generale), di cui sia Γ la curva Jacobiana. Su Γ le 5-ple dei vertici dei coni dei vari fasci di quadriche della rete, costituiscono un'involuzione doppiamente infinita, che è necessariamente una *serie lineare*, poichè i suoi gruppi sono birazionalmente riferiti ai fasci della rete. In corrispondenza ad un gruppo con due punti doppi di questa g_5^2, si avrà nella rete un fascio di quadriche avente la caratteristica [0(0, 0)(0, 0)], cioè contenente tre soli coni distinti, di cui due da contarsi doppiamente. La V_2^4 base di un tal fascio contiene certamente delle rette ([12]), le quali sono corde di C_4^8; ed è subito visto che basta proiettare C_4^8 da una di queste rette su d'un piano, per ottenere una sestica di genere 5 con due tacnodi.

Infine per $p=6$, rifacendosi alle curve piane minime, si ottiene come sistema lineare di curve di genere 6 a moduli generali, *il sistema lineare* ∞^{15} *delle sestiche piane passanti doppiamente per* 4 *punti assegnati genericamente nel piano.*

4. Proveremo ora che *le curve d'un qualunque sistema lineare di genere* $p>6$ *sono a moduli particolari.*

La cosa si dimostra agevolmente per $p>10$ come segue. Se le curve d'un sistema lineare di genere $p>10$ potessero essere a moduli generali, la dimensione effettiva del sistema non potrebbe risultare inferiore a $3p-3$, onde supererebbe di certo $2p+7$. In base ad un risultato di G. CASTELNUOVO ([13]), da qui si dedurrebbe che le curve del sistema dovrebbero essere iperellittiche, eppertanto a moduli particolari, contro il supposto.

Ci resta da dimostrare la proposizione enunciata, per $p=7$, 8, 9, 10. Ci limiteremo a provarla per $p=7$, bastando per $p=8$, 9, 10 ragionare in modo analogo.

Un sistema lineare Θ, che può supporsi completo, di curve di genere $p=7$ a moduli generali, se esiste, ha la dimensione effettiva h non inferiore a $3p-3=18$; e, colla stessa argomentazione di poc'anzi, si vede che h non può superare $2p+7=21$. In ogni caso, essendo $h>p$, il sistema Θ è *regolare*.

([12]) Cfr. E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi.* (Pisa, Spoerri, 1907), p. 157.

([13]) Ved. G. CASTELNUOVO, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane,* « Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino », serie II, 42 (1892), pag. 3, n° 31.

Supporremo Θ privo di punti base semplici, considerando come virtualmente inesistenti quelli che eventualmente vi fossero, ed ammetteremo inoltre per ora che i punti base di Θ sieno r punti *distinti*, anzi in posizione *generica* nel piano. Dette $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ le relative molteplicità, ed n l'ordine delle curve di Θ, varranno, com'è immediato, le equazioni

$$\sum_{i=1}^{r} \nu_i^2 = n^2 - h - 6 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \nu_i = 3n - h + 6. \tag{2}$$

Poichè la generica curva di Θ non è iperellittica, il sistema Θ' aggiunto puro di Θ è irriducibile, e quindi di genere virtuale $p' \geq 0$. Siccome poi è $h > 2p - 1$, la generica curva di Θ' forma parte di qualche curva di Θ [14], ed esiste un sistema lineare completo Θ'', residuo di Θ' rispetto a Θ, la cui dimensione virtuale k è data da

$$k = h - 2p + p' + 1 \geq 5.$$

Per la supposta genericità degli r punti base di Θ, si può asserire che Θ'' *è un sistema lineare irriducibile di curve ellittiche* [15], onde, per un noto teorema, lo si può trasformare cremonianamente in un sistema lineare di cubiche, o nel sistema lineare ∞^8 delle quartiche passanti doppiamente per due dati punti.

Suppongasi addirittura che Θ'' sia un sistema di uno di questi due tipi. Se Θ'' è un sistema lineare (necessariamente *regolare*) di cubiche ellittiche, esso non può avere più di 4 punti base, la sua dimensione k non potendo risultare inferiore a 5. Siccome si ottiene una curva di Θ sommando ad una curva di Θ' (aggiunta d'ordine $n-3$ di Θ) una qualunque curva di Θ'', e poichè Θ non ha punti base semplici, si deduce che anche Θ non può avere più di 4 punti base, cioè $r \leq 4$. E la stessa limitazione, anzi la limitazione $r \leq 2$ sussiste se Θ'' è del secondo tipo.

Le molteplicità ν_i dei punti base di Θ sieno disposte in ordine di grandezza, e precisamente sia

$$\nu_1 \geq \nu_2 \geq \nu_3 \geq \nu_4,$$

intendendo di attribuire il valore *0* a $4 - r$ delle ν_i, se risultasse $r < 4$. Potremo sempre supporre che *non sia possibile di abbassare l'ordine delle*

[14] Cfr. Mem. cit. in [13], n.° 29.
[15] Cfr. Mem. cit. in [13], n.° 30.

curve di Θ con una trasformazione quadratica. Infatti, nell'ipotesi contraria basta con successive trasformazioni quadratiche abbassare l'ordine del sistema, fino a che ciò non sia ulteriormente possibile; ed anche il sistema lineare che così si ottiene non ha più di 4 punti base, poichè le singole trasformazioni eseguite non possono aumentare il numero dei punti base.

Ricordando che i punti base di Θ sono distinti, la fatta ipotesi si traduce nelle relazioni

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \leq n, \quad \nu_4 \leq \frac{n}{3}.$$

Da qui, in base alla (2), e tenendo presente che è $h \leq 21$, si deduce

$$n \leq 9.$$

L'uguaglianza $n = 9$ può solo sussistere con

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 3, \quad h = 21,$$

ma queste equazioni sono incompatibili colla (1). Parimenti si può vedere che non è possibile di soddisfare alle limitazioni precedenti ed alle (1), (2), se è $n = 8$ o $n = 7$; vi si soddisfa invece con $n = 6$, prendendo

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 2,\ \nu_4 = 0,\ h = 18, \quad \text{oppure} \quad \nu_1 = 3,\ \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 0,\ h = 21,$$

e soltanto in questi due modi.

Poichè ovviamente non può aversi $n < 6$ con $p = 7$, così avremo intanto che

Un sistema lineare di curve piane, non iperellittiche, di genere $\mathrm{p} = 7$ *e dimensione* $\mathrm{h} \geq 18$, *i cui punti base abbiano nel piano posizioni generiche, può sempre ridursi ad un sistema lineare di sestiche (di genere 7), mediante una trasformazione cremoniana.*

Le curve di questo sistema *non sono però a moduli generali*, contenendo esse una g_6^2 [16]. La stessa particolarità dovrà allora presentarsi per le curve di un sistema lineare completo Θ_1, di genere $p = 7$ e dimensione $k \geq 18$, i cui punti base sieno *comunque* disposti nel piano. In ogni caso, infatti, il sistema Θ_1 è regolare, e può ottenersi come posizione limite di un sistema lineare Θ cogli stessi caratteri e colle stesse molteplicità base, i cui punti base sieno generici nel piano e varino con continuità, tendendo a quelli di Θ_1. Dunque, anche le curve di Θ_1 sono a moduli particolari, il che prova l'asserto.

---

(16) V. Op. cit. in (2), p. 159.

II.

5. Consideriamo una curva piana *irriducibile* C, d'ordine n e genere effettivo p, avente r *punti multipli distinti od infinitamente vicini*, di cui indichiamo con ν_i le molteplicità ($i=1, 2,\ldots, r$; $\nu_i \geq 2$), talchè risulterà

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} \nu_i(\nu_i - 1). \tag{3}$$

La dimensione *virtuale* k del sistema lineare $|C|$, è data da

$$k = \frac{1}{2}n(n+3) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} \nu_i(\nu_i + 1), \tag{4}$$

qualora, come sempre faremo, *si considerino come virtualmente inesistenti gli eventuali punti base* ***semplici*** *del sistema lineare considerato.*

La totalità delle curve piane irriducibili di ordine n, aventi r punti multipli colle molteplicità ν_i ($i=1, 2,\ldots, r$), costituisce uno o più sistemi (algebrici) irriducibili e *completi* (cioè non contenuti in sistemi più ampi di curve cogli stessi caratteri), e sia Ξ uno di essi. Ogni sistema algebrico irriducibile di curve con quei caratteri, contenente la generica curva Γ di Ξ, è contenuto per intero in Ξ ([17]). In particolare il sistema lineare $|\Gamma|$ appartiene a Ξ: il suo genere e la sua dimensione virtuale sono dati dalle (3), (4).

Se Γ si trasforma cremonianamente in una curva Γ_1, ad ogni altra curva generica di Ξ si può applicare un'analoga trasformazione cremoniana, ottenendo così altre curve cogli stessi caratteri di Γ_1, appartenenti ad uno stesso sistema continuo Ξ_1. Circa la corrispondenza che intercede fra le curve di Ξ e quelle di Ξ_1, dicendo omologhe due curve trasformabili l'una nell'altra con una trasformazione cremoniana di quel tipo, possono presentarsi vari casi, che però non stiamo ad esaminare ([18]).

Osserviamo piuttosto che *il genere effettivo di* Γ_1 *vale ancora* p, e che *la dimensione virtuale di* $|\Gamma_1|$ *non è inferiore a* k, se si suppone che la trasformazione cremoniana che fa passare da Γ a Γ_1 non abbia alcun punto fondamentale che cada in un punto *semplice* di Γ ([19]). Aggiungiamo che *se le*

([17]) V. Op. cit. in ([2]), *Anhang G*, n.° 1.

([18]) Così, ad es., i sistemi continui Ξ e Ξ_1 possono anche avere dimensioni disuguali.

([19]) Ciò segue da note proprietà dei sistemi lineari, per cui cfr. Mem. cit. in ([13]), n.° 8, avendo riguardo alla convenzione fatta poc'anzi circa i *punti base semplici* dei sistemi lineari in esame.

curve di Ξ sono a moduli generali, lo stesso può dirsi delle curve di Ξ_1, e che *se i punti multipli della generica curva di Ξ hanno posizione generica nel piano, lo stesso accade per Ξ_1.*

Se le curve di Ξ, di genere $p > 1$, sono *a moduli generali,* e cioè se Ξ contiene ∞^{3p-3} famiglie di curve birazionalmente identiche, poichè il sistema Ξ insieme ad ogni sua curva Γ contiene tutte le sue trasformate proiettive, e siccome d'altro canto la generica Γ (di genere $p > 0$) non può ammettere infinite trasformazioni proiettive in sè, così la generica di quelle famiglie è almeno ∞^8, onde la dimensione d di Ξ deve soddisfare alla limitazione

(5) $$d \geq 3p + 5.$$

6. Indichiamo colla lettera Σ un sistema Ξ, tale che gli r punti base del generico sistema lineare in esso contenuto sieno *generici* nel piano. In questo paragrafo ammetteremo come postulato che *detto sistema lineare abbia ad essere* ***regolare***. Questo fatto che, per quanto di non facile dimostrazione, può ritenersi come intuitivo, viene per ora ammesso all'uopo di agevolare la dimostrazione della proposizione che enunciamo più sotto. Però essa verrà di nuovo stabilita al § V, indipendentemente da quel postulato, per valori convenientemente grandi del genere p ($p > 36$).

Il generico sistema lineare di Σ essendo regolare, la sua dimensione (virtuale $=$ effettiva) k, non può risultar negativa, ossia dev'essere

(6) $$k \geq 0.$$

La dimensione d del sistema Σ, il quale comprende ∞^{2r} sistemi lineari ∞^k, vale

(7) $$d = 2r + k.$$

Per quanto abbiamo detto al n.° 1, se le curve (di genere p) di Σ potessero essere a moduli generali, sarebbe possibile pel valore p del genere di *introdurre razionalmente od unirazionalmente i moduli.* Si è visto che ciò è possibile per $p < 11$; per contro ci proponiamo di dimostrare che per $p \geq 11$ non si possono introdurre i moduli nel modo indicato, avvalendoci d'un sistema Σ, poichè:

Le curve di un qualunque sistema Σ, di genere

(8) $$p \geq 11,$$

sono necessariamente a moduli particolari.

Supposto infatti per assurdo che esista un sistema Σ, le cui curve (di genere $p \geq 11$) sieno *a moduli generali,* dimostreremo che *la somma delle tre molteplicità base più elevate del generico sistema lineare di* Σ, *supera l'ordine* n *delle sue curve.* Poichè i corrispondenti punti base sono certo distinti, nell'ipotesi ammessa, sarebbe dunque possibile di abbassare l'ordine delle curve di quel sistema lineare, mediante una trasformazione quadratica. Il sistema lineare trasformato sarebbe esso pure regolare, ed apparterrebbe ancora ad un sistema Σ_1, di curve dello stesso genere p a moduli generali (n.° 5), ma di ordine inferiore ad n.

L'applicazione ripetuta della proposizione enunciata, condurrebbe pertanto ad un sistema continuo di curve di genere p ed *ordine comunque basso,* il che è manifestamente assurdo.

7. Si abbia dunque un sistema Σ, pel quale conserviamo le precedenti notazioni, le cui curve (di genere $p \geq 11$) sieno *a moduli generali.* Per quanto si è detto al n.° 5, varrà la (5), da cui, in virtù della (7), si deduce

$$k + 2r \geq 3p + 5. \tag{9}$$

Dalle (3), (4), sommando e sottraendo segue

$$n^2 - k - p + 1 = \sum_{i=1}^{r} \nu_i^2 \tag{10}$$

$$3n - k + p - 1 = \sum_{i=1}^{r} \nu_i, \tag{11}$$

e da qui, ricordando la (6),

$$n^2 - 6n - 3p + 3 \leq \sum_{i=1}^{r} \nu_i(\nu_i - 2). \tag{12}$$

Sieno ν_1, ν_2, ν_3 le tre molteplicità ν_i più elevate, con

$$\nu_1 \geq \nu_2 \geq \nu_3 \geq 0.$$

Per ciò che si è detto al numero precedente, si tratta di far vedere che è

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 > n. \tag{13}$$

Incominceremo col provare che è

$$\nu_1 > \frac{n}{3}.$$

Supposto infatti per assurdo $\nu_1 \leq \frac{n}{3}$, e pertanto $\nu_i \leq \frac{n}{3}$ per $i = 1, 2, \ldots, r$, dalla (12), tenendo presenti le (11), (9) e ricordando che è $\nu_i - 2 \geq 0$, in tale ipotesi segue

$$n^2 - 6n - 3p + 3 \leq \frac{n}{3}\left(\sum_{i=1}^{r} \nu_i - 2r\right) =$$

$$= \frac{n}{3}[3n + p - 1 - (k + 2r)] \leq \frac{n}{3}(3n - 2p - 6),$$

e quindi

$$6n + 3p - 3 \geq \frac{n}{3}(2p + 6).$$

Da qui, in base alla (8), si deduce

$$4n - 3 \geq p\left(\frac{2}{3}n - 3\right) \geq 11\left(\frac{2}{3}n - 3\right),$$

d'onde

$$n \leq 9.$$

Nelle ipotesi attuali *non può dunque aversi* $\nu_1 \leq \frac{n}{3}$, poichè in tal caso le curve di Σ sarebbero contro il supposto a moduli particolari, in quanto che l'ordine minimo dei modelli piani delle curve a moduli generali di genere $p \geq 11$, è maggiore di 9 ([20]).

8. Dimostreremo ora che dev'essere

$$\nu_2 > 5, \quad \nu_3 > 4,$$

il che ci sarà utile più tardi.

Supposto intanto per assurdo $\nu_2 \leq 5$, e dunque $\nu_i \leq 5$ per $i = 2, 3, \ldots, r$, dalla (12), avendo presenti le (11), (9), si ricava

$$n^2 - 6n - 3p + 3 \leq \nu_1^2 - 2\nu_1 + \sum_{i=2}^{r} \nu_i(\nu_i - 2) \leq \nu_1^2 - 2\nu_1 + 5\sum_{i=2}^{r}(\nu_i - 2) =$$

$$= \nu_1^2 - 7\nu_1 + 10 + 5\left(\sum_{i=1}^{r} \nu_i - 2r\right) = \nu_1^2 - 7\nu_1 + 10 + 5[3n + p - 1 - (k + 2r)] \leq$$

$$\leq \nu_1^2 - 7\nu_1 + 10 + 5(3n - 2p - 6),$$

e quindi

$$n^2 - 21n - \nu_1^2 + 7\nu_1 + 7p + 23 \leq 0.$$

Se in questa limitazione in luogo di n poniamo

$$n = \nu_1 + \beta + 7,$$

([20]) V. loc. cit. in ([6]).

otteniamo dopo alcune facili riduzioni

$$\beta(\beta + 2\nu_1 - 7) + 7p - 75 \leq 0,$$

onde, avuto riguardo alla (8), dev'essere

$$\beta(\beta + 2\nu_1 - 7) < 0.$$

Ma questa disuguaglianza non può certo sussistere nelle ipotesi attuali; poichè, se fosse $\beta < 0$, la generica curva di Σ (di genere $p \geq 11$), conterrebbe una $g^1_{n-\nu_1}$ (segata dalle rette pel punto ν_1-plo) con $n - \nu_1 = \beta + 7 < 7$, onde sarebbe a moduli particolari ([21]); e d'altronde si ha $\beta + 2\nu_1 - 7 > 0$, dovendo in base al numero precedente risultare $3\nu_1 > n$. *Dunque effettivamente è* $\nu_2 > 5$.

In modo simile si prova che è $\nu_3 > 4$. Supposto cioè per assurdo $\nu_3 \leq 4$, dalla (12), avendo presenti le (11), (9), si ricava

$$n^2 - 6n - 3p + 3 \leq \nu_1^2 + \nu_2^2 - 2\nu_1 - 2\nu_2 + \sum_{i=3}^{r} \nu_i(\nu_i - 2) \leq \nu_1^2 + \nu_2^2 - 2\nu_1 - 2\nu_2 + 4\sum_{i=3}^{r}(\nu_i - 2)$$

$$= \nu_1^2 + \nu_2^2 - 6\nu_1 - 6\nu_2 + 16 + 4\left(\sum_{i=1}^{r}\nu_i - 2r\right) = \nu_1^2 + \nu_2^2 - 6\nu_1 - 6\nu_2 + 16 + 4[3n + p - 1 - (k + 2r)]$$

$$\leq \nu_1^2 + \nu_2^2 - 6\nu_1 - 6\nu_2 + 16 + 4(3n - 2p - 6),$$

e quindi

$$n^2 - 18n - \nu_1^2 - \nu_2^2 + 6\nu_1 + 6\nu_2 + 5p + 11 \leq 0.$$

Se in questa limitazione in luogo di n poniamo

$$n = \nu_1 + \nu_2 + \gamma, \tag{14}$$

dopo alcune facili riduzioni otteniamo

$$2(\nu_1 - 6)(\nu_2 - 6) + 2\gamma[(\nu_1 - 6) + (\nu_2 - 6)] + \gamma^2 + 6\gamma + 5p - 61 \leq 0. \tag{15}$$

Notiamo intanto che, in base alla (14), dev'essere $\gamma \geq 0$, poichè la curva generica di Σ è irriducibile. Ricordando la (8), e siccome per ciò che precede risulta $\nu_1 \geq \nu_2 \geq 6$, si vede che la (15) può solo sussistere con $\gamma = 0$, onde la (14) porge

$$n = \nu_1 + \nu_2. \tag{16}$$

Se fosse $\nu_3 > 0$, la disuguaglianza (13) che dobbiamo stabilire già sarebbe verificata in forza della (16). Possiamo dunque limitarci al caso che risulti $\nu_3 = 0$, e quindi $r = 2$. Con ciò la (3) in virtù della (16) fornisce

$$p = (\nu_1 - 1)(\nu_2 - 1),$$

([21]) Cfr. Op. cit. in ([2]), p. 159.

onde, essendo come già si è detto $\nu_1 \geq \nu_2 \geq 6$, risulta

$$p \geq 25,$$

e ciò contraddice la (15). *Bisogna quindi effettivamente supporre* $\nu_3 > 4$.

9. Per dimostrare la (13), sarà conveniente di modificare leggermente le notazioni relative ai punti base del generico sistema lineare di Σ. Diremo ν, μ e λ le tre sue molteplicità base più elevate, con

$$\nu \geq \mu \geq \lambda, \tag{17}$$

e supporremo ch'esso, oltre ad un punto base ν-plo e ad un punto base μ-plo, abbia $\rho_\lambda \geq 1$ punti base λ-pli, $\rho_{\lambda-1} \geq 0$ punti base $(\lambda-1)$-pli,..., $\rho_2 \geq 0$ punti base doppi, talchè il numero r dei punti base sarà dato da

$$r = 2 + \sum_{\alpha=2}^{\lambda} \rho_\alpha. \tag{18}$$

Per ciò che s'è detto ai n.[i] 7 ed 8, dovrà aversi

$$3\nu > n, \tag{19}$$

$$\lambda > 4, \tag{20}$$

ed inoltre, in base alle (17), potrà supporsi

$$\nu - \lambda - 1 \geq 0, \tag{21}$$

poichè in caso contrario sarebbe $\nu = \mu = \lambda$, e la disuguaglianza

$$\lambda + \mu + \nu > n \tag{22}$$

che dobbiamo stabilire, già sarebbe verificata in virtù della (19).

Dalle (3), (4), (6), colle attuali notazioni si ha

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}\nu(\nu-1) - \frac{1}{2}\mu(\mu-1) - p = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=2}^{\lambda} \rho_\alpha \alpha(\alpha-1), \tag{23}$$

$$\frac{1}{2}n(n+3) - \frac{1}{2}\nu(\nu+1) - \frac{1}{2}\mu(\mu+1) \geq \frac{1}{2}\sum_{\alpha=2}^{\lambda} \rho_\alpha \alpha(\alpha+1). \tag{24}$$

Se osserviamo che, solo che sia $\alpha \leq \lambda - 1$, risulta

$$(\lambda-2)(\alpha+1) \geq \lambda(\alpha-1),$$

dalla (24) deduciamo

$$(\lambda-2)\left[\frac{1}{2}n(n+3) - \frac{1}{2}\nu(\nu+1) - \frac{1}{2}\mu(\mu+1)\right] \geq \frac{1}{2}\lambda \sum_{\alpha=2}^{\lambda-1} \rho_\alpha \alpha(\alpha-1) + \frac{1}{2}\rho_\lambda \lambda(\lambda+1)(\lambda-2),$$

e sottraendo membro a membro da questa relazione quella che si ha dalla (23) moltiplicandone i due membri per λ, otteniamo

$$-n^2+(\lambda-1)(3n-\nu-\mu)+\nu^2+\mu^2-\lambda+p\lambda\geq-\lambda\rho_\lambda. \tag{25}$$

La (11), colle notazioni addotte dianzi si scrive

$$3n-k+p-\nu-\mu-1=\sum_{\alpha=2}^{\lambda}\rho_\alpha\alpha, \tag{26}$$

e, in virtù della (18), fornisce

$$3n-(k+2r)+p-\nu-\mu+3=\sum_{\alpha=2}^{\lambda}\rho_\alpha(\alpha-2). \tag{27}$$

D'altro canto, ricordando la (6), dalla (26) segue

$$3n+p-\nu-\mu-1\geq 2\rho_2+\lambda\rho_\lambda,$$

e sommando membro a membro questa relazione colla (25) si ottiene

$$-n^2+3n\lambda+(\lambda+1)(p-1)+\nu(\nu-\lambda)+\mu(\mu-\lambda)\geq 2\rho_2. \tag{28}$$

10. Dalle (27), (9) deduciamo

$$3n-2p-\nu-\mu-2\geq\sum_{\alpha=2}^{\lambda}\rho_\alpha(\alpha-2), \tag{29}$$

e quindi

$$3n-2p-\nu-\mu-2\geq(\lambda-2)\rho_\lambda. \tag{30}$$

Sommando membro a membro le (23), (29) otteniamo

$$\frac{1}{2}n(n+3)-\frac{1}{2}\nu(\nu+1)-\frac{1}{2}\mu(\mu+1)-3p-1\geq\frac{1}{2}\sum_{\alpha=2}^{\lambda}\rho_\alpha(\alpha^2+\alpha-4). \tag{31}$$

Ora, in virtù della (20), risulta

$$(\lambda+1)(\alpha^2+\alpha-4)\geq(\lambda+3)\alpha(\alpha-1)$$

solo che sia $3\leq\alpha\leq\lambda-1$. Dunque dalla (31) segue

$$(\lambda+1)\left[\frac{1}{2}n(n+3)-\frac{1}{2}\nu(\nu+1)-\frac{1}{2}\mu(\mu+1)-3p-1\right]\geq$$

$$\geq(\lambda+1)\rho_2+\frac{1}{2}(\lambda+3)\sum_{\alpha=3}^{\lambda-1}\rho_\alpha\alpha(\alpha-1)+\frac{1}{2}\rho_\lambda(\lambda+1)(\lambda^2+\lambda-4),$$

e sottraendo membro a membro da questa relazione quella che si ottiene dalla (23) moltiplicandone i due membri per $\lambda+3$, abbiamo

$$-n^2+3n\lambda+6n+\nu(\nu-\lambda-2)+\mu(\mu-\lambda-2)-2p\lambda-2\lambda-4\geq-2\rho_2-2\rho_\lambda. \tag{32}$$

Consideriamo infine le (28), (30), (32), e sommiamole membro a membro, dopo averne ordinatamente moltiplicati i due membri per le quantità positive $\lambda - 2$, 2, $\lambda - 2$; otteniamo così la relazione

$$(\lambda-2)[-2n^2+6n(\lambda+1)+2\nu(\nu-\lambda-1)+2\mu(\mu-\lambda-1)-3\lambda-p(\lambda-1)-5]+ \\ +6n-4p-2\nu-2\mu-4\geq 0,$$

e ponendo quivi in luogo di n e p le espressioni

$$n=\lambda+\mu+\nu+\varepsilon \tag{33}$$

$$p=11+\pi, \tag{34}$$

con un calcolo che non offre difficoltà abbiamo

$$\left\{\begin{aligned} &-4(\nu-\lambda-1)(\lambda-2)^2-4(\nu-3)(\mu-\lambda)(\lambda-2)-4(\nu-\lambda-1)(\lambda-3)-4(\mu-\lambda)(2\lambda-5)\\ &-4(\lambda-4)^2-(\lambda-1)(\lambda-2)\pi-4\pi\\ &-2\varepsilon(2\nu+2\mu-\lambda+\varepsilon-3)(\lambda-3)-2\varepsilon(2\nu+2\mu-\lambda+\varepsilon-6)\geq 0.\end{aligned}\right. \tag{35}$$

Le (17), (20) e (21) mostrano che nessuno degli addendi che figurano nella prima riga di questa limitazione può essere positivo; il termine $-4(\lambda-4)^2$ è certamente negativo, ed i due restanti che figurano nella seconda riga sono certo non positivi, essendo $\pi \geq 0$ in forza delle (8), (34). Dunque, affinchè la (35) possa sussistere, deve uno almeno degli altri addendi che compaiono nel primo membro di questa relazione, risultare maggiore di zero, e ciò esige che sia $\varepsilon < 0$, il che, in forza della (33), *dimostra la verità della disuguaglianza* (22) che dovevamo stabilire.

III.

11. Riprendendo le notazioni del n.° 5, consideriamo un qualunque sistema Ξ (in particolare un sistema Σ), per cui ammettiamo il generico sistema lineare possa essere *sovrabbondante,* ossia di dimensione effettiva h maggiore della dimensione virtuale k (la quale ora può anche risultare *negativa*).

Se il sistema Ξ contiene ∞^s sistemi lineari, sarà

$$s \leq 2r, \tag{36}$$

e la dimensione d di Ξ sarà espressa da

$$d=s+h. \tag{37}$$

Noi supporremo in questo paragrafo e nel successivo, che la dimensione virtuale k soddisfaccia alla limitazione

$$k \geq -p. \tag{38}$$

Tale limitazione è certamente verificata se è

$$h > 0, \tag{39}$$

ossia se la generica curva di Ξ appartiene ad un sistema lineare *infinito*, o, come anche diremo non è *isolata*. Infatti, le curve di tale sistema lineare essendo irriduttibili, il grado D del medesimo non può risultare negativo; e, in base alla (10), si ha

$$D \leq n^2 - \sum_{i=1}^{r} \nu_i^2 = k + p - 1. \tag{40}$$

Possono le curve di un sistema Ξ per cui valga la (38), essere a moduli generali? *La risposta a questa domanda è certamente negativa, non appena il genere soddisfaccia la disuguaglianza*

$$p > 36 \text{ (22)}; \tag{41}$$

questo fatto, che può anche enunciarsi in modo assai più espressivo, come è stato fatto verso la fine del n.° 2, verrà provato in seguito, con un ragionamento analogo a quello indicato al n.° 6 e sviluppato nei numeri successivi.

Ammetteremo cioè per assurdo che *esista un sistema Ξ per cui valgano le* (38), (41) *e le cui curve sieno a moduli generali.* E dimostreremo la falsità di quest'ipotesi, facendo vedere che *se esiste un sistema Ξ siffatto, è possibile di abbassare l'ordine della sua curva generica* Γ, mediante una conveniente successione di trasformazioni quadratiche, non aventi nessun punto fondamentale che cada in un punto semplice di Γ. L'assurdo segue da ciò, che, per quanto si è detto al n.° 5, la curva Γ_1 trasformata di Γ appartiene alla sua volta ad un nuovo sistema Ξ_1, le cui curve sono a moduli generali, e pel quale ancora valgono le (38), (41); e pertanto l'applicazione ripetuta della proposizione enunciata, conduce ad un sistema continuo di curve di dato genere p, *ed ordine comunque basso,* il che manifestamente non può essere.

12. Supponiamo adunque che esista il sistema Ξ di cui alla fine del numero precedente. Le sue curve essendo a moduli generali, varrà la (5). Possiamo escludere che il generico sistema lineare $|\Gamma|$ di Ξ sia *regolare*, questo caso essendo già stato trattato al paragrafo precedente. Se detto sistema li-

---

(22) Non resta escluso che ciò valga a partire da valori più bassi del genere.

neare è infinito, ossia vale la (39), la relativa serie caratteristica è una g_D^{h-1} *speciale* [23]. In virtù del teorema di CLIFFORD [24], risulta

$$2(h-1) \leq D,$$

ossia, per la (40),

$$h \leq \frac{1}{2}(k+p+1). \tag{42}$$

Questa limitazione vale pure se non è verificata la (39), cioè per $h=0$, come è subito visto in base alla (38).

Dalle (37), (42) segue

$$d \leq s + \frac{1}{2}(k+p+1),$$

e da qui, per le (5), (36), si ha

$$s + \frac{1}{2}k \geq \frac{5}{2}p + \frac{9}{2}, \tag{43}$$

$$2r + \frac{1}{2}k \geq \frac{5}{2}p + \frac{9}{2}. \tag{44}$$

Ciò premesso, incominceremo col dimostrare che *la somma delle tre molteplicità base più elevate di* $|\Gamma|$, *supera l'ordine* n *delle sue curve.*

13. Proviamo intanto che *la più grande* ν_1 *delle molteplicità base di* $|\Gamma|$, *è tale che*

$$3\nu_1 > n + 6. \tag{45}$$

La dimostrazione procederà per assurdo, ammettendo che non valga la (45), e dunque che si abbia

$$\nu_1 \leq \frac{n}{3} + 2. \tag{46}$$

Dalle (10), (11), avuto riguardo alla (38), si deduce

$$n^2 - 6n - 4p + 3 \leq \sum_{i=1}^{r} \nu_i(\nu_i - 2); \tag{47}$$

inoltre dalla (11), in base alle (44), (38), segue

$$\sum_{i=1}^{r} (\nu_i - 2) \leq 3n - p - 6. \tag{48}$$

---

[23] Ciò segue subito dal fatto che $|\Gamma|$ è *sovrabbondante*; cfr. Mem. cit. in [13], n.° 18.
[24] Per cui v. Op. cit. in [2], p. 131.

Dalla (47), avvalendosi delle (46), (48), e ricordando che è $\nu_i - 2 \geq 0$ per $i = 1, 2, ..., r$, si ha successivamente

$$n^2 - 6n - 4p + 3 \leq \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{n}{3} + 2\right)(\nu_i - 2) \leq \left(\frac{n}{3} + 2\right)(3n - p - 6),$$

e quindi

$$(n - 6)(p - 30) - 135 \leq 0.$$

Ora le curve di Ξ (di genere $p > 36$) essendo a moduli generali, sono di ordine $n > 26$, onde, in virtù anche della (41), la limitazione precedente non può certo sussistere, il che implica la falsità della (46).

14. Dimostriamo che dev' essere

$$\nu_2 > 10, \quad \nu_3 > 4,$$

ciò che ci sarà utile più tardi.

Supposto $\nu_2 \leq 10$, dalle (47), (48) si ha

$$n^2 - 6n - 4p + 3 \leq \nu_1^2 - 2\nu_1 + \sum_{i=2}^{r} \nu_i(\nu_i - 2) \leq \nu_1^2 - 2\nu_1 + 10 \sum_{i=2}^{r} (\nu_i - 2) =$$

$$= \nu_1^2 - 12\nu_1 + 20 + 10 \sum_{i=1}^{r} (\nu_i - 2) \leq \nu_1^2 - 12\nu_1 + 20 + 10(3n - p - 6),$$

e pertanto

$$n^2 - 36n - \nu_1^2 + 12\nu_1 + 6p + 43 \leq 0.$$

Se in questa limitazione in luogo di n poniamo

(49) $$n = \nu_1 + \beta + 12,$$

otteniamo

$$2\beta^2 + \beta(2\nu_1 - \beta - 12) + 6p - 245 \leq 0,$$

onde, avuto riguardo alla (41), dev' essere

(50) $$2\beta^2 + \beta(2\nu_1 - \beta - 12) - 29 < 0.$$

La generica curva di Ξ (di genere $p > 36$) contiene una $g^1_{n-\nu_1}$, segata dalle rette passanti pel suo punto ν_1-plo. Poichè essa è a moduli generali, occorre che sia

$$n - \nu_1 \geq \frac{p}{2} + 1 > 19 \text{ (}^{25}\text{)},$$

([25]) Cfr. Op. cit. in ([2]), p. 159.

e quindi, in base alla (49),

(51) $$\beta > 7.$$

Siccome poi dalle (45), (49) risulta

(52) $$2\nu_1 - \beta - 12 > 6,$$

così si vede che la (50) non può sussistere, *il che esige che sia effettivamente* $\nu_2 > 10$.

Per provare che è $\nu_3 > 4$, suppongasi se possibile $\nu_3 \leq 4$. Allora dalle (47), (48) segue

$$\begin{aligned} n^2 - 6n - 4p + 3 &\leq \nu_1^2 + \nu_2^2 - 2\nu_1 - 2\nu_2 + \sum_{i=3}^{r} \nu_i(\nu_i - 2) \\ &\leq \nu_1^2 + \nu_2^2 - 2\nu_1 - 2\nu_2 + 4\sum_{i=3}^{r}(\nu_i - 2) = \nu_1^2 + \nu_2^2 - 6\nu_1 - 6\nu_2 + 16 + 4\sum_{i=1}^{r}(\nu_i - 2) \\ &\leq \nu_1^2 + \nu_2^2 - 6\nu_1 - 6\nu_2 + 16 + 4(3n - p - 6), \end{aligned}$$

e quindi

$$n^2 - 18n - \nu_1^2 - \nu_2^2 + 6\nu_1 + 6\nu_2 + 11 \leq 0.$$

Se in questa limitazione in luogo di n poniamo

(53) $$n = \nu_1 + \nu_2 + \gamma,$$

otteniamo

$$2(\nu_1 - 6)(\nu_2 - 6) + \gamma(\gamma + 2\nu_1 + 2\nu_2 - 18) - 61 \leq 0.$$

Ora questa relazione non può essere verificata nelle ipotesi attuali; poichè in base alle (51), (52) dev'essere $\nu_1 > 13$, e per ciò che precede $\nu_2 > 10$; ed inoltre, in virtù della (53), deve aversi $\gamma \geq 0$, poichè la curva generica di Ξ è irriduttibile. *Bisogna quindi effettivamente supporre* $\nu_3 > 4$.

15. All'uopo di stabilire la proposizione enunciata alla fine del n.° 12, modifichiamo le notazioni relative alle molteplicità dei punti multipli della generica curva di Ξ, nel modo che abbiamo indicato al principio del n.° 9. Per ciò che s'è dimostrato ai n.[i] 13 e 14, dovrà aversi

(54) $$3\nu > n + 6,$$

(55) $$\lambda > 4, \quad \mu > 10, \quad \nu > 13,$$

ed inoltre, in base alle (17), potrà supporsi

(56) $$\nu - \lambda - 4 \geq 0,$$

poichè in caso contrario sarebbe

$$\mu \geq \lambda \geq \nu - 3,$$

e la disuguaglianza

$$\lambda+\mu+\nu>n, \tag{57}$$

che dobbiamo dimostrare, sarebbe una conseguenza della (54).

Dalle (3), (4), (38), colle attuali notazioni si ha

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\frac{1}{2}\nu(\nu-1)-\frac{1}{2}\mu(\mu-1)-p=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=2}^{\lambda}\rho_\alpha\alpha(\alpha-1) \tag{58}$$

$$\frac{1}{2}n(n+3)-\frac{1}{2}\nu(\nu+1)-\frac{1}{2}\mu(\mu+1)+p\geq\frac{1}{2}\sum_{\alpha=2}^{\lambda}\rho_\alpha\alpha(\alpha+1), \tag{59}$$

e dalla (11)

$$3n-k-\nu-\mu+p-1=\sum_{\alpha=2}^{\lambda}\rho_\alpha\alpha.$$

Da quest' ultima equazione, ricordando la (38), deduciamo

$$3n-\nu-\mu+2p-1\geq 2\rho_2, \tag{60}$$

ed inoltre, in base alle (44), (18) e (38),

$$3n-\nu-\mu-p-2\geq\sum_{\alpha=2}^{\lambda}\rho_\alpha(\alpha-2), \tag{61}$$

e quindi

$$3n-\nu-\mu-p-2\geq(\lambda-2)\rho_\lambda. \tag{62}$$

Sommando membro a membro le (58), (61), otteniamo

$$\frac{1}{2}n(n+3)-\frac{1}{2}\nu(\nu+1)-\frac{1}{2}\mu(\mu+1)-2p-1\geq\frac{1}{2}\sum_{\alpha=2}^{\lambda}\rho_\alpha(\alpha^2+\alpha-4). \tag{63}$$

Ora, in virtù della prima delle (55), risulta

$$(\lambda+1)(\alpha^2+\alpha-4)\geq(\lambda+3)\alpha(\alpha-1),$$

solo che sia $3\leq\alpha\leq\lambda-1$. Dunque dalla (63) segue

$$\begin{aligned}(\lambda+1)\left[\frac{1}{2}n(n+3)-\frac{1}{2}\nu(\nu+1)-\frac{1}{2}\mu(\mu+1)-2p-1\right]\geq\\ \geq(\lambda+1)\rho_2+\frac{1}{2}(\lambda+3)\sum_{\alpha=3}^{\lambda-1}\rho_\alpha\alpha(\alpha-1)+\frac{1}{2}\rho_\lambda(\lambda+1)(\lambda^2+\lambda-4),\end{aligned}$$

e sottraendo membro a membro da questa relazione quella che si ottiene dalla (58) moltiplicandone i due membri per $\lambda+3$, abbiamo

$$\begin{aligned}&-n^2+3n\lambda+6n+\nu(\nu-\lambda-2)+\\ &\quad+\mu(\mu-\lambda-2)-p\lambda+p-2\lambda-4\geq-2\rho_2-2\rho_\lambda.\end{aligned} \tag{64}$$

Consideriamo infine le (60), (62), (64), e sommiamole membro a membro, dopo averne ordinatamente moltiplicati i due membri per le quantità positive $\lambda-2,\ 2,\ \lambda-2$. Otteniamo così

$$(\lambda-2)[-n^2+3n\lambda+9n+\nu(\nu-\lambda-3)+\mu(\mu-\lambda-3)-p\lambda+3p-2\lambda-5]$$
$$+6n-2\nu-2\mu-2p-4\geq 0,$$

e ponendo quivi in luogo di n l'espressione

$$n=\lambda+\mu+\nu+\varepsilon, \tag{65}$$

con un calcolo che non offre difficoltà abbiamo

$$\left\{\begin{aligned}&-2(\nu-\lambda-4)(\lambda-4)(\lambda-2)-2(\mu-\lambda)(\nu-13)(\lambda-2)-2(\mu-\lambda)(\lambda-4)-2(\nu-\lambda-4(\lambda-4)\\&-18(\mu-11)(\lambda-2)-7\lambda^2-43(\lambda-4)-18-(p-36)(\lambda-2)(\lambda-3)-2p\\&-\varepsilon(\varepsilon+2\nu+2\mu-\lambda-9)(\lambda-3)-\varepsilon(\varepsilon+2\nu+2\mu-\lambda-15)\geq 0.\end{aligned}\right. \tag{66}$$

Le (17), (41), (55), (56), mostrano che nessuno degli addendi che compaiono nelle due prime righe di questa limitazione, può essere positivo. Poichè la loro somma è certamente negativa, affinchè la (66) possa sussistere è necessario che uno almeno degli addendi rimanenti sia positivo. Ciò accade solamente se è $\varepsilon<0$, il che, in forza della (65), *dimostra la verità della disuguaglianza* (57) che dovevamo stabilire.

16. Il risultato conseguito al numero precedente, non dimostra ancora la proposizione enunciata al n.° 11. Può darsi invero, che i tre punti base del generico sistema lineare di Ξ a cui competono le tre molteplicità più elevate, sieno fra loro infinitamente vicini, per modo che non esista nessuna conica irriducibile che li contenga. In tal caso non è possibile di abbassare l'ordine delle curve di detto sistema lineare, mediante una sola trasformazione quadratica; però nel paragrafo seguente dimostreremo che *si può ottenere questo intento, mediante una conveniente successione di trasformazioni quadratiche* ([26]).

([26]) La via che noi seguiamo, ha qualche rassomiglianza con quella tenuta da O. CHISINI, per vincere una difficoltà analoga a quella segnalata, che si presenta nel problema della decomposizione di una trasformazione cremoniana in fattori quadratici. Ved. O. CHISINI, *Sul teorema di Noether relativo alla decomponibilità di una trasformazione cremoniana in un prodotto di trasformazioni quadratiche*, « Atti della Soc. dei Nat. e Mat. di Modena », serie V, **6** (1921), od anche Op. cit. in ([9]), vol. III, p. 170 e seguenti.

IV.

17. Per ciò che abbiamo detto al numero precedente, dobbiamo ora esaminare il caso in cui, detti O, O_1 ed O_2 i punti base del generico sistema lineare di Ξ, cui spettano le molteplicità più elevate, che ora rispettivamente denominiamo $\omega = \omega_0$, ω_1 e ω_2 (con $\omega \geq \omega_1 \geq \omega_2$), risultino i punti O_1 ed O_2 ***prossimi*** ad O (in direzioni distinte od infinitamente vicine). In base al n.° 15, ferme restando le altre ipotesi fatte al n.° 11 sul sistema Ξ, dev'essere

$$\omega + \omega_1 + \omega_2 \geq n + 1, \tag{67}$$

e pertanto

$$2\omega_1 + 2\omega_2 > 2(n - \omega). \tag{68}$$

Per maggior generalità, supponiamo che il generico sistema lineare di Ξ abbia un certo numero $\sigma - 2 \geq 0$ di punti base ulteriori O_3, $O_4, \ldots, O_\sigma$ *prossimi ad O*, ed aventi molteplicità ω_3, $\omega_4, \ldots, \omega_\sigma$, tali che

$$2\omega_j \geq n - \omega \qquad \text{per } j = 3, 4, \ldots, \sigma. \tag{69}$$

Sarà ovviamente

$$\sum_{j=1}^{\sigma} \omega_j \leq \omega, \tag{70}$$

ed inoltre per la (67)

$$\sum_{i=0}^{\sigma} \omega_i \geq n + 1. \tag{71}$$

Dalle (68), (69) si deduce sommando

$$2\sum_{j=1}^{\sigma} \omega_j > (n - \omega)\sigma,$$

onde per la (70) dev'essere

$$\sigma < \frac{2\omega}{n - \omega}. \tag{72}$$

Aggiungasi che, le curve di Ξ essendo generalmente irriducibili, si ha

$$\omega_j \leq n - \omega \qquad \text{per } j = 1, 2, \ldots, \sigma. \tag{73}$$

18. Premettiamo il seguente

LEMMA. — *Dato un sistema Ξ di curve a moduli generali, per cui valgano le* (38), (41), *se il generico sistema lineare $|\Gamma|$ di Θ ha un punto base O ω-plo, avente* ***prossimi*** *altri $\sigma \geq 2$ punti base O_1, $O_2, \ldots, O_\sigma$, mul-*

tipli secondo $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\sigma$, *e se valgono le* (71), (72), *il sistema lineare* $|\Gamma|$ *ha un ulteriore punto base* φ*-plo, con*

$$2\varphi \geq n - \omega. \tag{74}$$

Il sistema lineare $|\Gamma|$, oltre ad $O, O_1, \ldots, O_\sigma$, abbia altri $\tau \geq 0$ punti base, multipli secondo $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\tau$. Gli eventuali punti base *semplici* di $|\Gamma|$, devono, al solito, essere considerati come *virtualmente inesistenti,* talchè sarà $\nu_l \geq 2$ per $l = 1, 2, \ldots, \tau$. Poichè, quando sia fissato il punto O, i punti $O_1, O_2, \ldots, O_\sigma$ sono vincolati ad essergli prossimi, il numero s esprimente l'infinità dei sistemi lineari costituenti Ξ, non supera di certo

$$2 + \sigma + 2\tau.$$

Si ha pertanto, in virtù della (43),

$$\sigma + 2\tau + \frac{1}{2}k \geq \frac{5}{2}p + \frac{5}{2}. \tag{75}$$

Le equazioni (3), (10) ed (11), colle notazioni attuali si scrivono

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\sigma}\omega_i(\omega_i - 1) - p = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\tau}\nu_l(\nu_l - 1) \tag{76}$$

$$n^2 - \sum_{i=0}^{\sigma}\omega_i^2 - k - p + 1 = \sum_{l=1}^{\tau}\nu_l^2 \tag{77}$$

$$3n - \sum_{i=0}^{\sigma}\omega_i - k + p - 1 = \sum_{l=1}^{\tau}\nu_l \text{ (27)}. \tag{78}$$

Dalle (75), (78), segue

$$3n - \sum_{i=0}^{\sigma}\omega_i - \frac{1}{2}k - \frac{3}{2}p + \sigma - \frac{7}{2} \geq \sum_{l=1}^{\tau}\nu_l - 2\tau,$$

e quindi, ove si abbiano presenti le (38), (71),

$$3n - \sum_{i=0}^{\sigma}\omega_i - p + \sigma - 4 \geq \sum_{l=1}^{\tau}(\nu_l - 1) - \tau \tag{79}$$

$$2n - p + \sigma - 5 \geq \sum_{l=1}^{\tau}(\nu_l - 2). \tag{80}$$

Incominciamo col dimostrare che è $\tau > 0$. All'uopo introduciamo un nu-

---

(27) Se fosse $\tau = 0$, i sommatori $\sum_{l=1}^{\tau}$ che figurano in queste formule e nelle successive, vanno sostituiti da uno zero.

mero φ, che valga zero nel caso che risulti $\tau = 0$, mentre per $\tau \geq 1$ sia eguale alla più grande delle ν_l; e facciamo vedere che è

$$\varphi \geq 6. \tag{81}$$

Supposto infatti per assurdo $\varphi \leq 5$, in base alla (80) si ha

$$\sum_{l=1}^{\tau} \nu_l(\nu_l - 2) \leq 5 \sum_{l=1}^{\tau} (\nu_l - 2) \leq 5(2n - p + \sigma - 5),$$

onde dalle (77), (78) segue

$$n^2 - 6n - \sum_{i=0}^{\sigma} \omega_i(\omega_i - 2) + k - 3p + 3 \leq 5(2n - p + \sigma - 5). \tag{82}$$

Ora, in virtù delle (73), (70), risulta

$$\sum_{i=0}^{\sigma} \omega_i(\omega_i - 2) = \omega(\omega - 2) + \sum_{j=1}^{\sigma} \omega_j(\omega_j - 2) \leq \omega(\omega - 2 + \sum_{j=1}^{\sigma} \omega_j(n - \omega - 2)$$
$$\leq \omega(\omega - 2) + \omega(n - \omega - 2) = n\omega - 4\omega,$$

e quindi dalla (82), ove si abbia anche presente la (38), si deduce

$$n(n - \omega - 16) + 4\omega - 5\sigma + p + 28 \leq 0.$$

L'ipotesi fatta, che sia $\varphi \leq 5$, è quindi assurda, in quanto che l'ultima limitazione che ne abbiamo dedotta non può essere verificata. Ed invero, come già si è detto al n.° 14, dev'essere

$$n - \omega > 19,$$

ed inoltre, in base anche alla (72),

$$5\sigma < \frac{10\omega}{n - \omega} < \frac{10\omega}{19}.$$

19. Possiamo ora dimostrare il lemma enunciato al numero precedente, per il che basta far vedere che il numero φ ivi definito soddisfa alla limitazione (74). Supposto infatti per assurdo che così non sia, dovrà aversi

$$n = \omega + 2\varphi + \eta + 1 \tag{83}$$

con

$$\eta \geq 0. \tag{84}$$

Sommando membro a membro le (76), (79), otteniamo

$$\frac{1}{2} n(n + 3) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\sigma} \omega_i(\omega_i + 1) - 2p + \sigma - 3 \geq \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\tau} (\nu_l + 2)(\nu_l - 1) - \tau. \tag{85}$$

Moltiplichiamo ambo i membri delle (76), (85), per le quantità positive $\varphi+2$ e φ, e dalla seconda delle due relazioni così ottenute, sottragghiamo membro a membro la prima. In tal guisa abbiamo

$$(86)\quad \begin{cases} -n^2+3\varphi n+3n+\sum_{i=0}^{\sigma}\omega_i(\omega_i-\varphi-1)-(\varphi-2)p+\varphi\sigma-4\varphi-2\geq \\ \geq \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\tau}(\nu_l-1)[\varphi(\nu_l+2)-\nu_l(\varphi+2)]-\varphi\tau= \\ =\sum_{l=1}^{\tau}(\nu_l-2)(\varphi-\nu_l)+\sum_{l=1}^{\tau}(\varphi-\nu_l)-\varphi\tau=\sum_{l=1}^{\tau}(\nu_l-2)(\varphi-\nu_l)-\sum_{l=1}^{\tau}\nu_l. \end{cases}$$

Ora è

$$\sum_{l=1}^{\tau}(\nu_l-2)(\varphi-\nu_l)\geq 0,$$

essendo, in base al numero precedente, $\nu_l\geq 2$, $\varphi\geq\nu_l$ (per $l=1, 2,..., \tau$) ed inoltre, per le (78), (88),

$$\sum_{l=1}^{\tau}\nu_l\leq 3n-\sum_{i=0}^{\sigma}\omega_i+2p-1,$$

onde dalle (86) deduciamo

$$(87)\qquad -n^2+3\varphi n+6n+\sum_{i=0}^{\sigma}\omega_i(\omega_i-\varphi-2)-(\varphi-4)p+\varphi\sigma-4\varphi-3\geq 0.$$

Notiamo poscia che, in virtù delle (73), (70), dev'essere

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\sigma}\omega_i(\omega_i-\varphi-2)&=\omega(\omega-\varphi-2)+\sum_{j=1}^{\sigma}\omega_j(\omega_j-\varphi-2)\leq \\ &\leq\omega(\omega-\varphi-2)+\sum_{j=1}^{\sigma}\omega_j(n-\omega-\varphi-2)\leq \\ &\leq\omega(\omega-\varphi-2)+\omega(n-\omega-\varphi-2)=n\omega-2\varphi\omega-4\omega,\end{aligned}$$

e, per le (72), (83), (84),

$$\varphi\sigma<\frac{2\varphi\omega}{n-\omega}=\frac{2\varphi\omega}{2\varphi+\eta+1}<\omega.$$

Pertanto dalla (87) abbiamo in definitiva

$$-n^2+n\omega-2\varphi\omega+3\varphi n+6n-(\varphi-4)p-3\omega-4\varphi-3>0,$$

e sostituendo in questa diseguaglianza ad n l'espressione data dalla (83), otteniamo

$$(88)\qquad -\eta(\omega+\varphi+\eta-4)-(\varphi-2)(\omega-2\varphi)-(\varphi-4)(p-11)+46>0.$$

Ora, in base alle (41), (81), (84), risulta

$$(\varphi - 4)(p - 11) > 50, \quad \eta(\omega + \varphi + \eta - 4) \geq 0,$$

onde la (88) può solo sussistere nell'ipotesi che sia

$$2\varphi > \omega. \tag{89}$$

Ma, in forza delle (70), (71), risulta

$$\omega = \sum_{i=0}^{\sigma} \omega_i - \sum_{j=1}^{\sigma} \omega_j > n - \omega,$$

e pertanto la (89) *implica che sia soddisfatta la limitazione* (74) che dovevamo stabilire. Con ciò il lemma del n.° 18 è dimostrato.

20. Siamo finalmente in grado di provare la verità dell'affermazione fatta alla fine del n.° 16.

Consideriamo il generico sistema lineare $|\Gamma|$ di Ξ, pel quale conserviamo le notazioni del n.° 17, ed applichiamogli la trasformazione quadratica T_1, definita dai punti base O, O_1 e da un terzo punto P_1 scelto *genericamente* nel piano [28]. Il sistema trasformato $|\Gamma_1|$, sarà costituito da curve di ordine

$$n^{(1)} = n + (n - \omega) - \omega_1,$$

passanti

$$\omega^{(1)} = \omega_0^{(1)} = n - \omega_1$$

volte pel punto $O^{(1)}$, omologo della retta O_1P_1, ed

$$\omega_1^{(1)} = n - \omega$$

volte pel punto $O_1^{(1)}$, omologo della retta OP_1. I punti base $O_2, O_3, \dots, O_\sigma$ di $|\Gamma|$, si trasformeranno in punti base $O_2^{(1)}, O_3^{(1)}, \dots, O_\sigma^{(1)}$ di $|\Gamma_1|$, prossimi ad $O^{(1)}$, colle stesse molteplicità

$$\omega_2^{(1)} = \omega_2, \quad \omega_3^{(1)} = \omega_3, \dots, \quad \omega_\sigma^{(1)} = \omega_\sigma.$$

Va notato che, stante la genericità di P_1, il punto base $O_1^{(1)}$ riesce infinitamente vicino ad $O^{(1)}$, in direzione generica rispetto ai suddetti punti base di $|\Gamma_1|$, e che inoltre le curve di $|\Gamma_1|$ passano per esso con $n - \omega$ rami lineari non osculantisi. Di più, siccome risulta

$$n^{(1)} - \omega^{(1)} = n - \omega,$$

---

[28] Precisamente basta scegliere P_1 a distanza finita dai vari punti base di $|\Gamma|$, ed in modo che la retta OP_1 seghi la generica curva di $|\Gamma|$ fuori di O in $n - \omega$ punti *distinti*.

il sistema lineare $|\Gamma_1|$ non ha *prossimo* ad $O^{(1)}$ nessun punto base la cui molteplicità raggiunga o superi $\frac{1}{2}(n-\omega)$, all'infuori di $O_1^{(1)}, O_2^{(1)}, \ldots, O_\sigma^{(1)}$.

Applichiamo ora a $|\Gamma_1|$ la trasformazione quadratica T_2 definita dai punti base $O^{(1)}$, $O_1^{(1)}$ e da un terzo punto P_2 scelto *genericamente* nel piano. Otterremo così un nuovo sistema lineare $|\Gamma_2|$, pel quale varranno considerazioni analoghe, e col quale potremo procedere in modo simile; ecc. ecc..

Dopo aver successivamente applicate le σ trasformazioni quadratiche T_1, $T_2, \ldots, T_\sigma$, il sistema $|\Gamma|$ si trasforma in un sistema $|\Gamma_\sigma|$ di curve di ordine

(90) $$n^{(\sigma)} = n + \sigma(n-\omega) - (\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_\sigma),$$

passanti

(91) $$\omega^{(\sigma)} = \omega_0^{(\sigma)} = n + (\sigma - 1)(n-\omega) - (\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_\sigma)$$

volte pel punto $O^{(\sigma)}$. A questo riescono infinitamente vicini, in direzioni distinte, altri σ punti base $O_j^{(\sigma)}$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$, per cui le curve di $|\Gamma_\sigma|$ passano

(92) $$\omega_j^{(\sigma)} = n^{(j)} - \omega^{(j)} = n - \omega$$

volte, *con parabole osculatrici distinte.* Gli eventuali punti base ulteriori di $|\Gamma_\sigma|$ prossimi ad O, hanno molteplicità inferiori a $\frac{1}{2}(n-\omega) = \frac{1}{2}(n^{(\sigma)} - \omega^{(\sigma)})$.

Per ciò che abbiamo detto al n.° 5, il sistema lineare $|\Gamma_\sigma|$ appartiene ad un sistema Ξ_σ di curve di genere p a moduli generali, pel quale valgono le (38), (41). In base alle (90), (91), (92), risulta

$$\sum_{i=0}^{\sigma} \omega_i^{(\sigma)} = n^{(\sigma)} + (\sigma - 1)(n-\omega) > n^{(\sigma)},$$

e quindi possiamo applicare il lemma del n.° 18, il quale ci assicura che $|\Gamma_\sigma|$ oltre ad $O^{(\sigma)}, O_1^{(\sigma)}, \ldots, O_\sigma^{(\sigma)}$ ha un punto base φ_1-plo Q_1, con

(93₁) $$2\varphi_1 \geq n^{(\sigma)} - \omega^{(\sigma)} = n - \omega.$$

In virtù di quanto abbiamo detto poc'anzi, *il punto* Q_1 *è a distanza finita da* $O^{(\sigma)}$, e possiamo supporre ch'esso sia un punto base *proprio.* La trasformazione quadratica $T_{\sigma+1}$, definita dai punti base $O^{(\sigma)}$, $O_1^{(\sigma)}$, Q_1, muta $|\Gamma_\sigma|$ in un sistema lineare $|\Gamma_{\sigma+1}|$ di curve di ordine

$$n^{(\sigma+1)} = n + \sigma(n-\omega) - (\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_\sigma) - \varphi_1,$$

passanti

$$\omega^{(\sigma+1)} = n + (\sigma - 1)(n-\omega) - (\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_\sigma) - \varphi_1$$

volte pel punto $O^{(\sigma+1)}$, il quale ha infinitamente vicini altri σ punti base $O_1^{(\sigma+1)}$, $O_2^{(\sigma+1)}, \ldots, O_\sigma^{(\sigma+1)}$, multipli secondo

$$\omega_1^{(\sigma+1)} = n - \omega - \varphi_1, \quad \omega_2^{(\sigma+1)} = n - \omega, \ldots, \quad \omega_\sigma^{(\sigma+1)} = n - \omega.$$

Anche ora si può applicare il lemma del n.° 18, e provare così l'esistenza di un punto base φ_2-plo di $|\Gamma_{\sigma+1}|$, con

$$(93_2) \qquad 2\varphi_2 \geq n^{(\sigma+1)} - \omega^{(\sigma+1)} = n - \omega,$$

il quale può supporsi sia un punto base *proprio* Q_2. Eseguendo la trasformazione quadratica $T_{\sigma+2}$ definita dai punti base $O^{(\sigma+1)}$, $O_2^{(\sigma+1)}$ Q_2, $|\Gamma_{\sigma+1}|$ viene mutato in un sistema lineare $|\Gamma_{\sigma+2}|$. E così si può proseguire, fino a giungere mediante un ultima trasformazione quadratica $T_{2\sigma}$, ad un sistema lineare $|\Gamma_{2\sigma}|$ di curve di ordine

$$(94) \qquad n^{(2\sigma)} = n + \sigma(n - \omega) - (\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_\sigma) - (\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_\sigma).$$

Sommando membro a membro le (68), (69), otteniamo

$$2(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_\sigma) > \sigma(n - \omega),$$

e parimenti dalle (93_1), (93_2),... ricaviamo

$$2(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_\sigma) \geq \sigma(n - \omega).$$

Risulta adunque

$$(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_\sigma) + (\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_\sigma) > \sigma(n - \omega),$$

onde la (94) porge

$$n^{(2\sigma)} < n.$$

In conclusione, applicando al sistema $|\Gamma|$ successivamente le trasformazioni quadratiche $T_1, T_2, \ldots, T_{2\sigma}$, siamo riesciti ad *abbassare l'ordine delle sue curve.* Con ciò la proposizione del n.° 11 resta stabilita in ogni caso.

V.

21. La proposizione del n.° 6 è stata dimostrata al § II, ammettendo un postulato. Ci proponiamo ora di *provare indipendentemente da quel postulato, ch'essa è vera per* p > 36.

Siccome (v. n.i 5 e 6) un sistema Σ è un particolare sistema Ξ, ciò segue subito in base al § III, solo che valga la (38). Basterà dunque dimostrarlo nell'ipotesi che la (38) non sia soddisfatta, ossia basterà far vedere che:

Le curve d'un sistema Σ *di genere* $p > 36$, *per cui sia*

$$k < -p, \tag{95}$$

(se esistono) sono necessariamente a moduli particolari.

Stabiliremo questa proposizione nei numeri seguenti ragionando per assurdo, in modo analogo a quello cui abbiamo accennato alla fine del n.° 6.

22. Supponiamo adunque che esista un sistema Σ di curve di genere $p > 36$ *a moduli generali*, per cui valga la (95). Conservando le notazioni del n.° 11, per ciò che s'è detto ivi, la generica curva di Σ deve essere *isolata*, ossia è $h = 0$; inoltre (i punti multipli delle curve di Σ dovendo potersi assegnare ad arbitrio nel piano) risulta $s = 2r$, onde la (37) fornisce

$$d = 2r,$$

e conseguentemente dalla (5) si ha

$$2r \geq 3p + 5. \tag{96}$$

Consideriamo una curva Γ generica di Σ, ed un qualunque suo punto multiplo P, che, ad esempio, sia θ-plo. Le curve piane d'ordine n aventi gli stessi punti multipli di Γ, colle stesse molteplicità, tranne il punto P, in luogo del quale abbiano un punto θ-plo *variabile arbitrariamente nel piano*, costituiscono un sistema continuo ∞^2 (contenuto in Σ). La rete di curve *tangente in* Γ *a questo sistema* ([29]), contiene Γ e comprende ∞^2 curve d'ordine n, aventi gli stessi punti multipli di Γ, colle stesse molteplicità, tranne il punto P pel quale esse passano solo $\theta - 1$ volte. La serie caratteristica di questa rete su Γ è una g^1_m, ove m, in virtù della (10), vale

$$m = n^2 - \sum_{i=1}^{r} \nu_i^2 + \theta = k + p + \theta - 1.$$

Siccome, per ipotesi, la curva Γ è a moduli generali, così dovrà essere $m > \frac{1}{2} p$, ossia

$$k > -\frac{1}{2} p - \theta + 1. \tag{97}$$

([29]) Per questa locuzione, e per le proposizioni di cui facciamo uso più sotto, vedasi la Nota dell'A., *Dei sistemi lineari tangenti ad un qualunque sistema di forme*, in « Rendic. R. Acc. Naz. dei Lincei », serie V, **33** (1924)$_1$, p. 182.

Da qui, in base alla (95), (41), segue

$$\theta > 20. \tag{98}$$

23. In ciò che si è detto al numero precedente possiamo supporre che θ sia *la più piccola delle molteplicità* ν_i della curva Γ, onde sarà $\nu_i - \theta \geq 0$ per $i = 1, 2, \ldots, r$. Detta ν la più grande di quelle molteplicità, vogliamo ora dimostrare che è

$$3\nu > n + 3\theta. \tag{99}$$

Supposto infatti per assurdo

$$\nu \leq \frac{n}{3} + \theta,$$

e pertanto $\nu_i \leq \frac{n}{3} + \theta$ per $i = 1, 2, \ldots, r$, dalle (10), (11), avendo anche riguardo alla (96), deduciamo

$$n^2 - 3n\theta + (\theta - 1)k - (\theta + 1)(p - 1) = \sum_{i=1}^{r} \nu_i(\nu_i - \theta) \leq \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{n}{3} + \theta\right)(\nu_i - \theta) =$$
$$= \left(\frac{n}{3} + \theta\right)\left(\sum_{i=1}^{r} \nu_i - r\theta\right) \leq \left(\frac{n}{3} + \theta\right)\left(3n - k + p - 1 - \frac{3}{2}\theta p - \frac{5}{2}\theta\right),$$

e da qui, ricordando la (97),

$$n^2 - 3n\theta - \frac{3}{2}p\theta - \frac{p}{2} - \theta^2 + 3\theta < \left(\frac{n}{3} + \theta\right)\left[3n - \frac{3}{2}(p\theta + \theta - p)\right],$$

ossia

$$n[(p - 11)(\theta - 1) - 11] + p[3\theta(\theta - 2) - 1] + \theta(\theta + 6) < 0.$$

Siccome, in base alle (41), (98), questa disuguaglianza non può sussistere, *ciò dimostra la verità dell'asserto.*

24. Modifichiamo ora le notazioni relative ai punti multipli di Γ, com'è stato fatto al n.° 9. Per ciò che abbiamo detto alla fine del n.° 6, la proposizione del n.° 21 sarà dimostrata, se facciamo vedere che è

$$\lambda + \mu + \nu > n. \tag{100}$$

All'uopo possiamo supporre

$$\nu - \lambda - \theta - 4 \geq 0, \tag{101}$$

poichè in caso contrario si avrebbe

$$\mu \geq \lambda \geq \nu - \theta - 3,$$

e pertanto la disuguaglianza (100) sarebbe certo soddisfatta, essendo per le (99), (98)

$$\lambda + \mu + \nu \geq 3\nu - 2\theta - 6 > n + \theta - 6 > n.$$

La (26), avuto riguardo alla (97), porge

$$3n - \nu - \mu + \frac{3}{2}p + \theta - 2 > \sum_{\alpha=\theta}^{\lambda} \rho_\alpha \alpha,$$

e da qui, in virtù delle (18), (96), ricaviamo

$$3n - \nu - \mu - \frac{3}{2}p + \theta - 3 > \sum_{\alpha=\theta}^{\lambda} \rho_\alpha(\alpha - 2). \tag{102}$$

Sommando membro a membro le (23), (102), otteniamo

$$\frac{1}{2}n(n+3) - \frac{1}{2}\nu(\nu+1) - \frac{1}{2}\mu(\mu+1) - \frac{5}{2}p + \theta - 2 > \frac{1}{2}\sum_{\alpha=\theta}^{\lambda} \rho_\alpha(\alpha^2 + \alpha - 4),$$

d'onde, essendo

$$(\lambda + 1)(\alpha^2 + \alpha - 4) \geq (\lambda + 3)\alpha(\alpha - 1)$$

per $\theta \leq \alpha \leq \lambda - 1$, deduciamo

$$(\lambda + 1)\left[\frac{1}{2}n(n+3) - \frac{1}{2}\nu(\nu+1) - \frac{1}{2}\mu(\mu+1) - \frac{5}{2}p + \theta - 2\right] >$$

$$> \frac{1}{2}(\lambda + 3)\sum_{\alpha=\theta}^{\lambda-1} \rho_\alpha \alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{2}\rho_\lambda(\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda - 4).$$

Da questa relazione sottragghiamo membro a membro quella che si ha dalla (23) moltiplicandone i due membri per $\lambda + 3$. Abbiamo così:

$$-n^2 + 3n\lambda + 6n + \mu(\mu - \lambda - 2) + \nu(\nu - \lambda - 2) - \frac{3}{2}p\lambda + \frac{1}{2}p +$$

$$+ (\lambda + 1)\theta - 3\lambda - 5 > -2\rho_\lambda;$$

e poichè dalla (102) segue

$$3n - \nu - \mu - \frac{3}{2}p + \theta - 3 > \rho_\lambda(\lambda - 2),$$

perveniamo in definitiva alla disuguaglianza

$$(\lambda - 2)\left[-n^2 + 3n\lambda + 6n + \mu(\mu - \lambda - 2) + \nu(\nu - \lambda - 2) - \frac{3}{2}p\lambda + \frac{1}{2}p + (\lambda + 1)\theta - 3\lambda - 5\right] +$$

$$+ 6n - 2\nu - 2\mu - 3p + 2\theta - 6 > 0.$$

Poniamo in essa in luogo di n l'espressione

$$n = \lambda + \mu + \nu + \varepsilon; \tag{103}$$

in tal guisa otteniamo

$$\begin{aligned}-(\lambda-2)\left[2(\nu-\lambda-\theta-4)(\lambda-4)+2(\mu-\lambda)(\nu-4)+(\lambda-10)\theta+\left(\frac{3}{2}p-11\right)(\lambda-1)\right]-\\ -4(\mu+\nu-3)(\lambda-3)-(\lambda-4)(\theta+3)-(p-36)(\lambda-2)-3p-(\lambda-14)-\\ -\varepsilon(\varepsilon+2\mu+2\nu-\lambda-6)(\lambda-3)-\varepsilon(\varepsilon+2\mu+2\nu-\lambda-12)>0.\end{aligned}$$

Ora, in virtù delle (41), (98), (101), questa relazione esige che risulti

$$\varepsilon < 0,$$

onde, in forza della (103), *resta in ogni caso dimostrata la disuguaglianza* (100) che dovevamo stabilire.

Teoria delle sostituzioni che operano su una infinità numerabile di elementi.

Memoria 3ª (*) di LUIGI ONOFRI (a Bologna).

Sunto. - *In questa terza ed ultima Memoria sulle sostituzioni operanti su infiniti elementi, l'A. tratta della transitività e della intransitività nelle sue varie forme, del gruppo totale e di altri gruppi speciali.*

CAPITOLO V.

TRANSITIVITÀ ED INTRANSITIVITÀ

A) Transitività.

98. Sia $\mathcal{C}$ un gruppo od uno pseudogruppo di sostituzioni sull'insieme numerabile I di elementi:

$$1, \quad 2, \dots, \quad n, \dots.$$

Diremo che il complesso $\mathcal{C}$ possiede *transitività finita di grado* m quando, estratti ad arbitrio da I due sistemi di m elementi:

$$\begin{gathered} x_1, \quad x_2, \dots, \quad x_m, \\ y_1, \quad y_2, \dots, \quad y_m, \end{gathered}$$

esiste almeno una sostituzione s di $\mathcal{C}$ tale che:

$$s(x_1) = y_1, \quad s(x_2) = y_2, \dots, \quad s(x_m) = y_m.$$

99. Sia $\mathcal{C}$ un gruppo od uno pseudogruppo transitivo. Se si può determinare un numero intero μ tale che il complesso $\mathcal{C}$ non abbia transitività di grado superiore a μ, si dirà che il complesso dato possiede *transitività finita limitata*. Nel caso contrario si dirà che $\mathcal{C}$ possiede *transitività finita illimitata*.

(*) Vedi Memorie 1ª e 2ª, « Annali di Matematica », serie IV, tomo IV, fasc. 1-2; tomo V, fasc. 1-2.

100. Passiamo ora a definire la *transitività infinita.* Estratti da I due sistemi di infiniti elementi:

$$X=[x_1,\ x_2,\dots,\ x_n,\dots],$$
$$Y=[y_1,\ y_2,\dots,\ y_n,\dots],$$

chiameremo *sistemi residui di* I *rispetto ad* X *ed* Y i sistemi formati con gli elementi di I che non appartengono rispettivamente ad X e ad Y.

Ciò posto, diremo che un complesso $\mathfrak{C}$ possiede *transitività infinita di grado m* se, estratti ad arbitrio da I due sistemi X, Y in modo che i relativi residui abbiano egual potenza m, esiste almeno una sostituzione s di $\mathfrak{C}$ tale che:

$$s(x_i)=y_i \qquad (i=1,\ 2,\dots).$$

101. Dato uno pseudogruppo composto:

$$C''=C+C',$$

supponiamo che esista un sistema A di m elementi:

$$a_1,\quad a_2,\dots,\quad a_m$$

tale che, preso un sistema arbitrario X pure di m elementi:

$$x_1,\quad x_2,\dots,\quad x_m,$$

si possa determinare una sostituzione c'' di C'' soddisfacente alle eguaglianze:

$$c''(a_i)=x_i \qquad (i=1,\ 2,\dots,\ m).$$

Sotto questa ipotesi vogliamo dimostrare che nello pseudogruppo semplice C' esiste una operazione c' avente la medesima proprietà della c''.

Scelta infatti una operazione qualunque k' di C', poniamo:

$$k'(y_1)=a_1,\quad k'(y_2)=a_2,\dots,\quad k'(y_m)=a_m,$$

e determiniamo una operazione k'' di C'' tale che:

$$k''(a_i)=y_i \qquad (i=1,\ 2,\dots,\ m).$$

Il prodotto $c'=k''\cdot k'\cdot c''$ appartiene a C' e sostituisce al sistema A il sistema X.

Un'analoga proposizione vale nel caso in cui i sistemi A e X siano formati con infiniti elementi ed i relativi residui siano di egual potenza m.

Da queste considerazioni consegue che:

Se uno pseudogruppo composto C$''$ = C + C$'$ *ha transitività finita od infinita di grado* m, *lo pseudogruppo semplice* C$'$ *possiede transitività finita od infinita di egual grado.*

102. Se nello pseudogruppo C' esiste una sostituzione c_1'' tale che:

$$c_1''(x_i) = a_i,$$

si dimostra, in maniera del tutto simile alla precedente, l'esistenza di una operazione c_1' di C' avente la stessa proprietà della c_1''.

103. *Affinchè un complesso* $\mathcal{C}$ *abbia transitività finita di grado* m *occorre e basta che esista un sistema:*

$$A = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$$

di m *elementi tale che, preso un sistema ad arbitrio:*

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_m]$$

pure di m *elementi, si possano determinare due sostituzioni* s *e* σ *di* $\mathcal{C}$ *soddisfacenti alle eguaglianze:*

$$(a) \qquad s(a_i) = x_i,$$

$$(b) \qquad \sigma(x_i) = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

La condizione è sufficiente.

Siano infatti:

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_m,$$
$$y_1, \quad y_2, \ldots, \quad y_m,$$

due sistemi arbitrari e siano s e σ le due operazioni di $\mathcal{C}$ tali che:

$$s(a_i) = y_i, \quad \sigma(x_i) = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Il prodotto $\sigma \cdot s$ appartiene a $\mathcal{C}$ e sostituisce agli elementi x_i gli elementi y_i.

La condizione enunciata è poi manifestamente necessaria.

Osservazione. Se il complesso $\mathcal{C}$ è un gruppo, la (b) è una conseguenza della (a) potendosi scegliere come sostituzione σ l'inversa della s.

Se $\mathcal{C}$ è invece uno pseudogruppo, le (a), (b) sono generalmente fra loro indipendenti e, come vedremo più avanti, vi sono casi in cui una sola di esse è verificata.

104. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un complesso* $\mathcal{C}$ *abbia transitività infinita di grado* m *è che esista un sistema:*

$$A = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$$

d'infiniti elementi, avente il residuo A' *di potenza* m, *tale che, preso ad arbitrio un sistema:*

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots]$$

col residuo X′ *di potenza* m, *si possa determinare una sostituzione* s *di* $\mathfrak{C}$ *soddisfacente alle eguaglianze :*

$$(a) \qquad s(a_i) = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots).$$

Per provare l'asserto basterà, evidentemente, costruire una operazione σ di $\mathfrak{C}$ per la quale sia:

$$(b) \qquad \sigma(x_i) = a_i.$$

Consideriamo dapprima il caso in cui m è infinito. Indichiamo con X'' ed X''' i residui di A e A' rispetto ad X e supponiamo che X'' sia formato con infiniti elementi.

In tale ipotesi, possiamo determinare una operazione c di $\mathfrak{C}$ tale che:

$$c(X) = A_1,$$

essendo A_1 una parte propria di A. Basta infatti scegliere come operazione c quella che sostituisce ad X'' il sistema A'.

Prendiamo quindi una operazione k di $\mathfrak{C}$ che sostituisca ad A_1 il sistema A e formiamo il prodotto $\sigma = c \cdot k$.

Questa operazione appartiene a $\mathfrak{C}$ e, come subito si verifica, soddisfa alla (b).

In particolare, si può fare $X = A'$ e, per conseguenza, $X'' = A$.

Se poi il residuo con infiniti elementi è X''' anzichè X'', bisognerà assumere come operazione c quella che sostituisce ad X''' il sistema A'.

Infine, nel caso in cui m è un numero finito, il complesso $\mathfrak{C}$ è un gruppo perchè esistono in esso delle sostituzioni su un numero finito di elementi (n.° 101). Si può pertanto assumere come operazione σ l'inversa della s.

Un'analoga proposizione vale nel caso in cui si supponga soddisfatta la (b) in luogo della (a).

105. Sia $\mathfrak{C}$ un complesso avente transitività finita di grado m.

Il gruppo:

$$G = (\mathfrak{C}, \mathfrak{C}^{-1})$$

generato da $\mathfrak{C}$, contiene per intero $\mathfrak{C}$ e perciò possiede transitività finita di grado m almeno.

Indichiamo con H il gruppo formato con le sostituzioni di G che lasciano fermi gli elementi:

$$(\alpha) \qquad 1, \; 2, \ldots, \; m,$$

e decomponiamo a destra il gruppo G rispetto ad H:

$$(\delta) \qquad G = \Sigma(H \cdot g).$$

Mediante considerazioni facilissime si riesce a provare che tutte le operazioni di un quasi-gruppo di (δ) sostituiscono al sistema (α) un medesimo sistema:

$$(\beta) \qquad x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_m,$$

e che le operazioni di due quasi-gruppi distinti sostituiscono al sistema (α) dei sistemi che differiscono fra loro almeno per l'ordine con cui si presentano gli elementi nei sistemi stessi.

Da ciò consegue che i quasi-gruppi di (δ) corrispondono biunivocamente alle disposizioni degli elementi di I ad m ad m, e cioè che: *l'indice di* H *in* G *è la potenza del numerabile.*

106. Se si trasforma il gruppo H mediante una operazione g di G tale che ad (α) sostituisca (β), si ottiene un gruppo K formato con le operazioni di G che lasciano fermi gli elementi di (β).

Da qui si deduce che il gruppo comune ai trasformati di H mediante G si riduce alla sola identità e che i complessi $\mathcal{C}$ e $\frac{\mathcal{C}}{H}$ sono oloedricamente isomorfi.

107. Le considerazioni svolte nei precedenti n.[i] 105, 106, si possono ripetere integralmente nell'ipotesi che $\mathcal{C}$ abbia transitività infinita. L'unica variazione da apportare è relativa all'indice di H in G che, in questo caso, è la potenza del continuo.

108. Diremo che un complesso $\mathcal{C}$ di sostituzioni su I è *regolare* quando ogni sostituzione di $\mathcal{C}$ (esclusa l'identità, se esiste in $\mathcal{C}$) opera su tutti gli elementi di I.

Ciò posto, vogliamo dimostrare il seguente teorema:

Un complesso $\mathcal{C}$ transitivo e regolare è necessariamente un gruppo avente per ordine la potenza del numerabile e per grado di transitività uno.

Il complesso $\mathcal{C}$ deve contenere l'identità perchè altrimenti, e per le ipotesi fatte, nessuna operazione di $\mathcal{C}$ lascierebbe fermo un elemento prefissato x.

Se $\mathcal{C}$ fosse uno pseudogruppo composto $C + C'$, per la proposizione del n.° 101, sarebbe pure transitivo lo pseudogruppo semplice e regolare C' la qual cosa, come ora s'è visto, è impossibile.

Il complesso $\mathcal{C}$ deve dunque essere un gruppo.

Inoltre, poichè il sottogruppo H di $\mathcal{C}$ che abbiamo definito al n.° 105, si riduce alla sola operazione identica, l'ordine di $\mathcal{C}$ sarà eguale all'indice di H in $\mathcal{C}$ e cioè sarà la potenza del numerabile.

È infine manifesto che la transitività di $\mathcal{C}$ non può essere di grado superiore ad 1.

109. *Un complesso abeliano e transitivo* $\mathcal{C}$ *è un gruppo avente per ordine la potenza del numerabile.*

In virtù della proposizione precedente, basta dimostrare che $\mathcal{C}$ è un complesso regolare.

Sia c quella operazione di $\mathcal{C}$ che lascia fermo l'elemento 1 e sia k una sostituzione che al posto di 1 porta x.

Si ha allora:

$$k^{-1}\cdot c\cdot k = c, \quad k^{-1}\cdot c\cdot k(x) = c(x) = x,$$

e cioè:

$$c = 1.$$

Segue da ciò che ogni sostituzione di $\mathcal{C}$, diversa dalla identità, deve operare su tutti gli elementi di I.

110. *Un gruppo* G *di sostituzioni su* I *avente transitività infinita coincide col gruppo totale.*

Per ragioni evidenti, basterà dimostrare il teorema nel caso in cui G abbia transitività infinita di grado infinito.

Decomponiamo anzitutto l'insieme I in una infinità numerabile di successioni:

$$\begin{array}{ll} X & = [x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_n, \ldots], \\ Y & = [y_1, \quad y_2, \ldots, \quad y_n, \ldots], \\ A_1 & = [\alpha_{11}, \quad \alpha_{12}, \ldots, \quad \alpha_{1n}, \ldots], \\ A_2 & = [\alpha_{21}, \quad \alpha_{22}, \ldots, \quad \alpha_{2n}, \ldots], \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_m & = [\alpha_{m1}, \quad \alpha_{m2}, \ldots, \quad \alpha_{mn}, \ldots], \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

ed indichiamo con a_1 una sostituzione qualsiasi sull'insieme A_1 e con a_2, $a_3, \ldots, a_m, \ldots$ delle sostituzioni simili alla a_1 ed operanti rispettivamente sugli insiemi $A_2, A_3, \ldots, A_m, \ldots$.

Nel gruppo G esisterà allora, per le ipotesi fatte, una sostituzione s del tipo:

$$s = \sigma\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot \ldots \cdot a_m\cdot \ldots,$$

dove σ è una operazione sugli elementi di X.

Costruiamo poi una sostituzione t di G che abbia la proprietà di trasformare σ in sè stessa, a_1 in $a_2, \ldots, a_m$ in a_{m+1}, ecc.. Una siffatta operazione avrà la forma:

$$t = \begin{pmatrix} X; & A_1; & A_2; \ldots; & A_m & ;\ldots; & Y \\ X; & A_2; & A_3; \ldots; & A_{m+1} & ;\ldots; & Y, A_1 \end{pmatrix}$$

e trasformerà la s in:

$$s_1 = \sigma \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{m+1} \cdot \ldots$$

Poichè nel gruppo G esiste l'operazione $s \cdot s_1^{-1} = a_1$, possiamo intanto affermare che in questo gruppo figurano tutte quelle sostituzioni che operano su insiemi A di elementi tali che gli elementi di I non appartenenti ad A siano infiniti. In particolare, esisteranno in G le sostituzioni che operano su un numero finito di elementi e quelle che si possono decomporre in un numero infinito di cicli.

Resta pertanto da provare l'esistenza in G di quelle sostituzioni che operano su infiniti elementi e che si decompongono in un numero finito di cicli.

Poichè alcuni di questi cicli sono necessariamente aperti, basterà dimostrare che un qualsiasi ciclo aperto su I:

$$g = (\ldots, \beta_{-n}, \ldots, \beta_{-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots)$$

appartiene a G.

Invero, il ciclo g si può considerare come il prodotto delle due operazioni:

$$h = (\beta_{-1}, \beta_{-2}) \cdot (\beta_{-3}, \beta_{-4}) \cdot \ldots \cdot (\beta_{-n}, \beta_{-n-1}) \cdot \ldots,$$
$$k = (\ldots, \beta_{-2n}, \ldots, \beta_{-4}, \beta_{-2}, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots)$$

che appartengono, per quanto s'è detto superiormente, a G.

Questo gruppo è dunque il totale su I.

Osservazione. Il teorema che abbiamo ora dimostrato, mentre ci assicura che non esistono gruppi, all'infuori del totale, aventi transitività infinita, nulla ci dice circa all'esistenza di pseudogruppi infinitamente transitivi.

Su ciò non siamo in grado di dire niente di preciso perchè, pur non conoscendo esempi di siffatti pseudogruppi, non abbiamo ragioni sufficienti per escluderne l'esistenza.

Se però sappiamo che un complesso $\mathcal{C}$ ha transitività infinita di grado finito m, possiamo affermare che $\mathcal{C}$ coincide col gruppo totale.

Infatti $\mathcal{C}$ è necessariamente un gruppo (n.[i] 101, 104) e ad esso è applicabile il precedente teorema.

111. Diamo ora alcuni esempi di gruppi e di pseudogruppi transitivi.

Esempio I. Il gruppo generato dalle potenze positive e negative del ciclo aperto:

$$g = (\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots)$$

ha transitività finita di grado uno.

Esempio II. Il gruppo formato con tutte le sostituzioni del tipo:

$$\begin{pmatrix} x \\ ax + b \end{pmatrix}$$

dove a, b sono numeri razionali determinati e dove x può assumere tutti i valori razionali positivi e negativi, ha transitività finita di grado due.

Invero, fissati gli elementi 0, 1 e presi due elementi qualsiasi α, β, esiste nel gruppo dato l'operazione:

$$\begin{pmatrix} x \\ (\beta - \alpha)x + \alpha \end{pmatrix}$$

che al posto di 0, 1 porta rispettivamente α, β.

Esempio III. Il sottogruppo G_1 del totale formato con tutte le sostituzioni che operano su un numero finito di elementi possiede transitività finita di grado illimitato.

La medesima transitività è posseduta dal sottogruppo G_2 di G_1 formato con le sostituzioni di G_1 che sono di classe pari.

Esempio IV. Consideriamo tutte le sostituzioni del tipo:

$$g = \begin{pmatrix} x \\ mx + r \end{pmatrix}$$

dove x può assumere tutti i valori razionali e dove m è un numero intero ed r un numero razionale.

Il complesso di queste sostituzioni costituisce uno pseudogruppo G'' perchè, come agevolmente si può verificare, il prodotto di due di esse è una sostituzione della stessa classe, e perchè le inverse di quelle sostituzioni che corrispondono a valori di $m \neq 1$ non appartengono al complesso dato.

Questo pseudogruppo possiede inoltre transitività finita di grado uno ma non di grado superiore.

Infatti, scelto un elemento ξ ad arbitrio, le sostituzioni di G'':

$$g_1 = \begin{pmatrix} x \\ mx + \xi \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} x \\ mx - m\xi \end{pmatrix}$$

sono tali che:

$$g_1(0) = \xi, \quad g_2(\xi) = 0.$$

Osservando poi che non esiste alcuna sostituzione g di G'' tale che:

$$g(0)=0, \quad g(1)=\frac{1}{2},$$

si può affermare che il grado di transitività di G'' non supera l'unità.

Esempio V. Diamo infine un esempio di uno pseudogruppo avente transitività finita illimitata.

Sia G_1 il gruppo considerato nell'Es. III e sia γ una operazione senza periodo o con periodo infinito.

Il complesso:

$$G'' = G_1 + G_1 \cdot \gamma + \dots + G_1 \cdot \gamma^n + \dots$$

è uno pseudogruppo composto avente la stessa transitività posseduta da G_1, e cioè di grado illimitato.

Per la proposizione del n.° 101, lo pseudogruppo semplice:

$$G' = G_1 \cdot \gamma + \dots + G_1 \cdot \gamma^n + \dots$$

ha pure transitività finita illimitata.

B) Semitransitività.

112. Al n.° 103 abbiamo osservato che le condizioni (a) e (b), relative alla transitività finita di un complesso di sostituzioni, sono fra loro generalmente indipendenti e che esistono dei complessi per i quali è soddisfatta una sola delle due condizioni suddette.

I complessi di questo tipo, che sono necessariamente degli pseudogruppi, verranno chiamati *semitransitivi.*

Sempre riferendoci al n.° 103, diremo poi che un complesso $\mathcal{C}$ possiede *semitransitività superiore (inferiore) di grado* m se è soddisfatta la condizione (a) ma non la (b) [la condizione (b) ma non la (a)].

Se il numero m può essere preso ad arbitrio, si dirà che $\mathcal{C}$ possiede *semitransitività illimitata.*

Osserviamo infine che, in virtù delle considerazioni svolte al n.° 104, si può escludere l'esistenza di complessi aventi semitransitività infinita.

113. Se $\mathcal{C}$ possiede semitransitività superiore di grado m, lo pseudogruppo $\mathcal{C}^{-1}$, formato con le inverse delle operazioni di $\mathcal{C}$, possiede semitransitività inferiore dello stesso grado.

114. Il gruppo:

$$G = (\mathcal{C},\ \mathcal{C}^{-1})$$

generato da $\mathcal{C}$, possiede transitività di grado eguale o superiore a quello relativo alla semitransitività di $\mathcal{C}$.

Segue da ciò che le proposizioni che abbiamo date ai n.[i] 105, 106 per i complessi transitivi sono valide anche per gli pseudogruppi semitransitivi perchè esse sono esclusivamente fondate sulla transitività di G.

Dal n.° 101 si deduce poi che:

Se lo pseudogruppo composto:

$$C'' = C + C'$$

ha semitransitività di grado m, *lo pseudogruppo semplice* C′ *possiede semitransitività di egual grado.*

115. Sia $\mathcal{C}$ uno pseudogruppo avente semitransitività superiore di grado m.

Consideriamo tutti i possibili sistemi di m elementi che si possono formare con l'insieme I ed indichiamo con K l'aggregato di questi sistemi.

Poichè $\mathcal{C}$ è semitransitivo, esistono dei sistemi X di K al posto dei quali si possono portare, mediante sostituzioni di $\mathcal{C}$, tutti gli altri sistemi di K stesso, ed esistono dei sistemi Y per i quali è esclusa tale possibilità.

È pertanto conveniente di scindere K nelle due classi K_1 e K_2 formate rispettivamente con tutti i sistemi del tipo di X e con tutti i sistemi del tipo di Y.

Scriveremo:

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} K_1 &= [X_1,\ X_2,\dots,\ X_n,\dots],\\ K_2 &= [Y_1,\ Y_2,\dots,\ Y_n,\dots], \end{aligned}$$

e chiameremo K_1 e K_2 *classi di semitransitività.*

È poi evidente che le operazioni di $\mathcal{C}$ debbono sostituire ad ogni sistema di K_2 un sistema pure appartenente a K_2.

Vogliamo ora dimostrare che: *le classi* K$_1$ *e* K$_2$ *contengono entrambe infiniti sistemi.*

Prendiamo infatti una operazione c di $\mathcal{C}$ tale che:

$$c(X_1) = Y_1.$$

Poichè, come abbiamo superiormente detto, l'operazione c deve sostituire ad ogni Y_r un Y_s, essa dovrà sostituire ai sistemi di K_1 tutti i sistemi di K_1 ed in più il sistema Y_1. Ciò richiede evidentemente che i sistemi X siano in numero infinito.

Se poi i sistemi Y fossero in numero finito, la stessa operazione c sostituirebbe ad un sistema di K_2 un sistema di K_1, il che è assurdo.

116. Consideriamo ancora il complesso $\mathfrak{C}$ del numero precedente e supponiamo che esista in K_2 un sistema Z tale che, mediante le operazioni di $\mathfrak{C}$, possa essere sostituito ad un sistema arbitrario di m elementi.

In tale ipotesi, il complesso $\mathfrak{C}$ è semitransitivo superiormente ed inferiormente senza però avere transitività di grado m.

La classe K_2 si può allora dividere in due nuove classi K_2', K_2'' formate rispettivamente con i sistemi di K_2 che sono della stessa specie di Z e con quelli che sono di specie diversa. Scriveremo:

$$K_1 = [X_1, \; X_2, \dots, \; X_n, \dots],$$
$$K_2' = [Z_1, \; Z_2, \dots, \; Z_n, \dots],$$
$$K_2'' = [Y_1', \; Y_2', \dots, \; Y_n', \dots].$$

È poi facile provare che: *le operazioni di $\mathfrak{C}$ sostituiscono ad ogni sistema di* K_2' *un sistema della medesima classe.*

Considerazioni analoghe si possono fare partendo da un complesso semitransitivo inferiormente.

117. Sia $\mathfrak{C}$ un complesso semitransitivo (ad es. superiormente) avente le classi (α) (n.° 115) e sia t una sostituzione qualsiasi sull'insieme I.

In virtù della semitransitività di $\mathfrak{C}$, le operazioni del complesso $t^{-1} \cdot \mathfrak{C} \cdot t$ sostituiscono ad ogni sistema $t(Y_r)$ un sistema $t(Y_s)$ e ad un sistema $t(X_r)$ un sistema arbitrario.

Da ciò discende che il complesso $t^{-1} \cdot \mathfrak{C} \cdot t$ è pure semitransitivo e che ha le classi:

$$K_1' = [t(X_1), \dots, \; t(X_n), \dots],$$
$$K_2' = [t(Y_1), \dots, \; t(Y_n), \dots].$$

Se poi l'operazione t appartiene a $\mathfrak{C}$, la classe K_1 è contenuta in K_1' o coincide con essa, e la classe K_2 contiene K_2' o coincide con K_2'.

In particolare, se:

$$t(X_1) = Y_1,$$

la classe K_1' contiene, oltre a K_1, il sistema Y_1, ed il complesso $t^{-1} \cdot \mathfrak{C} \cdot t$ non può essere contenuto in $\mathfrak{C}$.

Considerazioni analoghe valgono per un complesso $\mathfrak{D}$ avente semitransitività inferiore.

Possiamo inoltre affermare che:

a) *Un complesso semitransitivo superiormente (inferiormente) non è invariante nè riducibile (nè ampliabile) in sè stesso.*

b) *Non esistono complessi abeliani semitransitivi.*

118. Diamo ora alcuni esempi di semitransitività.

ESEMPIO I. Consideriamo lo pseudogruppo $\mathfrak{C}$ formato con tutte le sostituzioni del tipo:

$$(o) \qquad \begin{pmatrix} x \\ mx + r \end{pmatrix}$$

dove x è razionale, m è intero positivo ed r è razionale positivo.

Questo complesso possiede semitransitività superiore di grado uno perchè, come agevolmente si può verificare, è possibile di portare al posto di -1 qualsiasi elemento, mentre al posto di 0 si possono portare solo numeri positivi.

La classe K_1 è formata con tutti i numeri razionali negativi e la classe K_2 è formata con lo zero ed i numeri razionali positivi.

Osservando poi che nessuna sostituzione di $\mathfrak{C}$ lascia fermo un elemento $x \geq 0$, possiamo affermare che $\mathfrak{C}$ non è semitransitivo inferiormente.

ESEMPIO II. Supponiamo ora che nelle sostituzioni (o) i numeri m ed r possano assumere qualsiasi valore razionale positivo.

Lo pseudogruppo $\mathfrak{D}$, formato con tutte queste sostituzioni, contiene il precedente $\mathfrak{C}$ ed è semitransitivo superiormente con le medesime classi di $\mathfrak{C}$.

Inoltre, il complesso $\mathfrak{D}$ possiede semitransitività inferiore perchè, presi ad arbitrio un numero razionale positivo p ed un numero razionale qualsiasi x, è sempre possibile di determinare due numeri razionali positivi m ed r tali che:

$$p = mx + r.$$

In questo esempio, le classi K_1, K_2', K_2'' (n.° 116) sono rispettivamente formate con i numeri razionali negativi, con i numeri razionali positivi e con lo zero.

ESEMPIO III. Costruiamo infine uno pseudogruppo $\mathfrak{C}$ avente semitransitività superiore di grado illimitato.

Prendiamo come insieme I la successione:

$$\ldots, \quad -n, \ldots, \quad -2, \quad -1, \quad 1, \quad 2, \ldots, \quad n, \ldots,$$

e scegliamo ad arbitrio un numero intero m ed un sistema X di m elementi estratti da I:

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_m].$$

Ciò fatto, costruiamo la sostituzione:

$$c = \begin{pmatrix} 1, & 2, \ldots, & m; & m+1, & m+2, \ldots, & m+r, \ldots; & -1, & -2, \ldots, & -n, \ldots \\ x_1, & x_2, \ldots, & x_m; & p_1, & p_2, \ldots, & p_r, \ldots; & \mu_1, & \mu_2, \ldots, & \mu_n, \ldots \end{pmatrix}$$

dove le successioni:

$$p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots; \quad \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$$

sono formate rispettivamente con i numeri positivi e negativi di I che non appartengono ad X.

Ripetendo questa costruzione per tutti i possibili m e per tutti i sistemi X relativi, otteniamo un complesso $\mathcal{K}$ di infinite sostituzioni. Lo pseudogruppo $\mathcal{C}$, generato da $\mathcal{K}$, non è transitivo perchè le sue operazioni sostituiscono ad ogni elemento negativo un elemento pure negativo, ma possiede semitransitività superiore di grado illimitato perchè al posto del sistema 1, 2,...., m (m arbitrario) si può portare un qualsiasi sistema di m elementi.

C) Intransitività.

119. Dato un complesso $\mathcal{C}$ di sostituzioni su I, diremo che esso è *intransitivo* quando le condizioni (a) e (b) del n.° 103 non sono verificate per nessun elemento a dell'insieme I.

Diremo poi che $\mathcal{C}$ possiede:

α) *intransitività di 1ª specie* quando il gruppo:

$$G = (\mathcal{C}, \mathcal{C}^{-1})$$

è intransitivo;

β) *intransitività di 2ª specie* quando il suddetto gruppo è transitivo.

L'intransitività di 2ª specie può presentarsi solo negli pseudogruppi.

120. Dalla proposizione del n.° 101 si deduce immediatamente che:

Uno pseudogruppo composto:

$$C'' = C + C'$$

è intransitivo nel solo caso che sia intransitivo C'.

Inoltre, poichè:

$$(C'', C''^{-1}) = (C', C'^{-1}),$$

possiamo affermare che: *le intransitività di* C'' *e di* C' *sono della stessa specie.*

121. Consideriamo dapprima un complesso $\mathfrak{C}$ avente intransitività di 1ª specie.

Prendiamo un elemento x di I e costruiamo il sistema X di tutti gli elementi diversi che le operazioni di G portano al posto di x.

Il gruppo G opera transitivamente sugli elementi di X e non può contenere delle operazioni che sostituiscano ad elementi di X degli elementi estranei ad X stesso.

Ripetendo per tutti gli elementi di I ciò che si è fatto per x veniamo ad ottenere un insieme numerabile J di sistemi del tipo di X.

Da quanto si è ora detto risulta chiaramente che due qualunque di questi sistemi o hanno tutti gli elementi in comune, oppure non ne hanno nessuno. Segue da ciò che se si estraggono da J tutti i sistemi fra loro diversi che in esso compariscono, si vengono a distribuire gli elementi di I in un numero finito od in una infinità numerabile di sistemi:

$$(\tau) \qquad X_1, \quad X_2, \ldots, \quad X_n, \ldots,$$

che verranno chiamati *sistemi di transitività di* $\mathfrak{C}$.

Le operazioni di $\mathfrak{C}$, appartenendo a G, sostituiscono agli elementi di un sistema gli elementi del medesimo sistema, ma non è detto che esse possano congiungere due elementi arbitrari di uno stesso sistema (vedi n.° 123).

Ciò significa che, mentre un gruppo è sicuramente transitivo rispetto a ciascun X_n, uno pseudogruppo può anche essere, rispetto ad X_n, semitransitivo od intransitivo di 2ª specie.

Osserviamo infine come non sia possibile di decomporre un qualunque sistema X_n in parti:

$$(\delta) \qquad Y_1, \quad Y_2, \ldots, \quad Y_r, \ldots$$

in modo che ogni operazione di $\mathfrak{C}$ sostituisca ad Y_r il sistema stesso.

Infatti, se esistesse una decomposizione come (δ), ogni operazione g di G, potendosi porre sotto la forma:

$$g = c_1^{\varepsilon_1} \cdot c_2^{\varepsilon_2} \cdot \ldots \cdot c_m^{\varepsilon_m}, \qquad (\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ldots, \ \varepsilon_m = \pm 1)$$

avrebbe la medesima proprietà delle operazioni di $\mathfrak{C}$, il che è contrario alla transitività di G rispetto ad X_n.

122. Se:

$$c = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_m \cdot \ldots$$

è una decomposizione della sostituzione c di $\mathfrak{C}$ nei suoi cicli, ogni ciclo k_m deve evidentemente operare su elementi di un medesimo sistema di transitività.

In conseguenza di ciò, se ogni sistema X_n ha un numero finito di elementi, le operazioni di $\mathcal{C}$ hanno periodo finito od infinito.

Se poi $\mathcal{C}$ deve essere uno pseudogruppo, è necessario che ad ogni intero positivo μ corrisponda qualche sistema X_n avente un numero di elementi superiore a μ.

123. Diamo ora un esempio di uno pseudogruppo intransitivo di 1ª specie.

Sia $\mathcal{H}$ uno pseudogruppo semitransitivo superiormente di grado uno avente le classi:

$$K_1 = [x_1, \ x_2, \dots, \ x_n, \dots],$$
$$K_2 = [y_1, \ y_2, \dots, \ y_n, \dots],$$

e sia:

$$c = (a_1, \ a_2) \cdot (\dots, \ -n, \dots, \ -1, \ 0, \ 1, \dots, \ n, \dots)$$

una sostituzione su elementi diversi da quelli su cui operano le sostituzioni di $\mathcal{H}$.

Lo pseudogruppo:

$$\mathcal{C} = (\mathcal{H}, \ c),$$

generato da c e da $\mathcal{H}$, è, come facilmente si verifica, intransitivo di 1ª specie, ed ammette i tre sistemi di transitività:

$$a_1, \quad a_2$$
$$\dots, \quad -n, \dots, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \dots, \quad n, \dots$$
$$x_1, \ x_2, \dots, \ x_n, \dots; \quad y_1, \ y_2, \dots, \ y_n, \dots$$

Lo pseudogruppo $\mathcal{C}$ è transitivo rispetto al primo sistema, intransitivo di 2ª specie rispetto al secondo e semitransitivo rispetto al terzo.

124. Occupiamoci infine della intransitività di 2ª specie.

Un esempio assai semplice di tale intransitività ci è offerto dallo pseudogruppo semplice C' generato dalla operazione:

$$c = (\dots, \ -n, \dots, \ -1, \ 0, \ 1, \dots, \ n, \dots).$$

Invero, il gruppo $(C', \ C'^{-1})$ è transitivo (n.° 111), e:

$$c^r(n) > n, \quad c^r(-n) > -n.$$

125. L'insieme I di elementi su cui operano le sostituzioni di uno pseudogruppo $\mathcal{C}$ intransitivo di 2ª specie, non si può dividere (come si è fatto nel caso dell'intransitività di 1ª specie) in sistemi:

$$X_1, \quad X_2, \dots, \quad X_n, \dots$$

tali che le operazioni di $\mathfrak{C}$ sostituiscano ogni elemento di un sistema generico X_n con un elemento del medesimo sistema.

Infatti, se fosse possibile una tale suddivisione, le operazioni del gruppo $(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}^{-1})$, potendosi porre sotto la forma:

$$g = c_1^{\varepsilon_1} \cdot c_2^{\varepsilon_2} \cdot \ldots \cdot c_m^{\varepsilon_m}, \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m = \pm 1)$$

avrebbero la medesima proprietà delle operazioni di $\mathfrak{C}$.

126. Le considerazioni svolte ai n.[i] 105, 106, 107 si possono integralmente ripetere per il caso attuale perchè esse sono fondate sulla transitività del gruppo G.

È da notare poi che se $\mathfrak{C}$ è abeliano, tale è anche il gruppo G, e che l'ordine di $\mathfrak{C}$ è la potenza del numerabile (n.° 109).

D) Imprimitività.

127. Dato un gruppo o pseudogruppo $\mathfrak{C}$ di sostituzioni su I, diremo che esso è *imprimitivo* se è possibile di dividere l'insieme I in un numero finito ≥ 2 od in una infinità numerabile di sistemi:

$$(\sigma) \qquad X_1, \; X_2, \ldots, \; X_n, \ldots$$

(contenenti ciascuno almeno due elementi) tali che ogni operazione c di $\mathfrak{C}$ soddisfi all'eguaglianze:

$$(a) \qquad c(X_n) = X_m \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Chiameremo $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ *sistemi di imprimitività.*

Se la suddetta suddivisione è impossibile, diremo che il complesso $\mathfrak{C}$ è *primitivo.*

128. Un complesso intransitivo di 1[a] specie è sicuramente imprimitivo, potendosi scegliere come suddivisione (σ) la suddivisione (τ) fatta al n.° 121. Questo caso (rientrando nello studio generale dell'intransitività) non ci interessa particolarmente; qui ci occuperemo invece di quei complessi imprimitivi che sono transitivi o semitransitivi od intransitivi di 2[a] specie.

129. *Se $\mathfrak{C}$ è imprimitivo, tale è il gruppo:*

$$G = (\mathfrak{C}, \mathfrak{C}^{-1})$$

e viceversa.

Una qualsiasi operazione g di G, potendosi porre sotto la forma:

$$g = c_1^{\varepsilon_1} \cdot c_2^{\varepsilon_2} \cdot \ldots \cdot c_m^{\varepsilon_m} \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m = \pm 1),$$

soddisfa sicuramente alla condizione (a) del n.° 127.

La reciproca è manifesta essendo $\mathcal{C}$ contenuto in G.

Da questa proposizione consegue immediatamente che:

α) *Se* $\mathcal{C}$ *è imprimitivo,* G *non può avere transitività multipla.*

β) *Affinchè lo pseudogruppo composto:*

$$C'' = C + C'$$

sia imprimitivo, occorre e basta che tale sia C′.

130. *I sistemi di imprimitività hanno tutti egual potenza.*

Infatti, presi ad arbitrio da (σ) due sistemi X_m ed X_n, esiste, nel gruppo transitivo G, una sostituzione g tale che:

$$g(X_m) = X_n.$$

131. *Se esiste un gruppo* H *invariante per* G *ed intransitivo, i sistemi di transitività di* H*:*

(σ) $$X_1, \quad X_2, \ldots, \quad X_n, \ldots$$

sono di imprimitività per G *e quindi per* $\mathcal{C}$.

Prendiamo una sostituzione g qualsiasi di G, due elementi x ed y di un sistema X_n ed una operazione h di H tale che:

$$y = h(x).$$

La trasformata $g^{-1} \cdot h \cdot g$ appartiene per ipotesi ad H e sostituisce all'elemento $g(x)$ l'elemento $g(y)$.

Ciò prova che $g(x)$ e $g(y)$ appartengono ad un medesimo sistema X_m.

Ripetendo poi per l'operazione g^{-1} il ragionamento ora fatto si giunge a stabilire che:

$$g(X_n) = X_m.$$

Pertanto, i complessi G e $\mathcal{C}$ sono imprimitivi.

132. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè* $\mathcal{C}$ *sia imprimitivo è che il gruppo* A, *formato con le sostituzioni di* G *che lasciano fermo un elemento prefissato* x_1, *sia contenuto in un sottogruppo proprio* B *di* G.

La condizione è necessaria.

Sia X_1 il sistema di imprimitività che contiene l'elemento x_1.

Le sostituzioni g di G tali che:

$$g(X_1) = X_1,$$

costituiscono evidentemente un sottogruppo B di G contenente A.

La condizione è sufficiente.

Poiché gli elementi che le operazioni di B sostituiscono ad x_1, formano un sistema X_1 di transitività per B, le operazioni di G, non appartenenti a B, debbono sostituire agli elementi di X_1 degli elementi estranei al sistema stesso.

Da ciò segue che una operazione h sul sistema X_1 e le sue trasformate mediante G, generano un gruppo invariante ed intransitivo.

Si può pertanto affermare (n.° 131) che G e $\mathcal{C}$ sono imprimitivi.

133. *Se* G *è regolare, il complesso* $\mathcal{C}$ *è imprimitivo.*

Infatti, poichè A si riduce alla sola operazione identica, si può scegliere come gruppo B un qualsiasi sottogruppo di G.

In particolare si ha che *i complessi abeliani sono imprimitivi.*

134. Esempio I. Lo pseudogruppo generato dal ciclo:

$$g = (\ldots,\ -n, \ldots,\ -1,\ 0,\ 1, \ldots,\ n, \ldots)$$

è imprimitivo poichè G è, in questo caso, abeliano.

Ponendo:

$$B = [1,\ g^{kr}] \qquad (k > 1,\ r = \pm 1,\ \pm 2, \ldots),$$

si hanno k sistemi di imprimitività di facilissima costruzione.

Esempio II. Il gruppo G formato con le sostituzioni del tipo:

$$\begin{pmatrix} x \\ mx + r \end{pmatrix},$$

dove x, m, r sono numeri razionali ed $m > 0$, è primitivo.

Infatti, scelto come gruppo A l'insieme delle sostituzioni che lasciano fermo l'elemento 0, e presa una sostituzione qualunque di G:

$$g = \begin{pmatrix} x \\ \mu x + \rho \end{pmatrix},$$

si consideri il gruppo generato da A e da g. Questo gruppo, contenendo le operazioni:

$$\gamma = \begin{pmatrix} x \\ \frac{m\rho}{\mu r}\, x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \mu x + \rho \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \frac{r}{\rho}\, x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ mx + r \end{pmatrix}$$

e le loro inverse γ^{-1}, coincide con G.

Si può pertanto escludere l'esistenza di sottogruppi di G contenenti A.

CAPITOLO VI.

IL GRUPPO TOTALE ED ALTRI GRUPPI SPECIALI

A) **Il gruppo totale.**

135. Abbiamo detto altrove che cosa s'intende per gruppo totale G di sostituzioni su una infinità numerabile I di elementi ed abbiamo anche date, per questo gruppo, alcune proprietà. Ad esempio, si è visto come G abbia per ordine la potenza del continuo (n.° 27) e come esso sia l'unico gruppo avente transitività infinita (n.° 110).

Il gruppo totale contiene infiniti sottogruppi ed infiniti sottopseudogruppi; fra essi hanno particolare importanza, per le considerazioni che faremo in seguito, il gruppo G_1 formato con le sostituzioni di G che operano su un numero finito di elementi, ed il gruppo G_2 formato con le sostituzioni di G_1 che hanno classe pari.

136. *Un complesso $\mathcal{C}$, contenente una sostituzione* h *su infiniti elementi e le sue trasformate mediante* G, *coincide con il totale.*

Poichè il complesso $\mathcal{C}$ contiene il gruppo H generato da h e dalle sue trasformate, basterà dimostrare che H possiede transitività infinita.

Supponiamo dapprima che h sia un ciclo aperto:

$$h = (\ldots, -n, \ldots, -1,\ 0,\ 1, \ldots, n, \ldots).$$

Per le ipotesi fatte, il gruppo H conterrà anche il ciclo:

$$h_1 = (\ldots, 8,\ 7,\ 5,\ 6,\ 4,\ 3,\ 1,\ 2,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3, \ldots)$$

e, conseguentemente, il prodotto:

$$h \cdot h_1 = (0,\ 2,\ 1) \cdot (4,\ 6,\ 5) \cdot (8,\ 10,\ 9) \cdot \ldots$$

che è formato con infiniti cicli chiusi.

Se invece h contiene, nella sua decomposizione in cicli, almeno un ciclo aperto ed eventualmente dei cicli chiusi, è possibile, mediante un procedimento del tutto analogo al precedente, di costruire una operazione di H formata con infiniti cicli tutti chiusi.

Si può pertanto supporre che esista in H una operazione del tipo:

$$s = c_0 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n \cdot \ldots$$

dove $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ sono cicli tutti chiusi.

Scegliamo ad arbitrio un sistema X di infiniti elementi:

$$X = [x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots]$$

con il residuo X' formato pure con infiniti elementi, ed indichiamo con:

$$A = [a_0, a_2, \ldots, a_{2n}, \ldots]$$

un sistema ottenuto prendendo a_0 da c_0, a_2 da c_2, ecc..

La trasformata di s mediante una operazione g di G tale che:

$$g(a_{2n}) = x_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

è una operazione:

$$\sigma = k_0 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n \cdot \ldots$$

nella quale i cicli $k_0, k_2, \ldots, k_{2n}, \ldots$ contengono rispettivamente gli elementi $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$.

Ciò posto, estragghiamo da X' un sistema:

$$Y = [y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots]$$

in modo che il residuo di X' rispetto ad Y contenga infiniti elementi, e trasformiamo σ mediante una operazione γ di G soddisfacente alle eguaglianze:

$$\gamma(x_n) = x_n, \quad \gamma(k_{2n}(x_n)) = y_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Questa trasformata appartiene ad H ed ha la proprietà di sostituire al sistema X il sistema Y.

Consideriamo ora un sistema:

$$Z = [z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots]$$

avente elementi in comune con X ma tale che il residuo Z' di X' rispetto a Z contenga infiniti elementi.

Poichè un sistema Z_1, estratto da Z', è del medesimo tipo del precedente Y, esistono in H due operazioni che sostituiscono ai sistemi X e Z_1 rispettivamente i sistemi Z_1 e Z. Il prodotto di queste due operazioni appartiene ad H e sostituisce ad X il sistema Z.

Resta infine da provare che, mediante le operazioni di H, si può sostituire al sistema X un sistema T tale che il residuo di X' rispetto a T contenga un numero finito di elementi.

Indicato con T_1 un sistema estratto dal residuo di X rispetto a T, è possibile, per quanto s'è detto superiormente, di costruire due operazioni l e λ di H soddisfacenti alle eguaglianze:

$$l(X) = T_1, \ \lambda(T) = T_1.$$

Segue da ciò che il prodotto $l \cdot \lambda^{-1}$ sostituisce ad X il sistema T.

137. *Un complesso chiuso* $\mathcal{C}$, *contenente una operazione* h *su un numero finito di elementi e le sue trasformate mediante* G, *coincide con* G.

Sia:

$$(\alpha) \qquad h_1, \ h_2, \ldots, \ h_n, \ldots$$

una successione di trasformate di h tale che ogni h_n operi su elementi diversi da quelli su cui operano le altre sostituzioni di (α).

Il prodotto $\prod\limits_{n=1}^{\infty} h_n$ è convergente, opera su infiniti elementi e, per le ipotesi fatte, appartiene a $\mathcal{C}$. È dunque applicabile il criterio del n.° 136.

138. Al n.° 58 abbiamo definito il gruppo commutatore G_c ed il gruppo derivato G_d di un complesso $\mathcal{A}$.

Se $\mathcal{A}$ è il gruppo totale G, si ha:

$$G_c = G_d = G.$$

Infatti, i gruppi G_c e G_d sono invarianti in G e contengono sicuramente delle operazioni su infiniti elementi.

139. Teorema. *Il gruppo totale non possiede sottogruppi aventi indice finito e diverso da 1.*

Sia H un sottogruppo di G avente indice finito m e sia:

$$(\delta) \qquad G = \sum_{n=1}^{m} (H \cdot g_n)$$

una decomposizione di G rispetto ad H.

Una operazione γ di G su infiniti elementi e con periodo primo $p > m$, deve appartenere ad H.

Infatti, se due diverse potenze γ^r e γ^s appartengono ad un medesimo quasi-gruppo di (δ), l'operazione γ^{r-s} appartiene ad H. Se invece l'ipotesi precedente non è verificata, il gruppo H dovrà necessariamente contenere una delle prime m potenze di γ.

Poichè queste considerazioni si possono ripetere per tutte le trasformate di γ mediante G, si può affermare che $H = G$ e, conseguentemente, che $m = 1$.

140. Il precedente teorema ci permette di dimostrare assai rapidamente come non sia possibile di scindere il gruppo totale G in due complessi $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{D}$ simili a quelli formati con le sostituzioni pari e con le sostituzioni dispari del gruppo totale su m elementi (1).

Invero, se fosse possibile la suddetta decomposizione di G, il complesso $\mathfrak{P}$ sarebbe un sottogruppo di G di indice 2.

141. Vogliamo ora vedere quali sono i complessi invarianti contenuti in G.

Osserviamo anzitutto che un complesso invariante per G, non potendo contenere operazioni su infiniti elementi, deve appartenere al gruppo G_1 (n.° 135).

Si può dunque escludere l'esistenza in G di pseudogruppi invarianti.

Sia poi H un sottogruppo invariante di G e sia:

$$h = (1,\ 2,\ 3, \ldots, n) \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_r$$

una sua operazione qualsiasi.

Scelto un elemento x, distinto da quelli su cui opera h, si considerino le due operazioni di H:

$$h_1 = (1,\ x,\ 3, \ldots, n) \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_r,$$
$$k = h \cdot h_1^{-1} = (1,\ 2,\ x).$$

Insieme alla operazione k, il gruppo H conterrà, in virtù della sua invarianza, tutte le trasformate di k e quindi tutte le operazioni del gruppo G_2.

Inoltre, poichè G_2 ha indice 2 in G_1, non esisterà alcun gruppo contenuto in G_1 e contenente G_2.

Possiamo dunque concludere che:

I gruppi G_1 *e* G_2 *sono gli unici sottogruppi invarianti del totale* G.

142. Passiamo alla ricerca dei sottogruppi invarianti di G_1 e G_2. Mediante considerazioni del tutto analoghe a quelle fatte al numero precedente si può provare che:

a) *Il gruppo* G_2 *è l'unico sottogruppo invariante di* G_1.

---

(1) Cfr. G. Vitali, *Sostituzioni sopra una infinità numerabile di elementi.* (Bollettino della « Mathesis », anno VII, 1915).

b) *Il gruppo* G_2 *non ammette sottogruppi invarianti all'infuori della identità.*

143. Dai precedenti risultati consegue immediatamente che il gruppo G ammette un'unica serie di composizione così formata:

$$G, \quad G_1, \quad G_2, \quad 1.$$

B) Il gruppo lineare.

144. Intenderemo per *gruppo lineare* l'insieme di tutte le sostituzioni del tipo:

$$(\alpha) \qquad x_1 = \frac{ax + b}{cx + d},$$

dove a, b, c, d sono numeri razionali determinati e dove x può assumere tutti i valori razionali e l'infinito.

Affinchè l'espressione (α) rappresenti una effettiva sostituzione occorre e basta che il determinante:

$$\delta = ad - bc$$

sia diverso da zero.

Le sostituzioni (α), per le quali il determinante è eguale ad 1 o può ridursi tale, costituiscono un sottogruppo invariante del lineare che diremo *gruppo modulare.*

I gruppi lineare e modulare verranno rispettivamente indicati con L ed M e le sostituzioni (α) si rappresenteranno col noto simbolo:

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}.$$

145. Il gruppo L è triplamente transitivo poichè i parametri indipendenti che figurano in (α) sono precisamente tre; il gruppo M possiede soltanto transitività di grado due perchè i suddetti parametri debbono soddisfare alla relazione:

$$ad - bc = 1.$$

146. Diremo che una sostituzione di L è *iperbolica, parabolica,* od *ellittica* secondo che essa lascia fermi due elementi, uno solo, oppure opera su tutti gli elementi.

Affinchè una sostituzione (α) lasci fermi due elementi od uno solo, occorre che il discriminante:

$$(\beta) \qquad (d-a)^2+4bc=(a+d)^2-4\delta$$

dell'equazione:

$$cx^2+(d-a)x-b=0,$$

sia il quadrato di un numero razionale oppure sia zero.

147. Mediante facilissime considerazioni si può dimostrare che:

a) *Le sostituzioni di* L *sono formate con tutti cicli chiusi di egual ordine oppure con tutti cicli aperti.*

b) *Una sostituzione iperbolica è formata con tutti cicli aperti o con tutti scambi.*

c) *Una sostituzione parabolica è formata con tutti cicli aperti.*

148. *Il gruppo generato dalle sostituzioni paraboliche coincide col modulare.*

Osserviamo anzitutto che, in virtù della (β), ogni sostituzione parabolica appartiene ad M.

Presa poi una sostituzione qualsiasi di M:

$$h=\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix},$$

determiniamo una sostituzione parabolica:

$$k=\begin{pmatrix}m, & n\\ p, & q\end{pmatrix}$$

tale che $h \cdot k$ sia ancora una sostituzione parabolica.

Tale determinazione è possibile, comunque sia h, poichè essa è collegata alla risoluzione del sistema indeterminato:

$$\begin{cases} am+cn+bp+dq=2 \\ mq-np \qquad\qquad\quad =1 \\ m+q \qquad\qquad\qquad\; =2 \end{cases}$$

nelle incognite m, n, p, q.

Segue da ciò che h può esprimersi come prodotto delle sostituzioni paraboliche $h \cdot k$ e k^{-1}.

149. *Il gruppo modulare non ammette sottogruppi invarianti all'infuori della identità.*

Un gruppo H invariante in M, essendo transitivo, contiene una operazione h tale che:

$$h(0) = \infty .$$

Le trasformate di h mediante le operazioni del tipo:

$$(\gamma) \qquad x_1 = \rho^2 x,$$

appartengono ad H, sono fra loro diverse, ed hanno la stessa proprietà di h. Pertanto, il prodotto di una di queste operazioni per h^{-1} è diverso dall'identità e lascia fermo l'elemento 0.

Se questo prodotto è una operazione iperbolica, il gruppo H contiene una operazione k tale che:

$$k(0) = 0, \quad k(\infty) = \infty,$$

e contiene la trasformata k_1 di k mediante la sostituzione:

$$x_1 = x + 1.$$

Il prodotto $k_1 \cdot k^{-1}$ appartiene ad H e, come facilmente si verifica, è una sostituzione parabolica del tipo:

$$l = \begin{pmatrix} 1, & b \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia poi:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1, & m\rho^2 b \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

la trasformata di l^m mediante una operazione della forma (γ). Poichè m e ρ^2 sono in nostro arbitrio, si può disporre di essi in modo che λ ci rappresenti una qualunque delle sostituzioni paraboliche che lasciano fermo l'elemento ∞.

Il gruppo H, contenendo perciò tutte le sostituzioni paraboliche, coincide con M.

150. Vediamo ora quali sono i sottogruppi invarianti di L.

Notiamo anzitutto che ogni commutatrice di L appartiene ad M, che il gruppo $\frac{L}{M}$ è abeliano (n.° 78) e che le sue operazioni hanno periodo due.

Indichiamo poi con H un sottogruppo invariante di L e con D il gruppo comune ad H ed M.

Poichè H ed M sono invarianti in L, il gruppo D sarà invariante in M e, non potendo ridursi alla identità, dovrà coincidere con M. Pertanto, possiamo affermare che H, contenendo interamente M, è formato con tutte le operazioni di L che corrispondono ad un sottogruppo di $\frac{L}{M}$.

Reciprocamente, il complesso formato con tutte le operazioni di L che corrispondono ad un sottogruppo di $\frac{L}{M}$ costituisce un sottogruppo invariante di L.

In particolare, i sottogruppi invarianti massimi di L dovranno corrispondere ai sottogruppi di $\frac{L}{M}$ che hanno indice due (n.° 56).

151. Le precedenti considerazioni si possono evidentemente ripetere per un qualsiasi sottogruppo K di L contenente il gruppo modulare. Da ciò segue che una qualunque successione di gruppi:

$$L, \quad L_2, \ldots, \quad L_m, \ldots,$$

tale che ciascun L_m sia invariante massimo nel precedente, non soddisfa alla condizione b) del n.° 84 e cioè che *il gruppo* L *non ammette serie di composizione.*

C) Il gruppo metaciclico.

152. Sia G il gruppo generato dal ciclo aperto:

$$g = (\ldots, \; -n, \ldots, \; -1, \; 0, \; 1, \ldots, \; n, \ldots).$$

Chiameremo *gruppo metaciclico* il più ampio sottogruppo M del totale sugli elementi:

$$\ldots, \quad -n, \ldots, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \ldots, \quad n, \ldots$$

che contiene G come sottogruppo invariante.

Una qualsiasi sostituzione m di M deve trasformare g in sè stessa oppure nella sua inversa g^{-1}.

Nel primo caso si deve avere:

$$m(n+1) = m(n) + 1,$$

e cioè:

$$m = g^{m(0)}.$$

Nel secondo caso, l'operazione m deve essere della forma:

$$m = g^r \cdot \gamma$$

dove:

$$\gamma = (1, \; -1) \cdot (2, \; -2) \cdot \ldots \cdot (n, \; -n) \cdot \ldots$$

Si ha infatti:

$$m^{-1} \cdot g \cdot m = \gamma^{-1} \cdot g \cdot \gamma = g^{-1},$$

$$\gamma \cdot m^{-1} \cdot g \cdot m \cdot \gamma^{-1} = g,$$

da cui:

$$m \cdot \gamma^{-1} = g^r, \quad m = g^r \cdot \gamma.$$

Le sostituzioni di M sono pertanto tutte e sole le seguenti:

$$M = [G, \ G \cdot \gamma].$$

È poi evidente come tutte le operazioni di $G \cdot \gamma$ abbiano periodo due.

153. Determiniamo tutti i possibili sottogruppi di M: sia N uno di essi. Se N appartiene a G, esso deve avere la forma:

$$N = [1, \ g^{rk}] \qquad (k = \pm 1, \ \pm 2, \ldots).$$

Se invece N è formato soltanto con operazioni di $G \cdot \gamma$, esso deve avere ordine due perchè, se contenesse due operazioni $g^r \cdot \gamma$ e $g^s \cdot \gamma$, conterrebbe anche il loro prodotto:

$$g^r \cdot \gamma \cdot g^s \cdot \gamma = g^{r-s}.$$

Consideriamo infine il caso in cui N contenga operazioni di G e di $G \cdot \gamma$. Indichiamo con g^ρ la più piccola potenza positiva di g che figura in N e con $g^r \cdot \gamma$ una operazione di N appartenente a $G \cdot \gamma$.

Se $g^x \cdot \gamma$ è un'altra operazione di N, si ha:

$$g^x \cdot \gamma \cdot g^r \cdot \gamma = g^{x-r};$$

e poichè le potenze di g che figurano in N sono del tipo $g^{\lambda\rho}$, deve aversi:

$$x = \lambda\rho + r.$$

Le operazioni di N sono dunque tutte e sole le seguenti:

$$g^{\lambda\rho}, \quad g^{\mu\rho+r} \cdot \gamma \qquad (\lambda \text{ e } \mu = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots).$$

Il gruppo N ha poi, evidentemente, indice ρ in M.

Inversamente, se ρ ed r sono due numeri interi presi ad arbitrio ($\rho > 0$), il complesso:

$$N = [g^{\lambda\rho}, \ g^{\mu\rho+r} \cdot \gamma] \qquad (\lambda \text{ e } \mu = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots)$$

è un sottogruppo di M avente indice ρ.

Per un determinato ρ si hanno ρ sottogruppi corrispondenti ai valori di r:

$$0, \ 1, \ 2, \ldots, \ \rho - 1.$$

154. I sottogruppi del primo tipo, cioè i sottogruppi di G, sono invarianti in M per la definizione stessa di M; quelli del secondo tipo non possono essere invarianti perchè:

$$g^{-1}\cdot g^{r}\cdot\gamma\cdot g = g^{r-2}\cdot\gamma.$$

Vediamo infine quali sono i sottogruppi invarianti del terzo tipo. Se:

$$N = [g^{\lambda\rho},\ g^{\mu\rho+r}\cdot\gamma]$$

è uno di essi, deve aversi:

$$g^{-1}\cdot g^{\mu\rho+r}\cdot\gamma\cdot g = g^{\mu\rho+r-2}\cdot\gamma = g^{\mu_1\rho+r}\cdot\gamma,$$

e cioè:

$$\mu\rho + r - 2 = \mu_1\rho + r, \quad (\mu - \mu_1)\rho = 2.$$

Quest' ultima eguaglianza è soddisfatta soltanto da $\rho = 1$ oppure da $\rho = 2$: per $\rho = 1$ si ha il gruppo M, per $\rho = 2$ si hanno i due seguenti sottogruppi invarianti in M:

$$N_1 = [g^{2\lambda},\ g^{2\mu}\cdot\gamma], \quad N_2 = [g^{2\lambda},\ g^{2\mu+1}\cdot\gamma].$$

155. Osserviamo infine che i gruppi G, N_1, N_2 sono invarianti massimi in M e che essi ammettono il gruppo:

$$G_1 = [g^{2\lambda}]$$

quale comune sottogruppo invariante massimo.

Da ciò discende che M è un gruppo risolubile avente infinite serie di composizione (n.° 90).

Alcune formole per le falde dell'evoluta di una superficie.

Nota di Roberto Occhipinti (a Palermo).

Sunto. - *Nella Nota si dà una semplice costruzione del raggio di torsione geodetica delle linee* $r_1 = cost.$, $r_2 = cost.$ *sulle falde dell'evoluta di una superficie e si dimostrano formole semplicissime per gli elementi di dette linee. Si trova poi la condizione affinchè una* W *abbia le falde dell'evoluta pure superficie* W *e si determinano tutte queste superficie.*

Nella presente Nota espongo alcune semplici relazioni che si riferiscono alle linee $r_1 = \text{cost.}$ ed $r_2 = \text{cost.}$ delle falde S_1 ed S_2 dell'evoluta di una superficie S, nonchè alle corrispondenti delle linee di curvatura.

I soli elementi che introduco nelle formole sono i raggi principali r_1, r_2 di curvature normali, quelli ρ_1, ρ_2 di curvature tangenziali dell'evolvente, e gli angoli ω ed ω' delle linee $r_1 = \text{cost}$, su S_1 ed S e di $r_2 = \text{cost.}$ su S_2 ed S. Alcune formole, come quelle delle torsioni geodetiche delle linee $r_1 = \text{cost.}$ di S_1 ed $r_2 = \text{cost.}$ di S_2 [n.° 5, (a) ed (a')], quella del prodotto di dette torsioni per una W [n.° 5, (b)], quella del rapporto della flessione alla torsione delle geodetiche u di S_1 [n.° 6, (b)] e la (a) del n.° 7, hanno una forma notevolmente semplice.

1. Comincio con l'osservare che: *Ogni linea* $r_1 = cost.$ *di* S_1 *è, in ciascun punto, parallela alla linea di curvatura* (v) *del secondo sistema passante pel punto corrispondente di* S.

Infatti, riferendo la S alle linee di curvatura, abbiamo per l'elemento lineare di S_1 (1):

$$ds_1^2 = E\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^2 du^2 + dr_1^2.$$

Derivando rispetto ad u le coordinate x_1, y_1, z_1 dei punti di $r_1 = \text{cost.}$ su S_1, abbiamo ad es.:

$$\frac{dx_1}{du} = \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{dv}{du};$$

(1) Ved. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. I, pag. 275.

sostituendo per $\frac{dv}{du}$ l'espressione $-\frac{\frac{\partial r_1}{du}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}}$ data dall'equazione delle linee $r_1 = \text{cost.}$, abbiamo:

$$\frac{dx_1}{du} = \frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}}.$$

E, tenendo presenti le espressioni di $\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_1}{\partial v}$ (¹) risulta:

$$\frac{dx_1}{du} = \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \frac{\partial x}{\partial u}. \qquad \text{c. v. d.}$$

Similmente: *Le linee* $r_2 = $ *cost. di* S_2 *sono, in ciascun punto, parallele alla linea di curvatura* (u) *del primo sistema, passante pel punto corrispondente di* S.

Sicchè: *Le linee* $r_1 = $ *cost. di* S_1 *e le linee* $r_2 = $ cost. *di* S_2 *sono, nei punti corrispondenti, ortogonali.*

In particolare, se S è una W, poichè le linee $r_2 = \text{cost.}$ sono allora anche linee $r_1 = \text{cost.}$, segue che le linee $r_1 = \text{cost.}$ sono, su S_1 ed S_2, ortogonali nei punti corrispondenti.

Segue dalle nostre considerazioni, che l'angolo delle linee $r_1 = \text{cost.}$ di S e di S_1, è quello delle linee r_1 e v di S, sicchè sulla falda S_1 le linee $r_1 = \text{cost.}$ di S vengono deviate dall'angolo $(r_1 v)$ e similmente sulla falda S_2 vengono deviate dall'angolo $(r_2 u)$.

2. Calcoliamo la curvatura normale delle linee $r_1 = \text{cost.}$ di S_1. Sostituendo nella formola della curvatura normale al posto dei coefficienti delle prime due forme fondamentali di S_1 le loro espressioni (²) ed al posto di $\frac{dv}{du}$ l'espressione $-\frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}}$, risulta per la curvatura normale:

$$\frac{1}{R_{r_1}} = -\frac{E r_1^2 \frac{\partial r_1}{\partial v} \frac{\partial r_2}{\partial v} - G r_2^2 \left(\frac{\partial r_1}{\partial u}\right)^2}{E \sqrt{G} r_1 (r_2 - r_1)^2 \frac{\partial r_1}{\partial v}}.$$

(¹) L. Bianchi, loc. cit., pag, 275.

(²) L. Bianchi, loc. cit., pagg. 275, 276.

Questa può scriversi così:

$$\frac{1}{R_{r_1}}=\frac{r_2}{r_2-r_1}\sqrt{\frac{G}{E}}\left(-\frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}}\right)\left(-\frac{r_2\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\sqrt{E}r_1(r_2-r_1)}\right)-\frac{r_2}{r_2-r_1}\left(\frac{r_1\frac{\partial r_2}{\partial v}}{\sqrt{G}r_2(r_2-r_1)}\right).$$

Ora si tengano presenti le formole che danno le curvature tangenziali principali $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$ di S e quelle di CODAZZI [1]:

$$\frac{1}{\rho_1}=-\frac{r_2\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\sqrt{E}r_1(r_2-r_1)},\quad \frac{1}{\rho_2}=\frac{r_1\frac{\partial r_2}{\partial v}}{\sqrt{G}r_2(r_2-r_1)}$$

inoltre:

$$\sqrt{\frac{G}{E}}\left(-\frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}}\right)=\operatorname{tg}(r_1 v)=\operatorname{tg}\omega$$

dove ω denota l'angolo delle linee $r_1=\text{cost.}$ su S e su S_1; allora risulta:

$$\frac{1}{R_{r_1}}=\frac{r_2}{r_2-r_1}\left[\frac{1}{\rho_1}\operatorname{tg}\omega-\frac{1}{\rho_2}\right]. \tag{1}$$

Riportando ad es., sulla tangente alla linea u in un punto P il segmento $PA=\rho_2$, poi conducendo AB perpendicolare alla tangente ad $r_1=\text{cost.}$ in P fino all'incontro in B con la tangente alla linea v in P, poi riportando su questa il segmento $BC=\rho_1$, sarà $PC=\rho_2\operatorname{tg}\omega-\rho_1$ e non resta che costruire il quarto proporzionale x dopo $\rho_2\operatorname{tg}\omega-\rho_1$, ρ_1, ρ_2 e infine il quarto proporzionale dopo r_2, x, r_2-r_1; questo sarà R_{r_1}.

Per la falda S_2 si trova:

$$\frac{1}{R_{r_2}}=\frac{r_1}{r_1-r_2}\left[\frac{1}{\rho_2}\operatorname{tg}\omega'-\frac{1}{\rho_1}\right] \tag{2}$$

dove ω' denota l'angolo delle linee $r_2=\text{cost.}$ su S e su S_2 ed $\frac{1}{R_{r_2}}$ la curvatura normale di $r_2=\text{cost.}$ Segue che, se la superficie S è una W, essendo allora $\operatorname{tg}\omega'=\operatorname{cotg}\omega$, si ha tra i raggi R_{r_1} ed R'_{r_1} di curvatura normale di $r_1=\text{cost.}$ su S_1 ed S_2 la relazione semplicissima:

$$\frac{R'_{r_1}}{R_{r_1}}=\frac{r_2}{r_1}\operatorname{tg}\omega.$$

---

[1] L. BIANCHI, loc. cit., pagg. 181 e 273.

3. Dalla formola (1) della curvatura normale delle linee $r_1 = \text{cost.}$ di S_1 e dalla formola notissima di Beltrami che dà la curvatura tangenziale $\frac{1}{\rho_{r_1}}$ delle linee stesse (¹) possiamo subito dedurre la flessione assoluta F_{r_1} delle linee stesse:

$$F_{r_1} = \frac{r_2}{r_2 - r_1} \sqrt{\left\{ \frac{1}{\rho_1} \operatorname{tg} \omega - \frac{1}{\rho_2} \right\}^2 + \frac{1}{r_2^2}}.$$

Similmente la flessione assoluta F_{r_2} delle linee $r_2 = \text{cost.}$ su S_2, è data da:

$$F_{r_2} = \frac{r_1}{r_1 - r_2} \sqrt{\left\{ \frac{1}{\rho_2} \operatorname{tg} \omega' - \frac{1}{\rho_1} \right\}^2 + \frac{1}{r_1^2}}$$

dnnque, se la S è una W, tra le flessioni assolute F_{r_1}, F'_{r_1} di $r_1 = \text{cost.}$ sulle due falde, sussiste la relazione:

$$r_2^2 F'^2_{r_1} - r_1^2 F^2_{r_1} = \frac{r_2^2 \operatorname{tg}^2 \omega - r_1^2}{(r_1 - r_2)^2}.$$

4. La curvatura media H_1 di S_1 è la somma delle curvature normali delle linee $r_1 = \text{cost.}$ ed u che sono ortogonali. La curvatura normale della linea u è data da:

$$\frac{1}{R_u} = \frac{\sqrt{G}}{r_1 \frac{\partial r_1}{\partial v}} = -\frac{1}{r_1} \sqrt{\frac{G}{E}} \left(- \frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}} \right) \frac{\sqrt{E}}{\frac{\partial r_1}{\partial u}} = \frac{r_2 \rho_1 \operatorname{tg} \omega}{r_1^2 (r_2 - r_1)}.$$

Dunque:

$$H_1 = \frac{r_2}{r_2 - r_1} \left[\frac{1}{\rho_1} \operatorname{tg} \omega - \frac{1}{\rho_2} + \frac{\rho_1 \operatorname{tg} \omega}{r_1^2} \right]$$

cioè, indicando con $\frac{1}{a_1}$ la flessione assoluta della linea u di S:

$$H_1 = \frac{r_2}{r_2 - r_1} \left(\frac{\rho_1}{a_1^2} \operatorname{tg} \omega - \frac{1}{\rho_2} \right).$$

Similmente, la curvatura media H_2 di S_2 è data da

$$H_2 = \frac{r_1}{r_1 - r_2} \left(\frac{\rho_2}{a_2^2} \operatorname{tg} \omega' - \frac{1}{\rho_1} \right)$$

essendo $\frac{1}{a_2}$ la flessione assoluta della linea v di S.

(¹) L. Bianchi, loc. cit., pag. 278.

Per es., l'espressione di H_1 mostra che, eccettuato il caso $r_2 = 0$, la falda S_1 è minima se le curvature geodetiche principali sono legate alla flessione assoluta della linea u di S, dalla relazione:

$$\frac{1}{a_1^2} = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \operatorname{cotg} \omega$$

cioè se il raggio di flessione assoluta della linea u è medio proporzionale fra uno dei raggi di curvature tangenziali principali e la proiezione dell'altro fatta normalmente alla linea $r_1 =$ cost.

Ora le evolventi delle superficie minime sono quelle i cui raggi principali sono legati dalla relazione:

$$r_1 r_2 + c(r_1 + r_2) + 2c^2 = 0 \ (^1),$$

cioè le superficie parallele ad una superficie minima ed equidistante; queste soddisfano dunque alla relazione:

$$a_1^2 = \rho_1 \rho_2 \operatorname{tg} \omega.$$

Per la curvatura totale K_1 di S_1 abbiamo (2):

$$K_1 = -\frac{1}{(r_2 - r_1)^2} \frac{\frac{\partial r_2}{\partial v}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial r_2}{\partial v}}{(r_2 - r_1)^2} \sqrt{\frac{G}{E}} \left(- \frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}} \right) : \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial r_1}{\partial u}.$$

E tenendo presenti le formole di CODAZZI e le altre che danno $\frac{1}{\rho_1}$ ed $\frac{1}{\rho_2}$, si ha subito:

$$K_1 = -\frac{\rho_1 r_2^2 \operatorname{tg} \omega}{\rho_2 r_1^2 (r_2 - r_1)^2}.$$

Similmente troviamo per la curvatura K_2 di S_2:

$$K_2 = -\frac{\rho_2 r_1^2 \operatorname{tg} \omega'}{\rho_1 r_2^2 (r_2 - r_1)^2}$$

sicchè, se la superficie è una W risulta il teorema di HALPHEN:

$$K_1 K_2 = \frac{1}{(r_2 - r_1)^4},$$

inoltre:

$$\frac{K_1}{K_2} = \left[\frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \operatorname{tg} \omega \right]^2.$$

(1) c denota una costante.

(2) Ved. BIANCHI, loc. cit., pag. 276.

5. Per calcolare la torsione geodetica delle linee $r_1 = \text{cost.}$ di S_1 basta sostituire nella formola

$$\frac{1}{T} = \frac{E_1 D_1 + (G_1 D_1 - E_1 D_1'')\frac{dv}{du} - F_1 D_1''\left(\frac{dv}{du}\right)^2}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}\left[E_1 + 2F_1\frac{dv}{du} + G_1\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right]}$$

al posto dei coefficienti delle due forme le loro espressioni (¹) ed al posto di $\frac{dv}{du}$ il rapporto $-\frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}}$. Allora si ottiene subito:

$$\frac{1}{T_{r_1}} = \frac{r_2}{r_1(r_2 - r_1)}\sqrt{\frac{G}{E}}\left(-\frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}}\right)$$

cioè:

(a) $$\frac{1}{T_{r_1}} = \frac{r_2 \operatorname{tg} \omega}{r_1(r_2 - r_1)}.$$

Questa conduce alla seguente semplicissima costruzione: Siano C_1 e C_2 i centri principali di curvatura in un punto P di S; si faccia sulla normale C_1C_2, $\overline{C_1D} = r_2$, poi si conduca, in un piano qualunque per C_1C_2, la C_1E perpendicolare a C_1C_2 e la DE tale che risulti $\widehat{C_1DE} = \omega$; se F è il punto di ulteriore intersezione della EC_1 con la circonferenza dei tre punti P, C_2 ed E sarà $C_1F = T_{r_1}$.

Per la torsione geodetica di $r_2 = \text{cost.}$ su S_2 si trova egualmente:

(a′) $$\frac{1}{T_{r_2}} = \frac{r_1 \operatorname{tg} \omega'}{r_2(r_1 - r_2)}.$$

Ne segue che le torsioni geodetiche delle linee $r_1 = \text{cost.}$ sulle due falde dell'evoluta di una W sono legate dalla relazione semplicissima:

(b) $$\frac{1}{T_{r_1}} \cdot \frac{1}{T'_{r_1}} = -\frac{1}{(r_2 - r_1)^2}.$$

In altri termini: *Il prodotto detle torsioni geodetiche delle linee* $r_1 = $ *cost. sulle due falde dell'evoluta di una* W *è uguale al prodotto delle curvature tangenziali.*

(¹) L. Bianchi, loc. cit., pagg. 275 e 276.

Si ha inoltre per una W:

$$\frac{T'_{r_1}}{T_{r_1}} = \left(\frac{r_2}{r_1} \operatorname{tg} \omega\right)^2 = \left(\frac{R'_{r_1}}{R_{r_1}}\right)^2.$$

Calcoliamo la torsione geodetica $\frac{1}{t_{r_1}}$ delle linee $r_1 = \text{cost.}$ su S; abbiamo:

$$\frac{1}{t_{r_1}} = \frac{(GD - ED'')\left(-\dfrac{\dfrac{\partial r_1}{\partial u}}{\dfrac{\partial r_1}{\partial v}}\right)}{\sqrt{EG}\left[E + G\left(\dfrac{\dfrac{\partial r_1}{\partial u}}{\dfrac{\partial r_1}{\partial v}}\right)^2\right]} = \frac{(GD - ED'')\sqrt{\dfrac{E}{G}} \operatorname{tg} \omega}{\sqrt{EG}[E + E \operatorname{tg}^2 \omega]}$$

cioè:

$$\frac{1}{t_{r_1}} = \left(\frac{D}{E} - \frac{D''}{G}\right) \sin \omega \cos \omega$$

e finalmente:

$$\frac{1}{t_{r_1}} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \sin \omega \cos \omega.$$

Confrontando questa con quelle che danno $\frac{1}{T_{r_1}}$ ed $\frac{1}{T'_{r_1}}$ vediamo che fra le torsioni geodetiche delle linee $r_1 = \text{cost.}$ su S, S_1 ed S_2 sussiste la relazione:

$$\frac{1}{t_{r_1}}\left(\frac{r_1^2}{T_{r_1}} + \frac{r_2^2}{T'_{r_1}}\right) = 1$$

purchè la superficie obiettiva sia una W.

6. La curvatura normale delle linee $u = \text{cost.}$ di S_1 è data da:

$$\frac{1}{R_u} = -\frac{D_1''}{G_1} = \frac{\sqrt{G}}{r_1 \dfrac{\partial r_1}{\partial v}}; \quad \text{ma} \quad \frac{\sqrt{G}}{\dfrac{\partial r_1}{\partial v}} = -\frac{\sqrt{E}}{\dfrac{\partial r_1}{\partial u}} \operatorname{tg} \omega$$

e, per le formole di CODAZZI:

$$\frac{\partial r_1}{\partial u} = \frac{r_1(r_2 - r_1)}{r_2} \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{G} = -\frac{r_1(r_3 - r_1)}{\rho_1 r_2} \sqrt{E},$$

dunque:

(a) $$\frac{1}{R_u} = \frac{r_2 \rho_1 \operatorname{tg} \omega}{r_1^2(r_2 - r_1)}.$$

Questa dà pure la curvatura assoluta. La torsione geodetica $\frac{1}{T_u}$ delle stesse linee di S_1 coincide pure con la torsione assoluta, ed è data, poichè queste linee sono ortogonali alle $r_1 =$ cost. dall'opposta della torsione geodetica di dette linee, cioè:

$$\frac{1}{T_u} = \frac{-r_2}{r_1(r_2 - r_1)} \operatorname{tg} \omega.$$

Da questa e dalla (a) segue:

$$\text{(b)} \qquad \frac{R_u}{T_u} = -\frac{r_1}{\rho_1}.$$

Cioè: *Il rapporto dei raggi di flessione e torsione delle linee* u *di* S_1 *pareggia il valore assoluto di quello dei raggi di curvatura normale e tangenziale delle linee stesse in* S.

Segue che nelle superficie in cui quest'ultimo rapporto è funzione di sola u, alle linee di curvatura u dell'evolvente corrispondono sulla falda S_1 geodetiche che hanno costante il rapporto tra la flessione e la torsione, quindi eliche cilindriche.

È facile vedere che le superficie in cui $\frac{r_1}{\rho_1} = U$ sono quelle che hanno le linee di curvatura u piane.

Infatti da $\frac{\frac{1}{\rho_1}}{\frac{1}{r_1}} = U$ segue, indicando con $\frac{1}{F_1}$ la flessione assoluta della linea di curvatura u:

$$\frac{r_1}{F_1} = \sqrt{U^2 + 1}.$$

D'altra parte, pel teorema di Meusnier, indicando con σ l'angolo della normale principale alla linea u con la normale alla superficie, si ha:

$$F_1 = r_1 \cos \sigma,$$

dunque:

$$\cos \sigma = \frac{1}{\sqrt{U^2 + 1}}$$

cioè lungo una linea di curvatura u è costante l'angolo della normale principale con la normale alla superficie; allora la torsione assoluta, coincidendo con la torsione geodetica, è nulla e la linea u è piana.

Viceversa, se le linee di curvatura u di una superficie sono piane, si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{eg}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} = U$$

e poichè

$$\sqrt{e} = \frac{\sqrt{E}}{r_2}, \quad \sqrt{g} = \frac{\sqrt{G}}{r_1},$$

risulta:

$$\text{(b}'\text{)} \qquad \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_1 \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \sqrt{G} \frac{\partial r_1}{\partial u}}{\sqrt{EG}} = U.$$

D' altra parte, per le formole di Codazzi si ha:

$$\frac{\partial r_1}{\partial u} = r_1\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = r_1\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \sqrt{E}\, \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$$

cioè

$$\frac{\partial r_1}{\partial u} = -\, r_1\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \sqrt{E}\, \frac{1}{\rho_1}$$

sicchè, sostituendo nella (b′) scritta così:

$$r_2 \frac{\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}}{\sqrt{EG}} - r_2 \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{r_1} = U$$

risulta:

$$\frac{r_1}{\rho_1} = U.$$

Possiamo dire così: *Le superficie con le linee di curvatura di un sistema piane sono quelle, nelle quali le geodetiche corrispondenti sulla relativa falda di evoluta sono eliche cilindriche.*

7. La curvatura normale delle linee $v =$ cost. di S_1 è data da

$$\frac{1}{R_v} = -\frac{D_1}{E_1}.$$

Ora si ha:

$$D_1 = \frac{E}{\sqrt{G}} \frac{r_1}{r_2^1} \frac{\partial r_2}{\partial v}, \quad E_1 = E \frac{(r_2 - r_1)^2}{r_2^2} + \left(\frac{\partial r_1}{\partial v}\right)^2$$

e ricavando $\frac{\partial r_2}{\partial v}$ e $\frac{\partial r_1}{\partial u}$ dalle espressioni di $\frac{1}{\rho_1}$ e $\frac{1}{\rho_2}$ del § 2 e sostituendo risulta:

$$D_1 = E \frac{r_2 - r_1}{r_2 \rho_2}, \quad E_1 = E \frac{(r_2 - r_1)^2}{r_2^2} \frac{\rho_1^2 + r_1^2}{\rho_1^2}$$

sicchè:

$$\frac{1}{R_v} = -\frac{r_2\rho_1^2}{(r_2 - r_1)\rho_2(r_1^2 + \rho_1^2)}.$$

La torsione geodetica delle stesse linee di S_1 è data da:

$$\frac{1}{T_v} = \frac{F_1 D_1}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \cdot E_1},$$

e tenendo presenti le espressioni di E_1 e D_1 ora date e quelle di F_1 e G_1 (1) risulta subito:

$$\frac{1}{T_v} = \frac{r_1 r_2 \rho_1}{(r_2 - r_1)\rho_2(r_1^2 + \rho_1^2)}.$$

Segue:

(a) $$\frac{R_v}{T_v} = -\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{R_u}{T_u}.$$

Dunque: *Le linee di curvatura dell'evolvente hanno sulla prima (seconda) falda dell'evoluta i rapporti delle rispettive curvature normali e torsioni geodetiche eguali all'opposto del rapporto della curvatura normale c tangenziale della linea di curvatura* u(v).

8. Per terminare, esaminiamo la seguente quistione:

In quali superficie W *le due falde dell'evoluta sono pure superficie* W*?*

Riduciamo l'elemento lineare dell'evolvente alla forma (WEINGARTEN) $\frac{du^2}{\beta^2} + \frac{dv^2}{\theta'^2(\beta)}$; allora si hanno le formole (2):

(1) $$r_1 = \frac{1}{\theta - \beta\theta'},$$

(2) $$r_2 = \frac{1}{\theta},$$

(3) $$\rho_1 = \frac{\theta'}{\beta_1 \beta \theta''},$$

(4) $$\rho_2 = \frac{\beta}{\beta_2 \theta'},$$

essendo θ funzione di $\beta(u, v)$; inoltre $\beta_1 = \frac{\partial\beta}{\partial u}$, $\beta_2 = \frac{\partial\beta}{\partial v}$.

---

(1) Ved. BIANCHI, loc. cit., pag. 275.

(2) Ved. BIANCHI, loc. cit., pag. 291,

Ne seguono le espressioni dei coefficienti delle forme fondamentali di S_1:

$$E_1=\frac{\beta^2\beta_1^2\theta''^2+\theta'^2(\theta-\beta\theta')^2}{(\theta-\beta\theta')^4},\quad F_1=\frac{\beta^2\beta_1\beta_2\theta''^2}{(\theta-\beta\theta')^4},$$

$$G_1=\frac{\beta^2\beta_2^2\theta''^2}{(\theta-\beta\theta')^4},\quad D_1=\frac{-\beta_2\theta'^2}{\beta^2(\theta-\beta\theta')\theta^4},$$

$$D_1''=\frac{-\beta\beta_2\theta''}{\theta'(\theta-\beta\theta')^3}.$$

Per la curvatura media H_1 e la totale K_1 di S_1 troviamo allora:

$$H_1=\frac{\beta^2\beta_1^2\theta^4\theta''^2+(\theta-\beta\theta')^2\theta'^2(\theta^4+\beta_2^2\theta'\theta'')}{\beta\beta_2(\theta-\beta\theta')\theta'^3\theta''},\tag{5}$$

$$K_1=\frac{(\theta-\beta\theta')^2}{\beta^3\theta'\theta''\theta^4}.\tag{6}$$

Espressioni analoghe si hanno per le curvature H_2 e K_2 media e totale di S_2. Se dunque S_1 ed S_2 sono superficie W, si avranno due relazioni della forma:

$$R_1(H_1,K_1)=0,\tag{7}$$

$$R_2(H_2,K_2)=0.\tag{8}$$

Ad es. la (7) è, in base alle (5) e (6), una relazione tra β, β_1, β_2 ed allora, eliminando β, β_1, β_3 fra (1), (3), (4), (7) si ha una relazione della forma:

$$\varphi(r_1,\rho_1,\rho_2)=0.\tag{9}$$

Operando analogamente con le (8), (2), (3), (4), si avrà un'altra relazione:

$$\psi(r_2,\rho_1,\rho_2)=0.\tag{10}$$

Siccome poi per una W i raggi principali r_1, r_2 sono l'uno funzione dell'altro, le (9) e (10) equivalgono, in fondo, ad una relazione:

$$\chi(\rho_1,\rho_2)=0,$$

tra i raggi di curvature tangenziali principali, compatibile con l'altra fra i raggi principali r_1, r_2.

Dunque: *Soltanto nelle superficie* W *i cui raggi di curvature tangenziali principali sono legati da una relazione compatibile con quella che lega i raggi principali, le falde dell'evoluta sono pure superficie* W.

Esistono di queste particolari W? Pel teorema di WEINGARTEN il problema di determinarle consiste nel trovare tutte le deformate di superficie di rotazione, che sono, al tempo stesso, superficie W; le loro evolventi sono le superficie richieste.

Le W elicoidali, essendo applicabili su superficie di rotazione, rispondono al problema, e così pure le superficie a curvatura costante, essendo falde di evoluta di superficie con $r_1 - r_2 = \text{cost.}$.

Il BIANCHI ha espresso l'opinione che all'infuori di queste non esistano altre classi di superficie W, falde dell'evoluta di superficie W.

È ciò che dimostro partendo dal ds^2 di una superficie di rotazione sotto la forma normale:

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2 ;$$

allora è quistione di vedere come bisogna prendere D, D', D'' in guisa da soddisfare alle equazioni di CODAZZI che nel caso attuale sono:

$$D_2 - D_1' - \frac{r'}{r} D' = 0, \tag{a}$$

$$D_1'' - D_2' - rr'D - \frac{r'}{r} D'' = 0, \tag{b}$$

a quella di GAUSS:

$$DD'' - D'^2 = - rr'',$$

ed all'altra:

$$D_2'' + r^2 D_2 = 0, \tag{c}$$

che esprime che la superficie richiesta è una W, giacchè allora, essendo H funzione di K, e questa funzione di u soltanto, anche H è funzione di sola u. Da quest'ultima relazione deduciamo, ad es.:

$$D'' + r^2 D = 2rU \tag{d}$$

essendo U funzione di sola u; allora la (b) si scrive:

$$rD_1'' - rD_2' = 2rr'U. \tag{b'}$$

Occorre dunque studiare il sistema delle equazioni (a), (b'), (c), (d). Dalle (c) e (d) deduciamo:

$$D = \frac{U \pm \sqrt{U^2 + rr'' - D'^2}}{r}, \tag{e}$$

$$D'' = r[U \mp \sqrt{U^2 + rr'' - D'^2}], \tag{f}$$

e bisogna soddisfare alle (a) e (b'). Perciò, calcolando D_2 e D_1'' e sostituendo nelle (a) e (b') si ha il sistema:

$$r\sqrt{U^2 + rr'' - D'^2} \cdot D_1' + D'D_2' = - r'\sqrt{U^2 + rr'' - D'^2} \cdot D',.$$

$$2r^2 D' \cdot D_1' - 2r\sqrt{U^2 + rr'' - D'^2} \cdot D_2' = 2r(r'U - rU')\sqrt{U^2 + rr'' - D'^2} +$$
$$+ \{ r^2(U^2 + rr'') \}' - 2rr'D'^2.$$

Risolvendo rispetto a D_1' e D_2' risulta:

$$D_1' = \frac{r(U^2 + rr'')' + 2(r'U - rU')\sqrt{U^2 + rr'' - D'^2}}{2r(U^2 + rr'')} D',$$

$$D_2' = \frac{-r(U^2+rr'')' + 2(r'U - rU')\sqrt{U^2+rr''-D'^2} - 2r'(U^2+rr'')}{2(U^2+rr'')}\sqrt{U^2+rr''-D'^2}.$$

Poi derivando la prima rispetto a v e la seconda rispetto ad u, identificando le due derivate, e sostituendo al posto di D_1' e D_2' le espressioni date dalle stesse equazioni, si ha un' equazione in D' che ci darà necessariamente D' funzione della sola u; allora le (e) ed (f) danno anche D e D'' funzioni di sola u. Le D, D', D'' convengono dunque o ad una superficie elicoidale o ad una superficie a curvatura costante.

Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine.

Memoria di MAURO PICONE (a Napoli) (1).

Sunto. - *Si conseguono semplici formole generali maggioranti gli integrali, soggetti ad assegnate condizioni al contorno atte a determinarli, delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del second'ordine in due o più variabili indipendenti. La ricerca offre numerosi nuovi risultati, fra i quali, per esempio, quelli concernenti il comportamento all'infinito degli integrali; il teorema d'unicità per l'annoso problema della propagazione del calore in un mezzo conduttore illimitato, senza l'aggiunta di ulteriori ipotesi — affatto estranee al punto di vista fisico — sul comportamento all'infinito delle derivate della soluzione; le condizioni atte a determinare « in grande » gli integrali delle equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine, ecc.*

Diciamo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le coordinate del punto qualunque P dello spazio euclideo $S_{(n)}$, a n dimensioni. Nel dominio T internamente connesso di $S_{(n)}$ siano definite le assegnate funzioni reali:

$$a_{hk}(P)=a_{kh}(P), \quad b_k(P), \quad c(P), \quad f(P),$$
$$(h,\ k=1,\ 2,\ldots,\ n)$$

finite e continue in T. L'equazione lineare alle derivate parziali del secondo ordine:

$$E[u]\equiv\sum_{hk}^{1,n}a_{hk}(P)\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k}+\sum_{h}^{1,n}b_h(P)\frac{\partial u}{\partial x_h}+c(P)u=f(P), \tag{1}$$

(1) Insignita del premio Tenore dall'Accademia Pontaniana di Napoli, nella seduta del 10 giugno 1928.

dicesi *totalmente parabolica* su T, se, per ogni punto P di T, la forma quadratica nelle λ:

$$\sum_{hk}^{1,n} a_{hk}(P)\lambda_h\lambda_k \tag{2}$$

riesce *semidefinita*. Per fissare le idee supporremo sempre, nel seguito, semidefinita *positiva* tale forma. E non è escluso che possa riuscire $a_{hk}(P) \equiv 0$, per tutti i valori degli indici h e k, che cioè l'equazione possa ridursi ad essere del primo ordine.

Le equazioni lineari totalmente paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine si presentano, come quelle totalmente ellittiche, in parecchi importanti problemi di Fisica-matematica, ma, mentre che per queste ultime la teoria è assai progredita ed ha anche conseguito in parecchie parti un definitivo assetto ormai classico, non così può dirsi per le prime.

In questa Memoria vogliamo dedicarci alla ricerca — fin ad ora mai tentata, se si eccettua un caso molto particolare che sarà citato in seguito — di formole di maggiorazione per gli integrali, verificanti assegnate condizioni al contorno atte a determinarli, delle equazioni totalmente paraboliche. La capitale importanza di quelle formole nei calcoli d'approssimazione numerica dei detti integrali è stata recentemente messa in completa luce (1).

La ricerca offre nuove notevoli osservazioni sugli integrali delle equazioni totalmente paraboliche, fra le quali citerò, per esempio, quelle del § 3 sul comportamento all'infinito degli integrali, quelle dei §§ 4 e 8 che forniscono il teorema d'unicità per l'annoso problema della propagazione del calore in un mezzo conduttore illimitato, *senza l'aggiunta di ulteriori ipotesi — affatto estranee al punto di vista fisico —* (2), *sul comportamento all'infinito*

(1) M. Picone, *Sul metodo delle minime potenze ponderate e sul metodo di Ritz per il calcolo approssimato nei problemi della Fisica-matematica.* [« Bollettino dell'Unione matematica italiana », vol. VI (1927), pp. 271-273; « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », tomo LII (1928), pp, 225-253].

(2) Che così sia stato conseguito un *atteso* progresso nella trattazione analitica della questione è autorevolmente provato dalle seguenti parole che Picard pronunziava, or son venticinque anni, nel suo discorso *Sur le développement de l'Analyse mathématique et ses rapports avec quelques autres Sciences* [Paris, Gauthier-Villars, 1905] tenuto al Congresso della Arti e Scienze di Saint-Louis (1904):

« Il est parfois délicat de démontrer que des conditions déterminent d'une manière unique une solution, quand on ne vent pas se contenter de vraisemblances; il faut alors préciser la manière dont se conduisent la fonction et certaines de ses dérivées. *Ainsi, dans le problème de* Fourier *relatif à un milieu indéfini, certaines hypothèses doivent être faites sur la fonction et ses dérivées premières à l'infini, si l'on vent établir que la solution est unique* ».

delle derivate della soluzione, quelle dei §§ 5 e 10 sulle condizioni atte a determinare « in grande » gli integrali delle equazioni lineari *del primo ordine*, le quali, rivelando circostanze ben singolari, additano come assai interessante un approfondito studio dei problemi « in grande » anche per queste ultime equazioni.

Per semplificare l'esposizione ci limiteremo qui a considerare, in un primo capitolo, le equazioni in *due* variabili indipendenti e in un secondo quelle in *tre* variabili.

CAPITOLO I.

EQUAZIONI IN DUE VARIABILI INDIPENDENTI

1. **Teoremi preliminari.** — La forma canonica (sotto la quale noi qui le considereremo) delle equazioni totalmente paraboliche in due variabili indipendenti x e y, è, com'è ben noto, la seguente:

$$E[u] = a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y), \tag{1}$$

ove $a(x, y)$ $b_1(x, y)$, $b_2(x, y)$, $c(x, y)$, $f(x, y)$ sono assegnate funzioni reali, continue nel dominio internamente connesso T del piano (x, y), risultando sempre in T:

$$a(x, y) \geqq 0.$$

Designeremo con S_{-y} (con S_{+y}) quella parte della frontiera di T, se esiste, tale che per ogni punto $P_0(x_0, y_0)$ ad essa appartenente si può determinare un numero positivo σ per modo che tutti i punti le cui coordinate verificano le limitazioni:

$$x_0 - \sigma < x < x_0 + \sigma, \quad y_0 - \sigma < y \leqq y_0,$$
$$(x_0 - \sigma < x < x_0 + \sigma, \quad y_0 \leqq y < y_0 + \sigma)$$

sono contenuti in T, mentre quelli le cui coordinate verificano le limitazioni:

$$x_0 - \sigma < x < x_0 + \sigma, \quad y_0 < y < y_0 + \sigma,$$
$$(x_0 - \sigma < x < x_0 + \sigma, \quad y_0 - \sigma < y < y_0)$$

sono esterni a T. Designeremo poi con S la parte della frontiera di T costituita dai punti che non appartengono nè a S_{-y}, nè a S_{+y}, e porremo

$$S_1 = S + S_{+y}, \quad S_2 = S + S_{-y}.$$

Per la frontiera di un cerchio non esistono le parti S_{-y} e S_{+y}. Per il rettangolo $ABCD$ della figura 1, con i lati paralleli agli assi coordinati, la parte S_{-y} della frontiera è costituita dal lato CD privato degli estremi, la

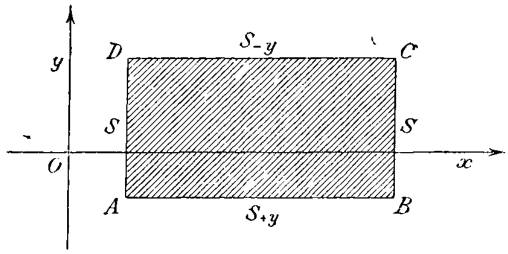


Fig. 1

parte S_{+y} dal lato AB parimente privato degli estremi, la parte S dai lati BC e AD con i loro estremi, la parte S_1 dalla spezzata $DA + AB + BC$, la parte S_2 dalla spezzata $AD + DC + BC$.

Nella figura 2 la parte S_{-y} della frontiera di T è costituita dai segmenti

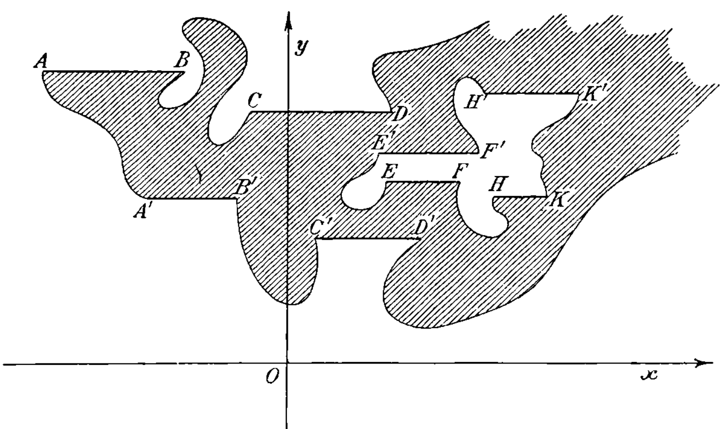


Fig. 2

AB, CD, EF, HK privati dei loro estremi, la parte S_{+y} dai segmenti $A'B'$, $C'D'$, $E'F'$, $H'K'$ parimente privati dei loro estremi.

Designeremo con $\boldsymbol{n}$ l'asse normale alla frontiera di T nei punti di S_{-y} e di S_{+y}, volto verso l'interno di T. L'asse $\boldsymbol{n}$ ha sempre la direzione dell'asse y e verso contrario nei punti di S_{-y}, lo stesso verso nei punti di S_{+y}.

Una funzione reale $u(x, y)$ sarà detta *integrale* o *soluzione* della (1), in T, se:

1°) È continua in T;

2°) nei punti interni a T e nei punti di $S_{-y}+S_{+y}$ è dotata delle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y},$$

finite e continue, verificanti l'equazione (1).

Cominciamo col dimostrare il teorema:

I. *Se nel dominio* T *è sempre*

$$c(x, y) < 0$$

ed inoltre

su S_{-y} *è sempre* $b_2(x, y) \leqq 0$ [*su* S_{+y} *è sempre* $b_2(x, y) \geqq 0$],

un integrale u *della* (1) *non può nè in un punto interno a* T *nè in un punto di* S_{-y} (*di* S_{+y}) *avere un minimo negativo se* $f(x, y) \leqq 0$, *un massimo positivo se* $f(x, y) \geqq 0$. *E, supposto* T *limitato, ne segue che se, ovunque in* T, *è* $f(x, y) \leqq 0$, *ogni integrale della* (1) *sempre positivo o nullo su* $S_1 = S + S_{+y}$ (*su* $S_2 = S + S_{-y}$) *si conserva tale in tutto* T; *se, ovunque in* T, *è* $f(x, y) \geqq 0$, *ogni integrale della* (1) *sempre negativo o nullo su* $S_1 = S + S_{+y}$ (*su* $S_2 = S + S_{-y}$) *si conserva tale in tutto* T.

Ed invero, se, in un punto $P_0(x_0, y_0)$ interno a T, si verifica per la u un minimo, si ha:

$$u_{xx}(x_0, y_0) \geqq 0, \quad u_x(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0) = 0,$$

e quindi, se $u(x_0, y_0) < 0$, riesce:

(2) $$\left[a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu\right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} > 0,$$

e se si verifica un massimo si ha:

$$u_{xx}(x_0, y_0) \leqq 0, \quad u_x(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0) = 0,$$

e quindi, se $u(x_0, y_0) > 0$, riesce:

(3) $$\left[a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu\right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} < 0.$$

Se poi, il punto $P_0(x_0, y_0)$ è su S_{-y} e in esso si verifica un minimo, si ha:

$$u_{xx}(x_0, y_0) \geqq 0, \quad u_x(x_0, y_0) = 0, \quad \left[\frac{du}{dn}\right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = -u_y(x_0, y_0) \geqq 0,$$

e quindi, se $u(x_0, y_0) < 0$, poichè su S_{-y} è sempre $b_2(x, y) \leqq 0$, si ottiene ancora la (2). Se, essendo sempre il punto P_0 su S_{-y}, in esso si verifica un massimo, si ha:

$$u_{xx}(x_0, y_0) \leqq 0, \quad u_x(x_0, y_0) = 0, \quad \left[\frac{du}{dn}\right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = -u_y(x_0, y_0) \leqq 0,$$

e quindi, se $u(x_0, y_0) > 0$, poichè su S_{-y} è sempre $b_2(x, y) \leqq 0$, si ottiene ancora la (3).

Ne segue, ovviamente:

I'. *Se nel dominio* T *è sempre*

$$c(x, y) < 0$$

ed inoltre

su S_{-y} *è sempre* $b_2(x, y) \leqq 0$ *e su* S_{+y} *è sempre* $b_2(x, y) \geqq 0$,

un integrale u *della* (1) *non può nè in un punto interno a* T *nè in un punto di* $S_{-y} + S_{+y}$ *avere un minimo negativo se* $f(x, y) \leqq 0$, *un massimo positivo se* $f(x, y) \geqq 0$.

Dal teorema I subito si deduce il seguente:

II. *Il dominio* T *sia limitato ed inoltre*

su S_{-y} *sia sempre* $b_2(x, y) \leqq 0$ [*su* S_{+y} *sia sempre* $b_2(x, y) \geqq 0$].

Se è possibile definire una funzione $\omega(x, y)$ *sempre positiva in* T, *ivi continua e dotata delle derivate parziali* ω_{xx}, ω_x, ω_y *finite e continue, per modo che, in* P, *risulti sempre*

$$E[\omega(x, y)] < 0,$$

allora, se, ovunque in T, *è* $f(x, y) \leqq 0$, *ogni integrale della* (1) *sempre positivo o nullo su* $S_1 = S + S_{+y}$ (*su* $S_2 = S + S_{-y}$) *si conserva tale in tutto* T; *se, ovunque in* T, *è* $f(x, y) \geqq 0$, *ogni integrale della* (1) *sempre negativo o nullo su* $S_1 = S + S_{+y}$ (*su* $S_2 = S + S_{-y}$) *si conserva tale su tutto* T.

Posto, infatti, $v = \frac{u}{\omega}$, si ha per v l'equazione:

$$E_\omega[v] \equiv \omega a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(2a \frac{\partial \omega}{\partial x} + b_1 \omega\right) \frac{\partial v}{\partial x} + \omega b_2 \frac{\partial v}{\partial y} + E[\omega] v = f. \tag{4}$$

Sia $f(x, y) \leqq 0$. Se l'integrale u della (1) è sempre positivo o nullo su $S_1 = S + S_{+y}$, tale risulta l'integrale v della (4). Se questo prendesse, talvolta in T, valori negativi avrebbe ivi un minimo assoluto negativo che dovrebbe verificarsi o in un punto interno a T o in un punto di S_{-y}, il che è assurdo, in forza del teorema I. Perciò v è sempre positivo o nullo in tutto T

e tale risulterà anche u. Un ragionamento analogo dimostra l'altra asserzione del teorema, relativa al caso $f(x, y) \geq 0$.

Osserviamo che, se in T è sempre $c(x, y) < 0$, si ha già $E[1] = c < 0$, e quindi sussiste la tesi del teorema ora dimostrato, ciò che del resto già stabilisce il teorema I.

Dal teorema I' si deduce il seguente:

II'. *Il dominio* T *sia limitato ed inoltre*

$$su\ S_{-y}\ sia\ sempre\ b_2(x, y) \leqq 0\ e\ su\ S_{+y}\ sia\ sempre\ b_2(x, y) \geqq 0.$$

Se è possibile definire una funzione $\omega(x, y)$ *sempre positiva in* T, *ivi continua e dotata delle derivate parziali* ω_{xx}, ω_x, ω_y *finite e continue, per modo che, in* T, *risulti sempre*

$$E[\omega] < 0,$$

allora, se, ovunque in T, *è* $f(x, y) \leqq 0$, *ogni integrale della* (1) *sempre positivo o nullo su* S *si conserva tale in tutto* T; *se, ovunque in* T, *è* $f(x, y) \geqq 0$, *ogni integrale della* (1) *sempre negativo o nullo su* S *si conserva tale in tutto* T.

Dal teorema II subito discende il seguente:

III. *Se il dominio* T *è limitato ed inoltre*

$$\text{(5)} \qquad in\ T\ \grave{e}\ sempre\ a(x, y) > 0, \quad c(x, y) \leqq 0,$$
$$su\ S_{-y}\ \grave{e}\ sempre\ b_2(x, y) \leqq 0\ [su\ S_{+y}\ \grave{e}\ sempre\ b_2(x, y) \geqq 0],$$

si verifica la tesi del teorema II.

Dimostreremo, infatti, assai facilmente, che, in virtù delle (5), si può costruire la funzione $\omega(x, y)$ del teorema II, sempre positiva in T, per la quale ivi risulti sempre $E[\omega] < 0$. Posto

$$\omega = \beta + \frac{e^{\alpha x}}{\alpha},$$

si ha:

$$E[\omega] = a e^{\alpha x}\left(\alpha + \frac{b_1}{a}\right) + c\left(\beta + \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right),$$

e quindi, se si sceglie dapprima α in guisa che in T riesca sempre

$$\alpha + \frac{b_1(x, y)}{a(x, y)} < 0,$$

e poscia β in modo che risulti sempre in T

$$\beta + \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} > 0,$$

si avrà sempre $\omega > 0$ e, poichè $c(x, y) \leqq 0$, si avrà anche $E[\omega] < 0$.

Come dal teorema I si ricava il teorema II, così da quest' ultimo teorema III si ricava il seguente:

IV. *Il dominio* T *sia limitato ed inoltre*

$$\textit{in } \mathrm{T} \textit{ sia sempre } \mathrm{a(x, y)} > 0,$$

$$\textit{su } \mathrm{S_{-y}} \textit{ sia sempre } \mathrm{b_2(x, y)} \leqq 0 \ [\textit{su } \mathrm{S_{+y}} \textit{ sia sempre } \mathrm{b_2(x, y)} \geqq 0].$$

Se è possibile definire una funzione $\omega(\mathrm{x, y})$ *sempre positiva in* T, *ivi continua e dotata delle derivate parziali* ω_{xx}, ω_{x}, ω_{y} *finite e continue, per modo che in* T *sia sempre*

$$E[\omega] \leqq 0,$$

si verifica la tesi del teorema II.

Tale teorema contiene come caso particolare il teorema III dal quale è stato dedotto. Ed invero, soddisfatte le ipotesi di quest' ultimo, basta porre $\omega(x, y) \equiv 1$, per risultare

$$E[\omega] = E[1] = c(x, y) \leqq 0.$$

Così pure dal teorema II′ si ottiene:

IV′. *Il dominio* T *sia limitato ed inoltre*

$$\textit{in } \mathrm{T} \textit{ sia sempre } \mathrm{a(x, y)} > 0,$$

$$\textit{su } \mathrm{S_{-y}} \textit{ sia sempre } \mathrm{b_2(x, y)} \leqq 0 \textit{ e su } \mathrm{S_{+y}} \textit{ sia sempre } \mathrm{b_2(x, y)} \geqq 0.$$

Se è possibile definire la solita funzione $\omega(\mathrm{x, y})$ *sempre positiva in* T, *per la quale risulti ivi sempre* $\mathrm{E}[\omega] \leqq 0$, *si verifica la tesi del teorema* II′.

Dai teoremi II e IV si deducono i seguenti:

V. *Se il dominio* T *è limitato ed inoltre*

$$\textit{su } \mathrm{S_{-y}} \textit{ è sempre } \mathrm{b_2(x, y)} \leqq 0 \ [\textit{su } \mathrm{S_{+y}} \textit{ è sempre } \mathrm{b_2(x, y)} \geqq 0]$$

e si possono determinare due costanti α *e* β *per modo che riesca sempre in* T

$$\alpha^2 a(x, y) + \alpha b_1(x, y) + \beta b_2(x, y) + c(x, y) < 0, \tag{6}$$

si verifica la tesi del teorema II.

VI. *Se il dominio* T *è limitato ed inoltre*

$$\textit{in } \mathrm{T} \textit{ è sempre } \mathrm{a(x, y)} > 0,$$

$$\textit{su } \mathrm{S_{-y}} \textit{ è sempre } \mathrm{b_2(x, y)} \leqq 0 \ [\textit{su } \mathrm{S_{+y}} \textit{ è sempre } \mathrm{b_2(x, y)} \geqq 0]$$

e si possono determinare due costanti α *e* β *per modo che riesca sempre in* T

$$\alpha^2 a(x, y) + \alpha b_1(x, y) + \beta b_2(x, y) + c(x, y) \leqq 0, \tag{7}$$

si verifica la tesi del teorema II.

Ed invero, posto $\omega = e^{\alpha x + \beta y}$, si trova

$$E[\omega] = (\alpha^2 a + \alpha b_1 + \beta b_2 + c) e^{\alpha x + \beta y}.$$

Il teorema V ha di conseguenza il seguente notevole:

VII. *Se il dominio* T *è limitato ed inoltre*

$$\textit{in } \mathrm{T} \textit{ è sempre } \mathrm{b}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) < 0 [\mathrm{b}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) > 0],$$

si verifica la tesi del teorema II.

Infatti, posto $\alpha = 0$, si può sempre determinare una costante β positiva (negativa) per la quale si abbia, in tutto T,

$$\beta b_2(x, y) + c(x, y) < 0;$$

detti, invero, m il minimo di $|b_2(x, y)|$ e M il massimo di $c(x, y)$, basta prendere $\beta > \frac{M}{m} \left(\beta < -\frac{M}{m} \right)$. Si osservi che, allora, la funzione ω per la quale riesce $E[\omega] < 0$ è data da $e^{\beta y}$.

Dai teoremi II' e IV' si deducono i seguenti:

V'. *Se il dominio* T *è limitato ed inoltre*

$$\textit{su } \mathrm{S}_{-\mathrm{y}} \textit{ è sempre } \mathrm{b}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leqq 0 \textit{ e su } \mathrm{S}_{+\mathrm{y}} \textit{ è sempre } \mathrm{b}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \geqq 0$$

e si possono determinare due costanti α *e* β *per modo che sia soddisfatta la* (6), *si verifica la tesi del teorema* II'.

VI'. *Se il dominio* T *è limitato ed inoltre*

$$\textit{in } \mathrm{T} \textit{ è sempre } \mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) > 0,$$
$$\textit{su } \mathrm{S}_{-\mathrm{y}} \textit{ è sempre } \mathrm{b}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leqq 0 \textit{ e su } \mathrm{S}_{+\mathrm{y}} \textit{ è sempre } \mathrm{b}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \geqq 0$$

e si possono determinare due costanti α *e* β *per modo che sia soddisfatta la* (7), *si verifica la tesi del teorema* II'.

Terminiamo l'attuale articolo col seguente teorema di cui faremo uso:

VIII. *Se il dominio* T *è limitato e se ivi è sempre*

$$c(x, y) < 0, \tag{8}$$

oppure

$$b_2(x, y) \neq 0, \quad c(x, y) \leqq 0, \tag{9}$$

oppure

$$a(x, y) > 0, \quad c(x, y) \leqq 0, \tag{10}$$

si può determinare una funzione w(x, y), *mai negativa in* T, *per la quale risulti sempre ivi*

$$E[w] \leqq -1. \tag{11}$$

Ed infatti, se, in primo luogo, supponiamo verificata la (8), detto γ il minimo in T di $|c(x, y)|$ e prendendo per w una costante positiva, si ha:

$$E[w] = wc(x, y) \leqq -w\gamma,$$

e perchè risulti verificata la (11) basta dunque prendere $w = \frac{1}{\gamma}$.

Supponiamo, in secondo luogo, verificate le (9). Se si prende per w una funzione positiva che sia funzione della sola y, si trova

$$E[w] = b_2 \frac{dw}{dy} + cw \leqq b_2 \frac{dw}{dy},$$

ma, detto m il minimo di $|b_2(x, y)|$ in T, si ha

$$\text{per } b_2 < 0 \text{ e } \frac{dw}{dy} > 0, \quad b_2 \frac{dw}{dy} \leqq -m \frac{dw}{dy},$$

$$\text{per } b_2 > 0 \text{ e } \frac{dw}{dy} < 0, \quad b_2 \frac{dw}{dy} \leqq m \frac{dw}{dy},$$

e quindi $E[w] \leqq -1$, $w \geqq 0$, se

$$\text{per } b_2 < 0, \quad \text{si pone} \quad w = \frac{y - \min y}{m},$$

$$\text{per } b_2 > 0, \quad \text{si pone} \quad w = \frac{\max y - y}{m}.$$

Supponiamo, in terzo luogo, verificata la (10). Per i punti di T si abbia

$$|x| \leqq \delta,$$

e, detta α una costante positiva, si ponga

$$w = \frac{1}{\alpha^2} [e^{3\alpha\delta} - e^{\alpha(x+2\delta)}]; \tag{12}$$

si ha, in T, $w \geqq 0$,

$$E[w] = - e^{\alpha(x+2\delta)}\left(a + \frac{b_1}{\alpha}\right) + cw \leqq - e^{\alpha(x+2\delta)}\left(a + \frac{b_1}{\alpha}\right),$$

si avrà perciò $E[w] \leqq -1$, se sceglieremo α in guisa da risultare

$$e^{\alpha(x+2\delta)}\left(a + \frac{b_1}{\alpha}\right) \geqq 1. \tag{13}$$

Si abbia, in T,

$$a(x, y) \geqq p > 0, \quad |b_1(x, y)| \leqq B;$$

riuscirà

$$a + \frac{b_1}{\alpha} \geqq p - \frac{B}{\alpha} \geqq \frac{p}{2},$$

se imporremo ad α la limitazione

(14) $$\alpha \geqq \frac{2B}{p}.$$

Con ciò potremo dire che:

$$e^{\alpha(x+2\delta)}\left(a+\frac{b_1}{\alpha}\right) \geqq \frac{p}{2}\, e^{\alpha(x+2\delta)} \geqq \frac{p}{2}\, e^{\alpha\delta},$$

e sarà perciò verificata la (13) se $\frac{p}{2} e^{\alpha\delta} \geqq 1$, se cioè, insieme alla (14), imporremo ad α la limitazione

(15) $$\alpha \geqq \frac{1}{\delta} \log \frac{2}{p}.$$

Adunque, nell'ipotesi che in T si verifichino le (10), una funzione w mai negativa in T che soddisfi la (11) è data dalla (12), dove δ è il massimo di $|x|$ in T, α è la maggiore fra le quantità (14) e (15), designando p il minimo di $a(x, y)$ in T e B il massimo di $|b_1(x, y)|$.

Osserviamo che: se, verificandosi le (10), risultasse $a(x, y) \geqq 1$, $b_1(x, y) \geqq 0$, si soddisferebbe alla (11), ponendo anche, più semplicemente,

(16) $$w = 2\delta^2 - \frac{1}{2}(x+\delta)^2.$$

2. **Formole di maggiorazione degli integrali dell'equazione (1).** — Dopo i teoremi precedenti è ben facile conseguire la maggiorazione degli integrali dell'equazione (1) in condizioni assai generali. Per rendere più espressive le formole adotteremo la seguente notazione: indicheremo con

$$\min_A f, \quad \max_A f,$$

rispettivamente il minimo ed il massimo valore di una funzione $f(P)$ in un insieme A di punti. Sussiste il seguente teorema generale:

IX. *Nelle ipotesi del teorema* II *o in quelle del teorema* IV, *supposta nota la funzione* ω, *per l'integrale* u *della* (1) *sussiste la seguente formola di maggiorazione:*

(17) $$\left\{\begin{array}{l} \max_T |u| \leqq H \max_T \omega \max_T |f| + \dfrac{\max_T \omega}{\min_{S_1} \omega} \max_{S_1} |u|, \\ \left(\max_T |u| \leqq H \max_T \omega \max_T |f| + \dfrac{\max_T \omega}{\min_{S_2} \omega} \max_{S_2} |u|\right), \end{array}\right.$$

ove H *designa un numero non inferiore al massimo in* T *di una funzione* w, *ivi mai negativa, per la quale risulti, sempre in* T,

(18) $$E_\omega[w] \leqq -1.$$

Nelle ipotesi del teorema II o in quelle del teorema IV, esiste intanto (cfr. teorema VIII) una funzione w, mai negativa in T, per la quale riesce verificata la (18). E la dimostrazione del teorema VIII ci dice che: Nelle ipotesi del teorema II si può prendere per w la costante $\frac{1}{\gamma}$, designando $-\gamma$ il massimo in T di $E[\omega]$, e porre pertanto

$$H = -\frac{1}{\max_T E[\omega]};$$

e se inoltre è, in T, $|b_2(x, y)| \neq 0$, si può prendere per w anche la funzione della sola y:

$$w = \frac{y - \min_T y}{\min_T(\omega \,|\, b_2 \,|)}, \quad \text{quando} \quad b_2(x, y) < 0,$$

$$w = \frac{\max_T y - y}{\min_T(\omega \,|\, b_2 \,|)}, \quad \text{quando} \quad b_2(x, y) > 0,$$

e porre, pertanto, in ogni caso,

$$H = \frac{\max_T y - \min_T y}{\min_T(\omega \,|\, b_2 \,|)};$$

nelle ipotesi del teorema IV si può prendere per w la funzione della sola x:

$$w = \frac{1}{\alpha^2}\left[e^{3\alpha\delta} - e^{\alpha(x+2\delta)}\right],$$

ove

$$\delta = \max_T |x|, \quad \alpha \begin{cases} \geqq 2\,\dfrac{\max_T \left| 2a\dfrac{\partial\omega}{\partial x} + b_1\omega \right|}{\min_T(a\omega)}, \\[2ex] \geqq \dfrac{1}{\delta}\log\dfrac{2}{\min_T(a\omega)}, \end{cases}$$

e porre quindi

$$H = \frac{1}{\alpha^2}(e^{3\alpha\delta} - e^{\alpha\delta}).$$

Se, più particolarmente, con $E[\omega] \leqq 0$, riesce $\omega a \geqq 1$, $2a\omega_x + b_1\omega \geqq 0$ si può prendere per w la funzione data dalla (16) e porre quindi

$$H = 2\delta^2 = 2(\max_T |x|)^2.$$

Si ha in tal caso la circostanza notevole che il numero H non dipenda da ω.

Ciò premesso, cominciamo dal maggiorare la funzione $v = \frac{u}{\omega}$, verificante l'equazione:

$$E_\omega[v] = f.$$

Porremo:

$$\max_T |f| = M, \quad \max_{S_1} |v| = N,$$

ed osserviamo che

$$E_\omega[Mw] \leqq -M, \quad E_\omega[-Mw] \geqq M.$$

Si ha:

$$E_\omega[Mw - v + N] = E_\omega[Mw] - f + NE[\omega] \leq -M - f + NE[\omega] \leqq 0,$$

e quindi, poichè

$$\text{su } S_1 \text{ riesce sempre } Mw - v + N \geqq 0,$$

in base al teorema II o al teorema IV possiamo dire che:

(19) $$\text{in } T \text{ si avrà sempre } v \leqq Mw + N.$$

Si ha:

$$E_\omega[-Mw - v - N] = E_\omega[-Mw] - f - NE[\omega] \geqq M - f - NE[\omega] \geqq 0,$$

e quindi, poichè

$$\text{su } S_1 \text{ riesce sempre } -Mw - v - N \leq 0,$$

in base al teorema II o al teorema IV possiamo dire che:

(20) $$\text{in } T \text{ si avrà sempre } -Mw - N \leqq v.$$

Sussistendo la (19 e la (20), si ha dunque sempre in T:

$$|v| \leqq Mw + N \leqq HM + N,$$

cioè

$$\max_T |v| \leqq H \max_T |f| + \max_{S_1} |v|.$$

Ma $u = v\omega$, e quindi

$$\max_T |u| \leqq \max_T \omega \max_T |v|, \quad \max_{S_1} |v| \leqq \frac{\max_{S_1} |u|}{\min_{S_1} \omega},$$

onde segue la (17).

Allo stesso modo, dai teoremi II' e IV' si deduce:

IX'. *Nelle ipotesi del teorema* II' *o in quelle del teorema* IV', *supposta nota la funzione* ω, *per l'integrale* u *della* (1) *sussiste la seguente formola di maggiorazione:*

(17') $$\max_T |u| \leqq H \max_T \omega \max_T |f| + \frac{\max_T \omega}{\min_S \omega} \max_S |u|,$$

ove H *designa un numero non inferiore al massimo in* T *di una funzione* w, *ivi mai negativa, per la quale risulti, sempre in* T, *verificata la* (18).

Offrono interesse i seguenti casi particolari del teorema IX:

X. *Se il dominio* T *è limitato e se*

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{in } \mathrm{T} \textit{ è sempre } \mathrm{c(x, y)} < 0, \\ \textit{su } \mathrm{S_{-y}} \textit{ è sempre } \mathrm{b_2(x, y)} \leqq 0, \end{array}\right. \tag{21}$$

si ha:

$$\max_T |u| \leqq \frac{\max_T |f|}{\min_T |c|} + \max_{S_1} |u|. \tag{22}$$

Ed invero, si può allora porre $\omega(x, y) \equiv 1$ e quindi $E_\omega[w] \equiv E[w]$ e (teorema VIII), per la prima delle (21),

$$w = \frac{1}{\min_T |c|}.$$

XI. *Se il dominio* T *è limitato e se*

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{in } \mathrm{T} \textit{ è sempre } \mathrm{c(x, y)} \leqq 0, \ \mathrm{a(x, y)} > 0, \\ \textit{su } \mathrm{S_{-y}} \textit{ è sempre } \mathrm{b_2(x, y)} \leqq 0, \end{array}\right. \tag{23}$$

si ha:

$$\max_T |u| \leqq \frac{1}{\alpha^2} (e^{3\alpha\delta} - e^{\alpha\delta}) \max_T |f| + \max_{S_1} |u|, \tag{24}$$

ove

$$\delta = \max_T |x|, \quad \alpha \left\{\begin{array}{l} \geqq 2 \dfrac{\max_T |b_1|}{\min_T |a|}, \\ \geqq \dfrac{1}{\delta} \log \dfrac{2}{\min_T |a|}. \end{array}\right. \tag{25}$$

Ed invero, si può allora porre $\omega(x, y) \equiv 1$, e quindi $E_\omega[w] \equiv E[w]$, e (teorema VIII), per le prime delle (23),

$$w = \frac{1}{\alpha^2} (e^{3\alpha\delta} - e^{\alpha(x+2\delta)}),$$

con le posizioni (25).

XII. *Se il dominio* T *è limitato e se*

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{in } \mathrm{T} \textit{ è sempre } \mathrm{c(x, y)} \leqq 0, \ \mathrm{b_1(x, y)} \geqq 0, \ \mathrm{a(x, y)} \geqq 1, \\ \textit{su } \mathrm{S_{-y}} \textit{ è sempre } \mathrm{b_2(x, y)} \leqq 0, \end{array}\right. \tag{26}$$

si ha:

$$\max_T |u| \leqq 2(\max_T |x|)^2 \max_T |f| + \max_{S_1} |u|. \tag{27}$$

Ed invero, si può allora porre $\omega \equiv 1$, $H = 2\delta^2$.

XIII. *Se il dominio* T *è limitato e se*

(28) $$\textit{in } T \textit{ è sempre } b_2(x, y) < 0,$$

si ha:

(29) $$\max_T |u| \leqq e^{\beta(Y-y_0)}\left(\frac{\max_T |f|}{\min_T |\beta b_2 + c|} + \max_{S_1} |u|\right),$$

oppure:

(30) $$\max_T |u| \leqq e^{\beta(Y-y_0)}\left(\frac{Y-y_0}{\min_T |b_2|} \max_T |f| + \max_{S_1} |u|\right),$$

ove

(31) $$y_0 = \min_T y, \quad Y = \max_T y, \quad \beta \begin{cases} > 0, \\ > \dfrac{\max_T c}{\min_T |b_2|}. \end{cases}$$

Ed invero, fatte le posizioni (31), si può porre (teorema VII) $\omega = e^{\beta y}$, e quindi

$$\max_T \omega = e^{\beta Y}, \quad \min_{S_1} \omega = e^{\beta y_0},$$

$$E_\omega[w] = e^{\beta y} a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e^{\beta y} b_1 \frac{\partial w}{\partial x} + e^{\beta y} b_2 \frac{\partial w}{\partial y} + e^{\beta y}(\beta b_2 + c) w,$$

donde (teorema VIII)

$$w = \frac{1}{\min_T |e^{\beta y}(\beta b_2 + c)|}, \quad H \leqq \frac{1}{e^{\beta y_0} \min_T |\beta b_2 + c|},$$

oppure

$$w = \frac{y - y_0}{\min_T |e^{\beta y} b_2|}, \quad H \leqq \frac{Y - y_0}{e^{\beta y_0} \min_T |b_2|} \text{ [1]}.$$

---

[1] Nei casi particolari dei teoremi X, XI, XII il coefficiente c non prende in T valori di segno opposto; nel caso del teorema XIII è il coefficiente b_2 che verifica tale condizione. Offre perciò interesse il seguente esempio in cui, tolta la solita condizione per b_2 di conservarsi non positivo su S_{-y}, i detti coefficienti c e b_2 possono comunque cambiare di segno in T.

Il dominio T *sia contenuto nel dominio rettangolare* R *di punti estremi* $(-\delta, p)$, (δ, q) *e le funzioni* a *e* b_1 *siano continue in* R *con le loro derivate parziali del primo ordine, essendo sempre ivi* $a(x, y) > 0$. *Se, inoltre,*

(a) $$\textit{in } T \textit{ è sempre } c - \frac{b_1^2}{4a} - a\frac{\partial}{\partial x}\frac{b_1}{2a} - b_2 \int_0^x \frac{\partial}{\partial y}\frac{b_1}{2a}\, dx \leqq 0$$

$$\textit{su } S_{-y} \textit{ è sempre } b_2(x, y) \leqq 0,$$

si ha

$$\max_T |u| \leqq \frac{\max_T \beta}{\min_T \beta}\left(\frac{2\delta^2}{\min_T a} \max_T |f| + \max_{S_1} |u|\right),$$

Dai teoremi X, XI e XIII, fattovi $f(x, y) \equiv 0$, se ne deduce che se nel dominio limitato T sono verificate le (21), oppure le (23), oppure la (28) con la $c(x, y) \leqq 0$, il massimo modulo in T di ogni integrale dell'equazione omogenea $E[u] = 0$ è conseguito sulla parte $S_1 = S + S_{-y}$ della frontiera di T. Ma si ha, più in generale, la notevole proposizione:

XIV. *Il dominio* T *sia limitato ed inoltre*

$$\textit{in } T \textit{ sia sempre } c(x, y) \leqq 0,$$
$$\textit{su } S_{-y} \textit{ sia sempre } b_2(x, y) \leqq 0 \ [\textit{su } S_{+y} \textit{ sia sempre } b_2(x, y) \geqq 0].$$

Se è possibile costruire la solita funzione $\omega(x, y)$ *sempre positiva in* T, *per modo che risulti sempre ivi* $E[\omega] < 0$, *il massimo modulo di ogni integrale dell'equazione omogenea*

$$(1_0) \qquad E[u] \equiv a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0,$$

è conseguito sulla parte $S_1 = S + S_{+y}$ (*sulla parte* $S_2 = S + S_{-y}$) *della frontiera di* T.

Diciamo invero (cfr. la dimostrazione del teorema IX) N il massimo modulo di u su S_1. Si ha

$$E[-u + N] = Nc \leqq 0, \quad E[-u - N] = -Nc \geqq 0,$$

---

ove

$$\beta = e^{-\int_0^x \frac{b_1}{2a}dx}.$$

Ed invero, se si pone

$$\omega = \frac{\beta}{\min_T a \min_T \beta},$$

riesce $a\omega \geqq 1$, $2a\omega_x + b_1\omega = 0$, $E[\omega] \leq 0$, e si può (quindi) porre $H = 2\delta^2$.

La condizione (a) riesce soddisfatta, se, in particolare, il rapporto $b_1/2a$ è una costante k il cui quadrato non è mai superato in T da c. Adunque, per l'integrale u dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2k\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f,$$

se

$$k \text{ è costante},$$
$$\text{in } T \text{ è sempre } c \leq k^2, \quad \text{su } S_{-y} \text{ è sempre } b_2(x, y) \leq 0,$$

si ha la seguente semplice formola di maggiorazione

$$\max_T |u| \leqq e^{2|k|\delta}(2\delta^2 \max_T |f| + \max_{S_1} |u|).$$

(continua)

e poichè su S_1 riesce sempre $-u+N \geqq 0$, $-u-N \leqq 0$, tali limitazioni dovranno sussistere (teorema II) in tutto T; si avrà cioè sempre ivi $|u| \leqq N$.

Se si fa l'ipotesi che in T sia identicamente $c(x, y)=0$, si può dire, di più, che il minimo ed il massimo valore di u sono conseguiti nella parte S_1 (nella parte S_2) della frontiera di T. Si ha cioè il teorema:

XV. *Il dominio* T *sia limitato ed inoltre*

su $\mathrm{S}_{-\mathrm{y}}$ *sia sempre* $\mathrm{b}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leqq 0$ [*su* $\mathrm{S}_{+\mathrm{y}}$ *sia sempre* $\mathrm{b}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \geqq 0$].

Se è possibile costruire la solita funzione $\omega(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *sempre positiva in* T, *per modo che risulti sempre ivi*

$$a \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+b_1 \frac{\partial \omega}{\partial x}+b_2 \frac{\partial \omega}{\partial y}<0,$$

in particolare, dunque (*teoremi* III *e* VIII) *se è sempre, in* T, $\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{y})>0$, *oppure* $\mathrm{b}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y})<0$, $[b_2(\mathrm{x}, \mathrm{y})>0]$, *il minimo ed il massimo valore in* T *di ogni integrale dell'equazione omogenea*

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b_1 \frac{\partial u}{\partial x}+b_2 \frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{1_{00}}$$

sono conseguiti sulla parte $\mathrm{S}_1=\mathrm{S}+\mathrm{S}_{+\mathrm{y}}$ (*sulla parte* $\mathrm{S}_2=\mathrm{S}+\mathrm{S}_{-\mathrm{y}}$) *della frontiera di* T.

Designamo, invero, con N' e N'', rispettivamente, il minimo ed il massimo valore di u su S_1. Si ha:

$$E[u-N']=0, \quad E[N''-u]=0,$$

e quindi (teorema II) poichè $u-N'$ e $N''-u$ sono positive o nulle su S_1, tali si conserveranno in tutto T.

Nel caso particolarissimo dell'equazione del calore:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

Eugenio Elia Levi (¹) aveva già osservato, seguendo tutt'altra via, che, detta Y la massima ordinata dei punti di T, il minimo ed il massimo valore in T di una soluzione dell'equazione non possono essere conseguiti in punti interni agli eventuali segmenti che la retta $y=Y$ ha a comune con la frontiera di T.

(¹) Eugenio Elia Levi, *Sull'equazione del calore* [« Annali di Matematica », tomo XIV della serie III (1908), pp. 187-265].

Osserveremo infine che dal teorema IX′, nelle ipotesi del teorema II′ o in quelle del teorema IV′, si deducono, con procedimenti identici, teoremi analoghi ai teoremi X, XI, XII, XIV e XV. Negli enunciati, le parti S_1 e S_2 della frontiera di T devono essere sostituite con la parte S in quelle contenuta.

3. **Problemi al contorno per l'equazione (1).** — Nelle ipotesi del teorema II o in quelle del teorema IV la (17) dice che una soluzione dell'equazione omogenea (1_0) identicamente nulla sulla parte S_1 (sulla parte S_2) della frontiera di T riesce identicamente nulla in tutto T e si ha pertanto il ***Teorema d'unicità:***

XVI. *Nelle ipotesi del teorema* II *o in quelle del teorema* IV, *una soluzione dell'equazione:*

(1) $$E[u]=f,$$

riesce perfettamente determinata in T *quando ad essa si prescrivano i valori sulla parte* S_1 (*sulla parte* S_2) *della frontiera di* T.

Si ha pure, ovviamente:

XVI′. *Nelle ipotesi del teorema* II′ *o in quelle del teorema* IV′, *una soluzione dell'equazione* (1) *riesce perfettamente determinata in* T, *quando ad essa si prescrivano i valori sulla parte* S *della frontiera di* T.

Di grande interesse, specialmente nei riguardi dell'applicazione ai problemi di propagazione o di diffusione, è la considerazione dei problemi al contorno per l'equazione (1) nel caso che il dominio T sia illimitato. I risultati del numero precedente consentono assai facilmente di conseguire i teoremi che andiamo ad enunciare e a dimostrare, la cui importanza nelle indicate applicazioni sarà messa in luce con qualche classico esempio particolare. Un primo teorema è il seguente:

XVII. *Il dominio* T *sia illimitato, ed inoltre*

$$\textit{in } T \textit{ sia sempre } c(x, y) \leqq 0,$$

$$\textit{su } S_{-y} \textit{ sia sempre } b_2(x, y) \leqq 0 \ [\textit{su } S_{+y} \textit{ sia sempre } b_2(x, y) \geqq 0],$$

mentre ad ogni dominio limitato T′, *contenuto in* T, *sia sempre possibile far corrispondere la solita funzione* $\omega(x, y)$ *sempre positiva in* T′, *per la quale riesca sempre ivi* $E[\omega]<0$. *Le funzioni continue* $\varphi(P)$ *e* $\Phi(P)$, *del punto* $P(x, y)$, *siano assegnate e definite, la prima sulla parte* S_1 (*sulla parte* S_2) *della frontiera di* T, *la seconda in* T, *e, quando sia illimitata la parte* S_1 (*la parte* S_2) *della frontiera di* T *si abbia:*

$$\lim_{P\to\infty}[\varphi(P)-\Phi(P)](\text{su } S_1)=0, \quad \left(\lim_{P\to\infty}[\varphi(P)-\Phi(P)](\text{su } S_2)=0\right).$$

Allora, una soluzione u *dell' equazione* (1) *riesce completamente determinata in* T, *quando ad essa si prescriva di verificare le condizioni:*

$$(32)\qquad \begin{cases} u(P) \text{ su } S_1 = \varphi(P)\,[u(P) \text{ su } S_2 = \varphi(P)], \\ \lim\limits_{P\to\infty} [u(P) - \Phi(P)] \ (\text{su } T) = 0. \end{cases}$$

Il teorema sarà dimostrato, se faremo vedere che una soluzione u dell'equazione omogenea $E[u]=0$ che verifichi le condizioni (32) per $\varphi(P) \equiv \Phi(P) \equiv 0$, riesce identicamente nulla in T. Sia Q un punto arbitrariamente fissato di $T - S_1$ e diciamo ε un numero positivo arbitrariamente scelto e T_R quel dominio limitato comune a T e ad un dominio quadrato di centro nell' origine O delle coordinate e di semidimensione R talmente grande che contenga Q nell' interno e si abbia inoltre, per ogni punto P di T,

$$|u(P)| < \varepsilon, \text{ quando una delle } |x|, |y| \text{ è } \geqq R.$$

In questo dominio limitato T_R sono verificate tutte le ipotesi del teorema XIV, ed inoltre nella parte S_1 della sua frontiera si ha sempre $|u(P)| < \varepsilon$; ne segue, in base al teorema ora citato, $|u(Q)| < \varepsilon$.

Notevole corollario del teorema XVII. — *Il dominio* T *sia, in particolare, il semipiano* $y \leqq h$ $(y \geqq h)$, *ed inoltre*

$$\textit{in } T \textit{ sia sempre } c(x, y) \leqq 0,$$
$$\textit{per ogni valore di } x \textit{ sia } b_2(x, h) \leqq 0, \ [b_2(x, h) \geqq 0],$$

mentre ad ogni dominio limitato T', *contenuto in* T, *sia sempre possibile far corrispondere la solita funzione* $\omega(x, y)$ *sempre positiva in* T', *per la quale riesca sempre ivi* $E[\omega] < 0$. *Comunque si assegni in* T *la funzione continua* $\Phi(P)$, *una soluzione dell' equazione* (1) *riesce completamente determinata in* T *quando ad essa si prescriva la condizione:*

$$\lim_{P\to\infty} [u(P) - \Phi(P)] \ (\text{su } T) = 0.$$

Pertanto: Se $c \equiv 0$, *ogni soluzione dell' equazione omogenea* (1_0) *che non sia nel semipiano* T *una costante, non può mai, nel mentre il punto* P *si allontana su* T *a distanza infinita, tendere ad un limite determinato e finito. Ciò avverrà, per esempio, in ogni semipiano* $y \leqq h$, *per l' equazione del calore:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

L' aggiunta di ulteriori ipotesi sul dominio illimitato T e sui coefficienti della (1), consente di assicurare l' unicità dell' integrale della (1) verificante condizioni assai meno restrittive delle (32). Per addivenire ad enunciati brevi introdurremo la notazione seguente: Se per l'insieme illimitato A, di punti del piano (x, y) si ha $\max_A y = +\infty$ ($\min_A y = -\infty$), se cioè A si estende a distanza infinita nella direzione e nel verso dell'asse y (dell'asse $-y$), per ogni assegnata quantità Y denoteremo con $A(Y-)$ [con $A(Y+)$] quella parte di A luogo dei punti la cui ordinata non è superiore a Y (non è inferiore a Y). Evidentemente, $A(Y-)$ e $A(Y+)$ esistono sempre se Y è di modulo sufficientemente grande. Ciò posto, si può dimostrare il teorema:

XVIII. *Se alle ipotesi del teorema precedente si aggiungono le seguenti:*

$$\max_T y = +\infty, \quad (\min_T y = -\infty),$$

il coefficiente $b_2(x, y)$, *al tendere di* y *verso* $+\infty$ (*verso* $-\infty$) *riesce definitivamente non positivo (non negativo) e, quando la parte* S_1 (*la parte* S_2) *della frontiera di* T *sia illimitata, riesca, per ogni* Y,

$$\lim_{P\to\infty}[\varphi(P)-\Phi(P)]\,[\text{su } S_1(Y-)] = 0, \quad \left(\lim_{P\to\infty}[\varphi(P)-\Phi(P)]\,[\text{su } S_2(Y+)] = 0\right),$$

allora, una soluzione u *dell'equazione* (1) *risulta completamente determinata quando ad essa si prescrive di verificare, per ogni* Y, *le condizioni:*

$$(33)\quad \begin{cases} u(P) \text{ su } S_1 = \varphi(P) \;\; [u(P) \text{ su } S_2 = \varphi(P)], \\ \lim\limits_{P\to\infty}[u(P)-\Phi(P)]\,[\text{su } T(Y-)] = 0, \quad \left(\lim\limits_{P\to\infty}[u(P)-\Phi(P)]\,[\text{su } T(Y+)] = 0\right). \end{cases}$$

Ed invero, se, per la soluzione u dell'equazione omogenea (1_0), riescono, per ogni Y, verificate le (33) supponendovi $\varphi(P) \equiv \Phi(P) \equiv 0$, dico che, comunque si scelga il punto $Q(x_0, y_0)$ di $T - S_1$, si ha $u(Q) = 0$. Fissato, infatti, un valore di Y talmente grande da risultare $b_2(x, Y) \leq 0$, $Y > y_0$, per il dominio $T(Y-)$ vengono a verificarsi tutte le ipotesi del teorema XVII ed il punto Q appartiene a quel dominio.

Può darsi che, pur estendendosi illimitatamente il dominio T nella direzione e nel verso dell'asse y (dell'asse $-y$) riesca, per ogni Y, sempre limitato il dominio $T(Y-)$ [il dominio $T(Y+)$]; allora nelle ipotesi del teorema precedente, fra le quali, come assicura il teorema XVI, si può sopprimere quella riguardante il segno del coefficiente $c(x, y)$, si può evidentemente dire che la soluzione u della (1) risulta completamente determinata col prescriverle soltanto la prima delle due condizioni (33). Per altro, riuscendo allora priva di significato la seconda di dette condizioni, possiamo ritenere che la circostanza ora indicata sia pur essa implicitamente enunciata nel teorema precedente.

Dal teorema XVII si deduce il seguente:

XIX. *Il dominio* T *sia illimitato e si verifichino, per il resto, tutte le ipotesi del teorema* II *o tutte quelle del teorema* IV. *Le funzioni* $\varphi(\mathrm{P})$ *e* $\Phi(\mathrm{P})$ *siano assegnate e definite, la prima, sulla parte* S_1 (*sulla parte* S_2) *della frontiera di* T, *la seconda in* T *e, quando sia illimitata la parte* S_1 (*la parte* S_2) *della frontiera di* T, *si abbia:*

$$\lim_{P\to\infty}\frac{\varphi(P)-\Phi(P)}{\omega(P)}\,(\text{su } S_1)=0,\quad \left[\lim_{P\to\infty}\frac{\varphi(P)-\Phi(P)}{\omega(P)}\,(\text{su } S_2)=0\right].$$

Allora una soluzione u *della* (1) *riesce completamente determinata quando ad essa si prescrive di verificare le condizioni:*

$$\left\{\begin{aligned} & u(P) \text{ su } S_1=\varphi(P),\quad [u(P) \text{ su } S_2=\varphi(P)], \\ & \lim_{P\to\infty}\frac{u(P)-\Phi(P)}{\omega(P)}\,(\text{su } T)=0. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Ed invero, dico che una soluzione u dell'equazione omogenea (1_0) che verifichi le (34), suppostovi $\varphi(P)\equiv\Phi(P)\equiv 0$, riesce identicamente nulla in T. La funzione $v(P)=\dfrac{u(P)}{\omega(P)}$ è soluzione dell'equazione

$$\omega a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left(2a\frac{\partial\omega}{\partial x}+b_1\omega\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\omega b_2\frac{\partial v}{\partial y}+E[\omega]v=0,$$

alla quale, appunto, nelle ipotesi del teorema II o in quelle del teorema IV si applica il teorema XVII. Ma $v(P)$ è identicamente nulla su S_1 ed è infinitesima all'infinito, e quindi $v(P)\equiv 0$, e pertanto $u(P)\equiv 0$.

Con dimostrazione analoga si stabilisce il seguente teorema:

XX. *Sia* $\max_{\mathrm{T}}\mathrm{y}=+\infty$ $(\min_{\mathrm{T}}\mathrm{y}=-\infty)$ *e il coefficiente* $\mathrm{b}_2(\mathrm{x},\mathrm{y})$, *al tendere di* y *verso* $+\infty$ (*verso* $-\infty$) *riesca definitivamenie non positivo (non negativo). Se, per ogni* Y, *il dominio* $\mathrm{T}(\mathrm{Y}-)$ [*il dominio* $\mathrm{T}(\mathrm{Y}+)$] *verifica, pur risultando illimitato, tutte le rimanenti ipotesi del teorema* II *o tutte quelle del teorema* IV, *detta* $\omega(\mathrm{Y},\mathrm{P})$ *la solita funzione relativa al dominio* $\mathrm{T}(\mathrm{Y}-)$ [*a* $\mathrm{T}(\mathrm{Y}+)$], *per la quale riesce ivi* $\mathrm{E}[\omega(\mathrm{Y},\mathrm{P})]\leq 0$, *supposto che, quando la parte* S_1 (*la parte* S_2) *della frontiera di* T *sia illimitata, si abbia, per ogni* Y,

$$\lim_{P\to\infty}\frac{\varphi(P)-\Phi(P)}{\omega(Y,P)}\,[\text{su } S_1(Y-)]=0,\quad \left(\lim_{P\to\infty}\frac{\varphi(P)-\Phi(P)}{\omega(Y,P)}\,[\text{su } S_2(Y+)]=0\right),$$

allora, una soluzione u *della* (1) *risulta completamente determinata quando* *ad essa si prescrive di verificare, per ogni* Y, *le condizioni:*

$$
(35)\quad \begin{cases} u(P) \text{ su } S_1 = \varphi(P), \quad [u(P) \text{ su } S_2 = \varphi(P)], \\ \lim\limits_{P\to\infty} \dfrac{u(P)-\Phi(P)}{\omega(Y,P)} [\text{su } T(Y-)] = 0, \quad \left(\lim\limits_{P\to\infty} \dfrac{u(P)-\Phi(P)}{\omega(Y,P)} [\text{su } T(Y+)] = 0\right). \end{cases}
$$

Tralasciamo di enunciare, ciò che sarebbe ben facile, i teoremi che dovremmo designare con i numeri XVII′, XVIII′, XIX′, XX′ i quali sussistono nell'ulteriore ipotesi che, su S_{-y} sia sempre $b_2 \leqq 0$ e su S_{+y} sia sempre $b_2 \geqq 0$, oppure che si verifichino tali diseguaglianze definitivamente, al tendere di $|y|$ verso infinito.

4. **Applicazione al problema della propagazione del calore lungo una sbarra conduttrice.** — Una sbarra sottile filiforme abbia l'arco x e, per la sostanza di cui essa è costituita, rappresentino:

$k(x)$ e $h(x)$ i coefficienti di conducibilità termica interna ed esterna;

$\delta(x)$ la densità;

$\mu(x)$ il calore specifico;

$q(x)$ e $l(x)$ l'area e il perimetro della sezione della sbarra, d'ascissa curvilinea x.

Detto y il tempo, la temperatura $u(x, y)$ della sbarra nella sua sezione x, al tempo y, riesce soluzione dell'equazione totalmente parabolica del second'ordine:

$$
(37)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(qk\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q\delta\mu\frac{\partial u}{\partial y} - hlu = hl\tau(x, y),
$$

ove $\tau(x, y)$ rappresenta la temperatura nella sezione x e al tempo y dell'involucro. Si pone il problema:

Supposta la sbarra sprovvista di punti terminali, cioè l'ascissa x *dei suoi punti variabile, da* $-\infty$ *a* $+\infty$, *nota la temperatura* U(x) *della sua sezione* x *al tempo* y = 0, *calcolare la temperatura* u(x, y) *negli istanti successivi.*

Manca, almeno per quanto mi consta, la dimostrazione, fondata sulle più evidenti circostanze fisiche, che un tale problema sia analiticamente determinato dalla (37) e dalle poste condizioni iniziali [1]. Noi, sulla base dei risultati

[1] Nelle dimostrazioni che si trovano nei trattati di Fisica-matematica del teorema d'unicità per i problemi di propagazione del calore è, in generale, essenziale l'ipotesi che il corpo conduttore sia limitato.

conseguiti in ciò che precede, possiamo assai semplicemente dimostrare al riguardo il seguente teorema:

XXI. *Se, durante ogni intervallo di tempo* (0, Y), *riesce, al variare di* x *da* $-\infty$ *a* $+\infty$, *limitata la funzione* τ(x, y), *se, del pari, riesce limitata la funzione* U(x), *e se esistono due costanti positive* α *e* β, *la prima essendo minore d'uno, tali che, al tendere di* x *all'infinito, risulti definitivamente:*

$$\frac{|x|^\alpha}{q(x)k(x)}\left|\int_0^x (q\delta\mu + hl)dx\right| > \beta, \tag{38}$$

la temperatura u(x, y) *della sbarra in ogni sua sezione* x *è analiticamente ben determinata in ogni istante dall'equazione* (37), *se ne è dato il valore* U(x) *all'istante iniziale* y = 0.

Riesce fisicamente evidente che, in ogni intervallo finito di tempo $(0, Y)$, la temperatura $u(x, y)$ deve essere una funzione di x e di y essa pure limitata; e bisogna pertanto dimostrare che una soluzione $u(x, y)$ della (37) è completamente determinata nel semipiano positivo T, cioè per $y \geqq 0$, quando le si prescrivano le condizioni:

a) $u(x, 0) = U(x)$, per ogni valore di x;

b) per ogni Y, la $u(x, y)$ è funzione limitata nella striscia $T(Y-)$, cioè per $0 \leqq y \leqq Y$.

Se faremo vedere che esiste una soluzione $\omega(x, y)$ dell'equazione omogenea

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(qk\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q\delta\mu\frac{\partial u}{\partial y} - hlu = 0, \tag{37_0}$$

sempre positiva in T e tale che, quando il punto (x, y) si allontana, su T, a distanza infinita, tende all'infinito, l'unicità della $u(x, y)$ risulta senz'altro dal teorema XX. Si ha invero, allora, per ogni Y,

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{u(x, y)}{\omega(x, y)} \,[\text{su } T(Y-)] = 0.$$

Se poniamo

$$\omega(x, y) = e^{\nu} X(x), \tag{39}$$

si ha per $X(x)$ l'equazione

$$\frac{d}{dx}\left(qk\frac{dX}{dx}\right) - (q\delta\mu + hl)X = 0. \tag{40}$$

Se prendiamo per $X(x)$ l'integrale di quest'equazione che verifica le condizioni iniziali

$$X(0) = 1, \quad X'(0) = 0,$$

possiamo dire che esso è sempre decrescente per x crescente da $-\infty$ a zero, e sempre crescente per x crescente da zero a $+\infty$, che si ha cioè

$$X(x) \geqq 1, \quad X'(x) < 0 \text{ per } x < 0, \quad X'(x) > 0 \text{ per } x > 0.$$

Dico che:

$$\lim_{x \to \infty} X(x) = +\infty. \tag{41}$$

Dalla (40) si trae

$$\frac{dX}{dx} = \frac{1}{qk}\int_0^x (q\delta\mu + hl) X dx,$$

e quindi

$$\left|\frac{dX}{dx}\right| > \frac{1}{qk}\left|\int_0^x (q\delta\mu + hl) dx\right|,$$

e pertanto, quando x è abbastanza grande (poniamo per $|x| \geqq H$), in virtù della (38),

$$\left|\frac{dX}{dx}\right| > \frac{\beta}{|x|^\alpha},$$

donde, per essere, quando $|x| \geqq H$,

$$X(x) = 1 + \int_0^{\pm H} \frac{dX}{dx} dx + \int_{\pm H}^{x} \frac{dX}{dx} dx > 1 + \int_0^{\pm H} \frac{dX}{dx} dx + \frac{\beta}{1-\alpha}(|x|^{1-\alpha} - H^{1-\alpha}),$$

segue la (41). Per la soluzione $\omega(x, y)$ della (37) data dalla (39), si ha dunque sempre $\omega(x, y) > 0$ e

$$\lim_{(x,y) \to \infty} \omega(x, y) \,(\text{su } T) = +\infty.$$

Se la sbarra è omogenea e di sezione e calore specifico costanti e se il coefficiente di conducibilità termica esterna è nullo, scelte opportunamente le unità di misura, la (37) fornisce:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{37_{00}}$$

Alla stessa equazione verifica la temperatura di un corpo conduttore omogeneo di conducibilità termica e di calore specifico costanti, che si estende all'infinito in tutte le direzioni, nell'ipotesi che detta temperatura possa ritenersi funzione, oltre che del tempo y, dell'unica coordinata x.

Una soluzione della (37_{00}) è

$$\omega(x, y) = e^y \cosh x,$$

e pertanto, il teorema XX ci assicura che una soluzione di quest'equazione è completamente determinata nel semipiano positivo, col prescriverle le condizioni:

a) $u(x, 0) = U(x)$, per ogni valore di x;

b') per ogni $Y \geqq 0$, si ha $\lim\limits_{(x, y) \to \infty} \dfrac{u(x, y)}{\cosh x}$ [su $T(Y-)$] $= 0$.

Deve, necessariamente, risultare allora

$$\lim_{x \to \infty} \frac{U(x)}{\cosh x} = 0,$$

e pertanto si verifica immediatamente che la formola di Poisson:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(\xi)}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} d\xi, \tag{42}$$

fornisce la soluzione u della (37_{00}) verificante la condizione *a)* e *b')*.

Nel *Cours d'Analyse mathématique* del Goursat trovasi conseguita, con ben altri procedimenti, il risultato che una soluzione della (37_{00}) riesce completamente determinata nel semipiano positivo $y \geqq 0$, e data dalla (42), col prescriverle la condizione *a)* e, in luogo della *b')*, la seguente:

b'') per ogni numero positivo K si deve avere:

$$\lim_{(x, y) \to \infty} \frac{u(x, y)}{e^{Kx^2}} (\text{su } T) = \lim_{(x, y) \to \infty} \left[\frac{1}{e^{Kx^2}} \frac{\partial u}{\partial x}\right] (\text{su } T) = 0.$$

La nostra condizione *b')* non prende in veruna considerazione il comportamento all'infinito della derivata $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, ciò che ci ha consentito, per esempio, di pervenire al teorema XXI di significato fisico.

Un secondo problema che si pone per la propagazione del calore lungo una sbarra sottile rettilinea, per il quale si può dimostrare che le condizioni prescritte alla temperatura valgono a determinarla analiticamente, è il seguente:

Supposta la sbarra conduttrice dotata di un solo punto terminale O, *nota la temperatura* U(x) *nella sua sezione* x *al tempo* y = 0 *e la temperatura* V(y) *nella sua sezione terminale in ogni istante* y, *calcolare la temperatura* u(x, y) *nella sezione* x, *al tempo* y. Si dimostra invero il teorema:

XXII. *Comunque si assegni la funzione continua* V(y), *purchè al tempo* y = 0 *coincida col valore della* U(x) *nella sezione terminale della sbarra, se sono verificate tutte le ipotesi del teorema* XXI, *la tempera-*

tura u(x, y) *della sbarra, in ogni sua sezione* x, *è analiticamente ben determinata in ogni istante se ne è dato il valore* U(x) *nell'istante iniziale* y = 0 *e se è data, in funzione del tempo, la temperatura* V(y) *della sezione terminale.*

Riesce, invero, fisicamente evidente che, in ogni intervallo finito di tempo $(0, Y)$ la temperatura $u(x, y)$ deve essere una funzione di x e di y, essa pure limitata; pertanto, supposto che la sbarra si estenda sull'asse x, dall'origine O verso $+\infty$, bisogna dimostrare che una soluzione $u(x, y)$ della (37) è completamente determinata nel primo quadrante T del piano (x, y), cioè per $x \geqq 0$ e $y \geqq 0$, quando le si prescrivano le condizioni:

a') $u(x, 0) = U(x)$, $u(0, y) = V(y)$, per $x \geqq 0$ e per $y \geqq 0$;

b) per ogni $Y > 0$, la $u(x, y)$ è funzione limitata nella striscia $T(Y-)$.

Ciò risulta, senz'altro, dal teorema XX, in virtù dell'esistenza, dianzi stabilita. di una soluzione $\omega(x, y)$ dell'equazione omogenea (37_0) sempre positiva in T, infinitamente grande all'infinito, su T.

Nel caso particolare dell'equazione (37_{00}) possiamo dire che una sua soluzione riesce completamente determinata nel primo quadrante $T(x \geqq 0, y \geqq 0)$, col prescriverle le condizioni:

a') $u(x, 0) = U(x)$, $u(0, y) = V(y)$, per $x \geqq 0$ e per $y \geqq 0$;

b') per ogni $Y > 0$, riesce $\lim\limits_{(x, y) \to \infty} \dfrac{u(x, y)}{\cosh x}$ [su $T(Y-)$] $= 0$.

Facciamo, in tal caso, l'ulteriore ipotesi che sia $U(x) \equiv 0$. Supposto allora $V(0) = 0$, si verifica immediatamente che la nota espressione:

$$u(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{V(\eta)}{\sqrt{(y-\eta)^3}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} d\eta, \tag{43}$$

soddisfa le condizioni *a')* e *b')*; si trova anzi, per essere

$$u(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{y}}}^{+\infty} V\left(y - \frac{x^2}{4t^2}\right) e^{-t^2} dt,$$

che, per ogni Y, $\lim\limits_{(x, y) \to \infty} u(x, y)$ [su $T(Y-)$] $= 0$, e si ha dunque il risultato:

Ogni soluzione dell'equazione (37_{00}) *nella striscia* $T(Y-)$ $(x \geqq 0, 0 \leqq y \leqq Y)$, *identicamente nulla per* $y = 0$ *e tale che*

$$\lim_{(x, y) \to \infty} \frac{u(x, y)}{\cosh x} [\text{su } T(Y-)] = 0,$$

riesce ***infinitesima*** *all'infinito su* $T(Y-)$.

Cade qui a proposito il notare un'altra utile espressione della soluzione $u(x, y)$ della (37_{00}) verificante le condizioni $a')$ e $b')$ nell'ipotesi $U(x) \equiv 0$ e che la $V(y)$ sia dotata di derivata continua. Se si pone

$$u(x, y) = \int_0^y \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} d\eta,$$

si ha una soluzione della (37_{00}), nel quadrante T, verificante le condizioni $b')$ nonchè l'altra $u(x, 0) \equiv 0$. Volendo che risulti altresì $u(0, y) = V(y)$, si pone per $\varphi(\eta)$ l'equazione di ABEL:

$$\int_0^y \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = V(\eta),$$

e quindi

$$\varphi(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{V'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta$$

donde

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} d\eta \int_0^\eta \frac{V'(s)}{\sqrt{\eta - s}} ds = \frac{1}{\pi} \int_0^y V'(s) ds \int_s^y \frac{e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}\sqrt{\eta - s}} d\eta.$$

5. **Equazioni del primo ordine.** — Se si suppone $a(x, y) \equiv 0$, la (1) si riduce alla seguente equazione del primo ordine

$$E[u] \equiv b_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = f(x, y); \tag{43}$$

ebbene, ripetendo su questa l'analisi svolta in ciò che precede per l'equazione (1) si conseguono risultati di una natura tutt'affatto nuova che andiamo rapidamente a stabilire.

Considereremo ora anche le parti S_{-x} e S_{+x} della frontiera del dominio T che si definiscono come le parti S_{-y} e S_{+y}, scambiando x con y. Designeremo ora con S la parte della frontiera di T costituita dai punti che non appartengono a $S_{-x} + S_{+x} + S_{-y} + S_{+y}$ e per dare agli enunciati che seguono forma più snella, converremo di indicare con ξ l'asse x o l'asse $-x$ e quindi con S_ξ la parte S_{+x} o la parte S_{-x} della frontiera di T, con η l'asse y o l'asse $-y$ e con S_η la parte S_{+y} o la parte S_{-y} della frontiera di T. Indicheremo poi con $S_{\xi\eta}$ l'insieme degli eventuali punti della frontiera di T, ciascuno dei quali è simultaneamente punto terminale di un segmento di S_ξ e di un segmento di S_η.

Nella figura 3 i segmenti *CE, RP*, privati dei loro punti terminali, costituiscono la parte S_{-x} della frontiera di T, i segmenti *SL, UV, KT*, privati dei

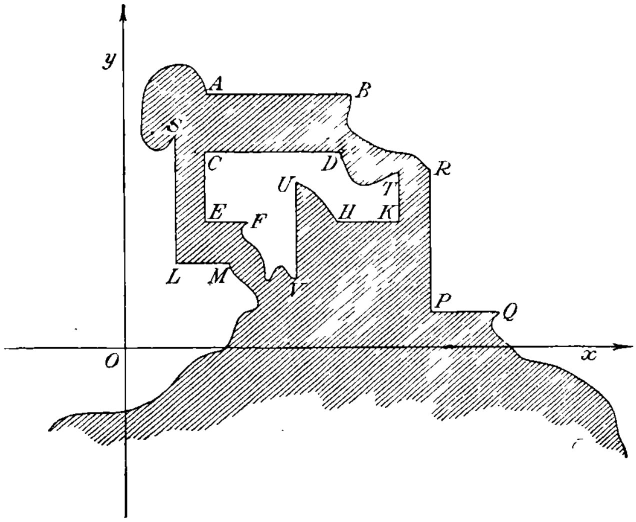


Fig. 3

loro punti terminali, la parte S_{+x}, i segmenti *AB, EF, HK, PQ*, privati dei loro punti terminali, la parte S_{-y}, i segmenti *CD, LM*, privati dei loro punti terminali, la parte S_{+y}, i punti L e K la parte $S_{(+x)(-y)}$, il punto C la parte $S_{(-x)(+y)}$, il punto E la parte $S_{(-x)(-y)}$.

Una funzione $u(x, y)$ sarà detta *integrale* o *soluzione* della (1), in T, se:

1°) è continua in T;

2°) nei punti interni a T e nei punti di $S_{-x} + S_{+x} + S_{-y} + S_{+y} + S_{(-x)(-y)} + S_{(-x)(+y)} + S_{(+x)(-y)} + S_{(+x)(+y)}$ è dotata delle derivate parziali

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y},$$

finite e continue, verificanti l'equazione (43).

Sussiste il teorema:

XXIII. *Se è sempre nel dominio* T,

$$c(x, y) < 0,$$

ed inoltre $b_1(x, y)$ *su* S_ξ *ha il segno di* ξ *o è nullo e* $b_2(x, y)$ *su* S_η *ha il segno di* η *o è nullo, ogni soluzione della* (43) *non può nè in un punto interno a* T *nè in un punto di* $S_\xi + S_\eta + S_{\xi\eta}$ *avere un minimo negativo se*

$f(x, y) \leqq 0$, *un massimo positivo se* $f(x, y) \geqq 0$. *E, supposto* T *limitato, ne segue che, se, ovunque in* T, *è* $f(x, y) \leqq 0$, *ogni integrale della* (43) *sempre positivo o nullo su* $S + S_{-\xi} + S_{-\eta} - S_{\xi\eta}$ *si conserva tale in tutto* T*; se, ovunque in* T, *è* $f(x, y) \geqq 0$, *ogni integrale della* (43) *sempre negativo o nullo su* $S + S_{-\xi} + S_{-\eta} - S_{\xi\eta}$ *si conserva tale in tutto* T.

Ed invero, se nel punto $P_0(x_0, y_0)$, interno a T, si verifica per la u un minimo od un massimo negativo oppure un minimo od un massimo positivo, si ha:

$$E[u]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} > 0, \quad \text{oppure} \quad E[u]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} < 0. \tag{44}$$

Se il punto P_0 è su S_ξ oppure su S_η, ed in esso si verifica un minimo, riesce $u_y(x_0, y_0) = 0$ e $u_x(x_0, y_0)$ del segno di ξ o nullo, oppure $u_x(x_0, y_0) = 0$ e $u_y(x_0, y_0)$ del segno di η o nullo, e quindi se $u(x_0, y_0) < 0$, sussiste sempre la prima delle (44).

Se il punto P_0 è su $S_{\xi\eta}$, ed in esso si verifica un minimo, riesce $u_x(x_0, y_0)$ del segno di ξ o nullo, e $u_y(x_0, y_0)$ del segno di η o nullo, e quindi se $u(x_0, y_0) < 0$, si ha di nuovo la prima delle (44).

Se il punto P_0 è su S_ξ oppure su S_η, ed in esso si verifica un massimo, riesce $u_y(x_0, y_0) = 0$ e $u_x(x_0, y_0)$ del segno contrario di ξ o nullo, oppure $u_x(x_0, y_0) = 0$ e $u_y(x_0, y_0)$ del segno contrario di η o nullo, e quindi se $u(x_0, y_0) > 0$, sussiste sempre la seconda delle (44).

Se il punto P_0 è su $S_{\xi\eta}$, ed in esso si verifica un massimo, riesce $u_x(x_0, y_0)$ del segno contrario di ξ o nullo, e $u_y(x_0, y_0)$ del segno contrario di η o nullo, e quindi se $u(x_0, y_0) > 0$, si ha di nuovo la seconda delle (44).

Il teorema dimostrato è ricco di immediati corollarii che, nonostante siano degni d'esser notati, vogliamo, tuttavia, tralasciare di enunciare sistematicamente per amore di brevità. Un'eccezione faremo soltanto per la seguente curiosa proposizione:

XXIV. *Sia* T *il dominio rettangolare determinato dalle limitazioni:*

$$x' \leq x \leqq x'', \quad y' \leqq y \leq y'';$$

ebbene, se è sempre in T

$$c(x, y) < 0, \quad [c(x, y) > 0],$$

e

$$b_1(x', y) \geqq 0, \quad b_1(x'', y) \leqq 0, \quad b_2(x, y') \geqq 0, \quad b_2(x, y'') \leqq 0,$$
$$[b_1(x', y) \leqq 0, \quad b_1(x'', y) \geqq 0, \quad b_2(x, y') \leqq 0, \quad b_2(x, y'') \geqq 0],$$

l'unica soluzione, in T, *dell'equazione lineare omogenea del prim'ordine:*

$$b_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0, \tag{43_0}$$

è lo zero. Pertanto, l'assegnare in T, *per una funzione* u *finita e continua con le sue derivate prime, il valore di* E[u], *determina completamente la funzione.*

Ed invero, in forza del teorema precedente, ogni soluzione $u(x, y)$ della (43_0) non può avere in T nè un minimo negativo, nè un massimo positivo, sarà dunque sempre, in T, $u(x, y) \geqq 0$ e $u(x, y) \leqq 0$, donde $u(x, y) \equiv 0$.

L'esempio dell'equazione

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0,$$

che, nel rettangolo di punti estremi $(-1, -1)$ e $(+1, +1)$, possiede la soluzione $x^2 + y^2$, suscita appunto l'impressione di curiosità per la proposizione enunciata.

Come dal teorema I del n.° 1 segue il teorema II dello stesso numero, così qui dal teorema XXIII si deduce il seguente:

XXV. *Il dominio* T *sia limitato ed inoltre* $b_1(x, y)$, *su* S_ξ, *abbia il segno di* ξ *o sia nullo e* $b_2(x, y)$, *su* S_η, *abbia il segno di* η *o sia nullo. Se è possibile definire in* T *una funzione* $\omega(x, y)$ *sempre positiva, continua e dotata di derivate parziali* ω_x *e* ω_y *finite e continue, per modo che, in* T, *risulti sempre*

$$E[\omega] < 0;$$

allora, se, ovunque in T, *è* $f(x, y) \leqq 0$, *ogni soluzione della* (43) *sempre positiva o nulla su* $S + S_{-\xi} + S_{-\eta} - S_{\xi\eta}$ *si conserva tale in tutto* T*; se, ovunque in* T, *è* $f(x, y) \geqq 0$, *ogni soluzione della* (43) *sempre negativa o nulla su* $S + S_{-\xi} + S_{-\eta} - S_{\xi\eta}$ *si conserva tale in tutto* T.

Ne seguono i teoremi:

XXVI. *Se il dominio* T *è limitato ed inoltre* $b_1(x, y)$, *su* S_ξ, *ha il segno di* ξ *o è nullo e* $b_2(x, y)$, *su* S_η, *ha il segno di* η *o è nullo e si possono determinare due costanti* α *e* β *per modo che riesca sempre in* T

$$\alpha b_1(x, y) + \beta b_2(x, y) + c(x, y) < 0,$$

si verifica la tesi del teorema XXV (cfr. teorema V).

XXVII. *Se il dominio* T *è limitato ed inoltre il coefficiente* b_1 *(il coefficiente* b_2*) si mantiene in* T *sempre diverso da zero, mentre il coefficiente* b_2 *(il coefficiente* b_1*) ha su* S_η *(su* S_ξ*), quando non è nullo, il segno di* η *(di* ξ*), si verifica la tesi del teorema* XXV, *designando* ξ *(designando* η*) l'asse che ha il segno di* b_1 *(di* b_2*)* (cfr. il teorema VII).

XXVIII. *Nelle ipotesi del teorema* XXV, *supposta nota la funzione* ω, *per l'integrale* u *della* (43) *sussiste la seguente formola di maggiorazione:*

$$\max_T |u| \leq H \max_T \omega \max_T |f| + \frac{\max_T \omega}{\min_\Sigma \omega} \max_\Sigma |u|,$$

ove $\Sigma = S + S_{-\xi} + S_{-\eta} - S_{\xi\eta}$ *e* H *designa un numero non inferiore al massimo in* T *di una funzione* w, *ivi mai negativa, per la quale risulti, sempre in* T,

$$E_\omega[w] \leq -1.$$

Si può porre (cfr. teorema IX)

$$H = -\frac{1}{\max_T E[\omega]},$$

oppure, se in T è sempre $|b_2| \neq 0$, $(|b_1| \neq 0)$,

$$H = \frac{\max_T y - \min_T y}{\min_T(\omega\,|b_2|)}, \quad \left(H = \frac{\max_T x - \min_T x}{\min_T(\omega\,|b_1|)}\right).$$

XXIX. *Il dominio* T *sia limitato ed inoltre in* T *sia sempre*

$$c(x, y) \leq 0,$$

e $b_1(x, y)$, *su* S_ξ, *abbia il segno di* ξ *o sia nullo,* $b_2(x, y)$, *su* S_η, *abbia il segno di* η *o sia nullo. Se è possibile costruire la solita funzione* $\omega(x, y)$, *sempre positiva in* T, *per modo che risulti sempre ivi* $E[\omega] < 0$, *il massimo modulo di ogni integrale dell'equazione omogenea*

$$(43_0) \qquad E[u] \equiv b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0,$$

è conseguito sulla parte $\Sigma = S + S_{-\xi} + S_{-\eta} - S_{\xi\eta}$ *della frontiera di* T. *Se*

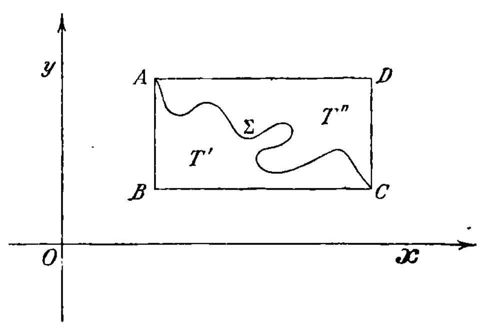


Fig. 4

in T *è identicamente* $c(x, y) \equiv 0$ *sull'indicata parte* Σ *si conseguono il minimo ed il minimo valore di ogni integrale* (cfr. i teoremi XIV e XV).

Vogliamo notare talune conseguenze notevoli degli ultimi teoremi ottenuti. Le funzioni b_1, b_2, c, f siano assegnate nel rettangolo R della figura 4, di vertici A, B, C, D, con i lati paralleli agli assi coordinati e sia sempre, in R,

$$b_2(x, y) > 0.$$

Si possono allora definire (cfr. teorema VII) due funzioni ω' e ω'' sempre positive in R per le quali risulti sempre ivi

$$b_1 \frac{\partial \omega'}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \omega'}{\partial y} + c\omega' < 0, \quad - b_1 \frac{\partial \omega''}{\partial x} - b_2 \frac{\partial \omega''}{\partial y} - c\omega'' < 0.$$

Dico che, se $b_1(x, y)$ ha sempre in R, quando non è nullo, il segno di b_2 (il segno contrario), comunque si fissi in R una curva semplice terminata ai vertici A e C (ai vertici B e D) del rettangolo R, una soluzione in R dell'equazione omogenea (43_0) che sia identicamente nulla su Σ è tale in tutto R. Dei due dominii secondo cui la curva Σ decompone il rettangolo R diciamo T' quello che contiene il vertice B di R e T'' l'altro.

In virtù del teorema XXVIII si ha:

$$\max_{T'} |u| \leqq \frac{\max_\Sigma \omega'}{\min_{T'} \omega'} \max_\Sigma |u| = 0,$$

$$\max_{T''} |u| \leqq \frac{\max_\Sigma \omega''}{\min_{T''} \omega''} \max_\Sigma |u| = 0,$$

donde $u \equiv 0$ in R. Ne segue che:

Una soluzione in R *dell'equazione* $\mathrm{E}[u] = f$, *è completamente determinata in* R *quando se ne assegnino i valori sulla curva* Σ.

L'esempio dell'equazione di EULERO ci fa ben presumere che le ipotesi sulle quali poggia il risultato ora conseguito non possono essere gran che ridotte. Il rettangolo R già considerato sia intieramente contenuto nel primo quadrante e ad esso sia esterno l'asse delle y, il nostro risultato ci dice, in particolare, che una soluzione dell'equazione di EULERO

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} - mu = 0, \tag{45}$$

è determinata in R col prescriverle i valori sulla diagonale AC. Tali valori si possono dare in funzione del coefficiente angolare α della congiungente dell'origine O col punto P variabile su AC. Detta $\varphi(\alpha)$ tale funzione e suppostala continua con la sua derivata prima, la soluzione della (45) che assume su AC i valori $\varphi(\alpha)$ è data da

$$u = \left(\frac{y - px}{q}\right)^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{46}$$

supposto che $y = px + q$ sia l'equazione di AC. Essendo sempre l'asse y esterno al rettangolo R, questo non sia ora totalmente contenuto nel primo quadrante e sia situato com'è indicato nella figura 5. Per la (45) non sono allora verificate le ipotesi del nostro teorema, e vediamo subito che i valori

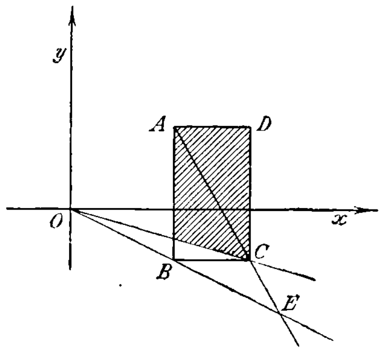


Fig. 5

dati su AC non determinano affatto in tutto R la soluzione u della (45). Supposto che la AC non passi per O la u riesce determinata soltanto nella parte di R, tratteggiata nella figura, limitata dal contorno di R e dalla retta OC. Nella parte rimanente la u dipende biunivocamente da una funzione arbitraria, e cioè, detto E il punto d'incontro di AC su OB, dai valori che si possono ancora prescriverle su CE.

Se, infine, la retta AC passa per O, se cioè è una caratteristica per l'equazione, ad una soluzione della (45) non si possono prescrivere su AC che valori particolari; supposto, per esempio, $m=0$ non si può dare alla u che un valore costante. Detto k tale valore e α_0 il coefficiente angolare della AC, per ogni *arbitraria* funzione $\varphi(\alpha)$ che per $\alpha = \alpha_0$ assume il valore k, si ha una soluzione del problema ponendo $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Dal teorema XXIX si deduce che:

Nelle ultime ipotesi poste, tutti i valori che ogni soluzione dell'equazione

$$(43_{00}) \qquad b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

assume nel rettangolo R *sono conseguiti lungo ogni curva* Σ *tracciata in* R *e terminata ai vertici* A *e* C (B *e* D) *di* R.

Dovremmo ora considerare le conseguenze che i teoremi testè conseguiti offrono nello studio delle condizioni atte a determinare le soluzioni dell'equazione (43) nel caso che il dominio T sia *illimitato.* Non ostante l'interesse che quelle conseguenze potrebbero offrire, ci asteniamo qui dal considerarle per amore di brevità, ed anche perchè l'analisi del n.° 3 è quasi immediatamente applicabile per tale scopo.

CAPITOLO II.

EQUAZIONI IN TRE VARIABILI INDIPENDENTI

6. **Lemma di Moutard.** — Nell'indirizzo che noi qui diamo alla teoria delle equazioni ellittico-paraboliche alle derivate parziali del second'ordine è fondamentale il seguente lemma di MOUTARD (¹), il cui verificarsi renderà ben evidente in qual modo i risultati che otterremo in questo secondo Capitolo per le equazioni totalmente paraboliche in tre variabili indipendenti possano estendersi a quelle in qualsiasi numero di tali variabili. Il lemma si può ennnciare nel modo seguente:

Se le forme quadratiche, a coefficienti reali,

$$f \equiv \sum_{hk}^{1,n} a_{hk}\lambda_h\lambda_k, \quad \varphi \equiv \sum_{hk}^{1,n} \alpha_{hk}\lambda_h\lambda_k,$$

sono semidefinite o definite, la somma:

$$\sum_{hk}^{1,n} a_{hk}\alpha_{hk},$$

riuscirà non negativa o non positiva secondochè le due forme hanno, quando non sono nulle, lo stesso segno o segno opposto. Se, più particolarmente, le due forme sono entrambe definite, la somma indicata è sempre diversa da zero.

Ed eccone una semplicissima dimostrazione. Si ha, indicando b_{rs} certe quantità reali,

$$f \equiv \varepsilon \sum_{r}^{1,m} \left(\sum_{s}^{1,n} b_{rs}\lambda_s \right)^2, \quad m \leqq n,$$

ove $\varepsilon = \pm 1$, secondochè f è semidefinita (definita) positiva o semidefinita (definita) negativa. Ne segue

$$a_{hk} = \varepsilon \sum_{r}^{1,m} b_{rh} b_{rk},$$

(¹) MOUTARD, *Notes sur les équations aux dérivées partielles.* [« Journal de l'École Polytechnique », 64me cahier (Paris, 1894), pp. 55-69].

e quindi

$$\sum_{hk}^{1,n} a_{hk}\alpha_{hk} = \varepsilon \sum_{hk}^{1,n} \alpha_{hk} \sum_{r}^{1,m} b_{rh} b_{rk} = \varepsilon \sum_{r}^{1,m} \sum_{hk}^{1,n} \alpha_{hk} b_{rh} b_{rk},$$

e ciò dimostra l'asserto.

7. Le tre forme tipiche per le equazioni totalmente paraboliche in tre variabili indipendenti. — Noi considereremo le equazioni totalmente paraboliche in tre variabili indipendenti, esclusivamente, nelle seguenti tre forme tipiche:

prima forma:

$$E[u] \equiv a_{11}(x, y, z)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x, y, z)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}(x, y, z)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$
$$+ b_1(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + b_3(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z} + c(x, y, z) = f(x, y, z),$$

con la condizione che la forma quadratica nelle λ e μ:

$$a_{11}(x, y, z)\lambda^2 + 2a_{12}(x, y, z)\lambda\mu + a_{22}(x, y, z)\mu^2,$$

riesca, per ogni punto (x, y, z), definita o semidefinita positiva;

seconda forma:

$$E[u] \equiv a(x, y, z)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y} +$$
$$+ b_3(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z} + c(x, y, z)u = f(x, y, z),$$

con la condizione che sia sempre

$$a(x, y, z) \geqq 0;$$

terza forma (equazione del primo ordine):

$$b_1(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + b_3(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z} + c(x, y, z)u = f(x, y, z).$$

8. Teoremi per la prima forma tipica. — I coefficienti a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, b_3, c, f dell'equazione totalmente parabolica in tre variabili indipendenti alle derivate parziali del second'ordine:

$$(1) \quad E[u] \equiv a_{11}(x, y, z)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x, y, z)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}(x, y, z)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$
$$+ b_1(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + b_3(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z} + c(x, y, z)u = f(x, y, z),$$

sono assegnate funzioni continue nel dominio internamente connesso T dello spazio (x, y, z), risultando sempre inoltre la forma quadratica nelle λ e μ:

$$a_{11}(P)\lambda^2 + 2a_{12}(P)\lambda\mu + a_{22}(P)\mu^2,$$

definita o semidefinita positiva per ogni punto P di T.

Designeremo con S_{-z} (con S_{+z}) quella parte della frontiera di T, se esiste, tale che per ogni punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ad essa appartenente si può determinare un numero positivo σ per modo che tutti i punti le cui coordinate verificano le limitazioni

$$|x - x_0| < \sigma, \quad |y - y_0| < \sigma, \quad z_0 - \sigma < z \leqq z_0$$
$$(|x - x_0| < \sigma, \quad |y - y_0| < \sigma, \quad z_0 \leqq z < z_0 + \sigma),$$

sono contenuti in T, mentre quelli le cui coordinate verificano le limitazioni

$$|x - x_0| < \sigma, \quad |y - y_0| < \sigma, \quad z_0 < z < z_0 + \sigma,$$
$$(|x - x_0| < \sigma, \quad |y - y_0| < \sigma, \quad z_0 - \sigma < z < z_0),$$

sono esterni a T.

Designeremo con S la parte della frontiera di T che non appartiene nè a S_{-z} nè a S_{+z}. Con ζ denoteremo inoltre l'asse z o l'asse $-z$ e quindi con S_ζ la parte S_{+z} o la parte S_{-z} della frontiera di T.

Nella figura 6 la parte S_{-z} della frontiera di T è costituita dalla totalità

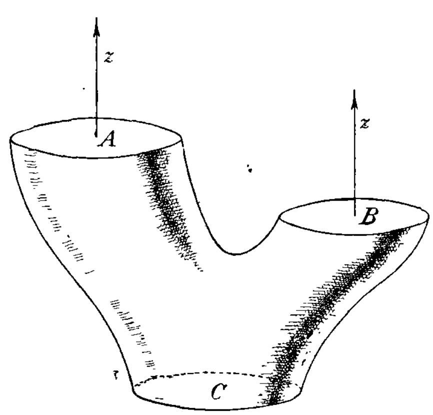


Fig. 6

dei punti interni ai due dominii piani A e B e la parte S_{+z} dalla totalità dei punti interni al dominio piano C.

Una funzione $u(x, y, z)$ sarà detta *integrale* o *soluzione* della (1), in T, se:

1°) È continua in T;

2°) nei punti interni a T e nei punti di $S_{-z} + S_{+z}$ è dotata delle derivate parziali che compaiono nell'equazione (1) finite e continue e verificanti la (1).

Sussiste il teorema:

I. *Se nel dominio* T *è sempre:*

$$c(x, y, z) < 0,$$

ed inoltre $b_3(x, y, z)$, *su* S_ζ, *ha il segno di* ζ *o è nullo, un integrale* u *della* (1) *non può nè in un punto interno a* T *nè in un punto di* S_ζ *avere un minimo negativo se* $f(x, y, z) \leqq 0$, *nè un massimo positivo se* $f(x, y, z) \geqq 0$. *E, supposto* T *limitato, ne segue che se, ovunque in* T, *è* $f(x, y, z) \leqq 0$, *ogni integrale della* (1) *sempre positivo o nullo su* $S + S_{-\zeta}$ *si conserva tale in tutto* T; *se, ovunque in* T, *è* $f(x, y, z) \geqq 0$, *ogni integrale della* (1) *sempre negativo o nullo su* $S + S_{-\zeta}$ *si conserva tale in tutto* T.

Ed invero, se in un punto P_0, interno a T si verifica per la u un minimo riesce

$$u_x(P_0) = u_y(P_0) = u_z(P_0) = 0 \tag{2}$$

e la forma quadratica

$$u_{xx}(P_0)\lambda^2 + 2u_{xy}(P_0)\lambda\mu + u_{yy}(P_0)\mu^2 \tag{3}$$

semidefinita o definita positiva, e quindi, se $u(P_0) < 0$, risulta, in base al lemma di MOUTARD,

$$\left[a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + b_3\frac{\partial u}{\partial z} + cu\right]_{P_0} > 0, \tag{4}$$

e se si verifica un massimo si hanno ancora le (2), mentre la forma quadratica (3) riesce semidefinita o definita negativa, e quindi, se $u(P_0) > 0$, risulta

$$\left[a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + b_3\frac{\partial u}{\partial z} + cu\right]_{P_0} < 0. \tag{5}$$

Se poi il punto P_0 è su S_ζ ed in esso si verifica un minimo, riesce

$$u_x(P_0) = u_y(P_0) = 0, \quad u_z(P_0) \text{ o nullo o del segno di } \zeta,$$

e la forma quadratica (3) semidefinita o definita positiva, e pertanto, se $u(P_0) < 0$, poichè b_3 su S_ζ o è nullo o del segno di ζ, si ottiene ancora la (4). Se il punto P_0 è su S_ζ ed in esso si verifica un massimo, riesce

$$u_x(P_0) = u_y(P_0) = 0, \quad u_z(P_0) \text{ o nullo o di segno contrario a } \zeta,$$

e la forma quadratica (3) semidefinita o definita negativa, e pertanto, se $u(P_0) > 0$, poichè b_3 su S_ζ o è nullo o del segno di ζ, si ottiene di nuovo la (5).

Se ne deducono (cfr. il n.° 1) i teoremi:

II. *Il dominio* T *sia limitato e* $b_3(P)$ *abbia sempre su* S_ζ, *quando non è nullo, il segno di* ζ. *Se è possibile definire una funzione* $\omega(P)$, *sempre positiva in* T, *ivi continua e dotata dalle derivate parziali, che compaiono nel primo membro della* (1), *finite e continue, per modo che in* T *risulti sempre*

$$E[\omega] < 0,$$

allora, se ovunque in T, *è* $f(P) \leqq 0$, *ogni integrale della* (1) *sempre positivo o nullo su* $S + S_\zeta$ *si conserva tale in tutto* T; *se, ovunque in* T, *è* $f(P) \geqq 0$, *ogni integrale della* (1) *sempre negativo o nullo su* $S + S_{-\zeta}$ *si conserva tale in tutto* T.

Posto, infatti, $v = \frac{u}{\omega}$, si ha per v l'equazione:

$$E_\omega[v] \equiv \omega a_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\omega a_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \omega a_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} +$$

$$+ \left(2a_{11} \frac{\partial \omega}{\partial x} + 2a_{12} \frac{\partial \omega}{\partial y} + b_1 \omega\right) \frac{\partial v}{\partial x} + \left(2a_{12} \frac{\partial \omega}{\partial x} + 2a_{22} \frac{\partial \omega}{\partial y} + b_2 \omega\right) \frac{\partial v}{\partial y} +$$

$$+ \omega b_3 \frac{\partial v}{\partial z} + E[\omega] v = f.$$

III. *Il dominio* T *sia limitato e* $b_3(P)$ *abbia sempre su* S_ζ, *quando non è nullo, il segno di* ζ. *Se uno dei coefficienti* $a_{11}(P)$ *o* $a_{22}(P)$ *si mantiene in* T *sempre diverso da zero e se è possibile definire una funzione* $\omega(P)$, *sempre positiva in* T, *ivi continua e dotata delle derivate parziali, che compaiono nel primo membro della* (1), *finite e continue, per modo che in* T *risulti sempre*

$$E[\omega] \leqq 0,$$

si verifica la tesi del teorema II (cfr. il teorema IV del n.° 1).

Sussistono, com'è ora ovvio, i teoremi analoghi ai teoremi V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV del Capitolo I, con formole analoghe.

Si ha dunque, in particolare, per l'equazione del calore:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

che ogni sua soluzione, in un dominio limitato T, assume il suo minimo ed il suo massimo valore in T, nella parte $S + S_{+z}$ della frontiera di T. EUGENIO ELIA LEVI (loc. cit.) aveva già osservato che, detto Z il massimo di z per i punti di T, il minimo ed il massimo valore in T di ogni soluzione della (6) non possono essere conseguiti in punti interni agli eventuali dominii piani che il piano $z = Z$ ha in comune con la frontiera di T.

Per i problemi al contorno relativi all'equazione (1) sussiste, naturalmente, il seguente teorema, analogo al teorema XVI del n.° 3):

IV. *Nelle ipotesi del teorema* II *ed in quelle del teorema* III, *una soluzione dell' equazione :*

$$E[u] = f \tag{1}$$

riesce completamente determinata, in T, *quando ad essa si prescrivono i valori sulla parte* $S + S_{-\zeta}$ *della frontiera di* T.

Interessanti sono altresì le conseguenze che, con metodo analogo a quello seguito al n.° 3, si possono trarre per i problemi al contorno relativi all'equazione (1), nel caso dei *dominii illimitati.* Sussiste, in proposito, il teorema analogo al teorema XVII del detto numero, e ne segue pertanto, in particolare, che :

V. *Il dominio* T *sia il semispazio* $z \leqq h$, *ed inoltre*

$$\textit{in } T \textit{ sia sempre } c(x, y, z) \leqq 0,$$
$$\textit{per ogni valore di } x \textit{ e di } y \textit{ sia } b_3(x, y, h) \leqq 0,$$

mentre ad ogni dominio limitato T′, *contenuto in* T, *sia sempre possibile far corrispondere la solita funzione* $\omega(x, y, z)$ *sempre positiva in* T′, *per la quale riesca sempre ivi* $E[\omega] < 0$. *Comunque si assegni in* T *la funzione continua* $\Phi(P)$, *una soluzione dell' equazione* (1) *riesce completamente determinata iu* T *quando ad essa si prescriva la condizione :*

$$\lim_{P \to \infty} [u(P) - \Phi(P)] \,(\text{su } T) = 0.$$

Pertanto : *Ogni soluzione dell' equazione omogenea* $E[u] = 0$ *che non sia una costante nel semispazio* T, *non può, nel mentre che il punto* P *si allontana su* T, *a distanza infinita, tendere ad un limite determinato e finito. Ciò avviene, per esempio, in ogni semispazio* $z \leqq h$, *per le soluzioni dell' equazione del calore*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Sussistono i teoremi analoghi ai teoremi XVIII, XIX, XX del n.° 3. Enunceremo soltanto quello analogo al teorema XX :

VI. *Sia* $\max_T z = +\infty$ *e il coefficiente* $b_3(x, y, z)$ *al tendere di* z *verso* $+\infty$ *riesca definitivamente non positivo. Se, per ogni* Z, *il dominio* T(Z —) *verifica, pur risultando illimitato, tutte le rimanenti ipotesi* *del teorema* II *o tutte quelle del teorema* III, *detta* $\omega(Z, P)$ *la solita funzione relativa al dominio* $T(Z-)$ *per la quale sia ivi* $E[\omega(Z, P)] \leq 0$, *supposto che, quando la parte* $\Sigma = S + S_{+z}$ *della frontiera di* T *sia illimitata, si abbia, per ogni* Z,

$$\lim_{P \to \infty} \frac{\varphi(P) - \Phi(P)}{\omega(Z, P)} \,[\text{su } \Sigma(Z-)] = 0,$$

allora, una soluzione u *della* (1) *risulta in* T *completamente determinata quando ad essa si prescriva di soddisfare, per ogni* Z, *le condizioni:*

$$u(P) \text{ su } \Sigma = \varphi(P),$$
$$\lim_{P \to \infty} \frac{u(P) - \Phi(P)}{\omega(Z, P)} \,[\text{su } T(Z-)] = 0.$$

Applicazione al problema della propagazione del calore in un mezzo conduttore indefinito. — Un corpo conduttore si estenda all'infinito in tutte le direzioni e sia omogeneo e di calore specifico e di coefficiente di conducibilità termica costanti. Supponiamo inoltre che siano realizzate quelle condizioni fisiche nelle quali si possa asserire che la temperatura u nei punti del corpo riesce soltanto funzione, oltre che del tempo z, delle coordinate x e y dei punti. Si ha allora che, scelte opportunamente le unità di misura, la u verifica l'equazione (6):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

e si pone il problema: *Nota la temperatura* $U(x, y)$ *nei punti del corpo al tempo* $z = 0$, *calcolare la temperatura* $u(x, y, z)$ *negli istanti successivi.*

Manca, a quanto mi consta, la dimostrazione che, precisamente, l'equazione (6), insieme alla condizione iniziale

$$u(x, y, 0) = U(x, y),$$

determina univocamente la $u(x, y, z)$. A ciò si perviene facilmente facendo ricorso ai nostri teoremi se si aggiunge l'ipotesi che la temperatura iniziale $U(x, y)$ sia limitata, poichè, riuscendo allora fisicamente evidente che la temperatura $u(x, y, z)$ deve essere una funzione di x, y e z essa pure limitata, la detta univoca determinazione della u è conseguenza del seguente teorema:

VII. *Detta* $J_0(\rho)$ *la funzione di* Bessel *d'ordine zero, una soluzione* u *dell'equazione* (6) *è completamente determinata nel semispazio positivo* $T(z \geq 0)$ *col prescriverle di soddisfare le condizioni:*

a) u(x, y, 0) = U(x, y), *per ogni valore di* x *e di* y;
b) per ogni $Z \geqq 0$, *si ha:*

$$\lim_{(x,y,z)\to\infty} \frac{u(x, y, z)}{J_0(i\sqrt{x^2+y^2})} \;[\text{su } T(Z-)] = 0.$$

Il teorema è corollario immediato e particolarissimo del teorema VI. Ed invero, com'è ben noto, la funzione

$$e^z J_0(i\sqrt{x^2+y^2})$$

è una soluzione (sempre positiva) dell'equazione (6) e si ha, nel semispazio positivo T,

$$\frac{|u(x, y, z)|}{e^z J_0(i\sqrt{x^2+y^2})} \leq \frac{|u(x, y, z)|}{J_0(i\sqrt{x^2+y^2})} \; (^1).$$

Necessariamente, deve risultare

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{U(x, y)}{J_0(i\sqrt{x^2+y^2})} = 0,$$

e perciò si verifica immediatamente che la nota formola:

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(\xi, \eta)}{z}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4z}}\, d\xi\, d\eta$$

fornisce la soluzione u della (6) verificante le condizioni *a)* e *b)*.

9. **Teoremi per la seconda forma tipica.** — I coefficienti a, b_1, b_2, b_3, c, f, dell'equazione totalmente parabolica in tre variabili indipendenti alle derivate parziali del second'ordine:

$$(7) \qquad E[u] \equiv a(x, y, z)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + b_3(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z} + $$
$$+ c(x, y, z)u = f(x, y, z),$$

siano assegnate funzioni continue nel dominio internamente connesso T dello

---

(1) Si tenga presente che:

$$J_0(i\rho) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\rho^{2h}}{(2h)!!\,(2h)!!},$$

ove $(2h)!! = 2\cdot 4 \ldots . (2h)$ e quindi che $J_0(i\rho) > \dfrac{\operatorname{sen} h\rho}{\rho}$.

spazio (x, y, z) riuscendo sempre, in T,

$$a(x, y, z) \geqq 0.$$

Dovremo ora considerare insieme le parti S_{-z}, S_{+z}, S_{-y}, S_{+y} della frontiera di T e designeremo con S quella parte di questa frontiera costituita dai punti che non appartengono a $S_{-y} + S_{+y} + S_{-y} + S_{+y}$. Indicheremo con η l'asse y o l'asse $-y$ e quindi con S_η la parte S_{+y} o la parte S_{-y} della frontiera di T, con ζ l'asse z o l'asse $-z$ e con S_ζ la parte S_{+z} o la parte S_{-z} della frontiera di T. Indicheremo poi con $S_{\eta\zeta}$ l'insieme dei punti interni agli eventuali segmenti rettilinei che appartengono simultaneamente alla frontiera di due dominii piani qualsivogliano l'uno di S_η e l'altro di S_ζ.

Nella figura 7 la parte S_{-z} della frontiera di T è costituita dalla totalità dei punti interni al dominio piano B, la parte S_{-y} dalla totalità dei punti

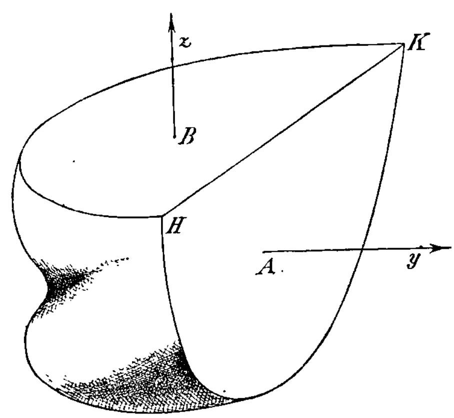


Fig. 7

interni al dominio piano A, la parte $S_{(-y)(-z)}$ dalla totalità dei punti interni al segmento rettilineo HK.

Una funzione $u(x, y, z)$ sarà detta *integrale* o *soluzione* della (7), in T, se:

1°) è continua in T;

2°) nei punti interni a T e nei punti di $S_{-y} + S_{+y} + S_{-z} + S_{+z} + S_{(-y)(-z)} + S_{(-y)(+z)} + S_{(+y)(-z)} + S_{(+y)(+z)}$ è dotata delle derivate parziali, che compaiono nell'equazione (7), finite e continue e verificanti la (7).

Sussiste il teorema:

VIII. *Se nel dominio* T *è sempre*

$$c(x, y, z) < 0$$

ed inoltre b_2 *su* S_η *e* b_3 *su* S_ζ *hanno, quando non sono nulli, rispettivamente il segno di* η *e di* ζ, *ogni integrale della* (7) *non può nè in un punto* *interno a* T *nè in un punto di* $S_\eta + S_\zeta + S_{\eta\zeta}$ *avere un minimo negativo se* $f(x, y, z) \leqq 0$, *un massimo positivo se* $f(x, y, z) \geqq 0$. *E, supposto* T *limitato, ne segue che, se, ovunque in* T, *è* $f(x, y, z) \leqq 0$, *ogni integrale della* (7) *sempre positivo o nullo su* $S + S_{-\eta} + S_{-\zeta} - S_{\eta\zeta}$ *si conserva tale in tutto* T; *se, ovunque in* T, *è* $f(x, y, z) \geqq 0$, *ogni integrale della* (7) *sempre negativo o nullo su* $S + S_{-\eta} + S_{-\zeta} - S_{\eta\zeta}$ *si conserva tale in tutto* T.

Col solito ragionamento si esclude che, nell'interno di T e su $S_\eta + S_\zeta$ possa verificarsi un minimo negativo quando è $f(x, y, z) \leqq 0$, o un massimo positivo quando è $f(x, y, z) \leq 0$. D'altra parte se, in un punto P_0 di $S_{\eta\zeta}$ si verifica un minimo, riesce:

$$u_x(P_0) = 0, \quad u_y(P_0) \text{ o nullo o del segno di } \eta,$$
$$u_z(P_0) \text{ o nullo o del segno di } \zeta, \quad u_{xx}(P_0) \geqq 0,$$

e pertanto, se $u(P_0) < 0$, poichè b_2 e b_3 hanno su $S_{\eta\zeta}$, quando non siano nulli, rispettivamente i segni di η e di ζ, si ha:

$$\left[a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + b_3 \frac{\partial u}{\partial z} + cu\right]_{P_0} > 0,$$

e se in P_0 si verifica un massimo, riesce

$$u_x(P_0) = 0, \quad u_y(P_0) \text{ o nullo o del segno di } -\eta,$$
$$u_z(P_0) \text{ o nullo o del segno di } -\zeta, \quad u_{xx}(P_0) \leqq 0,$$

e pertanto, se $u(P_0) > 0$, si ha:

$$\left[a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + b_3 \frac{\partial u}{\partial z} + cu\right]_{P_0} < 0.$$

Se ne deducono (cfr. n.° 1) i teoremi:

IX. *Il dominio* T *sia limitato ed inoltre* b_2 *su* S_η *e* b_3 *su* S_ζ *abbiano, quando uon sono nulli, rispettivamente il segno di* η *e di* ζ. *Se è possibile definire in* T *una funzione sempre positiva ivi continua e dotata delle derivate parziali* ω_{xx}, ω_x, ω_y, ω_z *finite e continue, per modo che, in* T, *risulti sempre*

$$E[\omega] < 0,$$

allora, se ovunque in T, *è* $f(P) \leqq 0$, *ogni integrale della* (7) *sempre positivo o nullo su* $S + S_{-\eta} + S_{-\zeta} - S_{\eta\zeta}$ *si conserva tale in tutto* T; *se, ovunque in* T, *è* $f(P) \geqq 0$, *ogni integrale della* (7) *sempre negativo o nullo su* $S + S_{-\eta} + S_{-\zeta} - S_{\eta\zeta}$ *si conserva tale in tutto* T.

Posto infatti $v = \frac{u}{\omega}$, si ha per v l'equazione

$$E_\omega[v] \equiv \omega a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(2a \frac{\partial \omega}{\partial x} + b_1 \omega\right) \frac{\partial v}{\partial x} + \omega b_2 \frac{\partial v}{\partial y} + \omega b_3 \frac{\partial v}{\partial z} + E[\omega] v = f.$$

X. *Il dominio* T *sia limitato ed inoltre* b_2 *su* S_η *e* b_3 *su* S_ζ *abbiano, quando non sono nulli, rispettivamente il segno di* η *e di* ζ. *Se il coefficiente* a(P) *si mantiene in* T *sempre positivo e se è possibile definire una funzione* ω(P), *sempre positiva in* T, *ivi continua e dotata delle derivate parziali* ω_{xx}, ω_x, ω_y, ω_z, *finite e continue per modo che in* T *risulti sempre*

$$E[\omega] \leqq 0,$$

si verifica la tesi del teorema IX.

Sussistono i teoremi analoghi ai teoremi V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV del capitolo I. Si ha dunque, per esempio, che, se nel dominio limitato T è sempre $b_2 < 0$, $b_3 < 0$, ogni soluzione dell'equazione:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + b_3 \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

assume il suo massimo ed il suo minimo valore in T nella parte $S + S_{+y} + S_{+z} - S_{(-y)(-z)}$ della frontiera di T.

Per i problemi al contorno relativi all'equazione (7) sussistono teoremi analoghi ai teoremi XVI, XVII, XVIII, XIX, XX del capitolo I. Si ha dunque in particolare il teorema:

XI. *Il dominio* T *sia il quadrante dello spazio luogo dei punti per cui* $y \leqq h$ *e* $z \leqq k$, *ed inoltre*

in T *sia sempre* $c(x, y, z) \leqq 0$,

e per ogni valore di x *si abbia* $b_2(x, h, k) \leqq 0$, $b_3(x, h, k) \leqq 0$,

mentre ad ogni dominio limitato T' *contenuto in* T, *sia sempre possibile far corrispondere la solita funzione* ω *sempre positiva in* T', *per la quale riesca sempre ivi* $E[\omega] < 0$. *Comunque si assegni in* T *la funzione* Φ(P), *una soluzione della* (7) *riesce completamente determinata in* T *quando ad essa si prescrive di soddisfare la condizione:*

$$\lim_{P \to \infty} [u(P) - \Phi(P)] \,(\text{su } T) = 0.$$

Pertanto: *Ogni soluzione dell'equazione omogenea* E[u] = 0, *che non sia una costante nel quadrante* T, *non può, nel mentre che il punto* P *si allontana, su* T, *a distanza infinita, tendere ad un limite determinato e finito.*

Ciò avverrà, per esempio, in ogni quadrante $T(y \leqq h, z \leqq k)$ *per le soluzioni dell' equazione :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \ (^1).$$

Per enunciare il teorema analogo al teorema XX del n.° 3 dobbiamo introdurre una notazione: Se per l' insieme A di punti dello spazio si ha $\max_A y = \max_A z = +\infty$, per ogni coppia di assegnate quantità Y e Z, denoteremo con $A(Y-, Z-)$ quella parte di A luogo dei punti per le cui coordinate y e z si ha simultaneamente $y \leqq Y$, $z \leqq Z$. Sussiste il teorema:

XII. *Sia* $\max_T y = \max_T z = +\infty$ *e i coefficienti* $b_2(x, y, z)$ *e* $b_3(x, y, z)$, *per* $(y, z) \to +\infty$ *riescano definitivamente non positivi. Se per ogni coppia di valori* Y *e* Z *il dominio* $T(Y-, Z-)$ *verifica, pur risultando illimitato, tutte le rimanenti ipotesi del teorema* IX *o tutte quelle del teorema* X, *detta* $\omega(Y, Z, P)$ *la solita funzione relativa al dominio* $T(Y-, Z-)$ *per la quale sia ivi* $E[\omega(Y, Z, P)] \leqq 0$, *supposto che, quando la parte* $\Sigma = S + S_{+y} + S_{+z} - S_{(-y)(-z)}$ *della frontiera di* T *risulti illimitata, si abbia, per ogni coppia* Y *e* Z,

$$\lim_{P \to \infty} \frac{\varphi(P) - \Phi(P)}{\omega(Y, Z, P)} [\text{su } \Sigma(Y-, Z-)] = 0,$$

allora, una soluzione u *della* (7) *riesce in* T *completamente determinata quando ad essa si prescriva di soddisfare, per ogni coppia* Y *e* Z, *le condizioni:*

$$u(P) \text{ su } \Sigma = \varphi(P),$$

$$\lim_{P \to \infty} \frac{u(P) - \Phi(P)}{\omega(Y, Z, P)} [\text{su } T(Y-, Z-)] = 0.$$

Una soluzione sempre positiva dell' equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{8}$$

è ovviamente

$$u = e^{\frac{y+z}{2}} \cosh x,$$

e segue, pertanto, in particolare, dal teorema XII che:

(1) D' altronde questa equazione, mediante il cambiamento di variabili

$$y = \eta + \zeta, \quad z = \eta - \zeta, \quad u(x, y, z) = v(x, \eta, \zeta),$$

si cangia nella seguente

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0.$$

Una soluzione u dell'equazione (8) risulta completamente determinata nel dominio illimitato T costituito dai tre quadranti dello spazio luogo dei punti per cui una delle due coordinate y o z non è negativa, quando le si prescriva la condizione di assumere sui due semipiani:

$$y \leqq 0, \quad z = 0$$

e

$$y = 0, \quad z \leqq 0$$

valori assegnati ed inoltre, per ogni $Y \geqq 0$ e per ogni $Z \geqq 0$, l'altra

$$\lim_{(x,y,z)\to\infty} \frac{u(x,y,z)}{\cosh x}\,[\text{su } T(Y-, Z-)] = 0.$$

Di quest'ultima condizione è più restrittiva quella che impone alla u di risultare limitata in T.

10. **Teoremi per la terza forma tipica.** — I coefficienti b_1, b_2, b_3, c, f della equazione lineare alle derivate parziali del primo ordine:

$$(9)\quad E[u] \equiv b_1(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + b_3(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} + c(x,y,z)u = f(x,y,z)$$

siano assegnate funzioni continue nel dominio internamente connesso T dello spazio.

Dovremo ora considerare insieme le parti S_ξ, S_η, S_ζ, $S_{\eta\zeta}$, $S_{\zeta\xi}$, $S_{\xi\eta}$, $S_{\xi\zeta\eta}$

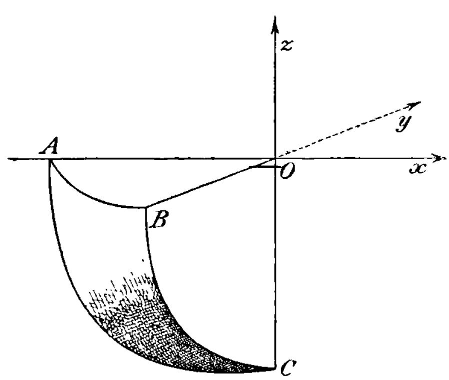


Fig. 8

della frontiera di T, $\xi = \pm x$, $\zeta = \pm y$, $\eta = \pm z$. Indicheremo con S la parte di quella frontiera che si ottiene col toglierle i punti di

$$S_{-x} + S_{+x} + S_{-y} + S_{+y} + S_{-z} + S_{+z}.$$

Nella figura 8 le parti S_{-x}, S_{-y}, S_{-z} sono costituite dei punti interni alle facce piane normali, rispettivamente, agli assi x, y, z, le parti $S_{(-y)(-z)}$,

$S_{(-z)(-x)}$, $S_{(-x)(-y)}$ dei punti interni agli spigoli OA, OB, OC, la parte $S_{(-x)(-y)(-z)}$ dell' unico punto O.

Una funzione $u(x, y, z)$ sarà detta *un integrale* o *una soluzione* della (9), in T, se:

1°) è continua in T;

2°) nei punti interni a T e nei punti di S_ξ, S_η, S_ζ, $S_{\eta\zeta}$, $S_{\zeta\xi}$, $S_{\xi\eta}$, $S_{\xi\eta\zeta}$ ($\xi = \pm x$, $\eta = \pm y$, $\zeta = \pm z$) è dotata delle derivate parziali u_x, u_y, u_z finite o continue e verificanti la (9).

Sussiste il teorema fondamentale:

Se nel dominio T *è sempre*

$$c(x, y, z) < 0,$$

ed inoltre b_1 *su* S_ξ, b_2 *su* S_η, b_3 *su* S_ζ *hanno, quando non sono nulli, rispettivamente i segni di* ξ, η, ζ, *ogni integrale della* (9) *non può nè in un punto interno a* T *nè in un punto di*

$$S_\xi + S_\eta + S_\zeta + S_{\eta\xi} + S_{\zeta\xi} + S_{\xi\eta} + S_{\xi\eta\zeta},$$

avere un minimo negativo se $\mathrm{f(x, y, z)} \leqq 0$, *un massimo positivo se* $\mathrm{f(x, y, z)} \geqq 0$.

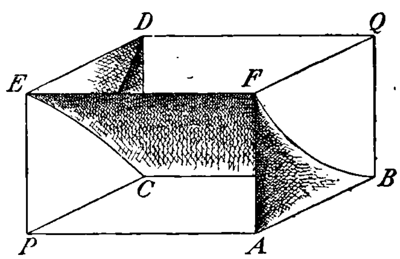


Fig. 9

E, supposto T *limitato, ne segue che, se ovunque in* T, *è* $\mathrm{f(x, y, z)} \leqq 0$, *ogni integrale della* (9) *sempre positivo o nullo su*

$$\Sigma = S + S_{-\zeta} + S_{-\eta} + S_{-\zeta} - S_{\eta\zeta} - S_{\zeta\xi} - S_{\xi\eta} - S_{\xi\eta\zeta},$$

si conserva tale in tutto T; *se, ovunque in* T, *è* $\mathrm{f(x, y, z)} \geqq 0$, *ogni integrale della* (9) *sempre negativo o nullo su* Σ *si conserva tale in tutto* T.

Se ne deducono i teoremi analoghi ai teoremi XXIV, XXV, XXVI, XXVII, XXVIII, XXIX del n.° 5. Notiamone due corollari interessanti.

Siano $P(p_1, p_2, p_3)$ e $Q(q_1, q_2, q_3)$ due punti dello spazio e sia $p_1 < q_1$, $p_2 < q_2$, $p_3 < q_3$. Consideriamo il parallelepipedo (P, Q) dello spazio (vedi fig. 9), di punti estremi P e Q, cioè luogo dei punti (x, y, z) le cui coordinate verificano le limitazioni:

$$p_1 \leqq x \leqq q_1, \quad p_2 \leqq y \leqq q_2, \quad p_3 \leqq z \leqq q_3.$$

Nel parallelepipedo (P, Q) riesca sempre

$$b_3(x, y, z) > 0,$$

mentre i coefficienti b_1 e b_2, quando non sono nulli, abbiano sempre il segno di b_3. Si consideri una superficie semplice Σ contenuta nel parallelepipedo (P, Q) e terminata alla spezzata $ABCDEFA$ composta di tutti gli spigoli non partenti nè da P nè da Q; ebbene, si ha che:

Una soluzione nel parallelepipedo (P, Q), *dell'equazione* $E[u] = f$, *è ivi completamente determinata quando se ne assegnino i valori sulla superficie* Σ.

Nelle ipotesi poste, tutti i valori che ogni soluzione dell'equazione

$$b_1(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + b_3(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

assume nel parallelepipedo (P, Q) *sono conseguiti sopra ogni superficie* Σ *in esso contenuta e terminata alla spezzata* ABCDEFA *composta di tutti gli spigoli non partenti nè da* P *nè da* Q.

Offre interesse lo studio delle condizioni atte a determinare le soluzioni dell'equazione (9) nel caso dei dominii illimitati. Ma in questo lavoro desistiamo dal compierlo.

Sulle curve analoghe al circolo osculatore quando si passa da tre a quattro punti infinitamente vicini.

Memoria di T. LEVI-CIVITA (a Roma) e G. FUBINI (a Torino).

Sunto. - *Due punti infinitamente vicini di una curva individuano la tangente, che ha comune colla curva il cosiddetto intorno di prim' ordine, e ne porge quindi una caratterizzazione geometrica; tre punti infinitamente vicini determinano il circolo osculatore, il quale si comporta nello stesso modo rispetto all' intorno di secondo ordine. Nella presente Memoria si prende in considerazione una quaderna di punti infinitamente vicini, cioè l' intorno di terz' ordine, esaminando i varî tipi di curve, nonchè una configurazione* (BLASCHKE), *atte a rappresentare l' intorno in modo geometricamente espressivo.*

Mentre passeggiavamo insieme, durante la villeggiatura, ci si è affacciata una questioncella spettante ai primi elementi della geometria differenziale, la quale tuttavia, per quanto ci consta, non si trova discussa nella pur vasta e più che bisecolare letteratura dell' argomento.

Ci permettiamo perciò di pubblicare il risultato della nostra conversazione, completato da una elegante osservazione dovuta al prof. W. BLASCHKE.

1. **Preliminari. Curve Γ iperosculatrici.** — Sia C una curva qualsiasi. Indichiamo con P_0 suo punto generico, con P' e P'' due punti infinitamente vicini a P_0 che ne individuano l' intorno di secondo ordine. Un tale intorno rimane classicamente definito in modo espressivo dalla circonferenza che passa per i tre punti P_0, P', P'', ossia dal circolo osculatore γ, alla curva C in P_0. In forma equivalente si può dire che ogni curva C si identifica, nel-l' intorno di secondo ordine di un punto generico P_0 con una circonferenza γ che tocca C in P_0, sta nel piano osculatore ed ha per curvatura (costante) quella della C in P_0.

A quale curva, o piuttosto a quale tipo di curve Γ conviene invece ricorrere perchè la coincidenza si estenda al 3° ordine? Si tratta, in altri termini, di caratterizzare, con ragionevole generalizzazione del circolo osculatore, una o più specie di curve Γ, che abbiano in comune con L non soltanto P_0, P', P'', ma anche un quarto punto P''' dell' intorno.

Cominciamo col precisare il comportamento locale di ogni Γ siffatta. Giova all' uopo prendere le mosse dalla rappresentazione parametrica dei punti P di C in funzione dell' arco s, ossia dall' equazione

$$P = P(s), \tag{1.1}$$

supponendo, per comodità di scrittura, che l' origine degli archi sia proprio il punto P_0 di cui vogliamo prendere in considerazione l' intorno. Introducendo il versore tangenziale

$$\boldsymbol{t} = \frac{dP}{ds}, \tag{1.2}$$

nonchè quelli della normale principale $\boldsymbol{n}$ e della binormale $\boldsymbol{b}$ (nei soliti versi), si hanno le formule del Frenet

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} &= c\boldsymbol{n}, \\ \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} &= -c\boldsymbol{t} - \tau\boldsymbol{b}, \\ \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} &= \tau\boldsymbol{n}, \end{aligned} \right. \tag{1.3}$$

dove c e τ rappresentano la curvatura e la torsione (nel punto generico P).

Avendosi dalle (1.2) e (1.3)

$$\frac{d^2P}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = c\boldsymbol{n},$$

$$\frac{d^3P}{ds^3} = \frac{dc}{ds}\boldsymbol{n} - c(c\boldsymbol{t} + \tau\boldsymbol{b}),$$

lo sviluppo di Taylor, nell' intorno di P_0, applicato alla (1.1) ed esplicitato fino al terzo ordine, dà

$$P = P_0 + s\boldsymbol{t} + \frac{s^2}{2} c_0\boldsymbol{n} + \frac{s^3}{6} \left\{ -c_0^2\boldsymbol{t} + \left(\frac{dc}{ds}\right)_0 \boldsymbol{n} - c_0\tau_0\boldsymbol{b} \right\} + \ldots, \tag{1.4}$$

c_0, τ_0 e $\left(\frac{dc}{ds}\right)_0$ rappresentando i valori che competono a c, τ e $\frac{dc}{ds}$ in P_0.

Affinchè un' altra curva Γ, uscente da P_0, abbia comune con C la parte di sviluppo testè scritta, occorre manifestamente (e basta) che coincidano i (vettori) coefficienti di s, s^2, s^3. La considerazione dei primi due riporta naturalmente alle note proprietà spettanti anche al circolo osculatore, ossia coincidenza del triedro principale e della curvatura c_0 in P_0. Dopo ciò il confronto dei coefficienti di s^3 (escludendo il caso banale che C abbia comportamento rettilineo in P_0, cioè ritenendo $c_0 \neq 0$) *richiede ulteriormente l'eguaglianza, in* P_0, *della torsione e del gradiente* $\frac{dc}{ds}$ *della curvatura*. Se $c_0 = 0$, vien meno la condizione relativa alla torsione, bastando l'eguaglianza di $\frac{dc}{ds}$ in P_0.

Qualsiasi Γ che abbia comune con C, in P_0, il piano osculatore, nonchè c, τ e $\frac{dc}{ds}$, può assumersi come generalizzazione del circolo osculatore quando si passa al terzo ordine.

Per essere guidati nella scelta cominciamo col considerare il caso di una curva piana: basterebbe anzi localmente piana, nel senso che sia $\tau = 0$ in P_0.

2. **Curve piane. Γ clotoidali.** — Attenendosi, come si è fatto finora, a criteri puramente locali, la caratterizzazione più semplice di una Γ appare la seguente: curva del piano di C (o nel caso particolare in cui $c_0 = 0$, d'un qualunque piano passante per la tangente a C), che, osculando C in P_0, ha costante, per qualsiasi s, il gradiente $\frac{dc}{ds}$ della curvatura, tale valore costante g essendo precisamente quello che compete a C in P_0. Una curva siffatta si chiama *clotoide* [1]. La sua rappresentazione parametrica si ottiene immediatamente introducendo l'angolo ϑ che la tangente in un punto generico forma con una direzione fissa del piano, per es. colla tangente a C in P_0.

Potendosi allora porre (con opportuna scelta del verso positivo per ϑ)

$$c = \frac{d\vartheta}{ds},$$

la condizione caratteristica si traduce in

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} = g, \tag{2.1}$$

donde, dovendo essere $\frac{d\vartheta}{ds} = c_0$ e $\vartheta = 0$ per $s = 0$,

$$\vartheta = \frac{1}{2} g s^2 + c_0 s. \tag{2.2}$$

Supponendo per semplicità l'asse delle x orientato come la tangente in P_0, si ha

$$\frac{dx}{ds} = \cos\vartheta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\vartheta,$$

[1] Cfr. per es. Cesàro, *Geometria intrinseca* (Napoli, Tipografia della R. Accademia delle Scienze, 1896), p. 15.

e se ne traggono con quadrature (che però non si sanno eseguire con mezzi elementari) le equazioni parametriche della Γ clotoidale.

3. **Γ piane algebriche.** — Il metodo precedente è dal punto di vista differenziale il più spontaneo; anzi con una lieve variante affatto elementare, per quanto concettualmente un po' meno semplice, possiamo anche sostituire alle precedenti quadrature altre che si sanno eseguire con mezzi elementari (§ 4). Ma noi ci possiamo porre da un altro punto di vista, considerando come più semplici *le curve algebriche del minor grado possibile.*

Siano dati una curva piana C, un suo punto P_0 e un suo intorno di n^{esimo} ordine ($n=2$, oppure $n=3$). Ciò equivale a dare, se $n=2$, il punto P_0 e i *due* punti consecutivi P', P''; se invece $n=3$, ciò equivale a dare P_0 e i *tre* punti consecutivi P', P'', P'''. In entrambi i casi è data la retta P_0P' tangente in P_0 a C. E, se noi assumiamo un sistema di coordinate ortogonali, per cui P_0 è l'origine e tale retta tangente è l'asse delle x, varrà in un intorno di P_0 uno sviluppo

$$y=\frac{1}{2}\alpha x^2+\frac{1}{6}\beta x^3+\dots.$$

(dove i termini non scritti sono almeno del 4° ordine per $x=0$).

I coefficienti α, β sono i valori di y'' e di y''' per $x=0$. Poichè y' si annulla per $x=0$, sarà

$$\alpha=c_0,\quad \beta=\left(\frac{dc}{ds}\right)_0,$$

e quindi

$$y=\frac{1}{2}c_0x^2+\frac{1}{6}\left(\frac{dc}{ds}\right)_0 x^3+\dots. \tag{3.1}$$

Se $n=2$, il solo coefficiente c_0 è determinato; se $n=3$, sono determinati tanto c_0 quanto $\left(\frac{dc}{ds}\right)_0$.

Supponiamo dapprima $c_0\neq 0$. Evidentemente la Γ di grado minimo sarà una conica, che dovrà passare per P_0 ed avervi per retta tangente la P_0P'; la sua equazione sarà pertanto del tipo

$$2y=b_{11}x^2+2b_{12}xy+b_{22}y^2, \tag{3.2}$$

e varrà lo sviluppo:

$$y=\frac{1}{2}b_{11}x^2+\frac{1}{2}b_{11}b_{12}x^3+\dots. \tag{3.3}$$

CASO DI $n = 2$. — È determinato il solo coefficiente c_0. L'identificazione dei primi coefficienti in (**3**.1) e (**3**.3) ci dà:

$$b_{11} = c_0.$$

I coefficienti b_{12}, b_{22} restano affatto indeterminati e si possono scegliere ad arbitrio. Così p. es., se si pone $b_{12} = 0$, $b_{22} = b_{11} = c_0$, si trova il *cerchio osculatore*; un'altra scelta pure molto semplice (anzi, da un punto di vista algoritmico, ancora più semplice) è quella di supporre le b_{12}, b_{22} entrambe nulle. Si perviene a *quella parabola di vertice P_0* che in P_0 oscula la curva data.

CASO DI $n = 3$. — Sono allora dati c_0 e $\left(\frac{dc}{ds}\right)_0$. Identificando (**3**.1) e (**3**.3), restano determinati b_{11} e b_{12}, mentre b_{22} si può scegliere ad arbitrio. Il modo più semplice è di determinare b_{22} in modo che $b_{11}b_{22} = b_{12}^2$; e si giunge così alla *parabola che iperoscula* C *in* P_0. Se invece si scegliesse $b_{22} = -b_{11}$, si giungerebbe a una *iperbola equilatera* iperosculatrice.

I precedenti ragionamenti sono in difetto se $\alpha = c_0 = 0$, se cioè P_0 è un punto di flesso per la curva considerata. Ciò risulta subito dai calcoli precedenti (infatti la $b_{11} = c_0 = 0$ prova che in tal caso la (**3**.2) non è una conica) ed era facilmente prevedibile *a priori*, perchè nessuna conica ha un flesso.

Se $c_0 = 0$ ed $n = 2$, l'intorno del 2° ordine di C in P_0 è rappresentabile evidentemente mediante la retta tangente $y = 0$ (che oscula, come è noto, la curva C). Ma, se $c_0 \doteq 0$ ed $n = 3$, l'intorno del terzo ordine di P_0 si può rappresentare ancora con la stessa retta se anche $\beta = 0$ e non si può rappresentare nè con una retta, nè con una conica se $\beta = \left(\frac{dc}{ds}\right)_0 \neq 0$. In tal caso si deve ricorrere a curve di *terzo* grado: la più semplice è forse la curva

$$y = \frac{1}{6}\left(\frac{dc}{ds}\right)_0 x^3.$$

4. Altri tipi di Γ (per il caso piano, o per *C* aventi un flesso in P_0): curve (di Humbert [1]) chiuse, algebriche e rettificabili algebricamente. — Assumiamo qui ancora l'origine degli assi in P_0 e l'asse delle x orientato secondo la tangente nel verso delle s crescenti. Le equazioni parametriche della C e d'ogni sua Γ (in P_0) si scrivono

$$(\mathbf{4}.1) \qquad x = \int_0^s \cos\vartheta \cdot ds, \quad y = \int_0^s \sin\vartheta \cdot ds,$$

[1] Cfr. G. HUMBERT, *Sur les courbes algébriques rectifiables.* « Journal de Math. », (4), T. IV, 1888, pp. 133-151.

dove ϑ è legato ad s dalla

(4.2) $$c = \frac{d\vartheta}{ds},$$

e c, funzione assegnata per C, deve invece ottemperare per una Γ, unicamente alle condizioni iniziali

(4.3) $$c = c_0, \quad \frac{dc}{ds} = g, \quad \text{per } s = 0.$$

Si può in particolare profittare della residua (e quasi completa) arbitrarietà di c per fare in modo che le quadrature (4.1) siano effettuabili con mezzi elementari. Introducendo la variabile complessa

$$z = x + iy$$

e compendiando in conformità le (4.1) nell'unica relazione complessa

(4.4) $$z = \int_0^s e^{i\vartheta} ds,$$

basterà occuparsi di quest'ultima quadratura, nella quale giova fare apparire ϑ in luogo di s come variabile di integrazione, operazione certo lecita nell'immediato intorno di P_0, purchè si badi alla (4.2) e si ritenga $c_0 \neq 0$ in P_0. Prendiamo dunque in considerazione, in luogo della (4.4), l'equazione equivalente

(4.5) $$z = \int_0^\vartheta e^{i\vartheta} \frac{d\vartheta}{c}.$$

Qualora per es. la c, espressa per ϑ, sia una funzione razionale di seni e coseni, la quadratura si può notoriamente eseguire con regole elementari.

Siccome per ipotesi (già testè usufruita) ϑ si annulla con s, le condizioni (4.3) divengono

(4.6) $$c = c_0, \quad \frac{dc}{d\vartheta} = \frac{1}{c_0} g, \quad \text{per } \vartheta = 0,$$

e per soddisfarvi basterà che nell'espressione suddetta di c figurino almeno due costanti. Poniamo a titolo d'esempio

(4.7) $$\frac{1}{c} = \rho_1 \cos n\vartheta + \rho_2 \sin n\vartheta + \rho_3$$

con tre costanti ρ_1, ρ_2, ρ_3, mentre n sta a rappresentare un qualsivoglia intero positivo.

Le (4.6) richiedono

$$\rho_1 + \rho_3 = \frac{1}{c_0}, \quad n\rho_2 = -\frac{1}{c_0^3} g, \tag{4.8}$$

sicchè, scelto n, si può ancora imporre una ulteriore condizione alle ρ.

Comunque, introducendo nella (4.5) l'espressione (4.7) di $\frac{1}{c}$, in quanto si immagini di sostituirvi $\cos n\vartheta$ e $\sin n\vartheta$ mediante i binomi $\frac{1}{2}(e^{in\vartheta} + e^{-in\vartheta})$, $\frac{1}{2i}(e^{in\vartheta} - e^{-in\vartheta})$ e si ritenga $n > 1$ (con che si evita che la quadratura introduca termini in ϑ), si ha

$$\begin{aligned} z = \frac{i\rho_1}{2} \left\{ \frac{1}{n+1}\left(1 - e^{i(n+1)\vartheta}\right) + \frac{1}{n-1}\left(e^{-i(n-1)\vartheta} - 1\right) \right\} \\ + \frac{\rho_2}{2} \left\{ \frac{1}{n+1}\left(1 - e^{i(n+1)\vartheta}\right) + \frac{1}{n-1}\left(e^{-i(n-1)\vartheta} - 1\right) \right\} \\ - i\rho_3 \left\{ e^{i\vartheta} - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Si può in particolare assumere $\rho_1 = 0$, $n = 3$, con che

$$z = \rho_2 \left\{ \frac{1}{6}(1 - e^{3i\vartheta}) + \frac{1}{2}(e^{-i\vartheta} - 1) \right\} - i\rho_3 \left\{ e^{i\vartheta} - 1 \right\}. \tag{4.9}$$

Se si cambia i in $-i$, designando al solito con z_0 la coniugata $x - iy$ di z, si ha altresì

$$z_0 = \rho_2 \left\{ \frac{1}{6}(1 - e^{-3i\vartheta}) + \frac{1}{2}(e^{i\vartheta} - 1) \right\} + i\rho_3 \left\{ e^{-i\vartheta} - 1 \right\}. \tag{4.10}$$

Posto $e^{i\theta} = u$, dalle (4.9) e (4.10) si trae:

$$\begin{aligned} z : z_0 : 1 = \rho_1\left[\frac{u^3(1-u^3)}{6} + \frac{u^2}{2}(1-u)\right] + i\rho_3(1-u)u^3 : \\ : \rho_2\left[\frac{u^3-1}{6} + \frac{u^3}{2}(u-1)\right] + i\rho_3 u^2(1-u) : u^3. \end{aligned}$$

Considerando z, z_0, 1 come le coordinate omogenee di un punto della curva Γ, se ne deduce che la curva Γ, di cui qui si tratta, è una *sestica razionale*. La rappresentazione parametrica (4.9), ossia, scindendo il reale dall'immaginario, la

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \rho_2 \left\{ \frac{1}{6}(1 - \cos 3\vartheta) + \frac{1}{2}(\cos\vartheta - 1) \right\} + \rho_3 \sin\vartheta, \\ y &= \rho_2 \left\{ \frac{1}{6}\sin 3\vartheta - \frac{1}{2}\sin\vartheta \right\} + \rho_3(1 - \cos\vartheta), \end{aligned} \right.$$

individua però, al variare di ϑ nel campo reale, non la curva nella sua integrità, ma soltanto quel ramo di essa che forma un circuito chiuso.

5. **Curve gobbe. Γ elicoidali.** — Passiamo ora al caso generale in cui τ_0 (torsione in P_0) è diversa da zero. *Se* c_0 *si annulla, si hanno,* come discende dai §§ 1 e 2, *curve iperosculatrici* Γ *in uno qualsiasi degli* ∞^1 *piani tangenti a* C *in* P_0; per es. altrettante clotoidi (§ 2).

Esaurita così l'eventualità $c_0 = 0$, possiamo ritenere, non soltanto τ_0, ma anche c_0 diverso da zero.

Una prima discriminazione delle infinite Γ, iperosculatrici nel senso prefissato, può farsi richiedendo che siano *eliche cilindriche*, cioè, come è ben noto, curve per le quali il rapporto $\frac{\tau}{c}$ fra torsione e curvatura è costante, e quindi, nel caso specifico, eguale al valore $\frac{\tau_0}{c_0}$ (finito e $\neq 0$), che spetta alla assegnata curva C in P_0. Ci sarà comodo porre

$$\frac{\tau_0}{c_0} = \lambda = \pm \cot \varphi \tag{5.1}$$

e ritenere che l'angolo (costante) φ sia acuto, convenendo di assumere il segno $+$ quando λ, cioè (in quanto c è, per sua definizione, essenzialmente positiva) quando la torsione τ_0 in P_0 è positiva, e il segno — nel caso contrario.

Per le eliche le equazioni (**1**.3) di FRENET si semplificano immediatamente assumendo come variabile indipendente, al posto dell'arco s, un parametro ϑ (puro numero) definito da

$$c\,ds = d\vartheta, \tag{5.2}$$

con che $d\vartheta$ è interpretabile (in un generico piano osculatore) come angolo di contingenza. Alla (**5**.2) intenderemo associata, come è evidentemente lecito, la condizione iniziale

$$\vartheta = 0, \quad \text{per } s = 0. \tag{5.3}$$

Dalle (**1**.3) suddette, dividendo per c e badando alla (**5**.1), si ha senz'altro

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dt}{d\vartheta} &= n, \\ \frac{dn}{d\vartheta} &= \quad t - \lambda b, \\ \frac{db}{d\vartheta} &= \lambda n. \end{aligned}\right. \tag{5.4}$$

Ove si derivi la seconda rispetto a ϑ e si tenga conto delle altre due, si ricava la risolvente in $\boldsymbol{n}$ sotto la forma ovviamente integrabile

$$\frac{d^2\boldsymbol{n}}{d\vartheta^2} = -(1+\lambda^2)\boldsymbol{n}$$

che costituisce in certo senso l'estensione allo spazio dell'equazione scalare (**2**.1).

L'integrale generale si può assumere sotto la forma

$$\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}\sin\omega\vartheta + \boldsymbol{j}\cos\omega\vartheta, \tag{5.5}$$

dove si è posto per brevità di scrittura

$$\omega = \left|\sqrt{1+\lambda^2}\right| = \frac{1}{\sin\varphi}, \tag{5.6}$$

e $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ designano due vettori *costanti*, a priori arbitrari. Se però si richiede che $\boldsymbol{n}$ sia, secondo la sua definizione, un vettore unitario, bisogna che i vettori costanti $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ rendano $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ eguale all'unità, ossia

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}\sin^2\omega\vartheta + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}\cos^2\omega\vartheta - \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}\sin 2\omega\vartheta = 1$$

per qualsiasi ϑ. Ne consegue che $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ devono essere essi stessi unitari e in più ortogonali.

Ciò posto, la prima delle (**5**.4), in cui si intenda per $\boldsymbol{n}$ l'espressione (**5**.5), dà, per integrazione immediata,

$$\boldsymbol{t} = \frac{1}{\omega}(\boldsymbol{i}\cos\omega\vartheta + \boldsymbol{j}\sin\omega\vartheta) + \boldsymbol{t}_0,$$

$\boldsymbol{t}_0$ designando un vettore *costante* a priori arbitrario, il quale però deve rispecchiare l'ipotesi che $\boldsymbol{t}$ sia unitario. Ciò si traduce nella condizione

$$\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{t} = \frac{1}{\omega^2} + \boldsymbol{t}_0\times\boldsymbol{t}_0 + \frac{2}{\omega}(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{t}_0\cos\omega\vartheta + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{t}_0\sin\omega\vartheta) = 1$$

per qualsiasi ϑ.

Ne consegue in primo luogo che dovranno annullarsi i coefficienti di $\cos\omega\vartheta$ e $\sin\omega\vartheta$, ossia che $\boldsymbol{t}_0$ deve essere perpendicolare sia a $\boldsymbol{i}$ che a $\boldsymbol{j}$. Sarà perciò lecito di assumerlo in ogni caso sotto la forma

$$a\boldsymbol{k},$$

ritenendo a positivo e il vettore

$$\boldsymbol{k} = \pm(\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j}), \tag{5.7}$$

anch'esso unitario.

La precedente equazione si riduce con ciò a

$$\frac{1}{\omega^2}+a^2=1,$$

da cui, in base alla (5.6) e alle specificazioni $a>0$, φ acuto,

$$a=\cos\varphi$$

senza ambiguità.

In definitiva

$$t=\sin\varphi\,(i\cos\omega\vartheta+j\sin\omega\vartheta)+k\cos\varphi. \tag{5.8}$$

Per caratterizzare geometricamente le curve Γ il cui versore tangenziale t ha codesta espressione, giova far intervenire un piano fisso χ parallelo ai due vettori costanti i, j, e quindi perpendicolare a k; e associare alla considerazione di una Γ quella della sua proiezione Γ^* su χ.

Intanto l'inclinazione della stessa Γ, ossia d'ogni sua tangente t su k è costante ed eguale a φ, perchè dalla (5.8) segue in particolare $t\times k=\cos\varphi$. Pure costante ed eguale a $\frac{\pi}{2}-\varphi$ è quindi l'inclinazione di t sul piano χ, talchè il corrispondente componente di t, cioè $t-k\cos\varphi$, ha la lunghezza costante $\sin\varphi$. Ne viene che

$$t^*=\frac{1}{\sin\varphi}(t-k\cos\varphi)=i\cos\omega\vartheta+j\sin\omega\vartheta$$

è un vettore unitario di χ, il quale perciò si identifica col versore tangenziale spettante alla proiezione Γ^* di Γ.

Se si designano con Q^* la proiezione del punto generico Q di Γ e con $ds^*=ds\sin\varphi$ quella dell'arco elementare ds, si ha, per definire la curva Γ^*, l'equazione

$$\frac{dQ^*}{ds^*}=t^*=i\cos\omega\vartheta+j\sin\omega\vartheta,$$

ossia, ove si sostituisca $ds\cos\varphi$ a ds^* e si integri rispetto ad s, contando gli archi a partire da P_0, risulta

$$Q^*=P_0+\sin\varphi\cdot i\int_0^s\cos\omega\vartheta\cdot ds+\sin\varphi\cdot j\int_0^s\sin\omega\vartheta\cdot ds. \tag{5.9}$$

Dopo ciò si riprende la (5.8) in cui $t=\frac{dQ}{ds}$, Q rappresentando il punto generico di Γ. Integriamo qui pure a partire da P_0, e avremo, attesa la (5.8),

$$Q=Q^*+k\cos\varphi\cdot s, \tag{5.10}$$

la quale mostra che si tratta di una curva appartenente al cilindro retto di base Γ^* colle generatrici parallele a $\boldsymbol{k}$, e precisamente di un'*elica*, poichè la curva incontra le generatrici (supposte orientate nel verso di $\boldsymbol{k}$) sotto l'angolo costante (ed acuto) φ.

Affinchè tale elica risulti, nel modo voluto, osculatrice alla C in P_0, sarà evidentemente necessario e sufficiente che il relativo triedro principale in P_0 coincida con quello di C, la curvatura $c(s)$ della Γ, o, ciò che è lo stesso, della Γ^* soddisfacendo alle condizioni iniziali (4.3) di eguaglianza in P_0 di c e $\frac{dc}{ds}$ coi valori spettanti alla C.

Indichiamo, per maggior chiarezza, con $\boldsymbol{t}_0$, $\boldsymbol{n}_0$, $\boldsymbol{b}_0$ i versori della tangente, normale principale e binormale a C in P_0.

Ai primi due devono ridursi per $s=0$ le determinazioni (5.8) e (5.5) dei versori $\boldsymbol{t}$ ed $\boldsymbol{n}$ di Γ. Si ha pertanto, ricordando che ϑ si annulla con s,

$$\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{i} \sin\varphi + \boldsymbol{k} \cos\varphi,$$

cui va associata la

$$\boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{t}_0 \wedge \boldsymbol{n}_0 = (\boldsymbol{i} \sin\varphi + \boldsymbol{k} \cos\varphi) \wedge \boldsymbol{j}.$$

Siccome a priori $\boldsymbol{k}$ può essere $\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j}$ ovvero $-\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j}$, così bisogna contemplare entrambe le eventualità, il che dà

$$\boldsymbol{b}_0 = \mp (\boldsymbol{i} \cos\varphi - \boldsymbol{k} \sin\varphi).$$

Risultano così tre equazioni in $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, che risolute rispetto a questi tre versori, assumono l'aspetto

$$\text{(5.11)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \boldsymbol{i} &= \boldsymbol{t}_0 \sin\varphi \mp \boldsymbol{b}_0 \cos\varphi, \\ \boldsymbol{j} &= \boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{t}_0 \cos\varphi \pm \boldsymbol{b}_0 \sin\varphi, \end{aligned} \right.$$

dove, ben si intende, vanno presi insieme i segni superiori o gli inferiori.

La terza equazione ci mostra che esistono, in ogni punto P_0 (generale, nel quale cioè non si annullano nè la curvatura, nè la torsione) *due* direzioni $\boldsymbol{k}$ per le generatrici del cilindro cui appartiene una qualsiasi elica osculatrice in P_0. Entrambe queste direzioni stanno nel piano rettificante $\boldsymbol{t}_0$, $\boldsymbol{b}_0$, e sono inclinate su $\boldsymbol{t}_0$, nell'uno e nell'altro verso, dell'angolo acuto φ, legato al rapporto $\frac{\tau_0}{c_0}$ dalla relazione (5.1), ossia

$$\left| \frac{\tau_0}{c_0} \right| = \cot\varphi.$$

Fissato il versore $\boldsymbol{k}$, rimangono univocamente individuati $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$, e quindi l'elica Γ, in corrispondenza ad ogni $c(s)$, che verifichi le condizioni iniziali più volte richiamate.

Scelta $c(s)$ e con essa la base Γ^* del cilindro, per es. di uno dei tipi studiati ai nn. 2-4, si hanno in conformità, per ogni punto P_0, *due* eliche osculatrici nel senso voluto (cioè aventi con C un contatto tripunto). Tali eliche, finchè φ è un vero angolo acuto $\left(\text{cioè} > 0 \text{ e } < \frac{\pi}{2}\right)$, appartengono a cilindri essenzialmente distinti; riescono però entrambe o destre o sinistre, avendo in P_0 la stessa curvatura c_0 e la stessa torsione τ_0; in modo preciso sono destre per $\tau_0 < 0$, sinistre nel caso opposto [1].

Nel caso limite $\varphi = \frac{\pi}{2} (\tau_0 = 0)$ le due eliche degenerano entrambe nella sezione retta Γ^*, ciò che potevasi ben prevedere, associando al § 2 l'osservazione finale del § 1, e del resto appariva già dalla (**5**.10), la quale, per $\varphi = \frac{\pi}{2}$, dà appunto $Q = Q^*$.

6. Γ **gobbe algebriche.** — Per una curva C gobba che in P_0 abbia torsione τ_0 nulla si possono ripetere le considerazioni del § 3; basta evidentemente sostituire alla C la sua proiezione sul piano osculatore in P_0. A noi basterà pertanto studiare il caso $\tau_0 \neq 0$, cioè il caso in cui i quattro punti P_0, P', P'', P''' non sono complanari. Noi dobbiamo costruire una curva algebrica di grado minimo che passi per questi quattro punti. Poichè le curve di secondo grado sono curve piane, noi dovremo ricorrere a curve di 3° grado, cioè a cubiche sghembe. Una tale cubica si può, come è noto, rappresentare in ∞^3 modi dando ciascuna delle quattro coordinate omogenee di un suo punto come uguale (o proporzionale) a un polinomio omogeneo di 3° grado in due parametri u, v, cioè, in coordinate cartesiane ponendo

$$x = \frac{q_1(u, v)}{q_0(u, v)}, \quad y = \frac{q_2(u, v)}{q_0(u, v)}, \quad z = \frac{q_3(u, v)}{q_0(u, v)}, \tag{6.1}$$

ove:

$$q_i(u, v) = b_{i0}u^3 + 3b_{i1}u^2v + 3b_{i2}uv^2 + b_{i3}v^3, \qquad (b_{ih} = \text{cost.}). \tag{6.2}$$

I dati del nostro problema non bastano per individuare tutti i coefficienti b. Dovremo, come nel caso piano, ricorrere a qualche ipotesi specialmente semplice per ottenere una Γ, quanto più semplice possibile. Se cominciamo dal

[1] Cfr. p. es. LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, Vol. I (seconda ediz., Bologna, Zanichelli, 1929). p. 70.

generalizzare le *parabole* studiate al § 4 per il caso piano, noi cominceremo dal considerare quelle cubiche, per cui il piano all' ∞ è piano osculatore. Per queste cubiche il polinomio q_0 sarà un cubo perfetto; e noi, con una trasformazione lineare intera omogenea sulle u, v, potremo rendere

$$q_0 = v^3. \tag{6.3}$$

Sarà allora

$$x = q_1(w, 1), \quad y = q_2(w, 1), \quad z = q_3(w, 1), \qquad \left(w = \frac{u}{v}\right). \tag{6.4}$$

E il parametro w sarà determinato a meno di una trasformazione lineare intera ($w' = \lambda w + \mu$ con λ, μ costanti).

Questo premesso, ritorniamo alla curva C, scegliendo come assi cartesiani x, y, z, la tangente, la normale principale e la binormale in P_0. Lo sviluppo (1.4) diventerà:

$$\left\{\begin{aligned} x &= s - \frac{c^2}{6} s^3 + \dots \\ y &= c\frac{s^2}{2} + c'\frac{s^3}{6} + \dots \\ z &= -\frac{c\tau}{6} s^3 + \dots \end{aligned}\right\} \quad \begin{gathered}\text{è posto} \\ c = c_0, \quad \tau = \tau_0, \\ c' = \left(\frac{dc}{ds}\right)_0\end{gathered} \tag{6.5}$$

da cui si deduce:

$$\left\{\begin{aligned} y &= \frac{c}{2} x^2 + \frac{c'}{6} x^3 + \dots \\ z &= -\frac{c\tau}{6} x^3 + \dots \end{aligned}\right. \tag{6.6}$$

Si potrebbero trovare altri sviluppi analoghi ai precedenti, ove s oppure x hanno l'ufficio di parametri, che si annullano nel punto considerato. Il più generale di tali sviluppi si otterrà assumendo come nuovo parametro un parametro t tale che:

$$s = at + bt^2 + dt^3 + \dots \qquad (a,\ b,\ d = \text{cost.};\ a \neq 0). \tag{6.7}$$

Si avrà allora

$$\left\{\begin{aligned} x &= at + bt^2 + \left(d - \frac{c^2a^3}{6}\right)t^3 + \dots \\ y &= \frac{c}{2} a^2t^2 + \left(\frac{c'a^3}{6} + cab\right)t^3 + \dots \\ z &= -\frac{c\tau}{6} a^3t^3 + \dots \end{aligned}\right. \tag{6.8}$$

Se noi trascuriamo i termini (indicati con «....») di ordine superiore al terzo, queste equazioni definiscono una cubica Γ iperosculatrice in $P_0(x=s=t=0)$ alla C ed osculatrice al piano all'infinito nel punto *improprio* V definito dalle

$$x:y:z=d-\frac{c^2a^3}{6}:\frac{c'a^3}{6}+cab:-\frac{c\tau}{6}a^3.$$

Questo punto è il vertice di un *cilindro parabolico* su cui giace la cubica.

Dato l'intorno di P_0, e il punto V, ne sono determinati anche i rapporti

$$\frac{d}{a^3},\ \frac{b}{a^2},$$

e quindi la precedente cubica Γ è perfettamente individuata (come si riconosce, assumendo at come nuovo parametro al posto del parametro t).

Per determinare una delle nostre cubiche, basterà quindi scegliere nel modo più semplice il suo punto improprio V. Una scelta semplicissima è p. es. quella definita dalle:

$$a=1,\quad b=0,\quad d=\frac{c^2}{6},$$

che equivale ad assumere $t=x$.

La cubica corrispondente

$$x:y:z:1=uv^2:\frac{c}{2}u^2v+\frac{c'}{6}u^3:-\frac{c\tau}{6}u^3:v^3$$

oscula il piano all'infinito in un punto V *del piano normale* $\mathrm{x}=0$, *ed ivi è tangente a questo piano.*

Queste proprietà (insieme a quella di essere iperosculatrice alla curva C nel punto P_0) *determinano completamente tale cubica* Γ.

Noi abbiamo determinato così anche un cilindro contenente la cubica e quindi anche i quattro punti P_0, P', P'', P''' infinitamente vicini. Per questi quattro punti passa anche una sfera. La intersezione di tale cilindro e di questa sfera dà una nuova risoluzione del problema mediante una curva che però non è di ordine minimo (è di quarto grado). La sfera testè considerata permette anche un'altra risoluzione del problema mediante quartiche di tipo assai semplice: le coniche sferiche.

7. Γ **coniche sferiche.** — Si chiama conica sferica la intersezione di una sfera con un cono avente il centro di questa come vertice. Si tratterà poi di scegliere una conica sferica passante per i quattro punti $P_0P'P''P'''$ infinitamente vicini posti sulla sfera, o, se si vuole, iperosculatrice ad una curva C

sferica in un suo punto P_0 (¹). Cambiando gli assi coordinati, usati al § 6 supponiamo che $x^2+y^2+z^2=1$ sia l'equazione della sfera; la curva C (sferica) sia definita dando le x, y, z in funzione di un parametro. Se questo è l'arco s della stessa curva, si hanno evidentemente le equazioni:

$$Sx^2 = Sx'^2 = 1; \quad Sxx' = Sx'x'' = 0$$
$$Sxx'' + 1 = Sx'x''' + Sx''^2 = 0,$$

donde

$$S(x''+x)x = 0, \quad Sxx''' = 0$$

ove

$$Sx^2 = x^2 + y^2 + z^2, \text{ ecc.}$$

Il quadrato c^2 del determinante delle x, x', x'' vale $Sx''^2 - 1$ ed è differente da zero, se noi escludiamo le curve C che hanno un flesso in P_0 (che sono incontrate dal cerchio massimo tangente in P_0 in tre punti infinitamente vicini). Lasciamo senz'altro al lettore l'esame di questo caso. Posto dunque

$$Sx''^2 = 1 + c^2,$$

ne traggiamo, derivando:

$$Sx''x''' = cc'.$$

Da queste equazioni deduciamo facilmente

$$x''' = -(c^2+1)x' + \frac{c'}{c}(x + x'') \text{ (²)}.$$

e analoghe in y, z.

Scegliamo ora gli assi in modo che P_0 sia il punto (0, 0, 1), che $y=0$ sia il cerchio massimo tangente a C in P_0, cosicchè in P_0 si abbia $x'=1$, $y'=0$, $z'=0$. Dalle

$$Sxx'' + 1 = Sx'x'' = 0$$

si trarrà che in P_0 è

$$x'' = 0, \quad y'' = c, \quad z'' = -1,$$

(¹) Se la curva data non fosse sferica, noi le sostituiremmo la curva sferica iperosculatrice.

(²) Infatti i punti (x, y, z), (α, β, γ) e (ξ, η, ζ) ove

$$\alpha = x', \ \beta = y', \ \gamma = z'; \quad c\xi = x + x'', \ c\eta = y + y'', \ c\zeta = z + z''$$

sono i vertici di un triangolo sferico trirettangolo. Si ha

$$x' = \alpha, \ \alpha' = c\xi - x \text{ (e analoghe in } y, z).$$

Se ne deduce $\xi' = -c\alpha$ e analoghe.

Da queste formole (che potremmo chiamare le formole di Frenet sulla sfera) si deduce tosto la formola del testo.

e per la formola precedente che è anche

$$x''' = -(c^2+1), \quad y''' = c', \quad z''' = 0.$$

Una conica sferica è determinata da un'equazione omogenea di 2° grado in x, y, z. Se tale conica deve contenere il punto P_0 ed ivi essere tangente alla C si riconosce, come nel caso analogo del piano, che essa avrà una equazione del tipo

$$2yz = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2.$$

Ora, dai valori iniziali sopra calcolati, si trae che per un intorno di P_0 sulla curva C valgono gli sviluppi:

$$x = s - \frac{c^2+1}{6}s^3 + \ldots,$$

$$y = \frac{c}{2}s^2 + c'\frac{s^3}{6} + \ldots,$$

$$z = 1 - \frac{s^2}{2} + \ldots,$$

dove sono trascurati i termini di grado uguale o maggiore di 4.

Se ne deduce che:

$$y = \frac{c}{2}x^2 + \frac{c'}{6}x^3 + \ldots$$

$$z = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots$$

(trascurando i termini di grado ≥ 4 nella x). Ora dalla equazione della conica considerata (unita alla $Sx^2 = 1$) si trae nel punto $x = y = 0$, $z = 1$:

$$y = \frac{1}{2}b_{11}x^2 + \frac{1}{2}b_{11}b_{12}x^3 + \ldots$$

$$z = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots.$$

Come nel caso del piano la condizione di iperosculazione per la curva C e per tale conica determina (nell'ipotesi $c \neq 0$) i coefficienti b_{11} e b_{12}, lasciando b_{22} arbitrario. Una semplicissima determinazione di b_{22} si ottiene, come nel caso del piano, imponendo che $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$.

Il semplice significato geometrico di questa condizione è che la conica sia tangente *al cerchio massimo* $z = 0$, *cioè al cerchio polare del punto* P_0 (cerchio che corrisponde pertanto alla retta all'infinito da noi considerata nel caso piano: in tale caso noi avevamo infatti parlato di parabole, cioè di coniche tangenti alla retta all'infinito).

8. Γ **cubiche cicliche.** — Invece di generalizzare le parabole, avremmo potuto generalizzare i cerchi, cioè le coniche contenenti due punti ciclici. Daremo qui un breve cenno di tale nuova soluzione del nostro problema. Noi cercheremo di scegliere a curve Γ curve del minimo grado possibile, cioè cubiche, le quali incontrino il piano all'infinito in tre punti A, B, B', supponendo che B, B' siano ciclici (immaginarii coniugati per curve reali) e che la direzione definita dal punto (improprio) A e la giacitura BB' siano normali (che cioè A sia il polo di BB' rispetto all'assoluto). Con le notazioni del § 6 noi potremmo rappresentare tale cubica con le (**6**.1) supponendo scelto il parametro $w = u : v$ in guisa che ai tre punti A, B, B' corrispondano i valori 0, $\pm i$ di tale parametro, in altre parole supponendo

$$q_0 = u(u^2 + v^2).$$

I punti B, B' per cui $u : v = \pm i$ dovranno giacere sulla conica assoluto; il punto A per cui $u = 0$ dovrà essere il polo della retta BB' rispetto a tale conica.

Ma, per sviluppare i calcoli relativi, preferiamo servirci invece della seguente osservazione del prof. FANO. *Il cono che proietta tale cubica da* A *è un cilindro* H *di rotazione; il cono che la proietta da* P_0 *è un cono passante per* B, B', *che quindi è tagliato secondo cerchi dai piani che tagliano secondo cerchi il cilindro* H.

Se x_1, y_1, z_1 sono proporzionali ai coseni direttori della direzione A, il cilindro H avrà un'equazione

$$f = Sx_1^2 Sx^2 - (Sxx_1)^2 + \lambda x + \mu y + \nu z + \rho = 0,$$

ove λ, μ, ν soddisfano alla

$$S\lambda x_1 = \lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1 = 0.$$

Supponiamo che il triedro coordinato sia, come al § 6, il triedro principale della curva in P_0.

Esprimendo che in P_0

$$f = \frac{df}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^3 f}{dx^3} = 0,$$

e ricordando le (**6**.6), troviamo che:

$$\rho = 0, \quad \lambda = 0, \quad c\mu + 2(y_1^2 + z_1^2) = 0,$$
$$\mu c' - \nu c\tau = 6cx_1 y_1 \cdot$$

Sostituendo i valori che se ne traggono per λ, μ, ν nella $S\lambda x_1 = 0$, si trova $\left(\text{posto } r = \frac{1}{c}\right)$:

$$(y_1^2 + z_1^2)(r\tau y_1 - r' z_1) + 3x_1 y_1 z_1 = 0. \tag{8.1}$$

Scelte x_1, y_1, z_1 (soddisfacenti a questa equazione *cubica*), resta determinato uno dei cilindri rotondi passanti per i quattro punti (infinitamente vicini) qui considerati.

Consideriamo ora i coni quadrici con vertice nell'origine P_0. Essi avranno un'equazione

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2ayz + 2bxz + 2\gamma xy = 0.$$

Imponendo a uno di essi di passare per i punti impropri $A(x_1, y_1, z_1)$ e B, $B'(z_1 x_1 \mp \mu y_1;\ z_1 y_1 \pm \mu x_1;\ -x_1^2 - y_1^2)$, ove è posto $\mu^2 = -Sx_1^2$, troviamo

$$(B - A - C)x_1^2 + (A - B - C)y_1^2 - 4\gamma x_1 y_1 = 0,$$
$$x_1^2(-ax_1 + by_1 + \gamma z_1) + y_1^2(-ax_1 + by_1 - \gamma z_1) + (B - A)x_1 y_1 z_1 = 0,$$

oltre alle altre quattro equazioni che si ottengono da queste rotando le x, y, z (queste sei equazioni equivalgono naturalmente a tre equazioni distinte).

Esprimendo che tale cono contiene i quattro soliti pnnti infinitamente vicini si trova che:

$$A = \gamma = 3Bc^2 - 4bc\tau = 0.$$

Eliminando i coefficienti A, B, C ecc. tra queste equazioni e le precedenti si trova

$$3cz_1(x_1^2 + y_1^2) + 2\tau x_1(y_1^2 + z_1^2) = 0 \ \text{(1)}. \tag{8.2}$$

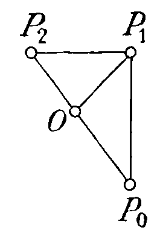
Noi abbiamo così trovato sul piano improprio le due cubiche (8.1) e (8.2). Ciascuna delle loro intersezioni dà una delle nostre Γ cicliche: si riconosce però che, nonostante la semplicità concettuale, questo metodo è, a lato pratico, il meno semplice di tutti.

9. **Una osservazione del prof. W. Blaschke a proposito del problema precedente.** — Non tutte le curve che si sono trovate nei paragrafi precedenti sono del tutto elementari. È dunque forse permesso di porre la questione in un modo un pochino differente: *Dato l'elemento di terz'ordine d'una curva, trovare una figura geometrica composta di punti e di rette invariantemente legata coll'elemento di terz'ordine e caratteristica per questo.*

(1) Lasciamo al lettore il facilissimo studio dei casi in cui qualcuna delle x_1, y_1, z_1 è nulla.

Nel piano si ottiene una tale figura per esempio nel modo seguente.

Prendiamo il punto P_0 della nostra curva, il rispettivo centro P_1 della evoluta e il centro P_2 della evoluta di questa evoluta. La figura composta da P_0, la tangente passante per P_0 e il centro P_2 della « seconda curvatura » caratterizza ovviamente l'elemento del terz'ordine nel modo desiderato e dipende da 5 costanti.



Invece di considerare P_2, si può anche considerare il punto O nel quale si proietta P_1 su P_0P_2 ortogonalmente. O è il polo (punto asintotico) dell'unica spirale logaritmica, che contiene il nostro elemento di terz'ordine.

Nel caso dello spazio a tre dimensioni si può precedere nel modo seguente. Dato l'elemento di terz'ordine esiste una sola direzione facente gli stessi angoli colle tre tangenti successive dell'elemento. Proiettando l'elemento in questa direzione su un piano ortogonale si ottiene un elemento di terz'ordine d'una curva piana. Sia O il punto asintotico della spirale logaritmica, che passa per questo elemento. Consideriamo la figura seguente: Il punto P_0 dell'elemento dato, la sua tangente t e la retta r che passa per O e fa angoli uguali colle tre tangenti successive. Questa figura dipende da 9 costanti e risolve la nostra questione. Anche qui si può considerare la spirale conica che tocca t in P_0 e ha l'asse r e che passa per l'elemento dato di terz'ordine.

Esiste dunque nel caso del piano e nel caso dello spazio una sola trasformazione puntuale infinitesima che conserva le lunghezze a meno di un fattore (similitudine), così che l'elemento dato appartenga ad una curva trasformata in sè stessa dal gruppo generato da questa trasformazione.

Un'altra caratterizzazione geometrica dell'elemento di terz'ordine d'una curva piana dovuta al prof. G. THOMSEN ed invariantiva rispetto al gruppo delle inversioni (gruppo di MOEBIUS) si trova nel § 24 del 3° volume della *Geometria differenziale* di W. BLASCHKE (Berlin, J. Springer, 1929).

Una trasformazione delle congruenze cicliche.

Memoria di PASQUALE CALAPSO (a Messina).

Sunto. - *In questa Memoria è stabilita una trasformazione di una data congruenza ciclica* (G) *in una nuova congruenza ciclica* (G_1), *attraverso un sistema di cinque sfere a due a due ortogonali. L'equazione di* LAPLACE *per i parametri direttori della retta* G_1 *è* l'aggiunta *di quella relativa a* (G). *La* (G_1) *è generale se tale è la* (G).

Nel presente lavoro è stabilita una trasformazione delle congruenze cicliche, che si riassume nel seguente teorema:

Sia (A) *una sfera dipendente da due parametri;* P *e* P' *i punti in cui la sfera tocca il suo inviluppo, e si supponga che sulle superficie* (Σ) *e* (Σ') *descritte dai punti* P *e* P' *si corrispondano le linee di curvatura. Si sa che i piani tangenti alla sfera nei punti* P *e* P' *si tagliano secondo una retta che genera una congruenza ciclica* (G).

Siano R *ed* S *i fuochi del raggio* G *e si costruiscano le sfere coi centri in* R *ed* S *passanti per* P; *queste due sfere* (R), (S) *risultano ortogonali alla sfera* (A) *ed ortogonali tra loro.*

Sia (A') *una sfera ortogonale alle sfere* (A), (R), (S) *e tale che sulla superficie, luogo del centro* A' *le linee corrispondenti alle linee di curvatura di* (Σ) *formino una rete armonica a* (G).

Sia infine (A'') *la sfera ortogonale alle sfere* (A), (R), (S), (A'); *se*

$$\frac{1}{X}, \quad \frac{1}{Y}, \quad \frac{1}{Z}$$

sono i raggi delle sfere (A'), (A''), (A), *le funzioni* X, Y, Z *sono le coordinate della direzione di una retta che genera una nuova congruenza ciclica* (G_1).

Ho chiamato (G_1) *la congruenza aggiunta di* (G), perchè l'equazione di LAPLACE a cui soddisfano X, Y, Z è l'aggiunta di quella a cui soddisfano le quantità analoghe relative a (G).

La trasformazione stabilita si presta ad ulteriori ricerche, che saranno da me sviluppate in un prossimo lavoro.

§ 1. Le sfere (A), (R), (S) e la congruenza (G).

1. Per una superficie (Σ), che riferiamo alle linee di curvatura, adottiamo le consuete notazioni; e cioè indichiamo con:

x, y, z le coordinate del punto P che genera (Σ);

X_r, Y_r, Z_r i coseni direttori degli spigoli del triedro principale nel punto P;

$Edu^2 + Gdv^2$, $Ddu^2 + D''dv^2$ la prima e seconda forma fondamentale.

Sono note le equazioni fondamentali

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E}X_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}X_2,\\
&\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_2 + \frac{D}{\sqrt{E}}X_3, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_2,\\
&\frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_1, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_1 + \frac{D''}{\sqrt{G}}X_3,\\
&\frac{\partial X_3}{\partial u} = -\frac{D}{\sqrt{E}}X_1, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = -\frac{D''}{\sqrt{G}}X_2,
\end{aligned}\right.$$

le cui conseguenze differenziali (equazioni di Codazzi e di Gauss) sono

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\right) = \frac{D''}{\sqrt{G}}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v},\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{G}}\right) = \frac{D}{\sqrt{E}}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{D}{\sqrt{E}}\frac{D''}{\sqrt{G}} = 0.
\end{aligned}\right.$$

2. Operiamo una trasformazione di Ribaucour della superficie (Σ) in una nuova superficie (Σ'); sulle superficie (Σ) e (Σ') si corrispondono le linee di curvatura ed esse sono focali di un inviluppo di sfere.

Il passaggio da (Σ) a (Σ') si immagina qui effettuato col procedimento da me esposto nella Memoria: *Intorno agl'inviluppi di sfere sulle cui focali si corrispondono le linee di curvatura* (« Annali di Matematica », Tomo XXVI della serie III, pag. 151 e seguenti), che richiamiamo brevemente.

Si assuma un sistema di funzioni

$$\lambda, \quad \mu, \quad w, \quad \psi, \quad \sigma, \quad \Phi, \quad \Omega,$$

soddisfacenti alle equazioni differenziali

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u}=-\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\mu+\dfrac{D}{\sqrt{E}}w+m\Phi, & \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}=\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\mu \\ \dfrac{\partial\mu}{\partial u}=\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\lambda, & \dfrac{\partial\mu}{\partial v}=-\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\lambda+\dfrac{D''}{\sqrt{G}}w+m\Omega \\ \dfrac{\partial w}{\partial u}=-\dfrac{D}{\sqrt{E}}\lambda, & \dfrac{\partial w}{\partial v}=-\dfrac{D''}{\sqrt{G}}\mu \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u}=\sqrt{E}\lambda, & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}=\sqrt{G}\mu \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial u}=\dfrac{\lambda}{\psi}(\Phi-\sigma\sqrt{E}), & \dfrac{\partial\sigma}{\partial v}=\dfrac{\mu}{\psi}(\Omega-\sigma\sqrt{G}) \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial v}=\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\Omega, & \dfrac{\partial\Omega}{\partial u}=\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\Phi \end{cases}$$

con la relazione

$$(4)\qquad \lambda^2+\mu^2+w^2=2m\psi\sigma,$$

in cui m è una costante arbitraria diversa da zero; se ne deducono le coordinate del punto ehe descrive (Σ') espresse dalle formole

$$(5)\qquad x_1=x-\frac{1}{m\sigma}(\lambda X_1+\mu X_2+wX_3).$$

Da queste, osservando le (1) e le (3) si ricava

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u}=\left[\left(\dfrac{\lambda^2}{m\psi\sigma}-1\right)X_1+\dfrac{\lambda\mu}{m\psi\sigma}X_2+\dfrac{\lambda w}{m\psi\sigma}X_3\right]\left(\dfrac{\Phi}{\sigma}-\sqrt{E}\right) \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v}=\left[\dfrac{\lambda\mu}{m\psi\sigma}X_1+\left(\dfrac{\mu^2}{m\psi\sigma}-1\right)X_2+\dfrac{\mu w}{m\psi\sigma}X_3\right]\left(\dfrac{\Omega}{\sigma}-\sqrt{G}\right) \end{cases}$$

donde si traggono gli elementi della superficie trasformata sotto la forma

$$(7)\qquad \begin{cases} \sqrt{E_1}=\varepsilon'\left(\dfrac{\Phi}{\sigma}-\sqrt{E}\right), & \sqrt{G_1}=\varepsilon''\left(\dfrac{\Omega}{\sigma}-\sqrt{G}\right), \\ \dfrac{D_1}{\sqrt{E_1}}=\varepsilon''\left(\dfrac{D}{\sqrt{E}}+\dfrac{\Phi w}{\psi\sigma}\right), & \dfrac{D_1''}{\sqrt{G_1}}=\varepsilon'\left(\dfrac{D''}{\sqrt{G}}+\dfrac{\Omega w}{\psi\sigma}\right) \text{ (1)}. \end{cases}$$

È questo il modo più generale per formare un inviluppo di sfere sulle

(1) Le quantità ε', ε'' rappresentano l'unità positiva o negativa, in guisa che le espressioni di $\sqrt{E_1}$, $\sqrt{G_1}$ risultino positive.

cui focali si corrispondono le linee di curvatura; le coordinate del centro della sfera (A) sono

$$x_0 = x - \frac{\psi}{w} X_3, \tag{8}$$

ed il raggio è

$$\frac{1}{Z} = \frac{\psi}{w}. \tag{9}$$

3. Richiamate dalla mia citata Memoria queste generalità, passiamo alla formazione degli altri elementi che interessano qui.

Un punto qualunque della tangente alla linea v della superficie (Σ') ha le coordinate della forma

$$x - \frac{1}{m\sigma}(\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3) + t\left[\left(\frac{\lambda^2}{m\psi\sigma} - 1\right)X_1 + \frac{\lambda\mu}{m\psi\sigma} X_2 + \frac{\lambda w}{m\psi\sigma} X_3\right],$$

per $t = \frac{\psi}{\lambda}$ si ha semplicemente

$$x - \frac{\psi}{\lambda} X_1, \tag{10}$$

ed il punto appartiene anche alla tangente alla linea v delle superficie Σ; dunque *le tangenti alla linea* v *delle due focali nei punti corrispondenti* P *e* P′ *si tagliano nel punto* R, *le cui coordinate sono le* (10); *similmente le tangenti alle linee* u *si tagliano nel punto* S *di coordinate*

$$x - \frac{\psi}{\mu} X_2; \tag{11}$$

la retta RS *risulta perciò intersezione di due reti ortogonali e se ne conclude che* RS *descrive una congruenza ciclica* (G).

4. Vogliamo formare l'equazione di LAPLACE a cui soddisfano i parametri direttori di questa retta.

Se poniamo

$$\xi = \frac{\lambda}{\psi}, \quad \eta = \frac{\mu}{\psi}, \tag{12}$$

come parametri direttori della retta possiamo assumere

$$X' = \frac{X_1}{\xi} - \frac{X_2}{\eta}. \tag{13}$$

Per il calcolo delle derivate di queste funzioni conviene anzitutto preparare le espressioni di $\frac{\partial \xi}{\partial v}$ e $\frac{\partial \eta}{\partial u}$, che si ottengono dalle (12) osservando le (3); si ha:

$$\frac{\partial \xi}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\eta-\xi\eta\sqrt{G},\quad \frac{\partial \eta}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\xi-\xi\eta\sqrt{E}; \tag{14}$$

donde successivamente

$$\left\{\begin{aligned} X_2\frac{\partial \xi}{\partial v}-\eta\frac{\partial X_1}{\partial v}&=-\xi\eta\sqrt{G}X_2,\\ X_1\frac{\partial \eta}{\partial u}-\xi\frac{\partial X_2}{\partial u}&=-\xi\eta\sqrt{E}X_1,\end{aligned}\right. \tag{15}$$

$$\left\{\begin{aligned} X_2\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\partial v}-\eta\frac{\partial^2 X_1}{\partial u\partial v}&=\frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}X_2+\frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}X_2\\ &\quad-\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial v}+\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial v}-\left(\frac{\xi}{X_1}+\frac{\eta}{X_2}\right)\frac{\partial X_1}{\partial v}\frac{\partial X_2}{\partial u},\\ X_1\frac{\partial^2 \eta}{\partial u\partial v}-\xi\frac{\partial^2 X_2}{\partial u\partial v}&=\frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u}X_1+\frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}X_1\\ &\quad-\frac{\xi}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial X_2}{\partial u}+\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial X_2}{\partial u}-\left(\frac{\xi}{X_1}+\frac{\eta}{X_2}\right)\frac{\partial X_1}{\partial v}\frac{\partial X_2}{\partial u}.\end{aligned}\right. \tag{16}$$

Ciò premesso deriviamo le (16), ed abbiamo

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial X'}{\partial u}&=\frac{1}{\xi}\frac{\partial X_1}{\partial u}-\frac{X_1}{\xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial u}-\frac{1}{\eta}\frac{\partial X_2}{\partial u}+\frac{X_2}{\eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial u},\\ \frac{\partial X'}{\partial v}&=\frac{1}{\xi}\frac{\partial X_1}{\partial v}-\frac{X_1}{\xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial v}-\frac{1}{\eta}\frac{\partial X_2}{\partial v}+\frac{X_2}{\eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial v},\end{aligned}\right. \tag{17}$$

infine derivando la prima di queste rispetto a v, ed osservando le (13), (16), (17) otteniamo l'equazione richiesta sotto la forma:

$$\frac{\partial^2 X'}{\partial u\partial v}=-\frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\frac{\partial X'}{\partial u}-\frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial X'}{\partial v}-\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial u}\right)\right]X'. \tag{18}$$

Questa equazione è l'aggiunta dell'altra

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\partial v}=\frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}, \tag{19}$$

dunque: *i parametri direttori della retta* (G) *soddisfano all'equazione aggiunta di* (19).

§ 2. Il sistema delle cinque sfere a due a due ortogonali.

5. Abbiamo precedentemente considerato tre sfere a due a due ortogonali, e cioè:

la sfera (A), *di centro*

$$x_0 = x - \frac{\psi}{w} X_3,$$

e di raggio

$$\frac{1}{Z} = \frac{\psi}{w};$$

la sfera (R), *di centro*

$$x - \frac{\psi}{\lambda} X_1,$$

e di raggio

$$\frac{1}{\xi} = \frac{\psi}{\lambda};$$

la sfera (S), *di centro*

$$x - \frac{\psi}{\mu} X_2,$$

e di raggio

$$\frac{1}{\eta} = \frac{\psi}{\mu}.$$

Vogliamo ora determinare una quarta sfera ortogonale alle precedenti, con la condizione che il suo centro descriva una rete armonica a (G).

Chiamiamo (A') questa sfera, indichiamo con x_0', y_0', z_0' il suo centro e con R il raggio; le condizioni di ortogonalità richieste si traducono nelle equazioni

$$R^2 = \Sigma(x_0' - x)^2 + 2\frac{\psi}{w}\Sigma(x_0' - x)X_3,$$

$$R^2 = \Sigma(x_0' - x)^2 + 2\frac{\psi}{\lambda}\Sigma(x_0' - x)X_1,$$

$$R^2 = \Sigma(x_0' - x)^2 + 2\frac{\psi}{\mu}\Sigma(x_0' - x)X_2,$$

che risolute danno

(20) $$x_0' = x + \rho(\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3),$$

(21) $$R^2 = \rho^2 \cdot 2m\psi\sigma + 2\psi\rho,$$

essendo ρ un fattore di proporzionalità.

Rimane ancora da esprimere che il punto $(x_0' y_0' z_0')$ descrive una rete armonica a (G).

A tale scopo deriviamo la (20), osservando sempre le (1) e le (3); abbiamo

$$\frac{\partial x_0'}{\partial u} = \sqrt{E} X_1 + \frac{\partial \rho}{\partial u}(\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3) + \rho m \Phi X_1,$$

donde risulta che un punto della tangente alla linea v della superficie descritta dal punto (x_0') ha le coordinate

$$x + \rho(\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3) + t\left[\sqrt{E} X_1 + \frac{\partial \rho}{\partial u}(\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3) + \rho m \Phi X_1\right]; \tag{22}$$

ma, dovendo questa passare per il fuoco R della retta G, dobbiamo disporre di ρ e t in guisa che le (22) si riducano alle (10); epperò si dovrà avere

$$\rho + t\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0, \quad t(\sqrt{E} + \rho m \Phi) = -\frac{\psi}{\lambda},$$

ed eliminando t si trova

$$\frac{\psi}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{1}{\rho}\sqrt{E}\lambda = m\Phi\lambda. \tag{23}$$

Analogamente dovendo la tangente alla linea u passare per il fuoco S si trova

$$\frac{\psi}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial v} - \frac{1}{\rho}\sqrt{G}\mu = m\Omega\mu. \tag{24}$$

Occorre integrare il sistema in ρ (23) e (24).

Allo scopo teniamo presenti le (3), per il che le precedenti si possono scrivere

$$\frac{\psi}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial(m\psi\sigma)}{\partial u},$$

$$\frac{\psi}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial v} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial(m\psi\sigma)}{\partial v};$$

se ne deduce integrando

$$-\frac{\psi}{\rho} = m\psi\sigma - \frac{c^2}{2}, \tag{25}$$

essendo c una costante arbitraria, ossia

$$\rho = \frac{-2\psi}{2m\psi\sigma - c^2}, \tag{26}$$

dopo di che la (21) dà

$$R = \frac{2c\psi}{2m\psi\sigma - c^2}. \tag{27}$$

6. Importa notare che sulla superficie descritta dal punto (x_0') le linee u, v sono coniugate.

Infatti dopo il valore di ρ, ora determinato, la espressione di $\frac{\partial x_0'}{\partial u}$ prende la forma

$$\frac{\partial x_0'}{\partial u} = \frac{\psi}{\rho\lambda}\frac{\partial \rho}{\partial u} X_1 + \frac{\partial \rho}{\partial u}(\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3),$$

e ne segue

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x_0'}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho}\right)\cdot\left(x - \frac{\psi}{\lambda}X_1\right). \tag{28}$$

D'altra parte se si cangia il valore della costante c e si chiamano x_0'', y_0'', z_0'' le coordinate del nuovo centro e con ρ' la quantità analoga a ρ, si avrà parimenti

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x_0''}{\rho'}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho'}\right)\cdot\left(x - \frac{\psi}{\lambda}X_1\right), \tag{29}$$

ed introdncendo un fattore h di proporzionalità si può scrivere

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x_0''}{\rho'}\right) &= h\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x_0'}{\rho}\right), \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho'}\right) &= h\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho}\right). \end{aligned}\right.$$

Similmente si trova

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{x_0''}{\rho'}\right) &= l\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{x_0'}{\rho}\right), \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho'}\right) &= l\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho}\right). \end{aligned}\right.$$

Ed ora se da queste si elimina $\frac{x_0''}{\rho'}$, $\frac{y_0''}{\rho'}$, $\frac{z_0''}{\rho'}$, $\frac{1}{\rho'}$ risulta che le quantità

$$\frac{x'}{\rho},\quad \frac{y'}{\rho},\quad \frac{z'}{\rho},\quad \frac{1}{\rho},$$

soddisfano ad una stessa equazione di LAPLACE, e rimane stabilita la proposizione.

7. Infine costruiamo una quinta sfera (A'') ortogonale a tutte le sfere precedenti; l'ortogonalità alle sfere (A), (R), (S) dà intanto per il centro ed il raggio di (A'') le espressioni

$$x_0'' = x + \rho'(\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3),$$
$$R'^2 = \rho'^2 \cdot 2m\psi\sigma + 2\psi\rho',$$

e l'ortogonalità di (A') ed (A'') si traduce nella relazione

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} + 2m\sigma = 0.$$

Osservando la (26), si ricava il valore di ρ', e cioè:

$$\rho' = -\frac{2\psi}{2m\psi\sigma + c^2},$$

ed in conseguenza si ottiene il valore del raggio sotto la forma

$$R' = -\frac{2ic\psi}{2m\psi\sigma + c^2}, \qquad (i = \sqrt{-1}). \tag{30}$$

Poichè le formole relative alla sfera (A'') non differiscono da quelle relative ad (A') che per lo scambio di c in ic, è chiaro che (come per (A')) il centro A'' descrive una rete armonica a (G).

§ 3. **La congruenza aggiunta.**

8. I risultati ottenuti nei paragrafi precedenti vengono completati dal seguente teorema:

Sia (A) *una sfera dipendente da due parametri;* P *e* P' *i punti in cui la sfera tocca il suo inviluppo;* (Σ) *e* (Σ') *le superficie descritte da* P *e* P' *su cui, per ipotesi, si corrispondono le linee di curvatura; si sa che l'intersezione dei piani tangenti alla sfera nei punti* P *e* P' *genera una congruenza ciclica* (G).

Siano R *ed* S *i fuochi del raggio* G; (R), (S) *le sfere coi centri nei detti fuochi e passanti per* P; *queste sfere risultano ortogonali alla* (A) *e ortogonali fra loro.*

Sia (A') *una sfera ortogonale alle sfere* (A), (R), (S) *e tale che sulla superficie, luogo del centro* A', *le linee corrispondenti alle linee di curva-*

tura di Σ *formino una rete armonica a* (G). *Sia* (A″) *una sfera ortogonale a tutte le sfere precedenti. Se*

$$\frac{1}{X}, \quad \frac{1}{Y}, \quad \frac{1}{Z},$$

sono i raggi delle sfere (A′), (A″), (A) *le funzioni* X, Y, Z *sono i parametri direttori di una retta che genera una nuova congruenza ciclica* (G_1).

Questo teorema discende subito dalle formole precedenti; infatti per la (9), (27) e (30) si ha

$$X = \frac{m\sigma}{c} - \frac{c}{2\psi}, \quad Y = i\left(\frac{m\sigma}{c} + \frac{c}{2\psi}\right), \quad Z = \frac{w}{\psi}, \tag{31}$$

e poichè (come risulta da un calcolo facile) le funzioni σ, $\frac{1}{\psi}$, $\frac{w}{\psi}$ soddisfano la (19), a questa stessa soddisfano X, Y, Z; di più osservando la (4) e le espressioni (12) di ξ, η si trova

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + \xi^2 + \eta^2 = 0, \tag{32}$$

e si conclude appunto che X, Y, Z sono i parametri direttori di una nuova congruenza ciclica (G_1).

Chiamiamo (G_1) la *congruenza aggiunta* di (G), perchè l'equazione di LAPLACE a cui soddisfano le coordinate dalla direzione della retta G_1 è l'aggiunta di quella a cui soddisfano le coordinate della direzione di G.

9. Ma la circostanza che merita essere rilevata è che *una qualunque congruenza ciclica è sempre interpretabile come congruenza aggiunta per un conveniente inviluppo di sfere con focali corrispondentisi per linee di curvatura.*

Ossia in termini analitici:

Se le funzioni

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \theta_3, \quad \xi, \quad \eta$$

soddisfano le equazioni

$$\frac{\partial^2\theta_r}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \theta_r}{\partial u} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \theta_r}{\partial v}, \qquad (r = 1, 2, 3), \tag{33}$$

$$\theta_3^2 + \xi^2 + \eta^2 = 2m\theta_1\theta_2, \qquad (m = \text{cost.}), \tag{34}$$

ponendo

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_1 = \sigma, \quad \theta_2 = \frac{1}{\psi}, \quad \theta_3 = \frac{w}{\psi}, \\ &\xi = \frac{\lambda}{\psi}, \quad \eta = \frac{\mu}{\psi}, \end{aligned}\right. \tag{35}$$

le λ, μ, w, ψ, σ *sono funzioni trasformatrici per un conveniente inviluppo di sfere.*

Infatti nella presente ipotesi si ponga

$$(35)\quad \begin{cases} \sqrt{E} = -\dfrac{1}{\xi\theta_2}\dfrac{\partial\theta_2}{\partial u}, & \sqrt{G} = -\dfrac{1}{\eta\theta_2}\dfrac{\partial\theta_2}{\partial v}, \\ \dfrac{D}{\sqrt{E}} = \dfrac{\theta_3^2}{\xi\theta_2}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\theta_2}{\theta_3}\right), & \dfrac{D}{\sqrt{G}} = \dfrac{\theta_3^2}{\eta\theta_2}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\theta_2}{\theta_3}\right); \end{cases}$$

per le (33) queste funzioni soddisfano le equazioni di CODAZZI; di più se esprimiamo che la θ_1 tratta dalla (34) soddisfa la (33), risulta anche verificata l'equazione di GAUSS; dunque *esiste una superficie* (Σ) *avente gli elementi fondamentali* (36).

Similmente *esiste una superficie* (Σ') *avente gli elementi fondamentali*

$$(37)\quad \begin{cases} \sqrt{E} = \varepsilon'\dfrac{1}{\xi\theta_1}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}, & \sqrt{G} = \varepsilon''\dfrac{1}{\eta\theta_1}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v}, \\ \dfrac{D_1}{\sqrt{E_1}} = \varepsilon''\dfrac{\theta_3^2}{\xi\theta_1}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_3}\right), & \dfrac{D_1''}{\sqrt{G_1}} = \varepsilon'\dfrac{\theta_3^2}{\eta\theta_1}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_3}\right). \end{cases}$$

Ed ora dimostriamo che partendo dalla superficie (Σ) ed operando la trasformazione di RIBAUCOUR definita dalle funzioni trasformatrici (35) si ottiene la (Σ').

Per lo scopo risolviamo le (35) in modo da avere le funzioni trasformatrici, e cioè

$$\sigma = \theta_1, \quad \psi = \frac{1}{\theta_2}, \quad w = \frac{\theta_3}{\theta_2}, \quad \lambda = \frac{\xi}{\theta_2}, \quad \mu = \frac{\eta}{\theta_2};$$

tenendo presenti le (33) e (36) troviamo facilmente

$$(38)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial u} = \sqrt{E}\lambda, & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} = \sqrt{G}\mu, \\ \dfrac{\partial w}{\partial u} = -\dfrac{D}{\sqrt{E}}\lambda, & \dfrac{\partial w}{\partial v} = -\dfrac{D''}{\sqrt{G}}\mu, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\mu, & \dfrac{\partial\mu}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\lambda. \end{cases}$$

Poscia introduciamo le funzioni Φ ed Ω colle formole

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\mu + \dfrac{D}{\sqrt{E}}w + m\Phi, \\ \dfrac{\partial\mu}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\lambda + \dfrac{D''}{\sqrt{G}}w + m\Omega, \end{cases}$$

ed osservando che la (34) si può scrivere

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2m\psi\sigma, \tag{40}$$

deduciamo

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial u} &= \frac{\lambda}{\psi}(\Phi - \sigma\sqrt{E}), \\ \frac{\partial\sigma}{\partial v} &= \frac{\mu}{\psi}(\Omega - \sigma\sqrt{G}). \end{aligned}\right. \tag{41}$$

Infine le (37) danno

$$\sqrt{E_1} = \varepsilon'\left(\frac{\Phi}{\sigma} - \sqrt{E}\right), \qquad \sqrt{G_1} = \varepsilon''\left(\frac{\Omega}{\sigma} - \sqrt{G}\right),$$

$$\frac{D_1}{\sqrt{E_1}} = \varepsilon''\left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\Phi w}{\psi\sigma}\right), \quad \frac{D_1''}{\sqrt{G_1}} = \varepsilon'\left(\frac{D''}{\sqrt{G}} + \frac{\Omega w}{\psi\sigma}\right),$$

e confrontando con le (7) rimane stabilita la proposizione.

La considerazione della congruenza aggiunta si presta ad ulteriori ricerche, che saranno da me sviluppate in un prossimo lavoro.

Inviluppi di sfere sulle cui focali si corrispondono le linee di curvatura e le linee asintotiche.

Memoria di PASQUALE CALAPSO (a Messina).

Sunto. - *In questa Memoria vengono formati gl' inviluppi di sfere, sulle cui focali si corrispondono le linee di curvatura e le linee asintotiche, con la considerazione della congruenza* aggiunta; *il problema è ridotto ad un sistema di* CAUCHY *e la soluzione generale dipende da quattro funzioni arbitrarie di una sola variabile.*

Lo scopo della presente Nota è la formazione degl' inviluppi di sfere sulle cui focali si corrispondono le linee di curvatura e le linee asintotiche (¹).

Si conoscono soluzioni particolari del problema; le trasformazioni di RIBAUCOUR di una superficie a curvatura totale costante in un'altra tale superficie, e le trasformazioni di RIBAUCOUR di una superficie minima in superficie minima, danno luogo ad inviluppi di sfere del tipo richiesto. Ma rimane la questione se gli esempi citati esauriscano o no la soluzione, ed in ogni caso occorre decidere del grado di generalità del problema.

Si sa che se (G) è una congruenza ciclica e (Σ), (Σ') sono due superficie ortogonali ai circoli del sistema ciclico associato a (G), le due superficie (Σ) e (Σ') sono focali di un inviluppo di sfere che si corrispondono per linee di curvatura. La corrispondenza delle asintotiche di (Σ) e (Σ') è traducibile in una condizione nuova per la (G).

Qui ho preferito considerare (Σ) e (Σ') dedotte dalla *congruenza aggiunta* di (G); perchè, assegnata la congruenza aggiunta, gli elementi di (Σ) e (Σ') sono costruibili in termini finiti. (Vedasi la mia Memoria precedente: *Una trasformazione delle congruenze cicliche*, in questo stesso fascicolo).

Impostata così la questione, la corrispondenza delle asintotiche dà luogo ad un' equazione caratteristica per la congruenza aggiunta, che si presta alla discussione.

Il problema è di quarto ordine.

(¹) L' attenzione sul soggetto mi è stata richiamata dal collega FUBINI, del che vivamente lo ringrazio.

§ 1. Equazioni fondamentali.

1. In una precedente Memoria (*Una trasformazione delle congruenze cicliche*, loc. cit.), introducendo un nuovo concetto e cioè della *congruenza aggiunta di una data congruenza ciclica,* ho dedotto un nuovo procedimento per formare un inviluppo di sfere a falde focali corrispondentisi per iinee di curvatura.

Il detto procedimento, in termini analitici, é il seguente:

Se le funzioni

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \theta_3, \quad \xi, \quad \eta$$

soddisfano le equazioni differenziali

$$\frac{\partial^2\theta_r}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \theta_r}{\partial u} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \theta_r}{\partial v}, \qquad (r = 1, 2, 3), \tag{1}$$

e la relazione finita

$$\theta_3^2 + \xi^2 + \eta^2 = 2m\theta_1\theta_2, \qquad (m = \text{cost.}), \tag{2}$$

esistono due superficie (Σ) *e* (Σ') *(nelle quali* u *e* v *sono i parametri delle linee di curvatura), individuate rispettivamente dagli elementi fondamentali*

$$\left\{\begin{aligned} &\sqrt{E} = -\frac{1}{\xi\theta_2}\frac{\partial\theta_2}{\partial u}, \quad \sqrt{G} = -\frac{1}{\eta\theta_2}\frac{\partial\theta_2}{\partial v}, \\ &\frac{D}{\sqrt{E}} = \frac{\theta_3^2}{\xi\theta_2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta_2}{\theta_3}\right), \quad \frac{D''}{\sqrt{G}} = \frac{\theta_3^2}{\eta\theta_2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta_2}{\theta_3}\right), \end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\sqrt{E_1} = \varepsilon'\frac{1}{\xi\theta_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial u}, \quad \sqrt{G_1} = \varepsilon''\frac{1}{\eta\theta_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial v}, \\ &\frac{D_1}{\sqrt{E_1}} = \varepsilon''\frac{\theta_3^2}{\xi\theta_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta_1}{\theta_3}\right), \quad \frac{D_1''}{\sqrt{G_1}} = \varepsilon'\frac{\theta_3^2}{\eta\theta_1}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta_1}{\theta_3}\right), \end{aligned}\right. \tag{4}$$

$$(\varepsilon' = \pm 1, \quad \varepsilon'' = \pm 1).$$

Le superficie (Σ) *e* (Σ'), *collocate convenientemente nello spazio, sono falde focali di un inviluppo di sfere.*

2. Qui vogliamo formare gl'inviluppi di sfere le cui falde si corrispondono per linee di curvatura e per linee asintotiche.

Dalle (3) si ha:

$$D = -\frac{\theta_3^2}{\xi^2\theta_2^2}\frac{\partial\theta_2}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta_2}{\theta_3}\right), \quad D'' = -\frac{\theta_3^2}{\eta^2\theta_2^2}\frac{\partial\theta_2}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta_2}{\theta_3}\right).$$

donde

$$\frac{D}{D''} = \frac{\dfrac{1}{\xi^2}\dfrac{\partial\theta_2}{\partial u}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\theta_2}{\theta_3}\right)}{\dfrac{1}{\eta^2}\dfrac{\partial\theta_2}{\partial v}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\theta_2}{\theta_3}\right)}.$$

Similmente

$$\frac{D_1}{D_1''} = \frac{\dfrac{1}{\xi^2}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_3}\right)}{\dfrac{1}{\eta^2}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_3}\right)},$$

sicchè la condizione della corrispondenza delle asintotiche si traduce nell'equazione

$$\frac{\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_3}\right)}{\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_3}\right)} = \frac{\dfrac{\partial\theta_2}{\partial u}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\theta_2}{\theta_3}\right)}{\dfrac{\partial\theta_2}{\partial v}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\theta_2}{\theta_3}\right)}. \tag{5}$$

Il problema proposto è così ridotto all'integrazione del sistema (1), (2), (5).

§ 2. **Teorema di esistenza.**

3. Veniamo ora a discutere l'esistenza ed il grado di generalità dell'integrale del sistema (1), (2), (5).

Per lo scopo operiamo la trasformazione di variabili

$$u' = u, \quad v' = u + v, \tag{6}$$

con cui il sistema prende la forma

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\theta_r}{\partial v'^2} = \frac{1}{\xi}\frac{\partial\xi}{\partial v'}\left(\frac{\partial\theta_r}{\partial u'} + \frac{\partial\theta_r}{\partial v'}\right) + \left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial u'} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial v'}\right)\frac{\partial\theta_r}{\partial v'} - \frac{\partial^2\theta_r}{\partial u'\partial v'}, \\ &\theta_3^2 + \xi^2 + \eta^2 = 2m\theta_1\theta_2, \\ &\frac{\left(\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u'} + \dfrac{\partial\theta_1}{\partial v'}\right)\left[\dfrac{\partial}{\partial u'}\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_3}\right) + \dfrac{\partial}{\partial v'}\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_3}\right)\right]}{\left(\dfrac{\partial\theta_2}{\partial u'} + \dfrac{\partial\theta_2}{\partial v'}\right)\left[\dfrac{\partial}{\partial u'}\left(\dfrac{\theta_2}{\theta_3}\right) + \dfrac{\partial}{\partial v'}\left(\dfrac{\theta_2}{\theta_3}\right)\right]} = \frac{\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v'}\dfrac{\partial}{\partial v'}\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_3}\right)}{\dfrac{\partial\theta_2}{\partial v'}\dfrac{\partial}{\partial v'}\left(\dfrac{\theta_2}{\theta_3}\right)}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Se deriviamo l'ultima di queste rispetto a v e sostituiamo per la $\frac{\partial^2\theta_r}{\partial v'^2}$ le espressioni date dalla prima, otteniamo un'equazione della forma

$$A\frac{\partial\xi}{\partial v'}+B\frac{\partial\eta}{\partial v'}+C=0, \tag{8}$$

in cui A e B sono espressioni nelle θ_r e le derivate prime che un facile calcolo dimostra *non* identicamente nulle.

Similmente la seconda dà

$$\xi\frac{\partial\xi}{\partial v'}+\eta\frac{\partial\eta}{\partial v'}+\ldots.=0, \tag{9}$$

e le (8), (9) ad opportune condizioni iniziali sono risolubili rispetto a $\frac{\partial\xi}{\partial v'}$, $\frac{\partial\eta}{\partial v'}$:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\xi}{\partial v'}&=\ldots.,\\ \frac{\partial\eta}{\partial v'}&=\ldots..\end{aligned}\right. \tag{10}$$

Dopo ciò la prima delle (7) e le (10) formano un sistema di CAUCHY. La soluzione del problema così posto dipende da otto funzioni arbitrarie della sola u', che sono i valori (per $v'=0$) di

$$\theta_1,\quad \theta_2,\quad \theta_3,\quad \xi,\quad \eta,\quad \frac{\partial\theta_1}{\partial v'},\quad \frac{\partial\theta_2}{\partial v'},\quad \frac{\partial\theta_3}{\partial v'}; \tag{11}$$

a causa della (9) l'espressione

$$\theta_3^2+\xi^2+\eta^2-2m\theta_1\theta_2,$$

è *funzione della sola* u, e disponendo dei valori iniziali (11) si può rendere nulla. Similmente si ragiona sull'ultima delle (7) e le funzioni arbitrarie si riducono a sei soltanto.

4. Occorre un'ultima considerazione per decidere del grado di generalità.

Interpretiamo per un momento θ_1, θ_2, θ_3 come coordinate di un punto e pensiamo la superficie $\overline{S}$ descritta da questo punto. Potendo sostituire u e v con funzione della sola u e funzione della sola v la linea

$$u+v=0,\quad \text{ossia}\quad v'=0,$$

è una *qualunque* linea della superficie $\overline{S}$, per esempio la sezione col piano perpendicolare all'asse θ_3 alla distanza 1. D'altra parte per individuare la linea u' si può assumere l'arco della linea $v' = 0$ contato a partire da un suo punto.

Ne segue che senza ledere la generalità possiamo ritenere

$$\theta_3 = 1, \quad \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial u'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial u'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial u'}\right)^2 = 1,$$

e risulta che *la soluzione del problema dipende essenzialmente da quattro funzioni arbitrarie.*

Gruppi delle equazioni binomie.

Memoria di GIULIO DARBI (a Napoli).

Sunto. - *La presente Memoria ha lo scopo di determinare le condizioni necessarie e sufficienti, perchè l'equazione binomia* $x^n - A = 0$ *ammetta un dato gruppo, dipendentemente dalla forma del termine noto* A, *essendo* n *un numero intero qualunque, assegnato a piacere.*

In una mia precedente memoria [1], mi occupai della teoria della riducibilità delle equazioni risolventi di GALOIS, relative alle equazioni binomie: $x^n - A = 0$, irriducibili in un certo campo K di razionalità a cui appartiene A. Se

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

è un'equazione a radici distinte: $x_1, x_2, \dots x_n$, si consideri l'espressione:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, \tag{2}$$

in cui $a_1, a_2, \dots a_n$ appartengono allo stesso campo K cui appartengono i coefficienti della (1), scelti in guisa tale che, per tutte le sostituzioni fra $x_1, x_2, \dots x_n$, la (2) acquisti $N = n!$ valori distinti $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_N$, che sono radici dell'equazione

$$V(\rho) = 0, \tag{3}$$

detta risolvente di GALOIS della (1).

Lo studio sulla riducibilità della (3) è di notevole [2] importanza, perchè è connesso alla determinazione del gruppo di GALOIS dell'equazione proposta (1); sappiamo [3] che, il grado di uno dei fattori, per esempio $W(\rho)$, irriducibile in K, in cui si spezza $V(\rho)$, è uguale all'ordine del gruppo di GALOIS della (1), le cui radici sono funzioni razionali in K di una qualunque

(1) Cfr. DARBI, *Sulla riducibilità delle equazioni algebriche.* Memoria II. « Annali di Matematica pura ed applicata », 1926-27, tomo IV.

(2) Cfr. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois*, 1899.

(3) Cfr. BIANCHI, op. cit.

radice della (3), che è equazione normale (¹). Sappiamo (²) inoltre che, il gruppo di GALOIS (G) della (1) gode della proprietà, per la quale è lecito di applicare le sostituzioni di (G) su $x_1, x_2, \dots x_n$, che figurano in qualunque relazione razionale fra le radici, con coefficienti appartenenti a K, senza che tale relazione cessi di essere verificata; inversamente: se una funzione razionale $F(x_1, x_2, \dots x_n)$ di $x_1, x_2, \dots x_n$, con coefficienti appartenenti a K, rimane numericamente invariata per qualunque sostituzione di (G), essa è razionalmente nota, cioè appartiene al campo K.

Per facilitare la comprensione della presente memoria, continuazione e completamento dell'altra già citata, credo utile accennare per sommi capi i risultati ottenuti in quella.

a) Se un'equazione binomia $x^n - A = 0$, è irriducibile in un camdo K di razionalità, a cui appartiene A, il grado di uno dei fattori irriducibili in K, in cui si spezza il 1° membro ddll'equazione risolvente $V(\rho) = 0$, ossia l'ordine del gruppo di GALOIS della data equazione binomia, è divisore del prodotto $n\mu$ ed è multiplo comune ad n e μ; la condizione necessaria e sufficiente perchè tale grado sia uguale ad $\frac{n\mu}{i}$, è che i sia divisore comune ad n e μ; inoltre A sia uguale alla potenza i^{ma} di un numero del campo: (K, ε), e non ad altra potenza di un numero dello stesso campo, con esponente maggiore di i, essendo ε radice di $f(\varepsilon) = 0$, cioé dell'equazione alle radici primitive n^{me} dell'unità, ed il numero μ è il grado di uno dei fattori irriducibili in K, in cui si spezza $f(\varepsilon)$.

b) L'ordine del gruppo di GALOIS di un'equazione binomia: $x^n - A = 0$, di grado dispari, irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità a cui appartiene A, è uguale al prodotto nr, ove:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}; \quad r = p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_i^{\alpha_i - 1}(p_1 - 1) \dots (p_i - 1),$$

essendo $p_1, p_2, \dots p_i$ numeri primi dispari differenti fra loro; r rappresenta il grado dell'equazione $f(\varepsilon) = 0$ alle radici primitive n^{me} dell'unità; equazione irriducibile in (C) (³). Un caso particolare giá noto (⁴) si ha per n uguale ad un numero primo dispari p, per cui l'ordine del gruppo di GALOIS è uguale al prodotto $p(p - 1)$.

(¹) Chiamiamo normale un'equazione di cui tutte le radici si possono esprimere razionalmente per mezzo di una di esse. Cfr. WEBER, *Traité d'algèbre supérieure*, 1898.

(²) Cfr. BIANCHI, op. cit.

(³) Cfr. BIANCHI, op. cit., pag. 209.

(⁴) Cfr. NETTO, *Teoria delle sostituzioni e sua applicazione all'algebra*. Teor. IV, pag. 220.

c) Se un' equazione binomia $x^n - A = 0$, irriducibile in (C) a cui appartiene A, è di grado pari, perchè $V(\rho)$ si spezzi in fattori irriducibili in (C), ciascuno di grado nr, è necessario e sufficiente che, A non sia uguale al quadrato di un numero del campo (C, ε), essendo ε una radice primitiva n^{ma} dell' unità, che soddisfa ad un' equazione di grado r, la quale è irriducibile in (C).

d) La condizione necessaria e sufficiente, affinchè l' equazione binomia irriducibile in (C):

$$x^n - A = 0, \quad \text{ove} \quad n = 2p_1 p_2 \dots p_i,$$

a cui appartiene A, ammetta il gruppo di Galois d' ordine massimo, cioè uguale al prodotto:

$$2p_1 p_2 \dots p_i (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_i - 1),$$

o ciò ch' è lo stesso, affinchè $V(\rho)$ si spezzi in fattori irriducibili in (C), ciascuno di grado uguale al precedente prodotto, è che A non abbia la forma:

$$(-1)^{\frac{p_1-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{p_2-1}{2}} \dots (-1)^{\frac{p_i-1}{2}} \cdot p_1 p_2 \dots p_m a^2,$$

ove $p_1, p_2, \dots p_m$ sono scelti a piacere fra $p_1, p_2, \dots p_i$, che sono numeri primi dispari differenti fra loro, essendo a un numero di (C); se poi A è della precedente forma, l' ordine del gruppo di Galois è uguale al prodotto:

$$p_1 p_2 \dots p_i (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_i - 1).$$

e) Le equazioni binomie di 4° grado irriducibili in (C), le quali non siano della forma $x^4 + a^2 = 0$, ammettono gruppi di Galois di ottavo ordine; se hanno la precedente forma, sono normali, cioè con gruppo di Galois di quarto ordine, essendo a un numero di (C); la condizione necessaria e sufficiente affinchè, l' equazione binomia $x^{2^\lambda} - A = 0$, irriducibile in (C), a cui appartiene A, abbia il gruppo di Galois d' ordine massimo, cioè uguale al prodotto $2^{2\lambda-1}$, è che A non sia uguale al quadrato di un numero del campo (C, ε), ossia che non abbia alcuna delle forme:

$$-a^2; \quad \pm 2b^2,$$

essendo a, b numeri di (C); nel caso che A abbia una delle precedenti forme, senza essere a uguale al quadrato di un numero di (C), il gruppo di Galois è di ordine $2^{2\lambda-2}$. In generale, affinchè l' ordine del gruppo sia uguale alla potenza $2^{2\lambda-i}$, per i variabile da tre a λ, è necessario e sufficiente che A abbia una delle seguenti forme:

$$-a^{2^{i-1}}, \quad -2^{2^{i-2}} a^{2^{i-1}};$$

i casi di $i = 1$, $i = 2$ sono stati già esaminati.

Per $i=3$, la seconda delle precedenti forme diventa -2^2a^4; per il teorema del CAPELLI [1], l'equazione $x^{2^\lambda}+4a^4=0$ è riducibile in (C); onde, per $i=3$ è da considerare la sola prima forma, cioè $-a^{2^2}$.

f) La condizione necessaria e sufficiente, affinchè un'equazione binomia $x^n-A=0$, irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità cui appartiene A, sia normale, è che abbia una delle tre seguenti forme:

$$x^6+3a^2=0;\quad x^{2^\lambda}+a^{2^{\lambda-1}}=0;\quad x^{2^\lambda}+2^{2^{\lambda-2}}a^{2^{\lambda-1}}=0,$$

ove a è un numero di (C); giova notare che, per i casi di $\lambda=2$, $\lambda=3$, giusto le osservazioni del teorema *e*), si deve considerare la seconda delle precedenti equazioni.

La presente Memoria ha lo scopo di riprendere la precedente quistione, per trattarla da un punto di vista più generale, col considerare il grado n di un'equazione binomia della forma $n=2^\lambda p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_i^{\alpha_i}$, cioè suscettibile di assumere qualunque valore, e studiare le condizioni necessarie e sufficienti perchè l'equazione ammetta un dato gruppo, dipendentemente dalla forma del termine noto A.

Debbo rendere ancora vive grazie al prof. D. HILBERT, dell'Università di Gottingen, per avermi consigliato di proseguire questi studi, per i cui risultati da me ottenuti nella precedente menzionata Memoria, mostrò benevolo interessamento, condiviso anche dal prof. LUIGI BIANCHI.

Enuncio i risultati principali ottenuti nella presente Memoria:

a') La condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'equazione binomia $x^n-A=0$, essendo $n=2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_i^{\alpha_i}$, la quale sia irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartiene A, ammetta il gruppo di GALOIS d'ordine massimo $n\cdot r$, essendo:

$$r=p_1^{\alpha_1-1}\cdot p_2^{\alpha_2-1}\dots p_i^{\alpha_i-1}\cdot(p_1-1)\dots(p_i-1),$$

è che A non sia uguale al quadrato di un numero del campo (C,ε), ossia A non abbia la forma:

$$(-1)^{\frac{p_1-1}{2}}(-1)^{\frac{p_2-1}{2}}\dots(-1)^{\frac{p_m-1}{2}}p_1p_2\dots p_m\cdot a^2,$$

ove $p_1, p_2,\dots p_m$ sono numeri primi dispari differenti fra loro, scelti a piacere fra $p_1, p_2,\dots p_i$; il numero a appartiene a (C); r è il grado dell'equazione

(1) Cfr. CAPELLI, *Sulla riducibilità delle equazioni algebriche.* « Rendiconti della Reale Accademia delle Scienze di Napoli », 1898.

$f(\varepsilon) = 0$, alle radici primitive n^{me} dell'unità; se A è della precedente forma, il gruppo è di ordine uguale alla metà di nr.

b') La condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'equazione binomia $x^n - A = 0$, essendo $n = 2^\lambda p_1^{\alpha_1} \dots p_i^{\alpha_i}$, la quale sia irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartiene A, ammetta il gruppo d'ordine massimo, uguale ad nr, essendo:

$$r = 2^{\lambda-1} p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_i^{\alpha_i - 1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_i - 1),$$

è che A non abbia alcuna delle seguenti forme:

$$-a^2(-1)^{\frac{p_1-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{p_2-1}{2}} \dots (-1)^{\frac{p_m-1}{2}} \cdot p_1 p_2 \dots p_m;$$

$$\pm 2b^2(-1)^{\frac{p_1-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{p_2-1}{2}} \dots (-1)^{\frac{p_m-1}{2}} \cdot p_1 p_2 \dots p_m,$$

essendo $p_1, p_2, \dots p_m$ scelti a piacere fra $p_1, p_2, \dots p_i$, che sono numeri primi dispari differenti fra loro; a, b sono numeri di (C); nel caso che A abbia una delle precedenti forme, l'ordine del gruppo di GALOIS è uguale ad $\frac{nr}{2}$.

Per $\lambda = 1$, si applichi il teorema *a'*); per $\lambda = 2$ si consideri la prima delle precedenti espressioni, cioè:

$$-a^2(-1)^{\frac{p_1-1}{2}} \dots (-1)^{\frac{p_m-1}{2}} p_1 p_2 \dots p_m.$$

c') Un'equazione binomia di grado pari $x^n - A = 0$, irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartiene A, essendo $n = 2^\lambda p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}, \dots p_i^{\alpha_i}$, ha l'ordine del gruppo di GALOIS della forma:

$$2^{2\lambda-h-1} \cdot p_1^{2\alpha_1-1} \cdot p_2^{2\alpha_2-1} \cdot \dots p_i^{2\alpha_i-1} \cdot (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_i - 1),$$

ove h, al variare di A, può assumere i valori da zero a $(\lambda - 1)$, se $\lambda > 1$, ed i valori zero ed uno per $\lambda = 1$.

d') La condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione binomia $x^n - A = 0$, essendo $n = 2^\lambda p_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$, la quale sia irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartiene A, abbia il gruppo di GALOIS di ordine t, essendo t, per il teorema precedente *c'*), della forma:

$$2^{2\lambda-h-1} p_1^{2\alpha_1-1} p_2^{2\alpha_2-1} \dots p_i^{2\alpha_i-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_i - 1),$$

è che A sia uguale alla potenza $-a^{2^{h-1}}$, in cui ad a si sostituisca una delle due espressioni:

$$-(-1)^{\frac{p_1-1}{2}}(-1)^{\frac{p_2-1}{2}}\dots(-1)^{\frac{p_m-1}{2}}p_1p_2\dots p_m a_1^2$$

$$\pm 2(-1)^{\frac{p_1-1}{2}}(-1)^{\frac{p_2-1}{2}}\dots(-1)^{\frac{p_m-1}{2}}p_1p_2\dots p_m a_1^2,$$

ove a_1 è un numero di (C); $p_1, p_2, \dots p_m$ sono scelti a piacere fra $p_1, p_2, \dots p_i$, che sono numeri primi dispari differenti fra loro. Per $\lambda = 1$, si applichi il teorema a'); per $\lambda = 2$, si applichi la prima delle precedenti espressioni; per $h = 0$, si applichi il teorema b').

1. Si abbia l'equazione:

(1) $$x^n - A = 0,$$

irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartiene A, essendo $n = 2p^\alpha$, ove p è un numero primo dispari. Denotiamo con

(2) $$f(\varepsilon) = 0$$

l'equazione alle radici primitive n^{me} dell'unità; sappiamo [1] che la (2) è equazione abeliana a gruppo ciclico; si ha:

(2') $$f(\varepsilon) = \varepsilon^{p^{\alpha-1}\cdot(p-1)} - \varepsilon^{p^{\alpha-1}\cdot(p-2)} + \dots + \varepsilon^{p^{\alpha-1}\cdot 2} - \varepsilon^{p^{\alpha-1}} + 1 = 0.$$

Ponendo $\varepsilon^{\alpha^{p-1}} = -\alpha$, la (2') si trasforma nell'equazione della divisione della circonferenza in p parti uguali, cioè:

(3) $$\alpha^{p-1} + \alpha^{p-2} + \dots + \alpha + 1 = 0.$$

Dal teorema precedente c), si ricava che, l'ordine massimo del gruppo di GALOIS della (1) è uguale ad $n\nu$, se A non è uguale a quadrato di un numero del campo (C, ε).

Supponiamo che si abbia:

(3') $$A = \varphi(\varepsilon)^2,$$

ove $\varphi(\varepsilon)$ denota il simbolo di una funzione razionale intera di ε, con coefficienti appartenenti a (C). Una funzione di ε, la quale soddisfa alla (3'), è dunque una funzione a due valori; si osservi che [2], il gruppo di GALOIS della (2') è ciclico, cioè è costituito dalle successive potenze di una stessa

---

(1) Cfr. BIANCHI, op. cit., pagg. 212-222-223.

(2) Cfr. BIANCHI, op. cit., pagg. 212-222-223.

sostituzione circolare; onde, esiste in (G) un sottogruppo (H), ed uno solo d'ordine p^α, cioè d'indice due rispetto a (G), tale che le sostituzioni di (H), e solo queste, lasciano inalterato il valore numerico di $\varphi(\varepsilon)$.

Possiamo prendere:

$$\varphi(\varepsilon) = a(\eta_0 - \eta_1), \tag{4}$$

essendo a un numero di (C); η_0, η_1 sono definiti dalle uguaglianze:

$$\eta_0 = \alpha + \alpha^{g^2} + \alpha^{g^4} + \dots + \alpha^{g^{p-3}}; \quad \eta_1 = \alpha^g + \alpha^{g^3} + \dots + \alpha^{g^{p-2}};$$

α è radice della (3); g è una radice primitiva dell'unità nel senso dei numeri, secondo il modulo p. Dalla (4) si ha $\varphi(\varepsilon)^2 = a^2(-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p$. Qualunque funzione razionale di ε, la quale soddisfa la (3'), non può essere che della forma $\pm b\sqrt{(-1)^{p-1} \cdot p}$. La (3') diventa:

$$A = a^2(-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p. \tag{4'}$$

Se il grado n dell'equazione binomia è uguale al prodotto $2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$, essendo p_1, p_2 numeri primi differenti fra loro, sappiamo [1] che, le radici primitive n^{me} dell'unità si possono ottenere, moltiplicando una radice primitiva dell'unità di grado $2p_1^{\alpha_1}$ per una radice primitiva dell'unità di grado $p_2^{\alpha_2}$. Dimostriamo il seguente teorema: se $f(\varepsilon) = 0$, di grado λ in ε, rappresenta l'equazione alle radici primitive t^{me} dell'unità, e $\varphi(\omega) = 0$, di grado μ in ω, rappresenta l'equazione alle radici primitive q^{me} dell'unità, essendo t, q primi fra loro, ciascuna delle precedenti eqnazioni è irriducibile nel campo che si ottiene aggiungendo a (C) una radice dell'altra equazione. Rappresenti:

$$\psi(y) = 0 \tag{5}$$

l'equazione irriducibile in (C), alle radici $(tq)^{me}$ dell'unità, di grado s in y; per quanto si è detto, si deve avere:

$$s = \mu\lambda; \quad y = \varepsilon\omega. \tag{6}$$

Supponiamo che l'equazione $\varphi(\omega) = 0$ sia riducibile nel campo (C, ε); denotiamo con $\varphi_1(\omega, \varepsilon)$ uno dei fattori di grado h in ω, irriducibile nel precedente campo, in cui si spezza $\varphi(\omega)$. Consideriamo il sistema:

$$\varepsilon \cdot \omega = y; \quad \varphi_1(\omega, \varepsilon) = 0; \quad f(\varepsilon) = 0,$$

dal quale eliminiamo ω, ε. La risultante $\psi_1(y) = 0$, i cui coefficienti appartengono a (C), è di grado $h\lambda$ in y. Le due equazioni $\psi(y) = 0$, $\psi_1(y) = 0$, di

[1] Cfr. CAPELLI, ***Istituzioni di analisi algebrica,*** **1902, pagg. 446-632.**

cui la prima è irriducibile in (C), hanno una radice in comune; quindi $\psi_1(y)=0$ deve ammettere tutte le radici dell'altra, mentre il suo grado è minore di quello di $\psi(y)=0$, come risulta dalla prima delle (6). e dall'essere $\mu > h$. Onde, l'equazione $\varphi(\omega)=0$ è irriducibile nel campo (C, ε).

Riprendiamo l'equazione $x^n - A = 0$, essendo $n = 2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$. Per il teorema c), sappiamo che, affinchè il gruppo di Galois della precedente equazione abbia il massimo ordine $n\nu$, è necessario e sufficiente che, A non sia uguale al quadrato di un numero del campo (C, ε). Supponiamo che si abbia:

$$A = \varphi(\varepsilon)^2. \tag{7}$$

Se con ω, τ rappresentiamo due radici primitive dell'unità, rispettivamente di grado $2p_1^{\alpha_1}$, $p_2^{\alpha_2}$, la precedente uguaglianza, tenuto conto che $\varepsilon = \omega\tau$, si può scrivere così:

$$A = \varphi(\omega, \tau)^2, \tag{7'}$$

essendo, $\varphi(\omega, \tau)$ una funzione razionale intera di ω con coefficienti appartenenti al campo (C, τ).

Rappresenti $f(\omega)=0$ l'equazione irriducibile in (C), alla quale soddisfa ω; per quanto si è detto, tale equazione è anche irriducibile in (C, τ), ed è abeliana a gruppo ciclico (G).

Si tratta di determinare la più generale funzione di ω, cioè $\varphi(\omega, \tau)$ con coefficienti appartenenti al campo (C, τ), la quale, per le sostituzioni di (G), acquisti due valori assoluti uguali e di segno contrario, ossia che soddisfi la (7'). Ora, tale quistione è identica a quella già trattata nelle precedenti pagine; per risolverla, basta applicare le (4), (4'). Si ha quindi $A = a^2(-1)^{\frac{p_1-1}{2}}p_1$, *essendo* a *un numero di* (C, τ); poichè A, p_1, sono numeri di (C), anche a^2 deve appartenere a (C), ed è quindi della forma $(-1)^{\frac{p_2-1}{2}}p_2a_1^2$, ove a_1 appartiene al precedente campo; si ricava $A = (-1)^{\frac{p_1-1}{2}}\cdot(-1)^{\frac{p_2-1}{2}}\cdot p_1\cdot p_2 a_1^2$. Se il grado n dell'equazione $x^n - A = 0$ è uguale al prodotto $2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_i^{\alpha_i}$, seguendo un procedimento del tutto analogo a quello testè tenuto, si ricava che, la condizione necessaria e sufficiente affinchè A sia uguale al quadrato di un numero del campo (C, ε), è che A abbia la forma:

$$a^2p_1p_2\dots p_m(-1)^{\frac{p_1-1}{2}}(-1)^{\frac{p_2-1}{2}}\dots(-1)^{\frac{p_m-1}{2}}, \tag{8}$$

essendo $p_1, p_2, \dots, p_m$ numeri primi dispari, scelti a piacere fra $p_1, p_2, \dots p_i$. Determiniamo l'ordine del gruppo di Galois della precedente equazione binomia, dipendentemente dalla forma di A, uguale o no alla (8). Sia ε una radice primitiva n^{ma} dell'unità, la quale soddisfi l'equazione $f(\varepsilon)=0$, il cui grado r, come sappiamo, è uguale al prodotto:

$$p_1^{\alpha_1-1}\dots p_i^{\alpha_i-1}(p_1-1)\dots(p_i-1). \tag{8'}$$

Ricordiamo il seguente teorema [1], già da me dimostrato:

La condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'equazione f(x) = 0, *(a radici distinte) che si ottiene eliminando le* n — 1 *variabili*: y, z,... u, v, w *dalle* n *equazioni del sistema*:

$$\begin{aligned}&f_1(x, y, z, \dots u, v, w)=0, \quad f_2(y, z, \dots u, v, w)=0, \quad f_3(z, \dots u, v, w)=0, \dots,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &f_{n-2}(u, v, w)=0, \quad f_{n-1}(v, w)=0, \quad f_n(w)=0,\end{aligned} \tag{9}$$

le quali sono razionali intere rispetto alle variabili x, y, z,... u, v, w, *con coefficienti appartenenti ad un campo* K *di razionalità, sia irriducibile in tale campo, è che le equazioni*:

$$\begin{aligned}&f_1(x;\, y_1, z_1, \dots u_1, v_1, w_1)=0, \quad f_2(y;\, z_1, \dots u_1, v_1, w_1)=0,\\ &f_3(z; \dots u_1, v_1, w_1)=0, \dots \quad f_{n-1}(v;\, w_1)=0, \quad f_n(w)=0,\end{aligned}$$

siano irriducibili rispettivamente nei campi:

$(K;\, y_1, z_1, \dots u_1, v_1, w_1)$, $(K;\, z_1, \dots u_1, v_1, w_1)$, $(K; \dots u_1, v_1, w_1)$, ... $(K;\, w_1)$, K,

ove: $(y_1, z_1, \dots u_1, v_1, w_1)$ *rappresenta una soluzione, scelta a piacere, del sistema costituito dalle ultime* n — 1 *equazioni del sistema* (9).

Giova notare che, se in qualche equazione di (9), una delle variabili, per esempio y, si può esprimere in funzione razionale intera delle altre, che figurano in detta equazione, il sistema si può ridurre ad una variabile di meno e ad una equazione di meno; al nuovo sistema si applica il teorema, testè enunciato.

Ciò posto, se indichiamo con $x_1, x_2, \dots x_n$ le radici della data equazione binomia $x^n - A = 0$, essendo $n = 2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_i^{\alpha_i}$, possiamo rappresentare tali radici come segue: x, $x\varepsilon$, $x\varepsilon^2$, ... $x\varepsilon^{n-1}$. La (2) della prima pagina diventa: $\rho = x(a_1 + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^2 + \dots + a_n\varepsilon^{n-1})$, ossia della forma $\rho = x\Omega(\varepsilon)$, ove a_1, $a_2, \dots a_n$ sono numeri di (C). Consideriamo il sistema:

$$\begin{aligned}\rho &= x\Omega(\varepsilon)\\ x^n &= A\\ f(\varepsilon) &= 0.\end{aligned} \tag{9'}$$

[1] Cfr. DARBI, *Sulla riducibilità delle equazioni algebriche.* « Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei », 1923, 1° semestre.

Se A non ha la forma (8), abbiamo visto che non può essere uguale al quadrato di un numero del campo (C, ε); onde, applicando il teorema c), il gruppo di GALOIS dell'equazione binomia $x^n - A = 0$ é di ordine nr, essendo r uguale ad (8'). Vediamo che diventa l'ordine del gruppo, se A è uguale al quadrato di un numero di (C, ε), ossia, se A ha la forma (8). Si abbia $A = \varphi(\varepsilon)^2$. Il sistema (9') si riduce al seguente:

$$\begin{gathered} \rho = x\Omega(\varepsilon) \\ x^{p_1^{\alpha_1} \dots p_i^{\alpha_i}} = \varphi(\varepsilon) \\ f(\varepsilon) = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Se l'equazione $x^{p_1^{\alpha_1} \dots p_i^{\alpha_i}} = \varphi(\varepsilon)$, fosse riducibile nel campo (C, ε), per il teorema del CAPELLI [1], dovrebbe essere $\varphi(\varepsilon)$ uguale alla potenza di grado p_i di un numero di tal campo, cioè si avrebbe $\varphi(\varepsilon) = \Phi(\varepsilon)^{p_i}$, e quindi $A = [[\Phi(\varepsilon)]^2]^{p_i}$; essendo per ipotesi l'equazione $x^n - A = 0$ irriducibile in (C), non può $\Phi(\varepsilon)^2$ appartenere a (C); onde, ponendo $\Phi(\varepsilon)^2 = z$, si avrebbe $A = z^{p_i}$; poichè ε è radice di equazione Abeliana, anche z deve soddisfare ad un'equazione Abeliana e quindi normale; il che è assurdo, perchè non esiste un'equazione normale della forma $A = z^{p_i}$, con p_i numero primo dispari, ed A numero di (C), come risulta dal teorema f). La risultante $\psi(\rho) = 0$, che si ottiene eliminando, dalle equazioni del sistema (10), le variabili x, ε, di grado $\frac{nr}{2}$, è irriducibile in (C), come risulta dal teorema relativo alla risultante del sistema (9). Il precedente grado $\frac{nr}{2}$ rappresenta l'ordine del gruppo di GALOIS dell'equazione binomia.

2. Da quanto si è detto nel precedente articolo, possiamo enunciare il seguente teorema:

La condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'equazione binomia $x^n - A = 0$, *essendo* $n = 2p_1^{\alpha_1} \dots p_i^{\alpha_i}$, *la quale sia irriducibile nel campo assoluto di razionalità* (C), *a cui appartiene* A, *abbia il gruppo di Galois d'ordine massimo* nr, *è che* A *non abbia la forma:*

$$(-1)^{\frac{p_1-1}{2}} \dots (-1)^{\frac{p_m-1}{2}} p_1 \dots p_m a^2,$$

ove $p_1 \dots p_m$ *sono numeri primi dispari differenti, scelti a piacere fra* $p_1 \dots p_i$; a *è un numero di* (C); *se* A *è della precedente forma, il gruppo ha l'ordine* $\frac{nr}{2}$.

[1] Cfr. CAPELLI, citata Memoria.

3. Consideriamo il caso generale, in cui il grado n dell' equazione binomia:

$$x^n - A = 0 \tag{11}$$

sia della forma $2^\lambda p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$, per $\lambda > 1$.

Come il sistema (10), formiamo l' analogo:

$$\begin{aligned} \rho &= x\varphi(\varepsilon) \\ x^n &= A \\ f(\varepsilon) &= 0, \end{aligned} \tag{10'}$$

ove $f(\varepsilon) = 0$ rappresenta l' equazione di grado r alle radici primitive n^{me} dell' unità, essendo:

$$r = 2^{\lambda-1} p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_i^{\alpha_i-1}(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_i - 1).$$

Perchè l' equazione $\psi(\rho) = 0$, che proviene dalla eliminazione delle variabili x, ε dalle equazioni del precedente sistema, sia irriducibile in (C), è necessario e sufficiente che, l' equazione $f(\varepsilon) = 0$ sia irriducibile in tal campo, e che l' equazione $x^n = A$ sia irriducibile in (C, ε); la prima condizione è soddisfatta; perchè lo sia l' altra, è necessario e sufficiente, per il teorema del CAPELLI, che, A non sia uguale al quadrato, nè alla potenza p_i^{ma} di un numero di C, e che inoltre $-A$ non sia uguale alla quarta potenza di un numero di (C).

Se fosse $A = \Phi(\varepsilon)^{p_i}$, ponendo $\Phi(\varepsilon) = z$, (non può essere z un numero di (C), tenuto conto che l' equazione (11) è irriducibile in (C)) si avrebbe $A = z^{p_i}$. Poichè ε soddisfa ad un' equazione Abeliana irriducibile, anche z deve essere radice di un' equazione Abeliana; il che è assurdo, non appartenendo la precedente equazione binomia irriducibile fra quelle elencate dal teorema f); se poi fosse $-A = 4\Phi(\varepsilon)^4$, si avrebbe $A = \left[2\varepsilon^{\frac{n}{4}}\Phi(\varepsilon)^2\right]^2$, tenuto conto che $\varepsilon^{\frac{n}{2}} = -1$, cioè sarebbe A uguale al quadrato di un numero di (C, ε); escludendo questo caso, la risultante $\psi(\rho) = 0$ di grado nr è irriducibile in (C), come sappiamo (¹); risulta quindi che, il gruppo di GALOIS della (11) è di ordine nr.

Consideriamo il caso generale, in cui A sia uguale alla potenza di grado 2^h di un numero di (C, ε), e non ad altra potenza di un numero di tal campo con esponente $2^{h'}$, essendo $h' > h$, cioè si abbia $A = \Phi(\varepsilon)^{2^h}$; l' equazione $x^n - A = 0$ diventa $x^{2^\lambda \cdot t} - \Phi(\varepsilon)^{2^h} = 0$, in cui $h < \lambda$, come mostreremo.

(¹) Cfr. citata Nota « Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei », 1923.

La precedente equazione è normale nel campo (C, ε), in cui è riducibile; i fattori irriducibili in (C, ε), in cui si decompone il primo membro della precedente equazione. sono dello stesso grado; uno di tali fattori è $x^{t\cdot 2^{\lambda-h}} - \Phi(\varepsilon)$, essendo $t = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$. Ora, è facile dimostrare che il precedente fattore è irriducibile in (C, ε).

Se fosse $x^{t\cdot 2^{\lambda-h}} - \Phi(\varepsilon) = 0$ riducibile, dovrebbe essere $\Phi(\varepsilon)$ uguale al quadrato, oppure alla potenza p_i^{ma} di un numero del campo (C, ε); nel 1° caso, essendo:

$$A = \Phi(\varepsilon)^{2^h}, \tag{11'}$$

sarebbe A uguale alla potenza di grado $2^{h'}$, (essendo $h' > h$) di un numero del precedente campo; il che è da escludere per l'ipotesi fatta; non si può verificare neanche l'altro caso, cioè che sia $\Phi(\varepsilon)$ uguale alla potenza p_i^{ma} di un numero di (C, ε), perchè anche A verrebbe ad essere uguale alla potenza p_i^{ma} di un numero di tal campo, cioè si avrebbe un'equazione normale $A = \varphi(\varepsilon)^{p_i}$, contrariamente al teorema f). Consideriamo il sistema:

$$\begin{aligned} \rho &= x\Omega(\varepsilon) \\ x^{t\cdot 2^{\lambda-h}} &= \Phi(\varepsilon) \\ f(\varepsilon) &= 0, \end{aligned} \tag{12}$$

la cui risultante $\psi(\rho) = 0$, di grado $rt2^{\lambda-h}$ in ρ, è, come sappiamo, irriducibile in (C); tale grado, come è noto, è uguale all'ordine del gruppo di GALOIS della data equazione binomia (11).

Dando ai numeri r, t i significati, dei quali abbiamo fatto menzione nelle pagine che precedono, l'ordine del gruppo di GALOIS della (11) è della forma:

$$2^{2\lambda-h-1}\cdot p_1^{2\alpha_1-1}\cdot p_2^{2\alpha_2-1}\cdot \dots p_i^{2\alpha_i-1}\cdot (p_1-1)(p_2-1)\dots(p_i-1), \tag{13}$$

in cui, per $\lambda > 1$, h può assumere valori da zero fino a $(\lambda-1)$; mentre, per $\lambda = 1$, h può assumere i valori zero ed uno, come si è già visto nel teorema 2 del precedente articolo. Nel caso di $\lambda > 1$, dobbiamo dimostrare che, h non può assumere un valore maggiore di $(\lambda - 1)$, e quindi può avere in tutto λ valori, compresi fra zero e $(\lambda - 1)$, i quali sostituiti nella (13) fanno acquistare a questa altrettanti valori, che corrispondono agli ordini di tutti i possibili gruppi dell'equazione binomia data $x^n - A = 0$, essendo $n = 2^\lambda p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$.

Se fosse $h = \lambda$, si avrebbe, per la (11'), l'uguaglianza:

$$A = \Phi(\varepsilon)^{2^\lambda}, \tag{14}$$

la quale si può scrivere così:

$$A = \Phi(\omega, \alpha)^{2^\lambda}, \tag{14'}$$

ove ω soddisfa l'equazione:

$$\omega^{2^{\lambda-1}} + 1 = 0, \tag{15}$$

ed α è radice primitiva dell'unità di grado $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$.

Consideriamo la (14') come un'equazione a cui soddisfa ω, con coefficienti appartenenti al campo (C, α); ora, sappiamo che, la (15) è irriducibile nel campo (C, α). Intanto la (14'), avendo una radice ω in comune con l'equazione (15), che è di grado maggiore di 2, avendo supposto $\lambda > 1$, è riducibile nel campo (C, α); quindi, per il teorema già citato del CAPELLI, si deve avere:

$$A = \varphi(\alpha)^2, \quad \text{oppure} \quad -A = 4\psi(\alpha)^4; \tag{16}$$

dalla prima delle (16), applicando il teorema a'), si ricava:

$$A = \pm p_1 p_2 \dots p_m b^2, \tag{17}$$

essendo b un numero di (C); $p_1, p_2, \dots p_m$ sono numeri primi dispari, scelti a piacere fra $p_1, p_2, \dots p_i$, che sono differenti.

Si noti che, l'equazione (14) è Abeliana e quindi normale; inoltre è irriducibile in (C), a causa dell'irriducibilità in tale campo della data equazione $x^n - A = 0$; onde, per il teorema f) si deve avere:

$$A = -a^{2^{\lambda-1}}, \quad \text{oppure} \quad A = -2^{2^{\lambda-2}} a^{2^{\lambda-1}}, \tag{18}$$

essendo a un numero di (C). Dalle precedenti ugnaglianze (18), tenuto conto delle (17), si ricava:

$$\left(\frac{a^{2^{\lambda-2}}}{b}\right)^2 = p_1 p_2 \dots p_m; \quad \left(\frac{a^{2^{\lambda-2}} \cdot 2^{2^{\lambda-3}}}{b}\right)^2 = p_1 p_2 \dots p_m,$$

le quali sono evidentemente impossibili. Se si verificasse la seconda delle (16), si avrebbe $-A = [2\psi(\alpha)^2]^2$; quindi, per il teorema a'), sarebbe $-A = \pm p_1 p_2 \dots p_m b^2$, cioè una relazione del tipo (17); il che è assurdo, come abbiamo testè dimostrato.

4. Da quanto si è detto nel precedente articolo, possiamo enunciare il seguente teorema:

L'ordine del gruppo di Galois di un'equazione binomia di grado pari $x^n - A = 0$, *la quale sia irriducibile nel campo assoluto* (C) *di razionalità, a cui appartiene* A, *essendo* $n = 2^\lambda p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$, *è della forma:*

$$2^{2\lambda-h-1} \cdot p_1^{2\alpha_1-1} \cdot p_2^{2\alpha_2-1} \cdot \dots p_i^{2\alpha_i-1} \cdot (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_i - 1), \tag{19}$$

ove, per $\lambda > 1$, *il numero* h *può variare da zero a* $(\lambda - 1)$; *se poi è* $\lambda = 1$, *il numero* h *può variare da zero ad uno. Nel primo caso di* $\lambda > 1$, *al variare di* A *nel campo* (C), *può variare l'ordine del gruppo di Galois della data equazione binomia* $x^n - A = 0$, *assumendo non più di* λ *valori distinti, dati dalla* (19), *se sostituiamo in questa ad* h *i valori* 0, 1, 2, ... $(\lambda - 1)$. *Se poi* $\lambda = 1$, h *può assumere nella* (19) *i valori zero ed uno.*

Nel caso di n *dispari, come sappiamo dal teorema b), si ha un solo gruppo di ordine:*

$$p_1^{2\alpha_1-1} \cdot p_2^{2\alpha_2-1} \cdot \ldots p_i^{2\alpha_i-1} \cdot (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_i - 1),$$

se il grado n *è uguale al prodotto:*

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_i^{\alpha_i},$$

essendo $p_1, p_2, \ldots p_i$ *numeri primi dispari differenti fra loro.*

5. In questo articolo, determineremo la forma di A, perchè il gruppo dell'equazione data binomia:

$$x^n - A = 0, \tag{20}$$

sia di ordine nr, essendo r il grado dell'equazione irriducibile in (C), a cui soddisfano le radici primitive n^{me} dell'unità. Supponiamo dapprima che sia $n = 2^\lambda p_1^{\alpha_1}$. Sappiamo, per il teorema c), che, la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'ordine del gruppo di Galois della (20) sia nr, è che A non sia uguale al quadrato di un numero appartenente al campo (C, ε), essendo ε una radice primitiva n^{ma} dell'unità. Denotiamo con ω una radice primitiva dell'unità di grado 2^λ, la quale soddisfa l'equazione:

$$\omega^{2^{\lambda-1}} + 1 = 0; \tag{21}$$

con α si intenda una radice primitiva dell'unità di grado $p_1^{\alpha_1}$.

Essendo $n = 2^\lambda p_1^{\alpha_1}$, inoltre tenuto conto che 2^λ è primo con $p_1^{\alpha_1}$, si ha: $\varepsilon = \omega \cdot \alpha$; di più abbiamo visto che la precedente equazione (21) è irriducibile nel campo (C, α). Supponiamo che si abbia:

$$A = \Phi(\varepsilon)^2, \quad \text{ossia} \quad A = \Phi(\omega, \alpha)^2. \tag{22}$$

Per il teorema e), che possiamo applicare alla (21), la quale è irriducibile nel campo (C, α), dalla (22) si ricava:

$$A = \pm 2a^2; \quad A = -b^2, \tag{22'}$$

ove a, b *sono numeri del campo* (C, α); dalle precedenti uguaglianze si ricava che, a^2, b^2 sono numeri di (C); onde, applicando la formola (4') dell'articolo 1, si ha:

$$a^2 = (-1)^{\frac{p_1-1}{2}} p \cdot a_1^2; \quad b^2 = (-1)^{\frac{p_1-1}{2}} \cdot b_1^2, \tag{23}$$

essendo a_1, b_1 numeri di (C).

Seguendo lo stesso ragionamento per $n = 2^\lambda p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$, possiamo dire che: se A è uguale al quadrato di un numero del campo (C, ε), debbono sussistere le (22'), in cui si ha:

$$\begin{aligned} a^2 &= (-1)^{\frac{p_1-1}{2}} (-1)^{\frac{p_2-1}{2}} \dots (-1)^{\frac{p_m-1}{2}} p_1 p_2 \dots p_m a_1^2; \\ b^2 &= (-1)^{\frac{p_1-1}{2}} (-1)^{\frac{p_2-1}{2}} \dots (-1)^{\frac{p_m-1}{2}} p_1 p_2 \dots p_m b_1^2, \end{aligned} \tag{24}$$

essendo a_1, b_1 numeri di (C); $p_1, p_2, \dots p_m$ sono numeri primi dispari differenti, scelti a piacere fra $p_1, p_2, \dots p_i$. Per le (24), le (22') diventano:

$$\begin{aligned} A &= \pm 2(-1)^{\frac{p_1-1}{2}} (-1)^{\frac{p_2-1}{2}} \dots (-1)^{\frac{p_m-1}{2}} p_1 p_2 \dots p_m a_1^2 \\ A &= -(-1)^{\frac{p_1-1}{2}} (-1)^{\frac{p_2-1}{2}} \dots (-1)^{\frac{p_m-1}{2}} p_1 p_2 \dots p_m a_1^2. \end{aligned} \tag{24'}$$

Riassumendo i risultati ottenuti in questo articolo, possiamo enunciare il seguente teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione $x^n - A = 0$, *irriducibile nel campo assoluto* (C) *di razionalità, a cui appartiene* A, *abbia il gruppo di Galois di ordine massimo* nr, *essendo:*

$$n = 2^\lambda p_1^{\alpha_1} \dots p_i^{\alpha_i}, \quad r = 2^{\lambda-1} p_1^{\alpha_1-1} \dots p_i^{\alpha_i-1}(p_1 - 1) \dots (p_i - 1),$$

è che A *non abbia alcuna delle forme* (24'), *ove* a_1, b_1, *sono numeri di* (C); $p_1 \dots p_m$ *sono numeri primi dispari differenti scelti a piacere fra* $p_1 \dots p_i$.

Per $\lambda = 1$, *si applichi il teorema* 2; *per* $\lambda = 2$, *si consideri la seconda delle* (24').

6. Abbiamo visto nell'articolo 3 che, se A è uguale alla potenza di grado 2^h di un numero di (C, ε), e non ad altra potenza di un numero di (C, ε) con esponente $2^{h'}$, essendo $h' > h$, cioè se si ha:

$$A = \Phi(\varepsilon)^{2^h}, \tag{25}$$

l'ordine del gruppo di GALOIS dell'equazione $x^n - A = 0$, per $n = 2^\lambda p_1 \dots p_i^{\alpha_i}$, è uguale all'espressione (13); determiniamo in tal caso la forma che deve avere A.

Se ha luogo la (25), ponendo $z = \Phi(\varepsilon)$, si ha l'equazione: $z^{2^h} - A = 0$, la quale rispetto a z è Abeliana, e quindi normale. Per il teorema *f)*, si deve avere:

$$A = -a^{2^{h-1}}, \quad \text{oppure} \quad A = -2^{2^{h-2}}a^{2^{h-1}}, \tag{26}$$

essendo a un numero di (C). Dalle (25), (26) si ricava:

$$\Phi(\varepsilon)^{2^h} = -a^{2^{h-1}}; \quad \Phi(\varepsilon)^{2^h} = -2^{2^{h-2}}a^{2^{h-1}}. \tag{26'}$$

Chiamando ω una radice primitiva q^{ma} dell'unità, ed α una radice primitiva t^{ma} dell'unità, essendo $q = 2^\lambda$; $t = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_i^{\alpha_i}$, sappiamo che si ha: $\varepsilon = \omega\alpha$, ove ε è una radice primitiva n^{ma} dell'unità; quindi $n = tq$; è facile comprendere che, α ed ω sono funzioni razionali in (C) di ε. Onde, la prima delle (26') si può scrivere così:

$$\Phi(\omega, \alpha)^{2^h} = -a^{2^{h-1}}. \tag{27}$$

Tenuto conto che ω soddisfa l'equazione:

$$\omega^{2^{\lambda-1}} + 1 = 0, \tag{28}$$

la (27) diventa $\Phi(\omega, \alpha)^{2^h} = (\omega^{2^{\lambda-h}}a)^{2^{h-1}}$, dalla quale facilmente si ricava che a deve essere uguale al quadrato di un numero del campo $(C;\ \omega, \alpha)$, ossia $a = \Omega(\omega, \alpha)^2$, o ciò ch'è lo stesso $a = \Omega(\varepsilon)^2$.

Per quanto sappiamo dal precedente articolo, se a è un numero di (C), ed è uguale anche al quadrato di un numero del campo (C, ε), deve avere una delle due forme indicate dai secondi membri delle (24'). Dimostriamo che la seconda delle (26') non può sussistere; questa proviene dall'uguaglianza:

$$A = -b^{2^{h-2}}, \tag{29}$$

ove si faccia:

$$b = 2a^2. \tag{30}$$

Si noti che la (29) è dello stesso tipo della prima delle (26), cioè di $A = -a^{2^{h-1}}$, per la quale abbiamo dimostrato che a deve avere una delle forme indicate dai secondi membri delle (24'); lo stesso deve accadere per b, che per la (30), è uguale al prodotto $2a^2$. Onde, si hanno le uguaglianze:

$$2a^2 = p_1p_2\dots p_m a_1^2; \quad a_2 = p_1p_2\dots p_m a_1^2. \tag{31}$$

Ora, è facile comprendere che, essendo a, a_1, numeri appartenenti al campo assoluto (C) di razionalità, le (31) non possono sussistere, tenuto conto che $p_1, p_2, \dots p_m$ sono numeri primi dispari differenti. Dunque, se il gruppo di GALOIS dell'equazione binomia è uguale a (13), il termine noto A deve essere uguale alla potenza $-a^{2^{h-1}}$, in cui a è uguale ad una delle espressioni che figurano nei secondi membri delle (24').

7. Dai risultati ottenuti nel precedente articolo, possiamo enunciare il seguente teorema, che sintetizza quasi tutta la teoria svolta in questa memoria, completando la precedente (1):

La condizione necessaria e sufficiente, affinchè l' equazione binomia $x^n - A = 0$, *essendo:*

$$n = 2^{\lambda} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i},$$

la quale sia irriducibile nel campo assoluto (C) *di razionalità, a cui appartiene* A, *abbia il gruppo di Galois di ordine uguale al numero* t, *essendo* t *per il teorema dell' articolo 4, della forma:*

$$2^{2\lambda-h-1} p_1^{2\alpha_1-1} p_2^{2\alpha_2-1} \dots p_m^{2\alpha_m-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_m - 1),$$

è che, A *sia uguale alla potenza* $-a^{2^{h-1}}$, *in cui ad* a *si sostituisca una delle due espressioni:*

$$(32) \qquad \begin{gathered} -(-1)^{\frac{p_1-1}{2}} (-1)^{\frac{p_2-1}{2}} \dots (-1)^{\frac{p_m-1}{2}} p_1 p_2 \dots p_m a_1^2 \\ \pm 2(-1)^{\frac{p_1-1}{2}} (-1)^{\frac{p_2-1}{2}} \dots (-1)^{\frac{p_m-1}{2}} p_1 p_2 \dots p_m a_1^2, \end{gathered}$$

ove a_1 *è un numero di* (C); $p_1, p_2, \dots p_m$ *sono scelti a piacere fra* $p_1, p_2, \dots p_i$, *che sono numeri primi dispari differenti fra loro.*

Giova notare che, per il caso in cui sia $\lambda = 2$, si deve considerare la prima delle (32); come anche, per $h = 0$, bisogna applicare il teorema dell'articolo 5, cioè A non deve avere alcuna delle forme indicate dalle (32); per $\lambda = 1$, si deve applicare il teorema dell'articolo 2.

(1) Cfr. « Annali di Matematica », citata Memoria, 1927.

Sur quelques méthodes nouvelles dans le Calcul des Variations

par Nicolas Bogolioubofff (à Kieff).

INTRODUCTION

Ce travail est consacré à l'exposition de nos recherches concernant les méthodes directes dans le Calcul des Variations applicables à l'étude de propriétés de minimum des fonctionnelles non semi-continues (pour toutes les courbes de la classe considérée).

Pour la briéveté de l'exposition, on se bornera ici au cas simple: il s'agira donc du problème de la recherche du minimum absolu de l'intégrale (non quasi régulière) (1)

$$I_C = \int_a^b f(x, y, y')dx$$

prise sous la forme ordinaire, quoique, bien entendu et au moins en partie, les résultats ci-dessous développés soient valables aussi pour les problèmes sous la forme paramétrique, ainsi que pour les problèmes plus géneraux.

La méthode dont nous ferons usage au cours de cet exposé présente le développement approprié de la methode (2) utilisée par M. L. Tonelli pour traiter les cas incomplètements réguliers de l'intégrale $\int F(x, y, x', y')dt$ (prise sous la forme paramètrique).

En considérant une intégrale J_C (quasi régulière) convenablement construite d'aprés I_C

$$J_C = \int_a^b G(x, y, y')dx$$

(dont l'importance pour l'étude des fonctionnelles nou semi-continues partout

(1) L. Tonelli, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, vol. I, p. 360, Zanichelli, Bologna, 1922.

(2) L. Tonelli, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, vol. II, pp. 193-205, 1923.

a été mise en lumière par M. L. TONELLI) [1], nous démontrerons que J_{C_0} (où C_0 est une courbe ordinaire par rapport à J_C) est égale à la limite (pour $\varepsilon \to 0$) de la borne inférieure de I_C dans la classe $D_\varepsilon(C_0)$ des courbes ordinaires admettant avec C_0 le voisinage (ε) et possédant les mêmes points frontières que C_0.

Alors on s'assure que le problème de minimum absolu de I_C dans une certaine classe K admet la solution, s'il existe une courbe C_0 réalisant le minimum absolu de J_C dans K, telle que

$$J_{C_0} = I_{C_0}.$$

Cette condition devient évidemment nécessaire si la classe K est telle que les bornes inférieures de I_C et de J_C dans K soient égales.

Comme un exemple le plus simple de telle classe, on peut prendre la classe D des courbes ordinaires dont les ordonnées prennent les valeurs fixes pour $x = a$ et pour $x = b$.

Si l'on utilise à présent certaines théorèmes de M. L. TONELLI, on s'assure que le probléme de minimum absolu de J_C dans D admet les solutions le long desquelles on a

$$f(x, y, y') = G(x, y, y')$$

à l'exception de pseudo-arcs commun avec les courbes « singulières » où

$$f(x, y, y') > G(x, y, y').$$

Par conséquent, d'aprés ce qui précède, le problème de minimum absolu de I_C dans D admet la solution s'il existe parmi les courbes réalisant le minimum absolu de J_C dans D une courbe n'ayant aucun pseudo-arc de mesure $\neq 0$ commun avec les courbes singulières, et dans ce cas seulement.

En considérant le problème de minimum dans une certaine classe spéciale (v. § 3) nous avons démontré les théorèmes:

Par deux points quelconques on peut toujours faire passer au moins un extremaloïde [2] (relative à I_C) composé d'un nombre fini d'extremales.

Quelque soit le nombre positif ε, on peut toujours trouver dans la classe D un extremaloïde tel que l'intégrale considerée prenne la valeur qui diffère de sa borne inférieure (dans la classe D) par une quantlté au plus égale à ε.

En terminant cette introduction, je crois de mon devoir d'exprimer ma profonde reconnaissance à mon Maître Prof. Dr. N. KRYLOFF dans le Séminaire mathématique duquel (à Kieff) je travaille depuis ma première jeunesse.

(1) L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, vol. II, pp. 193-205, 1923.
(2) L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, vol. II, p. 320, 1923.

Qu' il me soit permis de lui présenter ici mes sincères remerciements pour les précieux conseils qu' il m' a donné au cours de l'accomplissement de ce travail, ainsi que de mes autres travaux.

Je tiens aussi à remercier M. le Prof. Dr. L. TONELLI pour son encouragement ainsi que pour sa bienveillante et pénétrante critique de ce travail, qui m'a permis d'améliorer bien des démonstrations, ci-dessous developpées.

· § **1.** Considérons la fonction $f(x, y, z)$ deux fois dérivable, vérifiant la condition

(1) $$f(x, y, z) \geqq K|z|^{1+\delta}$$

où K, δ sont des nombres positifs constants.

Fixant arbitrairement le point (x, y), envisageons une direction en ce point avec le coëfficient angulaire égal à z.

On dit que z correspond à une direction forte si pour chaque nombre n différent de z on a

$$f(x, y, n) - f(x, y, z) - (n - z) f_z'(x, y, z) > 0.$$

Si pour chaque n on a

$$f(x, y, n) - f(x, y, z) - (n - z) f_z'(x, y, z) \geq 0$$

alors on dit que z correspond à une direction semi-forte.

Considérons l'ensemble T de z correspondant à des directions non fortes. On peut montrer que pour chaque point (x, y) l'ensemble T est composé d'une suite dénombrable d'intervalles fermés (P_i, Q_i), n'empiétant pas l'un sur l'autre, tels que

$$p = P_i, \quad q = Q_i$$

vérifient le système

(2) $$\begin{cases} f(x, y, p) - f(x, y, q) - (p - q) f_z'(x, y, q) = 0 \\ f(x, y, q) - f(x, y, p) - (q - p) f_z'(x, y, p) = 0. \end{cases}$$

Pour simplifier les raisonnements, supposons que l'ensemble T se réduise à un seul intervalle $[P(x, y), Q(x, y)]$ et que pour chaque z correspondant à une direction semi-forte on ait

(3) $$f_{zz}''(x, y, z) > 0.$$

Alors, en vertu du théorème classique sur les fonctions implicites, on s'assure que $P(x, y)$, $Q(x, y)$ sont des fonctions continues et dérivables pour toutes les valeurs des arguments.

Cela étant, envisageons le problème de minimum absolu de l'intégrale:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f[a,\, b,\, y'(x)]dx$$

dans la classe $D\begin{Bmatrix}\beta, & \beta+\lambda\varepsilon \\ \alpha, & \alpha+\varepsilon\end{Bmatrix}$ des courbes ordinaires (par rapport à cette intégrale) verifiant les conditions frontières

$$y(\alpha) = \beta, \quad y(\alpha+\varepsilon) = \beta + \lambda\varepsilon$$

et soit $C_0[y = y_0(x),\ \alpha \leqq x \leqq \alpha + \varepsilon]$ une courbe de cette classe construite de la façon suivante

$$y_0(x) = \beta + P(a, b)(x - \alpha); \quad y_0(x) = \beta + \lambda\varepsilon + Q(a, b)(x - \alpha - \varepsilon);$$
$$\text{si } P(a, b) \leqq \lambda \leqq Q(a, b)$$

$$\alpha \leqq x \leqq \alpha + \frac{Q(a, b) - \lambda}{Q(a, b) - P(a, b)}\varepsilon; \quad \alpha + \frac{Q(a, b) - \lambda}{Q(a, b) - P(a, b)}\varepsilon \leqq x \leqq \alpha + \varepsilon \tag{4}$$

$$y_0(x) = \beta + \lambda(x - \alpha); \quad \text{si} \quad P(a, b) \geqq \lambda \quad \text{ou si} \quad Q(a, b) \leqq \lambda; \tag{5}$$
$$\alpha \leqq x \leqq \alpha + \varepsilon.$$

On voit évidemment que

$$f'_{y'}(a, b, y_0'(x)) = \text{const.}, \quad y_0'(x) \leqq P(a, b) \quad \text{ou} \quad y_0'(x) \geqq Q(a, b),$$
$$\alpha \leqq x \leqq \alpha + \varepsilon$$

d'où l'on s'assure que si $C[y = y(x),\ \alpha \leqq x \leqq \alpha + \varepsilon]$ est une courbe arbitraire de la classe $D\begin{Bmatrix}\beta, & \beta+\lambda\varepsilon \\ \alpha, & \alpha+\varepsilon\end{Bmatrix}$, alors

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f(a, b, y')dx - \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f(a, b, y_0')dx =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon}[f(a, b, y') - f(a, b, y_0') - (y' - y_0')f_{y'}'(a, b, y_0')]dx \geqq 0.$$

Cela nous montre que la courbe C_0 donne le minimum absolu à

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f(a, b, y')dx \tag{6}$$

dans la classe $D\begin{Bmatrix}\beta, & \beta+\lambda\varepsilon \\ \alpha, & \alpha+\varepsilon\end{Bmatrix}$. Par consequent la valeur minimum de (6) (borne inférieure) est égale à $G(a, b, \lambda)$ où $G(x, y, z)$ est une fonction définie à l'aide des relations suivantes

$$G(x, y, z) = f(x, y, z) \quad \text{si} \quad z \geqq Q(x, y) \quad \text{ou si} \quad z \leqq P(x, y) \tag{7}$$

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= f[x, y, P(x, y)] \frac{Q(x, y) - z}{Q(x, y) - P(x, y)} + \\ &+ f[x, y, Q(x, y)] \frac{z - P(x, y)}{Q(x, y) - P(x, y)}; \quad \text{si} \quad P(x, y) \leqq z \leqq Q(x, y). \end{aligned} \tag{8}$$

Il est aisé de montrer que $G(x, y, z)$ est une fonction continue avec ses dérivées partielles du 1^er^ ordre, vérifiant les conditions

$$\frac{G_z'(x, y, z_1) - G_z'(x, y, z_2)}{z_1 - z_2} \geqq 0 \tag{9}$$

(quel que soient les nombres z_1, z_2)

$$G(x, y, z) \geqq K|z|^{1+\delta}. \tag{10}$$

Avant d'aller plus loin, supposons que $f(x, y, z)$ vérifie aussi les conditions suivantes :

$$f(x, y, z) \leqq A(x, y)|z|^{1+\delta} + B(x, y) \tag{11}$$

$$|f_y'(x, y, z)| \leqq A(x, y)|z|^{1+\delta} + B(x, y) \tag{12}$$

où $A(x, y)$, $B(x, y)$ sont bornées pour x, y bornées.

Alors il est aisé de voir que $G(x, y, z)$ vérifie les conditions

$$G(x, y, z) \leqq A(x, y)|z|^{1+\delta} + B(x, y), \quad |G_y'(x, y, z)| \leqq A_1(x, y)|z|^{1+\delta} + B_1(x, y) \tag{13}$$

où $A_1(x, y)$, $B_1(x, y)$ sont bornées pour x, y bornées

En remarquant que $G_z'(x, y, z)$ ne peut pas décroître quand z croit de $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on a

$$\begin{aligned} \frac{G(x, y, z + |z| + 1) - G(x, y, z)}{|z| + 1} &\geqq G_z'(x, y, z) \geqq \\ &\geqq \frac{G(x, y, z) - G(x, y, z - |z| - 1)}{|z| = 1}, \end{aligned} \tag{14}$$

de sorte que, en vertu de (13):

$$(1 + |z|)|G_z'(x, y, z)| \leqq A_2(x, y)|z|^{1+\delta} + B_2(x, y) \tag{15}$$

où $A_2(x, y)$, $B_2(x, y)$ sont bornées pour x, y bornées.

Soit à présent C_0 une courbe de la classe O et soit i_ε la borne inférieure de I_c dans la classe $D_\varepsilon(C_0)$ des courbes ordinaires (dont les points intiaux et terminaux coincident respectivement avec celles de C_0) admettant avec C_0 le voisinage (ε). Quand ε décroit jusqu'à zéro, i_ε tend vers une limite (finie ou infinie) que nous désignons par H_{C_0}.

Pour obtenir l'expression explicite de H_C, envisageons l'intégrale

$$J_C = \int_a^b G(x, y, y')dx$$

et soit S la classe des courbes ordinaires par rapport à cette intégrale. En vertu de (9), (10) on s'assure, d'après les theorèmes de M. L. TONELLI, que J_C est une fonctionnelle semi-continue pour toutes les courbes de la classe S.

Cela étant, soit j_ε la borne inférieure de J_C dans $D_\varepsilon(C_0)$: on a comme conséquence de la semi-continuité

$$J_C = \lim_{\varepsilon \to 0} j_\varepsilon.$$

D'autre part on a

$$j_\varepsilon \leqq i_\varepsilon.$$

Ainsi pour toutes les courbes de la classe S

$$J_C \leqq H_C. \tag{16}$$

Envisageons à présent une courbe $C[y = y(x),\ a \leqq x \leqq b]$ de la classe 1 et posons pour abréger

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \quad y_i = y(x_i), \quad i = 0, 1, \dots n.$$

Considérons les problèmes de minimum absolu des $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x_i, y_i, y'(x)]dx$ respectivement dans les classes $D\begin{Bmatrix} y_i, & y_{i+1} \\ x_i, & x_{i+1}\end{Bmatrix}$ et soient $C_n^{(i)}[y = y_n^{(i)}(x),\ x_i \leqq x \leqq x_{i+1}]$ les courbes minimantes.

Construisons la courbe $C_n[y = y_n(x),\ a \leqq x \leqq b]$ appartenant à la classe O de façon suivante

$$y_n(x) = y_n^{(i)}(x), \quad x_i \leqq x \leqq x_{i+1}, \quad i = 0, 1 \dots n-1.$$

En observant que $x_i, y_i, \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$, sont bornés indépendamment da n, on voit, d'après (4), (5), qu'il existe un nombre M indépendant de n tel que

$$|y'_n(x)| \leqq M, \quad a \leqq x \leqq b.$$

Or on a, d'après la loi même de la construction de la courbe C_n, $y_n(x_i) = y_i$. Par conséquent

$$|y_n(x) - y(x)| \leqq 2M\frac{(b-a)}{n}.$$

On a par suite

$$I_{C_n} = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x, y_n^{(i)}(x), y_n^{(i)\prime}(x)]dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x_i, y_i, y_n^{(i)\prime}(x)]dx + \varepsilon_n \tag{17}$$

où

$$\varepsilon_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

Or on a, d'après la remarque faite à la page précédente:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x_i, y_i, y_n^{(i)\prime}(x)]dx = G\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right)(x_{i+1} - x_i).$$

Donc de (17) on obtient

$$I_{C_n} = \sum_{i=0}^{n-1} G\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right)(x_{i+1} - x_i) + \varepsilon_n.$$

Remarquons d'autre part qu'en vertu de la continuité de $y'(x)$ on a

$$J_C = \sum_{i=0}^{n-1} G\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right)(x_{i+1} - x_i) + \eta_n$$

où

$$\eta_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Par conséquent

$$I_{C_n} = J_C + \varepsilon_n - \eta_n.$$

En observant que C_n appartient à la classe $D_\varepsilon(C)$ $\left(\text{où } \varepsilon = \frac{2M(b-a)}{n}\right)$ on en tire

$$i\frac{2M(b-a)}{n} \leqq J_C + \varepsilon_n - \eta_n,$$

d'où, en passant à la limite,

$$H_C \leqq J_C.$$

Nous avons donc démontré cette inégalité pour toutes les courbes de la classe 1.

Envisageons à présent une courbe arbitraire C_0 de la classe S et approchons-la par la suite C_m des courbes (de la elasse 1) de façon que

$$|J_{C_m} - J_{C_0}| \leqq \eta_m, \quad |y_m(x) - y_0(x)| \eta_m, \quad \text{où} \quad \eta_m \to 0 .$$

Cela est toujours possible [1] en vertu de la condition (13). On a d'après ce qui précède

$$H_{C_m} \leqq J_{C_m} \leqq J_{C_0} + \eta_m .$$

Soit i_{η_m} comme toujours la borne inférieure de I_C dans la classe $D_{\eta_m}(C_0)$. On a évidemment

$$i_{\eta_m} \leqq H_{C_m} \leqq J_{C_0} + \eta_m .$$

D'ici on tire que pour C_0 il existe la valeur finie H_{C_0} vérifiant l'inégalité

$$H_{C_0} \leqq J_{C_0} .$$

En tenant compte de (16), on s'assure finalement que pour toutes les courbes de la classe S on a

$$H_{C_0} = J_{C_0} .$$

Ainsi nous avons démontré le théorème :

Si f(x, y, z) *verifie les conditions explicitées dans le* § I, *alors l'intégrale*

$$J_C = \int_a^b G(x, y, y') dx$$

est égale à la limite (*pour* $\varepsilon \to 0$) *de la borne inférieure de l'intégrale*

$$I_C = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

dans la classe $D_\varepsilon(C)$.

J_C *est semi-continue inferieurement pour toutes les courbes ordinaires et vérifie l'inégalité*

$$J_C \geqq K \int_a^b |y'|^{1+\delta} dx.$$

§ **2.** Considérons à présent la classe D des courbes ordinaires dont les ordonnées prennent les valeurs fixes pour $x = a$ et pour $x = b$.

---

(1) Vedi L. TONELLI, *Sur une question du Calcul des Variations.* « Recueil Mathématique de Moscou », t. XXXIII, fasc. 1, 1926.

On s'assure, d'aprés le théorème de M. L. TONELLI, que le probème de minimum absolu de J_C dans cette classe admet toujours au moins une solution.

Or, il est aisé de voir en vertu du théorème ci-dessus demontré que les bornes inférieures de J_C et de I_C dans D sont égales.

Par conséquent, le problème de minimum absolu de I_C dans D admet toujours la solution s'il existe, parmi les courbes réalisant le minimum absolu de J_C dans D, une courbe C_0 telle que

$$I_{C_0} = J_{C_0}$$

et dans ce cas seulement.

Soit à présent $C_0(y = y_0(x),\ a \leqq x \leqq b)$ une courbe réalisant le minimum absolu de J_C dans la classe D.

En utilisant certains résultats obtenus par M. L. TONELLI, on voit d'après (15), (13) que C_0 est un extrémaloïde c.-à-d. que $y_0(x)$ vérifie presque partout dans (a, b) l'équation suivante:

$$G'_{y'}[x, y_0(x), y_0'(x)] - \int_0^x G_y'[x, y_0(x), y_0'(x)]dx = \text{Const.} \tag{18}$$

Envisageons l'ensemble E des valeurs de x de l'intervalle (a, b) pour lesquelles on a

$$G'_{y'}[x, y_0(x), y_0'(x)] = f'_{y'}[x, y_0(x), P(x, y_0(x))].$$

On peut montrer [1] que presque partout dans E on a

$$\frac{dG'_{y'}[x, y_0(x), y_0'(x)]}{dx} = \frac{df'_{y'}[x, y_0(x), P(x, y_0(x))]}{dx}.$$

Or, tout nombre z vérifiant l'égalité

$$G'_{y'}(x, y, z) = f'_{y'}[x, y, P(x, y)]$$

doit vérifier aussi l'inégalité suivante

$$P(x, y) \leqq z \leqq Q(x, y).$$

Par conséquent on a presque partout dans E:

$$G'_y[x, y_0(x), y_0'(x)] = f_y'[x, y_0(x), P(x, y_0(x))] \frac{Q[x, y_0(x)] - y_0'(x)}{Q[x, y_0(x)] - P[x, y_0(x)]} +$$
$$+ f_y'[x, y_0(x), Q(x, y_0(x))] \frac{y_0'(x) - P[x, y_0(x)]}{Q[x, y_0(x)] - P[x, y_0(x)]}.$$

---

[1] Ved. L. TONELLI, *Fondamenti*, Vol. I, p. 176.

En substituant ces valeurs dans l'équation (1S), on s'assure, après quelques calculs, que presque partout dans E on a

$$\Omega[x,\, y_0(x)] = 0 \tag{19}$$

où l'on a posé

$$\Omega(x,y) = \frac{f_x'[x,y,Q(x,y)] - Q(x,y) f_y'[x,y,P(x,y)] + P(x,y) f_y'[x,y,Q(x,y)] - f_x'[x,y,P(x,y)]}{Q(x,y) - P(x,y)}.$$

En considérant une courbe $O(y = y(x),\ a' \leqq x \leqq b')$ nous dirons qu'elle est singulière si

$$\Omega[x,\, y(x)] = 0, \quad a' \leqq x \leqq b'$$
$$f[x,\, y(x),\, y'(x)] > G[x,\, y(x),\, y'(x)], \quad a' < x < b'.$$

Nous pouvons à présent ennoncer le thèorème:

Si f(x, y, z) *vérifie les conditions du* § 1, *alors, afin que le problème de minimum absolu de* I_C *dans* D *admette au moins une solution, il faut et il suffit qu'il existe parmi les solutions (toujours existantes) du problème de minimum de* J_C *dans* D, *une courbe* C_0 *n'ayant aucun pseudoarc (de longueur* $\neq 0$) *commun avec les courbes singulières.*

Remarque: Si pour toutes les x, y

$$\Omega(x,\, y) \neq 0,$$

alors il n'existe pas de courbes singulières, de sorte que le problème de minimum absolu de I_C *dans* D *est toujours possible.*

On arrive ainsi à une nouvelle démonstration du théorème [1] de Carathéodory-Tonelli (démontré pour les intégrales prises sous la forme paramétrique).

§ **3.** Dans ce § nous allons démontrer l'existence des extrémaloïdes relatives à I_C composées d'un nombre fini d'extrémales.

Avant d'aller plus loin, observons qu'à chaque nombre positif M on peut faire correspondre les nombres positifs ε_M, α_M, H_M de façon que si

$$|x| \leqq M, \quad |y| \leqq M, \quad |z - P(x,y)| \leqq \varepsilon_M \quad \text{on} \quad |z - G(x,y)| \leqq \varepsilon_M$$

alors

$$f''_{y'^2}(x,\, y,\, z) \geqq \alpha_M, \ |P_x'| \leqq H_M, \ |P_y'| \leqq H_M, \ |Q_x'| \leqq H_M, \ |Q_y'| \leqq H_M.$$

Cela étant, considérons l'intervalle $[P(x,y) + \varepsilon_M,\ Q(x,y) - \varepsilon_M]$ que nous désignons par $[P_M(x,y),\ Q_M(x,y)]$.

---

[1] Carathéodory « Math. Ann. », Bd. 62, n. 8; Tonelli, *Fondamenti*, Vol. II.

Envisageons la classe $D_{n,M}$ des courbes C appartenant à la classe D, formées au plus de n arcs le long de chacune desquels est vérifiée presque partout l'une de deux inégalités:

$$y'(x) \geqq Q_M(x, y)$$
$$y'(x) \leqq P_M(x, y).$$

Montrons qu'il existe un tel nombre M_1 que pour tout $M \geqq M_1$ on peut faire correspondre un nombre n_M tel que pour fout $n \geq n_M$ il existe la classe $D_{n,M}$ (c. à d. il y ait des courbes appartenantes à cette classe).

Soit en effet $C_0[y = y_0(x),\ a \leqq x \leqq b]$ la courbe minimant J_C dans la classe D.

Fixant arbitrairement le nombre entier n, prenons une courbe $L_n[y = f_n(x)]$ de la classe (1) de façon que

$$|J_{L_n} - J_{C_0}| \leqq \frac{1}{n}, \quad |f_n(x) - y_0(x)| \leqq \frac{1}{n}.$$

Cela étant, faisons avec L_n la même construction qu'avec C à la page 254. On a ainsi une suite de courbes $L_{n,m}[y = f_{n,m}(x)]$ possédant les propriétés suivantes:

1°) $f_{n,m}(x) \to f_n(x),\ m \to \infty$;

2°) $I_{L_{n,m}} \to J_{L_n},\ m \to \infty$;

3°) l'intervalle (a, b) peut être divisé en $2m$ subintervalles (x_i, x_{i+1}) $\left(|x_{i+1} - x_i| \leq \frac{1}{m}\right)$ dans chacun desquels $f'_{n,m}(x)$ est égale à l'un des six nombres

$$P[x_i, f_n(x_i)], \quad P[x_{i+1}, f_n(x_{i+1})], \quad Q[x_i, f_n(x_i)], \quad Q[x_{i+1}, f_n(x_{i+1})],$$
$$\frac{f_n(x_{i+2}) - f_n(x_i)}{x_{i+2} - x_i}, \quad \frac{f_n(x_{i+1}) - f_n(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}.$$

Prenons $m = m_n$ si grand que

$$|f_{n,m}(x) - f_n(x)| \leqq \frac{1}{n}, \quad |f_n(x) - f_n(x_i)| \leqq \frac{1}{n} \qquad x_{i+1} \geqq x \geqq x_i$$
$$|I_{L_{n,m}} - J_{L_n}| \leqq \frac{1}{n}$$

et posons

$$L_{n,m_n} = O_n, \quad f_{n,m_n}(x) \equiv y_n(x).$$

Alors on s'assure que la suite C_n possède les propriétés suivantes:

1°) $|y_n(x) - y_0(x)| \leqq \frac{2}{n}$;

2°) $|I_{C_n} - J_{C_0}| \leqq \frac{2}{n}$;

3°) l'intervalle (a, b) peut être divisé au plus en $2m_n$ subintervalles (x_i, x_{i+1}) dans chacun desquels on a partout

$$[P[x, y_n(x)] - y_n'(x)] \leqq \frac{A}{n}, \quad A = \text{Const.},$$

ou partout

$$[Q[x, y_n(x)] - y_n'(x)] \geqq -\frac{A}{n}, \quad A = \text{Const.}$$

Or il existe un nombre M tel que

$$|y_0(x)| \leqq M, \quad a \leqq x \leqq b.$$

Donc, en vertu de (1°), on voit qu'on peut prendre M_1 de façon que

$$|y_n(x)| \leqq M_1, \quad a \leqq x \leqq b.$$

Il est aisé de s'assurer à présent que pour tout $n \geqq 2m\varepsilon_M^{-1} (M \geqq M_1)$, la courbe $C\varepsilon_M^{-1}$ fait partie de $D_{n,M}$.

La relation (2°) nous montre que la borne inférieure $i_{D_{n,M}}$ de I_C dans $D_{n,M}$ tend vers i_D (la borne inférieure de I_C dans D) quand $n \to \infty$.

En vertu de l'inégalité

$$I_C \geqq k \int_a^b |y'|^{1+\delta} dx$$

on s'assure de l'existence d'un nombre $\overline{M}$ tel qne toute une courbe $C[y = y(x), a \leqq x \leqq b]$ pour laquelle on a

$$I_C \leqq i_D + 1$$

vérifie l'inégalité

$$|y(x)| \leqq \overline{M} \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

Soit M_2 un nombre positif supérieur de M_1 et de $\overline{M}$. Alors on voit aisément qu'il existe un nombre n_2 tel que si pour une courbe $C[y = y(x), a \leqq x \leqq b]$ on a

$$I_C \leqq i_{D_{n,M}} + \frac{1}{2}$$

alors on doit avoir pour tout $n \geqq n_2$,

$$|y(x)| < M_2, \quad a \leqq x \leqq b.$$

Cela étant, envisageons la classe $D_{n,M_2} (n \geqq n_2)$ et posons le problème de minimum absolu de I_C dans cette classe.

Soit $\underset{m \to \infty}{C_m} (y = y_m(x),\ a \leqq x \leqq b)$ la suite minimisante. En vertu de l'inégalité (1), on s'assure que les fonction $y_m(x)$ sont également continues. Par conséquent il existe une courbe $\bar{C}_n(y = \bar{y}_n(x),\ a \leqq x \leqq b)$ et une suite $[\mu]$ (extraite convenablement de la suite $[m]$) telles que

$$y_{\rho^\nu}(x) \to \bar{y}_n(x), \quad a \leqq x \leqq b. \tag{20}$$

On voit aisément que la courbe $\bar{C}_n$ appartient à D. Montrons à présent que $\bar{C}_n$ appartienne aussi à D_{n, M_2}. A cet effet, divisons l'intervalle (a, b) en intervalles partiels $(\alpha_i^{(m)}, \alpha_{i+1}^{(m)})$ de sorte que dans chacune d'eux on ait presque partout

$$P_{M_2}[x, y_m(x)] \geqq y'_m(x)$$

ou presque partout

$$Q_{M_2}[x, y_m(x)] \leqq y'_m(x).$$

Or le nombres des intervalles $(\alpha_i^{(m)}, \alpha_{i+1}^{(m)})$ étant au plus égal à n, on peut toujours extraire de la suite $[\mu]$ une telle suite $[\nu]$ que

$$\alpha_i^{(\nu)} \underset{\nu \to \infty}{\longrightarrow} \alpha_i.$$

Remarquons d'autre part qu'il existe une suite ε_ν, convergente vers zéro, telle que dans (a, b) on a

$$\frac{y_\nu(x + \varepsilon_\nu) - y_\nu(x)}{\varepsilon_\nu} - \frac{\bar{y}_n(x + \varepsilon_\nu) - \bar{y}(x)}{\varepsilon_\nu} \underset{\nu \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or, presque partout dans (a, b)

$$\frac{\bar{y}_n(x + \varepsilon_\nu) - \bar{y}_n(x)}{\varepsilon_\nu} \underset{\nu \to \infty}{\longrightarrow} \bar{y}_n'(x).$$

On a donc presque partout dans (a, b)

$$\frac{1}{\varepsilon_\nu} \int_x^{x+\varepsilon_\nu} y_\nu'(x)dx \to \bar{y}_n'(x) \tag{21}$$

d'où l'on conclut que dans (α_i, α_{i+1}) (si bien entendu $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$) est vérifiée presque partout une des deux inégalités

$$\bar{y}_n'(x) \leqq P_{M_2}[x, \bar{y}_n(x)]$$
$$\bar{y}_n'(x) \geqq Q_{M_2}[x, \bar{y}_n(x)].$$

Par consequent $\bar{C}_n$ appartient à D_{n, M_2}. C. q. f. d.

Montrons qu'on a

$$I_{\bar{C}_n} = i_{D_{n, M_2}}.$$

A cet effet, considérons $l_{i\nu}$ — l'intervalle commun à $(\alpha_i^{(\nu)}, \alpha_{i+1}^{(\nu)})$, (α_i, α_{i+1}), s'il ne se réduit pas à un point.

Soit CE_ν l'ensemble complémentaire [jusqu'à (a, b)] à l'ensemble E_ν formé des intervalles $l_{i\nu}$.

On a évidemment

$$m(E_\nu) \to (b-a), \quad m(CE_\nu) \to 0, \quad \nu \to \infty. \tag{22}$$

D'autre part

$$I_{C\nu} \geqq \int_{E_\nu} f(x, y_\nu, y_\nu')dx = \int_{E_\nu} [f(x, y_\nu, y_\nu') - f(x, \bar{y}_n, y_\nu) + (y_\nu' - \bar{y}_n')f'_{y'}(x, \bar{y}_n, \bar{y}_n')]dx +$$
$$+ \int_{E_\nu} [f(x, \bar{y}_n, y_\nu') - f(x, \bar{y}_n, \bar{y}_n') - (y_\nu' - \bar{y}_n')f'_{y'}(x, \bar{y}_n, \bar{y}_n')]dx + \int_{E_\nu} f(x, \bar{y}_n, \bar{y}_n')dx.$$

Or on a dans chaque $l_{i\nu}$

$$\begin{aligned} f(x, \bar{y}_n, y_\nu') - f(x, \bar{y}_n, \bar{y}_n') - (y_\nu - \bar{y}_n')f'_{y'}(x, \bar{y}_n, \bar{y}_n') = \\ = \frac{1}{2}(y_\nu' - \bar{y}_n')^2 f''_{y'^2}[x, \bar{y}_n, \bar{y}_n' + \alpha(y_\nu' - \bar{y})] \end{aligned} \qquad 0 \leqq \alpha \leqq 1.$$

De (20), (21) on tire (dans chaque $l_{i\nu}$)

$$\bar{y}_n' + \alpha(y_\nu' - \bar{y}_n') \leqq P_{M_2}(x, \bar{y}_n) + \zeta_\nu, \qquad (0 \leqq \alpha \leqq 1),$$
$$\text{ou} \quad \bar{y}_n' + \alpha(y_\nu' - \bar{y}_n') \geqq Q_{M_2}(x, \bar{y}_n) - \zeta_\nu, \quad \text{où} \quad \zeta_\nu \underset{\nu \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, pour ν suffisamment grand, on a

$$f''_{y'^2}[x, \bar{y}_n, \bar{y}_n' + \alpha(y_\nu' - \bar{y}_n')] \geq 0,$$

(où x est dans $l_{i\nu}$).

En tenant compte de (1), (11), (12), (15), (22), on a aussi

$$\int_{E_\nu} f(x, \bar{y}_n, \bar{y}_n')dx \to \int_a^b f(x, \bar{y}_n, \bar{y}_n')dx$$

$$\int_{E_\nu} |f(x, y_\nu, y_\nu') - f(x, \bar{y}_n, y_\nu')|\, dx \leqq \underset{a \leqq x \leqq b}{\text{Max}} |y_\nu - \bar{y}_n| (A\int_a^b |y_\nu'|^{1+\delta}dx + B) = \eta_\nu \underset{\nu \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\left|\int_{E_\nu} (y_\nu' - \bar{y}_n')f'_{y'}(x, \bar{y}_n, \bar{y}_n')dx\right| \leqq \left|\int_a^b (y_\nu' - \bar{y}_n')f'_{y'}(x, \bar{y}_n, \bar{y}_n')dx\right| +$$
$$+ \left|\int_{CE_\nu} (y_\nu' - \bar{y}_n')f'_{y'}(x, \bar{y}_n, \bar{y}_n')dx\right| = \bar{\eta}_\nu \underset{\nu \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, finalement (pour ν suffisamment grand)

$$I_{C_\nu} \geqq I_{\bar{C}_n} - (\eta_\nu + \bar{\eta}_\nu)$$

d'où, à l'aide du raisonnement habituel, on trouve que

$$I_{C_n} = \dot{i}_{D_n, M_2} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Par conséquent la courbe $\bar{C}_n$ donne à I_C le minimum absolu dans D_{n, M_2} $(n \leq n_2)$.

Démontrons à présent que dans chaque (α_i, α_{i+1}) (s'il ne se réduit pas à un point, bien entendu) $\bar{y}_n'$ est continue.

A cet effet supposons le contraire et remarquons que l'arc de $\bar{C}_n$ dans (α_i, α_{i+1}) donne à l'intégrale

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x, y, y')dx$$

le minimum absolu dans la classe $\bar{D}$ des courbes $C[y = y(x),\ \alpha_i \leqq x \leqq \alpha_{i+1}]$ telles que

1°) $y(\alpha_i) = \bar{y}_n(\alpha_i),\ y(\alpha_{i+1}) = \bar{y}_n(\alpha_{i+1}),\ |y(x)| \leqq M_2,\ \alpha_i \leqq x \leqq \alpha_{i+1}$;

2°) presque partout dans (α_i, α_{i+1})

$$y'(x) \geqq Q_{M_2}[x, y(x)];$$

ou presque partout dans (α_i, α_{i+1})

$$y'(x) \leqq P_{M_2}[x, y(x)].$$

Il est aisé donc de s'assurer que

$$\delta I = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} [f'_{y'}(x, \bar{y}_n, \bar{y}_n')\delta y' + f_y'(x, \bar{y}_n, \bar{y}_n)\delta y]dx \geqq 0,$$

pour toutes les δy compatibles avec les liaisons imposées aux courbes de la classe $\bar{D}$ C. à d.

$$\delta y_{\alpha_i} = \delta y_{\alpha_{i+1}}$$

et

$$\delta y' \geqq Q_y'[x, \bar{y}_n(x)]\delta y$$

pour presque toutes les x telles que

$$\bar{y}_n'(x) = Q_{n_2}[x, \bar{y}_n(x)]$$

et

$$\delta y' \leqq P_y'[x, \bar{y}_n(x)]\delta y$$

pour presque toutes les x telles que

$$\bar{y}_n'(x) = P_{M_2}[x, \bar{y}_n(x)].$$

Les liaisons $|y(x)| \leqq M_2$, $(\alpha_i \leqq x \leqq \alpha_{i+1})$ ne sont pas prises en considération car

$$|\bar{y}_n(x)| < M_2, \qquad (\alpha_i \leqq x \leqq \alpha_{i+1}).$$

Construisons à présent les variations δy vérifiant les conditions imposées.

Soient E_1, E_2, E_3 trois ensembles tels que

$$(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = E_1 + E_2 + E_3,$$

et tels que presque partout dans E_1

$$\bar{y}_n'(x) > Q_{M_2}[x, \bar{y}_n(x)] \quad \text{ou} \quad \bar{y}_n'(x) < P_{M_2}[x, \bar{y}_n(x)],$$

presque partout dans E_2

$$\bar{y}_n'(x) = Q_{M_2}[x, \bar{y}_n(x)],$$

presque partout dans E_3

$$\bar{y}_n'(x) = P_{M_2}[x, \bar{y}_n(x)].$$

Tous les E_1, E_2, E_3 sont donc déterminés à un ensemble de mesure nulle près.

Introduisons la fonction quasi continue et bornée

$$f(x)$$

de façon que dans E_1 cette fonction soit nulle et dans E_2, E_3 égale respectivement à $Q_y'[x, \bar{y}_n(x)]$, $P_y'[x, \bar{y}_n(x)]$.

On voit à présent que la variation

$$\delta y = \int_{\alpha_i}^{x} \omega(x, \xi)\delta\varphi(\xi)d\xi$$

où l'on a posé

$$\omega(x, \xi) = e^{\int_{\xi}^{x} f(t)dt}$$

et où $\delta\varphi$ est une variation « arbitraire » dans E_1, positive dans E_2 et négative dans E_3, telle que

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \omega(\alpha_{i+1}, \xi)\delta\varphi d\xi = 0,$$

vérifie toutes les liaisons imposées.

De telles variations existent toujours, car en vertu de l'hypothèse admise, $mE_1 \neq 0$ (parcequ' une des mE_2, mE_3 est égale à zéro). En effet, dans le cas contraire, on aurait presque partout dans (α_i, α_{i+1})

$$\bar{y}_n' = Q_{M_2}(x, \bar{y}_n)$$

ou presque partout dans (α_i, α_{i+1})

$$\bar{y}_n' = P_{M_2}(x, \bar{y}_n),$$

et la continuité de Q_{M_2} et de P_{M_2} nous démontrerait que dans (α_i, α_{i+1}), $\bar{y}_n$ admet la dérivée continue, ce qui et contraire à notre hypothèse.

Or on a

$$\delta I = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \Omega \delta y' dx$$

où l'on a posé

$$\Omega = f'_{y'}(x, \bar{y}_n, \bar{y}_n') - \int_{\alpha_i}^{x} f_y'(x, y_n, y_n') dx.$$

Or on a presque partout dans (α_i, α_{i+1})

$$\delta y' = \delta\varphi + \int_{\alpha_i}^{x} f(x)\omega(x, \xi)\delta\varphi(\xi) d\xi,$$

de sorte que

$$\delta I = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+2}} \left[\Omega(x) + \int_{x}^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi) f(\xi)\omega(\xi, x) d\xi\right] \delta\varphi(x) dx.$$

Considérons la variation $\delta\varphi_1$ égale dans E_1 à

$$\delta u_1 - p(x) \frac{\int\limits_{E_1} p(x)\delta u_1 dx + \int\limits_{E_2} p(x)\delta u_2 dx + \int\limits_{E_3} p(x)\delta u_3 dx}{\int\limits_{E_1} p^2(x) dx}$$

dans E_2 à δu_2 et dans E_3 à δu_3, où l'on a posé

$$p(x) = \omega(\alpha_{i+1}, x).$$

Il est évident que $\delta\varphi_1$ vérifie toutes les conditions imposées sur $\delta\varphi$ quelles que soient les variations δu_1, $\delta u_2 \geq 0$, $\delta u_3 \leq 0$.

Par conséquent

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} [y(x) - Cp(x)]\delta\varphi_1 dx \geqq 0$$

où

$$C = \frac{\int_{E_1} p(x)y(x)dx}{\int_{E_1} p^2(x)dx}$$

et où

$$y(x) = \Omega(x) + \int_x^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi)f(\xi)\omega(\xi, x)d\xi.$$

Or, on a

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} [y(x)Cp(x)]\delta\varphi_1 dx = \int_{E_1} [y(x) - Cp(x)]\delta u_1 dx +$$

$$+ \int_{E_2} [y(x) - Cp(x)]\delta u_2 dx + \int_{E_3} [y(x) - Cp(x)\delta u_3 dx.$$

On a donc pour toute δu_1, toute $\delta u_2 \geqq 0$ et toute $\delta u_3 \geqq 0$:

$$\int_{E_1} [y(x) - Cp(x)]\delta u_1 dx + \int_{E_2} [y(x) - Cp(x)]\delta u_2 dx + \int_{E_3} [y(x) - Cp(x)]\delta u_3 dx \geqq 0$$

d'où l'on tire: presque partout dans E:

$$\text{(I)} \qquad \Omega(x) + \int_x^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi)\omega(\xi, x)f(\xi)d\xi = Cp(x)$$

presque partout dans E_2:

$$\text{(II)} \qquad \Omega(x) + \int_x^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi)\omega(\xi, x)f(\xi)d\xi \geqq Cp(x)$$

presque partout dans E_3:

$$\Omega(x) + \int_x^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi)\omega(\xi, x)f(\xi)d\xi \leqq Cp(x).$$

Soit $\bar{E}$ l'ensemble des valeurs de x appartenant à E_1 telles que partout dans $\bar{E}$, existe la dérivée $y'_n(x)$ et que (I) soit vérifiée. Soit $\bar{x}$ un point d'accumulation des points de $\bar{E}_1$. Montrons que quand le point x tend vers $\bar{x}$, $\bar{y}'_n(x)$ tend vers une valeur bien determinée.

En effet, supposons le contraire, de sorte quand x tend vers $\bar{x}$ il existe au moins deux valeurs d'accumulation différentes de $\bar{y}'_n(x) - \bar{y}'_1$, y'_2.

En vertu de la continuité des intégrales

$$\int_x^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi) f(\xi) \omega(\xi, x) d\xi, \quad \int_{\alpha_i}^{x} f'_y(x, \bar{y}_n, \bar{y}'_n) dx$$

on voit que

$$f'_{y'}(\bar{x}, \bar{y}_n(\bar{x}), y'_1) - \int_{\alpha_i}^{\bar{x}} f'_y(x, \bar{y}_n, \bar{y}'_n) dx + \int_{\bar{x}}^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi) f(\xi) \omega(\xi, \bar{x}) d\xi = Cp(\bar{x})$$

$$f'_{y'}(\bar{x}, \bar{y}_n(\bar{x}), y'_2) - \int_{\alpha_i}^{\bar{x}} f'_y(x, \bar{y}_n, \bar{y}'_n) dx + \int_{\bar{x}}^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi) f(\xi) \omega(\xi, \bar{x}) d\xi = Cp(\bar{x}).$$

d'où l'on tire

$$f'_{y'}(\bar{x}, \bar{y}_n(x), y'_1) = f'_{y'}(\bar{x}, \bar{y}_n(x), y'_2).$$

Or y'_1, y'_2 étant les valeurs d'accumulation de $\bar{y}'_n(x)$, on doit avoir

$$y'_1 \geqq Q_{M_2}[\bar{x}, \bar{y}_n(\bar{x})], \; y'_2 \geqq Q_{M_2}[\bar{x}, \bar{y}_n(\bar{x})] \quad \text{ou} \quad y'_1 \leqq P_{M_2}[\bar{x}, \bar{y}(\bar{x})], \; y'_2 \leqq P_{M_2}[\bar{x}, \bar{y}(\bar{x})].$$

Donc entre y'_1 et y'_2

$$f''_{y'^2}(\bar{x}, \bar{y}_n(\bar{x}), z) = 0$$

ce qui est impossible.

Ainsi quand le point x de $\bar{E}_1$ tend d'une façon quelconque vers le point $\bar{x}$, alors $\bar{y}'_n(x)$ tend vers une limite bien déterminée $y'_{\bar{E}_1}(\bar{x})$. On conclut d'ici que dans $\bar{E}_1$, $\bar{y}'_n(x)$ est continue.

Par consequent, l'hypothèse admise nous montre qu'il existe un ensemble A de mesure différente de zéro, tel que

$$m(\bar{E}_1 + A) = m(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = \alpha_{i+1} = \alpha_i. \tag{22}$$

1°) ou partout dans A, a lieu la relation (II),

$$\bar{y}'_n(x) = Q_{M_2}[x, \bar{y}_n(x)]$$

2°) ou partout dans A, a lieu la relation (III),

$$\bar{y}'_n(x) = P_{M_2}[x, \bar{y}_n(x)].$$

La continuité de Q_{M_2}, P_{M_2} prouve que quand le point x de A tend vers un point $\bar{x}$, alors $y'(x)$ tend vers une limite bien déterminée $y'_A(\bar{x})$. On s'assure de plus que si l'on pose $\bar{y}'_n(\bar{x}) = y'_A(\bar{x})$, alors la relation (II) [ou la relation (III] a lieu pour $x = \bar{x}$.

Cela étant, soit $\bar{x}$ un point de l'intervalle (α_i, α_{i+1}), qui soit à la fois un point d'accumulation des points de E_1 et de A.

Supposons pour fixer les idées que nous soyons dans le cas (1°). Alors, en vertu de (I) et de (II)

$$f'_{y'}[\bar{x}, \bar{y}_n(\bar{x}), y'_{\overline{E}_1}(\bar{x})] \leqq f'_{y'}[\bar{x}, \bar{y}_n(\bar{x}), y'_A(\bar{x})] \quad \text{de sorte que} \quad y'_{\overline{E}_1}(\bar{x}) \leqq y'_A(\bar{x}).$$

Or

$$y'_{E_1}(\bar{x}) \geqq Q_{M_2}[\bar{x}, \bar{y}_n(\bar{x})], \quad y'_A(\bar{x}) = Q_{M_2}[\bar{x}, \bar{y}_n(\bar{x})].$$

On a donc

$$y'_{E_1}(\bar{x}) = y'_{E_2}(\bar{x}).$$

Le même raisonnement est valable dans le cas (2°). Ainsi on a toujours $y'_A(\bar{x}) = y'_{\overline{E}_1}(\bar{x})$. Or $\bar{y}'_n(x)$ étant continue dans $\overline{E}_1$ ainsi que dans A on voit à présent que $\bar{y}_n(x)$ admet partout dans (α_i, α_{i+1}) le dérivée continue, ce qui est contraire à l'hypothèse admise.

Ainsi nous avons demontré que $\bar{y}'_n(x)$ est continue dans (α_i, α_{i+1}).

On peut montrer aisément que $|\bar{y}_n'(x)|$ sont bornées indépendamment de n. Cela est évident pour x de A.

Pour x de $\overline{E}_1$ on a

$$|f'_{y'}[x, \bar{y}_n(x), \bar{y}_n'(x)]| \leqq \text{Const.}$$

Or

$$f''_{y'^2}(x, y, z) > 0 \quad \text{si} \quad z \geqq Q_{M_2}(x, y) \quad \text{on si} \quad z \leqq P_{M_2}(x, y).$$

Donc si

$$\bar{y}_n'(x) \geqq Q_{M_2}[x, \bar{y}_n(x)],$$

alors

$$f'_{y'}[x, \bar{y}_n(x), \bar{y}_n'(x)] \geqq \frac{f[x, \bar{y}_n(x), \bar{y}_n'(x)] - f[x, \bar{y}_n(x), Q_{M_2}(x, \bar{y}_n(x))]}{\bar{y}_n'(x) - Q_{M_2}[x, \bar{y}_n(x)]}$$

et si

$$\bar{y}_n'(x) \leqq P_{M_2}[x, \bar{y}_n(x)],$$

alors

$$f'_{y'}[x, \bar{y}_n(x), \bar{y}_n'(x)] \leqq \frac{f[x, \bar{y}_n(x), P_{M_2}(x, \bar{y}_n(x))] - f[x, \bar{y}_n(x), \bar{y}_n'(x)]}{P_{M_2}[x, \bar{y}_n(x)] - \bar{y}_n'(x)}.$$

On en conclut, d'aprés l'inégalité (1), que pour x de $\overline{E}_1$ on a

$$|\bar{y}_n'(x)| \leqq \text{Const.} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

On peut aussi démontrer que presque partout dans (α_i, α_{i+1}) existe la dérivée $\bar{y}_n''(x)$, bornée (en valeur absolue) indépendamment de n.

Cette propriété, évidente pour x appartenant à A, se démontre pour x de $\bar{E}_1$ à l'aide de l'équation (I) en tenant compte de la relation:

$$f''_{y'^2}[x, \bar{y}_n(x), \bar{y}_n'(x)] > \beta > 0,$$

pour x dans E_1.

Cela étant, considérons le point α_i [interieur à (a, b)] et envisageons le nombre positif $\bar{\delta}$, suffisamment petit.

Construisons la fonction $v_{\delta}(x)$ à l'aide des relations suivantes:

$$v_{\delta}(x) = \bar{y}_n(x), \quad a \leqq x \leqq \alpha_i - \bar{\delta}, \quad \text{ou} \quad \alpha_i + \bar{\delta} \leqq x \leqq b$$

$$v_{\bar{\delta}}(x) = \bar{y}_n(\alpha_i - \bar{\delta}) + P(x - \alpha_i + \bar{\delta}),$$

$$\alpha_i - \bar{\delta} \leqq x \leqq \alpha_i - \bar{\delta} + \frac{2Q\bar{\delta} + \bar{y}_n(\alpha_i - \bar{\delta}) - \bar{y}_n(\alpha_i + \bar{\delta})}{Q - P}$$

$$v_{\bar{\delta}}(x) = \bar{y}_n(\alpha_i + \bar{\delta}) + Q(x - \alpha_i - \bar{\delta}),$$

$$\alpha_i - \bar{\delta} + \frac{2Q\bar{\delta} + \bar{y}_n(\alpha_i - \bar{\delta}) - \bar{y}_n(\alpha_i + \bar{\delta})}{Q - P} \leqq x \leqq \alpha_i + \bar{\delta},$$

où

$$P = P[\alpha_i, \bar{y}_n(\alpha_i)], \quad Q = Q[\alpha_i, \bar{y}_n(\alpha_i)] \quad \text{si} \quad \begin{array}{l} \bar{y}_n'(\alpha_i - \bar{\delta}) \leqq P_M[\alpha_i - \bar{\delta}, \bar{y}_n(\alpha_i - \bar{\delta})] \\ \bar{y}_n'(\alpha_i + \bar{\delta}) \geqq Q_M[\alpha_i + \bar{\delta}, \bar{y}_n(\alpha_i + \bar{\delta})] \end{array}$$

$$P = Q[\alpha_i, \bar{y}_n(\alpha_i)], \quad Q = P[\alpha_i, \bar{y}_n(\alpha_i)]$$

dans le cas contraire,

$$P = P[\alpha_i, \bar{y}_n(\alpha_i)] = Q \quad \text{si} \quad \begin{array}{l} \bar{y}_n'(\alpha_i - \bar{\delta}) \leqq P_M[\alpha_i - \bar{\delta}, \bar{y}_n(\alpha_i - \bar{\delta})] \\ \bar{y}_n'(\alpha_i + \bar{\delta}) \leqq P_M[\alpha_i + \bar{\delta}, \bar{y}_n(\alpha_i + \bar{\delta})] \end{array}$$

$$P = Q[\alpha_i, \bar{y}_n(\alpha_i)] = Q \quad \text{si} \quad \begin{array}{l} \bar{y}_n'(\alpha_i - \bar{\delta}) \geqq Q_M[\alpha_i - \bar{\delta}, \bar{y}_n(\alpha_i - \bar{\delta})] \\ \bar{y}_n'(\alpha_i + \bar{\delta}) \geqq Q_M[\alpha_i + \bar{\delta}, \bar{y}_n(\alpha_i + \bar{\delta})]. \end{array}$$

Il est évident qu'on prend $\bar{\delta}$ de façon que la courbe $C_{\delta}[y = v_{\delta}(x)]$ appartienne à $D_{n,M}$.

Alors on doit avoir

$$I_{C_{\bar{\delta}}} \geqq I_{C_n}, \qquad \text{c. à. d.}$$

$$\frac{1}{2\bar{\delta}} \int_{\alpha_i - \bar{\delta}}^{\alpha_i + \bar{\delta}} f[x, v_{\bar{\delta}}(x), v_{\bar{\delta}}'(x)]dx \geqq \frac{1}{2\bar{\delta}} \int_{\alpha_i - \bar{\delta}}^{\alpha_i + \bar{\delta}} f[x, \bar{y}_n(x), \bar{y}_n'(x)]dx$$

d'où l'on tire, en vertu de la continuité de $\bar{y}_n'(x)$ dans $(\alpha_i - \bar{\delta}, \alpha_i)$ ainsi que dans $(\alpha_i, \alpha_i + \bar{\delta})$, [$\bar{\delta}$ est si petit que $\alpha_{i-k} \leqq \alpha_i - \bar{\delta}$, $\alpha_{i+k'} \geqq \alpha_i + \bar{\delta}$, où α_{i-k}, $\alpha_{i+k'}$

sont les valeur α_j les plus voisines de α_i (mais ne confondant pas avec α_i) respectivement de bas en haut]

$$f(\alpha_i, \bar y_n(\alpha_i), P) + \left(\frac{\bar y_n'(\alpha_i - 0) + \bar y_n'(\alpha_i + 0)}{2} - P\right) f'_{y'}(\alpha_i, \bar y_n(\alpha_i), P) \geqq$$
$$\geqq \frac{f[\alpha_i, \bar y_n(\alpha_i), \bar y_n'(\alpha_i - 0)] + f[\alpha_i, \bar y_n(\alpha_i), \bar y_n'(\alpha_i + 0)]}{2} - \varepsilon_{\bar\delta}, \quad \text{où} \quad \varepsilon_{\bar\delta} \underset{\bar\delta \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Or on a

$$f[\alpha_i, \bar y_n(\alpha_i), \bar y_n'(\alpha_i - 0)] \geqq f(\alpha_i, \bar y_n(\alpha_i), P) + [\bar y_n'(\alpha_i - 0) - P] f'_{y'}(\alpha_i, \bar y_n(\alpha_i), P)$$
$$f[\alpha_i, \bar y_n(\alpha_i), \bar y_n'(\alpha_i + 0)] \geqq f(\alpha_i, \bar y_n(\alpha_i), P) + [\bar y_n'(\alpha_i + 0) - P] f'_{y'}(\alpha_i, \bar y_n(\alpha_i), P).$$

On a donc

$$\bar y_n'(\alpha_i - 0) = P, \quad \bar y_n'(\alpha_i + 0) = Q.$$

Par conséquent partout dans (a, b)

$$\Delta_n(x) = f[x, \bar y_n(x), \bar y'_n(x)] - G[x, \bar y_n(x), \bar y'_n(x)]$$

est une fonction continue de x.

Or, dans chaque (α_i, α_{i+1}), existe presque partout la dérivée $\bar y''_n(x)$, bornée (en valeur absolue) indépendamment de n. En remarquant de plus que $y_n(x)$, $y'_n(x)$ sont bornées (en valeur absolue) indépendamment de n, on voit qu' il existe un nombre positif λ ne dépendant pas de n, tel que presque partout dans (a, b) $\Delta_n(x)$ a la dérivée, dont la valeur absolue n'est pas plus grande que λ.

D'autre part la suite $\bar C_n$ étant une suite minimisante à la fois pour I_C et pour J_C dans D, on a

$$\int_a^b \Delta_n(x) dx \to 0.$$

En vertu des relations

$$\Delta_n(x) \geqq 0, \quad |\Delta_n(x'') - \Delta_n(x')| \leqq \lambda\, |x'' - x'|$$

on s'assure que

$$\Delta_n(x) \to 0$$

uniformément dans (a, b). On peut donc, à chaque positif ε, faire correspondre un nombre n_ε tel que pour tout $n \geqq n_\varepsilon$

$$|\Delta_n(x)| \leqq \varepsilon, \quad a \leqq x \leqq b.$$

Or, si pour un point x_0

$$\bar y'_n(x_0) = P_{M_2}[x_0, \bar y_n(x_0)] \quad \text{ou si} \quad \bar y'_n(x) = Q_{M_2}[x_0, \bar y_n(x_0)]$$

alors

$$\Delta_n(x_0) \geqq \gamma > 0$$

où γ ne dépend pas de n.

On voit donc que si l'on prend $\varepsilon < \gamma$, alors pour tout $n \geqq n_\varepsilon$ la courbe $\bar{\varepsilon}_n$ est formée au plus de n arcs, le long de chacun desquels on a

$$\bar{y}_n'(x) \geqq Q_{M_2}[x, \bar{y}_n(x)] + \zeta$$

ou

$$\bar{y}_n'(x) \leqq P_{M_2}[x, \bar{y}_n(x)] - \zeta,$$

où ζ est un nombre positif fixe.

Par conséquent, à chaque fonction $\eta(x)$ possédant presque partout la dérivée bornée, et s'annullant pour $x = a$ et pour $x = b$, on peut faire correspondre un nombre positif α_1 tel que la famille des courbes

$$C_\alpha[y = \bar{y}_n(x) + \alpha\eta(x),\ a \leqq x \leqq b,\ -\alpha_1 \leqq \alpha \leqq +\alpha_1]$$

appartienne à D_{n, M_2}.

Donc la fonction

$$F(\alpha) = I_{C\alpha}$$

a le minimum absolu dans l'intérvalle $(-\alpha_1, +\alpha_1)$ pour $\alpha = 0$, d'où à l'aide d'un raisonnement bien connu on s'assure que la courbe $\bar{C}_n$ est une extrémaloïde composée d'un nombre finie d'extrémales.

Cela démontre les théorèmes :

Si f(x, y, z) *vérifie les conditions du* § 1, *alors il existe dans la classe* D *au moins une extrémaloïde, composée d'un nombre fini d'extrémales.*

Quelque soit le nombre positif ε, *on peut toujours lui faire correspondre dans la classe* D *au moins une extrémaloïde, composée d'un nombre fini d'extrémales, qui donne à* I_C *une valeur qui diffère au plus par* ε *de la borne inférieure* i_D.

Remarque : Ce dernier théorème montre que s'il n'existe qu'un nombre finie d'extrémaloïdes appartenant à D, *alors le problème de minimum absolu de* I_C *dans* D *admet des solutions.*

Significato proiettivo di alcuni tipi di equazioni differenziali del secondo ordine.

Memoria di ENRICO BOMPIANI (a Roma).

Sunto. - *Ogni elemento di 2° ordine di curva di una superficie (ad asintotiche distinte e non rettilinee) determina due* quadriche asintotiche osculatrici. *Gli elementi di 2° ordine tali che queste quadriche abbiano, in ogni punto della superficie, un contatto assegnato con una retta, conica o cubica sghemba associata al punto appartengono alle curve integrali di equazioni differenziali del tipo* $v''P_i(v') = P_{i+3}(v')$ $(i = 1, 2)$ *ove* $P_k(v')$ *è un polinomio di grado* k *in* $v' = dv/du$ *a coefficienti funzioni di* u e v. *Determinazione della configurazione geometrica a partire dall'equazione.*

PREMESSA

1. Assegno in questo lavoro l'interpretazione geometrica, rispetto al gruppo proiettivo, di alcuni tipi di equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine, cioè la costruzione delle loro curve integrali sopra una superficie dello spazio ordinario (a tre dimensioni).

Per intendere bene il significato e l'interesse dei risultati esposti qui appresso è utile rifarsi a ricerche precedenti, alcune delle quali ormai classiche, nelle quali già si presentano problemi del tipo di quelli qui trattati.

È più che noto che le geodetiche di una superficie σ, sulla quale siano distese le variabili u e v, soddisfano ad una equazione differenziale del tipo

$$v'' = A + Bv' + Cv'^2 + Dv'^3 . \tag{1}$$

Se si fa nascere quest'equazione dal problema di estremare l'elemento d'arco di σ,

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

cioè da $\delta\int ds = 0$, i suoi coefficienti *data* σ (nel gruppo delle applicabilità) risultano funzioni note di E, F, G (e più precisamente dei simboli di CHRISTOFFEL di 2ª specie relativi al ds^2): sicchè sopra una data superficie σ si può interpretare *una sola* equazione differenziale del tipo (1) nel modo ora detto.

Il fatto che i piani osculatori in un punto di σ alle curve integrali della (1) formano fascio (intorno alla normale nel punto) è una conseguenza della particolare forma dei suoi coefficienti (o meglio di particolari relazioni fra essi).

Si debbono probabilmente a questa spontanea interpretazione geometrica della (1) in un caso particolare ben determinato, e allo interesse della (1) nella teoria dei gruppi di trasformazioni i lavori di LIOUVILLE, di LIE, di TRESSE il quale ultimo ne ha studiata la teoria rispetto al gruppo delle trasformazioni puntuali (1).

Il KASNER (2) nel 1906 ha studiato la (1) *nel piano* assegnandone il significato rispetto al *gruppo metrico*: i centri di curvatura delle sue curve integrali passanti per un punto appartengono ad una particolare cubica (determinata dai coefficienti A, B, C, D). È questa forse la prima interpretazione generale della (1) (s'intende sempre nel piano e nel gruppo metrico), generale nel senso che non s'impone alcuna relazione ai coefficienti A, B, C, D.

2. Ritornando alle superficie, come naturale estensione in senso proiettivo delle geodetiche si presentavano i sistemi ∞^2 di curve tali che i loro piani osculatori in un punto della superficie passassero per una stessa retta. Questi sistemi, che ho chiamato *sistemi assiali*, si incontrano in un lavoro della signorina SPERRY (3) e poi ancora in FUBINI (4): la loro importanza però, sia nella teoria proiettiva della superficie (5) (che si può costruire basandosi su di essi come quella delle ordinarie applicabilità sulla nozione di geodetiche) sia nella teoria delle corrispondenze puntuali fra superficie (6), apparisce soltanto, se non erro, nei miei lavori ora citati.

Questi sistemi assiali dipendono da due sole funzioni arbitrarie di due variabili (che determinano in ogni punto di σ l'asse del fascio) e quindi forniscono l'interpretazione proiettiva (sopra una assegnata superficie σ) di un

---

(1) *Détermination des invariants ponctuels de l'équation differentielle di 2º ordre.* « Preisschriften der Fürstlich Jablonowski Gesellschaft », zu Leipzig, 1896.

(2) V. « American Journal of Mathematics », pag. 207.

(3) *Properties of a certain projectively defined two-parameter family of curves on a general surface.* « Amer. Journal of Mathem. », vol. XL, n. 2, 1918.

(4) *Fondamenti della Geometria proiettivo-differenziale di una superficie.* « Atti Acc. di Torino », vol. 211, 1918.

(5) V. per es. la mia « Appendice II » al vol. II di FUBINI e CECH : *Geometria Proiettiva Differenziale* (Bologna, Zanichelli, 1927); in particolare III B.

(6) V. nella « Appendice » ora citata l'indicazione di varie note dedicate a questo argomento; e in particolare la Memoria: *Proprietà generali della rappresentazione puntuale fra due superficie.* (« Annali di Matem. », s. IV, t. I, 1923-24).

particolare tipo (che preciserò in seguito) di equazioni (1) in cui due soli coefficienti sono arbitrari (precisamente B e C, mentre A e D vengono determinati da σ). Con ciò non è esaurita dunque l'interpretazione proiettiva della (1). Ma intanto questi sistemi si ripresentavano, da un altro punto di vista, come estremamente importanti: ENEA BORTOLOTTI (1) ed io (2) abbiamo riconosciuto che appartengono a tali sistemi le geodetiche di una *connessione proiettiva* secondo CARTAN (3); delle quali (non provenienti in generale da un problema di variazione) si ha dunque una semplice costruzione geometrica quando si ponga la superficie in relazione con l'ambiente.

Ispirandosi alle ricerche sui sistemi assiali il BLASCHKE (4) ha introdotto sistemi analoghi (che ha chiamato « ciclici » ed io più specificatamente « ciclici ortogonali ») nella geometria conforme; essi sono caratterizzati dal fatto che i circoli osculatori in un punto P di σ alle ∞^2 curve del sistema che vi passano si appoggiano (fuori di P) ad un cerchio ortogonale in P a σ.

Questi sistemi, ai quali appartengono per esempio le estremali di un problema $\delta\int F(u, v)ds = 0$ (5) con F qualsiasi, dipendono (come quelli assiali) da *due* funzioni arbitrarie (per es. le coordinate del centro del cerchio nel piano tangente in P a σ). Sistemi più generali, che chiamo soltanto « ciclici », si ottengono lasciando cadere la condizione d'ortogonalità in P fra σ e il cerchio d'appoggio; essi dipendono da *tre* funzioni arbitrarie e sono invarianti rispetto al gruppo conforme.

3. Questi risultati apparivano per me (6) come casi particolari di altri del tutto generali relativi all'interpretazione proiettiva della più generale equa-

---

(1) *Sistemi assiali e connessioni nelle* V_m. « Rend. Acc. Lincei », vol. V, s. 6, 1927.

(2) *Alcune idee generali per lo studio differenziale delle varietà.* « Rend. Acc. Lincei », vol. V, s. 6, 1927.

(3) Vedasi p. es.: *Sur les variétés à connexion projective,* « Bull. Soc. Mathem. de France », t. 52, 1924.

(4) *Sistemi ciclici di curve sopra una superficie.* « Rendic. Accad. Lincei », vol. II, s. 6, 1925. *Ueber Konforme Geometrie,* IV; *Abbildung zweier Flächen aufeinander.* « Abhandl. des Math. Seminars », Hamburg, 4, 1925.

(5) Questa bella proprietà, dovuta al BLASCHKE, è da ravvicinarsi alla caratterizzazione delle estremali di $\int F(x, y, z)ds$ nello spazio dovuta al KASNER. Vedasi p. es.: *Natural families of trajectories: conservative fields of force.* « Transac. Amer. Math. Soc. », 1909, vol. X. Si veda anche il rapporto del KASNER al Princeton Colloquium (1909): *Differential-geometric aspects of dynamics.* (« Published by the Amer. Math. Soc. », 1913).

(6) *Sulla corrispondenza puntuale fra due superficie a punti planari.* « Bollett. Unione Matem. Ital. », vol. IV, 1925.

zione (1) sopra una superficie σ appartenente ad un ambiente qualsiasi [1] (e qui è da intender bene che non è la dimensione dell'ambiente sebbene quella dello spazio 2-osculatore, cioè contenente l'intorno del 2° ordine di un punto generico di σ, che solo ha importanza). Questa interpretazione affatto generale è suscettibile, con l'uso consueto dei vari principî di trasporto *(Uebertragungsprinzip)* delle più varie specificazioni: sicchè si ottengono per esempio teoremi della geometria conforme (ora ricordati) o di geometria della retta supponendo σ immersa in una quadrica di S_4 o di S_5. Ricorderò appresso l'interpretazione proiettiva in S_3 della (1), quando i suoi coefficienti siano affatto generali; per finire questa rivista relativa alla (1) accennerò che attualmente la scuola del BLASCHKE sta caratterizzando la (1) rispetto al gruppo topologico.

4. Caratterizzare un'equazione differenziale del 2° ordine sopra una superficie σ rispetto ad un dato gruppo vuol dire assegnare in ogni punto di σ e per ogni tangente uscente da esso una costruzione (invariante rispetto al gruppo) dell'elemento di 2° ordine (E_2) [2] di una curva integrale dell'equazione in relazione ad elementi della superficie legati ad essa in modo invariante rispetto al gruppo scelto.

Sia questo il gruppo delle applicabilità proiettive di σ (che comprende in particolare quello delle sue trasformazioni omografiche; rispetto ad esso parlerò di significato proiettivo di un'equazione differenziale): la superficie è individuata in questo gruppo dalla conoscenza di 2 *forme elementari invarianti* [3]

$$\chi_1 = \beta \frac{du^2}{dv}, \quad \chi_2 = \gamma \frac{dv^2}{du}$$

(ove $du=0$, $dv=0$ rappresentano le asintotiche, distinte e non rettilinee della superficie) o dalla somma (che è *l'elemento lineare proiettivo* secondo FUBINI).

Il piano osculatore ad una curva di σ in un suo punto è già un elemento invariante relativo al suo E_2. Nella interpretazione proiettiva della (1)

---

(1) *L'intorno del 2° ordine e i sistemi plurassiali di una superficie qualsiasi.* « Memorie Accad. delle Scienze di Bologna », s. VIII, t. IV, 1926-27.

(2) Indico così l'elemento comune a tutte le curve aventi in un punto un contatto del 2° ordine.

(3) Ho introdotto queste forme nella Nota: *Le forme elementari e la teoria proiettiva delle superficie.* (« Bollett. dell'Unione Matematica Italiana », anno V, n. 405, 1926). Esse si costruiscono immediatamente appena note le equazioni differenziali cui soddisfa un *qualsiasi* sistema di coordinate proiettive della superficie, senza bisogno di alcuna preventiva normalizzazione di esse, riferita alle sue asintotiche (v. appresso n. 6).

è riuscito più vantaggioso (e la ragione ne è evidente per la loro stessa definizione) associare ad E_2 due quadriche così definite [1].

Si considerino le tangenti asintotiche di un sistema (per es. u; $dv = 0$) uscenti dai punti di una curva di σ: la rigata così costruita ha lungo ogni sua generatrice, quindi per ogni punto della curva, una quadrica osculatrice. Questa si dirà *quadrica asintotica osculatrice,* del sistema scelto, nel punto alla curva, o meglio al suo E_2; le due quadriche così ottenute s'indicheranno con $Q'(E_2)$ e $Q''(E_2)$ (chiameremo del 1° sistema quella costruita con le tangenti asintotiche u; del 2° l'altra).

Il significato della (1) nel gruppo scelto è questo [2]: *La* (1) *determina in ogni punto* P *di* σ *una quadrica passante per le sue tangenti asintotiche ivi* (*che si costruisce algebricamente date* A, B, C, D), *alla quale sono tangenti* (*in un punto non appartenente alle tangenti asintotiche*) *le quadriche asintotiche osculatrici* (*di un sistema*) *alle curve integrali di* (1) *uscenti da* P.

Cambiando il sistema di asintotiche cambia la quadrica definita dalla (1).

Questo nel caso generale.

Se nella (1)

$$A = -\beta, \quad D = \gamma$$

cioè

$$v'' = -\beta + Bv' + Cv'^2 + \gamma v'^3, \tag{1'}$$

i piani osculatori alle sue curve integrali in P *formano fascio intorno ad una retta* ***(sistemi assiali),*** *caratterizzata da* B *e* C [3].

Se invece $A = \beta$, *cioè*

$$v'' = \beta + Bv' + Cv'^2 + Dv'^3, \tag{1''}$$

le quadriche asintotiche osculatrici del 1° sistema $Q'(E_2)$ *alle curve integrali di* (1) *in* P *passano per un punto* ($\neq$ P) *caratterizzato da* B, C, D [4].

Analogamente se $D = -\gamma$ per le $Q''(E_2)$.

---

[1] *La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato.* e *Ancora sulla geometria delle superficie, ecc.* « Rendic. Accad. dei Lincei », s. 6ª, vol. III, 1926. Queste quadriche sono state considerate, contemporaneamente ed indipendentemente da me, da J. Kloboucek: *Quadrique osculatrice le long d'une génératrice de la surface réglée donnée par trois courbes infiniment voisines. Quadrique de Lie. L'élement de surface du troisième et quatrième ordre.* « Bulletin international de l'Academie de Sciences de Bohème », 1926. Questa nota, pervenutami nell'ottobre 1927, non contiene alcuna applicazione alle equazioni differenziali.

[2] *Ancora sulla geometria. ecc.*, già citata, n.i 4 e 7.

[3] Loc. cit., n.° 5.

[4] Loc. cit., n.° 6.

5. Nel presente lavoro mi sono proposto la caratterizzazione, sempre rispetto allo stesso gruppo, di altri tipi di equazioni del 2° ordine lineari nella derivata seconda. È bene avvertire subito che non c'è alcuna difficoltà a costruire equazioni di significato geometrico noto: la difficoltà sta invece nell'assegnare tipi *generali* di equazioni, cioè nell'interpretarle quando tra i coefficienti di una di esse (o fra questi, β e γ) non passi alcuna relazione particolare.

Il primo tipo esaminato è

Tipo I $$v''v' = P_4(v')$$

ove P_4 è un polinomio di 4° grado in v'. Esso determina in ogni punto P di σ una conica, ivi tangente a σ, alla quale sono tangenti le $Q'(E_2)$ relative alle sue curve integrali. Se il coefficiente di v'^4 in questa equazione è $= -\gamma$ accade che le $Q''(E_2)$ ad essa relative vanno a toccare (fuori di P) un'altra conica tangente a sua volta alla tangente asintotica v (fuori di P).

Invece, per una particolare determinazione del coefficiente di v' (Tipo II) la conica si spezza in una tangente a σ e in una altra retta: il modo di variare di questa retta, immagine in P dell'equazione, al variare dei suoi coefficienti, sta in elegante relazione con le quadriche di DARBOUX in P.

Se invece ad ogni punto P di σ si associa una cubica sghemba Γ^3 tangente all'asintotica u ed avente in P contatto quadripunto con tutte le $Q'(E_2)$, le $Q'(E_2)$ tangenti ulteriormente alla cubica appartengono alle linee integrali di una equazione del

Tipo III $$v''(A + Bv') = P_4(v')$$

e viceversa ogni tale equazione determina in generale due Γ^3 (ed altrettanto accade se si considerano le quadriche $Q''(E_2)$ dell'altro sistema).

Ma se in particolare (fatto $A = 1$) il termine di grado zero in v' entro P_4 vale β, invece di una Γ^3 si ha una conica che tocca la tangente asintotica u fuori di $P (B \neq 0)$ alla quale sono tangenti (in un punto non appartenente a quella tangente asintotica) le $Q'(E_2)$.

Se invece $A = 0$ e manca il termine di grado zero in v', si ritrova l'equazione (1″) di cui apparisce quest'altra proprietà: le $Q'(E_2)$ ad essa relativa toccano (fuori di P) ∞^1 coniche (tangenti in P a σ) appartenenti ad una superficie cubica.

Infine il

Tipo IV $$v''(A + Bv'^2) = P_5(v')$$

nasce pure dal considerare le $Q'(E_2)$ tangenti in P ad una cubica Γ^3 la quale tocchi in P la tangente asintotica v ed abbia ivi con tutte le ∞^2 $Q'(E_2)$ un contatto quadripunto; fatto $A=1$ il termine di grado zero in v' entro P_5 è β. E viceversa una tale equazione determina, in generale due Γ^3 del tipo detto (e una corrispondenza proiettiva che dà luogo ad una superficie del 4° ordine). Nel caso $B=0$ si ha una sola cubica.

Le ricerche qui esposte sono suscettibili di vari sviluppi e di notevoli estensioni. Fra i primi noterò lo studio degli invarianti differenziali e del loro significato rispetto alle configurazioni geometriche introdotte; la ricerca degli elementi eccezionali, sempre per le equazioni esaminate, per i quali le quadriche asintotiche osculatrici hanno un contatto più elevato dell'ordinario; l'esame e la caratterizzazione di quelle fra le equazioni dette che provengono da problemi di variazione e i legami con le metriche introdotte dal FINSLER, dalla NÖTHER e particolarmente approfondite dal BERWALD; ecc.

Fra le possibili estensioni noterò che gli stessi procedimenti appresso adoperati mettono in evidenza, con lievi modificazioni, tipi di equazioni non più lineari, ma quadratiche in v''. Le questioni qui accennate potranno essere sviluppate, da me o da altri, in successivi lavori: qui basti l'accenno fatto.

6. Precisiamo la rappresentazione analitica di σ (1). Il suo punto P abbia le coordinate omogenee $x^i(u, v)$ e le linee $u(dv=0)$ e $v(du=0)$ siano le asintotiche (non rettilinee) di σ.

Con opportuna scelta del fattore di normalizzazione delle x^i queste soddisfano al seguente sistema (2)

$$(2) \qquad x_{uu}=\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}\, x_u+\beta x_v+n x\,; \quad x_{vv}=\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v}\, x_v+\gamma x_u+\nu x.$$

(1) Vedasi p. es. la mia Nota: *Ein Analogon der Quadrik von Lie in der projektiven Flächentheorie.* « Mathem. Zeitschrift », Bd. 29, Heft, 5, 1929.

Questa Nota, come risulta dalla data pubblicata dalla Redazione, è stata ricevuta il 22 settembre 1927; il CECH che conosceva questi miei risultati prima del loro invio per la stampa ha pubblicato poi (*Osservazioni sulle quadriche di Darboux*, « Rend. Lincei », vol. VIII, Novembre 1928) che il FUBINI, *prima* di me (cioè l'8 Gennaio 1928!) aveva trovato una notevole proprietà delle quadriche di DARBOUX che si trova nella Nota citata.

La quadrica indicata dal CECH con M_0 è individuata da un birapporto, appunto da me introdotto, che fu calcolato insieme al CECH in casa mia nell'Agosto 1927 (e si trova nella mia Nota citata): il CECH, come mi ha dichiarato recentemente a Praga (Settembre 1929) se ne era poi dimenticato!

(2) La normalizzazione scelta è quella del FUBINI, ma non è affatto necessaria. Qualunque essa sia, sono invarianti le forme χ_1 e χ_2.

Si ponga come al solito [1]

$$T = |X, x, x_u, x_v|, \quad N_1 = |X, x, x_u, x_{uv}|, \quad N_2 = |X, x, x_v, x_{uv}|, \tag{3}$$
$$\Omega = |X, x_u, x_v, x_{uv}|,$$

ove x^i sono coordinate di un punto generico dello spazio da introdursi nei determinanti dei secondi membri:

$$\left\{\begin{aligned}
&\varphi_2 = 2\beta\gamma du dv,\\
&H = -\left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u \partial v} + \beta\gamma\right)/\beta\gamma, \quad \psi_1 = \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}, \quad \psi_2 = \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v},\\
&\delta^2 u = d^2 u + \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} du^2, \quad \delta^2 v = d^2 v + \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} dv^2,\\
&a' = -\beta^2\gamma du^3 + \beta\gamma^2 H dv^3 + \varphi_2\left(\frac{1}{2}\psi_1 du - \psi_2 dv\right),\\
&a'' = \beta\gamma^2 dv^3 - \beta^2\gamma H du^3 + \varphi_2\left(\psi_1 du - \frac{1}{2}\psi_2 dv\right),\\
&a_0 = \beta\gamma(du\delta^2 v - dv\delta^2 u); \quad a_1 = a_0 + a'; \quad a_2 = a_0 + a'',\\
&b = -\varphi_2 du; \quad c = -\varphi_2 dv; \quad e' = \gamma dv^3; \quad e'' = -\beta du^3.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

La quadrica asintotica osculatrice del primo sistema $Q'(E_2)$ (cioè costruita con tangenti alle linee u) relativa all' E_2 $(u, v, du/dv, \delta^2 u, \delta^2 v)$ ha l'equazione:

$$a_1 T^2 + bTN_1 + cTN_2 + 2e'(T\Omega - N_1 N_2) = 0, \tag{5}$$

e quella del secondo $Q''(E_2)$

$$a_2 T^2 + bTN_1 + cTN_2 + 2e''(T\Omega - N_1 N_2) = 0 \tag{6}$$

e il piano di E_2 (cioè il piano osculatore ad una curva per esso)

$$[a_0 + (\beta du^3 - \gamma dv^3)\beta\gamma]T + \varphi_2(N_1 du + N_2 dv) = 0. \tag{7}$$

I. L'equazione differenziale

I) $v'v'' = A + Bv' + Cv'^2 + Dv'^3 + Ev'^4$.

7. Associamo al punto P di σ una conica Γ^2 tangente in P a σ [2]. Cerchiamo gli elementi E_2 per P per i quali $Q'(E_2)$ riesca tangente a Γ^2 (fuori di P).

---

[1] V. la mia Nota già citata della « Mathematische Zeitschrift ».

[2] Ma non alla tangente asintotica u: il caso escluso è esaminato al n. 20.

Sia (8) $\nu_1 N_1 + \nu_2 N_2 = T$ l'equazione del piano di Γ^2: per finire d'individuarla consideriamo il cono di equazione

$$\alpha_{11} N_1^2 + \alpha_{22} N_2^2 + 2\alpha_{12} N_1 N_2 + 2(\nu_1 N_1 + \nu_2 N_2)\Omega = 0 \tag{9}$$

(i numeri α_{ik}, ν_i determinano in P la conica), cioè la proiezione di Γ^2 sul piano tangente $T = 0$ dal vertice opposto del tetraedro fondamentale. La sezione del piano di Γ^2 con $Q'(E_2)$ si proietta nello stesso modo nella conica di equazione:

$$a_1(\nu_1 N_1 + \nu_2 N_2)^2 + (bN_1 + cN_2 + 2e'\Omega)(\nu_1 N_1 + \nu_2 N_2) - 2e' N_1 N_2 = 0.$$

L'equazione complessiva delle rette che proiettano da P le intersezioni di queste due coniche, o dei piani che da $N_1 = N_2 = 0$ proiettano i punti d'intersezione di $Q'(E_2)$ con Γ^2, è

$$\begin{aligned} a_1(\nu_1 N_1 + \nu_2 N_2)^2 + (bN_1 + cN_2)(\nu_1 N_1 + \nu_2 N_2) - \\ - e'(\alpha_{11} N_1^2 + \alpha_{22} N_2^2 + 2\alpha_{12} N_1 N_2) - 2e' N_1 N_2 = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

La condizione per la loro coincidenza è

$$\begin{aligned} a_1 e'[\nu_1^2 \alpha_{22} + \nu_2^2 \alpha_{11} - 2\nu_1\nu_2(\alpha_{12} + 1)] + \frac{1}{4}(b\nu_2 - c\nu_1)^2 + \\ + e'[b\alpha_{22}\nu_1 + c\alpha_{11}\nu_2 - (b\nu_2 + c\nu_1)(\alpha_{12} + 1)] + e'^2[(\alpha_{12} + 1)^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}] = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Tenuto presente il significato dei simboli a_1, b, c, e' questa condizione è del tipo

$$v'v'' = A + Bv' + Cv'^2 + Dv'^3 + Ev'^4; \tag{13}$$

le 5 funzioni $A(u, v), \dots, E(u, v)$ sono essenziali (indipendenti) e corrispondono ai 5 parametri necessari ad individuare in ogni P una Γ^2 ivi tangente a σ.

Che viceversa ad ogni equazione del tipo ora scritto corrisponda una conica Γ^2 in ogni punto P appare probabile per il significato geometrico di essa: ed è effettivamente così; ma ciò non può garantirsi che eseguendo il calcolo delle α_{ik}, ν_i in funzione di $A, B, \dots E$.

Il calcolo del resto è redditizio perchè mostra in che modo dipendano gli elementi geometrici determinanti Γ^2 dai vari coefficienti $A, \dots, E$.

8. Si ponga per brevità

$$\bar{\alpha}_{12} = \alpha_{12} + 1, \quad M = \alpha_{11}\nu_2^2 + \alpha_{22}\nu_1^2 - 2\bar{\alpha}_{12}\nu_1\nu_2 \tag{14}$$

e s'indichi con ρ un fattore di proporzionalità $\neq 0$. Il confronto dei coefficienti nelle due equazioni (12) e (13) dà

$$(15)\quad \begin{cases} \beta M = \rho, \quad \beta^2 \nu_2^2 = -\rho A, \quad \beta^2(M + 2\nu_1\nu_2) = \rho B \\ \beta M\left(\psi_1 - \dfrac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}\right) + \beta^2\nu_1^2 + 2\beta(\alpha_{22}\nu_1 - \bar{\alpha}_{12}\nu_2) = -\rho C \\ \beta M\left(\dfrac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} - 2\psi_2\right) - 2\beta(\alpha_{11}\nu_2 - \bar{\alpha}_{12}\nu_1) = -\rho D \\ \beta M\gamma H + \gamma(\bar{\alpha}_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}) = -\rho E. \end{cases}$$

Si osservi che deve essere $M \neq 0$ se effettivamente vuole ottenersi una equazione differenziale del 2° ordine, ed $A \neq 0$ se non si vuol ritornare sul primo tipo studiato.

La terza equazione (15) può scriversi, in conseguenza della prima

$$2\beta^2\nu_1\nu_2 = \rho(B - \beta)$$

[quindi $\nu_1\nu_2 \neq 0$ se $B \neq \beta$] da cui, combinando con la seconda

$$\beta^2\nu_1^2 = -\rho\frac{(B-\beta)^2}{4A} \quad \text{e} \quad \frac{\nu_2}{\nu_1} = -\frac{2A}{B-\beta}$$

cioè la tangente alla conica Γ^2 in P dipende solo da $(B - \beta)/A$.

Le ultime tre si scrivono in conseguenza

$$2\beta(\alpha_{22}\nu_1 - \bar{\alpha}_{12}\nu_2) = -\rho\left\{C - \frac{(B-\beta)^2}{4A} + \frac{\partial \log \gamma}{\partial u}\right\} = -\rho F$$

$$2\beta(\alpha_{11}\nu_2 - \bar{\alpha}_{12}\nu_1) = \rho\left\{D - \frac{\partial \log \beta^3\gamma}{\partial v}\right\} = \rho G$$

$$\bar{\alpha}_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} = -\rho\left\{\frac{E}{\gamma} + H\right\}$$

in cui F e G son definite dalle posizioni fatte.

Moltiplicando la prima di queste per ν_1, la seconda per ν_2 e sommando si ha (in forza di $\beta M = \rho$) $G\nu_2 - F\nu_1 = 2$ e perciò

$$(16)\qquad \nu_1 = -\frac{2(B-\beta)}{F(B-\beta)+2AG}, \quad \nu_2 = \frac{4A}{F(B-\beta)+2AG}.$$

Possiamo pertanto riguardare come noti in funzione di A, B, C, D, (e non di E), i parametri ν_1, ν_2 e quindi anche $\rho = \dfrac{2\beta^2\nu_1\nu_2}{B-\beta}$. Si ha poi, dalle ultime tre,

$$(17)\quad \begin{cases} \alpha_{12} = \bar{\alpha}_{12} - 1 = \beta\left\{H + \dfrac{FG}{2(B-\beta)} + \dfrac{E}{\gamma}\right\}\nu_1\nu_2 - 1 \\ \alpha_{11} = \beta\left\{H + \dfrac{FG}{2(B-\beta)} + \dfrac{E}{\gamma}\right\}\nu_1^2 + \dfrac{\beta G\nu_1}{B-\beta} \\ \alpha_{22} = \beta\left\{H + \dfrac{FG}{2(B-\beta)} + \dfrac{E}{\gamma}\right\}\nu_2^2 - \dfrac{\beta F\nu_2}{B-\beta}. \end{cases}$$

Sicchè, nel caso generale, la risoluzione è di fatto possibile e il cono proiettante da $N_1 = N_2 = \Omega = 0$ la conica Γ^2 ha l'equazione

$$\beta\left\{H + \frac{FG}{2(B-\beta)} + \frac{E}{\gamma}\right\}(\nu_1 N_1 + \nu_2 N_2)^2 + \frac{\beta}{B-\beta}\left\{G\nu_1 N_1^2 - 2\,\frac{B-\beta}{\beta}\,N_1 N_2 + F\nu_2 N_2^2\right\}$$
$$+ 2(\nu_1 N_1 + \nu_2 N_2)\Omega = 0.$$

Poichè E entra linearmente a fattore di $(\nu_1 N_1 + \nu_2 N_2)^2$, tutte le coniche Γ^2 che si ottengono al variare di E fissati A, B, C, D, hanno fra loro un contatto del 3° ordine (o 4 — puuto); in altri termini, i primi 4 coefficienti A, B, C, D, dell'equazione differenziale determinano l'intorno del 3° ordine di P su Γ^2 mentre E serve a finire di determinare Γ^2.

Riassumendo:

Data una superficie σ *(non rigata) ed in ogni suo punto* P *una conica* Γ^2 *ivi tangente* σ, *le curve di* σ *tali che le quadriche* $Q'(E_2)$ *ad esse osculatrici siano bitangenti a* Γ^2 *(in* P *e in un altro punto) formano un sistema soddisfacente ad un'equazione del tipo:*

I) $$v'v'' = A + Bv' + Cv'^2 + Dv'^3 + Ev'^4.$$

Viceversa, data σ *quest'equazione determina in ogni suo punto* P *una conica* Γ^2 *cui sono bitangenti le* ∞^1 $Q'(E_2)$ *relative alle curve integrali di essa uscenti da* P.

I coefficienti A, B, C, D *determinano l'intorno del 3° ordine di* P *su* Γ^2, *ed* E *finisce di determinarla.*

9. S'intende che per completezza, bisognerebbe esaminare i casi di eccezione (o almeno che possono esser tali) quando alcune delle operazioni fatte non siano eseguibili. Non c'è che riprendere le equazioni iniziali.

Se p. es. $B = \beta \neq 0$ risulta $\nu_1\nu_2 = 0$; ma poichè $A \neq 0$ anche $\nu_2 \neq 0$ quindi $\nu_1 = 0$. Risulta poi

$$\nu_2 = 2/G, \quad \alpha_{12} = -\beta\frac{F}{AG}, \quad \alpha_{11} = -\frac{\beta}{A}, \quad \alpha_{22} = \frac{4\beta}{G^2}\left\{\frac{E}{\gamma} + H - \frac{F^2}{4A}\right\};$$

cioè Γ^2 è ancora determinata.

Del resto va notato esplicitamente, per evitare equivoci, che gli eventuali casi d'eccezione sono tali rispetto ad una *data* superficie σ cioè a β e γ dati; potendosi sempre evitare se σ, sulla quale si vuol interpretare la (13), è in nostro arbitrio.

L'unico vero caso di eccezione si avrebbe quando per Γ^2 risultasse $M = 0$ (non essendo più in tal caso possibile l'identificazione dei coefficienti delle equazioni (12) e (13) mancando nella (12) il termine in v''). Qual'è il significato di $M=0$?

Se ritorniamo alla (11) vediamo che $M=0$ è condizione necessaria e sufficiente affinchè $Q'(E_2)$ e Γ^2 si osculino (abbiano un contatto del 2° ordine) in P. Ma $M=0$ non dipende affatto nè dalla scelta di E_2 nè da quella di E_1 per P (ma solo da P), in altri termini, preso ad arbitrio un piano per P *tutte* le quadriche asintotiche osculatrici di un sistema alle curve per P segano detto piano in coniche (costituenti un sistema ∞^2) che si osculano in P.

Dunque: *la conica* Γ^2 *del teorema precedente non deve essere osculatrice a* σ *in* P.

Tuttavia, posto che ciò accada, cioè che sia data Γ^2 osculatrice in P a σ ci si può chiedere se esistano E_2 per i quali $Q'(E_2)$ abbia con Γ^2 in P un contatto 4-punto.

Se Γ^2 oscula σ in P, cioè se $M=0$, si può porre sempre

$$\alpha_{11}=2\beta\lambda\nu_1\,,\quad \alpha_{22}=2\beta\mu\nu_2\,,\quad \bar{\alpha}_{12}=\beta(\lambda\nu_2+\mu\nu_1);$$

al variare di λ, μ la Γ^2 descrive il sistema ∞^2 anzidetto. Con ciò dall'equazione (11) si stacca, come deve, il fattore $\nu_1N_1+\nu_2N_2$; perchè il fattore rimanente si riduca pure ad esso deve essere

$$\frac{b-2\beta\lambda e'}{\nu_1}=\frac{c-2\beta\mu e'}{\nu_2}$$

cioè per le (4)

$$-\nu_2du^2+\nu_1dudv+(\mu\nu_1-\lambda\nu_2)dv^2=0.$$

Quindi: *vi sono due* E_1 *determinati da* Γ^2 *tali che le* $Q'(E_2)$ *in* P *relative a tutte le curve uscenti da* P *con quegli* E_1 *(con quelle tangenti) hanno contatto del 3° ordine con* Γ^2 (*osculatrice a* σ).

Il fatto che quando Γ^2 non sia osculatrice (ma solo tangente) a σ non si riesce a trovare E_2 tali che $Q'(E_2)$ risulti in P osculatrice (e non a contatto quadripunto) con Γ^2 può essere chiarito più esplicitamente con il seguente teorema.

Data una conica Γ^2 *tangente (ma non osculatrice) in* P *a* σ *tutte le quadriche* $Q'(E_2)$ *relative agli* ∞^1 E_2 *passanti per un* E_1 *uscente da* P *segano* Γ^2 *in coppie di punti le cui congiungenti passano per uno stesso punto* (*situato sulla tangente in* P *a* σ) *che dipende soltanto da* E_1 *e non da* E_2.

Si trova infatti che questo punto appartiene alla retta

$$\nu_1N_1+\nu_2N_2=0$$

e all'altra

$$\{\,2e'(\alpha_{22}\nu_1^2-\alpha_{11}\nu_2^2)+(\nu_2b-\nu_1c)(M+2\nu_1\nu_2)\,\}\,N_1+2\nu_2Me'\Omega=0$$

e questa non dipende affatto da a_1 cioè dall'E_2 scelto, ma solo dall'E_1 cioè da du/dv.

II. L'equazione differenziale [1]

II) $(du\delta^2 v - dv\delta^2 u)dv = A'du^4 + C'du^2dv^2 + D'dudv^3 + E'dv^4.$

10. La conica Γ^2 si spezza se (le appartiene il punto $N_1 = \nu_2$, $N_2 = -\nu_1$, $T = \Omega = 0$, cioè se) $M + 2\nu_1\nu_2 = 0$.

In questo caso le (15) danno $B = 0$ e viceversa. Questo caso di notevole interesse si studia meglio partendo direttamente dalla retta (non appartenente al piano tangente) che fa parte della conica.

Ci domandiamo dunque di caratterizzare quelle curve della superficie tali che i loro E_2 in un punto P abbiano le quadriche osculatrici del primo sistema $Q'(E_2)$ tangenti ad una retta.

Siano

$$\left\{\begin{aligned} N_1 &= \tau_1 T + \omega_1\Omega \\ N_2 &= \tau_2 T + \omega_2\Omega \end{aligned}\right. \tag{18}$$

le equazioni di questa.

La condizione di contatto con la quadrica (5) dà

$$8\omega_1\omega_2 e'[a_1 + b\tau_1 + c\tau_2 - 2e'\tau_1\tau_2] + [b\omega_1 + c\omega_2 + 2e'(1 - \tau_1\omega_2 - \tau_2\omega_1)]^2 = 0.$$

S'intende che $\omega_1\omega_2 \neq 0$ se si vuol avere una equazione differenziale del 2° ordine (altrimenti viene a mancare il termine in a_1) cioè la retta non deve incidere alcuna delle due tangenti asintotiche P. La condizione precedente si scrive:

$$(du\delta^2 v - dv\delta^2 u)dv = A'du^4 + C'du^2dv^2 + D'dudv^3 + E'dv^4$$

ove

$$\left\{\begin{aligned} A' &= -\frac{\beta}{2}\frac{\omega_1}{\omega_2} \\ C' &= (1 + \tau_1\omega_2 - \tau_2\omega_1)'/\omega_2 - \psi_1 + \beta^2/4A' \\ D' &= (1 - \tau_1\omega_2 - \tau_2\omega_1)/\omega_1 + 2\psi_2 \\ E' &= \frac{1}{\beta}\left\{2\tau_1\tau_2 - \beta\gamma H - \frac{(1 - \tau_1\omega_2 - \tau_2\omega_1)^2}{2\omega_1\omega_2}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Se si introducono le coordinate p_{ik} della retta estratte da

$$\left\|\begin{matrix} \tau_1 & \tau_2 & 1 & 0 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$$

[1] Qui e in seguito uso i differenziali secondi controvarianti δ^2 rispetto a φ_2. Il legame con quelli ordinari è dato dalle (4).

sicchè

$$p_{12}=\tau_1\omega_2-\tau_2\omega_1,\quad p_{13}=-\omega_1,\quad p_{23}=-\omega_2,\quad p_{14}=\tau_1,\quad p_{24}=\tau_2,\quad p_{34}=1$$

e si pone

$$R=C'+\psi_1-\beta^2/4A',\quad S=D'-2\psi_2$$

le relazioni precedenti si scrivono

$$A'p_{13}+\frac{\beta}{2}p_{23}=0 \tag{20}$$

$$p_{34}+p_{12}+Rp_{23}=0 \tag{21}$$

$$p_{34}-p_{12}+Sp_{13}=0 \tag{22}$$

$$2\beta(E'+\gamma H)p_{13}p_{23}+p_{34}^2+p_{12}^2+2p_{14}p_{23}+2p_{24}p_{13}=0$$

e questa, in forza della relazione quadratica tra le p_{ik} si scrive

$$2\beta(E'+\gamma H)p_{13}p_{23}+(p_{12}-p_{34})^2+4p_{13}p_{24}=0. \tag{23}$$

Sicchè data la retta, cioè le p_{ik}, è determinata l'equazione: ora vediamo che viceversa, data l'equazione, la retta è determinata in modo unico. Questa determinazione può farsi elegantemente per via geometrica come segue.

11. La sezione del complesso quadratico (23) con il terzo complesso lineare (22) (tolta la soluzione $p_{13}=0$ che porterebbe $\omega_1=0$, inaccettabile) è la congruenza lineare rappresentata da

$$\begin{cases} S^2p_{13}+2\beta(E'+\gamma H)p_{23}+4p_{24}=0 \\ Sp_{13}-p_{12}+p_{34}=0 \end{cases} \tag{24}$$

e questa è una *congruenza lineare speciale* le cui direttrici coincidono nella retta di equazioni

$$N_1=\frac{\beta(E'+\gamma H)}{S}T+\frac{2}{S}\Omega,\quad N_2=\frac{S}{2}T \tag{25}$$

e il luogo di queste direttrici al variare di S, cioè di D', è la quadrica di DARBOUX

$$\beta(E'+\gamma H)T^2=2(N_1N_2-\Omega T). \tag{26}$$

La proiettività individuata dalla congruenza speciale fra i punti della direttrice e i piani per essa fa corrispondere al punto $T=t$, $\Omega=\omega$ della direttrice il piano

$$[\beta(E'+\gamma H)t+\omega]T-\frac{S}{2}tN_1-\left[\frac{\beta(E'+\gamma H)}{S}t+\frac{2}{S}\omega\right]N_2+t\Omega=0$$

cioè precisamente il piano tangente in quel punto alla quadrica di DARBOUX (26).

Anche le due prime equazioni (20, 21), dei primi due complessi lineari, determinano una congruenza lineare speciale, cioè una retta, dipendente solo da A', di equazioni $\omega_1 N_2 - \omega_2 N_1 = T = 0$ ovvero $2A'N_2 + \beta N_1 = T = 0$, e intorno ad essa una proiettività, dipendente da R (cioè da C' oltre che da A'), che fa corrispondere al punto $N_1 = \omega_1$, $N_2 = \omega_2$, $T = 0$, $\Omega = 1$ il piano $\omega_1 N_2 - \omega_2 N_1 + (R\omega_2 - 1)T = 0$. Sicchè in definitiva la retta da costruire, cui debbono essere tangenti le quadriche $Q'(E_2)$ determinate in P dall'equazione data (II) è comune alle due congruenze speciali ora individuate. Ma siccome queste hanno già in comune, come apparisce senz'altro, la tangente asintotica alla linea u in P ($N_2 = T = 0$) risulta che v'è effettivamente una sola retta individuata dall'equazione differenziale (II).

Riassumendo:

Ad ogni equazione differenziale del tipo II

$$(du\delta^2 v - dv\delta^2 u)dv = A'du^4 + C'du^2dv^2 + D'dudv^3 + E'dv^4$$

corrisponde in ogni punto di σ *una ben determinata retta, cui risultano tangenti le quadriche asintotiche osculatrici del primo sistema* $Q'(E_2)$ *alle curve integrali dell'equazione uscenti da* P *(e quindi al variare di* P *una congruenza di rette in corrispondenza con i punti di* σ*). E viceversa se ad ogni punto* P *di* σ *si associa una retta (non passante per* P *nè contenuta nel piano tangente in* P *a* σ*) viene determinata in modo unico un'equazione* (II) *tale che le curve integrali di essa in* P *hanno le* $Q'(E_2)$ *tangenti alla retta.*

Possiamo quindi dire che *la retta è l'immagine dell'equazione in* P *e viceversa.*

La totalità delle equazioni (II) *che si ottengono variando* A′, C′, D′, *(fissato* E′*) si rappresenta associando ad ogni punto* P *una quadrica di Darboux (determinata da* E′*) nel senso che tutte le rette immagini di queste equazioni in* P *sono tangenti alla quadrica di Darboux.*

La totalità delle equazioni (II) *che si ottengono variando* A′ *e* C′ *(fissati* D′ *ed* E′*) si rappresenta in una generatrice di una quadrica di Darboux, nel senso che le rette immagini di quelle equazioni in* P *appartengono alla congruenza lineare speciale che ha quella generatrice per direttrice doppia e la cui proiettività è quella determinata intorno alla generatrice proprio dalla quadrica di Darboux a cui appartiene.*

La totalità delle equazioni (II) *che si ottengono al variare di* D′ *ed* E′ *(fissati* A′ *e* C′*) si rappresenta pure in una congruenza lineare speciale (nel senso più volte chiarito) il cui asse è individuato da* A′*; la proiettività* *intorno ad esso è determinata da* R *(cioè da* A′ *e* C′*) e si ottiene facendo corrispondere ad ogni punto dell'asse l'omologo nell'omologia armonica che ha per asse* $N_2 = T = 0$ *e per centro* $N_1 = T = 0$, $\Omega/N_2 = R/2$ *e prendendo di questo punto il piano polare rispetto ad una qualsiasi delle quadriche di Darboux.*

12. Queste specificazioni geometriche permettono di assegnare senz'altro alcune classi di equazioni invarianti del tipo assegnato. Per es. se la retta immagine dell'equazione in P sta nella faccia del tetraedro opposta a $P(\Omega = 0)$ dev'essere

$$2A'R = \beta S, \quad RS = 2\beta(E' + \gamma H).$$

Così invece per $S = E' + \gamma H = 0$ si hanno le equazioni per cui la direttrice della congruenza speciale introdotta per prima appartiene ad $\Omega = 0$ (necessariamente poi coincide con $N_2 = \Omega = 0$); e così di seguito.

III. L'equazione differenziale

$$\text{III)}\ (Adu + Bdv)(du\delta^2 v - dv\delta^2 u) =$$
$$= Ldu^4 + Mdu^3dv + Ndu^2dv^2 + Rdudv^3 + Sdv^4.$$

13. Ad un altro tipo generale di equazioni differenziali del 2° ordine si arriva con le considerazioni seguenti.

Si associ ad ogni punto P di σ una cubica sghemba Γ^3 osculatrice in P al piano ivi tangente a σ.

Se poniamo, per maggiore uniformità di scrittura, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ ordinatamente al posto di $N_1N_2\Omega T$, una Γ^3 del tipo voluto è rappresentata dalle equazioni parametriche in t

$$(27)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = t(\alpha_{11}t^2 + \alpha_{12}t + \alpha_{13}) \\ \alpha_2 = t(\alpha_{21}t^2 + \alpha_{22}t + \alpha_{23}) \\ \alpha_3 = t^3 \\ \alpha_4 = \alpha_{41}t^3 + \alpha_{42}t^2 + \alpha_{43}t + \alpha_{44} \end{cases}$$

ove si è posto $\alpha_{31} = 1$ come si può in forza del fattore insito nelle coordinate omogenee α_i. È $\alpha_{44} \neq 0$ se come vogliamo Γ^3 non si spezza; la tangente in $P(t = 0)$ ha l'equazione $\alpha_1\alpha_{23} = \alpha_2\alpha_{13}$.

Procuriamoci ora le intersezioni della quadrica osculatrice del primo sistema ad un elemento di curva E_2 uscente da P, quadrica $Q'(E_2)$, con Γ^3.

Tolte le due intersezioni evidenti in P esse sono determinate dell'equazione

$$(28)\qquad a_1 t^4 + bt^2(\alpha_{11}t^2 + \alpha_{12}t + \alpha_{13}) + ct^2(\alpha_{21}t^2 + \alpha_{22}t + \alpha_{23}) + \\ + 2e'[t(\alpha_{41}t^3 + \alpha_{42}t^2 + \alpha_{43}t + \alpha_{44}) - (\alpha_{11}t^2 + \alpha_{12}t + \alpha_{13})(\alpha_{21}t^2 + \alpha_{22}t + \alpha_{23})] = 0.$$

Apparisce di quà che le Γ^3 aventi in P un contatto tripunto con *qualsiasi* $Q'(E_2)$ in P sono quelle per cui $\alpha_{13} = 0$ oppure $\alpha_{23} = 0$, (non tutte e due insieme nulli), cioè quelle che toccano in P una tangente asintotica.

14. Sia allora $\alpha_{13} = 0$ cioè consideriamo una Γ^3 tangente in P ad $\alpha_1 = 0$, cioè all'asintotica del primo sistema (u; $dv = 0$).

Le ulteriori intersezioni di una $Q'(E_2)$ con Γ^3 sono date da

$$[\alpha_1 + b\alpha_{11} + c\alpha_{21} + 2e'(\alpha_{41} - \alpha_{11}\alpha_{21})]t^3 + [b\alpha_{12} + c\alpha_{22} + 2e'(\alpha_{42} - \alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{22})]t^2 + \\ + [c\alpha_{23} + 2e'(\alpha_{43} - \alpha_{12}\alpha_{22} - \alpha_{11}\alpha_{23})]t + 2e'(\alpha_{44} - \alpha_{12}\alpha_{23}) = 0.$$

Se e solo se $\alpha_{44} = \alpha_{12}\alpha_{23}$ la Γ^3 ha un contatto quadripunto con ogni quadrica $Q'(E_2)$ relativa a P.

Supponiamo che così sia, cioè scegliamo Γ^3 fra le ∞^6 cubiche sghembe tangenti in P all'asintotica u e aventi un contatto quadripunto con tutte le $Q'(E_2)$ relative a P.

Ciò posto, determiniamo gli E_2 tali che le loro $Q'(E_2)$ risultino tangenti a Γ^3 fuori di P.

Scritto per brevità

$$(29)\qquad A_{41} = \alpha_{41} - \alpha_{11}\alpha_{21}, \quad \beta B_{41} = \beta\gamma H + 2A_{41}, \\ A_{42} = \alpha_{42} - \alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{22} = \beta B_{42}; \quad A_{43} = \alpha_{43} - \alpha_{12}\alpha_{22} - \alpha_{11}\alpha_{23} = \beta B_{43}$$

quegli E_2 sono determinati dalla condizione

$$4[\alpha_1 + b\alpha_{11} + c\alpha_{21} + 2e'A_{41}][c\alpha_{23} + 2e'A_{43}] = [b\alpha_{12} + c\alpha_{22} + 2e'A_{42}]^2$$

ossia

$$(30)\qquad \begin{cases} 2(du\delta^2v - dv\delta^2u)(\alpha_{23}du - B_{43}dv) = \\ = (2\beta\alpha_{23} - \alpha_{12}^2)du^4 + 2[-\beta B_{43} - (\psi_1 - 2\alpha_{11})\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{22}]du^3dv + \\ + \{4(\psi_2 + \alpha_{21})\alpha_{23} + 2(\psi_1 - 2\alpha_{11})B_{43} + 2\alpha_{12}B_{42} - \alpha_{22}^2\}du^2dv^2 - \\ - 2\{2(\psi_2 + \alpha_{21})B_{43} + B_{41}\alpha_{23} - B_{42}\alpha_{22}\}dudv^3 + \\ + 2\{B_{43}B_{41} - B_{42}^2\}dv^4. \end{cases}$$

Questa condizione è del tipo III:

$$(Adu + Bdv)(du\delta^2v - dv\delta^2u) = \\ = Ldu^4 + Mdu^3dv + Ndu^2dv^2 + Rdudv^3 + Sdv^4$$

che contiene appunto sei coefficienti essenziali cioè quanti sono i parametri da cui dipende una Γ^3 del tipo assegnato in P.

15. La ricerca inversa, cioè la determinazione delle Γ^3 cui sono tangenti (fuori di P) le quadriche $Q'(E_2)$ relative agli E_2 uscenti da P ed appartenenti ad una data equazione (III) è meno agevole.

Si tratta dunque, date le A, B, L, M, N, R, S di determinare le α_{ik} (con le limitazioni che si sono andate ponendo).

In questa forma il problema non è ancora del tutto determinato perchè non è unica la rappresentazione di una Γ^3 soddisfacente in P alle condizioni volute; si può infatti disporre delle trasformazioni lineari sul parametro t che ne lascino inalterato lo zero.

Per sceglierlo in modo intrinsecamente determinato, in rapporto al problema che ci interessa, notiamo quanto segue.

Ad un punto di Γ^3, cioè ad un valore di t, corrispondono due tangenti (du/dv) tali che per ciascuna di esse passa un E_2 la cui quadrica $Q'(E_2)$ riesce tangente in quel punto a Γ^3. Infatti il punto di Γ^3 (cioè il valore di t in esso) di contatto con $Q'(E_2)$ è determinato da

$$t = -2\,\frac{(\alpha_{23}du - B_{43}dv)dv}{\alpha_{12}du^2 + \alpha_{22}dudv - B_{42}dv^2} \tag{31}$$

noto appena data la tangente du/dv; e viceversa dato t si hanno le tangenti corrispondenti dall'equazione:

$$\alpha_{12}tdu^2 + (\alpha_{22}t + 2\alpha_{23})dudv - (B_{42}t + 2B_{43})dv^2 = 0.$$

Queste coppie di tangenti si distribuiscono dunque, al variare di t, in una involuzione che non coincide mai con quella delle tangenti coniugate perchè $\alpha_{23} \neq 0$.

In essa esiste:

1°) una coppia di tangenti coniugate; è quella per cui $\alpha_{22}t + 2\alpha_{23} = 0$;

2°) una coppia della quale fa parte la tangente asintotica v ($du = 0$ del secondo sistema); è quella per cui $B_{42}t + 2B_{43} = 0$.

Determiniamo intrinsecamente il parametro t fissando per esso il valore $t = 1$ nella prima di queste due coppie e il valore $t = \infty$ nella seconda. Ciò porta alle posizioni intrinseche

$$\alpha_{22} + 2\alpha_{23} = 0; \quad B_{42} = 0 \quad \text{cioè} \quad A_{42} = 0. \tag{32}$$

Si può anche notare di passaggio che: *il punto di* Γ^3 *immagine della coppia di tangenti coniugate è quello in cui la tangente a* Γ^3 *incontra (fuori di* P) *la tangente asintotica* v.

Con queste limitazioni si hanno effettivamente nelle equazioni di Γ^3 sei coefficienti essenziali quanti appunto ve ne debbono figurare.

16. Ciò fatto, l'equazione differenziale determinata assegnando in ogni punto P di σ una Γ^3 del tipo voluto si scrive

$$
(33) \quad \begin{cases} 2(du\delta^2 v - dv\delta^2 u)(\alpha_{23}du - B_{43}dv) = \\ = (2\beta\alpha_{23} - \alpha_{12}^2)du^4 + 2[-\beta B_{43} - (\psi_1 - 2\alpha_{11})\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{22}]du^3dv + \\ + [4(\psi_2 + \alpha_{21})\alpha_{23} + 2(\psi_1 - 2\alpha_{11})B_{43} - \alpha_{22}^2]du^2dv^2 - \\ - 2[2(\psi_2 + \alpha_{21})B_{43} + \alpha_{23}B_{41}]dudv^3 + 2B_{43}B_{41}dv^4. \end{cases}
$$

Confrontiamone ora i coefficienti con quelli dell'equazione differenziale (III). Detto ρ un fattore di proporzionalità diverso da zero deve aversi:

$$
(34) \quad \begin{cases} 2\alpha_{23} = \rho A, \quad \alpha_{22} = -\rho A, \quad 2B_{43} = -\rho B, \quad \alpha_{12}^2 = \rho(\beta A - L) \\ 2A(\alpha_{11} + \alpha_{12}) = M + \psi_1 A - \beta B, \quad 2B\alpha_{11} + 2A\alpha_{21} = N + \psi_1 B - 2\psi_2 A + \rho A^2 \\ AB_{41} - 2B\alpha_{21} = 2(R + B\psi_2), \quad B_{41} = -S/B. \end{cases}
$$

Le due ultime di queste equazioni determinano senz'altro B_{41}, α_{21}; le tre che le precedono possono quindi scriversi

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} = \overline{M}; \quad \alpha_{11} = \overline{N} + \rho A^2/2B; \quad \alpha_{12}^2 = \rho\overline{L}$$

ove $\overline{L}$, $\overline{M}$, $\overline{N}$ sono pure note in funzione dei coefficienti della III.

Eliminando fra queste α_{11} e α_{12} si ha un'equazione di 2° grado in ρ, la quale ha in generale due radici distinte e dà quindi luogo a due sistemi di valori per i coefficienti non ancora determinati, cioè, almeno in generale, a due Γ^3 in P.

Sarebbe interessante approfondire le relazioni geometriche intercedenti fra queste Γ^3 determinate in P da una stessa equazione (p. es. i due coni che le proiettano da P hanno un contatto del 3° ordine lungo la tangente asintotica u); ciò porterebbe ad un'analisi piuttosto minuziosa che voglio evitare per raccogliere il risultato generale:

Data una superficie σ si considerino in ogni suo punto P *le quadriche asintotiche osculatrici del primo sistema* Q′(E$_2$) *e una* Γ^3 *tangente alla tangente asintotica dello stesso sistema in* P *ed aventi incontro quadripunto con le* Q′(E$_2$). *Gli elementi* E$_2$ *tali che le loro* Q′(E$_2$) *riescano ulteriormente tangenti a* Γ^3 *appartengono alle curve integrali di un' equazione differenziale del tipo*

$$(Adu + Bdv)(du\delta^2 v - dv\delta^2 u) = Ldu^4 + Mdu^3dv + Ndu^2dv^2 + Rdudv^3 + Sdv^4.$$

Viceversa, data un' equazione di questo tipo e una superficie σ, le curve integrali di essa su σ sono tali che i loro E$_2$ *in un punto* P *hanno le* Q′(E$_2$) *tangenti a due* Γ^3 *del tipo precedente (fuori di* P).

È da aggiungere ancora che siccome il tipo dell'equazione precedente non cambia scambiando u in v *quanto si è detto per le quadriche asintotiche osculatrici del primo sistema vale ancora per quello del secondo sistema.*

17. A voler esser completi bisognerebbe studiare, oltre alle relazioni geometriche fra queste Γ^3, al loro modo di variare al mutare di alcuni coefficienti dell'equazione data, i possibili casi di eccezione. Tutto ciò potrà farsi prendendo a modello la trattazione già svolta per i tipi precedentemente studiati ([1]).

Qui mi limiterò ad esaminare un notevole caso eccezionale, che si presenta quando $\alpha_{12} = 0$ (caso finora escluso perchè la Γ^3 si spezza) cioè quando $\beta A = L \neq 0$.

Si tratta dunque delle equazioni che possono scriversi, ponendo $A = 1$ com'è lecito:

(35) $(du\delta^2 v - dv\delta^2 u)(du + Bdv) = \beta du^4 + Mdu^3 dv + Ndu^2 dv^2 + Rdudv^3 + Sdv^4.$

Compariscono in esse cinque coefficienti essenziali (s'intende, quando sia data σ). Supponiamo ancora $B \neq 0$.

Nelle equazioni (27) è $\alpha_{12} = 0$ e per il contatto quadripunto in P è $\alpha_{44} = 0$; sicchè invece di una Γ^3 si ha una conica Γ^2 rappresentata dalle equazioni

(36) $\alpha_1 = \alpha_{11} t^2, \quad \alpha_2 = \alpha_{21} t^2 + \alpha_{22} t + \alpha_{23}, \quad \alpha_3 = t^2, \quad \alpha_4 = \alpha_{41} t^2 + \alpha_{42} t + \alpha_{43};$

essa giace nel piano $\alpha_1 = \alpha_{11}\alpha_3$ e tocca la tangente asintotica u in un punto diverso da P se $\alpha_{23} \neq 0$.

18. Facciamo appunto l'ipotesi $\alpha_{23} \neq 0$ (salvo ad esaminare poi al n. 20 quella opposta). Le coniche in esame dipendono da 5 parametri essenziali; determiniamoli in funzione dei coefficienti dell'equazione data.

Mantenute le notazioni del caso generale, cerchiamo anche qui di determinare t in modo intrinseco.

La corrispondenza fra una tangente in P a σ e il punto ove la $Q(E_2)$ relativa ad essa riesce tangente alla conica è rappresentata da

$$(\alpha_{22} t + 2\alpha_{23}) du = (B_{42} t + 2B_{43}) dv$$

([1]) Così p. es. se $\beta A = -L$, $\gamma B = M$ i piani osculatori alle curve integrali dell'ultima equazione inviluppano un cono quadrico e viceversa; se però il cono tocca il piano tangente in P lungo una tangente asintotica, si ha un'equazione differenziale più particolare già segnalata nella mia Nota: *Le forme di Fubini e la teoria proiettiva delle superficie.* « Rendic. Istit. Lombardo », vol. LVII, 1924, n. 3.

cioè si ha una proiettività tra il fascio delle tangenti in P e i punti di Γ^2. Se facciamo che sia $t=1$ nel punto corrispondente alla tangente asintotica $u(dv=0)$ e $t=\infty$ nel punto corrispondente alla tangente asintotica $v(du=0)$ si ha

$$\alpha_{22}+2\alpha_{23}=0; \quad B_{42}=0 \quad \text{cioè} \quad \alpha_{42}=\alpha_{11}\alpha_{22}. \tag{37}$$

Dopo ciò le relazioni tra i coefficienti dell'equazione differenziale (35) e quelli della conica Γ^2 si scrivono

$$\left\{\begin{array}{c} 2\alpha_{23}=-\alpha_{22}=\rho, \quad 2B_{43}=-\rho B \\ 2\alpha_{11}=M+\psi_1-B\beta, \quad 2B\alpha_{11}+2\alpha_{21}=N+\psi_1 B-2\psi_2+\rho \\ B_{41}=-S/B, \quad 2B\alpha_{21}=-S/B-2(R+B\psi_2); \end{array}\right. \tag{38}$$

e queste determinano in modo unico Γ^2 appena data l'equazione differenziale. Sicchè:

Data una superficie σ *e per ogni punto* P *di essa una conica* Γ^2 *tangente alla tangente asintotica* u *in un punto* $\neq$ P, *gli elementi* E_2 *di curve tali che le* $Q'(E_2)$ *ad esse relative tocchino ulteriormente* Γ^2 *appartengono alle curve integrali di un'equazione del tipo*

$$(du\delta^2 v-dv\delta^2 u)(du+Bdv)=\beta du^4+Mdu^3dv+Ndu^2dv^2+Rdudv^3+Sdv^4.$$

Viceversa ogni equazione di questo tipo ($B\neq 0$) *determina per ogni punto* P *di* σ *una conica* Γ^2 *del tipo detto* (*a cui riescono tangenti le* $Q'(E_2)$ *relative alle sue curve integrali in* P), per mezzo delle equazioni (36, 37, 38).

C'è da aggiungere che se la superficie *non* è data, ma rimane in nostro arbitrio, *si può sempre interpretare la più generale equazione differenziale* (III) *in modo che si abbia il caso particolare* (35) *ora studiato:* basta perciò scegliere una σ tale che $\beta=L/A$.

19. Se invece nell'ultima equazione è $B=0$, le relazioni fra i suoi coefficienti e quelli di Γ^2 non sono più quelle scritte (38); anzi non è più possibile normalizzare t nel modo prima tenuto. Si può invece (sempre che $S\neq 0$) normalizzare t in modo che risulti

$$\alpha_{22}=-2\alpha_{23}=B_{42}.$$

Dopo ciò le ulteriori relazioni determinanti Γ^2 sono

$$\alpha_{22}=S, \quad 2\alpha_{11}=M+\psi_1, \quad 2\alpha_{21}=N-S-2\psi_2, \quad B_{41}=-2S-R.$$

Pertanto anche le $Q'(E_2)$ in P relative agli E_2 dell'equazione

$$(du\delta^2 v-dv\delta^2 u)du=\beta du^4+Mdu^3dv+Ndu^2dv^2+Rdudv^3+Sdv^4$$

sono tangenti ad una conica tangente a sua volta alla tangente asintotica u (fuori di P).

Poichè scambiando u con v si ha una equazione differenziale del tipo (I), i teoremi dati nei n.[i] 8, 9 determinano per l'equazione ora considerata il comportamento in ogni P delle quadriche asintotiche osculatrici del secondo sistema $Q''(E_2)$.

IV. L'equazione differenziale

$du\delta^2 v - dv\delta^2 u = \beta du^3 + N du^2 dv + R du dv^2 + S dv^3$.

20. Passiamo ora ad esaminare il caso in cui, oltre ad $\alpha_{13} = \alpha_{12} = \alpha_{44} = 0$ si abbia $\alpha_{23} = 0$ cioè quando risulti $A = L = 0$ (ma necessariamente $B \neq 0$ quindi $B_{43} \neq 0$).

In tal caso la conica Γ^2 è tangente in P (e non fuori di P, come nel caso precedente) alla tangente asintotica u (e le coniche di questo tipo dipendono da quattro parametri essenziali).

La corrispondenza determinata dalle $Q'(E_2)$ fra le tangenti in P e i punti di contatto di quelle con Γ^2 è ora rappresentata da

$$\alpha_{22} t du = (B_{42} t + 2B_{43} dv).$$

Può quindi farsi ancora $B_{42} = 0$ (ponendo $t = \infty$ nel punto di Γ^2 corrispondente alla tangente asintotica v); se inoltre si pone, come si può, $\alpha_{22} = 2B_{43}$ la corrispondenza detta è rappresentata semplicemente da $t = dv/du$.

Determiniamo ora i coefficienti dell'equazione differenziale individuata da una tale Γ^2. Si ha $A = L = 0$ e può sempre porsi $B = 1$. Procedendo nel solito modo si ottengono le relazioni

$$(39) \quad \begin{cases} M = \beta, \quad 2\alpha_{11} = \psi_1 + N + \rho, \quad \alpha_{22} = -\rho, \quad 2\alpha_{43} = -\rho\beta \\ 2\alpha_{21} = R - 2\psi_2, \quad 2\alpha_{41} = -\beta S - \beta\gamma H + 2\alpha_{11}\alpha_{21}, \quad 2\alpha_{42} = \alpha_{11}\alpha_{22} \end{cases}$$

e l'equazione differenziale è

$$(40) \qquad du\delta^2 v - dv\delta^2 u = \beta du^3 + N du^2 dv + R du dv^2 + S dv^3.$$

Come si vede, poichè ρ è affatto arbitrario, questa equazione determina *non una* Γ^2 ma ∞^1 di esse (tangenti in P alla tangente asintotica u): il che è ben d'accordo col fatto che quelle coniche, come s'è notato, dipendono da quattro parametri, mentre l'equazione differenziale (data σ) contiene tre soli coefficienti essenziali.

Ma l'ultima equazione differenziale non ci è nuova (è la 1''); le sue curve integrali hanno le $Q'(E_2)$ in P passanti ulteriormente per un altro punto $\neq P$.

Se le coordinate di questo s'indicano con γ_1, γ_2, 1, γ_4 l'equazione precedente si scrive

$$(41)\qquad du\delta^2v - dv\delta^2u = \beta du^3 + (2\gamma_1 - \psi_1)du^2dv + 2(\gamma_2 + \psi_2)dudv^2 - \\ - \gamma\left(H + 2\frac{\gamma_4 - \gamma_1\gamma_2}{\beta\gamma}\right)dv^3$$

cioè si ha

$$(42)\qquad N = 2\gamma_1 - \psi_1, \quad R = 2(\gamma_2 + \psi_2), \quad S = -\gamma\left(H + 2\frac{\gamma_4 - \gamma_1\gamma_2}{\beta\gamma}\right).$$

Sostituendo queste espressioni di N, R, S, nelle α_{ik} si ha

$$\alpha_{11} = \gamma_1 + \frac{\rho}{2}, \quad \alpha_{22} = -\rho, \quad 2\alpha_{43} = -\rho\beta, \quad \alpha_{21} = \gamma_2, \quad \alpha_{41} = \gamma_4 + \frac{\rho}{2}\gamma_2, \quad \alpha_{42} = \alpha_{11}\alpha_{22}.$$

Se scriviamo per comodità 2ρ invece di ρ (il che non muta nulla essendo questo un parametro arbitrario) si ha

$$(43)\qquad \alpha_{11} = \gamma_1 + \rho, \quad \alpha_{22} = -2\rho, \quad \alpha_{43} = -\rho\beta, \quad \alpha_{21} = \gamma_2, \quad \alpha_{41} = \gamma_4 + \rho\gamma_2, \\ \alpha_{42} = -2\rho(\gamma_1 + \rho).$$

Le equazioni di una delle ∞^1 coniche Γ^2 legate alla precedente equazione differenziale (in funzione delle coordinate γ_i del punto che l'individua) sono quindi

$$(44)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = (\gamma_1 + \rho)t^2 \\ \alpha_2 = \gamma_2 t^2 - 2\rho t \\ \alpha_3 = t^2 \\ \alpha_4 = (\gamma_4 + \rho\gamma_2)t^2 - 2\rho(\gamma_1 + \rho)t - \rho\beta \end{cases}$$

e si ottengono tutte al variare di ρ. Per $\rho = 0$ si ritrova il punto invariantivamente legato all'equazione differenziale.

21. Per esaminare il luogo di queste coniche al variare di ρ conviene assumere le nuove coordinate omogenee:

$$(45)\qquad A_1 = \alpha_1 - \gamma_1\alpha_3, \quad A_2 = \alpha_2 - \gamma_2\alpha_3, \quad A_3 = \alpha_3, \quad A_4 = \alpha_4 - \gamma_4\alpha_3$$

(nelle quali il punto invariante ha le coordinate 0, 0, 1, 0); si ottiene così la superficie cubica

$$(46)\qquad 4A_1A_4A_3 = 4\gamma_2A_1^2A_3 + 4A_1^2A_2 + 4\gamma_1A_1A_2A_3 - \beta A_2^2A_3$$

cui appartiene la retta $A_1 = A_2 = 0$ congiungente P al punto invariante; questo è un punto conico. Il punto P è invece biplanare ed appartengono alla superficie le due tangenti asintotiche per esso. È poi subito visto che i punti di contatto di una $Q'(E_2)$ (determinata da $dv/du = t$) con le ∞^1 coniche precedenti appartengono ad una conica il cui piano contiene P e il punto invariante.

Quindi riassumendo:

Un' equazione differenziale

$$du\delta^2 v - dv\delta^2 u = \beta du^3 + Ndu^2dv + Rdudv^2 + Sdv^3 \tag{40}$$

definisce per ogni punto P *di una data superficie* σ *non soltanto un punto invariante per cui passano le* ∞^1 $Q'(E_2)$ *osculatrici agli* E_2 *delle sue curve, ma anche una superficie cubica luogo delle* ∞^1 *coniche cui quelle* $Q'(E_2)$ *sono tangenti fuori di* P.

Queste coniche toccano in P la tangente asintotica u. Se si ritorna alla discussione fatta ai n.i 7-9 in cui si dava pure una Γ^2 tangente in P a σ ma *non* alla tangente asintotica u si rileva chiaramente il perchè di questa condizione: lasciandola cadere cambia essenzialmente il tipo dell' equazione differenziale poichè si passa dalla (I) alla (40) e di più quest' ultima definisce non *una* ma ∞^1 coniche tangenti in P a σ.

V. L' equazione differenziale

IV) $(du\delta^2 v - dv\delta^2 u)(Adu^2 + Bdv^2) =$
$= \beta Adu^5 + Ldu^4dv + Mdu^3dv^2 + Ndu^2dv^3 + Rdudv^4 + Sdv^5.$

22. Ma v'è un altro tipo di equazioni differenziali ugualmente definito da una congruenza di cubiche (una per ogni punto di σ, con le stesse condizioni di contatto). Esso si ottiene quando la Γ^3 in P tocca la tangente asintotica v (e non la u come prima) ed ha contatto quadripunto con le $Q'(E_2)$. Le equazioni della cubica sono

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= t(\alpha_{11}t^2 + \alpha_{12}t + \alpha_{13}) \\ \alpha_2 &= t^2(\alpha_{21}t + \alpha_{22}) \\ \alpha_3 &= t^3 \\ \alpha_4 &= \alpha_{41}t^3 + \alpha_{42}t^2 + \alpha_{43}t + \alpha_{44} \end{aligned}\right. \tag{47}$$

con la condizione

$$\alpha_{44} = \alpha_{13}\alpha_{22}. \tag{48}$$

Posto

$$\left\{\begin{aligned} A_{41} &= \alpha_{41} - \alpha_{11}\alpha_{21}, \quad \beta B_{41} = \beta\gamma H + 2A_{41} \\ A_{42} &= \beta B_{42} = \alpha_{42} - \alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{22} \\ A_{43} &= \beta B_{43} = \alpha_{43} - \alpha_{12}\alpha_{22} - \alpha_{13}\alpha_{21} \end{aligned}\right. \tag{49}$$

la tangenza fra Γ^3 ed una $Q'(E_2)$ fuori di P si esprime con

$$(b\alpha_{12} + c\alpha_{22} + 2e'A_{42})^2 = 4(a_1 + b\alpha_{11} + c\alpha_{21} + 2e'A_{41})(b\alpha_{13} + 2e'A_{43})$$

e in forma più esplicita con

$$(50)\quad \begin{cases} 2(du\delta^2 v - dv\delta^2 u)(-\alpha_{13}du^2 + B_{43}dv^2) = \\ = -2\alpha_{13}\beta du^5 + \{ 2\alpha_{13}(\psi_1 - 2\alpha_{11}) + \alpha_{12}^2 \} du^4 dv + \\ + \{ 2\beta B_{43} - 4\alpha_{13}(\psi_2 + 2\alpha_{21}) + 2\alpha_{21}\alpha_{22} \} du^3 dv^2 + \\ + \{ 2\alpha_{13}B_{41} - 2B_{43}(\psi_1 - 2\alpha_{11}) + (\alpha_{22}^2 - 2\alpha_{12}B_{42}) \} du^2 dv^3 + \\ + \{ 4(\psi_2 + \alpha_{21})B_{43} - 2\alpha_{22}B_{42} \} du dv^4 + \{ B_{42}^2 - 2B_{41}B_{43} \} dv^5. \end{cases}$$

Se si confronta con l'equazione

$$(du\delta^2 v - dv\delta^2 u)(Adu^2 + Bdv^2) =$$
$$= \beta A du^5 + L du^4 dv + M du^3 dv^2 + N du^2 dv^3 + R du dv^4 + S dv^5$$

si hanno le relazioni

$$(51)\quad \begin{cases} 2\alpha_{13} = -\rho A, \quad 2B_{43} = \rho B, \quad 2\alpha_{13}(\psi_1 - 2\alpha_{11}) + \alpha_{12}^2 = \rho L \\ 2\beta B_{43} - 4\alpha_{13}(\psi_2 + \alpha_{21}) + 2\alpha_{12}\alpha_{22} = \rho M \\ 2\alpha_{13}B_{41} - 2B_{43}(\psi_1 - 2\alpha_{11}) + (\alpha_{22}^2 - 2\alpha_{12}B_{42}) = \rho N \\ 4(\psi_2 + \alpha_{21})B_{43} - 2\alpha_{22}B_{42} = \rho R, \quad B_{42}^2 - 2B_{41}B_{43} = \rho S. \end{cases}$$

Per ricavare da queste relazioni i coefficienti delle equazioni di Γ^3 occorre scegliere in modo intrinseco il parametro t.

Nel punto di contatto di Γ^3 con la $Q'(E_2)$ determinata da du/dv esso vale

$$(52)\quad t = 2\,\frac{-\alpha_{13}du^2 + B_{43}dv^2}{\alpha_{12}du^2 + \alpha_{22}du dv - B_{42}dv^2}$$

quindi si ha fra i punti di Γ^3 e il fascio di tangenti in P la corrispondenza:

$$(\alpha_{12}t + 2\alpha_{13})du^2 + \alpha_{22}t du dv - (B_{42}t + 2B_{43})dv^2 = 0.$$

23. Sia $\alpha_{13} \neq 0$ cioè Γ^3 non si spezzi. Al valore $t = 0$ corrisponde la coppia di tangenti coniugate singolari per l'equazione differenziale (per le quali cioè si annulla il coefficiente del termine di 2° ordine in essa). Se attribuiamo i valori $t = 1$ e $t = \infty$ rispettivamente alle coppie dell'involuzione di cui fa parte la tangente asintotica $u(dv = 0)$ o la tangente asintotica $v(du = 0)$ si ha

$$(53)\quad \alpha_{12} + 2\alpha_{13} = 0, \quad B_{42} = 0 \quad \text{cioè} \quad A_{42} = 0.$$

Ciò fatto, le equazioni fondamentali di confronto (51) danno

$$(54)\quad \left\{\begin{array}{c} \alpha_{12}=\rho A,\quad 2\alpha_{13}=-\rho A,\quad 2B_{43}=\rho B,\quad B_{42}=0,\quad B_{41}=-S/B \\ \psi_2+\alpha_{21}=R/2B,\quad \alpha_{22}=(MB-\beta B^2-AR)/2AB,\quad 2\alpha_{11}-\psi_1=L/A-\rho A \\ \beta B+RA/B+2A\alpha_{22}=M \\ \rho AS/B+\rho B(L/A-\rho A)+\alpha_{22}^2=\rho N \end{array}\right.$$

e per ρ l'equazione di 2° grado

$$(55)\quad 4A^3B^3\rho^2+4AB\{NAB-SA^2-LB^2\}\rho-\{MB-\beta B^2-AR\}^2=0.$$

Quindi, mentre α_{21}, α_{22}, B_{41} vengono determinati in modo unico dall'equazione differenziale data, gli altri coefficienti assumono due valori diversi (in generale) in relazione alle due radici ρ dell'ultima equazione.

Sicchè riassumendo:

Data in ogni punto P *di una superficie* σ *una cubica sghemba* Γ^3 *tangente ivi alla tangente asintotica* v *ed avente un contatto quadripunto con tutte le* $Q'(E_2)$ *in* P, *rimane determinata una equazione differenziale del tipo*

$$(du\delta^2v-dv\delta^2u)(Adu^2+Bdv^2)=$$
$$=\beta Adu^5+Ldu^4dv+Mdu^3dv^2+Ndu^2dv^3+Rdudv^4+Sdv^5.$$

Viceversa data un'equazione di questo tipo e una superficie σ *rimangono determinate (almeno in generale) due cubiche* Γ^3 *in ogni punto* P *di* σ, *aventi con essa il comportamento sopra precisato.*

Si può anche osservare che, qualunque sia il coefficiente di du^5 nel secondo membro, se σ *non* è data, si può sempre determinare in modo che su di essa le curve integrali dell'equazione differenziale abbiano la proprietà messa in evidenza: basta prendere β uguale al rapporto fra il coefficiente di du^5 e quello di $du^3\delta^2v$ nel primo membro.

24. Come si è detto l'equazione determina in P due Γ^3: chiamiamole Γ^3 e Γ^3 distinguendo tutto quanto si riferisce alla seconda sopralineando le quantità analoghe relative alla prima.

Fra queste due cubiche l'equazione stessa determina una corrispondenza (due punti essendo corrispondenti quando corrispondono ad una stessa coppia di tangenti, cioè quando son determinati dallo stesso valore di t).

La rigata delle congiungenti coppie di punti corrispondenti è quindi una configurazione invariante legata all'equazione differenziale. Poichè $\alpha_{21}=\bar{\alpha}_{21}$,

$\alpha_{22} = \bar{\alpha}_{22}$ queste congiungenti vanno ad incontrare la tangente asintotica v. Precisamente ai punti di parametro t su Γ^3 e $\bar{\Gamma}^3$ corrisponde il punto

$$\alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 = A(t-1)^2 t, \quad \alpha_4 = A(\alpha_{21}t + \alpha_{22})(t-1)^2 - \beta Bt.$$

Ciò pone in evidenza che la retta congiungente i punti $t = 1$ di Γ^3 e $\bar{\Gamma}^3$ (già caratterizzati geometricamente per la scelta del parametro t) va a passare per il punto P.

Il luogo di queste congiungenti è la superficie del 4° ordine di equazione:

$$\begin{aligned}(56) \qquad 2A\{\alpha_3\alpha_4 - \alpha_1\alpha_2 - A_{41}\alpha_3^2\}\{(\alpha_{22} + \alpha_{21})\alpha_3 - \alpha_2\}^2 = \\ = \beta B\{(\psi_1 + L/A)\alpha_3 - 2\alpha_1\}\{\alpha_2 - \alpha_{21}\alpha_3\}^2\alpha_3\end{aligned}$$

di cui la tangente asintotica v è retta tripla.

Questa equazione non dipende affatto da N, cioè le cubiche relative a tutte le equazioni che si ottengono al variare di N (e lasciando fissi gli altri coefficienti) appartengono alla stessa rigata del 4° ordine.

In essa sono posti in evidenza i piani, pure invarianti, che proiettano dalle due tangenti asintotiche la congiungente $t = 1$

$$(\alpha_{22} + \alpha_{21})\alpha_3 = \alpha_2 \quad \text{e} \quad (\psi_1 + L/A)\alpha_3 = 2\alpha_1$$

e il piano che contiene la tangente asintotica v e la congiungente (pure caratterizzata geometricamente) $t = \infty$

$$\alpha_2 = \alpha_{21}\alpha_3.$$

Questi piani dipendono (oltre che da A e da B) rispettivamente da M, L ed R e ne danno il significato geometrico (nel senso che appena dato uno di questi coefficienti è fissato il piano ad esso spettante e viceversa). Così per es. la congiungente i punti $t = 1$ coincide con la normale proiettiva per tutte e sole le equazioni per le quali

$$L = A\psi_1, \quad M = 2A\psi_2 + \beta B$$

e si ha quindi un mezzo per ricostruirla.

Insomma in quanto precede si ha quanto occorre per lo studio geometrico dell'equazione (IV) o delle famiglie di tali equazioni ottenute variando alcuni dei coefficienti. Gli invarianti delle configurazioni geometriche introdotte danno altrettanti invarianti dell'equazione in esame.

25. Esaminiamo infine l'ipotesi $B_{43} = 0$, $\alpha_{13} \neq 0$ finora esclusa.

L'equazione della corrispondenza fra le tangenti in P e i punti di contatto delle $Q'(E_2)$ con Γ^3 è nel caso attuale

$$(\alpha_{12}t + 2\alpha_{13})du^2 + \alpha_{22}tdudv - B_{42}tdv^2 = 0.$$

Per $t=0$ si ha naturalmente $du^2=0$; l'altra coppia di tangenti coincidenti in questa involuzione si ha per

$$(\alpha_{22}^2+4B_{42}\alpha_{12})t+8B_{42}\alpha_{13}=0$$

e se questa si fa corrispondere a $t=\infty$ si ha

$$\alpha_{22}^2+4B_{42}\alpha_{12}=0;$$

se inoltre si fa $t=1$ per la coppia di cui fa parte la tangente asintotica u $(dv=0)$ si ha

$$\alpha_{12}+2\alpha_{13}=0.$$

Ciò fatto, le equazioni di confronto (51) danno (posto $A=1$)

$$B=B_{43}=0,\quad 2\alpha_{13}=-\rho,\quad \alpha_{12}=\rho,\quad 2\alpha_{11}-\psi_1=L-\rho,\quad \alpha_{21}+\psi_2+\alpha_{22}=M/2$$
$$B_{41}-6B_{42}=N,\quad \alpha_{22}^2+4\rho B_{42}=0,\quad 2\alpha_{22}B_{42}=-\rho R,\quad B_{42}^2=\rho S$$

e queste determinano in modo unico Γ^3 data l'equazione differenziale.

Proprietà delle soluzioni di una particolare equazione integrale.

Memoria di PACIFICO MAZZONI (a Bari).

Sunto. - *Nella presente Memoria ho considerato un' equazione integrale che ha origine dallo studio della popolazione totale d' un territorio. Considerata come incognita il numero dei nati, si ha un' equazione integrale di prima specie, con entrambi i limiti variabili, la cui risoluzione si riconduce a quella di un' equazione integrale di* VOLTERRA *di seconda specie. Ho mostrato che il problema ammette infinite soluzioni, fra loro asintotiche* (1).

1. Espressione della popolazione totale. — Chiamiamo $P(t)$ la popolazione totale d' un dato territorio, all' epoca t, $\varphi(t)$ il numero dei nati, e $l(x, t)$ il numero degl' individui *di età* x, *nati all' epoca* t, *e presenti nel territorio all' epoca* t + x (2).

Sarà $\varphi(t) = l(0, t)$; e posto $l(x, t) : \varphi(t) = K(x, t)$, avremo: $K(0, t) = 1$, e $K(\omega, t) = 0$; se ω rappresenta l' età estrema (che in generale sarà una funzione di t) (3).

Abbiamo allora la seguente espressione della popolazione totale, *presente all' epoca* t:

$$P(t) = \int_0^\omega K(x, t - x) \cdot \varphi(t - x) dx, \tag{I}$$

(1) L' equazione cui si perviene può ricondursi allo stesso tipo di quella considerata dal CANTELLI nella Nota: *Intorno alla risoluzione di un problema demografico.* (« Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino », vol. LXII, 1927, pag. 453). Sono però diverse le quantità che si considerano come note e le incognite. Aggiungo che scopo principale di questo lavoro è di mostrare l' asintoticità delle soluzioni.

(2) La $\varphi(t)$ (densità dei nati) è una funzione tale che il numero dei nati nell' intervallo t, $t + dt$, sia $\varphi(t) \cdot dt$. Analogamente per $l(x, t) \cdot dx$.

(3) Nel caso non vi siano movimenti migratori, allora $K(x, t)$ rappresenta la probabilità che ha un individuo nato all' epoca t, di sopravvivere all' età x, e si potrà considerarla come una funzione di sopravvivenza, *per i nati all' epoca* t (funzione sempre decrescente da 1 a 0, quando l' età x varia da 0 all' età estrema ω). Qui però consideriamo il caso generale.

che può trasformarsi così:

$$\text{(II)} \qquad P(t) = \int_{t-\omega}^{t} K(t-x,\, x)\cdot\varphi(x)dx.$$

In particolare se la funzione $K(x, t)$ resta costante rispetto a t, e la si indica semplicemente con $K(x)$, le (I) e (II) diventano:

$$\text{(III)} \qquad P(t) = \int_{0}^{\omega} K(x)\cdot\varphi(t-x)dx\,;$$

$$\text{(IV)} \qquad P(t) = \int_{t-\omega}^{t} K(t-x)\cdot\varphi(x)dx.$$

2. Ricerca di $\varphi(t)$. Risoluzione dell'equazione integrale (II). — Ci proponiamo di risolvere la seguente questione:

Supposta conosciuta la popolazione totale P(t), *per tutti i valori di* t *compresi in un certo intervallo* α, β, *e conosciuta la funzione* K(x, t), *per* t *fra* α *e* β, *e per qualunque età* x *fra* 0 *e* ω, *determinare il numero dei nati* φ(t) *nello stesso intervallo.*

Diciamo subito che il problema non è determinato, e che ammette infinite soluzioni, anche se si pone la condizione che la funzione $\varphi(t)$ sia continua. Infatti se si pensa $\varphi(t)$ come funzione incognita, allora la relazione (II)

$$\text{(II)} \qquad P(t) = \int_{t-\omega}^{t} K(t-x,\, x)\cdot\varphi(x)dx$$

si può considerare come un'equazione integrale di prima specie, a limiti variabili. Supposto che le due funzioni $P(t)$ e $K(t-x, x)$ siano entrambe derivabili rispetto a t, deduciamo dalla (II), derivando, e indicando con $\Gamma(x, y)$ la derivata parziale di $K(x, y)$ rispetto ad x:

$$\text{(1)} \quad P'(t) = \int_{t-\omega}^{t} \Gamma(t-x,\, x)\cdot\varphi(x)dx + K(0,\, t)\cdot\varphi(t) - [1-\omega'(t)]\cdot K(\omega,\, t-\omega)\cdot\varphi(t-\omega).$$

Ma siccome si ha: $K(0, t) = 1$, e $K(\omega, t-\omega) = 0$ (n.° 1), la (1) diventa:

$$\text{(V)} \qquad \varphi(t) = P'(t) - \int_{t-\omega}^{t} \Gamma(t-x,\, x)\cdot\varphi(x)dx,$$

che è un'equazione integrale di seconda specie, con entrambi i limiti variabili.

Scegliamo le due funzioni $\varphi(x)$ e $K(t-x, x)$ arbitrariamente per x nell'intervallo $\alpha-\omega$, α, in modo però che risulti:

$$P(\alpha)=\int_{\alpha-\omega}^{\alpha} K(\alpha-x, x)\cdot\varphi(x)dx, \tag{2}$$

ciò che sarà evidentemente sempre possibile ([1]). Possiamo immaginare che il nucleo $\Gamma(t-x, x)$ sia definito per qualunque x da $\alpha-\omega$ a β, convenendo di assumere $\Gamma(t-x, x)=0$, quando $x \leq t-\omega$ (vale a dire $\Gamma(y, t)=0$ per $y \geq \omega$). Potremo scrivere allora così la (V):

$$\varphi(t)=P'(t)-\int_{\alpha-\omega}^{t} \Gamma(t-x, x)\cdot\varphi(x)dx \tag{3}$$

ossia infine:

$$\varphi(t)=P'(t)-\int_{\alpha-\omega}^{\alpha} \Gamma(t-x, x)\cdot\varphi(x)dx-\int_{\alpha}^{t} \Gamma(t-x, x)\cdot\varphi(x)dx. \tag{3'}$$

Il primo integrale del secondo membro è una funzione nota di t, perchè le due funzioni φ e K sono state già assegnate per $x<\alpha$ (esso si riduce poi a 0 se $t>\alpha+\omega$); sicchè la (3') è un'equazione integrale di seconda specie di VOLTERRA, ed ammette una soluzione unica e determinata $\varphi(t)$, funzione continua di t nell'intervallo $\alpha\beta$ ([2]). Questa soluzione soddisfa, oltre la (V), anche l'equazione data (II).

Infatti se nella (II) sostituiamo, al posto di $\varphi(x)$, la soluzione trovata, si ha una relazione, i cui due membri risultano uguali per $t=\alpha$ (a causa della (2), supposta verificata), e ammettono derivate uguali, a causa appunto della (V). C. d. d.

Concludiamo: *quando sia assegnata* $\varphi(t)$ *fra* $\alpha-\omega$ *e* α, *esiste una soluzione dell'equazione integrale* (II) *nell'intervallo considerato* $\alpha\beta$, *la quale*

([1]) Per esempio si potrà porre: $\varphi(x)=a\cdot\varphi_1(x)$, scegliere $\varphi_1(x)$ in modo che l'integrale $I=\int_{\alpha-\omega}^{\alpha} K(\alpha-x, x)\cdot\varphi_1(x)dx$ risulti $\neq 0$, e assumere la costante $a=P(\alpha):I$.

([2]) È superfluo avvisare che qui supponiamo siano sempre soddisfatte le condizioni che assicurano l'esistenza e l'unicità delle soluzioni delle equazioni integrali superiori. Ciò non è una restrizione essenziale, perchè noi sostituiamo a delle funzioni per loro natura discontinue, delle funzioni interpolatrici continue, sulle quali tali ipotesi restrittive sono perfettamente lecite.

è continua per qualunque t *compreso fra* α *e* β (*escluso eventualmente per* $t = \alpha$), *ed essa è unica* (¹).

Il problema proposto è così risoluto. Data l'arbitrarietà della funzione $\varphi(t)$ nell'intervallo $\alpha - \omega, \alpha$ possiamo dire che la (II) ammette infinite soluzioni. Ed è facile scegliere $\varphi(t)$ fra $\alpha - \omega$ e α, in modo che essa sia continua anche per $t = \alpha$. Infatti siccome il limite di $\varphi(t)$, per t tendente ad α *a destra* si ottiene dalla (V), ed è la quantità:

$$P'(\alpha) - \int_{\alpha-\omega}^{\alpha} \Gamma(\alpha - x, x) \cdot \varphi(x) dx, \tag{4}$$

basterà scegliere $\varphi(t)$ fra $\alpha - \omega$ e α in modo che ammetta un limite, per t tendente ad α *a sinistra*, e tale limite sia uguale alla quantità (4) (²).

3. Caso di $K(x, t)$ indipendente da t. — Se la funzione $K(x, t) = K(x)$ resta costante rispetto a t, allora invece della (II) si dovrà considerare l'equazione (IV), o la (III):

$$P(t) = \int_0^{\omega} K(x) \cdot \varphi(t - x) dx ; \tag{III}$$

e la (V) assumerà la forma:

$$\varphi(t) = P'(t) - \int_{t-\omega}^{t} K'(t - x) \cdot \varphi(x) dx, \tag{5}$$

ossia

$$\varphi(t) = P'(t) - \int_0^{\omega} K'(x) \cdot \varphi(t - x) dx ; \tag{5'}$$

e infine la condizione (2) si scriverà:

$$P(\alpha) = \int_0^{\omega} K(x) \cdot \varphi(\alpha - x) dx. \tag{2'}$$

Notiamo due casi interessanti:

a) *Se la funzione* K *non varia col tempo* t, *se* P(t) *resta costante in un intervallo* $\alpha\beta$, *e se infine* $\varphi(t)$ *è pure costante fra* $\alpha - \omega$ *e* α, *ed è sempre*

(¹) Se si toglie la condizione della continuità per $\varphi(t)$, allora, com'è noto, la soluzione della (II) non è più unica. Vedi E. Goursat: *Cours d'Analyse mathématique.* (Paris, Gauthier-Villars et C., éd. 1927, vol. III, pag. 335, n. 553).

(²) Basta porre ad esempio: $\varphi(t) = a \cdot \varphi_1(t) + b \cdot \varphi_2(t)$, con a e b costanti tali che sia soddisfatta la (2), e insieme sia $\varphi(\alpha) =$ alla quantità (4).

continua, allora $\varphi(t)$ *sarà uguale a una costante anche nell'intervallo* $\alpha\beta$ (*anzi* $\alpha-\omega$, β).

Infatti poniamo $P(t)=c$ (fra α e β), e $\varphi(t)=$ ad una costante λ fra $\alpha-\omega$ e α; siccome dev'essere soddisfatta la $2'$), sarà:

$$c=\lambda\cdot\int_0^\omega K(x)dx,$$

dalla quale si trae il valore di λ. Ma la (III), che diventa:

$$c=\int_0^\omega K(x)\cdot\varphi(t-x)dx,$$

è evidentemente soddisfatta nell'intervallo $\alpha\beta$ da codesto valore trovato $\varphi(t)=\lambda$; dunque per il teorema del n.° 2 avremo che l'unica soluzione della (III) è appunto $\varphi(t)=\lambda$ per t fra α e β.

b) *Se* K *non varia col tempo* t, *se* P *è una funzione esponenziale* ab^t *fra* α *e* β, *e se* $\varphi(t)$ *è pure un'esponenziale fra* $\alpha-\omega$ *e* α, *e sempre continua, allora* $\varphi(t)$ *dev'essere del tipo* cb^t *pure fra* $\alpha-\omega$ *e* β.

Infatti se $\varphi(t)=cd^t$ fra $\alpha-\omega$ e α, per la supposta continuità di $\varphi(t)$ anche nel punto α, dovrà essere $\varphi(\alpha)=$ alla quantità (4), cioè dev'essere:

$$cd^\alpha=ab^\alpha\cdot\log b-\int_0^\omega K'(x)\cdot cd^{\alpha-x}dx; \tag{6}$$

mentre la condizione (2) diventa:

$$ab^\alpha=\int_0^\omega K(x)\cdot cd^{\alpha-x}dx. \tag{7}$$

Integrando per parti l'integrale che figura nella (6), si ha:

$$-cd^\alpha+\log d\cdot\int_0^\omega K(x)\cdot cd^{\alpha-x}dx,$$

che per la (7) è $=-cd^\alpha+\log d\cdot ab^\alpha$.

Allora la (6) diventa:

$$cd^\alpha=ab^\alpha\cdot\log b-(-cd^\alpha+\log d\cdot ab^\alpha),$$

da cui segue $b=d$. Allora la (7) diventa:

$$a=c\cdot\int_0^\omega K(x)\cdot b^{-x}dx, \tag{7'}$$

da cui si ricava c.

Ciò premesso, osserviamo che la (III) è evidentemente soddisfatta, se poniamo $P(t) = ab^t$, e $\varphi(t) = cb^t$, con c dato dalla (7'). Per il teorema del n.° 2 concludiamo che tale funzione $\varphi(t) = cb^t$ (per t variabile fra $\alpha - \omega$ e β) è l'unica soluzione della (III) che soddisfa alle condizioni del teorema enunciato. C. d. d.

4. Proprietà delle soluzioni della (IV): esse sono asintotiche. — Se la funzione $P(t)$ è definita da α a $+\infty$, allora dimostriamo che ha luogo una notevole proprietà delle soluzioni $\varphi(t)$, limitandoci per ora a considerare il caso che $K(x, t)$ non vari col tempo t. Al n.° 7 tratteremo poi il caso generale.

Supponiamo che la funzione $K(x)$ sia sempre *positiva, e decresca da* 1 *a* 0, *quando* x *cresce da* 0 *a* ω (ω *numero fisso*); perciò supponiamo che la derivata $K'(x)$ sia sempre negativa, o al più nulla in alcuni punti, ma non identicamente nulla in alcun tratto; anzi supporremo che $K'(x)$ possa annullarsi anche in infiniti punti, rinchiudibili però in un numero finito d'intervalli, la cui somma sia piccola a piacere. Inoltre ammettiamo che esista e sia limitata la derivata seconda $K''(x)$.

In tali ipotesi abbiamo il seguente teorema:

Le infinite soluzioni continue φ(t) *dell'equazione integrale* (IV) *sono fra loro asintotiche.*

Considerate due soluzioni qualunque $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ della (IV), definite per t variabile da α a $+\infty$, bisogna dimostrare che la loro differenza $\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \Phi(t)$ è una funzione che tende a 0, al crescere indefinito di t.

Intanto, siccome le due soluzioni φ_1 e φ_2 soddisfano entrambe alla (IV) e alla (V), la loro differenza $\Phi(t)$ dovrà soddisfare le due equazioni:

$$0 = \int_{t-\omega}^{t} K(t-x)\cdot\Phi(x)dx; \tag{8}$$

$$\Phi(t) = -\int_{t-\omega}^{t} K'(t-x)\cdot\Phi(x)dx. \tag{9}$$

Supponiamo dapprima che $K'(x)$ sia sempre $\neq 0$ da 0 a ω, e che il suo minimo valore assoluto da 0 a ω sia q. Considerato un intervallo qualunque $t_1 - 2\omega$, t_1, chiamiamo M il massimo valore assoluto di $\Phi(t)$ in tale intervallo. Derivando la (9) abbiamo:

$$\Phi'(t) = -\int_{t-\omega}^{t} K''(t-x)\cdot\Phi(x)dx - K'(0)\cdot\Phi(t) + K'(\omega)\cdot\Phi(t-\omega). \tag{10}$$

Avendo supposta $K''(x)$ limitata (per x da 0 a ω), l'espressione

$$\int_{t-\omega}^{t} |K''(t-x)|\,dx + |K'(0)| + |K'(\omega)|$$

sarà inferiore a un certo numero fisso ν. E dalla (10) segue che per t compreso fra $t_1 - \omega$ e t_1 sarà certamente: $|\Phi'(t)| < M\nu$.

Ora siccome $K(t-x)$ è una funzione positiva, è certo, a causa della (8), che $\Phi(t)$ non potrà essere nè sempre positiva, nè sempre negativa fra $t_1 - \omega$ e t_1 (¹). Supponiamo che il valore di $\Phi(t_1)$ sia positivo, e consideriamo un valore η di t (fra $t_1 - \omega$ e t_1) nel quale $\Phi(t)$ sia negativa. Si vede subito che nell'intervallo η, $\eta + \frac{1}{2\nu}$ la funzione $\Phi(t)$ è sempre minore della quantità fissa $\frac{M}{2}$ (²).

Infatti si ha, per il teorema del valor medio:

$$\Phi(\eta + h) = \Phi(\eta) + h\cdot\Phi'(\eta_1),$$

che è $\leq h\cdot\Phi'(\eta_1)$, avendo supposto $\Phi(\eta) < 0$. Segue, qualunque sia il segno di $\Phi(\eta + h)$:

$$\Phi(\eta + h) < |h|\cdot M\nu,$$

che a sua volta è $< \frac{M}{2}$ appunto quando $|h| < \frac{1}{2\nu}$. C. d. d.

Indicando allora con ε l'intervallo η, $\eta + \frac{1}{2\nu}$, e con k il rimanente (da $t_1 - \omega$ a t_1), segue evidentemente dalla (9), tenendo presente che è $K' < 0$:

$$\Phi(t_1) < M\cdot\int_k |K'(t_1 - x)|\cdot dx + \frac{M}{2}\cdot\int_\varepsilon |K'(t_1 - x)|\cdot dx;$$

da cui, aggiungendo e togliendo la stessa quantità: $\frac{M}{2}\cdot\int_\varepsilon$:

$$\Phi(t_1) < M\cdot\int_{t_1-\omega}^{t_1} |K'(t_1 - x)|\cdot dx - \frac{M}{2}\cdot\int_\varepsilon |K'(t_1 - x)|\cdot dx.$$

(¹) Se $\Phi(t)$ fosse identicamente nulla fra $t_1 - \omega$ e t_1, allora il teorema sarebbe dimostrato, perchè $\Phi(t)$ sarebbe nulla per qualunque $t \geq t_1$ (n. 2).

(²) Se il numero $\eta + \frac{1}{2\nu}$ supera già t_1, allora si prenderà l'intervallo $\eta - \frac{1}{2\nu}$, η, e in tutto il resto si proseguirà come sopra.

Ma il primo integrale è $=1$ [1], mentre il secondo integrale è $\geq \varepsilon \cdot q = \frac{q}{2\nu}$; onde si ha, *a fortiori*:

$$\Phi(t_1) < M - \frac{Mq}{4\nu}.$$

Se invece $\Phi(t_1)$ è negativo, allora basta considerare, anzichè la funzione $\Phi(t)$, l'altra $-\Phi(t)$, che soddisfa pure le (8) e (9); e si conclude che si ha, in ogni caso:

$$|\Phi(t_1)| < M \cdot \left(1 - \frac{q}{4\nu}\right).$$

Allora la funzione $|\Phi(t)|$, continua nel punto t_1, essendo minore di $M\left(1 - \frac{q}{4\nu}\right)$ nel punto t_1, resterà inferiore alla stessa quantità in un certo intervallo alla destra di t_1. Vediamo che *essa sarà sempre* $< M\left(1 - \frac{q}{4\nu}\right)$, *per qualunque* $t > t_1$.

Infatti, supposto che ciò non sia, vi sarà un primo punto t_2 dopo t_1 in cui $\Phi(t_2)$ sarà $= M\left(1 - \frac{q}{4\nu}\right)$; ma allora ripetendo il processo per l'intervallo $t_2 - 2\omega$, t_2, risulta che la funzione $|\Phi(t)|$, che è sempre $\leq M$ fra $t_2 - 2\omega$ e t_2, sarà $< M\left(1 - \frac{q}{4\nu}\right)$ nel punto t_2: il che è contro l'ipotesi che sia $\Phi(t_2) = M\left(1 - \frac{q}{4\nu}\right)$.

È dunque dimostrato che se M indica il massimo valore di $|\Phi(t)|$ fra $t_1 - 2\omega$, t_1, nel successivo intervallo t_1, $t_1 + 2\omega$ il massimo valore M_1 di $|\Phi|$ è certamente inferiore alla quantità $M\left(1 - \frac{q}{4\nu}\right)$.

Segue che fra $t_1 + 2\omega$, $t_1 + 4\omega$ il massimo valore M_2 di $|\Phi|$ è $< M \cdot \left(1 - \frac{q}{4\nu}\right)^2$; nell'intervallo $t_1 + 4\omega$, $t_1 + 6\omega$ il massimo valore M_3 di $|\Phi|$ è $< M \cdot \left(1 - \frac{q}{4\nu}\right)^3$; e così via. Siccome la successione $M, M_1, M_2, M_3, \ldots$ ha per limite 0, il teorema è dimostrato in questo primo caso.

---

(1) **Infatti si ha:**

$$\int_{t_1-\omega}^{t_1} |K'(t_1 - x)| \cdot dx = -\int_{t_1-\omega}^{t_1} K'(t - x)dx = -\int_0^{\omega} K'(x)dx = -[K(x)]_0^{\omega} = 1.$$

Se invece $K'(x)$ si annulla in alcuni punti fra 0 e ω, allora modifichiamo leggermente la dimostrazione precedente. Per ipotesi esisterà un numero finito d'intervallini comprendenti gli zeri di $K'(x)$, di ampiezza complessiva inferiore alla quantità fissa $\frac{1}{4\nu}$. Chiamiamo q il minimo valore di $|K'|$ negl'intervalli rimanenti (da 0 a ω). Ripetendo le considerazioni superiori, troveremo un intervallo η, $\eta + \frac{1}{2\nu}$, nel quale $\Phi(t)$ sarà $< \frac{M}{2}$, ed escluderemo da esso quegli eventuali intervallini che comprendono gli zeri di K': ne resteranno certamente degli altri di ampiezza complessiva $> \frac{1}{4\nu}$, nei quali sarà $\Phi(t) < \frac{M}{2}$, e nello stesso tempo $|K'(x)| \geq q$. Procedendo come sopra, si avrà:

$$|\Phi(t_1)| < M \cdot \left(1 - \frac{q}{8\nu}\right),$$

e si concluderà che $\Phi(t)$ tende pure a 0, per t tendente a $+\infty$ [1]. C. d. d.

5. Derivate di $\varphi(t)$. — Il teorema dimostrato sussiste qualunque sia il segno delle due funzioni P e φ. Aggiungiamo che nelle stesse ipotesi abbiamo che *due soluzioni qualunque (continue)* φ_1 *e* φ_2 *della* (IV) *hanno le derivate di ugual ordine tra loro asintotiche.*

Bisogna dimostrare che la differenza $\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \Phi(t)$ è derivabile, e che le sue successive derivate tendono tutte a 0, per t tendente a $+\infty$.

Infatti dalla (10) risulta che esiste $\Phi'(t)$. Derivando la (10) (supposta la funzione K indefinitamente derivabile), risulta che esiste $\Phi''(t)$, e così via. Allora dalla (8), che equivale alla:

$$0 = \int_0^\omega K(x) \cdot \Phi(t \quad x)dx, \tag{8'}$$

si ha, derivando rispetto a t:

$$0 = \int_0^\omega K(x) \cdot \Phi'(t - x)dx.$$

Quest'equazione è del tutto analoga alla (8'); sicchè per Φ' valgono le

---

[1] Come esempio, presentiamo l'equazione $\varphi(t) = \int_{t-\omega}^{t} h \cdot \varphi(x)dx$, con $h = 1 : (1 - e^{-\omega})$; fra le sue soluzioni ve ne sono infinite del tipo ce^t (c costante arbitraria), le quali *non* sono asintotiche.

considerazioni svolte al numero precedente per la funzione Φ. Risulta che Φ' tende a 0, al crescere indefinito di t. Analogamente per $\Phi''(t)$, $\Phi'''(t), \ldots$

6. Applicazioni. — Corollari immediati del teorema del n.° 4 sono i due seguenti (sempre se K non varia col tempo), i quali completano le proprietà del n.° 3.

a) « Se $P(t)$ resta costante da α a $+\infty$, allora le infinite soluzioni $\varphi(t)$ della (IV) sono fra loro asintotiche, e tendono tutte a una costante, al crescere indefinito di t ».

b) « Se $P(t)$ è una funzione del tipo ab^t da α a $+\infty$, le infinite soluzioni $\varphi(t)$ della (IV) tendono tutte, al crescere indefinito di t, alla funzione cb^t, dove c è data dalla relazione: $c = a : \int_0^\omega K(x) \cdot b^{-x} dx$ ».

7. Estensione del teorema del n.° 4 sull'asintoticità delle soluzioni della (II). — Vogliamo estendere il teorema del n.° 4 al caso che la funzione $K(x, t)$ vari col tempo t. Data la popolazione totale $P(t)$, definita per t variabile da α a $+\infty$, e considerate due soluzioni qualunque (continue) $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ dell' equazione integrale (II), ci proponiamo di vedere sotto quali ipotesi restrittive si può assicurare che esse sono tra loro asintotiche, cioè che la loro differenza $\Phi(t)$ tende a 0, per t tendente a $+\infty$.

Per la differenza $\varphi_1 - \varphi_2 = \Phi$ avremo, invece delle (8) e (9), le due relazioni seguenti:

$$\int_{t-\omega}^{t} K(t-x, x) \cdot \Phi(x) dx = 0; \tag{11}$$

$$\Phi(t) = -\int_{t-\omega}^{t} \Gamma(t-x, x) \cdot \Phi(x) dx; \tag{12}$$

mentre la (10) del n.° 4 diventa:

$$\Phi'(t) = -\int_{t-\omega}^{t} \Gamma_1(t-x, x)\Phi \cdot (x) dx - \Gamma(0, t) \cdot \Phi(t) + [1-\omega'(t)]\Gamma(\omega, t-\omega) \cdot \Phi(t-\omega), \tag{10'}$$

avendo posto $\Gamma_1(x, y) = \dfrac{\partial \Gamma(x, y)}{\partial x}$.

Naturalmente la $K(x, t)$ si suppone *positiva e decrescente da* 1 *a* 0, *quando* x *varia da* 0 *a* ω; talchè la funzione $\Gamma(x, t) = \dfrac{\partial K(x, t)}{\partial x}$ è sempre ≤ 0.

Si vede subito che tutto dipende dal modo di variare di $K(x, t)$, al variare di t, perchè l'integrale $\int\limits_{t-\omega}^{t} |\Gamma(t-x, x)|\cdot dx$, che sostituisce l'integrale $\int\limits_{t-\omega}^{t} |K'(t-x)|\cdot dx$ del n.° 4, non è più $=1$, come al n.° 4, ma questa volta si ha:

$$(13) \qquad \int\limits_{t-\omega}^{t} |\Gamma(t-x, x)|\cdot dx = 1 - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{0}^{\omega} K(x, t-x)dx.$$

Ora se la quantità

$$(14) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{0}^{\omega} K(x, t-x)dx$$

da un certo punto in poi è sempre ≥ 0, allora si possono ripetere le considerazioni del n.° 4, e sarà valido il teorema sull'asintoticità delle soluzioni della (II). Ed è questo il caso più importante in pratica, perchè la mortalità tende a diminuire col tempo, o a rimanere costante.

Orbene nei tratti in cui la quantità (14) è invece negativa, supporremo che essa sia in valore assoluto minore di un numero σ tendente a 0, al crescere indefinito di t: ipotesi lecita in pratica (a meno che l'emigrazione non vada sempre crescendo d'intensità). E potremo riunire i due casi in uno solo, dicendo che *si suppone che la quantità* (14) *sia* $> -\sigma$, *con* σ *numero positivo tendente a* 0, *al crescere indefinito di* t.

Inoltre supponiamo che la funzione

$$\int\limits_{0}^{\omega} |\Gamma_1(x, t-x)|\cdot dx + |\Gamma(0, t)| + [1-\omega'(t)]\cdot|\Gamma(\omega, t-\omega)|$$

resti inferiore a un numero fisso ν, per qualunque t (da α in poi), e ancora che $|\Gamma(x, t)|$ resti sempre $>$ di un numero *fisso* q (per x da 0 a ω), escluso eventualmente in un numero finito d'intervallini (nei quali Γ può anche annullarsi), di ampiezza complessiva $< \frac{1}{4\nu}$.

In tali ipotesi possiamo assicurare che le soluzioni continue della (II) *sono fra loro asintotiche.*

Consideriamo infatti la quantità fissa $\frac{q}{8\nu}$; vi sarà per ipotesi un numero t_1 tale che per qualunque $t \geq t_1$ la quantità (14) sia $> -\frac{q}{8\nu}$. Chiamiamo M il massimo di $|\Phi(t)|$ nell' intervallo $t_1 - 2\omega$, t_1. Dalla (10') segue che $|\Phi'(t)|$ è sempre $< M\nu$ fra $t_1 - \omega$ e t_1.

Ammettiamo dapprima che $|\Gamma|$ sia sempre $\neq 0$ e $\geq q$, e che $\Phi(t_1)$ sia > 0; vi sarà un punto η (sempre fra $t_1 - \omega$ e t_1) nel quale $\Phi(\eta)$ sia ≤ 0. Nell' intervallo η, $\eta + \frac{1}{2\nu}$ la $\Phi(t)$ sarà sempre $< \frac{M}{2}$ (come al n.° 4). Si ha allora dalla (12):

$$\Phi(t_1) < M \cdot \int_{t_1 - \omega}^{t_1} |\Gamma(t_1 - x, x| \cdot dx - \frac{M}{2} \cdot \int_{\varepsilon} |\Gamma(t_1 - x, x)| \cdot dx,$$

$\left(\text{essendo } \varepsilon \text{ l'intervallo } \eta,\ \eta + \frac{1}{2\nu}\right)$. Segue, per la (13):

$$\Phi(t_1) < M \cdot \left[1 - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\omega} K(x, t_1 - x) dx\right] - \frac{M}{2} \cdot \frac{q}{2\nu};$$

ossia, per l'ipotesi fatta sulla quantità (14):

$$\Phi(t_1) < M\left(1 + \frac{q}{8\nu}\right) - \frac{Mq}{4\nu} = M \cdot \left(1 - \frac{q}{8\nu}\right).$$

Analogamente, se $\Phi(t_1)$ è negativa. Segue allora, come al n.° 4, che $\Phi(t)$ tende a 0, al crescere indefinito di t. E come al n.° 4 si estende il risultato al caso che $|\Gamma(x, t)|$ resti sempre $\geq q$, dopo aver escluso degl' intervallini, ecc.

8. Altra proprietà della funzione $\varphi(t)$. — Un' ulteriore generalizzazione dei teoremi dei n.[i] 4 e 7 è la seguente;

Se P(t) *tende a* 0, *insieme con* P'(t), *per* t *tendente a* $+\infty$, *anche le soluzioni continue* φ(t) *della* (II) *tendono tutte a* 0, *per* t *tendente a* $+\infty$.

Quindi: « se $P_1(t)$ e $P_2(t)$ sono due funzioni tra loro asintotiche (e lo sono anche P_1' e P_2'), allora anche $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ sono fra loro asintotiche ».

Si suppongono valide le condizioni del numero precedente; inoltre si suppone che la quantità $K\left(\frac{\omega}{2}, t\right)$ resti sempre $>$ di un numero fisso N, come pure $\omega(t)$ sempre $>$ di un numero fisso ω.

Accenniamo brevemente alla dimostrazione. Scelto un numero τ positivo e piccolo a piacere, si dovrà dimostrare che da un certo punto in poi è sempre $|\varphi(t)| < \tau$. Prendiamo $\sigma <$ delle due quantità $\frac{\omega N \tau}{8}$ e $\frac{q\tau}{32\nu}$. Da un certo punto in poi sarà per ipotesi $|P(t)| < \sigma$ e anche $|P'(t)| < \sigma$ e la quantità (14) $> -\frac{q}{16\nu}$. Sia M il massimo di $|\varphi|$ tra $t_1 - 2\omega$ e t_1; se fra $t_1 - \frac{\omega}{2}$ e t_1 la φ conserva uno stesso segno, ed è sempre $|\varphi(t)| > \frac{M}{4}$, allora dalla (II) del n.° 2 si ha:

$$|P(t_1)| > \frac{\omega}{2} \cdot K\left(\frac{\omega}{2}, t_1 - \frac{\omega}{2}\right) \cdot \frac{M}{4},$$

perchè $K(x, t)$ è funzione decrescente di x; e sarà *a fortiori*: $\sigma > \frac{\omega N M}{8}$, da cui $M < \frac{8\sigma}{\omega N} < \tau$, e in tal caso risulta che fra $t_1 - \omega$ e t_1 è $|\varphi(t)| < \tau$.

Nel caso contrario vi sarà un punto η fra $t_1 - \omega$ e t_1, in cui $|\varphi(\eta)| < \frac{M}{4}$; allora nell'intervallo $\eta, \eta + \frac{1}{2\nu}$ $\left(\text{ovvero } \eta - \frac{1}{2\nu}, \eta\right)$, sarà $|\varphi(t)| < \frac{3}{4} M$; e allora seguendo il processo dei n.[i] 4 e 7, partendo però dalla (V), anzichè dalla (12), si otterrà

$$\Phi(t_1) < \sigma + M \cdot \left(1 - \frac{q}{16\nu}\right). \tag{15}$$

Ora se $\sigma > \frac{Mq}{32\nu}$, è invece $M < \frac{32\nu\sigma}{q} < \tau$, e in tal caso risulta pure che $|\varphi| < \tau$ fra $t_1 - \omega$ e t_1. Se invece è $\sigma < \frac{Mq}{32\nu}$, allora si ha dalla (15):

$$\Phi(t_1) < M \cdot \left(1 - \frac{q}{32\nu}\right).$$

Ripetendo il ragionamento del n.° 4, si conclude che nel successivo intervallo $t_1, t_1 + 2\omega$, il massimo M_1 di $|\varphi|$ o sarà $< \tau$, oppure $< M\left(1 - \frac{q}{32\nu}\right)^2$; e così via. Dunque in ogni caso, da un certo punto in poi sarà $|\varphi|$ sempre $<$ del numero prefissato τ.

Corollari: « Se $P(t)$ tende a una costante, al crescere indefinito di t, anche $\varphi(t)$ tenderà a una costante ».

« Analogamente, se $P(t)$ è asintotica a una funzione ab^t ».

Sui Coefficienti di Fattoriali.

Nota di SALVATORE PINCHERLE (a Bologna).

Sunto. - *Si pongono in relazione le trasformazioni delle potenze in fattoriali, e viceversa, con proprietà di operatori funzionali lineari dipendenti dal simbolo di derivazione.*

Una questione che, nonostante il suo carattere elementare, ha richiamato ripetutamente l'attenzione degli algebristi [1], è quella dei « coefficienti di fattoriali », intendendosi con tale nome i coefficienti dello sviluppo del fattoriale $s(s-1)\dots(s-n+1)$ secondo le successive potenze $s, s^2, \dots s^n$, della variabile s, od anche, inversamente, quelli dello sviluppo della potenza s^m secondo i successivi fattoriali s, $s(s-1)$, $s(s-1)(s-2), \dots$ Ed invero, la questione non è priva di interesse, specialmente per sue attinenze col Calcolo delle Differenze; d'altra parte, non è forse ozioso di mostrare come, pur presentandosi a prima vista come una esercitazione isolata, essa sia invece suscettibile di riattacarsi a considerazioni di carattere più generale, riguardanti il calcolo degli operatori lineari.

1. Indichiamo con X l'operatore xD, dove D è il solito simbolo della derivazione; s'intenda che X va applicato alle funzioni indefinitamente derivabili della variabile x. Anzitutto, si noti che è:

$$X^m x^s = s^m x^s. \tag{1}$$

Si ha poi, essendo φ una delle funzioni cui si è accennato, che

$$X^2\varphi = xD\varphi + x^2D^2\varphi, \quad X^3\varphi = xD\varphi + 3x^2D^2\varphi + x^3D^3\varphi,$$

ed in generale:

$$X^m\varphi = xD\varphi + h_{2.m}x^2D^2\varphi + h_{3.m}x^3D^3\varphi + \dots + h_{m.m}x^mD^m\varphi. \tag{2}$$

[1] Citiamo, fra altri: L. SCHLÄFLI, « Giornale di Crelle », T. 42, 1852 · O. SCHLÖMILCH, Ibid., T. 44, 1852; A. CAYLEY, « Quarterly Journal of Mathematics », T. 3, 1860: l'A. qualifica la legge di formazione di questi numeri come « a very complicated one »; A. CAPELLI, « Giornale di Matematiche di Battaglini », T. 33, 1895; N. NIELSEN, « Annales de l'École normale supérieure », S. III, T. 19, 1902 e *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli*, Paris, 1923.

In particolare, applicando la (2) ad x^s, si ottiene

(3) $s^m = s + h_{2.m}s(s-1) + h_{3.m}s(s-1)(s-2) + \ldots + s(s-1)\ldots(s-m+1)$

poichè è $h_{m.m} = 1$; i coefficienti $h_{n.m}$ sono dunque i « coefficienti di fattoriali » dello sviluppo della potenza intera positiva s^m secondo i successivi fattoriali.

2. Se nella (2) facciamo $\varphi = e^x$, otteniamo

$$X^m e^x = (x + h_{2.m}x^2 + \ldots + x^m)e^x;$$

$X^m e^x$ e dunque il prodotto di e^x per il polinomio intero di grado m

(4) $$\pi_m = x + h_{2.m}x^2 + h_{3.m}x^3 + \ldots + x^m, \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Il sistema di polinomi così ottenuto, essendo definito da $X\pi_{m-1}e^x = \pi_m e^x$, soddisfa alla equazione ricorrente (mista differenziale e alle differenze)

(5) $$\pi_m = x(\pi'_{m-1} + \pi_{m-1})$$

e questa ci dà immediatamente per i coefficienti $h_{n.m}$ la relazione

(6) $$h_{n.m} = nh_{n.m-1} + h_{n-1.m-1}$$

che si poteva ottenere direttamente anche dalla (3), e che permette di costruire agevolmente una tabella dei coefficienti $h_{n.m}$, di cui ricordiamo qui una prima indicazione:

$n =$	1	2	3	4	5	6	7
$m = 1$	1	0	0	0	0	0	0
» 2	1	1	0	0	0	0	0
» 3	1	3	1	0	0	0	0
» 4	1	7	6	1	0	0	0
» 5	1	15	25	10	1	0	0
» 6	1	31	90	65	15	1	0
» 7	1	63	301	350	140	21	1
» 8	1	127	966	1701	1050	266	28

3. I polinomi π_m, che si sono qui presentati, hanno tutti la radice semplice $x = 0$; hanno tutti i coefficienti positivi e si può notare che tutte le loro radici sono reali: pertanto π_m ha $m-1$ radici negative. Si osservi che ciò è vero per $m = 2$, $m = 3$: supponiamo che la proposizione valga per π_{m-1}, e siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ le sue radici, scritte in ordine decrescente ($\alpha_1 = 0$). Fra due consecutive di queste, per esempio α ed α' ($\alpha' < \alpha$), vi è una radice ed una sola, semplice, della derivata π'_{m-1}; sia essa β. Circondato β di un intervallo $l' \dots l$ $(l' < \beta < l)$, la π'_{m-1} avrà un segno, p. es. positivo, nell'intervallo $\alpha' \dots l'$ e segno contrario nell'intervallo $l \dots \alpha$; sia a il suo minimo in $\alpha' \dots l'$ e b il suo minimo valore assoluto in $l \dots \alpha$: essendo $\pi_{m-1}(\alpha') = 0$, $\pi_{m-1}(\alpha) = 0$, si può determinare un numero positivo ε tale e che π_{m-1} sia minore di a nell'intervallo $\alpha' \dots \alpha' + \varepsilon$ e minore di b in valore assoluto nell'intervallo $\alpha - \varepsilon \dots \alpha$: onde $\pi_{m-1} + \pi'_{m-1}$ ha in $\alpha' \dots \alpha' + \varepsilon$ segno positivo ed in $\alpha - \varepsilon \dots \alpha$ segno negativo. Siccome x è negativo, dalla (5) risulta che π_m ha segno negativo in $\alpha' \dots \alpha' + \varepsilon$, segno positivo in $\alpha - \varepsilon \dots \alpha$ e quindi ammette una radice nell'intervallo $\alpha' \dots \alpha$. In ognuno degli intervalli $\alpha_1 \dots \alpha_2$, $\alpha_2 \dots \alpha_3, \dots, \alpha_{m-2} \dots \alpha_{m-1}$ vi è dunque una radice di π_m; vi è inoltre la radice 0; ve ne sarà pertanto una m^{sima} nell'intervallo fra $-\infty$ ed α_{m-1}: il teorema è così dimostrato.

4. Definito l'operatore X, resta definito un gruppo di operatori lineari permutabili con esso, e fra questi vi sono i polinomi ordinati per le potenze del simbolo X e le serie di potenze dello stesso simbolo. Una di queste serie, come

$$A(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} e_m X^m \varphi \tag{7}$$

avrà significato in quanto la funzione cui si applica l'operatore da essa rappresentato renda la serie convergente: l'insieme, evidentemente lineare, di tali funzioni costituisce « lo spazio funzionale di validità » dell'operatore A. Nel caso particolare in cui l'operatore si applica alla x^s, è stato da tempo notato che se si indica A con $f(X)$, viene

$$A(x^s) = f(X)(x^s) = f(s)x^s. \tag{8}$$

Sostituiamo, nella (7), alle X^n le loro espressioni (2): verrà, ordinando secondo le $x^n D^n$:

$$A(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} (e_m + e_{m+1} h_{m.m+1} + e_{m+2} h_{m.m+2} + \dots) x^m D^m \varphi. \tag{9}$$

Si hanno dunque per l'operatore A le due forme (7) e (9), e se in quest'ultima si indica con a_m il coefficiente di $x^m D^m$, le a_m e le e_m saranno legate dalle relazioni

$$a_m = e_m + h_{m.m+1} e_{m+1} + h_{m.m+2} e_{m+2} + \dots, \quad (m = 1, 2, 3, \dots); \tag{10}$$

per giudicare della validità di queste relazioni dal punto di vista della convergenza, ci si potrà giovare dell'applicazione dell'operatore A a qualche funzione speciale, come per esempio ad x^s. Presa la A sotto alla forma (7) si ha

$$A(x^s) = x^s \Sigma e_m s^m,$$

presa invece sotto alla forma (9), si ha

$$A(x^s) = x^s \Sigma a_m m! \binom{s}{m},$$

onde la relazione (10) avrà valore ogni qualvolta la serie di fattoriali $\Sigma a_m m! \binom{s}{m}$ potrà svilupparsi in una serie di potenze di s. Come è noto, ciò accadrà quando il massimo limite di $\frac{\log m! \, |a_m|}{\log m}$ sarà un numero negativo $-k$, e allora k è non superiore al raggio di convergenza della serie di potenze.

5. Il sistema (2), risoluto rispetto alle $x^n D^n$, o, ciò che è equivalente, il sistema (3) risoluto rispetto ai fattoriali, darà i coefficienti di fattoriali inversi delle $h_{n.m}$. Ottenute le

(11) $$x^m D^m = g_{1.m} X + g_{2.m} X^2 + \dots + g_{m.m} X^m,$$

dove $g_{m.m} = 1$, $g_{1.m} = (-1)^m (m-1)!$, si ottiene per la A l'espressione

$$A = \Sigma (a_m g_{m.m} + a_{m+1} g_{m.m+1} + \dots) X^m$$

da cui

(12) $$e_m = a_m + a_{m+1} g_{m.m+1} + \dots,$$

che invertono le (10), ed il cui valore formale acquista significato effettivo per una scelta conveniente delle a_m, e dal fatto che le $g_{m.n}$ sono indipendenti dalle a_m si può giungere alla loro determinazione nel seguente modo [1]: Dal confronto della (1) e della (12), si ha

$$\Sigma_m e_m s^m = \Sigma_n n! \, a_n \binom{s}{n};$$

ora, supposto $|t| < 1$, si faccia $a_n = \frac{t^n}{n!}$, e verrà

$$\Sigma e_m s^m = (1+t)^s;$$

onde il coefficiente $g_{m.n}$ sarà quello di t^n nello sviluppo di e_m in serie di potenze di t, e questo si ha immediatamente scrivendo

$$(1+t)^s = e^{s \log(1+t)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} s^m \log^m (1+t)$$

donde risulta che $g_{m.n}$ non è altro che il coefficiente di t^n nello sviluppo di $\frac{1}{m!} \log^m (1+t)$ in serie di potenze di t.

---

[1] Cfr. *Sopra un problema di interpolazione.* (« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », T. XIV).

INDICE DEL TOMO VII DELLA SERIE 4ª