Historisch-literarische Abtheilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch und **Dr. M. Cantor.**

---

38. Jahrgang.

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1893.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

I. Abhandlungen.

II. Recensionen.

Philosophie.

Geschichte der Mathematik.

Arithmetik, Zahlentheorie, Versicherungswesen, Analysis.

Synthetische und analytische Geometrie. Trigonometrie.

Mechanik, Physik, Technik.

I.

Ueber besondere affine Räume.

Von

Dr. F. Bützberger

zu Langenthal (Schweiz).

I.

Zwei beliebige Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$, deren Elemente einander gemäss der Bezeichnung zugeordnet sind, bestimmen eine Affinität, das ist eine Collineation, in welcher sich die unendlich ferne Ebene selbst entspricht. Drei Punkte XYZ dieser Ebene, sowie ein im Endlichen gelegener Punkt W entsprechen sich ebenfalls selbst. Der letztere ist das sogenannte Situations-Centrum und die sich selbst entsprechenden Geraden WX, WY, WZ nennen wir die Achsen der Affinität.

Wir betrachten nun den besonderen Fall, wo die drei Achsen paarweise rechtwinklig sind und wählen sie als Achsen eines Coordinatensystems. Sind xyz und $x'y'z'$ die Coordinaten irgend zweier entsprechender Punkte P und P', so können wir nach Euler setzen:

$$1)\qquad x' = lx \quad y' = my \quad z' = nz.$$

Die sich selbst entsprechenden Richtungen XYZ bilden ein Tripel harmonischer Pole des imaginären Kugelkreises, der projicirt wird durch den Kegel:

$$2)\qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0.$$

Die Polaren der Strahlen WP und WP' in Bezug auf denselben sind:

$$3)\qquad \begin{cases} x\xi + y\eta + z\zeta = 0 \\ lx\xi + my\eta + nz\zeta = 0. \end{cases}$$

Erklären wir die erstere Ebene als eine Ebene des gestrichenen Systems, so entspricht ihr im ungestrichenen Systeme die zweite Ebene, das heisst:

Sind R und R' zwei entsprechende Richtungen (unendlich ferne Punkte) der Affinität, so sind die zu R normale Stellung s' und die zu R' normale Stellung s zwei entsprechende unendlich ferne Gerade.

Wir fällen nun von den Ecken $ABCD$ des ersten Tetraeders die Lothe $abcd$ auf die zugehörigen Seitenebenen $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$, $A'B'C'$

des zweiten. Ebenso ziehen wir durch die Ecken $A'B'C'D'$ des letzteren die Lothe $a'b'c'd'$ auf die zugehörigen Seitenebenen des ersten. Die Lothe aa', bb', cc' und dd' sind entsprechende Strahlen der Affinität.

Sind nun die Coordinaten der acht Punkte:

$$4)\quad \left\{\begin{array}{llllllll} A: & x & y & z & A': & lx, & my, & nz \\ B: & x' & y' & z' & B': & lx', & my', & nz' \\ C: & x'' & y'' & z'' & C': & lx'', & my'', & nz'' \\ D: & x''' & y''' & z''' & D': & lx''', & my''', & nz''' \end{array}\right.$$

und sind $\xi\eta\zeta$ laufende Coordinaten, so lautet die Gleichung der Ebene BCD:

$$5)\quad \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix} = \alpha_x . \xi + \alpha_y . \eta + \alpha_z . \zeta + const = 0.$$

Bezeichnen nämlich $\alpha\beta\gamma\delta$ die doppelten Flächen der Dreiecke BCD, CDA, DAB, ABC, so sind $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$ die doppelten Flächen der Projectionen des Dreiecks BCD auf die Coordinatenebenen. Die Grössen $\alpha_x \beta_x \gamma_x \delta_x$ sind daher die Determinanten, welche stehen bleiben, wenn man in:

$$6)\quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix}$$

die erste Colonne und resp. die erste, zweite, dritte oder vierte Zeile streicht. Man hat demnach:

$$7)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_x - \beta_x + \gamma_x - \delta_x = 0 \\ y . \alpha_x - y' . \beta_x + y'' . \gamma_x - y''' . \delta_x = 0 \\ z . \alpha_x - z' . \beta_x + z'' . \gamma_x - z''' . \delta_x = 0. \end{array}\right.$$

Diese Relationen gelten auch, wenn man darin die Buchstaben xyz cyklisch vertauscht. Die Gleichungen der Lothe $a'b'c'd$ lauten nun:

$$8)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\xi - lx}{\alpha_x} = \dfrac{\eta - my}{\alpha_y} = \dfrac{\zeta - nz}{\alpha_z} \\ \dfrac{\xi - lx'}{\beta_x} = \dfrac{\eta - my'}{\beta_y} = \dfrac{\zeta - nz'}{\beta_z} \\ \dfrac{\xi - lx''}{\gamma_x} = \dfrac{\eta - my''}{\gamma_y} = \dfrac{\zeta - nz''}{\gamma_z} \\ \dfrac{\xi - lx'''}{\delta_x} = \dfrac{\eta - my'''}{\delta_y} = \dfrac{\zeta - nz'''}{\delta_z}. \end{array}\right.$$

Bezeichnen wir weiter die doppelten Inhalte der Seitenflächen des Tetraeders $A'B'C'D'$ mit $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ und zeigen mit dem angehängten

Index xy oder z wieder die Projection auf die betreffende Coordinatenebene an, so ist:

$$9)\qquad \alpha'_x = mn.\alpha_x;\quad \alpha'_y = nl.\alpha_y;\quad \alpha'_z = lm.\alpha_z.$$

Die Gleichungen der Lothe $abcd$ lauten:

$$10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\xi - x}{\alpha'_x} = \dfrac{\eta - y}{\alpha'_y} = \dfrac{\zeta - z}{\alpha'_z} \\ \dfrac{\xi - x'}{\beta'_x} = \dfrac{\eta - y'}{\beta'_y} = \dfrac{\zeta - z'}{\beta'_z} \\ \dfrac{\xi - x''}{\gamma'_x} = \dfrac{\eta - y''}{\gamma'_y} = \dfrac{\zeta - z''}{\gamma'_z} \\ \dfrac{\xi - x'''}{\delta'_x} = \dfrac{\eta - y'''}{\delta'_y} = \dfrac{\zeta - z'''}{\delta'_z}. \end{cases}$$

Schreiben wir nun die Bedingungen auf, unter welchen die Gerade

$$11)\qquad \frac{\xi - X}{\lambda} = \frac{\eta - Y}{\mu} = \frac{\zeta - Z}{\nu}$$

jedes der Lothe 6) schneidet:

$$12)\quad \begin{cases} (X-lx\ )(\nu\alpha_y-\mu\alpha_z) + (Y-my\ )(\lambda\alpha_z-\nu\alpha_x) + (Z-nz\ )(\mu\alpha_x-\lambda\alpha_y) = 0 \\ (X-lx'\ )(\nu\beta_y-\mu\beta_z) + (Y-my'\ )(\lambda\beta_z-\nu\beta_x) + (Z-nz'\ )(\mu\beta_x-\lambda\beta_y) = 0 \\ (X-lx'')(\nu\gamma_y-\mu\gamma_z) + (Y-my'')(\lambda\gamma_z-\nu\gamma_x) + (Z-nz'')(\mu\gamma_x-\lambda\gamma_y) = 0 \\ (X-lx''')(\nu\delta_y-\mu\delta_z) + (Y-my''')(\lambda\delta_z-\nu\delta_x) + (Z-nz''')(\mu\delta_x-\lambda\delta_y) = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man die zweite und vierte Gleichung mit -1 und addirt dann alle vier, so verschwindet die Summe links zufolge 7) identisch. Eine dieser vier Gleichungen ist also die Folge der drei anderen, oder, wenn die Gerade 11) drei der Lothe 8) schneidet, so trifft sie auch das vierte. Die vier Lothe 8) liegen daher auf einem Hyperboloid; die vier Lothe $abcd$ liegen im entsprechenden Hyperboloid.

Wenn also die Achsen zweier affiner Räume paarweise rechtwinklig sind, so liegen je zwei entsprechende Tetraeder so, dass die Lothe von den Ecken des einen auf die zugehörigen Seitenebenen des anderen (von A auf $B'C'D'$ etc.) in je einem Hyperboloid liegen. Die Lothe entsprechen sich paarweise in der Affinität.

Die Bedingung, dass die zwei ersten Lothe 8) oder a' und b' sich schneiden, lautet:

$$13)\ l(x-x')(\alpha_y\beta_z - \alpha_z\beta_y) + m(y-y')(\alpha_z\beta_x - \alpha_x\beta_z) + n(z-z')(\alpha'_x\beta_y - \alpha_y\beta_x) = 0.$$

Die analoge Bedingung für die zwei ersten Lothe 10) oder a und b ist folgende:

$$14)\ (x-x')(\alpha'_y\beta'_z - \alpha'_z\beta'_y) + (y-y')(\alpha'_z\beta'_x - \alpha'_x\beta'_z) + (z-z')(\alpha'_x\beta'_y - \alpha'_y\beta'_x) = 0.$$

Die Relationen 9) verwandeln aber diese Bedingung sofort in die vorhergehende. Schneiden sich daher zwei der Lothe $a'b'c'd'$, so schneiden sich auch die zwei entsprechenden Lothe der Gruppe $abcd$. Nun ist aber:

$$\alpha_y\beta_z - \alpha_z\beta_y = \begin{vmatrix} z' & x' & 1 \\ z'' & x'' & 1 \\ z''' & x''' & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z & x & 1 \\ z'' & x'' & 1 \\ z''' & x''' & 1 \end{vmatrix}$$

$$15) \qquad = (x''-x''') \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x' & y' & z' \\ 1 & x'' & y'' & z'' \\ 1 & x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Abgesehen von dieser Determinante, lässt sich demnach die Bedingung 13) schreiben:

$$16) \quad l(x-x')(x''-x''') + m(y-y')(y''-y''') + n(z-z')(z''-z''') = 0.$$

Verschwindet die Determinante, so liegen sowohl die Punkte $ABCD$, als auch die Punkte $A'B'C'D'$ in je einer Ebene, und die Lothe $abcd$, sowie die Lothe $a'b'c'd'$ sind unter sich parallel. Ist die Bedingung 16) erfüllt, dann schneiden sich die Lothe $a'b'$ in einem Punkte und die Lothe $c'd'$ in einem anderen. Da aber jede Gerade, welche drei dieser Lothe trifft, auch das vierte begegnet, so ist die Verbindungslinie der Scheitel der Linienpaare $a'b'$ und $c'd'$ identisch mit der Schnittlinie ihrer Ebenen. Dasselbe gilt von den Lothen $abcd$.

Sind schliesslich folgende drei Bedingungen erfüllt:

$$17) \begin{cases} l(x-x')(x''-x''') + m(y-y')(y''-y''') + n(z-z')(z''-z''') = 0 \\ l(x-x'')(x'''-x') + m(y-y'')(y'''-y') + n(z-z'')(z'''-z') = 0 \\ l(x-x''')(x'-x'') + m(y-y''')(y'-y'') + n(z-z''')(z'-z'') = 0, \end{cases}$$

wovon übrigens die eine die Folge der zwei anderen ist, so gehen die Lothe $a'b'c'd'$ durch einen Punkt und die Lothe $abcd$ durch seinen entsprechenden.

II.

Vorstehende Untersuchung wurde veranlasst durch die drei ersten Lehrsätze von Steiner in Crelle's Journal Bd. II, S. 287—292 (Gesammelte Werke Bd. I, S. 155—162). Diese drei Sätze, welche sehr interessante und wichtige Anwendungen gestatten, lassen sich verallgemeinern, wie ich in einer von der Hochschule Bern prämirten Preisarbeit gezeigt habe. Hier beschränke ich mich auf den dritten und gebe ihm folgende Fassung:

Haben irgend zwei (irreguläre) Tetraeder solche gegenseitige Lage, dass, wenn aus den Ecken des einen auf die Seitenebenen des anderen, in irgend einer Ordnung genommen, Lothe gefällt werden, diese vier Lothe auf einem Hyperboloid liegen, so liegen alle Mal auch diejenigen vier Lothe auf einem Hyperboloid, welche man in entsprechender Ordnung aus den Ecken des zweiten Tetraeders auf die Seitenebenen des ersten fällt.

$ABCD$ und $A'B'C'D'$ seien die Ecken der beiden Tetraeder. Wir setzen voraus, die Lothe $abcd$ von den Ecken $ABCD$ resp. auf die Ebenen $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$ und $A'B'C'$ liegen auf einem Hyperboloid und beweisen, dass dann auch die Lothe $a'b'c'd'$ von den Ecken $A'B'C'D'$ resp. auf die Ebenen BCD, CDA, DAB und ABC in einem Hyperboloid liegen.

Zu dem Zwecke projiciren wir die Figur auf die Ebene $A'B'C'$. Die Projectionen der Lothe abc stehen senkreckt auf den Seiten des Dreiecks $A'B'C'$; denn diese sind die Spuren von Ebenen, zu denen abc Lothe sind. Da aber die vier windschiefen Geraden $abcd$ in einem Hyperboloid liegen und d senkrecht auf der Ebene $A'B'C'$ steht, so steht noch eine zweite der anderen Schaar angehörende Erzeugende des Hyperboloids senkrecht zur Ebene $A'B'C'$; diese schneidet die Lothe abc, weshalb ihre Projectionen auf $A'B'C'$ durch einen Punkt gehen.

Nach dem ersten Lehrsatze der genannten Abhandlung gehen nun auch die Lothe $\mathfrak{abc}$ von $A'B'C'$ auf die Projectionen der zugehörigen Seiten des Dreiecks ABC durch einen Punkt. Dies sind zugleich die Lothe von $A'B'C'$ auf die nach der Ebene $A'B'C'$ orthogonal projicirenden Ebenen des Dreiecks ABC.

Nun projicire man die Figur auch auf die Ebene ABC. Die Lothe $a'b'c'$ projiciren sich als Senkrechte zu den Seiten des Dreiecks ABC; mit diesen Projectionen sind diejenigen der Lothe $\mathfrak{abc}$ identisch. Da aber letztere durch einen Punkt gehen, so schneiden sich auch die Projectionen von $a'b'c'$ auf die Ebene ABC in einem Punkte. Errichten wir in diesem Punkte das Loth zur Ebene ABC, so schneidet dasselbe die Geraden $a'b'c'$ und ist zu d' parallel. Es giebt daher zu jeder Seitenebene des Tetraeders eine Normale, welche alle vier Lothe $a'b'c'd'$ schneidet, weshalb diese in einem Hyperboloid liegen.

Die Stellungen der Seitenebenen der soeben betrachteten Tetraeder bestimmen in der unendlich fernen Ebene eine Collineation. Wir behaupten, dass die drei sich selbst entsprechenden Richtungen derselben paarweise rectangulär sind und also ein Tripel harmonischer Pole des imaginären Kugelkreises bilden. Dies schliesst drei Bedingungen für die gegenseitige Lage der acht Tetraeder-Ebenen ein.

Legen wir nun durch die Ecken $ABCD$ eines Tetraeders vier Gerade $abcd$, welche in einem Hyperboloid liegen. Zwei davon, etwa a, b, sind willkürlich. Durch C und D lege man ihre gemeinsamen Transversalen c' und d'. Die Geraden c, d müssen nun mit a, b Transversalen von c', d'

sein und die vier Geraden $abcd$ müssen c', d' nach demselben Doppelverhältniss schneiden, so dass:

$$(c'.\,abcd) = (d'.\,abcd) = (d'.\,badc).$$

Legt man also durch $abc'd'$ das Büschel von Hyperboloiden, so bilden die Schnittpunkte $c'd$ und cd' auf c' und d' zwei projectivische Reihen. Von den Richtungen der Geraden $abcd$ sind also zwei willkürlich, die dritte liegt in einer vorgeschriebenen Stellung und bestimmt die vierte. Diese vier Richtungen haben demnach auch drei Bedingungen zu genügen; dass letztere mit den oben genannten identisch sind, erhellt aus folgender Betrachtung:

Man kann irgend einen Punkt des Raumes als Situations-Centrum und drei durch ihn gehende paarweise rectanguläre Gerade als Achsen der Affinität erklären; zudem sind die drei Proportionalitäts-Factoren lmn willkürlich. Weil nun der Raum ∞^3 Punkte und der Kugelkreis ∞^3 Tripel hat, so giebt es ∞^9 Affinitäten. Ist $ABCD$ irgend ein Tetraeder, so liegen stets die Lothe von seinen Ecken auf die zugehörigen Seitenebenen des entsprechenden Tetraeders in einem Hyperboloid.

Durch die Ecken $ABCD$ kann man aber ∞^5 Gruppen windschiefer Geraden $abcd$ legen, die in einem Hyperboloid sich befinden. Zu jeder dieser Geraden können wir irgend eine senkrechte Ebene legen und diese vier Ebenen denen des Tetraeders $ABCD$ zuordnen; letzteres ist auf ∞^4 Arten möglich. Es giebt daher wieder ∞^9 solcher Affinitäten; diese sind mit den vorigen identisch.

Liegen also zwei Tetraeder so, dass die Lothe aus den Ecken des einen auf die zugehörigen Ebenen des anderen in einem Hyberboloid liegen, so bestimmen sie eine Affinität, deren Achsen paarweise rectangulär sind; die Lothe entsprechen sich paarweise.

Langenthal, Juli 1892.

II.

Untersuchungen über die auf die Krümmung von Curven und Flächen bezüglichen Eigenschaften der Berührungstransformationen.

Von

R. Mehmke

in Darmstadt.

Erste Mittheilung.

Krümmungseigenschaften der Berührungstransformationen in der Ebene.

Es scheinen noch keine Untersuchungen darüber veröffentlicht worden zu sein, nach welchen Gesetzen die Krümmung von Curven und Flächen sich ändert, wenn diese Gebilde einer Berührungstransformation unterworfen werden. Der Verfasser hat im Frühjahr 1891 diese Frage in Angriff genommen und theilt nun die einfachsten seiner Ergebnisse, soweit sie die Berührungstransformationen in der Ebene betreffen, hier mit.*

Der an die Spitze gestellte Satz liefert u. A. (siehe § 3) eine bemerkenswerthe absolute Invariante, welche die Form eines Doppelverhältnisses hat und aus Krümmungen bezw. Krümmungshalbmessern zusammengesetzt ist, ferner (in § 5) eine neue Methode zur Construction der Krümmungsmittelpunkte von Curven; in § 6 wird eine Anwendung davon auf die kinematische Geometrie veränderlicher Systeme gemacht. Besonderer Werth ist auf die geometrische Deutung der vorkommenden analytischen Ausdrücke, namentlich der in § 9 definirten „Determinante" einer Berührungstransformation, gelegt.

Nennenswerthe Kenntnisse aus der Theorie der Berührungstransformationen sind zum Verständniss dieser Mittheilung nicht erforderlich. Es genügt, die ersten Seiten von Herrn Lie's „Theorie der Transformationsgruppen, zweiter Abschnitt, Leipzig 1890" gelesen zu haben, oder zu wissen, dass bei einer Berührungstransformation Curvenelemente transformirt

* Inzwischen sind zwei kurze vorläufige Mittheilungen des Verfassers über das Verhalten der geodätischen Krümmung von Curven auf beliebigen Flächen sowie der Hauptkrümmungen von Flächen bei Berührungstransformationen erschienen, erstere in dieser Zeitschrift Bd. 37 1892 S. 189, letztere in der Rivista di Matematica, p. 159, 1892. (Anm. während des Druckes.)

werden und dass zwei sich berührende Curven im Allgemeinen wieder in zwei sich berührende Curven übergehen.

§ 1. Fundamentalsatz.

Es besteht folgender Satz:

Werden mehrere beliebige, sich in einem und demselben Punkte berührende ebene Curven irgend einer Berührungstransformation in ihrer Ebene unterworfen, so bilden die zum gemeinsamen Berührungspunkte gehörigen Krümmungsmittelpunkte der ursprünglichen Curven und die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte der transformirten Curven zwei projective Punktreihen.

Man gestatte mir, beim Beweise dieses Satzes denselben Weg einzuschlagen, auf dem ich ihn gefunden habe. Ich benütze die Rechnung mit Strecken (geraden Linien von bestimmter Länge und Richtung).*

Es bedeute x den „Träger" eines veränderlichen Punktes — den man unbedenklich ebenfalls mit x bezeichnen kann — d. h. die von einem willkürlichen festen Punkte bis zu jenem Punkte hin führende Strecke. Eine von x beschriebene Curve kann durch eine Gleichung $x = x(t)$, mit t als einer reellen unabhängigen Zahlveränderlichen, dargestellt werden. Dann ist $dx = \frac{dx}{dt}.dt$ ein Element dieser Curve nach Grösse und Richtung, und ferner:

$$dx = ds.a,$$

wenn ds die Länge jenes Elementes, a eine mit ihm parallele Strecke von der Länge Eins bezeichnet. Wird ds positiv genommen, so zeigt die Strecke a durch ihre Richtung an, in welchem Sinne x bei wachsendem t auf der Curve sich fortbewegt. Ferner sieht man leicht ein, dass

* Die geometrische Addition von Strecken und die Multiplication derselben mit Zahlgrössen darf als hinlänglich bekannt gelten. Das von Grassmann eingeführte „äussere" Product $[ab]$ zweier Strecken a und b bedeutet in der ebenen Geometrie den Flächeninhalt des Parallelogramms, welches aus jenen Strecken unter Beibehaltung ihrer Längen und Richtungen sich zusammensetzen lässt. Als Vorzeichen wird plus genommen, wenn eine Drehung in dem ein für alle Mal festgesetzten positiven Drehungssinne der Ebene um einen zwischen Null und π liegenden Winkel dazu gehört, um der Strecke a die Richtung der Strecke b zu ertheilen; andernfalls minus. Es ist $[ba] = -[ab]$, $[aa] = 0$. Unter der Ergänzung einer Strecke a, geschrieben $|a$, hat man in der Ebene die aus a durch Drehung um einen rechten Winkel in positivem Sinne hervorgehende Strecke zu verstehen. Das Grassmann'sche „innere" Product zweier Strecken a und b — geschrieben $[a|b]$ oder $a|b$, gelesen „a mal Ergänzung b" — ist gleich dem äusseren Product von a mit der Ergänzung von b, oder gleich dem Product aus den Längen von a und b und dem Cosinus des von ihren Richtungen gebildeten Winkels. Man hat $b|a = a|b$. Stehen zwei Strecken senkrecht auf einander, so verschwindet ihr inneres Product; das innere Quadrat einer Strecke a, geschrieben a^2, ist gleich dem Quadrat ihrer Länge.

$$da = d\sigma . b$$

ist, unter $d\sigma$ den Contingenzwinkel, unter b eine zur Curvennormale in x parallele Strecke von der Länge Eins verstanden. Wählt man die Richtung von b immer so, dass $[ab] = +1$, also b aus a durch Drehung um einen rechten Winkel in positivem Sinne erhalten wird, so fällt $d\sigma$ und damit auch der Krümmungshalbmesser $\varrho = \frac{ds}{d\sigma}$ positiv oder negativ aus, je nachdem das Durchlaufen der betreffenden Curvenstelle im Sinne des Zunehmens von t eine Bewegung bedingt, welche mit einer positiven oder mit einer negativen Drehbewegung gleichartig ist.

Der Punkt x und die durch ihn gehende, zu a parallele Gerade bilden nach der Ausdrucksweise des Herrn Lie ein „Linienelement“ oder „Element“ der Ebene. Ich werde dasselbe der Kürze wegen das Element oder Linienelement (x, a) nennen. Die Richtung von a soll als die positive Richtung jenes Elementes, die Richtung von b als die positive Richtung der Normalen des Elementes bezeichnet werden.

Eine beliebige Berührungstransformation lässt sich durch zwei Gleichungen der Form

$$\bar{x} = f(x, a), \tag{1}$$

$$\bar{a} = \varphi(x, a) \tag{2}$$

darstellen, worin $(\bar{x}, \bar{a})$ das vermöge der Transformation aus (x, a) hervorgehende Linienelement bezeichnet. Wir haben uns, wenn eine bestimmte Curve transformirt werden soll, x und a als bestimmte Functionen von t zu denken. Es folgt alsdann aus den vorhergehenden Gleichungen

$$d\bar{x} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial a} da,$$

$$d\bar{a} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial a} da,$$

oder da

$$dx = ds . a, \quad da = d\sigma . b$$

und bei Benützung entsprechender Bezeichnungen für das transformirte System

$$d\bar{x} = d\bar{s} . \bar{a}, \quad d\bar{a} = d\bar{\sigma} . \bar{b}$$

ist,

$$d\bar{s} . \bar{a} = ds \cdot \frac{\partial f}{\partial x} a + d\sigma \cdot \frac{\partial f}{\partial a} b, \tag{3}$$

$$d\bar{\sigma} . \bar{b} = ds \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} a + d\sigma \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} b. \tag{4}$$

Die innere Multiplication der Gleichungen 2) und 3) ergiebt wegen $\bar{a}^2 = 1$:

$$5)\qquad d\bar{s} = ds\left[\varphi \,|\, \frac{\partial f}{\partial x}\, a\right] + d\sigma\left[\varphi \,|\, \frac{\partial f}{\partial a}\, b\right],$$

und ferner die äussere Multiplication der Gleichungen 2) und 4) wegen $[a\,b] = 1$:

$$6)\qquad d\bar{\sigma} = ds\left[\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, a\right] + d\sigma\left[\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a}\, b\right].$$

Man hat also

$$\frac{d\bar{s}}{d\bar{\sigma}} = \frac{ds\left[\varphi \,|\, \frac{\partial f}{\partial x}\, a\right] + d\sigma\left[\varphi \,|\, \frac{\partial f}{\partial a}\, b\right]}{ds\left[\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, a\right] + d\sigma\left[\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a}\, b\right]},$$

oder da

$$\frac{d\bar{s}}{d\bar{\sigma}} = \bar{\varrho}, \qquad \frac{ds}{d\sigma} = \varrho,$$

$$7)\qquad \bar{\varrho} = \frac{\varrho\left[\varphi \,|\, \frac{\partial f}{\partial x}\, a\right] + \left[\varphi \,|\, \frac{\partial f}{\partial a}\, b\right]}{\varrho\left[\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, a\right] + \left[\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a}\, b\right]}.$$

Es erscheint mithin $\bar{\varrho}$, der zur Stelle $\bar{x}$ gehörige Krümmungshalbmesser der transformirten Curve, als gebrochene lineare Function des entsprechenden Krümmungshalbmessers ϱ der ursprünglichen Curve. Liegen mehrere Curven mit einem gemeinsamen Elemente (x, a) vor, so ist für dieselben auch b gemeinsam und es erhalten daher die Coefficienten auf der rechten Seite der auf dieses Element bezogenen Gleichung 7) bei allen jenen Curven dieselben Werthe. Hieraus folgt aber der oben aufgestellte Satz.

Nicht ganz überflüssig mag die, vermöge des Vorhergehenden ohne Weiteres als richtig zu erkennende Bemerkung sein, dass irgend zwei sich berührende Curven, welche im Berührungspunkte dieselbe Krümmung haben, durch jede Berührungstransformation in zwei Curven der gleichen Beschaffenheit verwandelt werden.

§ 2. Einige besondere Fälle.

Eine besondere Betrachtung verdienen die Punkttransformationen und unter den „eigentlichen" Berührungstransformationen im Sinne des Herrn Lie diejenigen, welche — wie die Transformation durch reciproke Polaren und die Fusspunkttransformation — alle Punkte in gerade Linien oder umgekehrt verwandeln, und ferner die zu den Punkttransformationen dualistischen Transformationen, welche gerade Linien stets wieder in gerade Linien überführen. Diesen drei Arten von Berührungstransformationen sollen später ausführliche Untersuchungen gewidmet werden; hier kommt es zunächst nur auf die Besonderheiten an, welche bei denselben die projectiven Punktreihen, von denen im Fundamentalsatze die Rede ist, zeigen.

Da man Punkte als Kreise vom Halbmesser Null ansehen kann, so sind im Falle einer Punkttransformation der gemeinsame Berührungspunkt x der ursprünglichen Curven und der entsprechende Berührungspunkt $\bar{x}$ der transformirten Curven zugeordnete Punkte der beiden fraglichen projectiven Punktreihen. Wendet man auf die erste Punktreihe eine Inversion mit dem Centrum x, auf die zweite Punktreihe eine solche mit dem Centrum $\bar{x}$ an, so entstehen zwei ebenfalls projective Punktreihen, deren unendlich ferne Elemente sich entsprechen, d. h. zwei ähnliche Punktreihen. Um das Ergebniss bequemer in Worte fassen zu können, benützen wir den Begriff der zu einem Punkte einer Curve gehörigen „Krümmungsstrecke"*, wie diejenige Strecke genannt werden soll, deren Längenzahl gleich der Krümmung der Curve im betreffenden Punkte ist und welche, in diesem Punkte beginnend, nach dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkte hin zeigt. Der Satz lautet jetzt:

Berühren sich mehrere beliebige ebene Curven in einem Punkte und wendet man auf dieselben eine beliebige Punkttransformation in ihrer Ebene an, so bilden die Endpunkte der zum gemeinsamen Berührungspunkte gehörigen Krümmungsstrecken der gegebenen Curven und die Endpunkte der entsprechenden Krümmungsstrecken der transformirten Curven zwei ähnliche Punktreihen.**

Wie leicht einzusehen, ist auch das Umgekehrte richtig, d. h. wenn für eine Berührungstransformation die im vorhergehenden Satze angegebene Eigenschaft ausnahmslos besteht, so ist sie eine Punkttransformation.

Betrachten wir an zweiter Stelle diejenigen Transformationen, durch deren Anwendung jede gerade Linie der Ebene wieder in eine gerade Linie übergeht. Wenn eine solche vorliegt, so sind die fraglichen beiden Reihen von Krümmungsmittelpunkten selbst einander ähnlich, weil ihre unendlich fernen Punkte als Krümmungsmittelpunkte von Geraden sich gegenseitig entsprechen. Also:

Werden mehrere beliebige, sich in einem Punkte berührende ebene Curven einer solchen Transformation in ihrer Ebene unterworfen, die jede Gerade der Ebene wieder in eine Gerade verwandelt, so ist die Punktreihe der zum gemeinschaftlichen Berührungspunkte gehörigen Krümmungsmittel-

* Vergl. H. Grassmann jun., Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumcurven und krummen Flächen. I. Theil, Raumcurven. Beilage zum Programm der lateinischen Hauptschule, Halle a. S., 1886.

** Die Ausdehnung dieses Satzes auf den Raum bezw. auf Räume von beliebig vielen Dimensionen habe ich bereits in den „Mittheilungen des mathem.-naturwissensch. Vereins in Württemberg", Bd. 4, Heft 1, S. 38, 1891 und in Schlömilch's Zeitschrift f. Math. u Phys., Bd. 36, S. 208, 1891, an letzter Stelle mit Beweis, angegeben.

punkte der ursprünglichen Curven ähnlich zur Punktreihe der entsprechenden Krümmungsmittelpunkte der transformirten Curven.

Auch dieser Satz kann, gleich dem vorhergehenden, umgekehrt werden.

Was endlich diejenigen Berührungstransformationen anlangt, welche Punkte in gerade Linien oder umgekehrt gerade Linien in Punkte transformiren, so ist nach dem Vorhergehenden klar, dass ihnen folgende Eigenschaft zukommt: Hat man wieder eine Schaar sich in einem Punkte berührender Curven nebst der Schaar der aus ihnen durch die Transformation abgeleiteten Curven und construirt man für die als Punktgebilde aufzufassenden jener Curven die Krümmungsstrecken zum gemeinsamen Berührungspunkte, für die durch Umhüllung von Geraden entstandenen Curven dagegen die zu ihrem gemeinsamen Berührungspunkte gehörigen Krümmungsmittelpunkte, so ist die aus den Endpunkten der Krümmungsstrecken gebildete Punktreihe ähnlich zu der Reihe der Krümmungsmittelpunkte.

Die lineare Punkttransformation (Collineation) verwandelt alle Geraden in Geraden, es liegt hier also der erste der obigen Fälle mit dem zweiten vereinigt vor. Ist folglich eine Schaar sich in einem Punkte berührender Curven und eine beliebige mit ihr collineäre Curvenschaar gegeben, so sind sowohl die Reihen der zu den betreffenden Berührungspunkten gehörigen Krümmungsmittelpunkte, als auch die aus den Endpunkten der zu den Berührungspunkten gehörigen Krümmungsstrecken gebildeten Punktreihen je unter sich ähnlich und es treten beide Mal die fraglichen Berührungspunkte als zugeordnete Punkte auf. Es möge schliesslich noch der Transformation durch reciproke Polaren gedacht werden. Aus dem Obigen geht hervor, dass, wenn man es wieder mit einer Schaar von Curven, die sich in einem Punkte berühren, und einer dazu reciproken Curvenschaar zu thun hat, die Punktreihe, welche die Endpunkte der zum gemeinsamen Berührungspunkt gehörigen Krümmungsstrecken der Curven einer beliebigen der beiden Schaaren zusammensetzen, ähnlich ist zur Reihe der entsprechenden Krümmungsmittelpunkte der Curven der jedesmaligen anderen Schaar.

§ 3. Aus Krümmungen und Krümmungshalbmessern gebildete Invarianten.

Aus dem Fundamentalsatze in § 1 ergiebt sich mit Leichtigkeit:

Haben vier beliebige, sich in einem Punkte berührende ebene Curven im Berührungspunkte die Krümmungen k_1, k_2, k_3, k_4 und die Krümmungshalbmesser $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$, so ändert das Doppelverhältniss

$$\frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} : \frac{k_1 - k_4}{k_2 - k_4}$$

oder das ihm gleiche Doppelverhältniss

$$\frac{\varrho_1 - \varrho_3}{\varrho_2 - \varrho_3} : \frac{\varrho_1 - \varrho_4}{\varrho_2 - \varrho_4}$$

seinen Werth nicht, wenn man auf jene Curven eine beliebige Berührungstransformation in ihrer Ebene anwendet.

Die in § 2 besprochenen besonderen Fälle geben Anlass zu folgenden Sätzen:

Bezeichnen k_1, k_2, k_3, k_4 die Krümmungen von vier beliebigen, sich in einem Punkte berührenden ebenen Curven im Berührungspunkte, so bleibt der Werth des Verhältnisses

$$\frac{k_1 - k_2}{k_2 - k_3},$$

oder allgemeiner der Werth des Verhältnisses

$$\frac{k_1 - k_2}{k_3 - k_4}$$

von allen in ihrer Ebene ausgeführten Punkttransformationen, die man auf die gegebenen Curven anwenden mag, unberührt.

Ferner:

Sind ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 die zum gemeinsamen Berührungspunkte gehörigen Krümmungshalbmesser von vier beliebigen, sich in einem Punkte berührenden ebenen Curven, so bleibt der Werth des Verhältnisses

$$\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_3},$$

oder allgemeiner der Werth des Verhältnisses

$$\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_3 - \varrho_4},$$

ungeändert, falls man jene Curven einer derartigen Berührungstransformation in ihrer Ebene unterwirft, welche alle geraden Linien wieder in gerade Linien überführt.

Für die linearen Transformationen endlich erhält man auf dieselbe Weise den längst bekannten Satz, dass, wenn auf zwei sich in einem Punkte berührende ebene Curven eine solche angewendet wird, das Verhältniss der zum Berührungspunkte gehörigen Krümmungen dieser Curven hierdurch keine Aenderung erleidet.*

§ 4. Curven einer Schaar mit gemeinsamem Element, deren Krümmung nicht geändert wird.

Eine weitere naheliegende Anwendung des Fundamentalsatzes besteht in der Bestimmung derjenigen Curven einer unendlichen Schaar mit einem gemeinsamen Elemente, deren Krümmung in diesem Elemente bei einer

* S. Stephen Smith, On the focal properties of homographic figures, Proceedings of the London Mathem. Society, Bd. 2, S. 196—248, 1866—1869; der betreffende Satz findet sich auf S. 212.

gegebenen Berührungstransformation ungeändert bleibt. Des kürzeren Ausdrucks wegen sollen zwei Curven der Schaar, welche im Berührungspunkte gleiche Krümmung haben, nicht als verschieden angesehen werden. Legt man die beiden projectiven Punktreihen, welche in den zum jedesmaligen Berührungspunkte gehörigen Krümmungsmittelpunkten der gegebenen Curven und ihrer Transformirten bestehen, so auf einander, dass das gemeinsame Element der einen und dasjenige der anderen Schaar, beide mit ihren positiven Richtungen sich decken, so treten zwei Doppelpunkte auf, die auch zusammenfallen oder imaginär werden können; wenn dagegen drei Punkte der einen Reihe mit ihren entsprechenden zusammenfallen, so thun es bekanntlich alle. Wir können daher, unter Beachtung der obigen Bemerkung sagen: Es giebt, allgemein gesprochen, zwei Curven in der Schaar, die bei einer gegebenen Berührungstransformation ihre Krümmung im gemeinsamen Berührungspunkte nicht ändern. Haben jedoch drei (im obigen Sinne) verschiedene Curven der Schaar diese Eigenschaft, so kommt sie allen zu.

Aehnliches gilt offenbar für die Curven der Schaar, deren Krümmung nach der Transformation ein beliebiges (positives oder negatives) Vielfaches vom ursprünglichen Werthe beträgt.

§ 5. Anwendung des Fundamentalsatzes auf die Construction von Krümmungsmittelpunkten. Beispiel: Orthotangentiale Transformation.

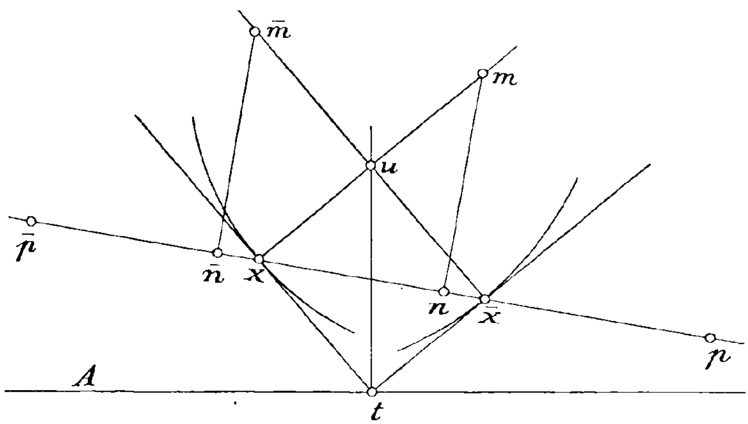
Wenn die Aufgabe vorliegt, den zu irgend einer Stelle gehörigen Krümmungsmittelpunkt einer Curve zu construiren, die durch Anwendung einer gegebenen Berührungstransformation aus einer beliebigen Curve mit (zur entsprechenden Stelle gehörigem) bekanntem Krümmungsmittelpunkt entstanden ist, so liefert uns der Fundamentalsatz eine einfache Lösung, sobald es gelingt, drei die gegebene Curve im gegebenen Punkte berührende und hier verschieden gekrümmte Curven mit (zu jenem Punkte gehörigen) bekannten Krümmungsmittelpunkten anzugeben, von deren Transformirten man die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte ebenfalls kennt. Denn es kann ja zu jedem Punkte einer von zwei projectiven Punktreihen der entsprechende gefunden werden, sobald drei Paare entsprechender Punkte der beiden Reihen gegeben sind.

Als Beispiel für die Anwendung dieser Bemerkung sei die von Césaro, d'Ocagne und de Longchamps untersuchte „orthotangentiale“ Transformation gewählt.* Es schneiden sich bei dieser Transformation je zwei

* S. Maurice d'Ocagne, Coordonnées parallèles et axiales, p. 88, Paris 1885; G. de Longchamps, Sur la transformation orthotangentielle dans le plan et dans l'éspace, Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, math.-naturw. Classe, S 241—256, 1888. Nach Angabe von de Longchamps ist diese Transformation zuerst von Césaro in der Zeitschrift Mathesis, t. 3, p. 248, 1883 betrachtet worden.

entsprechende Curventangenten xt und $\bar{x}t$ (Fig. 1) unter rechtem Winkel auf einer festen Achse A. Dass man es mit einer Berührungstransformation zu thun hat, ist ohne Weiteres klar. Weil augenscheinlich alle geraden Linien in eben solche transformirt werden, so sind je zwei Reihen entsprechender Krümmungsmittelpunkte ähnlich (§ 2), weshalb die Kenntniss von zwei Paaren (im Endlichen gelegener) entsprechender Krümmungsmittelpunkte ausreicht. Nehmen wir zur Gewinnung solcher als Curven im ersten Systeme den Punkt x und diejenige Curve an, deren Transformirte der Punkt $\bar{x}$ ist. Dreht xt sich um x, so umhüllt $t\bar{x}$ die Parabel, deren

Fig. 1.



Brennpunkt x und deren Scheiteltangente A ist; umgekehrt verwandelt sich die Parabel mit dem Brennpunkte $\bar{x}$ und der Scheitelangente A durch die Transformation in den Punkt $\bar{x}$. Sehr leicht folgt hieraus mit Hilfe des Satzes, dass jede Parabelnormale mit dem zugehörigen Brennstrahle und der Achsenrichtung gleiche Winkel bildet, eine von den genannten Geometern bereits angegebene Beziehung: Das im Tangentenschnittpunkt t auf A errichtete Loth geht durch den Schnittpunkt u der entsprechenden Curvennormalen xu und $\bar{x}u$. Nun weiss man, dass bei der Parabel die Projection des Krümmungshalbmessers auf den zugehörigen Brennstrahl gleich dem Doppelten des letzteren ist. Weil die vorhin betrachteten beiden Parabeln den in Frage kommenden Brennstrahl $x\bar{x}$ gemeinsam haben, so liegt es nahe, die in den Normalen xu und $\bar{x}u$ befindlichen, aus entsprechenden Krümmungsmittelpunkten bestehenden ähnlichen Punktreihen auf $x\bar{x}$ zu projiciren, wodurch man wieder zwei ähnliche Punktreihen erhält. Seien p und $\bar{p}$ die Projectionen der zu x bezw. $\bar{x}$ gehörigen Krümmungsmittelpunkte der in Rede stehenden Parabeln auf $x\bar{x}$, dann ist also

$$\bar{x}\bar{p} = 2\bar{x}x, \quad xp = 2xx,$$

folglich

$$x\bar{p} = p\bar{x} = \bar{x}x.$$

In den durch die Projection entstandenen ähnlichen Punktreihen sind aber x, $\bar{p}$ und p, $\bar{x}$ zwei Paare entsprechender Punkte, es zeigt sich mithin, dass der Abstand des einen Paares nach Grösse und Richtung dem des anderen gleich ist. Daher sind beide Punktreihen gleichstimmig congruent, d. h.:

Projicirt man zwei entsprechende Krümmungsmittelpunkte m und $\bar{m}$ senkrecht auf die Gerade $x\bar{x}$ nach n und $\bar{n}$, so ist

$$n\bar{n} = \bar{x}x.$$

Hieraus ergiebt sich eine Construktion zur Bestimmung des Punktepaares $\bar{x}$, $\bar{m}$ aus dem Paare x, m, welche einfacher ist, als die von d'Ocagne angegebene.

§ 6. Anwendung des Fundamentalsatzes auf die kinematische Geometrie veränderlicher ebener Systeme.

Es möge hier eine Anwendung des Fundamentalsatzes auf die kinematische Geometrie eines gesetzmässig veränderlichen ebenen Systemes, das in seiner Ebene sich beliebig bewegt, eingeschaltet werden.

Man ordne jedem Punkte einer beliebigen Phase des Systemes die von diesem Punkte beschriebene Bahn zu. Nehmen wir an, dass diese Curven eine doppelt unendliche Schaar bilden. Dann giebt es nach Herrn Lie* eine und nur eine Berührungstransformation, die jede Curve der Schaar in den ihr zugeordneten Punkt überführt. Durch die inverse Berührungstransformation wird somit jeder Punkt der betrachteten Systemphase in seine Bahn verwandelt. Fassen wir nun irgend eine dieser Phase angehörige Systemcurve in's Auge. Die ihren Punkten vermöge der zuletzt genannten Berührungstransformation entsprechenden Curven, d. h. die Bahnen dieser Punkte, liefern eine Hüllcurve, die nach einem Satze von Burmester bezw. Geisenheimer** auch die verschiedenen Phasen jener Curve einhüllt, also die Hüllbahn derselben vorstellt. Mit anderen Worten: Durch die fragliche Berührungstransformation wird jede Curve der zu Grunde gelegten Phase des Systemes in ihre Hüllbahn übergeführt.

Wenn mehrere Systemcurven sich in einem Punkte x berühren, so werden auch deren Hüllbahnen sich (und zugleich die Bahn von x) in einem bestimmten Punkte $\bar{x}$ berühren.

---

* Transformationsgruppen, zweiter Abschnitt, S. 20, Satz 7.

** Der betreffende Satz wurde von Burmester zunächst für ähnlich-veränderliche und collineär-veränderliche Systeme abgeleitet (Schlömilch's Zeitschrift Bd. 19, S. 162, 1874 und Bd. 20, S. 397, 1875), sodann von Geisenheimer auf beliebig-veränderliche ebene und von P. Somoff auf räumliche Systeme ausgedehnt (Schlömilch's Zeitschrift Bd. 24, S. 146, 1879 bezw. Bd. 30, S. 248, 1885).

Nach dem Satze in § 1 bilden dann die zum Punkte x gehörigen Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Systemcurven und die zum Punkte $\overline{x}$ gehörigen Krümmungsmittelpunkte ihrer Hüllbahnen zwei projective Punktreihen.

Bei starren Systemen kommt dieser Satz auf Bekanntes hinaus.

§ 7. Geometrische Bedeutung der Coefficienten in der Gleichung

$$\overline{\varrho} = \frac{\varrho\alpha + \beta}{\varrho\gamma + \delta}.$$

In § 1 ist gezeigt worden, dass, wenn ds und $d\sigma$ Bogenelement und Contingenzwinkel für irgend eine Stelle einer beliebigen Curve, $d\overline{s}$ und $d\overline{\sigma}$ dieselben Grössen für die entsprechende Stelle ihrer Transformirten bezeichnen, zwei Gleichungen der Form

$$5')\qquad d\overline{s} = ds\,\alpha + d\sigma\,\beta$$

und

$$6')\qquad d\overline{\sigma} = ds\,\gamma + d\sigma\,\delta$$

bestehen. Die Coefficienten α, β, γ, δ lassen sich in einfacher Weise geometrisch deuten. Zunächst ergiebt sich durch Vergleichung mit 5) und 6):

$$8)\qquad \alpha = \varphi \,|\, \frac{\partial f}{\partial x} a = \overline{a} \,|\, \frac{\partial f}{\partial x} a, \quad \beta = \varphi \,|\, \frac{\partial f}{\partial a} b = \overline{a} \,|\, \frac{\partial f}{\partial a} b$$

und

$$9)\qquad \gamma = \left[\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} a\right] = \overline{b} \,|\, \frac{\partial \varphi}{\partial x} a, \quad \delta = \left[\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} b\right] = \overline{b} \,|\, \frac{\partial \varphi}{\partial a} b$$

ist. Gehen wir jetzt noch einmal auf die Streckengleichungen

$$3)\qquad d\overline{s}.\overline{a} = ds \cdot \frac{\partial f}{\partial x} a + d\sigma \cdot \frac{\partial f}{\partial a} b,$$

$$4)\qquad d\overline{\sigma}.\overline{b} = ds \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} a + d\sigma \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} b$$

zurück. Da eine Berührungstransformation vorliegt, so dürfen die Strecken $\overline{a}$, $\overline{b}$ nur von der Lage des Elementes x, a, nicht aber vom Verhältnisse der Grössen ds und $d\sigma$, d. h. von der Krümmung der zu transformirenden Curve an der betreffenden Stelle abhängen. Dazu ist nothwendig und hinreichend, dass die Strecken

$$\frac{\partial f}{\partial x} a \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial a} b$$

parallel sind und ebenso auch die Strecken

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} a \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a} b.$$

Die ersten beiden Strecken sind alsdann parallel zu $\overline{a}$, die beiden letzten parallel zu $\overline{b}$. Ausserdem haben die Strecken $\overline{a}$ und $\overline{b}$ die Länge Eins. Folglich ist beispielsweise das innere Product

$$\alpha = \bar{a} \,|\, \frac{\partial f}{\partial x} a$$

gleich der Länge der Strecke $\frac{\partial f}{\partial x} a$, und zwar mit dem Vorzeichen plus oder minus, je nachdem die genannte Strecke dieselbe Richtung hat, wie $\bar{a}$, oder die umgekehrte, ebenso

$$\gamma = \bar{b} \,|\, \frac{\partial \varphi}{\partial x} a$$

gleich der mit richtigem Vorzeichen genommenen Länge von $\frac{\partial \varphi}{\partial x} a$ u. s. w. Also:

Die Coefficienten α, β, γ, δ sind der Reihe nach gleich den mit bestimmten Vorzeichen versehenen Längen der Strecken

$$\frac{\partial f}{\partial x} a, \quad \frac{\partial f}{\partial a} b, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} a, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a} b,$$

bei deren Messung als positive Richtungen diejenigen von $\bar{a}$ und $\bar{b}$ genommen werden müssen.

Hiervon wird in § 10 Gebrauch gemacht werden.

Was ist aber die eigentliche Bedeutung z. B. der Strecke $\frac{\partial f}{\partial x} a$? Sie stellt die partielle Ableitung von $\bar{x} = f(x, a)$ nach x in der Richtung a vor. Daraus folgt: Ertheilt man, ohne die Richtung von a zu ändern, dem Punkte x eine kleine Verschiebung von der Grösse ds in der Richtung von a und nennt man $d\bar{s}_1$ die Grösse der hierdurch hervorgerufenen (zu $\bar{a}$ parallelen) Verschiebung von $\bar{x}$, dann ist die Länge von $\frac{\partial f}{\partial x} a$, also α, gleich

$$\lim \frac{d\bar{s}_1}{ds} \text{ für } ds = 0.$$

Ferner: Lässt man bei festem x die Strecke a sich um einen kleinen Winkel $d\sigma$ drehen und bezeichnet man mit $d\bar{s}_2$ die Grösse der zugehörigen (wieder zu $\bar{a}$ parallelen) Verschiebung von $\bar{x}$, so ist die Länge von $\frac{\partial f}{\partial a} b$, also β, gleich

$$\lim \frac{d\bar{s}_2}{d\sigma} \text{ für } d\sigma = 0.$$

Eine ähnliche Bedeutung haben γ und δ.

Eine vielleicht noch anschaulichere Erklärung der fraglichen Grössen wird durch die Benützung des Geschwindigkeitsbegriffes ermöglicht, nämlich:

Es ist α bez. γ gleich der Grösse der Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt des Linienelementes, das durch die Berührungstransformation aus einem gegebenen Linienelemente hervorgeht, sich in seiner Linie bewegt bezw. gleich der Winkelgeschwindigkeit, mit welcher die Linie des Elementes um den Punkt sich dreht, wenn bei fest bleibender Linie des gegebenen Elementes dessen Punkt mit der Geschwindigkeit Eins in seiner Linie verschoben wird. Dagegen ist β bezw. δ gleich dem Werthe, den die genannte Geschwindigkeit bezw. Winkelgeschwindigkeit annimmt, wenn bei festbleibendem Punkte des gegebenen Linienelementes die Linie desselben um den Punkt sich mit der Winkelgeschwindigkeit Eins dreht.

Auf Grund vorstehender Ergebnisse können bei geometrisch definirten Berührungstransformationen die Werthe der Coefficienten α, β, γ, δ mitunter durch ganz elementare Betrachtungen gefunden werden.

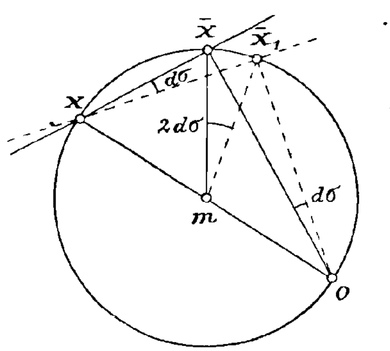
§ 8. Beispiel: Fusspunkt-Transformation.

Bei dieser Transformation entspricht jeder Geraden der Fusspunkt des von einem festen Punkte o auf sie gefällten Lothes; eine beliebige Curve wird also in ihre Fusspunktcurve bezüglich des Punktes o übergeführt. Es entsteht die Aufgabe, den zu einer beliebigen Stelle gehörigen Krümmungshalbmesser $\bar{\varrho}$ der Fusspunktcurve durch den entsprechenden Krümmungshalbmesser ϱ der gegebenen Curve auszudrücken. Wir wissen bereits, dass eine Beziehung der Form

$$\bar{\varrho} = \frac{\varrho\alpha + \beta}{\varrho\gamma + \delta}$$

vorhanden sein muss und wollen jetzt nach der im letzten Paragraphen entwickelten Methode die Coefficienten in derselben bestimmen, indem wir uns auf die elementarsten Hilfsmittel beschränken.

Fig. 2.

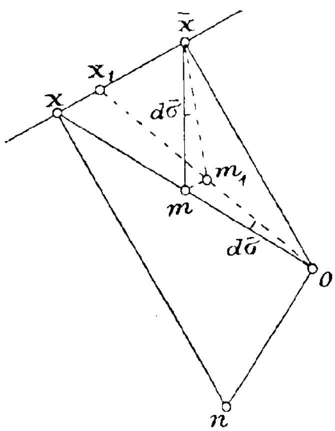


Seien x und $\bar{x}$ zwei entsprechende Punkte der beiden Curven. Wird x in der Tangente der gegebenen Curve verschoben, so ändert $\bar{x}$ seine Lage nicht, folglich ist $\alpha = 0$. Dreht man die Tangente der gegebenen Curve um ihren Berührungspunkt x, etwa im Sinne der Uhrzeigerbewegung, um einen kleinen Winkel $d\sigma$, so bewegt sich $\bar{x}$ bis zu einer Stelle $\bar{x}_1$ (s. Fig. 2) auf dem Kreise, der ox zum Durchmesser hat. Folglich geht die Normale der Fusspunktcurve durch den Mittelpunkt m dieses Kreises, wie bekannt. Die Winkel $\bar{x}\,o\,\bar{x}_1$ und $\bar{x}\,x\,\bar{x}_1$ sind einander gleich. Da ferner in jedem Dreieck der Quotient aus einer Seite und dem *sin* des Gegenwinkels gleich dem Durchmesser des umbeschriebenen Kreises ist, so hat man

$$\beta = lim \frac{\bar{x}\bar{x}_1}{d\sigma} = lim \frac{\bar{x}\bar{x}_1}{sin(\bar{x}o\bar{x}_1)} = ox, \text{ oder } \beta = r,$$

wenn mit r der Abstand des Punktes x von dem festen Punkte o bezeichnet wird. Ferner ist offenbar Winkel $\bar{x}m\bar{x}_1$, der zu $d\sigma$ gehörige Drehwinkel der Normalen $\bar{x}m$ und folglich auch derjenige der Tangente in $\bar{x}$ an die Fusspunktcurve, gleich $2d\sigma$. Auch drehen sich die beiden einander entsprechenden Tangenten in gleichem Sinne. Daher ist $\delta = 2$. Um endlich noch γ zu bestimmen, verschieben wir x in der Tangente der gegebenen Curve etwa bis x_1 (Fig. 3). Dadurch komme m nach m_1. Die Normale $\bar{x}m$ hat sich in anderem Sinne, als das erste Mal, gedreht, also ist γ negativ. Sei Winkel $m\bar{x}m_1 = d\bar{\sigma}$, dann wird, weil Winkel $m\bar{x}m_1 =$ Winkel mom_1 $=$ Winkel xox_1,

Fig. 3.



$$\gamma = lim \frac{d\bar{\sigma}}{xx_1} = lim \frac{sin(xox_1)}{xx_1},$$

d. h. γ ist gleich dem Reciproken vom Durchmesser des Kreises, in welchen der um das Dreieck xx_1o beschriebene Kreis beim Zusammenfallen von x_1 mit x übergeht. Der fragliche Kreis berührt xx in x und geht durch o, zieht man daher on senkrecht ox und xn senkrecht $x\bar{x}$, so ist xn ein Durchmesser jenes Kreises. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke nxo und $xo\bar{x}$ folgt jedoch

$$\frac{1}{nx} = \frac{o\bar{x}}{(ox)^2}.$$

Wird also noch die Entfernung $o\bar{x}$ mit $\bar{r}$ bezeichnet, so ist

$$\gamma = -\frac{\bar{r}}{r^2}.$$

Man hat somit

$$\bar{\varrho} = \frac{r}{-\varrho\frac{\bar{r}}{r^2} + 2} = -\frac{r^3}{-\varrho\bar{r} + 2r^2}.$$

§ 9. Determinante einer Berührungstransformation. Elemente, für welche die Determinante verschwindet.

Der Ausdruck

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

dessen Werth natürlich im Allgemeinen von der Lage des Linienelementes (x, a) abhängt, soll die Determinante der Berührungstransformation für jenes Element oder in demselben genannt werden. Wir wollen untersuchen, welche Folgen es hat, wenn die Determinante Δ in einem gegebenen Linienelemente (x, a) verschwindet.

Von dem Falle, dass die Grössen α, β, γ, δ nicht alle endlich sind, soll hier abgesehen werden. So lange nur die Krümmungshalbmesser von Curven, die jenes Element enthalten, und zwar die zu eben diesem Elemente gehörigen, in Frage kommen, sind die Grössen α, β, γ, δ in der Gleichung

$$\bar{\varrho} = \frac{\varrho\alpha + \beta}{\varrho\gamma + \delta}$$

constant. Bildet man unter dieser Voraussetzung die Ableitung von $\bar{\varrho}$ nach ϱ, so kommt

$$\frac{d\bar{\varrho}}{d\varrho} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\varrho\gamma + \delta)^2} = \frac{\Delta}{(\varrho\gamma + \delta)^2}.$$

Wenn daher Δ verschwindet, ohne dass $(\varrho\gamma + \delta)$ Null ist, so verschwindet auch $d\bar{\varrho}/d\varrho$ und es wird folglich $\bar{\varrho}$ constant. Verschwindet neben Δ auch $(\varrho\gamma + \delta)$, nicht aber jede der Grössen γ und δ, so wird offenbar $(\varrho\alpha + \beta)$ ebenfalls Null, also erhält man für $\bar{\varrho}$ den Ausdruck $\frac{0}{0}$, d. h. $\bar{\varrho}$ hängt von ϱ nicht mehr ab und kann jeden beliebigen Werth annehmen. Sind γ und δ beide Null, so erhält $\bar{\varrho}$ immer denselben Werth, nämlich ∞, so lange nicht $(\varrho\alpha + \beta)$ verschwindet; im letzteren Falle wird $\bar{\varrho}$ unbestimmt. Wir haben somit gefunden:

Werden zwei Curven, die sich in einem Punkte berühren, ohne hier gleiche Krümmung zu haben, einer Berührungstransformation unterworfen, deren Determinante im gemeinsamen Elemente jener Curven verschwindet, so gehen dieselben vermöge der Transformation im Allgemeinen in zwei solche Curven über, die sich im gemeinsamen Punkte osculiren.

Umgekehrt kann man leicht zeigen, dass zwei sich lediglich berührende Curven blos dann in zwei sich osculirende übergeführt werden, wenn die Determinante der Berührungstransformation im Berührungselemente Null ist.

Ferner:

Die projective Beziehung, welche nach dem Satze in § 1 zwischen je zwei aus entsprechenden Krümmungsmittelpunkten gebildeten geraden Punktreihen besteht, artet aus, wenn die Determinante der Berührungstransformation für das gemeinsame Element der Schaar von Curven, zu welchen die erste Reihe von Krümmungsmittelpunkten gehört, verschwindet; und zwar in der Weise, dass, abgesehen von einem bestimmten Punkte der ersten Reihe, allen Punkten derselben ein und der nämliche Punkt der zweiten Reihe entspricht, während der zugeordnete Punkt des genannten Ausnahmepunktes der ersten Reihe innerhalb der zweiten Reihe unbestimmt bleibt.

Im Allgemeinen giebt es durch jeden Punkt und auf jeder Geraden Linienelemente, für welche die Determinante einer gegebenen Berührungstransformation verschwindet. Sie bilden nach der Ausdrucksweise von Clebsch eine Haupt-Coincidenz, oder nach derjenigen von Herrn Lie eine Elementen-M_2 (Elementen-Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen). Es lässt sich aus ihnen ein System von Integralcurven (resp. Elementen-M_1) zusammensetzen, die man etwa die Determinantencurven der Berührungstransformation nennen könnte.

§ 10. Verschiedene Ausdrücke für die Determinante einer Berührungstransformation. Geometrische Bedeutung derselben.

Die in § 7 angestellte Untersuchung ergab, dass die Strecken $\frac{\partial f}{\partial x} a$ und $\frac{\partial f}{\partial a} b$ zu $\overline{a}$, die Strecken $\frac{\partial \varphi}{\partial x} a$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial a} b$ zu $\overline{b}$ parallel und die Längen jener Strecken, in der Richtung von $\overline{a}$ resp. $\overline{b}$ gemessen, beziehentlich gleich α, β, γ, δ sind. Somit hat man

$$10)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} a = \alpha . \overline{a}, \quad \frac{\partial f}{\partial a} b = \beta . \overline{a},$$

$$11)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} a = \gamma . \overline{b}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a} b = \delta . \overline{b}.$$

Daraus folgt, weil $[\overline{a}\overline{b}] = 1$:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} b\right] = \alpha\delta, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial a} b \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} a\right] = \beta\gamma.$$

Das giebt für die Determinante Δ der Berührungstransformation im Elemente (x, a) den neuen Ausdruck

$$12)\ \Delta = \left[\frac{\partial f}{\partial x} a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} b\right] - \left[\frac{\partial f}{\partial a} b \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} a\right] \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x} a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} b\right] + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} a \cdot \frac{\partial f}{\partial a} b\right],$$

welcher eine einfache geometrische Deutung zulässt. Man trage von dem Punkte des transformirten Linienelementes $(\overline{x}, \overline{a})$ in der positiven Richtung seiner Linie, d. h. also vom Punkte $\overline{x}$ in der Richtung $\overline{a}$, eine Strecke von der Länge Eins ab und bezeichne den Endpunkt mit z. Dann ist

$$z = \overline{x} + \overline{a} = f(x, a) + \varphi(x, a).$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} a = \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial \varphi}{\partial x} a; \quad \frac{\partial z}{\partial a} b = \frac{\partial f}{\partial a} b + \frac{\partial \varphi}{\partial a} b.$$

Man verbinde diese beiden Gleichungen durch äussere Multiplication. Weil nach dem Früheren die Strecke $\frac{\partial f}{\partial x} a$ parallel zur Strecke $\frac{\partial f}{\partial a} b$ und ebenso $\frac{\partial \varphi}{\partial x} a$ parallel zu $\frac{\partial \varphi}{\partial a} b$ ist, so wird

$$13)\qquad \left[\frac{\partial f}{\partial x}a\cdot\frac{\partial f}{\partial a}b\right]=0,$$

$$14)\qquad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}a\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial a}b\right]=0.$$

Daher ist

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}a\cdot\frac{\partial z}{\partial a}b\right]=\left[\frac{\partial f}{\partial x}a\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial a}b\right]+\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}a\cdot\frac{\partial f}{\partial a}b\right]=\Delta.$$

In Worten:

Lässt man zuerst den Punkt x des gegebenen Linienelementes (x, a) mit der Geschwindigkeit Eins in der positiven Richtung der Linie des Elementes (d. h. in der Richtung a) sich bewegen, dann umgekehrt die Linie des Elementes um den Punkt desselben in positivem Sinne mit der Winkelgeschwindigkeit Eins sich drehen, und bildet man aus den (nach Grösse und Richtung aufgefassten) Geschwindigkeiten, welche infolge dessen der oben definirte Punkt z im einen und im anderen Falle erhält, ein Parallelogramm, so ist der Inhalt desselben (nach Grösse und Vorzeichen) gleich der Determinante Δ der gegebenen Berührungstransformation im Elemente (x, a).

Ein einfaches Beispiel für die Anwendung des vorstehenden Satzes giebt die Berührungstransformation ab, welche jede Curve in eine Parallelcurve überführt und darin besteht, dass jedes Element (x, a) senkrecht zu seiner eigenen Richtung um einen constanten Betrag verschoben wird. Es leuchtet ein, dass, wenn in diesem Falle x mit der Geschwindigkeit Eins in der Richtung a sich bewegt, der Punkt z das Gleiche thut, und ferner, dass, wenn a mit der Winkelgeschwindigkeit Eins in positivem Sinne um x sich dreht, von $\overline{a}$ die gleiche Bewegung um $\overline{x}$ ausgeführt wird, also z die Geschwindigkeit Eins parallel zu $\overline{b}$ (senkrecht zu $\overline{a}$ oder a) erhält. Jene beiden Geschwindigkeiten von z bilden somit ein Quadrat von der Seitenlänge Eins mit positivem Umlaufssinn, d. h. es wird $\Delta=+1$. Reelle Linienelemente mit verschwindender Determinante sind hier nicht vorhanden, also auch keine reellen Determinantencurven.

§ 11. Fortsetzung. Die Determinante einer Berührungstransformation als Geschwindigkeitsverhältniss.

Den Gleichungen 2) und 10) zufolge ist

$$\overline{a}=\varphi(x,\ a)=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}a.$$

Man leite diese Gleichung in der Richtung a partiell nach x ab, d. h. führe die Operation $\dfrac{\partial}{\partial x}a$ auf dieselbe aus. Man erhält

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}a=\left(\frac{\partial\frac{1}{\alpha}}{\partial x}a\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}a+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}a^2.$$

Durch Ausführung der Operation $\frac{\partial}{\partial a} b$ auf dieselbe Gleichung ergiebt sich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} b = \left(\frac{\partial \frac{1}{\alpha}}{\partial a} b\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial a} a b + \frac{\partial f}{\partial x} b\right).$$

Setzt man für $\frac{\partial \varphi}{\partial x} a$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial a} b$ die gefundenen Werthe in Gleichung 12) ein, so kommt bei Berücksichtigung von Gleichung 13):

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} \cdot \left\{\left[\frac{\partial f}{\partial x} a \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial a} a b\right] + \left[\frac{\partial f}{\partial x} a \cdot \frac{\partial f}{\partial x} b\right]\right\} + \frac{1}{\alpha} \cdot \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} a^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial a} b\right].$$

Die partielle Ableitung der Gleichung 13) nach x in der Richtung a liefert jedoch

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} a^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial a} b\right] + \left[\frac{\partial f}{\partial x} a \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial x} b a\right] = 0.$$

Daher wird

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x} a \cdot \frac{\partial f}{\partial x} b\right] \cdot = \left[\frac{1}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x} a \cdot \frac{\partial f}{\partial x} b\right]$$

oder

15) $$\Delta = \left[\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial x} b\right] = \left[\overline{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} b\right].$$

Zu demselben Ergebnisse kann man auf ähnliche Weise gelangen, indem man von der Gleichung

$$\varphi(x, a) = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial f}{\partial a} b$$

ausgeht. Wenn daher auch α identisch verschwindet, so bleibt die Gleichung 15) doch bestehen.

Gleichung 15) ist einer einfachen Deutung fähig. Weil nämlich $\overline{b} = |\overline{a}$ oder $\overline{a} = -|\overline{b}$ ist, so kann man jene Gleichung schreiben

$$\Delta = \left[-|\overline{b} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} b\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial x} b \,|\, \overline{b}\right].$$

Das heisst:

Ertheilt man bei unveränderter Richtung des gegebenen Linienelementes (x, a) seinem Punkte x die Geschwindigkeit Eins in der positiven Richtung der Normalen des Elementes, dann ist die Projection der Geschwindigkeit, mit welcher sich infolge dessen der Punkt $\overline{x}$ des transformirten Elementes bewegt, auf die positive Richtung der Normalen des letzteren Elementes gleich der Determinante der gegebenen Berührungstransformation im Elemente (x, a).

Nehmen wir als Beispiel die bereits in § 8 untersuchte Fusspunkttransformation. Es bezeichne wieder o den Lothpunkt, r resp. $\overline{r}$ die Entfernung desselben von x resp. $\overline{x}$, m die Mitte zwischen x und o. Seien ferner die einander gleichen Winkel $m\overline{x}o$ und $\overline{x}om$ durch ψ bezeichnet.

Wird das gegebene Linienelement normal zu seiner Richtung, also normal zu $x\bar{x}$, um irgend einen Betrag verschoben, so erleidet offenbar $\bar{x}$ eine gleich grosse und gleich gerichtete Verschiebung, also hat die Strecke $\frac{\partial f}{\partial x} b$ die Länge Eins und sie ist parallel mit $\bar{x}o$. Da nun die Normale des transformirten Elementes bekanntlich durch m geht, so hat man

$$\Delta = \cos\psi = \frac{\bar{r}}{r},$$

welches Ergebniss auch durch die Formel für $\bar{\varrho}$ in § 8 geliefert wird. Abgesehen von den Elementen mit unendlich fernem Punkte $(r = \infty)$ verschwindet also die Determinante der Fusspunkt-Transformation für jedes Element, dessen Linie den Lothpunkt o enthält $(\bar{r} = 0)$, und die Determinantencurven bestehen daher in diesem Falle in der Gesammtheit der durch o gehenden geraden Linien.

§ 12. Erweiterung.

Der im letzten Paragraphen gefundene Satz lässt sich verallgemeinern. Das Element (x, a) werde einer beliebigen unendlich kleinen Lagenänderung unterworfen. Die Verschiebung, welche x hierbei erfährt, sei (nach Länge und Richtung) gleich dx; die Verdrehung der Linie des Elementes betrage $d\varepsilon$. Man zerlege dx in zwei Componenten parallel den Strecken a und b. Sind $d\lambda$ und $d\mu$ die in der Richtung a resp. b gemessenen Längen jener Componenten, so hat man

$$dx = d\lambda . a + d\mu . b.$$

Ferner ist

$$da = d\varepsilon . b.$$

Daher wird

$$d\bar{x} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial a} da = \frac{\partial f}{\partial x}(d\lambda . a + d\mu . b) + \frac{\partial f}{\partial a}(d\varepsilon . b)$$

$$= d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x} a + d\mu \cdot \frac{\partial f}{\partial x} b + d\varepsilon \cdot \frac{\partial f}{\partial a} b.$$

Durch äussere Multiplication mit $\bar{a}$ folgt hieraus, weil

$$\left[\bar{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} a\right] = 0, \quad \left[\bar{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial a} b\right] = 0$$

und nach Gleichung 15) $\left[\bar{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} b\right] = \Delta$ ist,

$$[\bar{a}\, d\bar{x}] = d\mu . \Delta .$$

Andererseits ist wegen $[aa] = 0, \quad [ab] = 1$:

$$[a\, dx] = d\mu,$$

also

16) $$\Delta = \frac{[\bar{a}\, d\bar{x}]}{[a\, dx]},$$

oder auch

16a) $$\Delta = \frac{[d\bar{x} \mid \bar{b}]}{[dx \mid b]}.$$

Dieses Ergebniss können wir ausdrücken wie folgt:

Unterwirft man das Linienelement (x, a) einer beliebigen unendlich kleinen Lagenänderung und bezeichnet man mit $d\mu$ die Projection der Verschiebung, welche der Punkt x des Elementes hierbei erfährt, auf die Normale des Elementes; mit $d\bar{\mu}$ die Projection der durch jene Lagenänderung hervorgerufenen Verschiebung des Punktes $\bar{x}$ auf die Normale des transformirten Elementes $(\bar{x}, \bar{a})$, so ist die Determinante der gegebenen Berührungstransformation im Elemente (x, a) gleich $\frac{d\bar{\mu}}{d\mu}$.

Natürlich hätte man bei der Einkleidung der Formel 16a) in Worte auch den Geschwindigkeitsbegriff benützen können.

Anmerkung. Führt man rechtwinklige Cartesische Coordinaten ein und nennt man x_1, x_2 die Coordinaten des Punktes x, Θ den Neigungswinkel des Linienelementes (x, a) gegen die erste Coordinatenachse, so verwandelt sich das äussere Streckenproduct $[a dx]$ in den „Pfaff'schen Ausdruck"

$$\cos \Theta\, d x_2 - \sin \Theta\, d x_1,$$

welcher, von Herrn Lie in etwas anderer Form geschrieben, in dessen Entwickelungen eine wichtige Rolle spielt. Gleichung 16) zeigt, dass Δ, die Determinante einer Berührungstransformation im Elemente (x, a), gleich dem Factor ist, welcher aus dem Pfaff'schen Ausdruck $[a dx]$ hervortritt, wenn man auf ihn jene Berührungstransformation anwendet. Es entspricht also Δ der Grösse, die Herr Lie im zweiten Abschnitte seiner Theorie der Transformationsgruppen mit ϱ bezeichnet und von welcher er zeigt — was auch aus unseren Ergebnissen mit Leichtigkeit sich folgern lässt —, dass sie nicht identisch verschwinden kann, ohne im Uebrigen auf ihre geometrische Bedeutung einzugehen.

III.

Ueber einige lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Von

Dr. Lohnstein

in Hamburg.

Hat die determinirende Fundamentalgleichung, welche zu einem in leicht verständlicher Bezeichnung „regulären" singulären Punkt einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung gehört, eine Doppelwurzel r, so gehören zu dem singulären Punkte bekanntlich zwei Fundamentalintegrale

$$1)\qquad y_1 = x^r\, \mathfrak{P}_1(x), \quad y_2 = y_1 \log x + x^r\, \mathfrak{P}_2(x).$$

Es ist ferner bekannt, dass man durch eine einfache Transformation die Gleichung immer so umformen kann, dass $r = 0$ ist (vergl. z. B. die Diss. von Herrn Heffter, Berl. 1886). Denken wir uns diese Transformation vorgenommen, so sind die beiden Integrale von der Form

$$2)\qquad y_1 = \mathfrak{P}_1(x), \quad y_2 = y_1 \log x + \mathfrak{P}_2(x).$$

Es kommt nun darauf an, nachdem die Reihe $\mathfrak{P}_1(x)$ gefunden ist, die Reihe $\mathfrak{P}_2(x)$ möglichst einfach herzuleiten, und ich will im Folgenden zunächst an zwei einfachen bekannten Beispielen ein hierzu geeignetes Verfahren angeben.

Ich betrachte erstens die bekannte Gleichung

$$3)\qquad y^{(2)} + \frac{2n}{x} y' - m^2 y = 0.$$

Ihr genügt in der Umgebung der Stelle $x = 0$ die Potenzreihe

$$4)\qquad y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^{2k} x^{2k}}{2.4 \ldots 2k\,(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2k-1)}.$$

Ihr zweites Integral hat bekanntlich die Form

$$5)\qquad y_2 = x^{1-2n} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^{2k} x^{2k}}{2.4 \ldots 2k\,(3-2n)(5-2n)\ldots(2k+1-2n)}\right).$$

Für $n=\frac{1}{2}$ werden die beiden Ausdrücke identisch; es erhalten beide Wurzeln der zu $x=0$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung den Werth Null und an die Stelle von y_2 tritt ein logarithmisches Supplementintegral. Um dieses zu finden, setzen wir in Gleichung 3), nachdem wir $n=\frac{1}{2}$ gemacht haben, $y=y_1 \log x+z$, so genügt z der Differentialgleichung mit rechter Seite

6) $$\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}-m^2 z=-\frac{2}{x}\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{n=\frac{1}{2}}.$$

Andererseits genügt für beliebige Werthe von n die Function $u=\frac{\partial y_1}{\partial n}$ ebenfalls einer Differentialgleichung mit rechter Seite; nämlich

7) $$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial n}\right)+\frac{2n}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y_1}{\partial n}\right)-m^2\left(\frac{\partial y_1}{\partial n}\right)=-\frac{2}{x}\left(\frac{dy_1}{dx}\right),$$

worin $\frac{dy_1}{dx}$ die Ableitung der Reihe (4) bedeutet. Für $n=\frac{1}{2}$ sei $\left(\frac{\partial y_1}{\partial n}\right)_{n=\frac{1}{2}}=u_0$; so gilt für u_0 die Differentialgleichung

8) $$\frac{du_0}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{du_0}{dx}-m^2 u_0=-\frac{2}{x}\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{n=\frac{1}{2}},$$

d. h. dieselbe wie 6). Daher ist

9) $$z=\mathfrak{P}_2(x)=\left(\frac{\partial y_1}{\partial n}\right)_{n=\frac{1}{2}}+\gamma_1 y_1+\gamma_2 y_2,$$

worin y_1, y_2 zwei linear unabhängige Particularintegrale der Gleichung $y^{(2)}+\frac{1}{x}y'-m^2 y=0$, und γ_1, γ_2 zu bestimmende Constanten bedeuten. Für y_1 und y_2 kann man die beiden zu $x=0$ gehörigen Fundamentalintegrale nehmen. Ferner kann man immer annehmen, dass für $x=0$ $z_2=\mathfrak{P}_2(x)$ verschwindet. Daraus ergiebt sich $\gamma_1=\gamma_2=0$, und somit

10) $$z=\mathfrak{P}_2(x)=\left(\frac{\partial y_1}{\partial n}\right)_{n=\frac{1}{2}}.$$

Setzt man

11) $$(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2k-1)=\varphi_k(n),$$

so wird die Reihe 4)

$$y_1=1+\sum\frac{m^{2k}x^{2k}}{2.4\ldots 2k}\frac{1}{\varphi_k(n)},$$

daher

12) $$\frac{\partial y_1}{\partial n}=-\sum\frac{m^{2k}x^{2k}}{2.4\ldots 2k}\frac{\varphi_k'(n)}{\varphi_k(n)^2}.$$

Ferner ist $\varphi_k\left(\frac{1}{2}\right)=2.4\ldots 2k$, also

13) $$\left(\frac{\partial y_1}{\partial n}\right)_{n=\frac{1}{2}}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m^{2k}x^{2k}}{(2.4\ldots 2k)^3}\varphi_k'\left(\frac{1}{2}\right)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m^{2k}x^{2k}}{(2.4\ldots 2k)^2}\frac{\varphi_k'(\frac{1}{2})}{\varphi_k(\frac{1}{2})}.$$

Da nun

$$14)\qquad \frac{\varphi_k'(n)}{\varphi_k(n)}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\cdots\frac{1}{2n+2k-1},$$

so wird

$$15)\qquad z=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m^{2k}x^{2k}}{(2.4\ldots 2k)^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{k}\right),$$

und wir erhalten die beiden Integrale

$$16)\ y_1=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m^{2k}x^{2k}}{(2.4\ldots 2k)^2},\quad y_2=y_1\log x-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m^{2k}x^{2k}}{(2.4\ldots 2k)^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{k}\right).$$

In analoger Weise kann man die Differentialgleichung

$$17)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2x-1}{x(x-1)}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{4}\frac{1}{x(x-1)}y=0$$

behandeln, welcher bekanntlich die Moduln des elliptischen Integrals erster Gattung Genüge leisten. Hier haben wir für den singulären Punkt $x=0$ bekanntermaassen

$$18)\qquad y_1=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1.3\ldots 2k-1}{2.4\ldots 2k}\right)^2 x^k,$$

und da die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung gleich sind,

$$19)\qquad y_2=y_1\log x+\mathfrak{P}_2(x)=y_1\log x+z,$$

wo z jetzt der Gleichung mit rechter Seite genügt,

$$20)\qquad \frac{d^2z}{dx^2}+\frac{2x-1}{x(x-1)}\frac{dz}{dx}+\frac{1}{4}\frac{1}{x(x-1)}z=-\frac{2}{x}y_1'-\frac{y_1}{x(x-1)}.$$

Die Gleichung 18) geht aus der folgenden allgemeineren

$$21)\qquad \frac{dy^2}{dx^2}+\left(\frac{2r}{x}+\frac{1}{x-1}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{r^2}{x(x-1)}y=0$$

hervor, wenn $r=\frac{1}{2}$ gesetzt wird. Letztere hat in der Umgebung der Stelle $x=0$ ein Integral

$$22)\ y_1(x,r)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(r+k-1)^2(r+k-2)^2\ldots r^2}{k(k-1)\ldots 1.(2r+k-1)(2r+k-2)\ldots 2r}x^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k\psi_k(r)^2}{k!\,\varphi_k(r)}.$$

worin 23)

$$(r+k-1)(r+k-2)\ldots r=\psi_k(r),\quad (2r+k-1)(2r+k-2)\ldots 2r=\varphi_k(r)$$

ist. $n=\frac{\partial y_1}{\partial r}$ genügt der Gleichung

$$24)\ \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial r}\right)+\left(\frac{2r}{x}+\frac{1}{x-1}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y_1}{\partial r}\right)+\frac{r^2}{x(x-1)}\frac{\partial y_1}{\partial r}=-\frac{2}{x}\frac{dy_1}{dx}-\frac{2r}{x(x-1)}y_1.$$

Für $r=\frac{1}{2}$ wird, wenn $u_0=\left(\frac{\partial y_1}{\partial r}\right)_{r=\frac{1}{2}}$ gesetzt wird,

$$25)\qquad \frac{du^2}{dx^2}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)\frac{du}{dx}+\frac{1.}{4x(x-1)}u=-\frac{2}{x}y_1'-\frac{y_1}{x(x-1)},$$

d. h. identisch mit 20). Daraus folgt, ebenso wie im ersten Beispiel, dass

$$z=\mathfrak{P}_2(x)=\left(\frac{\partial y_1}{\partial r}\right)_{r=\frac{1}{2}}$$

ist. Nun ist

$$26)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial y_1}{\partial r}&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\frac{2\psi_k(r)\psi_k'(r)\varphi_k'(r)-\varphi_k'(r)\psi_k(r)^2}{\varphi_k(r)^2}x^k\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\,\frac{\psi_k'(r)^2}{\varphi_k(r)}\left(2\frac{\psi_k'(r)}{\psi_k(r)}-\frac{\varphi_k'(r)}{\varphi_k(r)}\right)\\
\frac{\psi_k'(r)}{\psi_k(r)}&=\frac{1}{r+k-1}+\frac{1}{r+k-2}+\cdots\frac{1}{r}\\
\frac{\varphi_k'(r)}{\varphi_k(r)}&=2\left(\frac{1}{2r+k-1}+\frac{1}{2r+k-2}+\cdots\frac{1}{2r}\right)\\
\frac{2\psi_k'(r)}{\psi_k(r)}-\frac{\varphi_k'(r)}{\varphi_k(r)}&=2\left(\frac{1}{r+k-1}+\frac{1}{r+k-2}+\cdots\frac{1}{r}-\frac{1}{2r+k-1}-\frac{1}{2r+k-2}\cdots-\frac{1}{2r}\right),\\
&\text{also für } r=\frac{1}{2},\\
\frac{2\psi_k'(\frac{1}{2})}{\psi_k(\frac{1}{2})}-\frac{\varphi_k'(\frac{1}{2})}{\varphi_k(\frac{1}{2})}&=4\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\\
&=4\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\cdots\frac{1}{(2k-1)2k}\right)\\
\frac{\psi_k(\frac{1}{2})^2}{\varphi_k(r)}&=\frac{1}{2^{2k}}\cdot\frac{[(2k-1)(2k-3)\ldots1]^2}{k!},
\end{aligned}\right.$$

also schliesslich

$$27)\quad \left(\frac{\partial y_1}{\partial r}\right)_{r=\frac{1}{2}}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1.3\ldots2k-1}{2.4\ldots2k}\right)^2\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\cdots\frac{1}{(2k-1)2k}\right)x^k,$$

somit

$$28)\left\{\begin{aligned}
y_1&=1+\sum\left(\frac{1.3\ldots2k-1}{2.4\ldots2k}\right)^2x^k,\\
y_2&=y_1\log x+4\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1.3\ldots2k-1}{2.4\ldots2k}\right)^2\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\cdots\frac{1}{(2k-1)2k}\right)x^k.
\end{aligned}\right.$$

Wie nunmehr gezeigt werden soll, kann man die vorstehenden Resultate auf lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung überhaupt ausdehnen, deren Integrale sich überall regulär verhalten. Solche haben bekanntlich die Form:

$$1)\qquad \frac{d^2 y}{d x^2}+\frac{A(x)}{\psi(x)}\frac{d y}{d x}+\frac{B(x)}{\psi(x)^2}y=0,$$

wenn $\psi(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$; $A(x)$, $B(x)$ ganze Functionen beziehentlich des Grades $n-1$ und $2n-2$ sind, wobei $a_1, a_2 \ldots a_n$ die singulären Punkte der Differentialgleichung bezeichnen. Ferner kann man, aus der vorstehenden Differentialgleichung immer solche zugehörige von der Form

$$2)\qquad \frac{d^2 y}{d x^2}+\frac{A_1(x)}{\psi(x)}\frac{d y}{d x}+\frac{B_1(x)}{\psi(x)}y=0$$

herleiten, worin $A_1(x)$ wieder eine Function $n-1^{\text{ten}}$ Grades, $B_1(x)$ eine solche $n-2^{\text{ten}}$ Grades bezeichnet. Diese Form der Gleichung hat bekanntermaassen die besondere Eigenschaft, dass für jeden der im Endlichen befindlichen singulären Punkte eine der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung den Werth Null hat. Wir bringen nun die Gleichung auf die Form

$$3)\quad 0=\frac{d^2 y}{d x^2}+\left(\frac{\gamma_1}{x-a_1}+\frac{\gamma_2}{x-a_2}+\cdots\frac{\gamma_n}{x-a_n}\right)\frac{d y}{d x}+\left(\frac{\delta_1}{x-a_1}+\frac{\delta_2}{x-a_2}+\cdots\frac{\delta_n}{x-a_n}\right)y.$$

Hierbei genügen die Grössen δ_i der Bedingung $\Sigma\delta_i=0$. Eine der singulären Stellen legen wir in den Nullpunkt und schreiben also die Gleichung in der Form

$$4)\quad \frac{d^2 y}{d x^2}+\left(\frac{\gamma}{x}+\frac{\gamma_1}{x-a_1}+\cdots\frac{\gamma_{n-1}}{x-a_{n-1}}\right)\frac{d y}{d x}+\left(\frac{\delta}{x}+\frac{\delta_1}{x-a_1}+\cdots\frac{\delta_{n-1}}{x-a_{n-1}}\right)y=0,$$

oder:

$$5)\quad 0=\frac{d^2 y}{d x^2}+\left(\frac{\gamma}{x}+\frac{\gamma_1}{x-a_1}+\cdots\frac{\gamma_{n-1}}{x-a_{n-1}}\right)\frac{d y}{d x}+\left(\frac{\delta_1}{x(x-a_1)}+\frac{\delta_2}{x(x-a_2)}+\cdots\frac{\delta_{n-1}}{x(x-a_{n-1})}\right)y,$$

wobei wir $\delta_i a_i$ durch δ_i ersetzt haben. Es genügt nun, den singulären Punkt $x=0$ zu betrachten, da wir durch eine Transformation in jedem Falle den singulären Punkt, um den es sich gerade handelt, zum Nullpunkte machen können. Damit für $x=0$ beide Wurzeln der determinirenden Gleichung $=0$ sind, muss $\gamma=1$ sein. Die Gleichung ist alsdann

$$6)\quad 0=y^{(2)}+\left(\frac{1}{x}+\frac{\gamma_1}{x-a_1}+\cdots\frac{\gamma_{n-1}}{x-a_{n-1}}\right)y'+\left(\frac{\delta_1}{x(x-a_1)}+\frac{\delta_2}{x(x-a_2)}+\cdots\frac{\delta_{n-1}}{x(x-a_{n-1})}\right)y.$$

Setzt man $y=y_1 \log x+z$, so hat man für z die Gleichung

$$7)\quad \left\{\begin{aligned} & z^{(2)}+\left(\frac{1}{x}+\frac{\gamma}{x-a_1}+\cdots\frac{\gamma_{n-1}}{x\ a_{n-1}}\right)z'+\left(\frac{\delta_1}{x(x-a_1)}+\frac{\delta_2}{x(x-a_2)}+\cdots\frac{\delta_{n-1}}{x(x-a_{n-1})}\right)z \\ & \quad +\frac{2}{x}y_1'+\frac{y_1}{x}\left(\frac{\gamma_1}{x-a_1}+\frac{\gamma_2}{x-a_2}+\cdots\frac{\gamma_{n-1}}{x-a_{n-1}}\right)=0. \end{aligned}\right.$$

Hierbei bedeutet y_1 die Potenzreihe von x, welche der Differentialgleichung genügt. Es kommt nunmehr darauf an, eine neue, von einem

Parameter λ abhängige Differentialgleichung derart zu bilden, dass die Gleichung, welche dann für $\frac{\partial y_1}{\partial \lambda}$ resultirt, für einen beliebig gewählten Werth von λ_1, am einfachsten $\lambda = 0$, mit 7) übereinstimmt. Dieser Bedingung genügt man durch die Gleichung

$$8) \quad \left\{ \begin{aligned} & y^{(2)} + \left(\frac{1+2\lambda}{x} + \frac{\gamma_1}{x-a_1} + \cdots \frac{\gamma_{n-1}}{x-a_{n-1}} \right) y' \\ & + \left(\frac{\lambda^2 + \lambda\gamma_1 + \delta_1}{x(x-a_1)} + \frac{\lambda^2 + \lambda\gamma_2 + \delta_2}{x(x-a_2)} + \cdots \frac{\lambda^2 + \lambda\gamma_{n-1} + \delta_{n-1}}{x(x-a_{n-1}} \right) y = 0. \end{aligned} \right.$$

In der That, $u = \frac{\partial y_1}{\partial \lambda}$ genügt der Gleichung

$$9) \quad \left\{ \begin{aligned} & u^{(2)} + \left(\frac{1+2\lambda}{x} + \frac{\gamma_1}{x-a_1} + \cdots + \frac{\gamma_{n-1}}{x-a_{n-1}} \right) u' \\ & + \left(\frac{\lambda^2 + \lambda\gamma_1 + \delta_1}{x(x-a_1)} + \frac{\lambda^2 + \lambda\gamma_2 + \delta_2}{x(x-a_2)} + \cdots + \frac{\lambda^2 + \lambda\gamma_{n-1} + \delta_{n-1}}{x(x-a_n)} \right) u \\ & + \frac{2}{x} y_1' + \left(\frac{2\lambda + \gamma_1}{x(x-a_1)} + \frac{2\lambda + \gamma_2}{x(x-a_2)} + \cdots + \frac{2\lambda + \gamma_{n-1}}{x(x-a_{n-1})} \right) y_1 = 0 \end{aligned} \right.$$

und man erkennt, dass für $\lambda = 0$ 9) mit 7) und 8) mit 6) identisch wird. Man kann also unmittelbar $z = \left(\frac{\partial y_1}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0}$ setzen, d. h. man erhält das zweite Integral $y_2 = y_1 \log x + z$ durch einen höchst einfachen Differentiationsprozess aus dem ersten y_1. Wesentlich dabei ist allerdings die Normalform 5), auf welche die Gleichung gebracht werden muss und die sich als naturgemässe Verallgemeinerung der Normalform der Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe — wenigstens für die vorliegende Frage — ergiebt. Für $n = \lambda$, $a_1 = 1$, $\alpha + \beta + 1 - \gamma = \gamma_1$, $\alpha\beta = \delta_1$ wird nämlich 5)

$$10) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\alpha + \beta + 1 - \gamma}{x-1} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha\beta}{x(x-1)} y = 0.$$

Für $x = 0$ hat die determinirende Gleichung eine Doppelwurzel Null, von $\gamma = 1$ dann wird die Gleichung

$$11) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{\alpha + \beta}{x-1} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha\beta}{x(x-1)} y = 0.$$

Die zugehörige Gleichung mit dem Parameter λ ist also

$$12) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1+2\lambda}{x} + \frac{\alpha + \beta}{x-1} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{\lambda^2 + (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta}{x(x-1)} y = 0$$

oder

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1+2\lambda}{x} + \frac{\alpha + \beta}{x-1} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{(\alpha+\lambda)(\beta+\lambda)}{x(x-1)} y = 0.$$

Ist $(\alpha, n) = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$, so ist

$$y_1(x_1\lambda) = 1 + \sum_1^{\infty} k \frac{(\alpha+\lambda_1 k)(\beta+\lambda_1 k)}{k!(1+2\lambda_1 k)} x^k,$$

also

$$z=\left(\frac{\partial y_1}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} = \sum_1^{\infty} k \frac{(\alpha, k)(\beta, k)}{k!\,k!}\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}+\cdots\frac{1}{\alpha+k-1}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta+1}+\cdots\frac{1}{\beta+k-1}-2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{k}\right)\right]x^k.$$

In dem obigen Specialfalle $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, ist r durch $\frac{1}{2}+\lambda$ zu ersetzen, um die dortige Behandlung der allgemeinen conform zu machen.

In dem Coefficient von y in der Gleichung 8) ist übrigens das Glied λ^2 nicht nothwendig; es ist nur darum hier angefügt, weil dann für den Specialfall der Gauss'schen Reihe α, β einfach bei Anwendung der Methode in $\alpha+\lambda$, $\beta+\lambda$ übergehen.

IV.

Ueber eine besondere, mit dem Kegelschnittbüschel in Verbindung stehende Curve.

Von

Benedict Sporer.

Hierzu Tafel I Figur 1—5.

1. Durch irgend vier Punkte p ist ein Büschel von Kegelschnitten $B(C^2)$ bestimmt, welche alle durch die vier Punkte p gehen, und zwar sind die Kegelschnitte C^2 so beschaffen, dass durch jeden Punkt q der Ebene ein einziger Kegelschnitt C^2 geht und jede Gerade G von zwei solchen Kegelschnitten berührt wird. Lassen wir den Punkt q sich auf der Geraden G bewegen und denken wir uns durch jeden dieser Punkte q auf G den dem Büschel angehörigen Kegelschnitt C^2 gelegt, so werden alle möglichen Kegelschnitte des Büschels gebildet werden und zwar wird jeder dieser Kegelschnitte doppelt auftreten, entsprechend den zwei Schnittpunkten, welche er mit G gemein hat. Denken wir uns ferner an jeden dieser Kegelschnitte C^2 in den zwei Punkten q, die er mit G gemein hat, die Tangenten T gezogen, so werden alle diese Tangenten eine bestimmte Curve umhüllen. Um deren Classe zu erhalten, können wir wie folgt verfahren: Durch jeden Punkt q der Geraden G geht nur ein einziger Kegelschnitt C^2 und also auch nur eine einzige Tangente T, die von G verschieden ist. Unter den Kegelschnitten des Büschels sind aber zwei solche, C_0^2, welche G selbst zur Tangente haben und für jeden dieser Kegelschnitte fällt T mit G zusammen. Durch jeden Punkt q auf G gehen also drei Gerade T, von denen jedoch nur eine einzige nicht auf G zu liegen kommt, während mit den zwei anderen dies der Fall ist; oder:

Der Ort der Geraden T ist eine Curve der dritten Classe, T_2^3, welche G zur Doppeltangente hat.

Diese auch weiter unten immer wieder auftretende Curve wollen wir die „Grundcurve des Büschels $B(C^2)$ und der Geraden G" heissen. Da sie von der dritten Classe ist und eine Doppeltangente besitzt, ist sie vom vierten Grade, hat also mit G, ausser ihren Berührungspunkten, keinen weiteren Punkt gemein; zudem hat sie drei Rückkehrpunkte.

2. Es liegt in der Art der Entstehung dieser Curve, dass alle Grundcurven eines Büschels in Bezug auf beliebige Geraden G die sechs Seiten des Vierecks der Grundpunkte berühren. Nehmen wir weiter (Fig. 1) irgend zwei Gerade AB und CD beliebig an, und setzen fest, dass diese Geraden Tangenten einer bestimmten Grundcurve sein sollen, so muss die zu ihr gehörige Gerade G offenbar eine der vier Geraden sein, welche wir erhalten, wenn wir einen der Punkte a oder a_1, in welchen AB von je einem Kegelschnitt des Büschels berührt wird, mit einem der Punkte b oder b_1 verbinden, in denen je ein Kegelschnitt des Büschels die Gerade CD berührt. Zu diesen vier Geraden G werden auch vier verschiedene Grundcurven T_2^3 des Büschels gehören. Dieselben haben acht Tangenten gemein, nämlich die sechs Seiten des Vierecks der vier Grundpunkte des Büschels und die beiden Geraden AB und CD, sie müssen also alle vier noch eine bestimmte neunte Gerade berühren. Diese letztere muss die vier Geraden ab, ab_1, a_1b und a_1b_1 in vier solchen Punkten schneiden, in denen sie selbst von einzelnen Kegelschnitten des Büschels berührt wird. Da es nur zwei solcher Kegelschnitte giebt, müssen diese vier Punkte paarweise zusammenfallen, d. h. die neunte gemeinsame Tangente der vier Curven T_2^3 kann keine andere sein, als die Verbindungslinie xx_1 der Schnittpunkte von ab_1 mit a_1b und ab mit a_1b_1.

Ist umgekehrt die Gerade G gegeben, so können wir zu einem Punkte a auf G die durch ihn gehende Tangente aa_1 der zugehörigen Curve bestimmen; etwa durch den Pascal'schen Satz über das, einem Kegelschnitte einbeschriebene Sechseck. Der Punkt a_1, in dem die Gerade aa_1 von einem zweiten Kegelschnitte des Büschels berührt wird, ergiebt sich dann aus dem Umstande, dass a und a_1 als Doppelpunkte einer Involution von jedem Kegelschnitte des Büschels, also auch von jedem der drei zerfallenden harmonisch getrennt werden. Ist auf gleiche Art eine zweite Tangente bb_1 der Grundcurve bestimmt, und wird dieselbe in b und b_1 von je einem Kegelschnitte des Büschels berührt, so schneiden sich die Geraden a_1b und ab_1, sowie $(G=)$ ab und a_1b_1 in zwei Punkten x_1 und x so, dass xx_1 auch in x und x_1 von je einem Kegelschnitte des Büschels berührt wird und dass xx_1 allemal auch eine dritte Tangente derselben Grundcurve ist. Bezeichnen wir den Punkt a_1 als den dem Punkte a conjugirten und also b_1 als den dem Punkte b conjugirten, so ist auch x_1 dem Punkte x zugeordnet oder conjugirt.

3. Haben wir auf irgend eine Art drei von einander unabhängige Geraden aa_1, bb_1 und cc_1 bestimmt, die Tangenten der Grundcurve T_2^3 sind, so giebt die Combination des ersten und zweiten Punktepaares a, a_1 und b, b_1 eine vierte Tangente dd_1; die Verbindung dieser mit cc_1 eine fünfte ee_1, letztere etwa mit aa_1 combinirt eine sechste ff_1 und so fort. Ueberhaupt können wir daraus die Curve T_2^3 vollständig construiren und haben dabei nur zu beachten, dass wir immer zwei solche Paare von Punkten verbinden, von denen kein drittes bereits abhängt.

Anstatt dass wir von beliebigen Geraden aa_1, bb_1 und cc_1 ausgehen, können wir weiter auch drei Geraden wählen, welche den zerfallenden Kegelschnitten des Büschels angehören. Die Berührungspunkte a_1, b_1, c_1 dieser Geraden theilen mit der Geraden G die auf ihnen liegenden Grundpunkte des Büschels harmonisch (als Doppelpunkte einer Involution).

4. Bevor wir in der Untersuchung der Grundcurve und ihrer Eigenschaften weiter gehen, wollen wir eine andere Frage erledigen. Auf jeder Tangente der Grundcurve liegen, wie wir sahen, zwei Punkte a und a_1. Alle Punkte a sind auf der Geraden G gelegen; die ihnen zugeordneten Punkte a_1 werden dagegen auf irgend einer bestimmten Curve gelegen sein und es fragt sich nun: welche Curve ist dies und welche Eigenschaften besitzt sie in Bezug auf das Büschel und die dabei auftretenden Curven?

Es sei irgend eine zweite Gerade H gezogen und zu derselben die zu ihr und dem Büschel gehörige Grundcurve H_2^3 bestimmt. Diese letztere hat mit der Grundcurve der Geraden G, also mit T_2^3, neun Tangenten gemein. Diese setzen sich zusammen aus

α) den sechs Seiten des Vierecks der Grundpunkte,

β) einer gemeinsamen Tangente durch den Schnittpunkt von G und H, und aus

γ) zwei weiteren Tangenten aa_1 und bb_1, welche auf der Geraden H zwei solche Punkte bestimmen, die mit den Schnitten dieser Tangenten mit G conjugirte Punktepaare aa_1, bb_1 bilden. Auf jeder Geraden H liegen also zwei Punkte, die Punkten von G conjugirt sind; oder:

Der Ort der den Punkten a auf G zugeordneten Punkte a_1 ist ein Kegelschnitt, G^2, den wir den, der Geraden G in Bezug auf das Büschel conjugirten Kegelschnitt heissen wollen.*

5. Die weiteren Untersuchungen, die sich an die Grundcurve anschliessen, wollen wir auf den besondern Fall beschränken, wo die zur Grundcurve gehörige Gerade G die unendlich ferne Gerade, G_∞, der Ebene ist. Die Eigenschaften der Grundcurve einer beliebigen Geraden ergeben sich dann durch Projection in einfacher Weise.

Die obigen Resultate gehen jetzt über in folgende Sätze:

Die Asymptoten aller Kegelschnitte eines Büschels umhüllen eine Curve dritter Classe, T_2^3, welche die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente hat, nämlich die Grundcurve des Büschels und der unendlich fernen Geraden. (563.)**

---

* Vergl. Schröter, Theorie der Kegelschnitte gest. auf proj. Eigenschaften, Seite 301, und Durège, Curven dritter Ordnung, Seite 122.

** Die in Klammern beigefügten Zahlen verweisen auf Steiner's ges. Werke Bd. 2, und sind dort Seitenzahlen.

Und:

Der der unendlich fernen Geraden G_∞ conjugirte Kegelschnitt G^2 geht durch die Halbirungspunkte der sechs Seiten des Vierecks der Grundpunkte des Büschels Kegelschnitte und ist somit der Ort der Mittelpunkte dieser Kegelschnitte, und allgemein ist der conjugirte Kegelschnitt irgend einer Geraden in Bezug auf ein Büschel von Kegelschnitten der Ort des Pols der Geraden in Bezug auf jeden einzelnen Kegelschnitt des Büschels.

Alle Kegelschnitte des Büschels bestimmen auf einer Geraden eine involutorische Punktreihe; ist die Gerade Asymptote eines einzelnen Kegelschnittes des Büschels, so ist einer der Doppelpunkte der Involution unendlich ferne gelegen und die Kegelschnitte bestimmen auf dieser Asymptote je zwei Punkte q, so dass die von ihnen begrenzte Strecke eine feste Mitte hat. Wir können daher die obige Curve auch als geometrischen Ort derjenigen Transversale zweier Kegelschnitte des Büschels ansehen, welche mit denselben zwei Sehnen gemein hat, welche dieselbe Mitte haben, oder:

Bestimmt eine Gerade S_2 mit zwei Kegelschnitten solche Sehnen ab und cd, dass dieselben die gleiche Mitte P haben, so ist der Ort der Mitte P der, der unendlich fernen Geraden G_∞ zugeordnete Kegelschnitt G^2 und der Ort der Sehne S_2 ist die Grundcurve der Geraden G_∞ und des Büschels, das durch die beiden Kegelschnitte bestimmt ist. (549.)

Dieser letztere Satz gestattet auch eine einfache Construction des Berührungspunktes jeder Asymptote S_2 mit ihrem Orte. Zunächst können wir jeden der beiden Kegelschnitte durch deren Asymptoten ersetzen, indem auch diese auf der Transversale Abschnitte bestimmen, welche dieselbe Mitte P haben, oder wir können an Stelle des Kegelschnittbüschels selbst ein anderes setzen, indem wir die Asymptotenpaare irgend zweier Kegelschnitte desselben als zerfallende Kegelschnitte eines neuen Büschels ansehen.

Dieses letztere Büschel hat dann dieselbe Grundcurve T_2^3 und denselben conjugirten Kegelschnitt G^2 in Bezug auf die Gerade G_∞. Durch zwei Asymptotenpaare ist aber noch ein drittes solches Paar bestimmt, nämlich dasjenige, welches mit den ersten zwei Paaren ein vollständiges Viereck derart bildet, dass jedes Paar aus zwei Gegenseiten derselben besteht, oder aber das der dritte zerfallende Kegelschnitt des Büschels ist. Jeder Kegelschnitt des letzteren bestimmt weiter auf jeder Geraden, also auch auf jeder Asymptote A selbst eine Involution. Ebenso bilden alle Asymptotenpaare dieser Kegelschnitte auf einer beliebigen Asymptote A eine Involution, von welcher ein Doppelpunkt auf G_∞ gelegen ist, d. h. sie bestimmen auf der beliebig gewählten festen Asymptote A lauter Abschnitte mit derselben Mitte P. Dies thun namentlich auch die Asymptoten eines Kegelschnittes C^2, die aus A und der ihr zugehörigen Asymptote bestehen, d. h. wir können schliessen:

Der Berührungspunkt einer Asymptote mit ihrer Ortscurve T_2^3 ist so gelegen, dass der conjugirte Punkt P gerade die Mitte zwischen ihm und dem anderen Schnitte der Geraden mit dem Kegelschnitte G^2 ist.

Und allgemeiner:

Der Berührungspunkt der Tangente der Grundcurve T_2^3 einer Geraden G und der zweite Schnitt derselben mit dem conjugirten Kegelschnitte G^2 trennen die Punkte a und a_1, in denen die Tangente von einzelnen Kegelschnitten des Büschels berührt wird, harmonisch.

6. Die von uns gegebene Definition des conjugirten Kegelschnittes gestattet noch eine weitere Entstehungsart der Grundcurve; wir haben nämlich sofort:

Ziehen wir in jedem Punkte des Kegelschnittes G^2 an den durch den Punkt gehenden Kegelschnitt C^2 des Büschels eine Tangente, so ist der Ort dieser Tangente eben die obige Grundcurve T_2^3. (550.)

Die Grundcurve T_2^3 hat mit dem Kegelschnitte G^2 sechs Tangenten gemein; es giebt somit unter allen Kegelschnitten des Büschels auch allemal sechs solche, welche den Kegelschnitt G^2 berühren (ausser den drei zerfallenden Kegelschnitten desselben).

Aus der oben angegebenen Construction des Berührungspunktes einer Tangente der T_2^3 folgt aber, dass für diesen Fall die Curven T_2^3 und G^2 sich selbst berühren, oder mit anderen Worten, dass diese sechs Tangenten und also auch diese sechs Kegelschnitte zu je zwei vereinigt sind, oder:

Unter den Kegelschnitten des Büschels giebt es insbesondere auch drei solche, nicht zerfallende, welche die Curve G^2 in x, resp. y, z berühren; in denselben Punkten x, y, z wird die Curve G^2 auch von der Grundcurve selbst berührt.

7. Um zu weiteren Eigenschaften zu gelangen, wollen wir die noch speciellere Annahme machen, das Büschel der Kegelschnitte sei aus lauter gleichseitigen Hyperbeln zusammengesetzt, oder die Grundpunkte haben die besondere Eigenschaft, dass jeder derselben Höhenschnitt des Dreiecks der übrigen ist. Alle Kegelschnitte C^2 des Büschels $B(C^2)$ sind dann nothwendig gleichseitige Hyperbeln. Ziehen wir nämlich durch einen Punkt parallele Geraden mit den Asymptoten der Kegelschnitte, so bilden diese Geradenpaare ein involutorisches Büschel, das mit der von den Curven C^2 auf G_∞ bestimmten involutorischen Punktreihe perspectivisch ist. Da die drei zerfallenden Kegelschnitte aus zu einander senkrechten Geradenpaaren

bestehen, so giebt es unter obigem involutorischen Büschel drei Paare zu einander senkrechter Geraden, also stehen überhaupt je zwei einander zugeordnete Gerade senkrecht auf einander, oder alle Kegelschnitte C^2 haben zu einander senkrechte Asymptoten, sind also gleichseitige Hyperbeln.

Um die Grundcurve der Geraden G_∞ zu erhalten, haben wir nur diejenigen Geraden zu bestimmen, auf welchen die zerfallenden Kegelschnitte des Büschels Abschnitte ausschneiden, welche alle die gleiche Mitte q haben.

Von dieser Mitte q wissen wir aber, dass sie auf dem Kegelschnitte G^2 liegt, welcher zu G_∞ conjugirt ist. Dieser Kegelschnitt G^2 ist aber hier der Feuerbach'sche Kreis der vier Dreiecke, die aus je drei der Grundpunkte gebildet werden können. Sind p_1, p_2, p_3, p_4 diese letzteren (Fig. 2), so können wir auf dem Feuerbach'schen Kreise die Mitte q beliebig wählen; ziehen wir dann qp_4 und verlängern qp_4 über q hinaus um sich selbst, nach r, fällen von r auf $p_1 p_2$ das Loth rs, so ist sq eine Asymptote eines Kegelschnitts des Büschels.* Um diese Asymptote zu erhalten, hätten wir ebenso von r ein Loth auf $p_1 p_3$ oder $p_2 p_3$ fällen und einen der Fusspunkte u oder v dieser Lothe mit q verbinden können. Der Punkt r hat also die Eigenschaft, dass die Fusspunkte der Lothe von ihm auf die Seiten des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$ in einer Geraden liegen, d. h. r liegt auf dem Umkreis des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$. Dies giebt den Satz:

Fällt man aus jedem Punkte in der einem Dreieck umschriebenen Kreislinie auf die Seiten Perpendikel, so liegen die drei Fusspunkte allemal in einer Geraden G, und die Enveloppe aller dieser Geraden G ist eine Curve dritter Klasse und vierten Grades, T_2^3, welche die im Unendlichen gelegene Gerade zur isolirten Doppeltangente hat. (641.)

Und weiter:

Die Curve berührt namentlich auch die Seiten und Höhen des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$. (641.)

8. Sind ein Kreis und ein rechter Winkel $p_2 b p_3$, dessen Scheitel b auf dem Kreise liegt (Fig. 2), gegeben und ziehen wir durch irgend einen Punkt q des Kreises eine Gerade st so, dass das zwischen die Schenkel des rechten Winkels fallende Stück st in q halbirt ist, so wird allemal $qs = qt = qb$, also auch $\sphericalangle\, tqb = 2 \sphericalangle\, qbs$. Wir schliessen daraus, dass auch die obige Grundcurve T_2^3 erhalten wird, wenn wir auf einem Kreise zwei feste Punkte b und h annehmen und von diesen aus zwei Punkte q und g in entgegengesetzter Richtung sich bewegen lassen und zwar den einen g mit der doppelten

* Der Beweis dieser Construction beruht darauf, dass $\Delta\, srq \propto \Delta\, qp_4 t$, also $qs = qt$ ist. Eine andere Construction ergiebt sich aus dem Umstande, dass $qs = qb = qt$ ist.

Geschwindigkeit des anderen q; die Gerade gq wird dann die obige Grundcurve umhüllen. (646.)

Und:

Wird von den über den Seiten des Dreiecks liegenden Bogen des Kreises G^2, von den Mitten der Seiten aus mittelst der Punkte x, y, z je ein Drittel abgeschnitten, so theilen diese die ganze Kreislinie in drei gleiche Theile, oder diese drei Punkte bilden ein gleichseitiges Dreieck. Die Grundcurve hat nun die besondere Eigenschaft, dass sie den Kreis G^2 in diesen Punkten x, y, z berührt (643), indem für diese Punkte die Gerade gq zur Tangente des Kreises und zur Tangente der Grundcurve wird, und nach 6. die beiden Curven auf der Tangente denselben Berührungspunkt haben. (642.)

9. Es sind weiter nur Folgerungen aus oben bereits allgemeiner ausgesprochenen Sätzen, wenn wir sagen:

Die Geraden G sind paarweise senkrecht auf einander, und jedes solche Paar von Geraden G sind Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel, die durch die Ecken und den Höhenschnitt des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$ geht und der Ort des Scheitels dieser Geradenpaare ist der Feuerbach'sche Kreis des Dreiecks. Der Curve lassen sich ferner unendlich viele solche Dreiecke umschreiben, deren Seiten und Höhen alle die Grundcurve T_2^3 berühren, jede zwei Paare senkrechter Geraden G bestimmen nämlich ein solches Dreieck, indem dadurch allemal ein drittes Paar Asymptoten bestimmt ist. Die Fusspunkte der Höhen aller dieser Dreiecke liegen auf einem Kreise. (642.)

Schneidet G den Kreis G^2 ausser in q noch in g, so ist q auch die Mitte des Stücks der Asymptote zwischen g und ihrem Berührungspunkte m mit T_2^3. Bedenken wir, dass die in g errichtete Senkrechte auf gq die zu gq gehörige zweite Asymptote ist, also mit gq zusammen ein Paar G und G_1 von Asymptoten bildet, und dass diese auf dem Kreise einen weiteren Punkt q_1 bestimmt, sodass qq_1 Durchmesser von G^2 wird, so folgt für die Verbindungslinie der Berührungspunkte m und m_1 eines Paares von Geraden G und G_1 mit T_2^3:

Die Verbindungslinie der Berührungspunkte m und m_1 eines Paares senkrechter Geraden G und G_1 ist von constanter Länge, nämlich gleich dem doppelten Durchmesser des Kreises G^2. (642.)

Ausserdem haben wir gesehen, dass irgend zwei Paare von Asymptoten, also hier von senkrechter Geraden G, ein der Curve umschriebenes vollständiges Viereck bestimmen, indem jedes Paar zusammengehöriger Asymptoten ein Paar Gegenseiten ist. Lassen wir zwei Paare senkrechter Geraden G zusammenfallen, so folgt daraus:

Die Gerade $m m_1$ ist selbst Tangente der Ortscurve, und die Grundcurve schneidet also auf jeder ihrer Tangenten ein Stück von constanter Länge ab und die zu mm_1 conjugirte Gerade G geht durch den Punkt g. (642.)

Errichten wir in den Punkten m und m_1 Normalen auf der Curve T_2^3, so schneiden sich diese in einem Punkte l auf go, sodass $lo = 3og$, wobei o der Mittelpunkt von G^2 ist. Der Punkt l liegt demnach auf einem Kreise, der mit G^2 den Mittelpunkt gemein und den dreifachen Halbmesser desselben hat. Da mm_1, wie wir sahen, ebenfalls Tangente des Ortes ist, so folgt daraus:

Errichten wir in den zwei Schnitten m und m_1 einer Tangente mit ihrem Orte T_2^3 Normalen, so schneiden sich diese in einem Punkte l, der auf einem Kreise liegt, dessen Halbmesser dreimal so gross ist, als der von G^2 und der mit G^2 den Mittelpunkt gemein hat. (642 und 643.)

Weiter zeigt sich, dass auch das im Berührungspunkte der Geraden G selbst errichtete Loth durch diesen Punkt l geht. (643.)

10. Wir sahen oben, dass die Curve T_2^3 den conjugirten Kreis G^2 in den Punkten x, y, z berührt. Halten wir einen dieser Punkte fest, so geht durch denselben eine Gerade G senkrecht zur gemeinsamen Tangente von T_2^3 und G^2 in diesem Punkte. Da für diese Senkrechte die Lothe im Berührungspunkte und in den weiteren Schnittpunkten auf der Curve T_2^3 sich in einem Punkte l treffen müssen und eines dieser Lothe auf sie selbst zu liegen kommt, nämlich das im Punkte x auf T_2^3 errichtete, so muss l selbst auf diese Senkrechte zu liegen kommen. Dies ist nur dadurch ermöglicht, dass die weiteren Punkte, die sie ausser x mit der Ortscurve T_2^3 gemein hat, zusammenfallen, oder dass diese Gerade G zur Rückkehrtangente wird; oder:

Errichten wir in den Punkten x, y, z auf der Curve T_2^3 Normalen, so sind diese Rückkehrtangenten des Ortes. Dieselben gehen durch den Mittelpunkt o des Kreises G^2. (643.)

Aus dem Umstande, dass die drei Rückkehrtangenten und ihre zugeordneten Geraden, die Seiten und Höhen eines gleichseitigen Dreiecks bilden, folgt weiter, dass die Rückkehrtangenten Symmetrie-Achsen der Curve sind, und die Punkte x, y, z zu Scheiteln derselben werden. Die Rückkehrtangenten sind zudem Normalen der Curve und ihre Länge ist gleich dem vierfachen Halbmesser des Kreises G^2. (643.)

11. Wir fanden, dass der Grundcurve unendlich viele Vierecke umschrieben werden können, deren Seiten die Seiten und Höhen eines Dreiecks sind. Ziehen wir in einem solchen Dreieck $p_1 p_2 p_3$ durch p_2 die Gerade $p_2 f$ parallel $p_3 p_4$ und durch p_3 die Gerade $p_3 f$ parallel $p_2 p_4$, so schneiden sich diese in einem Punkte f auf dem Umkreise des Dreiecks

$p_1 p_2 p_3$ (Fig. 2), und zwar ist $p_1 f$ allemal Durchmesser dieses Kreises. Bezeichnen wir somit den Kreishalbmesser mit r, so ist:

$$p_1 p_2{}^2 + p_3 p_4{}^2 = p_1 p_2{}^2 + p_2 f^2 = 4 r^2 = const.,$$

oder:

In jedem Viereck, das der Grundcurve umschrieben ist, ist die Summe der Quadrate zweier Gegenseiten constant, nämlich gleich dem vierfachen Quadrat des Halbmessers des Umkreises des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$ oder gleich dem 16fachen Quadrat des Halbmessers des Kreises G^2. (643.)

12. Durch irgend ein solches Viereck ist ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln gegeben, die je zwei Gerade G zu Asymptoten haben. Umgekehrt bestimmen auch zwei gleichseitige Hyperbeln ein solches Viereck und irgend zwei dieser Vierecke liegen auf einer solchen. Sollen irgend zwei dieser Hyperbeln einander berühren, so muss das Viereck zum rechtwinkeligen Dreieck werden, und zwar müssen zwei Ecken im Scheitel des rechten Winkels vereinigt sein. Die zu dem Viereck gehörigen Paare zerfallenden drei Hyperbeln bestehen aus einem Geradenpaare G zweifach zählend und der Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte und der zu dieser letzten Geraden senkrechte Gerade G. Wir schliessen daraus, dass der Kreis G^2 auch der Ort der Punkte ist, in denen sich einzelne Hyperbeln der verschiedenen Büschel berühren, oder:

Sind in einer Ebene zwei rechte Winkel gegeben und sollen zwei Hyperbeln dieselben zu Asymptoten haben und sich zudem berühren, so ist der Ort des Berührungspunktes ein bestimmter Kreis, der durch die Scheitel der rechten Winkel und die Mitten der Abschnitte geht, welche die Schenkel eines rechten Winkels auf dem anderen bestimmen. (645.)

13. Es sei ein Kreis G^2 und in diesem eine beliebige Sehne $a_1 b$ angenommen, so können wir sie als Tangente eines Ortes $T_2{}^3$ ansehen und a_1 als deren Mitte. Das Loth von b auf den Durchmesser nach a_1 giebt dann eine zweite Gerade G und zwar diejenige, welche zur Verbindungslinie der Berührungspunkte von $a_1 b$ und der ihr conjugirten Geraden G senkrecht ist. Von dieser zweiten Geraden kann man eine dritte construiren und so fort; d. h. wir finden:

In einem Kreise G^2 ziehe man eine fortlaufende Reihe von Sehnen unter folgender Bedingung: Aus dem Anfangspunkte s ziehe man die erste Sehne ss_1 beliebig; sodann aus s_1 die zweite Sehne $s_1 s_2$ senkrecht auf den durch s gehenden Durchmesser; ferner aus s_2 die dritte Sehne $s_2 s_3$ senkrecht zu dem durch s_1 gehenden Durchmesser und so durch jeden neuen Punkt diejenige Sehne, welche zu dem durch den vorherigen Punkt gezogenen Durchmesser senkrecht ist, so entsteht — wenn nicht zufällig der über der ersten Sehne liegende Bogen mit dem Kreisumfange commensurabel ist — eine unbegrenzte Reihe von Sehnen, welche sämmtlich eine der obigen gleiche Curve T_2^3 berühren. (645.)

14. Wir haben ferner oben folgende Construction der Geraden G gegeben:

Auf einem Kreisbogen sind zwei feste Punkte $a_1 b$ und zwei bewegliche Punkte x und y so bestimmt, dass $a_1 x = \frac{1}{2} yb$ ist; xy ist dann zur Geraden G geworden. Daraus folgt, wenn wir durch y eine Parallele mit $a_1 b$ ziehen, dass xy den Winkel $a_1 yz$ halbirt, oder:

Wählen wir auf einem Kreise einen festen Punkt a_1 und verbinden diesen mit einem zweiten beliebigen Punkte y des Kreises, ziehen durch y eine Parallele yz zu einer festen Geraden, so sind die Halbirungslinien des Winkels $a_1 yz$ und seines Nebenwinkels zwei Geraden, deren Ort eine der obigen Curven T_2^3 ist. (645.)

15. Nachdem wir die wichtigsten Resultate dieser besonderen Grundcurve T_2^3, soweit sie Steiner in seiner Abhandlung: „Ueber eine besondere Curve dritter Classe (und vierten Grades)" * gab, bewiesen haben — die anderen von Steiner angeführten Eigenschaften sind nur sehr einfache Folgerungen aus diesen Sätzen — wollen wir zu der allgemeineren Grundcurve T_2^3 zurückkehren und für dieselbe noch eine weitere Construction geben, wobei sich zeigen wird, dass eine beinahe unerschöpfliche Anzahl von projectivischen Eigenschaften derselben sich auf höchst einfachem Wege ergiebt.

x_1, x_2, x_3 seien die Ecken irgend eines Dreiecks und ein Kegelschnitt y_1^2 sei derart beschrieben, dass er die Seiten $x_1 x_2$ und $x_1 x_3$ in den Ecken x_2 und x_3 berührt. Irgend einem Punkte P sei ferner ein Punkt P_1 so zugeordnet, sodass allemal PP_1 durch x_1 geht und P und P_1 durch y_1^2 harmonisch getrennt werden.** Aus dieser Feststellung folgt, dass jedem Kegelschnitt y_2^2, der durch x_1 und x_3 geht und $x_2 x_1$, $x_2 x_3$ berührt, als Bild ein Kegelschnitt y_3^2 entspricht, der durch x_1 und x_2 geht und $x_3 x_1$, $x_3 x_2$ berührt. Ausserdem schneiden sich diese drei Kegelschnitte allemal in einem Punkte P (Fig. 3). Es ist nun eine einfache Folgerung aus dieser Abbildung, wenn wir den folgenden Satz aussprechen:

Durch die Ecken x_1, x_2, x_3 gehen die Seiten unendlich vieler solcher Dreiecke $A_1 A_2 A_3$, deren Ecken entsprechend

* Steiner's ges. Werke Bd. 2, Seite 639 — 647 oder Borchardt's Journal Bd. 53, Seite 231 — 237.

** Vergleiche des Verfassers Arbeit: Eine besondere Transformation und damit in Verbindung stehende Sätze J. Steiner's in Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Physik Bd. 36, Seite 339 — 348.

auf den Kegelschnitten y_1^2, y_2^2, y_3^2 gelegen sind; nämlich jeder Punkt A_1 auf y_1^2 ist die Ecke eines solchen Dreiecks und die Seiten jeden solchen Dreiecks bestimmen auf den Kegelschnitten y^2 wieder drei Punkte, die Ecken eines zweiten solchen Dreiecks sind.*

Beschreiben wir weiter in dem Dreieck $x_1 x_2 x_3$ denjenigen Kegelschnitt K^2, der die Seiten des Dreiecks $x_1 x_2 x_3$ in den Schnittpunkten mit den Geraden Px_1, Px_2, Px_3 berührt (Fig. 4), so erhalten wir durch die obige Abbildung als Bild dieses Kegelschnittes eine Curve dritter Classe und vierten Grades, welche die Geraden Px_1, Px_2, Px_3 zu Rückkehrstangenten hat. Hierbei tritt noch die besondere Eigenthümlichkeit auf, dass dieselbe Curve als Bild von K^2 entsteht, wenn wir die Punkte x_1, x_2, x_3 vertauschen, d. h. bei der Abbildung anstatt von dem Punkte x_1 und dem Kegelschnitte y_1^2 von einem der anderen Punkte x und dem zugehörigen Kegelschnitte y^2 ausgehen. Weiter können wir jede Curve vierten Grades und dritter Classe mit drei Rückkehrpunkten aus einem solchen besonders gelegenen Kegelschnitte K^2 hervorgehen lassen. Zunächst nämlich ist das Bild jeder Curve vierten Grades, welche die Punkte x_1, x_2, x_3 zu Rückkehrpunkten hat, ein Kegelschnitt, der die Seiten des Dreiecks $x_1 x_2 x_3$ berührt. Wählen wir den Kegelschnitt y_1^2 überdies so, dass er durch den Schnittpunkt P der Rückkehrtangenten in x_2 und x_3 geht, so muss K^2 die Seiten $x_1 x_2$ und $x_1 x_3$ in deren Schnittpunkten mit Px_3 und Px_2 berühren, wodurch bestimmt ist, dass auch der dritte Berührungspunkt dieses Kegelschnittes K^2 mit der dritten Seite $x_2 x_3$ mit den Punkten x_1 und P auf einer Geraden liegt, und dass diese nothwendig die dritte Rückkehrtangente der Curve dritter Classe ist.**

Halten wir irgend einen der Punkte, etwa x_1 und den zugehörigen Kegelschnitt y_1^2, fest, so sehen wir, dass auf jedem Strahl durch x_1 solche Punkte von K^2 und seinem Bilde T_2^3 gelegen sind, die durch y_1^2 harmonisch getrennt sind; es folgt daraus insbesondere, dass T_2^3 auch durch die Punkte A_1, B_1 geht, die y_1^2 mit K^2 gemein hat. Auf ganz gleiche Art folgt, wenn wir von einem anderen Punkte x ausgehen, dass T_2^3 auch durch die Punkte A_2, B_2 und A_3, B_3 geht, die K^2 mit y_2^2 und y_3^2 gemein hat. Da aber weiter der Kegelschnitt y_3^2 in Bezug auf x_1 und y_1^2 das Bild von y_2^2 ist, so muss A_1 und A_2 und ebenso B_1 und B_2 auf einer Geraden durch x_1 gelegen sein. Da betreffs der Punkte x_2 und x_3 analoge Eigenschaften auftreten, so gilt somit der Satz:

* Sind die Kegelschnitte vollständig gezeichnet, so lässt sich dieser Satz insofern anders fassen, als durch ein Dreieck nicht nur ein zweites dieser Dreiecke bestimmt ist, sondern mehrere.

** Es ist hiermit zugleich ein einfacher geometrischer Beweis des Satzes gegeben: Die Rückkehrtangenten einer Curve vierten Grades und dritter Classe schneiden sich in einem Punkte.

Der Kegelschnitt K^2 schneidet die Kegelschnitte y_1^2, y_2^2, y_3^2 allemal in drei solchen Punktepaaren $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, die Ecken von zwei solchen Dreiecken $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ sind, deren Seiten durch die Pole x_1, x_2, x_3 gehen.

Und:

Einer Curve dritter Classe und vierten Grades T_2^3 lassen sich allemal zwei Dreiecke einbeschreiben — deren Ecken also auf der Curve gelegen sind — und deren Seiten durch die Rückkehrpunkte derselben gehen. Die sechs Ecken dieser beiden Dreiecke liegen allemal auf einem Kegelschnitte K^2 und dieser Kegelschnitt K^2 berührt die Seiten des Dreiecks der Rückkehrpunkte in den Punkten, in welchen sie von den Rückkehrtangenten geschnitten werden.

Projiciren wir das Dreieck $x_1 x_2 x_3$ auf eine Ebene derart, dass die Projection von P der Schwerpunkt der Projection des Dreiecks $x_1 x_2 x_3$ wird, so sind in dieser neuen Ebene die Kegelschnitte y_1^2, y_2^2, y_3^2 und K^2 oder vielmehr deren Projectionen ähnlich und ähnlich gelegen, haben somit auf der Geraden G_∞ in dieser Ebene zwei Punkte gemein. Legen wir durch diese und die Projectionen der Punkte x einen weiteren Kegelschnitt K_1^2, so steht dieser mit der Projection von K^2 in doppelter Berührung, indem er mit K^2 concentrisch ist. Die Verbindungslinie der gemeinsamen Punkte dieser Kegelschnitte, G_∞, ist aber nichts Anderes, als das Bild von K_1^2. Da dieser K^2 doppelt berührt, so ist somit G_∞ Doppeltangente. Kehren wir zu unserer eigentlichen Figur zurück, so folgt daraus:

Die drei Kegelschnitte y_1^2, y_2^2, y_3^2, sowie der Kegelschnitt K^2 gehen durch die Berührungspunkte von T_2^3 mit ihrer Doppeltangente. Die letztere bestimmt überdies mit den Rückkehrtangenten selbst auf den Seiten des Dreiecks $x_1 x_2 x_3$ Punktepaare, die durch die Ecken des Dreiecks harmonisch getrennt sind.

Wie wir bereits oben erwähnten, gestattet diese Entstehung der Grundcurve T_2^3 eine beinahe unerschöpfliche Anzahl von projectivischen Eigenschaften dieser Curve abzuleiten. Wir wollen uns jedoch darauf beschränken, einige derselben hier anzugeben und überlassen es dem Leser, die Beweise, die keine Schwierigkeit bieten, sich selbst zu liefern. Es sind dies folgende:

a) Die Geraden xP bestimmen auf den Seiten des Dreiecks $x_1 x_2 x_3$ noch drei Punkte C_1, C_2, C_3 und auf dem Kegelschnitt K^2 noch drei Punkte D_1, D_2, D_3. Den Dreiecken $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ ist ein Kegelschnitt einbeschrieben, der die Seiten der Dreiecke $C_1 C_2 C_3$ und $D_1 D_2 D_3$ ebenfalls berührt und der in den Berührungspunkten der Doppeltangente mit T_2^3 den Kegelschnitt K^2 doppelt berührt.

b) Die Seiten des Dreiecks $C_1 C_2 C_3$ bestimmen auf den Seiten der Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ sechs solche Punkte J eines Kegelschnittes z^2, die paarweise auf den Kegelschnitten y^2 gelegen sind und welche Ecken von zwei solchen Dreiecken sind, deren Seiten durch die Punkte x_1, x_2, x_3 gehen.

c) Der Kegelschnitt z^2 und mit ihm jeder Kegelschnitt, der K^2 in den Berührungspunkten der Doppeltangente doppelt berührt und zu denen auch namentlich der der Grundcurve conjugirte Kegelschnitt G^2 gehört, bestimmen auf den Kegelschnitten y^2 ebenfalls sechs solche Punkte, die Ecken zweier Dreiecke sind, deren Seiten durch die Punkte x gehen.*

d) Die Geraden $x_2 D_3$, $x_3 D_1$, $x_1 D_2$ bestimmen ein Dreieck $H_1 H_2 H_3$, dessen Ecken ebenfalls auf den Kegelschnitten y^2 gelegen sind. Es giebt zwei solche Dreiecke, und die Seiten derselben schneiden sich auf den Rückkehrtangenten xP. Die Gerade $x_3 D_2$ und die Gerade, welche D_1 mit dem Schnittpunkte E_3 von $C_1 C_2$ mit $x_3 P$ verbindet, schneiden sich zudem auf K^2. (U. s. w.)

e) Die Geraden $A_1 x_1$, $A_2 x_2$, $A_3 x_3$ und ebenso $B_1 x_1$, $B_2 x_2$, $B_3 x_3$ bestimmen ebenso zwei Dreiecke, deren Ecken auf den Kegelschnitten y^2 gelegen sind.

* Diesen hier auftretenden Kegelschnitten sind allemal solche Dreiecke einbeschrieben, deren Seiten durch die drei Punkte x gehen. Anknüpfend an diesen Umstand, möge es uns gestattet sein, eine Lösung des Problems von Castillon zu geben. Es sei irgend ein Kegelschnitt C^2 und $(n-1)$ Punkte X_1, $X_2 \ldots X_{n-1}$ gegeben. Auf C^2 (Fig. 5) nehmen wir einen Punkt A_1 beliebig an; die durch X_1 gehende Sehne bestimmt dann auf C^2 einen Punkt A_2, $A_2 X_2$ einen Punkt A_3, $A_3 X_3$ wieder einen Punkt A_4 und so fort, bis wir zuletzt einen Punkt A_n erhalten. Ebenso wählen wir einen beliebigen Punkt B_1 und erhalten in ganz gleicher Weise einen Punkt B_n. Halten wir den Punkt A_1 und damit auch den Punkt A_n fest und lassen dagegen den Punkt B den Kegelschnitt C^2 durchlaufen, so beschreiben die Punkte P auf dem Kegelschnitte projectivische Punktreihen und also auch die Strahlen $A_n B_1$ und $A_1 B_n$ projectivische Büschel. Diese letzteren sind aber zugleich perspectivisch, indem $A_1 A_n$ sich selbst entspricht. Wir schliessen daraus, dass der Ort des Schnittpunktes von $A_1 B_n$ und $A_n B_1$ eine Gerade ist. Hat letztere mit C^2 einen Punkt S gemein, so muss für diesen Punkt der Punkt B_n wieder in den Punkt B_1 fallen, oder der Punkt S ist Ecke eines $(n-1)$ Eck, dessen Seiten durch $(n-1)$ feste Punkte X gehen und das C^2 einbeschrieben ist.

Wir finden aber daraus weiter, dass die Ortsgerade von der Anfangslage des Punktes A_1 unabhängig ist, also dieselbe bleibt, wir mögen A_1 auf C^2 wählen, wo wir wollen, oder:

Schneiden sich die Gegenseiten eines $2n$-Ecks, das einem Kegelschnitte C^2 einbeschrieben ist, alle bis auf ein Paar in festen Punkten, so ist der Ort des Schnittpunktes des letzten Paares von Gegenseiten eine Gerade.

Ist das $2n$-Eck ein Sechseck, so folgt daraus der Satz von Pascal, ist es ein Viereck, der Satz von Pol und Polare.

f) $D_1 x_3$, $D_2 x_1$ und $D_3 x_2$ gehen durch die Punkte, in denen die Curve T_2^3 von ihren Rückkehrstangenten ausser in den Rückkehrspunkten selbst geschnitten wird.

g) Die Tangenten in den Ecken des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ an den Kegelschnitt K^2 bilden ein Dreieck, dessen Ecken mit den Rückkehrpunkten und den Berührungspunkten der Doppeltangente der Curve T_2^3 auf einem Kegelschnitte gelegen sind. Auf demselben Kegelschnitte liegen auch die Ecken der Dreiecke, deren Seiten den Kegelschnitt K^2 in den Punkten B_1, B_2, B_3 und in den Punkten D_1, D_2, D_3 berühren.

Die Seiten des Dreiecks $C_1 C_2 C_3$ schneiden weiter die Verlängerungen der Seiten des Dreiecks $x_1 x_2 x_3$ in drei Punkten N_1, N_2, N_3, die auf der Doppeltangente der Curve T_2^3 gelegen sind. Ueber diese Gerade und namentlich die obigen Punkte N lassen sich ebenso eine Reihe von Sätzen aufstellen. Ist ferner die Curve T_2^3 so beschaffen, dass die Doppeltangente derselben mit der unendlich fernen Geraden zusammenfällt, so tritt noch eine Reihe von metrischen Beziehungen dazu, so ist z. B. für diesen Fall allemal

$$\Delta A_1 A_2 A_3 = \Delta B_1 B_2 B_3 = \frac{1}{4} \Delta x_1 x_2 x_3$$

u. s. w.

Zum Schlusse brauchen wir kaum zu erwähnen, dass aus den hier entwickelten Eigenschaften der behandelten Curve sich für eine Curve dritten Grades mit Doppelpunkt, resp. isolirtem Doppelpunkte, entsprechende Resultate ohne Weiteres ableiten lassen.

Stuttgart, im Mai 1892.

Kleinere Mittheilungen.

I. Theorie und Versuche über hydraulischen Druck.

§ 1. Lässt man Wasser aus einem offenen Gefässe durch ein genügend langes und enges Rohr ausströmen und sind an dem letzteren verticale (oben offene) Manometer-Röhren angebracht, so zeigen dieselben (unter günstigen Verhältnissen) einen vom Gefässe gegen die Ausflussöffnung hin abnehmenden Druck an, so zwar, dass die Oberflächen eine vom Gefäss weg abfallende Gerade bezeichnen.

Dieser Versuch kann, abgesehen von seiner Bedeutung für die Hydrostatik (beziehungsweise Hydraulik), auch typisch genannt werden für den Galvanismus. So hat ihn vorigen Jahres auch F. Braun in seinem hübschen „gemeinverständlichen Experimentalvortrage über elektrische Kraftübertragung und Drehstrom“ benutzt*; und, um eine ältere Quelle anzuführen, F. Neumann sagte**, dass die dabei zu Grunde liegende „Reibungskraft auch in anderen physikalischen Erscheinungen eine Rolle zu spielen scheint, wie z. B. bei der hydroelektrischen Zersetzung in der galvanischen Kette“. Es erinnert dieser Ausspruch wohl zurück an das Jahr 1827, in welchem Ohm's „galvanische Kette“ erschienen ist.

§ 2. Neumann hat in diesen Vorlesungen sowohl den alten Standpunkt vertreten von Daniell Bernoulli, dessen Hydrodynamica vom Jahre 1738 er im § 53 rühmend hervorhebt, als auch „die Bewegung der Flüssigkeiten in engen Röhren, die innere Reibung“ berücksichtigt (im § 58). Sein bedeutendster Schüler Kirchhoff entwickelt in der 26. seiner 30 Vorlesungen über „Mechanik“ dagegen nur vom letzteren Standpunkte aus, und zwar an die allgemeinen Gleichungen anknüpfend, den Werth

$$Q = \pi \cdot \frac{p_0 - p_l}{8\,k\,l} \cdot R^4$$

für das in der Zeit 1 durch die seitliche Röhre $\pi R^2 l$ ausfliessende Wasservolum, wobei p_0 und p_l die an den beiden Manometern vom Anfange und

* Tübingen, Laupp. (In dieser Zeitschrift schon Seite 186 erwähnt.)

** Einleitung in die theoretische Physik, Vorlesungen von F. Neumann, herausgegeben von Pape. Leipzig, B. G. Teubner. 1883.

Ende der Länge l abgelesenen Druckgrössen (einschlüssig der Erdbeschleunigung) und k den Reibungscoefficienten des Wassers bedeutet.

Bezüglich der Dimensionen stellt also Q vor: Länge in der dritten Potenz durch Zeit in der ersten; die beiden p sind im Maasse = Gewicht-System die Maasse mal Beschleunigung (g) durch Fläche, und so entfällt für k die Bedeutung im Gramm-Centimeter-Secunden-System

$$\frac{\text{Gramm}}{\text{Centimeter.Secunde}}.$$

Es ist mir dabei folgende Umformung, im Sinne der im § 1 erwähnten Analogie, eingefallen:

$$Q = \frac{(p_0 - p_l)\pi R^2}{l : c\pi R^2},$$

indem ich $kc\pi = 1$ einführte. Wie Q die „Stromstärke“ in beiderlei Vorgängen bedeutet, so ist der ganze Zähler des letzteren Bruches der absolute (nicht mehr auf die Fläche 1 bezogene) wirksame Druck (die motorische Kraft) und der Nenner ist der „Widerstand“, c die „Leitungsfähigkeit“.

Kirchhoff nennt in dem der obigen Gleichung unmittelbar folgenden Texte p_0 den Druck in der Röhre bei ruhender Flüssigkeit. Dies würde nur gelten, wenn das Manometer an der besagten Anfangsstelle der Röhre wirklich die volle (hydrostatische) Höhe H auch während des Durchfliessens durch die Röhre l einnähme. Also z. B., wenn die im Eingange des § 1 erwähnte Gerade in der Oberfläche des Gefässes selbst endete (wie es auch die Figur von F. Braun andeutet) und das Gefäss selbst als das erste Manometer, am Anfange von l, betrachtet wird. Vergl. § 4 unten.

Ferner nennt Kirchhoff p_l den Druck der Atmosphäre. Dies gilt für die Ausflussöffnung der Röhre selbst, wo also das betreffende Manometer die Höhe Null zeigen müsste.

Ich werde überhaupt den Luftdruck, der oben in p_0 und p_l eingerechnet ist, weiterhin nicht mehr einbeziehen, sondern mit p den betreffenden hydraulischen Flüssigkeitsdruck allein bezeichnen. Dann muss im Kirchhoff'schen Specialfall statt der Differenz $p_0 - p_l$ kurzweg p stehen, und im allgemeinen Falle, dass man an irgend zwei um l von einander entfernten Stellen der Ausflussröhre die Manometer angebracht hat, die Druckdifferenz $(p_1 - p_2)$ oder $g(h_1 - h_2)D$, wenn g die Erdbeschleunigung, h_1, h_2 die abgelesenen Manometerstände und D die Maasse der Volum-Einheit bedeuten.

§ 3. Ich werde nun die Gleichung des § 2 ableiten; wenn diese Ableitung auch den elementaren Rahmen überschreitet, so will ich sie doch auf so kurzem Wege, nach dem Vorgange Neumann's, aber noch kürzer, gewinnen, dass man versucht sein könnte, die Ableitung elementar zu machen.

Man setzt bekanntlich die Reibung der Flüssigkeiten für die Flächeneinheit gleich

$$-k\frac{dv}{dy}\cdot 1^2\ \frac{\text{Gramm. Centimeter}}{\text{Secunde}^2},$$

wo k der schon gebrauchte Coefficient, v Geschwindigkeit und y die Tiefe bedeutet, nach welcher die Flüssigkeits-Schichten unterschieden werden. Es gehen daraus für k die Dimensionen hervor wie im § 2.

Auf unser horizontales Ausflussrohr vom Radius R angewendet, sei r irgend ein kleinerer Radius. Ein dünner (dr) und kurzer (dx) Flüssigkeits-Hohlcylinder reibt sich dann an seiner inneren Fläche mit rascher strömendem Fluidum, wird also beschleunigt durch die Kraft

$$-k\frac{dv}{dr}\cdot 2\pi r\,dx$$

$\left(\frac{dv}{dr}\text{ ist selbst negativ}\right)$, die ich vorübergehend zur Abkürzung mit F bezeichne. An der äusseren Mantelfläche dagegen, wo langsamer strömendes Fluidum, wird er verzögert durch

$$F+\frac{dF}{dr}dr,$$

so dass die Verzögerungskraft $\frac{dF}{dr}$ übrig bleibt.

Die beiden Stirnflächen $(2\pi r\,dr)$ des betrachteten Hohlcylinders erleiden: die dem Gefässe nähere den Druck p, die entferntere $\left(p+\frac{dp}{dx}dx\right)$, wo $\frac{dp}{dx}$ auch negativ ist, für jede Flächeneinheit. Also ist der Ueberdruck auf den Hohlcylinder

$$-\frac{dp}{dx}dx.2\pi r\,dr.$$

Im stationären Zustande, den wir allein betrachten, muss

$$-\frac{dp}{dx}dx.2\pi r\,dr=\frac{dF}{dr}dr=-k\,2\pi dx\frac{d}{dr}\left(z\frac{dv}{dx}\right)\cdot dr$$

sein; man erhält also

$$\frac{dp}{dx}=\frac{k}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right).$$

Da die rechte Seite kein x enthält, so ergiebt sich sogleich das Gesetz der geraden Linie vom Eingange des § 1. Nach x integrirt und für $x=0$, sowie für $x=l$ die Werthe p_1 und p_2 vom Schlusse des § 2 eingeführt, wird

$$\frac{p_1-p_2}{l}=-\frac{k}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right).$$

Die Differenzirung auf der rechten Seite auszuführen, wäre ein Umweg, der überdies noch die zunächst folgende Integration nach r schwieriger erscheinen lassen könnte. Mit rdr multiplicirt und integrirt, wird nämlich sogleich

$$\frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{r^2}{2} = -kr\frac{dv}{dr} + A;$$

und mit $\frac{dr}{r}$ multiplicirt und nochmals integrirt

$$\frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{r^2}{4} = -kv + A \; log.nat. r + B.$$

Die Constante A muss Null sein, da sonst für $r = 0$ eine Unzulässigkeit entstände. Die Constante B ergiebt sich bei Flüssigkeiten, welche die innere Röhrenwand benetzen, aus der Erwägung $v = 0$ für $r = R$, sodass

$$v = \frac{p_1 - p_2}{kl} \cdot \frac{R^2 - r^2}{4}$$

die innerhalb aller Röhrenquerschnitte gleiche, aber für jeden vom

$$max\ v = \frac{p_1 - p_2}{kl} \cdot \frac{R^2}{4}$$

bis zu Null variirende Strömungsgeschwindigkeit vorstellt.

Führt man statt derselben die mittlere Geschwindigkeit *med* v ein, sodass in der Secunde das gleiche Ausflussquantum Q des § 2 resultirt, so erhält man aus

$$med\ v . \pi R^2 = 2\pi \int_0^R vr\,dr = Q$$

die Gleichung des § 2 und

$$med\ v = \frac{1}{2} max\ v,$$

also das beliebteste arithmetische Mittel. —

Für nicht benetzende Flüssigkeiten ist das kleinste v, ich will es *min* v schreiben, von Null verschieden und es bestimmt sich B aus der Gleichung (für r gesetzt R)

$$\frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{R^2}{4} = -k . min\ v + B$$

und *min* v beschafft man sich aus der voranstehenden Gleichung, auch R statt r setzend und $A = 0$, indem man statt der Reibung $-k\frac{dv}{dr}$ setzt die Gleitung $\lambda . min\ v$, die man nämlich auch in einfachster Annahme dem Geschwindigkeits-Unterschiede *min* v *minus* Null (letztere bedeutet die Geschwindigkeit der Wand selbst) proportional setzt; λ ist der Gleitungscoefficient, der sich vom Reibungscoefficienten k in den Dimensionen durch den Exponenten 2 statt 1 für den Centimeter unterscheidet:

$$\frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{R^2}{2} = R\lambda . min\ v.$$

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen wird allgemein

$$v' = \frac{p_1 - p_2}{kl} \cdot \frac{R^2 - r^2}{4} + \frac{p_1 - p_2}{\lambda l} \frac{R}{2},$$

wo das neue Glied die kleinste Geschwindigkeit vorstellt. Jede Geschwindigkeit v' ist um dasselbe grösser als bei der benetzenden Flüssigkeit, für welche λ unendlich gross anzunehmen ist. Aus besagtem Grunde braucht man, um für nicht benetzende Flüssigkeiten die Stromstärke Q' zu berechnen, nur noch $min\, v. \pi R^2$ hinzuzufügen und erhält:

$$Q' = \pi \frac{p_1 - p_2}{8kl} \left(R^4 + \frac{4k}{\lambda} R^3\right).$$

§ 4. Wenn keine Reibung wäre, oder man von dieser annäherungsweise absehen darf, so ist die Geschwindigkeit v in jedem Querschnitte constant; im horizontalen Ausflussrohre (wo der Querschnitt vertical) also überall.

Im Gefässe dagegen ist die Geschwindigkeit auch für jeden (horizontalen) Querschnitt constant, aber mit der Tiefe z unter der freien Oberfläche F_0 des Gefässes nimmt das Quadrat der Geschwindigkeit gemäss dem Princip der lebendigen Kraft um $2gz$ zu. Man hat also, wenn V_0 für die Oberfläche F_0 gilt, v und f für eine Tiefe z, V und F für die Tiefe H der Ausflussöffnung: $F_0 . V_0 = f . v = F . V$ und

$$v^2 - V_0^2 = 2gz, \quad V^2 - V_0^2 = 2gH.$$

Wenn f^2 klein gegen F_0^2 und auch F^2 klein gegen dasselbe, so fällt in den beiden letzten Gleichungen V_0^2 fort gegen v^2 und V^2.

Wenn aber bei f ein oben offenes Manometer-Rohr angebracht ist, welches die Druckhöhe $z' < z$ anzeigt, so kommt

$$v^2 = 2g(z - z') = V^2 . \left(\frac{F}{f}\right)^2 = 2gH\left(\frac{F}{f}\right)^2.$$

Die Gleichung

$$z' = z - \frac{v^2}{2g}$$

wird mehrfach mit dem Wortlaute reproducirt: Die hydraulische Höhe ist kleiner als die hydrostatische um die Geschwindigkeitshöhe ($v^2 : 2g$). Neumann führt im § 53 die Versuche D. Bernoulli's an, wo H im Gefässe 115 Par. Linien hoch und unten ein nicht langes und sieben Linien weites Ausflussrohr wagerecht ausmündete; f und das Manometer hierbei waren am Anfange dieses Rohres (ganz nahe dem Gefässe). Dann ist

$$z' = H - H\left(\frac{F}{f}\right)^2,$$

welche Gleichung von Neumann im § 51 also unnöthiger Weise mittelst höheren Calculs entwickelt und im § 53 bis zu der äquivalenten Form $\underline{p} - P = Dg\underline{H}\left[1 - \left(\frac{F}{f}\right)\right]$ gebracht wird.*

* Es wird also $p - P$ durch z' gemessen und nur indirect durch $(H - z')$.

Bernoulli wendete der Reihe nach als Ausflussöffnungen F_1, F_2, F_3, F_4 Kreise an von den Durchmessern

2,2	3,4	5,0	7,0

und beobachtete im Manometer die Höhe z'_1, z'_2, z'_3, z'_4

114,0	108,4	87,0	3,0,

welche mit den nach der letzten Gleichung berechneten $\left(f = 7^2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)$ ziemlich gut stimmten. Ausgenommen das beobachtete z'_4, das nach der theoretischen Formel Null werden soll; es könne dies von der Reibung herrühren (diese ist aber gerade im vierten Versuche von kleinstem Einflusse) und „vielleicht auch darin seinen Grund haben, dass die Einfügung des Manometerrohres nicht ganz ohne kleine Unebenheiten auszuführen gewesen ist". Eine solche Störung zeigt auch mein älterer Apparat, von dem ich im nächsten Paragraph sprechen werde.

Die Höhen $(H - z'_1)$, $(H - z'_2)$, $(H - z'_3)$, $(H - z'_4)$ sind also bei diesem Versuche, wegen der Nähe des Manometers am Gefässe, sodass die dazwischen liegende Reibung unbedeutend ist, als Geschwindigkeitshöhen bezeichenbar; die Höhen z'_1, z'_2, z_3, z'_4 sind aber Widerstands- oder Reibungshöhen für die auf dem Wege von f nach den Ausflussöffnungen F_1, F_2, F_3, F_4 noch zu überwindende Reibung. Die im Eingange des § 1 besprochene Gerade wird ein solches $(H - z')$ am Gefässe übrig lassen. So stellt auch Pfaundler's Lehrbuch in dem kurzen Texte zur entsprechenden Figur die Sache dar, nachdem er vorher eine empirische Formel ungenannter Herkunft angeführt hatte. Desgleichen Mach in seinem neuesten Leitfaden, wobei nur gemäss § 3 zu erinnern ist, dass nicht die v, sondern blos die *med* v überall im Rohre dieselbe ist. Die Zeichnung von F. Braun (s. Anm. 1), bei welcher die genannte Gerade im Niveau des Gefässes mündet, ist somit auch im ersten der vier Versuche von Bernoulli um eine Par. Linie ungenau.

§ 5. Meine älteren Versuche*: Der Apparat mit drei Manometerröhren, den ich damals von meinem Vorarbeiter fertigen liess, genügte der Bedingung der zur Ausflussöffnung abfallenden Geraden nicht, weshalb ich auf eine entsprechende Abänderung bedacht war, die im nächsten Paragraph zur Sprache kommen wird. Da er aber genügte, um eine hinreichend genaue Bestimmung des Reibungscoefficienten k des Wassers auszuführen, so will ich ihn hier nochmals kurz besprechen.

Gemäss der Gleichung des § 2 darf man zu diesem Zwecke nur k und Q die Plätze tauschen lassen. Mit 7 Centimeter Druckhöhe vom Gefässe bis zum dritten Manometer (das erste und zweite stimmt weniger) wird

* Repertorium der Physik v. J. 1887, Seite 567 u. f. Das erste Alinea und die letzten vier Zeilen Seite 569 kommen gemäss Obigem in Wegfall.

$$p_1 - p_2 = g\,.\,7\,.\,1 = 7000\ \frac{\text{Gramm}}{\text{Centim. Sec.}^2} \text{ und } l = 30,\ Q = \frac{500}{37}\,\frac{\text{Centimeter}^3}{\text{Sec.}},$$

$R = 0,2$ (Radius des Gummi-Pfropfens) ergab sich,

$$k = 0{,}0108\ (0{,}0105\ p.\ 568\ l.\ c.).$$

Jenes Wasser hatte 12^0 bis 15^0. Bei 0^0 hat k für Wasser nach Messungen Anderer als zweite Decimalstelle noch 1, aber an der dritten statt 0 schon eine bedeutende Ziffer.

Die erste (dem Gefässe nächste) Manometerröhre meines Apparates zeigte einen zu niedrigen Wasserstand, wie auch die zweite. Zwar befolgten die Wasserstände der zweiten und dritten Röhre eine abfallende Gerade, aber nicht nach dem vorhin erwähnten Verhältnisse

$$\frac{p_1 - p_2}{l} \text{ entsprechend } \frac{7}{30}, \text{ sondern nur}$$

$$\frac{0{,}4 \text{ oder } 0{,}5}{10},$$

was ja nur der fünfte Theil des Vorigen wäre.

Wenn von 7 noch ein Theil als Geschwindigkeitshöhe (s. § 4) abgeht (nach meiner rechnerischen Schätzung zwei Centimeter), so ist dafür R statt 0,2 nur auf 0,22 zu erhöhen. Es war auch das Rohr weiter als der Pfropfen und R^4 ist wegen der vierten Potenz überhaupt der heikelste Punkt der Messung. Vergl. auch im § 4 den Schluss des vorletzten Absatzes.

§ 6. Meine neueren Versuche: Ich liess in Stützerbach eine Glasröhre von zehn Centimeter Weite mit drei Seitenröhren von je zehn Centimeter Abstand anfertigen. Sie fiel so aus, dass $l = 11$ Centimeter vom Mittel des einen Manometerrohres zum folgenden beträgt. Die Mariotte'sche Flasche und der Gummipfropfen für das Ausflussrohr wurden beibehalten und das Manometer mittelst kurzen Gummischlauches mit ihr verbunden. Ich verzeichne nun folgende Versuche:

I. Ausfluss ohne Manometer, mittelst kurzen Schlauches von 0,75 Centimeter Weite. $Q = 16$ Centimeter^3 in der Secunde; $H = 7$; folglich $v = \sqrt{2gH} = 120$; aus $120\pi R^2 = 16$ wird $R = 0{,}2$; vergl. § 5.

II. Das Glasrohr (Manometer) mittelst kurzen Schlauches angesetzt. $Q = 12$. Die drei Druckröhren zeigten

$$z'_1 = 1{,}5 \qquad z'_2 = 1{,}5 \qquad z'_3 = 1{,}25.$$

Dieser Versuch hat Aehnlichkeit mit demjenigen im § 5, ist aber hinsichtlich der ersten und zweiten Manometerröhre schon besser, insofern wenigstens kein Ansteigen von der ersten zur zweiten Manometerröhre eingetreten ist.

III. Mit einem kurzen Gummischlauche am Ausflussende ward $Q = 13$ und

$$z'_1 = 0{,}8 \qquad z'_2 = 0{,}5 \qquad z'_3 = 0{,}2.$$

Jetzt ist die im Eingange des § 1 geforderte Gerade vollständig. Sie schneidet ungefähr in der Höhe 1,1, oder in der Tiefe 5,9 unter dem geltenden Wasserspiegel der Mariotte'schen Flasche diese selbst; also

$$v = \sqrt{2 . g 5{,}9} = 109$$

und mit

$$109 . \pi R^2 = 13$$

kommt R nahe 0,2, sodass also für die Ausflussmenge nur der Querschnitt des Gummipfropfens, nicht der grössere des Schlauches und Glasrohres in Betracht kommt. Aber für die Formel des § 2 kommt R nahe 0,4 zur Geltung vom Gummischlauch, wie ich, $k = 0{,}01$ als bekannt vorausgesetzt, aus

$$13 = \frac{22}{7} \cdot \frac{0{,}3 . 1000 . 1}{8 . 0{,}01 . 11} \cdot x^4$$

für x berechnete.

IV. War 1 Meter Schlauch zwischen Flasche und Manometer, so stand letzteres mit seinen drei Röhren auf Null. $Q = 10{,}4$, wenn der lange Schlauch gerade, und $= 9{,}8$, wenn er kreisrund gelegt war.

V. War dagegen der 1 Meter lange Schlauch hinter dem Manometer angefügt, so ergab sich $Q = 10$, wie auch das Mittel in IV., und die drei Manometer standen auf

$$z'_1 = 3{,}0 \qquad z'_2 = 2{,}5 \qquad z'_3 = 2{,}2\,;$$

es stimmt also die Differenz der beiden letzteren mit III.; abgesehen von der kleineren Ausflussmenge; dieserhalb ist R etwas kleiner als in III. anzunehmen. Es ist auch der Schlauch enger als das Manometerrohr. In IV. traf auf das Manometer sozusagen kein Widerstand mehr, in V. ein merkbarer.

VI. Wie III., aber am Ende des kurzen Ausfluss-Schlauches ward ein Quetschhahn angebracht, der durch einen Feilkloben mit Flügelschraube zuerst möglichst weit geöffnet gehalten wurde. $Q = 12{,}8$, also wenig kleiner als in III. Aber das Manometer zeigte in allen drei Röhren denselben Stand, die (abfallen sollende) Gerade war merklich horizontal.

VII. Eine Umdrehung der Flügelschraube: $Q = 10{,}6$ und $z' = 1{,}5$ in den drei Manometerröhren.

VIII. Zwei Umdrehungen: $Q = 6{,}5$ und $z' = 4{,}9$.

IX. $2\frac{3}{4}$ Umdrehungen: $Q = 0{,}90$ und $z' = 7$.

Letztere Angabe zeigt, wie auch das Q, dass das Fliessen nahe dem Aufhören war. Wirklich fand mit drei Umdrehungen nur mehr ein Abtropfen statt.

X. Ich habe drei solche Glas-Manometer anfertigen lassen, deren eines bisher nur benutzt wurde, und sie jetzt alle drei eingeschaltet; dazwischen noch je einen Schlauch von 1 Meter Länge. Die je drei Röhren eines Manometers zeigten da, wie nach den Versuchen VI. und IX. um so leichter voraus zu sehen war, denselben Stand. Aber vom ersten zum zweiten und von da zum dritten Manometer war die abfallende Gerade um so deutlicher. Es betrug die Höhendifferenz 2,5 Centimeter, was mit III. und V. übereinstimmt, denn 0,3 dort zu 2,5 hier verhält sich nahe wie die Länge 11 zu 100 dort und hier.

§ 7. Nachtrag zu § 4. Wenn man daselbst V_0^2 nicht weglässt, wie es geschah, um gleich auf Neumann's § 53 zu kommen, so wird

$$z' = z - \frac{v^2 - V_0^2}{2g},$$

d. h.: die hydraulische Druckhöhe ist kleiner als die hydrostatische um diejenige Höhe, welche dem Ueberschusse der Quadrate der Geschwindigkeiten an der fraglichen Stelle und an der freien Oberfläche entspricht.

Ritter setzt bei dieser Gelegenheit (Gleichung 1091 der fünften Auflage des Lehrbuches der technischen Mechanik vom Jahre 1884) den Fall $z' < 10\frac{1}{3}$ Meter etc., d. h. er spricht da vom Luftdrucke und als ob z' niemals negativ werden könne. Nun ist aber in den §§ 2 bis 4 oben der Luftdruck schon ausgeschieden, sodass z' und z nur Druckkräfte tropfbarer Flüssigkeiten darstellen.

Weissbach's Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik (fünfte verbesserte und vervollständigte Auflage des ersten Bandes von Herrmann, 1874) schreibt im § 417 die hydraulische Druckhöhe mit $p_1 : \gamma$ und die hydrostatische mit $(h + p_0 : \gamma)$. Da muss man also p_0 als Gramm durch Centimeter^2 und γ als Gramm durch Centimeter^3 nehmen, welchem Missstande (Kraft und Masse durch dasselbe Gramm zu messen) Neumann in dem Ausdrucke vorbeugt, den ich gelegentlich meiner Anmerkung im § 4 oben angeführt habe. Ferner lag es nahe genug, auch $(p_1 : \gamma)$ durch Länge *plus* $p_0 : \gamma$ zu geben, sodass $p_0 : \gamma$ wie oben hinausfällt.

Endlich wären noch die Fälle $z' \overline{\gtrless} 0$ zu erwähnen. Ersterer tritt an der Ausflussöffnung ein und kann gemäss der ersten Gleichung des § 4 auch intermediär zwischen der Oberfläche und Ausflussmündung stattfinden. Letzterer führt zum Aspirator und der Wasserluftpumpe.

Augsburg. Dr. A. Kurz.

II. Ableitung einer neuen Formel für den Flächeninhalt der Zone eines Rotationsellipsoids.

Zur Bestimmung des Flächeninhaltes einer zwischen den Breiten φ und φ_1 liegenden Zone des Erdsphäroids benutzt man entweder einen viergliedrigen Ausdruck von endlicher Form, oder eine nach den Producten der Sinus und Cosinus der Vielfachen von φ und φ_1 fortschreitende unendliche Reihe. Da die Berechnung nach der erstgedachten Formel in der Anwendung unbequem ist, so findet man in den Werken über Geodäsie in der Regel nur jene schnell convergirende Reihe abgeleitet und die Werthe der in derselben vorkommenden Coefficienten für ein bestimmtes Achsenverhältniss berechnet. Da aber diese Coefficienten selbst wieder unendliche Reihen sind, deren Glieder nach den Potenzen der Excentricität fortschreiten, so ist es bei Annahme eines anderen Achsenverhältnisses in jedem Falle zeitraubend, diese Glieder numerisch zu bestimmen.

Ich werde im Folgenden einen Ausdruck entwickeln, in welcher die Coefficienten der Winkelfunctionen von endlicher Form und höchst einfachem Bildungsgesetz sind, wodurch ihre Berechnung wesentlich erleichtert wird.

Bezeichnet man, wie üblich, mit a und b die Aequatorial- bezw. Polarhalbachse und mit ε die numerische Excentricität, ferner mit φ und φ' die geographische bezw. geocentrische Breite eines Parallelkreises, dessen Halbmesser mit y und dessen Abstand vom Aequator mit x, so hat man bekanntlich für das Flächenelement der Zone:

1) $$\left\{\begin{aligned} dF &= 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \\ &= \frac{2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dy}{\frac{dy}{dx}}. \end{aligned}\right.$$

Aus der Gleichung der Ellipse und den für dieselbe geltenden Beziehungen:

$$\frac{x}{y} = -(1-\varepsilon^2)\frac{dy}{dx}, \quad \frac{x}{y} = tan\ \varphi', \quad \frac{dy}{dx} = -tan\ \varphi$$

erhält man

$$y^2 = \frac{a^2\ cos\ \varphi^2}{1-\varepsilon^2\ sin\ \varphi^2},$$

woraus folgt

$$y\,dy = -\frac{a^2(1-\varepsilon^2)\ cos\,\varphi\ sin\,\varphi\ d\varphi}{(1-\varepsilon^2\ sin\,\varphi^2)^2}.$$

Nach Substitution dieses Ausdrucks in die Formel 1) geht dieselbe über in

1a) $$dF = \frac{2\pi\ a^2(1-\varepsilon^2)\ cos\,\varphi\ d\varphi}{(1-\varepsilon^2\ sin\,\varphi^2)^2}.$$

Um dem Nenner die für den vorliegenden Zweck geeignetste Form zu verleihen, führe ich für ε eine Grösse ein, welche durch die Gleichung

$$n = \frac{a-b}{a+b}$$

definirt ist. Hierdurch erhält man zunächst:

$$1-\varepsilon^2 = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2, \quad \varepsilon^2 = \frac{4n}{(1+n)^2},$$

$$1-\varepsilon^2\ sin\,\varphi^2 = 1 - \frac{2n}{(1+n)^2} + \frac{2n}{(1+n)^2}\ cos\ 2\varphi.$$

Wenn man den mit $\cos 2\varphi$ identischen Werth $\frac{1}{2}(e^{2i\varphi}+e^{2i\varphi})$ einsetzt, worin e die Basis des natürlichen Logarithmensystems und $i=\sqrt{-1}$ bedeuten, so ergiebt sich

$$1-\varepsilon^2 \sin\varphi^2 = \frac{1+n^2+n(e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi})}{(1+n)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+n)^2}(1+ne^{2i\varphi})(1+ne^{-2i\varphi}),$$

und die Gleichung 1a) nimmt die folgende Gestalt an:

$$2)\quad dF = 2a^2\pi(1-n^2)^2 \cos\varphi\,(1+ne^{2i\varphi})^{-2}(1+ne^{-2i\varphi})^{-2}\,d\varphi.$$

Verwandelt man die hierin enthaltenen Binome in die bekannten Potenzreihen und führt die Multiplication beider aus, so findet man nach Elimination der imaginären Formen für

$$\cos\varphi\,(1+ne^{2i\varphi})^{-2}(1+ne^{-2i\varphi})^{-2} = A\cos\varphi - 2B\cos\varphi\cos 2\varphi$$
$$+ 2C\cos\varphi\cos 4\varphi - 2D\cos\varphi\cos 6\varphi + 2E\cos\varphi\cos 8\varphi - + \cdots,$$

worin die Coefficienten A, B, $C\ldots$ die folgenden Werthe haben:

$$3)\quad \begin{cases} A = 1 + 2.2n^2 + 3.3n^4 + 4.4n^6 + 5.5n^8 + 6.\,6n^{10} + \cdots \\ B = 2n + 2.3n^3 + 3.4n^5 + 4.5n^7 + 5.6n^9 + 6.\,7n^{11} + \cdots \\ C = 3n^2 + 2.4n^4 + 3.5n^6 + 4.6n^8 + 5.7n^{10} + 6.\,8n^{12} + \cdots \\ D = 4n^3 + 2.5n^5 + 3.6n^7 + 4.7n^9 + 5.8n^{11} + 6.\,9n^{13} + \cdots \\ E = 5n^4 + 2.6n^6 + 3.7n^8 + 4.8n^{10} + 5.9n^{12} + 6.10n^{14} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Da allgemein $2\cos\varphi\cos 2t\varphi = \cos(2t+1)\varphi + \cos(2t-1)\varphi$ ist, so kann man, mit Rücksicht auf das Vorstehende, das unbestimmte Integral der Gleichung 2) leicht in folgender Form darstellen:

$$F = 2\pi a^2(1-n^2)^2\Big[A_1 \sin\varphi - \frac{1}{3}A_3 \sin 3\varphi + \frac{1}{5}A_5 \sin 5\varphi$$
$$- \frac{1}{7}A_7 \sin 7\varphi + \cdots \frac{(-1)^{t-1}}{2t-1}A_{2t-1}\sin(2t-1)\varphi + \cdots\Big],$$

worin $A_1 = A - B$, $A_3 = B - C$, $A_5 = C - D$, $A_7 = D - E\ldots$

Die Coefficienten der in 3) enthaltenen Potenzen von n lassen ein einfaches Bildungsgesetz erkennen, indem sie als Glieder einer arithmetischen Progression zweiter Ordnung erscheinen, durch welchen Umstand die Summirung der Reihen für A, B, $C\ldots$, sowie für A_1, A_3, A_5 leicht ausführbar ist. Vollzieht man gleich die Bildung der Summen für die letztgenannten Grössen, so ergiebt sich für den allgemeinen Ausdruck derselben

$$A_{2t-1} = \frac{n^{t-1}[t-(t+1)n - n^2(t-2-(t-1)n]}{(1-n^2)^3}.$$

Wenn man hierin der Folge nach $t=1, 2, 3, 4\ldots$ setzt und die so für A_1, A_3, A_5, $A_7\ldots$ erhaltenen Werthe in Gleichung 4) substituirt, so stellt F den Flächeninhalt der vom Aequator bis zur geographischen Breite φ reichenden Zone dar. Für die von der Breite φ_1 bis φ sich erstreckende Zone findet man hieraus, wenn noch die Formel

$$\sin(2t-1)\varphi - \sin(2t-1)\varphi 1 = 2\sin\frac{1}{2}(2t-1)(\varphi-\varphi_1)\cos\frac{1}{2}(2t-1)(\varphi+\varphi_1)$$

berücksichtigt wird,

$$5)\quad \left\{\begin{aligned} F = \frac{4\pi a^2}{1-n^2}\Big[& (1-n)^2 \sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ & -\frac{n}{3}[2-3n+n^3]\sin\frac{3}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\frac{3}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ & +\frac{n^2}{5}[3-4n-n^2(1-2n)]\sin\frac{5}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\frac{5}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ & -\frac{n^3}{7}[4-5n-n^2(2-3n)]\sin\frac{7}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\frac{7}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ & +\frac{n^4}{9}[5-6n-n^2(3-4n)]\sin\frac{9}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\frac{9}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ & -+\cdots \\ & +\frac{(-n)^{t-1}}{2t-1}[t-(t+1)n-n^2(t-2-(t-1)n] \\ & \quad \sin(2t-1)\frac{\varphi-\varphi_1}{2}\cos(2t-1)\frac{\varphi+\varphi_1}{2}\Big]. \end{aligned}\right.$$

Im Vergleich zu der bisher angewandten Reihenentwickelung zeigt die vorstehende eine bedeutende Vereinfachung der von n abhängigen Coefficienten. Wie leicht nachzuweisen, ist der von der Breite unabhängige Theil des ersten Gliedes auch gleich $4\pi ab$.

Nimmt man nach W. Bessel für die Erddimensionen die Werthe

$$\begin{aligned} a &= 6377.397156 \text{ Kilometer}, \\ b &= 6356.078963 \quad \text{"} \;, \\ n &= \quad 0.001674\ 184767 \end{aligned}$$

an und setzt den Fehler in a und b einer halben Einheit der sechsten Decimalstelle gleich, welche Genauigkeit indess niemals in Wirklichkeit erreicht wird, so können alle höheren Potenzen von n als die dritte vernachlässigt werden, wodurch sich obiger Ausdruck zusammenzieht in

$$\begin{aligned} F = \frac{4\pi a^2}{1-n^2}\Big[& (1-n)^2\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ & -\frac{n}{3}(2-3n)\sin\frac{3}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\frac{3}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ & +\frac{n^2}{5}(3-4n)\sin\frac{5}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\frac{5}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ & -\frac{4n^3}{7}\sin\frac{7}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\frac{7}{2}(\varphi+\varphi_1)\Big]. \end{aligned}$$

Bekanntlich ist für bestimmte kartographische und katastrale Zwecke die Aufstellung von Tabellen erforderlich, welche für geringe Breitenintervalle die Flächeninhalte kleinerer Zonentheile (sphäroidischer Trapeze) enthalten. Zur Berechnung derselben ist die vorstehende Reihe ganz besonders geeignet, da man nur die ersten zwei oder drei Glieder derselben zu berücksichtigen braucht. Dagegen ist der Eingangs erwähnte und aus Gleichung 1a) folgende endliche Ausdruck, nämlich:

$$F = \pi a^2 (1-\varepsilon^2)\left[\frac{\sin\varphi}{1-\varepsilon^2 \sin\varphi^2} - \frac{\sin\varphi_1}{1-\varepsilon^2 \sin\varphi_1{}^2} + \frac{1}{2\varepsilon M}\log\left(\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\right) - \frac{1}{2\varepsilon M}\log\left(\frac{1+\varepsilon\sin\varphi_1}{1-\varepsilon\sin\varphi_1}\right)\right],$$

weit weniger zur Berechnung geschickt, weil eine grössere Anzahl von Logarithmen und deren Numeri zu bestimmen ist. Da ferner im Nenner des vorstehenden Ausdrucks die kleine Grösse ε als Factor enthalten ist, so wird ein Fehler in dem Coefficienten von $1:2\varepsilon M$ stark vergrössert und dadurch die Genauigkeit des Rechnungsergebnisses sehr beeinträchtigt.

Für sehr kleine ε würde übrigens die Formel, wie man leicht erkennt, zur Berechnung unbrauchbar werden.

Mit den oben gegebenen Zahlenwerthen habe ich für den Flächeninhalt der Zone berechnet:

$$\begin{aligned} F = {} & 50938\ 0847^{qkm}.550 \sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ - {} & 56\ 9007\ ,, \ .660 \sin\tfrac{3}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\tfrac{3}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ + {} & 857\ ,, \ .601 \sin\tfrac{5}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\tfrac{5}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ - {} & 1\ ,, \ .367 \sin\tfrac{7}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\tfrac{7}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ + {} & 0\ ,, \ .002 \sin\tfrac{9}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\tfrac{9}{2}(\varphi+\varphi_1), \end{aligned}$$

wobei auch die vierten Potenzen von n berücksichtigt sind.

Diese Zahlen sind bis auf die letzte Stelle richtig und dürften den unter Zugrundelegung derselben Erddimensionen berechneten und anderweit angegebenen Werthen vorzuziehen sein, welche von den vorstehenden theilweise nicht unerheblich abweichen.

Chemnitz. E. Roedel, Ober-Postassist.

III. Ueber ein neues Ausgleichungsverfahren bei der Aufstellung von Sterbetafeln.

Zur Darstellung der empirischen Zahlenreihen, welche die Beobachtungen über die Sterblichkeit des menschlichen Geschlechts ergeben, hat man mannigfache Methoden gefunden. Die wichtigsten sind bekanntlich die analytische und die graphische. Während man jedoch bei der graphischen Methode mehr nach dem Gefühle ausgleicht, setzt man bei der analytischen Methode bereits das Bestehen eines mathematischen Gesetzes voraus. Die Anzahl der Gleichungen, welche als Ausdruck des mathematischen Gesetzes der menschlichen Sterblichkeit aufgestellt worden sind, ist nicht gering, es sei nur hingewiesen auf die Formeln, welche mit mehr oder weniger praktischem Werthe Moivre (Treatise of Annuities on Lives, London 1724), Lambert (Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendungen, dritter Theil 1772), Thomas Young (Philos. Trans. of the R. Soc. of London for 1826), Littrow (Ueber Lebensversicherungen und andere Versorgungsanstalten, Wien 1832), Moser (Die Gesetze der Lebensdauer, Berlin 1839), Gompertz (Philos. Trans. for 1825), Makeham (Journal of the Institute of Actuaries, Jan. 1860), Lazarus (Ueber Mortalitätsverhältnisse und ihre Ursachen, Hamburg 1867), Amthor (Festprogramm der Kreuzschule zu Dresden, 1874) und Wittstein (Das mathematische Gesetz der menschlichen Sterblichkeit, Hannover 1883) abgeleitet haben.

Der gewöhnlichen analytischen Ausgleichungsmethode liegt der Gedanke zu Grunde, dass es möglich ist, die ganze Zahlenreihe der Sterblichkeitsbeobachtungen vom Säuglingsalter an bis zum höchsten Greisenalter in einer mathematischen Formel als Function des Alters darzustellen. Ich möchte aber behaupten, dass man damit der Beobachtungsreihe grossen Zwang anthut und dass man bei einer derartigen Ausgleichungsweise gewisse Feinheiten, welche in der Aufeinanderfolge der beobachteten Sterblichkeit nach dem Alter liegen, ganz verloren gehen lässt. Um ein Beispiel anzuführen, betrachte man die Beobachtungen, welche der erste allgemeine Beamtenverein der österreichisch-ungarischen Monarchie über das Absterben von untersuchten männlichen Leben veröffentlicht hat. In der Schrift „Der erste allgemeine Beamtenverein der österreichisch-ungarischen Monarchie Wien 1890“ ist die aus den Beobachtungen erhaltene Linie der Sterbenswahrscheinlichkeiten sowohl graphisch, als auch nach der Gompertz-Makeham'schen Formel ausgeglichen worden. Obwohl die aus der Erfahrung genommenen Werthe der Sterbens-Wahrscheinlichkeiten in den Altern 50 bis 60 der Sterblichkeitscurve einen wellenförmigen Verlauf vorschreiben, so ergiebt doch die analytische Ausgleichung einen stetig ansteigenden Curvenzug.

In jüngster Zeit hat Eduard Selling in einer Abhandlung „Ueber eine Formel für empirische Zahlenreihen, insbesondere zum Ersatz der

Sterbe- und Invaliditäts-Tafeln“ in Crelle's Journal Bd. 106, eine neue Gleichung angegeben, mit Hilfe deren es möglich ist, empirische Zahlenreihen darzustellen. Die Anwendung derselben auf die deutsche Sterbetafel, männliches Geschlecht, und auf die Tafel der Arbeitsfähigen, entnommen aus Spitzer's Anleitung zur Berechnung von Leibrenten und Anwartschaften etc., ergiebt innerhalb gewisser Altersintervalle gute und brauchbare Resultate. Daraus, dass auch diese Formel nur innerhalb einer Reihe von Altersjahren befriedigt und zur Ausgleichung einer ganzen Sterbetafel wiederholt angewendet werden muss, erkennt man wiederum, dass die Darstellung der ganzen Sterblichkeitscurve durch eine analytische Gleichung kaum von praktischem Werthe ist.

Im Folgenden soll ein Ausgleichungsverfahren angegeben werden, mit welchem man durch Rechnung successive die Punkte der ausgleichenden Curve aus der beobachteten Sterblichkeitslinie finden und dabei doch den Besonderheiten der vorliegenden Sterblichkeit überall Rechnung tragen kann. Man kann annehmen, dass die in ihrem ganzen Verlaufe transcendente Sterblichkeitscurve aus einzelnen Stücken zusammengesetzt ist, welche algebraischen Curven angehören, sodass für diese einzelnen Stücke die Curve durch eine Gleichung von der Form

$$y = a + b.x + c.x^2 + d.x^3 + \cdots$$

darstellbar ist. Das Ausgleichungsverfahren beruht nun darin, dass man jeden Punkt der zu suchenden Curve so bestimmt, dass er der mittelste Punkt eines parabolischen Curvenstückes wird. Im Besonderen sei angenommen, dass der gedachte Punkt der mittelste von fünf aufeinander folgenden Punkten sei, welche das Stück einer Parabel bilden. Unter dieser Voraussetzung muss folgenden fünf Gleichungen Genüge geleistet werden:

$$1) \qquad y_k = a + b.x_k + c.x^2_k; \quad k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Die Bestimmung der Constanten a, b, c führt mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate auf folgende drei, in Bezug auf die Constanten linearen Gleichungen, in denen der Umfang der durch das Zeichen Σ angedeuteten Summation aus den Gleichungen 1) leicht zu ersehen ist

$$2) \qquad \begin{cases} \Sigma(y) = 5a + b.\Sigma(x) + c.\Sigma(x^2), \\ \Sigma(x.y) = a.\Sigma(x) + b.\Sigma(x^2) + c.\Sigma(x^3), \\ \Sigma(x^2.y) = a.\Sigma(x^2) + b.\Sigma(x^3) + c.\Sigma(x^4). \end{cases}$$

Dieselben ergeben

$$3) \qquad a = \frac{Z_a}{N}, \quad b = \frac{Z_b}{N}, \quad c = \frac{Z_c}{N},$$

wobei man bezeichnet mit

$$Z_a = \begin{vmatrix} \Sigma(y), & \Sigma(x), & \Sigma(x^2) \\ \Sigma(x.y), & \Sigma(x^2), & \Sigma(x^3) \\ \Sigma(x^2.y), & \Sigma(x^3), & \Sigma(x^4) \end{vmatrix}; \quad Z_b = \begin{vmatrix} 5, & \Sigma(y), & \Sigma(x^2) \\ \Sigma(x), & \Sigma(x.y), & \Sigma(x^3) \\ \Sigma(x^2), & \Sigma(x^2.y), & \Sigma(x^4) \end{vmatrix};$$

$$Z_c = \begin{vmatrix} 5, & \Sigma(x), & \Sigma(y) \\ \Sigma(x), & \Sigma(x^2), & \Sigma(x.y) \\ \Sigma(x^2), & \Sigma(x^3), & \Sigma(x^2.y) \end{vmatrix}; \quad N = \begin{vmatrix} 5, & \Sigma(x), & \Sigma(x^2) \\ \Sigma(x), & \Sigma(x^2), & \Sigma(x^3) \\ \Sigma(x^2), & \Sigma(x^3), & \Sigma(x^4) \end{vmatrix}.$$

Diese Determinanten besitzen sehr einfache Werthe, wenn man bedenkt, dass die Grössen x in ihrer Aufeinanderfolge eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden. In der That ist

4) $x_1 = x_1, \quad x_2 = x_1 + 1, \quad x_3 = x_1 + 2, \quad x_4 = x_1 + 3, \quad x_5 = x_1 + 4.$

Setzt man

5) $$x_1 + 2 = x,$$

so ist x gerade dasjenige Alter, zu dem man eine solche Sterbens-Wahrscheinlichkeit y sucht, dass durch Einsetzen der Werthe a, b, c aus 3) die Parabel erfüllt wird

$$y = a + b.x + c.x^2.$$

Durch die Einführung 4) und 5) aber erhält die Nennerdeterminante N den constanten Werth 700, während die Zählerdeterminanten ergeben

$$\frac{1}{10} Z_a = A.\Sigma(y) - B.\Sigma(x.y) + C.\Sigma(x^2.y),$$

$$-\frac{1}{10} Z_b = B.\Sigma(y) - D.\Sigma(x.y) + E.\Sigma(x^2.y),$$

$$\frac{1}{10} Z_c = C.\Sigma(y) - E.\Sigma(x.y) + 5.\Sigma(x^2.y),$$

wobei gesetzt wird

$$\begin{aligned} A &= 5.(x^2+6)^2 - 73.(x^2+2), \\ B &= x.(10x^2 - 13), \\ C &= 5.(x^2 - 2), \\ D &= 20x^2 + 7, \\ E &= 10x. \end{aligned}$$

Jede Sterbens-Wahrscheinlichkeit y ergiebt sich nunmehr für das Alter x aus der Gleichung

6) $$\left\{ \begin{aligned} 70y = \{A.\Sigma(y) - B.\Sigma(x.y) + C.\Sigma(x^2.y)\} - \\ - x.\{B.\Sigma(y) - D.\Sigma(x.y) + E.\Sigma(x^2.y)\} + \\ + x^2.\{C.\Sigma(y) - E.\Sigma(x.y) + 5.\Sigma(x^2.y)\}. \end{aligned} \right.$$

Damit ist unsere Aufgabe gelöst, und der erhaltene Punkt x, y liegt auf einem Parabelstücke, dessen Gleichung durch 6) dargestellt wird. Man kann daher diese Ausgleichungsweise als die parabolische Ausgleichungsmethode bezeichnen.

Das angegebene Verfahren wurde geprüft an denjenigen Sterbens-Wahrscheinlichkeiten, welche in der deutschen Sterbetafel, gegründet auf die Sterblichkeit der Reichsbevölkerung in den zehn Jahren 1871/72 bis 1880/81, für das männliche Geschlecht enthalten sind (Monatshefte zur Statistik des Deutschen Reichs, Novemberheft 1887). Das Ergebniss dieser Ausgleichung ist auszugsweise in Spalte 4 der folgenden Tabelle wiedergegeben.

Alter.	Unausgeglichene Sterbens-Wahrscheinlichkeiten.	Ausgeglichene Sterbens-Wahrscheinlichkeiten des Monatshefts.	Nach der parabolischen Methode ausgeglichene Sterbens-Wahrscheinlichkeiten.	Alter.	Unausgeglichene Sterbens-Wahrscheinlichkeiten.	Ausgeglichene Sterbens-Wahrscheinlichkeiten des Monatshefts.	Nach der parabolischen Methode ausgeglichene Sterbens-Wahrscheinlichkeiten.
1	2	3	4	1	2	3	4
0	0.25273	0.25273	0.25273	**48**	0.01960	0.01941	0.01940
4	1705	1705	1694	**52**	2387	2374	2370
8	668	665	665	**56**	2979	2956	2938
12	375	368	371	**60**	3856	3820	3829
16	452	451	449	**64**	5155	5118	5159
20	750	750	749	**68**	6960	6942	6896
24	847	847	850	**72**	9464	9489	9408
28	894	885	887	**76**	13057	12965	13192
32	982	984	980	**80**	17585	17448	17500
36	1152	1148	1145	**84**	23178	22900	23027
40	1364	1363	1356	**88**	28661	28852	28462
44	1617	1605	1625				

Für die praktische Anwendung der Methode sind noch folgende Bemerkungen zu machen.

Wenn die unausgeglichene Zahlenreihe der Sterbens-Wahrscheinlichkeiten in ihrer Aufeinanderfolge grosse Unregelmässigkeiten zeigt, so thut man gut, vor Beginn der Ausgleichung eine Ordnung der Zahlenreihe derart einzuführen, dass man aus fünf aufeinanderfolgenden Werthen das arithmetische Mittel bildet und dieses an Stelle des mittelsten der genommenen Werthe einsetzt und erst auf die so geordnete Zahlenreihe das Ausgleichungsverfahren anwendet.

Da die Grössen A, B, C, D und E von x allein abhängen, so sind sie unabhängig von der jedesmaligen Beobachtung und können für jedes Alter x von vornherein berechnet werden. Ausserdem hat man sich nur eine Tabelle für die drei Summen $\Sigma(y)$, $\Sigma(x.y)$ und $\Sigma(x^2.y)$ aufzustellen.

Dresden. LUDWIG ANTON.

V.

Darstellung der Curven dritter Ordnung und Classe aus zwei Reciprocitäten.

Von

Dr. Chr. Beyel
in Zürich.

A. Allgemeine Sätze und Definitionen.

1. Wir gehen von einem Dreieck $ABC(abc)$ und einem Punkte P seiner Ebene aus. Wir construiren durch P eine Gerade p, welche mit den Strahlen aus P nach ABC in vorgeschriebener Reihenfolge ein gegebenes Doppelverhältniss Δ bildet. Es sei also $(PA, PB, PC, p) = \Delta$. Dann schneidet — wie wir anderen Ortes* bewiesen haben — die Gerade p aus den Seiten abc des Dreiecks ABC drei Punkte $P_a P_b P_c$, für welche $(P_a P_b P_c P) = \Delta$. Somit wird durch $ABC(abc)$ und Δ jedem Punkte P der Ebene eine Gerade p durch P eindeutig zugeordnet und jeder Geraden p einer ihrer Punkte.

Wir bezeichnen diese specielle Reciprocität mit $(A, B, C\Delta)$. ABC seien die Grundpunkte, abc die Grundlinien der Reciprocität.

An dem citirten Orte zeigten wir ferner, dass in der definirten Reciprocität den Punkten einer Geraden g die Tangenten eines Kegelschnittes entsprechen. Derselbe hat abc zu Tangenten und wird von g in dem Punkte G berührt, welcher g entspricht. Den Strahlen eines Büschels mit dem Scheitel G correspondiren die Punkte eines Kegelschnittes durch $ABCG$, der in G von g berührt wird. Daraus folgt, dass der Schnittpunkt S von zwei Geraden p, q, welche P, Q, entsprechen, mit diesen Punkten und ABC auf einem Kegelschnitt liegen muss. Die Tangente s, welche in S diesen Kegelschnitt berührt, entspricht dem Punkte S. Der Verbindungslinie v der Punkte PQ entspricht der Berührungspunkt V von v mit dem Kegelschnitt, welcher $abcpqv$ zu Tangenten hat. Mit Hilfe von diesen Sätzen können wir mit dem Lineal in der definirten Reciprocität zusammengehörige Elemente construiren.

---

* Ueber eine ebene Reciprocität und ihre Anwendung auf die Curventheorie. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XXXI, S. 147.

2. Wir wenden uns zu dem Kegelschnittnetz, welches ABC zu Grundpunkten hat. P sei ein Punkt seiner Ebene. Dann geht durch P ein bestimmter Kegelschnitt P^2 des Netzes von der Art, dass die Strahlen von irgend einem Punkte des Kegelschnittes nach $ABCP$ in vorgeschriebener Reihenfolge ein gegebenes Doppelverhältniss Δ bilden. P^2 wird in P von derjenigen Geraden p berührt, welche dem Punkte P in der Reciprocität $(ABC\Delta)$ entspricht.

Den Kegelschnitten des Netzes durch ABC stehen diejenigen der Schaarschaar gegenüber, welche abc zu Tangenten haben. Unter diesen Kegelschnitten giebt es je einen, welcher eine beliebige Gerade p berührt und dessen Tangenten aus $abcp$ vier Punkte von vorgeschriebenem Doppelverhältniss Δ schneiden. Dieser Kegelschnitt berührt p in dem Punkte P, welcher p in der Reciprocität $(ABC\Delta)$ entspricht.

Nach dem Gesagten können wir durch $ABC(abc)$ und Δ jedem Punkte P der Ebene einen Kegelschnitt P^2 zuordnen, welcher durch P geht und jeder Geraden p einen Kegelschnitt P_2, der p berührt.

Wir bezeichnen diese specielle quadratische Transformation mit $(ABC\Delta)^2$.

Zeichnen wir in dieser Transformation zu zwei Punkten PQ die entsprechenden Kegelschnitte P^2Q^2, so müssen diese ausser ABC noch einen Punkt V gemeinsam haben, der auf der Verbindungslinie v von P und Q liegt; denn nur in diesem Falle können die Strahlen aus V nach ABC mit dem Strahle nach P dasselbe Doppelverhältniss Δ bilden, wie mit dem Strahle nach Q. Wenn aber v mit diesen Strahlen das Doppelverhältniss Δ bildet, so ist V der entsprechende Punkt zu v in der Reciprocität $(ABC\Delta)$. Er ist also von der Lage der Punkte P, Q auf v unabhängig. Daraus schliessen wir, dass alle Kegelschnitte, welche in $(ABC\Delta)^2$ den Punkten einer Geraden v entsprechen, ein Büschel bilden. $ABCV$ sind seine Grundpunkte.

Die duale Ueberlegung führt zu dem Schlusse, dass den Geraden eines Büschels in der Transformation $(ABC\Delta)^2$ die Kegelschnitte einer Schaar zugeordnet sind. Sie hat abc zu gemeinsamen Tangenten und ferner die Gerade g, welche dem Scheitel G des Büschels in der Reciprocität $(ABC\Delta)$ entspricht.

Sei P^2 ein beliebiger Kegelschnitt des Netzes mit den Grundpunkten ABC, so entspricht er in $(ABC\Delta)^2$ einem seiner Punkte P. Wir finden denselben, indem wir aus irgend einem Punkte T von P^2 nach ABC Strahlen ziehen und einen Strahl t nach der Bedingung $(TA, TB, TC, t) = \Delta$ construiren. Er schneidet P^2 ein zweites Mal in P. Nun ist nach Construction t die entsprechende Linie zu T in der Reciprocität $(ABC\Delta)$. Folglich müssen alle Geraden, welche den Punkten von P^2 in dieser Reciprocität zugeordnet sind, durch den Punkt P gehen, dem P^2 in $(ABC\Delta)^2$ entspricht.

Der duale Gedankengang zeigt uns, wie wir die Tangente p finden, welche einem Kegelschnitt P_2 der Schaarschaar mit den Grundlinien abc entspricht. p ist der Ort aller Punkte, die den Tangenten von P_2 in der Reciprocität $(ABC\Delta)$ correspondiren.

3. Wir untersuchen jetzt, wie sich die definirten Verwandtschaften für die Ecken und Seiten des Dreiecks ABC specialisiren.

Fällt der Punkt P mit einer Ecke A zusammen, so können wir jede Gerade durch A als einen Strahl PA auffassen. Folglich entsprechen in der Reciprocität $(ABC\Delta)$ einem Grundpunkte die Geraden durch ihn.

Der Kegelschnitt, welcher A in $(ABC\Delta)^2$ entspricht, hat in A einen Doppelpunkt und zerfällt daher in AB und AC. Allgemein heisst dies: Einem Grundpunkte correspondiren in der Transformation $(ABC\Delta)^2$ die Grundlinien durch ihn.

Einer Geraden p durch A entspricht in $(ABC\Delta)^2$ ein Kegelschnitt, der abc und p berührt. Folglich zerfällt er in zwei Punkte, deren einer A ist. Im anderen $-E-$ müssen sich die Geraden schneiden, welche in der Reciprocität $(ABC\Delta)$ den Punkten von p entsprechen. E liegt also in a und wird gefunden, wenn wir a mit einer Geraden h schneiden, welche einem beliebigen Punkte H von p correspondirt. Dann ist $(HA, HB, HC, h) = \Delta$. Schneiden wir dieses Büschel mit a und sei P_a der Schnitt von p mit a, so ist $(P_a BCE) = \Delta$.

Die dualen Beziehungen lauten: Einer Grundlinie entspricht in $(ABC\Delta)$ jeder ihrer Punkte. Der Kegelschnitt, welcher in $(ABC\Delta)^2$ einer Grundlinie correspondirt, zerfällt in die zwei Grundpunkte, welche auf der Grundlinie liegen. Einem Punkte P von a entspricht ein Kegelschnitt, der in zwei Gerade ausartet. Die eine ist a. Die andere e ist der Ort aller Punkte, welche in $(ABC\Delta)$ den Geraden durch P entsprechen. Sie geht durch A und wird nach der Relation $(AP, b, c, e) = \Delta$ construirt.

4. Wir führen zum Schlusse die Bestimmungsart von $(ABC\Delta)$ in eine neue Form über, welche uns gestattet, zwei der Punkte ABC als conjugirt imaginäre anzunehmen. P, p und G, g seien entsprechende Paare von $(ABC\Delta)$. Die Schnittpunkte von p und g mit abc seien resp. $P_a P_b P_c$ und $G_a G_b G_c$; dann ist nach Definition: $(P_a P_b P_c P) = \Delta = (G_a G_b G_c G)$. Projiciren wir diese zwei Gruppen aus A, so erhalten wir projectivische Büschel, welche b, c zu Doppelstrahlen und die Geraden AP_a, AP; AG_a, AG zu entsprechenden Paaren haben. Wir können somit die Reciprocität $(ABC\Delta)$ auch in folgender Weise bestimmen:

Wir geben einen reellen Punkt A und eine reelle Gerade a. A machen wir zum Scheitel von zwei projectivischen Büscheln. Construiren wir in diesen zum Strahle AP den entsprechenden, so trifft er a in einem Punkte von p. In den Doppelstrahlen der Büschel liegen die Punkte BC. Diese können also imaginär werden. Mit $(ABC\Delta)$ ist auch $(ABC\Delta)^2$ bestimmt. Werden B und C imaginär, so gehen die Kegelschnitte des Netzes durch die definirten imaginären Punkte B, C. Die Kegelschnitte der Schaarschaar berühren die imaginären Geraden AB, AC.

B. Curven dritter Ordnung und Classe.

a) Darstellung aus zwei Reciprocitäten.

1. In derselben Ebene seien zwei Reciprocitäten $(ABC\Delta)$, $(A_1B_1C_1\Delta_1)$ und damit zwei quadratische Transformationen $(ABC\Delta)^2$, $(A_1B_1C_1\Delta_1)^2$ gegeben. P sei ein beliebiger Punkt der Ebene. Ihm correspondirt in jeder Transformation ein Kegelschnitt. Wir wollen zwei solche Kegelschnitte entsprechende nennen. Sie haben ausser P noch drei gemeinsame Punkte XYZ. Wir bezeichnen sie als das zu P conjugirte Punktetripel.

Wir leiten einige Eigenschaften der Punktetripel ab.

Verbinden wir eine Tripelecke X mit P und den Grundpunkten der Reciprocitäten, so ist nach Definition $(X.ABCP)=\Delta$ und $(X.A_1B_1C_1P)=\Delta_1$, das heisst: einer Tripelecke X entspricht in den Reciprocitäten $(ABC\Delta)$ und $(A_1B_1C_1\Delta_1)$ die nämliche Gerade. Daraus folgt weiter: Einer Tripelecke entsprechen in den Transformationen $(ABC\Delta)^2$ und $(A_1B_1C_1\Delta_1)^2$ Kegelschnitte, welche sich in der Tripelecke berühren. Diese Kegelschnitte schneiden sich aber in dem Punktetripel, welches zu X conjugirt ist; folglich ist X eine Ecke des Tripels, das heisst: Jede Tripelecke ist einmal zu sich selbst conjugirt.

Construiren wir zu allen Punkten der Geraden XP in $(ABC\Delta)^2$ und $(A_1B_1C_1\Delta_1)^2$ die entsprechenden Kegelschnitte, so bilden sie zwei Büschel. Jedes derselben hat den Punkt X, welcher der Geraden XP in den Reciprocitäten $(ABC\Delta)$ und $(A_1B_1C_1\Delta_1)$ entspricht, zu einem Grundpunkte. Also gehört X allen Punktetripeln an, welche zu den Punkten der Geraden XP conjugirt sind. Mit anderen Worten will dies sagen: Jede Tripelecke X ist zu unendlich vielen Punkten conjugirt. Sie liegen auf der Geraden, welche dem Punkte X in den Reciprocitäten $(ABC\Delta)$ und $(A_1B_1C_1\Delta_1)$ entspricht. Daraus folgt: Irgend zwei Tripelecken sind zu dem Punkte conjugirt, in welchem sich die Geraden schneiden, die den Tripelecken in $(ABC\Delta)$ und $(A_1B_1C_1\Delta_1)$ entsprechen. Weiter folgt: Drei Tripelecken gehören dem nämlichen Punktetripel an, wenn die Geraden, welche diesen Ecken in $(ABC\Delta)$ und $(A_1B_1C_1\Delta_1)$ entsprechen, sich in einem Punkte treffen.

2. Wir fragen nach dem Orte aller Tripelecken.

Sei p eine beliebige Gerade, so erhalten wir die Tripelecken, welche auf p liegen, in folgender Weise: Wir construiren zu den Punkten von p in den Reciprocitäten $(ABC\Delta)$ und $(A_1B_1C_1\Delta_1)$ die entsprechenden Geraden.

Sie umhüllen zwei Kegelschnitte K^2, $K_1{}^2$. Es sind die Kegelschnitte, welche der Geraden p in den Transformationen $(ABC\Delta)^2$ und $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)^2$ entsprechen. p ist eine Tangente beider Kegelschnitte. Jede der drei übrigen gemeinsamen Tangenten entspricht in $(ABC\Delta)$ und $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)$ demselben Punkte auf p. Also ist dieser eine Tripelecke. Auf p liegen somit drei Tripelecken und da p eine beliebige Gerade war, so schliessen wir:

Der Ort aller Tripelecken ist eine Curve dritter Ordnung C^3.

Nach dem, was oben über die Tripelecken bewiesen wurde, lässt sich die Entstehung von C^3 auch so aussprechen: Construiren wir in den zwei Reciprocitäten $(ABC\Delta)$ und $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)$ die Punkte, denen die nämlichen Geraden entsprechen, so erhalten wir eine C^3; oder: Die entsprechenden Kegelschnitte der Transformationen $(ABC\Delta)^2$ und $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)^2$ schneiden sich — ausser im Punkte, dem sie zugeordnet sind — noch in drei Punkten einer C^3; oder: Construiren wir in den Transformationen $(ABC\Delta)^2$ und $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)^2$ die Kegelschnitte, welche einander in ihren entsprechenden Punkten berühren, so ist der Ort der Berührungspunkte eine C^3.

Es kann nun vorkommen, dass von den drei Punkten eines Punktetripels zwei oder drei zusammenfallen. Dann müssen sich die Kegelschnitte, die sich in den Transformationen entsprechen und ein solches Tripel gemeinsam haben, entweder berühren oder osculiren. Wir sagen daher:

Diejenigen entsprechenden Kegelschnitte von $(ABC\Delta)^2$ und $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)^2$, welche sich in einem Punkte berühren oder osculiren, dem sie nicht zugeordnet sind, berühren oder osculiren in diesem Punkte die Curve dritter Ordnung.

3. Durch die Geraden p der Ebene werden die Kegelschnitte von $(ABC\Delta)^2$ und $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)^2$, einander eindeutig zugeordnet, das heisst jeder Geraden entspricht in der einen und anderen Transformation ein Kegelschnitt. Je zwei solche Kegelschnitte haben ausser p drei gemeinsame Tangenten q, r, s. Sie stehen dem Punktetripel dual gegenüber, von dem in 1. die Rede war. Wir nennen daher qrs die Seiten des zu p conjugirten Linientripels. Seine Eigenschaften sind die dualen zu denen des Punktetripels. Folglich gehen durch jeden Punkt P der Ebene drei Tripelseiten. Sie sind die Verbindungslinien von P mit drei gemeinsamen Punkten XYZ der zwei Kegelschnitte, welche dem Punkte P in den Transformationen $(ABC\Delta)^2$ und $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)^2$ entsprechen. Daraus folgt, dass die Tripelseiten eine Curve dritter Classe C_3 umhüllen. Sie ist die Enveloppe der Linien, welche den Punkten von C^3 in den Reciprocitäten $(ABC\Delta)$ und $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)$ entsprechen.

Wir wollen einen Punkt P von C^3 und die ihm in $(ABC\Delta)$ und $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)$ entsprechende Gerade p zusammengehörende Elemente von C^3

und C_3 nennen. Dann ergiebt sich aus 1. für den Zusammenhang von Punktetripel und Linientripel:

Die Tripelseiten, welche zu den Ecken eines Punktetripels gehören, schneiden sich in einem Punkte. Die Tripelecken, welche zu den Seiten eines Linientripels gehören, liegen in einer Geraden. Daraus folgt für die Curven C^3 und C_3: Von den Tangenten der Curve dritter Classe, welche durch die Ecken eines Punktetripels der Curve dritter Ordnung gehen, schneiden sich drei in einem Punkte. Also umhüllen die anderen sechs einen Kegelschnitt. Ferner: Die Tangenten der Curve C_3, welche einem Linientripel angehören, schneiden die Curve dritter Ordnung in drei Punkten einer Geraden. Also liegen die sechs anderen Schnittpunkte auf einem Kegelschnitt.

b) Linealconstructionen von Punkten und Tangenten.

4. Wir heben ausgezeichnete Elemente von C^3 und C_3 hervor.

Einer Seite — etwa a — des Dreiecks ABC entspricht in der Reciprocität $(ABC\Delta)$ jeder Punkt von a (A.3). Zeichnen wir zu dieser Seite den entsprechenden Punkt in $(A_1B_1C_1\Delta_1)$, so muss er der Linie a in beiden Reciprocitäten correspondiren. Also liegt er auf C^3. Indem wir diesen Schluss für alle Grundlinien der Reciprocitäten ziehen, folgt: Construiren wir zu einer Seite des Grundpunktdreiecks der einen Reciprocität den entsprechenden Punkt in der anderen, so liegt er auf C^3.

Diese Construction führt zu sechs Punkten der C^3. Wir wollen dieselben je nach ihrer Lage auf abc, $a_1b_1c_1$ mit $A^*B^*C^*$ und $A_1^*B_1^*C_1^*$ bezeichnen und die Sternpunkte der Reciprocitäten nennen. Zu jedem Grundpunkte gehört also ein ihm gleichnamiger Sternpunkt.

Wir können die Sternpunkte auf eine zweite Weise ableiten.

Dem Punkte A entsprechen in der Transformation $(ABC\Delta)^2$ die Geraden AB, AC (A. 3). Zeichnen wir den Kegelschnitt, welcher dem Punkte A in $(A_1B_1C_1\Delta_1)^2$ correspondirt, so muss er AB und AC in drei Punkten von C^3 schneiden. Der eine ist A. Die zwei anderen sind die Sternpunkte B^* und C^*. Daraus folgt allgemein: Die Grundpunkte der Transformationen liegen auf C^3. Construiren wir zu einem Grundpunkte der einen Transformation den entsprechenden Kegelschnitt in der anderen, so liegen auf ihm die zwei Sternpunkte der ersten Transformation, welche nicht zu dem erwähnten Grundpunkte gleichnamig sind. Sie bilden mit diesem Grundpunkte ein zu ihm conjugirtes Punktetripel.

Die duale Ueberlegung zeigt, dass die Grundlinien und die sechs Linien $a^*b^*c^*$, $a_1^*b_1^*c_1^*$ (Sternlinien), welche den resp. Grundpunkten einer Reciprocität in der anderen entsprechen, Tangenten von C_3 sind.

Kennen wir die Sternpunkte, so finden wir aus ihnen die Sternlinien nach der Bemerkung, dass zwei Sternlinien mit der Grundlinie, welche die auf den Sternlinien liegenden Grundpunkte verbindet, ein Linientripel bilden. Dasselbe ist zur Grundlinie conjugirt. Construiren wir also einen Kegelschnitt, welcher die Grundlinien der einen Reciprocität und eine Grundlinie der anderen im zugehörigen Sternpunkte berührt, so sind die Tangenten, welche aus den Grundpunkten dieser Grundlinie noch an den Kegelschnitt gehen, zwei Sternlinien.

5. Wir suchen jetzt die Punkte von C^3, welche auf den neun Verbindungslinien von je einem Grundpunkte der einen und anderen Reciprocität liegen, sowie die dualen Tangenten von C_3. Sei AA_1 eine solche Verbindungslinie, so entsprechen ihr in $(ABC\Delta)^2$ und $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)^2$ Kegelschnitte, welche in zwei Punkte AE und $A_1 E_1$ zerfallen (A. 3). Der Punkt E des ersten Kegelschnittes wird gefunden, indem wir zu irgend einem Punkte — etwa A_1 — der Geraden AA_1 in $(ABC\Delta)$ die entsprechende Linie — $a_1{}^*$ — zeichnen. Sie schneidet a in E. Der Punkt E_1 des zweiten Kegelschnittes wird erhalten, wenn wir wieder zu einem Punkte auf AA_1 — wir wählen jetzt A — die entsprechende Linie — a^* — in $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)$ construiren. Sie trifft a_1 in E_1. EE_1 ist eine gemeinsame Tangente beider Kegelschnitte. Auf ihr und AA_1 liegt der gesuchte Punkt von C^3. Sie correspondirt diesem Punkte in $(ABC\Delta)$ und $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)$. Folglich berührt sie die Curve C_3. Indem wir diese Construction verallgemeinern, folgt: Schneiden wir eine Sternlinie der einen Reciprocität mit einer Grundlinie der anderen und die zu dieser Grundlinie gleichnamige Sternlinie mit der Grundlinie, welche zur ersten Sternlinie gleichnamig ist, so berührt die Verbindungslinie der zwei Schnittpunkte die Curve C_3 und schneidet aus der Verbindungslinie der Grundpunkte, welche auf den zwei Sternlinien liegen, einen Punkt der Curve C^3.

Der duale Satz sagt: Verbinden wir einen Sternpunkt der einen Reciprocität mit einem Grundpunkte der anderen und den zu diesem Grundpunkte gleichnamigen Sternpunkt mit dem Grundpunkte, welcher zum ersten Sternpunkte gehört, so schneiden sich beide Verbindungslinien in einem Punkte von C^3. Die Gerade durch ihn und den Schnittpunkt der Grundlinien, auf welchen die zwei Sternpunkte liegen, berührt C_3.

Diese Sätze führen zu 18 Punkten der C^3 und zu ebensoviel Tangenten der C_3. Neun der Punkte liegen auf den Geraden AA_1, AB_1... und seien dem entsprechend mit P_{aa_1}, P_{ab_1}, P_{ac_1}; P_{ba_1}, P_{bb_1}, P_{bc_1} und P_{ca_1}, P_{cb_1}, P_{cc_1} bezeichnet. Die neun anderen Punkte sind Schnitte der Geraden $AA_1{}^*$, A^*A_1; $AB_1{}^*$, A^*B_1... Wir bezeichnen daher diese Punkte mit $P^*_{aa_1}$, $P^*_{ab_1}$, $P^*_{ac_1}$; $P^*_{ba_1}$, $P^*_{bb_1}$, $P^*_{bc_1}$; $P^*_{ca_1}$, $P^*_{cb_1}$, $P^*_{cc_1}$. Duale Bezeichnungen $-t_{aa_1} \ldots - t^*_{aa_1} \ldots$ lassen sich für die gefundenen 18 Tangenten der C_3 einführen.

6. Wir leiten einige Beziehungen zwischen den Punkten $P_{..}$ und $P^*_{..}$ ab. Dazu benutzen wir folgenden bekannten Satz aus der Curventheorie: Drei Gerade, die eine C^3 in sechs Punkten eines Kegelschnittes treffen, enthalten drei weitere Punkte der C^3, die in einer Geraden liegen.

Gehen wir von einem Punkte $P_{..}$, etwa P_{ab_1}, aus, so liegt er auf der Geraden AB_1. Oben haben wir gezeigt, dass durch die Punkte $ABCA_1^*B_1C_1^*$ ein Kegelschnitt geht. Folglich liegen auf den Geraden AB_1, BA_1^*, CC_1^* noch drei Punkte von C^3, die einer Geraden angehören, und ebenso auf den Linien AB_1, BC_1^* und CA_1^*. Folglich schneiden sich die Verbindungslinien von $P^*_{ba_1}$, $P^*_{cc_1}$ und $P^*_{bc_1}$, $P^*_{ca_1}$ im Punkte P_{ab_1}. Zu demselben Schlusse gelangen wir, wenn wir von dem Kegelschnitt durch $A_1B_1C_1$ AB^*C^* ausgehen. Beginnen wir dagegen unsere Schlussweise mit einem Punkte $P^*_{..}$ etwa $P^*_{ab_1}$, der auf der Geraden AB_1^* liegt, so wissen wir, dass die sechs Punkte $ABCA_1B_1^*C_1^*$ einem Kegelschnitte angehören. Folglich schneiden die Geraden AB_1^*, CA_1, BC_1^* und AB_1^*, BA_1, CC_1^* die Curve dritter Ordnung in den resp. Punkten $P^*_{ab_1}$, P_{ca_1}, $P^*_{bc_1}$ und $P^*_{ab_1}$, P_{ba_1}, $P^*_{cc_1}$, die in zwei Geraden liegen. Weil aber auch die Punkte ABC $A_1^*B_1^*C_1$ einem Kegelschnitt angehören, müssen die Geraden AB_1^*, BC_1, CA_1^* und AB_1^*, CC_1, BA_1^* aus C^3 die resp. Punkte $P^*_{ab_1}$, P_{bc_1}, $P^*_{ca_1}$ und $P^*_{ab_1}$, P_{cc_1}, $P^*_{ba_1}$ schneiden, die auf zwei Geraden liegen. Nun liegt $P^*_{ab_1}$ auch auf der Geraden A^*B_1 und sowohl $A^*B^*CA_1B_1C_1$, als auch $A^*BC^*A_1B_1C_1$, sind sechs Punkte eines Kegelschnittes. Aus diesem Umstande können wir die nämlichen Schlüsse ziehen, wie die vorstehenden. Fassen wir diese in ein Gesetz zusammen, so lautet dasselbe: Durch jeden der Punkte $P_{..}$ gehen zwei Paare von Verbindungslinien der Punkte $P^*_{..}$ Durch jeden der Punkte $P^*_{..}$ gehen vier Gerade, welche je einen Punkt $P_{..}$ mit einem Punkte $P^*_{..}$ verbinden. Kennen wir den Index von einem dieser Punkte, der stets einer Grundlinie der einen und einer Grundlinie der anderen Reciprocität entspricht, so geben die übrigen Grundlinien die Indices der Punkte an, deren resp. Verbindungslinien durch den erwähnten Punkt gehen. Diese vier Indices lassen sich zu zwei Paaren von Punkten $P^*_{..}$ combiniren und in viererlei Weise zu einem Punktepaar $P_{..}\,P^*_{..}$. So gehen zum Beispiel durch P_{bc_1} die zwei Geraden $P^*_{aa_1}$, $P^*_{cb_1}$ und $P^*_{ca_1}$, $P^*_{ab_1}$. Durch $P^*_{bc_1}$ gehen die vier Geraden $P_{aa_1}P^*_{cb_1}$; $P_{ab_1}P^*_{ca_1}$, $P_{ca_1}P^*_{ab_1}$ und $P_{cb_1}P^*_{ac_1}$.

Wir begnügen uns zu bemerken, dass für die Tangenten $t_{..}$, $t^*_{..}$ der C_3 duale Beziehungen bestehen.

7. Für die Punkte P lassen sich noch einige weitere Zusammenhänge ableiten. Um diesen eine bequeme Form geben zu können, bezeichnen wir die dritten Punkte, in welchen C^3 die Geraden A^*B^*, B^*C^*, C^*A^* und

$A_1{}^*B_1{}^*$, $B_1{}^*C_1{}^*$, $C_1{}^*A_1{}^*$ trifft, resp. mit C^{**}, A^{**}, B^{**} und $C_1{}^{**}A_1{}^{**}B_1{}^{**}$ und nennen diese Punkte doppelte Sternpunkte. Dann knüpfen wir wieder an den Kegelschnitt an, welcher durch die Punkte $ABCA_1B_1{}^*C_1{}^*$ geht. Verbinden wir diese Punkte durch die Geraden AA_1, BC, $B_1{}^*C_1{}^*$ oder BA_1, AC, $B_1{}^*C_1{}^*$ oder CA_1, AB, $B_1{}^*C_1{}^*$, so müssen ihre resp. dritten Schnittpunkte mit C^3, also die Punkte: P_{aa_1}, A^*, $A_1{}^{**}$ oder P_{ba_1}, B^*, $A_1{}^{**}$ oder P_{ca_1}, C^*, $A_1{}^{**}$, auf Geraden liegen. Folglich ist das Dreieck $P_{aa_1}P_{ba_1}P_{ca_1}$ perspectivisch zum Dreieck $A^*B^*C^*$. $A_1{}^{**}$ ist das Perspectivcentrum.

Aus den Kegelschnitten, welche durch die Punkte $ABCA_1{}^*B_1C_1{}^*$ und $ABCA_1{}^*B_1{}^*C_1$ gehen, schliessen wir, dass die Geraden AB_1, BC, $A_1{}^*C_1{}^*$ und AC_1, BC, $A_1{}^*B_1{}^*$ aus der Curve dritter Ordnung die resp. Punkte P_{ab_1}, A^*, $B_1{}^{**}$ und P_{ac_1}, A^*, $C_1{}^{**}$ schneiden, die in zwei Geraden liegen. Oben fanden wir, dass auch die Punkte P_{aa_1}, A^*, $A_1{}^{**}$ auf einer Geraden liegen. Mithin ist das Dreieck $P_{aa_1}P_{ab_1}P_{ac_1}$ zum Dreieck $A_1{}^{**}B_1{}^{**}C_1{}^{**}$ perspectivisch mit A^* als Perspectivcentrum. Wir stellen daher folgendes Gesetz auf:

Zeichnen wir aus einem Grundpunkte der einen Reciprocität als Centrum dasjenige Dreieck von Punkten der C^3, welches zum Grundpunktdreieck der anderen Reciprocität perspectivisch liegt, so muss dasselbe auch zum Dreieck der Sternpunkte und zum Dreieck der doppelten Sternpunkte perspectivisch sein. Perspectivcentra sind resp. der doppelte Sternpunkt und der Sternpunkt der ersten Reciprocität, welche mit dem zuerst erwähnten Grundpunkte gleichnamig sind.

Für die Curve C_3 führen wir die sechs doppelten Sternlinien ein, welche durch die Schnittpunkte der resp. Sternlinien gehen. Dann lässt sich zeigen, dass Sternlinien und doppelte Sternlinien Perspectivachsen zwischen Dreiecken sind, welche von drei Grundlinien und drei doppelten Sternlinien resp. von drei Grundlinien und drei Sternlinien einer Reciprocität gebildet werden.

8. Wir geben jetzt einen beliebigen Punkt G der Curve C^3. g sei die zugehörige Tangente der Curve C_3. Wir suchen die Punkte von C^3, welche auf den Geraden GA, GB.. liegen und die Tangenten von C_3, welche durch die Schnittpunkte von g mit a, b.. gehen. Wir bezeichnen die Geraden GA, GB... resp. mit $r_a\,r_b\,r_c$ und $r_{a_1}r_{b_1}r_{c_1}$. Die gesuchten Punkte der C^3 seien resp. $G_a\,G_b\,G_c$ und $G_{a_1}\,G_{b_1}\,G_{c_1}$. Dann wird durch die Grundpunkte $A_1B_1C_1$ und durch GA^* ein Kegelschnitt bestimmt, welcher a im Schnittpunkte S_a von g und a ein zweites Mal trifft. Dieser Kegelschnitt entspricht in der Transformation $(A_1B_1C_1\Delta_1)^2$ dem Punkte S_a. Demselben Punkte correspondirt in $(ABC\Delta)^2$ ein Kegelschnitt, der in zwei Gerade a und r_a zerfällt. Folglich schneiden diese Geraden aus dem zuerst erwähnten Kegelschnitt drei Punkte von C^3. Zwei davon sind G und A^*. Der dritte ist G_a. Daraus ergiebt sich allgemein:

Legen wir durch die Grundpunkte der einen Reciprocität und einen Sternpunkt der anderen, sowie durch einen beliebigen Punkt G von C^3 einen Kegelschnitt, so trifft er die Gerade, welche G mit dem zum Sternpunkte gleichnamigen Grundpunkte verbindet, in einem sechsten Punkte von C^3.

Wir construiren G_a nach dem Pascal'schen Satze. Zu diesem Zwecke schneiden wir die Gerade GA^* mit a_1 und r_a mit b_1. Die Verbindungslinie beider Punkte trifft $A_1 A^*$ in einem Punkte, den wir aus B_1 auf r_a projiciren. Die Projection ist G_a.

Aus dieser Construction leiten wir folgende allgemeine Regel ab:

Wir ziehen durch G nach einem Sternpunkte die Gerade r^* und nach dem gleichnamigen Grundpunkte die Gerade r. Wir schneiden r^* mit einer und r mit einer zweiten Grundlinie der Reciprocität, zu welcher der Sternpunkt nicht gehört. Wir verbinden diese Schnittpunkte und projiciren auf diese Gerade den Sternpunkt aus demjenigen Grundpunkte, welcher der zuerst erwähnten Grundlinie gegenüber liegt. Die Projection verbinden wir mit dem Grundpunkte, welcher der zweiten Grundlinie gegenüber liegt. Dann schneidet die Verbindungslinie aus r einen Punkt von C^3.

Diese Linealconstruction giebt uns die zwei Dreiecke von Punkten der C^3, welche mit G als Centrum zu den Grundpunktdreiecken perspectivisch sind. Zu jedem dieser Punkte können wir mit dem Lineal neue perspectivische Dreiecke und somit beliebig viele Punkte der C^3 construiren. Der duale Gedankengang zeigt uns die Linienconstruction von beliebig viel Tangenten der C_3.

9. Wir wollen nun sämmtliche Punktetripel der Curve C^3 zeichnen, welche den beliebigen Punkt G von C^3 zu einer Ecke haben. Diese Tripel sind zu den Punkten X der Geraden g conjugirt (1).

Sei K^2 ein Kegelschnitt, welcher durch $ABCG$ und einen beliebigen Punkt X von g geht, und K_1^2 der Kegelschnitt durch $A_1 B_1 C_1 G$ und X, so schneiden sich beide Kegelschnitte in zwei weiteren Punkten HF von C^3. Weil diese Punkte und $A_1 B_1 C_1 G$ einem Kegelschnitte angehören, so müssen die Linien GA_1, $B_1 C_1$ und die (stets reelle) Linie HF aus C^3 drei weitere Punkte schneiden, die in einer Geraden liegen. Zwei dieser Punkte sind G_{a_1} und A_1^*. Also geht HF durch den dritten Punkt G^{**}, in welchem die Linie $G_{a_1} A_1^*$ die Curve C^3 noch trifft. Lassen wir jetzt X die Linie g durchlaufen, so gehört zu jeder Lage von X eine andere Linie HF. Für alle diese Linien HF gilt der oben gezogene Schluss, das heisst:

In allen Punktetripeln, die eine Ecke G gemeinsam haben, gehen die Seiten, welche dieser Ecke gegenüber liegen, durch einen Punkt G^{**} von C^3.

Wir wollen G^{**} den zu G conjugirten oder gleichnamigen doppelten Sternpunkt nennen.

Dann ergiebt sich aus seiner Ableitung noch der Satz:

Projiciren wir aus einem beliebigen Punkte von C^3 die Grundpunkte und aus dem conjugirten doppelten Sternpunkte die Sternpunkte, so schneiden sich diejenigen Projectionsstrahlen, welche durch ein gleichnamiges Paar von Grund- und Sternpunkten gehen, in einem Punkte von C^3.

Wir finden somit wieder die Dreiecke $G_a G_b G_c$, $G_{a_1} G_{b_1} G_{c_1}$ und können sagen:

Die Dreiecke von Punkten der C^3, welche zu den Grundpunktdreiecken mit einem beliebigen Punkte G von C^3 als Centrum perspectivisch liegen, sind auch zu den resp. Sternpunktdreiecken perspectivisch. Der zu G conjugirte Punkt G^{**} ist Perspectivcentrum.

Dieser Satz lehrt uns, wie wir mit dem Lineale zu G den Punkt G^{**} construiren. Wir verbinden G mit zwei Grundpunkten und zeichnen die dritten Schnittpunkte dieser Verbindungslinien mit C^3. Durch diese Punkte und die resp. Sternpunkte, welche zu den zwei Grundpunkten gleichnamig sind, gehen zwei Gerade. Sie schneiden sich in G^{**}. Auf umgekehrtem Wege finden wir zu jedem beliebigen Punkte G^{**} den Punkt G.

10. Wir heben ausgezeichnete conjugirte Punktepaare hervor und knüpfen daran einige Schlüsse.

Oben zeigten wir, dass A mit den Punkten $B^* C^*$ ein Tripel bildet. Die Linie $B^* C^*$ trifft C^3 ein drittes Mal in A^{**}. Also ist A^{**} zu A conjugirt. Allgemein heisst dies:

Die conjugirten zu den Grundpunkten sind die gleichnamigen doppelten Sternpunkte. Daraus folgt weiter: Legen wir durch die Grundpunkte der einen Reciprocität, und durch einen Grundpunkt der anderen und einen beliebigen Punkt G von C^3 einen Kegelschnitt, so trifft er C^3 in einem sechsten Punkte, welcher mit G auf einer Geraden durch den zum Grundpunkte conjugirten doppelten Sternpunkt liegt.

Dieser Satz gestattet uns, mit dem Lineal die Dreiecke von Punkten der C^3 zu finden, welche mit G als Centrum zu den Dreiecken der doppelten Sternpunkte perspectivisch liegen.

Aus dem Umstande, dass $AB^* C^*$ ein Tripel ist, folgt weiter, dass B zu B^* und C zu C^* conjugirt sind, oder allgemein:

Die conjugirten zu den Sternpunkten sind die gleichnamigen Grundpunkte.

Wir finden zu einem Punkte P.. — etwa P_a, — den conjugirten Punkt, indem wir $P_{ab_1} A$ ziehen. Diese Gerade schneidet C^3 ein drittes Mal in B_1. Diesen Punkt verbinden wir mit A^*. Dann muss der conjugirte auf $B_1 A^*$ liegen. Folglich ist er der dritte Schnittpunkt dieser Geraden mit C^3, das heisst: der Punkt $P^*_{ab_1}$. Daraus schliessen wir:

Zu den Punkten $P_{..}$ sind die Punkte $P^*_{..}$ conjugirt, welche dieselben Indices wie $P_{..}$ haben.

Wenden wir auf diese Paare den zweiten Satz von 9 an, so folgt:

Verbinden wir einen Punkt $P_{..}$ mit einem Grundpunkte und den gleichnamigen Punkt $P^*_{..}$ mit dem zum Grundpunkte gehörenden Sternpunkte, so schneiden sich diese Verbindungslinien in einem Punkte von C^3.

Da wir neun Punkte $P_{..}$ haben, können wir diese durch 54 Gerade mit den sechs Grundpunkten verbinden. Von diesen fallen 9 mal 2 in die Verbindungslinien der Grundpunkte je einer und der anderen Reciprocität zusammen. Wenden wir auf diese Linien den Satz an, so beweist er nochmals die in 5 abgeleitete Construction der Punkte $P^*_{..}$. Bei den übrigen 36 Geraden führt er auf 36 neue Punkte der C^3.

Wenden wir den ersten Satz von 9 auf die Paare $P_{..}P^*_{..}$ an, so ergiebt sich:

Der Kegelschnitt, welcher durch die Grundpunkte einer Reciprocität, einen Punkt $P_{..}$ und einen beliebigen Punkt G von C^3 geht, schneidet C^3 in einem sechsten Punkte, der mit dem zu $P_{..}$ gleichnamigen Punkte $P^*_{..}$ auf einer Geraden durch G liegt.

Dieser Satz liefert die Linealconstruction für alle Punkte, welche die Geraden $GP^*_{..}$ noch aus C^3 schneiden.

11. Wir leiten einige Beziehungen für conjugirte Punktepaare ab.

Seien G und H zwei beliebige Punkte von C^3 und $G^{**}H^{**}$ ihre gleichnamigen Sternpunkte, so muss der Kegelschnitt, dem die Punkte $ABCGH$ angehören, aus C^3 einen sechsten Punkt schneiden, der sowohl auf der Geraden HG^{**} als auf der Geraden GH^{**} liegt. Folglich treffen sich diese Geraden in einem Punkte von C^3. Wir wollen das Ziehen der Linien HG^{**} und GH^{**} ein kreuzweises Verbinden der Punkte GH, $G^{**}H^{**}$ nennen. Dann können wir sagen:

Verbinden wir zwei beliebige Punkte von C^3 kreuzweise mit ihren conjugirten doppelten Sternpunkten, so schneiden sich diese Verbindungslinien in einem Punkte von C^3.

Dieser Schnittpunkt bildet mit G und H ein Punktetripel. Daraus folgt:

Wir finden zu zwei beliebigen Punkten GH der Curve C^3 den dritten Punkt, welcher mit GH ein Punktetripel bildet, indem wir zu GH die conjugirten $G^{**}H^{**}$ suchen und sie kreuzweise mit G, H verbinden.

Da wir irgend zwei Punkte von C^3 als Punkte GH^{**} auffassen können, so folgt weiter:

Wir construiren den dritten Punkt, in welchem die Verbindungslinie von zwei Punkten der C^3 diese Curve noch schneidet, indem wir zu einem der zwei Punkte den conjugirten und zum anderen den Punkt suchen, welchem er conjugirt ist. Auf der Geraden, welche durch diese zwei gefundenen Punkte geht, liegt der gesuchte dritte.

Wenden wir diese Sätze auf die in 10 hervorgehobenen conjugirten Paare an, so folgt:

Verbinden wir zwei Grundpunkte kreuzweise mit den zu ihnen conjugirten doppelten Sternpunkten, so schneiden sich diese Verbindungslinien auf C^3.

Da wir sechs Grundpunkte 15 mal zu zweien combiniren können, erhalten wir 15 Paare von Verbindungslinien zwischen Grundpunkt und doppeltem Sternpunkt, welche sich in 15 Punkten von C^3 schneiden. Jeder derselben bildet mit zwei resp. Grundpunkten ein Punktetripel. Für die Punkte $P_{..}\,P_{..}^{*}$ beweisen die entwickelten Sätze: Verbinden wir zwei Punkte $P_{..}$ mit den conjugirten $P_{..}^{*}$ kreuzweise, so schneiden sich diese Verbindungslinien auf C^3.

Durch einen Punkt $P_{..}$ gehen — wie oben (6) bewiesen wurde — zwei Linien, deren jede zwei Punkte $P_{..}^{*}$ enthält. Wir können also noch vier Linien nach solchen Punkten $P_{..}^{*}$ ziehen, die nicht zu $P_{..}$ conjugirt sind. Dem entsprechend erhalten wir 36 Linien durch $P_{..}$, welche sich paarweise in 18 neuen Punkten von C^3 schneiden.

12. Wir beweisen noch einige weitere Beziehungen zwischen conjugirten Paaren.

Seien wieder GH zwei beliebige Punkte von C^3 und sei F_1 der Punkt, welcher mit GH ein Punktetripel bildet, so muss die Linie GH aus C^3 einen dritten Punkt F schneiden, welcher zu F_1 conjugirt ist (9). Suchen wir dann zu GF den Punkt H_1, der mit GF ein Tripel bildet, so ist H zu H_1 conjugirt. Ferner muss der Punkt G_1, welcher mit FH ein Tripel bildet, zum Punkte G conjugirt sein.

Wir leiten nun eine Abhängigkeit zwischen $F_1 G_1 H_1$ und den Punkten $F^{**} G^{**} H^{**}$ ab, welche zu FGH conjugirt sind.

F_1 wird erhalten (11) als Schnittpunkt der Geraden GH^{**}, HG^{**}. In G_1 schneiden sich die Geraden FH^{**}, HF^{**} und in H_1 die Geraden GF^{**}, FG^{**}. Mit anderen Worten heisst dies: F ist der Schnittpunkt der Geraden $G_1 H^{**}$ und $G^{**} H_1$. In G treffen sich die Linien $F_1 H^{**}$ und $H_1 F^{**}$. Durch H gehen die Geraden $G_1 F^{**}$ und $F_1 G^{**}$. Folglich bilden die Punkte $H^{**} G_1 F^{**} H_1 G^{**} F_1$ ein Pascal'sches Sechseck, für welches GH die Pascallinie ist. Die Ecken des Sechsecks liegen daher auf einem Kegelschnitt und wir schliessen:

Construiren wir zu drei Punkten GHF einer C^3, welche auf einer Geraden liegen, die conjugirten Punkte und diejenigen Punkte, denen GHF conjugirt sind, so erhalten wir sechs Punkte eines Kegelschnittes.

Wenden wir diesen Satz auf die drei Punkte $A A_1 P_{a a_1}$ der Geraden $A A_1$ an, so sind also A^{**}, A_1^{**}, $P^*_{a a_1}$ die conjugirten zu diesen Punkten (10). A aber ist zu A^*, A_1 zu A_1^* conjugirt. Folglich muss der Kegelschnitt, welcher durch A^{**}, A_1^{**}, A^*, A_1^*, $P^*_{a a_1}$ geht, aus C^3 den Punkt schneiden, zu dem $P_{a a_1}$ conjugirt ist. Verallgemeinern wir dies, so folgt:

Legen wir durch zwei Sternpunkte und die gleichnamigen doppelten Sternpunkte, sowie den Punkt $P^*_{..}$, dessen Indices den Sternpunkten entsprechen, einen Kegelschnitt, so schneidet er aus C^3 einen sechsten Punkt, welchem der zu $P^*_{..}$ gleichnamige Punkt $P_{..}$ conjugirt ist.

13. Wir übergehen die Linealconstructionen der Curve dritter Classe, welche den in 8—11 entwickelten dual gegenüberstehen und wenden uns zu der Frage nach den Tangenten in Punkten von C^3 und nach den Berührungspunkten von Tangenten der C_3.

Legen wir durch die Grundpunkte einer Reciprocität und durch zwei beliebige Punkte G, H der C^3 einen Kegelschnitt, so müssen sich die zu G, H gehörenden Tangenten g, h der Curve C_3 in einem Punkte dieses Kegelschnittes treffen. Fallen nun die zwei Punkte G, H zusammen, das heisst: ist ihre Verbindungslinie eine Tangente der C^3, so geht der auf dem erwähnten Kegelschnitt befindliche Schnittpunkt der Linien gh in den Berührungspunkt einer Tangente von C_3 über. Daraus schliessen wir:

Ein Kegelschnitt, welcher durch die Grundpunkte der einen Reciprocität geht und die Curve dritter Ordnung in einem Punkte G berührt, schneidet aus der zu G gehörenden Tangente der Curve dritter Classe ihren Berührungspunkt.

Nach diesem Satze finden wir aus der Beantwortung der einen Frage die andere. Wir gehen dabei von den Kegelschnitten aus, welche den Punkten X von g in den Transformationen $(ABC\Delta)^2$ und $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)^2$ entsprechen. Diese Kegelschnitte bilden zwei Büschel mit den Grundpunkten $ABCG$ und $A_1 B_1 C_1 G$. Zu jedem Punkte X von g gehört ein Kegelschnitt des einen und ein Kegelschnitt des anderen Büschels. Wir zeichnen seine Tangenten in G. Durchläuft jetzt X die Linie g, so werden diese Tangenten durch die Punkte von g einander eindeutig zugeordnet und bilden zwei projectivische Büschel um G. g ist ein Doppelstrahl der Büschel. In dem anderen t berühren sich zwei Kegelschnitte, welche in beiden Transformationen dem nämlichen Punkte T auf g entsprechen. Folglich ist T der Berührungspunkt von g mit C_3. Der Doppelstrahl t ist die Tangente in G an C^3.

Führen wir den dualen Gedanken durch, so drehen wir um G eine Gerade x. Jede Lage von x berührt in G einen Kegelschnitt des einen und anderen Büschels. Diese Kegelschnittpaare treffen g in projectivischen Reihen. Ein Doppelpunkt ist G, der andere T.

Bei der Construction der projectivischen Büschel um G und der Reihen auf g suchen wir am einfachsten die entsprechenden zu zwei Strahlen, welche durch zwei Grundpunkte gehen, und die entsprechenden zu zwei Schnittpunkten von g mit zwei Grundlinien.

14. Zwei weitere Constructionen von Tangenten in Punkten der C^3 knüpfen an die Sätze über conjugirte Punktepaare an.

Wir zeigten (11), dass die Geraden GH^{**}, $G^{**}H$ sich in einem Punkte S von C^3 schneiden, der auf einem Kegelschnitt durch $ABCGH$ liegt. Wenn nun G und H in einem Punkte T zusammenfallen, so müssen auch die Punkte $G^{**}H^{**}$ in dem zu T conjugirten doppelten Sternpunkte T^{**} liegen. Folglich schneidet die Linie TT^{**} den Kegelschnitt, welcher in T die Curve C^3 berührt, in einem dritten Punkte S von C^3. Kehren wir diesen Schluss um, so folgt:

Construiren wir denjenigen dritten Punkt S von C^3, welcher auf der Verbindungslinie eines Punktes G mit seinem conjugirten liegt, so muss der Kegelschnitt, welcher die Grundpunkte einer Reciprocität, S und G enthält, in G die Curve C^3 berühren.

Bei einer zweiten Tangentenconstruction gehen wir von einem conjugirten Punktepaar GG^{**} aus. Wir suchen den Punkt S_1, der mit GG^{**} ein Tripel bildet. Wir construiren also zum Punkte G^{**} — den wir jetzt H nennen — den conjugirten H^{**} und ziehen GH^{**}, HG^{**}. Diese Linien schneiden sich in S_1. Nun enthält die Linie HG^{**} in G^{**} zwei benachbarte Punkte von C^3, das heisst, sie berührt C^3 in G^{**}. Bemerken wir noch, dass S_1, G, G^{**} und die Grundpunkte einer Reciprocität dem nämlichen Kegelschnitt angehören, so folgt:

Soll in einem beliebigen Punkte G^{**} von C^3 die Tangente gefunden werden, so zeichnen wir den Punkt G, welchem G^{**} conjugirt ist und den Punkt H^{**}, der zu G^{**} conjugirt ist. Dann schneiden wir den Kegelschnitt, welcher durch die Grundpunkte einer Reciprocität und durch GG^{**} geht, mit GH^{**}. Wir erhalten einen Punkt S_1 von C^3, der auf der Tangente in G^{**} liegt. Indem wir beide Constructionen mit einander vergleichen, sehen wir, dass S_1 zu S conjugirt ist. Daraus schliessen wir: Verbinden wir einen Punkt G von C^3 mit seinem conjugirten G^{**} und sei S der dritte Schnittpunkt dieser Verbindungslinie mit C^3, so geht die Tangente in G^{**} durch den Punkt, welchem S conjugirt ist.

Wenden wir die zweite Construction an, um die Tangente in einem Grundpunkte — etwa A — zu finden, so erinnern wir uns, dass A dem Punkte A^* conjugirt ist, und dass A^{**} der conjugirte zu A ist. Folglich muss ein Kegelschnitt, welcher durch AA^* und $A_1B_1C_1$ geht, aus der Linie A^*A^{**} einen Punkt von C^3 schneiden, der auf der Tangente in A liegt.

Wir schliessen daraus allgemein: Verbinden wir einen Sternpunkt mit dem gleichnamigen doppelten Sternpunkte, so schneidet diese Gerade aus C^3 einen dritten Punkt S_1, der auf der Tangente des zu den Sternpunkten gleichnamigen Grundpunktes liegt. Zugleich befindet sich S_1 auf einem Kegelschnitt, welcher durch diesen Grundpunkt, den Sternpunkt und die Grundpunkte der anderen Reciprocität geht.

c) Constructionen aus Kegelschnittbüscheln und Kegelschnittschaaren.

Im Gegensatze zu den Linealconstructionen, welche uns stets nur ein Element der Curven C^3 und C_3 geben, behandeln wir jetzt solche Constructionen, bei denen die Elemente paarweise gefunden werden. Wir erhalten für diese Constructionen die bequemste Form, indem wir die Curven aus Kegelschnittbüscheln oder Schaaren hervorbringen. Wir leiten daher einige solche Erzeugungen ab, welche durch die Reciprocitäten $(ABC\Delta)$ und $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)$ vermittelt werden.

Wir beginnen damit die Punktetripel der C^3 den Punkten einer beliebigen Geraden g zuzuordnen. Wir zeichnen also die Kegelschnitte, welche den Punkten X von g in $(ABC\Delta)^2$ und $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)^2$ entsprechen. Diese Kegelschnitte bilden zwei Büschel. Ihre resp. Grundpunkte sind ABC, $A_1 B_1 C_1$ und die Punkte $G G_1$, welche der Geraden g in den Reciprocitäten $(ABC\Delta)$ und $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)$ correspondiren. Durch jeden Punkt X geht ein Kegelschnitt des einen und ein Kegelschnitt des anderen Büschels. Beide Kegelschnitte haben ausser X drei gemeinsame Punkte. Sie liegen auf C^3. Ihre Verbindungslinien mit X sind Tangenten von C_3. Wir schliessen daher:

Construiren wir in zwei Kegelschnittbüscheln durch jeden Punkt X einer Geraden g, welche einen Grundpunkt G des einen Büschels mit einem Grundpunkte G_1 des anderen verbindet, die zwei Kegelschnitte, so liegen ihre drei weiteren gemeinsamen Punkte auf einer C^3. Die Verbindungslinien dieser Punkte mit X berühren eine C_3. Die Grundpunkte, welche nicht in g liegen, gehören C^3 an und bilden zwei Dreiecke, deren Seiten C_3 berühren.

In dualer Weise können wir C^3 und C_3 erzeugen. Wir gehen von zwei Kegelschnittschaaren aus. Wir bringen diese mit einem Strahlenbüschel in Verbindung, dessen Scheitel T im Schnittpunkte einer Grundtangente t der einen Schaar mit einer Grundtangente t_1 der anderen Schaar liegt. Durch jeden Strahl x des Büschels wird ein Kegelschnitt der einen und ein Kegelschnitt der anderen Schaar bestimmt. Beide Kegelschnitte haben ausser x noch drei weitere Tangenten. Sie umhüllen eine C_3 und schneiden x in drei Punkten einer Curve dritter Ordnung. Die

Grundlinien der Schaaren — ausgenommen tt_1 — gehören der C_3 an und bestimmen zwei Dreiecke, deren Ecken auf C^3 liegen.

16. Die zuerst entwickelte Erzeugung der C^3 enthält eine neue Form, wenn wir an Stelle einer beliebigen Geraden die Linie g setzen, welche einem Punkte G von C^3 in beiden Reciprocitäten entspricht. Dann entsteht C^3 nach folgendem Gesetze:

Construiren wir in zwei Kegelschnittbüscheln, welche einen gemeinsamen Grundpunkt G haben, die Kegelschnittpaare, die sich auf einer Geraden g durch G schneiden, so liegen die übrigen gemeinsamen Punkte der Kegelschnittpaare auf einer C^3. Sie geht durch die Grundpunkte der Büschel.

Zu jedem Punkte X von g gehört also ein Kegelschnittpaar, das ausser G und X noch zwei gemeinsame Punkte hat. Wir bewiesen oben (9), dass ihre Verbindungslinie durch einen Punkt G^{**} von C^3 gehen muss. Folglich bilden diese Verbindungslinien ein Büschel, welches zur Reihe der X projectivisch ist. Somit lässt sich C^3 durch folgende projectivische Beziehungen darstellen:

Gegeben sei ein Kegelschnittbüschel und ein Strahlenbüschel. Letzteres sei einer Punktreihe projectivisch, deren Träger durch einen Grundpunkt des Büschels geht. Dann schneidet jeder Strahl x des Strahlenbüschels aus demjenigen Kegelschnitt des Kegelschnittbüschels, welcher den zu x entsprechenden Punkt X der Reihe enthält, zwei Punkte einer C^3. Auf ihr liegen die Grundpunkte des Kegelschnittbüschels und der Scheitel des Strahlenbüschels.

Die Strahlen des Büschels, welche in ihren entsprechenden Punkten liegen, schneiden in diesen ihre zugeordneten Kegelschnitte. Folglich gehören die Punkte der C^3 an.

Construiren wir zu den Strahlen des Büschels, welche G^{**} mit den Grundpunkten verbinden, die entsprechenden Punkte der Reihe auf g, so gehen durch sie die Kegelschnitte des Büschels, welche in den resp. Grundpunkten mit C^3 zwei benachbarte Punkte gemein haben. Folglich berühren diese Kegelschnitte in den resp. Grundpunkten die Curve C^3.

Wir begnügen uns darauf hinzuweisen, dass bei den vorstehenden Darstellungen der Curve dritter Ordnung die Curve dritter Classe mit dargestellt wird.

17. Bei einer weiteren Erzeugung der C^3 gehen wir von der Construction der Punkte aus, welche auf Geraden durch einen Grundpunkt — etwa A — liegen. Sei p eine Gerade durch A, so entspricht ihr in $(ABC\Delta)^2$ ein Kegelschnitt, welcher in zwei Punkte A und E zerfällt. In der Transformation $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)^2$ correspondirt der Linie p ein Kegelschnitt. Die Tangenten, welche aus E an diesen Kegelschnitt gezogen

werden können, treffen p in zwei Punkten der C^3. Dreht sich jetzt p um A, so werden die zu p gehörenden Punkte E stets nach der Relation $(p, AB, AC, AE) = \Delta$ gefunden (A.3). Sie bilden folglich eine Reihe, welche zu dem Strahlenbüschel um A projectivisch ist. AB, AC sind die Strahlen des Büschels, welche ihre entsprechenden Punkte enthalten. Die Kegelschnitte, welche den Geraden p in $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)^2$ entsprechen, bilden eine Schaar. Ihre Grundtangenten sind $a_1 b_1 c_1$ und die Linie a^*, welche dem Punkte A in der Reciprocität $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)$ entspricht. Zu jeder Geraden p gehört ein Kegelschnitt der Schaar. C^3 und C_3 können daher in folgender Weise hervorgebracht werden:

Wir gehen von einer Kegelschnittschaar, einer Punktereihe und einem Strahlenbüschel aus, dessen Scheitel auf einer Grundtangente der Schaar liegt. Wir ordnen die Punkte der Reihe den Strahlen des Büschels projectivisch zu. Jeder Strahl x des Büschels berührt einen Kegelschnitt der Schaar. An ihn gehen durch den Punkt X der Reihe, welcher x entspricht, zwei Tangenten. Sie treffen x in zwei Punkten einer Curve C^3 und sind Tangenten einer Curve dritter Classe.

Der duale Gedankengang führt ebenfalls zu einer Projectivität zwischen den Strahlen durch A und den Punkten auf a (A.4) und zu einem Kegelschnittbüschel, welches $A_1 B_1 C_1 A^*$ zu Grundpunkten hat. Durch jeden Punkt X von a geht ein Kegelschnitt des Büschels, der von dem entsprechenden Strahle x in zwei Punkten einer C^3 geschnitten wird. Verallgemeinern wir diese Darstellung, so erhalten wir C^3 nach einem Gesetze, welches mit dem am Ende von 16 hervorgehobenen identisch ist. Wir sind also zu diesem Gesetze gelangt, indem wir einmal von einem Punktepaar GG^{**}, einer Geraden g und einer Projectivität um G^{**} ausgingen. Im zweiten Falle knüpften wir an die Projectivität um A, an a und A^* an. Wir sehen also, dass wir $GG^{**}g$ durch A^*Aa ersetzen können und schliessen daraus:

Um an Stelle eines Grundpunktdreiecks der C^3 ein neues zu erhalten, gehen wir von einem beliebigen Punkte G von C^3 aus, suchen die zugehörige Tangente g von C_3 und den conjugirten Punkt G^{**}. Dann zeichnen wir die Projectivität, welche durch C^3 um G^{**} und auf g bestimmt wird. Wir construiren in derselben die Strahlen, welche in ihren entsprechenden Punkte liegen. Diese Punkte und G^{**} können als Grundpunkte einer neuen Reciprocität betrachtet werden. Ihr Doppelverhältniss Δg ist gleich demjenigen, welches ein Strahlenpaar des Büschels um G^{**} mit den Strahlen bildet, die in ihren entsprechenden Punkten liegen.

Damit sind wir zu einer neuen Reihe von Fragen gelangt. Während wir nämlich bis jetzt von zwei bestimmten Reciprocitäten ausgingen und mit ihrer Hilfe die Curven C^3 und C_3 construirten, können wir nun eine gegebene Curve C^3 oder C_3 betrachten und untersuchen, wie sich diese durch Paare von Reciprocitäten darstellen lässt. Diese Untersuchungen werden uns zu besonderen Reciprocitäten führen, welche den Singularitäten der Curven C^3 und C_3 entsprechen und zu einer Construction aus neun beliebigen Elementen etc. Die Beanwortung dieser Fragen behalten wir uns für eine spätere Abhandlung vor.

VI.

Mathematische Miscellen.

Von

LEOPOLD SCHENDEL

in Berlin.

Fortsetzung.

III. Das alternirende Exponentialdifferenzenproduct.

Bestimmt man die Elemente eines aus n Horizontal- und ν Vertikalreihen bestehenden Gebildes von der Form

$$\begin{array}{ccc} \binom{s_{\nu,\nu}+n-1}{\nu-1} x_\nu^{n-\nu} & .. & \binom{s_{\nu,1}+n-1}{0} x_\nu^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{s_{\nu,\nu}+0}{\nu-1} x_\nu^{1-\nu} & .. & \binom{s_{\nu,1}+0}{0} x_\nu^{0} \end{array}$$

oder von der Form

$$\begin{array}{ccc} \binom{s_\nu+n-1}{\nu-1} x_\nu^{n-\nu} & .. & \binom{s_\nu+n+\nu-2}{\nu-1} x_\nu^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{s_\nu+0}{\nu-1} x_\nu^{1-\nu} & .. & \binom{s_\nu+\nu-1}{\nu-1} x_\nu^{0} \end{array}$$

in beliebiger Wahl unter der Voraussetzung

$$\nu_1 + \cdots + \nu_\mu = n$$

für $\nu = \nu_1, .., \nu_\mu$ und stellt die diesen Werthen entsprechenden Gebilde zu einer Determinante zusammen, so stellt sich in ihr, unabhängig von den mit s bezeichneten Grössen, das Differenzenproduct

$$\begin{array}{r} (x_{\nu_1}-x_{\nu_2})^{\nu_1\nu_2}(x_{\nu_1}-x_{\nu_3})^{\nu_1\nu_3} .. (x_{\nu_1}-x_{\nu_\mu})^{\nu_1\nu_\mu} \\ (x_{\nu_2}-x_{\nu_3})^{\nu_2\nu_3} .. (x_{\nu_2}-x_{\nu_\mu})^{\nu_2\nu_\mu} \\ .. \quad \vdots \quad \\ (x_{\nu_{\mu-1}}-x_{\nu_\mu})^{\nu_{\mu-1}\nu_\mu} \end{array}$$

dar, welches in dem Falle, wenn die in den Exponenten auftretenden Grössen $\nu_1, .., \nu_\mu$ der Eins gleich sind, in das alternirende Differenzenproduct der Grössen $x_{\nu_1}, .., x_{\nu_\mu}$ übergeht und daher als das alternirende Differenzenproduct der Grössen $x_{\nu_1}, .., x_{\nu_\mu}$ mit den Exponenten $\nu_1, .., \nu_\mu$ bezeichnet werden kann.

Im Falle $\mu = 1$ hat die Determinante die Form

$$\begin{vmatrix} \binom{s_n + n - 1}{n-1} x_\nu^{\,0} & .. & \binom{s_1 + n - 1}{0} x_\nu^{\,n-1} \\ \cdot & .. & \cdot \\ \cdot & .. & \cdot \\ \binom{s_n + 0}{n-1} x_\nu^{\,1-n} & .. & \binom{s_1 + 0}{0} x_\nu^{\,0} \end{vmatrix}$$

oder

$$\begin{vmatrix} \binom{s + n - 1}{n-1} x_\nu^{\,0} & .. & \binom{s + 2n - 2}{n-1} x_\nu^{\,n-1} \\ \cdot & .. & \cdot \\ \cdot & .. & \cdot \\ \binom{s + 0}{n-1} x_\nu^{\,1-n} & .. & \binom{s + n - 1}{n-1} x_\nu^{\,0} \end{vmatrix}$$

und den Werth 1.

Bezeichnet man durch $f(x)$ eine ganze Function $n$ten Grades mit dem höchsten Coefficienten 1, durch $x_{\nu_1}, .., x_{\nu_\mu}$ die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ und durch $\nu_1, .., \nu_\mu$ die Grade der Vielfachheit dieser Wurzeln, so tritt, wie wir im zweiten Artikel* angegeben haben, die Determinante mit verschwindenden Grössen s bei der Zerlegung einer gebrochenen Function, deren Nenner die Function $f(x)$ ist, in Partialbrüche und zwar bei der independenten Bestimmung der Partialzähler vermittelst der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ auf und stellt das alternirende Differenzenproduct der Wurzeln $x_{\nu_1}, .., x_{\nu_\mu}$ mit den Exponenten $\nu_1, .., \nu_\mu$ dar. Die daselbst im Beispiel mit dem Werthe 72 aufgeführte Determinante ist das alternirende Differenzenproduct der Wurzeln 1, 2, -1 mit den Exponenten 3, 2, 1

$$(1-2)^{3.2}(1+1)^{3.1}(2+1)^{2.1}$$

und also in der That gleich $1.8.9$ oder 72.

Die ganze Function $f(x)$ ist als von der Form

$$f(x) = (x - x_{\nu_1})^{\nu_1} .. (x - x_{\nu_\mu})^{\nu_\mu}$$

durch den Quotienten zweier Determinanten darstellbar, von denen die eine das alternirende Differenzenproduct der Grössen $x, x_{\nu_1}, .., x_{\nu_\mu}$ mit den

---

* Band XXXVI S. 304. Ersetze auf S. 308 das gegebene durch das folgende Schema:

$$\begin{array}{cccccc} \underline{10} & -9 & 5\,|\,2 & -3 & 0 \\ 5 & \underline{15} & 0 & & \\ & 3 & 9 & & \\ & & 2, & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \underline{21} & 73\,|\,3 & 10 \\ 7 & \underline{-70} & \\ & 1, & \end{array} \qquad \begin{array}{c} \underline{72}\,|\,-72 \\ -1. \end{array}$$

Exponenten $1, \nu_1, .., \nu_\mu$ und die andere das alternirende Differenzenproduct der Grössen $x_{\nu_1}, .., x_{\nu_\mu}$ mit den Exponenten $\nu_1, .., \nu_\mu$ darstellt.

Im Falle $\mu = 1$ hat der Divisor den Werth 1 und der Dividendus die Form

$$\begin{vmatrix} x^n & \binom{s_n+n}{n-1} x_\nu^{1} & .. & \binom{s_1+n}{0} x_\nu^{n} \\ . & . & .. & . \\ . & . & .. & . \\ x^0 & \binom{s_n+0}{n-1} x_\nu^{1-n} & .. & \binom{s_1+0}{0} x_\nu^{0} \end{vmatrix}$$

oder die Form

$$\begin{vmatrix} x^n & \binom{s+n}{n-1} x_\nu^{1} & .. & \binom{s+2n-1}{n-1} x_\nu^{n} \\ . & . & .. & . \\ . & . & .. & . \\ x^0 & \binom{s+0}{n-1} x_\nu^{1-n} & .. & \binom{s+n-1}{n-1} x_\nu^{0} \end{vmatrix},$$

und es gelten daher die Gleichungen

$$(x - x_\nu)^n = \begin{vmatrix} x^n x_\nu^0 & \binom{s_n+n}{n-1} & .. & \binom{s_1+n}{0} \\ . & . & .. & . \\ . & . & .. & . \\ x^0 x_\nu^n & \binom{s_n+0}{n-1} & .. & \binom{s_1+0}{0} \end{vmatrix}$$

und

$$(x - x_\nu)^n = \begin{vmatrix} x^n x_\nu^0 & \binom{s+n}{n-1} & .. & \binom{s+2n-1}{n-1} \\ . & . & .. & . \\ . & . & .. & . \\ x^0 x_\nu^n & \binom{s+0}{n-1} & .. & \binom{s+n-1}{n-1} \end{vmatrix}.$$

Entfernt man demnach in den rechtsseitigen Determinanten die erste Vertikalreihe und der Reihe nach je eine Horizontalreihe, so stellen sie den Binomialcoefficienten $\binom{n}{\varkappa}$ für die Werthe $\varkappa = 0, .., n$ dar.

Im Anschluss hieran sei bemerkt, dass die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \binom{s+r+n-1}{r+n-1} & .. & \binom{s+r+n-1}{r+0} \\ . & .. & . \\ . & .. & . \\ \binom{s+r+0}{r+n-1} & .. & \binom{s+r+0}{r+0} \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} \binom{s+r+n-1}{r+n-1} & \cdots & \binom{s+r+2n-2}{r+n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{s+r+0}{r+n-1} & \cdots & \binom{s+r+n-1}{r+n-1} \end{vmatrix}$$

gleiche und unter der Voraussetzung positiver ganzer Zahlen in Bezug auf die in ihnen vertretenen Grössen n, r, s symmetrische Grössen sind, deren Werth sich aus der ersteren dadurch ergiebt, dass man in ihr das Product der Elemente der letzten Vertikalreihe durch das Product derselben Elemente mit verschwindendem s oder das Product der Elemente der ersten Horizontalreihe durch das Product derselben Elemente mit verschwindendem s und um s vergrössertem r dividirt. Im Falle $r = 1$ ist die erste Determinante dem ersten und im Falle $s = 1$ dem letzten Elemente ihrer ersten Horizontalreihe gleich.

IV. Zur Resultantenbildung.

Zur Darstellung der Resultante der Functionen

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 x^0$$

und

$$\varphi(x) = \alpha_m x^m + \cdots + \alpha_0 x^0$$

eignet sich nach Cayley die Function

$$\frac{f(x)\varphi(y) - f(y)\varphi(x)}{x-y},$$

die unter der Voraussetzung $n \geq m$ eine symmetrische ganze Function der Grössen x und y vom Grade $n-1$ ist.

Um sie als solche darzustellen, hat man unter der Voraussetzung der Bezeichnungen

$$\begin{vmatrix} a_\nu & a_{\nu_1} \\ \alpha_\nu & \alpha_{\nu_1} \end{vmatrix} = |\,\nu,\ \nu_1\,|$$

und

$$(\varkappa,\ \varkappa_1) = |\,\varkappa+1,\ \varkappa_1\,| + |\,\varkappa+2,\ \varkappa_1-1\,| + \cdots$$

aus den Coefficienten der gegebenen Functionen

$$\begin{matrix} a_n & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_m & \cdots & \alpha_0 \end{matrix}$$

von links nach rechts fortschreitend die Determinanten

$$\begin{matrix} |\,n,\ n-1\,| & |\,n,\ n-2\,| & \cdots & |\,n,\ 1\,| & |\,n,\ 0\,| \\ & |\,n-1,\ n-2\,| & \cdots & |\,n-1,\ 1\,| & |\,n-1,\ 0\,| \\ & & \cdots & \vdots & \vdots \\ & & & |\,2,\ 1\,| & |\,2,\ 0\,| \\ & & & & |\,1,\ 0\,| \end{matrix}$$

und aus ihnen durch Addition in der zur Diagonale senkrechten Richtung oder kurz durch schräge Addition die Grössen

$$\begin{array}{cccc} (n-1,\ n-1) & (n-1,\ n-2) \,..\, (n-1,\ 1) & (n-1,\ 0) \\ & (n-2,\ n-2) \,..\, (n-2,\ 1) & (n-2,\ 0) \\ & ..\quad . & . \\ & ..\quad . & . \\ & (1,\ 1) & (1,\ 0) \\ & & (0,\ 0) \end{array}$$

zu bilden und hierin die Horizontalreihen so zu vervollständigen, dass die in der Diagonale sich kreuzenden Horizontal- und Vertikalreihen der Reihe nach dieselben Grössen enthalten. Multiplicirt man alsdann in dem dadurch entstehenden n stufigen Gebilde

$$\begin{array}{cccc} (n-1,\ n-1) & (n-1,\ n-2) \,..\, (n-1,\ 1) & (n-1,\ 0) \\ (n-1,\ n-2) & (n-2,\ n-2) \,..\, (n-2,\ 1) & (n-2,\ 0) \\ . & . \quad .. \quad . & . \\ . & . \quad .. \quad . & . \\ (n-1,\ 1) & (n-2,\ 1) \quad ..\, (1,\ 1) & (1,\ 0) \\ (n-1,\ 0) & (n-2,\ 0) \quad ..\, (1,\ 0) & (0,\ 0) \end{array}$$

der Reihe nach die Horizontalreihen mit x^{n-1}, .., x^0 und die Vertikalreihen mit y^{n-1}, .., y^0, so stellt die Summe der in dieser Weise erzeugten Grössen die Cayley'sche Function dar und die in dem Gebilde verzeichneten Grössen sind die Coefficienten dieser Function.

Die Resultante der gegebenen Functionen ist nun darstellbar für

$$w = 0,\ ..,\ m$$

durch eine $(n + m - w)$ stufige Determinante, die in den ersten $m - w$ Horizontalreihen die Coefficienten der Function $f(x)$

mit
$$a_n,\ ..,\ a_0$$
$$0,\ m-w-1;\ \ ..;\ \ m-w-1,\ 0$$

und in den letzten $n - w$ Horizontalreihen die Coefficienten der Function $\varphi(x)$

mit
$$\alpha_m,\ ..,\ \alpha_0$$
$$0,\ n-w-1;\ \ ..;\ \ n-w-1,\ 0$$

vorangehenden und bezw. folgenden Nullen enthält und in den mittleren w Horizontalreihen mit $m - w$ Nullen beginnend sich weiter der Reihe nach mit den, von unten gerechnet, ersten w Horizontalreihen des Coefficientengebildes der zu den Functionen gehörigen Cayley'schen Function deckt, und ferner für

$$w = m,\ ..,\ n$$

durch eine mit dem Divisor a_n^{w-m} verbundene n stufige Determinante, die in den ersten w Horizontalreihen der Reihe nach mit den, von unten gerechnet, ersten w Horizontalreihen des Coefficientengebildes der Cayley-schen Function übereinstimmt und in den letzten $n-w$ Horizontalreihen die Coefficienten der Function $\varphi(x)$

$$\alpha_m, \ldots, \alpha_0$$

mit

$$w-m,\; n-w-1; \;\ldots;\; n-m-1,\; 0$$

vorangehenden und bezw. folgenden Nullen enthält; ausserdem stellt dem Falle $w=n$ entsprechend das Coefficientengebilde der Cayley'schen Function, durch zwei vertikale Striche in eine Determinante, die Determinante der Cayley'schen Function, umgewandelt, in der Verbindung mit dem Divisor $(-1)^{\binom{n}{2}} a_n^{\,n-m}$ die Resultante dar.

Hiernach hat die Resultante der Functionen

$$f(x) = 2x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 19x^2 - 16x + 4$$

und

$$\varphi(x) = 3x^2 + 4x + 1$$

nach dem Schema

$$\begin{array}{rrrrrr}
2 & -5 & -4 & 19 & -16 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\
\hline
 & 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \\
 & & 0 & -15 & -20 & -5 \\
 & & & -12 & -16 & -4 \\
 & & & & 124 & 7 \\
 & & & & & -32 \\
\hline
 & 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \\
 & & 6 & -7 & -18 & -5 \\
 & & & -30 & -21 & -4 \\
 & & & & 120 & 7 \\
 & & & & & -32
\end{array}$$

die den Werthen $w = 0, \ldots, 5$ entsprechenden Formen

$$\begin{vmatrix}
2 & -5 & -4 & 19 & -16 & 4 & 0 \\
0 & 2 & -5 & -4 & 19 & -16 & 4 \\
3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1
\end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix}
2 & -5 & -4 & 19 & -16 & 4 \\
0 & 2 & -5 & -4 & 7 & -32 \\
3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1
\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}
2 & -5 & -4 & 7 & -32 \\
8 & -18 & -21 & 120 & 7 \\
3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 4 & 1
\end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix}
2 & -5 & -4 & 7 & -32 \\
8 & -18 & -21 & 120 & 7 \\
6 & -7 & -30 & -21 & -4 \\
0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 4 & 1
\end{vmatrix} : 2,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & -4 & 7 & -32 \\ 8 & -18 & -21 & 120 & 7 \\ 6 & -7 & -30 & -21 & -4 \\ 0 & 6 & -7 & -18 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} : 4, \quad \begin{vmatrix} 2 & -5 & -4 & 7 & -32 \\ 8 & -18 & -21 & 120 & 7 \\ 6 & -7 & -30 & -21 & -4 \\ 0 & 6 & -7 & -18 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \end{vmatrix} : 8$$

und überdies die Form

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 6 & -7 & -18 & -5 \\ 6 & -7 & -30 & -21 & -4 \\ 8 & -18 & -21 & 120 & 7 \\ 2 & -5 & -4 & 7 & -32 \end{vmatrix} : +8,$$

zu deren Herstellung mittelst schräger Addition das Schema

$$\begin{array}{rrrrrr} 2 & -5 & -4 & 19 & -16 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \\ & & 0 & -15 & -20 & -5 \\ & & & -12 & -16 & -4 \\ & & & & 124 & 7 \\ & & & & & -32 \end{array}$$

genügt.

Ersetzt man in der Cayley'schen Function die Potenzen x^r und y^r für $r = 0, \ldots, n-1$ durch die beliebigen Grössen x_r und y_r, so geht sie in eine bilineare Form $n$ter Ordnung der Grössen $x_0, \ldots, x_{n-1}$ und $y_0, \ldots, y_{n-1}$ und im Falle $y_r = x_r$ in eine quadratische Form $n$ter Ordnung der Grössen $x_0, \ldots, x_{n-1}$ über, und ihre Determinante ist die Determinante dieser bilinearen und bezw. quadratischen Form.

V. Zur Theorie der Sturm'schen Functionen.

Unter der Voraussetzung

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 x^0$$

und $a_n = 1$ ist die Resultante der Functionen

$$f(y), \quad f'(y)(x-y),$$

wenn $x_1, \ldots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind, in der Form

$$f'(x_1) \ldots f'(x_n) \cdot f(x)$$

darstellbar und somit in der Verbindung mit dem Factor $(-1)^{\binom{n}{2}}$ gleich der Function $f(x)$, multiplicirt mit dem Producte der quadrirten Wurzeldifferenzen der Gleichung $f(x) = 0$.

In der Verbindung mit dem Factor $(-1)^{\binom{n}{2}}$ stellt sie sich aber durch die Determinante der Cayley'schen Function

$$\frac{f(y)f'(z)(x-z) - f(z)f'(y)(x-y)}{y-z}$$

oder der ihr entsprechenden Hermite'schen quadratischen Form $n$ter Ordnung, also beispielsweise für

$$f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$$

nach dem Schema

$$\begin{array}{cccccc}
1 & -1 & -3 & 5 & -2 & \\
0 & 4 & -3 & -6 & 5 & x \\
\hline
4 & -3 & -6 & 5 & 0 & \\
1 & -1 & -3 & 5 & -2 & \\
\hline
 & 4x-1 & -3x-6 & -6x+15 & 5x-8 & \\
 & & 15x+3 & -14x-10 & 3x+6 & \\
 & & & 33x-15 & -21x+12 & \\
 & & & & 13x-10 &
\end{array}$$

mittelst schräger Addition in der Form

$$\begin{vmatrix}
4x-1 & -3x-6 & -6x+15 & 5x-8 \\
-3x-6 & 9x+18 & -9x-18 & 3x+6 \\
-6x+15 & -9x-18 & 36x-9 & -21x+12 \\
5x-8 & 3x+6 & -21x+12 & 13x-10
\end{vmatrix}$$

dar.

Folglich ist diese Determinante gleich der in das Product der quadrirten Wurzeldifferenzen der Gleichung $f(x) = 0$ multiplicirten Function $f(x)$.

Wir bezeichnen sie als eine ganze Function $n$ten Grades von x durch $S_n(x)$ und ferner durch $S_r(x)$ als eine ganze Function $r$ten Grades von x die Determinante, die aus ihr durch Entfernung der $n-r$ letzten Horizontal- und Vertikalreihen entsteht. Bemerken wir noch, dass sie für den Fall $r=0$ durch die Entfernung aller Horizontal- und Vertikalreihen in den Coefficienten 1, den man ihr beifügen kann, übergeht, so gehen also die Functionen

$$S_r(x),\ r = 0, \ldots, n,$$

die in dem angeführten Beispiele sich in der Form

$$1,\ 4x-1,\ 27(x^2+x-2),\ 0,\ 0$$

darstellen, der Reihe nach aus der Determinante dadurch hervor, dass man in ihr nach einander die $n, \ldots, 0$ letzten Horizontal- und Vertikalreihen entfernt, und dasselbe gilt, wenn wir in der Function $S_r(x)$ den höchsten Coefficienten durch s_r bezeichnen, von den Grössen

$$s_r,\ r = 0, \ldots, n$$

bezüglich der Determinante, welche die Grösse s_n oder das Product der quadrirten Wurzeldifferenzen der Gleichung $f(x) = 0$ darstellt.

Die Functionen

$$S_r(x),\ r = 0,\ ..,\ n$$

sowohl, als auch die Grössen

$$s_r,\ r = 0,\ ..,\ n$$

bilden Sturm'sche Reihen.

Während die ersteren, welche in der Verbindung mit constanten Factoren für den Kettenbruch, der sich aus der mit den ganzen Resten entgegengesetzten Zeichens fortgesetzten Division der Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ für die gebrochene Function $f(x) : f'(x)$ ergiebt, die Zähler der Näherungswerthe darstellen, für einen gegebenen reellen Werth von x durch die Anzahl der Zeichenwechsel in ihrer Zeichenreihe für die Gleichung $f(x) = 0$ die Anzahl der von einander verschiedenen Paare complexer Wurzeln, vermehrt um die Anzahl der von einander verschiedenen reellen Wurzeln, die grösser als jener Werth sind, bestimmen, ergiebt sich aus der Anzahl der Zeichenwechsel in der Zeichenreihe der letzteren die Anzahl der von einander verschiedenen Paare complexer Wurzeln selbst, und die Differenz der Zeichenwechsel in diesen Zeichenreihen giebt die Anzahl der von einander verschiedenen reellen Wurzeln, die grösser als der gegebene Werth sind, an.

Verschwinden die Grössen s_r, $r = 0, .., n$ für einen jeden den Werth μ überragenden Werth des Index r, nicht aber für den Index $r = \mu$, so verschwinden auch die Functionen $S_r(x)$, $r = 0, .., n$ identisch für einen jeden den Werth μ überragenden Werth des Index r, nicht aber für den Index $r = \mu$. Die Gleichung $f(x) = 0$ hat alsdann μ von einander verschiedene Wurzeln vielfachen Grades, und es ist die Gleichung μten Grades $S_\mu(x) = 0$ die Gleichung, welche die μ von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zu Wurzeln hat, und ihr höchster Coefficient s_μ stellt für die Gleichung $f(x) = 0$, sofern nur die von einander verschiedenen Wurzeln in Betracht gezogen werden, das in das Product ihrer Vielfachheitsgrade multiplicirte Product der quadrirten Wurzeldifferenzen dar. Je nachdem er positiv oder negativ ist, befindet sich unter diesen Wurzeln eine gerade oder ungerade Anzahl von Paaren complexer Wurzeln.

Da die durch $S_n(x)$ bezeichnete Determinante der Cayley'schen Function

$$\frac{f(y)f'(z)(x-z) - f(z)f'(y)(x-y)}{y-z}$$

einerseits die Resultante der Functionen

$$f(y),\ f'(y)(x-y)$$

in der Verbindung mit dem Factor $(-1)^{\binom{n}{2}}$ und andererseits die in das Product der quadrirten Wurzeldifferenzen der Gleichung $f(x) = 0$ multiplicirte Function $f(x)$ darstellt, so ist übrigens offenbar das Product der quadrirten Wurzeldifferenzen der Gleichung $f(x)=0$ sowohl in der Verbindung mit dem Factor $(-1)^{\binom{n}{2}}$ die Resultante der Functionen

$$f(y), \quad f'(y),$$

als auch in der Verbindung mit dem Factor $(-1)^{\binom{n}{2}}a_0$ die Resultante der Functionen

$$f'(y)y, \quad f(y).$$

Um darnach beispielsweise das durch die Grösse

$$(-1)^{\binom{n}{2}}(n+1)^{n-1}$$

gegebene Product der quadrirten Wurzeldifferenzen für die Function

$$x^n + \cdots + x^0$$

darzustellen, hat man das Schema

$$\begin{array}{cccccc}
n & n-1 & n-2 & \ldots & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\
 & & 1 & \ldots & n-2 & n-1 \\
 & & & \ldots & & . \\
 & & & & . & . \\
 & & & & 1 & 2 \\
 & & & & & 1
\end{array}$$

oder ein Schema zu bilden, in dem die ersten zwei Zeilen

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\
0 & n & n-1 & \ldots & 2 & 1
\end{array}$$

sind und die folgenden aus den entsprechenden Zeilen des vorigen Schemas dadurch hervorgehen, dass man sämmtliche Grössen in der ersten Zeile von $n+1$ und in den folgenden Zeilen von 0 subtrahirt.

Die vermittelst schräger Addition aus dem Schema

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\
 & 1 & \ldots & n-2 & n-1 \\
 & & \ldots & & . \\
 & & & . & . \\
 & & & 1 & 2 \\
 & & & & 1
\end{array}$$

hervorgehende algebraisch-symmetrische Determinante, die sich aus den Grössen $1, \ldots, n$ in der Weise zusammensetzt, dass die von links und bezw. unten in der zweiten Diagonalreihe sich treffenden Horizontal- und Vertikalreihen bis zum Treffpunkte der Reihe nach thunlichst ihre $1, \ldots, n$ fachen Werthe als Elemente enthalten, und die nur in der Form eine Aenderung erleidet, wenn die sämmtlichen Elemente rechts von der zweiten Diagonalreihe mit dem Minuszeichen versehen und die übrigen Elemente von $n+1$ subtrahirt werden, hat daher den Werth

$$(-1)^{\binom{n}{2}}(n+1)^{n-1}$$

und stellt das Product der quadrirten Wurzeldifferenzen der Gleichung

$$x^n + \cdots + x^0 = 0$$

dar. So ist in dem Falle $n = 4$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -4 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = +5^3$$

das Product der quadrirten Wurzeldifferenzen der Gleichung $x^4 + \cdots + x^0 = 0$.

Berlin, 11. December 1891.

VII.

Ueber bedingt periodische Bewegungen eines materiellen Punktes auf Oberflächen zweiter Ordnung mit besonderer Berücksichtigung der Grenzfälle.

Von

OTTO PUND.

Erster Abschnitt.

Ueber die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Oberfläche zweiter Ordnung im Allgemeinen.

§ 1.

Allgemeine Form der beiden ersten Integrale.

Wir nehmen an, dass ein materieller Punkt, dessen Masse der Einfachheit halber als Einheit zu Grunde gelegt werden möge, sich auf einer Fläche zweiter Ordnung

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

unter dem Einfluss einer Kraft bewegt, deren Componenten sich als die partiellen Derivirten einer von der Zeit unabhängigen Kräftefunction $U(x, y, z)$ darstellen lassen. Durch Accente bezeichnen wir die Ableitungen nach der Zeit t, durch die Indices 1, 2, 3 die nach x, y, z und setzen zur Abkürzung

$$\begin{aligned} F &= f_1^2 + f_2^2 + f_3^2, \\ \Omega &= f_{11}x'^2 + f_{22}y'^2 + f_{33}z'^2 + 2f_{23}y'z' + 2f_{31}z'x' + 2f_{12}x'y'. \end{aligned} \tag{2}$$

Versteht man dann unter λ eine gewisse Function von t, die sich durch den Normalwiderstand N der Fläche in der Form $\lambda = \frac{N}{F}$ ausdrücken lässt, so kann man die Bewegungsgleichungen in folgender Form darstellen:

$$\begin{aligned} x'' &= \lambda f_1 + U_1, \\ y'' &= \lambda f_2 + U_2, \\ z'' &= \lambda f_3 + U_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Wir multipliciren nun die beiden Seiten derselben der Reihe nach mit

$$\begin{matrix} x', & y', & z', \\ f_1, & f_2, & f_3, \\ f_1', & f_2', & f_3', \end{matrix} \tag{4}$$

addiren jedesmal und beachten dabei die während der Bewegung immer erfüllten Gleichungen

5) $$\frac{df}{dt} \equiv f_1 x' + f_2 y' + f_3 z' = 0,$$

6) $$\frac{d^2 f}{dt^2} \equiv f_1 x'' + f_2 y'' + f_3 z'' + \Omega = 0,$$

sowie die folgende für Oberflächen zweiter Ordnung geltende Gleichung

7) $$f_1' x'' + f_2' y'' + f_3' z'' = \frac{1}{2}\Omega'.$$

Aus der ersten der auf diese Weise entstehenden neuen Gleichungen

8) $$x' x'' + y' y'' + z' z'' = U'$$

ergiebt sich mit Einführung der Constanten h das Integral der lebendigen Kraft

I) $$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = U + h;$$

aus den beiden anderen

9) $$-\Omega = \lambda F + \sum_k U_k f_k,$$

10) $$\frac{1}{2}\Omega' = \frac{\lambda}{2} F' + \sum_k U_k f_k' \qquad (k = 1, 2, 3)$$

leitet man durch Elimination von λ

11) $$\frac{d}{dt}(F\Omega) = 2F \sum_k U_k f_k' - F' \sum_k U_k f_k$$

ab. Nehmen wir nun an, dass sich die rechte Seite dieser Gleichung als der Differentialquotient einer Function Ψ von x, y, z darstellen lasse,

12) $$\Psi' = 2F \sum_k U_k f_k' - F' \sum_k U_k f_k,$$

so ergiebt sich mit Einführung einer Constanten k ein zweites Integral

II) $$F\Omega = \Psi + k.$$

Die Constanten h und k müssen so beschaffen sein, dass sich aus 5), I), II) reelle Werthe von x', y', z' ergeben. Den Integralen kann man eine geometrische Bedeutung beilegen. Bezeichnet man nämlich den Krümmungsradius des Normalschnittes der Fläche, in welchem sich der materielle Punkt momentan bewegt mit ϱ, so ist

13) $$\varrho = \frac{2F^{\frac{3}{2}}(U + h)}{\Psi + k}.$$

Da unter den gemachten Annahmen zwei Integrale unseres Bewegungsproblemes bekannt sind, so kann man aus allgemeinen Theorien Jacobi's schliessen, dass sich das Problem mit Hilfe von Quadraturen lösen lässt.*

* Dies folgt aus der Theorie des letzten Multiplicators oder aus der Zurückführung des mechanischen Problems auf partielle Differentialgleichungen. Jacobi, Vorl. über Dynamik. 22 Vorl. 2 Ausg. (Werke, Supplementband), S. 175.

Bewegt sich also ein materieller Punkt auf einer Oberfläche zweiter Ordnung $f = 0$ unter dem Einflusse einer Kraft, deren Componenten sich als die partiellen Derivirten einer von der Zeit unabhängigen Kräftefunction U darstellen lassen, die so beschaffen ist, dass der Ausdruck

$$14)\qquad \sum_{i,k}(U_k f_i - U_i f_k) f_i (f_{k1}dx + f_{k2}dy + f_{k3}dz) \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

für alle der Gleichung $f = 0$ genügenden Werthe von x, y, z ein vollständiges Differential $(2\,d\Psi)$ ist*, so lässt sich das Bewegungsproblem stets auf Quadraturen zurückführen.

Obgleich die Bewegung des materiellen Punktes immer den Gleichungen I) und II) gemäss erfolgen muss, so darf man doch den umgekehrten Schluss, dass alle diese Gleichungen genügende Bewegungen auf der Oberfläche auch wirklich die Gleichungen 3) befriedigen, nicht immer machen. Um die Aequivalenz der Gleichungssysteme 3) einerseits und I) und II) andererseits zu untersuchen, setzen wir:

$$15)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = x'' - U_1 - \lambda f_1, \quad \varphi_2 = y'' - U_2 - \lambda f_2, \quad \varphi_3 = z'' - U_3 - \lambda f_3, \\ \chi = x'x'' + y'y'' + z'z'' - U', \quad \psi_1 = -\Omega - \sum_k U_k f_k - \lambda F, \\ \psi_2 = \frac{1}{2}\Omega' - \sum_k U_k f_k' - \frac{\lambda}{2}F'; \end{cases}$$

dann hat man bei jeder Bewegung auf der Oberfläche $f = 0$ die Gleichungen

$$16)\qquad \begin{cases} \varphi_1 x' + \varphi_2 y' + \varphi_3 z' = \chi, \\ \varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + \varphi_3 f_3 = \psi_1, \\ \varphi_1 f_1' + \varphi_2 f_2' + \varphi_3 f_3' = \psi_2. \end{cases}$$

Setzt man in diesem Gleichungssystem $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$, so gelangt man zu den Gleichungen 8), 9), 10) und somit zu den Integralen I) und II). Wenn nun umgekehrt die Integrale I) und II) gelten, so leitet man aus ihnen durch Differentiation $\chi = 0$ und

$$F\Omega' + F'\Omega = 2F\sum_k U_k f_k' - F'\sum_k U_k f_k$$

ab; die letzte Gleichung kann aber mit Einführung einer neuen Grösse λ durch die beiden Gleichungen $\psi_1 = 0$ und $\psi_2 = 0$ ersetzt werden (wofern nicht etwa F und F' beide gleich 0 sind). Das Gleichungssystem 16) lehrt nun, dass der Schluss, dass $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ ist, in dem Falle nicht berechtigt ist, dass die Determinante

---

* Man kann aus dieser Bedingung eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für U ableiten, doch unterlassen wir hier deren Aufstellung, da wir ihrer für die unten zu behandelnden Probleme nicht bedürfen.

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \end{vmatrix}$$

verschwindet. Das Verschwinden der Determinante drückt aber aus, dass sich der materielle Punkt auf einer Krümmungslinie der Fläche bewegt.

Die Bewegungen auf Krümmungslinien, welche die Integrale I) und II) zulassen, müssen also noch daraufhin untersucht werden, ob sie den ursprünglichen Differentialgleichungen 3) der Bewegung Genüge leisten. Diese Untersuchung wird daher bei den unten behandelten speciellen Beispielen durchgeführt werden.

Man kann das soeben erhaltene Resultat noch auf einem andern Wege ableiten, nämlich aus der Gleichung

$$17)\quad \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ x''-U_1 & y''-U_2 & z''-U_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'^2+y'^2+z'^2 & 0 & x'x''+y'y''+z'z''-U' \\ 0 & F & -\Omega+\sum_k U_k f_k \\ \Omega & \frac{1}{2}F' & \frac{1}{2}\Omega'-\sum_k U_k f_k' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)\frac{d}{dt}\left\{F\Omega-\Psi\right\} - F\Omega\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)-U\right\},$$

die man leicht erhält, wenn man die Gleichungen 5), 6), 7) und die folgende

$$f_1'x'+f_2'y'+f_3'z' = \Omega$$

berücksichtigt, und die für einen speciellen Fall schon von Gehring angegeben ist.* Sie lehrt unmittelbar, dass die Integrale I) und II) bei der Bewegung auf einer Krümmungslinie Giltigkeit haben.

Die im Vorstehenden entwickelte Integrationsmethode** wollen wir jetzt auf zwei Probleme zur Anwendung bringen.

§ 2.

Erstes Beispiel.

Wir nehmen an, dass die gegebene Oberfläche zweiter Ordnung eine Rotationsfläche und dass die Kräftefunction in den Parallelkreisen constant sei. Wählen wir die Z-Achse zur Rotationsachse und setzen die Gleichung der Fläche in der Form

$$1a)\qquad 2f \equiv x^2+y^2-\varphi^2(z)=0,\quad \varphi^2(z)=az^2+2bz+c$$

gegeben voraus, so ergiebt sich

---

* Hesse, Vorlesungen über analyt. Geom. des Raumes. 23. Vorl. S. 326 flg.

** Sie ist für den speciellen Fall der geodätischen Linien von Joachimsthal (Journ. für Math. Bd. 26, S. 161 flg.) entwickelt, später von Schellbach (Journ. für Math. Bd. 54) und St. Germain (Journ. d. Mathém. 3. série, tome 3) auch auf einige andere Fälle zur Anwendung gebracht worden.

$$\Omega = x'^2 + y'^2 - az'^2, \quad \Psi = 2(b^2 - ac)\,U(z),$$

und es lauten die Integrale

$$\text{Ia)} \qquad \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 2\,U[(z) + h],$$

$$\text{IIa)} \quad \varphi^2(z)[1 + \varphi'(z)^2](x'^2 + y'^2 - az'^2) = 2(b^2 - ac)\,U(z) + k'.$$

Bekanntlich gilt für eine beliebige Rotationsfläche das Flächenintegral; man erhält es aus den beiden obigen Gleichungen, wenn man die beiden Seiten der ersten mit $b^2 - ac$ multiplicirt und von den entsprechenden der zweiten subtrahirt, nach einigen Umformungen in der Gestalt

$$\text{IIa}') \qquad xy' - yx' = k,$$

wo

$$k = \sqrt{\frac{k' - 2h(b^2 - ac)}{1 + a}}$$

die doppelte Flächengeschwindigkeit der auf die Ebene eines Parallelkreises projicirten Bewegung ausdrückt.

Drückt man nun die Bedingung dafür aus, dass x', y', z' sich aus den Integralen Ia), IIa') und der Gleichung

$$xx' + yy' - \varphi(z)\,\varphi'(z)z' = 0$$

als reelle Grössen ergeben müssen, so erhält man

$$R(z) = 2\,[U(z) + h]\,\varphi^2(z) - k^2 \geqq 0,$$

oder, da $x^2 + y^2 = \varphi^2(z)$ ist, kann man diese Bedingung unabhängig von der Gleichung der Rotationsfläche in der Gestalt

$$2\,[U(z) + h](x^2 + y^2) - k^2 \geqq 0$$

schreiben und in einfacher Weise geometrisch deuten: Die Gebiete auf der gegebenen Rotationsfläche, in welchen sich der materielle Punkt überhaupt befinden kann, werden von Parallelkreisen begrenzt, welche durch den Schnitt mit der Rotationsfläche

$$x^2 + y^2 = \frac{k_2}{2\,[U(z) + h]}$$

entstehen. Auf die weitere Bedeutung dieser Rotationsfläche für den Charakter der Bewegung gehen wir im zweiten Abschnitt noch genauer ein.

§ 3.
Zweites Beispiel.

Um ein weiteres Beispiel zu behandeln, auf welches unsere Integrationsmethode Anwendung findet, bemerken wir, dass Ψ' in die Form gebracht werden kann:

$$\Psi' = -\frac{d}{dt}(F\Sigma U_k f_k) + F\Sigma(3\,U_k f_k' + U_k' f_k).$$

Wenn wir nun annehmen, dass zwischen U und f die Beziehungen

$$\text{18)} \qquad \Sigma U_k f_k' = 0, \quad \Sigma U_k' f_k = 0$$

stattfinden, in welchem Falle dann

$$\Sigma U_k f_k \text{ einer Constanten } g$$

gleich ist, so nimmt das zweite Integral die Form

$$F(\Omega + g) = k$$

an. Da U und f ihre Rollen vertauschen können, so erhalten wir auf diese Weise zwei Bewegungsprobleme, wenn U vom zweiten Grade ist.

Es sei nun die Gleichung der Oberfläche die eines auf seine Hauptachsen bezogenen Ellipsoides

$$\text{1b)} \qquad 2f \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad (a > b > c)$$

so erkennt man leicht, dass den soeben angegebenen Bedingungen Genüge geleistet wird durch

$$U = \frac{1}{2} g\,(x^2 + y^2 + z^2),$$

dass

$$F = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}, \quad \Omega = \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}$$

ist, und dass die Integrale lauten:

$$\text{Ib)} \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 - g\,(x^2 + y^2 + z^2) = 2h,$$

$$\text{IIb)} \qquad \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} + g\right) = k.$$

Aus der Form der Kräftefunction ist unmittelbar ersichtlich, dass wir es hier mit einer vom Mittelpunkte des Ellipsoids ausgehenden, der Entfernung proportionalen, und, wenn wir $g > 0$ annehmen, abstossenden Kraft zu thun haben. Vertauschen wir die Rollen von f und U, so erhalten wir ein von C. Neumann behandeltes Problem.* Man kann die Bahncurve des materiellen Punktes, wie sich aus den Integralen Ib) und IIb) ergiebt, auch auf folgende Weise geometrisch definiren. Bezeichnet man die Entfernung des materiellen Punktes vom Centrum des Ellipsoides mit r, die Länge des Lothes vom Mittelpunkte auf die Tangentialebene, welche an das Ellipsoid in dem betrachteten Punkte errichtet ist, mit p und endlich den zur Bewegungsrichtung parallelen Radiusvector des Ellipsoides mit d, so ergiebt sich aus

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad p^2 = \frac{1}{\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{z^2}{c^4}}, \quad d^2 = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} + \dfrac{z'^2}{c^2}}$$

und den Integralen leicht

$$kp^2 d^2 - g\,(d^2 + r^2) = 2h \quad \text{oder} \quad d = \sqrt{\frac{2h + gr^2}{kp^2 - g}}.$$

Auf diese Beziehung kommt man auch sofort, wenn man in die oben angegebene Gleichung 13) die speciellen Werthe einsetzt und beachtet, dass $\varrho = \dfrac{d^2}{p}$ ist.

* Neumann, De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraellipticorum classem revocatur. Journal für Mathematik Bd. 56, S. 46.

Für den Fall, dass $g = 0$ ist, erhält man die von Joachimsthal* angegebene geometrische Interpretation für die geodätischen Linien auf dem Ellipsoid $pd = \sqrt{\frac{2h}{k}}$.

Es ist leicht zu ersehen, dass wir das Ellipsoid durch ein einschaliges und zweischaliges Hyperboloid ersetzen könnten. Wenn wir aber ein Paraboloid zu Grunde legen, so nimmt die Kräftefunction eine andere, aber noch einfachere Gestalt an, zu der wir auch durch einen Grenzübergang gelangen können. Transformiren wir nämlich die Gleichung des Ellipsoids dadurch, dass wir $a + x$ an Stelle von x setzen, oder geometrisch gesprochen, verrücken wir den Anfangspunkt des Coordinatensystems vom Mittelpunkte des Ellipsoids in der Richtung der positiven X-Achse bis zum Scheitel, und setzen dann für a, b, c, g resp. $\omega^2, b\omega, c\omega, \frac{g}{2\omega^2}$ ein, so wird die Gleichung des Ellipsoids

$$2\omega^2 f \equiv \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x + \frac{x^2}{\omega^2} = 0$$

und die Kräftefunction nimmt die Form

$$U = gx + \frac{1}{2}\frac{g}{\omega^2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{2}g\omega^2$$

an. Beachten wir nun, dass das constante Glied in letzterer fortgelassen werden kann, da in den Bewegungsgleichungen nur ihre Ableitungen vorkommen, und lassen wir, nachdem solches geschehen ist, ω über alle Grenzen hinaus wachsen, so geht die Gleichung des Ellipsoids in die eines elliptischen Paraboloids

$$2\bar{f} \equiv \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0$$

über, und die Kräftefunction nimmt die Gestalt

$$U = gx$$

an. Man kann nachträglich leicht zeigen, dass auf diese Weise den Bedingungen 18) wirklich Genüge geleistet wird. Nehmen wir nun die positive Richtung der X-Achse nach unten gerichtet an, so wendet das Paraboloid seine concave Seite nach oben, und auf den materiellen Punkt wirkt eine constante nach unten gerichtete Kraft, wenn ausserdem $g > 0$ vorausgesetzt wird.

---

* Journal für Mathematik Bd. 26, S. 168.

Zweiter Abschnitt.

Die Bewegungen auf den Rotationsflächen zweiter Ordnung.

§ 1.

Bewegungen auf Krümmungscurven.

Um das im ersten Abschnitt angegebene Problem der Bewegung auf einer Rotationsfläche weiter zu behandeln, führen wir zum Zwecke der Separation der Variabeln in die Integrale Ia) und II'a) neue Coordinaten ein und setzen

$$1)\qquad x = \varphi(z)\cos u, \quad y = \varphi(z)\sin u.$$

Dann ergiebt sich

$$2)\qquad \begin{cases} \varphi^2(z)[1+\varphi'(z)^2]z'^2 = 2[U(z)+h]\varphi^2(z) - k^2 \\ \varphi^2(z)u' = k, \end{cases}$$

oder wir erhalten in separirter Form als Differentialgleichung der Bahncurve

$$3)\qquad du = \frac{k\sqrt{1+\varphi'(z)^2}}{\varphi(z)\sqrt{2[U(z)+h]\varphi^2(z)-k^2}}\,dz$$

und für die Zeit

$$4)\qquad dt = \frac{\varphi(z)\sqrt{1+\varphi'(z)^2}}{\sqrt{2[U(z)+h]\varphi^2(z)-k^2}}\,dz.$$

Wir beschäftigen uns zuvörderst mit der Frage nach den Bewegungen auf Krümmungslinien. Oben war bemerkt worden, dass die Integrale, aus denen sich die Gleichungen 2) ableiten, solche Bewegungen zulassen, ohne dass diese den ursprünglichen Bewegungsgleichungen zu genügen brauchen, und diese sind daher auszuschliessen. Wenn nun die Rotationsfläche keine Kugel ist, so existiren auf ihnen zwei Arten von Krümmungslinien, Meridiane und Parallelkreise.

Für eine Bewegung auf den ersteren hat man $k = 0$ zu setzen und es lässt sich dann der Rückgang auf die ursprünglichen Differentialgleichungen der Bewegung ohne weitere Schwierigkeiten bewerkstelligen. Für die Zeit wird also

$$5)\qquad dt = \frac{\sqrt{1+\varphi'(z)^2}}{\sqrt{2[U(z)+h]}}\,dz.$$

Von den unter gewissen Bedingungen möglichen labilen Bewegungsformen abgesehen, finden auf dem Meridiane Oscillationen oder Circulationen des materiellen Punktes statt, und zwar erweist sich hier die Fläche $U(z)+h=0$ von entscheidender Bedeutung.

Für eine Bewegung auf einem Parallelkreise würde $z' = 0$ und der zugehörige Werth $z = z_0$ eine Wurzel der Gleichung

$$6) \qquad R(z) \equiv 2[U(z) + h]\varphi^2(z) - k^2 = 0$$

sein, wie aus der ersten der Gleichungen 2) unmittelbar ersichtlich ist. Aber diese Bedingung allein ist nicht ausreichend. In der That würden sich dann nach den Gleichungen 3) des ersten Abschnittes folgende Gleichungen für die Bewegung aufstellen lassen:

$$x'' = \lambda x, \quad y'' = \lambda y, \quad z'' = \lambda\varphi(z)\varphi'(z) + U'(z) = 0$$
$$xx'' + yy'' + x'^2 + y'^2 = 0, \quad x'^2 + y'^2 = 2(U[z] + h)$$

und eliminirt man aus ihnen x'', y'', x', y', λ, so erhält man

$$7) \qquad R'(z) \equiv 2\varphi(z)\{2[U(z) + h]\varphi'(z) + U'(z)\varphi(z)\} = 0$$

für $z = z_0$, so dass also z_0 eine Doppelwurzel der Gleichung $R(z) = 0$ ist. Und umgekehrt, hat der materielle Punkt eine solche Energie h und eine solche Flächengeschwindigkeit k, dass für einen bestimmten Werth z_0 von z die Gleichung $R(z) = 0$ eine Doppelwurzel besitzt, so muss sich der Punkt auf dem Parallelkreise $z = z_0$ bewegen, wenn er zu Anfang darin war. Denn man kann, was sehr einfach ist und wohl nicht näher auseinandergesetzt zu werden braucht, erstens zeigen, dass bei dieser Bewegungsart der Rückgang auf die ursprünglichen Differentialgleichungen der Bewegungen möglich ist, und zweitens, dass der materielle Punkt, wenn er sich überhaupt in der Umgebung des Parallelkreises bewegen kann, niemals aus demselben herausgekommen sein, ebenso wenig wie er andererseits in denselben jemals hineingelangen kann. Da nämlich $R(z) = 0$ die Doppelwurzel $z = z_0$ hat, muss $R(z)$ sich in der Form $(z - z_0)^2 R_1(z)$ darstellen lassen, wo $R_1(z)$ für $z = z_0$ einen von Null verschiedenen endlichen Werth annimmt, und man hat dann nach 4)

$$dt = \frac{\varphi(z)\sqrt{1 + \varphi^2(z)}}{(z - z_0)\sqrt{R_1(z)}}\, dz.$$

Wenn nun in der Umgebung des Parallelkreises $z = z_0$ eine Bewegung möglich ist, so muss $R_1(z)$ für diese > 0 sein, und man kann dann aus der eben abgeleiteten Differentialgleichung das Behauptete leicht bewahrheiten. Die Bewegung könnte man daher als eine asymptotisch-singuläre bezeichnen, während, wenn in der Umgebung von z_0 $R_1(z) < 0$ ist, dieselbe eine singuläre Bewegung genannt werden soll. In beiden Fällen findet in dem Parallelkreis $z = z_0$ eine Berührung der Rotationsfläche und der Fläche

$$8) \qquad x^2 + y^2 = \frac{k^2}{2[U(z) + h]}$$

statt, beim ersten ist für die Umgebung auf der Oberfläche

$$x^2 + y^2 > \frac{k^2}{2(U+h)},$$

beim zweiten dagegen

$$< \frac{k^2}{2(U+h)}.$$

Auf dem Parallelkreise geschieht die Bewegung immer mit constanter Geschwindigkeit, die gegeben wird durch $\frac{k}{\varphi(z_0)}$.

§ 2.

Bewegungen auf zweifach ausgedehnten Gebieten.

Nach Erledigung dieser Fälle wenden wir uns nun zu den nicht auf Krümmungslinien erfolgenden Bewegungen und können uns, da hierüber genauere Untersuchungen, besonders die von Staude und Stäckel*, vorliegen, damit begnügen, kurz auf die Resultate hinzuweisen. Ebenso wie schon vorhin erweist sich auch hier die Rotationsfläche 8) in der Vertheilung ihrer Schnittcurven mit der gegebenen Rotationsfläche für den Charakter der Bewegung auf letzterer in erster Linie als entscheidend. Wenn wir von den Fällen absehen, wo sie keine begrenzten Zonen auf der gegebenen Fläche abschneidet, in welchen Fällen instabile Bewegungsformen vorliegen, sondern annehmen, dass eine oder mehrere von einander getrennte Zonen von endlicher Breite existiren, für welche $x^2 + y^2 > \frac{k^2}{2(U+h)}$ ist, so finden auf diesen durch die Schnittkreise beider Flächen begrenzten Gebieten bedingt periodische Bewegungen statt. Der Punkt kann sich zu Anfang irgendwo in der Zone befinden. Die Bewegung schreitet bei dieser „regulären“ Bewegungsform in der Längsdimension derselben in einer der beiden möglichen Richtungen, aber immer in gleichem Sinne fort, indem die Flächengeschwindigkeit der auf die Ebene eines Parallelkreises projicirten Bewegung constant bleibt, und die Bahncurve abwechselnd die beiden begrenzenden Parallelkreise berührt, weshalb diese die Wendekreise der Bewegung genannt werden können.

Rücken die beiden Wendekreise einer Zone zusammen oder geschieht dies Zusammenfallen mit zwei nächstfolgenden Wendekreisen verschiedener Zonen, so haben wir die schon oben behandelten beiden Bewegungsformen, die singuläre und asymptotisch-singuläre vor uns, für welche wir oben schon den Existenzbeweis geliefert haben. Bei der letzteren flacht sich die Bahn bei der Annäherung an den kritischen Parallelkreis, der aus dem Zusammenfall der Wendekreise hervorgeht, derart ab, dass sie in

* Staude, Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche. Acta mathematica. Bd. 11, S. 303 flg. — Stäckel, Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche. J. D. Berlin 1885.

immer neuen Windungen die Rotationsfläche umkreisend sich immer mehr dem kritischen Parallelkreise nähert, ohne ihn aber jemals zu erreichen.

§ 3.

Geodätische Linien auf Rotationsellipsoiden.

Nach diesem Ueberblicke über die allgemeinen Verhältnisse wenden wir uns jetzt zu einigen speciellen Beispielen, um bei ihnen namentlich die Windungsverhältnisse der regulären Bewegungsformen zu studiren, nämlich zu den geodätischen Linien und der Bewegung eines schweren Punktes auf den Rotationsellipsoiden. Die Gleichung der Fläche sei

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Bei der Trägheitsbewegung, bei welcher zwischen den Constanten h und k die Ungleichung $2ha^2 > k^2$ vorausgesetzt werden muss und wir zur Abkürzung

$$\alpha^2=b^2-\frac{k^2b^2}{2ha^2}$$

setzen wollen, lautet die Differentialgleichung der Curve

$$du=\frac{\sqrt{b^2-\alpha^2}}{a}\,\frac{\sqrt{(a^2-b^2)z^2+b^4}}{(b^2-z^2)\sqrt{\alpha^2-z^2}}\,dz.$$

Die Bahn verläuft periodisch zwischen den Wendekreisen $z=\alpha$ und $z=-\alpha$ und während des Zeitabschnittes zwischen zwei auf einander folgenden Berührungen mit ihnen beschreibt der Radiusvector der Projection des Punktes auf die XY-Ebene einen Winkel, dessen Grösse durch

$$\omega=\frac{\sqrt{b^2-\alpha^2}}{a}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\sqrt{(a^2-b^2)z^2+b^4}}{(b^2-z^2)\sqrt{\alpha^2-z^2}}\,dz$$

ausgedrückt wird. Bringt man diesen Ausdruck auf die Form

$$\omega=b\sqrt{b^2-\alpha^2}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\sqrt{1+\dfrac{(b^2-a^2)(b^2-z^2)}{a^2b^2}}}{(b^2-z^2)\sqrt{\alpha^2-z^2}}\,dz$$

und vergleicht ihn mit dem folgenden

$$\pi=b\sqrt{b^2-\alpha^2}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{dz}{(b^2-z^2)\sqrt{\alpha^2-b^2}},\qquad (b^2>\alpha^2)$$

so erkennt man, da im Integrationsintervall stets $b^2-z^2>0$ ist, dass $\omega \gtreqless \pi$ ist, je nachdem man $b \gtreqless a$ hat, also das Rotationsellipsoid ein verlängertes, eine Kugel oder ein abgeplattetes ist. Man kann aber den Betrag, um den sich ω von π unterscheidet, in einfacher Form darstellen.

Ist nämlich das Rotationsellipsoid ein verlängertes $(b > a)$, so werde

$$\beta^2 = \frac{b^4}{b^2 - a^2} (> b^2)$$

gesetzt, so dass

$$\omega = \frac{b^2 \sqrt{b^2 - \alpha^2}}{a\beta} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sqrt{\beta^2 - z^2}\, dz}{(b^2 - z^2)\sqrt{\alpha^2 - z^2}} = \frac{2b^2 \sqrt{(b^2 - \alpha^2)}}{a\beta} \int_0^{\alpha} \frac{\sqrt{\beta^2 - z^2}\, dz}{(b^2 - z^2)\sqrt{\alpha^2 - z^2}}$$

ist; versteht man dann unter ω_1 das Integral

$$\omega_1 = \frac{2b^2 \sqrt{b^2 - \alpha^2}}{a\beta} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\sqrt{z^2 - \beta^2}}{(z^2 - b^2)\sqrt{z^2 - \alpha^2}} dz,$$

so besteht die Gleichung

$$\omega = \pi + \omega_1.$$

Beim abgeplatteten Rotationsellipsoid $(b < a)$ dagegen wird mit Einführung von

$$\beta^2 = \frac{b^4}{a^2 - b^2},$$

$$\omega = \frac{b^2 \sqrt{b^2 - \alpha^2}}{a\beta} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sqrt{\beta^2 + z^2}\, dz}{(b^2 - z^2)\sqrt{\alpha^2 - z^2}} = \frac{2b^2 \sqrt{b^2 - \alpha^2}}{a\beta} \int_0^{\alpha} \frac{\sqrt{\beta^2 + z^2}\, dz}{(b^2 - z^2)\sqrt{\alpha^2 - z^2}}$$

und es ergiebt sich, wenn

$$\omega_1 = \frac{2b^2 \sqrt{b^2 - \alpha^2}}{a\beta} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\sqrt{z^2 - \beta^2}}{(z^2 + b^2)\sqrt{z^2 + \alpha^2}} dz$$

gesetzt wird,

$$\omega = \pi - \omega_1.$$

Es kann nun vorkommen, dass die Bahncurven geschlossen sind; dann müssen ω und π oder ω_1 und π in einem rationalen Verhältniss zu einander stehen. Wenn eine Schliessung nach n Umläufen und m Oscillationen erfolgt, unter einer Oscillation die Bewegung von einem Wendekreis zum andern und dann wieder zum ursprünglichen zurück verstanden, so muss nämlich

$$n\pi = m\omega$$

sein. Aus den Ungleichungen folgt daher, dass beim verlängerten Rotationsellipsoid $n > m$, beim abgeplatteten $n < m$ ist. Während also auf einer Kugel stets eine Schliessung nach einem Umlaufe und einer Oscillation stattfindet, sind für eine Schliessung auf dem verlängerten Rotationsellipsoid, wenn solche überhaupt eintritt, mehr Umläufe als Oscillationen, beim abgeplatteten dagegen weniger erforderlich. Wenn überhaupt Schliessung der Bahn stattfinden kann, so ist die anfängliche Lage des materiellen Punktes in der Bewegungszone ohne Belang.

Wenn nun auch für die Schliessung ein rationales Verhältniss von ω und π vorausgesetzt wird, so sind dennoch diese Betrachtungen auch ohne eine solche Annahme für die Kenntniss des Verlaufes der geodätischen Linien von Wichtigkeit. Denn man kann auch im allgemeinen Falle immer zwei ganze Zahlen n und m so bestimmen, dass die Differenz $n\pi - m\omega$ unter jede gegebene Grenze sinkt, und also eine beliebig angenäherte Schliessung stattfindet.

§ 4.

Bewegung eines schweren Punktes auf den Rotationsellipsoiden (und auf einer Kugel).

Etwas complicirter als bei den geodätischen Linien gestalten sich die Verhältnisse bei der Bewegung eines schweren Punktes auf den Rotationsellipsoiden. Die Schwere soll in der positiven Richtung der Rotationsachse wirken, so dass $U = gz$ ist, unter g die Beschleunigung der Schwere verstanden. Die Differentialgleichung der Bahncurve lautet dann

$$du = \frac{kb}{a} \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)z^2 + b^4}\, dz}{(b^2 - z^2)\sqrt{2a^2(gz + h)(b^2 - z^2) - k^2b^2}}.$$

Eine Wurzel der Gleichung

$$R(z) \equiv 2a^2(gz + h)(b^2 - z^2) - k^2b^2 = 0$$

ist reell und liegt nun stets, wie leicht zu erkennen ist, zwischen $-b$ und $-\infty$; ihr Werth ist, wenn man die anderen beiden Wurzeln α und β nennt, gleich $-\frac{b^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta}$; es ist also $\frac{b^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta} > b$ und demnach $\frac{(b-\alpha)(b-\beta)}{\alpha + \beta} > 0$. Da ferner $R(z)$ für $z = -b$ und $z = +b$ den negativen Werth $-k^2b^2$ annimmt, und wenn überhaupt Bewegung stattfinden soll, zwischen $-b$ und $+b$ $R(z)$ irgendwo > 0 sein muss, so sind auch die Wurzeln α und β reell und liegen zwischen $-b$ und $+b$, und es folgt aus $\frac{(b-\alpha)(b-\beta)}{\alpha + \beta} > 0$ in Verbindung hiermit, dass $\alpha + \beta > 0$, also jedenfalls die grössere $\beta > 0$ sein muss. Die Werthe $z = \alpha$ und $z = \beta$ entsprechen den beiden Wendekreisen, zwischen denen sich der materielle Punkt bewegt; von diesen liegt also nicht nur der eine unterhalb des Aequators, sondern auch der zwischen beiden in der Mitte liegende Parallelkreis. Statt der Constanten h und k können die Werthe α und β eingeführt werden; es ist dann

$$\frac{h}{g} = \frac{b^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \alpha\beta}{\alpha + \beta}, \quad \frac{k^2b^2}{2a^2g} = \frac{(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)}{\alpha + \beta}$$

und die Differentialgleichung der Bahncurve nimmt die Gestalt an

$$du = \frac{\sqrt{(b^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2)}}{a} \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)z^2 + b^4}\, dz}{(b^2 - z^2)\sqrt{(z - \alpha)(\beta - z)(b^2 + [\alpha + \beta]z + \alpha\beta)}}.$$

Während einer halben Oscillation beschreibt der Radiusvector der Projection des Punktes auf die Horizontalebene einen Winkel

$$\omega = \frac{\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}}{a}\int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{(a^2-b^2)z^2+b^4}\,dz}{(b^2-z^2)\sqrt{(z-\alpha)(\beta-z)(b^2+[\alpha+\beta]z+\alpha\beta)}}.$$

Schreibt man ω in der Form

$$\omega = \sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}\int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{z^2+\frac{b^2}{a^2}(b^2-z^2)}\,dz}{(b^2-z^2)\sqrt{(z-\alpha)(\beta-z)(b^2+[\alpha+\beta]z+\alpha\beta)}}$$

so erkennt man, dass der Werth von ω mit wachsendem a abnimmt.

Der Betrag, um welchen sich ω von π unterscheidet, lässt sich auch hier bestimmen. Wir behandeln nacheinander die Fälle $a = b$, $a < b$, $a > b$.

Dem Falle $a = b$ entspricht das Problem des Kugelpendels. Es ist dann

$$\omega = a\sqrt{(a^2-\alpha^2)(a^2-\beta^2)}\int_\alpha^\beta \frac{dz}{(a^2-z^2)\sqrt{(z-\alpha)(\beta-z)(a^2+[\alpha+\beta]z+\alpha\beta)}},$$

und es ergiebt sich, wenn

$$\omega_1 = a\sqrt{(a^2-\alpha^2)(a^2-\beta^2)}\int_{\frac{a^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta}}^{\infty} \frac{dz}{(z^2-a^2)\sqrt{(z+\alpha)(z+\beta)([\alpha+\beta]z-a^2-\alpha\beta)}}$$

gesetzt wird:

$$\omega = \pi - \omega_1.$$

Während einer ganzen Oscillation wird also noch keine Windung um die Zone vollendet, und wenn die Bahn des materiellen Punktes sich schliesst, so geschieht diese Schliessung immer mit mehr Oscillationen als Windungen. Es lässt sich ferner zeigen, dass $\omega > \frac{\pi}{2}$* ist, indem man ω in der Form schreibt:

$$\omega = \frac{\sqrt{(b-\alpha)(b-\beta)}}{2}\int_\alpha^\beta \frac{dz}{(b-z)\sqrt{(z-\alpha)(\beta-z)}}\cdot\sqrt{\frac{b^2+(\alpha+\beta)b+\alpha\beta}{b^2+(\alpha+\beta)z+\alpha\beta}}$$

$$+\frac{\sqrt{(b+\alpha)(b+\beta)}}{2}\int_\alpha^\beta \frac{dz}{(b+z)\sqrt{(z-\alpha)(\beta-z)}}\cdot\sqrt{\frac{b^2-(\alpha+\beta)b+\alpha\beta}{b^2-(\alpha+\beta)z+\alpha\beta}}$$

und beachtet, dass

* Vergl. Durège, Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig 1868. S. 328. Dort wird der Beweis für diese Behauptung mit Hilfe der elliptischen Functionen geführt.

$$\pi = \sqrt{(b-\alpha)(b-\beta)}\int_\alpha^\beta \frac{dz}{(b-z)\sqrt{(z-\alpha)(\beta-z)}}, \quad (\alpha<\beta<b)$$

und dass im Integrationsintervall

$$\sqrt{\frac{b^2+(\alpha+\beta)b+\alpha\beta}{b^2+(\alpha+\beta)z+\alpha\beta}} > 1$$

ist.

Beim verlängerten Rotationsellipsoid* $(b > a)$ kann man, wenn $\delta^2 = \frac{b^4}{b^2-a^2}$ ist, die drei Fälle $\frac{b^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta} > \delta$, $\frac{b^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta} = \delta$, $\frac{b^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta} < \delta$ unterscheiden.

Wenn $\frac{b^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta} = \delta$ ist, so besteht zwischen den Integralen

$$\omega = \frac{b^2\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}}{\delta a(\alpha+\beta)}\int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{\delta-z}\,dz}{(b^2-z^2)\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z+\delta)}},$$

$$\omega_1 = \frac{b^2\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}}{\delta a(\alpha+\beta)}\int_\delta^\infty \frac{\sqrt{\delta-z}\,dz}{(z^2-b^2)\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z+\delta)}}$$

die Relation

$$\omega = \pi + \omega_1.$$

In den beiden anderen Fällen ist

$$\omega = \frac{b^2\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}}{a\delta}\int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{\delta^2-z^2}\,dz}{(b^2-z^2)\sqrt{(z-\alpha)(\beta-z)(b^2+[\alpha+\beta]z+\alpha\beta)}}$$

und werde gesetzt

$$\omega_1 = \frac{b^2\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}}{a\delta}\int_\delta^\infty \frac{\sqrt{z^2-\delta^2}\,dz}{(z^2-b^2)\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(b^2+[\alpha+\beta]z+\alpha\beta)}}$$

Versteht man dann beim Falle $\frac{b^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta} > \delta$ unter ω_2 das Integral

$$\omega_2 = \frac{b^2\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}}{a\delta}\int_\delta^{\frac{b^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta}} \frac{\sqrt{z^2-\delta^2}\,dz}{(z^2-b^2)\sqrt{(a+z)(\beta+z)(b^2-[\alpha+\beta]z+\alpha\beta)}}$$

so ist

$$\omega = \pi + \omega_1 + \omega_2;$$

wenn dagegen $\frac{b^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta} < \delta$ ist, und unter ω_2 das Integral

* Vergl. Schleiermacher, Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf dem verlängerten Rotationsellipsoid und die ultraelliptischen Integrale 3. Gattung. Dissertation Erlangen.

$$\omega_2 = \frac{b^2\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}}{a\delta}\int\limits_{\frac{b^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta}}^{\delta}\frac{\sqrt{\delta^2-z^2}\,dz}{(z^2-b^2)\sqrt{(\alpha+z)(\beta+z)(-b^2+[\alpha+\beta]z-\alpha\beta)}}$$

verstanden wird, so ergiebt sich

$$\omega = \pi + \omega_1 - \omega_2.$$

In den beiden zuerst behandelten Fällen ist also stets $\omega > \pi$, in dem zuletzt behandelten kann dagegen ω grösser, gleich oder kleiner als π sein. Beim verlängerten Rotationsellipsoid kann also während einer Oscillation eine Windung um die Zone schon vollendet sein, gleichzeitig mit ihr zusammentreffen oder noch nicht zum Abschluss gebracht sein. Auch hier lässt sich zeigen, dass $\omega > \frac{\pi}{2}$ ist; nämlich es ist ω jedenfalls grösser als für den Fall $a = b$, wo ω schon den Werth $\frac{\pi}{2}$ überstieg.

Auf dem abgeplatteten Rotationsellipsoid $(b < a)$ dagegen wird ebenso wie auf der Kugel während einer Oscillation noch keine Windung vollendet. Ist $\delta^2 = \frac{b^4}{a^2-b^2}$, so besteht zwischen dem Integral

$$\omega = \frac{b^2\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}}{a\delta}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\sqrt{z^2+\delta^2}\,dz}{(b^2-z^2)\sqrt{(z-\alpha)(\beta-z)(b^2+[\alpha+\beta]z+\alpha\beta)}}$$

und den folgenden

$$\omega_1 = \frac{b^2\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}}{a\delta}\int\limits_{\frac{b^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta}}^{\infty}\frac{\sqrt{z^2+\delta^2}\,dz}{(z^2-b^2)\sqrt{(\alpha+z)(\beta+z)(-b^2+[\alpha+\beta]z-\alpha\beta)}}$$

$$\omega_2 = \frac{2b^2}{a\delta}\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}$$

$$\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\sqrt{(z^2-\delta^2)\{[b^2-\alpha^2-\beta^2-\alpha\beta]z^2-\alpha\beta[b^2+\alpha\beta]+\sqrt{(z^2+\alpha^2)(z^2+\beta^2)([\alpha+\beta]z^2+(b^2+\alpha\beta)^2}}}{(z^2+b^2)\sqrt{2(z^2+\alpha^2)(z^2+\beta^2)([\alpha+\beta]^2z^2+[b^2+\alpha\beta]^2)}}$$

die Relation

$$\omega = \pi - \omega_1 - \omega_2.$$

§ 5.

Ueber die Ableitung der Periodenrelationen.

Da bei der Ableitung der angegebenen Periodenrelationen ganz besondere Sorgfalt auf die richtige Bestimmung der Vorzeichen anzuwenden ist, so halten wir es nicht für überflüssig, an einem Beispiel die Ableitung derselben ausführlich zu zeigen, und zwar wählen wir als solches die zuletzt erwähnte Relation, weil ihre Ableitung noch besondere Discussionen den übrigen gegenüber erfordert.

Zur Abkürzung werde gesetzt

$$\gamma = \frac{b^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta}, \quad R(z) = (\alpha + \beta)(z - \alpha)(\beta - z)(z + \gamma)(z^2 + \delta^2).$$

Während im Vorhergehenden allen Wurzeln immer der positive Werth beizulegen ist, soll jetzt eine solche Wurzel durch einen über das Wurzelzeichen angebrachten Strich $(\overline{\sqrt{}})$ kenntlich gemacht werden.

Wir breiten $\overline{\sqrt{R(z)}}$ eindeutig auf einer zweiblättrigen Riemann'schen Fläche mit den Windungspunkten ∞, $-\gamma$, α, β, $i\delta$, $-i\delta$ und den von $-\infty$ nach $-\gamma$, von α nach β und von $i\delta$ über $+i\infty$, $-i\infty$ nach $-i\delta$ geradlinig verlaufenden Verzweigungsschnitten aus. Die zwei Seiten der Verzweigungsschnitte sollen dadurch unterschieden werden, dass bei der auf der reellen Achse liegenden die nach der positiv imaginären Achse gerichtete als positive und daher die nach der negativ-imaginären Achse gerichtete als negative, bei dem auf der imaginären Achse verlaufenden Verzweigungsschnitt die nach der positiv reellen Achse gerichtete als positive und daher die nach der negativ reellen Achse gerichtete als negative Seite bezeichnet wird. Wenn dann auf dem oberen Blatte auf der positiven Seite des Verzweigungsschnittes von α bis β $\overline{\sqrt{R(z)}} = +\sqrt{R(z)}$ angenommen wird, so ist die Werthvertheilung von $\overline{\sqrt{R(z)}}$ auf der Riemann'schen Fläche vollständig fixirt.

Um die Wertheverthеilung auf der reellen und imaginären Achse zu untersuchen, bezeichnen wir die Entfernung eines beliebigen Punktes z auf der Riemann'schen Fläche von den Punkten α, β, $-\gamma$, $+i\delta$, $-i\delta$ resp. mit ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4, nehmen als positive Richtung dieser Verbindungslinien die nach dem Punkte z hin verlaufenden an und nennen die Winkel, um welche man die nach den angegebenen Verzweigungspunkten parallel verschobene reelle Achse im oberen Blatte drehen muss, damit nicht nur ihre positive Richtung mit der positiven Richtung der Verbindungslinien zusammenfällt, sondern sie auch in dasselbe Blatt übergeführt wird, in welchem sich der Punkt z befindet, resp. φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4; diese Winkel sind bei Zugrundelegung eines und desselben positiven Drehungssinnes zwischen den Grenzen 0 und 4π enthalten und sind sonst bis auf Vielfache von 4π eindeutig bestimmt. Dann ist

$$\overline{\sqrt{R(z)}} = \varepsilon i \sqrt{(\alpha + \beta)\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4}\, e^{i\frac{\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{2}},$$

wo das Vorzeichen ε in Folge der oben angegebenen Festsetzung das negative ist.

Bestimmt man dann die Winkel für die verschiedenen Theile der reellen Achse, so ergiebt sich als Werth von $\overline{\sqrt{R(z)}}$:

für die Verzweigungsschnitte der reellen Achse:

	von $-\infty$ bis $-\gamma$	von α bis β
auf der positiven Seite des oberen und negativen des unteren Blattes	$-\sqrt{R(z)}$	$+\sqrt{R(z)}$
auf der positiven Seite des unteren und negativen des oberen Blattes	$+\sqrt{R(z)}$	$-\sqrt{R(z)}$

für die übrigen Theile der reellen Achse:

	von $-\gamma$ bis α	von β bis ∞
auf dem oberen Blatte	$+i\sqrt{-R(z)}$	$-i\sqrt{-R(z)}$
auf dem unteren Blatte	$-i\sqrt{-R(z)}$	$+i\sqrt{-R(z)}$

Um die Werthvertheilung auf der imaginären Achse zu bestimmen, bemerke man, dass für $z = iy$

$$R(iy) = u + iv,$$
$$u = (\alpha+\beta)(\delta^2 - y^2)[(\gamma-\alpha-\beta)y^2 - \alpha\beta\gamma],$$
$$v = (\alpha+\beta)(\delta^2 - y^2)(b^2 + y^2)y$$

ist, und dass ferner

$$\sqrt{u+iv} = \pm\left[\sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}} + \varepsilon i\sqrt{\frac{-u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}}\right],$$

wo $\varepsilon = +1$ oder -1 ist, je nachdem $v > 0$ oder < 0 ist.

Die Ausdrücke $\sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}}$ und $\sqrt{\frac{-u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}}$ sind Functionen von y^2, die wir mit $\varphi(y^2)$ und $\psi(y^2)$ bezeichnen wollen. Demnach ist auf der imaginären Achse

$$\sqrt{R(z)} = \pm[\varphi(y^2) - i\psi(y^2)]$$

für $\infty > y > \delta$ und für $-\delta < y < 0$, dagegen

$$\sqrt{R(z)} = \pm[\varphi(y^2) + i\psi(y^2)]$$

für $-\infty < y < -\delta$ und für $\delta > y > 0$.

Bestimmt man nun für den Verzweigungsschnitt die Winkel φ für die unendlich fernen Punkte und leitet daraus die Vorzeichen der reellen und imaginären Theile von $\sqrt{R(z)}$ ab und beachtet man weiter, dass die

Werthe von $\sqrt{R(z)}$ auf der imaginären Achse in ihrem Schnitt mit der reellen Achse in die früher bestimmten übergehen müssen, so erhält man als Werth von $\sqrt{R(z)}$

für den Verzweigungsschnitt der imaginären Achse:

	von $i\delta$ bis $i\infty$	von $-i\delta$ bis $-i\infty$
auf der positiven Seite des oberen und negativen des unteren Blattes	$-\varphi(y^2)+i\psi(y^2)$	$\varphi(y^2)+i\psi(y^2)$
auf der negativen Seite des oberen und positiven des unteren Blattes	$\varphi(y^2)-i\psi(y^2)$	$-\varphi(y^2)-i\psi(y^2)$

für die übrigen Theile der imaginären Achse:

	von 0 bis $i\delta$	von 0 bis $-i\delta$
auf dem oberen Blatte	$\varphi(y^2)+i\psi(y^2)$	$-\varphi(y^2)+i\psi(y^2)$
auf dem unteren Blatte	$-\varphi(y^2)-i\psi(y^2)$	$\varphi(y^2)-i\psi(y^2)$

Schliesst man nun aus dem oberen Blatte die Punkte $-b$ und $+b$ durch kleine Kreise, die Verzweigungsschnitte durch sich eng anschmiegende Schleifen aus, so ist in dem übrigen Theil des Blattes die Function

$$\frac{b^2}{a\delta}\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}\,\frac{z^2+\delta^2}{b^2-z^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{R(z)}}$$

regulär, und daher das über die Begrenzung erstreckte Integral gleich 0. Da das Integral über die Begrenzung im Unendlichen selbst gleich 0 ist, so hat man die Summe der etwa im positiven Sinne über die Verzweigungsschnitte und die Punkte $-b$ und $+b$ erstreckten Integrale gleich 0 zu setzen.

Bei der Integration um den Verzweigungsschnitt von α bis β ergiebt sich

$$\frac{b^2}{a\delta}\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}\left[\int\limits_\alpha^\beta\frac{z^2+\delta^2}{b^2-z^2}\,\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}-\int\limits_\beta^\alpha\frac{z^2+\delta^2}{b^2-z^2}\,\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}\right]$$

$$=\frac{2b^2}{a\delta}\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}\int\limits_\alpha^\beta\frac{z^2+\delta^2}{b^2-z^2}\,\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}=2\omega,$$

um den Verzweigungsschnitt von $-\infty$ bis $-\gamma$

$$\frac{b^2}{a\delta}\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}\left[\int\limits_{-\gamma}^{-\infty}\frac{z^2+\delta^2}{b^2-z^2}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}-\int\limits_{-\infty}^{-\gamma}\frac{z^2+\delta^2}{b^2-z^2}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}\right]$$

$$=\frac{2b^2}{a\delta}\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}\int\limits_{-\gamma}^{-\infty}\frac{z^2+\delta^2}{b^2-z^2}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}=2\omega_1,$$

um den Verzweigungsschnitt von $i\delta$ über $i\infty$, $-i\infty$ bis $-i\delta$

$$\frac{b^2}{a\delta}\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}\left[\int\limits_{i\delta}^{i\infty}\frac{z^2+\delta^2}{b^2-z^2}\frac{dz}{(\varphi-i\psi)}+\int\limits_{i\infty}^{i\delta}\frac{z^2+\delta^2}{b^2-z^2}\frac{dz}{(-\varphi+i\psi)}\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-i\infty}^{-i\delta}\frac{z^2+\delta^2}{b^2-z^2}\frac{dz}{(-\varphi-i\psi)}+\int\limits_{-i\delta}^{-i\infty}\frac{z^2+\delta^2}{b^2-z^2}\frac{dz}{(\varphi+i\psi)}\right]$$

$$=\frac{2b^2}{a\delta}\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}\left[\int\limits_{i\delta}^{i\infty}\frac{z^2+\delta^2}{b^2-z^2}\frac{dz}{\varphi-i\psi}+\int\limits_{-i\delta}^{-i\infty}\frac{z^2+\delta^2}{b^2-z^2}\frac{dz}{\varphi+i\psi}\right]$$

$$=\frac{2b^2}{a\delta}\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}\left[\int\limits_{i\delta}^{i\infty}\frac{z^2+\delta^2}{b^2-z^2}\frac{dz}{\varphi-i\psi}-\int\limits_{i\delta}^{i\infty}\frac{z^2+\delta^2}{b^2-z^2}\frac{dz}{\varphi+i\psi}\right]$$

$$=\frac{2b^2}{a\delta}\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}\int\limits_{i\delta}^{i\infty}\frac{z^2+\delta^2}{b^2-z^2}\frac{2i\psi}{\varphi^2+\psi^2}dz$$

$$=\frac{4b^2}{a\delta}\sqrt{(b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{y^2-\delta^2}{b^2+y^2}\frac{\psi\,dy}{\varphi^2+\psi^2}$$

$$=2\omega_2,$$

während die Integration um die Punkte $-b$ und $+b$ zusammen den Betrag -2π liefert. Auf diese Weise gelangt man zu der letzten oben angegebenen Periodenrelation.

(Schluss folgt.)

Kleinere Mittheilungen.

IV. Ueber einige Eigenschaften der Bessel'schen Function erster Art, insbesondere für ein grosses Argument.

Der nachfolgende kleine Beitrag ist eines Theils gestützt auf eine Vorlesung meines verehrten Lehrers L. Schläfli, anderen Theils angeregt durch den Unterricht, den ich selbst zu ertheilen habe, entstanden. Er stellt in einfacher Weise die Formeln auf, die entstehen, wenn das Argument aus der positiven Lage um den Nullpunkt herum geführt wird und bestimmt den Grenzwerth für den Fall $m = \frac{1}{2}$. Dies für alle vorkommenden Formen durchzuführen und zu beweisen, mag vielleicht einiges Interesse haben.

Wenn wir die Bessel'sche Function erster Art $\overset{a}{J}(x)$ folgendermassen definiren:

$$1) \qquad \overset{a}{J}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(x\sin\varphi)\cos^{2a}\varphi\, d\varphi$$

und mit $\overset{a}{K}(x)$ folgenden Ausdruck bezeichnen:

$$2) \qquad \overset{a}{K}(x) = \operatorname{cotg} a\pi\, \overset{a}{J}(x) - \frac{\overset{-a}{J}(x)}{\sin a\pi},$$

so erhalten wir, da

$$3) \left\{ \begin{aligned} \overset{-a}{J}(x) &= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)} \\ &\times \left\{ 2\sin a\pi \int_0^{\infty} e^{-x\sin\chi} \cos^{2a}\chi\, d\chi + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\varphi + a\pi)\cos^{2a}\varphi\, d\varphi \right\}, \end{aligned} \right.$$

schliesslich für $\overset{a}{K}(x)$ den Werth

$$4)\quad \begin{cases} \overset{a}{K}(x) = \dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)} \\ \times\left\{ 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\sin\varphi)\cos\varphi^{2a}\,d\varphi - 2\int\limits_0^{\infty} e^{-x\sin\chi}\cos^{2a}\chi\,d\chi \right\}. \end{cases}$$

Nun kann man weiter mittelst folgender zwei Beziehungen

$$\overset{a}{P}(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{ia\pi}{2}}\left(\overset{a}{J}(x) + i\overset{a}{K}(x)\right)$$

und

$$\overset{a}{Q}(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{ia\pi}{2}}\left(\overset{a}{J}(x) - i\overset{a}{K}(x)\right)$$

finden:

$$5)\quad \begin{cases} \overset{a}{P}(x) = \dfrac{e^{\frac{ia\pi}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^a \\ \times\left\{ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ix\sin\varphi}\cos\varphi^{2a}\,d\varphi - i\int\limits_0^{\infty} e^{-x\sin\chi}\cos^{2a}\chi\,d\chi \right\} \end{cases}$$

und $\overset{a}{Q}(x)$, das formell conjugirt ist

$$6)\quad \begin{cases} \overset{a}{Q}(x) = \dfrac{e^{-\frac{ia\pi}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^a \\ \times\left\{ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ix\sin\varphi}\cos\varphi^{2a}\,d\varphi - i\int\limits_0^{\infty} e^{-x\sin\chi}\cos^{2a}\chi\,d\chi \right\}. \end{cases}$$

Umgekehrt ist

$$\overset{a}{J}(x) = e^{-\frac{ia\pi}{2}}\overset{a}{P}(x) + e^{\frac{ia\pi}{2}}\overset{a}{Q}(x),$$

$$\overset{a}{K}(x) = \frac{1}{i}\left(e^{-\frac{ia\pi}{2}}\overset{a}{P}(x) - e^{\frac{ia\pi}{2}}\overset{a}{Q}(x)\right).$$

Nun wollen wir das Argument um 0 herum führen, indem wir statt x den Werth $e^{im\pi}x$ substituiren, was bedeuten soll, man habe x um m Halbkreise aus der positiven Lage gedreht.

Dann ist nach $\overset{a}{J}(-x) = (-1)^a \overset{a}{J}(x)$,

auch

7) $$\overset{a}{J}(e^{im\pi}x) = e^{im\pi a}\overset{a}{J}(x).$$

Ferner da $\overset{a}{K}(-x) = \overset{-a}{K}(x) = (-1)^a \overset{a}{K}(x)$,

folgt

8) $$\overset{a}{K}(e^{im\pi}x) = e^{im\pi a}\overset{a}{K}(x),$$

oder

9) $$\overset{a}{K}(e^{im\pi}x) = cotg\, a\pi \,.\, e^{im\pi a}\overset{a}{J}(x) - \frac{e^{im\pi a}\overset{-a}{J}(x)}{sin\, a\pi}.$$

Andererseits ist aber

10) $$\overset{a}{K}(e^{im\pi}x) = \frac{2i\, cos\, a\pi\, sin\, m\pi a}{sin\, a\pi}\overset{a}{J}(x) + e^{-im\pi a}\overset{a}{K}(x).$$

In der That ist die rechte Seite von 10):

$$= \frac{2i\, cos\, a\pi\, sin\, m\pi a}{sin\, a\pi}\overset{a}{J}(x) + cos\, m\pi a\, \overset{a}{K}(x) - i\, sin\, m\pi a\, \overset{a}{K}(x)$$

$$= \frac{2i\, cos\, a\pi\, sin\, m\pi a}{sin\, a\pi}\overset{a}{J}(x) + \frac{cos\, m\pi a \,.\, cos\, a\pi\, \overset{a}{J}(x)}{sin\, a\pi} - \frac{cos\, m\pi a\, \overset{-a}{J}}{sin\, a\pi}$$

$$- \frac{i\, sin\, m\pi a\, cos\, a\pi\, \overset{a}{J}(x)}{sin\, a\pi} + \frac{i\, sin\, m\pi a\, \overset{-a}{J}(x)}{sin\, a\pi}$$

$$= \frac{cos\, a\pi(cos\, m\pi a + i\, sin\, m\pi a)\overset{a}{J}(x)}{sin\, a\pi} - \frac{e^{-im\pi a}\overset{-a}{J}(x)}{sin\, a\pi}$$

$$= cotg\, a\pi \,.\, e^{im\pi a}\overset{a}{J}(x) - \frac{e^{-im\pi a}\overset{-a}{J}(x)}{sin\, a\pi}.$$

Multipliciren wir den Zähler und Nenner des zweiten Theils mit $e^{2im\pi a}$, so folgt

$$= cotg\, a\pi \,.\, e^{im\pi a}\overset{a}{J}(x) - \frac{e^{im\pi a}\overset{-a}{J}(x)}{sin\, a\pi}$$

$$= e^{im\pi a}\overset{a}{K}(x),$$

somit ist 10) bewiesen.

Ausgehend von der Formel

$$\overset{a}{P}(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{ia\pi}{2}}\left(\overset{a}{J}(x) + i\overset{a}{K}(x)\right)$$

haben wir

$$\overset{a}{P}(e^{im\pi}x) = \frac{1}{2}e^{\frac{ia\pi}{2}}\left[\overset{a}{J}(e^{im\pi}x) + i\overset{a}{K}(e^{im\pi}x)\right]$$

und nach 10)

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} . e^{im\pi a} \overset{a}{J}(x) - \frac{e^{\frac{ia\pi}{2}} \cos a\pi . \sin m\pi a}{\sin a\pi} \overset{a}{J}(x) + \frac{i}{2} . e^{\frac{ia\pi}{2}} . e^{-im\pi a} \overset{a}{K}(x$$

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \cos m\pi a \overset{a}{J}(x) + \frac{i}{2} \sin m\pi a . e^{\frac{ia\pi}{2}} \overset{a}{J}(x) - \frac{e^{\frac{ia\pi}{2}} \cos a\pi \sin m\pi a \overset{a}{J}(x)}{\sin a\pi}$$

$$+ \frac{i}{2} \cos m\pi a . e^{\frac{ia\pi}{2}} \overset{a}{K}(x) + \frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \sin m\pi a \overset{a}{K}(x)$$

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \overset{a}{J}(x) \cdot \frac{\cos m\pi a \sin a\pi - \sin m\pi a \cos a\pi}{\sin a\pi}$$

$$+ \frac{i}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \overset{a}{K}(x) \frac{\cos m\pi a \sin a\pi - \sin m\pi a \cos a\pi}{\sin a\pi}$$

$$+ \Big[-\frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \cos a\pi \sin m\pi a \overset{a}{J} + \frac{i}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \sin m\pi a \cos a\pi \overset{a}{K}(x)$$

$$+ \frac{i}{2} \sin m\pi a e^{\frac{ia\pi}{2}} \overset{a}{J}(x) + \frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \sin m\pi a \overset{a}{K}(x) \Big].$$

Der erste Theil ist

$$= - \frac{\sin (m-1) a\pi}{\sin a\pi} \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \left(\overset{a}{J}(x) + i \overset{a}{K}(x) \right)$$

$$= - \frac{\sin (m-1) a\pi}{\sin a\pi} \cdot \overset{a}{P}(x). \qquad (\alpha.)$$

Der zweite Theil wird zu

$$- \frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \frac{\cos a\pi \sin m\pi a}{\sin a\pi} \left(\overset{a}{J}(x) - i \overset{a}{K}(x) \right)$$

$$+ \frac{i}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \frac{\sin m\pi a \sin a\pi}{\sin a\pi} \left(\overset{a}{J}(x) - i \overset{a}{K}(x) \right)$$

$$= - \frac{1}{2} e^{\frac{ia\pi}{2}} \frac{\sin m\pi a}{\sin a\pi} \underbrace{(\cos a\pi - i \sin a\pi)}_{e^{-ia\pi}} \left(\overset{a}{J}(x) - i \overset{a}{K}(x) \right)$$

$$= - \frac{1}{2} e^{-\frac{ia\pi}{2}} \frac{\sin m\pi a}{\sin a\pi} \left(\overset{a}{J}(x) - i \overset{a}{K}(x) \right)$$

$$= - \frac{\sin m\pi a}{\sin a\pi} \cdot \overset{a}{Q}(x) \qquad (\beta.),$$

somit im Ganzen nach $(\alpha.)$ und $(\beta.)$

$$11) \qquad \overset{a}{P}(e^{im\pi} x) = - \frac{\sin (m-1) \pi a}{\sin a\pi} \overset{a}{P}(x) - \frac{\sin m\pi a}{\sin a\pi} \overset{a}{Q}(x),$$

analog

$$12) \qquad \overset{a}{Q}(e^{im\pi} x) = \frac{\sin m\pi a}{\sin a\pi} \overset{a}{P}(x) + \frac{\sin (m+1) a\pi}{\sin a\pi} \overset{a}{Q}(x).$$

Specielle Anwendungen für ein grosses Argument x ergeben sich mit Hilfe der von Poisson, Journal de l'école polytechnique, Cah. XIX pag. 250, gegebenen Formel, die dann von Hankel* und Lommel** verallgemeinert wurde. Es ist für ein grosses Argument:

$$\overset{a}{J}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[x - \left(a + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right],$$

indem man x durch ix ersetzt

$$\overset{a}{J}(ix) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{4}}} \cos\left[ix - \left(a + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{4}}} \left(e^{-x} . e^{-\frac{a\pi i}{2}} . e^{-\frac{\pi i}{4}} + e^{x + \frac{a i \pi}{2}} . e^{\frac{i\pi}{4}}\right);$$

für ein sehr grosses x wird der erste Theil der $= 0$, und es folgt:

$$13)\qquad \overset{a}{J}\left(e^{\frac{i\pi}{2}} x\right) = e^{\frac{i a \pi}{2}} \overset{a}{J}(x) = \frac{e^{x + \frac{a i \pi}{2}}}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Die Phase von x muss zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegen, ohne jedoch die Grenzen erreichen zu dürfen.

Der Grenzwerth von $\overset{a}{K}(ix)$ ist folgender:

$$\overset{a}{K}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left[x - \left(a + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right],$$

also

$$\overset{a}{K}(ix) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{4}}} \cdot \sin\left[ix - \left(a + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{4}}} \cdot \frac{1}{2i}\left[e^{-x - \frac{a i \pi}{2} - \frac{\pi i}{4}} - e^{x + \frac{a i \pi}{2} + \frac{\pi i}{4}}\right],$$

$$\overset{a}{K}\left(e^{\frac{i\pi}{2}} x\right) = \frac{i}{\sqrt{2\pi x}} \cdot e^{x + \frac{a i \pi}{2}} = \frac{e^{x + (a+1)\frac{i\pi}{2}}}{\sqrt{2\pi x}},$$

also für ein grosses Argument

$$14)\qquad \overset{a}{K}\left(e^{\frac{i\pi}{2}} x\right) = e^{\frac{i a \pi}{2}} \overset{a}{K}(x) = \frac{e^{x + (a+1)\frac{i\pi}{2}}}{\sqrt{2\pi x}}.$$

---

* Mathem. Annalen Bd. I, 1869, S. 506.

** Studien über die Bessel'schen Functionen, 1868, S. 65.

Aus dem Integral

$$\overset{a}{P}(x) = \frac{e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi x}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)} \int_0^\infty e^{-s} s^{a-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{is}{2x}\right)^{a-\frac{1}{2}} ds$$

folgt, wenn x sehr gross ist:

$$\overset{a}{P}(x) = \frac{e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)\sqrt{2\pi x}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-s} s^{a-\frac{1}{2}} ds}_{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)} = \frac{e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi x}},$$

somit für ein grosses x

$$\overset{a}{P}(x) = \frac{e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi x}}; \quad \overset{a}{Q}(x) = \frac{e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Setzen wir in $\overset{a}{P}(x)$ für x ix ein, so ist

$$\overset{a}{P}(ix) = \frac{e^{-x}.e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi x . e^{\frac{i\pi}{4}}}} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}}.e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}},$$

was für ein grosses x verschwindet, während

$$\overset{a}{Q}(ix) = \frac{e^{x}\cdot e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi x\, e^{\frac{i\pi}{4}}}} = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

15) $$\overset{a}{Q}\left(e^{\frac{i\pi}{2}} x\right) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Durch Vergleichung von 15) und 13) folgt:

$$\overset{a}{J}\left(e^{\frac{i\pi}{2}} x\right) = e^{\frac{ia\pi}{2}} \overset{a}{Q}\left(e^{\frac{i\pi}{2}} x\right).$$

Bern. Dr. J. H. Graf

V. Ueber einen Satz Euler's aus der partitio numerorum.

Wie aus einem Briefe Daniel Bernoullis vom 28. Januar 1741 hervorgeht, hatte Euler schon um diese Zeit durch Induction gefunden, dass sich das unendliche Product

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$$

in eine Reihe entwickeln lasse, in welcher nur Exponenten von der Form $\frac{3n^2+n}{2}$ vorkommen und in welcher alle Coefficienten den Werth $+1$ oder -1 haben, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Der Satz hat später Euler mehrfach beschäftigt; er hat aus demselben jene merkwürdigen Gesetze über Divisorensummen und die Anzahl der Zusammensetzungen der Zahlen gefolgert, welchen in jüngster Zeit Herr Zeller (Acta Mathem. IV, S. 415) eine neue interessante Beziehung, in welcher die Summe der Divisoren einer Zahl als eine Function der Partitionen erscheint, hinzugefügt hat. In den Abhandlungen Eulers: Observationes analyticae variae de combinationibus (Comment. der Petersburger Akad. 1741/43), Observatio de summis divisorum (Neue Comment. der Petersburger Akad. 1754/55) und in der Introductio in analysin infinitorum (1748) erscheint der Satz ohne Beweis. Aber gleichzeitig mit der zweiten der genannten Abhandlungen ist ein solcher von ihm in demselben Bande der Neuen Comment. veröffentlicht, der auch später nebst einem zweiten, etwas abgeänderten in der Abhandlung: Evolutio producti infiniti $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots.$ in seriem simplicem (Acten der Petersburger Akad. für 1780) nochmals abgedruckt worden ist.

Jacobi widmet dem interessanten Problem, für das er schon in seiner Theorie der elliptischen Functionen einen Beweis gegeben hatte, in einem Aufsatze:

„Beweis des Satzes, dass jede nicht fünfeckige Zahl ebenso oft in eine gerade, als in eine ungerade Anzahl verschiedener Zahlen zerlegt werden kann"

eine Reihe höchst allgemeiner Betrachtungen, die, von einem einfachen Princip ausgehend, diesen Satz und den dasselbe bedeutenden Euler's als besonderen Fall ergeben.

Während die Euler'schen Beweise, ebenso wie ein von Legendre im zweiten Bande der Théorie des nombres gegebener, auf einer „Evolution" des unendlichen Products beruhen, liegt der Untersuchung Jacobi's die auch von Legendre ausgesprochene Folgerung:

„Jede Zahl, welche nicht die Form $\frac{3n^2+n}{2}$ hat, kann ebenso oft in eine gerade als in eine ungerade Menge

> anderer von einander verschiedener Zahlen zerlegt werden; Zahlen von der Form $\frac{3n^2 \pm n}{2}$ aber können in eine gerade Menge einmal mehr oder weniger als in eine ungerade zerlegt werden, und zwar das eine oder das andere, je nachdem n gerade oder ungerade ist"

zu Grunde und sie verschmäht die Vermittlung von unendlichen Producten oder Reihen.

Die folgenden Argumentationen werden denselben Gang gehen. Wenn sie sich wegen ihrer Einfachheit zu entschuldigen haben, so dürfte sich doch die Veröffentlichung damit rechtfertigen, dass sie das Verhalten der Pentagonalzahlen, welchen die Form $\frac{3n^2 \pm n}{2}$ zukommt, bei den Zusammensetzungen der Zahlen durchsichtig bemerken lassen.

Man denke sich alle Combinationen zur Summe m, welche die Reihe der positiven ganzen Zahlen bei ausgeschlossener Wiederholung der Elemente zulässt, nach Classen geordnet nebeneinander geschrieben und die Verbindungen einer jeden Classe in arithmetischer Reihenfolge. Ferner lasse man die Combinationen aus $k+1$ Elementen dadurch gebildet sein, dass allen Verbindungen der k^{ten} Classe, soweit sie es zulassen, die Einheit vorgesetzt und gleichzeitig die letzte Ziffer um 1 ermässigt werde, und dass die folgenden derselben Classe durch Erhöhen der ersten und Erniedrigen der letzten Ziffer um eine Einheit — soweit dies möglich ist — aus den früheren entstehen. Dass auf diesem Wege alle verlangten Verbindungen erscheinen müssen, sieht man leicht ein. Fehlte eine in irgend einer Classe, so müssten auch, wenn nicht eine oder mehrere vorhergehende derselben Classe, so doch eine oder mehrere der früheren Classe fehlen, und würde man so weiter schliessen, so würde man in der zweiten Classe Lücken finden, die nicht möglich sind.

Es kommt nun darauf an, für jedes m den Unterschied zu finden, den die Anzahl der Combinationen in den Classen von gerader Elementenzahl gegenüber denjenigen von ungerader bildet. Zu diesem tragen aber alle Verbindungen der Anfangsziffer 1 nichts bei, weil sie mit solchen der unmittelbar vorhergehenden Classe gepaart auftreten, aus welchen sie hervorgegangen sind und welche somit ebenfalls in unserer Frage nicht mitzählen. Es bleiben nur alle diejenigen Verbindungen übrig, die aus ihrer eigenen Classe hervorgegangen sind, deren erste Ziffer also ≥ 2 ist, und in die folgende nicht übergeleitet werden können, weil mindestens ihre beiden letzten Ziffern in der natürlichen Zahlenreihe aufeinander folgen.

Alle so zurückbleibenden Combinationen, deren letzte Glieder auf einander folgende Zahlen sind, denke man sich wieder für sich nach Classen geordnet. Es mögen nun in einer solchen Verbindung C gerade α Endzahlen aufeinander folgen, so dass sie diese Form hat:

$$a_1,\ a_2 \ldots z_1,\ z_2 \ldots z_\alpha.$$

Dann ist die Anfangszahl a_1 entweder $< \alpha$, $= \alpha$ oder $> \alpha$. Ist sie $\leq \alpha$, so stelle man C mit

$$C_0 = a_2 \ldots z_{\alpha+1-a_1} + 1,\ z_{\alpha+2-a_1} + 1, \ldots z_\alpha + 1$$

der vorhergehenden Classe zusammen, wo dann das Anfangsglied grösser ist, als die Anzahl der letzten aufeinander folgenden Zahlen, so dass man nicht in gleicher Weise zurückgehen kann. Ist $a_1 > \alpha$, so stelle man C mit

$$C_1 = \alpha,\ a_1,\ a_2, \ldots z_1 - 1,\ z_2 - 1, \ldots z_\alpha - 1$$

der folgenden Classe zusammen, wo das erste Glied $\leq$ der Anzahl der letzten aufeinander folgenden Glieder ist, so dass man nicht in gleicher Weise vorwärts gehen kann. So ist jede Combination immer nur mit Einer von einer benachbarten Classe gepaart, und nur in zwei Fällen ist eine Ausnahme möglich. Man kann nämlich auf diese Weise keine Nachbarform in der folgenden Classe finden, wenn das Anfangselement a_1 zugleich zu den letzten Elementen $z_1 \ldots$ gehört und eine Verminderung desselben um 1 weniger als $\alpha + 1$ ergiebt; also bei der Verbindung

$$\alpha + 1,\ \alpha + 2, \ldots 2\alpha,$$

ebenso wenig kann eine Nachbarform der gekennzeichneten Art in der vorhergehenden Classe existiren, wenn das Anfangselement a_1 zugleich zu den letzten Elementen $z_1 \ldots$ gehört und doch grösser ist als die Anzahl der darauf folgenden; also bei der Verbindung

$$\alpha,\ \alpha + 1, \ldots 2\alpha - 1.$$

Diese beiden Combinationen können aber nur Zahlen von der Form $\frac{3n^2 \pm n}{2}$ als Summe darstellen; sie haben eine gerade oder ungerade Zahl von Elementen, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Es giebt also gleichviel Verbindungen von einer geraden und einer ungeraden Anzahl der Elemente, wenn jene beiden Fälle nicht möglich sind; für Zahlen von der Form $\frac{3n^2 \pm n}{2}$ aber giebt es eine gerade Verbindung mehr, als eine ungerade, und umgekehrt, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Ein einfaches Beispiel — alle Combinationen zur Summe 15 — mag das Verfahren veranschaulichen:

15	1 14			
	2 13	1 2 12		
	3 12	1 3 11		
	4 11	1 4 10		
	5 10	1 5 9		
	6 9	1 6 8		
	7 8			
		2 3 10	1 2 3 9	
		2 4 9	1 2 4 8	
		2 5 8	1 2 5 7	
		2 6 7		
		3 4 8	1 3 4 7	
		3 5 7	1 3 5 6	
		4 5 6		
			2 3 4 6	1 2 3 4 5

7 8	2 6 7
	4 5 6.

In dem unendlichen Product

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$$

treten alle Potenzen, deren Exponenten die Summe einer geraden Anzahl von Zahlen der natürlichen Reihe bilden, mit positivem Vorzeichen auf, alle anderen mit ungeradem. Es bleiben also nur diejenigen Potenzen stehen, welche Zahlen der Form $\frac{3n^2 \pm n}{2}$ zu Exponenten haben, das heisst

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots = \sum_0^\infty (-1)^n x^{\frac{3n^2 \pm n}{2}}.$$

Aus unserer Betrachtungsweise lässt sich nun ohne Schwierigkeit eine Verallgemeinerung, die in der Jacobi'schen Abhandlung (Werke I, Bln. 1846, S. 353) ausgesprochen ist, folgern. Beschränken wir die Zahlen, aus welchen eine Zahl P sich als Summe darstellen lässt, auf die ersten $m-1$ der positiven Ziffernreihe und ist $P > m-1$, so wird das oben ausgesprochene Resultat sich nur durch diejenigen Verbindungen verändern, welche durch Weiterentwickelung in eine folgende Classe entstanden zu denken sind und welche sich aus einem Paare lösen, von welchem das eine Individuum m als höchstes Element enthält. Das sind aber die folgenden Combinationen:

$$\begin{array}{llr}
1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & m-1 & [1] \\
2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & m-2,\ m-1 & [2] \\
3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & m-3,\ m-2,\ m-1 & [3] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & . \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & . \\
\alpha \ldots\ldots m-\alpha,\ m-(\alpha-1) \ldots\ldots & m-2,\ m-1 & [\alpha]
\end{array}$$

Im Folgenden bezeichnen wir mit Jacobi durch

$$(P,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma\ldots)$$

den Ueberschuss der Anzahl derjenigen Zusammensetzungen, in welchen die Zahl der angewandten, von einander verschiedenen Elemente α, β, $\gamma\ldots$ gerade ist, über die Zahl derjenigen, in welcher sie ungerade ist, wobei der Ueberschuss sowohl eine positive, als auch eine negative Grösse bedeuten kann. [Die Festsetzung des Werthes für

$$P=0,\ (P,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma\ldots)=+1,$$

und dass

$$(P,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma\ldots)=0$$

sein soll, wenn eine der Grössen $\alpha, \beta, \gamma=0$ wird, sei hier beiläufig erwähnt.]

Die Combinationen [1] hängen nun von der Zahl der Verbindungen zur Summe $P-m$ ab, welche von den Elementen

$$2,\ 3\ldots m-2$$

hergestellt werden können, ebenso die [2] von den Verbindungen zur Summe $P-2m+1$ aus den Elementen

$$3,\ 4\ldots m-3$$

und allgemein die Zahl der Combinationen [α] von den Verbindungen zur Summe

$$P-\alpha m+\frac{\alpha}{2}(\alpha-1)=P-\frac{\alpha}{2}(2m-\alpha+1)=P_\alpha,$$

welche die Zahlen

$$\alpha+1,\ \alpha+2\ldots m-(\alpha+1)$$

eingehen können. Berücksichtigt man, dass die geraden oder ungeraden Verbindungen aus k Elementen wieder solche zu einer geraden oder ungeraden Anzahl ergeben werden, wenn man eine gerade Zahl α Elemente wegnimmt, dass sie aber ihren Charakter ändern, wenn α ungerade ist, so ergiebt sich der Satz

$$(P,1,2\ldots m-1)=\Delta+(P_1\ 2,\ 3\ldots m-2)-(P_2\ 3,\ 4\ldots m-3)+\ldots,$$

wo der Ausdruck rechts, je nachdem m gerade oder ungerade ist, bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}m}\left(P_{\frac{1}{2}(m-2)}\frac{m}{2}\right)$$

oder

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\left(P_{\frac{1}{2}(m-3)},\quad \frac{1}{2}(m-1),\quad \frac{1}{2}(m+1)\right)$$

fortzusetzen ist, und wo Δ für alle Zahlen P von der Form $\frac{3n^2 \pm n}{2}$, welche bis $\frac{1}{8}m(3m-2)$ oder bis $\frac{1}{8}(m-1)(3m-1)$ auftreten, $=(-1)^n$ ist, während für den besonderen Fall, in welchem die Verbindung $[\alpha]$

$$\alpha,\ \alpha+1\ldots m-3,\ m-2,\ m-1$$

als eine ununterbrochene Folge auftritt, also für

$$P=\frac{3}{8}(mm-1)\ \Delta=(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}$$

zu setzen ist.

Dieser Satz ist von Jacobi in anderer Weise abgeleitet; er folgert aus ihm den Euler'schen, für welchen $P \leqq (m-1)$ zu setzen ist und für den eine Zahl $P=\frac{3}{8}(mm-1)$ nicht in Frage kommt.

Wie dem Satze von den Pentagonalzahlen die Euler'sche Gleichung entspricht, so ergeben sich aus dem soeben bewiesenen etwas allgemeineren Jacobi's die Formeln:

$$0=1+\sum_{1}^{\frac{1}{2}m}(-1)^n x^{\frac{1}{2}(3n^2-n)}+\sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)}(-1)^n x^{\frac{1}{2}(3n^2+n)}$$
$$-\sum_{0}^{\frac{1}{2}m-1}(-1)^n x^{\frac{1}{2}n(2m-n-1)}(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\ldots(1-x^{m-n-1}),$$

$$0=1+\sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)}(-1)^n x^{\frac{1}{2}(3n^2-n)}+\sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)}(-1)^n x^{\frac{1}{2}(3n^2+n)}+(-1)^{\frac{1}{2}(m+1)}x^{\frac{3}{8}(mm-1)}$$
$$-\sum_{0}^{\frac{1}{2}(m-3)}(-1)^n x^{\frac{1}{2}n(2m-n-1)}(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\ldots(1-x^{m-n-1}),$$

von welchen die erste oder zweite zu nehmen ist, je nachdem m gerade oder ungerade ist.

Noch in anderer Weise unter Zuhilfenahme von Reihenentwickelung lässt sich das endliche Product

$$(1-x)(1-x^2)\ldots\ldots(1-x^{m-1})$$

durch das unendliche darstellen. Nennen wir dasselbe Q, das letztere S, so ist

$$\frac{S}{(1-x^m)(1-x^{m+1})(1-x^{m+2})\ldots}=Q.$$

Entwickelt man nach Euler den Quotienten

$$\frac{1}{(1+x^m z)(1+x^{m+1}z)(1+x^{m+2}z)\ldots}=1+R_1 z+R_2 z^2+\ldots=T$$

nach Potenzen von z und setzt sodann xz an die Stelle von z, so erhält man

$$\frac{1}{(1+x^{m+1}z)(1+x^{m+2}z)(1+x^{m+3})\ldots}=1+R_1xz+R_2x^2z^2+\ldots$$
$$=T(1+x^m z).$$

Durch Vergleichen der Coefficienten ergiebt sich alsdann

$$\begin{aligned} R_1+x^m &= R_1 x \\ R_2+R_1x^m &= R_2x^2 \\ R_3+R_2x^m &= R_3x^3 \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} R_1 &= -\frac{x^m}{1-x} \\ R_2 &= \frac{x^{2m}}{(1-x)(1-x^2)} \\ R_3 &= -\frac{x^{3m}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

so dass also für $z=-1$ folgt

$$\frac{1}{(1-x^m)(1-x^{m+1})(1-x^{m+2})\ldots}=1+\frac{x^m}{1-x}+\frac{x^{2m}}{(1-x)(1-x^2)}$$
$$+\frac{x^{3m}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\ldots$$

Durch beiderseitige Multiplication mit P folgt hieraus

$$\begin{aligned} Q=(1-x)\,(1-x^2)\,(1-x^3)&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +x^m(1-x^2)\,(1-x^3)&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +x^{2m}(1-x^3)(1-x^4)&\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +x^{3m}(1-x^4)(1-x^5)&\ldots \\ +&\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Unter Anwendung des Jacobi'schen Symbols ergiebt das die Gleichung

$$(P,\ 1,\ 2,\ 3\ldots m-1)=(P,\ 1,\ 2,\ 3\ldots)+(P-m,\ 2,\ 3,\ 4\ldots)$$
$$+(P-2m,\ 3,\ 4,\ 5\ldots)+\ldots,$$

in welcher die Grössen $P-\alpha m$ soweit fortzuführen sind, als sie nicht negativ werden, und die oben erwähnte Bestimmung Jacobi's für den Fall, dass $P-\alpha m=0$ wird, zu berücksichtigen ist.

Setzt man in dieser Formel $m-1=0$, so geht sie in

$$(P,\ 0)=0=(P,\ 1,\ 2,\ 3\ldots)+(P-1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots)$$
$$+(P-2,\ 3,\ 4,\ 5\ldots)+\ldots$$

über, entspricht der Gleichung

$$
\begin{aligned}
Q = 1 - (1-x)(1-x^2)(1-x^3) \ldots\ldots\ldots \\
+ x\,(1-x^2)(1-x^3) \ldots\ldots\ldots \\
+ x^2\,(1-x^3)(1-x^4) \ldots \\
+ x^3\,(1-x^4) \ldots \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

und bringt einen einfachen combinatorischen Satz, der auch aus dem von Jacobi angewandten Princip

$$(P,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \ldots) = (P,\ \beta,\ \gamma \ldots) - \alpha,\ \beta,\ \gamma \ldots)$$

unmittelbar folgen würde, zum Ausdruck. Nimmt man allen Verbindungen zur Summe P nacheinander das erste Element α, so entstehen alle Verbindungen zur Summe $P - \alpha$ aus den übrigen Elementen. Es ist also der Unterschied der Anzahl aller möglichen Verbindungen zur Summe P aus einer geraden und einer ungeraden Zahl von Summanden gleich der negativ genommenen Summe für alle möglichen Grössen $P - \alpha$. Indem nämlich einer jeden Verbindung zu P ein Element genommen wurde, ist immer aus einer geraden Zahl von Elementen eine ungerade geworden und umgekehrt.

Für $P \leqq m - 1$ geht die Formel in die Identität

$$(P,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots m-1) = (P,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots)$$

über, da alle Grössen $P - \alpha m$ negativ werden, also durch positive Zahlen überhaupt nicht darzustellen sind.

Gotha, Anfang December 1892. Dr. L. Goldschmidt.

VIII.

Construction der Burmester'schen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck.

Zweite Mittheilung.

Von

Prof. Dr. R. Müller
in Braunschweig.

Hierzu Tafel II, Figur 1—14.

In unserer ersten Mittheilung* haben wir die Aufgabe behandelt, für eine beliebige Koppellage eines ebenen Gelenkvierecks die Burmester'schen Punkte zu bestimmen, das heisst, in der Koppelebene diejenigen beiden reellen oder imaginären Punkte zu ermitteln, die augenblicklich Bahnelemente mit fünfpunktig berührendem Krümmungskreise beschreiben. Im Folgenden werden wir die früheren Ergebnisse nach zwei Richtungen hin vervollständigen, indem wir erstens auf den Zusammenhang eingehen, der zwischen der Aufsuchung der Burmester'schen Punkte und dem Problem der angenäherten Geradführung besteht, und indem wir zweitens eine Reihe von Sonderfällen betrachten, in denen die vorher abgeleitete allgemeine Construction versagt.

1. Wir bezeichnen, wie früher, mit $AB\mathsf{BA}$ ein Gelenkviereck mit dem festen Gliede AB und der Koppel AB, mit $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{K}$ bez. die Schnittpunkte der Seitenpaare $A\mathsf{A}$, $B\mathsf{B}$ und AB, AB, mit α, β, ψ, χ die Winkel zwischen der Diagonale $\mathfrak{P}\mathfrak{K}$ und den Seiten $B\mathsf{B}$, $A\mathsf{A}$, AB, AB (Fig. 1). Dabei ist $\mathfrak{P}$ der Pol der Koppellage AB; die zugehörige Polbahntangente t bildet mit $\mathfrak{P}B$ den Winkel β. Sei ferner m die Kreispunktcurve für die augenblickliche Lage der Koppelebene, F ihr Focalcentrum, μ mit dem Focalcentrum E die entsprechende Curve in der festen Ebene; dann befinden sich auf m die Burmester'schen Punkte M_I, M_{II} der betrachteten Systemlage und auf μ die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte M_I, M_{II}. Verstehen wir noch unter φ_F, φ_{E}, φ_I, φ_{II} die Winkel, welche bez. die

* Diese Zeitschrift Bd. XXXVII, S. 213.

Geraden $\mathfrak{P}F$, $\mathfrak{P}\mathsf{E}$, $\mathfrak{P}M_I$, $\mathfrak{P}M_{II}$ mit der Polbahntangente t einschliessen, so sind $tan\,\varphi_I$, $tan\,\varphi_{II}$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$tan^2\varphi - (tan\,\varphi_F + tan\,\varphi_{\mathrm{E}} - tan\,\alpha - tan\,\beta)\,tan\,\varphi + \frac{tan\,\varphi_F\,tan\,\varphi_{\mathrm{E}}}{tan\,\alpha\,tan\,\beta} = 0^*.$$

Unter Benutzung der früher erhaltenen Formeln

1) $$tan\,\varphi_F = \frac{tan\,\alpha\,tan\,\beta}{tan\,\chi}, \quad tan\,\varphi_{\mathrm{E}} = \frac{tan\,\alpha\,tan\,\beta^*}{tan\,\psi}$$

verwandelt sich die vorige Gleichung in

2) $$tan^2\varphi - \{tan\,\alpha\,tan\,\beta\,(cot\,\psi + cot\,\chi) - tan\,\alpha - tan\,\beta\}\,tan\,\varphi + tan\,\alpha\,tan\,\beta\,cot\,\psi\,cot\,\chi = 0.$$

Nehmen wir jetzt an, es sei einer der beiden Burmester'schen Punkte, etwa M_I, identisch mit dem Ball'schen Punkte der Koppellage AB, das heisst, mit dem Schnittpunkte des Wendekreises und der Curve m, so wird $M_I\mathsf{M}_I = \infty$ und der Punkt M_I befindet sich augenblicklich in einer Bahnstelle mit fünfpunktig berührender Tangente. Nun liegt der Ball'sche Punkt der Curve m bekanntlich auf der Focalachse der Curve μ und diese bildet mit t den Winkel $-\varphi_{\mathrm{E}}$**; im vorliegenden Falle ist also nach 1)

3) $$tan\,\varphi_I = -tan\,\alpha\,tan\,\beta\,cot\,\psi.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes folgt aus Gleichung 2) die Bedingung

4) $$2\,cot\,\psi + cot\,\chi - cot\,\alpha - cot\,\beta + cot\,\alpha\,cot\,\beta\,cot\,\chi = 0;$$

gleichzeitig ergiebt sich

$$tan\,\varphi_{II} = -cot\,\chi,$$

das heisst:

5) $$\varphi_{II} = 90^0 + \chi.$$

Berücksichtigen wir noch den früher erhaltenen Satz, dass bei jeder beliebigen Systembewegung immer drei der Burmester'schen Punkte auf einer Geraden liegen, sobald der vierte dieser Punkte mit dem Ball'schen Punkte zusammenfällt***, so gelangen wir zu folgendem Ergebniss: Genügen die Winkel α, β, ψ, χ des Gelenkviereckes $AB\mathsf{BA}$ in einer gewissen Koppellage AB der Gleichung 4), so beschreibt ein bestimmter Punkt M_I der Koppelebene — der Ball'sche Punkt — augenblicklich eine Bahnstelle mit fünfpunktig berührender Tangente. Gleichzeitig fällt der Burmester'sche Punkt M_{II} mit demjenigen Punkte der Koppelgeraden AB zusammen, dessen Bahnnormale mit der Polbahnnormale den Winkel χ einschliesst. — Die beiden Punkte M_I, M_{II} sind im vorliegenden Falle selbstverständlich stets reell.

---

* a. a. O. S. 217.

** Ueber die Bewegung eines starren ebenen Systems durch fünf unendlich benachbarte Lagen. Diese Zeitschrift Bd. XXXVII, S. 144.

*** Ebenda, S. 149.

Um ein Viereck $AB\mathsf{B}\mathsf{A}$ gemäss der Bedingung 4) zu construiren, ziehen wir in Figur 2 durch die willkürlich angenommenen Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{K}$ die beliebigen Geraden $\mathfrak{P}A$, $\mathfrak{P}B$, $\mathfrak{K}AB$ und senkrecht zu $\mathfrak{P}\mathfrak{K}$ die Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}\mathfrak{A}$; dieselben bestimmen auf AB, $\mathfrak{P}A$, $\mathfrak{P}B$ bez. die Punkte $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Von $\mathfrak{J}$ fällen wir auf $\mathfrak{P}A$ ein Loth, welches $\mathfrak{P}B$ in $\mathfrak{H}$ schneidet, ziehen $\mathfrak{H}\mathfrak{G}$ parallel zu $\mathfrak{P}\mathfrak{K}$ bis $\mathfrak{K}\mathfrak{B}$, verbinden $\mathfrak{G}$ mit dem Schnittpunkte $\mathfrak{S}$ von $A\mathfrak{B}$ und $B\mathfrak{A}$ durch eine Gerade, welche AB in $\mathfrak{T}$ trifft und ermitteln den Schnittpunkt $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{P}\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{K}\mathfrak{A}$. Machen wir dann auf $\mathfrak{P}\mathfrak{J}$ die Strecke $\mathfrak{P}\mathfrak{J}' = 2.\mathfrak{K}\mathfrak{R}$, so liegen auf $\mathfrak{K}\mathfrak{J}'$ die gesuchten Gelenkpunkte A und B.

Beweis. Aus Figur 2 folgt, wenn die Strecke $\mathfrak{K}\mathfrak{B}$ negativ gerechnet wird,

$$cot\,\alpha = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}{\mathfrak{P}\mathfrak{B}},\quad cot\,\beta = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}{\mathfrak{P}\mathfrak{A}},\quad cot\,\chi = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}{\mathfrak{P}\mathfrak{J}},\quad cot\,\psi = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}{\mathfrak{P}\mathfrak{J}'},$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{H} = \mathfrak{P}\mathfrak{J}\cdot\frac{sin\,\beta}{cos\,(\alpha-\beta)} = \frac{\mathfrak{K}\mathfrak{P}}{cot\,\chi}\cdot\frac{sin\,\alpha\,sin\,\beta}{cos\,(\alpha-\beta)},$$

$$\mathfrak{K}\mathfrak{G} = \mathfrak{P}\mathfrak{H}\,.\,sin\,\alpha = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}{cot\,\chi}\cdot\frac{sin\,\alpha\,sin\,\beta}{cos\,(\alpha-\beta)}.$$

Die Punktreihe $\mathfrak{K}AB\mathfrak{T}$ ist perspectiv zu $\mathfrak{K}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{R}$ und zu $\mathfrak{K}\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{G}$, die Punktpaare $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{R}$ bestimmen daher eine Involution mit dem Doppelpunkte $\mathfrak{K}$, mithin ist

$$\frac{1}{\mathfrak{K}\mathfrak{R}} + \frac{1}{\mathfrak{K}\mathfrak{G}} = \frac{1}{\mathfrak{K}\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{K}\mathfrak{B}},$$

oder

$$2\cdot\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}{\mathfrak{P}\mathfrak{J}'} + \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}{\mathfrak{K}\mathfrak{G}} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}{\mathfrak{K}\mathfrak{A}} + \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}{\mathfrak{K}\mathfrak{B}},$$

das heisst:

$$2\,cot\,\psi + cot\,\chi\,(1 + cot\,\alpha\,cot\,\beta) = cot\,\alpha + cot\,\beta.$$

Der Punkt M_I ergiebt sich nunmehr in folgender Weise. Wir ziehen $\mathfrak{P}U$ parallel zu AB bis AB, darauf durch U zu $\mathfrak{P}\mathfrak{K}$ eine Parallele, die $\mathfrak{P}A$ in V, $\mathfrak{P}B$ in V' schneidet, und errichten in V und V' bez. Lothe zu $\mathfrak{P}A$ und $\mathfrak{P}B$; dieselben treffen sich bekanntlich im Wendepole W. Fällen wir dann von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{P}B$ ein Loth, welches $\mathfrak{P}\mathfrak{K}$ in Z schneidet, und machen auf $\mathfrak{P}W$ die Strecke $\mathfrak{P}Z' = \mathfrak{K}Z$, sowie $Z'Z''$ senkrecht zu $\mathfrak{P}Z'$ und $= \mathfrak{P}\mathfrak{J}'$, so ist M_I der Fusspunkt der von W auf $\mathfrak{P}Z''$ gefällten Senkrechten. Es ist nämlich

$$\mathfrak{K}\mathfrak{A} = \mathfrak{P}\mathfrak{K}\,tan\,\beta,\quad \mathfrak{K}Z = -\mathfrak{K}\mathfrak{A}\,tan\,\alpha,\quad \mathfrak{P}\mathfrak{J}' = \mathfrak{P}\mathfrak{K}\,tan\,\psi,$$

also

$$tan\,\varphi_I = tan\,\angle\mathfrak{P}WM_I = tan\,\angle Z'Z''\mathfrak{P} = -\,tan\,\alpha\,tan\,\beta\,cot\,\psi,$$

in Uebereinstimmung mit Gleichung 3); überdies liegt M_I nach Construction auf dem Wendekreise, ist also in der That der Ball'sche Punkt für die betrachtete Systemlage.

Wir erhalten ferner den auf AB liegenden Punkt M_{II}, indem wir $\angle W\mathfrak{P}M_{II} = \angle\mathfrak{P}\mathfrak{K}A$ machen.

In Figur 2ª sind die Bahncurven $\mathfrak{m}_I$, $\mathfrak{m}_{II}$ der Punkte M_I, M_{II} gezeichnet; dieselben sind bekanntlich tricirculare Curven sechster Ordnung.

Für die Curve $\mathfrak{m}_{II}$, die in Bezug auf AB symmetrisch ist, haben wir den Krümmungsmittelpunkt M_{II} und den zugehörigen Krümmungskreis angegeben. Die Curve $\mathfrak{m}_I$, die mit der Inflexionstangente WM_I an der Stelle M_I fünf unendlich nahe Punkte gemein hat, schmiegt sich in der Zeichnung an diese Gerade so innig an, dass ein beträchtliches Stück der Curve von der Geraden nicht unterschieden werden kann; wir dürfen demnach die Bewegung des Punktes M_I auf der Curve $\mathfrak{m}_I$ als eine fünfpunktige Geradführung bezeichnen.*

Bilden wir aus den Punkten A, A, M_{II}, M_{II} ein neues Gelenkviereck mit dem festen Gliede AM_{II}, so beschreibt der Punkt M_I als Eckpunkt des Koppeldreiecks $AM_{II}M_I$ eine neue Bahncurve, die in M_I von der Tangente WM_I wiederum fünfpunktig berührt wird, und dasselbe gilt, wenn wir den Punkt M_I an die Koppel BM_{II} eines dritten Gelenkvierecks $BM_{II}\mathsf{M}_{II}\mathsf{B}$ anschliessen. Nach dem Roberts'schen Satze von der dreifachen Erzeugung der Koppelcurve** kann ferner jede der drei erhaltenen Bahncurven des Punktes M_I durch zwei neue Gelenkvierecke hervorgebracht werden; wir erhalten demnach aus dem ursprünglichen Viereck $AB\mathsf{BA}$ im Ganzen acht andere Gelenkvierecke, durch welche gleichfalls die Geradführung des Punktes M_I auf der Geraden WM_I bewirkt wird.

2. Soll der geradgeführte Punkt M_I auf der Koppelgeraden AB liegen, so muss er nothwendig mit dem zugehörigen M_{II} zusammenfallen, weil die Gerade AB mit der Kreispunktcurve m ausser A, B, M_{II} keinen vierten Punkt gemein haben kann. Dann ist

$$\varphi_I = \varphi_{II} = 90^0 + \chi,$$

also nach 3):

$$-\cot\chi = -\tan\alpha\tan\beta\cot\psi,$$

oder

6) $$\tan\psi = \tan\alpha\tan\beta\tan\chi,$$

und Gleichung 4) verwandelt sich in

7) $$\tan\chi = \frac{3+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}.$$

Die Bedingungen 6) und 7) führen zu folgender Construction des Vierecks $AB\mathsf{BA}$. Wir beschreiben in Figur 3 über der beliebigen Strecke $\mathfrak{PK}$ als Durchmesser einen Kreis $\mathfrak{k}$, legen an denselben in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{K}$ die Tangenten $\mathfrak{PQ}$ und $\mathfrak{KQ}'$ und ziehen eine beliebige Secante, die $\mathfrak{k}$ in C und D, $\mathfrak{PQ}$ in $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{KQ}'$ in $\mathfrak{Z}'$ schneidet. Auf $\mathfrak{ZQ}$ machen wir die Strecke $\mathfrak{ZJ} = 2.\mathfrak{PZ} + \mathfrak{KZ}'$ und ziehen $\mathfrak{JL}$ senkrecht zu $\mathfrak{P}C$ bis $\mathfrak{PK}$, $\mathfrak{LL}'$ parallel zu $\mathfrak{PQ}$ bis $\mathfrak{P}D$ und $\mathfrak{L}'\mathfrak{J}'$ parallel zu $\mathfrak{PK}$ bis $\mathfrak{PQ}$. Dann bestimmen die Geraden $\mathfrak{P}C$, $\mathfrak{P}D$ auf $\mathfrak{KJ}$, $\mathfrak{KJ}'$ bez. die Punkte A, B, A, B.

---

* Ueber die angenäherte Geradführung durch ein Gelenkviereck vergl. Burmester, Kinematik I, S. 623.

** Roberts, On Three-bar Motion in Plane Space, Proceedings of the London Mathematical Society, vol. VII, p. 14.

In der That, im Dreieck $\mathfrak{P}C\mathfrak{Z}$ ist der Winkel bei $\mathfrak{P} = 90^0 - \beta$ und der Winkel bei $C = 90^0 - \alpha$, also der Winkel bei $\mathfrak{Z} = \alpha + \beta$, mithin

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Z} = \mathfrak{P}C \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \mathfrak{P}\mathfrak{K} \cdot \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$\mathfrak{K}\mathfrak{Z}' = \mathfrak{P}\mathfrak{Z} - \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}{\tan(\alpha+\beta)},$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{J} = \mathfrak{P}\mathfrak{K}\left\{\frac{4\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} - \frac{1}{\tan(\alpha+\beta)}\right\}$$

also

$$\tan\chi = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{J}}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}} = \frac{3+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta},$$

wie in Gleichung 7). Es ist ferner

$$\mathfrak{P}\mathfrak{J}' = \mathfrak{L}\mathfrak{L}' = \mathfrak{P}\mathfrak{L}\tan\alpha = \mathfrak{P}\mathfrak{J}\tan\alpha\tan\beta,$$

das heisst:

$$\tan\psi = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{J}'}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}} = \tan\alpha\tan\beta\tan\chi,$$

in Uebereinstimmung mit Gleichung 6).

Die Polbahnnormale $\mathfrak{n}$ ist parallel zu CD; tragen wir in $\mathfrak{P}$ den Winkel χ an, so bestimmt die so erhaltene Gerade auf AB den geradgeführten Punkt M, in welchem sich gegenwärtig die beiden Burmester'schen Punkte M_I, M_{II} vereinigen.

3. Kehren wir in Figur 2ª die Bewegung um, indem wir AB festhalten, so sind M_{II} und der unendlich ferne Punkt M_I die Burmester'schen Punkte für die augenblickliche Lage der mit dem Gliede AB verbundenen Ebene. Es fragt sich, welche neue Bedingung wir dem Viereck $AB\mathsf{BA}$ auferlegen müssen, damit auch bei dieser umgekehrten Bewegung ein Systempunkt — und dies kann nur M_{II} sein — momentan ein Bahnelement mit fünfpunktig berührender Tangente durchschreitet. Dann fällt M_{II} zusammen mit dem unendlich fernen Punkte der Kreispunktcurve m; es ist also φ_{II} gleich dem Winkel, den die Focalachse von m mit der Polbahntangente einschliesst, das heisst, $\varphi_{II} = -\varphi_F$, oder nach Gleichung 1):

$$\tan\varphi_{II} = -\tan\alpha\tan\beta\cot\chi.$$

Aus 5) folgt aber

$$\tan\varphi_{II} = -\cot\chi,$$

mithin ist gegenwärtig

$$\tan\alpha\tan\beta = 1,$$

das heisst:

$$\alpha + \beta = 90^0; \tag{8}$$

die Polbahnnormale $\mathfrak{n}$ ist also identisch mit der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{K}$. Dann verwandelt sich die Bedingung 4) in

$$2\cot\psi + \cot\chi = \tan\alpha + \cot\alpha,$$

oder

$$\cot\psi + \cot\chi = \frac{1}{\sin 2\alpha}. \tag{9}$$

Da M_{II} mit dem unendlich fernen Punkte der Geraden AB zusammenfällt, so ist $\mathfrak{P}\mathsf{M}_{II}$ parallel zu AB, also auch umgekehrt $\mathfrak{P}M_I$ parallel zu AB. Wir gelangen demnach zu folgendem Ergebniss:

Genügen die Winkel α, β, ψ, χ des Gelenkvierecks $AB\mathsf{BA}$ den Gleichungen 8) und 9), so wird durch das Viereck in doppelter Weise eine fünfpunktige Geradführung vermittelt. Halten wir nämlich das Glied AB fest, so bewegt sich ein bestimmter Punkt M_I der Ebene AB momentan auf einer Geraden senkrecht zu AB, und kehren wir die Bewegung um, so bleibt ein bestimmter Punkt M_{II} der Ebene AB in fünf aufeinander folgenden Lagen auf einer Normalen zu AB.

Um ein derartiges Viereck zu erhalten, legen wir in Figur 4 durch den Scheitel $\mathfrak{P}$ des rechten Winkels $\mathfrak{n}\mathfrak{P}\mathfrak{t}$ die Gerade $\mathfrak{P}A$ beliebig und die Gerade $\mathfrak{P}B$ so, dass $\angle \mathfrak{n}\mathfrak{P}A = \angle B\mathfrak{P}\mathfrak{t}$ ist, ziehen von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{K}$ des Schenkels $\mathfrak{n}$ die Gerade $\mathfrak{K}\mathfrak{V}$ senkrecht zu $\mathfrak{P}B$ bis $\mathfrak{P}B$, darauf $\mathfrak{V}\mathfrak{V}'$ parallel zu $\mathfrak{n}$ bis $\mathfrak{t}$ und machen auf $\mathfrak{t}$ die Strecke $\mathfrak{V}'\mathfrak{W} = 3.\mathfrak{P}\mathfrak{V}'$. Sind dann $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}'$ irgend zwei Punkte, die durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{W}$ harmonisch getrennt werden, so schneiden $\mathfrak{P}A$, $\mathfrak{P}B$ die Geraden $\mathfrak{K}\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}\mathfrak{J}'$ bez. in A, B, A, B; denn es ist

$$\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{J}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{J}'} = \frac{2}{\mathfrak{P}\mathfrak{W}} = \frac{1}{2.\mathfrak{P}\mathfrak{V}'} = \frac{1}{2.\mathfrak{P}\mathfrak{K}\sin\alpha\cos\alpha},$$

oder

$$\cot\psi + \cot\chi = \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

Wir ziehen ferner $\mathfrak{P}U$ parallel zu AB bis AB, UT parallel zu $\mathfrak{n}$ bis $\mathfrak{P}B$, TW senkrecht zu $\mathfrak{P}B$ bis $\mathfrak{n}$; dann ist M_I der Fusspunkt des von W auf $\mathfrak{P}U$ gefällten Lothes. Ziehen wir endlich die Geraden $\mathfrak{P}R$ und WR parallel bez. senkrecht zu AB, so erhalten wir M_{II}, indem wir die Strecke $\mathfrak{P}R$ über $\mathfrak{P}$ hinaus um sich selbst verlängern.

4. Wir wollen noch untersuchen, unter welcher Bedingung in Figur 2ª die Curve $\mathfrak{m}_I$ mit ihrer Tangente in M_I nicht nur fünf, sondern sechs unendlich benachbarte Punkte gemein hat — es entspricht dies also der höchsten Ordnung der Berührung, die überhaupt zwischen einer Koppelcurve und ihrer Tangente eintreten kann. Lassen wir die Koppelgerade aus der Lage AB in eine unendlich benachbarte Lage $A'B'$ übergehen, so verwandeln sich die Winkel α, β, ψ, χ in

$$\alpha + d\alpha, \quad \beta + d\beta, \quad \psi + d\psi, \quad \chi + d\chi.$$

Zu Folge der Gleichung 4) befindet sich der Punkt M_I in fünf unendlich benachbarten Systemlagen auf einer Geraden; derselbe ist also der Ball'sche Punkt auch für die Koppellage $A'B'$. Soll nun M_I sogar in sechs Nachbarlagen auf einer Geraden bleiben, so ist er zugleich ein Burmester'scher Punkt für die Koppellage $A'B'$; es muss also auch für die Lage $A'B'$, wie vorher für AB, ein Burmester'scher Punkt mit dem Ball'schen Punkte zusammenfallen, das heisst, es müssen auch die Winkel

$$\alpha + d\alpha, \quad \beta + d\beta, \quad \psi + d\psi, \quad \chi + d\chi$$

der Gleichung 4) genügen, oder, was dasselbe ist, es muss das Differential des Ausdruckes

$$2 \cot\psi + \cot\chi - \cot\alpha - \cot\beta + \cot\alpha \cot\beta \cot\chi$$

verschwinden. Die Ausführung der Differentiation liefert die Gleichung:

$$10) \quad \frac{2}{\sin^2\psi} d\psi + \frac{\cot\alpha \cot\beta + 1}{\sin^2\chi} d\chi + \frac{\cot\beta \cot\chi - 1}{\sin^2\alpha} d\alpha + \frac{\cot\alpha \cot\chi - 1}{\sin^2\beta} d\beta = 0.$$

Hierbei ergeben sich die Werthe von $d\psi$, $d\chi$, $d\alpha$, $d\beta$ aus der Bedingung, dass für jede Koppellage die Strecken AB, AB, $A\mathsf{A}$, $B\mathsf{B}$ unverändert bleiben. Nun folgt aus Figur 1:

$$AB = \mathfrak{P}\mathfrak{K} \cdot \frac{\sin\chi \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \chi) \sin(\beta + \chi)}$$

$$\mathsf{AB} = \mathfrak{P}\mathfrak{K} \cdot \frac{\sin\psi \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \psi) \sin(\beta + \psi)}$$

$$A\mathsf{A} = \mathfrak{P}\mathfrak{K} \cdot \frac{\sin\beta \sin(\psi - \chi)}{\sin(\beta + \psi) \sin(\beta + \chi)}$$

$$B\mathsf{B} = \mathfrak{P}\mathfrak{K} \cdot \frac{\sin\alpha \sin(\psi - \chi)}{\sin(\alpha + \psi) \sin(\alpha + \chi)}.$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir durch Differentiation, wenn wir zur Abkürzung $\mathfrak{P}\mathfrak{K} = q$ und

$$\begin{aligned}
\sin^2\chi \cos(\alpha + \beta + \chi) - \sin\alpha \sin\beta \cos\chi &= \mathsf{X} \\
\sin^2\psi \cos(\alpha + \beta + \psi) - \sin\alpha \sin\beta \cos\psi &= \Psi \\
\sin^2\beta \cos(\beta + \psi + \chi) - \cos\beta \sin\psi \sin\chi &= \mathsf{B} \\
\sin^2\alpha \cos(\alpha + \psi + \chi) - \cos\alpha \sin\psi \sin\chi &= \mathsf{A}
\end{aligned}$$

setzen,

$$11) \left\{ \begin{aligned}
&-\sin\chi \sin^2(\beta + \chi)\, d\alpha + \sin\chi \sin^2(\alpha + \chi)\, d\beta + \mathsf{X} \sin(\alpha - \beta)\, d\chi \\
&\qquad = \sin\chi \sin(\alpha + \chi) \sin(\beta + \chi) \sin(\alpha - \beta) \frac{dq}{q} \\
&-\sin\psi \sin^2(\beta + \psi)\, d\alpha + \sin\psi \sin^2(\alpha + \psi)\, d\beta + \Psi \sin(\alpha - \beta)\, d\psi \\
&\qquad = \sin\psi \sin(\alpha + \psi) \sin(\beta + \psi) \sin(\alpha - \beta) \frac{dq}{q} \\
&\mathsf{B} \sin(\psi - \chi)\, d\beta - \sin\beta \sin^2(\beta + \chi)\, d\psi + \sin\beta \sin^2(\beta + \psi)\, d\chi \\
&\qquad = \sin\beta \sin(\beta + \psi) \sin(\beta + \chi) \sin(\psi - \chi) \frac{dq}{q} \\
&\mathsf{A} \sin(\psi - \chi)\, d\alpha - \sin\alpha \sin^2(\alpha + \chi)\, d\psi + \sin\alpha \sin^2(\alpha + \psi)\, d\chi \\
&\qquad = \sin\alpha \sin(\alpha + \psi) \sin(\alpha + \chi) \sin(\psi - \chi) \frac{dq}{q}.
\end{aligned} \right.$$

Durch Elimination von $d\alpha$, $d\beta$, $d\psi$, $d\chi$ zwischen den fünf Gleichungen 10) und 11) ergiebt sich eine neue Gleichung, die nur die Grössen α, β, ψ, χ enthält. Dieselbe bildet in Verbindung mit 4) die Bedingung für die sechspunktige Geradführung des Punktes M_I durch das Gelenkviereck ABBA.

---

5. Die in unserer ersten Mittheilung abgeleitete Construction der Burmester'schen Punkte M_I, M_{II} gilt nur unter der stillschweigenden Voraussetzung, dass die durch das Gelenkviereck ABBA bestimmten Kreispunktcurven m und μ eigentliche Curven dritter Ordnung sind. Die zahlreichen Ausnahmefälle, in denen eine der Curven m, μ in Curven niederer Ordnung ausartet, erfordern also jeder für sich noch eine besondere Untersuchung. Wir geben zunächst zur vorläufigen Orientirung eine Uebersicht derjenigen Ausartungen, die eintreten können, so lange der Pol $\mathfrak{P}$ eindeutig bestimmt ist; der entgegengesetzte Fall, bei welchem die vier Punkte A, B, B, A in einer Geraden liegen, soll von der folgenden Betrachtung völlig ausgeschlossen bleiben.*

I. Jede der Curven m und μ zerfällt in die Polbahnnormale $\mathfrak{n}$ und einen Kreis, der die Polbahntangente $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{P}$ berührt,
   a) wenn eines der Punktpaare A, A oder B, B auf $\mathfrak{n}$ liegt,
   b) wenn A und B — und folglich auch A und B — auf einem Kreise liegen, der $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{P}$ berührt.

II. Die Curve m zerfällt in $\mathfrak{t}$ und einen Kreis, der $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{P}$ berührt,
   a) wenn A oder B auf $\mathfrak{t}$ liegt,
   b) wenn A und B auf einem Kreise liegen, der $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{P}$ berührt.

III. Die Curve μ zerfällt in $\mathfrak{t}$ und einen Kreis, der $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{P}$ berührt,
   a) wenn A oder B auf $\mathfrak{t}$ liegt,
   b) wenn A und B auf einem Kreise liegen, der $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{P}$ berührt.

IV. Jede der Curven m und μ zerfällt in die unendlich ferne Gerade und eine gleichseitige Hyperbel, wenn AA parallel zu BB, also $\mathfrak{P}$ unendlich fern ist.

Bevor wir in die Betrachtung der einzelnen Fälle eintreten, müssen wir einige Formeln in Erinnerung bringen, die wir bei früherer Gelegenheit entwickelt haben.

Seien $d\vartheta$, $d\vartheta + d^2\vartheta$, $d\vartheta + 2d^2\vartheta + d^3\vartheta$ die Drehungen eines ebenen Systems um drei im Abstande du aufeinander folgende Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ der Polbahn, $d\tau$, $d\tau + d^2\tau$ die Contingenzwinkel der Polbahn in $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$, W der Wendepol auf der durch $\mathfrak{P}$ gehenden Polbahnnormale $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ die Punkte, in denen die zum Doppelpunkte $\mathfrak{P}$ gehörenden Krümmungskreise der Curve m bez. die Geraden $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{t}$ schneiden, so ist:

---

* Vergl. Rodenberg, Die Bestimmung der Kreispunktcurven eines ebenen Gelenkvierseits, diese Zeitschrift Bd. XXXVI, S. 267.

$$\text{12)} \qquad \mathfrak{P}W = \frac{du}{d\vartheta},$$

$$\text{13)} \qquad \mathfrak{P}\mathfrak{C} = \frac{3\,du}{2\,d\vartheta + d\tau},$$

$$\text{14)} \qquad \mathfrak{P}\mathfrak{D} = \frac{3\,du\,d\vartheta}{d^2\vartheta}.$$

Der Kreis über $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ osculirt zugleich die Curve μ; der zweite Krümmungskreis von μ hat den auf $\mathfrak{n}$ liegenden Durchmesser

$$\text{15)} \qquad \mathfrak{P}\mathfrak{C}' = \frac{3\,du}{d\tau - d\vartheta}.$$

Sei ferner A ein beliebiger Systempunkt, A der entsprechende Krümmungsmittelpunkt seiner Bahncurve, $\mathfrak{P}A = r$, $\mathfrak{P}\mathsf{A} = \varrho$, $\angle A\mathfrak{P}\mathfrak{t} = \varphi$; dann ist bekanntlich

$$\text{16)} \qquad \frac{d\vartheta}{du} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}\right) sin\,\varphi.$$

Setzen wir endlich $r\,cos\,\varphi = x$, $r\,sin\,\varphi = y$, so gelten für die Coordinaten x, y, φ eines jeden der vier Burmester'schen Punkte die beiden Gleichungen *:

$$\text{17)} \begin{cases} (x^2+y^2)\{x\,d\vartheta\,(3\,d^2\vartheta + d^2\tau) + y\,[d\vartheta\,(d\vartheta + d\tau)\,(2\,d\vartheta + d\tau) + d^3\vartheta] - 3\,du\,d\vartheta^2\} - y\,du \\ \qquad \times \{5\,x\,d^2\vartheta + 2\,y\,d\vartheta\,(d\vartheta + 2\,d\tau) - 3\,du\,d\vartheta\} = 0, \end{cases}$$

$$\text{18)} \begin{cases} d^2\vartheta^2\,tan^4\varphi - d\vartheta\,d^2\vartheta\,(d\vartheta + 2\,d\tau)\,tan^3\varphi + (3\,d\vartheta\,d^3\vartheta - 4\,d^2\vartheta^2)\,tan^2\varphi \\ \qquad + 3\,d\vartheta\,(d\vartheta\,d^2\tau - d\tau\,d^2\vartheta)\,tan\,\varphi - d\vartheta^2\,(d\vartheta - d\tau)\,(2\,d\vartheta + d\tau) = 0. \end{cases}$$

6. Fall Ia. Wird in Figur 5 das Viereck $AB\mathsf{B}\mathsf{A}$ so gezeichnet, dass $\mathfrak{P}\mathfrak{K}$ auf $B\mathsf{B}$ senkrecht steht, so ist die Polbahnnormale $\mathfrak{n}$ identisch mit der Geraden $\mathfrak{P}A$; $\mathfrak{n}$ hat also mit den Curven m und μ, von dem dreifach zählenden Punkte $\mathfrak{P}$ abgesehen, noch bez. die Punkte A und A gemein, folglich zerfallen m und μ in die Gerade $\mathfrak{n}$ und die Kreise c und γ, welche bez. durch B und B gehen und die Polbahntangente $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{P}$ berühren. Zwei Lothe in B und B bestimmen auf $\mathfrak{n}$ die Schnittpunkte $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ dieser Geraden mit c und γ.

Gegenwärtig ist $\angle\alpha = \angle\mathfrak{K}\mathfrak{P}B = 90^0$, aus Gleichung 2) folgt also

$$\text{19)} \qquad tan\,\varphi_I = \frac{tan\,\beta\,cot\,\psi\,cot\,\chi}{tan\,\beta\,(cot\,\psi + cot\,\chi) - 1}$$

und $\qquad tan\,\varphi_{II} = \infty$,

das heisst, $\varphi_{II} = 90^0$. M_{II} ist also ein vorläufig noch unbestimmter Punkt auf der Geraden $\mathfrak{n}$.

Construction von M_I. Wir ziehen $\mathfrak{C}H$ parallel zu $\mathsf{A}\mathsf{B}$ bis $B\mathsf{B}$, machen auf $\mathfrak{P}B$ die Strecke $\mathfrak{P}H' = \mathfrak{P}B + \mathfrak{P}\mathsf{B} - BH$ und $\angle\mathfrak{C}\mathfrak{P}M_I = \angle H'\mathfrak{K}\mathfrak{P}$; dann sind M_I, M_I die Fusspunkte der von $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ auf $\mathfrak{P}M_I$ gefällten Lothe.

* Ueber die Bewegung eines starren ebenen Systems etc. § 7.

Beweis. Es ist $\angle M_I \mathfrak{P}\mathfrak{t} = \varphi_I = \angle \mathfrak{P} H' \mathfrak{K}$, also

$$cot\,\varphi_I = \frac{\mathfrak{P}H'}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}} = \frac{\mathfrak{P}B}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}} + \frac{\mathfrak{P}\mathsf{B}}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}} - \frac{BH}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}.$$

Nun folgt aus den ähnlichen Dreiecken $B\mathfrak{C}H$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{K}\mathsf{B}$

$$\frac{BH}{B\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{P}\mathsf{B}}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}},$$

also ist

$$\frac{BH}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}} = \frac{B\mathfrak{C}}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}} \cdot \frac{\mathfrak{P}\mathsf{B}}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}} = \frac{\mathfrak{P}B\,cot\,\beta}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}} \cdot \frac{\mathfrak{P}\mathsf{B}}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}} = cot\,\beta\,tan\,\chi\,tan\,\psi$$

und daher

$$cot\,\varphi_I = tan\,\chi + tan\,\psi - cot\,\beta\,tan\,\chi\,tan\,\psi,$$

in Uebereinstimmung mit 19).

Construction von M_{II}. Die rechtwinkeligen Coordinaten der vier Burmester'schen Punkte A, B, M_I, M_{II} genügen der Gleichung 17). Setzen wir in derselben $x = 0$, so ergiebt sich

20) $$y^2 \{ d\vartheta (d\vartheta + d\tau)(2d\vartheta + d\tau) + d^3\vartheta \} - y\,du\,d\vartheta (5d\vartheta + 4d\tau) + 3du^2 d\vartheta = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind $y = \mathfrak{P}A$ und $y = \mathfrak{P}M_{II}$, also ist

$$\mathfrak{P}A + \mathfrak{P}M_{II} = \frac{du\,d\vartheta(5d\vartheta + 4d\tau)}{d\vartheta(d\vartheta + d\tau)(2d\vartheta + d\tau) + d^3\vartheta}$$

$$\mathfrak{P}A \,.\, \mathfrak{P}M_{II} = \frac{3du^2 d\vartheta}{d\vartheta(d\vartheta + d\tau)(2d\vartheta + d\tau) + d^3\vartheta},$$

und hieraus folgt durch Division

$$\frac{1}{\mathfrak{P}M_{II}} + \frac{1}{\mathfrak{P}A} = \frac{5d\vartheta + 4d\tau}{3du} = 4 \cdot \frac{2d\vartheta + d\tau}{3du} - \frac{d\vartheta}{du},$$

oder nach 13) und 16)

$$= \frac{4}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}} - \frac{1}{\mathfrak{P}A} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathsf{A}},$$

das heisst:

21) $$\frac{1}{\mathfrak{P}M_{II}} = \frac{4}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}} - \frac{2}{\mathfrak{P}A} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathsf{A}}.$$

Bezeichnet nun $\mathfrak{Q}$ den vierten harmonischen Punkt zu $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{C}$, A, so ist

$$\frac{2}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}} = \frac{1}{\mathfrak{P}A} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}},$$

also

$$\frac{1}{\mathfrak{P}M_{II}} = \frac{2}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathsf{A}};$$

machen wir daher auf $\mathfrak{n}$ die Strecke $\mathfrak{P}\mathsf{A}' = -\mathfrak{P}\mathsf{A}$, so ist M_{II} der vierte harmonische Punkt zu $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, A'.

Der Punkt M_{II} wird erhalten, indem wir B mit dem Schnittpunkte der Geraden BM_{II} und $\mathfrak{P}\mathfrak{K}$ verbinden.

Der Ball'sche Punkt ist gegenwärtig identisch mit dem Wendepol W; fällt also M_{II} mit W zusammen, so beschreibt der Wendepol eine Bahncurve mit fünfpunktig berührender Tangente. Dann ist

$$\frac{1}{\mathfrak{P}M_{II}} = \frac{1}{\mathfrak{P}W} = \frac{1}{\mathfrak{P}A} - \frac{1}{\mathfrak{P}\mathsf{A}};$$

mit Rücksicht auf 21) folgt also für diese specielle Bewegung des Wendepols die Bedingung:

$$\frac{4}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}} = \frac{3}{\mathfrak{P}A} - \frac{2}{\mathfrak{P}\mathsf{A}}.$$

7. Fall Ib. Ist in Figur 6 AB parallel zu AB, so liegt der Punkt $\mathfrak{K}$ unendlich fern und wir erhalten $\mathfrak{t}$, indem wir $\angle \mathfrak{t}\mathfrak{P}A = \angle B\mathfrak{P}\mathfrak{K}_\infty$ machen. Dann berührt $\mathfrak{t}$ den durch $\mathfrak{P}$, A und B gehenden Kreis c; derselbe hat also mit der Kreispunktcurve m den dreifach zählenden Punkt $\mathfrak{P}$, die Punkte A und B und die imaginären Kreispunkte gemein, das heisst, m zerfällt in c und die Polbahnnormale $\mathfrak{n}$. Ziehen wir $A\mathfrak{C}$ senkrecht zu $\mathfrak{P}A$ bis $\mathfrak{n}$, so ist $\mathfrak{P}\mathfrak{C}$ ein Durchmesser von c.

Im vorliegenden Falle ist $\psi = \chi = 0$; aus Gleichung 2) folgt also $\cot^2\varphi = 0$, das heisst, M_I und M_{II} liegen beide auf $\mathfrak{n}$. Zu ihrer Bestimmung dient Gleichung 20), deren Coefficienten vorher durch die gegebenen Stücke $\mathfrak{P}A = r$, $\mathfrak{P}\mathsf{A} = \varrho$, α, β auszudrücken sind. Nun ist nach 13):

$$\frac{2\,d\vartheta + d\tau}{3\,du} = \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}} = \frac{\sin\alpha}{r},$$

also nach 16):

$$d\tau - d\vartheta = 3\,du\left(\frac{\sin\alpha}{r} - \frac{d\vartheta}{du}\right) = 3\,\frac{\sin\alpha}{\varrho}\,du.$$

Da $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ unendlich gross wird, so ist nach 14) $d^2\vartheta = 0$, also geht Gleichung 18) über in

$$3\,d^3\vartheta\tan^2\varphi + 3\,d\vartheta\,d^2\tau\tan\varphi - d\vartheta(d\vartheta - d\tau)(2\,d\vartheta + d\tau) = 0,$$

oder

$$d^3\vartheta\tan^2\varphi + d\vartheta\,d^2\tau\tan\varphi + 3\,\frac{\sin^2\alpha}{r\varrho}\,du^2 d\vartheta = 0.$$

Setzen wir hier der Reihe nach $\varphi = \alpha$ und $\varphi = \beta$, so ergiebt sich durch Elimination von $d^2\tau$

$$d^3\vartheta = \frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{r\varrho\tan\beta}\,du^2 d\vartheta.$$

Durch Substitution der gefundenen Werthe von $2\,d\vartheta + d\tau$, $d\tau - d\vartheta$, $d^3\vartheta$ erhalten wir endlich aus 20) zur Bestimmung von M_I, M_{II} die Gleichung:

$$22)\quad y^2\sin\alpha\,\{2\varrho\sin\alpha\sin\beta + r\cos(\alpha-\beta)\} - y\,r\,(3\varrho + r)\sin\alpha\sin\beta + r^2\varrho\sin\beta = 0.$$

Ist $A\mathsf{A} = B\mathsf{B}$ und $\angle A\mathfrak{P}B = 2\varepsilon$, so verwandelt sich die vorige Gleichung in

$$y^2(r\cos 2\varepsilon + 2\varrho\cos^2\varepsilon) - y\,r(3\varrho + r)\cos\varepsilon + r^2\varrho = 0.$$

Soll dann einer der Punkte M_I, M_{II} mit dem Ball'schen Punkte, das heisst mit dem Wendepol W, zusammenfallen, so muss

$$23)\qquad y = \mathfrak{P}W = \frac{r\varrho}{(\varrho - r)\cos\varepsilon}$$

eine Wurzel der letzten Gleichung sein; dies führt zu der Bedingung

$$24)\qquad \cos 2\varepsilon = -\frac{r}{r+\varrho}$$

und mithin zu folgender Construction des Vierecks $AB\mathsf{B}\mathsf{A}$ (Fig. 7). In dem beliebig gewählten gleichschenkligen Dreieck $\mathfrak{P}AB$ verlängern wir den Schenkel $\mathfrak{P}A$ um sich selbst bis A', errichten in A' zu $A'\mathfrak{P}$ ein Loth, welches $\mathfrak{P}B$ in C schneidet, und machen $C\mathsf{B} = \mathfrak{P}A = r$. Ziehen wir noch $\mathfrak{P}U$ senkrecht zu $\mathfrak{P}B$ und $\mathsf{B}U$ senkrecht zu AB, so trifft die Gerade UB das von $\mathfrak{P}$ auf AB gefällte Loth in W. Da die Bahncurve des Punktes W in Bezug auf die Gerade $\mathfrak{P}W$ symmetrisch ist, so hat sie mit ihrer Tangente in W nicht fünf, sondern sechs unendlich benachbarte Punkte gemein; das gleichschenklige Trapez $AB\mathsf{B}\mathsf{A}$ bewirkt also eine sechspunktige Geradführung des Wendepols W.

In Figur 7 ist der zweite Burmester'sche Punkt identisch mit dem Mittelpunkte M der Strecke AB. Die Punkte W und M fallen zusammen für $\mathfrak{P}W = r\cos\varepsilon$; dann ist aber nach 23):

$$\cos^2\varepsilon = \frac{\varrho}{\varrho - r},$$

folglich nach 24):

$$\varrho = -3r, \quad 2\varepsilon = 60^0.$$

Verhält sich also in dem gleichschenkligen Gelenkviereck $AB\mathsf{B}\mathsf{A}$

$$AB : \mathsf{A}\mathsf{B} : A\mathsf{A} = 1 : 3 : 4,$$

so beschreibt der Mittelpunkt des Gliedes AB eine Bahncurve mit sechspunktig berührender Tangente (Fig. 8).

8. Fall IIa. Liegt in Figur 9 der Punkt B auf dem festen Gliede $\mathsf{A}\mathsf{B}$, so fällt $\mathfrak{P}$ mit A, $\mathfrak{K}$ mit B, die Polbahntangente $\mathfrak{t}$ mit $\mathsf{A}A$ zusammen. Die Kreispunktcurve m hat also mit der Geraden $\mathfrak{t}$ ausser $\mathfrak{P}$ noch den Punkt A gemein und degenerirt deshalb in $\mathfrak{t}$ und einen Kreis d, der durch B geht und die Polbahnnormale $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{P}$ berührt. Ziehen wir $B\mathfrak{D}$ senkrecht zu $\mathsf{A}\mathsf{B}$ bis $\mathsf{A}A$, so ist $\mathsf{A}\mathfrak{D}$ der auf $\mathfrak{t}$ liegende Durchmesser von d. Der Durchmesser $\mathfrak{P}\mathfrak{C}$ des zweiten Krümmungskreises der Curve m wird unendlich gross, folglich ergiebt sich aus 13):

$$d\tau = -2\,d\vartheta.$$

Es ist ferner nach 14):

$$\frac{3\,du\,d\vartheta}{d^2\vartheta} = \mathfrak{P}\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{P}B}{\cos\beta},$$

oder

$$d^2\vartheta = \frac{3\,du\,d\vartheta\cos\beta}{\mathfrak{P}B}$$

und nach 15), wenn K den Rückkehrpol bezeichnet,

$$\mathfrak{P}\mathfrak{C}' = \frac{3\,du}{d\tau - d\vartheta} = -\frac{du}{d\vartheta} = \mathfrak{P}\mathsf{K};$$

die Curve μ bleibt daher eine eigentliche Curve dritter Ordnung mit Krümmungskreisen über den Durchmessern $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{P}\mathsf{K}$.

Da die Winkel α und ψ verschwinden, so dient Gleichung 2) nicht mehr zur Bestimmung der Punkte M_I, M_{II}. Wir benutzen vielmehr Gleichung 18; dieselbe verwandelt sich gegenwärtig in

$$d^2\vartheta^2\tan^3\varphi - d\vartheta\,d^2\vartheta(d\vartheta + 2\,d\tau)\tan^2\varphi + (3\,d\vartheta\,d^3\vartheta - 4\,d^2\vartheta^2)\tan\varphi + 3\,d\vartheta(d\vartheta\,d^2\tau - d\tau\,d^2\vartheta) = 0$$

mit den Wurzeln $\tan\varphi_I$, $\tan\varphi_{II}$, $\tan\beta$. Es ist also:

$$\tan\varphi_I + \tan\varphi_{II} + \tan\beta = \frac{d\vartheta(d\vartheta + 2\,d\tau)}{d^2\vartheta}$$

und

$$\tan\varphi_I\tan\varphi_{II}\tan\beta = \frac{3\,d\vartheta(d\tau\,d^2\vartheta - d\vartheta\,d^2\tau)}{d^2\vartheta^2}.$$

Die hier noch vorkommende unbekannte Grösse $d^2\tau$ ermitteln wir am einfachsten aus Gleichung 17); setzen wir in derselben $x = \mathfrak{P}A$, $y = 0$, so folgt:

$$-d^2\tau = \frac{3\,du\,d\vartheta}{\mathfrak{P}A} - 3\,d^2\vartheta.$$

Durch Einsetzung der gefundenen Werthe von $d\tau$, $d^2\vartheta$, $-\frac{du}{d\vartheta}$, $d^2\tau$ gehen die vorigen Gleichungen über in

$$25)\quad\left\{\begin{aligned}\tan\varphi_I + \tan\varphi_{II} &= \mathfrak{P}\mathfrak{D}\left(\frac{1}{\mathfrak{P}\mathsf{K}} - \frac{\sin\beta}{\mathfrak{P}B}\right)\\ \tan\varphi_I\tan\varphi_{II} &= \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}\mathsf{K}}\cdot\frac{\mathfrak{P}B - \mathfrak{P}A\cos\beta}{\mathfrak{P}A\sin\beta}.\end{aligned}\right.$$

Die Punkte M_I, M_{II} liegen nun auf dem Kreise d; bezeichnen wir bez. mit N und T die Punkte, in denen die Verbindungslinie M_IM_{II} die Geraden $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{t}$ schneidet, so ist, wie in der vorhergehenden Mittheilung gezeigt wurde,

$$\mathfrak{P}N = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{\tan\varphi_I + \tan\varphi_{II}}$$

und das Theilungsverhältniss

$$\frac{\mathfrak{D}T}{\mathfrak{P}T} = \tan\varphi_I\tan\varphi_{II},$$

also im vorliegenden Falle

$$\frac{1}{\mathfrak{P}N} = \frac{1}{\mathfrak{P}\mathsf{K}} - \frac{\sin\beta}{\mathfrak{P}B}$$

und

$$\frac{\mathfrak{D}T}{\mathfrak{P}T} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}\mathsf{K}}\cdot\frac{\mathfrak{P}B - \mathfrak{P}A\cos\beta}{\mathfrak{P}A\sin\beta}.$$

Verlängern wir die Gerade $B\mathfrak{D}$ bis zu ihrem Schnittpunkte B' mit $\mathfrak{n}$ und ziehen $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$ parallel zu AB bis $\mathsf{A}B$, $\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''$ senkrecht zu $\mathsf{A}B$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{D}''$ parallel zu $\mathfrak{n}$, so wird:

$$\mathfrak{P}B' = \frac{\mathfrak{P}B}{\sin\beta}$$

$$B\mathfrak{D}' = \mathfrak{P}\mathfrak{D}\,\frac{\mathfrak{P}B}{\mathfrak{P}A} - \mathfrak{P}\mathfrak{D}\cos\beta$$

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}'' = \frac{B\mathfrak{D}'}{\sin\beta} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}(\mathfrak{P}B - \mathfrak{P}A\cos\beta)}{\mathfrak{P}A\sin\beta}$$

und wir erhalten:

$$\frac{1}{\mathfrak{P}N} = \frac{1}{\mathfrak{P}\mathsf{K}} - \frac{1}{\mathfrak{P}B'}$$

$$\frac{\mathfrak{D}T}{\mathfrak{P}T} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{D}''}{\mathfrak{P}\mathsf{K}}.$$

Hieraus ergiebt sich die folgende Construction. Wir errichten in $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{P}B$ ein Loth und ermitteln den Schnittpunkt V desselben mit einer Parallelen durch B zu $\mathfrak{n}$; dann bestimmt die Gerade $\mathsf{B}V$ auf $\mathfrak{n}$ den Rückkehrpol K und die Gerade $\mathsf{K}\mathfrak{D}''$ auf $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ den Punkt T. Ziehen wir ferner $\mathfrak{P}V'$ parallel zu $B'V$ bis $\mathsf{K}V$ und durch V' zu $V\mathfrak{P}$ eine Parallele, so trifft dieselbe $\mathfrak{n}$ in N. Die Gerade NT schneidet den Kreis d in M_I und M_{II}.

Der Ball'sche Punkt ist gegenwärtig der Schnittpunkt des Wendekreises mit dem Kreise d, das heisst, der Fusspunkt des Lothes aus $\mathfrak{P}$ auf die Gerade, die $\mathfrak{D}$ mit dem Wendepole W verbindet. Der Punkt M_I fällt demnach mit dem Ball'schen Punkte zusammen, sobald

$$\tan\varphi_I = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}W} = -\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}\mathsf{K}}$$

wird. Setzen wir diesen Werth für $\tan\varphi_I$ in die Gleichungen 25) ein, so folgt durch Elimination von $\tan\varphi_{II}$

$$\mathfrak{P}\mathsf{K} = 2\,.\,\frac{\mathfrak{P}A\,.\,\mathfrak{P}B\sin\beta}{\mathfrak{P}A - \mathfrak{P}B\cos\beta}.$$

Sei nun in Figur 10 $\mathfrak{P}AB$ ein beliebiges Dreieck, R der Schnittpunkt von AB mit einer Senkrechten in $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{P}A$, dann ist, wenn wir den Winkel $B\mathfrak{P}A$ mit β bezeichnen,

$$\mathfrak{P}R = \frac{\mathfrak{P}A\,.\,\mathfrak{P}B\sin\beta}{\mathfrak{P}A - \mathfrak{P}B\cos\beta}.$$

Wir machen auf der Verlängerung von $\mathfrak{P}R$ die Strecke $\mathfrak{P}W = 2\,.\,R\mathfrak{P}$, errichten in $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{P}B$ ein Loth, welches die Gerade WB in U schneidet, und ziehen UB parallel zu RW bis $\mathfrak{P}B$, $B\mathfrak{D}$ senkrecht zu $\mathfrak{P}B$ bis $\mathfrak{P}A$, $\mathfrak{P}M_I$ senkrecht zu $\mathfrak{D}W$. Ertheilen wir dem Punkte $\mathfrak{P}$ noch die Bezeichnung A, so bewirkt das Gelenkviereck $AB\mathsf{B}\mathsf{A}$ eine fünfpunktige Geradführung des Punktes M_I auf der Geraden $\mathfrak{D}W$.

Durch Umkehrung der Bewegung erhalten wir aus Figur 9 den Fall IIIa; die Koppelgerade befindet sich dann in der Todtlage AB. Um also für diesen Fall die Burmester'schen Punkte M_I, M_{II} zu construiren, bestimmen wir zunächst in der eben angegebenen Weise die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte M_I, M_{II} und finden hierauf M_I, M_{II} durch die bekannte Bobillier'sche Construction. — Da der Rückkehrkreis die Kreispunktcurve μ im Punkte $\mathfrak{P}$ osculirt, so fällt bei der umgekehrten Bewegung der Ball'sche Punkt mit $\mathfrak{P}$, das heisst mit A zusammen; von einer Geradführung kann dann also nicht mehr die Rede sein.

9. Fall IIb. In Figur 11 haben wir das Viereck $AB\mathsf{BA}$ so gewählt, dass $\angle A\mathfrak{K}\mathfrak{P} = \chi = 90^0$ ist. Beschreiben wir durch die Punkte $\mathfrak{P}$, A, B einen Kreis d und ziehen in demselben den Durchmesser $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$, so ist

$$\angle B\mathfrak{P}\mathfrak{D} = \angle \mathfrak{K}\mathfrak{P}A,$$

also $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ die Polbahntangente $\mathfrak{t}$. Die Curve m hat mit dem Kreise d sieben Punkte gemein, sie zerfällt demnach in d und die Gerade $\mathfrak{t}$.

Aus Gleichung 2) ergiebt sich:

$$26)\qquad \tan\varphi_I = \tan\alpha\tan\beta\cot\psi - \tan\alpha - \tan\beta$$

und

$$\tan\varphi_{II} = 0.$$

Construction von M_I. Wir legen durch $\mathfrak{P}$ zu AB eine Parallele, welche AB in E, das in B zu AB errichtete Loth in C schneidet, und ziehen von C nach dem Schnittpunkte von $\mathfrak{P}\mathfrak{K}$ und AE die Gerade CG bis AB. Machen wir dann auf AB die Strecke $BH = GA$ und bestimmen die Schnittpunkte $\mathfrak{K}'$, H' des Kreises d mit den Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{K}$, $\mathfrak{P}H$, so erhalten wir den Punkt M_I, indem wir den Bogen $\mathfrak{K}'H'$ von $\mathfrak{D}$ aus in demselben Sinne auf d abtragen. Es ist nämlich:

$$\mathfrak{K}G = \frac{\mathfrak{P}C\,.\,\mathfrak{K}A}{\mathfrak{P}E} = \frac{\mathfrak{K}B\,.\,\mathfrak{K}A}{\mathfrak{P}E}$$

und

$$\mathfrak{K}H = \mathfrak{K}B + \mathfrak{K}A - \mathfrak{K}G,$$

also:

$$\tan\angle\mathfrak{K}\mathfrak{P}H = \frac{\mathfrak{K}B}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}} + \frac{\mathfrak{K}A}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}} - \frac{\mathfrak{K}B}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}\cdot\frac{\mathfrak{K}A}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}\cdot\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}{\mathfrak{P}E}$$

$$= \tan\alpha + \tan\beta - \tan\alpha\tan\beta\cot\psi,$$

u. s. w.

Aus Gleichung 4) ergiebt sich für die fünfpunktige Geradführung des Punktes M_I die Bedingung:

$$2\cot\psi = \cot\alpha + \cot\beta.$$

Construction von M_{II}. Setzen wir in 17) $x = \mathfrak{P}M_{II}$, $y = 0$, so folgt:

$$\frac{1}{\mathfrak{P}M_{II}} = \frac{3d^2\vartheta + d^2\tau}{3\,d\,u\,d\,\vartheta}.$$

Nun ist wieder $\mathfrak{P}\mathfrak{C} = \infty$, also $d\tau = -2d\vartheta$; die Gleichung 18) verwandelt sich demnach in die Gleichung dritten Grades:

$$d^2\vartheta^2 \tan^3\varphi + 3d\vartheta^2 d^2\vartheta \tan^2\varphi + (3d\vartheta d^3\vartheta - 4d^2\vartheta^2)\tan\varphi + 3d\vartheta^2(d^2\tau + 2d^2\vartheta) = 0.$$

Die Wurzeln derselben sind $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\varphi_I$; mithin ist das letzte Glied

$$3d\vartheta^2(d^2\tau + 2d^2\vartheta) = -d^2\vartheta^2 \tan\alpha \tan\beta \tan\varphi_I$$

und daher

27) $$\frac{1}{\mathfrak{P}M_{II}} = \frac{d^2\vartheta}{3du\,d\vartheta}\left(1 - \frac{d^2\vartheta}{3d\vartheta^2}\tan\alpha\tan\beta\tan\varphi_I\right).$$

Wir erhalten ferner aus 14):

$$\frac{d^2\vartheta}{3du\,d\vartheta} = \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{D}} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}$$

und aus 16):

$$\frac{d\vartheta}{du} = \left(\frac{1}{\mathfrak{P}A} - \frac{1}{\mathfrak{P}\mathsf{A}}\right)\sin\alpha$$

$$= \left\{\frac{\cos\beta}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}} - \frac{\sin(\beta+\psi)}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}\sin\psi}\right\}\sin\alpha = -\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}\tan\psi},$$

also

$$\frac{d^2\vartheta}{3d\vartheta^2} = -\frac{\tan\psi}{\tan\alpha\tan\beta}.$$

Setzen wir noch für $\tan\varphi_I$ den Werth aus 26), so geht Gleichung 27) über in

28) $$\frac{1}{\mathfrak{P}M_{II}} = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}} - \frac{\sin(\alpha+\beta)\tan\psi}{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}.$$

Der Punkt M_{II} ergiebt sich demnach in folgender Weise. Wir fällen von $\mathfrak{P}$ auf AB ein Loth, welches AB in T schneidet, machen auf dem Kreise d den Bogen $BS' = \mathfrak{D}B$, bestimmen den Schnittpunkt S der Geraden $\mathfrak{P}S'$ mit AB und tragen die Strecke $\mathfrak{P}S$ von $\mathfrak{P}$ aus auf $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ ab. Den so erhaltenen Punkt S'' verbinden wir mit T und ziehen durch den Schnittpunkt der Geraden TS'' und $\mathfrak{P}\mathfrak{K}$ eine Parallele zu $\mathfrak{P}T$; dieselbe trifft $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ in M_{II}.

In der That, es verhält sich

$$\mathfrak{P}M_{II} : \mathfrak{P}S'' = T\mathfrak{K} : T\mathfrak{K} + \mathfrak{P}S''\sin(\alpha+\beta).$$

Nun ist

$$\mathfrak{K}T = \mathfrak{P}\mathfrak{K}\cot\psi, \quad \angle\mathfrak{K}\mathfrak{P}S' = \alpha - \beta, \quad \mathfrak{P}S'' = \mathfrak{P}S = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}{\cos(\alpha-\beta)},$$

also

$$\mathfrak{P}M_{II} = \frac{\mathfrak{P}S''.\,\mathfrak{K}T}{\mathfrak{K}T - \mathfrak{P}S''\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}{\cos(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta)\tan\psi}.$$

Der dem Punkte M_{II} entsprechende Krümmungsmittelpunkt M_{II} ist identisch mit $\mathfrak{P}$.

Hiermit ist zugleich der Fall IIIb erledigt, der durch Umkehrung der Bewegung aus dem eben behandelten Falle hervorgeht.

10. Fall IV. Sind in Figur 12 die Glieder $\mathsf{A}A$ und $\mathsf{B}B$ parallel, so liegt der Pol $\mathfrak{P}$ unendlich fern und die Polbahntangente $\mathfrak{t}$ wird parallel zu $A\mathsf{A}$. Fällen wir von dem Schnittpunkte $\mathfrak{K}$ der Geraden AB und AB ein Loth auf $\mathsf{A}A$, welches die Geraden $\mathsf{A}A$, $\mathsf{B}B$, $\mathfrak{t}$ bez. in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{O}$ schneidet, so ist bekanntlich $\mathfrak{K}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{O}$. Die Kreispunktcurven m und μ zerfallen, wie Herr Rodenberg gezeigt hat*, in die unendlich ferne Gerade und je eine gleichseitige Hyperbel durch A und B, bez. A und B, mit den Asymptoten $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{K}\mathfrak{O}$.

Um auch in diesem Falle die Burmester'schen Punkte M_I, M_{II} zu bestimmen, gehen wir aus von Figur 13, in welcher sich $\mathsf{A}A$ und $\mathsf{B}B$ in einem endlichen Punkte $\mathfrak{P}$ treffen. Sei wieder $\mathfrak{t}$ die Polbahntangente, $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$ ein beliebiger Strahl, der mit $\mathfrak{t}$ den Winkel φ bildet; ein Loth von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{t}$ schneide $\mathfrak{P}A$, $\mathfrak{P}B$, $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$, $\mathfrak{t}$ bez. in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{O}$. Dann ist, wenn die Bezeichnungen α, β, ψ, χ in demselben Sinne gebraucht werden, wie bisher,

$$tan\,\alpha = \frac{\mathfrak{O}\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}\mathfrak{O}}, \quad tan\,\beta = \frac{\mathfrak{O}\mathfrak{B}}{\mathfrak{P}\mathfrak{O}}, \quad tan\,\varphi = \frac{\mathfrak{O}\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}\mathfrak{O}}.$$

Liegt nun auf $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$ einer der Burmester'schen Punkte, so genügt $tan\,\varphi$ der Gleichung 2), und diese geht über in

$$\mathfrak{O}\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{O}\mathfrak{M} \times \left\{\frac{\mathfrak{O}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{O}\mathfrak{B}}{\mathfrak{P}\mathfrak{O}}(cot\,\psi + cot\,\chi) - \mathfrak{O}\mathfrak{A} - \mathfrak{O}\mathfrak{B}\right\} + \mathfrak{O}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{O}\mathfrak{B}\,cot\,\psi\,cot\,\chi = 0.$$

Lassen wir jetzt $\mathfrak{P}\mathfrak{O}$ unendlich gross werden, so verwandelt sich Figur 13 in Figur 12 und wir erhalten zur Bestimmung von M_I, M_{II} die Gleichung:

$$\mathfrak{O}\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{O}\mathfrak{M}(\mathfrak{O}\mathfrak{A} + \mathfrak{O}\mathfrak{B}) + \mathfrak{O}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{O}\mathfrak{B}\,cot\,\psi\,cot\,\chi = 0,$$

oder

$$\mathfrak{O}\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{O}\mathfrak{K}\,.\,\mathfrak{O}\mathfrak{M} + \mathsf{A}\mathfrak{A}\,.\,B\mathfrak{B} = 0. \tag{29}$$

In Figur 12 sind die Punkte $\mathfrak{M}_I$, $\mathfrak{M}_{II}$, deren Entfernungen von $\mathfrak{O}$ der letzten Gleichung genügen, unter bloser Anwendung des Zirkels construirt worden. Um auf der durch $\mathfrak{M}_I$ gezogenen Parallele zu $\mathfrak{t}$ die Punkte M_I, M_I zu ermitteln, bestimmen wir die Schnittpunkte D, Δ dieser Geraden mit zwei Parallelen zu $\mathfrak{K}\mathfrak{O}$ durch B und B. Trifft $B\mathsf{B}$ die Geraden $\mathfrak{O}D$, $\mathfrak{O}\Delta$ bez. in D', Δ', so sind $D'M_I$ und $\Delta'\mathsf{M}_I$ parallel zu $\mathfrak{K}\mathfrak{O}$.

Der Wendekreis zerfällt gegenwärtig in die unendlich ferne Gerade der Ebene und die Polbahntangente $\mathfrak{t}$; der Ball'sche Punkt ist folglich der Schnittpunkt der durch A und B gehenden gleichseitigen Hyperbel mit ihrer Asymptote $\mathfrak{t}$, das heisst, der unendlich ferne Pol $\mathfrak{P}$. Im vorliegenden Falle beschreibt also im Allgemeinen kein endlicher Systempunkt eine Bahncurve, die mit ihrer Tangente mehr als drei unendlich benachbarte Punkte gemein hat. Eine Ausnahme hiervon bildet aber der Fall,

---

* a. a. O. S. 273.

dass die Seite AB auf $\mathsf{A}A$ und $\mathsf{B}B$ senkrecht steht. Dann degenerirt nämlich die Hyperbel, die den endlichen Bestandtheil der Kreispunktcurve m darstellt, in die Geraden $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{K}\mathfrak{D}$, folglich befindet sich jeder Punkt von $\mathfrak{t}$ — wie bereits Herr Rodenberg bemerkt hat — in vier unendlich benachbarten Lagen auf einer Geraden. Wir wollen diesen interessanten Sonderfall noch etwas eingehender untersuchen.

Gegenwärtig ist $B\mathfrak{B} = 0$, aus Gleichung 29) folgt also

$$\mathfrak{D}\mathfrak{M}_I = -\mathfrak{D}\mathfrak{K}, \quad \mathfrak{D}\mathfrak{M}_{II} = 0.$$

Der Punkt M_I liegt demnach auf $\mathfrak{D}\mathfrak{K}$ symmetrisch zu $\mathfrak{K}$.

Um den auf $\mathfrak{t}$ liegenden Punkt M_{II} zu ermitteln, gehen wir aus von Figur 11 — Fall IIb. In derselben ist bereits $\angle A\mathfrak{K}\mathfrak{P} = 90^0$, und wir erhalten aus ihr den jetzt betrachteten Sonderfall, wenn wir den Punkt $\mathfrak{P}$ in unendliche Entfernung verlegen. Nach Gleichung 28) ist in Figur 11:

$$\mathfrak{P}M_{II} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{K}}{cos(\alpha-\beta) - sin(\alpha+\beta)\, tan\,\psi}.$$

Fällen wir, wie in Figur 13, auf $\mathfrak{t}$ das Loth $\mathfrak{K}\mathfrak{D}$, welches $\mathfrak{P}A$ und $\mathfrak{P}B$ bez. in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ schneidet, so wird

$$\mathfrak{P}\mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}{cos(\alpha+\beta)},$$

folglich:

$$\mathfrak{D}M_{II} = \mathfrak{P}M_{II} - \mathfrak{P}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\mathfrak{D}\cdot\frac{1 - cos(\alpha+\beta)\{cos(\alpha-\beta) - sin(\alpha+\beta)\,tan\,\psi\}}{cos(\alpha+\beta)\{cos(\alpha-\beta) - sin(\alpha+\beta)\,tan\,\psi\}}$$

$$= \mathfrak{P}\mathfrak{D}\cdot\frac{(1+tan^2\alpha)(1+tan^2\beta) - (1-tan\,\alpha\,tan\,\beta)\{1+tan\,\alpha\,tan\,\beta - (tan\,\alpha + tan\,\beta)tan}{(1-tan\,\alpha\,tan\,\beta)\{1+tan\,\alpha\,tan\,\beta - (tan\,\alpha+tan\,\beta)tan\,\psi\}}$$

$$= \mathfrak{P}\mathfrak{D}\cdot\frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{D}^2+\mathfrak{D}\mathfrak{A}^2)(\mathfrak{P}\mathfrak{D}^2+\mathfrak{D}\mathfrak{B}^2) - (\mathfrak{P}\mathfrak{D}^2-\mathfrak{D}\mathfrak{A}.\mathfrak{D}\mathfrak{B})\{\mathfrak{P}\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{P}\mathfrak{D}(\mathfrak{D}\mathfrak{A}+\mathfrak{D}\mathfrak{B})tan\,\psi + \mathfrak{D}\mathfrak{A}.\mathfrak{D}}{(\mathfrak{P}\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{D}\mathfrak{A}.\mathfrak{D}\mathfrak{B})\{\mathfrak{P}\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{P}\mathfrak{D}(\mathfrak{D}\mathfrak{A}+\mathfrak{D}\mathfrak{B})tan\,\psi + \mathfrak{D}\mathfrak{A}.\mathfrak{D}\mathfrak{B}\}}$$

Für $\mathfrak{P}\mathfrak{D} = \infty$ ergiebt sich demnach:

30) $$lim\,\mathfrak{D}M_{II} = (\mathfrak{D}\mathfrak{A} + \mathfrak{D}\mathfrak{B})tan\,\psi = \mathfrak{D}\mathfrak{K}\,tan\,\psi.$$

In Figur 14 wird durch $AB\mathsf{B}\mathsf{A}$ ein Gelenkviereck dargestellt, dessen Koppel AB auf den Seiten $A\mathsf{A}$, $B\mathsf{B}$ senkrecht steht. Dann ist $\angle \mathsf{B}\mathsf{A}A = \psi$; errichten wir also in $\mathfrak{K}$ zu AB ein Loth, so schneidet dasselbe die Polbahntangente $\mathfrak{t}$ in dem Burmester'schen Punkte M_{II}. Demselben entspricht, wie allen Punkten von $\mathfrak{t}$, ein unendlich ferner Krümmungsmittelpunkt; die Bahncurve von M_{II} hat also an dieser Stelle mit ihrer Tangente fünf unendlich benachbarte Punkte gemein.

Aus den ähnlichen Dreiecken $\mathsf{A}\mathfrak{K}A$ und $\mathfrak{K}\mathfrak{D}M_{II}$ folgt

$$\mathsf{A}\mathfrak{K} : A\mathfrak{K} = \mathfrak{K}M_{II} : \mathfrak{D}M_{II};$$

es verhält sich also auch

$$\mathsf{A}\mathfrak{K} : \mathfrak{K}M_{II} = \mathfrak{B}\mathfrak{D} : \mathfrak{D}M_{II}.$$

Demnach ist
$$\triangle A \mathfrak{K} M_{II} \sim \triangle B \mathfrak{D} M_{II},$$
folglich
$$\angle \mathfrak{K} M_{II} A = \angle B M_{II} \mathfrak{D}.$$

In derselben Weise ergiebt sich, dass
$$\angle B M_{II} \mathfrak{K} = \angle \mathfrak{D} M_{II} A,$$
mithin ist
$$\angle B M_{II} A = \angle B M_{II} A,$$
dass heisst, der Punkt M_{II} befindet sich augenblicklich in einem Doppelpunkte seiner Bahncurve*. Wir erhalten daher den folgenden Satz:

Steht in dem Gelenkviereck die Koppelgerade AB senkrecht auf den beiden anstossenden Seiten, so beschreibt jeder Punkt der Polbahntangente t augenblicklich einen Undulationspunkt. Ausgenommen ist hiervon nur derjenige Punkt M_{II}, in welchem das in $\mathfrak{K}$ zu AB errichtete Loth die Gerade t schneidet. Derselbe bleibt nicht nur in vier, sondern in fünf unendlich benachbarten Lagen auf einer zu t senkrechten Geraden und geht überdies im Verlaufe der Bewegung noch einmal durch die mit M_{II} bezeichnete Stelle hindurch.

---

* Vergl. Burmester, Kinematik I, S. 296.

IX.

Ueber die Ermittelung der Sterblichkeit, Invalidität u. s. w. bei Gesammtheiten mit ein- und austretenden Personen.

Von

W. KÜTTNER

in Burgk b. Dresden.

Die Beobachtungen, die sich auf die Feststellung der Sterblichkeit, Invalidität u. s. w. beziehen, haben sich nicht allein auf eine möglichst grosse Anzahl von Personen zu erstrecken, sondern müssen auch von bestimmter endlicher Dauer sein.

Im Allgemeinen legt man den einzelnen Beobachtungen der hier in Frage kommenden Ereignisse die Dauer eines Jahres zu Grunde. Haben die Beobachtungen länger gewährt, so lassen sich solche meist in Beobachtungen von einjähriger Dauer zerlegen. Schwierigkeiten bieten nur die Fälle, wo die Beobachtungen kürzer als ein Jahr sind, und die hauptsächlich dort angetroffen werden, wo Gesellschaften mit ein- und austretenden Mitgliedern der Beobachtung unterliegen. Die innerhalb eines Jahres bei einer Gesammtheit neu unter Beobachtung kommenden oder der Beobachtung sich entziehenden Personen stellen Beobachtungsfälle von abgekürzter Dauer dar, die weder aus den Gesammtbeobachtungen weggelassen, noch als gleichwerthig mit den übrigen in die Rechnung eingeführt werden können. Durch Weglassung der Eingetretenen oder der neu unter Beobachtung gekommenen Personen würde der Wahrscheinlichkeitswerth in allen den Fällen vergrössert werden, wo es nicht möglich ist, die Personen einzeln zu verfolgen, während man bei Nichtberücksichtigung der Ausgetretenen den Wahrscheinlichkeitswerth ausnahmslos zu klein finden würde.

Theoretische Erörterungen über diesen Gegenstand haben Heym, Wittstein, Behm u. A. gegeben. Namentlich ist es aber Zeuner, der sich mit der Ermittelung der Sterblichkeit in Gesellschaften mit ein- und austretenden Mitgliedern beschäftigt und zuerst eine lichtvolle Darstellung über diesen Gegenstand gegeben hat. So hochverdienstlich alle diese Arbeiten sind, und so sehr namentlich die Zeuner'schen Ausführungen sich durch wissenschaftliche Strenge auszeichnen, so lassen doch die zur Ableitung gekommenen Formeln keine Individualisirung zu, die heute bei der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die mannigfaltigsten Gesammtheiten nöthig ist. Die genannten Autoren setzen, wie wir später sehen werden, alle eine gewisse Gesetzmässigkeit in der Vertheilung der aus- und eintretenden Personen voraus, von der man sich frei machen muss, wenn die Formeln allgemein anwendbar sein sollen. Auch ist nirgends auf den Unterschied hingewiesen worden, der in der Behandlung der Ein- und Ausgetretenen zu erfolgen hat, je nachdem in die Rechnung Gesammtheiten eingeführt werden, die streng nach den Sätzen der mathematischen Statistik als gleich- oder als gemischtalterige durch die Beobachtungsgrenzen gehen.

Hierzu kommt noch, dass die Wege, die bisher zur Lösung unserer Aufgabe eingeschlagen worden sind, keine directen waren, denn sämmtliche Schriftsteller gehen bei ihren Ableitungen nicht von den Beobachtungen aus, sondern gründen ihre Formeln auf die Mortalitätscurve. So einwandsfrei dieses Verfahren auch sonst sein mag, so hat es doch den Nachtheil, dass die Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung ganz ausser Berücksichtigung bleiben und Unsicherheiten bestehen, wenn es gilt, den wahrscheinlichen Fehler zu berechnen oder Fehlergrenzen für die abgeleiteten Werthe anzugeben. Im Uebrigen führen alle derartigen Ableitungen auf verwickelte transscendente Functionen, die nur durch weitere willkürliche Annahmen über den Verlauf der Mortalität Anwendung in der Praxis finden können.

Es ist aber gar nicht nöthig, auf so beschwerlichen Umwegen zum Ziele zu gelangen, wenn man gleich von vornherein annimmt, wie es sonst gewöhnlich am Schlusse der Rechnung geschieht, dass die Sterblichkeit, Invalidität u. s. w. innerhalb eines Jahres für jedes Zeitintervall dieselbe bleibt. In diesem Falle gilt der Satz,

„dass der Werth einer Beobachtung proportional ihrer Beobachtungsdauer ist."

Hiernach würde also eine Beobachtung, die nur $\frac{1}{n}$ Jahr gedauert hat, auch nur als eine n^{tel} Beobachtung aufzufassen sein, oder, anders ausgedrückt, n Beobachtungen von je $\frac{1}{n}$ Jahr Dauer sind gleich einer ganzen Beobachtung.

Sind a Personen während eines ganzen Jahres und d Personen im Mittel je μ Jahre beobachtet worden, wo

$$0 < \mu < 1,$$

so sind die gesammten Beobachtungsfälle

$$a + \mu d.$$

Da es üblich ist, die am Anfange des Jahres vorhandenen Personen mit a, die davon im Laufe des Jahres ausgeschiedenen mit c und die in derselben Zeit neu unter Beobachtung gekommenen Personen, also die Eingetretenen, mit b zu bezeichnen, so würden, wenn die mittlere Beobachtungsdauer für die letzteren mit μ und für die Ausgeschiedenen mit μ' bezeichnet wird, als Gesammtbeobachtungsfälle in Frage kommen:

$$1)\qquad a + \mu b - (1 - \mu')c.$$

Ist nun α mal das der Beobachtung unterlegene Ereigniss eingetreten, so ist nach dem Satze von Bayes die Wahrscheinlichkeit h der Hypothese, dass s der gesuchte Wahrscheinlichkeitswerth ist, gleich

$$2)\qquad h = \frac{s^{\alpha}(1-s)^{a+\mu b-(1-\mu')c-\alpha}ds}{\int\limits_0^1 s^{\alpha}(1-s)^{a+\mu b-(1-\mu')c-\alpha}ds}.$$

Nun wird aber h am grössten, oder *s ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit nach der wahrscheinlichsten Hypothese*, wenn

$$3)\qquad s^{\alpha}(1-s)^{a+\mu b-(1-\mu')c-\alpha}ds = Maximum,$$

oder

$$I)\qquad s = \frac{\alpha}{a + \mu b - (1 - \mu')c}$$

ist.

Diese Formel, die in aller Strenge unter den von uns gemachten Annahmen gilt, ist *unabhängig von jedweder Hypothese über die Ein- und Austrittsbewegung* und somit auf alle Verhältnisse gleich anwendbar, worin ihre Ueberlegenheit gegenüber allen anderen bis jetzt zur Ableitung gekommenen Formeln beruht. Beziehen wir dieselbe auf die Sterblichkeit, wie es in den nachfolgenden Erörterungen der Einfachheit halber immer geschehen soll, so lassen sich Einwendungen nur gegen die zu Grunde liegende Annahme über den Verlauf der Sterblichkeit machen, und wir haben zu untersuchen, inwieweit diese Einwendungen beachtlich sind.

Man wird ohne Weiteres zugeben müssen, dass kein Grund für eine sprungweise Aenderung der Sterblichkeit vorhanden ist, wie sie bestehen müsste, wenn die Sterbenswahrscheinlichkeit innerhalb eines Jahres unveränderlich wäre. Die Sterblichkeit wird also mit dem Alter *stetig* wachsen und mithin die Annahme, die unserer Formel zu Grunde liegt, nicht ganz zutreffend sein. Fasst man aber den Verlauf der Sterblichkeit näher in's Auge, so erkennt man leicht, dass sie nur in den höheren Altersjahren, wo die Aus- und Eintrittsbewegungen in den Gesellschaften gewöhnlich nur noch minimale sind, beträchtlich wächst. In den jüngeren Jahren, wo sich hauptsächlich die Zu- und Abgänge vollziehen, ist die Veränderung der Sterblichkeit innerhalb eines Jahres so gering, dass sie *bei den Schwankungen, die sich im gesetzmässigen Eintritte der Ereignisse zeigen*, für uns gar nicht in Betracht kommt. Daher erscheint auch unter gewöhnlichen Verhältnissen die unserer Formel zu Grunde liegende Annahme zulässig.

Finden dagegen in den höheren Altern, wo die Mortalität sehr beträchtlich wächst, noch grössere Ein- und Austrittsbewegungen statt, so erscheint unsere Formel I) nicht mehr genau genug, sie bei genügend umfänglichen Beobachtungen auf erwähnte Lebensalter anwenden zu können, vielmehr ist es in diesem Falle nöthig, die Sterblichkeit auch innerhalb des Beobachtungsjahres als veränderlich aufzufassen.

Nun ist aber klar, dass, wenn die Sterblichkeit wächst, aus gleich langen Beobachtungsstrecken innerhalb eines Jahres keine übereinstimmende Anzahl von Todesfällen bei einer Gesammtheit erwartet werden darf, sondern, dass wahrscheinlich aus einer Strecke höheren Alters mehr Tode hervorgehen werden, als aus einer gleich langen Strecke niederen Alters. Daher ist, streng genommen, der Werth einer Beobachtung nicht proportional ihrer Beobachtungsdauer, sondern proportional der Wahrscheinlichkeit, während der Beobachtung zu sterben.

Innerhalb eines Altersjahres sind drei verschiedene Beobachtungsfälle zu unterscheiden:

1. Die Beobachtung findet statt im Alter von $m+x$ bis $m+1$,
2. „ „ „ „ „ „ „ m „ $m+t$ und
3. „ „ „ „ „ „ „ $m+t$ „ $m+x$.

Die Fälle unter 1. umfassen die Eingetretenen, die bis zum Ende der Beobachtung in der Gesellschaft verbleiben. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein solcher Eingetretener während der Beobachtung stirbt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit s_x, dass ein $(m+x)$jähriger vor Erreichung des Alters $m+1$ mit Tode abgeht. Ist nun weiter die Wahrscheinlichkeit, innerhalb des Alters von m bis $m+1$ zu sterben $=s$, der Werth einer vollen Beobachtung $=1$ und der Werth der abgekürzten Beobachtung des Eingetretenen $=w_1$, so hat man nach dem obigen Satze:

$$w_1 : 1 = s_x : s,$$

woraus

$$w_1 = \frac{s_x}{s} \tag{4}$$

folgt. Der Werth der Beobachtungen aller Eingetretenen, der an Stelle von μb tritt, ist somit:

$$\frac{1}{s} \Sigma s_x. \tag{5}$$

Die Beobachtungsfälle unter 2. beziehen sich auf diejenigen Personen, die bis zum Alter $m+t$ nicht verstorben sind, aber zu dem angegebenen Alter ausser Beobachtung kommen, das heisst, aus der Gesellschaft austreten. Der Werth w_2 einer solchen Beobachtung und der Werth der Beobachtung eines Eintretenden vom Alter $m+t$ bis zum Alter $m+1$ ist aber offenbar gleich einer vollen Jahresbeobachtung, womit sofort

$$w_2 + \frac{s_t}{s} = 1$$

und

6)
$$w_2 = 1 - \frac{s_t}{s}$$

folgt. Für den Werth $\mu' c$ in unserer Formel I) tritt daher

$$c - \frac{1}{s} \Sigma s_t,$$

oder $(1 - \mu')c$ ist zu ersetzen durch

7)
$$\frac{1}{s} \Sigma s_t.$$

Die Beobachtungsfälle der dritten Art umfassen alle diejenigen, die innerhalb des Beobachtungsjahres im Alter $m + x$ eingetreten, aber nicht bis zur Erfüllung des Alters $m + 1$ in der Gesellschaft verblieben, sondern im Alter $m + t$ wieder ausgeschieden sind. Bezeichnen wir den Werth einer solchen Beobachtung mit w_3, so ist

$$1 - \frac{s_x}{s} + w_3 + \frac{s_t}{s} = 1$$

und

8)
$$w_3 = \frac{s_x}{s} - \frac{s_t}{s},$$

weil nach 6) der Werth einer Beobachtung von m bis $m + x$

$$= 1 - \frac{s_x}{s}$$

und der Werth einer Beobachtung von $m + t$ bis $m + 1$ nach 4)

$$= \frac{s_t}{s}$$

ist.

Der Gesammtwerth aller Beobachtungen der dritten Art wird daher durch

9)
$$\frac{1}{s} \Sigma s_x - \frac{1}{s} \Sigma s_t$$

dargestellt, woraus folgt, dass diese Beobachtungsfälle alle doppelt zu rechnen sind, und zwar sind sie einmal unter den Eingetretenen und das andere Mal unter den Ausgetretenen aufzuzählen, wie dies in der Regel geschieht. Einer besonderen Berücksichtigung der unter 3) genannten Beobachtungsfälle in unseren Formeln bedarf es daher nicht.

Führen wir die Ausdrücke unter 5) und 7) in I) ein, so erhalten wir endlich

II)
$$s = \frac{\alpha}{a + \frac{1}{s} \Sigma s_x - \frac{1}{s} \Sigma s_t},$$

wo s_x für jeden Eingetretenen und s_t für jeden Ausgetretenen besonders festzustellen ist und daraus sodann die Summen Σs_x und Σs_t zu bilden sind.

Der soeben abgeleiteten Formel liegt weder über die Vertheilung der Ein- und Ausgetretenen, noch über den Verlauf der Sterblichkeit irgend welche willkürliche Annahme zu Grunde; sie besteht in aller Strenge und hat ganz allgemeine Giltigkeit. Freilich setzt sie voraus, dass das, was man sucht — die Function der Sterbenswahrscheinlichkeiten — schon bekannt ist, was aber bei allen strengeren Formeln, die bis jetzt abgeleitet worden sind, auch der Fall ist. Unsere Formel hat jedoch vor den letzteren den sehr beachtlichen Vorzug, dass sie unabhängig von dem Verlaufe der Ein- und Austrittsbewegung ist.

Die Anwendung der Formel II) wird nur dergestalt erfolgen können, dass aus Formel I) zunächst ein erster Näherungswerth für s ermittelt wird, woraus sodann unter Zugrundelegung irgend welcher Hypothese über den Verlauf der Mortalitätscurve sich s_x und s_t bestimmen lassen, mit deren Hilfe weiter nach Formel II) eine zweite Näherung erzielt wird.

Bezeichnet man allgemein mit y_u die Anzahl der Lebenden vom Alter u, so ist die Wahrscheinlichkeit s_x, im Alter von $m+x$ bis $m+1$ zu sterben, für den $(m+x)$jährigen

$$s_x = \frac{y_{m+x} - y_{m+1}}{y_{m+x}} = 1 - \frac{y_{m+1}}{y_{m+x}}.$$

Verläuft die Mortalitätscurve innerhalb der einzelnen Jahre geradlinig, so ist

$$10)\qquad y_{m+x} = y_m - (y_m - y_{m+1})x,$$

und, wenn mit l die Lebenswahrscheinlichkeit eines $m$jährigen bezeichnet wird,

$$11)\qquad \begin{cases} s_x = 1 - \dfrac{y_{m+1}}{y_m - (y_m - y_{m+1})x} \\[2ex] \quad\; = 1 - \dfrac{l}{1 - s \,.\, x}. \end{cases}$$

Führt man diesen Ausdruck in II) ein, so folgt, wenn in dem unendlich kleinen Altersintervall von $m+x$ bis $m+x+dx$

$\varphi(x)\,dx$ Personen

eintreten und

$\psi(x)\,dx$ Personen

austreten,

$$12)\qquad s = \frac{a}{a + \frac{1}{s}\int\limits_0^1 \varphi(x)\left[1 - \frac{l}{1 - s x}\right]dx - \frac{1}{s}\int\limits_0^1 \psi(t)\left[1 - \frac{l}{1 - s t}\right]dt}.$$

Vertheilt sich der Zuwachs und Abgang gleichmässig über das Beobachtungsgebiet, so dass also in dem unendlich kleinen Altersintervall von $m+x$ bis $m+x+dx$

eintreten und $b\,dx$ Personen

austreten, so ist $c\,dx$ Personen

$$\frac{1}{s}\int_0^1 \varphi(x)\left[1-\frac{l}{1-s\,.\,x}\right]dx=\frac{b}{s}\int_0^1\left[1-\frac{l}{1-s\,.\,x}\right]dx$$
$$=\frac{b}{s}\left[1+\frac{l}{s}\log n\,.\,l\right]$$

und

$$\frac{1}{s}\int_0^1 \psi(t)\left[1-\frac{l}{1-s\,.\,t}\right]dt=\frac{c}{s}\int_0^1\left[1-\frac{l}{1-s\,.\,t}\right]dt$$
$$=\frac{c}{s}\left[1+\frac{l}{s}\log n\,.\,l\right].$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in 12) folgt sodann die Wittstein'sche Formel

13) $$s=\frac{\alpha}{a+\frac{b}{s}\left[1+\frac{l}{s}\log n\,.\,l\right]-\frac{c}{s}\left[1+\frac{l}{s}\log n\,.\,l\right]}.$$

Vertheilt sich hingegen der Zu- und Abgang mit Rücksicht auf die Ein- und Austrittsalter proportional der Mortalitätscurve, so wird derselbe innerhalb der unendlich kleinen Altersstrecke von $m+x$ bis $m+x+dx$

14) $$\beta\, y_{m+x}\,dx$$

und beziehentlich von $m+t$ bis $m+t+dt$

15) $$\gamma\, y_{m+t}\,dt$$

sein, wo β und γ sich aus den Gleichungen

16) $$b=\beta\int_0^1 y_{m+x}\,dx$$

und

17) $$c=\gamma\int_0^1 y_{m+t}\,dt$$

berechnen. Da aber $s_x=1-\frac{y_{m+1}}{y_{m+x}}$, so geht mit den Ausdrücken 14) und 15) $\frac{1}{s}\Sigma s_x$ in

$$\frac{\beta}{s}\int_0^1[y_{m+x}-y_{m+1}]\,dx$$

und $\frac{1}{s}\Sigma s_t$ in

$$\frac{\gamma}{s}\int_0^1 [y_{m+t} - y_{m+1}]\, d\,t$$

über. Wird nun hierin für y_{m+x} und y_{m+t} der Werth aus 10) substituirt, so folgt:

$$\frac{1}{s}\,\Sigma s_x = \frac{\beta}{s}\int_0^1 [(y_m - y_{m+1}) - (y_m - y_{m+1})\,x]\,d\,x = \frac{\beta}{s}\,\frac{y_m - y_{m+1}}{2},$$

$$\frac{1}{s}\,\Sigma\, s_t = \frac{\gamma}{s}\int_0^1 [(y_m - y_{m+1}) - (y_m - y_{m+1})\,t]\,d\,t = \frac{\gamma}{s}\,\frac{y_m - y_{m+1}}{2}.$$

Da aber nach 16) und 17)

$$\beta = \frac{2\,b}{y_m + y_{m+1}},$$

$$\gamma = \frac{2\,c}{y_m + y_{m+1}},$$

so ist auch

18) $$\frac{1}{s}\,\Sigma\, s_x = \frac{b}{s}\,\frac{y_m - y_{m+1}}{y_m + y_{m+1}} = \frac{b}{1+l},$$

19) $$\frac{1}{s}\,\Sigma\, s_t = \frac{c}{s}\,\frac{y_m - y_{m+1}}{y_m + y_{m+1}} = \frac{c}{1+l},$$

und mithin, wenn diese Ausdrücke in II) eingeführt werden,

20) $$s = \frac{\alpha}{a + \dfrac{b-c}{1+l}}.$$

Diese Relation hat Zeuner zuerst angegeben, und sie verdient, wie später noch erörtert werden soll, entschieden den Vorzug vor Wittstein's Formel.

Die Heym'sche Formel darf, abgesehen von dem bei ihrer Ableitung untergelaufenen Irrthum, als ein specieller Fall der Wittstein'schen Formel aufgefasst werden, wie Zeuner in seinem vorzüglichen Werke „Abhandlungen aus der mathematischen Statistik" ausführlich dargelegt hat. Heym's Formel wird auch kaum jemals Anwendung gefunden haben, da sie bei ihrer geringen Zuverlässigkeit auf viel zu umständliche Rechnungen führt. Eine nochmalige Ableitung dieser Formel erscheint daher hier überflüssig.

Die Anwendbarkeit der älteren Formeln wird, wie im Eingange bereits erwähnt, empfindlich beeinträchtigt durch die ihnen zu Grunde liegenden Hypothesen über die Ein- und Austrittsbewegung. Im strengen Sinne wird diese Bewegung nirgends eine stetige sein, wie bei der Ableitung aller dieser Formeln angenommen worden ist. Ja, man darf getrost annehmen, dass bei den meisten Gesammtheiten die Ein- und Austritte innerhalb des Beobachtungsgebietes sehr unregelmässig verlaufen und zwar so, dass sie zu bestimmten Zeitabschnitten sich ganz besonders anhäufen, zu anderen wieder Null werden, und dass diese Maxima und Minima für den Eintritt auf andere Zeitpunkte fallen, als für den Austritt. Man vergegenwärtige sich nur, dass bei vielen Gesellschaften die Erneuerung des Personals nur einmal jährlich geschieht, und zwar zu Anfang des Frühjahres oder mit Eintritt des Winters, je nachdem der Geschäftsbetrieb in der einen oder der anderen Jahreszeit ein besonders lebhafter ist, während wieder bei anderen Gesellschaften die Zugänge von den wechselnden Conjuncturen abhängen und jeder Stetigkeit entbehren. Eine gleiche Verschiedenheit lässt sich für die Abgänge beobachten. In dem einen Falle finden sie vorzugsweise im Frühjahre, in dem anderen im Herbste statt, und wieder in anderen hängen sie mit der Ableistung der Militärpflicht oder plötzlich eingetretenen Geschäftsstockungen zusammen.

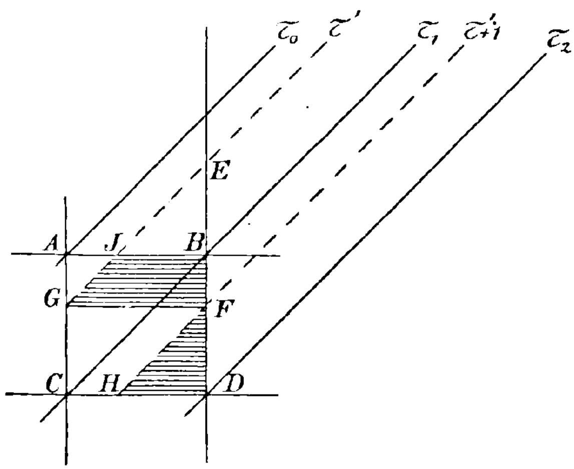
Sehr wichtig bei Anwendung der älteren Formeln sind ferner die zusammen gefassten Altersklassen, mit denen operirt wird. Geschieht nämlich die Ermittelung der Sterblichkeit streng nach den Sätzen der mathematischen Statistik für genau Gleichalterige, so ist die Beobachtungsdauer für die Eingetretenen gleich der Altersstrecke, die vom Eintritte noch bis zur Erfüllung des angetretenen Altersjahres zu verleben ist, also von $m+x$ bis $m+1$, während die Ausgetretenen immer einer Beobachtung unterliegen, die vom Austritte zurück bis zu dem Zeitpunkte reicht, wo das letzte Altersjahr erfüllt worden ist, nämlich in fortschreitender Richtung von m bis $m+t$. Die Beobachtungsdauer ist also hier nicht von der Ein- und Austritts*zeit*, sondern von dem Ein- und Austritts*alter* abhängig. Nun werden aber die zur Zeit τ' ein- und ausgetretenen Personen, wenn ihre Anzahl einigermassen beträchtlich ist, nicht von genau gleichem Alter sein, vielmehr sich auf der Altersstrecke nach rechts und links vertheilen und das um so gesetzmässiger, je grösser ihre Anzahl ist. Findet nun im nächsten Jahre — also zur Zeit $\tau'+1$ — wie dies ja häufig der Fall ist, eine ähnliche Aus- und Eintrittsbewegung statt, so *führt dies auf eine Vertheilung der Aus- und Eingetretenen im Beobachtungsgebiet, die sehr wahrscheinlich proportional der Dichte der Bevölkerung sein und somit sehr nahe der Zeuner'schen Annahme entsprechen wird.*

Mit Hilfe des Grundrisses der von *Zeuner* a. a. O. angegebenen Darstellungsweise der Lebenden und Verstorbenen lässt sich die Richtigkeit dieses Satzes leicht nachweisen. Ist in beistehender Figur 1 $AB = CD$ die einjährige Altersstrecke und $AC = BD$ die einjährige Geburtenstrecke, so wird die Beobachtungsdauer der zur Zeit τ' Eingetretenen, die für diese Alters- und Geburtenstrecke in Frage kommen, durch die schraffirte Fläche $JGFB$ und die Beobachtungsdauer der für diese Alters- und Geburtenstrecke ebenfalls in Frage kommenden und zur Zeit $\tau' + 1$ Eintretenden durch FHD dargestellt. Nun ist aber, da nach Voraussetzung

$$EF = BD$$

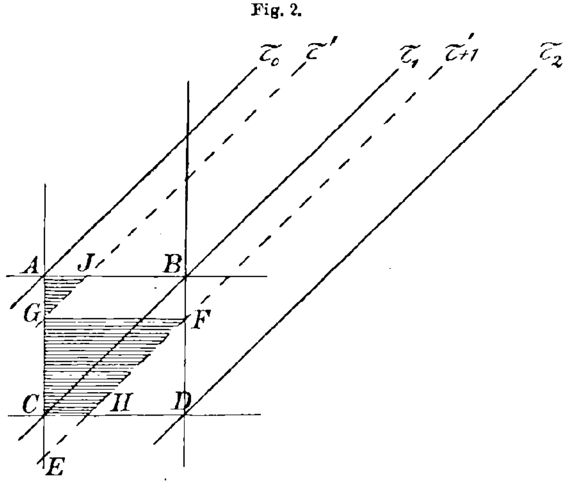
u. $\tau_0 \parallel \tau' \parallel \tau_1 \parallel (\tau' + 1) \parallel \tau_2$, $\Delta FHD = \Delta EJB$ und mithin auch die Flächen $JBFG + FHD = \Delta ABCD$. Die zur Zeit τ' und $\tau' + 1$ Eingetretenen stellen sich also für die Beobachtung so dar, als ob sie im Laufe des Beobachtungsjahres nach und nach im Verhältniss zur Dichte der Bevölkerung eingetreten wären.

Fig. 1.



Für die Ausgetretenen gilt dasselbe, nur ist das für solche entstehende Bild umgekehrt. Die Beobachtungsdauer der zur Zeit τ' und $\tau' + 1$ Ausgetretenen wird durch die Flächen AJG und $GFHC$ der beistehenden Figur 2 ausgedrückt, die zusammen einen Flächeninhalt gleich dem ΔABC haben.

Fig. 2.



In den Fällen, wo die Ein- und Austrittszeiten innerhalb je zwei aufeinander folgender Jahre verschieden sind, oder die Ein- und Ausgetretenen in den einzelnen

Jahren der Anzahl nach wesentlich von einander abweichen, kann auch bei Einführung von Gleichalterigen nach den einschlagenden Sätzen der mathematischen Statistik die Ermittelung der Beobachtungsdauer, bez. die dieser Beobachtungsdauer entsprechende Sterblichkeit nicht entbehrt werden. Es empfiehlt sich, in diesen Fällen die Zu- und Abgänge nach den Ein- und Austrittsaltern zu ordnen und nach Zehnteljahren fortzuschreiten. Bezeichnen wir allgemein die im Alter von $m+\frac{x}{10}$ bis $m+\frac{x}{10}+\frac{1}{10}$ Eintretenden mit b_x und die in diesem Alter Austretenden mit c_x, so ist mit hinreichender Genauigkeit:

$$\text{21)}\quad \left\{\begin{aligned} \mu b &= \frac{19}{20} b_0 + \frac{17}{20} b_1 + \frac{15}{20} b_2 + \ldots + \frac{3}{20} b_8 + \frac{1}{20} b_9 \\ &= \frac{1}{20} [b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_8 + b_9 \\ &\qquad 2(b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_8) \\ &\qquad 2(b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_7) \\ &\qquad \vdots \\ &\qquad 2 b_0]. \end{aligned}\right.$$

Hieraus folgt aber:

$$\mu b = \frac{1}{10}\left[\sum_0^9 b_x + \sum_0^8 b_x + \sum_0^7 b_x + \ldots + \sum_0^1 b_x + \sum_0^0 b_x\right] - \frac{b}{20}$$

$$= \frac{1}{10}\sum_{x=0}^{x=9}\sum_0^x b_x - \frac{1}{20} b.$$

Ferner ist

$$\mu' c = \frac{1}{20} c_0 + \frac{3}{20} c_1 + \frac{5}{20} c_2 + \ldots + \frac{17}{20} c_8 + \frac{19}{20} c_9$$

und, wenn $c_0 - c_0$, $c_1 - c_1$, $c_2 - c_2, \ldots c_8 - c_8$, $c_9 - c_9$ hinzugefügt wird, auch

$$\mu' c = c - \left[\frac{19}{20} c_0 + \frac{17}{20} c_1 + \frac{15}{20} c_2 + \ldots + \frac{3}{20} c_8 + \frac{1}{20} c_9\right].$$

Damit ist aber der Klammerausdruck auf die Form unter 21) zurückgeführt und wir können ohne Weiteres

$$\mu' c = c - \frac{1}{10}\sum_{x=0}^{x=9}\sum_0^x c_x + \frac{1}{20} c$$

anschreiben.

Gestatten die Verhältnisse die Anwendung der Formel I), so ist:

$$\text{22)}\quad s = \frac{\alpha}{a + \frac{1}{10}\sum_{x=0}^{x=9}\sum_0^x b_x - \frac{1}{10}\sum_{x=0}^{x=9}\sum_0^x c_x - \frac{1}{20}(b - c)}.$$

Handelt es sich um die Ermittelung der Sterblichkeit s' von activen Personen, so sind neben den freiwillig Ein- und Ausgetretenen b und c noch die Zugänge r an Reactivirten und die Abgänge i durch eingetretene Invalidität zu berücksichtigen. Nun darf aber die Vertheilung dieser Zu- und Abgänge im Beobachtungsjahre als gleichmässig angenommen werden, so dass für die Fälle r, als auch für die Fälle i der Werth $\mu = \frac{1}{2}$ gesetzt werden kann. Damit ergiebt sich aber

$$23) \quad s' = \frac{\alpha}{a + \frac{1}{10}\sum_{x=0}^{x=9} \sum_{0}^{x} b_x - \frac{1}{10}\sum_{x=0}^{x=9}\sum_{0}^{x} c_x - \frac{1}{20}(b-c) + \frac{1}{2}(r-i)}.$$

Verlangt die Untersuchung die Anwendung der Formel II), so wird in den meisten Fällen mit hinreichender Genauigkeit an die in zehn Theile zerlegte Altersstrecke angeschlossen werden können. Da aber nach 11)

$$s_x = 1 - \frac{l}{1 - \frac{x}{10}s - \frac{1}{20}s},$$

wenn x die Werthe 0, 1, 2, . . . 9 durchläuft und die Sterblichkeit in der Mitte einer solchen Altersstrecke als die durchschnittliche Sterblichkeit dieser Strecke angenommen wird, so geht Formel II) in

$$24) \quad s = \frac{\alpha}{a + \frac{1}{s}\sum_{x=0}^{x=9} b_x\left(1 - \frac{l}{1 - \frac{1+2x}{20}s}\right) - \frac{1}{s}\sum_{x=0}^{x=9} c_x\left(1 - \frac{l}{1 - \frac{1+2x}{20}s}\right)}.$$

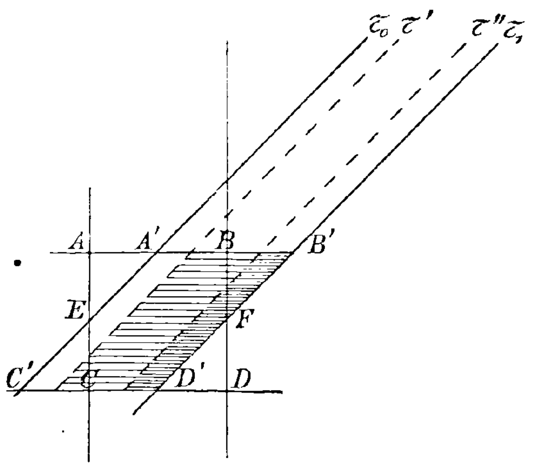
über. Bezeichnen wir die im Alter von $m + \frac{x}{10}$ bis $m + \frac{x+1}{10}$ Reactivirten mit r_x und die innerhalb derselben Alter in Invalidität Getretenen mit i_x, so ist auch

$$25) \quad s' = \frac{\alpha}{a + \frac{1}{s'}\sum_{x=0}^{x=9}(b_x + r_x)\left(1 - \frac{l}{1 - \frac{1+2x}{20}s'}\right) - \frac{1}{s'}\sum_{x=0}^{x=9}(c_x + i_x)\left(1 - \frac{l}{1 - \frac{1+2x}{20}s'}\right)}.$$

Die letzten zwei Formeln sollten Anwendung finden, wenn in den höheren Lebensaltern beträchtliche Ein- und Austrittsbewegungen stattfinden. Leider ist aber nur ganz selten zur Ermittelung der Sterblichkeit der höheren Altersclassen ein so umfängliches Beobachtungsmaterial vorhanden, dass von der Anwendung der Formeln 24) und 25) ein wirklicher Nutzen erwartet werden kann. Die Beobachtungsfälle nehmen mit wachsendem Alter mehr und mehr ab und die wahrscheinlichen Fehler, die die daraus abgeleiteten Sterbenswahrscheinlichkeiten besitzen, sehr rasch zu, so dass eine Correctur dieser Werthe nach 24) oder 25) selten angebracht ist. Was nützt eine peinliche Berücksichtigung der wachsenden Sterblichkeit, wenn es der Berechnung an der Erfüllung der vornehmsten Bedingung, dass sie sich auf ein umfassendes Beobachtungsmaterial stützt, fehlt?

Geschieht die Ermittelung der Sterblichkeit nicht für genau Gleichalterige, wie dies sehr oft der Fall ist, sondern für Personen von $m - \frac{1}{2}$ bis $m + \frac{1}{2}$ Jahren, die in eine Altersclasse gebracht werden, so fällt die Beobachtungsstrecke der Ein- und Ausgetretenen nicht, wie vorstehend, mit der Altersstrecke von $m + x$ bis $m + 1$, bez. m bis $m + t$ zusammen, sondern mit der Zeitstrecke, die vom Eintritte τ' bis zum Ende des Beobachtungs-(Kalender-)Jahres τ_1, bez. vom Anfange des Beobachtungsjahres τ_0 bis zum Austritte τ''' vergangen ist. Ist in beistehender Figur 3 $AB = CD$ wieder die einjährige Altersstrecke von m bis $m + 1$ und $AC = BD$ die zugehörige einjährige Geburtenstrecke, so wird die beobachtete Gesammtheit, die wir zur Unterscheidung von den Gleichalterigen gemischtalterig nennen wollen, durch das Viereck $A'B'C'D'$ in ihrer zeitlichen Ausdehnung begrenzt. Die in dem Dreieck ECC' auftretende Gesammtheit ist am Anfange der Beobachtung jünger als m, während die in dem Dreiecke $BB'F$ auftretende Gesammtheit am Ende der Beobachtung älter als $m + 1$ Jahre ist. Bei einer gleichmässigen Vertheilung der beobachteten Personen auf die Geburtenstrecke AC sind indess sämmtliche Personen am Anfange des Beobachtungsjahres durchschnittlich m und am Ende des Beobachtungsjahres sehr nahe durchschnittlich $m + 1$ Jahre alt.

Fig. 3.

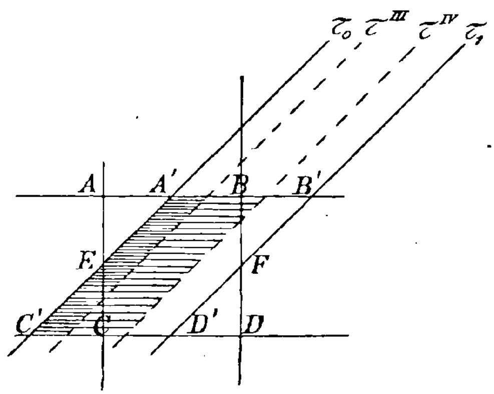


Die zur Zeit τ' eingetretenen Personen werden sämmtlich von τ' bis τ_1 und die zur Zeit τ'' eingetretenen Personen sämmtlich von τ'' bis τ_1 beobachtet, wie durch die schraffirten Flächen in unserer Figur zur Anschauung gelangt. Man erkennt hieraus leicht, dass bezüglich der Beobachtungsdauer der Eingetretenen ein wesentlicher Unterschied zwischen gleichalterigen und gemischtalterigen Gesammtheiten besteht, und dass namentlich bei den letzteren ein Zuwachs, der sich jährlich nur einmal vollzieht oder in gewissen Perioden wiederholt, nicht als ein solcher angesprochen werden darf, der sich gleichmässig auf die Beobachtungsstrecke vertheilt. Eine gleichmässige Vertheilung der Eingetretenen im Beobachtungsgebiet findet vielmehr nur dann statt, wenn in gleichen, aber beliebig kleinen Zeitabschnitten immer ein gleich grosser Zugang stattfindet.

Ganz das Gleiche gilt für die Ausgetretenen, wie aus der nachstehenden Figur 4 folgt. Die Abgänge zur Zeit τ''' haben eine Beobachtungsdauer gleich $\tau_0\tau'''$, während die Abgänge, die sich zur Zeit τ^{IV} vollziehen, eine solche von $\tau_0\tau^{IV}$ haben. Zwischen den Figuren 3 und 4 besteht nur der Unterschied, dass die schraffirten Flächen auf entgegengesetzten Seiten liegen.

Ueberblickt man die Ergebnisse der vorstehenden Erörterungen, so folgt leicht, dass bei gemischtalterigen Gesammtheiten der Zu- und Abgang im Gegensatze zu Gleichalterigen nur selten als gleichmässig sich auf die Beobachtungsstrecke vertheilend angenommen werden kann, und dass dort, wo man mit solchen Gesammtheiten rechnet, den Ein- und Ausgetretenen eine ganz besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden muss.

Fig. 4.



Behm, der nur mit gemischtalterigen Gesammtheiten rechnet, hat in seinem Nachtrage für 1877 zur Statistik der Mortalitäts-, Invaliditäts- und Morbilitätsverhältnisse bei dem Beamtenpersonal der deutschen Eisenbahnverwaltungen eine Formel für discontinuirliche Zu- und Abgänge entwickelt, aber er behält immer noch für gleiche Zeitabschnitte eine gleich grosse Anzahl von Ein- und Ausgetretenen bei. Es kann dies ja für die Verhältnisse beim Eisenbahnwesen zutreffend sein; allein im Allgemeinen wird, wie wir bereits früher ausgeführt haben, eine annähernd gleiche Vertheilung des Zu- und Abgangs nur selten stattfinden.

Eine Formel, die allgemein zur Berechnung der Sterbenswahrscheinlichkeiten für gemischtalterige Gesammtheiten genügen wird, erhält man, wenn die Ein- und Austritte Monat für Monat Berücksichtigung finden. Wir nehmen an, es treten im Januar b'_1, im Februar b'_2, im März b'_3 u. s. w. Personen in die Gesammtheit ein, dagegen c'_1 im Januar, c'_2 im Februar, c'_3 im März u. s. w. aus derselben aus, so ist

$$26)\quad \left\{\begin{aligned} \mu b &= \frac{23}{24} b'_1 + \frac{21}{24} b'_2 + \frac{19}{24} b'_3 + \ldots + \frac{3}{24} b'_{11} + \frac{1}{24} b'_{12} \\ &= \frac{1}{24}\Big[(b'_1 + b'_2 + b'_3 + \ldots + b'_{11} + b'_{12}) \\ &\qquad 2(b'_1 + b'_2 + b'_3 + \ldots + b'_{11}) \\ &\qquad 2(b'_1 + b'_2 + b'_3 + \ldots + b'_{10}) \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad 2b'_1\Big] \\ &= \frac{1}{12}\left[\sum_1^{12} b'_x + \sum_1^{11} b'_x + \sum_1^{10} b'_x + \ldots + \sum_1^{1} b'_x\right] - \frac{b}{24}, \end{aligned}\right.$$

woraus folgt:

$$\mu b = \frac{1}{12}\sum_{x=1}^{x=12}\sum_1^x b'_x - \frac{1}{24} b.$$

Ferner ist

$$27)\qquad \mu' c = \frac{1}{24} c'_1 + \frac{3}{24} c'_2 + \frac{5}{24} c'_3 + \ldots + \frac{21}{24} c'_{11} + \frac{23}{24} c'_{12}.$$

Fügt man diesem Ausdrucke $c'_1 - c'_1,\ c'_2 - c'_2, \ldots c'_{12} - c'_{12}$ hinzu, so erhält man:

$$\mu' c = c - \left[\frac{23}{24} c'_1 + \frac{21}{24} c'_2 + \frac{19}{24} c'_3 + \ldots + \frac{3}{24} c'_{11} + \frac{1}{24} c'_{12}\right].$$

Nimmt man für den Klammerausdruck den Werth nach 26), so folgt weiter:

$$\mu' c = c - \frac{1}{12}\sum_{x=1}^{x=12}\sum_1^x c'_x + \frac{1}{24} c$$

und daher auch

$$c(1 - \mu') = \frac{1}{12}\sum_{x=1}^{x=12}\sum_1^x c'_x - \frac{1}{24} c,$$

so dass man endlich erhält

$$28)\qquad s = \frac{\alpha}{a + \frac{1}{12}\sum_{x=1}^{x=12}\sum_1^x b'_x - \frac{1}{12}\sum_{x=1}^{x=12}\sum_1^x c'_x - \frac{1}{24}(b - c)}.$$

Die Sterblichkeit der Activen ergiebt sich damit unter Beachtung der früheren Darlegungen:

$$29)\quad s' = \frac{\alpha}{a + \frac{1}{12}\sum_{x=1}^{x=12}\sum_1^x b'_x - \frac{1}{12}\sum_{x=1}^{x=12}\sum_1^x c'_x - \frac{1}{24}(b - c) + \frac{1}{2}(r - i)}.$$

Findet bei gemischtalterigen Gesammtheiten der Zu- und Abgang in der Mitte des Beobachtungsjahres oder immer in gleicher Stärke und in gleichem Abstande vor und nach der Jahresmitte statt, so ist leicht einzusehen, dass die Beobachtungsdauer im Durchschnitt sowohl für die Ein-, als auch für die Ausgetretenen $= \frac{1}{2}$ ist. Damit lassen sich aber sofort die Formeln

30) $$s = \frac{\alpha}{a + \frac{1}{2}(b - c)}$$

und

31) $$s' = \frac{\alpha}{a + \frac{1}{2}(b + r - c - i)}$$

anschreiben, die bis jetzt ausschliesslich Anwendung gefunden haben. Es ist wohl überflüssig, noch besonders hervorzuheben, dass in der ihnen zu Grunde liegenden zweiten Annahme zugleich der Fall der gleichmässigen Vertheilung der Zu- und Abgänge mit inbegriffen ist.

Die hier für die gemischtalterigen Gesammtheiten abgeleiteten Formeln 28) bis 31) nehmen auf die Veränderung, welche die Sterblichkeit im Laufe des Beobachtungsjahres erfährt, keine Rücksicht. Im strengen Sinne lässt sich auch keine Formel ableiten, in der dieser Veränderung vollkommen Rechnung getragen werden könnte, dafern es sich nicht um Gleichalterige, sondern um Gemischtalterige handelt, weil sodann in der Gesammtheit nicht eine einzige, sondern eine Anzahl verschiedener Sterblichkeiten herrschen, deren durchschnittlichen Werth wir erfahren. Freilich stünde Nichts im Wege, diese durchschnittliche Sterblichkeit in ähnlicher Weise zu berichtigen, wie es mit der Sterblichkeit der Gleichalterigen durch die Formeln 24) und 25) geschieht; allein einen wirklichen Nutzen würde eine solche Berichtigung nur selten haben, da die ungleiche Dichtigkeit, die innerhalb der Gesammtheit für die verschiedenen Geburtszeiten vermuthet werden muss, die Quelle für einen grösseren Fehler abgiebt, als der ist, welcher aus der Annahme einer constanten Sterblichkeit innerhalb des Beobachtungsjahres entsteht.

Wir schliessen gegenwärtige Abhandlung mit einer Anwendung der Formel 29), indem wir an einem numerischen Beispiele den Einfluss, den die Zu- und Abgänge auf den Werth der Sterbenswahrscheinlichkeit auszuüben im Stande sind, zeigen. Bei einer Gesammtheit Activer, die am Anfange der Beobachtung $24^1/_2$ bis $25^1/_2$ Jahre alt war, und aus 5502 Personen bestand, sind während des Beobachtungsjahres vom 1. Januar bis 31. December

36 als Active verstorben,
20 invalid geworden,
5 als Reactivirte eingetreten

und endlich

im Monat	freiwillig beigetreten	freiwillig ausgetreten	im Monat	freiwillig beigetreten	freiwillig ausgetreten
Januar	315	12	Juli	3	250
Februar	510	16	August	15	122
März	120	220	September . .	108	5
April	80	755	October	510	30
Mai	12	905	November . .	806	12
Juni	—	310	December . .	670	8.

In diesem Falle ist aber:

	$\sum_1^x b'_x =$		$\sum_1^x c'_x =$
$b'_1 = 315$	315	$c'_1 = 12$	12
$b'_2 = 510$	825	$c'_2 = 16$	28
$b'_3 = 120$	945	$c'_3 = 220$	248
$b'_4 = 80$	1025	$c'_4 = 755$	1003
$b'_5 = 12$	1037	$c'_5 = 905$	1908
$b'_6 = 0$	1037	$c'_6 = 310$	2218
$b'_7 = 3$	1040	$c'_7 = 250$	2468
$b'_8 = 15$	1055	$c'_8 = 122$	2590
$b'_9 = 108$	1163	$c'_9 = 5$	2595
$b'_{10} = 510$	1673	$c'_{10} = 30$	2625
$b'_{11} = 806$	2479	$c'_{11} = 12$	2637
$b'_{12} = 670$	3149	$c'_{12} = 8$	2645

$$b = 3149 \quad \sum_{x=1}^{x=12} \sum_1^x b'_x = 15743 \qquad\qquad c = 2645 \quad \sum_{x=1}^{x=12} \sum_1^x c'_x = 20977.$$

Damit folgt:

$$s' = \frac{36}{5502 + \frac{15743}{12} - \frac{20977}{12} - \frac{3149-2645}{24} + \frac{5-20}{2}} = \frac{36}{5037\frac{1}{3}} = 0{,}00715.$$

Hätte man die Sterblichkeit in vorliegendem Falle nach der Wittstein'schen Formel 31) berechnet, so würde als Resultat

$$s' = \frac{36}{5746{,}5} = 0{,}00626$$

gefunden worden sein. Die Abweichung ist, wie man sieht, sehr beträchtlich und rechtfertigt die etwas umständliche Ermittelung vollkommen. Dabei ist keineswegs die Aus- und Eintrittsbewegung, die unser Beispiel zeigt, mit Rücksicht auf die ältere Berechnungsweise besonders ungünstig; Grenzwerthe erhält man vielmehr, wenn man einmal die Eintritte am 1. Januar und die Austritte am 31. December annimmt, das andere Mal hingegen den Zugang am letzten December und den Abgang am ersten Januar sich vollziehen lässt. Im ersteren Falle wird

$$s' = 0{,}00416$$

gefunden, während im letzteren Falle

$$s' = 0{,}01263$$

ist. Diese Zahlen reden eine zu deutliche Sprache, als dass es noch eines besonderen Hinweises auf den Werth einer angemessenen Berücksichtigung der Zu- und Abgänge bedürfe.

X.

Ueber bedingt periodische Bewegungen eines materiellen Punktes auf Oberflächen zweiter Ordnung mit besonderer Berücksichtigung der Grenzfälle.

Von

Otto Pund.

Schluss.

Dritter Abschnitt.

Die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer centrischen Oberfläche zweiter Ordnung unter Einwirkung einer vom Mittelpunkte ausgehenden der Entfernung proportionalen Kraft.

§ 1.

Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

Um das im ersten Abschnitte angegebene Problem der Bewegung eines Punktes auf einem Ellipsoid weiter zu behandeln, haben wir uns der elliptischen Coordinaten zu bedienen und setzen folgende Definitionen und Bezeichnungen fest. Die Constanten des Coordinatensystems seien α, β, γ, und es sei $\alpha > \beta > \gamma$. Sind dann x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes in Bezug auf ein gegebenes Cartesisches Coordinatensystem, so sollen die elliptischen Coordinaten λ, μ, ν als die, wie bekannt, reellen und den Ungleichungen

$$1)\qquad \alpha > \nu > \beta > \mu > \gamma > \lambda > -\infty$$

genügenden Wurzeln der folgenden cubischen Gleichung in t

$$2)\qquad \frac{x^2}{\alpha - t} + \frac{y^2}{\beta - t} + \frac{z^2}{\gamma - t} = 1$$

definirt sein. Nehmen wir nun an, dass α, β, γ so gewählt sind, dass mit Bezug auf die Gleichung des im ersten Abschnitte erwähnten Ellipsoides

$$3)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$a^2 - b^2 = \alpha - \beta$, $a^2 - c^2 = \alpha - \gamma$ und

$$4)\qquad a^2 = \alpha - \lambda_0, \quad b^2 = \beta - \lambda_0, \quad c^2 = \gamma - \lambda_0$$

ist, so ist die Gleichung des Ellipsoides in elliptischen Coordinaten $\lambda = \lambda_0$, und wir haben dann

$$
5)\begin{cases}
x^2+y^2+z^2=\alpha+\beta+\gamma-\lambda_0-\mu-\nu,\\
\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}=\dfrac{(\mu-\lambda_0)(\nu-\lambda_0)}{(\alpha-\lambda_0)(\beta-\lambda_0)(\gamma-\lambda_0)},\\
4(dx^2+dy^2+dz^2)=\dfrac{(\lambda_0-\mu)(\nu-\mu)}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}d\mu^2+\dfrac{(\lambda_0-\nu)(\mu-\nu)}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}d\nu^2,\\
4\left(\dfrac{dx^2}{a^2}+\dfrac{dy^2}{b^2}+\dfrac{dz^2}{c^2}\right)=\dfrac{\mu-\nu}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}d\mu^2+\dfrac{\nu-\mu}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}d\nu^2.
\end{cases}
$$

In Folge dieser Gleichungen gehen nun die Integrale Ib) und IIb) des ersten Abschnittes über in

$$
6)\begin{cases}
\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\nu)}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}\mu'^2+\dfrac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu)}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}\nu'^2\right]\\
\qquad=g(\alpha+\beta+\gamma-\lambda_0-\mu-\nu)+2h,\\
\dfrac{1}{4}(\mu-\lambda_0)(\nu-\lambda_0)\left[\dfrac{\mu-\nu}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}\mu'^2+\dfrac{\nu-\mu}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}\nu'^2\right]\\
\qquad=-g(\mu-\lambda_0)(\nu-\lambda_0)+k(\alpha-\lambda_0)(\beta-\lambda_0)(\gamma-\lambda_0)
\end{cases}
$$

und es ergeben sich die folgenden beiden Bewegungsgleichungen:

$$
7)\begin{cases}
(\mu-\lambda_0)(\nu-\mu)^2\mu'^2=-4g(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)(\mu^2+2\delta\mu+\varepsilon),\\
(\nu-\lambda_0)(\mu-\nu)^2\nu'^2=-4g(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)(\nu^2+2\delta\nu+\varepsilon),
\end{cases}
$$

wo gesetzt ist:

$$
8)\qquad\begin{cases}
2\delta=-\dfrac{2h}{g}-\alpha-\beta-\gamma+\lambda_0,\\
\varepsilon=\dfrac{k}{g}(\alpha-\lambda_0)(\beta-\lambda_0)(\gamma-\lambda_0)-2\delta\lambda_0-\lambda_0^2.
\end{cases}
$$

Vorausgesetzt nun, dass die Bewegung nicht auf einer Krümmungslinie vor sich geht ($\mu'^2 \gtrless 0$, $\nu'^2 \gtrless 0$), folgt aus den Gleichungen 7) in Verbindung mit den Ungleichungen 1) leicht, dass $\mu^2+2\delta\mu+\varepsilon>0$, dagegen $\nu^2+2\delta\nu+\varepsilon<0$ ist. Beachtet man nun noch, dass für hinreichend grosse Werthe von t $t^2+2\delta t+\varepsilon>0$ ist, so erkennt man, dass die Gleichung

$$t^2+2\delta t+\varepsilon$$

zwei reelle Wurzeln hat, die, mit ϱ die grössere und σ die kleinere bezeichnet, den Ungleichungen

$$9)\qquad \varrho>\nu>\sigma>\mu$$

genügen. Mit den Constanten h und k sind sie durch die Gleichungen

$$
10)\qquad\begin{cases}
\dfrac{2h}{g}=-\alpha-\beta-\gamma+\lambda_0+\varrho+\sigma,\\
\dfrac{k}{g}=\dfrac{(\varrho-\lambda_0)(\sigma-\lambda_0)}{(\alpha-\lambda_0)(\beta-\lambda_0)(\gamma-\lambda_0)}
\end{cases}
$$

verbunden, letztere sind also auch immer reell, und man erhält demnach alle Arten der Bewegungen, welche nicht auf Krümmungslinien erfolgen, wenn man ϱ und σ alle möglichen den Ungleichungen

$$11) \qquad \varrho > \sigma, \quad \varrho > \beta, \quad \alpha > \sigma > \gamma$$

genügenden Werthe ertheilt (das Zeichen $>$ ist dabei in strengem Sinne zu nehmen, sodass es also die Gleichheit ausschliesst). Auf diese verschiedenen Formen der Bewegung werden wir unten noch genauer eingehen. Führt man in 7) statt δ, ε die Grössen ϱ, σ ein, so erhält man

$$12) \left\{ \begin{array}{l} (\mu - \lambda_0)(\nu - \mu)^2 \mu'^2 = 4g(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\varrho - \mu)(\sigma - \mu), \\ (\nu - \lambda_0)(\mu - \nu)^2 \nu'^2 = 4g(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\varrho - \nu)(\varrho - \sigma). \end{array} \right.$$

Von den Gleichungen 7) wissen wir, dass jede mögliche Bewegung ihnen genügen muss. Sie werden nun auch befriedigt, wenn man μ und ν Constanten und zwar den mit den Ungleichungen 1) vereinbaren Wurzeln der Gleichung in t

$$R(t) = (\alpha - t)(\beta - t)(\gamma - t)(t^2 + 2\delta t + \varepsilon) = 0$$

gleichsetzt. Aber da dann Bewegungen auf Krümmungslinien vorliegen, so darf nach früheren Bemerkungen kein Schluss auf die Möglichkeit solcher Bewegungen gemacht werden, sondern es bedarf noch einer besonderen Untersuchung. Da die elliptischen Coordinaten für den Fall, dass die Krümmungslinien die Hauptschnitte des Ellipsoids sind, degeneriren, so zerlegt man die Untersuchung am besten in zwei Theile. Da sie im Uebrigen ohne Schwierigkeiten zu erledigen ist, so begnügen wir uns mit einer kurzen Angabe des Ganges und der Resultate.

Findet eine Bewegung auf einer von den Hauptschnitten verschiedenen Krümmungslinie statt, so schliesst man leicht, wenn man die zweite Form der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen für unser Problem aufstellt, dass der Parameter dieser Krümmungslinie eine doppelte Wurzel der Gleichung

$$t^2 + 2\delta t + \varepsilon = 0$$

sein muss, vorausgesetzt, dass sich der materielle Punkt nicht etwa auf der Krümmungslinie in Ruhe befindet. Und umgekehrt leitet man ab, dass eine Bewegung auf dieser Krümmungslinie dann nothwendig nach den Bewegungsgleichungen erfolgt.

Für die Bewegung in den Hauptschnitten bedient man sich zweckmässig wieder der Cartesischen Coordinaten. Es ergiebt sich hier, dass, je nachdem die Bewegung in den Hauptschnitten $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ erfolgt, entweder α oder β oder γ eine Wurzel der Gleichung

$$t^2 + 2\delta t + \varepsilon = 0$$

ist. Auch zeigt man leicht, dass bei der Erfüllung einer dieser Bedingungen eine Bewegung auf dem entsprechenden Hauptschnitt nach den Bewegungsgleichungen erfolgt.

Fasst man diese Ergebnisse zusammen, so zeigt sich, dass bei einer Bewegung auf einer Krümmungslinie überhaupt deren Parameter eine zweifache Wurzel der Gleichung $R(t) = 0$ sein muss.

Da der materielle Punkt auch auf dem Ellipsoid ruhen kann und diese Möglichkeit bei der vorhergehenden Untersuchung ausgeschlossen wurde, so ist noch nöthig, auch diesen Fall in Betracht zu ziehen. Es ergiebt sich durch einfache Betrachtungen, dass der Punkt sich nur in einem Scheitel des Ellipsoids befinden kann, oder dass die elliptischen Coordinaten des Ruhepunktes doppelte Wurzeln der Gleichung $R(t) = 0$ sind.

Die Wurzeln der Gleichung $t^2 + 2\delta t + \varepsilon = 0$ sind also auch in den soeben betrachteten Fällen nicht nur reell, sondern auch gewissen Bedingungen unterworfen. Bezeichnen wir sie wie vorhin mit ϱ und σ, unter ϱ die grössere verstanden, falls nicht $\varrho = \sigma$ ist, so gelangt man zu dem einfachen Ergebniss, dass man alle Arten der Bewegungen überhaupt erhält, wenn man ϱ und σ den Ungleichungen 11) entsprechend wählt, aber durch das Zeichen $>$ die Gleichheit nicht ausschliesst.

Aus den obigen Untersuchungen folgt nun, dass wenn die Parameter einer Krümmungslinie eine doppelte Wurzel von $R(t)$ ist, die Bewegung auf der Krümmungslinie möglich ist, nicht aber, dass sie nothwendig stattfindet. Wenn nämlich die Ungleichungen 11) in ihrer strengen Form erfüllt sind, so kann auch eine Bewegung auf einem zweifach ausgedehnten Gebiete stattfinden, wofür die genaueren Bedingungen später angegeben werden sollen. Ebenso braucht der materielle Punkt nicht zu ruhen, wenn $R(t) = 0$ zwei Doppelwurzeln hat. Nur in dem Falle $\varrho = \beta$, $\sigma = \gamma$ ist keine andere Möglichkeit denkbar.

§ 2.

Eintheilung der Bewegungsformen.

Auf Grund dieser Bemerkungen kann man die sämmtlichen Bewegungsformen in folgender Weise eintheilen:

I. Strenge Giltigkeit der Ungleichungen $\varrho > \sigma$, $\varrho > \beta$, $\alpha > \sigma > \gamma$.

a) $R(t) = 0$ hat keine Doppelwurzel. Nur bedingt periodische Bewegungen.

A. Reguläre Bewegungsformen.

b) $R(t) = 0$ hat eine Doppelwurzel; daher auch Bewegung auf Krümmungslinien möglich. Nach später ersichtlichen Eigenschaften theilen wir diese Bewegungsformen ein in

B. Regulär-singuläre Bewegungsformen.

C. Regulär-asymptotisch-singuläre Bewegungsformen.

c) $R(t) = 0$ hat zwei Doppelwurzeln. Im Allgemeinen ist das Bewegungsgebiet ein zweifach ausgedehntes; doch sind auch Bewegungen auf Krümmungslinien möglich und ferner auch Ruhe.

D. Regulär-asymptotisch-singulär-asymptotische Bewegungsformen.

II. Die Ungleichungen gelten nur, wenn man durch das Zeichen $>$ die Gleichheit nicht ausschliesst; $R(t) = 0$ hat mindestens eine Doppelwurzel. Das Bewegungsgebiet ist eine Krümmungslinie, oder es findet Ruhe statt.

α) Es ist $\varrho + \sigma > \beta + \gamma$.

a) falls zwei Doppelwurzeln vorhanden, so ist $\varrho = \sigma$. Keine Ruhe möglich.

E. Singuläre Bewegungsformen.

b) Zwei Doppelwurzeln: $\varrho \neq \sigma$. Ruhe möglich.

F. Singulär-asymptotische Bewegungsformen.

β) $\varrho = \beta$, $\sigma = \gamma$.

G. Ruhelage.

Eine ungefähre, wenn auch noch ziemlich unbestimmte Vorstellung über die Form des Bewegungsgebietes kann man durch folgende Betrachtung gewinnen.

Aus dem Princip der lebendigen Kraft

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = U + h$$

folgt, dass alle Gebiete, in denen überhaupt Bewegung stattfinden kann, der Bedingung $U + h \geqq 0$ genügen müssen, und dass der materielle Punkt die Geschwindigkeit 0 hat, wenn er sich in einem Gebiete befindet, für welches $U + h = 0$ ist. Da die Flächen $U = const$ Niveauflächen der Kräftefunction sind, so kann man diejenige unter ihnen, für welche die Constante den Werth $-h$ hat, das Niveau der Geschwindigkeit 0 nennen. Nur auf der einen Seite dieser Fläche kann sich der materielle Punkt befinden. In unserem Falle sind nun die Niveauflächen Kugeln mit dem Mittelpunkte des Ellipsoids als Centrum. In dem im ersten Abschnitte erwähnten Problem der Bewegung auf dem Paraboloid, welches wir jetzt zum Vergleich heranziehen wollen, sind die Niveauflächen horizontale Ebenen. Auf dem Ellipsoid kann nur auf dem Theile der Oberfläche Bewegung stattfinden, welcher sich ausserhalb derjenigen Kugelfläche befindet, der die Geschwindigkeit 0 entspricht, auf dem Paraboloid nur unterhalb einer gewissen Horizontalebene. Verfolgt man nun die verschiedenen möglichen Lagen dieses Niveaus der Geschwindigkeit 0, so erkennt man zunächst leicht, dass, wenn überhaupt Bewegung möglich sein soll, die genannte Kugelfläche beim Ellipsoid nicht ausserhalb der Scheitel der grossen Achse, die Horizontalebene beim Paraboloid nicht unterhalb des Scheitels liegen darf. Gehen die beiden Niveauflächen gerade durch die Scheitel hindurch, so kann sich der materielle Punkt in ihnen nur in ruhendem Zustande befinden. Lässt man nun einerseits die Kugelflächen mmer kleiner werden und andererseits die Horizontalebenen immer höher hinaufrücken, so ergiebt sich folgender Unterschied zwischen beiden Bewegungen. Beim Ellipsoid wird zunächst um beide Scheitel ein einfach zusammenhängendes Gebiet für die Bewegung zugänglich; schneidet die Kugelfläche die Scheitel der mittleren Achse, so verschmelzen beide Gebiete in ein zweifach zusammenhängendes, welches schliesslich, wenn die Kugelfläche durch die Scheitel der kleinsten Achse hindurchgeht, in die ganze Oberfläche des Ellipsoids übergeht. Beim Paraboloid dagegen wird stets ein einfach zusammenhängender Theil der Oberfläche herausgeschnitten, denn Scheitel der mittleren und kleinsten Achse rücken ins Unendliche.

Nach dieser allgemeinen Uebersicht wollen wir uns jetzt eine genaue Vorstellung von den Uebergängen der verschiedenen Bewegungen in einander verschaffen, indem wir sie nach der Lage des Niveaus der Geschwindigkeit 0 ordnen. Bei der Verkleinerung der Niveaukugeln sind drei Arten von Ellipsoiden zu unterscheiden, je nachdem nämlich das Niveau erst durch die Kreispunkte und dann durch die Scheitel der mittleren Achse hindurchgeht oder umgekehrt, oder beides zugleich erfolgt. Wir führen im Folgenden die Untersuchung nur für den ersten Fall durch, für welchen $\alpha + \gamma > 2\beta$ ist.

§ 3.

Zusammenhang der Bewegungsformen mit der Veränderung der Constanten.

Mit den römischen Ziffern in Klammern (I bis XVIII) verweisen wir auf die unten zusammengestellten 18 verschiedenen Bewegungsformen und setzen im Folgenden $\varrho + \sigma = s$, $\varrho - \sigma = d$, so dass nach 11) folgende Ungleichungen bestehen:

$$\text{für } s: \quad s \geqq \beta + \gamma$$
$$\text{für } d: \quad d \geqq 0, \quad d > 2\beta - s, \quad d > s - 2\alpha.$$

I. Geht das Niveau der Geschwindigkeit 0 durch die Scheitel der grossen Achse hindurch $\left(-\frac{2h}{g} = \alpha - \lambda_0,\ s = \beta + \gamma\right)$, so muss sich der Körper in einem derselben in Ruhe befinden (XVIII).

II. III. Verläuft das Niveau zwischen diesen Scheiteln und den Kreispunkten oder geht im Grenzfalle durch letztere hindurch $\left(\alpha - \lambda_0 > -\frac{2h}{g} \geqq \alpha + \gamma - \beta - \lambda_0,\ 2\beta \geqq s > \beta + \gamma\right)$, so ist

$$s - 2\gamma > d > 2\beta - s > 0 > s - 2\alpha$$

und d kann also wachsend alle Werthe von $2\beta - s$ bis $s - 2\gamma$ annehmen; ϱ nimmt dann von β bis $s - \gamma < \alpha$ zu, σ von $s - \beta \leqq \beta$ bis γ ab. Hat d den kleinsten Werth, so findet eine Oscillation des Punktes in der Y-Ebene statt zwischen den Kreispunkten, sie werden für den oben bezeichneten Grenzfall wirklich erreicht (XIII. XIV). Wächst nun d, so nimmt das vorher linienförmige Gebiet eine endliche Breite an; es wird ein viereckiges, das von zwei ungleichartigen Krümmungslinien als anstossenden Seiten gebildet wird, und dessen vier Ecken sich auf der Niveaukugel befinden (IV). Nimmt d immer mehr zu, so nimmt die Länge immer mehr ab, so dass beim grössten Werth von d eine Oscillation im Hauptschnitt $\mu = \gamma$ stattfindet. (XVI.)

IV. V. Verläuft die Niveaukugel zwischen den Kreispunkten und den Scheiteln der mittleren Achse oder geht im Grenzfall durch letztere hindurch $\left(\alpha + \gamma - \beta - \lambda_0 > -\frac{2h}{g} \geqq \beta - \lambda_0,\ \alpha + \gamma \geqq s > 2\beta\right)$, so hat man

$$s - 2\gamma > d > 0 > 2\beta - s \quad > s - 2\alpha.$$

Wir können das Intervall, welches d durchlaufen kann, in zwei Theile zerlegen, in das Intervall $0 \ldots s - 2\beta$ und $s - 2\beta \ldots s - 2\gamma$. Durchläuft d wachsend das erste Theilintervall, so wächst ϱ von $\frac{s}{2} > \beta$ bis $s - \beta < \alpha$ und fällt σ von $\frac{s}{2} < \alpha$ bis β. Hat also d den kleinsten Werth, so findet eine Bewegung in der Krümmungslinie $\nu = \frac{s}{2}$ statt (X). Wächst d, so spaltet sich diese in zwei Krümmungslinien, die ein zonenförmiges Gebiet zwischen sich lassen, auf welches die Bewegung des materiellen Punktes beschränkt ist (III). Dieses wird immer breiter, bis schliesslich die eine Grenzcurve in den Hauptschnitt $\nu = \beta$ zusammenklappt, wobei die andere gerade die Niveaukugel im Hauptschnitt $\mu = \beta$ berührt; das Gebiet ist dann ein glockenförmiges geworden (VI). Durchläuft jetzt d das zweite Intervall, so wächst ϱ von $s - \beta > \beta$ bis $s - \gamma \leqq \alpha$ und fällt σ von β bis γ. Es schiebt sich also vom Hauptschnitt $\mu = \beta$ aus ein sich fortwährend vergrössernder der Bewegung verschlossener Theil in das vorher glockenförmige Gebiet ein, welches somit eine viereckige Gestalt annimmt, und dessen Ecken sich auf der Niveaukugel befinden (IV). Erreicht d schliesslich seinen grössten Werth, so findet eine Bewegung im Hauptschnitt $\mu = \gamma$ statt (XVI, im Grenzfall XVII).

VI. VII. Ist der Radius der Niveaukugel grösser als die kleinste, aber kleiner als die mittlere Halbachse oder im Grenzfall so gross wie erstere $\left(\beta - \lambda_0 > -\frac{2h}{g} \geqq \gamma - \lambda_0,\ \alpha + \beta \geqq s > \alpha + \gamma\right)$, so ist

$$s - 2\gamma > d > 0 > 2\beta - s > s - 2\alpha.$$

Wir zerlegen das Intervall, auf welches d beschränkt ist, in drei Theile: $0 \ldots s - 2\beta$, $s - 2\beta \ldots 2\alpha - s$, und $2\alpha - s \ldots s - 2\gamma$. Durchläuft d das erste Theilintervall, so wächst ϱ von $\frac{s}{2} > \beta$ bis $s - \beta \leqq \alpha$ und nimmt σ von $\frac{s}{2} < \alpha$ bis β ab. Hat demnach d seinen kleinsten Werth, so bewegt sich der Punkt auf der Krümmungslinie $\nu = \frac{s}{2}$ (X); mit zunehmendem d spaltet sich diese in zwei, zwischen welchen sich der Körper bewegt (III), dieses vergrössert sich immer mehr, bis es beim grössten Werth von d im ersten Theilintervall ein glockenförmiges wird (VI). Durchwandert jetzt d das zweite Theilintervall, so wächst ϱ von $s-\beta>\beta$ bis α, und nimmt σ von β bis $s-\alpha>\gamma$ ab. Es schiebt sich also genau wie bei IV. V. vom Hauptschnitt $\mu=\beta$ aus ein unzugängliches Gebiet ein (IV), und wenn d den grössten Werth besitzt, so vereinigen sich die beiden auf dem Ellipsoid möglichen Bewegungsgebiete in ein einziges, indem sich im Hauptschnitt $\nu=\alpha$ verschmelzen (VIII). In dem Grenzfall VII (wo das Niveau der Geschwindigkeit 0 gerade durch die Scheitel der kleinsten Achse hindurchgeht) hat das mittlere Intervall $s-2\beta\ldots 2\alpha-s$ keine Ausdehnung. Wir haben dann statt des glockenförmigen Gebietes die ganze Oberfläche des Ellipsoids (IX). Jetzt trete d in das letzte Intervall, es wächst ϱ von α bis $s-\gamma$ und fällt σ von $s-\alpha\leqq\beta$ bis γ: Das Bewegungsgebiet ist also ein zonenförmiges (II), das sich schliesslich soweit verkleinert, dass es in den Hauptschnitt $\mu=\gamma$ zusammenschrumpft (XV).

Es sind jetzt noch die Fälle zu behandeln, in denen sich das Niveau der Geschwindigkeit 0 ganz innerhalb des Ellipsoids befindet $\left(\gamma-\lambda_0>-\frac{2h}{g}\right)$. Wir unterscheiden $s\leqq 2\alpha$ und $s>2\alpha$.

VIII. IX. $s\leqq 2\alpha$. Dann ist

$$s-2\gamma>d>0>s-2\alpha>2\beta-s.$$

Wir theilen das Intervall, welches d durchlaufen kann, in drei Theile: $0\ldots 2\alpha-s$, $2\alpha-s\ldots s-2\beta$, $s-2\beta\ldots s-2\gamma$. Für den Grenzfall $s=2\alpha$ hat das erste Intervall keine Ausdehnung: es findet ein Umlauf im Hauptschnitt $\nu=\alpha$ statt (XII). Durchläuft sonst d den ersten Abschnitt des Intervalls, so nimmt ϱ von $\frac{s}{2}>\beta$ bis α zu und σ von $\frac{s}{2}<\alpha$ bis $s=\alpha>\beta$ ab. Beim kleinsten Werth von d findet also eine Bewegung auf der Krümmungslinie $\nu=\frac{s}{2}$ statt (X), bei grösseren Werthen von d theilt sich diese, ein zonenförmiges Gebiet zwischen sich lassend (III), bis schliesslich $\varrho=\alpha$ wird, und damit eine Verschmelzung mit dem andern noch möglichen Gebiete stattfindet, welches symmetrisch zu diesem in Bezug auf den Hauptschnitt $\nu=\alpha$ liegt (VII). Jetzt werde d im zweiten Intervall angenommen, bei dessen Durchlaufung ϱ von α bis $s-\beta$ zu-, σ von $s-\alpha\leqq\alpha$ bis β abnimmt. Das Gebiet ist ein zonenförmiges (I) und geht beim grössten Werth von d in die ganze Oberfläche des Ellipsoids über (V). Gelangt endlich d in das letzte Theilintervall, so schiebt sich vom Hauptschnitt $\mu=\beta$ aus ein der Bewegung unzugängliches Gebiet beiderseits ein, sodass wieder ein zonenförmiges entsteht (II) und schliesslich findet beim grössten Werth von d nur noch eine Bewegung im Hauptschnitt $u = \gamma$ statt (XV).

X. $s > 2\alpha$. Es ist dann

$$s - 2\gamma > d > s - 2\alpha > 0 > 2\beta - s$$

und es werde das Intervall, innerhalb dessen d sich befinden kann, in zwei Theile zerlegt $s - 2\alpha \ldots s - 2\beta$, $s - 2\beta \ldots s - 2\gamma$. Durchläuft d den ersten Abschnitt, so nimmt ϱ von $s - \alpha > \alpha$ bis $s - \beta$ zu, σ von α bis β ab. Beim kleinsten Werth von d findet ein Umlauf im Hauptschnitt $\nu = \alpha$ statt (XI); wächst d, so nimmt das Gebiet eine endliche Breite an und wird eine Zone, die beiderseits von den Krümmungslinien $\nu = \frac{s-d}{2}$ begrenzt wird (I); die Zone vergrössert sich schliesslich so weit, dass sie in die ganze Oberfläche des Ellipsoids übergeht (V). Gelangt nun d in das zweite Theilintervall, so wächst ϱ von $s - \beta$ bis $s - \gamma$ weiter, während σ von β bis γ abnimmt. Es schiebt sich also wieder vom Hauptschnitte $\mu = \beta$ aus ein unzugängliches Gebiet ein (II), und wenn d den grössten Werth erhält, findet eine Bewegung im Hauptschnitte $\mu = \gamma$ statt (XV).

§ 4.

Nach dieser Uebersicht über den Zusammenhang der verschiedenen Bewegungsformen mit der Veränderung der Constanten des Bewegungsproblems wenden wir uns zu der systematischen Aufzählung und Discussion der verschiedenen Bewegungen. Dabei werden die Gesichtspunkte der Gruppirung, die schon früher theilweise in Betracht gezogen sind, aus der Anordnung selbst ersichtlich sein.

A. Die regulären Bewegungsformen. Sie sind dadurch vor den übrigen charakterisirt, dass bei ihnen die Bewegung stets auf zweifach ausgedehnten Gebieten stattfindet, wo sich auch der Punkt zu Anfang seiner Bewegung befinden möge. Es sind die eigentlichen bedingt-periodischen Bewegungen, während alle anderen Formen als Grenzfälle solcher betrachtet werden können. ϱ und σ sind von einander und von α, β, γ verschieden. Die Bewegungsgleichungen lassen sich in den separirten Formen schreiben:

13
$$\left\{\begin{aligned} &\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{\sqrt{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\mu-\gamma)(\varrho-\mu)(\sigma-\mu)(\mu-\lambda_0)}}+\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{\sqrt{(\alpha-\nu)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\varrho-\nu)(\nu-\sigma)(\nu-\lambda_0)}}=0\\ &\frac{(\mu-\lambda_0)^2\,d\mu}{\sqrt{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\mu-\gamma)(\varrho-\mu)(\sigma-\mu)(\mu-\lambda_0)}}+\frac{(\nu-\lambda_0)^2\,d\nu}{\sqrt{(\alpha-\nu)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\varrho-\nu)(\nu-\sigma)(\nu-\lambda_0)}}=2\sqrt{g}\,dt.\end{aligned}\right.$$

Die erste Differentialgleichung definirt die Bewegung rein geometrisch, während die zweite ihre Abhängigkeit von der Zeit bestimmt, so dass man durch Integration der ersten die Gleichung der Bahncurve, der zweiten die Zeitdauer erhält, welche verfliesst, während der materielle Punkt von einer bestimmten Lage in eine andere gelangt. Nun ist aber wohl zu beachten, dass die elliptischen Coordinaten einen Punkt auf der Oberfläche des Ellipsoids erst dann eindeutig fixiren, wenn der Octant bezeichnet wird, in welchem er liegt. Die Gleichung der Bahncurve und der Integralausdruck für die Zeit haben daher nur für einen ganz innerhalb eines Octanten gelegenen zusammenhängenden Theil der Bahncurve Giltigkeit.

Nimmt man nämlich in einem Theil des Bewegungsgebietes, welcher einem beliebigen Octanten angehört, einen Punkt $(\mu_0 \nu_0)$ an, so folgt durch Integration der ersten Differentialgleichung als Gleichung der durch den Punkt $(\mu_0 \nu_0)$ hindurchgehenden beiden Bahncurven bis an die Grenzen dieses Theils des Bewegungsgebietes

$$\int\limits_{\mu_0}^{\mu} \frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{\sqrt{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\mu-\gamma)(\varrho-\mu)(\sigma-\mu)(\mu-\lambda_0)}} \pm \int\limits_{\nu_0}^{\nu} \frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{\sqrt{(\alpha-\nu)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\varrho-\nu)(\nu-\sigma)(\nu-\lambda_0)}} =$$

Hat man mit Hilfe dieser Gleichung die Curve bis zur Grenze verfolgt, so kann man zur Untersuchung ihres weiteren Verlaufs den Umstand benutzen, dass der materielle Punkt nur stetig seine Richtung ändern kann, wenn er nicht etwa die Geschwindigkeit 0 besitzt. Bezeichnet man, um diese Richtung zu fixiren, mit i_1 und i_2 die Winkel, welche die Bahncurve mit den durch einen ihrer Punkte (μ, ν) hindurchgehenden Krümmungslinien μ und ν bildet, so ist

$$14)\left\{\begin{aligned} sin^2 i_1 : sin^2 i_2 &= (\alpha-\nu)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\mu-\lambda_0)\mu'^2 : (\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\mu-\gamma)(\nu-\lambda_0)\nu'^2 \\ &= (\varrho-\mu)(\sigma-\mu) : (\varrho-\nu)(\nu-\sigma) \end{aligned}\right.$$

und man erhält aus dieser Gleichung Aufschluss darüber, in welches Gebiet sich der materielle Punkt hineinbewegt. Für diesen kann dann wieder die Gleichung der Bahncurve aufgestellt werden und so fort.

Die beiden durch den Punkt $(\mu_0 \nu_0)$ hindurchgehenden Bahnen unterscheiden sich dadurch, dass bei der einen von ihm aus die Coordinaten μ, ν entweder beide ab- oder beide zunehmen oder die eine derselben zu-, die andere aber abnimmt. Bezeichnet man, unter a eine reelle Grösse verstehend, mit $sgn\, a$ das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem $a > 0$ oder < 0 ist, und setzt

$$(\mu_0 \mu) = \int\limits_{\mu_0}^{\mu} \frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{\sqrt{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\mu-\gamma)(\varrho-\mu)(\sigma-\mu)(\mu-\lambda_0)}},$$

$$(\nu_0 \nu) = \int\limits_{\nu_0}^{\nu} \frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{\sqrt{(\alpha-\nu)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\varrho-\nu)(\nu-\sigma)(\nu-\lambda_0)}},$$

den Wurzeln immer den positiven Werth beilegend, so können die beiden Gleichungen in der Form geschrieben werden

$$sgn(\mu-\mu_0)(\mu_0\mu) = sgn(\nu-\nu_0)(\nu_0\nu).$$

Bei dieser Schreibweise kann man die Zeit t, welche verfliesst, wenn der materielle Punkt von der Lage $(\mu_0 \nu_0)$ in die Lage $(\mu \nu)$ gelangt, in folgender Form angeben. Es werde gesetzt

$$[\mu_0 \mu] = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{(\mu - \lambda_0)^2 \, d\mu}{\sqrt{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\varrho - \mu)(\sigma - \mu)(\mu - \lambda_0)}},$$

$$[\nu_0 \nu] = \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{(\nu - \lambda_0)^2 \, d\nu}{\sqrt{(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\varrho - \nu)(\nu - \sigma)(\nu - \lambda_0)}}$$

und ebenfalls den Wurzeln der positive Werth beigelegt. Dann ist

$$2\sqrt{g}\, t = sgn(\nu - \nu_0)[\nu_0 \nu] - sgn(\mu - \mu_0)[\mu_0 \mu].$$

Hierbei ist dieselbe Voraussetzung gemacht wie bei der Herleitung der Curvengleichung, und um die Zeitdauer in anderen Gebieten zu untersuchen, hat man ganz ähnliche Betrachtungen anzustellen wie oben.

§ 5.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen gehen wir nun zu den vier speciellen Fällen über, die zu den regulären Bewegungsformen gehören.

I. $\varrho > \alpha$, $\alpha > \sigma > \beta$. Es werde gesetzt $\sigma = \nu_0$.

Aus 14) schliesst man leicht, dass die Krümmungslinien $\nu = \nu_0$ von der Bahncurve berührt, dagegen die Hauptschnitte $\nu = \alpha$, $\mu = \beta$, $\mu = \gamma$ durchstossen werden. Es werden also abwechselnd die beiden Krümmungslinien $\nu = \nu_0$ des ringförmigen Bewegungsgebietes berührt, während sich der materielle Punkt immer in demselben Sinne um die Zone $(\nu_0 \nu_0)$ windet. Es kann vorkommen, dass die Bahn sich schliesst. Geschieht dies nach m Windungen und n Oscillationen, unter einer Oscillation eine je einmalige Berührung beider Krümmungslinien $\nu = \nu_0$ verstanden, so kann man auf folgendem Wege die Bedingung dafür finden. Man zerlege die geschlossene Curve in eine bestimmte Anzahl von Theilen derart, dass die beiden Endpunkte entweder in den Hauptschnitten oder in einem Hauptschnitt und der Krümmungslinie $\nu = \nu_0$ gelegen sind, alle übrigen Punkte eines Theiles aber im Innern desselben Octanten liegen. Die Coordinaten der Endpunkte seien der Reihe nach μ_1, ν_1; $\mu_2, \nu_2, \ldots \mu_{r-1}, \nu_{r-1}$; und es sei $\mu_r = \mu_1$, $\nu_r = \nu_1$. Dann hat man für jeden Theil

$$sgn(\mu_{k+1} - \mu_k)(\mu_k \mu_{k+1}) = sgn(\nu_{k+1} - \nu_k)(\nu_k \nu_{k+1}), \quad k = 1 \ldots r-1$$

und daher

$$\sum_k sgn(\mu_{k+1} - \mu_k)(\mu_k \mu_{k+1}) = \sum_k sgn(\nu_{k+1} - \nu_k)(\nu_k \nu_{k+1}).$$

Für die Summe auf der linken Seite der Gleichung erhält man nun $4m(\gamma, \beta)$, auf der rechten Seite $4n(\nu_0 \alpha)$, sodass die gesuchte Bedingung lautet*:

$$m\int_{\gamma}^{\beta}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{\sqrt{(\varrho-\mu)(\alpha-\mu)(\nu_0-\mu)(\beta-\mu)(\mu-\gamma)(\mu-\lambda_0)}}=n\int_{\nu_0}^{\alpha}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{\sqrt{(\varrho-\nu)(\alpha-\nu)(\nu-\nu_0)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\lambda_0)}}$$

Sie ist völlig unabhängig von dem Ausgangspunkte des Körpers; wenn also überhaupt Schliessung der Bahn stattfindet, so tritt dieselbe ein, von welchem Punkte der Zone $(\nu_0 \nu_0)$ der Körper auch seine Bewegung beginnt.

Aus der Theorie der hyperelliptischen Integrale kann man nun folgende Periodenrelation ableiten:

$$\int_{\gamma}^{\beta}\frac{(\mu-\lambda)\,d\mu}{\sqrt{(\varrho-\mu)(\alpha-\mu)(\nu_0-\mu)(\beta-\alpha)(\mu-\gamma)(\mu-\lambda_0)}}=\int_{\nu_0}^{\alpha}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{\sqrt{(\varrho-\nu)(\alpha-\nu)(\nu-\nu_0)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\lambda_0)}}$$
$$-\int_{-\infty}^{\lambda_0}\frac{(\lambda_0-\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{(\varrho-\lambda)(\alpha-\lambda)(\nu_0-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(\lambda_0-\lambda)}}-\int_{\varrho}^{\infty}\frac{(t-\lambda_0)\,dt}{\sqrt{(t-\varrho)(t-\alpha)(t-\nu_0)(t-\beta)(t-\gamma)(t-\lambda_0)}}$$

Hieraus folgt nun leicht, dass $m > n$ ist: Wenn also eine Schliessung der Bahn stattfindet, so geschieht sie stets mit mehr Windungen als Oscillationen. Für die Zeit T, innerhalb deren eine Schliessung erfolgt, erhält man

$$\sqrt{g}\,T = 2n\int_{\nu_0}^{\alpha}\frac{(\nu-\lambda_0)^2\,d\nu}{\sqrt{(\varrho-\nu)(\alpha-\nu)(\nu-\nu_0)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\lambda_0)}}$$
$$-2m\int_{\beta}^{\gamma}\frac{(\mu-\lambda_0)^2\,d\mu}{\sqrt{(\varrho-\mu)(\alpha-\mu)(\nu_0-\mu)(\beta-\mu)(\mu-\gamma)(\mu-\lambda)}};$$

diese ist also auch von dem Ausgangspunkte der Bewegung unabhängig.

II. $\varrho > \alpha,\ \beta > \sigma > \gamma$. Die Bewegungsform unterscheidet sich dadurch von der vorigen, dass bei ihr die Krümmungslinie $\mu = \sigma = \mu_0$ berührt wird, und dass, wenn sich die Bahn schliesst, die Anzahl der Oscillationen grösser ist, als die der Windungen.

III. $\alpha > \varrho > \beta,\ \alpha > \sigma > \beta$. Hier findet die Bewegung auf einem von zwei gleichartigen Krümmungslinien $\nu = \varrho = \nu_1$ und $\nu = \sigma = \nu_1$ begrenzten ringförmigen Gebiete statt. Die Krümmungslinien ν_0 und ν_1 werden immer abwechselnd berührt. Unter einer Oscillation soll eine je zweimalige Be-

* Vergl. Staude, Ueber geodätische Polygone auf Flächen zweiten Grades. Mathem. Ann. Bd. 21, S. 219—252.

rührung beider Krümmungslinien verstanden werden. Wenn sich dann die Bahn nach m Windungen und n Oscillationen schliesst, so ist

$$m\int_{\gamma}^{\beta}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{\sqrt{(\alpha-\mu)(\nu_0-\mu)(\nu_1-\mu)(\beta-\mu)(\mu-\gamma)(\mu-\lambda_0)}}=n\int_{\nu_1}^{\nu_0}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{\sqrt{(\alpha-\nu)(\nu_0-\nu)(\nu-\nu_1)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\lambda_0)}}.$$

Weil nun aber

$$\int_{\gamma}^{\beta}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{\sqrt{(\alpha-\mu)(\nu_0-\mu)(\nu_1-\mu)(\beta-\mu)(\mu-\gamma)(\mu-\lambda_0)}}=\int_{\nu_1}^{\nu_0}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{\sqrt{(\alpha-\nu)(\nu_0-\nu)(\nu-\nu_1)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\lambda_0)}}$$

$$-\int_{-\infty}^{\lambda_0}\frac{(\lambda_0-\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{(\alpha-\lambda)(\nu_0-\lambda)(\nu_1-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(\lambda_0-\lambda)}}-\int_{\alpha}^{\infty}\frac{(t-\lambda_0)\,dt}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\nu_0)(t-\nu_1)(t-\beta)(t-\gamma)(t-\lambda_0)}}$$

ist, so folgt $n < m$, d. h. es ist die Anzahl der Windungen grösser als die der Oscillationen.

IV. $\alpha > \varrho > \beta$, $\beta > \sigma > \gamma$. In diesem Falle findet die Bewegung auf einem viereckigen von den beiden Krümmungslinien $\nu = \varrho = \nu_0$ und $\mu = \sigma = \mu_0$ gebildeten Gebiete statt, dessen Ecken sich auf dem Niveau der Geschwindigkeit 0 befinden und mit Beziehung auf die mechanischen Constanten g, h, k als die Schnittpunkte der Oberflächen $x^2+y^2+z^2=-\frac{2h}{g}$, $\frac{x^2}{(\alpha-\lambda_0)^2}+\frac{y^2}{(\beta-\lambda_0)^2}+\frac{z^2}{(\gamma-\lambda_0)^2}=\frac{k}{g}$ und des gegebenen Ellipsoids definirt werden können. Geometrisch kann man also die Ecken des Gebietes auf folgende Weise erhalten. Man bestimme auf dem Ellipsoid diejenige Curve, welche die Eigenschaft hat, dass die in ihren Punkten an die Oberfläche des Ellipsoids errichteten Tangentialebenen vom Mittelpunkt die constante Entfernung $\sqrt{\frac{g}{k}}$ haben; construire sodann um den Mittelpunkt mit dem Radius $\sqrt{-\frac{2h}{g}}$ eine Kugel und bestimme ihre Durchdringungscurve mit dem Ellipsoid. Dann sind die vier Punkte, in denen sich die Durchdringungscurve und die vorhin definirte schneiden, die Eckpunkte des Bewegungsgebietes. Um letzteres zu erhalten, braucht man die Eckpunkte nur durch Krümmungslinien zu verbinden und hat dann dasjenige Viereck auszuwählen, welches innerhalb des Niveaus der Geschwindigkeit 0 liegt und in dessen Punkten die an das Ellipsoid errichteten Tangentialebenen einen kleineren Abstand als $\sqrt{\frac{g}{k}}$ haben. Es ist leicht zu zeigen, dass die gegenüberliegenden Seiten des viereckigen Gebietes abwechselnd berührt werden. Wenn jedoch der materielle Punkt gerade in eine Ecke des Gebietes hineingelangt, so findet eine Ausnahme statt, und wir wollen jetzt beweisen, dass seine Bahn dann keine der beiden in den Ecken zusammenstossenden Krümmungslinien berührt.

Wir erinnern an die Gleichung

$$sin^2 i_1 : sin^2 i_2 = (\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\mu - \lambda_0)\mu'^2 : (\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\nu - \lambda_0)\nu'^2$$

und bemerken zunächst, dass sich aus den Differentialgleichungen der Bewegung 12) $\mu' = \nu' = 0$ ergiebt. Wir können aber den Grenzwerth $\frac{\mu'}{\nu'}$ in dem genannten Punkte nach bekannten Methoden durch Differentiation der Bewegungsgleichungen bestimmen. Man erhält nämlich

$$2(\mu - \lambda_0)(\nu - \mu)^2\mu'' + \mu' \frac{d}{dt}\left\{(\mu - \lambda_0)(\nu - \mu)^2\right\} = -4g(\alpha - \mu)(\nu_0 - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)$$
$$+ 4g(\mu_0 - \mu)\frac{d}{dt}\left\{\alpha - \mu)(\nu_0 - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)\right\},$$
$$2(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu)^2\nu'' + \nu' \frac{d}{dt}\left\{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu)^2\right\} = -4g(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \mu_0)(\nu - \gamma)$$
$$+ 4g(\nu_0 - \nu)\frac{d}{dt}\left\{(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \mu_0)(\nu - \gamma)\right\}$$

und daraus für $\mu = \mu_0$, $\nu = \nu_0$

$$lim \frac{\mu'}{\nu'} = \frac{\mu''}{\nu''} = \frac{(\alpha - \mu_0)(\beta - \mu_0)(\mu_0 - \gamma)(\nu_0 - \lambda_0)}{(\alpha - \nu_0)(\nu_0 - \beta)(\nu_0 - \gamma)(\mu_0 - \lambda_0)}$$

und schliesslich

$$sin^2 i_1 : sin^2 i_2 = (\alpha - \mu_0)(\beta - \mu_0)(\mu_0 - \gamma)(\nu_0 - \lambda_0) : (\alpha - \nu_0)(\nu_0 - \beta)(\nu_0 - \gamma)(\mu_0 - \lambda_0).$$

Dieses Ergebniss kann man noch auf einem anderen Wege bestätigen. Wenn nämlich der Körper in die betrachtete Ecke angelangt ist, so besitzt er keine Geschwindigkeit; die anfängliche Richtung seiner Bewegung muss also in derjenigen durch den Punkt an das Ellipsoid gelegten Normalebene liegen, welche durch den Mittelpunkt hindurchgeht. Nennt man die Richtungscosinus der anfänglichen Bewegung α, β, γ, die der Krümmungslinien μ_0 und ν_0 in dem betrachteten Punkte p_1, q_1, r_1, resp. p_2, q_2, r_2, die der Normale p_0, q_0, r_0 und die der Richtung, welche zu der durch den Mittelpunkt gelegten Normalebene senkrecht steht, p', q', r', so ist zunächst

$$\begin{aligned} pp_0 + qq_0 + rr_0 &= 0 \\ pp' + qq' + rr' &= 0 \\ p'p_0 + q'q_0 + r'r_0 &= 0 \\ p'x + q'y + r'z &= 0. \end{aligned}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt

$$p : q : r = q_0 r' - r_0 q' : r_0 p' - p_0 r' : p_0 q' - q_0 p',$$

aus den beiden letzten

$$p' : q' : r' = q_0 z - r_0 y : r_0 x - p_0 z : p_0 y - q_0 x.$$

Berücksichtigt man die letztere Proportion, so kann man die erstere in der Form schreiben:

$$p:q:r = x - p_0(p_0x+q_0y+r_0z) : y - q_0(p_0x+q_0y+r_0z) : z - r_0(p_0x+q_0y+r_0z).$$

Nun ist ferner

$$\begin{aligned} \sin i_1 : \sin i_2 &= \cos i_2 : \cos i_1 = pp_2 + qq_2 + rr_2 : pp_1 + qq_1 + rr_1 \\ &= p_1x + q_1y + r_1z - (p_0p_1 + q_0q_1 + r_0r_1)(p_0x + q_0y + r_0z) \\ &\quad : p_2x + q_2y + r_2z - (p_0p_2 + q_0q_2 + r_0r_2)(p_0x + q_0y + r_0z) \end{aligned}$$

und da, wie leicht zu erkennen,

$$p_0p_1 + q_0q_1 + r_0r_1 = 0,$$
$$p_0p_2 + q_0q_2 + r_0r_2 = 0,$$
$$p_1 : q_1 : r_1 = \frac{x}{\alpha - \nu_0} : \frac{y}{\beta - \nu_0} : \frac{z}{\gamma - \nu_0},$$
$$p_2 : q_2 : r_2 = \frac{x}{\alpha - \mu_0} : \frac{y}{\beta - \mu_0} : \frac{z}{\gamma - \mu_0}$$

ist, so ergiebt sich

$$\sin i_1 : \sin i_2 = p_2x + q_2y + r_2z : p_1x + q_1y + r_1z$$

$$= \sqrt{\frac{x^2}{(\alpha-\nu_0)^2} + \frac{y^2}{(\beta-\nu_0)^2} + \frac{z^2}{(\gamma-\nu_0)^2}} : \sqrt{\frac{x^2}{(\alpha-\mu_0)^2} + \frac{y^2}{(\beta-\mu_0)^2} + \frac{z^2}{(\gamma-\mu_0)^2}}$$

$$\sin^2 i_1 : \sin^2 i_2 = (\alpha-\mu_0)(\beta-\mu_0)(\mu_0-\gamma)(\nu_0-\lambda_0) : (\alpha-\nu_0)(\nu_0-\beta)(\nu_0-\gamma)(\mu_0-\lambda_0),$$

also genau wieder das oben erhaltene Resultat. Es wird also, wenn der Körper die Ecke des Gebietes trifft, keine Seite tangirt. Den Weg, den er genommen hat, schlägt er dann in umgekehrter Reihenfolge wieder ein.

Schliesst sich die Bahn nach $2m$ Berührungen mit der Krümmungslinie μ_0, und $2n$ Berührungen mit ν_0, so ist

$$n\int_\gamma^{\nu_0} \frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{\sqrt{(\alpha-\nu)(\nu_0-\nu)(\nu-\beta)(\nu-\mu_0)(\nu-\gamma)(\nu-\lambda_0)}} = m\int_\gamma^{\mu_0} \frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{\sqrt{(\alpha-\mu)(\nu_0-\mu)(\beta-\mu)(\mu-\gamma)(\mu-\lambda_0)}}.$$

Nun ist

$$\int_\gamma^{\mu_0} \frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{\sqrt{(\alpha-\mu)(\nu_0-\mu)(\beta-\mu)(\mu_0-\mu)(\mu-\gamma)(\mu-\lambda_0)}} = \int_\beta^{\nu_0} \frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{\sqrt{(\alpha-\nu)(\nu_0-\nu)(\nu-\beta)(\nu-\mu_0)(\nu-\gamma)(\nu-\lambda_0)}}$$

$$-\int_{-\infty}^{\lambda_0} \frac{(\lambda_0-\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{(\alpha-\lambda)(\nu_0-\lambda)(\beta-\lambda)(\mu_0-\lambda)(\gamma-\lambda)(\lambda_0-\lambda)}} - \int_\alpha^{\infty} \frac{(t-\lambda_0)\,dt}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\nu_0)(t-\beta)(t-\mu_0)(t-\gamma)(t-\lambda_0)}}.$$

Daraus folgt, dass $m > n$ ist, dass also die Krümmungslinien μ_0 öfter als die Krümmungslinien ν_0 berührt werden.

§ 6.

B. Die regulär-singulären Bewegungsformen sind durch zwei Fälle vertreten:

V. $\varrho > \alpha, \qquad \sigma = \beta.$

VI. $\alpha > \varrho > \beta, \ \sigma = \beta.$

Die separirten Bewegungsgleichungen sind:

$$\frac{(\mu-\lambda_0)d\mu}{(\beta-\mu)\sqrt{(\varrho-\mu)(\alpha-\mu)(\mu-\gamma)(\mu-\lambda_0)}}+\frac{(\nu-\lambda_0)d\nu}{(\beta-\nu)\sqrt{(\varrho-\nu)(\alpha-\nu)(\nu-\gamma)(\nu-\lambda_0)}}=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{(\mu-\lambda_0)d\mu}{\sqrt{g(\varrho-\mu)(\alpha-\mu)(\mu-\gamma)(\mu-\lambda_0)}}+\frac{1}{2}\frac{(\nu-\lambda_0)d\nu}{\sqrt{g(\varrho-\nu)(\alpha-\nu)(\nu-\gamma)(\nu-\lambda_0)}}=dt.$$

Die Bewegung geht stets durch die Kreispunkte des Ellipsoids hindurch. Bei V ist die ganze Oberfläche des Ellipsoids der Bewegung zugänglich, und durchläuft der Körper immer zwei diametral gegenüberliegende Kreispunkte; dagegen wird bei VI noch die Krümmungslinie $\nu = \varrho = \nu_0$ berührt, welche aus der Oberfläche einen glockenförmigen Theil herausschneidet; durch die beiden hierin befindlichen Kreispunkte findet in diesem Falle der Durchgang statt. Wenn jedoch sich der Körper zu Anfang in der Y-Ebene befindet (nur den Fall ausgeschlossen, dass die Anfangslage ein Kreispunkt ist), so bleibt er fortwährend in ihr, circulirend im Falle V, oscillirend im Falle VI.

Um die Bewegung zwischen den Kreispunkten einer genauen Untersuchung zu unterwerfen, ist es zweckmässig, die erste Bewegungsgleichung noch etwas umzuformen, was im Folgenden nur für den Fall V genauer durchgeführt wird, da sich der Fall VI in durchaus analoger Weise behandeln lässt.

Geht die Bahncurve durch den Punkt (μ_0, ν_0) hindurch, so kann man ihrer Gleichung für den ganzen zugehörigen Octanten die Form geben:

$$\int\limits_{\mu_0}^{\mu}\frac{(\mu-\lambda_0)d\mu}{(\beta-\mu)\sqrt{(\varrho-\mu)(\alpha-\mu)(\mu-\gamma)(\mu-\lambda_0)}}\mp\int\limits_{\nu_0}^{\nu}\frac{(\nu-\lambda_0)d\nu}{(\nu-\beta)\sqrt{(\varrho-\nu)(\alpha-\nu)(\nu-\gamma)(\nu-\lambda_0)}}=0,$$

wo unter Annahme des positiven Werthes der Wurzeln das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem vom Punkte (μ_0, ν_0) aus die Coordinaten μ, ν beide zugleich an Werth entweder zu- oder abnehmen oder aber die eine zu-, die andere abnimmt. Setzt man nun, für die Wurzeln überall den positiven Werth annehmend:

$$\mathsf{M}=\frac{\mu-\lambda_0}{\beta-\mu}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\varrho-\mu)(\alpha-\mu)(\mu-\gamma)(\mu-\lambda_0)}}-\frac{\beta-\lambda_0}{\beta-\mu}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\varrho-\beta)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\beta-\lambda_0)}},$$

$$\mathsf{N}=\frac{\nu-\lambda_0}{\nu-\beta}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\varrho-\nu)(\alpha-\nu)(\nu-\gamma)(\nu-\lambda_0)}}-\frac{\beta-\lambda_0}{\nu-\beta}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\varrho-\beta)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\beta-\lambda_0)}},$$

so sind M und N für $\mu = \beta$, $\nu = \beta$ endlich, und man erhält nach einfachen Umformungen als Gleichung der Bahncurve für den ersten Fall:

$$\frac{(\beta-\mu)(\nu-\beta)}{(\beta-\mu_0)(\nu_0-\beta)}=e^{\sqrt{\frac{(\varrho-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}{\beta-\lambda_0}}\left\{\int\limits_{\mu_0}^{\mu}M\,d\mu-\int\limits_{\nu_0}^{\nu}N\,d\nu\right\}},$$

für den zweiten Fall:

$$\frac{\beta-\mu}{\nu-\beta}:\frac{\beta-\mu_0}{\nu_0-\beta}=e^{\sqrt{\frac{(\varrho-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}{\beta-\lambda_0}}\left\{\int\limits_{\mu_0}^{\mu}M\,d\mu+\int\limits_{\nu_0}^{\nu}N\,d\nu\right\}}.$$

Nehmen wir nun $(\mu_0\nu_0)$ im Innern des Octanten gegeben an und verfolgen die Curve bis zum Kreispunkte, welcher in demselben Octanten liegt, so ist die zweite Formel anzuwenden: sie lehrt, dass $\frac{\beta-\mu}{\nu-\beta}$ sich einer endlichen Grenze k nähert, wenn $\nu=\mu=\beta$ wird, nämlich:

$$k=\frac{\beta-\mu_0}{\nu_0-\beta}\,e^{\sqrt{\frac{(\varrho-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}{\beta-\lambda_0}}\left\{\int\limits_{\mu_0}^{\beta}M\,d\mu+\int\limits_{\nu_0}^{\beta}N\,d\nu\right\}},$$

denn die Integrale besitzen, wie leicht zu ersehen ist, endliche Werthe. Mit Hilfe dieses Werthes k kann die Curvengleichung für die betrachteten Octanten auch in der Form geschrieben werden:

$$k=\frac{\beta-\mu}{\nu-\beta}\,e^{\sqrt{\frac{(\varrho-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}{\beta-\lambda_0}}\left\{\int\limits_{\mu}^{\beta}M\,d\mu+\int\limits_{\nu}^{\beta}N\,d\nu\right\}}.$$

Nun geht aber die Bahn durch den diametral gegenüberliegenden Kreispunkt hindurch und muss die Hauptschnitte $\mu=\gamma$ und $\nu=\alpha$ einmal durchschneiden. Ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, kann man annehmen, dass sie zuerst den Hauptschnitt $\mu=\gamma$ im Punkte $\nu=\nu'$ und dann den Hauptschnitt $\nu=\alpha$ im Punkte $\mu=\mu'$ schneidet; dann andernfalls könnte man die Kreispunkte mit einander so vertauschen, dass die Annahme zutreffend ist. Unsere Bahncurve zerfällt daher in drei Theile. Für den ersteren haben wir

$$k=\frac{\beta-\gamma}{\nu'-\beta}\,e^{\sqrt{\frac{(\varrho-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}{\beta-\lambda_0}}\left\{\int\limits_{\gamma}^{\beta}M\,d\mu+\int\limits_{\nu'}^{\beta}N\,d\nu\right\}},$$

für den letzten, wenn der Grenzwerth von $\frac{\beta-\mu}{\nu-\beta}$ im andern Kreispunkt mit k' bezeichnet wird:

$$k'=\frac{\beta-\mu'}{\alpha-\beta}\,e^{\sqrt{\frac{(\varrho-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}{\beta-\lambda_0}}\left\{\int\limits_{\mu'}^{\beta}M\,d\mu+\int\limits_{\alpha}^{\beta}N\,d\nu\right\}}.$$

Bei dem mittleren Theil der Curve, für welchen die für den ersten der oben unterschiedenen beiden Fälle geltende Gleichung angewandt werden muss, ergiebt sich

$$\frac{(\beta-\mu')(\alpha-\beta)}{(\beta-\gamma)(\nu'-\beta)}=e^{\sqrt{\frac{(\varrho-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}{\beta-\lambda_0}}\left\{\int\limits_{\gamma}^{\mu'}M\,d\mu-\int\limits_{\nu'}^{\alpha}N\,d\nu\right\}}.$$

Aus den letzten drei Formeln ergiebt sich durch Multiplication

$$kk' = \frac{(\beta-\gamma)^2}{(\alpha-\beta)^2} e^{2\sqrt{\frac{(\varrho-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}{\beta-\lambda_0}}\left\{\int_\gamma^\beta M\,d\mu + \int_\alpha^\beta N\,d\nu\right\}}.$$

Es ist also kk' eine Constante, die durch A^2 bezeichnet werden möge, so dass

$$kk' = A^2$$

$$A = \frac{\beta-\gamma}{\alpha-\beta} e^{\sqrt{\frac{(\varrho-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}{\beta-\lambda_0}}\int_\gamma^\alpha T\,dt},$$

wo

$$T = \frac{t-t_0}{\beta-t}\,\frac{1}{\sqrt{(\varrho-t)(\alpha-t)(t-\gamma)(t-\lambda_0)}} - \frac{\beta-t_0}{\beta-t}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\varrho-\beta)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\beta-\lambda_0)}}$$

gesetzt, und den Wurzeln der positive Werth beizulegen ist.

Nun soll die Curve auch über die Kreispunkte hinaus verfolgt werden. Es muss dazu untersucht werden, welchen Grenzwerth $\frac{\beta-\mu}{\nu-\beta}$ auf der einen Seite des Kreispunktes hat, wenn dieser Quotient auf der andern die gegebene Grösse k als Grenze besitzt. Hierbei benutzen wir den Umstand, dass die Bahn ihre Richtung nur stetig ändern kann, und stellen die geometrische Bedeutung von k fest. Um den letzteren Punkt in aller Strenge zu erledigen, kann man sich folgender Betrachtung bedienen.

Wir nehmen auf der Oberfläche des Ellipsoids einen Punkt an, verbinden ihn mit dem Kreispunkt durch eine Gerade und wollen den Winkel φ zwischen dieser Linie und der im Kreispunkt in der Y-Ebene an das Ellipsoid gezogenen Tangente bestimmen. Nennt man die Richtungscosinus der ersteren l, m, n, der letzteren l', m', n', so ist

$$\cos\varphi = ll' + mm' + nn'$$

und, wenn zur Abkürzung

$$a = \sqrt{(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)} - (\alpha-\beta),$$

$$b = \sqrt{(\mu-\gamma)(\nu-\gamma)} - (\beta-\gamma)$$

gesetzt wird,

$$l : m : n = \sqrt{(\alpha-\lambda_0)(\beta-\gamma)}\,a : \sqrt{(\beta-\lambda_0)(\alpha-\gamma)(\nu-\beta)(\mu-\gamma)} : \sqrt{(\gamma-\lambda_0)(\alpha-\beta)}\,b,$$

ausserdem

$$l' : m' : n' = \sqrt{(\alpha-\lambda_0)(\beta-\gamma)} : 0 : -\sqrt{(\gamma-\lambda_0)(\alpha-\beta)}.$$

Setzt man die hieraus sich ergebenden Werthe in den Ausdruck für $\cos\varphi$ ein und beachtet $l^2+m^2+n^2=1$, $l'^2+m'^2+n'^2=1$, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$\cos\varphi = \frac{(\alpha-\lambda_0)(\beta-\gamma)\,a - (\gamma-\lambda_0)(\alpha-\beta)\,b}{\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\beta-\lambda_0)(-a-b)\,[2(\beta-\lambda_0)-a+b]}}.$$

Schreibt man dieses Resultat in der Form

$$\cos\varphi = \frac{(\beta-\gamma)a-(\alpha-\beta)b}{\sqrt{2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(-a-b)\left(1-\frac{a-b}{2\beta-2\lambda_0}\right)}} + \sqrt{\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}{2(\alpha-\gamma)(\beta-\lambda_0)}}\sqrt{\frac{-a-b}{1-\frac{a-b}{2\beta-2\lambda_0}}},$$

so lässt sich erkennen, dass $\cos\varphi$ sich für $\mu=\nu=\beta$, also für $a=b=0$ derselben Grenze nähert wie der Ausdruck

$$\Phi = \frac{(\beta-\gamma)a-(\alpha-\beta)b}{\sqrt{2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(-a-b)}}.$$

Letzterer lässt sich in die Gestalt setzen:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}}\,\frac{u}{\sqrt{v}},$$

wo

$$u = (\beta-\gamma)\sqrt{(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)} - (\alpha-\beta)\sqrt{(\mu-\gamma)(\nu-\gamma)},$$
$$v = \alpha-\gamma-\sqrt{(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)}-\sqrt{(\mu-\gamma)(\nu-\gamma)}$$

ist, und die Grenze, der er sich nähert, kann bestimmt werden, wenn er in folgender Weise umgeformt wird. Zur Abkürzung sei

$$u' = (\beta-\gamma)\sqrt{(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)} + (\alpha-\beta)\sqrt{(\mu-\gamma)(\nu-\gamma)},$$
$$v' = \alpha-\gamma+\sqrt{(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)}-\sqrt{(\mu-\gamma)(\nu-\gamma)},$$
$$v'' = \alpha-\gamma-\sqrt{(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)}+\sqrt{(\mu-\gamma)(\nu-\gamma)},$$
$$v''' = \alpha-\gamma+\sqrt{(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)}+\sqrt{(\mu-\gamma)(\nu-\gamma)},$$

so nähert sich u' dem Werthe $2(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)$, das Product $v'v''v'''$ dem Werthe $8(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$, und man kann schreiben:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}}\cdot\frac{uu'}{\sqrt{vv'v''v'''}}\cdot\frac{\sqrt{v'v''v'''}}{u'} = \frac{\sqrt{v'v''v'''}}{u'\sqrt{2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}}\,\frac{U}{V},$$

wo

$$U = uu' = (\alpha-\gamma)\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)([\beta-\mu]-[\nu-\beta])+(\alpha-2\beta+\gamma)(\beta-\mu)(\nu-\beta)\},$$
$$V^2 = vv'v''v''' = (\alpha-\gamma)^4+(\alpha-\mu)^2(\alpha-\nu)^2+(\nu-\gamma)^2(\mu-\gamma)^2-2(\alpha-\gamma)^2(\nu-\gamma)(\mu-\gamma),$$
$$-2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)-2(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)(\mu-\gamma)(\nu-\gamma) = (\alpha-\gamma)^2(\nu-\mu)^2,$$

also

$$V = (\alpha-\gamma)(\nu-\mu)$$

ist. Setzt man jetzt $k = \frac{\beta-\mu}{\nu-\beta}$, so erkennt man leicht, dass Φ und daher $\cos\varphi$ sich der Grenze $\frac{1-k}{1+k}$ nähert; man hat daher für die Kreispunkte

$$k = \cot^2\frac{\varphi}{2}.$$

Da die Bahn sich beim Durchgang durch den Kreispunkt nur stetig in ihrer Richtung ändern kann, so muss aus dem Winkel φ nachher $\pi - \varphi$, also aus $cot^2 \frac{\varphi}{2}$ $tg^2 \frac{\varphi}{2}$ werden. Die Grösse k nimmt daher beim Durchgang durch den Nabelpunkt den reciproken Werth an; bezeichnet man ihren Werth vorher durch k', nachher durch k_1, so ist also

$$k' k_1 = 1.$$

Nun verfolgen wir unsere Bahncurve weiter und nennen die Grenzwerthe von $\frac{\beta - \mu}{\nu - \beta}$, wenn die Curve wieder zum ursprünglichen Kreispunkt zurückkehrt, vor ihm k_1', nachher k_2 und verstehen unter k_2', k_3, $k_3' \dots$ die analogen Grenzwerthe vor und nach den Kreispunkten, in der Reihenfolge, in welcher sie durchlaufen werden, so haben wir

$$\begin{array}{rr} k k' = A^2 & k' k_1 = 1 \\ k_1 k_1' = A^2 & k_1' k_2 = 1 \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ k_{\alpha-1} k'_{\alpha-1} = A^2 & k'_{\alpha-1} k_\alpha = 1. \end{array}$$

Daraus folgt

$$k_\alpha = k \,.\, A^{-2\alpha},$$

und es ergiebt sich also, dass, wenn α immer grösser wird, k_α sich der Grenze 0 oder ∞ nähert, je nachdem $A > 1$ oder < 1 ist; d. h. es nähert sich φ der Grenze 0 oder π. Die Bewegung nähert sich also in ihrer Richtung immer mehr der Y-Ebene, ohne dass jedoch die Richtung jemals mit ihr zusammenfallen kann.

Berechnet man mit Hilfe der zweiten Bewegungsgleichung die Zeitdauer eines Umlaufes, so ergiebt sich

$$T = 2 \int_\gamma^\beta \frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{\sqrt{g(\varrho - \mu)(\alpha - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}} + 2 \int_\beta^\alpha \frac{(\nu - \lambda_0)\, d\nu}{\sqrt{g(\varrho - \nu)(\alpha - \nu)(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)}}$$

$$= 2 \int_\gamma^\alpha \frac{(t - \lambda_0)\, dt}{\sqrt{g(\varrho - t)(\alpha - t)(t - \gamma)(t - \lambda_0)}}.$$

Erst daraus, dass diese Zeitdauer endlich ist, sind wir berechtigt zu schliessen, dass die soeben untersuchte Curve auch wirklich vom materiellen Punkte durchlaufen werden kann. Alle Umläufe vollziehen sich in derselben Zeit, und zwar ist diese Zeitdauer auch gleich derjenigen, welche bei der oben angegebenen singulären Bewegung in der Y-Ebene erforderlich ist. In diesem Falle lautet nämlich die Differentialgleichung der Bewegung auf der Strecke $\nu = \beta$:

$$(\mu - \lambda_0)\mu'^2 = 4g(\varrho - \mu)(\alpha - \mu)(\mu - \gamma),$$

auf der Strecke $\mu = \beta$:

$$(\nu - \lambda_0)\nu'^2 = 4g(\varrho - \nu)(\alpha - \nu)(\nu - \gamma),$$

und daraus leitet man das Behauptete ohne Schwierigkeit her.

Die hier entwickelte Methode lässt sich natürlich auch auf die geodätischen Linien auf dem Ellipsoid in Anwendung bringen, welche durch die Kreispunkte hindurchgehen, da sie ja als Grenzfälle der soeben untersuchten Curven angesehen werden können. Der Satz, dass die geodätischen Linien die Kreispunkte immer unter anderen Winkeln gegen die Y-Ebene schneiden und zwar unter Winkeln von der Beschaffenheit, dass die trigonometrischen Tangenten der Hälfte derselben eine geometrische Progression bilden, rührt von Hart* her und ist nach ihm von Michael Roberts** bewiesen worden und zwar mit Hilfe der elliptischen Functionen.*** Dem Satz von der Gleichheit der Umlaufzeiten entspricht der Satz über die Gleichheit der Länge der unendlich vielen zwei diametral gegenüberliegende Kreispunkte verbindenden geodätischen Linien.

§ 7.

C. Regulär-asymptotisch-singuläre Bewegungsformen treten in folgenden beiden Fällen auf:

VII. $\varrho = \alpha, \quad \alpha > \sigma > \beta.$

VIII. $\varrho = \alpha, \quad \beta > \sigma > \gamma.$

Die separirten Bewegungsgleichungen lauten:

$$\frac{(\mu - \lambda_0)\,d\mu}{(\alpha-\mu)\sqrt{(\beta-\mu)(\sigma-\mu)(\mu-\gamma)(\mu-\lambda_0)}} + \frac{(\nu - \lambda_0)\,d\nu}{(\alpha-\nu)\sqrt{(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\sigma)(\nu-\lambda_0)}} = 0,$$

$$\frac{(\mu - \lambda_0)^2\,d\mu}{(\alpha-\mu)\sqrt{(\beta-\mu)(\sigma-\mu)(\mu-\gamma)(\mu-\lambda_0)}} + \frac{(\nu - \lambda_0)^2\,d\nu}{(\alpha-\nu)\sqrt{(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\sigma)(\nu-\lambda_0)}} = 2\sqrt{g}\,dt.$$

Bei diesen beiden Bewegungsformen findet eine asymptotische Annäherung an den Hauptschnitt $\nu = \alpha$ statt; er wird niemals erreicht, denn aus der zweiten Bewegungsgleichung ergiebt sich dafür eine unendlich grosse Zeit. Die asymptotische Annäherung geschieht bei VII in fortwährenden Umläufen um das Ellipsoid herum, bei VIII in einer fortwährenden Oscillation zwischen den beiden Krümmungslinien $\mu = \sigma = \mu_0$. Wenn der Körper bei VII eine geeignete Bewegungsrichtung hat, kann er erst noch die Krümmungslinie $\nu = \sigma = \nu_0$ berühren, bevor er sich dem Hauptschnitt $\nu = \alpha$ nähert.

---

* Cambridge and Dublin mathematical Journal Bd. 4, S. 82.

** Journal de Mathématiques 1. série, tome 15, S. 213.

*** Vergl. auch Langenbeck, Ueber diejenigen geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid, welche durch einen Nabelpunkt gehen. Dissertation Göttingen. 1877.

Alles dies gilt für den Fall, dass sich der Körper zu Anfang seiner Bewegung nicht im Hauptschnitt $\nu = \alpha$ befindet. Befindet er sich aber hier, so bleibt er auch fortwährend in dem Hauptschnitt, und zwar circulirt er bei VII und oscillirt zwischen den Punkten $\mu = \sigma = \mu_0$ bei VIII. Die Bewegungsgleichungen werden in diesem Falle $\nu = \alpha$ und

$$(\mu - \lambda_0)\mu'^2 = 4g(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\sigma - \mu).$$

Für die Zeit des Umlaufes bei VII ergiebt sich:

$$2\int_\gamma^\beta \frac{(\mu - \lambda_0)\,d\mu}{\sqrt{g(\sigma - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}},$$

für die Oscillationsdauer bei VIII:

$$2\int_\gamma^{\mu_0} \frac{(\mu - \lambda_0)\,d\mu}{\sqrt{g(\beta - \mu)(\mu_0 - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}} \qquad (\sigma = \mu_0).$$

§ 8.

D. Regulär-asymptotisch-singulär-asymptotische Bewegungsform:

IX. $\varrho = \alpha, \quad \sigma = \beta.$

Aus der Differentialgleichung der Bahncurve

$$\frac{(\mu - \lambda_0)\,d\mu}{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)\sqrt{(\mu - \gamma)(\nu - \gamma)}} + \frac{(\nu - \lambda_0)\,d\nu}{(\alpha - \nu)(\nu - \beta)\sqrt{(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)}} = 0$$

ergiebt sich, dass entweder der Quotient oder das Product der beiden Ausdrücke:

$$\frac{(\alpha - \mu)^{\sqrt{\frac{\alpha - \lambda_0}{\alpha - \gamma}}}}{(\beta - \mu)^{\sqrt{\frac{\beta - \lambda_0}{\beta - \gamma}}}} \cdot \frac{\left[\sqrt{(\mu - \lambda_0)(\beta - \gamma)} + \sqrt{(\beta - \lambda_0)(\mu - \gamma)}\right]^{2\sqrt{\frac{\beta - \lambda_0}{\beta - \gamma}}}}{\left[\sqrt{(\mu - \lambda_0)(\alpha - \gamma)} + \sqrt{(\alpha - \lambda_0)(\mu - \gamma)}\right]^{2\sqrt{\frac{\alpha - \lambda_0}{\alpha - \gamma}}}},$$

$$\frac{(\alpha - \nu)^{\sqrt{\frac{\alpha - \lambda_0}{\beta - \gamma}}}}{(\nu - \beta)^{\sqrt{\frac{\beta - \lambda_0}{\beta - \gamma}}}} \cdot \frac{\left[\sqrt{(\nu - \lambda_0)(\beta - \gamma)} + \sqrt{(\beta - \lambda_0)(\nu - \gamma)}\right]^{2\sqrt{\frac{\alpha - \lambda_0}{\beta - \gamma}}}}{\left[\sqrt{(\nu - \lambda_0)(\alpha - \gamma)} + \sqrt{(\alpha - \lambda_0)(\nu - \gamma)}\right]^{2\sqrt{\frac{\beta - \lambda_0}{\beta - \gamma}}}}$$

constant ist, und zwar der Quotient in dem Octanten, in welchem von den beiden Coordinaten μ, ν beim Durchlaufen der Curve in dem einen oder dem anderen Sinne die eine wächst und die andere an Werth abnimmt, das Product in demjenigen, in welchem beide entweder zugleich wachsen oder abnehmen. Die Bewegung geht nun durch einen Kreispunkt hindurch; in dem anliegenden Octanten hat man den ersten, in dem aber, in welchen der Punkt nach Ueberschreitung des Hauptschnittes $\mu = \gamma$ gelangt, den zweiten Fall vor sich. Nennt man den constanten Werth des Quotienten in ersterem Octanten k, den constanten Werth des Productes in letzterem k' und nimmt an, dass der Hauptschnitt $\mu=\gamma$ im Punkte $\nu=\nu'$ getroffen wird, so erhält man, da dieser Punkt beiden Gleichungen genügen muss:

$$\frac{\left[\sqrt{(\nu'-\lambda_0)(\alpha-\gamma)}+\sqrt{(\alpha-\lambda_0)(\nu'-\gamma)}\right]^{2\sqrt{\frac{\alpha-\lambda_0}{\alpha-\gamma}}}\cdot(\nu'-\beta)^{\sqrt{\frac{\beta-\lambda_0}{\beta-\gamma}}}}{\left[\sqrt{(\nu'-\lambda_0)(\beta-\gamma)}+\sqrt{(\beta-\lambda_0)(\nu'-\gamma)}\right]^{2\sqrt{\frac{\beta-\lambda_0}{\beta-\gamma}}}\cdot(\alpha-\nu')^{\sqrt{\frac{\alpha-\lambda_0}{\alpha-\gamma}}}}=k,$$

$$\frac{\left[\sqrt{(\nu'-\lambda_0)(\beta-\gamma)}+\sqrt{(\beta-\lambda_0)(\nu'-\gamma)}\right]^{2\sqrt{\frac{\beta-\lambda_0}{\beta-\gamma}}}\cdot(\alpha-\nu')^{\sqrt{\frac{\alpha-\lambda_0}{\alpha-\gamma}}}}{\left[\sqrt{(\nu'-\lambda_0)(\alpha-\gamma)}+\sqrt{(\alpha-\lambda_0)(\nu'-\gamma)}\right]^{2\sqrt{\frac{\alpha-\lambda_0}{\alpha-\gamma}}}\cdot(\nu'-\beta)^{\sqrt{\frac{\beta-\lambda_0}{\beta-\gamma}}}}=k',$$

also
$$kk'=1.$$

Die zweite Differentialgleichung der Bewegung, in welcher die Zeit vorkommt, lässt sich durch Logarithmen integriren. Man braucht jedoch diese Operation nicht auszuführen, da man auch ohne die Form der Integralgleichung im Stande ist, auf die Endlichkeit oder Unendlichkeit der Zeit einen Schluss zu ziehen. Man kann nämlich die Differentialgleichung in zwei Formen bringen, nämlich

$$\frac{1}{2}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{(\alpha-\mu)\sqrt{g(\mu-\gamma)(\mu-\lambda_0)}}+\frac{1}{2}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{(\alpha-\nu)\sqrt{g(\nu-\gamma)(\nu-\lambda_0)}}=dt,$$

$$\frac{1}{2}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{(\beta-\mu)\sqrt{g(\mu-\gamma)(\mu-\lambda_0)}}+\frac{1}{2}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{(\beta-\nu)\sqrt{g(\nu-\gamma)(\nu-\lambda_0)}}=dt.$$

Die erste Form lehrt sofort, dass ein Kreispunkt vom anliegenden Octanten aus in endlicher Zeit, die zweite, dass der Punkt $\mu=\beta$, $\nu=\alpha$ aber niemals erreicht wird.

Mit Hilfe der soeben angedeuteten Betrachtungen gelangt man nun zu folgender Charakteristik unserer Bewegungsform. Der materielle Punkt kann sich, je nach seiner anfänglichen Lage und Bewegungsrichtung auf vier verschiedene Weisen verhalten.

Befindet er sich zu Anfang seiner Bewegung im Innern eines Octanten, die Z-Ebene mit eingeschlossen, so richtet sich seine Bewegung nach dem Scheitel der kleinsten Achse hin, oder er geht zunächst noch durch den Kreispunkt hindurch, um sich dann dem Scheitel der kleinsten Achse zu nähern, der mit diesem nicht in demselben Octanten liegt. Dieser Scheitel wird aber niemals von dem materiellen Punkt erreicht, sondern es findet nur eine asymptotische Annäherung statt. Die vorher definirten Constanten k und k' sind in diesem Falle endlich und von 0 verschieden.

Befindet sich der materielle Punkt anfänglich in der Y-Ebene, und wenn im Kreispunkt, fällt auch seine anfängliche Bewegungsrichtung in dieselbe hinein — sonst hat man den vorhergehenden Fall — so bleibt er fortwährend in ihr und nähert sich dem Scheitel der kleinsten Achse asymptotisch. Die Bewegungsgleichung lautet auf der Strecke $\nu = \beta$:

$$(\mu - \lambda_0)\mu'^2 = 4g(\alpha - \mu)^2(\mu - \gamma),$$

auf der Strecke $\mu = \beta$:

$$(\nu - \lambda_0)\nu'^2 = 4g(\alpha - \nu)^2(\nu - \gamma).$$

Ist der materielle Punkt zu Anfang in der X-Ebene, so verhält er sich ganz analog wie beim vorigen Fall: er bleibt in ihr und nähert sich dem Scheitel der kleinsten Achse, ohne ihn in endlicher Zeit zu erreichen. Es ist dann $\nu = \alpha$ und

$$(\mu - \lambda_0)\mu'^2 = 4g(\beta - \mu)^2(\mu - \gamma).$$

Befindet sich endlich der Punkt im Scheitel der kleinsten Achse, in welchen er von aussen niemals hineinkommen kann, so verbleibt er dort in Ruhe.

§ 9.

E. Singuläre Bewegungsformen. Die Bewegungen finden in einer Krümmungslinie statt, die Hauptschnitte mit eingeschlossen; der materielle Punkt gelangt zu allen erreichbaren Lagen in endlicher Zeit und kann niemals ruhen, wo er sich auch auf der Krümmungslinie zu Anfang befindet.

Das Bewegungsgebiet ist eine von einem Hauptschnitt verschiedene Krümmungslinie in dem Falle

X. $\varrho = \sigma, \quad \alpha > \varrho > \beta$

und zwar ist es die Krümmungslinie $\nu = \varrho = \sigma = \nu_0$. Für die Umlaufszeit erhält man

$$T = 2\int_\gamma^\beta \frac{(\mu - \lambda_0)\,d\mu}{\sqrt{g(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}}.$$

In allen anderen Fällen ist das Bewegungsgebiet ein Hauptschnitt:

XI. XII. $\varrho \geqq \alpha, \quad \sigma = \alpha.$

Es findet ein Umlauf im Hauptschnitt $\nu = \alpha$ statt, dessen Zeitdauer ausgedrückt wird durch

$$T = 2\int_\gamma^\beta \frac{(\mu - \lambda_0)\,d\mu}{\sqrt{g(\varrho - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}}.$$

XIII. XIV. $\varrho = \beta, \quad \beta > \sigma > \gamma.$

Es findet eine Oscillation im Hauptschnitt $\nu = \beta$ statt; wenn $\sigma = \beta$ ist, zwischen den Kreispunkten. Die Zeitdauer eines Hin- und Herganges ist

$$T = 2\int_\gamma^\sigma \frac{(\mu - \lambda_0)\,d\mu}{\sqrt{g(\alpha - \mu)(\sigma - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)}}.$$

XV. XVI. $\sigma = \gamma$. $\varrho > \alpha$ oder $\alpha > \varrho > \beta$.

Bei XV findet eine Circulation, bei XVI eine Oscillation im Hauptschnitt $\mu = \gamma$ statt. Die Circulations- resp. Oscillationsdauer beträgt

$$\mathsf{T} = 2\int_{\gamma}^{\varrho, \alpha} \frac{(\nu - \lambda_0)\, d\nu}{\sqrt{g(\varrho - \nu)(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \lambda_0)}}.$$

F. Singulär-asymptotische Bewegungsform:

XVII. $\varrho = \alpha$, $\sigma = \gamma$.

Die beiden letzten Fälle (XV, XVI) bilden den Uebergang zu dieser Bewegungsform. Es wird $\mathsf{T} = \infty$, und rückt also der materielle Punkt niemals in den Scheitel der mittleren Achse hinein. Wenn er aber in diesen Scheitel hineingesetzt wird, so verharrt er dort in Ruhe.

G. Ruhelage des materiellen Punktes.

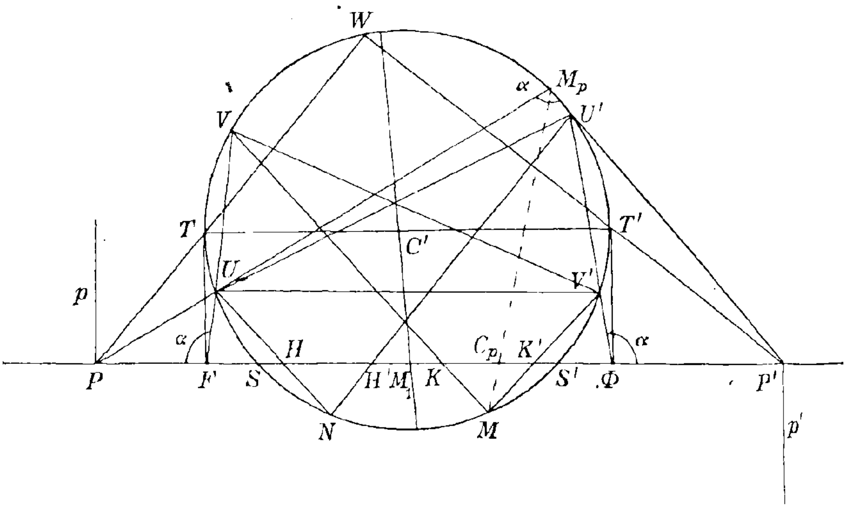
XVIII. $\varrho = \beta$, $\sigma = \gamma$.

Das Niveau der Geschwindigkeit 0 geht durch die Scheitel der grossen Achse hindurch, und es kann sich der Punkt nur in einem derselben und nur in Ruhe befinden.

Kleinere Mittheilungen.

VI. Construction des Collineationscentrums eines dioptrischen Systems.

In einer „Bemerkung zu einer dioptrischen Construction“ im zweiten Hefte des XXXVII. Jahrgangs dieser Zeitschrift, S. 123, giebt Professor Helm eine einfache Construction des Collineationscentrums der conjugirten Object- und Bildebenen centrirter dioptrischer Systeme an durch eine Verallgemeinerung des Möbius'schen Symptosenkreises für Linsensysteme in Luft. Dieselbe ist noch einer weiteren Verallgemeinerung fähig, wenn man von dem bekannten Lippich'schen oder Hällsten'schen Symptosenkreise* für allgemeine centrirte, dioptrische Systeme ausgeht.



Es seien F und Φ die Brennpunkte, H und H' die Hauptpunkte, K und K' die Knotenpunkte, P axialer Objectpunkt und P' sein Bildpunkt, p und p' die zur Achse senkrechten conjugirten Object- und Bildebenen. Lippich construirt nun um einen in der senkrechten Mediane der Focaldistanz $F\Phi$ gelegenen Punkt C einen Kreis von dem Durchmesser $F\Phi$ in der Höhe CM_1 gleich dem geometrischen Mittel $\sqrt{-f\varphi}$ der Brennweiten f

* Lippich in den Mittheilungen des naturw. Vereins für Steyermark II. Bd., 3. Heft, S. 449. Graz 1871. — Hällsten im Archiv. f. Anat. u. Physiol. Physiol. Abthl. 1880. S. 115. — Vergl. auch Hederich, Recherches dioptriques sur les systemes centrés. Inaug.-Diss. Rostock 1892. Remarques historiques p. 5.

und φ. Da die vordere Brennweite f in Berücksichtigung des Vorzeichens der Richtung der Lichtbewegung wesentlich negativ ist, so sind die Senkrechten FT und $\Phi T'$ gleich $\sqrt{-f\varphi}$. Zieht man die Transversale PT bis W und die Gerade $WT'P'$, so ist P' der gesuchte Bildpunkt von P. Es ist nämlich

$$FP\,.\,\Phi P' = FT\,.\,\Phi T', \quad \xi_0 \xi_1 = f\varphi.$$

Um nun das Collineationscentrum C_p der Ebenen p und p' zu finden, mache $FU = FH = f$, $\Phi V' = \Phi K' = \varphi$ und ziehe die Transversalen FUV und $\Phi V'U'$. Weiter ziehe man die Transversalen PUM_p und $M_pU'P'$, ausserdem die Winkelhalbirende M_pM; dann sind P' und C_p die gesuchten Punkte. Es lässt sich nämlich beweisen, dass die Hauptpunktsstrahlen UH und $U'H'$ sich in einem Kreispunkte N, die Knotenpunktsstrahlen VK und $V'K'$ in einem Kreispunkte M schneiden, dessen Verbindungslinie MM_p den Winkel PM_pP' halbirt. Es ist $V'K'$ parallel $U'H'$ und UH parallel VK. Der Winkel PFV sei gleich α; dann ist auch $P'\Phi V' = \alpha$ und $UV'U' = 180^0 - \alpha$. Ferner sind die Winkel FHU und $\Phi H'U'$ gleich $\frac{1}{2}\alpha$, UNU' gleich $180^0 - \alpha = UV'U'$. Folglich ist N ein Kreispunkt, was auch aus gleichen Gründen für M gilt. Nun ist der Bogen $U'M = MU$, weil $U'V' = MN = NU$ ist; folglich der Peripheriewinkel $U'M_pM$ gleich UM_pM, also MM_p Winkelhalbirende.

Um noch zu beweisen, dass P und P' conjugirte Punkte und C_p Collineationscentrum zu p und p' ist, geht man aus von der Aehnlichkeit der Dreiecke PFU und $U'\Phi P'$. Der Winkel $P'\Phi U' = PFU = \alpha$, der Winkel PM_pP' ebenfalls gleich α, da er das Supplement von $UV'U'$ ist. Die Schenkel PP' und PM_p des Winkels $P'PM_p$ bilden also mit den Schenkeln $U'\Phi$ und $U'P'$ des Winkels $P'U'\Phi$ die gleichen Winkel α; folglich sind sie einander gleich und die Dreiecke FPU und $\Phi U'P'$ ähnlich. Daraus folgt

$$FP\,.\,\Phi P' = FU\,.\,\Phi U',$$

oder, wenn man wiederum $FP = \xi_0$, $\Phi P' = \xi_1$ setzt, $\xi_0 \xi_1 = f\varphi$. Deswegen sind P und P' conjugirte Punkte. Da aber auch PM_pP' denselben Dreiecken ähnlich ist, so wird durch die Winkelhalbirende M_pM

$$\frac{FP}{FU} = \frac{M_pP}{M_pP'} = \frac{C_pP}{C_pP'},$$

und, wenn man die Object- und Bildgrössen mit p und p' bezeichnet, mit Rücksicht auf das Vorzeichen der Richtung

$$\frac{\xi_0}{-f} = \frac{p}{p'} = \frac{C_pP}{C_pP'}.$$

Demnach ist C_p das Collineationscentrum und in gleicher Weise lässt sich der Achsenpunkt E_p finden, in welchem die Collineationsebene der

Bündel P und P' normal zur Achse steht. Der Kreis trifft, wie sich ebenfalls leicht nachweisen lässt, die Achse in den Listing'schen Symptosen S und S'.

Die Construction lässt sich nun offenbar dahin erweitern, dass alle Kreisschaaren, deren Centra in der senkrechten Mediane von $F\Phi$ liegen und deren Potenzen bezüglich der Brennpunkte F und Φ den Werth $-f\varphi$ haben, Symptosenkreise sind und in gleicher Weise die Achsenpunkte C_p und E_p finden lassen. Von diesen Kreisschaaren sind dann die Kreise von Möbius, Lippich, Hällsten und Helm specielle Fälle.

Rostock, im November 1892. MATTHIESSEN.

XI.

Die Brennpunktmechanismen.

Von

Dr. L. Burmester,

Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München.

Hierzu Tafel III, IV und V.

I. Die Constructionen und Eigenschaften der Brennpunktmechanismen.

1. Ein Mechanismus, bei dem die Punkte eines jeden Gliedes in Bezug auf jedes andere Glied sich in bestimmten Bahnen bewegen, wird ein zwangläufiger genannt; und wenn mehr Bedingungen erfüllt werden, als zur Zwangläufigkeit im Allgemeinen erforderlich sind, dann heisst der Mechanismus ein zwangläufiger übergeschlossener, oder kurz ein übergeschlossener Mechanismus. Die Auffindung und Untersuchung der übergeschlossenen Mechanismen bereichert die Geometrie mit vielen neuen invarianten Beziehungen; deshalb wollen wir die übergeschlossenen Mechanismen behandeln, auf welche Hart*, Kempe**, Darboux*** hingewiesen haben, und die wegen ihrer interessanten Eigenschaften besondere Beachtung verdienen. Denn wir werden dadurch zu merkwürdigen Brennpunkt-Beziehungen veränderlicher Kegelschnittschaaren und zu vielen neuen übergeschlossenen Mechanismen gelangen.

In Fig. 4 und 5, Taf. III sind die vier Glieder eines Gelenkvierecks $TUVW$ durch die auf den Viereckseiten ausserhalb oder innerhalb befindlichen Gelenkachsen A, B, C, D mit den vier Gliedern AF, BF, CF, DF, die in F eine gemeinsame Gelenkachse haben, so verbunden, dass die beiden Vierecke $TAFD$, $FCVB$ und die beiden Vierecke $UAFB$, $FCWD$ entgegengesetzt ähnlich sind. Wir werden erkennen, dass der durch diese Verbindung erhaltene ebene Gelenkmechanismus, dessen Achsen zur Zeichnungsebene senkrecht und durch Punkte dargestellt sind, ein über-

* Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. VIII p. 288. 1877.

** Daselbst, Vol. IX p. 138. 1877.

*** Bulletin des Sciences mathematiques et astronomiques, 2ème sér. T. III, p. 144. 1879.

geschlossener ist, und dass es bei einem Gelenkviereck $TUVW$ unendlich viele derartig angeschlossene Gelenkpunkte F giebt, von denen je zwei als zusammengehörig die Brennpunkte eines veränderlichen Kegelschnittes sind, der die vier Seiten des Gelenkvierecks während der Bewegung beständig berührt; deshalb wollen wir einen solchen übergeschlossenen Mechanismus einen Brennpunktmechanismus nennen.

2. In Fig. 1 ist ein Kreis k gegeben, und auf einer durch den Mittelpunkt A gehenden Geraden nehmen wir zwei beliebige feste Punkte T, U an; ferner setzen wir die Abstände $TA = a_1$, $UA = a_2$, $TU = a$. Bezeichnen wir nun den Radius AF mit α und verbinden wir einen beliebigen Kreispunkt F mit den Punkten T, U, so ist:

$$\frac{\alpha^2 + a_1{}^2 - TF^2}{\alpha a_1} = \frac{\alpha^2 + a_2{}^2 - UF^2}{\alpha a_2},$$

oder

$$a_1 UF^2 - a_2 TF^2 = a_1(\alpha^2 + a_2{}^2) - a_2(\alpha^2 + a_1{}^2),$$

und weil $a_1 - a_2 = a$ ist, ergiebt sich

$$a_1 UF^2 - a_2 TF^2 = a(\alpha^2 - a_1 a_2).$$

Ist nun eine Gleichung in der Form

$$n_1 UF^2 - n_2 TF^2 = 1$$

gegeben, so repräsentirt diese Gleichung einen Kreis, dessen Mittelpunkt A auf der Geraden TU liegt; denn die Lage des Mittelpunktes A und der Radius α sind durch die Gleichungen

$$\frac{a_1}{a(\alpha^2 - a_1 a_2)} = n_1, \quad \frac{a_2}{a(\alpha^2 - a_1 a_2)} = n_2, \quad a_1 - a_2 = a$$

bestimmt.

3. Betrachten wir den in Fig. 2 gezeichneten fünfgliederigen Gelenkmechanismus $TUBFD$, dessen Gliedlängen

$$TU = a, \quad UB = b_1, \quad BF = \beta, \quad TD = d_2, \quad DF = \delta$$

gegeben sind, und denken wir uns den Gelenkpunkt F gegen das als fest angenommene Glied TU so bewegt, dass die Winkel FBU, FDT entweder gleich sind, wie in Fig. 2, oder sich zu zwei Rechten ergänzen, wie in Fig. 3, dann wird dieser Mechanismus zwangläufig geführt. Um die Bahn des unter dieser Bedingung bewegten Gelenkpunktes F in Bezug auf das feste Glied TU abzuleiten, beachten wir, dass der Bedingung gemäss

$$\pm \cos FBU = \cos FDT$$

ist, und das positive Vorzeichen dem ersten, das negative dem zweiten Fall entspricht. Hiernach erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{b_1^2+\beta^2-UF^2}{b_1\beta}=\frac{d_2^2+\delta^2-TF^2}{d_2\delta},$$

welche den ersten und den zweiten Fall enthält; denn je nachdem der Punkt F bezüglich der Strecken UB, TD nach gleichen oder entgegengesetzten Seiten gelegen ist, erhalten die Strecken β, δ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen.

Durch Umformung ergiebt sich

$$1)\qquad d_2\delta\,.\,UF^2-b_1\beta\,.\,TF^2=d_2\delta(b_1^2+\beta^2)-b_1\beta(d_2^2+\delta^2).$$

Da diese Gleichung einen Kreis repräsentirt, dessen Mittelpunkt A auf der Geraden TU liegt, so bewegt sich der Gelenkpunkt F auf diesem Kreise.

Durch Einfügung eines Gliedes AF, welches in A und F drehbar an den Mechanismus angeschlossen ist, erhalten wir einen sechsgliederigen zwangläufigen Mechanismus, bei dem in Fig. 2 die Winkel FBU, FDT beständig gleich sind und in Fig. 3 sich zu zwei Rechten ergänzen.

Bezeichnen wir wie vorhin die Strecken TA, UA resp. mit a_1, a_2, den Radius mit α, dann ist

$$\frac{a_1}{a(\alpha^2-a_1a_2)}=\frac{d_2\delta}{d_2\delta(b_1^2+\beta^2)-b_1\beta(d_2^2+\delta^2)},$$

$$\frac{a_2}{a(\alpha^2-a_1a_2)}=\frac{b_1\beta}{d_2\delta(b_1^2+\beta^2)-b_1\beta(d_2^2+\delta^2)},$$

$$a_1-a_2=a.$$

Hieraus ergiebt sich

$$2)\qquad \frac{a_1}{a_2}=\frac{d_2\delta}{b_1\beta},$$

$$3)\qquad a_1=a\,\frac{d_2\delta}{d_2\delta-b_1\beta},\quad a_2=a\,\frac{b_1\beta}{d_2\delta-b_1\beta},$$

$$4)\qquad \left\{\begin{aligned}\alpha^2&=\frac{d_2\delta(b_1^2+\beta^2)-b_1\beta(d_2^2+\delta^2)}{d_2\delta-b_1\beta}+a_1a_2\\ &=\frac{a_1}{a}(b_1^2+\beta^2)-\frac{a_2}{a}(d_2^2+\delta^2)+a_1a_2.\end{aligned}\right.$$

Durch das Verhältniss $a_1:a_2$ ist die Lage des Kreismittelpunktes A auf der Geraden TU bestimmt, und derselbe liegt ausserhalb oder innerhalb der Strecke TU, je nachdem β, δ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Machen wir in Fig. 4 und 5, wo die Winkel FBU, FDT resp. gleich sind oder sich zu zwei Rechten ergänzen, die Winkel

$$BFV=DTF,\quad DFW=BUF,$$

so erhalten wir auf UB, TD die Punkte V, W und es ist das Dreieck $FBV\sim TDF$, das Dreieck $FDW\sim UBF$.

Setzen wir $UV = b$, $UB = b_2$, $VW = c$, $WD = d_1$, $WT = d$, dann ist in Folge dieser entgegengesetzt ähnlichen Dreiecke

5) $$UF : \beta : b_1 = FW : d_1 : \delta, \quad TF : \delta : d_2 = FV : b_2 : \beta,$$

und hiernach:

6) $$b_1 d_1 = b_2 d_2 = \beta \delta,$$

7) $$\frac{b_1}{b_2} = \frac{d_2}{d_1}.$$

In Fig. 4 ist Winkel $UFV = TFW$, also auch Winkel $TFU = WFV$; in Fig. 5 dagegen ergänzen sich diese Winkelpaare zu zwei Rechten.

Es ist demnach

$$\pm \frac{TF^2 + UF^2 - a^2}{TF.UF} = \frac{WF^2 + VF^2 - c^2}{WF.VF}$$

und

$$c^2 = \pm \frac{WF.VF}{TF.UF}(-TF^2 - UF^2 + a^2) + WF^2 + VF^2.$$

Aus den Proportionen in 5) folgt:

$$\frac{WF}{UF} = \frac{d_1}{\beta} = \frac{\delta}{b_1}, \quad \frac{VF}{TF} = \frac{b_2}{\delta} = \frac{\beta}{d_2},$$

und durch Einsetzung ergiebt sich

$$c^2 = \frac{\beta\delta}{b_1 d_2}(-TF^2 - UF^2 + a^2) + \left(\frac{\beta}{d_2}\right)^2 TF^2 + \left(\frac{\delta}{b_1}\right)^2 UF^2.$$

Der Factor $\frac{\beta\delta}{b_1 d_2}$ erhält das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem β, δ entsprechend dem ersten und zweiten Fall gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.

Durch Umformung erhalten wir

$$c^2 = \frac{b_1\beta - d_2\delta}{b_1^2 d_2^2}(b_1\beta \, . \, TF^2 - d_2\delta \, . \, UF^2) + \frac{b_2}{b_1}a^2$$

und in Hinsicht auf 1)

8) $$c^2 = \frac{b_1\beta - d_2\delta}{b_1^2 d_2^2}[b_1\beta(d_2^2 + \delta^2) - d_2\delta(b_1^2 + \beta^2)] + \frac{b_2}{b_1}a^2.$$

Dieser für c^2 erhaltene constante Werth vereinfacht sich durch Einführung von a_1, a_2 und α aus 3), 4); denn dann ergiebt sich

9) $$c^2 = \frac{a^2\alpha^2 b_2}{a_1 a_2 b_1}.$$

Die Seite $VW = c$ des Vierecks $TUVW$ ist also während der Bewegung constant, und wir können demnach dieses Viereck in Fig. 4 und 5 als ein Gelenkviereck betrachten.

In Folge der symmetrischen Beziehungen beschreibt auch der Gelenkpunkt F in Bezug auf das Glied VW einen Kreis, dessen Mittelpunkt C

auf der Geraden VW liegt. Es können also die vier Glieder FA, FB, FC, FD, welche in F durch eine gemeinsame Achse verbunden sind, auch in den Punkten A, B, C, D an die vier Seiten des Gelenkvierecks $TUVW$ drehbar angeschlossen werden, und wir erhalten somit einen achtgliederigen übergeschlossenen Mechanismus.

Setzen wir die Strecke $VC = c_1$, $WC = c_2$, so ergiebt sich nach Analogie aus der Formel 2):

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{b_2 \beta}{d_1 \delta},$$

und weil nach 7)

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

ist, folgt auch

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_2}{c_1}.$$

Demnach erhalten wir den Satz:

> Die gegenüber liegenden Seiten TU, WV und UV, TW des Gelenkviereckes $TUVW$ werden von den Punkten A, C und B, D in gleiche Verhältnisse getheilt.

Es ist also

$$\frac{a}{c} = \frac{a_2}{c_1} = \frac{a_1}{c_2};$$

demnach erhalten wir durch Einsetzung in 9)

$$\alpha^2 = c_1 c_2 \frac{b_1}{b_2},$$

und wegen der symmetrischen Beziehungen ist, wenn wir den Radius FC mit γ bezeichnen,

$$\gamma^2 = a_1 a_2 \frac{b_2}{b_1}.$$

Folglich ergeben sich die Verhältnisse

$$\frac{\alpha^2}{c_2{}^2} = \frac{b_1 c_1}{b_2 c_2} = \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}, \quad \frac{a_2{}^2}{\gamma^2} = \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}.$$

Ferner ist nach 5), 2), 6):

$$\frac{UF^2}{WF^2} = \frac{b_1{}^2}{\delta^2} = \frac{b_1{}^2}{\delta^2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{d_2 \delta}{b_1 \beta} = \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}.$$

Hiernach stehen die betreffenden Seiten der beiden Dreiecke UAF, FCW in gleichem Verhältnisse und folglich sind diese beiden Dreiecke entgegengesetzt ähnlich. Wegen der symmetrischen Beziehung gilt dasselbe auch von den beiden Dreiecken TAF, FCV.

Da nach der obigen Bestimmung der Punkte V, W

$$TDF \backsim FBV, \quad UBF \backsim FDW$$

ist, so ergiebt sich die entgegengesetzte Aehnlichkeit der Vierecke

$$TDFA \backsim FBVC, \quad UBFA \backsim FDWC.$$

Damit ist bewiesen, dass der betrachtete übergeschlossene Gelenkmechanismus in Fig. 4 und 5 gemäss unserer Definition ein Brennpunktmechanismus ist.

Das Gelenkviereck $TUVW$ wollen wir das Stammviereck und jene Vierecke mit der gemeinsamen Ecke F die Fachvierecke nennen, die Gelenkpunkte F, in welchem die vier Glieder durch eine gemeinsame Achse verbunden sind, die Viergliedpunkte und die Gelenkpunkte A, B, C, D die Anschlusspunkte nennen. Zu jedem Viergliedpunkte F gehören vier bestimmte Anschlusspunkte A, B, C, D, die entweder wie in Fig. 5, alle auf den Seiten des Stammvierecks oder, wie in Fig. 4, alle auf den Verlängerungen dieser Seiten liegen.

4. Da in Fig. 4 und 5 wegen jener entgegengesetzt ähnlichen Vierecke der Winkel

$$FDA = VBC, \quad FDC = UBA$$

ist, so folgt, je nachdem die Anschlusspunkte A, B, C, D ausserhalb oder innerhalb auf den Seiten des Stammvierecks liegen, dass

$$ADC = ABC \text{ oder } ADC = 180^0 - ABC$$

ist und die vier Anschlusspunkte auf einem Kreise liegen. Demnach erhalten wir den Satz:

> Bei dem Brennpunktmechanismus liegen die vier Anschlusspunkte, welche einem Viergliedpunkt angehören, auf je einem Kreise.

Es ist nach 6)

$$b_1 d_1 = b_2 d_2 = \beta \delta,$$

und wegen der symmetrischen Beziehung also auch

$$a_1 c_1 = a_2 c_2 = \alpha \gamma;$$

folglich

$$13) \qquad a_1 b_1 c_1 d_1 = a_2 b_2 c_2 d_2 = \alpha \beta \gamma \delta.$$

Nach dem Satze von Menelaus ist in Fig. 6, wenn Φ_1 den Schnittpunkt der Geraden AB und der Diagonale TV bezeichnet,

$$\frac{TA \,.\, UB \,.\, V\Phi_1}{AU \,.\, BV \,.\, \Phi_1 T} = -1,$$

also

$$\frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} = \frac{T\Phi_1}{V\Phi_1} = \frac{c_2 d_2}{c_1 d_1}.$$

Demnach schneiden sich die Geraden AB, CD in einem Punkt Φ_1 der Diagonale TV des Stammvierecks, und ebenso auch die Geraden BC, DA in einem Punkt Φ_2 der Diagonale UW.

Da die Anschlusspunkte A, B, C, D auf einem Kreise liegen, so sind die Dreiecke $\Phi_1 BC$, $\Phi_1 DA$ ähnlich, und es ist demnach Φ_1 der selbstentsprechende Punkt für die entgegengesetzt ähnlichen Vierecke $TDFA$, $FBVC$. Ebenso ergiebt sich, dass Φ_2 der selbstentsprechende Punkt für die entgegengesetzt ähnlichen Vierecke $UAFB$, $FCWD$ ist.

Die Geraden AC, BD schneiden sich in dem mit Ξ bezeichneten Punkt, welcher der Pol der Geraden $\Phi_1 \Phi_2$ in Bezug auf den durch $ABCD$ gehenden Kreis ist.

5. Nach unserer Darlegung S. 196 ist ein Viergliedpunkt F so gelegen, dass von demselben aus die gegenüber liegenden Seiten des Stammvierecks $TUVW$ unter Winkel erscheinen, die entweder gleich sind oder sich zu zwei Rechten ergänzen, und demnach erhalten wir den Satz:

Ein Viergliedpunkt eines Brennpunktmechanismus ist während der Bewegung beständig ein Brennpunkt eines dem Stammviereck eingeschriebenen Kegelschnittes.

Die Viergliedpunkte bilden hiernach in ihrer Gesammtheit die bekannte durch das Stammviereck bestimmte Focale, welche von der dritten Ordnung ist und durch die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte geht; denn die Focale enthält alle Brennpunkte der Kegelschnitte, welche die vier Seiten des Stammvierecks berühren und eine Kegelschnittschaar bilden. Um nun zu einem auf der Focale angenommenen Viergliedpunkt die vier entsprechenden Anschlusspunkte zu bestimmen, wollen wir vorher noch auf die einfachste Construction der Focale hinweisen. Wenn wir die vier Seiten des Stammvierecks $TUVW$ in Fig. 7 verlängern, so bilden dieselben ein Vierseit mit den sechs Ecken T, U, V, W, X, Y, durch welche die Focale φ geht. Der Brennpunkt P der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel π, die aber nicht gezeichnet ist, ergiebt sich als der zweite Schnittpunkt zweier Kreise, die um zwei von den vier Dreiecken XUT, XVW, YTW, YUV beschrieben werden. Dieser Parabelbrennpunkt P heisst das Focalcentrum der Focale φ. Die Gerade m, welche die Mittelpunkte aller dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte enthält und durch die Mitten der drei Diagonalen TV, UW, XV geht, heisst die Mittellinie der Focale φ.

Die Focale φ ist bekanntlich das Erzeugniss eines Strahlenbüschels, dessen Mittelpunkt P ist, und eines projectiven Kreisbüschels, dessen Kreismittelpunkte die von den Strahlen mit der Mittellinie m gebildeten Schnittpunkte sind. Die Grundpunkte des Kreisbüschels erhalten wir als Schnittpunkte zweier Kreise derselben, die zwei von P nach zweien Ecken des Vierseits gehenden Strahlen entsprechen.

Je nachdem diese beiden Kreise sich in reellen oder imaginären Punkten schneiden, sind diese Grundpunkte reell oder imaginär. So können wir hiernach zu jedem Strahl den entsprechenden Kreis, der den Strahl in zwei Punkten der Focale φ schneidet, leicht beschreiben und die Focale φ construiren. In dem betrachteten Fall sind die beiden Grundpunkte des Kreisbüschels reell und mit K, L bezeichnet.

Nehmen wir in Fig. 7 einen beliebigen Viergliedpunkt F auf der Focale φ an, so sind noch die entsprechenden Anschlusspunkte A, B, C, D

zu bestimmen. Wir beschreiben die Kreise PXF, PYF, welche die gegenüberliegenden Seiten des Stammvierecks resp. in den Punkten B, D und A, C schneiden. Die Verbindungsgeraden BD, AC sind Tangenten an der nicht gezeichneten Parabel π, weil die Punkte B, D die Strecken UV, TW und die Punkte A, C die Strecken TU, WV in gleiche Verhältnisse theilen. Die Winkel FBU, FDT und ebenso FAU, FCV ergänzen sich zu zwei Rechten.

Beschreiben wir ferner die Kreise FUV, FTW, die wir mit k, k' bezeichnen, so ergänzen sich die Peripheriewinkel UFV, TFW im betrachteten Falle zu zwei Rechten, und die Gebilde $PUBVk$, $PTDWk'$ sind ähnlich. Wenn wir nun zu dem Punkt F des Kreises k den entsprechenden Punkt F' auf dem Kreise k' bestimmen, dann liegen die Punkte FDF' in einer Geraden, und es ist hiernach der Winkel

$$FUB = F'TD = DFW.$$

Da ausserdem der Winkel $UBF = FDW$ ist, so sind die Dreiecke UBF, FDW ähnlich. Ebenso ist der Winkel $FVB = F'WD = DFT$ und folglich sind auch die Dreiecke TDF, FBV ähnlich. In gleicher Weise ergiebt sich, dass die Dreiecke UAF, FCW sowie TAF, FCV ähnlich sind. Demnach folgt die entgegengesetzte Aehnlichkeit der Vierecke:

$$TDFA \backsim FBVC \text{ und } UBFA \backsim FDWC.$$

Die vermittelst jener Kreise PXF, PYF auf den Seiten des Stammvierecks erhaltenen Punkte A, B, C, D sind also die vier Anschlusspunkte, welche dem Viergliedpunkt F entsprechen. So erhalten wir zu jedem auf der Focale φ angenommenen Viergliedpunkt F die entsprechenden vier Anschlusspunkte A, B, C, D, die entweder alle vier innerhalb auf den vier Seiten des Stammvierecks oder auf deren Verlängerungen liegen. Verlegen wir den Viergelenkpunkt F auf der Focale in einen Eckpunkt des Stammvierecks, z. B in den Eckpunkt V, so fallen die beiden Anschlusspunkte B, C in V zusammen; der Anschlusspunkt A fällt in U und der Anschlusspunkt D in W. Es ergiebt sich:

> Die Gesammtheit aller an das Stammviereck angeschlossenen Viergliedpunkte bilden während der Bewegung die veränderliche Focale, welche dem Stammviereck angehört.

6. Sind F, G in Fig. 8 die beiden Brennpunkte eines dem Stammviereck $TUVW$ eingeschriebenen Kegelschnitts, denen resp. die Anschlusspunkte A_f, B_f, C_f, D_f und A_g, B_g, C_g, D_g entsprechen, dann gilt bekanntlich die Gleichheit der Winkel:

$$FTA_f = D_g TG, \quad FUA_f = B_g UG, \quad FVB_f = C_g VG, \quad FWC_f = D_g WG.$$

Ferner ist der Winkel

$$FTA_f = VFC_f, \quad D_g TG = B_g GV, \text{ also } VFC_f = B_g GV,$$

und hiernach sind die Dreiecke FVC_f, GVB_g entgegengesetzt ähnlich.

Demzufolge besteht während der Bewegung des Brennpunktmechanismus die entgegengesetzte Aehnlichkeit der Vierecke:

$$TA_fFD_f \backsim TD_gGA_g \backsim GC_gVB_g \backsim FB_fVC_f$$
$$UA_fFB_f \backsim UB_gGA_g \backsim GD_gWC_g = FC_fWD_f.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz:

Je zwei Viergliedpunkte eines Brennpunktmechanismus, die Brennpunkte eines dem Stammviereck eingeschriebenen Kegelschnittes sind, bleiben auch während der gegenseitigen Bewegung Brennpunkte eines solchen veränderlichen Kegelschnittes.

Wegen der ähnlichen Dreiecke TA_fD_f, TD_gA_g ist

$$\frac{TA_f}{TD_g} = \frac{TD_f}{TA_g}, \quad TA_f \,.\, TA_g = TD_f \,.\, TD_g.$$

Demnach liegen die vier Anschlusspunkte A_g, A_f, D_g, D_f auf einem Kreise und es folgt hieraus der Satz:

Die auf zwei benachbarten Seiten des Stammvierecks befindlichen Anschlusspunktpaare, welche den beiden Brennpunkten eines eingeschriebenen Kegelschnittes angehören, liegen auf je einem Kreise.

7. Beschreiben wir in Fig. 9 einen durch die Punkte P, X gehenden Kreis, so schneidet derselbe die Focale φ noch in zwei anderen Punkten F, H, die im betrachteten Fall reell sind, aber auch imaginär sein können, und die Vierecksseiten UV, TW resp. in den Punkten B_{fh}, D_{fh}. Die Gerade FH geht durch den Punkt Y; denn wir können die Focale φ auch durch ein Kreisbüschel, dessen Grundpunkte P, X sind, und ein projectives Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt Y ist, erzeugen. Die projective Beziehung wird, wie wir nachher erkennen werden, dadurch bestimmt, dass der Strahl YH parallel $B_{fh}D_{fh}$ ist.

Um zu einem Brennpunkt F eines dem Stammviereck eingeschriebenen Kegelschnitts den zweiten Brennpunkt, das heisst den conjugirten Brennpunkt G zu erhalten, brauchen wir bekanntlich nur die Gerade YF zu ziehen, welche die Focale φ in dem dritten Punkt H schneidet, und die von H nach X gezogene Gerade HX bestimmt dann auf der Focale den zu F conjugirten Brennpunkt G. Derselbe wird auch erhalten, wenn wir die Gerade XF ziehen, welche die Focale φ in Punkt J trifft, und ferner die Gerade YJ, die den Punkt G bestimmt. Dieser Construction gemäss sind auch die beiden Punkte H, J conjugirte Brennpunkte. Die Punkte $PYFJ$, $PYHG$, $PXFH$, $PXJG$ liegen auf je einem Kreise, und diese Kreise schneiden die gegenüber liegenden Seiten des Stammvierecks $TUVW$ resp. in den Punkten $A_{fi}C_{fi}$, $A_{gh}C_{gh}$, $B_{fh}D_{fh}$, $B_{gi}D_{gi}$. Die Geraden $\overline{FJX}$, $\overline{HGX}$ bilden gleiche entgegengesetzte Winkel mit den durch X gehenden

Seiten des Stammvierecks und die Geraden $\overline{HFY}$, $\overline{GJY}$ bilden gleiche entgegengesetzte Winkel mit den durch Y gehenden Seiten desselben.

Den beiden Viergliedpunkten F, H entsprechen auf den Seiten UV, TW dieselben Anschlusspunkte B_{fh}, D_{fh}. Wegen der gleichen Winkel $B_{fh}XF$, $D_{fh}XH$ sind die Kreissehnen FH, $B_{fh}D_{fh}$ parallel und es ist

$$FB_{fh} = HD_{fh}, \quad FD_{fh} = HB_{fh}.$$

Diese vier Strecken bilden demnach ein gelenkiges Antiparallelogramm $B_{fh}FD_{fh}H$. Dasselbe gilt von den übrigen drei Punktpaaren HG, GJ, FJ mit den zugehörigen Anschlusspunkten, und wir erhalten somit die in Fig. 10 dargestellten vier gelenkige Antiparallelogramme, welche gelenkig an das Stammviereck $TUVW$ angeschlossen sind.

Von diesem Brennpunktmechanismus mit vier angeschlossenen Brennpunkten ist in Fig. 11 ein Theil besonders gezeichnet, wo das gelenkige Antiparallelogramm $B_{fh}FD_{fh}H$ durch die Glieder $B_{fh}U$, FA_{fi}, $D_{fh}T$, HA_{hj} mit dem Gliede UT gelenkig verbunden sind, und dieser Theil bildet auch einen übergeschlossenen Mechanismus.

Die beiden an das Stammviereck $TUVW$ angeschlossenen Brennpunktpaare FG und HJ, welche in der dargelegten Beziehung stehen, wollen wir s t a m m v e r w a n d t e B r e n n p u n k t p a a r e nennen.

Demnach sind auch die gegenüber liegenden Eckpunkte TV, UW des Stammvierecks stammverwandte Brennpunktpaare.

8. Die in Fig. 9 gezeichneten Verbindungsgeraden der Punkte $B_{fh}D_{fh}$ und $A_{fi}C_{fi}$, welche Tangenten an der dem Stammviereck $TUVW$ eingeschriebenen Parabel sind, schneiden sich in einem Punkt Ξ, der mit dem Brennpunkt F und dem Brennpunkt P dieser Parabel in einer Geraden liegt; denn die Geraden $B_{fh}D_{fh}$, $A_{fi}C_{fi}$, FP sind gemeinsame Sehnen je zweier der drei Kreise, die resp. durch die vier Punkte $PB_{fh}FD_{fh}$, $PA_{fi}FC_{fi}$, $A_{fi}B_{fh}C_{fi}D_{fh}$ gehen. Ferner ist, wie schon erwähnt, $B_{fh}D_{fh}$ parallel FY, ebenso $A_{fi}C_{fi}$ parallel FX. Dieselben Beziehungen gelten wegen der Gleichartigkeit der Anordnung für die übrigen Paare der Anschlusspunkte.

Zu einem gegebenen Anschlusspunkt, z. B. zu A_{fi}, können wir die entsprechenden Viergliedpunkte und die zugehörigen übrigen Anschlusspunkte ohne die Focale φ construiren, wenn wir annehmen, dass der Parabelbrennpunkt P gezeichnet ist. Wir beschreiben den Kreis PYA_{fi}, der die Seite VW in C_{fi} trifft, ziehen ferner durch X zu $A_{fi}C_{fi}$ die Parallele $\overline{XJF}$, die den Kreis in den beiden entsprechenden Viergliedpunkten F, J schneidet. Die Kreise PXF, PXJ liefern dann resp. die Anschlusspunkte $B_{fh}D_{fh}$, $B_{gi}D_{gi}$.

Nehmen wir also auf der Seite TU einen beliebigen Anschlusspunkt A_{fi} an, so entsprechen diesem auf der Focale zwei Viergliedpunkte F, J, die auch imaginär sein können, und ferner entsprechen dem Anschlusspunkte A_{fi} die Anschlusspunktpaare $B_{fh} B_{gi}$, $D_{fh} D_{gi}$ resp. auf den zu TU benachbarten Seiten UV, TW. Ziehen wir die Gerade HX, so dass der Winkel $HXT = -FXU$ ist, dann schneidet diese Gerade die Kreise PXF, PXJ in den Punkten H, G, die mit den Punkten P, Y auf einem Kreise liegen; und dieser Kreis bestimmt auf den Seiten TU, WV die Anschlusspunkte A_{gh}, C_{gh}, die den Viergliedpunkten G, H angehören. Die Punktpaare FG, HJ sind demnach stammverwandte Brennpunktpaare.

Betrachten wir nun die Anschlusspunktreihen auf zwei benachbarten Seiten des Stammvierecks, z. B. auf den Seiten TU, UV, so entsprechen dem Anschlusspunktpaare $A_{fi} A_{gh}$ die Anschlusspunkte B_{fh}, B_{gi} und umgekehrt. Hieraus folgt:

Die Anschlusspunktreihen auf zwei benachbarten Seiten des Stammvierecks eines Brennpunktmechanismus stehen in zwei-zweideutiger Verwandtschaft, bei welcher die Punktpaare sich involutorisch entsprechen.

Für zwei gegenüberliegende Seiten gilt nach S. 197 die Beziehung:

Die Anschlusspunktreihen auf zwei gegenüberliegenden Seiten des Stammvierecks eines Brennpunktmechanismus sind ähnlich.

9. Die stammverwandten Brennpunktpaare FG, HJ in Fig. 9 sind Schnittpunkte von je zweien entsprechenden Strahlenpaaren zweier involutorischer Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte X und Y sind. Der Brennpunkt P der dem Stammviereck eingeschriebenen Parabel π ist auch der Brennpunkt der Parabel π', welche die vier Geraden FH, HG, GJ, JF berührt, und diese Parabeln haben eine gemeinsame zur Mittellinie m der Focale φ parallele Achse. Beschreiben wir über PX und PY als Durchmesser die Kreise x, y, dann schneiden diese die entsprechenden Strahlenpaare XF, XG und YH, YJ der involutorischen Strahlenbüschel X, Y resp. in den Punktpaaren fg und hi; und diese vier Punkte liegen auf der zur Mittellinie m senkrechten Scheiteltangente σ' der Parabel π'. Ziehen wir also eine beliebige auf m senkrechte Gerade σ' welche die Kreise x, y in den Punktpaaren fg und hi schneidet, dann liefern die so erhaltenen entsprechenden Strahlenpaare Xf, Xg und Yh, Yi durch ihre Schnittpunkte vier Punkte F, G, H, J der Focale φ, von denen FG, HJ stammverwandte Brennpunktpaare sind. Die auf m senkrechte Gerade σ, welche insbesondere die Scheiteltangente der Parabel π ist, bestimmt die entsprechenden Strahlenpaare XT, XV, und YU, YW, durch welche wir die Eckpunkte des Stammvierecks als stammverwandte Brennpunktpaare TV, UV erhalten. Wir können demnach die Focale φ auf diese Weise auch durch zwei involutorische Strahlenbüschel X, Y erzeugen.

Berührt eine auf m senkrechte Gerade σ' den Kreis x und schneidet sie den Kreis y noch in zwei Punkten, dann fallen die Punkte G, J, sowie F, H zusammen und die beiden stammverwandten Brennpunktpaare FG,

HJ vereinigen sich zu einem einzigen Brennpunktpaar, welches im betrachteten Fall auf der Halbirungsgeraden des Winkels TXU liegen würde.

Die von diesem Brennpunktpaar nach Y gehenden Geraden sind in diesen beiden Brennpunkten Tangenten an der Focale φ, und bleiben auch während der Bewegung Tangenten an dieser veränderlichen Focale. Zu je zwei stammverwandten Brennpunktpaaren gehört auf jeder Seite des Stammvierecks ein entsprechendes Anschlusspunktpaar. In jenem Falle, wo die beiden Brennpunktpaare sich zu einem einzigen Brennpunktpaare vereinigen, coincidiren die beiden entsprechenden Anschlusspunkte auf der Seite TU in einem Punkt und ebenso auf der Seite WV. Das entsprechende Anschlusspunktpaar auf der Seite UV fasst eine Strecke zwischen sich, welche keine reellen Anschlusspunkte enthalten kann, und dasselbe gilt von dem entsprechenden Anschlusspunktpaar auf der Seite TW.

Wenn insbesondere eine auf m senkrechte Gerade die beiden Kreise x, y zugleich berührt, dann vereinigen sich die stammverwandten Brennpunktpaare in einem einzigen Punkt, dem Schnittpunkt der Halbirungsgeraden der Winkel TXV, UYW. Dieser Punkt ist dann der Mittelpunkt eines dem Stammviereck eingeschriebenen Kreises und in diesem besonderen Falle hat die Focale in diesem Punkte einen Doppelpunkt.

10. Betrachten wir in Fig. 12 den unendlich fernen Punkt A_{oq}^{∞} der Seite TU als ein Anschlusspunkt, so schneidet der unendlich grosse Kreis PYA_{oq}^{∞} die Focale φ in den Punkten O^{∞}, Q und die Seite VW im Punkte C_{oq}^{∞}. Der Punkt Q, in welchem dieser unendlich grosse Kreis die Focale φ schneidet, ist demnach auch der Schnittpunkt der Geraden YP und der zur Mittellinie m parallelen Geraden XO^{∞}. Dem unendlich fernen Anschlusspunkt A_{oq}^{∞} entsprechen also die beiden Viergliedpunkte Q, O^{∞}, von denen der eine Q im Endlichen auf der Focale liegt und der andere O^{∞} der unendlich ferne reelle Punkt der Focale ist, nach dem die Mittellinie m geht.

Der Kreis PXQ schneidet die Focale φ noch in einem vierten mit P coincidirenden Punkt und berührt also dieselbe in P; ferner schneidet dieser Kreis die Vierecksseiten TW, UV in den zu P, Q gehörenden Anschlusspunkten B_{pq}, D_{pq} und es ist die Gerade $B_{pq}D_{pq}$ parallel zu der Geraden YPQ. Zu dem Viergliedpunkt Q gehören also die beiden auf UV, TW im Endlichen liegenden Anschlusspunkte B_{pq}, D_{pq} und die beiden auf TU, WV im Unendlichen befindlichen Anschlusspunkte A_{oq}^{∞}, C_{oq}^{∞}. Der Viergliedpunkt Q bewegt sich demnach in Bezug auf das Glied TU in einer auf TU senkrechten Geraden, und ebenso auch in Bezug auf das Glied VW in einer auf VW senkrechten Geraden. Dieser Viergliedpunkt Q ist also der einzige in Bezug auf die beiden Glieder TU, VW geradgeführte Punkt.

Die Gerade $B_{pq}D_{pq}$ ist eine Tangente an der Parabel, welche die vier Seiten des Stammviereckes berührt und deren Brennpunkt P ist; demnach erhalten wir auch, weil $B_{pq}D_{pq}$ parallel YP ist, den Anschlusspunkt B_{pq} auf UV, indem wir den Winkel YPB_{pq} gleich PUT oder gleich PVW machen, und dann durch die zu YP Parallele $B_{pq}D_{pq}$ den Anschlusspunkt D_{pq} auf TW.

Ziehen wir zur Mittellinie m die Parallele YO^{∞}, welche die Gerade XP im Punkte R schneidet, so ist R der in Bezug auf die Glieder TW, UV geradgeführte Punkt und zu demselben gehören auf den Seiten UV, TW die unendlich fernen Anschlusspunkte B^{∞}_{or}, D^{∞}_{or}. Wir erhalten in analoger Weise, wie für Q, P, so auch für R, P die Anschlusspunkte A_{pr}, C_{pr} auf den Vierecksseiten TU, VW.

Bei diesen beiden stammverwandten Brennpunktpaaren $O^{\infty}P$, QR zeichnet sich also das Brennpunktpaar QR dadurch aus, dass der Brennpunkt Q in Bezug auf TU, VW und der Brennpunkt R in Bezug auf UV, TW geradgeführt wird; und ferner zeichnet sich das Brennpunktpaar $O^{\infty}P$ dadurch aus, dass es der dem Stammviereck eingeschriebenen Parabel angehört. Da nun der unendlich ferne zweite Brennpunkt O^{∞} dieser Parabel, als Viergliedpunkt betrachtet, während der Bewegung des Brennpunktmechanismus beständig im Unendlichen bleibt, so bleibt auch der Punkt P als Viergliedpunkt beständig der im Endlichen befindliche Brennpunkt dieser veränderlichen Parabel, und seine Anschlusspunkte sind A_{pr}, B_{pq}, C_{pr}, D_{pq}.

11. Die entsprechenden Anschlusspunktreihen auf zwei benachbarten Seiten des Stammvierecks z. B. auf den Seiten TU, UV in Fig. 13 stehen nach Art. 8 in zwei-zweideutiger Verwandtschaft und diese Anschlusspunktreihen sind entsprechende involutorische Punktreihen, bei denen die conjugirten Punktpaare sich wechselweise entsprechen. Die entsprechenden Anschlusspunktpaare liegen nach Art. 6 auf je einem Kreise, wie z. B. $A_{fi}A_{gh}$ und $B_{fh}B_{gi}$ auf dem Kreise $\varkappa$. Ferner sind auch TU, UV entsprechende Punktpaare dieser Anschlusspunktreihen, und der Gelenkpunkt U ist ein selbstentsprechender Punkt. Der durch TUV gehende Kreis $\varkappa_0$ und der Kreis $\varkappa$ bestimmen durch ihre imaginären Schnittpunkte die im Endlichen liegenden imaginären Grundpunkte eines Kreisbüschels, welches wir mit K_{tuv} bezeichnen wollen. Demnach sind diese Anschlusspunktreihen die involutorischen Punktreihen, welche die Geraden UT, UV mit dem Kreisbüschel K_{tuv} bilden.

Der auf UV befindliche Anschlusspunkt B_{pq}, der dem Parabelbrennpunkt P angehört, wird wie oben erhalten, wenn wir den Winkel $YPB_{pq} = PUT$ machen, und die Gerade PB_{pq} berührt demnach den durch $YUVP$ gehenden Kreis in P. Betrachten wir nun U, V als die Grundpunkte eines Kreisbüschels und denken wir uns zu dem Punkt P als Pol die Polaren in Bezug auf die Kreise dieses Kreisbüschels bestimmt, so gehen diese Polaren bekanntlich durch einen Punkt Ω jener Kreistangente PB_{pq}, der dadurch bestimmt wird, dass $\Omega B_{pq} = PB_{pq}$ ist. Beschreiben wir also jenen durch TUV gehenden Kreis $\varkappa_0$, dessen Mittelpunkt μ ist, fällen wir von Ω und B_{pq} auf $P\mu$ die Senkrechten $\Omega\Pi$ und $B_{pq}\Theta$, dann ist $\Omega\Pi$ die Polare für P in Bezug auf den Kreis $\varkappa_0$ und Θ die Mitte der Strecke $P\Pi$. Die Punkte P, Π können wir demnach als Grenzpunkte eines Kreisbüschels betrachten, zu denen der Kreis $\varkappa_0$ und die Gerade $B_{pq}\Theta$ als Chordale gehört. Wegen der symmetrischen Beziehungen folgt, wenn wir von dem auf TU befindlichen Anschlusspunkt A_{pr}, der zu P gehört, auf $P\mu$ die Senkrechte fällen, dass deren Fusspunkt mit Θ identisch ist. Die drei Punkte A_{pr}, Θ, B_{pq} liegen also in einer auf $P\mu$ senkrechten Geraden, die als unendlich grosser Kreis betrachtet auch die auf TU, UV im Unendlichen liegenden Anschlusspunkte A_{oq}^{∞}, B_{or}^{∞} enthält und demnach die Chordale des Kreisbüschels K_{tuv} ist. Demzufolge sind P, Π die Grenzpunkte des Kreisbüschels K_{tuv}, welches durch den Parabelbrennpunkt P als den einen Grenzpunkt und Kreis TUV bestimmt ist. Aus diesen Beziehungen folgt der Satz:

> Die entsprechenden Anschlusspunktreihen auf zwei benachbarten Seiten des Stammvierecks sind die entsprechenden involutorischen Punktreihen, welche diese beiden Seiten mit einem Kreisbüschel bilden, zu dem der Parabelbrennpunkt als der eine Grenzpunkt und der durch die drei betreffenden Ecken des Stammvierecks gehende Kreis gehört.

Da es vier Paare benachbarter Seiten des Stammvierecks giebt, so treten vier solche Kreisbüschel K_{tuv}, K_{uvw}, K_{vwt}, K_{wtu} auf, für die der Parabelbrennpunkt P ein Grenzpunkt ist. Diese Kreisbüschel haben also stets zwei im Endlichen liegende imaginäre Grundpunkte und die Seiten des Vierecks, welches von den vier zu dem Parabelbrennpunkt P gehörenden Anschlusspunkte A_{pr}, B_{pq}, C_{pr}, D_{pq} gebildet wird, sind die Chordalen.

Bei jedem Gelenkviereck giebt es eine Stellung, in welcher dasselbe ein Kreisviereck ist, die vier Ecken also auf einem Kreise liegen. Wenn diese Stellung eines Stammvierecks in bekannter Weise* construirt wird, dann vereinen sich jene Kreisbüschel zu einem einzigen, zu welchen der Parabelbrennpunkt P als der eine Grenzpunkt und der dem Stammviereck umschriebene Kreis gehört. Die entsprechenden Anschlusspunktpaare aller vier Seiten des Stammvierecks liegen dann auf je einem Kreise dieses Kreisbüschels, und jeder dieser Kreise enthält demzufolge die acht Anschlusspunkte, die zu je zwei stammverwandten Brennpunktpaaren gehören.

12. Wir wollen noch einige besondere Fälle betrachten, bei denen die Seiten des Stammvierecks in angenommener Längenbeziehung stehen,

* Apollonius, Ebene Oerter. Wiederhergestellt von R. Simson. 1796. S. 426. — Kunze, Planimetrie. 2. Aufl. S. 239. — Baltzer, Elemente der Mathematik. 1870. 2. Bd. S. 132.

denn es ergeben sich dabei manche beachtenswerthe Eigenthümlichkeiten. Wenn in einem Stammviereck die Summe von zwei Seiten der Summe der beiden anderen Seiten gleich ist, so ist das Stammviereck einem Kreise umschrieben; und es können die vier Seiten in eine Gerade gelangen. Das einem Kreise umschriebene Stammviereck ist also ein durchschlagendes Gelenkviereck.* Bei dem in Fig. 14 gezeichneten Stammviereck $TUVW$ ist die Summe der gegenüberliegenden Seiten gleich, also $TU + VW = UV + WT$. Die Focale φ hat im Mittelpunkt M des Kreises, der die vier Seiten des Stammvierecks berührt, einen Doppelpunkt; denn dieser Kreis kann als eine dem Stammviereck eingeschriebene Ellipse betrachtet werden, deren beide Brennpunkte in dem Punkte M vereint sind. Zu dem Doppelpunkte M als Viergliedpunkt sind nach der angegebenen Weise vermittelst der durch PXM, PYM gehenden Kreise die Anschlusspunkte $A_m B_m C_m D_m$ construirt. Der an das Stammviereck angeschlossene Viergliedpunkt M ist beständig während der Bewegung der Mittelpunkt des dem veränderlichen Stammviereck eingeschriebenen Kreises. Diese specielle von Darboux** bewiesene Beziehung enthält den einzigen bekannten Fall eines besonderen Brennpunktmechanismus.

Da in dem Mittelpunkt M des eingeschriebenen Kreises zwei Brennpunkte vereint sind, so folgt aus Art. 6, dass jedes der Fachvierecke $TD_m MA_m$, $UA_m MB_m$, $VB_m MC_m$, $WC_m MD_m$ bezüglich ihrer von M ausgehenden Diagonale symmetrisch, also gleichschenkelig, sind. Die Anschlussglieder MA_m, MB_m, MC_m, MD_m sind demnach gleich, und der Mittelpunkt des durch die vier Anschlusspunkte $A_m B_m C_m D_m$ gehenden Kreises liegt beständig in dem Mittelpunkt M des dem Stammviereck eingeschriebenen Kreises. Für jeden anderen auf der Focale angenommenen Viergliedpunkt sind die Fachvierecke nicht gleichschenkelig. Da aber alle Fachvierecke durchschlagende Vierecke sein müssen, weil das Stammviereck ein durchschlagendes ist, so ist jedes Fachviereck einem Kreise entweder einschliessend oder ausschliessend umschrieben, das heisst, beim Umschreiten des Vierecks ist der berührende Kreis entweder nach einer Seite oder nach beiden Seiten hin gelegen.

13. In Fig. 15 ist das Stammviereck $TUVW$ ein gleichschenkeliges, bei dem $TU = TW$, $VU = VW$ ist. In diesem specielleren Falle besteht die Focale aus dem durch $UWXY$ gehenden Kreise φ und der Geraden TV, deren Schnittpunkte M, M' mit diesem Kreise zwei Doppelpunkte der Focale sind. Das gleichschenkelige Stammviereck ist gleichzeitig einem Kreise einschliessend und einem Kreise ausschliessend umschrieben, und M, M' sind die Mittelpunkte dieser beiden Kreise. Der Mittelpunkt P des Kreises φ ist beständig der Parabelbrennpunkt. Für einen beliebigen

* Vergl. J. Steiner, Gesammelte Werke. 1882. Bd. II. S. 381.

** Darboux, Bulletin des Sciences Mathématiques. 1879. T. III. p. 66.

Brennpunkt F auf dem Kreise φ sind die Anschlusspunkte $ABCD$ construirt. Die beiden entgegengesetzt ähnlichen Fachvierecke $UAFB$, $FCWD$ sind gleichschenkelig, weil die Winkel an den Ecken U, W des Stammvierecks gleich sind, und die beiden Diagonalen AB, DC gehen demnach beständig durch den Parabelbrennpunkt oder Mittelpunkt P, dessen Anschlussglieder PA_p, PB_p, PC_p, PD_p resp. zu den Seiten des Stammvierecks parallel sind. Die beiden Fachvierecke UA_pPB_p, WD_pPC_p sind symmetrisch congruente Parallelogramme. Dasselbe gilt für jeden auf der Geraden TV liegenden Brennpunkt.

Der dem Schnittpunkt Y der Seiten TU, VW stets diametral gegenüberliegende Punkt Q des Kreises φ, dessen Anschlussglieder an die beiden anderen Seiten QB_p, QD_p sind, ist der in der Geraden QU senkrecht auf TU und in der Geraden QW senkrecht auf VW geradgeführte Punkt.

14. In Fig. 16 ist das Stammviereck $TUVW$ ein Antiparallelogramm, bei dem $TU = VW$, $UV = WT$ ist. Die Focale besteht aus dem durch $TUVW$ gehenden Kreis φ und der Geraden XY, die den Kreis φ in den Mittelpunkten M, M' der von dem Stammviereck einschliessend und ausschliessend umschriebenen beiden Kreise schneidet. Der Mittelpunkt P des Kreises φ ist der Parabelbrennpunkt, dessen Anschlusspunkte in diesem Falle im Unendlichen auf den Seiten des Stammvierecks liegen; und dasselbe gilt von jedem auf der Geraden XY befindlichen Brennpunkt. Für einen beliebigen Brennpunkt F auf dem Kreise φ sind die Anschlusspunkte $ABCD$ construirt. Die Fachvierecke sind auch Antiparallelogramme, und der Mittelpunkt des durch die vier Anschlusspunkte gehenden Kreises liegt in P. Es sind also alle Kreise, die durch je vier Anschlusspunkte gehen, concentrisch.

Wenn das Stammviereck $TUVW$ in seiner Durchschlagslage aus dem Antiparallelogramm in das Parallelogramm $TUVW$ (Fig. 16a) übergeht, dann gehen auch alle Fachvierecke in Parallelogramme über und die verwandelte Focale besteht aus einer gleichseitigen Hyperbel φ und der unendlich fernen Geraden. Wenn wir in Fig. 16a einen nicht auf der Hyperbel φ liegenden Punkt in gleicher Weise wie F durch Anschlussglieder mit den Seiten des Parallelogramms $TUVW$ verbinden, dann ist der Mechanismus auch ein übergeschlossener; aber es ist dann der Uebergang aus Parallelogrammen in Antiparallelogramme, wie in Fig. 16, nicht möglich.

15. In Fig. 17 Taf. IV sind an das Stammviereck $TUVW$ zwei Paar conjugirte Brennpunkte FG, HJ angeschlossen, deren Verbindungsgerade FG, HJ senkrecht sind, und ihr Schnittpunkt S liegt dann auf der Focale φ. Denn sind zwei beliebige conjugirte Brennpunktpaare FG, HJ gegeben, so bilden die Geraden FH, HG, GJ, JF ein vollständiges Vierseit, dessen sechs Ecken auf der Focale φ liegen, und die drei

Diagonalen bilden ein Dreieck, dessen Höhenfusspunkte auf der Focale sich befinden. Nehmen wir ein beliebiges Paar conjugirter Brennpunkte FG an und ziehen wir durch den Schnittpunkt S, den die Gerade FG mit der Focale φ bildet, auf FG eine Senkrechte, so trifft diese die Focale in zwei reellen oder imaginären conjugirten Brennpunkten. Zwei Paar conjugirte Brennpunkte, deren Verbindungsgeraden senkrecht auf einander stehen, bilden ein Punktquadrupel auf der Focale; denn es treffen sich die vier Tangenten an diesen Punkten der Focale in einem Punkt auf derselben. Und wenn wir von einem Punkt der Focale an dieselbe die vier Tangenten ziehen, so bilden die Berührungspunkte ein Punktquadrupel* oder zwei Paar conjugirte Brennpunkte, deren Verbindungsgeraden senkrecht sind. Ein durch den Parabelbrennpunkt P und zwei conjugirte Brennpunkte F, G gehender Kreis schneidet die Focale in dem Tangentialpunkt, wo die beiden Tangenten sich treffen. Es zeigt sich nun, was wir hier noch ohne Beweis erwähnen wollen, das zwei conjugirte Brennpunktpaare FG, HJ, deren Verbindungsgeraden senkrecht sind, bei der Bewegung senkrecht bleiben, dass also ein Quadrupel von vier angeschlossenen Brennpunkten ein solches bleibt. Sind also die beiden Brennpunktpaare von zweien das Stammviereck berührenden Kegelschnitten, deren Hauptachsen senkrecht auf einander stehen, an das Stammviereck angeschlossen, so bleiben während der Bewegung diese Hauptachsen der beiden veränderlichen Kegelschnitte senkrecht.

Die Focale φ kann nach Art. 5 in der einfachsten Weise durch ein Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der Parabelbrennpunkt P ist und ein projectives Kreisbüschel mit den Grundpunkten K, L construirt werden. Diese beiden Grundpunkte K, L und die beiden Parabelbrennpunkte P, O^∞ sind auch conjugirte Brennpunktpaare, deren Verbindungsgeraden senkrecht auf einander stehen. Es bleiben demnach, wenn die Punkte K, L, P an das Stammviereck angeschlossen werden, die Punkte K, L beständig Grundpunkte des Kreisbüschels und es bleibt der Punkt P beständig Mittelpunkt des projectiven Strahlenbüschels, dessen Strahlen durch die entsprechenden Kreismittelpunkte gehen.

16. In Fig. 18 sind k_1, k_2, $k_3 \ldots$ Kreise eines Kreisbüschels mit den Grundpunkten P, Y gegeben. Ziehen wir durch den einen Grundpunkt Y eine beliebige Gerade YT, welche diese Kreise in den Punkten A_1, A_2, $A_3 \ldots$ schneidet, und beschreiben wir einen beliebigen durch den anderen Grundpunkt P gehenden Kreis $\mathfrak{k}$, der jene Kreise in den Punkten F_1, F_2, $F_3 \ldots$ trifft, dann gehen die Verbindungsgeraden A_1F_1, A_2F_2, $A_3F_3 \ldots$ durch einen Punkt $\mathfrak{a}$ des Kreises $\mathfrak{k}$; denn es sind die Winkel PF_1A_1, PF_2A_2, $PF_3A_3 \ldots$ gleich.

* Vergl. H. Durège, Die ebenen Curven dritter Ordnung. 1871. S. 205.

Beschreiben wir nun in Fig. 19 einen beliebigen durch den Parabelbrennpunkt P gehenden Kreis $\mathfrak{k}$, der die Focale φ des Stammvierecks $TUVW$ ferner in den drei Punkten F_1, F_2, F_3 schneidet, welche wir als Viergliedpunkte betrachten, und sind zu diesen die entsprechenden Anschlusspunkte $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$, construirt, so folgt, dass die Anschlussglieder A_1F_1, A_2F_2, A_3F_3 sich in einem Punkt $\mathfrak{a}$ auf dem Kreise $\mathfrak{k}$ schneiden. Ebenso schneiden sich die übrigen je drei Anschlussglieder resp. in den Punkten $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ auf dem Kreise $\mathfrak{k}$; und wir erhalten den Satz:

Die mit je einer Seite des Stammviereckes verbundenen drei Anschlussglieder von den drei Viergliedpunkten, welche auf einem durch den Parabelbrennpunkt gehenden Kreis liegen, schneiden sich in einem Punkt dieses Kreises.

Bezeichnen wir mit x_1, x_2, x_3 die Mittelpunkte der Kreise, auf denen resp. die Punkte $PB_1F_1D_1X$, $PB_2F_2D_2X$, $PB_3F_3D_3X$ liegen, und mit y_1, y_2, y_3 die Mittelpunkte der Kreise, auf denen sich resp. die Punkte $PA_1F_1C_1Y$, $PA_2F_2C_2Y$, $PA_3F_3C_3Y$ befinden, so treffen sich die drei Verbindungsgeraden x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 in dem Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ jenes Kreises $\mathfrak{k}$.

Wird der Brennpunkt F_3 in einer Ecke des Stammvierecks, z. B. in W liegend, angenommen, also der Kreis $\mathfrak{k}$ durch P, W gelegt, der die Focale φ noch in zwei Punkten F_1, F_2 schneidet, dann sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ die Schnittpunkte, welche dieser Kreis ausser dem Punkt W mit den Geraden WT, WV bildet. In diesem besonderen Fall schneiden sich die drei Geraden A_1F_1, A_2F_2, TW in einem Punkt auf dem Kreise $\mathfrak{k}$, und ebenso die Geraden B_1F_1, B_2F_2, VW in einem Punkt auf dem Kreise $\mathfrak{k}$.

17. In Fig. 20 sind die vier Anschlussglieder FA, FB, FC, FD eines Viergliedpunktes F verlängert und dieselben schneiden dann die ihnen benachbarten Seiten des Stammvierecks $TUVW$ resp. in den Punkten X_tX_u, Y_uY_v, X_vX_w, Y_wY_t. Durch die vier Seiten des Stammvierecks $TUVW$ werden, wenn wir das dadurch gebildete vollständige Vierseit mit den sechs Ecken $TUVWXY$ betrachten, noch zwei andere Vierecke $TYVX$, $UYWX$ gebildet, die um die Hälfte verkleinert in Fig. 21 und Fig. 22 gezeichnet sind.

Denken wir uns in Fig. 20 durch die Punkte PWF einen Kreis beschrieben, so geht derselbe durch die Punkte X_t, Y_v. Ebenso geht auch der durch die Punkte PUF beschriebene Kreis durch die Punkte X_v, Y_t. Wenn wir nun das Viereck $TYVX$ als ein Stammviereck betrachten, so gehören zu dem Viergliedpunkt F die auf einem Kreise liegenden Anschlusspunkte Y_t, Y_v, X_v, X_t und wir erhalten den in Fig. 21 gesondert gezeichneten Brennpunktmechanismus. Betrachten wir ferner das Viereck $UYWX$ als ein Stammviereck, so ergiebt sich in gleicher Weise, dass zu dem Viergliedpunkt F die auf einem Kreise liegenden Anschlusspunkte

Y_u, Y_w, X_w, X_u gehören, und wir erhalten den in Fig. 22 gesondert gezeichneten Brennpunktmechanismus. Die Construction eines Brennpunktmechanismus liefert also zugleich noch zwei andere Brennpunktmechanismen.

Nach Art. 4 gehen in Fig. 20 die Geraden TV, AB, CD durch einen Punkt Φ_1, welcher der selbstentsprechende Punkt für die entgegengesetzt ähnlichen Vierecke $TDFA$, $FBVC$ ist; demnach gehen auch die Geraden TV, $Y_t Y_v$, $X_t X_v$ durch denselben Punkt Φ_1. Es schneiden sich also die fünf strichpunktirt gezeichneten Geraden TV, AB, CD, $X_t X_v$, $Y_t Y_v$ in einem Punkte Φ_1; und in gleicher Weise ergiebt sich, dass die fünf strichpunktirt gezeichneten Geraden UW, AD, BC, $X_u X_w$ durch einen Punkt Φ_2 gehen. Ferner folgt aus der Gleichartigkeit der Beziehungen, dass auch die fünf gestrichelt gezeichneten Geraden XY, $X_t Y_t$, $X_u Y_u$, $X_v Y_v$, $X_w Y_w$ sich in einem Punkt Φ_3 treffen. In den gesondert gezeichneten Fig. 21 und 22 sind je durch die betreffenden Punkte gehende Gerade gezogen. Diese Beziehungen ergeben sich auch direct aus dem von Rodenberg mitgetheilten Satz.* Da in Fig. 20 der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden AC, BD von je zwei auf gegenüberliegenden Seiten des Stammvierecks $TUVW$ befindlichen Anschlusspunkten nach Art. 8 auf der Geraden FP sich befindet und es hier drei solche Schnittpunkte giebt, weil auch die Vierecke $TYWX$, $UYWX$ als Stammvierecke betrachtet werden können, so liegen diese drei Schnittpunkte in der Geraden FP.

18. Aus Art. 16 folgt, dass in Fig. 23 die Geraden TW, AF sich in einem Punkte X_t auf dem durch PFW gehenden Kreise schneiden, demnach ist der Winkel $PX_tX = PFW$, und weil auch die Punkte $PFDX$ auf einem Kreise liegen, ist Winkel $PDX = PFX$. Es ist ferner Winkel

$$DPX_t = PX_tX - PDX = PFW - PFX = XFW,$$

also Winkel $DPX_t = XFW$ und analog $APY_t = YFU$. Da aber F ein Brennpunkt eines dem Stammviereck $TUVW$ eingeschriebenen Kegelschnittes ist, so ist Winkel $XFW = YFU$ und hiernach $DPX_t = APY_t$.

In Folge der Gleichheit dieser beiden Winkel ist der Parabelbrennpunkt P ein Punkt der Focale, die durch das Viereck AX_tDY_t, oder durch das Fachviereck $TAFD$ bestimmt ist; und dasselbe gilt für die drei übrigen Fachvierecke. Demnach folgt hieraus der Satz:

Die Focalen der Fachvierecke eines Brennpunktmechanismus gehen durch den Parabelbrennpunkt des Stammvierecks.

19. Beschreiben wir in Fig. 23 einen durch PY gehenden Kreis k, der die Seiten TU, VW des Stammvierecks in den Punkten A, C trifft, und ziehen wir zu dieser Sehne AC durch X eine Parallele, so sind die Schnittpunkte F, J, welche diese Parallele mit dem Kreise k bildet, zwei Punkte der Focale des Stammvierecks $TUVW$, und diese Parallele trifft

* Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1892. Jahrg. XXXVII. S. 371.

die Gerade PA in einem Punkt Λ. Die Gerade AC ist eine Tangente der Parabel, welche die Seiten des Stammvierecks berührt und deren Brennpunkt P ist. Demnach ist Winkel $PTW = PAC = P\Lambda X$ und folglich liegt der Schnittpunkt Λ der Geraden PA, XF auf dem durch die Punkte $XTUP$ gehenden Kreise λ. Die Focale eines Vierecks $TUVW$ wird nach dieser Beziehung, wie schon in Art. 7 angegeben wurde, durch einen Kreisbüschel mit den Grundpunkten PY und einen entsprechenden projectiven Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt X erzeugt. Zu einem Kreise k des Kreisbüschels erhalten wir also durch die Gerade PA, welche den Kreis λ im Punkte Λ schneidet, den entsprechenden Strahl $X\Lambda$. Diese Construction der Focale hat vor jener in Art. 5 erwähnten den Vorzug, dass die Grundpunkte P, Y des Kreisbüschel stets reel sind. In analoger Weise kann man auch P, X als Grundpunkte eines Kreisbüschel, Y als Mittelpunkt des projectiven Strahlenbüschels nehmen und den durch $YTWP$ gehenden Kreis beschreiben, der die Projectivität vermittelt.

Ziehen wir die Gerade UF, die den Kreis λ in Σ trifft und ferner die Gerade ΣP, so schneidet dieselbe die Vierecksseite TW in dem Punkt X_t; denn die Punkte $TX\Lambda P\Sigma U$ bilden ein dem Kreise λ eingeschriebenes Sechseck, dessen Gegenseiten nach dem Pascal'schen Satze sich resp. in den Punkten X_t, F, A schneiden, die auf einer Geraden liegen. Durch diese Beziehung erhalten wir eine Controle für die Bestimmung des Punktes F der Focale.

Nehmen wir an, dass in Fig. 23 ein Kreis k beschrieben sei, der die Punkte $YAFC$ enthält, und bei dem die Sehne AC parallel XF ist, so muss dieser Kreis durch den Parabelbrennpunkt P gehen; denn läge derselbe nicht auf diesem Kreise, so könnten wir einen Kreis PYF beschreiben, der die Vierecksseiten TU, VW resp. in den Punkten A', C' schneidet, und es müsste dann $A'C'$ parallel XF, also auch parallel AC sein. Dies ist aber nicht möglich, weil die beiden Punkte Y, F, durch welche die beiden Kreise gehen, nicht zusammen liegen.

20. Ziehen wir in Fig. 24 an den Kreis λ die im Punkte P berührende Tangente, so schneidet dieselbe die Vierecksseite TU in dem zu P gehörenden Anschlusspunkt A_p. Der durch PA_pY_t gehende Kreis schneidet den Kreis λ in einem Punkt Ψ und die Seite FD des Fachvierecks $TAFD$ in einem Punkt Δ. Die vier Punkte PUY_tF liegen auf einem Kreise. Hiernach ist, wenn wir die mit ψ bezeichnete Gerade $\Delta\Psi$ ziehen, der Winkel $P\Psi\psi = PA_p\Delta$, und ferner Winkel $PU\Sigma = PY_tF = PA_p\Delta$, also $P\Psi\psi = PU\Sigma$; folglich geht die Gerade $\Delta\Psi$ durch den Punkt Σ.

Da die Gerade PA_p den Kreis λ berührt, so sind die Geraden $PX_t\Sigma$, $A_p\Delta$ parallel, und da P ein Punkt der zu dem Fachviereck $TAFD$ gehörenden Focale ist, so geht gemäss der Darlegung in Art. 19 der Kreis PA_pY_t durch den Brennpunkt P_t der Parabel, welche die vier Seiten dieses Fachvierecks berührt. Demnach sind A_p, Δ die zu dem Punkte P gehörenden

Anschlusspunkte auf den Seiten TA, FD dieses Fachvierecks. In analoger Weise ergiebt sich, wenn wir auf TW den Anschlusspunkt D_p bestimmen und durch PD_pX_t einen Kreis beschreiben, dass derselbe durch den Parabelbrennpunkt P_t geht und die Seite AF des Fachvierecks $TAFD$ in dem zu P gehörenden Anschlusspunkt A schneidet, wobei $D_p\mathrm{A}$ parallel PY_t ist. Sind also die Anschlusspunkte A_p, D_p construirt und ziehen wir $A_p\Delta$ parallel PX_t, $D_p\mathrm{A}$ parallel PY_t, so sind A_p, A, Δ, D_p die zum Punkte P gehörenden vier Anschlusspunkte auf den Seiten des Fachvierecks $TAFD$. In Fig. 25 sind ferner die zum Punkte P gehörenden vier Anschlusspunkte B_p, B, Γ, C_p auf den Seiten des Fachvierecks $VBFC$ construirt und dadurch ist der Punkt P zugleich auch an die beiden anderen Fachvierecke $UAFB$, $WCFD$ angeschlossen und wir erhalten den Satz:

> Bei einem Brennpunktmechanismus kann der Parabelbrennpunkt P, welcher in den Anschlusspunkten A_p, B_p, C_p, D_p mit den Seiten TU, UV, VW, WT des Stammvierecks $TUVW$ gelenkig verbunden ist, auch in den Punkten A, B, Γ, Δ mit den zu einem beliebigen Brennpunkt F gehörenden Gliedern AF, BF, CF, DF gelenkig verbunden werden.

Der so erhaltene übergeschlossene Mechanismus in Fig. 25, bei dem acht Glieder im Punkte P ein gemeinsames Gelenk besitzen, enthält vier Brennpunktmechanismen, bei denen die vier zu F gehörenden Fachvierecke $FAUB$, $FBVC$, $FCWD$, $FDTA$ als Stammvierecke auftreten; und in jedem dieser Brennpunktmechanismen befinden sich zwei Paare ähnlicher Fachvierecke. Die vier Gruppen von den vier zugehörigen Anschlusspunkten $\mathrm{A}A_pB_p\mathrm{B}$, $\mathrm{B}B_pC_p\Gamma$, $\Gamma C_pD_p\Delta$, $\Delta D_pA_p\mathrm{A}$ liegen auf je einem Kreise.

In dem Brennpunktmechanismus mit dem Stammviereck $FDTA$ und Viergliedpunkt P ist

$$PA_pTD_p \sim F\Delta P\mathrm{A}.$$

In dem Brennpunktmechanismus mit dem Stammviereck $FBVC$ und Viergliedpunkt P ist

$$VC_pPB_p \sim P\mathrm{B}F\Gamma.$$

Es ist ferner in dem Brennpunktmechanismus mit dem ursprünglichen Stammviereck $TUVW$ und dem Viergliedpunkt P

$$PA_pTD_p \sim VC_pPB_p;$$

also sind die Vierecke $F\Delta P\mathrm{A}$, $P\mathrm{B}F\Gamma$, welche die gemeinsame Diagonale PF besitzen, symmetrisch congruent, und dem zu Folge ist

$$F\Delta = P\mathrm{B},\quad F\mathrm{B} = P\Delta,\quad F\mathrm{A} = P\Gamma,\quad F\Gamma = P\mathrm{A}.$$

Hiernach sind in dem betrachteten übergeschlossenen Mechanismus die Vierecke $F\Delta P\mathrm{B}$, $F\mathrm{A}P\Gamma$ gelenkige Antiparallelogramme, und es können aus demselben die in Fig. 26 und 27 dargestellten übergeschlossenen Mechanismen entnommen werden, in denen nur noch ein überzähliges Glied enthalten ist.

21. Da die Focale φ des Fachvierecks $TAFD$ in Fig. 28 durch den Parabelbrennpunkt P des Stammvierecks $TUVW$ geht, so folgt, wenn wir das Viereck $TAFD$ als ein Stammviereck betrachten, an dessen Seiten TA, TD der Punkt P angeschlossen ist, dass auch die Focale des Fachvierecks TA_pPD_p durch den Parabelbrennpunkt P_t dieses Stammvierecks $TAFD$ geht; und wir erhalten den Satz:

> Bei einem Brennpunktmechanismus erfüllen die Parabelbrennpunkte P_t aller Fachvierecke $TAFD$, welche die gemeinsame Ecke T besitzen, die Focale des Vierecks TA_pPD_p.

Das Analoge gilt für die anderen Fachvierecke, welche resp. die gemeinsame Ecke U, V, W besitzen.

Bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden PD_p, FD mit $\mathfrak{d}$ und beschreiben wir den durch P, F, $\mathfrak{d}$ gehenden Kreis $\mathfrak{k}$, so folgt nach dem Satze in Art. 16, dass dieser Kreis die Focale φ des Stammvierecks $TUVW$ im Punkte P berührt und auch die Schnittpunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der Geradenpaare $PA_p|FA$, $PB_p|FB$, $PC_p|FC$ enthält.

Sind in Fig. 29 auf den Seiten eines Dreiecks $DD_p\mathfrak{d}$ die Punkte X_t P, F beliebig angenommen, und beschreiben wir die Kreise X_tD_pP, $P\mathfrak{d}F$, FDX_t, so schneiden sich diese drei Kreise nach einem bekannten Satze in einem Punkte P_t. In Fig. 28 schneiden sich die nicht gezeichneten Kreise X_tD_pP, FDX_t in dem Brennpunkt P_t der Parabel des Fachvierecks $TAFD$; folglich geht auch der mit $\mathfrak{k}$ bezeichnete Kreis $P\mathfrak{d}F$ durch diesen Parabelbrennpunkt P_t und es ergiebt sich:

> Der durch die Punkte P, F gehende Kreis $\mathfrak{k}$, welcher die Focale φ des Stammvierecks $TUVW$ im Parabelbrennpunkt P berührt, geht durch den Parabelbrennpunkt P_t des Fachvierecks $TAFD$ und somit auch durch die drei Parabelbrennpunkte der drei anderen Fachvierecke.

Da der Kreis $\mathfrak{k}$ die Focale φ aber noch in einem zweiten nicht angezeichneten Punkt F' schneidet, zu dem auch vier Fachvierecke gehören, so enthält dieser Kreis auch die vier Parabelbrennpunkte dieser vier Fachvierecke. Der Kreis $\mathfrak{k}$ schneidet demnach die Focale π_t des Fachvierecks TA_pPD_p, welche alle Parabelbrennpunkte der an der Ecke T befindlichen Fachvierecke $TAFD$ enthält, nur in den beiden Parabelbrennpunkten, die den Punkten F, F' entsprechen; folglich muss dieser Kreis auch die Focale π_t des Vierecks TA_pPD_p im Punkte P berühren, der also ein Berührungspunkt der beiden Focalen φ, π_t ist. Dasselbe gilt dann auch von den nicht gezeichneten Focalen π_u, π_v, π_w, welche die Parabelbrennpunkte der resp. an den Ecken U, V, W befindlichen Fachvierecke enthalten.

Jedem Viergliedpunkt F auf der Focale φ entspricht hiernach eindeutig ein Parabelbrennpunkt P_t auf der Focale π_t und je zwei entsprechende Punkte F, P_t liegen auf einem Kreise $\mathfrak{k}$, der die beiden Focalen im Punkte P berührt. Jeder solcher Kreis $\mathfrak{k}$ schneidet die Focale φ in je zwei Punkten, deren Verbindungsgeraden durch den unendlich fernen Punkt O^∞ dieser Focale φ gehen und demnach der Mittellinie m derselben parallel sind, und schneidet ferner die Focale π_t in je zwei Punkten, deren Verbindungsgeraden durch einen Punkt dieser Focale π_t gehen.

Befindet sich der Punkt F in P, dann fällt der entsprechende Punkt P_t mit dem Parabelbrennpunkt Π_t des Vierecks TA_pPD_p zusammen. Der Kreis ξ, welcher in P die Focale φ berührt und durch Π_t geht, hat demnach drei unendlich nahe Punkte mit der Focale φ gemein, und ist also der Krümmungskreis für den Punkt P derselben. Der Krümmungskreis ξ, dessen Mittelpunkt mit Ξ bezeichnet ist, geht auch durch den Punkt N der Focale φ, den Fusspunkt der von P auf die Verbindungsgerade der in Art. 5 erwähnten Grundpunkte K, L gefällten Senkrechten. Der Krümmungskreis ξ enthält demnach die vier Parabelbrennpunkte Π_t, Π_u, Π_v, Π_w der vier zu dem Viergliedpunkt P gehörenden Fachvierecke und ferner die vier Parabelbrennpunkte der vier zu dem Viergliedpunkt N gehörenden Fachvierecke.

Verlegen wir F nach V, dann fällt der entsprechende Punkt P_t mit P zusammen. Nehmen wir F in T liegend an, dann schrumpft das Fachviereck $TAFD$ in den Punkt T zusammen und es ist demnach T ein selbstentsprechender Punkt der beiden Focalen φ, π_t.

Es ergiebt sich, dass den Grundpunkten K, L auf der Focale φ die Grundpunkte K_t, L_t auf der Focale π_t entsprechen, und dass die Mittellinien m, m_t der Focalen φ, π_t sich in der Mitte μ auf der Tangente $P\Theta$ schneiden, welche die beiden Focalen φ, π_t in P berührt und die Focale φ im Tangentialpunkt Θ trifft. Demnach gehen auch die Mittellinien der drei anderen Focalen π_u, π_v, π_w durch den Punkt μ. Ferner liegen die Punkte $TN\Pi_t$ auf einer Geraden, und wir erhalten den Parabelbrennpunkt Π_t des Fachvierecks TA_pPD_p durch die Gerade TN, die den Krümmungskreis ξ andererseits im Punkte Π_t schneidet. In gleicher Weise erhalten wir durch die Geraden UN, VW, WN die Parabelbrennpunkte Π_u, Π_v, Π_w auf dem Kreise ξ.

II. Verallgemeinerung der Brennpunktmechanismen.

22. Um allgemeinere Brennpunktmechanismen zu erhalten, erweitern wir unsere Betrachtung eines in Fig. 30, Taf. V gezeichneten Brennpunktmechanismus, bei dem ein Viergliedpunkt F_1 in den Anschlusspunkten A,

B, C, D mit dem Stammviereck $TUVW$ verbunden ist. Wir ziehen die von F_1 ausgehenden vier Diagonalen F_1T, F_1U, F_1V, F_1W der vier Fachvierecke. Auf der einen Diagonale FT nehmen wir einen beliebigen Punkt T_1 an, ziehen zu F_1A die Parallele $T_1\mathfrak{A}$, welche TU in $\mathfrak{A}$, F_1U in U_1 schneidet, zu F_1D die Parallele $T_1\mathfrak{D}$, welche TW in $\mathfrak{D}$, F_1W in W_1 trifft. Ferner ziehen wir zu F_1B die Parallele $U_1\mathfrak{B}$, die auf UV den Punkt $\mathfrak{B}$ bestimmt, zu F_1C die Parallele $W_1\mathfrak{C}$, welche $U_1\mathfrak{B}$ in V_1 und VW in $\mathfrak{C}$ schneidet; dann liegt der Punkt V_1 auf der Diagonale F_1V. Denn es ist

$$\frac{TA}{\mathfrak{A}A} = \frac{TD}{\mathfrak{D}D}, \quad \frac{UA}{\mathfrak{A}A} = \frac{UB}{\mathfrak{B}B}, \quad \frac{WD}{\mathfrak{D}D} = \frac{WC}{\mathfrak{C}C}$$

und bei dem Brennpunktmechanismus

$$\frac{TA}{UA} = \frac{WC}{VC}, \quad \frac{UB}{VB} = \frac{TD}{WD},$$

also

$$\frac{VB}{\mathfrak{B}B} = \frac{VC}{\mathfrak{C}C}.$$

Dieser Construction zufolge ist

$$T\mathfrak{A}T_1\mathfrak{D} \sim TAF_1D, \quad U\mathfrak{A}U_1\mathfrak{B} \sim UAF_1B$$

$$V\mathfrak{B}V_1\mathfrak{C} \sim VBF_1C, \quad W\mathfrak{C}W_1\mathfrak{D} \sim WCF_1D,$$

und ferner

$$T\mathfrak{A}T_1\mathfrak{D} \sim V_1\mathfrak{C}V\mathfrak{B}, \quad U\mathfrak{A}U_1\mathfrak{B} \sim W_1\mathfrak{C}W\mathfrak{D}.$$

Demnach ergiebt sich die Aehnlichkeit der folgenden Dreiecke:

$$F_1TU \sim F_1V_1W_1, \quad F_1UV \sim F_1W_1T_1,$$

$$F_1VW \sim F_1T_1U_1, \quad F_1WT \sim F_1U_1V_1;$$

folglich sind die Vierecke $TUVW$, $V_1W_1T_1U_1$ entgegengesetzt ähnlich und der Punkt F_1 ist der selbstentsprechende Punkt für diese entgegengesetzt ähnlichen Vierecke.

Hiernach können wir die eingefügten Vierecke $T\mathfrak{D}T_1\mathfrak{A}$, $U\mathfrak{A}U_1\mathfrak{B}$, $V\mathfrak{B}V_1\mathfrak{C}$, $W\mathfrak{C}W_1\mathfrak{D}$ als Gelenkvierecke betrachten, und es ist $T_1U_1V_1W_1$ ein Gelenkviereck, dessen Seiten in den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ mit den entsprechend bezeichneten Seiten des Gelenkviereckes $TUVW$ drehbar verbunden sind. Lassen wir die Glieder AF_1, BF_1, CF_1, DF_1 weg, so erhalten wir den in Fig. 31 gezeichneten übergeschlossenen Mechanismus, der auch von Kempe* angegeben wurde. Bei diesem Mechanismus schneiden sich die vier Diagonalen TT_1, UU_1, VV_1, WW_1 während der Bewegung beständig in einem Punkt F_1, der ein Brennpunkt eines dem Gelenkviereck $TUVW$ eingeschriebenen Kegelschnittes und zugleich ein Brennpunkt eines dem Gelenkviereck $T_1U_1V_1W_1$ eingeschriebenen Kegel-

* Proceedings of the London Mathematical Society 1877—78. V. IX. p. 138.

schnittes ist; deshalb wollen wir diesen übergeschlossenen Mechanismus einen allgemeinen Brennpunktmechanismus nennen.

Der im Vorhergehenden betrachtete specielle Brennpunktmechanismus geht aus dem allgemeinen Brennpunktmechanismus Fig. 30 in verschiedener Weise als besonderer Fall hervor. Wenn wir einen Brennpunkt F_1 annehmen und die Ecke T_1 auf der Geraden TF_1 nach F_1 verlegen, dann schrumpft das Gelenkviereck $T_1U_1V_1W_1$ in den Punkt F_1 zusammen, und wir erhalten einen speciellen Brennpunktmechanismus mit dem Stammviereck $TUVW$ und dem angeschlossenen Viergliedpunkt F_1. Verlegen wir die Ecke T_1 auf der Geraden TF_1 nach T, dann erhalten wir einen speciellen Brennpunktmechanismus, dessen Stammviereck $V\mathfrak{B}V_1\mathfrak{C}$ und dessen angeschlossener Viergliedpunkt T ist. Analog ergeben sich drei andere specielle Brennpunktmechanismen, wenn wir resp. die Ecken U_1, V_1, W_1 nach U, V, W verlegen.

23. Nehmen wir an, es sei in Fig. 30 ein Mechanismus gegeben, der zunächst aus den beiden Gelenkvierecken: $\mathfrak{A}T_1\mathfrak{D}T$, $\mathfrak{A}U_1\mathfrak{B}U$ mit den gemeinsamen Seiten TU, $\mathfrak{A}U_1$ gebildet ist, und ziehen wir die beiden Diagonalen TT_1 UU_1, die sich im Punkte F_1 schneiden, so können wir, indem wir F_1A, F_1B, F_1D resp. zu $\mathfrak{A}U_1$, $\mathfrak{B}U_1$, $\mathfrak{D}T_1$ parallel ziehen, den Punkt F_1 durch diese neuen Glieder mit dem Mechanismus gelenkig verbinden. Der so angeschlossene Gelenkpunkt F_1 bleibt dann während der Bewegung beständig der Schnittpunkt dieser beiden Diagonalen. Setzen wir nun voraus, dass bei diesem Mechanismus die Winkel $U\mathfrak{B}U_1$ und $T\mathfrak{D}T_1$ sich beständig, wie im betrachteten Fall, zu zwei Rechten ergänzen, oder gleich sind, dann ist auch $UBF_1 + TDF_1 = 2R$ oder $UBF_1 = TDF_1$. Dem zufolge kann, wenn wir den Winkel $BF_1V = \mathfrak{D}TT_1$, und $DF_1W = \mathfrak{B}UU_1$ machen, das Glied VW eingefügt werden. Der Schnittpunkt V_1 der Geraden F_1V, $\mathfrak{B}U_1$ und der Schnittpunkt W_1 der Geraden F_1W, $\mathfrak{D}T_1$ liefern die Gerade W_1V_1, welche VW im Punkt $\mathfrak{C}$ trifft; und ziehen wir noch F_1C parallel zu W_1V_1, so erhalten wir durch jene beiden verbundenen Gelenkvierecke den in Fig. 30 dargestellten Mechanismus. Wir können die Punkte V, W auch ohne die Geraden F_1B, F_1D erhalten, wenn wir durch F_1 die Gerade F_1V so ziehen, dass sie mit der Geraden $U_1\mathfrak{B}$ den Winkel $\mathfrak{B}V_1V = \mathfrak{D}TT_1$ bildet, und ferner durch F_1 die Gerade F_1W so ziehen, dass sie mit der Geraden $T_1\mathfrak{D}$ den Winkel $\mathfrak{D}W_1W = \mathfrak{B}UU_1$ einschliesst.

Hiernach können wir den Mechanismus in Fig. 31 in dreierlei Weise als einen allgemeinen Brennpunktmechanismus betrachten: Erstens die beiden entgegengesetzt ähnlichen Gelenkvierecke $TUVW$, $T_1U_1V_1W_1$ mit Anschlusspunkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ und den sich im Brennpunkt F_1 schneidenden Geraden TT_1, UU_1, VV_1, WW_1; zweitens die beiden entgegengesetzt ähnlichen Gelenkvierecke $T\mathfrak{A}T_1\mathfrak{D}$, $V\mathfrak{B}V_1\mathfrak{C}$ mit den Anschlusspunkten U, U_1, W_1, W und den sich im selbstentsprechenden Punkt oder

Brennpunkte F_{II} treffenden Geraden TV, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $T_1 V_1$, $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$; drittens die beiden entgegengesetzt ähnlichen Gelenkvierecke $U\mathfrak{A}U_1\mathfrak{B}$, $W\mathfrak{D}W_1\mathfrak{C}$ mit den Anschlusspunkten T, T_1, V_1, V und den durch den selbstentsprechenden Punkt oder Brennpunkt F_{III} gehenden Geraden UW, $\mathfrak{A}\mathfrak{D}$, U_1W_1, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$.

Wegen der Gleichartigkeit der Beziehungen der verbundenen Gelenkvierecke $TUVW$, $T_1U_1V_1W_1$ können wir, wie in Fig. 32, den Punkt F_1 auch mit den Seiten des Gelenkviereckes $T_1U_1V_1U_1$ in den Punkten A_1, B_1, C_1, D_1 verbinden, wenn wir $F_1A_1 \parallel TU$, $F_1B_1 \parallel UV$, $F_1C_1 \parallel VW$, $F_1D_1 \parallel WT$ ziehen. Der Punkt F_1 ist demnach als ein Achtgliedpunkt durch vier Glieder mit dem Gelenkviereck $TUVW$ und zugleich durch vier Glieder mit dem Gelenkviereck $T_1U_1V_1W_1$ verbunden.

Wie den Punkt F_1, so können wir auch die Punkte F_{II}, F_{III} in Fig. 33 als Achtgliedpunkte in analoger Weise durch je vier Glieder resp. mit den beiden entgegengesetzt ähnlichen Gelenkvierecken $T\mathfrak{D}T_1\mathfrak{A}$, $V_1\mathfrak{B}V\mathfrak{C}$ und $U\mathfrak{A}U_1\mathfrak{B}_1$, $W\mathfrak{C}W\mathfrak{D}$ verbinden. Es können also die drei Punkte F_1, F_{II}, F_{III} als Achtgliedpunkte, jeder durch acht Glieder, an die Seiten der beiden verbundenen Gelenkvierecke $TUVW$, $T_1U_1V_1W_1$ angeschlossen werden.

24. Betrachten wir in Fig. 32 das Gelenkviereck $T\mathfrak{A}T_1\mathfrak{D}$, an dessen Seiten der Punkt F_1 durch die Glieder F_1A, F_1A_1, F_1D_1, F_1D angeschlossen ist, gesondert in der veränderten Gestalt Fig. 34, so erkennen wir, dass dieser Mechanismus k e i n Brennpunktmechanismus ist; denn es sind die Vierecke TAF_1D, $F_1A_1T_1D_1$ gleichsinnig ähnlich und die beiden Vierecke $\mathfrak{A}AF_1A_1$, WD_1F_1D nicht ähnliche Parallelogramme. Dieser Mechanismus, der aus zwei verbundenen Pantographen besteht, ist ein specieller Fall des allgemeineren aus zwei Pantographen gebildeten Mechanismus in Fig. 35.

Bei dem in Fig. 36 dargestellten übergeschlossenen Mechanismus, der aus zwei S y l v e s t e r'schen Pantographen gebildet ist, sind die Dreiecke TUA, TWD und WVC, UVB ähnlich; demnach sind die beiden Gelenkvierecke TAF_1D, F_1BVC gleichsinnig ähnlich und die beiden anderen Gelenkvierecke nicht ähnliche Parallelogramme. Aus diesem Mechanismus, bei dem die Anschlusspunkte A, B, C, D des Punktes F_1 nicht auf den Seiten des Gelenkvierecks $TUVW$ liegen, geht der Mechanismus in Fig. 34 auch als besonderer Fall hervor, wenn wir die Anschlusspunkte auf die Seiten dieses Gelenkviereckes legen.

25. Es ist in Fig. 31 der Winkel $V\mathfrak{B}\mathfrak{C} = T_1\mathfrak{D}\mathfrak{A}$, $U\mathfrak{B}\mathfrak{A} = W_1\mathfrak{D}\mathfrak{C}$, also $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{C} = 180^0$ und hieraus folgt der Satz:

> B e i d e m a l l g e m e i n e n B r e n n p u n k t m e c h a n i s m u s l i e g e n d i e v i e r A n s c h l u s s p u n k t e $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ d e r b e i d e n v e r b u n d e n e n G e l e n k v i e r e c k e $TUVW$, $T_1U_1V_1W_1$ a u f e i n e m K r e i s e.

Wegen der analogen Beziehungen liegen demnach auch die vier Anschlusspunkte $U W_1 U_1 W$ der Gelenkvierecke $T \mathfrak{A} T_1 \mathfrak{D}$, $V \mathfrak{B} V_1 \mathfrak{C}$ auf je einem Kreise und ebenso liegen auch die vier Anschlusspunkte $T T_1 V_1 V$ der Gelenkvierecke $U \mathfrak{B} U_1 \mathfrak{A}$, $W \mathfrak{C} W_1 \mathfrak{D}$ auf einem Kreise.

26. Nach Art. 17 erhalten wir durch die Construction eines Brennpunktmechanismus zugleich zwei andere Brennpunktmechanismen, indem wir jedes der vier Anschlussglieder eines Viergliedpunktes bis zu den beiden Gliedern verlängern, welche mit diesem Anschlussgliede an derselben Seite des Stammvierecks angeschlossen sind; demnach ergeben sich in analoger Weise auch in Fig. 37 drei allgemeine Brennpunktmechanismen, die als getrennt zu betrachten sind. Durch die vier Seiten des Vierecks $TUVW$, die wir als die vier Seiten eines vollständigen Vierseits auffassen, werden die drei Vierecke $TUVW$, $TYVX$, $UYWX$ gebildet, welche wir getrennt als Gelenkvierecke ansehen. Ebenso werden auch durch die vier Seiten des Viereckes $T_1 U_1 V_1 W_1$ ausser diesem noch die beiden Vierecke $T_1 Y_1 V_1 X_1$, $U_1 Y_1 W_1 X_1$ gebildet, die resp. mit jenen drei Gelenkvierecken verbunden werden können; denn durch die Verlängerungen der Seiten des Vierecks $T_1 U_1 V_1 W_1$ erhalten wir resp. die betreffenden Anschlusspunkte $\mathfrak{X}_t \mathfrak{X}_u$, $\mathfrak{Y}_u \mathfrak{Y}_v$ $\mathfrak{X}_v \mathfrak{X}_w$, $\mathfrak{Y}_t \mathfrak{Y}_w$. Hiernach ergeben sich die folgenden drei allgemeinen Brennpunktmechanismen: Erstens, die beiden verbundenen Gelenkvierecke $TUVW$, $T_1 U_1 V_1 W_1$ mit den auf einem Kreise liegenden Anschlusspunkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$; zweitens, die beiden verbundenen Gelenkvierecke $TYVX$, $T_1 Y_1 V_1 X_1$ mit den auf einem Kreise liegenden Anschlusspunkten $\mathfrak{Y}_t$, $\mathfrak{Y}_v$, $\mathfrak{X}_v$, $\mathfrak{X}_t$; drittens die beiden verbundenen Gelenkvierecke $UYWX$, $U_1 Y_1 W_1 X_1$ mit den auf einem Kreise liegenden Anschlusspunkten $\mathfrak{Y}_u$, $\mathfrak{Y}_w$, $\mathfrak{X}_w$, $\mathfrak{X}_u$.

Jeder dieser drei Brennpunktmechanismen kann nach Art. 17 wieder in dreierlei Weise als allgemeiner Brennpunktmechanismus aufgefasst werden und wir erhalten dann sechs Gruppen von vier Anschlusspunkten, die auf je einem Kreise liegen.

Für die beiden entgegengesetzt ähnlichen vollständigen Vierseite mit den sechs Ecken $TUVWXY$, $T_1 U_1 V_1 W_1 X_1 Y_1$ ist F_I der selbstentsprechende Punkt und durch denselben gehen sechs Verbindungsgeraden der betreffenden Ecken, die aber nicht entsprechende Ecken sind. In gleicher Beziehung stehen die Punkte F_{II}, F_{III}, F_{IV} als selbstentsprechende Punkte zu den betreffenden Vierseiten. Wenn wir ferner beachten, dass je vier Anschlusspunkte in Fig. 37 auf einem Kreise und je drei Pole des Mechanismus auf einer Geraden liegen, so erhalten wir eine merkwürdige Configuration aus Kreisen und Geraden, auf die wir hier aber nicht weiter eingehen wollen.

27. In Fig. 38 sind mit dem gegebenen Gelenkviereck $TUVW$ zwei Gelenkvierecke $T_1 U_1 V_1 W_1$ und $T_2 U_2 V_2 W_2$, die sich resp. auf die beliebig angenommenen nicht conjugirten Brennpunkte F_1, F_2 beziehen, in den Anschlusspunkten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{D}_2$ verbunden.

Betrachten wir nun zunächst die beiden Gelenkvierecke $T\mathfrak{A}_1 T_1 \mathfrak{D}_1$, $T\mathfrak{A}_2 T_2 \mathfrak{D}_2$, in denen die Winkel $\mathfrak{A}_1 T_1 \mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{A}_2 T_2 \mathfrak{D}_2$ beständig gleich sind, so können wir nach der in Art. 23 angegebenen Construction die beiden einfügbaren Glieder $\mathfrak{A}'_1 \mathfrak{A}'_2$, $\mathfrak{D}'_1 \mathfrak{D}'_2$ bestimmen, welche resp. die Glieder $\mathfrak{A}_1 T_1$, $\mathfrak{A}_2 T_2$ und $\mathfrak{D}_1 T_1$, $\mathfrak{D}_2 T_2$ gelenkig verbinden und ferner in T' drehbar verbunden sind. Wir ziehen die beiden Diagonalen $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{D}_2$, die sich im Punkte $\mathfrak{F}_t$ schneiden, durch diesen Punkt $\mathfrak{F}_t$ ziehen wir die Gerade $\mathfrak{A}'_1 \mathfrak{D}'_1$, so dass der Winkel $T_1 \mathfrak{D}'_1 \mathfrak{A}'_1 = T_2 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{D}_2$ ist, und ferner die Gerade $\mathfrak{A}'_2 \mathfrak{D}'_2$, so dass der Winkel $T_2 \mathfrak{D}'_2 \mathfrak{A}'_2 = T_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{D}_1$ ist. Dann erhalten wir die entgegengesetzt ähnlichen Gelenkvierecke $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}'_2 \mathfrak{A}'_1$, $\mathfrak{D}'_2 \mathfrak{D}'_1 \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$ mit den selbstentsprechenden Punkt $\mathfrak{F}_t$ und die auf einem Kreise liegenden Anschlusspunkte T, T', T_1, T_2.

In gleicher Weise erhalten wir vermittelst des Schnittpunktes $\mathfrak{F}_u$ der Diagonalen $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2$ die beiden entgegengesetzt ähnlichen Gelenkvierecke $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}'_2 \mathfrak{A}'_1$, $\mathfrak{B}'_2 \mathfrak{B}'_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$ mit den auf einem Kreise liegenden Anschlusspunkten $U\,U'\,U_1\,U_2$. Ebenso ergeben sich vermittelst des Schnittpunktes $\mathfrak{F}_v$ der Diagonalen $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{B}_2 \mathfrak{C}_2$ die entgegengesetzt ähnlichen Gelenkvierecke $\mathfrak{B}'_2 \mathfrak{B}'_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{C}'_2 \mathfrak{C}'_1$ mit den auf einem Kreise liegenden Anschlusspunkten $V\,V'\,V_2\,V_1$. Hiernach sind dann auch die beiden Gelenkvierecke $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{C}'_2 \mathfrak{C}'_1$, $\mathfrak{D}'_2 \mathfrak{D}'_1 \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$ entgegengesetzt ähnlich; und wenn wir auch hier vermittelst des Schnittpunktes $\mathfrak{F}_w$ der Diagonalen $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_2$ die beiden verbundenen Vierecke construiren, so folgt, dass wir wegen der Eindeutigkeit dieser Construction dieselben entgegengesetzt ähnlichen Gelenkvierecke mit dem auf einem Kreise liegenden Anschlusspunkte $W'\,W\,W_2\,W_1$ erhalten.

Das somit entstandene Gelenkviereck $T'U'V'W'$ und das ursprüngliche Gelenkviereck $TUVW$ stehen zu den beiden Gelenkvierecken $T_1 U_1 V_1 W_1$, $T_2 U_2 V_2 W_2$ in gleicher Beziehung, sind also diesen entgegengesetzt ähnlich; und folglich sind jene beiden Gelenkvierecke in gleichem Sinn ähnlich. Wir erhalten demnach den Satz:

> Zwei Gelenkvierecke $T_1 U_1 V_1 W_1$, $T_2 U_2 V_2 W_2$, die drehbar an ein Gelenkviereck $TUVW$ angeschlossen sind, können noch mit einem zweiten diesem ähnlichen Gelenkviereck $T'U'V'W'$ drehbar verbunden werden.

Wir haben bei der Ableitung des betrachteten Mechanismus angenommen, dass F_1, F_2 nicht conjugirte Brennpunkte sind. Hätten wir in Fig. 38 angenommen, dass F_1, F_2 conjugirte Punkte sind, also beide zu einem dem Viereck $TUVW$ eingeschriebenen Kegelschnitt gehören, dann würden die Vierecke $T\mathfrak{A}_1 T_1 \mathfrak{D}_1$, $T\mathfrak{D}_2 T_2 \mathfrak{A}_2$ entgegengesetzt ähnlich sein und nach der ausgeführten Construction die Strecke $\mathfrak{A}'_1 \mathfrak{A}'_2$ mit $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$, die Strecke $\mathfrak{D}'_1 \mathfrak{D}'_2$ mit $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$ zusammenfallen. Demnach werden dann die beiden Gelenkvierecke $T'U'V'W'$, $TUVW$ mit den auf ihren Seiten liegenden Gelenkpunkten sich decken.

Dieser übergeschlossene Mechanismus wird, wie die schematische Zeichnung in Fig. 39 anschaulicher zeigt, aus vier Gelenkvierecken $TUVW$, $T_1U_1V_1W_1$, $T'U'V'W'$, $T_2U_2V_2W_2$ gebildet, die in geschlossener Folge gelenkig verbunden sind, und kann in vierlei Weisen als aus vier in geschlossener Folge verbundenen Gelenkvierecken bestehend aufgefasst werden; deshalb wollen wir diesen übergeschlossenen Mechanismus einen Vierungsmechanismus nennen. Derselbe kann ferner auch in verschiedener Weise als aus zwei verbundenen allgemeinen Brennpunktmechanismen gebildet betrachtet werden.

In Bezug auf einen Brennpunkt F_1 in Fig. 38 giebt es unendlich viele ähnliche Gelenkvierecke $T_1U_1V_1W_1$ in ähnlicher Lage, für die F_1 Aehnlichkeitspunkt ist; und ebenso giebt es in Bezug auf einen zweiten Brennpunkt F_2 unendliche viele ähnliche Gelenkvierecke $T_2U_2V_2W_2$ in ähnlicher Lage, für die F_2 Aehnlichkeitspunkt ist. Je zwei von diesen Gelenkvierecken $T_1U_1V_1W_1$, $T_2U_2V_2W_2$, die an das Gelenkviereck $TUVW$ angeschlossen sind, können mit einem entsprechenden ähnlichen Gelenkviereck $T'U'V'W'$ verbunden werden. Da der Winkel $U'\mathfrak{A}'_1\mathfrak{A}_1 = T\mathfrak{D}_2T_2$, so sind die entsprechenden Seiten der zweifach unendlich vielen Gelenkvierecke $T'U'V'W'$ parallel.

Der Vierungsmechanismus ist reich an interessanten Folgerungen, und von den vielen speciellen Fällen desselben wollen wir einige hervorheben.

28. Lassen wir das Gelenkviereck $T_1U_1V_1W_1$ in den Brennpunkt F_1 in Fig. 40 übergehen, dann werden die Seiten dieses im Punkte F_1 zusammengeschrumpften Gelenkvierecks durch die Anschlussglieder F_1A_1, F_1B_1, F_1C_1, F_1D_1 des Brennpunktes F_1 ersetzt. Diese Anschlussglieder und jedes in Bezug auf F_2 construirte Gelenkviereck $T_2U_2V_2W_2$ können mit einem Gelenkviereck $T'U'V'W'$ verbunden werden. Die unendlich vielen ähnlichen Gelenkvierecke $T'U'V'W'$, welche in diesem Fall auftreten, befinden sich in ähnlicher Lage, für die der Brennpunkt F_1 Aehnlichkeitspunkt ist. Eines von diesen Gelenkvierecken schrumpft demnach in dem Punkte F_1 zusammen und diesem entspricht ein bestimmtes Gelenkviereck $T_2U_2V_2W_2$, dessen Seiten zu den Anschlussgliedern F_2A_2, F_2B_2, F_2C_2, F_2D_2 des Brennpunktes F_2 parallel sind. Um dasselbe zu construiren, ziehen wir die Gerade $F_1\mathfrak{F}_t$, die mit F_1D_1 den Winkel $D_1F_1\mathfrak{F}_t = F_2A_2D_2$ bildet, und A_1D_1 in $\mathfrak{F}_t$ schneidet; ferner ziehen wir durch $\mathfrak{F}_t$ zu A_2D_2 die Parallele $\mathfrak{F}_t\mathfrak{A}_2\mathfrak{D}_2$, welche die Punkte $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{D}_2$ bestimmt. Dann ergiebt sich das Gelenkviereck $T_2U_2V_2W_2$, dessen Ecken resp. auf den Geraden F_2T, F_2U, F_2V, F_2W liegen und in den Punkten $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{D}_2$ an das Gelenkviereck $TUVW$ angeschlossen ist. Um nun die Seiten $F_1\mathfrak{A}'_2$, $F_1\mathfrak{B}'_2$, $F_1\mathfrak{C}'_2$, $F_1\mathfrak{D}'_2$ des im Punkte F_1 zusammengeschrumpften Gelenkvierecks $T'U'V'W'$ zu erhalten, ziehen wir $F_1\mathfrak{A}'_2$ so, dass der Winkel $F_1\mathfrak{A}'_2T_2 = F_1D_1T$ ist, und in analoger Weise ergeben sich $F_1\mathfrak{B}'_2$, $F_1\mathfrak{C}'_2$, $F_1\mathfrak{D}'_2$.

Wir erhalten hiernach einen Mechanismus, bei welchem ein Achtgliedpunkt F_1 in anderer Art als in Fig. 32 durch acht Glieder an die Seiten der verbundenen Gelenkvierecke $TUVW$, $T_2U_2V_2W_2$ angeschlossen ist, und dieser geht also aus dem Vierungsmechanismus in Fig. 39 hervor, wenn die beiden benachbarten Gelenkvierecke $T_1U_1V_1W_1$ und $T'U'V'W'$ in je einen Punkt übergehen.

29. In Fig. 41 ist der specielle Fall dargestellt, in welchem nach Fig. 39 die gegenüberliegenden Gelenkvierecke $T_1U_1V_1W_1$ und $T_2U_2V_2W_2$ durch die nicht conjugirten Brennpunkte F_1, F_2 ersetzt sind. Fig. 42 zeigt eine weitere Specialisirung dieses Falles, wo die Brennpunkte F_1, F_2 auf den Seiten TW, UV gemeinsame Anschlusspunkte resp. B_{12}, D_{12} besitzen. Es wird dann auch das Gelenkviereck $B_1B_2B'_2B'_1$ und $D_1D_2D'_2D'_1$ resp. durch den Punkt B_{12}, D_{12} vertreten.

Nehmen wir bei diesem speciellen Mechanismus in Fig. 43 noch einen beliebigen dritten Brennpunkt F_3 eines dem Gelenkvierek $TUVW$ eingeschriebenen Kegelschnittes an, mit den Anschlussgliedern F_3A_3, F_3B_3, F_3C_3, F_3D_3, so giebt es auf dem Gliede F_3A_3 einen Brennpunkt f_a eines das Gelenkviereck $A_1A'_1A'_2A_2$ berührenden Kegelschnittes und es kann f_a an die Seiten dieses Gelenkviereckes angeschlossen werden. Dasselbe gilt von einem auf dem Gliede F_3C_3 liegenden Brennpunkt f_c für das Gelenkviereck $C_1C'_1C'_2C_2$. Um dies zu beweisen, verbinden wir in Fig. 44 den Parabelbrennpunkt P des Gelenkviereckes $TUVW$ mit A_1F_1, A_2F_2, A_3F_3 in den Punkten A_1, A_2, A_3, wie in Art. 20 angegeben wurde, dann sind die Winkel $P\mathsf{A}_1A_1$, $P\mathsf{A}_2A_2$, $P\mathsf{A}_3A_3$ gleich und es können die Glieder A_1F_1, F_2A_2, F_3A_3 unter sich durch zwei eingefügte Glieder f_aa_1, f_aa_2 verbunden werden. Es sind ferner die Winkel PA_1F_1, PA_2F_2 gleich, weil die Punkte Y, F_1, F_2 auf einer Geraden, die Punkte P, F_1, A_1, Y, und P, F_2, A_2, Y auf je einem Kreise liegen. Wir erhalten dann, indem wir den Winkel A_3Pf_a gleich PA_1F_1 oder gleich PA_2F_2 machen, auf A_3F_3 denselben Gelenkpunkt f_a für die beiden Glieder fa_1, fa_2.*

Andere besondere Fälle ergeben sich, wenn wir in Fig. 38 für das Gelenkviereck ein gleichschenkeliges, oder ein Antiparallelogramm nehmen und ferner wie oben einige Gelenkvierecke durch Punkte ersetzen.

Lassen wir in Fig. 38 die Gelenke $T_1U_1V_1W_1$ und $T_2U_2V_2W_2$ weg, dann erhalten wir den in Fig. 45 dargestellten übergeschlossenen. Dieser Mechanismus bleibt noch übergeschlossen, wenn wir ferner drei Glieder, die je zwei Gelenke besitzen, herausnehmen; wir erhalten dann die in Fig. 45a, 45b, 45c um die Hälfte verkleinert gezeichneten Mechanismen. Werden aber vier solche Glieder weggenommen, dann erhalten wir zwangläufige,

---

* Die Brennpunktmechanismen in Fig. 8, 10, 25, 38, 41, 42, 43 wurden aus Aluminium angefertigt in dem mathem.-physik. Institut von Dr. Th. Edelmann in München. Siehe Katalog mathem. und mathem.-physik. Instrumente. Herausgegeben von W. Dyck. 1892. S. 331 und „Nachtrag“ 1893 zu demselben.

aber nicht mehr übergeschlossene Mechanismen; denn für diese sind die Bedingungen der Zwangläufigkeit erfüllt.*

Wir haben in Fig. 36 einen Mechanismus gezeichnet, bei dem der Viergliedpunkt F_1 an das Gelenkviereck $TUVW$ in den Punkten A, B, C, D angeschlossen ist, die nicht auf den Seiten des Gelenkviereckes liegen. Die Specialisirung dieses übergeschlossenen Mechanismus führt aber nicht zu den Brennpunktmechanismen. Es ist nun zu vermuthen, dass es eine andere Art der Anschliessung von Punkten F_1 giebt, wo die Anschlusspunkte nicht auf den Vierecksseiten liegen, aus der die Brennpunktmechanismen als specielle Fälle hervorgehen, und die Auffindung dieser Mechanismen würde zu einer weiteren interessanten Verallgemeinerung der Brennpunktmechanismen führen.

* Vergl. L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik. 1888. Bd. I, S. 426.

XII.

Zur Theorie der Ausdehnung von Hohlkörpern.

Von

Dr. A. Kurz

in Augsburg.

§ 1. Im ersten Bande der physikalischen Revue* sind die „Untersuchungen von Amagat über die Elasticität fester Körper und die Compressibilität des Quecksilbers“ aus den französischen Annalen vom Jahre 1891 übertragen, in welchen der Verfasser als Ausgangspunkt die Formel für „die Aenderung des Volumens eines Kreiscylinders mit ebenen Grundflächen“ nimmt:

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{E} \cdot \frac{3(1-2\mu)(P_1 R_1^2 - P_0 R_0^2) + 2(1+\mu)(P_1 - P_0) \cdot \frac{R_1^2 R_0^2}{R^2}}{R_0^2 - R_1^2} \ldots^{**}$$

Dabei ist P_1 der äussere und P_0 der innere Druck, E der Elasticitätsmodul (wie z. B. 20000 Kilogramm für den Quadratmillimeter Eisen) und μ die zweite Elasticitätsconstante, welche Poisson als gleich $\frac{1}{4}$ in allen isotropen Körpern annahm. R_1 ist der äussere, R_0 der innere Radius und $R_1 > R > R_0$.

Indem ich dem Ursprung dieser Formel nachforschte, der nicht angegeben ist, fand ich kürzlich in den Vorlesungen über Elasticität von F. Neumann, welche sein Schüler, Professor O. E. Meyer, im Jahre 1885 bei B. G. Teubner herausgegeben hat, das Nothwendige, wenn auch nicht diese Formel selbst. Lamé handelt in seiner Théorie mathem. de l'Elasticité über den Hohlcylinder viel kürzer im § 67 bis 69 des vorgenannten Buches, und die beiden anderen Schüler F. Neumann's, Clebsch und Kirchhoff, behandeln, der Erstere in seiner Theorie der Elasticität*** vom Jahre 1862, der Letztere in seiner Mechanik vom Jahre 1876 nur die Hohlkugel. Diese folgt bei Neumann in den §§ 70 bis 74.

* Herausgegeben vom Privatdocent Graetz in München. 1892. (Diese Revue hat mit demselben Jahre zu erscheinen aufgehört.)

** Zwei Versehen im Zähler kann man leicht an den Dimensionen und mittelst der von Amagat hernach vorgenommenen Discussion erkennen; sie wurden oben berichtigt.

*** Im VIII. Bande dieser Zeitschrift wurde dieses Buch ausführlich besprochen.

Die Hohlkugel erscheint hier in der Entwickelung wie in den Resultaten einfacher als der Hohlcylinder*; ich lasse sie deshalb vorangehen in der folgenden Angabe der richtigen Formeln, da sie bei Clebsch durch Rechenversehen theilweise entstellt sind. Alsdann werde ich, ohne eine der bei Neumann sich vorfindenden Entwickelungen zu wiederholen, zur Formel des Hohlcylinders und Dem, was daran hängt aber auch in den genannten und mir bisher einzig bekannten Quellen nicht angegeben ist, übergehen.

§ 2. Die Hohlkugel. Indem Clebsch im § 18 bei der Bestimmung der beiden Constanten der Integration ein Rechenversehen beging, wird die lineare Dilatation ϱ daselbst durch zwei Fehler (abgesehen von einem an den Dimensionen leicht erkennbaren Druckversehen) entstellt. Sie muss heissen:

$$\varrho = \frac{2(1-2\mu)(D_1 a_1^3 - D a^3) + (1+\mu)(D_1 - D)\dfrac{a^3 a_1^3}{r^3}}{2E(a^3 - a_1^3)},$$

wo E und μ dasselbe bedeuten wie im § 1, $a > r > a_1$, was dort $R_1 > R > R_0$, und analog D und D_1 den äusseren und inneren Druck, der dort P_1 und P_0 lautet.

Ist $D_1 > D$ wie bei einem Dampfkessel, so nimmt ϱ, wenn auch $D_1 a_1^3 > D a^3$ ist, ab mit dem Wachsthum des r von a_1 bis a. Wenn zu $D_1 > D$ aber $D_1 a_1^3 < D a^3$ kommt, so könnte im Zähler auch das negative Glied den Ausschlag geben: lineare Contraction.

Die cubische Dilatation ist a. a. O. richtig angegeben:

$$\Delta = 3 \cdot \frac{1-2\mu}{E} \cdot \frac{D_1 a_1^3 - D a^3}{a^3 - a_1^3};$$

ich erinnere dabei wegen der Constanten in dieser Formel an den massiven Quader, der von allen Seiten mit gleicher Flächenkraft 1 dilatirt wird: es ist da $\frac{1}{E}$ die Längsdilatation und $\frac{1-2\mu}{E}$ die cubische, wenn nur ein einziges der drei Seitenpaare auseinander gezogen wird; aber $\frac{1-2\mu}{E}$ ist auch die Längsdilatation und drei Mal so gross die cubische, wenn die drei Seitenpaare gezogen werden (Δ ist constant, nicht wie ϱ von r abhängig).

Für $a_1 = 0$ hat man die Vollkugel, für deren Dilatationen (wenn D negativ ist) oder Contractionen der eben angezogene Vergleich mit dem Quader vollends passt $\left(\text{da ist auch } \varrho \text{ constant und gleich } \frac{1}{3}\Delta\right)$.

Wenn aber im hohlkugeligen Dampfkessel D_1 so sehr überwiegt, dass wir D gleich Null setzen können, so kommt zur Druckkraft D_1 noch der Factor $a_1^3 : (a^3 - a_1^3)$ aus der Raumgeometrie (nicht etwa ein solcher

* Dies sagt auch Lamé am Anfange seiner XII. Leçon. Vergl. unten Nachtrag II.

nach dem Flächenmaasse) hinzu, den man mit geringer Mühe im Gedächtniss behält.

Und so könnte man schliesslich, da $D a^3$ von $D_1 a_1^3$ in Abzug kommt, die ganze Formel für Δ auswendig hinschreiben. Dies ist hinsichtlich des ϱ aber nicht wohl möglich.

§ 3. Clebsch berechnet auch noch die inneren Zug- oder Druckspannungen, sowie die etwaigen Schubspannungen in der Kesselwandung. Man denkt sich dazu den betreffenden Elementarquader* nach einem Kugelradius gerichtet. Dann ist vorauszusehen (ohne Rechnung), dass t_{11} für r dieselbe Formel liefert, wie vorhin $(-D)$ für a. Letzteres Minuszeichen kommt herein, weil D selbst einen Druck bedeutet, und wir die drei Grössen t_{11}, t_{22}, t_{33} zunächst als Zugspannungen denken. Ferner ist a priori klar, dass $t_{22} = t_{33}$ sein muss.

In diesen beiden Formeln enthält das Buch wiederum Fehler, die theils mit den im § 1 angegebenen zusammenhängen, theils auch äusserlich (an den nicht klappenden Klammern z. B.) erkenntlich sind. Es muss heissen:

$$t_{11} = \frac{D_1 a_1^3\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) - D a^3\left(1 - \frac{a_1^3}{r^3}\right)}{a^3 - a_1^3}.$$

Wegen der Berechnung von t_{22} muss man zu den Grundgleichungen, welche die Spannungen durch die Verschiebungen ausdrücken, zurückgreifen und findet:

$$t_{22} = \frac{D_1 a_1^3\left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right) - D a^3\left(1 + \frac{a_1^3}{2r^3}\right)}{a^3 - a_1^3}.$$

Dass die drei Schubspannungen $t_{23} = t_{31} = t_{12} = 0$ sind, ist entweder ohne Weiteres, oder auch schnell aus den genannten Grundgleichungen zu entnehmen.

Zur Discussion setze man wiederum $D = 0$. Dann erweist sich t_{11} als Druck (weil $a > r$) und t_{22} als Zug. Beide sind an der inneren Kesselfläche (wo $r = a_1$) am stärksten. Da beginnt das Zerreissen. — Neumann führt bei der Hohlkugel wie beim Hohlcylinder die äussere „Wirkung" P als Zug ein (als in der Verlängerung des Radius thätig) und die innere p als Druck; die entsprechenden Radien sind R und r, der variable s, wo $R > s > r$ sein muss. Deshalb bilden bei Neumann diese Kräfte Summen, wo in den §§ 1 und 2 Differenzen stehen. Bei Clebsch gilt der Zug als positiv, der Druck als negativ. Bei Kirchhoff entgegengesetzt. Im Nachfolgenden sollen die Bezeichnungen von Clebsch beibehalten, Neumann's Formeln demnach entsprechend umgesetzt werden.

* In meinem Taschenbuche der Festigkeitslehre, Berlin Ernst & Korn 1877, habe ich auch jene Bezeichnung von Clebsch adoptirt.

§ 4. Der Hohlcylinder. Die lineare Dilatation im Querschnitte der Kesselwandung

$$\varrho = \alpha + \frac{\beta}{r^2}$$

hat die Constanten

$$\alpha = \frac{1}{E}\left[(1-\mu)\cdot\frac{D_1 a_1^2 - D a^2}{a^2 - a_1^2} - \mu \Pi\right],$$

wo Π den längs der Cylinderachse wirksamen Zug bezeichnet, und

$$\beta = \frac{1+\mu}{E}\cdot(D_1 - D)\cdot\frac{a^2 a_1^2}{a^2 - a_1^2};$$

dazu kommt noch als lineare Veränderung längs dem Cylinder:

$$\gamma = \frac{1}{E}\left[\Pi - 2\mu\cdot\frac{D_1 a_1^2 - D a^2}{a^2 - a_1^2}\right].$$

Ist somit ϱ, wie im § 2, mit r veränderlich, so erweist sich gleichfalls, wie im § 2, die cubische Dilatation der Cylinderwandung

$$\Delta = \frac{1-2\mu}{E}\left[2\cdot\frac{D_1 a_1^2 - D a^2}{a^2 - a_1^2} + \Pi\right]$$

constant. Bei der Berechnung von Δ nämlich fallen die zwei, das β enthaltenden, Glieder hinaus und es erweist sich

$$\Delta = 2\alpha + \gamma$$

und nicht etwa gleich $(2\varrho + \gamma)$.

Wohl ist aber

$$\Delta' = 2\varrho + \gamma \text{ für } r = a_1$$

die cubische Dilatation des vom Cylinder umschlossenen Hohlraumes. Neumann macht auf diesen Unterschied am Schlusse des § 67 aufmerksam, ohne indessen Δ' anzugeben. Ich setze deshalb dasselbe hier her:

$$\Delta' = \Delta + 2\cdot\frac{1+\mu}{E}(D_1 - D)\cdot\frac{a^2}{a^2 - a_1^2},$$

worin für Δ gemäss der drittvorhergehenden Gleichung eingesetzt werden kann. Ich unterlasse dies, weil sogleich auch noch für Π daselbst eingesetzt werden wird.

§ 5. Neumann macht nämlich im § 68 als erstes Beispiel zum Vorigen

$$D = D_1 = 0.$$

In diesem einfachen Beispiele einer gezogenen Röhre ergeben sich die beiden Elasticitätsconstanten E und μ der Isotropie experimentell beziehungsweise aus γ und α*; β ist hier Null, und deshalb $\Delta = \Delta'$.

* Auch Hans Götz und ich haben sich mit solchen Messungen von μ befasst; siehe Repert. d. Phys. v. J. 1886 und 1887.

Im § 69 „der Hohlcylinder unter innerem Drucke“ kommt als zweites Beispiel $D = 0$ und „der Hohlcylinder soll an seinen beiden Enden durch zwei ebene Platten, deren Elasticität nicht in Betracht komme, geschlossen sein.“ Das Buch setzt dann vermöge

$$\pi(R^2 - r^2)\Pi = \pi r^2 p,$$

oder nach der Bezeichnung im § 4

$$(a^2 - a_1^2)\Pi = a_1^2 D_1$$

und spricht „von der räumlichen Dilatation des Cylinders $\pi r^2 2a$

$$\Delta' = 2\left(\alpha + \frac{\beta}{r^2}\right) + \gamma$$

für irgend eine Stelle der Cylinderwand“.

Dies ist eine ideale Auffassung, welche in dem gleich darauf folgenden Satze an Realität gewinnt: „Hieraus ergiebt sich die Erweiterung des inneren Hohlraumes, indem wir für die variable Grösse r den Werth a_1 einsetzen.“

Letzteres habe ich am Schlusse des § 4 gethan.

Ohne die Beschränkung $D = 0$ bei Neumann habe ich die Rechnung alsdann noch durchgeführt und setze demgemäss im § 4:

$$\Pi = \frac{D_1 a_1^2 - D a^2}{a^2 - a_1^2};$$

es wird dann:

$$\alpha = \gamma = \frac{1 - 2\mu}{E} \cdot \frac{D_1 a_1^2 - D a^2}{a^2 - a_1^2},$$

folglich

$$\Delta = 3\alpha = 3 \cdot \frac{1 - 2\mu}{E} \cdot \frac{D_1 a_1^2 - D a^2}{a^2 - a_1^2}$$

die cubische Dilatation der Wandung. Ihre lineare im Querschnitte aber

$$\varrho = \frac{(1 - 2\mu)(D_1 a_1^2 - D a^2) + (1 + \mu)(D_1 - D)\frac{a^2 a_1^2}{r^2}}{E(a^2 - a_1^2)},$$

womit man die erste Formel des § 2 vergleichen möge.

Die cubische Dilatation des eingeschlossenen Cylinders ist nach der letzten Gleichung des § 4:

$$\Delta' = \frac{3(1 - 2\mu)(D_1 a_1^2 - D a^2) + 2(1 + r)(D_1 - D) a^2}{E(a^2 - a_1^2)}.$$

Dieses constante Δ' (hinsichtlich r) springt an der Grenze $r = a_1$ zum constanten Werthe Δ für die Wandung hinunter. Aber wenn man gemäss der oben erwähnten idealen Auffassung einen Cylinder von $r > a_1$ (bis $r = a$) voll* denkt, so ist dessen cubische Dilatation:

$$\Delta'' = \frac{3(1-2\mu)(D_1 a_1^2 - D a^2) + 2(1+\mu)(D_1 - D)\frac{a^2 a_1^2}{r^2}}{E(a^2 - a_1^2)}.$$

Dies ist die Formel des § 1, wenn man daselbst die drei Differenzen, welche die beiderlei D und a enthalten, umkehrt.

So ist auch für die Hohlkugel im § 2 das dortige 3ϱ, wenn für r gesetzt wird a_1, die innere, und das dortige Δ die für die Wandung allein geltende cubische Dilatation. In dem numerischen Beispiele der Thermometerkugel von Neumann (§ 72) springt der erstere Werth zum letzteren wie 9 auf 4. Aber 3ϱ ohne Substitution für r, welches von a_1 bis a alle Werthe haben kann, ist auch die ideale cubische Dilatation aller entsprechenden (voll gedachten) Hohlkugeln.

§ 6. Amagat bespricht hernach von dieser „Gleichung" folgende Fälle:

1) $P_0 = 0$ und $R = R_0$ liefert $\frac{dV}{V} = \Delta' = -\frac{1}{E}\cdot\frac{(5-4\mu)R_1^2}{R_1^2 - R_0^2}P_1$

als cubische Compression des Hohlraumes im Cylinder (das daselbst fehlende E kann der Leser unschwer ergänzen).

Ich füge bei
$$\Delta = -\frac{3(1-2\mu)}{E}\cdot\frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2}P_1$$

als cubische Compression der Wandung des Cylinders. Der im vorigen Paragraph erwähnte Sprung mit 9 auf 4 bei der Hohlkugel ist beim Hohlcylinder gegeben durch

$$\Delta' : \Delta = (5-4\mu) : 3(1-2\mu), \text{ das heisst für } \mu = \frac{1}{4} = 8 : 3.$$

2) $P_1 = P_0 = P$ und $R = R_0$ liefert $\Delta' = \Delta = -\frac{3(1-2\mu)}{E}P.$

3) $P_1 = 0$ und $R = R_1$.

Diese zweite Substitution für das allgemeine R liefert, gewissermassen als zweite reelle Anwendung der idealen Formel, die cubische Dilatation des äusseren Cylinders

$$\Delta' = +\frac{1}{E}\cdot\frac{(5-4\mu)R_0^2}{R_1^2 - R_0^2}P_0.$$

(E wiederum wie bei 1) zu ergänzen.)

Nennt man mit Amagat das innere Volum V_0, das äussere V_1, so ist bei gleicher Höhe der Cylinder in 1) und 3) und bei gleichem Drucke (beziehungsweise aussen und innen) die absolute Raumminderung von V_0 gleich der absoluten Raummehrung von V_1. (Mit dem Worte „absolut" ist dV gemeint, statt des sonst gebrauchten $dV : V$.)

* Wobei aber dennoch der innere Druck D_1 an a_1 wirksam bleibt.

Der Nutzen dieser Substitution $R = R_1$ leuchtet aus der Probe ein, die ich machte mit der Benutzung von Δ für die Wandung allein und von Δ' für den Hohlraum V_0. Es muss „absolut", wenn man das letztangegebene Δ' für V_1 mit x bezeichnet und die Cylinderhöhe, sowie π und die Druckkraft weglässt:

$$0 \,.\, R_1^2 = \underbrace{\frac{3(1-2\mu)R_0^2 + 2(1+\mu)R_1^2}{E(R_1^2 - R_0^2)} \cdot R_0^2}_{\text{(Mehrung des Hohlraumes)}} + \underbrace{\frac{3(1-2\mu)R_0^2}{E(R_1^2 - R_0^2)}(R_1^2 - R_0^2)}_{\text{(Mehrung der Wandung)}},$$

welche Probe natürlich zutrifft.

Andere Substitutionen für das allgemeine R als diejenige von R_0 und R_1 haben ersichtlich keine praktische Bedeutung.

§ 7. Ich fahre noch fort mit dem zweiten Beispiele von Neumann (§ 69), siehe § 5 oben, für welches ich auch ohne die Beschränkung, dass der äussere Druck $D = 0$ sei, die Hauptspannungen t_{11}, t_{22}, t_{33} berechnete im Hohlcylinder (vergl. § 3 mit der Hohlkugel).

Dass die eine derselben wiederum Π ist, oder

$$\frac{D_1 a_1^2 - D a^2}{a^2 - a_1^2},$$

leuchtet von selbst ein. Die beiden anderen ergeben sich

$$\left.\begin{matrix} t_{22} \\ t_{33} \end{matrix}\right\} = \frac{D_1 a_1^2 \left(1 \mp \frac{a^2}{r^2}\right) - D a^2 \left(1 \mp \frac{a_1^2}{r^2}\right)}{a^2 - a_1^2}.$$

Für $r = a_1$ wird $t_{22} = -D_1$ und für $r = a$ muss $t_{22} = -D$ werden, wie vorauszusehen. Aber t_{33} wird im ersteren Falle

$$\frac{D_1(a^2 + a_1^2) - 2Da^2}{a^2 - a_1^2},$$

und im letzteren

$$\frac{2D_1 a_1^2 - D(a^2 + a_1^2)}{a^2 - a_1^2}.$$

Für einen Hochdruckdampfkessel mag D vergleichsweise Null gelten, so ist die im Innern desselben längs einer Mantellinie ihn zur Explosion bringen wollende Spannkraft:

$$\frac{a^2 + a_1^2}{a^2 - a_1^2} \cdot D_1.$$

§ 8. Diesen Ausdruck hat auch Neumann (gemäss der von mir im Eingange des § 7 erwähnten Beschränkung) und discutirt ihn an dem Beispiel einer von ihm untersuchten Spiegelglastafel. Das Buch nennt als „Elasticitätsmodul dieses Glases 1 320 000 Atmosphären, das heisst, wenn auf dieses Glas ein allseitiger Druck von n Atmosphären ausgeübt wurde, so betrug die lineare Zusammendrückung:

$$\delta = -\frac{n}{1\,320\,000}."$$

Wenn man unter Elasticitätsmodul nur das obige E und unter der zweiten Elasticitätsconstanten das obige μ versteht*, so ergiebt sich

$$\frac{E}{1-2\mu} = 1\,320000,$$

und, wenn wiederum $\mu = \frac{1}{4}$ angenommen wird,

$E = 660\,000$ Kilogramm durch Quadratcentimeter.

„Nun zerbrach diese Glasplatte, als die lineare Dilatation $1:1440$ betrug bei einseitiger Zusammendrückung“ und Neumann berechnet aus

$$\frac{n}{660000} = \frac{1}{1440},$$

„dass ein Druck oder Zug von wenigstens 400 Atmosphären nöthig wäre, um eine Spiegelglastafel zu zerreissen.“ Aus letzter Gleichung würde $n = 460$; mit der kleineren Zahl 400 ist vielleicht dem Abstande zwischen Elasticitätsgrenze und dem Zerbrechen oder überhaupt der Sicherheit einige Rechnung getragen worden.

Das Ende von § 7 und der Anfang von § 8 liefern jetzt

$$D_1 = \frac{a^2 - a_1^2}{a^2 + a_1^2} \cdot 400 \text{ Atmosphären}$$

als theoretische Grenze der Kesselspannung, welche für $a_1 = 6$ und $a = 7,4$ beinahe 83 Atmosphären ist. Thatsächlich sprang eine solche zugeschmolzene Glasröhre bei 66 Atmosphären.

§ 9. Endlich noch Einiges über § 70 bis 74 von Neumann (zuerst erwähnt im § 1 oben):

§ 71 handelt von Oersted's Piezometer; Neumann zeigt, dass sowohl bei Hohlkugel- als Hohlcylinderform dasselbe ϱ und dasselbe Δ als lineare und cubische Zusammendrückung hervorgehen; ferner, dass dies auch bei voller Kugel- oder Cylinderform der Fall ist.

Man kann dies ohne Formel-Apparat hinschreiben. Es ist:

$$\Delta = 3 \cdot \frac{1-2\mu}{E}$$

(und ϱ davon der 3. Theil) für die Spannkraft 1, gemäss dem viertletzten Absatze des § 2; und liegt auf der Hand, dass mit dem Piezometer die Differenz der Flüssigkeit- und Glas-Compression gemessen wird.

Der oben mitgetheilten Theorie (Rechnung) wegen citire ich noch zum Vergleiche § 6 Nr. 2.

Auch § 72 von Neumann (schon erwähnt am Schlusse von § 5) ist interessant; es wird das Sinken des Quecksilbers in einem Thermometer

---

* Den Wunsch einer so fixirten Benennungsweise habe ich im Repert. d. Phys. v. J. 1888 ausgesprochen.

berechnet, wenn dasselbe aus der horizontalen in die vertikale Lage gebracht wird. Da kommt wiederum 3ϱ zur Geltung. Mit obigen Bezeichnungen ist in der horizontalen Lage $D_1 = 0$ und $D = 1$ Atmosphäre; aber Neumann sieht mit Recht zur Abkürzung der Rechnungsarbeit von letzterem Drucke ab.

Im § 73 „Spannung in der sphärischen Schale" wird berechnet, was oben § 3 enthält; aber wiederum unter der speciellen Annahme $D = 0$.

§ 74 ist die letzte Anwendung der hierher gehörigen Formeln und handelt von der Compression einer Kugel, die von einer Kugelschale unmittelbar umgeben ist. Auch hier ist, wie im § 71, ohne Rechnung das dort gezogene Resultat vorauszusagen, dass es auf die Vergleichung von

$$\frac{1-2\mu}{E} \text{ innen mit } \frac{1-2\mu}{E}$$

in der Schale ankommt. Wenn letzterer Werth kleiner ist als der erstere, so schützt die Schale den Kern einigermassen, im entgegengesetzten Falle aber nicht.

Hierbei bemerke ich noch zur Nomenclatur, wie bei der Anmerkung 7, dass, wenn man immerhin den reciproken Werth $\frac{E}{1-2\mu}$ auch einen Elasticitätsmodul nennen wollte, stets der grössere Modul eine kleinere Elasticität bedeuten sollte. Ich erinnere an Eisen und Kautschuk; auch der Analogie vom Krümmungsradius und Krümmung könnte gedacht werden; Ersterer gross, heisst soviel, als dass Letzterer klein ist.

§ 75 bis 77 sind Zusätze des Herausgebers (Meyer) der Vorlesungen von Neumann. Bei der Torsion spielt der Torsions- oder Schubelasticitätsmodul eine Rolle, der aber als gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{E}{1+\mu}$ auch aus den zwei Constanten E und μ zusammengesetzt ist.

Drei Nachträge.

I.

Nach der Einsendung des Obigen erschien im Bd. 47 von Wied. Ann. S. 706 die Abhandlung von G. de Metz über die Compressibilität des Quecksilbers, welche zu gleicher Zeit wie diejenige von Amagat entstanden sei. Da hierin auch obige Formeln verwendet werden, so verglich ich dieselben und bemerke hierüber Folgendes:

Auf S. 714, 716, 717 wird die unrichtige Vorstellung erweckt, als ob Lamé in seinen Leçons sur l'élasticité des corps solides 1866 (nicht 1867) die Poisson'sche Annahme gemacht habe, dass die seitliche Contraction $\frac{1}{4}$ der Längsdilatation sei. Lamé hat aber in seinen §§ 29 und 30 diese

Beschränkung ausdrücklich bei Seite gelegt. Regnault, den Metz hierbei citirt, mochte sie (im Jahre 1847) festgehalten haben und Metz greift sie für das Glas wieder auf, da das Mittel $\sigma = 0{,}247$ sehr nahe an 0,250 komme. Indessen weist seine Tabelle (S. 724) Werthe von 0,33 bis 0,21 (von verschiedenen Beobachtern) und 0,237 bis 0,235 von ihm selbst auf.

S. 712 sagt Metz: „Es ist leicht, die nöthigen Gleichungen für cylindrische und sphärische Umhüllungen herzustellen.“ Gilt für Erstere ΔU_0, für Letztere ΔV_0 als Volumzunahme bei blos innerem Drucke, oder als Volumabnahme bei blos äusserem Drucke, oder als solche bei innen und aussen gleichem Drucke, so „muss man für die Volumänderung eines complicirten Piezometers (Cylinder mit halbsphärischer Endung) die Hypothese hinzufügen“ (S. 716):

$$\Delta W_0 = \Delta U_0 + \Delta V_0,$$

welche man meines Erachtens durch Wahl einer vorwiegend cylindrischen oder kugeligen Form lieber vermeiden möchte. Es ist alsdann auch die Rechnung einfacher, wenn dieses Moment auch nur ein secundäres ist.

Im drittgenannten Falle, innen und aussen der gleiche Druck P, ist aber allgemein, abgesehen von der Form des Piezometers, die verhältnissmässige Volumabnahme des Hohlraumes gleich dem cubischen Compressibilitätscoefficienten x des Glases (der Wandmasse), wie beim Glaswürfel, der an den sechs Flächen mit P gedrückt wird (pro Flächeneinheit). So reproducirt Metz als Formel N, S. 718 (und als erste der zwölf Nummern* am „Schluss“):

$$X_a = X_v - x,$$

worin X_a die scheinbare und X_v die wahre Compressibilität der Flüssigkeit ist.

Dem Schlusse (S. 742) entnehme ich für Quecksilber

$$X_v = 3{,}75 \,.\, 10^{-6}$$

zwischen 3,74 und 3,79, und von S. 740 als Mittelwerth für Glas

$$x = 2{,}5 \,.\, 10^{-6}$$

zwischen den Werthen 2,2 und 2,8, so dass

$$X_a = 1{,}3 \,.\, 10^{-6},$$

oder fast $\frac{1}{3}$ des vorletzten und $\frac{1}{2}$ des letzten Werthes ist.

Lässt man mit dem Piezometer ein Kapillarrohr communiciren, so beobachtet man im vorigen Falle ein Sinken des Quecksilbers vermöge des Druckes P um Θ''; mit Θ bezeichnet Metz das Sinken, wenn P, jetzt mit P_0 bezeichnet, nur innen wirkt; und mit Θ' das Steigen, wenn P als P_1 nur aussen wirkt.

* Ebenso sind noch mehrere dieser Nummern selbstverständlich oder enthalten Wiederholungen.

Es ist sofort, als Uebereinanderlagerung kleiner Wirkungen, also ohne die Rechnung von Metz auf S. 718 zu erkennen, dass

$$\Theta'' = \Theta - \Theta'$$

(Gleichung VI daselbst; bei dieser Rechnung werden auch solche Senkungen mit Volumänderungen ΔW_0 verwechselt).

Weil bei dem mit Θ' bezeichneten Steigen der Flüssigkeit nur das Gefäss und nicht auch die Flüssigkeit (die Ersteres nicht ganz füllt) comprimirt wird, eignet sich dieser Vorgang zur Bestimmung des x allein, während das Sinken Θ sowohl als auch dasjenige Θ'' mit X_v und x zu thun haben (siehe oben N). Ersteres hat Metz in der Gleichung V ausgedrückt, die aber in eben besagter Weise fehlerhaft ist.

Ist einmal x bestimmt, so dient die Beobachtung von Θ oder Θ'' zur Bestimmung von der wahren Flüssigkeitscompressibilität X_v, und zwar sicht man schon aus VI, dass Θ als der grössere Werth gegenüber Θ'' den Vorzug verdient. Zur Vergleichung will ich beide noch für $P_0 = 1$ und beziehungsweise $P = 1$ hersetzen: Es entspricht die Senkung

Θ der Abnahme des Flüssigkeitvolums $(X_0 . W_0)$ plus der Ausweitung des Hohlraumes

$$\left(x . U_0 \cdot \frac{M(3\lambda + 5\mu) + 3\lambda + 2\mu}{3\mu} + x V_0 \frac{N(3\lambda + 6\mu) + 3\lambda + 2\mu}{4\mu}\right),$$

Θ'' derselben Abnahme des Flüssigkeitvolums minus der Abnahme des Hohlraums $(x . W_0$ oder $x U_0 + x V_0)$; da

$$M = R_0^2 : (R_1^2 - R_0^2) \text{ und } N = R_0^3 : (R_1^3 - R_0^3)$$

und die beiden Constanten λ und μ, durch den geläufigeren Elasticitätsmodul E und das oben genannte σ ausgedrückt sind

$$\lambda = \frac{E}{1+\sigma} \cdot \frac{\sigma}{1 - 2\sigma}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}$$

(der Schub- oder Torsions-Elasticitätsmodul), so ist das genannte Plus bei Θ beträchtlicher als das Minus bei Θ''. Je kleiner das Letztere, um so besser für Θ'', wenn man daraus X_v bestimmen soll, da sonst zur genauen Beobachtung resp. Messung im letzteren Falle zu wenig übrig bleibt.

II.

Lamé lässt in seiner Vorlesung XIV der Elasticitätsbetrachtung für den Hohlcylinder die Transformation der allgemeinen Elasticitätsgleichungen nach Cylindercoordinaten vorangehen, und in XV führt er das Gleiche für sphärische Coordinaten durch, um in XVII die Hohlkugel vornehmen zu können. Aus diesem mathematischen Grunde geht bei ihm der Cylinder vor der Kugel, welch' Letztere aber nicht nur physikalisch, sondern ohne jene Transformationen auch mathematisch einfacher erscheint als der Erstere.

Im § 80 schreibt Lamé die für den Cylinderkessel gefährliche Kraft, welche tangential im Innern und in der Querschnittsebene wirkt,

$$A = \frac{PR^2 - P_1 R_1^2 + (P - P_1) R_1^2}{R_1^2 - R^2},$$

und bestimmt, A als zulässige Spannung bekannt voraussetzend

$$\frac{R_1}{R} = \sqrt{\frac{A + P}{A + P_1 - 2P}},$$

das ist annähernd gleich

$$1 + \frac{P - P_1}{A + P},$$

somit

$$R \cdot \frac{P - P_1}{A + P}$$

als Wandstärke. In diesem Resultate sind seine Gleichungen 24) und 25) vereinigt.

Da P in praktischen Fällen klein ist gegen A, so stimmt dieses Resultat auch mit dem auf elementare Weise erhältlichen (siehe z. B. mein Taschenbuch der Festigkeitslehre § 48,3).

Desgleichen stimmt die halbe Wandstärke des kugelförmigen Kessels im § 87.

§ 88 handelt vom Gleichgewicht der Elasticität für eine „Planetenkruste“, wobei noch die Gravitation in Rechnung gezogen wird. Ich verificirte daselbst seine Gleichung 18), welche in Folge Druckversehens mit 28) bezeichnet ist,

$$F_0 - F_1 = \frac{P_0 - P_1}{2} - \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\varrho g \varepsilon}{2},$$

worin ϱ die Masse des Volums 1 und ε die Dicke der Kruste vorstellt; P_0 sei der Druck des „flüssigen Kerns“, P_1 der Luftdruck.

Er findet dann „par une transformation facile“

$$F_0 - F_1 = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \varrho g \varepsilon; \tag{20}$$

dazu müsste

$$P_0 - P_1 = \varrho g \varepsilon,$$

was aber nur für eine wässerige Hülle zutreffen würde.

Weiterhin stimmt seine Gleichung 21); aber von den mit 22) zusammengefassten Gleichungen kann ich nur diejenige

$$\frac{U_0}{r_0} - \frac{U_1}{r_1} = \frac{1}{4\mu}(P_0 - P_1 - \varrho g \varepsilon)$$

bestätigen. Hierin ist r_0 der innere, r_1 der äussere Radius, U_0 die radiale Verschiebung innen, U_1 aussen.

Man sieht jetzt nochmals ein, dass 20) unzulässig; denn gemäss der vorletzten Gleichung müsste in der letzten Null resultiren. Seine „letzte“ Gleichung 23) fällt hiermit ebenfalls fort.

III.

Der kürzlich erschienene 2. Theil des 1. Bandes von Violle's Lehrbuch der Physik (deutsche Ausgabe)* beginnt gerade auch mit der Compressibilität. Er bespricht u. A. die in meinem Nachtrag I erwähnten Versuche von Regnault und verweist auf die Theorie der Elasticität, die im ersten Theil des Buches die Seiten 358 bis 394 umfasst. Hier wird vorwiegend Lamé benutzt (siehe meinen Nachtrag II) und im § 149 die Hohlkugel behandelt. Aber mit einer wesentlichen Lücke, indem es heisst: Nun lässt sich aber leicht nachweisen**, dass " die lineare Dilatation

$$\frac{\varrho}{r} = a + \frac{b}{r^3};$$

dies hätte, meines Erachtens, bei dem grossen Raum, den das Buch der Sache widmet, auch wirklich nachgewiesen werden können und sollen; man hätte den Platz hierzu auch da oder dort einsparen können.

In Gleichung 30) ist die cubische Dilatation des Hohlraumes, nicht „des Körpers" der Hohlkugel, gemeint.

Die Gleichung 38) muss heissen $\Delta u = \Delta v - \Delta w$; sie entspricht derjenigen $\Theta'' = \Theta - \Theta'$ im obigen Nachtrage II.

Hiernach folgen noch im § 150 die Torsion des Cylinders und im § 151 die Biegung eines Stabes, welche Probleme der Herausgeber O. E. Meyer im Neumann'schen Buche auch unmittelbar auf die Hohlkugel-Aufgabe hatte folgen lassen. Ich erwähne dies anhänglich und gelegentlich auch deswegen, weil Violle im § 150 schreibt $\vartheta = \dfrac{lC}{\mu \frac{\pi}{2} r^4}$ und im § 156 nochmals ohne Rückverweis die Torsion behandelt und schreibt $\Theta = \dfrac{1}{A} \cdot \dfrac{l}{r^4} \cdot C$ und endlich im § 157 wiederum $\Theta = \dfrac{1}{\mu} \dfrac{lC}{B^4}$.

---

* Die ersten drei Lieferungen sind in der Literaturbeilage dieser Zeitschrift S. 31 angezeigt.

** Vergl. den Anfang des dritten Absatzes in I. oben und einen Ausdruck im fünften Absatze von II.

XIII.

Das Verhältniss der Krümmungsradien im Berührungspunkte zweier Curven.

Von

Dr. E. Wölffing
in Stuttgart.

Obwohl die Lehre von der Krümmung der Curven und Flächen zunächst der Infinitesimalrechnung angehört, so lassen sich doch zahlreiche Sätze derselben auch vermittelst der Methoden der projectiven Geometrie entwickeln (vergl. C. Cranz: Synthetisch-geometrische Theorie der Krümmung von Curven und Flächen zweiter Ordnung. Stuttgart 1886). Unter den hierher gehörigen Sätzen scheint indess ein besonders wichtiger bisher unbemerkt geblieben zu sein, nämlich folgender:

Das Verhältniss der Krümmungsradien im Berührungspunkte zweier Curven ist eine durch Projection unzerstörbare Grösse, eine Invariante.

Es ist die Aufgabe der vorliegenden Zeilen, diesen Lehrsatz synthetisch zu beweisen und eine Reihe von Folgerungen daraus zu ziehen.

1. Es muss zunächst an einige Sätze aus der Lehre von der perspectivischen Collineation zweier Kegelschnitte erinnert werden. Sind zwei Kegelschnitte K und K_1 gegeben, so versteht man bekanntlich (cfr. Seeger, „Die Fundamentaltheorien der neueren Geometrie.“ Braunschweig 1880 S. 129 flg.) unter Chordale die Verbindungslinie zweier Schnittpunkte der Kegelschnitte, unter Contingenzpunkt den Schnittpunkt zweier gemeinsamen Tangenten derselben. Man bezeichnet ferner als zusammengehörend zwei Chordalen, wenn sie durch dieselbe Ecke des gemeinsamen Polardreiecks der Kegelschnitte gehen und zwei Contingenzpunkte, wenn sie auf derselben Seite dieses Dreiecks liegen. Endlich nennt man correspondirend ein Paar zusammengehörender Chordalen und ein Paar ebensolcher Contingenzpunkte, wenn der Schnittpunkt der Ersteren und die Verbindungslinie der Letzteren als Pol und Polare im Polardreieck einander zugeordnet sind. Alsdann können bekanntlich die Kegelschnitte auf zwölf verschiedene Arten einander perspectivisch collinear gesetzt werden, indem irgend einer der sechs Contingenzpunkte als Centrum und eine der beiden mit demselben correspondirenden Chordalen als Achse der Collineation dient.

Die zwölf Doppelverhältnisse dieser Collineationen sind aber keineswegs unabhängig von einander. Ist A ein Contingenzpunkt, B und C die Berührungspunkte einer durch A gehenden gemeinsamen Tangente mit K und K_1, D und E die Schnittpunkte dieser Tangente mit dem zu A correspondirenden Chordalenpaar: so werden die Punkte B und C als Doppelpunkte der vom Büschel von K und K_1 auf der Tangente erzeugten Involution, von D und E harmonisch getrennt (cfr. Salmon, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 4. Aufl., S. 412). Daraus folgt:

$$\text{Doppelverhältniss } (ABDC) = -(ABEC).$$

Das Doppelverhältniss der Collineation wechselt daher sein Zeichen, wenn eine Chordale durch die mit ihr zusammengehörige ersetzt wird; dasselbe gilt für die Vertauschung zweier zusammengehöriger Contingenzpunkte und beide Operationen zusammen führen auf den ursprünglichen Werth des Doppelverhältnisses zurück.

Es mögen sich nun K und K_1 im Punkte A mit Tangente v berühren. Die Verbindungslinie der beiden nicht in A fallenden Schnittpunkte von K und K_1 nennen wir kurz Schnittpunktsgerade und den Schnittpunkt der nicht in v fallenden gemeinsamen Tangenten Tangentenschnittpunkt. Wir denken uns jetzt A als Centrum und die Schnittpunktsgerade als Achse einer perspectivischen Collineation. Ferner sei K_2 ein dritter Kegelschnitt, welcher v in A berührt; C sei der Schnittpunkt der Schnittpunktsgeraden v_1 von K und K_1 mit derjenigen v_2 von K_1 und K_2. Ausser in A schneide die Gerade AC noch K in B_1, K_1 in D, K_2 in B_2. Dann ist (AB_1CD) das Doppelverhältniss der perspectivischen Collineation von K und K_1, (AB_2CD) dasjenige von K_2 und K_1. Es werde jetzt noch vorausgesetzt, dass K und K_2 sich in A osculiren (von der zweiten Ordnung berühren) und ausserdem noch im Punkt B schneiden. Nun sind K, K_1 und K_2 drei Kegelschnitte, welche eine Chordale, nämlich v, gemeinsam haben und deshalb gehen die drei Schnittpunktgeraden AB, v_1 und v_2 durch denselben Punct C (cfr. Seeger a. a. O. S. 142); die Punkte B_1 und B_2 fallen mithin mit B zusammen. Das Doppelverhältniss der perspectivischen Collineation bleibt also ungeändert, wenn K durch K_2 ersetzt wird; ebenso kann auch K_1 durch einen in A osculirenden Kegelschnitt K_3 ersetzt werden.

Man hat daher folgenden Hilfssatz:

Wenn sich zwei Kegelschnitte berühren, so bleibt das Doppelverhältniss der perspectivischen Collineation mit dem Berührungspunkt als Centrum und der Schnittpunktsgeraden als Achse unverändert, wenn jeder

der beiden Kegelschnitte durch einen denselben im Berührungspunkt osculirenden ersetzt wird.

Sind daher K_2 und K_3 die Krümmungskreise von K und K_1 in A, so ist das Doppelverhältniss der perspectivischen Collineation von K und K_1 gleich demjenigen von K_2 und K_3. Die Schnittpunktsgerade der letzteren liegt im Unendlichen; sind E und F die mit A in einer Geraden gelegenen Endpunkte der Durchmesser AE und AF, so ist jenes Doppelverhältniss gleich der Grösse:

$$AE : AF \text{ oder } \frac{AE}{2} : \frac{AF}{2},$$

also gleich dem Krümmungsradien-Verhältniss (das natürlich negativ ist, wenn die Krümmungscentra durch die Berührungstangente getrennt werden). Somit ist das Krümmungsradien-Verhältniss im Berührungspunkt von K und K_1 gleich dem Doppelverhältniss der perspectivischen Collineation von K und K_1, also eine Invariante.

Was hiermit für zwei Kegelschnitte bewiesen ist, gilt sofort auch für höhere Curven, weil ja diese, wenn es sich um Krümmung handelt, durch osculirende Kegelschnitte ersetzt werden dürfen. Also allgemein:

Das Krümmungsradien-Verhältniss im Berührungspunkt zweier Curven ist eine Invariante.

Dasselbe gilt für das Krümmungsradien-Verhältniss im Berührungspunkt zweier Zweige derselben Curve.

Die bei diesem Beweis benützten Punkte B, C, D sind immer reell; ein Zusammenfallen derselben kann durch Einschalten eines Hilfskegelschnitts vermieden werden. Wenn sich K und K_1 osculiren, so dass Punkt D unbestimmt wird, so ist wegen der Lage des Centrums auf der Achse das Doppelverhältniss immer gleich $+1$.

Auf analytischem Wege kann der obige Hilfssatz leicht mittelst symbolischer Rechnung bewiesen werden. Er liefert alsdann die bereits in meiner Abhandlung „Ueber die Hesse'sche Covariante einer ganzen rationalen Function von ternären Formen", Mathem. Ann. 36, S. 97, mitgetheilte Gleichung 97) für das Krümmungsverhältniss δ (und seinen reciproken Werth) ausgedrückt in den Invarianten der beiden Kegelschnitte:

$$1) \qquad \delta^2 - \left(\frac{9}{2}\frac{D_{01}D_{10}}{H_0 H_1} - \frac{5}{2}\right)\delta + 1 = 0,$$

wo H_0 und H_1 (bei Salmon 6Δ und $6\Delta'$) die Discriminanten von K und K_1, D_{01} und D_{10} (bei Salmon 2Θ und $2\Theta'$) deren Simultan-Invarianten bedeuten.

Genau genommen steckt der Lehrsatz von der Invarianz des Krümmungsradien-Verhältnisses übrigens in folgendem von Herrn Director Dr. Geisenheimer (Zeitschr. für Mathem. und Physik XXV. Jahrg. S. 214) mittelst Infinitesimalrechnung bewiesenen Satz:

„Das Verhältniss zwischen den Krümmungsradien entsprechender Punkte in zwei perspectivischen Curven ist gleich dem Cubus aus dem Verhältnisse der bis zur Collineationsachse verlängerten Tangentenstrecken, multiplicirt mit einem für alle Punkte der durch die Curven gebildeten Collineation constanten Doppelschnittsverhältnisse.“ Man braucht ja nur zu bedenken, dass für sich berührende Curven jene Tangentenstrecken zusammenfallen. Diese Folgerung ist aber a. a. O. nicht gezogen worden.

2. Berühren sich die Kegelschnitte K und K_1 in A, so gehen durch diesen Punkt auch alle zu ihnen covarianten Kegelschnitte berührend hindurch und ihre Krümmungsradien in A hängen in bemerkenswerther Weise von denjenigen von K und K_1 ab.

v. Staudt hat in seiner Abhandlung: „Ueber die Curven zweiter Ordnung (Nürnberg 1831)“ analytisch bewiesen, dass die Geraden, welche zwei Kegelschnitte in harmonisch sich trennenden Punktepaaren schneiden, einen Kegelschnitt umhüllen. Synthetisch würde dies etwa folgendermassen bewiesen werden können:

Es seien K und K_1 zwei beliebige Kegelschnitte, P ein beliebiger Punkt. Man bestimmt auf jedem Strahl durch P zu dessen Schnittpunkten mit K_1 die zu ihnen in Bezug auf K conjugirten und erhält so einen geometrischen Ort, dessen Schnittpunkte mit K_1 gesucht sind. Auf zwei Strahlen fällt ein Ortspunkt nach P selbst, nämlich auf den Verbindungslinien von P mit den Schnittpunkten seiner Polare in Bezug auf K mit K_1. Da ferner auf jedem Strahl zwei Ortspunkte liegen, ist der Ort eine Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkt in P und trifft daher K_1 in acht Punkten. Unter diesen sind aber die vier Durchschnittspunkte von K und K_1, welche selbstverständlich, mit P verbunden, keine in zwei harmonischen Punktepaaren schneidende Geraden liefern. Ist ferner A einer der anderen Schnittpunkte des Orts mit K_1, so gehört auch der Schnittpunkt von AP mit K_1 dem Ort an; die vier übrig bleibenden Schnittpunkte führen also nur auf zwei Gerade durch P, welche K und K_1 in harmonischen Punktepaaren schneiden.

Den Kegelschnitt, der von den in harmonischen Punktepaaren schneidenden Geraden umhüllt wird, bezeichnen wir mit F_{01} (bei Salmon Φ). Es existirt ein zu ihm dualistischer Kegelschnitt, der Ort der Punkte, von denen aus an K und K_1 harmonisch sich trennende Tangentenpaare gehen, mit Φ_{01} (Salmon F) bezeichnet.

Φ_{01} schneidet K und K_1 in den Berührungspunkten der gemeinsamen Tangenten und F_{01} berührt die Tangenten derselben in ihren Schnittpunkten.

Den Krümmungsradius von Φ_{01} im Berührungspunkt A der Kegelschnitte K und K_1 erhält man folgendermassen:

Es seien B und C die Berühungspunkte einer gemeinsamen Tangente mit K und K_1, C_1 der Berührungspunkt der anderen mit K_1, D, E und F

die Schnittpunkte von AB resp. mit K_1, mit der Schnittpunktsgeraden und mit CC_1; G der Schnittpunkt der Berührungstangente und der Schnittpunktsgeraden; H und J die Schnittpunkte von BC mit der Berührungstangente und der Schnittpunktsgeraden. Weil GA und GJ zusammengehörige Chordalen, so ist nach dem oben bewiesenen Satz (Salmon a. a. O. S. 412) harmonisch:

$$SB.G, \; CHBJ;$$

also auch:

$$\text{Doppelverhältniss } (BAFE) = -1;$$

ferner ist:

$$\text{"} \quad (ABED) = \delta$$

das Krümmungsradien-Verhältniss von K und K_1. Hieraus folgt:

$$\text{Doppelverhältniss } (ABFD) = \frac{1}{2}(\delta + 1).$$

Nun ist B ein Punkt von Φ_{01}, D ein Punkt von K_1, CC_1 Schnittpunktsgerade von Φ_{01} und K_1; also ist

$$\frac{1}{2}(\delta + 1)$$

das Krümmungsradien-Verhältniss von Φ_{01} und K_1 oder:

Sind r und r_1 die Krümmungsradien von K und K_1 in A, so ist daselbst der Krümmungsradius von Φ_{01}:

$$r_{01} = \frac{1}{2}(r + r_1), \tag{2}$$

das heisst das arithmetische Mittel.

Durch ähnliche Ueberlegungen findet man den Krümmungsradius von F_{01} in A:

$$\varrho_{01} = \frac{2rr_1}{r + r_1}, \tag{3}$$

das heisst das harmonische Mittel.

Der Ort der Pole der Tangenten von K in Bezug auf K_1, die Polarcurve von K in Bezug auf K_1, ist (cfr. Steiner-Schröter, „Die Theorie der Kegelschnitte" S. 145) ein Kegelschnitt P_{01}, welcher K_1 in den Berührungspunkten mit den gemeinsamen Tangenten von K und K_1 schneidet.

Berühren sich wieder K und K_1 in A mit Tangente v, ist ferner B der Tangentenschnittpunkt, C und D die Schnittpunkte von AB mit K und K_1, w die Tangente an K in C, E ihr Pol in Bezug auf K_1; F Schnitt von AB mit der Polare von B in Bezug auf K_1; G Schnittpunkt der Schnittpunktsgeraden und der Berührungstangente. Alsdann ist G Pol von AB in Bezug auf K und in Bezug auf K_1; daher geht w durch G und ihr Pol E in Bezug auf K_1 liegt auf AB.

Nun ist: Doppelverhältniss $(CAED) = -1$,

ferner: „ $(AFDB) = -1$,

„ $(BCAD) = \delta$

als Doppelverhältniss der Collineation mit dem Tangentenschnittpunkt als Centrum und der Berührungstangente als Achse.

Daraus folgt:

$$\text{Doppelverhältniss } (AEFD) = \frac{1}{\delta}.$$

Nun ist aber E ein Punkt von P_{01} und die durch F gehende Polare von B in Bezug auf K_1 ist Schnittpunktsgerade von P_{01} und K_1, daher ist $(AEFD)$ das Krümmungsradien-Verhältniss von P_{01} und K_1 oder:

Der Krümmungsradius von P_{01} in A ist:

4) $$R_{01} = \frac{r_1^2}{r}$$

die dritte Proportionale.

Ebenso ist der Krümmungshalbmesser der Polarcurve P_{10} von K_1 in Bezug auf K

5) $$R_{10} = \frac{r^2}{r_1}.$$

Weitere Untersuchungen führen auf merkwürdige projectivische Eigenschaften, welche an bestimmte Werthe des Krümmungsradien-Verhältnisses im Berührungspunkt zweier Kegelschnitte geknüpft sind.

3. Der Werth $\delta = 1$ liefert natürlich die Osculation. Gleichung 1) giebt in diesem Fall wirklich die Relation

$$H_0 H_1 - D_{01} D_{10} = 0,$$

welche zusammen mit der Berührungsinvariante

$$6 H_0 D_{01} D_{10} H_1 - 4 D_{01}^3 H_1 - 4 H_0 D_{10}^3 + 3 D_{01}^2 D_{10}^2 - H_0^2 H_1^2 = 0$$

die bekannte Relation der Osculation

$$\frac{H_0}{D_{01}} = \frac{D_{01}}{D_{10}} = \frac{D_{10}}{H_1}$$

liefert.

4. Von besonderem Interesse ist der Fall $\delta = -1$, also Krümmungsradien gleich und entgegengesetzt gerichtet; wir nennen das kurz symmetrische Berührung.

Die perspectivische Collineation ist eine involutorische.

Verlegt man das Centrum der Collineation aus dem Berührungspunkt in den Tangentenschnittpunkt, so wird das Doppelverhältniss gleich $+1$, das Centrum fällt auf die Achse, das heisst:

Bei symmetrischer Berührung zweier Kegelschnitte liegen Tangentenschnittpunkt und Schnittpunktsgerade in vereinigter Lage.

Es mögen sich nun K und K_1 in A symmetrisch berühren; B sei Tangentenschnittpunkt, C Schnittpunkt der Berührungstangente mit der Schnittpunktsgeraden; u eine gemeinsame Tangente, D ihr Schnittpunkt mit AC; E und F ihre Berührungspunkte mit K und K_1; ferner D', E', F' dieselben Punkte in Bezug auf die andere gemeinsame Tangente u'; endlich G Schnittpunkt von AB und EE'. Weil AB Polare von C in Bezug auf K, so ist $PR(CEGE')$ harmonisch, daher auch harmonisch $SB.B$, $CDAD'$. Nach dem schon mehrfach verwendeten Satz (Salmon a. a. O. S. 412) ist auch harmonisch $SB.C$, $BEDF$ und da beide Strahlenbüschel perspectivisch liegen, müssen die Punkte E, A, F' in einer Geraden sich befinden und dasselbe beweist man von den Punkten E', A, F. Weil aber die Punkte A, E, E', F, F' sämmtlich dem Kegelschnitt Φ_{01} angehören, folgt der Satz:

Bei symmetrischer Berührung zweier Kegelschnitte zerfällt der covariante Kegelschnitt Φ_{01} in ein Geradenpaar mit Mittelpunkt im Berührungspunkt, harmonisch getrennt durch Berührungstangente und Tangentenschnittpunkt.

Dualistisch hierzu ergiebt sich, dass der Kegelschnitt F_{01} zerfällt in ein Punktepaar auf der Berührungstangente, harmonisch getrennt durch Berührungspunkt und Schnittpunktsgerade.

Die aus Gleichung 1) folgende Bedingung für $\delta = -1$:

$$9 D_{01} D_{10} = H_0 H_1$$

stimmt mit der bei Salmon (a. a. O., S. 531) angegebenen für das Zerfallen von Φ_{01} und F_{01} überein.

5. Es sei $\delta = 2$.

Ist u ein Strahl durch den Berührungspunkt A; B, C, D seine Schnittpunkte mit K, K_1 und der Schnittpunktgeraden, so ist:

$$\text{Doppelverhältniss } (ABDC) = 2,$$

daher

$$\text{"} \quad (ADBC) = -1,$$

somit: Hat ein Strahlenbüschel seinen Scheitel auf einem Kegelschnitt und bestimmt man auf jedem Strahl den zu seinem Schnittpunkt mit einer Geraden conjugirten Punkt, so liegen diese Punkte auf einem Kegelschnitt, welcher den gegebenen Kegelschnitt in seinen Schnittpunkten mit der Geraden trifft und im Scheitel jenes Strahlenbüschels berührt, wobei sein Krümmungsradius im Berührungspunkt die Hälfte desjenigen des gegebenen Kegelschnitts ist: eine Verallgemeinerung des bekannten, elementaren Satzes:

Der Ort der Halbirungspunkte aller durch den Endpunkt eines Kreisradius gehenden Sehnen ist der Kreis über dem Radius (vergl. Salmon a. a. O. S. 179).

6. Für $\delta = -2$ folgt aus 2):

$$r_{01} = -\frac{r_1}{2},$$

und aus 4):

$$R_{01} = -\frac{r_1}{2},$$

also osculiren sich in A die covarianten Kegelschnitte Φ_{01} und P_{01}; sie haben aber auch noch die beiden Punkte gemeinsam, in welchen die gemeinsamen Tangenten an K und K_1 letzteren berühren. Also fällt Φ_{01} mit P_{01} zusammen. Ist nun v eine beliebige Tangente von K, V ihr Pol in Bezug auf K_1, so ist V ein Punkt von P_{01}, gehört daher, wie eben gezeigt wurde, auch Φ_{01} an; deshalb sind die beiden von V an K gehenden Tangenten v_1 und v_2 conjugirt in Bezug auf K_1; also ist v, v_1, v_2 ein K umschriebenes Polardreiseit in Bezug auf K_1. Die Existenz eines solchen ist ein Kriterium dafür, dass K als Strahlencurve und K_1 als Punktcurve sich in harmonischer Lage befinden (Salmon a. a. O. S. 514).

Berühren sich daher zwei Kegelschnitte so, dass das Krümmungsradien-Verhältniss im Berührungspunkt gleich -2 ist, so befinden sie sich in harmonischer Lage. Die analytische Bedingung ist

$$D_{01} = 0.$$

7. In seiner Abhandlung: „Ueber die (cubisch-)involutorische Lage sich berührender Kegelschnitte" (Wiener Akad. Ber. Bd. 83, 2. Abth., S. 63) hat Herr Professor E. Weyr den Satz bewiesen:

Wenn sich zwei Kegelschnitte berühren und es ist ein Dreieck dem einen ein-, dem anderen umbeschrieben, so verhalten sich die Krümmungen im Berührungspunkt wie 1 : 4.

Dieser Satz kann aus der Umkehrung des vorhin unter 6. bewiesenen unmittelbar gefolgert werden:

Es berühren sich K und K_1 in A mit Tangente v, das Dreieck BCD sei K einbeschrieben und K_1 umbeschrieben. Dann giebt es immer einen Kegelschnitt K_2, für welchen BCD Polardreieck ist, und welcher v in A berührt. Sind nun ϱ, ϱ', ϱ'' die Krümmungsradien von K, K_1, K_2 in A, so hat man:

$$\left\{\begin{aligned} \varrho'' &= -2\varrho \\ \varrho'' &= -\frac{1}{2}\varrho' \end{aligned}\right\}$$

daher:

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{1}{4}.$$

8. Haben drei Kegelschnitte K, K_1, und K_2, welche sich alle in A berühren, die Krümmungsradien r, r_1 und r_2 in der Art, dass

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=0 \text{ (Krümmungssumme Null)},$$

so folgt aus 3), dass

$$\frac{\varrho_{01}}{r_2}=-2,$$

das heisst, F_{01} und K_2 liegen als Strahlencurve und Punktcurve harmonisch. Es verschwindet somit die Invariante, welche ich Mathem. Ann. 36, S. 113, L_{012} genannt habe und welche Salmon (a. a. O. S. 557) als Θ_{123} erwähnt.

Besteht dagegen die Relation:

$$r+r_1+r_2=0 \text{ (Krümmungsradien-Summe Null)},$$

so liegen nach 2) Φ_{01} und K_2 als Punkt- und Strahlencurve harmonisch, es verschwindet mithin die Invariante Λ_{012} meiner Abhandlung, von Salmon mit Φ bezeichnet.

9. In der erwähnten Schrift von Herrn Cranz (S. 50) findet sich ein Satz, der meines Wissens zuerst von Umpfenbach („Ein Lehrsatz von Kegelschnitten", Crelle's Journ. Bd. 30 S. 95) bewiesen wurde:

Gehen von einem Punkte C an einen Kegelschnitt K die Tangenten mit den Berührungspunkten A und B, so verhalten sich die Krümmungsradien in A und B wie $AC^3 : BC^3$.

Von diesem Satze kann folgende Anwendung gemacht werden:

Es berühre noch ein zweiter Kegelschnitt K_1 den ersten K, sowohl in A als auch in B. Sind nun r und ϱ die Krümmungsradien von K in A und B, r_1 und ϱ_1 diejenigen von K' in denselben Punkten, so ist nach obigem Satz:

$$AC^3 : BC^3 = r : \varrho,$$

aber auch

$$= r_1 : \varrho_1,$$

somit

$$\frac{r}{r_1}=\frac{\varrho}{\varrho_1},$$

das heisst:

Das Krümmungsradien-Verhältniss ist bei zwei sich doppelt berührenden Kegelschnitten in beiden Berührungspunkten dasselbe.

Dieser Satz ist von Herrn Professor Weyr in der oben genannten Abhandlung, aber nur für das specielle Krümmungsradien-Verhältniss 1 : 4 bewiesen worden.

Für jedes Krümmungsradien-Verhältniss wäre er am einfachsten folgendermassen zu beweisen:

Berühren sich K und K_1 in A und B mit den Tangenten v und w, so ist das Krümmungsradien-Verhältniss in A das Doppelverhältniss der Collineation mit A als Centrum und w als Achse, das Krümmungsradien-Verhältniss in B dasjenige der Collineation mit B als Centrum und v als

Achse. Diese Doppelverhältnisse sind gleich, weil A und B zusammengehörige Contingenzpunkte, v und w zusammengehörige Chordalen sind.

10. Die Veranlassung zu der vorliegenden Abhandlung gab die Entdeckung, dass die Hesse'sche Curve in einem Berührungsknoten (Selbstberührungspunkt) zwar gewöhnlich einen dreifachen Punkt hat, jedoch einen vierfachen bekommt, wenn das Krümmungsradien-Verhältniss der beiden Zweige des Berührungsknotens den Werth -1 annimmt (Mathem. Ann. 36 S. 119). Ebenso hat die Hesse'sche Curve im dreifachen Selbstberührungspunkt im Allgemeinen einen sechsfachen, dann aber einen siebenfachen Punkt, wenn die Krümmungssumme in den Zweigen der Grundcurve Null ist.

11. Der Satz von der Invarianz des Krümmungsradien-Verhältnisses in der Ebene lässt folgende Anwendung auf die Geometrie des Raumes zu: Wenn sich zwei Flächen zweiter Ordnung O und O_1 in einem Punkt A mit Tangentialebene E berühren und man legt durch eine Tangente v, welche in E durch A geht, alle möglichen Ebenen, so schneiden diese O und O_1 in Kegelschnittpaaren, welche sich in A berühren. Aus dem Satz von Meûnier (Cranz a. a. O. S. 68) folgt, dass das Krümmungsradien-Verhältniss in A für alle diese Kegelschnittpaare constant $= \delta$ sein muss. Die Schnittpunktsgeraden der Kegelschnittpaare sind Sehnen der Durchschnittscurve von O und O_1 und schneiden alle die Gerade v, welche als Tangente ebenfalls eine Sehne dieser Curve ist. Daher erzeugen (cfr. Reye Geom. der Lage II, S. 150) diese Schnittpunktsgeraden eine Regelfläche zweiter Ordnung O_2, welche dem Büschel von O und O_1 angehört. Nennt man Doppelverhältniss von vier Flächen zweiter Ordnung eines Büschels das Doppelverhältniss ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden, welche durch einen Punkt der Grundcurve des Büschels gezogen ist — und zwar darf das (cfr. Reye a. a. O. II, S. 162) in beliebiger Richtung geschehen —, so ist das Doppelverhältniss, welches O_2 und der doppelt zählende Kegel des Büschels mit O_1 und O bilden, gerade gleich δ. Eine andere Tangente v' führt auf eine andere Regelfläche O_3 mit dem Doppelverhältniss δ'. Weil aber im Büschel im Allgemeinen auch Nichtregelflächen vorkommen, welche nicht von reellen Schnittpunktsgeraden erzeugt werden, so muss es auch Werthe von δ geben, die nicht als Krümmungsradien-Verhältnisse von Kegelschnittpaaren auftreten können, welche von den Schnittebenen durch die Tangenten erzeugt werden. Als Maximum und Minimum von δ sind die beiden Doppelverhältnisse zu betrachten, welche den beiden einfachen Kegeln des Büschels, die ihre Spitzen in E haben, zukommen. Die für das Krümmungsradien-Verhältniss möglichen Werthe liegen zwischen diesen Grenzen und zwar mit Einschluss oder mit Ausschluss des Unendlichen, je nachdem O Regelfläche oder Nichtregelfläche ist. Da ferner jede Regelfläche durch zwei Schaaren von Geraden erzeugt wird, so gehören zu jedem Werth von δ zwischen diesen Grenzen zwei Tangenten in A derart, dass die Schnitte durch sie das Krümmungsradien-Verhältniss δ haben. Der doppelt zählende Kegel des Büschels entspricht dem Werth $\delta = +1$; er wird erzeugt durch die Schnittpunktsgeraden der Paare von sich osculirenden Kegelschnitten, welche von Ebenen durch die Tangenten der Durchschnittscurve von O und O_1 in A ausgeschnitten werden.

Es erübrigt nun noch, den Einfluss der speciellen Fälle bei der Berührung von zwei Flächen zweiter Ordnung (cfr. Clebsch-Lindemann, Vorl. über Geometrie II, S. 219 flg.) auf das Krümmungsradien-Verhältniss im Berührungspunkt anzugeben. Für das Letztere kommen vier besondere Möglichkeiten in Betracht:

a) Der Werth $+1$ ist Maximum oder Minimum von δ; alsdann hat die Durchschnittscurve eine Spitze (sie kann aber auch in zwei sich berührende Kegelschnitte oder in einen doppelt zählenden Kegelschnitt, längs dessen sich O und O_1 berühren, zerfallen).

b) Wenn δ jeden beliebigen Werth annehmen kann, in welchem Fall sich im Büschel nur Regelflächen vorfinden, so zerfällt die Schnittcurve in eine Raumcurve dritter Ordnung und in eine Gerade, welche Sehne oder Tangente dieser Raumcurve ist. Im ersteren Fall berühren sich O und O_1 in zwei Punkten einer Erzeugenden. (Berühren sich dagegen O und O_1 in zwei beliebigen Punkten, so hat δ in beiden Punkten ein Maximum und ein Minimum und es giebt auch Nichtregelflächen im Büschel.)

c) Hat δ für alle Schnitte einen constanten, von der positiven Einheit verschiedenen Werth, so schneiden sich O und O_1 in einem Geradenpaar und einem Kegelschnitt, der ebenfalls in ein Geradenpaar zerfallen kann.

d) Hat endlich δ für alle Schnitte den constanten Werth $+1$, so schneiden sich O und O_1 in einem Geradenpaar und einem durch dessen Mittelpunkt gehenden Kegelschnitt oder in einer Doppelgeraden und zwei windschiefen dieselbe schneidenden Geraden oder in einem doppelt zählenden Geradenpaar.

Indem ich weitere Untersuchungen im Raum einer besonderen Darstellung vorbehalte, bemerke ich noch, dass der von Herrn Mehmke zuerst ohne Beweis mitgetheilte (Zeitschr. f. Mathem. u. Physik Bd. XXXVI S. 56) und später mittelst Infinitesimalrechnung bewiesene Satz (a. a. O. S. 206 flg.): „Osculiren sich zwei Raumcurven in einem Punkt, so ist das Verhältniss der Krümmungen in demselben eine projectivisch unzerstörbare Grösse“, eine unmittelbare Folge der Invarianz des Krümmungsradien-Verhältnisses in der Ebene ist.

12. Zum Schluss ist es nicht ohne Interesse, für zwei in beliebiger Lage befindliche Kegelschnitte die Gleichung für die bei den in 1. erwähnten zwölf perspectivischen Collineationen auftretenden Doppelverhältnisse aufzustellen. Wir bedienen uns hierzu der symbolischen Rechnungsmethode (Clebsch-Lindemann, Vorl. über Geometrie I, S. 187 flg.) und wissen bereits, dass wir eine in den Quadraten der Doppelverhältnisse cubische Gleichung erhalten müssen.

Die Gleichungen der Kegelschnitte seien:

$$\alpha_x^2 = 0$$

und

$$\alpha'^2_x = 0.$$

Ist

$$v_x = 0$$

eine gemeinsame Tangente, so sind die doppelt zählenden Berührungspunkte auf derselben resp.

$$(\alpha v u)^2 = 0$$

und

$$(\alpha' v u)^2 = 0.$$

Dann ist

$$(\alpha v u)^2 + \lambda (\alpha' v u)^2 = 0$$

die Gleichung der Spuren eines Chordalenpaars, wenn λ eine Wurzel der Gleichung:

$$H_1 \lambda^3 + 3 D_{10} \lambda^2 + 3 D_{01} \lambda + H_0 = 0, \tag{6}$$

wo H_1, D_{10}, D_{01}, H_0 dieselbe Bedeutung, wie in Gleichung 1) haben.

Nennt man (cfr. Seeger a. a. O. S. 4) Exponent eines Punktes in Bezug auf die Berührungspunkte sein Abstandsverhältniss von denselben, so sind:

$$\pm \sqrt{\lambda_1}, \quad \pm \sqrt{\lambda_2}, \quad \pm \sqrt{\lambda_3},$$

wo λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln von 6) sind, die Exponenten der Spuren der drei Chordalenpaare. Ferner seien μ_1, μ_2, μ_3 die Exponenten der zu denselben correspondirenden auf v liegenden Contingenzpunkte.

Weil aber zwei zusammengehörige Chordalen von zwei Contingenzpunkten, welche weder unter sich, noch mit jenen correspondiren, harmonisch getrennt werden, so ist:

$$\lambda_1 = \mu_2 \mu_3,$$
$$\lambda_2 = \mu_3 \mu_1,$$
$$\lambda_3 = \mu_1 \mu_2,$$

daher:

$$\mu_1^2 = \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1},$$
$$\mu_2^2 = \frac{\lambda_3 \lambda_1}{\lambda_2},$$
$$\mu_3^2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_3}.$$

Daher sind die Quadrate der Doppelverhältnisse der Collineationen:

$$\delta_1^2 = \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1^2},$$
$$\delta_2^2 = \frac{\mu_2^2}{\lambda_2} = \frac{\lambda_3 \lambda_1}{\lambda_2^2},$$
$$\delta_3^2 = \frac{\mu_3^2}{\lambda_3} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_3^2}.$$

Die Gleichung der Quadrate der Doppelverhältnisse hat also zu Wurzeln die Wurzeln der Gleichung 6) paarweise multiplicirt und durch das Quadrat der dritten dividirt.

Sie lautet daher:

$$7)\quad \begin{cases} H_0^2 H_1^2 \delta^6 - 3(9 D_{01}^3 H_1 - 9 H_0 D_{01} D_{10} H_1 + H_0^2 H_1^2)\delta^4 \\ \qquad + 3(9 H_0 D_{10}^3 - 9 H_0 D_{01} D_{10} H_1 + H_0^2 H_1^2)\delta^2 - H_0^2 H_1^2 = 0. \end{cases}$$

Das Product der Quadrate der Doppelverhältnisse ist also Eins.

Eine Wurzel δ^2 ist gleich 1, das heisst, ein Chordalenpaar geht durch die correspondirenden Contingenzpunkte, wenn:

$$H_0 D_{10}^3 = D_{01}^3 H_1.$$

Alle Chordalen gehen durch correspondirende Contingenzpunkte, wenn:

$$\begin{Bmatrix} D_{01} = 0 \\ D_{10} = 0 \end{Bmatrix}.$$

Die Discriminante der cubischen Gleichung 7) in δ^2 ist:

$$8)\quad \begin{cases} (6 H_0 D_{01} D_{10} H_1 - 4 D_{01}^3 H_1 - 4 H_0 D_{10}^3 + 3 D_{01}^2 D_{10}^2 - H_0^2 H_1^2) \\ \times (3 D_{01}^2 D_{10}^2 - D_{01}^3 H_1 - H_0 D_{10}^3)^2 = 0. \end{cases}$$

Aus
$$\delta_1^2 = \delta_2^2$$
folgt
$$\lambda_1^3 = \lambda_2^3,$$
daher auch:
$$\mu_1^3 = \mu_2^3.$$

Wenn also zwei Wurzeln von 7) einander gleich sind, so ist das Doppelverhältniss, welches auf einer gemeinsamen Tangente zwei bestimmte Contingenzpunkte mit den Berührungspunkten bilden, eine dritte Wurzel der positiven Einheit; eine der zum ersten correspondirenden Chordalen und eine der zum zweiten correspondirenden bilden mit den Berührungspunkten ein Doppelverhältniss gleich einer sechsten Wurzel der positiven Einheit. Hierin ist der Fall der Berührung [erster Factor von 8)] mit inbegriffen; der zweite Factor von 8) bezieht sich auf die complexen Einheitswurzeln. Wenn er verschwindet, liegt eine Chordale und eine bestimmte nicht correspondirende und alsdann ebenso die mit jener zusammengehörende und die mit dieser zusammengehörende äquianharmonisch zu den Berührungspunkten auf den gemeinsamen Tangenten.

Kleinere Mittheilungen.

VII. Eine einfache Berechnung des Siebzehnecks.

Im Folgenden werden nur zwei goniometrische Formeln benutzt, nämlich:

$$1)\qquad cos^2\beta = \frac{1+cos\,2\beta}{2} \text{ und } cos(\pi-\beta) = -\,cos\,\beta.$$

Mittelst derselben lässt sich das reguläre Siebzehneck auf sehr einfache Weise folgendermassen berechnen.

Der ersten Formel gebe ich die Gestalt:

$$2)\qquad (2\,cos\,\beta)^2 = 2 + (2\,cos\,2\beta)$$

und wende sie auf die Ausdrücke

$$3)\qquad \begin{cases} a_1 = 2\,cos\,\frac{1}{17}\pi, & a_2 = 2\,cos\,\frac{2}{17}\pi, \\ a_4 = 2\,cos\,\frac{4}{17}\pi, & a_8 = 2\,cos\,\frac{8}{17}\pi \end{cases}$$

an; so ist

$$a_1^2 = 2 + a_2, \quad a_2^2 = 2 + a_4, \quad a_4^2 = 2 + a_8,$$

und

$$a_8^2 = 2 + 2\,cos\,\frac{16}{17}\pi = 2 - \left(2\,cos\,\frac{1}{17}\pi\right) = 2 - a_1,$$

es ergeben sich also zwischen diesen vier Grössen vier Gleichungen:

$$4)\qquad \begin{cases} a_8^2 = 2 - a_1 & a_4^2 = 2 + a_8 \\ a_2^2 = 2 + a_4 & a_1^2 = 2 + a_2. \end{cases}$$

Man bemerkt sofort, dass die Unbekannten in zwei Gruppen zerfallen, a_1, a_4 und a_2, a_8. Ich führe neue Unbekannte x und y ein, nämlich:

$$5)\qquad \begin{cases} a_1 - a_4 = x_1 & a_2 + a_8 = x_2 \\ a_1 \,.\, a_4 = y_1 & a_2 \,.\, a_8 = y_2. \end{cases}$$

Aus Nr. 4 findet sich:

$$a_2^2 - a_8^2 = a_1 + a_4, \quad a_1^2 - a_4^2 = a_2 - a_8.$$

Dies wird multiplicirt und gehoben:

$$(a_1 - a_4)(a_2 + a_8) = 1,$$

das ist:

$$6)\qquad x_1 \,.\, x_2 = 1.$$

Aus Nr. 4 findet sich weiter

$$4 - a_3^2 = 2 + a_1, \quad 4 - a_4^2 = 2 - a_3, \quad 4 - a_2^2 = 4 - a_4, \quad 4 - a_1^2 = 2 - a_2.$$

Dies wird multiplicirt und gehoben:

$$(2 + a_3)(2 + a_4)(2 + a_2)(2 - a_1) = 1,$$

das ist nach Nr. 4:

$$a_1^2 \,.\, a_4^2 \,.\, a_2^2 a_3^2 = 1,$$

also, da alle a positiv,

$$a_1 a_4 \,.\, a_2 a_3 = +1,$$

das ist

7) $$y_1 \,.\, y_2 = 1.$$

Nun bilden wir die Quadrate, immer Nr. 4 benutzend:

$$x_1^2 = a_1^2 + a_4^2 - 2a_1 a_4 = 4 + a_2 + a_3 - 2a_1 a_4,$$

also

$$x_1^2 = 4 + x_2 - 2y_1,$$

ebenso

$$x_2^2 = 4 - x_1 + 2y_2,$$

und nach Nr. 6:

$$2x_2 x_1 = 2$$

8) $$(x_2 - x_1)^2 = 6 + (x_2 - x_1) - 2(y_1 - y_2).$$

$$y_1^2 = a_1^2 a_4^2 = (2 + a_2)(2 + a_3) = 4 + 2(a_2 + a_3) + a_2 a_3,$$

also

$$y_1^2 = 4 + 2x_2 + y_2,$$

ebenso

$$y_2^2 = 4 - 2x_1 - y_1,$$

und nach Nr. 7

$$2y_1 y_2 = 2$$

9) $$(y_1 - y_2)^2 = 6 + 2(x_2 - x_1) - (y_1 - y_2).$$

Man überzeugt sich leicht, dass

$$y_1 - y_2 > x_2 - x_1 > 0.$$

Aus Nr. 9 und 8 folgt:

$$(y_1 - y_2)^2 - (x_2 - x_1)^2 = (y_1 - y_2) + (x_2 - x_1),$$

also

10) $$(y_1 - y_2) - (x_2 - x_1) = 1.$$

Dies setzen wir in Nr. 8 und 9 ein:

11) $$(x_2 - x_1)^2 = 4 - (x_2 - x_1).$$

12) $$(y_1 - y_2)^2 = 4 + (y_1 - y_2).$$

Hieraus ergiebt sich:

13) $$x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}, \quad y_1 - y_2 = \frac{\sqrt{17} + 1}{2}.$$

Der Kürze halber setzen wir:

$$x_2 - x_1 = \lambda, \quad y_1 - y_2 = \mu.$$

Zu den Gleichungen Nr. 13 nehmen wir Nr. 6 und 7 hinzu:

$$x_2 x_1 = 1, \quad y_1 y_2 = 1,$$

so lassen sich die x und y finden:

$$14) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda^2+4} - \lambda) & y_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{\mu^2+4} + \mu) \\ x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda^2+4} + \lambda) & y_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{\mu^2+4} - \mu). \end{cases}$$

Hierauf ergeben sich die a aus:

$$\begin{array}{r|l} a_1 - a_4 = x_1 & a_2 + a_8 = x_2 \\ a_1 a_4 = y_1 & a_2 a_8 = y_2 \end{array}$$

als

$$15) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{x_1^2 + 4y_1} + x_1) & a_2 = \frac{1}{2}(x_2 + \sqrt{x_2^2 - 4y_2}) \\ a_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{x_1^2 + 4y_1} - x_1) & a_8 = \frac{1}{2}(x_2 - \sqrt{x_2^2 - 4y_2}) \end{cases}$$

$$a_1 \text{ ist } 2\cos\frac{1}{17}\pi.$$

Der Centriwinkel der Seite s_{17} des regulären Siebzehnecks findet sich durch

$$16) \quad 2\cos\frac{2}{17}\pi = 4\cos^2\frac{1}{17}\pi - 2 = a_1^2 - 2.$$

Diese Art der Auflösung dürfte kürzer sein, als die gewöhnlich benutzte, welche auf die Formeln

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

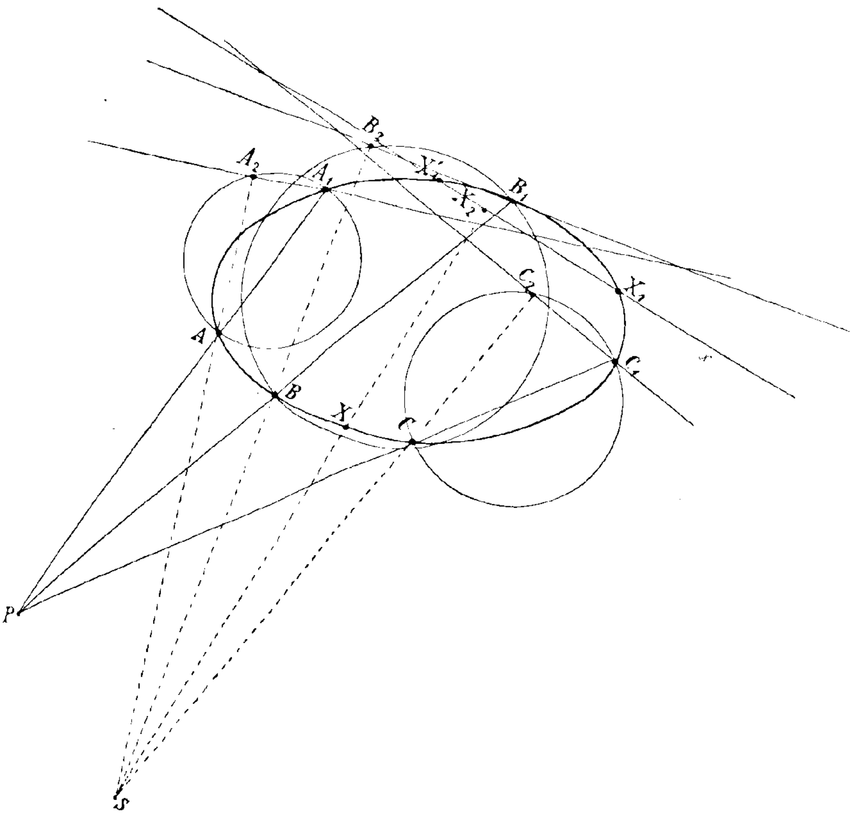
zurückgeht, und die z. B. in Schlömilch's Geometrie angegeben ist. Auch zur geometrischen Herleitung werden gewöhnlich Zusammenhänge benutzt, welche diesen letztgenannten Formeln entsprechen, z. B. in Schraders Geometrie. Aber auch geometrisch ist mein Verfahren das einfachere. Ich hoffe, in nächster Zeit eine zusammenhängende und erschöpfende Darstellung des Problemes in neuem geometrischen Gewande zu geben, worin eben die Formeln Nr. 3 auf einfachste Weise geometrisch gewonnen und gedeutet werden sollen. Das Verfahren ist natürlich nicht auf den Fall $\frac{1}{17}$ beschränkt, wie ich denn auch eine allgemeine Formel für die Seite s_{4n+2} des regulären Polygones von $2(2n+1)$ Seiten geben werde.

Magdeburg. Dr. Bochow.

VIII. Ueber eine Potenzbeziehung bei den Curven zweiter Ordnung.

Von Faure rührt der Satz her, dass die Umkreise der Poldreiecke einer Curve zweiter Ordnung im Mittelpunkte dieser Curve denselben Potenzwerth besitzen. Diesem Satze können wir den folgenden zur Seite stellen, der eine ähnliche Potenzbeziehung enthält und der noch nicht bekannt sein dürfte.

Zu allen Kreisen, welche je eine der durch einen Punkt P gehenden Sehnen einer Curve zweiter Ordnung als Durch-



messer fassen, giebt es im Allgemeinen einen Punkt gleicher Potenz S. Dieser hat denselben Potenzwerth zu den Kreisen einer anderen Schaar, von denen jeder eine durch einen gewissen Punkt P' gehende Sehne derselben Curve als Durchmesser enthält.

Wir ziehen zum Beweise dieses Satzes durch P drei Gerade, die die Curve zweiter Ordnung λ in den Punktpaaren AA_1, BB_1 und CC_1 treffen, und construiren die drei Kreise, die je eine der entstandenen Curvensehnen als Durchmesser fassen (Figur). Den gemeinsamen Schnittpunkt S der

Potenzlinien dieser Kreise verbinden wir mit A, B und C durch drei Gerade, die die zugehörigen Kreise zum zweiten Male in A_2, B_2 und C_2 schneiden, und ziehen ferner die Geraden A_1A_2, B_1B_2 und C_1C_2. Dann sind die Winkel bei A_2, B_2 und C_2 rechte, und es haben die Producte $SA.SA_2$, $SB.SB_2$ und $SC.SC_2$ denselben Werth. Weisen wir nun jedem Punkte X von λ diejenige Gerade x zu, die senkrecht steht zu SX und diese Gerade in einem solchen Punkte X_2 schneidet, dass das Product $SX.SX_2$ gleich jenem Werthe $SA.SA_2$ ist, dann sind X und x entsprechende Elemente in einem allgemeinen circulären Polarsystem, dessen Ordnungscurve ein reeller oder imaginärer Kreis $\varkappa$ ist, der S als Mittelpunkt und $\sqrt{SA.SA_2}$ als Radius hat. Nennen wir ferner X_1 und X'_1 die Schnittpunkte der Geraden x mit der Curve λ, dann sind X und X_1 und ebenso X und X'_1 conjugirte Punkte in dem circulären Polarsystem, und folglich schneiden die Geraden XX_1 und XX'_1 den Kreis $\varkappa$ und die Curve λ so in vier harmonischen Punkten, dass je zwei zugeordnete auf derselben Curve liegen. Nach einem bekannten Satze bilden solche Gerade einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung; weil aber in unserem Falle drei Strahlen des Büschels, nämlich AA_1, BB_1 und CC_1 durch den Punkt P gehen, so zerfällt der Büschel zweiter Ordnung in zwei Büschel erster Ordnung. Der Mittelpunkt des einen, durch den die Geraden XX_1 gehen, ist P, der Mittelpunkt des andern, in dem sich die Geraden XX'_1 schneiden, möge mit P' bezeichnet werden. Denken wir uns nun schliesslich über irgend einer der Strecken XX_1 oder XX'_1 als Durchmesser den Kreis construirt, so geht dieser durch den zugehörigen Punkt X_2, so dass SX und SX_2 Sehnen- oder Secantenabschnitte des Kreises sind, also das Product $SX.SX_2$ die Potenz des Punktes S zu jenem Kreise darstellt. Weil nun aber dieses Product constant ist, so ist S ein Punkt gleicher Potenz zu allen Kreisen, die je eine der Curvensehnen XX_1 oder XX'_1 als Durchmesser fassen.

Denken wir uns statt der Kreise die Kugeln, die die Sehnen XX_1 und XX'_1 als Durchmesser fassen, so gehen die Potenzebenen von je zweien dieser Kugeln durch den Punkt S und stehen senkrecht zu der Ebene der Curve λ. Folglich schneiden sich alle diese Potenzebenen in der Geraden, die in S normal zu jener Ebene steht. Die Kugeln der beiden Schaaren gehören also zu einem Kugelbündel und haben folglich auf der Potenzachse zwei gemeinschaftliche reelle oder imaginäre Schnittpunkte. Es gilt daher der Satz:

Alle Kugeln, welche je eine der durch einen Punkt P gehenden Sehnen einer Curve zweiter Ordnung als Durchmesser fassen, haben im Allgemeinen zwei Punkte gemeinsam. Durch diese geht noch eine zweite Schaar von Kugeln, von denen jede eine durch einen gewissen Punkt P' gehende Sehne derselben Curve als Durchmesser enthält.

Die Kegelflächen, die aus einem dieser beiden Punkte die Curve λ projiciren, sind von besonderer Art, da jede von beiden Kegelflächen von irgend einer durch ihren Mittelpunkt und einen der Punkte P und P' gehenden Ebene in normalen Strahlen geschnitten wird. Solche Kegel sind vom Verfasser dieser Arbeit in seiner Strassburger Inaugural-Dissertation „Kegel des Pappus“ genannt und dort näher untersucht worden.

Nach dieser Darlegung wollen wir hier noch die wichtigsten der Sätze anführen, die sich uns bei weiterer Untersuchung jener Kreisschaaren ergeben haben und die vielleicht einiges Interesse beanspruchen dürften. Wir behalten uns vor, sie bei einer andern Gelegenheit zu begründen.

1. Die Kreise, die parallele Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel als Durchmesser fassen, bilden einen Büschel, dessen Potenzlinie ein Durchmesser der Curve ist. Der Büschel hat zwei reelle und zwar auf der Curve gelegene oder zwei imaginäre Grundpunkte, je nachdem die parallelen Sehnen Punkte auf den beiden oder auf einem Zweige der Hyperbel verbinden.

2. Bei einer gleichseitigen Hyperbel hat der zu einem Punkte P conjugirte und mit diesem auf einem Durchmesser gelegene Punkt S gleichen Potenzwerth zu allen Kreisen, die je eine Hyperbelsehne des Punktes P als Durchmesser fassen.

3. Zwischen den Punkten P und P' besteht eine involutorische Verwandtschaft zweiten Grades, deren Hauptpunkte der Mittelpunkt und die beiden unendlich fernen Punkte von λ sind.

4. Auf einer Achse einer Curve zweiter Ordnung giebt es zwei reelle oder imaginäre und bezüglich des Mittelpunktes symmetrisch gelegene Punktpaare RS, die durch folgende Eigenschaften ausgezeichnet sind: a) Verbindet man irgend einen Curvenpunkt X mit R durch eine Gerade, die die Curve zum zweiten Male in X_1 trifft und zieht man die Gerade XS, so steht diese senkrecht zur Tangente des Punktes X_1; b) Ist X_2 der Schnittpunkt der Geraden XS mit der Tangente des Punktes X_1, dann hat das Product $SX \cdot SX_2$ einen constanten Werth; c) Die Punkte R und S sind durch die Brennpunkte der Achse harmonisch getrennt.*

5. Den Punkten P einer Geraden entsprechen die Punkte S einer Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt.

* Vergl. die Verhandlungen der 64. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte, Leipzig 1892, 2. Theil S. 542 flg.

6. Bestimmt man zu einem Punkte P in der Ebene einer Curve zweiter Ordnung den zugehörigen Punkt S, sowie die Curve μ, auf der die Mittelpunkte der Sehnen des Punktes P liegen, dann gehen durch die Fusspunkte der vier von S nach μ gezogenen Normalen grösste und kleinste zur Curve λ gehörende Sehnen des Punktes P.*

* Vergl. die Bemerkung von Schlömilch in der Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterricht. Jahrg. 1892, Heft 4, S. 280 und 281.

Saarbrücken. Dr. THEODOR MEYER.

XIV.

Ueber die Stellen innigster Berührung einer ebenen Curve dritter Ordnung mit einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung.

Von

Dr. Martin Disteli

in Zürich.

Hierzu Tafel VI, Fig. 1—5.

Bekanntlich können von den $3n$ Schnittpunkten P einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung C_n mit einer ebenen Curve dritter Ordnung C_3 alle bis auf einen auf der C_3 willkürlich fixirt werden. Denkt man sich nun die $(3n-1)$ willkürlichen Punkte P sämmtlich unendlich benachbart, so kann durch zweckmässige Wahl der Berührungsstelle auch noch der letzte Schnittpunkt mit den übrigen vereinigt werden. Die vorliegende Frage möge also lauten:

Wie viele Punkte giebt es auf der allgemeinen und den singulären Curven dritter Ordnung, welche eine innigste, das heisst eine $3n$-punktige Berührung mit einer Curve n^{ter} Ordnung gestatten, und welche hauptsächlichen geometrischen Eigenschaften kommen diesem Punktsysteme zu?

I. Anzahlbestimmung der Berührungsstellen.

Wir führen die Untersuchung im Folgenden synthetisch, indem wir die fraglichen Stellen zuerst für die einfachsten Fälle ermitteln, dann zur allgemeinen Primzahl und schliesslich zu den zusammengesetzten Zahlen n übergehen. Dabei wird durchweg nur von dem Satze Gebrauch gemacht:

Legt man durch $(3n-2)$ der Schnittpunkte P einer Curve C_3 und einer Curve C_n sämmtliche Curven C_n, so schneiden diese aus der C_3 Punktepaare einer rationalen und quadratischen Involution, deren Verbindungslinie stets durch einen festen Punkt der C_3 geht.

Dieser feste Punkt soll in der Folge als Drehpunkt D bezeichnet werden.

1. Die einfachsten Fälle.

$n = 1$. Diejenigen Stellen, wo die C_3 von einer Geraden dreipunktig berührt wird, sind unmittelbar ersichtlich: nämlich die neun Wendepunkte mit der bekannten Configuration ihrer zwölf dreifach zählenden Geraden. Wir können sie unter dem Gesichtspunkt vorliegender Betrachtung bezeichnen als Punkte P_1, wenn hier gleich angemerkt wird, dass die Bezeichnung P_n für den allgemeinen Fall gelten soll. Es ist bemerkenswerth, dass die Wendepunkte auch in der Folge eine wichtige Rolle spielen.

$n = 2$. Sei in Fig. 1 F_1 ein beliebiger Punkt der C_3, F_2 sein erster und D_1 sein zweiter Tangentialpunkt. Unter allen in F_1 vierpunktig berührenden Kegelschnitten C_2 figurirt auch die doppelt gelegte Tangente in F_1, welche zeigt, dass D_1 der Drehpunkt des veränderlichen Punktepaares ist, welches zugleich den Individuen des Kegelschnittbüschels angehört. Die Gerade $D_1 F_1$ begegnet somit der C_3 in demjenigen Punkte 6, der dem in F_1 fünfpunktig osculirenden Kegelschnitt angehört. Auf diese Weise kann zu jedem Punkte F_1 linear ein Punkt 6 construirt werden. Wann und wie oft fallen F_1 und 6 zusammen?

Wenn ein Zusammenfallen eintreten soll, muss D_1 mit F_2 coincidiren; dann aber ist F_2 ein Wendepunkt.

Die Punkte P_2 sechspunktiger Berührung zwischen der C_3 und einem Kegelschnitt C_2 sind also, wie bekannt, die 27 Berührungspunkte der aus den Wendepunkten an die C_3 gelegten Tangenten.

$n = 3$. Sei wieder in derselben Figur F_1 ein willkürlicher Punkt der C_3. Um jetzt den Drehpunkt D_2 der Sehnen anzugeben, welche die variablen Schnittpunktepaare aller Curven dritter Ordnung enthalten, von denen die Grundcurve C_3 in F_1 siebenpunktig berührt wird, betrachten wir diejenige zerfallende C_3, welche aus dem in F_1 fünfpunktig osculirenden Kegelschnitt und seiner Tangente in diesem Punkte besteht.

Für diese Curve ist $6 F_1$ das variable Punktepaar, welches somit durch seine Verbindungslinie den Drehpunkt D_2 bestimmt. Durch den Strahl $F_1 D_2$ wird aber jetzt der neunte Schnittpunkt aller Curven dritter Ordnung bestimmt, welche die Grundcurve in F_1 achtpunktig berühren. Soll nun 9 auch nach F_1 fallen, so muss D_2 mit F_2, also auch 6 mit D_1 identisch werden. Die Punkte $F_1 F_2 D_1$ bilden in diesem Falle ein Dreieck von Punkten der C_3, dessen Seiten die Tangenten der Grundcurve in seinen Ecken sind. — Solcher Dreiecke giebt es auf der C_3 aber 24.

Die fraglichen Punkte P_3 sind also diejenigen 72 Punkte, welche mit jedem Wendepunkt Fundamentalpunkte für Steiner'sche Polygone von 18 Seiten bilden.

Auf die Configuration dieser Punkte kommen wir im Folgenden nochmals zurück.

$n = 4$. Man denke sich jetzt unter allen Curven vierter Ordnung C_4, welche die Grundcurve C_3 im Punkte F_1 in zehn auf einander folgenden Punkten berühren, eine der unendlich vielen zerfallenden Curven, welche aus einer in F_1 achtpunktig berührenden C_3 nebst Tangente bestehen. Ist nach dem Vorausgegangenen der Punkt 9 ermittelt, so ergiebt in Fig. 1 die Gerade $9F_2$ den verlangten Drehpunkt D_3 und damit den Punkt 12, das heisst den gemeinschaftlichen Schnittpunkt aller Curven C_4, welche die Grundcurve in F_1 elfpunktig osculiren.

Eine einfache Ueberlegung lässt erkennen, dass der Punkt 12 nur dann mit F_1 zusammenfallen kann, wenn D_1 mit 9 zugleich in einen Wendepunkt verlegt wird.

Somit sind die gesuchten Punkte P_4 die $4.27 = 108$ Berührungspunkte der aus den Punkten P_2 an die C_3 gelegten Tangenten; das heisst, diejenigen Punkte, welche mit je einem Wendepunkt Fundamentalpunkte bilden für Polygone von acht Seiten, mit den acht übrigen Wendepunkten Polygone von 24 Seiten.

$n = 5$. Wir stellen uns eine zerfallende Curve fünfter Ordnung C_5 vor, welche in F_1 13 auf einander folgende Punkte mit der Grundcurve C_3 gemeinsam hat und aus einer elfpunktig berührenden Curve C_4 nebst der Tangente in F_1 besteht.

Ist nach dem Vorhergehenden der Punkt 12 angegeben, so schneidet die Gerade $12\,F_2$ den neuen Drehpunkt D_4 und damit den letzten Schnittpunkt 15 derjenigen Curve C_5 heraus, welche in F_1 eine 14-punktige Berührung mit C_3 eingeht. Soll dieser letzte Schnittpunkt 15 mit F_1 coincidiren, so muss der Reihe nach D_4 mit F_2; 12 mit D_1; 5 mit D_3 und 9 mit D_4 identisch werden. Man erkennt daraus, dass die vier Punkte $F_1 F_2 D_1 D_2$ in diesem Falle ein geschlossenes Tangentenvierseit bilden, das den Punkt 6 zu einem Diagonalpunkt und Wendepunkt der C_3 hat. — Solcher geschlossener Tangentenvierseite giebt es auf der C_3 aber 54.

Die 216 Ecken derselben sind die Punkte P_5. Jeder von ihnen giebt mit einem bestimmten Wendepunkt combinirt Polygone von zehn Seiten; mit den acht anderen Wendepunkten dagegen solche von 30 Seiten.

2. Uebergang zur allgemeinen Zahl n.

Das bis jetzt zur Anwendung gelangte Verfahren zeigt einen stufenmässigen Verlauf, indem durch Zufügen einer geraden Linie, der Tangente der C_3 im Punkte F_1, zur Curve der folgenden Ordnung übergegangen werden kann. Es lässt sich daher offenbar beliebig weit fortsetzen, und deckt dabei sofort den Zusammenhang der vorliegenden Fragen mit den Steiner'schen Punktinvolutionen auf der Grundcurve C_3 auf.

Der Verlauf der Construction des letzten Schnittpunktes ist folgender:

Nach Fig. 1 gehen wir aus von zwei Punkten F_1 und F_2 der C_3. Mit der Tangente in F_1 gelangt man zu D_1; durch Verbinden von D_1 mit F_1 zum Punkte 6; durch die Linie $6F_2$ zu D_2; dann durch Ziehen von D_2F_1 zu 9; mit $9F_1$ zu D_3; durch D_3F_1 zu 12 u. s. w. Auf der C_3 entstehen dadurch zwei Punktreihen. Alle mit D bezeichneten Punkte werden mit F_1, alle mit Ziffern versehenen Punkte mit F_2 verbunden, und zwar derart, dass diese Linien einen continuirlichen Zug bilden, dessen Seiten abwechselnd durch die Punkte F_1 und F_2 gehen.

Mit anderen Worten:

Man construirt in Wirklichkeit ein Steiner'sches Polygon mit F_1 und F_2 als Fundamentalpunkten und der Geraden F_1F_2 als erster Seite. Dann verlangt die gestellte Aufgabe, dass dieses Polygon sich schliesst.

Der Punkt F_2 ist aber als Tangentialpunkt von F_1 nicht willkürlich, soll er mit F_1 zugleich Fundamentalpunkt sein, so muss das Steiner'sche Involutionselement, das den Punkt F_1 enthält, mit seinem Tangentialelement, zu welchem F_2 gehört, identisch sein.

Dies ist jedes Mal und nur dann der Fall, wenn das Element einen einzigen Punkt enthält, der mit seinem Tangentialpunkt coincidirt, und diese Eigenschaft wiederum kommt nur den Wendepunkten der C_3 zu.

Damit ist die Haupteigenschaft der fraglichen Punkte aufgedeckt:

Die Stellen $3n$-punktiger Berührung P_n sind enthalten unter den Punkten desjenigen Involutionselementes der Zahl $3n$, zu welchem die Wendepunkte gehören.

Enthält nun die Zahl n den Factor 3 selbst nicht, so gehören die Punkte P_n zu neun Gruppen G, von denen jede einen Wendepunkt enthält, mit welchem die Punkte P_n Fundamentalpunktepaare bilden für Polygone von $2n$ Seiten und n Ecken; dagegen solche von $6n$ Seiten und $3n$ Ecken mit den acht übrigen Wendepunkten.

Ist dagegen 3 Factor von n, so gehören die Punkte P_n acht Gruppen G' an, und bilden gleichartig mit allen neun Wendepunkten Fundamentalpunktepaare für Polygone von $6n$ Seiten und $3n$ Ecken.

Sind nun die zu den einzelnen Primfactoren p^a, q^b, r^c,... von n gehörenden Involutionen bekannt, so findet man bekanntlich das Involutionselement der Zahl n, indem man jeden Punkt des Elementes der Zahl p^a vervollständigt zu einem Element der Zahl q^b, diese neuen Punkte ergänzt zu Elementen der Zahl r^c u. s. w., wobei die Reihenfolge dieser successiven Erweiterungen willkürlich ist.

Daraus ergiebt sich nun sehr einfach die Anzahlbestimmung der fraglichen Punkte P_n.

Ist nämlich ein Wendepunkt gemeinschaftlicher Punkt der Elemente der Zahlen p^a und q^b, so wird die Erweiterung der Punkte des einen

Elementes zu Elementen der Involution des anderen vollzogen, indem man, mit Ausnahme des Wendepunktes, alle Punkte des einen Elementes mit allen des anderen durch gerade Linien verbindet und die dritten Schnittpunkte mit der Curve bestimmt.

Bezeichnet man mit A_n die Anzahl der Punkte P_n, das heisst also derjenigen, welche mit dem Wendepunkt nicht zerfallende Polygone ergeben, also mit A_{p^a} die Anzahl der Punkte P_{p^a}, mit A_{p^α} die Zahl der Punkte P_{p^α}, welche zu Polygonen von blos 2α Seiten führen, so setzen sich die n^2 Punkte des Elementes der Zahl n zusammen aus der Anzahl aller Punkte P_{p^α}, wenn α alle ganzzahligen positiven Werthe von 0 bis a durchläuft, so dass, wenn $A_{p^0} = 1$ und p von 3 verschieden gedacht wird,

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=a} A_{p^\alpha} = n^2$$

ist. Daraus folgt:

$$A_{p^a} = (p^2-1)p^{2(a-1)}.$$

Ebenso ist die Anzahl der Punkte P_n, die zur Primzahlpotenz $n = q^b$ gehören, gegeben durch

$$A_{q^b} = (q^2-1)\,q^{2(b-1)}$$

und man findet endlich die zur Zahl $p^a.q^b$ gehörenden Punkte P durch Verbindung der Punkte P_{p^a} mit den Punkten P_{q^b}. Da aus geometrischen Gründen jeder nur einmal erhalten werden kann, so ist ihre Anzahl unter Berücksichtigung blos eines Wendepunktes

$$A_{p^a.q^b} = A_{p^a}.A_{q^b} = (p^2-1)(q^2-1)\,p^{2(a-1)}q^{2(b-1)}.$$

Die Anzahl ist aber auch gleich der Anzahl aller Zahlenpaare α, $\beta (< n)$, welche mit n keinen gemeinschaftlichen Divisor haben; das heisst gleich der Anzahl aller Punkte in der Ebene eines Cartesi'schen Coordinatensystems, deren Coordinaten ganze, positive Zahlen sind, welche zugleich kleiner als n und theilerfremd mit n sind.

Die Anzahl dieser Punkte stimmt aber bekanntlich mit obiger Anzahl überein, falls n die Form $p^a.q^b$ besitzt.

Damit ist auf's Neue gezeigt, dass durch die Verbindungslinien jeder der Punkte P_n nur einmal erhalten wird und ferner geht daraus hervor:

Gehören zwei Punkte P zu den Zahlen z_1 und z_2, so ist der dritte Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie allemal ein Punkt, dessen Zahl höchstens dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Zahlen z_1 und z_2 oder aber einem Divisor d desselben gleich ist, je nachdem z_1 und z_2 relativ prim sind, oder gemeinschaftliche Primzahlpotenzen besitzen.

Ist also n eine Zahl von der Form

$$n = p^a . q^b . r^c \ldots,$$

wo $p, q, r \ldots$ die verschiedenen Primfactoren sind, so ist die Anzahl der verlangten Punkte P_n:

$$\mathsf{A}_n = 9 A_n = 9(p^2 - 1)(q^2 - 1)(r^2 - 1) \ldots \quad p^{2(a-1)} q^{2(b-1)} r^{2(c-1)} \ldots$$

Nebst diesen Punkten umfasst aber das Steiner'sche Involutionselement alle Punkte P_d, die zu sämmtlichen Divisoren d der Zahl n gehören, so dass man alle Punkte des Elementes erhalten muss, wenn d alle Divisoren von n (inclusive 1 und n) durchläuft.

Die Grössen A befolgen also die beiden Gesetze:

$$\sum_d \mathsf{A}_d = (3n)^2 \text{ und } A_d . A_{d'} = A_{dd'},$$

sobald d und d' zwei zu einander relative Primzahlen sind.

Die Betrachtung dieses Abschnittes hat somit bis jetzt ergeben, dass die in Rede stehenden Punkte P_n unter den Punkten der von Clebsch aufgestellten „Merkwürdigen Punktsystemen" der Curve C_3 zu suchen sind. Als Zweck des folgenden Abschnittes möge es betrachtet werden, über die Vertheilung der Geraden der Punkte P_n, wenn diese allein unter sich verbunden werden, genauere Kenntniss zu erlangen, mit Berücksichtigung der Resultate, die über diese Configuration speciell schon bekannt sind.

II. Vertheilung und Configuration des Systems der Verbindungslinien der Punkte P_n.

Jeder Punkt der Curve C_3 kann als bestimmender oder Ausgangspunkt eines Involutionselementes einer bestimmten Zahl angesehen werden. Erfüllen dann diese Ausgangspunkte auf der C_3 eine bestimmte Configuration, so wird diese von den zugehörigen Elementen, als Ganzes betrachtet, wiederholt.

So sind zwei Elemente derselben Ordnung bekanntlich stets mit einem dritten Element derselben Ordnung perspectivisch oder connex.

Insbesondere erhält man also durch alle Geraden zwischen den Punkten eines einzigen Elementes sein Tangentialelement.

Für die Darstellung der Punkte P_n haben wir die Wendepunkte als Ausgangsgruppe zu nehmen und wir haben entweder für jeden Wendepunkt eine Gruppe G von n^2 Punkten, zwischen denen sich die Lagenbeziehung der neun Wendepunkte wiederholt; oder die eine der neun Gruppen G' enthält alle Wendepunkte und keinen Punkt P_n, welche in den acht anderen Gruppen G' enthalten sind.

In beiden Fällen aber ist die Gruppe der $(3n)^2$ Punkte zugleich ihre Tangentialgruppe und die charakteristische Haupteigenschaft des Punktsystems besteht darin, dass die Verbindungslinie irgend zweier

Punkte des Systems stets einen dritten Punkt desselben enthalten muss.

Da speciell die Zahlen 2 und 3 eine besondere Rolle in der Configuration übernehmen, wollen wir wieder die einfachsten Fälle zuerst behandeln, wodurch wir dann in den Stand gesetzt werden, zur zusammengesetzten Zahl n überzugehen.

Wir betrachten zunächst die allgemeine Curve C_3; die rationalen werden später eine vollständige und zugleich construirbare Erledigung finden.

A. Allgemeine Curve dritter Ordnung.

3. Die einfachsten Fälle.

$n = 2^l$. Die Punkte P_{2^l} finden sich in neun Gruppen G und zwar in jeder in der Anzahl:

$$A_{2^l} = 3 \,.\, 2^{2(l-1)}.$$

Ebenso ist

$$A_{2^\lambda} = 3 \,.\, 2^{2(\lambda-1)} \quad (\lambda < n)$$

die Anzahl der Punkte P_{2^λ} einer Untergruppe; $A_1 = 1$ ist somit der betrachtete Wendepunkt von G.

Jede Untergruppe entsteht nun aus der vorhergehenden, indem aus den Punkten jener die vier Tangenten an die Curve gelegt werden. Im Weiteren möge $a(2^\lambda, n, n)$ die Anzahl derjenigen Geraden bezeichnen, welche zwei Punkte P_n verbinden und zugleich noch durch einen Punkt P_{2^λ} hindurchgehen, was stets eintreten muss.

Legt man ferner allen Punkten P_{2^λ} die Zahl 2^λ selber bei, also insbesondere dem Wendepunkt die Zahl 1, und beschränken wir uns vorläufig auf einen Wendepunkt und eine Gruppe G, die zu ihm gehört, so ist aus geometrischen Gründen evident, dass die Verbindungsgerade eines Punktes P_{2^λ} mit P_{2^μ} zu einem Punkte P_{2^ν} der Gruppe führen muss, wobei ν der grösseren der beiden Zahlen λ und μ gleich sein muss, und auch nicht grösser als jede der beiden sein kann, weil man sonst mit dem Lineal allein von Involutionselementen niedrigerer Ordnung zu solchen beliebig hoher Ordnung aufsteigen könnte, was aber bekanntlich eine Kette von Zirkelconstructionen erfordert.

Nur wenn $\lambda = \mu$ ist, kann der dritte Schnittpunkt in jeden Punkt P_{2^ν} fallen, für welchen $\nu \leqq \lambda$ ist, die Null eingeschlossen.

Beachtet man noch, dass die Punkte P_{2^l} die Punkte $P_{2^{l-1}}$ zu Tangentialpunkten haben, so findet für das System der Verbindungslinien zweier Punkte P_n folgende Vertheilung statt, wenn die Grösse

$$S_{2^l} = \sum_{\lambda\ 0}^{l-1} A_{2^\lambda} = 2^{2(l-1)}$$

gesetzt wird:

$$\text{für } \lambda \leqq l-2 \text{ ist } a(2^\lambda, n, n) = \frac{A_2{}^l}{2} A_{2\lambda},$$

$$\text{„ } \lambda = l-1 \text{ ist } a(2^{l-1}, n, n) = \frac{A_2{}^{l-1}}{2}(A_2{}^l - 4) = \frac{A_2{}^l}{2}(A_2{}^{l-1} - 1),$$

$$\text{„ } \lambda = l \text{ ist } a(n, n, n) = \frac{A_2{}^l}{6}(A_{2l} - S_{2l}),$$

wobei die letzten Geraden dreifach zu zählen sind. Die Gesammtheit aller Geraden ist also

$$\sum_{\lambda=0}^{l} a(2^\lambda, n, n) = \frac{A_n}{2}(A_n - 1),$$

wie es sein muss für die Verbindungsgeraden der Punkte P_n. Fasst man jetzt alle neun Gruppen G in's Auge, so kommen nebst den genannten Geraden jeder Gruppe neue aus der Verbindung der Punkte P_n verschiedener Gruppen G hinzu. Die neun Gruppen G liegen aber zwölf Mal zu dreien perspectivisch und eine einfache Abzählung ergiebt, dass die vorigen Formeln ihre Giltigkeit behalten, wenn man sämmtliche Grössen $A_{2\lambda}$ mit dem Factor 9 multiplicirt.

Wir erörtern die Frage nach der Realität.

1. Ersetzt man in den vorigen Formeln $A_{2\lambda}$ durch $A^r{}_{2\lambda} = 2^{\lambda-1}$, den Factor 9 durch 3, weil blos drei reelle Wendepunkte existiren, so ergeben sie die Verbindungslinien der reellen Punkte P_n der eintheiligen Curve C_3.

Fig. 2 illustrirt den vorliegenden Fall, indem sie die gegenseitige Lage der Punkte P_1, P_2, P_4 zur Anschauung bringt.

Gegeben ist zu denken das gestrichte Parallelogramm, welches zusammen mit zweien seiner Diagonalpunkte die drei Wendepunkte P_1 und die drei Punkte P_2 repräsentirt. Der Mittelpunkt des Parallelogramms ist zugleich Mittelpunkt der Curve; die zugehörige h. Polare also unendlich fern, und somit die beiden anderen h. Polaren p_1 unter sich parallel. Durch die gegebenen Daten ist ein Büschel von Curven C_3 definirt, wir können also noch einen willkürlichen Punkt der Curve wählen. Dazu wurde in Fig. 2 eine Ecke desjenigen Parallelogramms verwendet, das dem ursprünglichen umschrieben ist, dessen eines Seitenpaar den h. Polaren und dessen zweites der zweiten Diagonale des ursprünglichen Parallelogramms parallel läuft. Diese letztere Diagonale theilt dann das ganze Parallelogramm in zwei congruente Theile, deren Mittelpunkte zusammen mit den vier Ecken des ganzen Parallelogrammes die verlangten Punkte P_4 sind.

Die ganze Configuration wird jetzt durch elementar-geometrische Sätze begründet. Als interessantes Resultat springt zunächst in die Augen, dass, weil die drei Punkte P_2 nicht einer Geraden angehören, auch nicht drei Punkte P_4 und überhaupt nie drei reelle Punkte P_{2l} in einer Geraden liegen können.

Es bestätigt sich also schon im Falle der einfachsten Involutionen höherer Ordnung auf der C_3, dass viele ihrer merkwürdigen Eigenschaften die *imaginären* Elemente zu ihrer Existenz benöthigen, und durch keinerlei zeichnerische Darstellung zu sichtbarem Ausdruck gebracht werden können.

Mit $A_1^r = 1$, $A_2^r = 1$, $A^r_{2^2} = 2$ verificirt man die Resultate der Construction, nämlich

$$a^r(1,\ 4,\ 4) = 9, \quad a^r(2,\ 4,\ 4) = 6, \quad a^r(4,\ 4,\ 4) = 0,$$

und da

$$A^r_{2l} - S^r_{2l} = 0,$$

überhaupt

$$a^r(n,\ n,\ n) = 0.$$

2. Setzt man dagegen an Stelle der Grössen $A_{2\lambda}$ die Grösse $A^r_{2\lambda} = 2^\lambda$, so ergeben die Formeln mit Ausnahme des Falles $l = 1$, die Verbindungslinien der reellen Punkte P_{2l} für die zweitheilige Curve C_3. Die Darstellung (Fig. 3) zeigt jetzt neun reelle Punkte P_2, wovon drei auf den unpaaren Ast und sechs auf das Oval entfallen. Um die Geraden durch diese Punkte aus den Formeln richtig zu erhalten, ist $A^r_2 = 3$ zu setzen. Man findet unter Verwendung dieses Werthes sofort

$$a^r(1,\ 2,\ 2) = 9 \text{ und } a^r(2,\ 2,\ 2) = 9$$

unter den letzteren dreifach zählenden Geraden die drei reellen *h.* Polaren. Werden jetzt die Punkte P_4 hinzuconstruirt, so liegen von diesen sechs auf dem Ast und sechs auf dem Oval; mit $A^r_{2^2} = 4$ ergeben sich die Anzahlen:

$$a^r(1,\ 4,\ 4) = 18, \quad a^r(2,\ 4,\ 4) = 48, \quad a^r(4,\ 4,\ 4) = 0.$$

Für $l > 1$ sind die reellen Punkte P_n überhaupt zur Hälfte auf dem Ast und zur Hälfte auf dem Oval gelegen und die Formel stimmt auch hier mit der geometrischen Nothwendigkeit, dass mit Ausnahme von $l = 1$, das heisst der *h.* Polaren, die Zahl der Geraden mit drei reellen Punkten P_n stets gleich Null ist.

$\underline{n = 3^m}$. Die fraglichen Punkte P_n sind enthalten im Involutionselement der Zahl $3 \,.\, 3^m$, dessen Punkte sich in neun Gruppen G' derart spalten, dass die eine alle Wendepunkte und die Gesammtheit aller Untergruppen umfasst, welche zu den Divisoren von n gehören und keinen Punkt P_n enthält; indessen die acht anderen Gruppen nur aus Punkten P_n bestehen. Jede dieser letzteren Gruppen ist mit ihrer Tangentialgruppe identisch; sie liegen ferner acht Mal zu dreien unter sich und vier Mal paarweise mit derjenigen Gruppe perspectivisch, welche die Wendepunkte umfasst.

Belegt man wieder jeden Punkt $P_{3\mu}$ einer Untergruppe mit der Zahl 3^μ, so ist für die Anzahl der Punkte P_n zu setzen:

$$\mathsf{A}_{3m} = 9\,A_{3m} = 9\,(3^2 - 1)\,3^{2(m-1)},$$

welcher Ausdruck der Form nach mit demjenigen für die Punkte P_{2l} übereinstimmt; dagegen ist die geometrische Bedeutung der Factoren eine verschiedene; im vorigen Falle bedeutet der Factor 9, jetzt bedeutet der Factor $(3^2 - 1)$ die Anzahl der Gruppen.

Zum System gehören jetzt auch die Tangenten in den Punkten P_n, von denen jede noch einen Punkt P_n enthält und deren Anzahl wir mit $a(n, n)$ bezeichnen wollen; ferner möge die Grösse S_{3m} die folgende Bedeutung haben:

$$S_{3m} = \sum_{\mu=0}^{m-1} A_{3\mu} = 3^{2(m-1)},$$

dann findet die Geradenvertheilung nach folgenden Anzahlen statt:

$$\text{für } \mu < m \text{ ist } a(3^\mu, n, n) = \frac{\mathsf{A}_{3m}}{2} \cdot 9 A_{3\mu}.$$

$$\text{für } \mu = m \text{ ist } a(n, n, n) = \frac{\mathsf{A}_{3m}}{6} (9 A_{3m} - 9 S_{3m} - 3)$$

$$a(n, n) = \mathsf{A}_{3m}.$$

Beispielsweise sei $m = 1$. Dann ist $\mathsf{A}_1 = 9$ und $\mathsf{A}_3 = 72$. Zum System gehören:

324 Gerade, welche nebst zwei Punkten P_3 noch einen Wendepunkt enthalten,
720 " " " " " P_3 " " Punkt P_3 "
72 Tangenten.

Jede der in Betracht kommenden acht Gruppen G' besteht aus drei geschlossenen Tangentendreiseiten, welche der C_3 auf- und umgeschrieben, und von denen zwei reell sind, welche bezüglich jedes der drei reellen Wendepunkte zu einander prospectivisch liegen. Diese acht Gruppen G' werden durch diejenige der Wendepunkte als dritte Schnittpunktsgruppe in vier Paare geordnet, welche den vier syzygetischen Dreiecken in der Weise zugewiesen sind, dass je ihre sechs Tangentendreiseite drei Mal paarweise perspectivisch sind für die auf den drei Seiten des entsprechenden syzygetischen Dreiecks liegenden Wendepunkte.

Die sechs Ecken zweier derartig perspectivischen Dreiecke sind also jedes Mal sechs Punkte eines Kegelschnittes K, deren Anzahl im Ganzen sich auf 36 beläuft und von denen drei durch jeden Punkt P_3 gehen.

Diejenigen neun Kegelschnitte, die zum nämlichen syzygetischen Dreieck gehören, gehen zu drei und drei durch je zwei Ecken H desselben und haben in diesen zwei Seiten h desselben zu gemeinschaftlichen Tangenten. Es stehen somit in jedem Eckenpaar H eines syzygetischen Dreiecks zwölf Kegelschnitte K unter sich in doppelter Berührung.

Projicirt man also insbesondere die Curve dritter Ordnung so, dass die drei reellen Wendepunkte unendlich fern und mit dem Kreispunktepaar äquianharmonisch liegen, so werden die Kreispunkte selbst ein Punktepaar H und die durch sie gehenden zwölf Kegelschnitte gehen über in ein System von zwölf concentrischen Kreisen. Die Wendepunkte P_1

sind drei Richtungen von je 120^0 Unterschied und die Ecken P_3 der zwei reellen geschlossenen Tangentendreiseite werden gebildet von zwei regulären Dreiecken eines Kreises K, welche für jede Richtung P_1 zu einander perspectivisch liegen.

Fig. 4 giebt die Darstellung. Da die Festsetzung der Tangente in irgend einem der sechs Punkte P_3 auf zwei Arten stattfinden kann, so giebt es im Allgemeinen zwei verschiedene Curven C_3 durch das nämliche Sechseck der P_3, von denen je nach der Lage desselben entweder beide eintheilig sind, oder die eine eintheilig, die andere zweitheilig ist.

Man erhält die reellen Punkte P_{3m}, wenn man $\mathsf{A}^r{}_{3\mu} = 2 \,.\, 3^\mu$ setzt, oder überall das Quadrat von 3 durch 3 selbst ersetzt; wodurch die Formeln die Geraden zwischen den reellen Punkten P_{3m} ergeben. Es hätte beispielsweise keine Schwierigkeit eine Curve C_3 zu zeichnen, welche zwei geschlossene Tangentenneuseiten zur Anschauung bringt, deren Ecken aus Punkten P_9 gebildet werden. Diese Punkte vertheilen sich zu sechs auf drei concentrische Kreise; sie liegen paarweise auf 27 Geraden durch die reellen Wendepunkte, auf 54 Geraden durch die reellen Punkte P_3 und in 18 Geraden zu dreien.

Wir werden bei späterer Gelegenheit auf diese Polygone zurückkommen.

4.

$n = 2^l \,.\, 3^m$. Zunächst combiniren wir die beiden betrachteten Fälle. Diese Punkte P_n werden folgendermassen erhalten: Jeden Wendepunkt denken wir ergänzt zu einem Element der Zahl 2^l und jeden Punkt $P_{2\lambda}$ mit der Zahl 2λ belegt. Sodann ergänze man die Wendepunkte insgesammt zum Element der Zahl 3^m und belege desgleichen die Punkte $P_{3\mu}$ mit den Zahlen 3^μ, so dass wir abkürzend von Punkten 2λ und 3^μ reden können.

Verbindet man jetzt jeden Punkt 2^l mit jedem Punkt 3^m, so ist der dritte Schnittpunkt nothwendig ein Punkt P_n, weil er zum Element der Zahl n gehört und nicht einer Partialgruppe angehören kann. Weil es aber blos

$$\mathsf{A}_n = 9(2^l - 1)(3^m - 1)2^{2(l-1}.3^{2(m-1)}$$

Punkte P_n giebt, so wird jeder Punkt P_n dabei neun Mal erhalten. Verbindet man nun zwei Punkte, welche in dieser Weise die Zahlen

$$z_1 = 2^\lambda \,.\, 3^\mu \quad \text{und} \quad z_2 = 2^{\lambda'} 3^{\mu'}$$

tragen, so wird dem dritten Schnittpunkt eine Zahl beizulegen sein, die gleich ist dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen von z_1 und z_2, weil sonst durch Linealconstruction ein Aufsteigen zu Involutionselementen möglich wäre, wo im Allgemeinen Zirkelconstructionen nicht mehr ausreichen. Nur wenn $\lambda = \lambda'$ und $\mu > \mu'$ ist, kann der dritte Schnittpunkt jeder Punkt sein, der eine Zahl $2^\xi \,.\, 3^\mu$ trägt, wo ξ einen der Zahlwerthe von 0 bis λ haben kann. Analog wird für $\mu = \mu'$ und $\lambda > \lambda'$ der dritte Schnittpunkt eine Zahl $2^\lambda . 3^\eta$ tragen, wo η jede ganze Zahl von 0 bis μ

sein kann. Endlich ist evident, dass für $\lambda = \lambda'$ und $\mu = \mu'$ der dritte Schnittpunkt mit $2^{\xi}.3^{\eta}$ zu bezeichnen ist, wo ξ und η beide zwischen den angegebenen Grenzen liegen.

Erinnert man sich noch, dass die Punkte P_n durch l maliges Tangentenlegen aus den Punkten P_{3m} erhalten werden, so findet die Vertheilung des Geradensystemes nach folgenden Zahlwerthen statt:

$$\text{für } \lambda < l,\ \mu < m \text{ ist } a(2^{\lambda}.3^{\mu},\ n,\ n) = \frac{\mathsf{A}_n}{2} \cdot 9 A_{2^{\lambda}.3^{\mu}},$$

$$\text{für } \lambda = l,\ \mu < m \text{ ist } a(2^{l}.3^{\mu},\ n,\ n) = \frac{\mathsf{A}_n}{2}\, 9(A_{2l} - S_{2l}) A_{3m},$$

$$\text{für } \lambda < l-1,\ \mu = m \text{ ist } a(2^{\lambda}.3^{m},\ n,\ n) = \frac{\mathsf{A}_n}{2}\, 9(A_{3m} - S_{3m}) A_{2l},$$

$$\text{für } \lambda = l-1,\ \mu = m \text{ ist } a(2^{l-1}.3^{m},\ n,\ n) = \frac{\mathsf{A}_n}{2} [9(A_{3m} - S_{3m})\, A_{2l-1} - 1],$$

$$\text{für } \lambda = l,\ \mu = m \text{ ist } a(n,\ n,\ n) = \frac{\mathsf{A}_n}{6}\, 9(A_{2l} - S_{2l})(A_{3m} - S_{3m}).$$

Wir geben zur Controle eine directe Abzählung der Geraden mit drei Punkten P_n:

Ist P_n' ein bestimmter Punkt unter den Punkten P_n und d ein Divisor von n, so ist der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie von P_n' mit P_d entweder wieder ein Punkt P_n oder ein Punkt $P_{d'}$, wo d' wieder ein Divisor von n, der aber von d verschieden sein muss. Die auf diese Weise erhaltenen Punkte, die zu allen Divisoren d (incl. 1 und excl. n) gehören, denke man sich ausgesondert. Dann enthält die Verbindungslinie des Punktes P_n' mit den noch übrigbleibenden Punkten P_n sicher noch einen dritten Punkt P_n.

Wir haben nun die Fälle zu unterscheiden, wo in $d = 2^{\lambda}.3^{\mu}$ zugleich $\lambda < l$ und $\mu < m$, oder $\lambda = l$ und $\mu < m$, oder endlich $\lambda < l$ und $\mu = m$ ist.

α) Ist d eine Zahl der ersten Art, so ist alle Mal der dritte Schnittpunkt ein Punkt P_n. Die Zahl der so erhaltenen Punkte ist:

$$\sum_{\lambda=0}^{l-1} \sum_{\mu=0}^{m-1} 9 A_{2\lambda} A_{3\mu} = 9 S_{2l} \,.\, S_{3m}.$$

β) Ist d von der Form $2^{l}.3^{\mu}$, so ist der dritte Schnittpunkt ein Punkt mit der Zahl $2^{\lambda}.3^{m}$, wo für λ alle ganzzahligen Werthe von 0 bis l zu setzen sind. Die Zahl derjenigen Geraden, die auf einen Punkt P_n führen, ist also:

$$(A_{2l} - S_{2l}) \sum_{\mu=0}^{m-1} 9 A_{3\mu} = 9(A_{2l} - S_{2l}) S_{3m}.$$

Unter diesen Geraden befindet sich auch die Tangente des Punktes P_n'; dieser befindet sich somit schon unter den ausgesonderten.

γ) Ist d von der Form $2^\lambda . 3^m$, so trägt der letzte Schnittpunkt die Zahl $2^l . 3^\mu$, wo μ alle Werthe von 0 bis m annehmen kann. Somit ist die Zahl der nach einem Punkte P_n gehenden Geraden:

$$9(A_{3m} - S_{3m}) \sum_{\lambda=0}^{l-1} A_{2\lambda} = 9(A_{3m} - S_{3m}) S_{2^l}.$$

Bezeichnet also A_n' die Anzahl der auf diese Weise ausgeschlossenen Punkte P_n, also

$$\mathsf{A}_n' = 9 A_{2l} S_{3m} + 9 A_{3m} S_{2l} - 9 S_{2l} S_{3m},$$

so ergiebt sich als Anzahl der Geraden mit drei Punkten P_n:

$$a(n, n, n) = \frac{\mathsf{A}_n}{6} (\mathsf{A}_n - \mathsf{A}_n') = \frac{\mathsf{A}_n}{6} 9 (A_{2l} - S_{2l})(A_{3m} - S_{3m}).$$

Setzt man im Weiteren

$$A^r{}_{2\lambda} = 2^{\lambda-1} \text{ und } A^r{}_{3\mu} = 2 . 3^{\mu-1},$$

so erhält man die reellen Punkte P_n und ihre Verbindungslinien für die eintheilige Curve C_3, und man bemerkt, dass es keine Geraden mit drei reellen Punkten P_n giebt.

Im Falle der zweitheiligen Curve dagegen giebt es Gerade mit drei reellen Punkten P_n für $l = 1$ und jeden Werth von m, da sowohl der Factor $(A^r{}_{2l} - S^r{}_{2l})$ als auch $(A^r{}_{3m} - S^r{}_{3m})$ von Null verschieden sind. Ist aber $l > 1$, so verschwindet auch hier der erste der genannten Factoren und damit die Zahl der Geraden mit drei reellen Punkten P_n.

Speciell möge gesetzt werden:

$$A_2{}^r = 1, \quad A_3{}^r = 2, \text{ also } \mathsf{A}_2{}^r = 3, \quad \mathsf{A}_3{}^r = 6,$$

so folgt:

$$a^r(1, 6, 6) = 9; \; a^r(2, 6, 6) = 0; \; a^r(3, 6, 6) = 6, \; a^r(6, 6, 6) = 0$$

für die sechs reellen Punkte P_6 der eintheiligen C_3 und man erkennt in der That in Fig. 3, wo die Punkte P_6 hinzuconstruirt sind, dass keine Gerade durch zwei Punkte P_6 einen Punkt P_2 und ebenso keine Gerade drei Punkte P_6 enthält; durch jeden Wendepunkt gehen dagegen drei und durch jeden Punkt P_3 geht eine Gerade mit zwei Punkten P_6.

Für die zweitheilige Curve ist zu setzen:

$$A_2{}^r = 3, \quad \mathsf{A}_2{}^r = 9, \quad A_3{}^r = 2, \quad \mathsf{A}_3{}^r = 6,$$

wodurch man folgende Vertheilung der Geraden erhält:

$$a^r(1, 6, 6) = 27; \; a^r(2, 6, 6) = 54; \; a^r(3, 6, 6) = 18; \; a^r(6, 6, 6) = 18.$$

5.

$\underline{n = p^a.}$ Sei n eine beliebige von 2 und 3 verschiedene Primzahl. Alsdann ergänze man zunächst einen Wendepunkt zum Involutionselement der Zahl n, wodurch man eine Gruppe G mit

$$A_{p^a} = (p^2 - 1) p^{2(a-1)}$$

Punkten P_n erhält.

Ebenso ist
$$A_{p^\alpha} = (p^2 - 1)p^{2(\alpha-1)}$$
die Anzahl der Punkte P_{p^α}. Dann bedeutet wieder
$$S_{p^a} = \sum_{\alpha=0}^{a-1} A_{p^\alpha} = p^{2(a-1)}$$
die Anzahl derjenigen Punkte der Gruppe, welche nicht Punkte P_n sind. Nach diesen Festsetzungen folgt für die Geradenanordnung:
$$\text{für } \alpha < a \text{ ist } a(p^\alpha,\ n,\ n) = \frac{A_{p^a}}{2} A_{p^\alpha},$$
$$\text{für } \alpha = a \text{ ist } a(n,\ n,\ n) = \frac{A_{p^a}}{6}(A_{p^a} - S_{p^a} - 3),$$
$$a(n,\ n) = A_{p^a}.$$

Ersetzt man den ersten Factor A_{p^a} durch $9 A_{p^a} = \mathsf{A}_{p^a}$, so erhält man die Vertheilung für sämmtliche Punkte P_n auf der Curve.

Will man blos die reellen Punkte P_n berücksichtigen, so ist zu setzen:
$$A^r{}_{p^a} = (p-1)p^{a-1}, \text{ also } \mathsf{A}^r{}_{p^a} = 3(p-1)p^{a-1}.$$
Insbesondere wollen wir uns noch mit dem Falle $n = 7$ beschäftigen, der sich einfach und übersichtlich construiren lässt (Fig. 5).

Die Construction bezieht sich auf die eintheilige Curve C_3, wie im vorhergehenden Fall. Seien p_1 wieder die h. Polaren der Wendepunkte P_1, so theile man von diesen Richtungen aus einen beliebigen Kreis des Systems K in 18 gleiche Theile. Die den h. Polaren zunächst liegenden symmetrischen Theilpunkte nehme man, sodann als sechs Punkte der Curve. Dieselben bilden die Ecken von zwei regulären Dreiecken, deren Seiten sich auf den h. Polaren als Perspectivachsen paarweise begegnen. Der Kreis durch die drei zunächst am Mittelpunkte H_0 gelegenen dieser Schnittpunkte begegnet den Seiten der zwei genannten Dreiecke in sechs neuen Punkten der C_3. Dieses neue Sechseck der Curve zerfällt ebenfalls in zwei reguläre Dreiecke, dessen Seiten sich wieder auf den h. Polaren begegnen. Man lege jetzt durch die drei dem Punkte H_0 entfernter liegenden dieser Schnittpunkte den dritten Kreis, so begegnet dieser den beiden vorigen Dreiseiten in Punkten eines dritten Sechseckes der nämlichen Curve C_3.

Aus der Construction lässt sich unmittelbar beweisen, dass man mit den Tangenten der Punkte des ersten Sechsecks zu denen des zweiten, durch seine Tangenten zu Punkten des dritten Sechsecks und durch die Tangenten dieses dritten zum ersten Sechseck zurückkehrt.

Von den drei Sechsecken ist also jedes das Tangentialsechseck des vorhergehenden; die Tangenten ihrer Ecken setzen sich zu drei geschlossenen Tangentensechsseiten zusammen, die der Curve zugleich auf- und umgeschrieben sind. Die Ecken dieser Polygone sind die Punkte P_7.

Die vorliegende Figur ist insofern specieller Natur, als der Mittelpunkt H_0 der drei concentrischen Kreise K je mit drei Punkten P_7 in gerader Linie liegt, was im Allgemeinen nicht stattzufinden braucht.

Setzt man
$$A_7^r = 6, \quad \mathsf{A}_7^r = 18, \quad \mathsf{A}_1^r = 3,$$
so findet man für das Geradensystem sämmtlicher 18 reellen Punkte P_7:
$$a^r(1, 7, 7) = 27, \quad a^r(7, 7, 7) = 36, \quad a^r(7, 7) = 18$$
in Uebereinstimmung mit dem Constructionsergebniss.

6.

$n = p^a . q^b$. Seien p und q zwei von 2 und 3 verschiedene Primzahlen. Ist dann
$$S_{p^a} = \sum_{\alpha=0}^{a-1} A_{p^\alpha} = p^{2(a-1)} \text{ und } S_{q^b} = \sum_{\beta=0}^{b-1} A_{q^\beta} = q^{2(b-1)},$$
so findet man durch Abzählen für die Punkte einer Gruppe G:

für $\alpha < a$, $\beta < b$ ist $a(p^\alpha q^\beta, n, n) = \frac{A_n}{2} A_{p^\alpha q^\beta}$,

für $\alpha = a$, $\beta < b$ ist $a(p^a q^\beta, n, n) = \frac{A_n}{2} (A_{p^a} - S_{p^a}) A_{q^\beta}$,

für $\alpha < a$, $\beta = b$ ist $a(p^\alpha q^b, n, n) = \frac{A_n}{2} (A_{q^b} - S_{q^b}) A_{p^\alpha}$,

für $\alpha = a$, $\beta = b$ ist $a(n, n, n) = \frac{A_n}{6} [(A_{p^a} - S_{p^a})(A_{q^b} - S_{q^b}) - 3]$,
$$a(n, n) = A_n.$$

Ersetzt man A_n durch $\mathsf{A}_n = 9 A_n$ und überall entweder die Grösse A_{p^α} durch $\mathsf{A}_{p^\alpha} = 9 A_{p^\alpha}$ oder überall A_{q^β} durch $\mathsf{A}_{q^\beta} = 9 A_{q^\beta}$, aber nicht beides gleichzeitig, so gelten die obigen Formeln auch für das Gesammtsystem der Punkte P_n.

Also beispielsweise für sämmtliche Punkte P_{pq} wäre:
$$a(1, pq, pq) = \frac{\mathsf{A}_{pq}}{2} 9 A_1,$$
$$a(p, pq, pq) = \frac{\mathsf{A}_{pq}}{2} 9(A_p - A_1),$$
$$a(q, pq, pq) = \frac{\mathsf{A}_{pq}}{2} 9(A_q - A_1),$$
$$a(pq, pq, pq) = \frac{\mathsf{A}_{pq}}{6} [9(A_p - A_1)(A_q - A_1) - 3],$$
$$a(pq, pq) = \mathsf{A}_{pq}.$$

7. Der allgemeine Fall.

Die bis jetzt betrachteten Fälle lassen das Bildungsgesetz für die Vertheilung der Geraden des Systems für den allgemeinen Fall hinlänglich erkennen. Wenn es blos auf die Abzählung der Geraden des Systems der Punkte P_n, nicht aber auf die Gesammtconfiguration ankommt, so sind wesentlich blos die zwei Fälle auseinander zu halten, ob n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Es sind dann sowohl die Formeln für die Vertheilung der Geraden theilweise von einander verschieden, als auch zeigt die Lage der Punkte eine Abweichung, insofern im ersten Falle keine geschlossenen Tangentenpolygone auftreten können, während dies für ungerades n stets der Fall ist. Das Vorhandensein des Factors 3 ändert nichts an den Formeln der Geradenvertheilung, wohl aber zeigt die Punktconfiguration ein anderes Bild und spielen namentlich die geschlossenen Tangentenpolygone eine besondere Rolle.

a) Enthält n den Factor 3 nicht, so sind die A_n Punkte P_n enthalten in neun Gruppen G von je n^2 Punkten, von denen jede einen Wendepunkt und Punkte P_d zu sämmtlichen Divisoren d von n enthält. Jede Gruppe G ist zugleich ihre eigene Tangentialgruppe; sie liegen wie die Wendepunkte zwölf Mal unter sich zu dreien perspectivisch.

b) Enthält n den Factor 3 in der Potenz m, so zerfallen die $(3n)^2$ Punkte, unter denen sich die P_n finden, wieder in neun Gruppen G', von denen aber jetzt die eine alle Wendepunkte und alle zu den verschiedenen Divisoren d von n gehörenden Punkte P_d enthält, wo in d der Factor 3 höchstens bis zur Potenz $m-1$ auftritt, indessen die Exponenten der übrigen Primfactoren die oberen Grenzen erreichen können. Die acht anderen Gruppen G' enthalten die Punkte P_n, nebst diesen aber alle Punkte $P_{d'}$, wo in d' der Factor 3 nur in der Potenz m erscheint, dagegen von den Exponenten der übrigen Primfactoren wenigstens einer die obere Grenze nicht erreicht.

Trotzdem also hier eine Absonderung des Factors 9 nicht unmittelbar geometrisch begründet ist, wie im Falle a), so liegt es doch im Interesse der Uebereinstimmung der Formeln für beide Fälle a) und b) die Grösse

$$\mathsf{A}_{3m} = (3^2-1)\,3^{2m}$$

in der Form

$$9\,A_{3m} \quad \text{also} \quad A_{3m} = (3^2-1)\,3^{2(m-1)}$$

und folglich:

$$S_{3m} = \sum_{\mu=0}^{m-1} A_{3m} = 3^{2(m-1)},$$

wie bereits früher geschehen, zu setzen. Alsdann haben wir auf den Factor 3 keine Rücksicht mehr zu nehmen.

Wir setzen also im

I. Fall:
$$n = p^a q^b r^c \ldots$$

Nach dem Vorausgegangenen ist dann:

$$A_{p^a} = (p^2-1)p^{2(a-1)} \qquad S_{p^a} = \sum_{\alpha=0}^{a-1} A_{p^\alpha} = p^{2(a-1)} \qquad \text{wo } A_{p^0}=1,$$

$$A_{q^b} = (q^2-1)\,q^{2(b-1)} \qquad S_{q^b} = \sum_{\beta=0}^{b-1} A_{q^\beta} = q^{2(b-1)} \qquad ,, \ A_{q^0}=1,$$

$$A_{r^c} = (r^2-1)\,r^{2(c-1)} \qquad S_{r^c} = \sum_{\gamma=0}^{c-1} A_{r^\gamma} = r^{2(c-1)} \qquad ,, \ A_{r^0}=1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Anzahl der P_n:

$$\mathsf{A}_n = 9\,A_{p^a}\,A_{q^b}\,A_{r^c}\ldots = 9(p^2-1)(q^2-1)(r^2-1)\ldots p^{2(a-1)}q^{2(b-1)}r^{2(c-1)}\ldots$$

Verbindet man die Punkte P_n und nur diese unter sich, so findet die Vertheilung dieser Geraden in folgender Weise statt, wenn die früher definirte Bezeichungsweise festgehalten wird:

1) für $\alpha < a$, $\beta < b$, $\gamma < c$ u. s. w. ist

$$a(p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots,\ n,\ n) = \frac{\mathsf{A}_n}{2}\,9\,A_{p^\alpha}\,A_{q^\beta}\,.\,A_{r^\gamma}\ldots,$$

das heisst also, die Punkte P_n liegen paarweise in Strahlen durch jeden Punkt $P_{p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots}$, für welchen die oberen Grenzen a, b, $c\ldots$ von den Exponenten nicht erreicht werden.

2) Ist jedoch eine der Zahlen α, β, $\gamma\ldots$ gleich der oberen Grenze a, b, $c\ldots$ resp. so ersetzen sich der Reihe nach die Grössen

$$A_{p^\alpha},\ A_{q^\beta},\ A_{r^\gamma}\ldots$$

durch die Differenzen

$$(A_{p^a}-S_{p^a}),\ (A_{q^b}-S_{q^b}),\ (A_{r^c}-S_{r^c})\ldots$$

resp. und analog, wenn zwei oder mehrere Exponenten α, β, $\gamma\ldots$ die obere Grenze erreichen. Demnach ist also:

für $\alpha = a$, $\beta < b$, $\gamma < c\ldots$ u. s. w.,

$$a(p^a q^\beta r^\gamma \ldots,\ n,\ n) = \frac{\mathsf{A}_n}{2}\,9\,(A_{p^a}-S_{p^a})\,A_{q^\beta}A_{r^\gamma}\ldots,$$

das heisst, durch jeden Punkt mit der Zahl $p^a.q^\beta.r^\gamma\ldots$ gehen

$$\frac{9}{2}(A_{p^a}-S_{p^a})A_{q^b}\,A_{r^c}\ldots$$

Gerade, welche ein Punktepaar P_n enthalten. Ebenso ist

3) für $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma < c$ u. s. w.

$$a(p^a q^b r^\gamma \ldots,\ n,\ n) = \frac{\mathsf{A}_n}{2}\cdot 9(A_{p^a}-S_{p^a})(A_{q^b}-S_{q^b})A_{r^\gamma}\ldots$$

das heisst, durch jeden Punkt $p^a q^b r^\gamma \ldots$ gehen

$$\frac{9}{2}(A_{p^a}-S_{p^a})(A_{q^b}-S_{q^b})A_{r^c}\dots$$

Geraden, die zugleich zwei Punkte P_n enthalten. Endlich wird

4) die Zahl der Geraden mit drei Punkten P_n enthalten, für sämmtliche Exponenten gleich der oberen Grenze, das heisst:

für $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c\dots$ u. s. w. ist

$$a(n,\ n,\ n) = \frac{\mathsf{A}_n}{6}[9(A_{p^a}-S_{p^a})(A_{q^b}-S_{q^b})(A_{r^c}-S_{r^c})\dots-3],$$

welche Geraden dreifach zu zählen sind und wobei erinnert werden mag bezüglich des Subtrahenden (-3), dass jeder Punkt P_n nicht mit sich selbst, und nicht mit seinen beiden Nachbarn im Tangentenpolygon verbunden werden darf. Vielmehr gehören als einfach zählende Geraden zum System:

5) Die Seiten einer später zu bestimmenden Anzahl gewisser Tangentenpolygone in der Anzahl $\quad a(n,\ n) = \mathsf{A}_n.$

Die vorstehenden Formeln ergeben die reellen Punkte P_n und ihre Verbindungsgeraden, sobald überall der Factor 9 durch 3 und überhaupt die Quadrate der Primfactoren durch die einfachen Potenzen $p,\ q,\ r\dots$ ersetzt werden. Von diesen reellen Geraden sind natürlich die überhaupt reellen Geraden wohl zu unterscheiden. Die eintheilige und zweitheilige Curve zeigen die nämlichen Realitätsverhältnisse; da ferner von den Factoren der Anzahl $a(n,\ n,\ n)$ keiner verschwindet, so giebt es in diesem Falle stets eine sofort angebbare Zahl von Geraden, welche drei reelle Punkte P_n enthalten.

II. Fall. $\qquad n = 2^l p^a q^b r^c\dots$

Nach dem Vorangegangenen ist ebenfalls zu setzen:

$$A_{2^l} = (2^2-1)\,2^{2(l-1)} \quad \text{und} \quad S_{2^l} = \sum_{\lambda=0}^{l-1} A_{2^\lambda} = 2^{2(l-1)}.$$

Die Anzahl der Punkte P_n ist dann

$$\mathsf{A}_n = 9\,A_{2^l}\,.\,A_{p^a}\,.\,A_{q^b}\,.\,A_{r^r}\dots$$

Die Punkte P_n entstehen durch $l$maliges Tangentenlegen aus den Punkten P_n von Fall I. Geschlossene Polygone aus Tangenten giebt es keine mehr, vielmehr schneiden sich die Tangenten der Punkte P_n zu vier in den Punkten $2^{l-1}.\,p^a\,.\,q^b\,.\,r^c\dots$ Diese Punkte machen denn auch für die Vertheilung der Geraden eine in den Formeln erkennbare Ausnahme.

Ist, wie bis anhin, Gleichheit ausgeschlossen, so ist:

1) für $\lambda < l$, $\alpha < a$, $\beta < b$, $\gamma < c\dots$ u. s. f.

$$a(2^\lambda p^\alpha q^\beta r^\delta\dots,\ n,\ n) = \frac{\mathsf{A}_n}{2}\,9\,A_{2^\lambda}A_{p^\alpha}A_{q^\beta}\,A_{r^\gamma}\dots$$

das heisst, die Punkte P_n liegen wiederum gleichförmig in Paaren auf

Strahlen durch alle Punkte $2^\lambda p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$, für welche keiner der Exponenten die obere Grenze erreicht.

2) Ist $\lambda = l-1$ und erreichen zugleich einige der Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die obere Grenze $a, b, c \ldots$ resp. so treten für die Grössen A_{p^α}, A_{q^β}, $A_{r^\gamma} \ldots$ wiederum die Differenzen $(A_{p^a} - S_{p^a})$, $(A_{q^b} - S_{q^b})$, $(A_{r^c} - S_{r^c}) \ldots$ resp. ein. Man hat daher etwa für

$$\lambda = l-1,\quad \alpha = a,\quad \beta = b,\quad \gamma < c \ldots \text{ u. s. w.},$$

$$a(2^{l-1} p^a q^b r^\gamma \ldots, n, n) = \frac{\mathsf{A}_n}{2}\, 9\, A_{2l-1} (A_{p^a} - S_{p^a})(A_{q^b} - S_{q^b}) A_{r^\gamma} \ldots,$$

so dass durch jeden Punkt $2^{l-1}. p^a q^b r^\gamma \ldots$

$$\frac{9}{2} A_{2l} (A_{p^a} - S_{p^a})(A_{q^b} - S_{q^b}) A_{r^c} \ldots$$

Geraden des Systems hindurchgehen.

3) Ist $\lambda = l-1$ und sind zugleich sämmtliche Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ gleich der oberen Grenze, das heisst, ist

$$\lambda = l-1,\quad \alpha = a,\quad \beta = b,\quad \gamma = c \ldots \text{ u. s. w., so ist:}$$

$$a(2^{l-1} p^a q^b r^c \ldots, n, n) = \frac{\mathsf{A}_n}{2} [9 A_2{}^{l-1} (A_{p^a} - S_{p^a})(A_{q^b} - S_{q^b})(A_{r^c} - S_{r^c}) \ldots - 1].$$

Somit gehen durch jeden Punkt mit der Zahl $2^{l-1} p^a q^b r^c \ldots$

$$\frac{1}{2} [9 A_{2l} (A_{p^a} - S_{p^a})(A_{q^b} - S_{q^b})(A_{r^c} - S_{r^c}) \ldots - 4]$$

der fraglichen Geraden.

4) Ist der Weitere $\lambda = l$ und erreicht keiner der Exponenten den grössten Werth, das heisst, ist

$$\lambda = l,\quad \alpha < a,\quad \beta < b,\quad \gamma < c \ldots \text{ u. s. w., so ist:}$$

$$a(2^l . p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots, n, n) = \frac{\mathsf{A}_n}{2}\, 9\, (A_{2l} - S_{2l}) A_{p^\alpha} A_{q^\beta} A_{r^\gamma} \ldots$$

so dass durch jeden Punkt $2^l p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$

$$\frac{9}{2} (A_{2l} - S_{2l}) A_{p^a} A_{q^b} A_{r^c} \ldots$$

Geraden vorliegender Art gehen.

5) Erreichen dagegen sämmtliche Exponenten die obere Grenze, das heisst, ist:

$$\lambda = l,\quad \alpha = a,\quad \beta = b,\quad \gamma = c \ldots, \text{ so ist:}$$

$$a(n, n, n) = \frac{\mathsf{A}_n}{6}\, 9\, (A_{2l} - S_{2l})(A_{p^a} - S_{p^a})(A_{q^b} - S_{q^b})(A_{r^c} - S_{r^c}) \ldots$$

Damit ist die Gesammtheit der Geraden des Systems der Punkte P_n erschöpft, die Tangenten in diesen Punkten gehören nicht mehr dem System an. Bezüglich der Realität sind in diesem Falle die beiden Curvenarten auseinander zu halten.

a) Die eintheilige Curve. Setzt man in den vorangehenden Formeln an Stelle des Factors 9 die Zahl 3, ferner für alle Quadrate der Primfactoren die einfachen Primzahlen, also:

$A_1^r = 1$, $A^r_{2l} = (2-1)2^{l-1}$, $A^r_{p^a} = (p-1)p^{a-1}$, $A^r_{p^b} = (q-1)q^{b-1}$ u. s. f.,

so ergeben die Formeln die Geraden des Systems durch die reellen Punkte P_n.

Da in diesem Falle der Factor

$$A^r_{2l} - S^r_{2l} = 2^{l-1} - \left(1 + \sum_{\lambda=1}^{l-1} 2^{\lambda-1}\right) = 0$$

ist, so treten in keinem Falle Gerade mit drei reellen Punkten P_n auf.

b) Zweitheilige Curve. Hier ist mit Ausnahme des Falles $l=1$ zu setzen:

$$A^r_{2l} = 2^l,$$

die übrigen Grössen, wie vorhin. Auch hier ergiebt sich für $l > 1$, dass die Anzahl der Geraden mit drei reellen Punkten P_n verschwindet. Für $l = 1$ dagegen, also mit $A_2^r = 3$ ist $a_3(n, n, n)$ von Null verschieden, und es gehören dann zu allen Werthen von a, b, c... Gerade mit drei reellen Punkten P_n.

So findet für $n = 10$ beispielsweise folgendes Verhalten statt:

$$A_2^r = 3, \quad A_5^r = 4.$$

Von den Verbindungslinien der 36 reellen Punkte P_{10} gehen 54 Geraden durch die Wendepunkte P_1, 108 Geraden durch die Punkte P_2, 144 Geraden durch die Punkte P_5, 108 Gerade enthalten drei Punkte P_{10}.

B. Rationale Curven dritter Ordnung.

8.

a) Die Curve mit isolirtem Doppelpunkt. Fig. 3 zeigt die Möglichkeit, sofort zur Curve C_3 mit isolirtem Doppelpunkt überzugehen. Diese ist vollständig bestimmt durch den Doppelpunkt H_0, die drei Wendepunkte P_1 und die drei reellen Punkte P_2. Bezeichnet man mit a den Radius des dreifach berührenden Kreises durch die Punkte P_2, so beschreibe man jetzt den Kreis K vom Radius $2a$; dieser begegnet dann der C_3 in sechs Punkten, die durch Dreitheilung des Sextanten erhalten werden und die Punkte P_6 sind. Diese sechs Punkte bestimmen dann die Seiten zweier regulärer Dreiecke, welche der C_3 in den Punkten P_3 begegnen, und aus H_0 projicirt in die Halbirungspunkte der vorigen Theilpunkte dieses Kreises K fallen.

Projicirt man also die Punkte P_1, P_2, P_3, P_6 aus dem Doppelpunkt H_0 auf den Kreis K, so fallen sie sämmtlich in die Theilpunkte einer 36-Theilung dieses Kreises, welche von den Projectionen der Punkte P_1 ausgeht.

Diese Verhältnisse sind nur die Modification des allgemeinen Falles für $n=6$. Im Allgemeinen ist die Ordnung der Involution des $2n$-Schlusses auf der rationalen C_3 gleich n. Projicirt man diese Punktinvolution aus dem Doppelpunkt H_0, so erhält man eine der besonderen von Moebius zuerst betrachteten Strahleninvolution n^{ter} Ordnung, bei der die Tangenten im Doppelpunkt die sämmtlichen $2(n-1)$ Doppelstrahlen in sich vereinigen.

Dieses Tangentenpaar im Doppelpunkt geht aber bei der gewählten Darstellung durch die Kreispunkte und deshalb theilen die n Strahlen jedes Elementes der Involution die vier rechten Winkel am Doppelpunkt in n gleiche Theile.

Wird also diese Theilung von den Strahlen nach den Wendepunkten P_1 aus vollzogen, so ergeben die Schnitte dieser $3n$ Strahlen die drei fraglichen Involutionselemente, oder auch das Involutionselement der Zahl $3n$ auf der Curve, also die Punkte P_n nebst allen Punkten P_d, die zu sämmtlichen Divisoren der Zahl n gehören.

Das Problem der Construction der Punkte P_n ist also in diesem Falle vollständig identisch mit dem Problem der Kreistheilung.

Eine Eintheilung des Kreises von einem Wendepunkt P_1 aus in $6n$ gleiche Theile liefert die Punkte P_n.

Für $n=2^l.3^m.p^a.q^b\ldots$ ist also die Anzahl derselben:

$$A_n=3\varphi(n)=3(2-1)(3-1)(p-1)(q-1)\ldots 2^{l-1}.3^{m-1}p^{a-1}q^{b-1}\ldots$$

Alle Punkte P_n sind reell; die Figur ist gewissermassen die Darstellung der reellen Punkte P_n des allgemeinen Falles unter besonderen Voraussetzungen; daher bleiben auch die Formeln des allgemeinen Falles, wie sie für die reellen Punkte aufgestellt sind, für diesen speciellen Fall giltig.

b) Die Curve mit Knotenpunkt ergiebt eine Moebius'sche Involution mit reellen Doppelstrahlen; von jedem Element der Involution n^{ter} Ordnung ist daher blos ein Strahl reell, sobald n ungerade. Dann also sind sämmtliche Punkte P_n imaginär. Dies ist auch der Fall, wenn n eine Potenz von 2, und nur im Falle $n=2$ selbst ist von den sechs Punkten P_2 ein einziger reell.

c) Die Curve mit Rückkehrpunkt. In diesem Falle existiren die Steiner'schen Involutionen nicht mehr auf der C_3; Wendepunkt und Rückkehrpunkt sind die einzigen uneigentlichen Punkte P_n, nämlich für algebraische Curven, die aus der $n$fachen Tangente dieser Punkte bestehen.

9. Geschlossene Tangentenpolygone.

a) Ist n eine Zahl von der Form $n=2^l.n'$, so werden die Punkte P_n erhalten durch $l$maliges Tangentenlegen aus den Punkten $P_{n'}$; in diesem Falle *können also die Punkte P_n keine Veranlassung zu geschlossenen* Tangentenpolygonen geben.

Ist dagegen $n = 3^m . p^a . q^b . r^c \ldots$, so ist, falls $m > 0$ jede der acht Hauptgruppen G' zugleich ihre Tangentialgruppe; im Falle $m = 0$ jede der neun Hauptgruppen G identisch mit ihrer Tangentialgruppe. In diesem Fall existiren also nothwendig geschlossene Tangentenpolygone, die der Curve zugleich ein- und umgeschrieben sind.

Befassen wir uns zunächst mit den reellen unter diesen Polygonen, so haben wir auf der rationalen Curve mit isolirten Doppelpunkt dieselben Verhältnisse, wie auf der allgemeinen Curve, welche sich nach den Sätzen der Herren Durège* und Küpper** folgendermassen aussprechen lassen:

Ist n ungerade und d irgend ein Divisor dieser Zahl, so geben die zugehörigen Punkte P_d geschlossene Polygone von s Seiten, wobei s die kleinste Lösung der Congruenz

$$(-2)^s \equiv 1 \, mod \, (3d),$$

speciell also die Punkte P_n führen zu Polygonen mit s_n Seiten, wenn s_n die kleinste Lösung der Congruenz

$$(-2)^{s_n} \equiv 1 \, mod \, (3n),$$

und zwar ist die Anzahl der reellen Polygone

$$a_n = \frac{A^r{}_n}{s_n}.$$

Da s_n stets ein Divisor von $\varphi(3n)$, so ist a_n stets eine ganze Zahl. So ergeben beispielsweise $n = 3$ geschlossene Dreiecke, $n = 5$ Vierecke, $n = 7$ Sechsecke, $n = 11$ Fünfecke, $n = 13$ Zwölfecke u. s. f., wobei aber die Fünfecke, Sechsecke etc., noch aus anderen Zahlen n erhalten werden können und somit verschiedene Arten geschlossener Polygone mit der nämlichen Seitenzahl existiren.

Ist speciell $n = 3^m$, so ist 3^m der kleinste Exponent für den

$$(-2)^{3^m} \equiv 1 \, mod \, (3 . 3^m),$$

folglich sind die Punkte P_{3^m} die Ecken von zwei geschlossenen Polygonen mit je 3^m Seiten und Ecken.

Um die Configuration an einem Beispiel zu erläutern, sei $n = 3.5.7$ gewählt. Theilt man also bei der rationalen Curve den Kreis von einer Richtung P_1 aus in $6n$ gleiche Theile und projicirt diese Theilpunkte aus dem Doppelpunkt H_0 auf die Curve, so erhält man:

$3A^r{}_1 = 3$ Punkte	P_1, d. h. die Wendepunkte:
$3A^r{}_3 = 6$ Punkte	P_3 welche die Ecken von zwei Dreiecken bilden,
$3A^r{}_5 = 12$,,	P_5 ,, ,, ,, ,, drei Vierecken „
$3A^r{}_7 = 18$,,	P_7 ,, ,, ,, ,, drei Sechsecken „

* Durège: „Ueber fortgesetztes Tangentenziehen etc." Mathem. Annalen Bd. 1 S. 509 flg.

** Küpper: „Ueber die Steiner'schen Polygone etc." Mathem. Annalen Bd. 24 S. 1 flg.

$3A^r_{3.5} =$ 24 Punkte	$P_{3.5}$	welche	die	Ecken	von	zwei Zwölfecken	bilden,
$3A^r_{3.7} =$ 36 „	$P_{3.7}$	„	„	„	„	sechs Sechsecken	„
$3A^r_{5.7} =$ 72 „	$P_{5.7}$	„	„	„	„	sechs Zwölfecken	„
$3A^r_{3.5.7} =$ 144 „	$P_{3.5.7}$	„	„	„	„	zwölf Zwölfecken	„

In dieser Weise können für jede gegebene Zahl n die in der Gesammtconfiguration auftretenden Polygone abgezählt werden.

b) Man kann aber auch umgekehrt nach der Anzahl und den verschiedenen Arten der Polygone mit vorgeschriebener Anzahl der Seiten fragen. Ist t die Anzahl der Seiten des Polygons, so ist jetzt gefragt nach allen Moduln x, die der Congruenz genügen:

$$(-2)^t \equiv 1 \; mod \; (3x).$$

Giebt man dieser Congruenz die Form

$$T \equiv 0 \; mod (3x),$$

so ist bei ungeradem t der absolute Werth von $T = 2^t + 1$, bei geradem t ist $T = 2^t - 1$. In beiden Fällen hat T die Form $3.n$. Dann ist n die Ordnung desjenigen Involutionselementes der rationalen C_3, unter dessen Punkten die sämmtlichen Ecken der Polygone mit t Seiten enthalten sind. Bezeichnen wir Polygone, deren Ecken einmal Punkte P_i, das andere Mal P_k sind, als verschiedener Art, so werden so viele verschiedene Arten von Polygonen mit t Seiten auftreten, als es Factoren x von n giebt, die nicht die Form

$$x = \frac{(-2)^f - 1}{3}$$

haben, wo f ein Theiler ist von t, weil sonst schon

$$(-2)^f \equiv 1 \; mod (3x)$$

und somit das Polygon ein uneigentliches mit blos f Seiten wäre. Für die Anzahlbestimmung der Polygone mit vorgeschriebener Seitenzahl kann man sich der von Herrn Durège an der genannten Stelle aufgestellten Recoursformel bedienen. Ist nämlich f ein Divisor von t und bezeichnet a_f die Anzahl der f-Ecke, das heisst, der Polygone mit f Seiten, so bilden die Ecken der Polygone, die zu sämmtlichen Divisoren f von t gehören, inclusive die Divisoren 1 und t, die $3n = T$ Punkte des Involutionselementes. Sondert man im Falle der rationalen Curve den Divisor 1, dem die Wendepunkte entsprechen, sowie den Factor 2 und den Factor t selbst aus, da es keine Zweiecke giebt, so hat man a_t zu berechnen aus der Gleichung:

$$T = |(-2)^t - 1| = t \cdot a_t + \sum_f f \cdot a_f + 3.$$

So findet man beispielsweise 18 Siebenecke aus Punkten P_{43}; 30 Achtecke in zwei Arten, aus Punkten P_{17} und $P_{5.17}$; 56 Neunecke in vier Arten aus Punkten P_9, P_{19}, $P_{3.19}$ und $P_{3^2.19}$; welche die sämmtlichen Polygone der aufgezählten Art für die rationale Curve und die reellen für die beiden allgemeinen Curven sind.

Nach einem zahlentheoretischen Satze* kann übrigens für die gesuchte Anzahl a_t ein directer Ausdruck aufgestellt werden, welcher nur eine andere Schreibweise obiger Recoursionsformel ist. Man hat nämlich für die rationale Curve, wenn p, q, ... die verschiedenen in t enthaltenen Primzahlen bedeuten:

$$t.a_t = \left|(-2)^t - 1\right| - \sum_p \left|(-2)^{\frac{t}{p}} - 1\right| + \sum_{p,q} \left|(-2)^{\frac{t}{p \cdot q}} - 1\right| - \cdots,$$

und ebenso für die allgemeinen Curven:

$$t.a_t = [(-2)^t - 1]^2 - \sum_p [(-2)^{\frac{t}{p}} - 1]^2 + \sum_{p,q} [(-2)^{\frac{t}{pq}} - 1]^2 - \ldots$$

Die nicht reellen Polygone treten stets in Paaren conjugirt imaginär auf. Für beide Arten der allgemeinen Curve findet man darnach:

24 Dreiecke, 56 Vierecke, 216 Fünfecke, 648 Sechsecke, 2376 Siebenecke, 8100 Achtecke (324 solche aus Punkten P_{17} und 7776 solche aus Punkten $P_{5.17}$), 29232 Neunecke (72 solche aus Punkten P_9; 360 solche aus Punkten P_{19}; 2880 weitere aus Punkten $P_{3.19}$ und 25920 Polygone aus Punkten $P_{3^2.19}$) u. s. f.

Eine ausführlichere Darstellung soll noch für $t = 12$ hinzugefügt werden. In der Configuration $n = 3.5.7$ traten drei verschiedene Arten von Zwölfecken auf. Wir fragen jetzt nach der Anzahl der verschiedenen Arten der reellen Zwölfecke der rationalen Curve überhaupt.

In diesem Falle haben wir x so zu bestimmen, dass:

$$(-2)^{12} \equiv 1 \; mod\, 3x.$$

Nun ist:
$$T = (-2)^{12} - 1 = 3n = 3.3.5.7.13.$$

Die Factoren f von $t = 12$ sind im Weiteren: 2, 3, 4, 6. Somit ist $(-2)^{12} - 1$ theilbar durch:

$$(-2)^2 - 1, \quad (-2)^3 - 1, \quad (-2)^4 - 1; \quad (-2)^6 - 1.$$

Unter den Divisoren x von n sind demnach auszuscheiden die Werthe

$$x = 3, \;\; 5, \;\; 7, \;\; 3.7$$

und bleiben als noch in Betracht kommende Werthe von x:

$$x = 13, \;\; 5.7, \;\; 5.13, \;\; 7.13, \;\; 5.7.13, \;\; 3.5, \;\; 3.13, \;\; 3.5.7;$$
$$3.5.13, \;\; 3.7.13, \;\; 3.5.7.13.$$

Theilt man also von der Richtung P_1 aus den Kreis in $2(2^{12}-1)$ gleiche Theile, so enthält die Configuration:

die drei Wendepunkte P_1,
zwei Dreiecke aus Punkten P_3,
drei Vierecke aus Punkten P_5,
neun Sechsecke, zwei Arten aus Punkten P_7 und $P_{3.7}$.

* Vergl. Dedekind: „Zahlentheorie", II. Abtheilung, S. 361.

Dazu kommen die verlangten Zwölfecke in elf verschiedenen Arten, nämlich:

3 Zwölfecke aus Punkten P_{13}		2 Zwölfecke aus Punkten $P_{3.5}$
6 „ „ „ $P_{5.7}$		6 „ „ „ $P_{3.13}$
12 „ „ „ $P_{5.13}$		12 „ „ „ $P_{3.5.7}$
18 „ „ „ $P_{7.13}$		24 „ „ „ $P_{3.5.13}$
72 „ „ „ $P_{5.7.13}$		36 „ „ „ $P_{3.7.13}$
		144 „ „ „ $P_{3.5.7.13}$.

Zusammen 335 reelle Zwölfseite, die der C_3 zugleich auf- und umgeschrieben sind. In der That ist:

$$a_{12}=\frac{1}{12}\{[(-2)^{12}-1]-[(-2)^{\frac{12}{2}}-1]-[(-2)^{\frac{12}{3}}-1]+[(-2)^{\frac{12}{2.3}}-1]\}=335.$$

Andere als die durch diese Configurationen hervorgetretenen geschlossenen Tangentenpolygone giebt es nicht auf den Curven dritter Ordnung.

c) Construirt man zu dem in P fünfpunktig osculirenden Kegelschnitt C_2 den letzten Schnittpunkt 6, so ist dieser nach (I), falls P in einen Punkt P_n verlegt wird, alle Mal wieder ein Punkt des zu n gehörigen Involutionselementes. Construirt man in dieser Weise fortlaufend zu jedem vorangehenden Punkt den zugehörigen Punkt 6, so kann es vorkommen, dass die Punkte sämmtlich Punkte P_n sind und die Kegelschnittreihe sich mit k Individuen schliesst. Dann ist die Anzahl k der Kegelschnitte der geschlossenen Reihe die kleinste Lösung der Congruenz:

$$(-5)^k \equiv 1 \, mod (3n).$$

Und offenbar wiederholen sich hier die unter b) beantworteten Fragen. So gehen beispielsweise die vier in den reellen Punkten P_5 osculirenden Kegelschnitte sämmtlich durch den zugehörigen Wendepunkt; die Punkte P_7 führen auf Reihen von 3, ebenso die Ecken der Neunseite erster Art zu Reihen von 3, die Punkte P_{11} dagegen zu Reihen von 10 Kegelschnitten u. s. f.

Für Curven höherer als zweiter Ordnung ist zwar der letzte Schnittpunkt vollkommen bestimmt und geschlossene Reihen werden im Allgemeinen für jede Ordnung der berührenden Curven eintreten, dagegen ist in allen diesen Fällen durch die Berührungsstelle die Curve nicht mehr eindeutig bestimmt.

Zürich, Herbst 1892.

XV.

Einige Methoden der Bestimmung der Brennpunkts-Coordinaten und Achsengleichungen eines Kegelschnitts in trimetrischen Coordinaten.

Von

Dr. Stoll,

Gymnasiallehrer in Bensheim.

A. Die Brennpunkte.

Die Gleichung eines Kegelschnittes sei

$$1)\qquad K = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_1a_2x_1x_2 = 0$$

und A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{23}, A_{31}, A_{12} seien die Unterdeterminanten seiner Determinante Δ; ferner setze man:

$$2)\qquad \begin{cases} A_1 = A_{11}\sin\alpha + A_{12}\sin\beta + A_{13}\sin\gamma, \\ A_2 = A_{21}\sin\alpha + A_{22}\sin\beta + A_{23}\sin\gamma, \\ A_3 = A_{31}\sin\alpha + A_{32}\sin\beta + A_{33}\sin\gamma, \end{cases}$$

$$3)\qquad \begin{cases} A = A_1\sin\alpha + A_2\sin\beta + A_3\sin\gamma = A_{11}\sin^2\alpha + A_{22}\sin^2\beta + A_{33}\sin^2\gamma \\ \qquad + 2A_{23}\sin\beta\sin\gamma + 2A_{31}\sin\gamma\sin\alpha + 2A_{12}\sin\alpha\sin\beta. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgen nach bekannten Sätzen die anderen:

$$4)\qquad \begin{cases} a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3 = \Delta\sin\alpha, \\ a_{21}A_1 + a_{22}A_2 + a_{23}A_3 = \Delta\sin\beta, \\ a_{31}A_1 + a_{32}A_2 + a_{33}A_3 = \Delta\sin\gamma, \end{cases}$$

$$5)\qquad a_{11}A_1^2 + a_{22}A_2^2 + a_{33}A_3^2 + 2a_{23}A_2A_3 + 2a_{31}A_3A_1 + 2a_{12}A_1A_2 = \Delta A.$$

Hierzu kommt noch die Beziehung

$$6)\qquad M = 2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = x_1\sin\alpha + x_2\sin\beta + x_3\sin\gamma,$$

wo r den Radius des Umkreises und x_1, x_2, x_3 die absoluten trimetrischen Coordinaten eines Punktes, das heisst die senkrechten Abstände desselben von den Seiten des Fundamentaldreiecks bedeuten. Endlich sind ganz allgemein die relativen Coordinaten des Kegelschnitt-Mittelpunktes gegeben durch die Gleichung:

$$7)\qquad x_1 : x_2 : x_3 = A_1 : A_2 : A_3.$$

Um zunächst die Coordinaten der Brennpunkte und die Längen der Achsen zu bestimmen, gehen wir nach dem Vorgange von Salmon-Fiedler (Anal. Geom. der Kegelschnitte S. 692) aus von dem bekannten Satze, dass das Product der Senkrechten von den zwei Brennpunkten auf eine Tangente oder, was dasselbe ist, das Product der Senkrechten von einem Brennpunkte auf zwei parallele Tangenten constant ist, und zwar gleich dem Quadrat der halben Nebenachse, wenn dieser Brennpunkt reell, dagegen gleich dem Quadrat der halben Hauptachse, wenn derselbe imaginär ist. Eine Gerade, die parallel ist der Seite BC des Fundamentaldreiecks ABC, hat die Gleichung

$$\lambda x_1 + x_2 \sin\beta + x_3 \sin\gamma = 0,$$

oder mit Benutzung der Relation 6):

$$(\lambda - \sin\alpha) x_1 + M = 0.$$

Soll dieselbe den Kegelschnitt K berühren, so muss folgende Bedingung erfüllt werden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \lambda \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \sin\beta \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \sin\gamma \\ \lambda & \sin\beta & \sin\gamma & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

$$A_{11}\lambda^2 + A_{22}\sin^2\beta + A_{33}\sin^2\gamma + 2A_{23}\sin\beta\sin\gamma + 2A_{31}\lambda\sin\gamma + 2A_{12}\lambda\sin\beta = 0.$$

Durch Berücksichtigung der Gleichung 3) und Ausscheidung gleicher Factoren erhält man hieraus:

$$A_{11}\lambda^2 + A - A_{11}\sin^2\alpha + 2(\lambda - \sin\alpha)(A_1 - A_{11}\sin\alpha) = 0,$$

oder

$$A_{11}(\lambda - \sin\alpha)^2 + 2A_1(\lambda - \sin\alpha) + A = 0;$$

weil aber $(\lambda - \sin\alpha)x_1 + M = 0$ ist, so geht diese Gleichung über in:

$$A x_1^2 - 2MA_1 x_1 + M^2 A_{11} = 0.$$

Denkt man sich in derselben M durch seinen Werth

$$x_1 \sin\alpha + x_2 \sin\beta + x_3 \sin\gamma$$

ersetzt, so ist sie vom zweiten Grade in Bezug auf x_1, x_2, x_3 und stellt das Product der Gleichungen der zwei zu BC parallelen Tangenten dar; versteht man aber unter M den constanten Werth $2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, so giebt sie zwei Werthe für x_1, nämlich:

$$\left.\begin{matrix} x_1' \\ x_1'' \end{matrix}\right\} = \frac{M}{A}\left(A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - A_{11}A}\right),$$

von denen der erste den Abstand der ersten zu BC parallelen Tangente von BC angiebt, der zweite den der zweiten.

Sind ferner x_1, x_2, x_3 die absoluten Coordinaten des Brennpunktes, etwa einer Hyperbel, so ist der Abstand desselben von der ersten Tangente gleich $x_1 - x_1'$, von der zweiten gleich $x_1 - x_1''$; das Product beider Abstände muss nach dem an die Spitze gestellten Satze gleich dem negativen Quadrat einer der Halbachsen sein, das heisst, es muss

$$(x_1-x_1')(x_1-x_1'')=-\varrho^2$$

oder entwickelt

$$x_1^2-(x_1'-x_1'')x_1+x_1'x_1''=-\varrho^2$$

sein. Nun ist aber

$$x_1'+x_1''=\frac{2MA_1}{A} \text{ und } x_1'x_1''=\frac{M^2A_{11}}{A};$$

daher bekommt man als Gleichung, die die Abstände x_1 eines Brennpunktepaares von BC giebt:

8) $$Ax_1^2-2MA_1x_1+M^2A_{11}=-\varrho^2A.$$

Diese ganze Entwickelung gilt natürlich nur für Centralkegelschnitte, nicht aber für die Parabel, weil der eine Brennpunkt derselben in unendlicher Ferne liegt und deshalb seine Coordinaten unendlich gross sind. Wie man dieselbe trotzdem theilweise nutzbar machen kann, soll später gezeigt werden.

Aus 8) folgt

$$x_1=\frac{M}{A}\left(A_1\pm\sqrt{A_1^2-AA_{11}-\frac{\varrho^2A^2}{M^2}}\right);$$

ähnlich gebildete Werthe findet man für x_2 und x_3. Die Gleichungen 2) und 3) geben aber

$$\left\{\begin{aligned}A_1^2-AA_{11}&=-(A_{11}A_{22}-A_{12}^2)\sin^2\beta-(A_{33}A_{11}-A_{31})^2\sin^2\gamma\\&\quad+2(A_{31}A_{12}-A_{23}A_{11})\sin\beta\sin\gamma=\Delta(-a_{33}\sin^2\beta-a_{22}\sin^2\gamma+2a_{23}\sin\beta\sin\gamma);\end{aligned}\right.$$

setzt man daher

9) $$\left\{\begin{aligned}&-a_{33}\sin^2\beta-a_{22}\sin^2\gamma+2a_{23}\sin\beta\sin\gamma=e_1,\\&-a_{11}\sin^2\gamma-a_{33}\sin^2\alpha+2a_{31}\sin\gamma\sin\alpha=e_2,\\&-a_{22}\sin^2\alpha-a_{11}\sin^2\beta+2a_{12}\sin\alpha\sin\beta=e_3,\end{aligned}\right.$$

so ist 9a):

$$A_1^2-A_{11}A=\Delta e_1,\quad A_2^2-A_{22}A=\Delta e_2,\quad A_3^2-A_{33}A=\Delta e_3$$

und bezeichnet man die Grösse $\frac{\varrho^2A^2}{M^2\Delta}$ kurzweg mit λ^2, so geht obige Gleichung für x_1 über in:

10) $$x_1=\frac{M}{A}\left(A_1\pm\sqrt{\Delta(e_1-\lambda^2)}\right).$$

Um den Werth von λ zu finden, multiplicire man diese Gleichung und die zwei ähnlich gebildeten der Reihe nach mit $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ und addire, so kommt, weil $x_1\sin\alpha+x_2\sin\beta-x_3\sin\gamma=M$ ist und der Factor M sich weghebt:

11) $$\sin\alpha\sqrt{e_1-\lambda^2}+\sin\beta\sqrt{e_2-\lambda^2}+\sin\gamma\sqrt{e_3-\lambda^2}=0.$$

Die Rationalisirung liefert die nach Potenzen von λ geordnete Gleichung:

$$\left\{\begin{aligned}&4\lambda^4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma+2\lambda^2\{e_1\sin^2\alpha(\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2\gamma)\\&\qquad+e_2\sin^2\beta(\sin^2\beta-\sin^2\gamma-\sin^2\alpha)+e_3\sin^2\gamma(\sin^2\gamma-\sin^2\alpha-\sin\beta)\}\\&\qquad-(e_1^2\sin^4\alpha+e_2^2\sin^4\beta+e_3^2\sin^4\gamma-2e_2e_3\sin^2\beta\sin^2\gamma\\&\qquad-2e_3e_1\sin^2\gamma\sin^2\alpha-2e_1e_2\sin^2\alpha\sin^2\beta)=0.\end{aligned}\right.$$

Der Coefficient von $2\lambda^2$ geht über in:

$$-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(e_1\sin\alpha\cos\alpha+e_2\sin\beta\cos\beta+e_3\sin\gamma\cos\gamma);$$

wenn man aber

$$12)\qquad a_{11}+a_{22}+a_{33}-2a_{23}\cos\alpha-2a_{31}\cos\beta-2a_{12}\cos\gamma=e$$

setzt, so findet man leicht, dass

$$13)\qquad e_1\sin\alpha\cos\alpha+e_2\sin\beta\cos\beta+e_3\sin\gamma\cos\gamma=-e\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

ist, wodurch der Coefficient von $2\lambda^2$ gleich $+2e\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$ wird. Dem letzten Gliede der Gleichung kann man die Form geben:

$$\left\{\begin{aligned}&e_1\sin^2\alpha(-e_1\sin^2\alpha+e_2\sin^2\beta+e_3\sin^2\gamma)+e_2\sin^2\beta(e_1\sin^2\alpha-e_2\sin^2\beta+e_3\sin^2\gamma)\\&\qquad+e_3\sin^2\beta(e_1\sin^2\alpha+e_2\sin^2\beta-e_3\sin^2\gamma).\end{aligned}\right.$$

Wir wollen zunächst nur den ersten Posten dieses Ausdrucks vermittelst der Gleichungen 9) umformen; dann erhält man als Werth desselben:

$$\left\{\begin{aligned}&2e_1\sin^2\alpha(-a_{11}\sin^2\beta\sin^2\gamma+a_{31}\sin\gamma\sin\alpha\sin^2\beta+a_{12}\sin\alpha\sin\beta\sin^2\gamma\\&\qquad=-2e_1a_{11}\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma+2e_1\sin^3\alpha\sin\beta\sin\gamma\\&\qquad(-a_{23}\sin\alpha+a_{31}\sin\beta+a_{12}\sin\gamma);\end{aligned}\right.$$

folglich ist die Summe der drei Posten gleich:

$$\left\{\begin{aligned}&-2\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma(e_1a_{11}+e_2a_{22}+e_3a_{33})+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\,[a_{23}\sin\alpha(-e_1\sin^2\alpha\\&\qquad+e_2\sin^2\beta+e_3\sin^2\gamma)+a_{31}\sin\beta(e_1\sin^2\alpha-e_2\sin^2\beta+e_3\sin^2\gamma)\\&\qquad+a_{12}\sin\gamma(e_1\sin^2\alpha+e_2\sin^2\beta-e_3\sin^2\gamma)].\end{aligned}\right.$$

Der erste Klammerausdruck geht vermöge der Gleichungen 9) über in:

$$\left\{\begin{aligned}&-a_{11}a_{33}\sin^2\beta-a_{11}a_{22}\sin^2\gamma+2a_{11}a_{23}\sin\beta\sin\gamma-a_{22}a_{11}\sin^2\gamma-a_{22}a_{33}\sin^2\alpha\\&+2a_{22}a_{31}\sin\gamma\sin\alpha-a_{33}a_{22}\sin^2\alpha-a_{33}a_{11}\sin^2\beta+2a_{33}a_{12}\sin\alpha\sin\beta\\&=2(-a_{22}a_{33}\sin^2\alpha-a_{33}a_{11}\sin^2\beta-a_{11}a_{22}\sin^2\gamma+a_{11}a_{23}\sin\beta\sin\gamma\\&+a_{22}a_{31}\sin\gamma\sin\alpha+a_{33}a_{12}\sin\alpha\sin\beta),\end{aligned}\right.$$

das Polynom in der eckigen Klammer aber zunächst in:

$$\left\{\begin{aligned}&2a_{23}\sin\alpha(-a_{11}\sin^2\beta\sin^2\gamma+a_{31}\sin\gamma\sin\alpha\sin^2\beta+a_{12}\sin\alpha\sin\beta\sin^2\gamma\\&\qquad-a_{23}\sin\beta\sin\gamma\sin^2\alpha)+2a_{31}\sin\beta(-a_{22}\sin^2\gamma\sin^2\alpha+a_{12}\sin\alpha\sin\beta\sin^2\gamma\\&\qquad+a_{23}\sin\beta\sin\gamma\sin^2\alpha-a_{31}\sin\gamma\sin\alpha\sin^2\beta)+2a_{12}\sin\gamma(-a_{33}\sin^2\alpha\sin^2\beta\\&\qquad+a_{23}\sin\beta\sin\gamma\sin^2\alpha+a_{31}\sin\gamma\sin\alpha\sin^2\beta-a_{12}\sin\alpha\sin\beta\sin^2\gamma)\end{aligned}\right.$$

und dann in:

$$\left\{\begin{aligned}&2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\,(-a_{23}a_{11}\sin\beta\sin\gamma+2a_{31}a_{12}\sin\beta\sin\gamma-a_{23}{}^2\sin^2\alpha\\&\qquad-a_{31}a_{22}\sin\gamma\sin\alpha+2a_{12}a_{23}\sin\gamma\sin\alpha-a_{31}{}^2\sin^2\beta\\&\qquad-a_{12}a_{33}\sin\alpha\sin\beta+2a_{23}a_{31}\sin\alpha\sin\beta-a_{12}{}^2\sin^2\gamma).\end{aligned}\right.$$

Fasst man Alles zusammen und ordnet nach Potenzen von $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, so erhält man als Werth des letzten Gliedes:

$$\begin{cases} 4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\,\{(a_{22}a_{33}-a_{23}{}^2)\sin^2\alpha+(a_{33}a_{11}-a_{31}{}^2)\sin^2\beta+(a_{11}a_{22} \\ \qquad -a_{12}{}^2)\sin^2\gamma+2(a_{31}a_{12}-a_{11}a_{23})\sin\beta\sin\gamma+2(a_{12}a_{23} \\ \qquad -a_{22}a_{31})\sin\gamma\sin\alpha+2(a_{23}a_{31}-a_{33}a_{12})\sin\alpha\sin\beta\}, \end{cases}$$

das heisst:

$$4A\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma.$$

In Folge dieser Reductionen erhält obige Gleichung in λ jetzt folgende Gestalt:

$$14)\qquad \lambda^4+e\lambda^2+A=0,$$

woraus $\lambda^2=\frac{1}{2}(-e\pm\sqrt{e^2-4A})$ folgt; dadurch verwandelt sich aber die Gleichung 10) in folgende:

$$15)\qquad x_1=\frac{M}{A}\left(A_1\pm\sqrt{\frac{1}{2}\Delta(2e_1+e)\pm\frac{1}{2}\Delta\sqrt{e^2-4A}}\right),$$

so dass die Coordinaten des Brennpunktes jetzt vollständig bestimmt sind.

In Folge der Biformität der Wurzel $\sqrt{e^2-4A}$ erhält man vier Werthe für x_1, von denen zwei den reellen, die anderen zwei den imaginären Brennpunkten angehören; es fragt sich nur, wie diese Werthe zu vertheilen sind. Man hat hier zwei Fälle zu unterscheiden; ist nämlich Δ positiv, so giebt das positive Zeichen der Wurzel $\sqrt{e^2-4A}$ die Coordinaten der reellen Brennpunkte, ist aber Δ negativ, so muss man, um die Coordinaten der reellen Brennpunkte zu erhalten, das negative Zeichen dieser Wurzel nehmen. Diese Behauptung erweist sich als wahr, sobald man darthun kann, dass der absolute Werth von $2e_1+e$, abgesehen davon, ob er positiv oder negativ ist, kleiner sei als $\sqrt{e^2-4A}$, oder, was dasselbe ist, dass

$$(2e_1+e)^2-(e^2-4A),\ \text{das heisst}\ 4(e_1{}^2+ee_1+A)$$

unter allen Umständen negativ sei. Dies ist aber in der That der Fall; denn multiplicirt man diesen Ausdruck mit $\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichung 13) und des oben gefundenen Werthes von $4A\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$:

$$\begin{cases} 4e_1{}^2\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma \\ -4e_1\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(e_1\sin\alpha\cos\alpha+e_2\sin\beta\cos\beta+e_3\sin\gamma\cos\gamma)-e_1{}^2\sin^4\alpha \\ -e_2{}^2\sin^4\beta-e_3{}^2\sin^4\gamma+2e_2e_3\sin^2\beta\sin^2\gamma+2e_3e_1\sin^2\gamma\sin^2\alpha+2e_1e_2\sin^2\alpha\sin^2\beta, \end{cases}$$

was man nach einigen Rechnungen auf

$$-\{-e_1\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+e_2\sin^2\beta+e_3\sin^2\gamma\}^2$$

reduciren kann.

Beispiel 1. Die Gleichung der Ellipse, die unter allen umgeschriebenen Ellipsen den kleinsten Flächeninhalt hat, der sogenannten Steiner'schen Ellipse, ist

$$\frac{x_2x_3}{\sin\alpha}+\frac{x_3x_1}{\sin\beta}+\frac{x_1x_2}{\sin\gamma}=0;$$

hier ist:

$$A_1 = \frac{1}{\sin\alpha},\quad A_2 = \frac{1}{\sin\beta},\quad A_3 = \frac{1}{\sin\gamma},\quad A = 3,$$

$$\Delta = \frac{2}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma},\quad e_1 = \frac{2\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

$$e = -2\cdot\frac{\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = -2\frac{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

oder, wenn man den Brocard'schen Winkel ϑ einführt, für welchen

$$1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\, cotg\,\vartheta \text{ ist},\quad e = -2\, cotg\,\vartheta,$$

also:

$$e^2 - 4A = 4(cotg^2\vartheta - 3);$$

daher ist:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3} r\sin\beta\sin\gamma \\ &\pm \frac{2}{3} r\sqrt{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\left[\frac{2\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\, cotg\,\vartheta}{\sin\alpha} \pm \sqrt{cotg^2\vartheta - 3}\right]};\end{aligned}\right.$$

das positive Zeichen von $\sqrt{cotg^2\vartheta - 3}$ gehört gemäss obiger Regel den reellen Brennpunkten an.

Beispiel 2. Die Ellipse, welche die Seiten des Dreiecks ABC in den Fusspunkten der Höhen berührt, hat die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} x_1^2\cos^2\alpha + x_2^2\cos^2\beta + x_3^2\cos^2\gamma - 2x_2x_3\cos\beta\cos\gamma - 2x_3x_1\cos\gamma\cos\alpha \\ - 2x_1x_2\cos\alpha\cos\beta = 0\end{aligned}\right.$$

und für sie ist

$$A_1 = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\alpha,\ A_2 = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\beta,\ A_3 = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\gamma,$$

$$A = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma) = 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\, cotg\,\vartheta,$$

$$\Delta = -4\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma,\ e_1 = -\sin^2\alpha,\ e = 1 + 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

$$e^2 - 4A = 1 - 8\cos\alpha.$$

Dies giebt:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= r\sin\alpha\, tg\,\vartheta \\ &\pm r\, tg\,\vartheta\sqrt{\frac{1}{2}\left[-(1 - 2\sin^2\alpha + 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) \pm \sqrt{1 - 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\right]};\end{aligned}\right.$$

hier ist für die reellen Brennpunkte der positive Werth von $\sqrt{1 - 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ zu nehmen.

Wenn man in die Gleichung 14) den Werth von $\lambda^2 = \varrho^2 A^2 : M^2\Delta$ wieder einführt, so sind ihre Wurzeln ϱ_1^2 und ϱ_2^2 die Quadrate der Halbachsen des Kegelschnitts, und zwar gelten dann die Relationen:

$$16)\qquad \varrho_1^2 + \varrho_2^2 = -\frac{M^2\Delta e}{A^2} \text{ und } \varrho_1^2\varrho_2^2 = \frac{M^4\Delta^2}{A^3}.$$

Diese kann man benutzen, um die Arten der verschiedenen Kegelschnitte zu unterscheiden.

I. Bei der Ellipse müssen ϱ_1^2 und ϱ_2^2 zugleich positiv sein; also ist der Kegelschnitt eine Ellipse, wenn A positiv ist und Δ und e entgegengesetzte Zeichen haben. Hätten Δ und e bei positivem A gleiche Zeichen, so wären die Achsen imaginär.

Für den speciellen Fall des Kreises ist $\varrho_1^2 = \varrho_2^2$, also

$$2\varrho^2 = -\frac{M^2\Delta e}{A^2} \quad \text{und} \quad \varrho^4 = \frac{M^4\Delta^2}{A^3},$$

woraus durch Elimination von ϱ^2 die Bedingung $e^2 - 4A = 0$ folgt, die die andere, dass A positiv sei, einschliesst, und deshalb für sich allein schon genügt, den Kreis zu definiren. Weil beim Kreise die vier Brennpunkte mit seinem Mittelpunkte zusammenfallen, so muss in Gleichung 15) der Hauptradikand verschwinden; daraus könnte man versucht sein, zu schliessen, die Bedingung $e^2 - 4A = 0$ sei für sich allein nicht genügend, sondern es müssten noch die drei Nebenbedingungen

$$2e_1 + e = 2e_2 + e = 2e_3 + e = 0,$$

bezüglich die zwei $e_1 = e_2 = e_3$, erfüllt sein. Es lässt sich jedoch zeigen, dass das Eintreffen jener Hauptbedingung von selbst das dieser Nebenbedingungen nach sich zieht. Erhebt man nämlich Gleichung 13) in's Quadrat und zieht davon die schon mehrfach benutzte Gleichung

$$\left\{\begin{aligned}4A\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma = -e_1^2\sin^4\alpha - e_2^2\sin^2\beta - e_3^2\sin^2\gamma + 2e_2e_3\sin^2\beta\sin^2\gamma\\ + 2e_3e_1\sin^2\gamma\sin^2\alpha + 2e_1e_2\sin^2\alpha\sin^2\beta\end{aligned}\right.$$

ab, so erhält man für $e^2 - 4A = 0$ das Resultat:

$$\left\{\begin{aligned}e_1^2\sin^2\alpha + e_2^2\sin^2\beta + e_3^2\sin^2\gamma - 2e_2e_3\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha - 2e_3e_1\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta\\ - 2e_1e_2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = 0,\end{aligned}\right.$$

dem man auch die Form geben kann:

$$(e_2-e_3)^2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha + (e_3-e_1)^2\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta + (e_1-e_2)^2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = 0.$$

Wenn alle Winkel des Fundamentaldreiecks $< 90^0$ oder einer $= 90^0$ ist, so ergiebt sich hieraus sofort $e_1 = e_2 = e_3 = 0$. Ist aber z. B. $\alpha > 90^0$, so setze man statt $\cos\alpha$ seinen Werth $-\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$ und statt $\sin\alpha$ seinen Werth $\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma$, wodurch man erhält:

$$\left\{\begin{aligned}(e_2-e_3)^2(-\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma + \sin^2\beta\sin^2\gamma) + (e_3-e_1)^2(\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma\\ + \sin^2\gamma\cos^2\beta) + (e_1-e_2)^2(\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma + \sin^2\beta\cos^2\gamma) = 0,\end{aligned}\right.$$

oder anders geordnet:

$$\left\{\begin{aligned}(e_2-e_3)^2\sin^2\beta\sin^2\gamma + (e_3-e_1)^2\sin^2\gamma\cos^2\beta + (e_1-e_2)^2\sin^2\beta\cos^2\gamma\\ + \sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma\,\{-(e_2-e_3)^2 + (e_3-e_1)^2 + (e_1-e_2)^2\} = 0.\end{aligned}\right.$$

Aus der Identität $e_2 - e_3 = -(e_3 - e_1) - (e_1 - e_2)$ ergiebt sich aber $(e_2-e_3)^2 = (e_3-e_1)^2 + (e_1-e_2)^2 + 2(e_3-e_1)(e_1-e_2)$, also geht der letzte Klammerausdruck über in $2(e_3-e_1)(e_1-e_2)$, und man erhält statt obiger Gleichung:

$$(e_2-e_3)^2\sin^2\beta\sin^2\gamma + \{(e_3-e_1)\sin\gamma\cos\beta + (e_1-e_2)\sin\beta\cos\gamma\}^2 = 0.$$

Daraus folgt aber wieder zunächst $e_2 = e_3$ und dann $e_2 = e_3 = e_1$. Geht man mit diesen Bedingungen in Gleichung 13) ein, so kommt, wie oben erwähnt, $2e_1 + e = 2e_2 + e = 2e_3 + e = 0$.

II. Bei der Hyperbel muss $\varrho_1^2\varrho_2^2$ negativ werden; also ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, wenn A negativ ist, wobei es nicht darauf ankommt, ob Δ und e gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

In dem speciellen Falle der gleichseitigen Hyperbel ist $\varrho_1^2 + \varrho_2^2 = 0$, weshalb dann die Bedingung $e = 0$ erfüllt werden muss, welche die andere $A < 0$ nach sich zieht, weil $\varrho_1^2\varrho_2^2 = M^4\Delta^2 : A^3$ sein soll.

III. Die Achsen der Parabel sind beide unendlich gross, wofür die analytische Bedingung $A = 0$ ist; jedoch erfordert das ganze Capitel von der Parabel eine besondere Untersuchung, die weiter unten geführt werden soll.

IV. Zerfällt der Kegelschnitt in zwei gerade Linien, so ist $\varrho_1^2 = \varrho_2^2 = 0$, also gilt die Bedingung $\Delta = 0$. Der Winkel φ, den diese Geraden mit einander bilden, ist bekanntlich bestimmt durch die Gleichung $tg^2\varphi = -\frac{4A}{e^2}$. Ist also ausser $\Delta = 0$ auch noch $e = 0$, so stehen dieselben auf einander senkrecht; ist ausser $\Delta = 0$ auch $A = 0$, so sind sie parallel; fallen in letzterem Falle die Linien zusammen, bilden also eine Doppelgerade, so müssen auch noch $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, folglich auch $A_{11} = A_{22} = A_{33} = A_{23} = A_{31} = A_{12} = 0$ sein. Hat man endlich ausser $\Delta = 0$ auch $e^2 - 4A = 0$, so kann man die gegebene Gleichung entweder als die eines Kreises mit unendlich kleinem Radius und den Mittelpunkts-Coordinaten $x_1 = A_1$, $x_2 = A_2$, $x_3 = A_3$, oder als die zweier von diesem Punkte ausgehenden, nach den sogenannten cyklischen Punkten gerichteten conjugirten imaginären Geraden ansehen, die mit einander einen Winkel bilden, dessen Tangente gleich i ist (vergl. darüber Köhler, exercises de géom. anal. I, pag. 142).

Gleich im Anfang unserer Entwickelungen wurde bemerkt, dass eine besondere Untersuchung geführt werden müsse, wenn die vorgelegte Kegelschnittsgleichung einer Parabel angehöre, was, wie wir gesehen haben, unter der Bedingung $A = 0$ zutrifft. Man kann aber die Parabel als einen Centralkegelschnitt betrachten, dessen Mittelpunkt in unendlicher *Ferne liegt* und zwar in derselben Richtung von irgend einem Eckpunkt des Fundamentaldreiecks aus, wie der unendlich entfernte Brennpunkt derselben. Man darf daher die relativen Coordinaten des Letzteren als identisch mit denen des Ersteren ansehen, d. h. die Abstände des unendlich fernen Brennpunktes von den Seiten des Fundamentaldreiecks verhalten sich wie $A_1 : A_2 : A_3$. Diese Verhältnisse behalten denselben Werth, wenn man sie auf ein anderes Fundamentaldreieck bezieht, dessen Seiten parallel sind denen des früheren. Daher verhalten sich auch die Abstände des unendlich fernen Brennpunktes von den Seiten desjenigen Dreiecks, das durch die zu BC, CA, AB parallelen Tangenten an den Kegelschnitt gebildet wird, wie $A_1 : A_2 : A_3$. Da aber bei jedem in ein Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitt die Abstände des einen Brennpunkts von den Seiten sich umgekehrt verhalten, wie die des anderen, so sind die Verhältnisse der Abstände des im Endlichen gelegenen Brennpunktes der Parabel von den Seiten des erwähnten Tangentendreiecks reciprok zu den Verhältnissen der Abstände des unendlich fern gelegenen, haben also die relativen Werthe $\frac{1}{A_1}:\frac{1}{A_2}:\frac{1}{A_3}$, und ihre absoluten Werthe kann man gleich setzen $\frac{M\lambda}{2}\cdot\frac{1}{A_1}$, $\frac{M\lambda}{2}\cdot\frac{1}{A_2}$, $\frac{M\lambda}{2}\cdot\frac{1}{A_3}$, wo λ eine Constante ist, der ebenfalls constante Factor $\frac{M}{2}$ nur deshalb beigesetzt ist, um den folgenden Rechnungen eine grössere Eleganz zu verleihen. In der oben gefundenen Gleichung:

$$Ax_1^2 - 2MA_1x_1 + M^2A_{11} = 0,$$

welche die Abstände der zwei zu BC parallelen Tangenten des Kegelschnitts von der Seite BC angab, ist für die Parabel $A = 0$, also der Abstand der zu BC parallelen Tangente der Parabel von BC gleich $MA_{11} : 2A_1$; addirt man dazu den eben gefundenen Werth des Abstands des Brennpunkts von dieser Tangente, nämlich $\frac{M\lambda}{2}\cdot\frac{1}{A_1}$, so wird der Abstand des Brennpunkts von BC:

$$17)\qquad x_1 = \frac{M(A_{11}+\lambda)}{2A_1};$$

ähnliche Gleichungen findet man für x_2 und x_3. Multiplicirt man aber die erste dieser Gleichungen mit $\sin\alpha$, die zweite mit $\sin\beta$, die dritte mit $\sin\gamma$ und addirt, so kommt

$$M = \frac{M}{2}\left\{\frac{(A_{11}+\lambda)\sin\alpha}{A_1} + \frac{(A_{22}+\lambda)\sin\beta}{A_2} + \frac{(A_{33}+\lambda)\sin\gamma}{A_3}\right\},$$

woraus

$$\lambda = -\frac{A_{11}A_2A_3\sin\alpha + A_{22}A_3A_1\sin\beta + A_{33}A_1A_2\sin\gamma - 2A_1A_2A_3}{A_2A_3\sin\alpha + A_3A_1\sin\beta + A_1A_2\sin\gamma}$$

folgt. Dieser Ausdruck lässt sich in mehrfacher Weise umformen. Weil nämlich hier $A = 0$ ist, so geht die Gleichung 3) über in:

$$A_1\sin\alpha + A_2\sin\beta + A_3\sin\gamma = 0;$$

multiplicirt man dieselbe der Reihe nach mit $A_1\cos\alpha$, $A_2\cos\beta$, $A_3\cos\gamma$ und addirt die Producte, so kommt:

$$\left\{\begin{aligned} &A_1^2\sin\alpha\cos\alpha + A_2^2\sin\beta\cos\beta + A_3^2\sin\gamma\cos\gamma + A_2A_3\sin\alpha + A_3A_1\sin\beta \\ &\qquad + A_1A_2\sin\gamma = 0.\end{aligned}\right.$$

Wegen $A=0$ gehen ferner die Gleichungen 9a) über in $A_1^2=\Delta e_1$, $A_2^2=\Delta e_2$, $A_3^2=\Delta e_3$, also wird die letzte Gleichung:

$$\Delta(e_1 \sin\alpha\cos\alpha+e_2\sin\beta\cos\beta+e_3\sin\gamma\cos\gamma)+A_2A_3\sin\alpha+A_3A_1\sin\beta+A_1A_2\sin\gamma=0,$$

oder wegen Gleichung 13):

$$A_2A_3\sin\alpha+A_3A_1\sin\beta+A_1A_2\sin\gamma=\Delta e\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma;$$

der Werth des Nenners ist also $\Delta e \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. Der Zähler kann die Form annehmen:

$$A_{11}A_2A_3\sin\alpha+A_3A_1(A_{22}\sin\beta-A_2)+A_1A_2(A_{33}\sin\gamma-A_3)$$

oder auch

$$A_{11}A_2A_3\sin\alpha-(A_{12}\sin\alpha+A_{23}\sin\gamma)A_3A_1-(A_{31}\sin\alpha+A_{23}\sin\beta)A_1A_2$$

wegen der Gleichungen 2). Ferner liefert die Quadrirung der Gleichung $A_1\sin\alpha=-(A_2\sin\beta+A_3\sin\gamma)$ das Resultat:

$$A_1^2\sin^2\alpha=A_2^2\sin^2\beta+A_3^2\sin^2\gamma+2A_2A_3\sin\beta\sin\gamma,$$

woraus

$$A_2A_3=\frac{\Delta(e_1\sin^2\alpha-e_2\sin^2\beta-e_3\sin^2\gamma)}{2\sin\beta\sin\gamma},$$

oder mit Hinzunahme der Gleichungen 9a)

$$A_2A_3=\Delta(a_{11}\sin\beta\sin\gamma+a_{23}\sin^2\alpha-a_{31}\sin\alpha\sin\beta-a_{12}\sin\gamma\sin\alpha)$$

folgt; ähnliche Werthe erhält man für A_3A_1 und A_1A_2. Der Zähler erhält demnach jetzt die Gestalt:

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta\{A_{11}\sin\alpha(a_{11}\sin\beta\sin\gamma+a_{23}\sin^2\alpha-a_{31}\sin\alpha\sin\beta-a_{12}\sin\gamma\sin\alpha)\\ -(A_{12}\sin\alpha+A_{23}\sin\gamma)(a_{22}\sin\gamma\sin\alpha+a_{31}\sin^2\beta-a_{12}\sin\beta\sin\gamma-a_{23}\sin\alpha\sin\beta)\\ -(A_{31}\sin\alpha+A_{23}\sin\beta)(a_{33}\sin\alpha\sin\beta+a_{12}\sin^2\gamma-a_{23}\sin\gamma\sin\alpha-a_{31}\sin\beta\sin\gamma)\}.\end{array}\right.$$

Führt man die Multiplicationen in der grossen Klammer aus und ordnet nach Potenzen von $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, so ist zunächst der Coefficient von $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma: A_{11}a_{11}+A_{12}a_{12}+A_{13}a_{13}$ oder Δ, der von $\sin^2\beta\sin\gamma$ ist $-A_{23}a_{31}+A_{23}a_{31}$ oder Null, der von $\sin\beta\sin^2\gamma$ ist $A_{23}a_{12}-A_{23}a_{12}$ oder Null, der von $\sin^2\gamma\sin\alpha$ ist $-A_{23}a_{22}-A_{31}a_{12}$ oder $+A_{33}a_{23}$, der von $\sin\gamma\sin^2\alpha$ ist $-A_{11}a_{12}-A_{12}a_{22}+A_{31}a_{33}$ oder $2A_{31}a_{23}$, der von $\sin^2\alpha\sin\beta$ ist $-A_{11}a_{31}+A_{12}a_{23}-A_{31}a_{33}$, oder $2A_{12}a_{23}$, der von $\sin\alpha\sin^2\beta$ ist $-A_{12}a_{31}-A_{23}a_{33}$ oder $A_{22}a_{23}$, der von $\sin^3\alpha$ endlich ist $A_{11}a_{23}$. In Folge dieser Reductionen verwandelt sich der Zähler in:

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta[\Delta\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+a_{23}\sin\alpha(A_{11}\sin^2\alpha+A_{22}\sin^2\beta+A_{33}\sin^2\gamma+2A_{23}\sin\beta\sin\gamma\\ \qquad+2A_{31}\sin\gamma\sin\alpha+2A_{12}\sin\alpha\sin\beta)];\end{array}\right.$$

weil aber der Ausdruck in der runden Klammer nach Gleichung 3) gleich $A=0$ ist, so hat der Zähler den Werth $\Delta^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ und da wir den des Nenners $\Delta e\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ gefunden haben, so ist $\lambda=-\frac{\Delta}{e}$. Dies in Gleichung 17) substituirt giebt für die eine Coordinate des endlichen Brennpunkts:

18) $$x_1 = \frac{M(A_{11}e - \Delta)}{2A_1 e};$$

(vergl. Salmon-Fiedler a. a. O.) S. 692, wo dieses Resultat durch die Invariantentheorie gewonnen wird.

Für manche Anwendungen ist eine andere Form der Brennpunkts-Coordinate bequemer. Aus dem ersten oben angegebenen Werthe von λ folgt nämlich, wenn man den Nenner gleich $\Delta e \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ setzt:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{(A_{11}+\lambda)\Delta e \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{A_1} = A_2(A_{11}\sin\gamma - A_{33}\sin\gamma + A_3) + A_3(A_{11}\sin\beta - A_{22}\sin\beta + A_2)\\
&= (A_{12}\sin\alpha + A_{22}\sin\beta + A_{23}\sin\gamma)(A_{31}\sin\alpha + A_{23}\sin\beta + A_{11}\sin\gamma)\\
&+ (A_{31}\sin\alpha + A_{23}\sin\beta + A_{33}\sin\gamma)(A_{12}\sin\alpha + A_{11}\sin\beta + A_{23}\sin\beta)\\
&= A_{23}(A_{22}\sin^2\beta + A_{33}\sin^2\gamma + 2A_{23}\sin\beta\sin\gamma + 2A_{31}\sin\gamma\sin\alpha + 2A_{12}\sin\alpha\sin\beta)\\
&+ 2A_{31}A_{12}\sin^2\alpha + A_{11}A_{23}\sin^2\beta + A_{11}A_{23}\sin^2\gamma + A_{11}(A_{22} + A_{33})\sin\beta\sin\gamma\\
&+ A_{12}(A_{33} + A_{11})\sin\gamma\sin\alpha + A_{31}(A_{11} + A_{22})\sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}\right.$$

Der erste Posten geht über in $-A_{11}A_{23}\sin^2\alpha$ und giebt deshalb mit dem dritten, vierten und fünften Posten zusammen:

$$A_{11}(A_{22} + A_{33} + 2A_{23}\cos\alpha)\sin\beta\sin\gamma;$$

die noch übrigen Posten aber kann man schreiben:

$$\left\{\begin{aligned}
&A_{12}(A_{33} + A_{11} + 2A_{31}\cos\beta)\sin\gamma\sin\alpha + A_{31}(A_{11} + A_{22} + 2A_{12}\cos\gamma)\sin\alpha\sin\beta\\
&\qquad + 2A_{31}A_{12}\sin^2\alpha - 2A_{31}A_{12}\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta - 2A_{31}A_{12}\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma;
\end{aligned}\right.$$

hier verschwinden wieder die drei letzten Posten, und wenn man noch zur Abkürzung

19) $$\left\{\begin{aligned}
&A_{22} + A_{33} + 2A_{23}\cos\alpha = P,\\
&A_{33} + A_{11} + 2A_{31}\cos\beta = Q,\\
&A_{11} + A_{22} + 2A_{12}\cos\gamma = R
\end{aligned}\right.$$

setzt, so hat man endlich:

20) $$x_1 = \frac{M}{2\Delta e \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}(PA_{11}\sin\beta\sin\gamma + QA_{12}\sin\gamma\sin\alpha + RA_{13}\sin\alpha\sin\beta).$$

Da nun die Directrix die Polare des Brennpunkts ist, so ergiebt sich hieraus sofort die Gleichung derselben in der Gestalt:

21) $$Px_1\sin\beta\sin\gamma + Qx_2\sin\gamma\sin\alpha + Rx_3\sin\alpha\sin\beta = 0$$

(vergl. Köhler a. a. O. S. 162).

Beispiel. Es sei gegeben die Gleichung:

$$\left\{\begin{aligned}
&x_1^2\sin^2\alpha + x_2^2(\sin^2\gamma - \sin^2\alpha\sin^2\beta) + x_3^2(\sin^2\beta - \sin^2\gamma\sin^2\alpha)\\
&\qquad + 2x_2x_3\sin\beta\sin\gamma\cos^2\alpha - 2x_3x_1\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha - 2x_1x_2\sin\gamma\sin\alpha\cos\alpha = 0.
\end{aligned}\right.$$

Hier ist

$A_{11} = -\sin^4\alpha\sin^2(\beta-\gamma)$, $A_{22} = \sin^5\alpha\sin(\beta-\gamma)$, $A_{33} = -\sin^5\alpha\sin(\beta-\gamma)$,
$A_{23} = 0$, $A_{31} = -\sin^4\alpha\sin\beta\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)$, $A_{12} = \sin^4\alpha\sin\gamma\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)$,
also $A_1 = -\sin^5\alpha\sin^2(\beta-\gamma)$, $A_2 = \sin^5\alpha(\sin\beta + \sin\gamma\cos\alpha)\sin(\beta-\gamma)$,
$A_3 = -\sin^5\alpha(\sin\gamma + \sin\beta\cos\alpha)\sin(\beta-\gamma)$, $A = 0$;

die Curve ist daher eine Parabel. Ferner ist $e_1 = -\sin^2\alpha \sin^2(\beta-\gamma)$,
$e_2 = -\sin^2\alpha(\sin\beta + \sin\gamma\cos\alpha)^2$, $e_3 = -\sin^2\alpha(\sin\gamma + \sin\beta\cos\alpha)^2$,
$e = \sin^2\alpha(\sin^2\alpha + 4\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha)$, $\Delta = -\sin^8\alpha\sin^2(\beta-\gamma)$.

Die Gleichung 18) giebt demnach:

$$x_1 = \frac{4r\sin^2\beta\sin^2\gamma\cos\alpha}{\sin^2\alpha + 4\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha}, \quad x_2 = \frac{2r\sin\alpha\sin^2\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha + 4\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha},$$

$$x_3 = \frac{2r\sin\alpha\sin\beta\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha + 4\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha}.$$

Benutzt man die Gleichung 20), so findet man zuerst

$$P = 0, \quad Q = -2\sin^5\alpha\sin^2\beta\sin(\beta-\gamma), \quad R = 2\sin^5\alpha\sin^2\gamma\sin(\beta-\gamma)$$

und dann für x_1, x_2, x_3 die oben angegebenen Werthe. Die Gleichung der Directrix wird nach Gleichung 21): $x_2\sin\beta - x_3\sin\gamma = 0$.

Die Achsen.

Erste Methode.

Wir wollen in der Gleichung 15) und den zwei ähnlich gebildeten Gleichungen die Hauptwurzelgrössen mit w_1, w_2, w_3 bezeichnen; dann sind die Coordinaten der Brennpunkte:

$$22) \quad x_1 = \frac{M}{A}(A_1 \pm w_1), \quad x_2 = \frac{M}{A}(A_2 \pm w_2), \quad x_3 = \frac{M}{A}(A_3 \pm w_3),$$

wobei noch die aus Gleichung 11) herauszulesende Bedingung besteht:

$$23) \quad w_1\sin\alpha + w_2\sin\beta + w_3\sin\gamma = 0.$$

Die Verbindungslinie je zweier Brennpunkte ist eine Achse, also ist die Gleichung derselben:

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ A_1 + w_1 & A_2 + w_2 & A_3 + w_3 \\ A_1 - w_1 & A_2 - w_2 & A_3 - w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

oder entwickelt:

$$24) \quad x_1(w_2A_3 - w_3A_2) + x_2(w_3A_1 - w_1A_3) + x_2(w_1A_2 - w_2A_1) = 0,$$

und zwar repräsentirt diese Gleichung die Haupt- oder Nebenachse, je nachdem man in w_1, w_2, w_3 das Zeichen der Nebenwurzel $\sqrt{e^2 - 4A}$ nach den oben gegebenen Regeln so bestimmt, dass es für die reellen oder imaginären Brennpunkte gilt.

Man kann diese Achsengleichung rational machen, ohne die x auf eine höhere Potenz zu bringen. Multiplicirt man nämlich die Bedingungsgleichung 23) der Reihe nach mit $w_1\sin\alpha$, $w_2\sin\beta$, $w_3\sin\gamma$ und setzt:

$$25) \quad w_2w_3\sin\beta\sin\gamma = -a, \quad w_3w_1\sin\gamma\sin\alpha = -b, \quad w_1w_2\sin\alpha\sin\beta = -c,$$

so erhält man die drei neuen Gleichungen:

$$26) \quad b + c = w_1^2\sin^2\alpha, \quad c + a = w_2^2\sin^2\beta, \quad a + b = w_3^2\sin^2\gamma.$$

Aus 25) ergiebt sich:

$$bc = w_1^2 w_2 w_3 \sin^2\alpha \sin\beta \sin\gamma, \quad ca = w_1 w_2^2 w_3 \sin\alpha \sin^2\beta \sin\gamma,$$
$$ab = w_1 w_2 w_3^2 \sin\alpha \sin\beta \sin^2\gamma,$$

also:

$$w_1 : w_2 : w_3 = bc \sin\beta \sin\gamma : ca \sin\gamma \sin\alpha : ab \sin\alpha \sin\beta,$$

wodurch die Achsengleichung 24) übergeht in:

$$27)\quad \begin{cases} a x_1 \sin\alpha (A_2 b \sin\beta - A_3 c \sin\gamma) + b x_2 \sin\beta (A_3 c \sin\gamma - A_1 a \sin\alpha) \\ \qquad + c x_3 \sin\gamma (A_1 a \sin\alpha - A_2 b \sin\beta) = 0, \end{cases}$$

oder, wenn man zur Abkürzung $a \sin\alpha = a'$, $b \sin\beta = b'$, $c \sin\gamma = c'$ setzt:

$$27\text{a})\quad a' x_1 (A_2 b' - A_3 c') + b' x_2 (A_3 c' - A_1 a') + c' x_3 (A_1 a' - A_2 b') = 0.$$

Die Werthe von a, b, c ergeben sich in rationaler Form aus den Gleichungen 26), wenn man je zwei derselben addirt und von der Summe die dritte abzieht; so erhält man z. B. $2a = -w_1 \sin\alpha + w_2^2 \sin^2\beta + w_3^2 \sin^2\gamma$, oder, wenn man $a \sin\alpha = a'$ setzt und den Factor 2 weglässt, weil es sich ja doch nur um relative Werthe handelt:

$$28)\qquad a' = (-w_1^2 \sin^2\alpha + w_2^2 \sin^2\beta + w_3^2 \sin^2\gamma) \sin\alpha;$$

die Ausdrücke b' und c' sind ähnlich gebildet.

Setzt man in Gleichung 28) für w_1, w_2, w_3 ihre Werthe ein und bezeichnet zur Abkürzung die Wurzel $\sqrt{e^2 - 4A}$ mit W, so kommt:

$$a' = [-(2e_1 + e \pm W) \sin^2\alpha + (2e_2 + e \pm W) \sin^2\beta + (2e_3 + e \pm W) \sin^2\gamma] \sin\alpha,$$

oder wegen der Gleichungen 9):

$$\begin{cases} a' = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma (-a_{11} \sin\beta \sin\gamma - a_{23} \sin^2\alpha + a_{31} \sin\alpha \sin\beta + a_{12} \sin\alpha \sin\gamma) \\ \qquad + 2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \cos\alpha (e \pm W), \end{cases}$$

also ist der relative Werth von:

$$29)\quad a' = 2(-a_{23} \sin\alpha + a_{31} \sin\beta + a_{12} \sin\gamma) \sin\alpha - 2 a_{11} \sin\beta \sin\gamma + \cos\alpha (e \pm W);$$

ähnliche Formen haben die Ausdrücke für b' und c'.

Beispiel 1. Wählt man für die Steiner'sche Ellipse wie oben die Gleichungsform:

$$\frac{x_2 x_3}{\sin\alpha} + \frac{x_3 x_1}{\sin\beta} + \frac{x_1 x_2}{\sin\gamma} = 0,$$

so ist $e = -2 \cotg\vartheta$ und $W = 2\sqrt{\cotg^2\vartheta - 3}$, also ist mit Weglassung des Factors 2:

$$a' = \sin\alpha - \cos\alpha \cotg\vartheta \pm \cos\alpha \sqrt{\cotg^2\vartheta - 3} = -\frac{\cos(\alpha + \vartheta)}{\sin\vartheta} \pm W \cos\alpha.$$

Die Gleichung 27a) liefert dann die Gleichungen der Achsen:

$$\begin{cases} x_1 \sin\alpha \left\{ -\frac{\cos(\alpha+\vartheta)}{\sin\vartheta} \pm W \cos\alpha \right\} \\ \left\{ \sin\beta \frac{\cos(\gamma+\vartheta)}{\sin\vartheta} - \sin\gamma \frac{\cos(\beta+\vartheta)}{\sin\vartheta} \mp W \sin(\beta - \gamma) \right\} + \text{etc.} = 0. \end{cases}$$

Der Factor in der letzten Klammer reducirt sich auf $(cotg\,\vartheta \mp W) sin(\beta-\gamma)$, und da $cotg\,\vartheta \mp W$ für je eine Achse constant ist, so kann man es weglassen und bekommt endlich die Achsengleichungen in der Form:

$$x_1 \left\{ \frac{cos(\alpha+\vartheta)}{sin\,\vartheta} \mp W cos\,\alpha \right\} sin\,\alpha\, sin(\beta-\gamma) + \text{etc.} = 0.$$

Beispiel 2. Bei der Ellipse:

$$\left\{ \begin{aligned} & x_1^2 cos^2\alpha + x_2^2 cos^2\beta + x_3^2 cos^2\gamma - 2x_2x_3 cos\,\beta\, cos\,\gamma - 2x_3x_1 cos\,\gamma\, cos\,\alpha \\ & \qquad - 2x_1x_2 cos\,\alpha\, cos\,\beta = 0 \end{aligned} \right.$$

ist

$$\left\{ \begin{aligned} & a' = 2 sin\,\alpha(-cos\,\gamma\, cos\,\alpha\, sin\,\beta - cos\,\alpha\, cos\,\beta\, sin\,\gamma + cos\,\beta\, cos\,\gamma\, sin\,\alpha) \\ & \qquad - 2cos^2\alpha\, sin\,\beta\, sin\,\gamma + cos\,\alpha(1 + 4 cos\,\alpha\, cos\,\beta\, cos\,\gamma) \pm W cos\,\alpha, \end{aligned} \right.$$

wo $W = \sqrt{1 - 8 cos\,\alpha\, cos\,\beta\, cos\,\gamma}$ zu nehmen ist. Nach einigen leichten Reductionen geht diese Gleichung über in $a' = 2 cos\,\beta\, cos\,\gamma \pm W cos\,\alpha$, weshalb die Gleichung der Achsen folgende Form bekommt:

$$\left\{ \begin{aligned} & x_1(2 cos\,\beta\, cos\,\gamma - cos\,\alpha \pm W cos\,\alpha)(2 cos\,\gamma\, cos\,\alpha\, sin\,\beta - cos\,\beta\, sin\,\beta \pm W cos\,\beta\, sin\,\beta \\ & \qquad - 2 cos\,\alpha\, cos\,\beta\, sin\,\gamma + cos\,\gamma\, sin\,\gamma \mp W cos\,\gamma\, sin\,\gamma) + \text{etc.} = 0. \end{aligned} \right.$$

Der Factor in der zweiten Klammer verwandelt sich nach einigen Transformationen in: $\quad (3 \mp W)\, cos\,\alpha\, sin(\beta-\gamma)$,

und da $3 \mp W$ wieder weggelassen werden kann, so sind die Gleichungen der Achsen: $\quad x_1(2 cos\,\beta\, cos\,\gamma - cos\,\alpha \pm W cos\,\alpha) cos\,\alpha\, sin(\beta-\gamma) \pm \text{etc.} = 0.$

Beispiel 3. Nehmen wir endlich die Ellipse:

$$\left\{ \begin{aligned} & x_1^2 sin^2\beta\, sin^2\gamma + x_2^2 sin^2\gamma\, sin^2\alpha + x_3^2 sin^2\alpha\, sin^2\beta - 2x_2x_3 sin^2\alpha\, sin\,\beta\, sin\,\gamma \\ & \qquad - 2x_3x_1 sin\,\alpha\, sin^2\beta\, sin\,\gamma - 2x_1x_2 sin\,\alpha\, sin\,\beta\, sin^2\gamma = 0, \end{aligned} \right.$$

bei der

$$e = sin^2\alpha\, sin^2\beta\, sin^2\gamma(5 + cotg^2\vartheta),\quad e^2 - 4A = W^2 = sin^4\alpha\, sin^4\beta\, sin^4\gamma(cotg^2\vartheta - 3)^2$$

ist, so hat man:

$$\left\{ \begin{aligned} & a = 2 sin\,\alpha(-sin\,\alpha\, sin^3\beta\, sin\,\gamma - sin\,\alpha\, sin\,\beta\, sin^3\gamma + sin^3\alpha\, sin\,\beta\, sin\,\gamma) - 2 sin^3\beta\, sin^3\gamma \\ & \quad + sin^2\alpha\, sin^2\beta\, sin^2\gamma\, cos\,\alpha(5 + cotg^2\vartheta) \pm sin^2\alpha\, sin^2\beta\, sin^2\gamma\, cos\,\alpha(cotg^2\vartheta - 3). \end{aligned} \right.$$

Wählt man zunächst das positive Zeichen, so ist:

$$\left\{ \begin{aligned} a &= 2 sin^2\alpha\, sin^2\beta\, sin^2\gamma\, cos\,\alpha(cotg^2\vartheta - 1) - 2 sin^3\beta\, sin^3\gamma \\ &= 2 sin^2\alpha\, sin^2\beta\, sin^2\gamma \left\{ cos\,\alpha(cotg^2\vartheta - 1) - \frac{sin\,\beta\, sin\,\gamma}{sin^2\alpha} \right\}, \end{aligned} \right.$$

oder mit Wegwerfung des nunmehr unnützen Factors $2 sin^2\alpha\, sin^2\beta\, sin^2\gamma$:

$$\left\{ \begin{aligned} a &= cos\,\alpha(cotg^2\vartheta - 1) - \frac{sin\,\vartheta}{sin(\alpha-\vartheta)} = cos\,\alpha(cotg^2\vartheta - 1) - \frac{sin(\beta-\vartheta) sin(\gamma-\vartheta)}{sin^2\vartheta} \\ &= cos\,\alpha(cotg^2\vartheta - 1) - sin\,\beta\, sin\,\gamma\, cotg^2\vartheta + sin\,\alpha\, cotg\,\vartheta - cos\,\beta\, cos\,\gamma \\ &= -cos\,\beta\, cos\,\gamma\, cotg^2\vartheta + sin\,\alpha\, cotg\,\vartheta - sin\,\beta\, sin\,\gamma, \end{aligned} \right.$$

oder endlich:

$$a = -\frac{cos(\beta+\vartheta) cos(\gamma+\vartheta)}{sin^2\vartheta};$$

die Gleichung der Nebenachse ist also, weil $A_1 = \frac{\sin^2\beta + \sin^2\gamma}{\sin\beta \sin\gamma} = \frac{\sin(\alpha+\vartheta)}{\sin\vartheta}$ ist:

$$\begin{cases} x_1 \cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)\{\sin(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)\cos(\alpha+\vartheta) \\ \qquad -\sin(\gamma+\vartheta)\cos(\alpha+\vartheta)\cos(\beta+\vartheta)\} + \text{etc.} = 0, \end{cases}$$

oder mit Wegwerfung des Factors $\cos(\alpha+\vartheta)\cos(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta)$:

$$x_1\{\sin(\beta+\vartheta)\cos(\gamma+\vartheta) - \sin(\gamma+\vartheta)\cos(\beta+\vartheta)\} + \text{etc.} = 0,$$

oder endlich: $x_1 \sin(\beta-\gamma) + x_2 \sin(\gamma-\alpha) + x_3 \sin(\alpha-\beta) = 0.$

Dagegen ist für das negative Zeichen:

$$\begin{cases} a = +4\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma \cos\alpha - 2\sin^3\beta \sin^3\gamma = 2\sin^2\beta\sin^2\gamma\,(2\sin^2\alpha\cos\alpha - \sin\beta\sin\gamma) \\ \quad = 2\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta), \end{cases}$$

folglich die Achsengleichung:

$$\begin{cases} x_1 \sin^2\beta\sin^2\gamma\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)\left\{\frac{\sin^2\gamma+\sin^2\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha}\sin^2\gamma\sin^2\alpha\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\right. \\ \qquad \left. -\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\right\} + \text{etc.} = 0, \end{cases}$$

oder mit Wegwerfung des Factors $\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)$:

$$\frac{x_1}{\sin\alpha}\{(\sin^2\gamma+\sin^2\alpha)\sin\gamma\sin(\alpha-\beta) - (\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)\} + \text{etc.} = 0.$$

Da $\sin\gamma\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$ und $\sin\beta\sin(\gamma-\alpha) = \sin^2\gamma - \sin^2\alpha$ ist, so erhält man nach der Reduction:

$$\frac{x_1}{\sin\alpha}(\sin^4\alpha - \sin^2\beta\sin^2\gamma) + \frac{x_2}{\sin\beta}(\sin^4\beta - \sin^2\gamma\sin^2\alpha) + \frac{x_3}{\sin\gamma}(\sin^4\gamma - \sin^2\alpha\sin^2\beta) = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Hauptachse, auf der die beiden sogenannten Brocard'schen Punkte als Brennpunkte liegen.

Wie wir oben gesehen haben, sind die relativen Coordinaten des unendlich fernen Brennpunkts der Parabel: $x_1 = A_1$, $x_2 = A_2$, $x_3 = A_3$, die des im Endlichen gelegenen aber nach Gleichung 18):

$$x_1 = \frac{A_{11}e - \Delta}{A_1}, \quad x_2 = \frac{A_{22}e - \Delta}{A_2}, \quad x_3 = \frac{A_{33}e - \Delta}{A_3},$$

also ist die Gleichung der Achse der Parabel:

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{A_{11}e-\Delta}{A_1} & \frac{A_{22}e-\Delta}{A_2} & \frac{A_{33}e-\Delta}{A_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1x_1 & A_2x_2 & A_3x_3 \\ A_{11}e-\Delta & A_{22}e-\Delta & A_{33}e-\Delta \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \end{vmatrix}$$

oder entwickelt:

$$30) \qquad x_1 A_1\{e(A_{22}A_3^2 - A_{33}A_2^2) + \Delta(A_2^2 - A_3^2)\} + \text{etc.} = 0.$$

Bestimmt man aber die Coordinaten des im Endlichen gelegenen Brennpunkts nach Gleichung 20), so ist

$$
31)\quad \begin{vmatrix} x_1 & PA_{11}\sin\beta\sin\gamma + QA_{12}\sin\gamma\sin\alpha + RA_{13}\sin\alpha\sin\beta & A_1 \\ x_2 & PA_{21}\sin\beta\sin\gamma + QA_{22}\sin\gamma\sin\alpha + RA_{23}\sin\alpha\sin\beta & A_2 \\ x_3 & PA_{31}\sin\beta\sin\gamma + QA_{32}\sin\gamma\sin\alpha + RA_{33}\sin\alpha\sin\beta & A_3 \end{vmatrix} = 0,
$$

die Gleichung der Achse.

Beispiel. Für die oben betrachtete Parabel hat man als Gleichung der Achse, wenn man die dort gefundenen relativen Coordinaten der Brennpunkte benutzt:

$$
\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\gamma \\ -\sin(\beta-\gamma) & \sin\beta + \sin\gamma\cos\alpha & \sin\gamma + \sin\beta\cos\alpha \end{vmatrix} = 0,
$$

oder entwickelt:

$$
\left\{ \begin{aligned} & x_1\{-\sin\alpha\sin\beta(\sin\gamma + \sin\beta\cos\alpha) - \sin\alpha\sin\gamma(\sin\beta + \sin\gamma\cos\alpha)\} \\ & + x_2\{-\sin\alpha\sin\gamma\sin(\beta-\gamma) + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha(\sin\gamma + \sin\beta\cos\alpha\} \\ & + x_3\{2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha(\sin\beta + \sin\gamma\cos\alpha) + \sin\alpha\sin(\beta-\gamma)\} = 0. \end{aligned} \right.
$$

Der Coefficient von x_2 geht nach einigen Reductionen über in:

$$
\sin\gamma\{(\sin\gamma + \sin\beta\cos\alpha)^2 - \sin^2\alpha\sin^2\beta\},
$$

und der von x_3 in: $\sin\beta\{(\sin\beta + \sin\gamma\cos\alpha)^2 - \sin^2\gamma\sin^2\alpha\}$,

so dass man endlich als Gleichung der Achse erhält:

$$
\left\{ \begin{aligned} & -x_1\sin\alpha\{\sin\beta(\sin\gamma + \sin\beta\cos\alpha) + \sin\gamma(\sin\beta + \sin\gamma\cos\alpha)\} \\ & + x_2\sin\gamma\{(\sin\gamma + \sin\beta\cos\alpha)^2 - \sin^2\alpha\sin^2\beta\} \\ & + x_2\sin\beta\{(\sin\beta + \sin\gamma\cos\alpha)^2 - \sin^2\gamma\sin^2\alpha\} = 0. \end{aligned} \right.
$$

Zweite Methode.

Die Achsengleichungen seien:

$$
a)\quad \left\{ \begin{aligned} b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x^3 = 0, \end{aligned} \right.
$$

und ihr Product:

$$
b)\quad l_{11}x_1^2 + l_{22}x_2^2 + l_{33}x_3^2 + 2l_{23}x_2x_3 + 2l_{31}x_3x_1 + 2l_{12}x_1x_2 = 0;
$$

dann gelten die Relationen:

$$
c)\quad \left\{ \begin{aligned} l_{11} &= b_1c_1, & 2l_{23} &= b_2c_3 + b_3c_2, \\ l_{22} &= b_2c_1, & 2l_{31} &= b_3c_1 + b_1c_3, \\ l_{33} &= b_3c_3, & 2l_{12} &= b_1c_2 + b_2c_1. \end{aligned} \right.
$$

Da die Achsen Durchmesser sind, so hat man auch:

$$\text{d)}\qquad \begin{cases} b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 = 0, \\ c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 = 0, \end{cases}$$

und da sie auf einander senkrecht stehen, so ist:

$$\text{e)}\qquad l_{11} + l_{22} + l_{33} - 2 l_{23} \cos\alpha - 2 l_{31} \cos\beta - 2 l_{12} \cos\gamma = 0.$$

Nun sollen aber auch die Achsen conjugirte Polaren sein, das heisst, der Pol der einen soll auf der anderen liegen. Sind also x'_1, x'_2, x'_3 die Coordinaten eines Punktes der Geraden $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$, so ist die Gleichung seiner Polaren:

$$\begin{cases} x_1(a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3) + x_2(a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3) \\ \qquad + x_3(a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3) = 0, \end{cases}$$

und diese muss mit der Gleichung der zweiten Geraden, nämlich

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$$

identisch sein, also hat man mit Weglassung des Verhältnissfactors, der in den c enthalten gedacht werden kann, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 &= c_1, \\ a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 &= c_2, \\ a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 &= c_3; \end{aligned}$$

dazu kommt noch, weil der Punkt x'_1, x'_2, x'_3 auf der Geraden

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

liegt, die Gleichung: $\quad b_1 x'_1 + b_2 x'_2 + b_3 x'_3 = 0.$

Dies giebt als Bedingung, dass die beiden Geraden a) conjugirte Polaren seien, die Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

$$\begin{cases} A_{11} b_1 c_1 + A_{22} b_2 c_2 + A_{33} b_3 c_3 + A_{23}(b_2 c_3 + b_3 c_2) + A_{31}(b_3 c_1 + b_1 c_3) \\ \qquad + A_{12}(b_1 c_2 + b_2 c_1) = 0; \end{cases}$$

vermöge der Gleichungen c) erhält man hieraus:

$$\text{f)}\qquad A_{11} l_{11} + A_{22} l_{22} + A_{33} l_{33} + 2 A_{23} l_{23} + 2 A_{31} l_{31} + 2 A_{12} l_{12} = 0.$$

Um drei weitere Gleichungen für die l zu erhalten, multiplicire man die erste der Gleichungen d) der Reihe nach mit c_1, c_2, c_3 und die zweite der Reihe nach mit b_1, b_2, b_3 und addire jedesmal, so kommt:

$$\text{g)}\qquad \begin{cases} l_{11} A_1 + l_{12} A_2 + l_{13} A_3 = 0, \\ l_{21} A_1 + l_{22} A_2 + l_{23} A_3 = 0, \\ l_{31} A_1 + l_{32} A_2 + l_{33} A_3 = 0. \end{cases}$$

Sollen nun die Gleichungen b), e), f) und g) zusammen bestehen, so muss die Determinante:

$$32)\qquad \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 2x_2x_3 & 2x_3x_1 & 2x_1x_2 \\ 1 & 1 & 1 & -2\cos\alpha & -2\cos\beta & -2\cos\gamma \\ A_{11} & A_{22} & A_{33} & 2A_{23} & 2A_{31} & 2A_{12} \\ A_1 & 0 & 0 & 0 & A_3 & A_2 \\ 0 & A_2 & 0 & A_3 & 0 & A_1 \\ 0 & 0 & A_3 & A_2 & A_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sein; diese Gleichung ist das Product der Achsengleichungen. Dieselbe gilt jedoch nicht mehr für den Fall einer Parabel, wo

$$\left\{\begin{aligned} A = A_{11}\sin^2\alpha + A_{22}\sin^2\beta + A_{33}\sin^2\gamma + 2A_{23}\sin\beta\sin\gamma + 2A_{31}\sin\gamma\sin\alpha \\ + 2A_{12}\sin\alpha\sin\beta = 0 \end{aligned}\right.$$

ist, was sich aus den gemachten Voraussetzungen erklärt; denn die eine Achse ist dann die Gerade im Unendlichen, die andere aber wird unbestimmt oder fällt mit der unendlich fernen Geraden zusammen, weil auf letzterer überhaupt jede Gerade, ja paradoxerweise sie selbst, wenigstens im analytischen Sinne, senkrecht steht, wodurch die Gleichung e) ihre Bedeutung verliert. In der That, $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ sei die Gleichung einer Geraden, $x_1\sin\alpha + x_2\sin\beta + x_3\sin\gamma = 0$ die der Geraden im Unendlichen, so ist die Bedingung, dass beide auf einander senkrecht stehen:

$$\left\{\begin{aligned} a_1(\sin\alpha - \sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta) + a_2(\sin\beta - \sin\gamma\cos\alpha - \sin\alpha\cos\gamma) \\ + a_3(\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha) = 0, \end{aligned}\right.$$

die erfüllt wird, welche Werthe a_1, a_2, a_3 auch haben mögen. Aber auch an der gefundenen Determinante selbst kann man die Wahrheit des Gesagten nachweisen. Denn multiplicirt man die Verticalreihen der Reihe nach mit $\sin^2\alpha$, $\sin^2\beta$, $\sin^2\beta$, $\sin\beta\sin\gamma$, $\sin\gamma\sin\alpha$, $\sin\alpha\sin\beta$ und addirt dann alle zur ersten Verticalreihe, so erhält man in derselben als oberstes Glied

$$(x_1\sin\alpha + x_2\sin\beta + x_3\sin\gamma)^2,$$

sonst aber wegen

$$\left\{\begin{aligned} A = A_1\sin\alpha + A_2\sin\beta + A_3\sin\gamma = A_{11}\sin^2\alpha + A_{22}\sin^2\beta + A_{33}\sin^2\gamma + 2A_{23}\sin\beta\sin\gamma \\ + 2A_{31}\sin\gamma\sin\alpha + 2A_{12}\sin\alpha\sin\beta = 0 \end{aligned}\right.$$

lauter Nullen; das heisst, die Gleichung ist in das Quadrat der Gleichung der unendlich fernen Geraden übergegangen.

Die Determinante 32) ist sehr unbequem zur Ausrechnung; wenn man aber die aus g) gewonnenen Werthe von l_{11}, l_{22}, l_{33} in b) einsetzt und nach l_{23}, l_{31}, l_{12} ordnet, so erhält man:

$$A_1(x_2A_3 - x_3A_2)^2 l_{23} + A_2(x_3A_1 - x_1A_3)^2 l_{31} + A_3(x_1A_2 - x_2A_1)^2 l_{12} = 0;$$

auf demselben Wege gehen e) und f) über in:

$$\left\{\begin{array}{l} A_1(A_{22}A_3^2+A_{33}A_2^2-2A_{23}A_2A_3)l_{23}+A_2(A_{33}A_1^2+A_{11}A_3^2-2A_{31}A_3A_1)l_{31} \\ \qquad +A_3(A_{11}A_2^2+A_{22}A_1^2-2A_{12}A_1A_2)l_{12}=0, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} A_1(A_2^2+A_3^2+2A_2A_3\cos\alpha)l_{23}+A_2(A_3^2+A_1^2+2A_3A_1\cos\beta)l_{31} \\ \qquad +A_3(A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\gamma)l_{12}=0; \end{array}\right.$$

also hat man jetzt für das Product der Achsengleichungen die Determinantengleichung:

$$33)\quad \begin{vmatrix} (x_2A_3-x_3A_2)^2 & (x_3A_1-x_1A_3)^2 & (x_1A_2-x_2A_1)^2 \\ A_{22}A_3^2+A_{33}A_2^2-2A_{23}A_2A_3 & A_{33}A_1^2+A_{11}A_3^2-2A_{31}A_3A_1 & A_{11}A_2^2+A_{22}A_1^2-2A_{12}A_1A_2 \\ A_2^2+A_3^2+2A_2A_3\cos\alpha & A_3^2+A_1^2+2A_3A_1\cos\beta & A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\gamma \end{vmatrix}=0.$$

Die Form des erhaltenen Resultats führt uns zu folgender kürzeren Herleitung desselben. Wenn nämlich p, q, r beliebige Parameter sind, so ist die Gleichung eines jeden Geradenpaares, das durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts geht:

$$\text{h)}\qquad p(A_3x_2-A_2x_3)^2+q(A_1x_3-A_3x_1)^2+r(A_2x_1-A_1x_2)^2=0,$$

oder entwickelt:

$$\text{i)}\quad \left\{\begin{array}{l} x_1^2(qA_3^2+rA_2^2)+x_2^2(rA_1^2+pA_3^2)+x_3^2(pA_2^2+qA_1^2)-2x_2x_3pA_2A_3 \\ \qquad -2x_3x_1qA_3A_1-2x_1x_2rA_1A_2=0; \end{array}\right.$$

denn die Determinante dieser ternären quadratischen Form verschwindet, wie sich leicht zeigen lässt, welche Werthe auch p, q, r haben mögen, und aus Gleichung h) folgt unmittelbar, dass die durch sie dargestellten Geraden sich im Mittelpunkt des Kegelschnitts schneiden.

Aus Gleichung i) folgt als Bedingung der Orthogonalität der durch sie bezeichneten Geraden:

$$\left\{\begin{array}{l} qA_3^2+rA_2^2+rA_1^2+pA_3^2+pA_2^2+qA_1^2+2pA_2A_3\cos\alpha+2qA_3A_1\cos\beta \\ \qquad +2rA_1A_2\cos\gamma=0, \end{array}\right.$$

oder nach p, q, r geordnet:

$$\text{k)}\quad \left\{\begin{array}{l} p(A_2^2+A_3^2+2A_2A_3\cos\alpha)+q(A_3^2+A_1^2+2A_3A_1\cos\beta) \\ \qquad +r(A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\gamma)=0, \end{array}\right.$$

und als Bedingung der reciproken Polarität:

$$\left\{\begin{array}{l} A_{11}(qA_3^2+rA_2^2)+A_{22}(rA_1^2+pA_3^2)+A_{33}(pA_2^2+rA_1^2)-2pA_{23}A_2A_3 \\ \qquad -2qA_{31}A_3A_1-2rA_{12}A_1A_2=0, \end{array}\right.$$

oder nach p, q, r geordnet:

$$\text{l)}\quad \left\{\begin{array}{l} p(A_2^2A_{33}+A_3^2A_{22}-2A_2A_3A_{23})+q(A_3^2A_{11}+A_1^2A_{33}-2A_3A_1A_{31}) \\ \qquad +r(A_1^2A_{22}+A_2^2A_{11}-2A_1A_2A_{12})=0. \end{array}\right.$$

Durch Elimination von p, q, r aus den Gleichungen h), k), l) erhält man wiederum die Determinantengleichung 33).

Man kann dieser Gleichung noch bequemere Formen geben. Es ist nämlich erstens:

$$\begin{cases} A_{22}A_3^2 + A_{33}A_2^2 - 2A_{23}A_2A_3 = A_2(A_{33}A_2 - A_{23}A_3) + A_3(A_{22}A_3 - A_{23}A_2) \\ = A_2(A_{33}A_{12}\sin\alpha + A_{33}A_{22}\sin\beta - A_{23}A_{31}\sin\alpha - A_{23}^2\sin\beta) \\ + A_3(A_{22}A_{31}\sin\alpha + A_{22}A_{33}\sin\gamma - A_{23}A_{12}\sin\alpha - A_{23}^2\sin\gamma) \\ = \Delta A_2(a_{11}\sin\beta - a_{12}\sin\alpha) + \Delta A_3(a_{11}\sin\gamma - a_{31}\sin\alpha) \\ = \Delta\{a_{11}(A_1\sin\alpha + A_2\sin\beta + A_3\sin\gamma) - (a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3)\sin\alpha\}, \end{cases}$$

das heisst, nach den Gleichungen 3) und 4) gleich $\Delta(a_{11}A - \Delta\sin^2\alpha)$.

Zweitens ist nach Gleichung 9a):

$$A_2^2 + A_3^2 = (A_{22} + A_{33}) + \Delta(e_2 - e_3).$$

Vermöge der Gleichungen 3) und 9a) ist aber auch noch:

$$\begin{cases} AA_1 = A_1^2\sin\alpha + A_1A_2\sin\beta + A_1A_3\sin\gamma = AA_{11}\sin\alpha + \Delta e_1\sin\alpha + A_1A_2\sin\beta \\ \qquad + A_1A_3\sin\gamma, \end{cases}$$

oder nach Multiplication mit $\sin\alpha$:

$$A_3A_1\sin\gamma\sin\alpha + A_1A_2\sin\alpha\sin\beta = A(A_1 - A_{11}\sin\alpha)\sin\alpha - \Delta e_1\sin^2\alpha;$$

ebenso ist:

$$A_2A_3\sin\beta\sin\gamma + A_1A_2\sin\alpha\sin\beta = A(A_2 - A_{22}\sin\beta)\sin\beta - \Delta e_2\sin^2\beta,$$

$$A_2A_3\sin\beta\sin\gamma + A_3A_1\sin\gamma\sin\alpha = A(A_3 - A_{33}\sin\alpha)\sin\gamma - \Delta e_3\sin^2\gamma,$$

also:

$$2A_2A_3\sin\beta\sin\gamma = 2AA_{23}\sin\beta\sin\gamma - \Delta(e_2\sin^2\beta + e_3\sin^2\gamma - e_1\sin^2\alpha).$$

Daher hat man endlich:

$$\begin{cases} A_2^2 + A_3^2 + 2A_2A_3\cos\alpha = A(A_{22} + A_{33} + 2A_{23}\cos\alpha) \\ + \Delta\left\{e_2 + e_3 - \dfrac{(e_2\sin^2\beta + e_3\sin^2\gamma - e_1\sin^2\alpha)\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}\right\}; \end{cases}$$

der Coefficient von Δ gestaltet sich um in:

$$\begin{cases} \{e_2\sin\beta(\sin\gamma - \sin\beta\cos\alpha) + e_3\sin\gamma(\sin\beta - \sin\gamma\cos\alpha) + e_1\sin^2\alpha\cos\alpha\} : \sin\beta\sin\gamma \\ \quad = (e_1\sin\alpha\cos\alpha + e_2\sin\beta\cos\beta + e_3\sin\gamma\cos\gamma)\sin\alpha : \sin\beta\sin\gamma = -e\sin^2\alpha \end{cases}$$

(nach Gleichung 13). Somit ist:

$$A_2^2 + A_3^2 + 2A_2A_3\cos\alpha = A(A_{22} + A_{33} + 2A_{23}\cos\alpha) - \Delta e\sin^2\alpha.$$

Setzt man diese Werthe in die Determinantengleichung 33) ein, so erhält dieselbe folgende Gestalt.

$$\left\{\begin{vmatrix} (x_2A_3 - x_3A_2)^2 & (x_3A_1 - x_1A_3)^2 & (x_1A_2 - x_2A_1)^2 \\ a_{11}A - \Delta\sin^2\alpha & a_{22}A - \Delta\sin^2\beta & a_{33}A - \Delta\sin^2\gamma \\ A(A_{22}+A_{33}+2A_{23}\cos\alpha) - \Delta e\sin^2\alpha & A(A_{33}+A_{11}+2A_{31}\cos\beta) - \Delta e\sin^2\beta & A(A_{11}+A_{22}+2A_{12}\cos\gamma) - \Delta e\sin^2\gamma \end{vmatrix} = 0,\right.$$

oder auch:

$$34)\quad \begin{vmatrix} (x_2 A_3 - x_3 A_2)^2 & (x_3 A_1 - x_1 A_3)^2 & (x_1 A_2 - x_2 A_1)^2 \\ a_{11} A - \Delta \sin^2\alpha & a_{22} A - \Delta \sin^2\beta & a_{33} A - \Delta \sin^2\gamma \\ A_{22} + A_{33} + 2 A_{23} \cos\alpha - a_{11} e & A_{33} + A_{11} + 2 A_{31} \cos\beta - a_{22} e & A_{11} + A_{22} + 2 A_{12} \cos\gamma - a_{33} e \end{vmatrix} = 0.$$

Besteht der Kegelschnitt aus zwei geraden Linien, ist also $\Delta = 0$, so hebt sich in der zweiten Zeile A weg, und die Gleichung stellt dann das Product der Gleichungen ihrer Winkelhalbirenden dar.

Beispiel 1. Bei der Steiner'schen Ellipse ist:

$$a_{11} A - \Delta \sin^2\alpha = -\frac{2\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma},$$

oder relativ gleich $\sin^2\alpha$; ferner ist

$$A_{22} + A_{33} + 2 A_{23}\cos\alpha - a_{11} e = -\frac{1}{\sin^2\beta} - \frac{1}{\sin^2\gamma} + \frac{2\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma},$$

oder relativ gleich $\sin^4\alpha$; daher wir die Determinante 34) in diesem Falle:

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \left(\frac{x_2}{\sin\gamma} - \frac{x_3}{\sin\beta}\right)^2 & \left(\frac{x_3}{\sin\alpha} - \frac{x_1}{\sin\gamma}\right)^2 & \left(\frac{x_1}{\sin\beta} - \frac{x_2}{\sin\alpha}\right)^2 \\ \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \sin^4\alpha & \sin^4\beta & \sin^4\gamma \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (x_2\sin\beta - x_3\sin\gamma)^2 & (x_3\sin\gamma - x_1\sin\alpha)^2 & (x_1\sin\alpha - x_2\sin\beta)^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \end{vmatrix} \end{aligned}\right.$$

oder entwickelt:

$$\left\{\begin{aligned} &(x_2\sin\beta - x_3\sin\gamma)^2 \sin\alpha\sin(\beta-\gamma) + (x_3\sin\gamma - x_1\sin\alpha)^2 \sin\beta\sin(\gamma-\alpha) \\ &\qquad + (x_1\sin\alpha - x_2\sin\beta)^2 \sin\gamma\sin(\alpha-\beta) = 0. \end{aligned}\right.$$

Die weitere Entwickelung nach Potenzen der x giebt endlich das Resultat:

$$\left\{\begin{aligned} &x_1^2\sin^3\alpha\sin(\beta-\gamma) + x_2^2\sin^3\beta\sin(\gamma-\alpha) + x_3^2\sin^3\gamma\sin(\alpha-\beta) \\ &\qquad + 2x_2x_3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma) + 2x_3x_1\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin(\gamma-\alpha) \\ &\qquad + 2x_1x_2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin(\alpha-\beta) = 0. \end{aligned}\right.$$

Beispiel 2. Bei der schon mehrfach betrachteten Ellipse:

$$\left\{\begin{aligned} &x_1^2\cos^2\alpha + x_2^2\cos^2\beta + x_3^2\cos^2\gamma - 2x_2x_3\cos\beta\cos\gamma - 2x_3x_1\cos\gamma\cos\alpha \\ &\qquad 2 - x_1x_2\cos\alpha\cos\beta = 0 \end{aligned}\right.$$

ist $a_{11} A - \Delta\sin^2\alpha = 4\cos^3\alpha\cos\beta\cos\gamma(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) + 4\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma\sin^2\alpha$

oder relativ gleich:

$$\left\{\begin{aligned} \cos^2\alpha(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin^2\alpha &= \cos^2\alpha + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\ &= \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma; \end{aligned}\right.$$

ferner ist:

$$\begin{cases} A_{22}+A_{33}+2A_{23}\cos\alpha-a_{11}e=4\cos^3\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) \\ \qquad =-\cos^2\alpha \end{cases}$$

oder relativ gleich $\cos^2\alpha$.

Damit erhält man als Product der Achsengleichungen aus Gleichung 34):

$$\begin{cases} (x_2\sin\gamma-x_3\sin\beta)^2\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+(x_3\sin\alpha-x_1\sin\gamma)^2\sin\beta\sin(\gamma-\alpha) \\ \qquad +(x_1\sin\beta-x_2\sin\alpha)^2\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=0, \end{cases}$$

oder entwickelt:

$$\begin{cases} x_1^2\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)+x_2^2\cos\beta\sin(\gamma-\alpha)+x_3^2\cos\gamma\sin(\alpha-\beta)+x_2x_3\sin(\beta-\gamma) \\ \qquad +x_3x_1\sin(\gamma-\alpha)+x_1x_2\sin(\alpha-\beta)=0. \end{cases}$$

Die in diesen beiden Beispielen gefundenen Endgleichungen können nach bekannter Methode (vergl. Salmon-Fiedler a. a. O., S. 548 Art. 323) auf dreierlei Weise in ihre Factoren zerlegt werden, wobei jedoch zu bemerken ist, dass diese drei Resultate unsymmetrisch sind und erst in jedem gegebenen Falle durch besondere Kunstmittel in irgend eine symmetrische Form übergeführt werden können, während unsere erste Methode eine solche sofort ohne weitere Rechnung liefert.

Dritte Methode.

Man verbinde einen Punkt P in der Ebene des Kegelschnitts mit seinem Mittelpunkt C und ziehe durch C eine Senkrechte auf PC; hat man den Punkt P so gewählt, dass die genannte Senkrechte parallel ist seiner Polare in Bezug auf den Kegelschnitt, so liegt er auf einer Achse desselben.

Nennt man $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ die Coordinaten von P, so ist die Gleichung von PC: $x_1(A_3\mathfrak{x}_2-A_2\mathfrak{x}_3)+x_2(A_1\mathfrak{x}_3-A_3\mathfrak{x}_1)+x_3(A_2\mathfrak{x}_1-A_1\mathfrak{x}_2)=0,$

und die Gleichung der darauf senkrecht stehenden und durch C gehenden Geraden:

$$35)\qquad a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0,$$

wobei man

$$36)\begin{cases} a_1=-\mathfrak{x}_1(A_2^2+A_3^2+2A_2A_3\cos\alpha)+\mathfrak{x}_2(A_2A_3\cos\beta+A_3A_1\cos\alpha+A_1A_2-A_3^2\cos\gamma) \\ \qquad +\mathfrak{x}_3(A_2A_3\cos\gamma+A_3A_1+A_1A_2\cos\alpha-A_2^2\cos\beta) \end{cases}$$

setzen muss; die Werthe von a_2 und a_3 sind ähnlich gebildet.

Setzt man in den zu $\mathfrak{x}_2$ gehörenden Klammerfactor der Gleichung 36):

$$A_1=\frac{A-A_2\sin\beta-A_3\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

so erhält er die Form:

$$\frac{A(A_2+A_3\cos\alpha)-(A_2^2+A_3^2+2A_2A_3\cos\alpha)\sin\beta}{\sin\alpha};$$

ebenso wird der Coefficient von $\mathfrak{x}_3$:

$$\frac{A(A_3+A_2\cos\alpha)-(A_2^2+A_3^2+2A_2A_3\cos\alpha)\sin\gamma}{\sin\alpha};$$

somit erhält man statt 36) die elegantere Gleichung:

$$37)\quad\begin{cases} a_1\sin\alpha=A[\mathfrak{x}_2(A_2+A_3\cos\alpha)+\mathfrak{x}_3(A_3+A_2\cos\alpha)]-(\mathfrak{x}_1\sin\alpha+\mathfrak{x}_2\sin\beta \\ \qquad +\mathfrak{x}_3\sin\gamma)(A_2^2+A_3^2+2A_2A_3\cos\alpha). \end{cases}$$

Die Gleichung der Polare von P sei:

38) $$K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3 = 0,$$

wo

39) $$\begin{cases} K_1 = a_{11}\mathfrak{x}_1 + a_{12}\mathfrak{x}_2 + a_{13}\mathfrak{x}_3, \\ K_2 = a_{21}\mathfrak{x}_1 + a_{22}\mathfrak{x}_2 + a_{23}\mathfrak{x}_3, \\ K_3 = a_{31}\mathfrak{x}_1 + a_{32}\mathfrak{x}_2 + a_{33}\mathfrak{x}_3 \end{cases}$$

zu setzen ist; dann ist

40) $$\begin{vmatrix} a_1 & K_1 & \sin\alpha \\ a_2 & K_2 & \sin\beta \\ a_3 & K_3 & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0$$

das Product der Achsengleichungen.

Scheinbar allgemeiner wird die Lösung, wenn man den Ort des Punktes sucht, dessen Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt und einen mit ihm concentrischen Kreis von beliebigem Halbmesser ϱ parallel sind. Nach Salmon-Fiedler a. a. O., S. 116 Art. 71, ist die Entfernung ϱ eines Punktes x_1, x_2, x_3 von C, dessen absolute Coordinaten

$$x_1 = \frac{M}{A} A_1, \quad x_2 = \frac{M}{A} A_2, \quad x_3 = \frac{M}{A} A_3$$

sind, gegeben durch die Gleichung:

$$\begin{cases} (A_3 x_2 - A_2 x_3)^2 + (A_1 x_3 - A_3 x_1)^2 + (A_2 x_1 - A_1 x_2)^2 \\ \qquad - 2(A_1 x_3 - A_3 x_1)(A_2 x_1 - A_1 x_2)\cos\alpha - 2(A_2 x_1 - A_1 x_2)(A_3 x_2 - A_2 x_3)\cos\beta \\ \qquad - 2(A_3 x_2 - A_2 x_3)(A_1 x_3 - A_3 x_1)\cos\gamma - A^2 \varrho^2 = 0. \end{cases}$$

Macht man dieselbe dadurch homogen, dass man das letzte Glied auf der linken Seite mit $(x_1 \sin\alpha + x_2 \sin\beta + x_3 \sin\gamma)^2 : M^2$, wo $M = 2r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ ist, multiplicirt, so stellt sie die Gleichung eines Kreises vor, der den Radius ϱ und den Mittelpunkt C hat. Bezeichnet man diese Gleichung kurzweg mit $c = 0$, so ist die Gleichung der Polare des Punktes $P(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2\, \mathfrak{x}_3)$ in Bezug auf diesen Kreis

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0,$$

wo

$$\begin{cases} c_1 = -A_3(A_1\mathfrak{x}_3 - A_3\mathfrak{x}_1) + A_2(A_2\mathfrak{x}_1 - A_1\mathfrak{x}_2) + A_3(A_2\mathfrak{x}_1 - A_1\mathfrak{x}_2)\cos\alpha \\ \qquad - A_2(A_1\mathfrak{x}_3 - A_3\mathfrak{x}_1)\cos\alpha - A_2(A_3\mathfrak{x}_2 - A_2\mathfrak{x}_3)\cos\beta + A_3(A_3\mathfrak{x}_2 - A_2\mathfrak{x}_3)\cos\gamma \\ \qquad - \dfrac{A^2\varrho^2}{2M^2}(\mathfrak{x}_1\sin\alpha + \mathfrak{x}_2\sin\beta + \mathfrak{x}_3\sin\gamma)\sin\alpha \end{cases}$$

ist; ähnliche Werthe haben c_2 und c_3. Dann ist aber das Product der Achsengleichungen:

$$\begin{vmatrix} c_1 & K_1 & \sin\alpha \\ c_2 & K_2 & \sin\beta \\ c_3 & K_3 & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplicirt man in dieser Determinante die dritte Verticalreihe mit

$$\frac{A^2\varrho^2}{2M^2}(\mathfrak{x}_1 \sin\alpha + \mathfrak{x}_2 \sin\beta + \mathfrak{x}_3 \sin\gamma)$$

und addirt sie zu der ersten, so fällt das letzte Glied von c_1, c_2, c_3 weg, womit der Radius ϱ aus der Achsengleichung entfernt ist. Es ist also ganz gleichgiltig, wie gross derselbe ist; das Resultat muss immer das nämliche sein, welchen Werth auch ϱ haben mag. Nimmt man z. B. $\varrho = 0$ an und ordnet dann die rechte Seite der Gleichung, welche c_1 giebt, nach den $\mathfrak{x}$, so kommt:

$$\left\{\begin{aligned} c_1 = \mathfrak{x}_1(A_2^2 + A_3^2 + 2A_2A_3\cos\alpha) - \mathfrak{x}_2(A_2A_3\cos\beta + A_3A_1\cos\alpha + A_1A_2 - A_3^2\cos\beta) \\ - \mathfrak{x}_3(A_2A_3\cos\gamma + A_3A_1 + A_1A_2\cos\alpha - A_2^2\cos\gamma), \end{aligned}\right.$$

also derselbe Werth, den wir oben (Gleichung 36) für a_1 gefunden haben, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, was wegen der relativen Bedeutung der a und c irrelevant ist. In den Lehrbüchern der analytischen Geometrie (z. B. Salmon-Fiedler a. a. O., S. 690 Art. 382 B. 3) verwendet man zu diesem Zwecke den sogenannten Directorkreis, von dessen sämmtlichen Peripheriepunkten aus der gegebene Kegelschnitt unter einem rechten Winkel erscheint; das Quadrat seines Halbmessers ϱ ist gleich der Summe der Quadrate der Halbachsen, das heisst nach Gleichung 16) ist

$$\varrho^2 = -M^2 Dc : A^2.$$

Dass es überflüssig ist, erst jedesmal die Gleichung dieses Kreises zu entwickeln, um die vorgelegte Aufgabe zu lösen, liegt nach unseren Darlegungen auf der Hand. Dass ferner für $\varrho = 0$ die Gleichung des Hilfskreises auch betrachtet werden kann als das Product der Gleichungen zweier imaginären conjugirten Geraden, die durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes gehen und nach den cyklischen Punkten gerichtet sind, haben wir schon oben bei der Discussion der Kegelschnittsgleichung unter Nr. IV bemerkt.

Vierte Methode.

Die absoluten Mittelpunkts-Coordinaten eines Kegelschnitts sind:

$$x_1 = MA_1 : A, \quad x_2 = MA_2 : A, \quad x_3 = MA_3 : A;$$

ferner ist nach Salmon-Fiedler a. a. O., S. 117 Art. 71 die Entfernung E eines Punktes (x_1, x_2, x_3) vom Mittelpunkt gegeben durch die Gleichung:

$$\left\{\begin{aligned} E^2 = \frac{1}{A^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma} \{\sin\alpha\cos\alpha(MA_1 - Ax_1)^2 \\ + \sin\beta\cos\beta(MA_2 - Ax_2)^2 + \sin\gamma\cos\gamma(MA_3 - Ax_3)^2\}. \end{aligned}\right.$$

Für die Achsen ist E ein Maximum oder Minimum; fügt man daher zur rechten Seite dieser Gleichung noch $\lambda(x_1\sin\alpha + x_2\sin\beta + x_3\sin\gamma - M)$ und μK hinzu, wo K die in Gleichung 1) angegebene Bedeutung hat und λ und μ constante Parameter sind, und lässt den irrelevanten Factor

$\frac{1}{A^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}$ weg, so erhält man durch partielle Differentiation nach x_1, x_2, x_3 folgende Gleichungen:

$$- A_1 \sin\alpha \cos\alpha (MA_1 - Ax_1) + \lambda \sin\alpha + \mu K_1 = 0,$$
$$- A_2 \sin\beta \cos\beta (MA_2 - Ax_2) + \lambda \sin\beta + \mu K_2 = 0,$$
$$- A_3 \sin\gamma \cos\gamma (MA_3 - Ax_3) + \lambda \sin\gamma + \mu K_3 = 0;$$

Hier sind K_1, K_2, K_3 die partiellen Differentialquotienten von K nach x_1, x_2, x_3. Sollen diese Gleichungen zusammen bestehen, so muss

$$41)\qquad \begin{vmatrix} \sin\alpha \cos\alpha (MA_1 - Ax_1) & K_1 & \sin\alpha \\ \sin\beta \cos\beta (MA_2 - Ax_2) & K_2 & \sin\beta \\ \sin\gamma \cos\gamma (MA_3 - Ax_3) & K_3 & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0$$

sein. Damit diese Gleichung homogen werde, muss man M durch seinen Werth $x_1 \sin\alpha + x_2 \sin\beta + x_3 \sin\gamma$ ersetzt denken. Wenn man nun nachweisen kann, dass sie durch die Coordinaten des Kegelschnitt-Mittelpunktes befriedigt wird, dass sowohl ihre Determinante als auch die von uns so genannte Function e für sie verschwinden und dass sie die Bedingung der reciproken Polarität [Gleichung f)] erfüllt, so ist sie das Product der Gleichungen der Achsen. Durch Substitution der Mittelpunkts-Coordinaten aber geht M in $A_1 \sin\alpha + A_2 \sin\beta + A_3 \sin\gamma = A$ über, weshalb die Glieder der ersten Verticalreihe verschwinden. Um den Beweis, dass die übrigen Bedingungen zutreffen, zu erleichtern, denke man sich den gegebenen Kegelschnitt auf ABC als Polardreieck bezogen, wodurch seine Gleichung die einfachere Gestalt $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0$ annimmt. Die Entwickelung der Determinantengleichung 41) liefert dann das Resultat:

$$\left\{\begin{aligned} & a_1^2 x_1^2 (a_2 \sin\gamma \cos\gamma - a_3 \sin\beta \cos\beta) + a_2^2 x_2^2 (a_3 \sin\alpha \cos\alpha - a_1 \sin\gamma \cos\gamma) \\ & \quad + a_3^2 x_3^2 (a_1 \sin\beta \cos\beta - a_2 \sin\alpha \cos\alpha) + a_2 a_3 x_2 x_3 \{a_1 \sin(\beta - \gamma) \\ & \quad + a_2 \sin\alpha - a_3 \sin\alpha\} + a_3 a_1 x_3 x_1 \{- a_1 \sin\beta + a_2 \sin(\gamma - \alpha) \\ & \quad + a \sin\beta\} + a_1 a_2 x_1 x_2 \{a_1 \sin\gamma - a_2 \sin\gamma + a_3 \sin(\alpha - \beta)\} = 0. \end{aligned}\right.$$

Die Determinante dieser quadratischen Form ist mit Abwerfung des Factors $a_1^2 a_2^2 a_3^2$:

$$\begin{vmatrix} a_2 \sin\gamma \cos\gamma - a_3 \sin\beta \cos\beta & \frac{1}{2}\left\{a_1 \sin\gamma - a_2 \sin\gamma + a_3 \sin(\alpha - \beta)\right\} & \frac{1}{2}\left\{- a_1 \sin\beta + a_2 \sin(\gamma - \alpha) + a_3 \sin\beta\right\} \\ \frac{1}{2}\left\{a_1 \sin\gamma - a_2 \sin\gamma + a_3 \sin(\alpha - \beta)\right\} & a_3 \sin\alpha \cos\alpha - a_1 \sin\gamma \cos\gamma & \frac{1}{2}\left\{a_1 \sin(\beta - \gamma) + a_2 \sin\alpha - a_3 \sin\alpha\right\} \\ \frac{1}{2}\left\{- a_1 \sin\beta + a_2 \sin(\gamma - \alpha) + a_3 \sin\beta\right\} & \frac{1}{2}\left\{a_1 \sin(\beta - \gamma) + a_2 \sin\alpha - a_3 \sin\alpha\right\} & a_1 \sin\beta \cos\beta - a_2 \sin\alpha \cos\alpha \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man aber die Horizontalreihen bezüglich mit $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ und addirt sie dann zur ersten, so werden die Glieder der letzteren alle gleich Null.

Die Function e ferner ist hier gleich:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1^2(a_2 \sin\gamma\cos\gamma - a_3\sin\beta\cos\beta) + a_2^2(a_3\sin\alpha\cos\alpha - a_1\sin\gamma\cos\gamma) \\ \qquad + a_3^2(a_1\sin\beta\cos\beta - a_2\sin\alpha\cos\alpha) - a_2 a_3\{a_1\sin(\beta-\gamma) \\ \qquad + a_2\sin\alpha - a_3\sin\alpha\}\cos\alpha - a_3 a_1\{-a_1\sin\beta + a_2\sin(\gamma-\alpha) \\ \qquad + a_3\sin\beta\}\cos\beta - a_1 a_2\{a_1\sin\gamma - a_2\sin\gamma + a_3\sin(\alpha-\beta)\}\cos\gamma; \end{array}\right.$$

fasst man die zusammengehörigen Glieder zusammen und berücksichtigt man die bekannte Identität:

$$\cos\alpha\sin(\beta-\gamma) + \cos\beta\sin(\gamma-\alpha) + \cos\gamma\sin(\alpha-\beta) = 0,$$

so findet man, dass e verschwindet.

Weil endlich hier $A_{11} = a_2 a_3$, $A_{22} = a_3 a_1$, $A_{33} = a_1 a_2$, $A_{23} = A_{31} = A_{12} = 0$ ist, so sind die Geraden reciproke Polaren, sobald

$$\left\{\begin{array}{l} a_1^2 a_2 a_3(a_2\sin\gamma\cos\gamma - a_3\sin\beta\cos\beta) + a_1 a_2^2 a_3(a_3\sin\alpha\cos\alpha - a_1\sin\gamma\cos\gamma) \\ \qquad + a_1 a_2 a_3^2(a_1\sin\beta\cos\beta - a_2\sin\alpha\cos\alpha) \end{array}\right.$$

verschwindet, was in der That der Fall ist.

Die Gleichung 41) kann man auch in der Form schreiben:

$$(x_1\sin\alpha + x_2\sin\beta + x_3\sin\gamma).\begin{vmatrix} A_1\sin\alpha\cos\alpha & K_1 & \sin\alpha \\ A_2\sin\beta\cos\beta & K_2 & \sin\beta \\ A_3\sin\gamma\cos\gamma & K_3 & \sin\gamma \end{vmatrix} - A\begin{vmatrix} x_1\sin\alpha\cos\alpha & K_1 & \sin\alpha \\ x_2\sin\beta\cos\beta & K_2 & \sin\beta \\ x_3\sin\gamma\cos\gamma & K_3 & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

welche merkwürdige Folgerungen zulässt. Setzt man nämlich die zweite Determinante für sich allein der Null gleich, so bedeutet die dadurch entstandene Gleichung, wie die Theorie der Kegelschnittbüschel lehrt, eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten den Achsen des gegebenen Kegelschnitts parallel sind. Dieselbe geht durch den Höhenschnittpunkt des Fundamentaldreiecks ABC und durch den Mittelpunkt des gegebenen Kegelschnitts; denn erstens werden die erste und die dritte Verticalreihe gleich, sobald man $x_1 = 1 : \cos\alpha$, $x_2 = 1 : \cos\beta$, $x_3 = 1 : \cos\gamma$ setzt; wenn man zweitens A_1, A_2, A_3 statt x_1, x_2, x_3 in K_1, K_2, K_3 substituirt, so wird z. B. $a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3$ nach Gleichung 4) gleich $\Delta\sin\alpha$, so dass nach Weghebung des Factors Δ die zweite Verticalreihe gleich der dritten wird. Die gerade Linie ferner, die durch die annullirte erste Determinante bezeichnet wird, geht durch den Mittelpunkt des gegebenen Kegelschnitts und berührt die correspondirende gleichseitige Hyperbel in diesem Mittelpunkt. Daraus ergiebt sich, dass jedem Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel zugeordnet ist, deren Asymptoten parallel sind den Achsen des Kegelschnitts und die durch den Höhenschnittpunkt des Fundamentaldreiecks und durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts geht, dadurch also vollkommen bestimmt ist. Für die Steiner'sche Ellipse ist z. B. die Gleichung dieser gleichseitigen Hyperbel:

$$\begin{vmatrix} x_1 \sin\alpha \cos\alpha & \dfrac{x_2}{\sin\gamma} + \dfrac{x_3}{\sin\beta} & \sin\alpha \\ x_2 \sin\beta \cos\beta & \dfrac{x_3}{\sin\alpha} + \dfrac{x_1}{\sin\gamma} & \sin\beta \\ x_3 \sin\gamma \cos\gamma & \dfrac{x_1}{\sin\beta} + \dfrac{x_2}{\sin\alpha} & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt:

$x_1(x_3 \sin\gamma - x_2 \sin\beta)\cos\alpha + x_2(x_1 \sin\alpha - x_3 \sin\gamma)\cos\beta + x_3(x_2 \sin\beta - x_1 \sin\alpha \cos\gamma = 0$; dies giebt: $x_2 x_3 \sin(\beta - \gamma) + x_3 x_1 \sin(\gamma - \alpha) + x_1 x_2 \sin(\alpha - \beta) = 0$ oder die Gleichung der Kiepert'schen Hyperbel. Dadurch ist ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen diesen beiden Curven dargethan.

Ist bei einem gegebenen Kegelschnitt $A = 0$, derselbe also eine Parabel, so ist die annullirte erste Determinante der Gleichung 42) die Gleichung ihrer Achse. So erhält man z. B. die Gleichung der Achse derjenigen Parabel, deren Brennpunkt wir oben bestimmt haben, in folgender Form:

$$\begin{vmatrix} -\sin\alpha\cos\alpha\sin(\beta-\gamma) & \left\{\begin{matrix} x_1 \sin^2\alpha - x_2 \sin\gamma \sin\alpha \cos\alpha \\ - x_3 \sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \end{matrix}\right\} & \sin\alpha \\ \sin\beta\cos\beta(\sin\beta + \sin\gamma\cos\alpha) & \left\{\begin{matrix} - x_1 \sin\gamma \sin\alpha \cos\alpha + x_2(\sin^2\gamma \\ - \sin^2\alpha \sin^2\beta) + x_3 \sin\beta \sin\gamma \cos^2\alpha \end{matrix}\right\} & \sin\beta \\ -\sin\gamma\cos\gamma(\sin\gamma + \sin\beta\cos\alpha) & \left\{\begin{matrix} -x_1 \sin\alpha \sin\beta \cos\alpha + x_2 \sin\beta \sin\gamma \cos^2\alpha \\ + x_3(\sin^2\beta - \sin^2\gamma \sin^2\alpha) \end{matrix}\right\} & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Die Entwickelung liefert dasselbe Resultat, das wir schon oben gefunden haben.

Auch wenn die Kegelschnittsgleichung in cartesischen Coordinaten gegeben ist, lässt sich diese Methode anwenden. Denn sei

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{31}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

die gegebene Gleichung, so sind $\mathfrak{x} = A_{31} : A_{33}$, $\mathfrak{y} = A_{23} : A_{33}$ die Mittelpunkts-Coordinaten. Man setze nun $E^2 = (x - \mathfrak{x})^2 + (y - \mathfrak{y})^2 - 2\lambda f(x, y)$ und differentiire theilweise nach x und y, so kommt:

$$x - \mathfrak{x} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{und} \quad y - \mathfrak{y} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y},$$

also erhält man durch Elimination von λ das Product der Achsengleichungen in der Form:

$$(x - \mathfrak{x}) \frac{\partial f}{\partial y} = (y - \mathfrak{y}) \frac{\partial f}{\partial x}$$

oder, wenn man für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ihre Werthe setzt:

$$(A_{33}x - A_{31}) \frac{\partial f}{\partial y} = (A_{33}y - A_{23}) \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Ist die Curve eine Parabel, so ist $A_{33}=0$ und die Gleichung ihrer Achse:

$$A_{31}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=A_{23}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}.$$

In $3x^2+4xy+y^2-5x-6y-3=0$ ist z. B.

$$A_{33}=-1,\quad A_{31}=-\frac{7}{2},\quad A_{23}=4,$$

also die Gleichung der Achsen:

$$\left(-x+\frac{7}{2}\right)(4x+2y-6)=-(y+4)(6x+4y-5)$$

oder

$$4y^2-4x^2+4xy+18y+44x-41=0,$$

die man zerlegen kann in die Gleichungen:

$$2x-(\sqrt{5}+1)y=11+4\sqrt{5},$$
$$2x+(\sqrt{5}-1)y=11-4\sqrt{5}.$$

Bei der Parabel $(3x+4y)^2+22x+46y+9=0$ ist $A_{31}=100$, $A_{23}=-75$, also die Gleichung der Achse:

$$4[8(3x+4y)+46]+3[6(3x+4y)+22]=0,$$

oder

$$50(3x+4y)+250=0,$$

oder endlich

$$3x+4y+5=0.$$

Bensheim, im December 1892.

Kleinere Mittheilungen.

IX. Ueber die Construction von Vierecken aus den Radien der Berührungskreise eines Dreiecks.

I. Die Seiten eines Dreiecks mögen a, b, c heissen, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a < b < c$ vorausgesetzt werden kann; ist ferner Δ die Dreiecksfläche, so bestimmen sich der Radius ϱ_0 des Inkreises und die Radien ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c der Aussenkreise durch die bekannten Formeln

$$1)\quad \varrho_0 = \frac{2\Delta}{a+b+c}, \quad \varrho_a = \frac{2\Delta}{-a+b+c}, \quad \varrho_b = \frac{2\Delta}{a-b+c}, \quad \varrho_c = \frac{2\Delta}{a+b-c},$$

welche geben

$$2)\qquad \varrho_0 < \varrho_a < \varrho_b < \varrho_c.$$

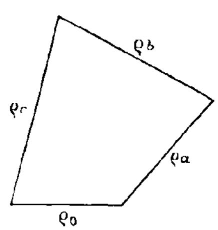
Zur Möglichkeit eines mit diesen Radien construirten Vierecks (Fig. 1) gehört nun die Bedingung

$$\varrho_0 + \varrho_a + \varrho_b > \varrho_c$$

und daraus folgt vermöge der obigen Werthe

$$3)\qquad a^2 + b^2 > c^2,$$

Fig. 1.



das heisst einem spitzwinkligen Dreiecke entsprechen unendlich viele Vierecke, wobei einer der Viereckswinkel beliebig gewählt werden darf; ist das Dreieck rechtwinklig, so degenerirt das Viereck in eine Gerade; ein stumpfwinkliges Dreieck liefert kein reelles Viereck.

II. Das vorige allgemeine Viereck wird zu einem Sehnenviereck, wenn man einen seiner Winkel z. B. $\angle(\varrho_0, \varrho_a)$ nach bekannten Methoden construirt oder berechnet; so ist

$$\tan\frac{\varrho_0, \varrho_a}{2} = \sqrt{\frac{(-\varrho_0+\varrho_a+\varrho_b+\varrho_c)(\varrho_0-\varrho_a+\varrho_b+\varrho_c)}{(\varrho_0+\varrho_a-\varrho_b+\varrho_c)(\varrho_0+\varrho_a+\varrho_b-\varrho_c)}}.$$

Bezeichnen α, β, γ die Winkel des ursprünglichen Dreiecks, so ergeben sich aus Nr. 1) die Werthe

$$4)\qquad \begin{cases} -\varrho_0+\varrho_a+\varrho_b+\varrho_c=\dfrac{abc}{\Delta}, \\[2mm] +\varrho_0-\varrho_a+\varrho_b+\varrho_c=\dfrac{a(b^2+c^2-a^2)}{2\Delta}=\dfrac{abc}{\Delta}\cos\alpha, \\[2mm] +\varrho_0+\varrho_a-\varrho_b+\varrho_c=\dfrac{b(c^2+a^2-b^2)}{2\Delta}=\dfrac{abc}{\Delta}\cos\beta, \\[2mm] +\varrho_0+\varrho_a+\varrho_b-\varrho_c=\dfrac{c(a^2+b^2-c^2)}{2\Delta}=\dfrac{abc}{\Delta}\cos\gamma; \end{cases}$$

es ist daher

$$5)\qquad \begin{cases} \tan\dfrac{\varrho_0,\ \varrho_a}{2}=\cot\dfrac{\varrho_b,\ \varrho_c}{2}=\sqrt{\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}}, \\[2mm] \tan\dfrac{\varrho_a,\ \varrho_b}{2}=\cot\dfrac{\varrho_c,\ \varrho_0}{2}=\sqrt{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\gamma}}. \end{cases}$$

Das Product der unter Nr. 4) verzeichneten Ausdrücke ist bekanntlich $=16V^2$, wenn V die Fläche des Sehnenvierecks bedeutet, also

$$6)\qquad V=\left(\frac{abc}{2\Delta}\right)^2\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Berechnet man ferner

$$\varrho_0\varrho_a+\varrho_b\varrho_c=bc,\quad \varrho_0\varrho_b+\varrho_c\varrho_a=ca,\quad \varrho_0\varrho_c+\varrho_a\varrho_b=ab$$

und multiplicirt diese Ausdrücke, so erhält man $16V^2r^2$, wo r den Radius des um das Sehnenviereck beschriebenen Kreises bezeichnet; es ist daher

$$7)\qquad r=\frac{\Delta^2}{abc\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}.$$

Als Beispiel in meistens rationalen Zahlen möge dienen

$$a=92,\quad b=111,\quad c=119,\quad \Delta=3.7.10.23=4830,$$

$$\cos\alpha=\frac{429}{629},\quad \cos\beta=\frac{8}{17},\quad \cos\gamma=\frac{12}{37},$$

$$\alpha=46^0\,59'\,49'',7;\quad \beta=61^0 55'\,39'',0;\quad \gamma=71^0\,4'\,31'',3;$$

$$\varrho_0=30,\quad \varrho_a=70,\quad \varrho_b=96\tfrac{3}{5},\quad \varrho_c=115,$$

$$\tan\frac{\varrho_0,\ \varrho_a}{2}=\cot\frac{\varrho_b,\ \varrho_c}{2}=\frac{\sqrt{286}}{8},\qquad \tan\frac{\varrho_a,\ \varrho_b}{2}=\cot\frac{\varrho_c,\ \varrho_0}{2}=\frac{\sqrt{286}}{17},$$

$$\begin{cases} \angle(\varrho_0,\ \varrho_a)=129^0\,22'\,1'',3,\quad \angle(\varrho_a,\ \varrho_b)=89^0\,42'\,3'',\ 8, \\ \angle(\varrho_b,\ \varrho_c)=50^0\,37'\,58'',7,\quad \angle(\varrho_c,\ \varrho_0)=90^0\,17'\,56''2, \end{cases}$$

$$V=5105{,}93;\quad r=59{,}364.$$

III. Wenn das allgemeine Viereck zu einem Tangentenviereck werden soll, so müssen ϱ_0 und ϱ_c Gegenseiten sein (Fig. 2) und der Bedingung genügen

$$\varrho_0 + \varrho_c = \varrho_a + \varrho_b.$$

Diese führt nach Nr. 1) zu der cubischen Gleichung

$$c^3 + (a+b)\,c^2 - (a+b)^2\,c - (a+b)(a-b)^2 = 0, \tag{8}$$

welche drei reelle Wurzeln besitzt; für

$$c = x - \frac{1}{3}(a+b), \quad x = R\sin\Theta \tag{9}$$

wird nämlich

$$\left\{\begin{aligned} & x^3 - \frac{4}{3}(a+b)^2 x + \frac{4}{27}(a+b)\{27ab - 4(a+b)^2\} = 0, \\ & R = \frac{4}{3}(a+b), \quad \sin\Theta = \frac{27ab}{4(a+b)^2} - 1. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Befindet sich nun unter den Wurzeln von Nr. 8) eine, die zwischen 0 und $a+b$ liegt, so ist das Dreieck aus a, b, c reell und im Falle

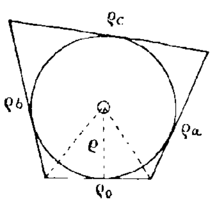
$$c^2 < a^2 + b^2$$

zugleich spitzwinklig; die Seiten ϱ_0, ϱ_a, ϱ_b und

$$\varrho_c = \varrho_a + \varrho_b - \varrho_0$$

liefern dann unendlich viele Tangentenvierecke, worin immer ein Viereckswinkel beliebig angenommen werden darf.

Fig. 2.



Beispielsweise sei

$$a = 5, \quad b = 7,$$

daher $c^3 + 12c^2 - 144c - 48 = 0, \quad c = x - 4, \quad x^3 - 192x + 656 = 0,$

$$R = 16, \quad \sin\Theta = \frac{41}{64},$$

woraus folgt

$$c = 7{,}6483; \quad \varrho_0 = 1{,}7371; \quad \varrho_a = 3{,}5375; \quad \varrho_b = 6{,}0427; \quad \varrho_c = 7{,}8431.$$

IV. Unter den unendlich vielen Tangentenvierecken befindet sich auch ein bicentrisches Viereck (Fig. 3); es entsteht, wenn

$$\angle(\varrho_0, \varrho_a) = 180^0 - \angle(\varrho_b, \varrho_c)$$

genommen wird. Bezeichnet man für den Augenblick $\angle(\varrho_0, \varrho_a)$ mit δ, so hat man

$$\varrho_0^2 + \varrho_a^2 - 2\varrho_0\varrho_a\cos\delta = \varrho_b^2 + \varrho_c^2 + 2\varrho_b\varrho_c\cos\delta$$

oder, wenn links

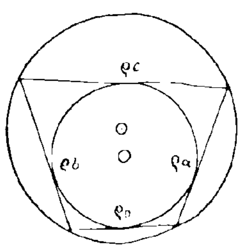
$$\cos\delta = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\delta,$$

rechts

$$\cos\delta = 2\cos^2\frac{1}{2}\delta - 1$$

gesetzt wird:

Fig. 3.



$$(\varrho_0-\varrho_a)^2+4\varrho_0\varrho_a\sin^2\frac{1}{2}\delta=(\varrho_b-\varrho_c)^2+4\varrho_b\varrho_c\cos^2\frac{1}{2}\delta,$$

das ist wegen $\varrho_0-\varrho_a=\varrho_b-\varrho_c$

$$\cot\frac{1}{2}\delta=\sqrt{\frac{\varrho_0\varrho_a}{\varrho_b\varrho_c}}.$$

Die Viereckswinkel bestimmen sich also durch die Formeln

$$11)\quad\begin{cases}\cot\dfrac{\varrho_0,\ \varrho_a}{2}=\sqrt{\dfrac{\varrho_0\varrho_a}{\varrho_b\varrho_c}}=\tan\dfrac{\varrho_b,\ \varrho_c}{2},\\[2ex]\cot\dfrac{\varrho_0,\ \varrho_b}{2}=\sqrt{\dfrac{\varrho_0\varrho_b}{\varrho_c\varrho_a}}=\tan\dfrac{\varrho_c,\ \varrho_a}{2}.\end{cases}$$

Aus der Formel für die Fläche des Sehnenvierecks erhält man die entsprechende Formel für das bicentrische Viereck, wenn man die Gleichungen beachtet

$$-\varrho_0+\varrho_a+\varrho_b+\varrho_c=2\varrho_c,\quad+\varrho_0-\varrho_a+\varrho_b-\varrho_c=2\varrho_b,$$
$$+\varrho_0+\varrho_a-\varrho_b+\varrho_c=2\varrho_a,\quad+\varrho_0+\varrho_a+\varrho_b+\varrho_c=2\varrho_0;$$

das sehr einfache Resultat ist

$$12)\qquad V=\sqrt{\varrho_0\varrho_a\varrho_b\varrho_c}.$$

Für das Sehnenviereck gilt die Formel (siehe II)

$$4Vr=\sqrt{(\varrho_0\varrho_a+\varrho_b\varrho_c)(\varrho_0\varrho_b+\varrho_c\varrho_a)(\varrho_0\varrho_c+\varrho_a\varrho_b)}=abc,$$

mithin ist im vorliegenden Falle

$$13)\qquad r=\frac{abc}{4\sqrt{\varrho_0\varrho_a\varrho_b\varrho_c}}=\frac{abc}{4V}.$$

Um endlich den Radius ϱ des Inkreises zu ermitteln, bedarf es nur der Relation (Fig. 2)

$$\varrho_0=\varrho\cot\frac{\varrho_0,\ \varrho_a}{2}+\varrho\cot\frac{\varrho_0,\ \varrho_b}{2};$$

nach den Formeln in 11) folgt hieraus

$$14)\qquad \varrho=\frac{\sqrt{\varrho_0\varrho_a\varrho_b\varrho_c}}{\varrho_a+\varrho_b}=\frac{V}{\varrho_a+\varrho_b}.$$

Das in III angegebene Beispiel führt zu folgenden Werthen:

$$\angle(\varrho_0,\ \varrho_a)=140^0\,23'\,38'';\quad \angle(\varrho_0,\ \varrho_b)=138^0\,33'\,14'';$$
$$\angle(\varrho_b,\ \varrho_c)=\ 39^0\,36'\,22'';\quad \angle(\varrho_a,\ \varrho_c)=\ 41^0\,26'\,46'';$$
$$V=17{,}0654;\quad r=3{,}9218;\quad \varrho=1{,}7813.$$

Schlömilch.

X. Zur hyperboloidischen Lage von Tetraederpaaren.

Die beiden Tetraeder $abcd$ und $a'b'c'd'$ seien so gelegen, dass die Geraden aa', bb', cc' und dd' zu demselben System von Erzeugenden einer Regelfläche zweiter Ordnung gehören.

Alsdann gehören die Ebenen $d'a'a$, $d'b'b$, $d'c'c$ einem Büschel an. Trifft also die Ebene abc die Geraden $d'a'$, $d'b'$, $d'c'$ bez. in A, B, C, so liegen die Dreiecke abc und ABC perspectiv, mithin die Punkte

$$[ab,\ AB],\quad [bc,\ BC],\quad [ca,\ CA]$$

in einer Geraden g; diese Punkte sind aber identisch mit den Punkten

$$[ab,\ a'b'd'],\quad [bc,\ b'c'd'],\quad [ca,\ c'a'd'],$$

woraus man ersieht, das die Gerade g gleichzeitig die vier Geraden

$$[abc,\ a'b'c'],\quad [bcd,\ b'c'd'],\quad [cda,\ c'd'a'],\quad [dab,\ d'a'b']$$

schneidet.

Analog findet man eine zweite, dritte u. s. w. Gerade, welche dasselbe leistet. Diese Geraden sind sämmtlich verschieden. Mit Rücksicht auf das Dualitätsgesetz hat man also den Satz*:

I. Haben zwei Tetraeder $abcd$ und $a'b'c'd'$ eine solche Lage, dass die Geraden aa', bb', cc', dd' zu demselben System von Erzeugenden einer Regelfläche zweiter Ordnung gehören, so gehören auch die Geraden, in welchen sich die Ebenen abc und $a'b'c'$, bcd und $b'c'd'$, cda und $c'd'a'$, dab und $d'a'b'$ schneiden, demselben System von Erzeugenden einer Regelfläche zweiter Ordnung an und umgekehrt.

Man sagt in diesem Falle von den beiden Tetraedern, dass sie hyperboloidisch liegen.

Es seien, um eine Anwendung dieses Satzes zu geben, in einem räumlichen Polarsystem die Tetraederpaare $abcd$ und $A'B'C'D'$, $ABCD$ und $a'b'c'd'$ zwei Paare conjugirter (polarer) Tetraeder, also A' sei der Pol von bcd u. s. w., A der Pol von $b'c'd'$ u. s. w.

Wir nehmen nun an, dass die beiden Tetraeder $abcd$ und $a'b'c'd'$ hyperboloidisch liegen und behaupten, dass alsdann auch die Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ sich in hyperboloidischer Lage befinden.

Denn ist g eine die vier Geraden aa', bb', cc', dd' schneidende Gerade, so trifft die Polare von g gleichzeitig die Polaren dieser vier Geraden, d. h. die Geraden

$$[B'C'D',\ BCD],\quad [C'D'A',\ CDA],\quad [D'A'B',\ DAB],\quad [A'B'C',\ ABC].$$

Die Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ liegen also hyperboloidisch (I); mithin gilt der Satz:

---

* Vergl. Schnell, Ueber Schaaren perspect. Tetraeder. Giessener Dissert. Viernheim 1891. S. 17.

II. *Sind abcd und $A'B'C'D'$, $ABCD$ und $a'b'c'd'$ zwei Paare polarer Tetraeder in einem räumlichen Polarsystem und es liegen die Tetraeder abcd und $a'b'c'd'$ hyperboloidisch, so liegen auch die Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ hyperboloidisch.*

Nehmen wir als specielles Polarsystem das *absolute,* so erhalten wir aus dem graphischen Satze II einen metrischen Satz, welchen kürzlich Herr Bützberger in dieser Zeitschrift gegeben hat (38. Jahrgang, S. 4). An Stelle der Geraden aa', welche a mit dem Pole a' von BCD verbindet, tritt nämlich alsdann die von a auf die Ebene BCD gefällte Senkrechte u. s. w.; der Satz II besagt:

III. „Liegen die von $abcd$ auf die Ebenen BCD, CDA, DAB, ABC gefällten Senkrechten in einem Hyperboloid, so liegen auch die von $ABCD$ auf die Ebenen bcd, cda, dab, abc gefällten Senkrechten in einem Hyperboloid".

Osthofen (Rheinhessen). Dr. P. Muth.

XI. Eine Erweiterung des Maximumbegriffes.

Es seien u und v reelle Functionen der reellen Variablen x und y. Beide seien entweder durchweg stetig oder wir betrachten nur solche Gebiete, innerhalb deren sie stetig sind. Auch der erste Differentialquotient nach beiden Variablen sei innerhalb des betrachteten Gebietes stetig. Betrachten wir $u=\varphi(x, y)$ und $v=\psi(x, y)$ als Flächen über einer gemeinsamen x, y-Ebene, so können wir die weiteren Bedingungen, denen wir das betreffende Gebiet von u und v unterwerfen, folgendermassen ausdrücken: Jede zur x, y-Ebene parallele Ebene soll immer nur eine der Tangenten der Fläche in jedem von ihr getroffenen Punkte enthalten, insbesondere also soll sie nicht selber Tangentenebene der Fläche sein. Die in sie fallende, der x, y-Ebene parallele Tangente einer der Flächen scheidet dann auf der Fläche die Richtungen, in welcher die Ordinate derselben wächst von denjenigen, in denen sie abnimmt. Die Projection dieser Tangente auf die x, y-Ebene möge daher die Scheidelinie des Berührungspunktes genannt werden.

Betrachten wir jetzt beide Flächen gleichzeitig, so werden im Allgemeinen in jedem Punkte (x, y) die Scheidelinien der beiden Flächen sich schneiden und vier Winkelräume bilden. Jedem dieser Winkelräume entspricht ein anderes Verhalten der Flächenordinaten, wenn man von (x, y) aus nach allen Richtungen fortschreitet. In einem Winkelraume werden u und v gleichzeitig zunehmen, im Scheitelraume dazu beide abnehmen; bewegt man sich von (x, y) aus in einem der beiden anderen Winkelräume, so wird dagegen u zunehmen, wenn v wächst und umgekehrt.

Es wird aber auch Punkte geben, für welche die beiden Scheidelinien zusammenfallen, also von den vier Fällen nur zwei bestehen bleiben. Man findet diese Punkte, wenn man aus

$$1) \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy = 0, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x}\, dx + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy = 0,$$

welche Gleichungen die Bedingung für die zur x, y-Ebene parallele Tangente enthalten, dx und dy eliminirt. Man erhält dann die Gleichung:

$$2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Sie stellt eine Curve in der x, y-Ebene dar. Die über einem Punkte derselben liegenden Punkte der beiden Flächen haben also die Eigenschaft, dass die beiden zur x, y-Ebene parallelen Tangenten in ihnen unter sich parallel sind, bezw. dass die Tangentenebenen in diesen Punkten sich in einer Parallelen zur x, y-Ebene schneiden.

Die Punkte der Curve können zweierlei Art sein, je nachdem durch das Zusammenfallen der beiden Scheidelinien in ihnen die beiden ersten oder die beiden letzten der vier oben erwähnten Fälle ausgeschlossen wurden. Bleibt nur vom Punkte aus ein gleichzeitiges Steigen oder ein gleichzeitiges Fallen auf beiden Flächen möglich, so wollen wir ihn einen Begleitpunkt der beiden Flächen nennen. Die Tangentenebenen beider Flächenpunkte und ebenso ihre Normalen schneiden die x, y-Ebene dann beide auf derselben Seite des Punktes (x, y). Im anderen Falle dagegen, in welchem nur die Möglichkeit eines Steigens auf der u-Fläche unter gleichzeitigem Fallen auf der v-Fläche oder umgekehrt übrig bleibt, wollen wir den Punkt einen Scheidepunkt der Flächen nennen. Man erkennt ihn daran, dass die Tangentenebenen, sowie die Normalen in den beiden Punkten der Flächen die x, y-Ebene auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Projection der Punkte treffen. Die durch 2) dargestellte Curve kann nun nur Punkte der einen Art enthalten, sie kann auch aus Stücken zusammengesetzt sein, von denen einige aus Scheidepunkten, andere aus Begleitpunkten bestehen.

Die Uebertragung der Betrachtungen auf mehr als zwei Functionen mit der entsprechenden Anzahl von Variablen macht keine Schwierigkeit. Die Scheidepunkte sind für die nationalöconomische Theorie der Preisbildung von Bedeutung, und es sind Untersuchungen auf diesem Gebiete, welche die vorliegende Notiz veranlasst haben.* Dort bedeuten u und v die Vortheile des Austausches variabler Mengen x und y zweier Güterarten für zwei Tauschcontrahenten. Es werden die Werthe der Variablen gesucht, für welche ein Zuwachs des Vortheils u des einen Contrahenten nur auf Kosten des anderen möglich ist, das heisst ein Abnehmen von v zur Folge hat. Es sind die Werthe von x und y, die Scheidepunkten angehören. In gewissem Sinne bezeichnen daher die Scheidepunkte bedingte Maxima, nämlich solche,

* Vergl. meine Abhandlung: „Zahl und Maass in der Oeconomik“ in der Tübinger Zeitschr. f. d. ges. Staatsw. Bd. 49, S. 579.

in denen die eine Function nicht zunehmen kann, ohne dass die zweite gegebene Function abnimmt. So mag es sich rechtfertigen, dass wir in der Ueberschrift von einer Erweiterung des Maximumbegriffes sprachen. Ueberdies berechtigt auch die analytische Methode der Auffindung der Begleit- und Scheidepunkte durch Nullsetzen des Differentials der Functionen dazu, in diesen, auf zwei und mehr Functionen bezüglichen Punkten Analoga der Maxima und Minima einer Function einer Variablen zu erblicken, da diese als Specialfall in jenen enthalten sind.

Als Beispiel mögen die in der Preistheorie häufig verwendeten elliptischen Paraboloide

$$u = a\sqrt{bx - y^2}, \quad v = c\sqrt{dy - x^2}$$

dienen. Als Ort der Scheidepunkte (in diesem Falle) erhält man die Hyperbel

$$4xy - bd = 0.$$

Concentrische Flächen zweiten Grades ergeben immer als Ort der Begleit- und Scheidepunkte die beiden Achsen in der x, y-Ebene und zwar enthalten, je nach der Wahl der Flächen, die beiden Achsen Punkte einerlei oder verschiedener Art.

Es liegt nahe zu vermuthen, dass dieser erweiterte Maximumbegriff sich vielleicht auf Functionen einer complexen Variablen übertragen lasse, indem man u und v den besonderen Bedingungen unterwirft, denen der reelle und der imaginäre Theil einer solchen Function $w = u + iv$ gehorchen muss. Es geht dann aber die Gleichung 2) über in

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = 0$$

und diese zerfällt, da u und v reell sind, in $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, womit auch $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$ gleich 0 werden. Es ergiebt sich demnach zunächst, dass die etwa vorhandenen Begleit- und Scheidepunkte nicht mehr eine Curve bilden, sondern als einzelne Punkte zerstreut liegen. Es verliert aber überdies die allgemeine Gleichung dieser Punkte wegen der angenommenen Beziehungen zwischen u und v ihren sonst bestehenden reellen Sinn. Eliminiren wir nämlich aus den Gleichungen 1) mit Hilfe der Bedingungsgleichungen $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$ diese Ableitungen, so ergiebt sich

$$dx : dy = \sqrt{-1},$$

das heisst, die Richtung der gemeinsamen Scheidelinie zwischen den abnehmenden und den zunehmenden Werthen von u und v wird imaginär. Es existiren also überhaupt keine Punkte, welche die Bedingung der Begleit- oder Scheidepunkte reell erfüllen.

Karlsruhe, April 1893. Dr. Andreas Voigt.

XII. Geometrische Lehrsätze.*

1. Soll eine Curve des dritten Grades C^3 durch die sechs Ecken eines Vierseits gehen (das heisst die sechs Punkte in denen sich je zwei von vier Geraden schneiden) und soll sie zudem noch einen Mittelpunkt haben, so ist der Ort der Mittelpunkte aller dieser C^3 diejenige Gerade, welche durch die Mitten der drei Diagonalen des Vierseits geht. Jede dieser Curven hat also auch mit einem Kegelschnitt, der die Seiten des Vierseits berührt, den Mittelpunkt gemein.

2. Werden auf den Seiten BC, AC und AB eines Dreiecks ABC drei beliebige Punkte A_1, B_1 und C_1 angenommen und sind A_2, B_2, C_2 (bei entsprechender Bezeichnung) die Mitten der Seiten des Dreiecks ABC, so liegen allemal folgende Punkte auf einem Kegelschnitt H^2, nämlich:

α) die Mitten der Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$;

β) die Mitten der Strecken AA_1, BB_1 und CC_1;

γ) die Schnittpunkte von B_1C_1 mit B_2C_2; A_1C_1 mit A_2C_2 und A_1B_1 mit A_2B_2.

Ausserdem sind die zweiten Schnitte der Geraden AA_1, BB_1 und CC_1 mit dem Kegelschnitt H^2 die Mittelpunkte von Kegelschnitten, die resp. durch B, C, B_1, C_1; A, C, A_1, C_1 und A, B, A_1 und B_1 gehen und der Kegelschnitt H^2 selbst ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Curven des dritten Grades mit Mittelpunkt, welche durch A, B, C, A_1, B_1 und C_1 gehen.

3. Legen wir durch je zwei Paare von Gegenecken eines Vierseits und einen weiteren beliebig gewählten Punkt P Kegelschnitte, so schneidet jeder dieser Kegelschnitte die Verbindungslinie des letzten Paares von Gegenecken des Vierseits in zwei Punkten a und die sich ergebenden sechs Punkte a liegen allemal auf zwei durch P gehenden Geraden L, welche zudem in P die beiden durch P gehenden, dem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitte berühren. Legen wir ebenso durch denselben Punkt P und die Punkte, in denen je drei der vier Seiten des Vierseits sich schneiden, diejenigen beiden Kegelschnitte, welche die vierte Seite des Vierseits berühren, so liegen die sich so ergebenden acht Berührungspunkte dieser Kegelschnitte auf denselben Geraden L. Der Punkt P ist ausserdem Doppelpunkt einer Curve des dritten Grades, welche durch die sechs Ecken des Vierseits geht, und zwar sind die Geraden L die Tangenten dieser Curve im Doppelpunkt. Soll weiter der Doppelpunkt einer Curve des dritten Grades C^3 mit Doppelpunkt, welche durch die sechs Ecken eines Vierseits geht, auf irgend einer Geraden G gelegen sein, so ist der Ort der Tangenten C^3 in dem Doppelpunkte eine Curve

* Im Folgenden geben wir einige Sätze über algebraische Curven — jedoch ohne Beweis — auf die wir gelegentlich anderer Arbeiten gestossen sind.

der dritten Classe, welche die Gerade G und die vier Seiten und drei Diagonalen des Vierseits berührt. Soll dagegen die Tangente im Doppelpunkt einer C^3 mit Doppelpunkt durch die sechs Ecken eines Vierseits durch einen Punkt Q gehen, so ist der Ort des Doppelpunkts eine Curve des dritten Grades mit dem Punkt Q als Doppelpunkt, welche ebenfalls durch die sechs Ecken des Vierseits geht, und der Ort der anderen Tangente im Doppelpunkt ist ein Kegelschnitt. Soll endlich eine Curve des dritten Grades einen Doppelpunkt haben und ausser durch die Ecken eines Vierseits noch durch einen siebenten Punkt P gehen, so ist der Ort des Doppelpunktes aus den obengenannten zwei Geraden L zusammengesetzt und der Ort der Tangenten in dem Doppelpunkt an die Curve dritten Grades besteht also aus zwei Curven der dritten Classe, die beide ausser den Seiten und Diagonalen des Vierseits noch die Geraden L berühren, wodurch ihre sämmtlichen gemeinsamen neun Tangenten bestimmt sind.

4. Soll eine Curve des dritten Grades durch sechs beliebige Punkte gehen und einen siebenten Punkt als Doppelpunkt haben, so kann man die Tangenten im Doppelpunkte wie folgt leicht bestimmen;

Durch vier der sechs Punkte und jeden der übrigen zwei Punkte legt man einen Kegelschnitt und verbindet jeden der beiden letztern Punkte mit den Doppelpunkte, so schneidet jede dieser Verbindungslinien den Kegelschnitt durch den auf ihr liegenden der beiden genannten Punkte nochmals in einem Punkt, wodurch sich zwei neue Punkte x, x_1 ergeben. Der Kegelschnitt durch die vier ersten der sechs Punkte und dem Doppelpunkt schneidet jetzt allemal die Gerade xx_1 in zwei Punkten, welche auf den Tangenten im Doppelpunkte gelegen sind.

Sind insbesondere die sechs Punkte Ecken eines vollständigen Vierseits, so liegen auch die Projectionen der Schnittpunkte von je zwei Diagonalen auf die dritte vom Doppelpunkt aus auf der Curve und die Curve selbst lässt sich sowohl in diesem Falle als im vorigen leicht linear construiren. Durch Combination von anderen vier der sechs Punkte folgen über die Doppeltangenten selbst wieder weitere Sätze.

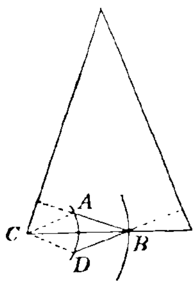
Stuttgart, im Februar 1893. BENEDIKT SPORER.

XIII. Die kleinste Ablenkung im Prisma.

Seit ich im vorigen Jahrgange dieser Zeitschrift, S. 317 und 318, hierüber einen „synthetisch-analytischen" Beweis mitgetheilt habe, fand ich in der Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht ausser dem halben Beweise von Kirkby, den ich S. 318 schon besprochen habe, noch (im 3. Bd.) zwei Mittheilungen über dasselbe Thema, die eine von Gravelaar (Niederlande), die andere von Fr. C. G. Müller (Brandenburg). Meine

Einwürfe gegen diese beiden auseinanderzusetzen ist wohl hier nicht am Platze* und könnte sie auch der Leser des Obigen selbst finden.

Aber die Müller'sche Behandlung brachte mir auch die Frucht, dass ich meinen obigen Beweis zum blos synthetischen, also um die nachfolgende Rechnung und zweite Figur, kürzen kann. Die Basis des gleichschenkligen Dreieckes stellt den Minimum-Strahl vor. Vom Punkte B derselben die Lothe BA und BD auf die Schenkel gefällt, so ist ACD der zu erweisende kleinste Ablenkungswinkel des in der Richtung CA eintretenden und in der Richtung CD austretenden Strahles.



Beweis: Man nehme auf dem durch B gehenden Kreise den Nachbarpunkt B' und construire die Nachbarlothe $B'A'$ und $B'D'$. Ist B' z. B. unter B (ausserhalb des gleichschenkligen Dreieckes), so sieht man leicht, dass der kleine Bogen AA' kleiner ist als derjenige DD', dass also der Winkel $A'CD'$ grösser ist als ACD. Für B'' oberhalb B folgt geradeso AA'' grösser als DD''. Man kann sich, glaube ich jetzt auch, mit dieser Anschauung begnügen.

Augsburg. Dr. A. Kurz.

* Auf meine diesbezügliche Einsendung an die Zeitschrift für phys. und chem. Unterricht erwiderte diese, dass sie davon nur einen kurzen Auszug bringen wolle, was auch im 6. Jahrgang geschehen ist.

XVI.

Die Normalform des allgemeinen Wurzelausdrucks und ihre Eigenschaften.

Von

Dr. Gottl. Friedr. Lipps,

Hagenau i. Elsass.

Die Abel'schen Untersuchungen über die Auflösung der Gleichungen durch Wurzelausziehen* stützen sich auf einen systematisch entwickelten allgemeinen Wurzelausdruck, den Kronecker in seiner Abhandlung**: „Vereinfachung des Abel'schen Beweises der Unmöglichkeit algebraische Gleichungen vom höheren Grade als dem vierten allgemein aufzulösen“ definirt wie folgt:

„Wenn man den Ausdruck einer expliciten algebraischen Function von Grössen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'' \ldots$, d. h. einen nur mittelst rationaler Operationen und Wurzelausziehungen gebildeten Ausdruck genau so behandelt, wie man einen solchen, der nur Zahlengrössen enthält, bei der Ausrechnung behandeln muss, und dabei an Stelle jedes einzelnen Rechnungsresultates die betreffende Gleichung setzt, so erhält man für die explicite algebraische Function einen Ausdruck

$$F(V_1, V_2 \ldots V_\nu;\ \mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'' \ldots),$$

wo

$$V_\gamma^{n_\gamma} = F_\gamma\,(V_{\gamma+1}, V_{\gamma+2} \ldots V_\nu;\ \mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'' \ldots)$$

für $\gamma = 1, 2 \ldots \nu$, jede der ν Zahlen n Primzahl und jede der $(\nu + 1)$ Functionen F eine ganze Function der Grössen V und rationale Function der Grösse $\mathfrak{R}$ ist.“

Hier ist das Wurzelausziehen als eine selbstständige Operation den vier algebraischen Grundoperationen — der Addition, Subtraction, Multiplication und Division — beigesellt. Seine Berechtigung findet dies dadurch, dass bei der geschichtlichen Entwickelung des Zahlbegriffs der Begriff der irrationalen und complexen Zahl durch Einführung der Wurzeln ganzer, positiver und negativer Zahlen in den Kreis mathematischer Untersuchung gewonnen wurde und dass auch bei einer logisch begründeten Ableitung derselben Begriffe die Wurzeln ganzer Zahlen die einfachsten Beispiele zur Erläuterung jener Begriffe sind.

---

* Oeuvres complètes 1881; Bd. I: Beweis der Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der allgemeinen Gleichungen etc.; Bd. II: Sur la résolution algébrique des équations.

** Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1879.

Legt man diese allgemein übliche Auffassung der Wurzelgrössen zu Grunde, so muss der allgemeine Wurzelausdruck in der soeben gegebenen Form zur Auflösung der Gleichungen benutzt werden, da er schon aus den einfachsten Elementen — aus Wurzelgrössen vom Primzahlgrade — construirt wurde. Es ist so der Weg vorgezeichnet, der in den modernen algebraischen Untersuchungen eingeschlagen wurde, auf dem insbesondere Kronecker zum Begriffe des Rationalitätsbereichs und zur arithmetischen Behandlung der algebraischen Grössen gelangte.

Es zeigen nun aber die Definitionen der irrationalen Zahlen von Cantor, Dedekind und Weierstrass die thatsächliche Unabhängigkeit des Begriffs der irrationalen Zahl von dem specielleren Begriffe der Wurzelgrösse. Es lehrt ferner eine logische Untersuchung des Begriffs der Zahl, dass die allgemeine complexe Zahl durch eine endliche oder durch eine von einem Gesetze beherrschte unendliche Folge der vier Grundoperationen entsteht, die mit den absoluten ganzen Zahlen und den Haupteinheiten vorgenommen werden, so dass die allgemeine variable Zahl ohne Zuhilfenahme der Wurzelgrössen gewonnen werden kann.

Alsdann hat die Wurzelgrösse eine selbstständige functionentheoretische Bedeutung, auf Grund welcher die Zahlen, aus denen die Wurzeln gezogen werden sollen, selbst schon als allgemein variable Zahlen aufzufassen sind und die Wurzelgrösse als Function dieser Argumente zu betrachten ist.

Es entsteht so die Aufgabe, sowohl die Form der durch die Wurzelgrösse dargestellten Function und die Form der durch den allgemeinen Wurzelausdruck definirten Function — die Normalform des allgemeinen Wurzelausdrucks — herzustellen (I. Capitel), als auch die Eigenschaften dieser Normalform aufzusuchen (II. und III. Capitel). Daran schliesst sich die weitere Aufgabe, „die Auflösung der Gleichungen mittelst der Normalform" zu erörtern. Es wird zunächst aus der Normalform eine Function abgeleitet, die, gleich Null gesetzt, die durch den Wurzelausdruck auflösbare Gleichung darstellt. Sie wird die Begleiterin der Normalform genannt. Es wird sodann der Auflösungsprocess der Gleichungen dargelegt, der sich als eine Anwendung der die Normalform betreffenden Entwickelungen darstellt.

Ich bemerke, dass die Normalform des allgemeinen Wurzelausdrucks, die bisher, wie es scheint, ebenso wenig beachtet wurde wie die functionentheoretische Bedeutung der Wurzelgrösse, den Kern der folgenden Untersuchungen bildet, so dass diese letzteren unabhängig sind von den auf der Theorie der Substitutionen beruhenden, durch Galois' Entdeckungen begründeten Untersuchungen der Auflösbarkeitsbedingungen der Gleichungen, obgleich sie sich mit ihnen in den Resultaten naturgemäss berühren.

I. Die Normalform des allgemeinen Wurzelausdrucks.

§ 1. In der reinen Gleichung

1) $$x^n = a$$

sei a eine unbeschränkt variable allgemeine Zahl, so dass die n Wurzeln Functionen von a sind.

Deutet man in bekannter Weise die Zahlen als Punkte einer Ebene, so gehören zu jedem Punkte a als Functionswerthe die n Eckpunkte eines regulären Polygons, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt der Zahlenebene ist. Der Mannigfaltigkeit aller Punkte a der Ebene ordnen sich n Mannigfaltigkeiten von Functionswerthen zu, die in n congruenten Gebieten, welche durch n vom Nullpunkte ausgehende und in's Unendliche sich erstreckende Linien von einander getrennt werden, die ganze Ebene überdecken. Als einfachste Grenzlinien der neben einander gelagerten Ebenentheile können n vom Nullpunkte ausgehende Strahlen angenommen werden, von denen je zwei aufeinander folgende einen Winkel $2\pi/n$ einschliessen; jede andere Gebietseintheilung kann aus derselben durch eine alle Strahlen in gleicher Weise treffende Drehung und Deformation gewonnen werden. — Es ist zwar keines der n Gebiete vor einem anderen bevorzugt; es kann aber jedes von jedem anderen unterschieden werden, wenn ein beliebiges Gebiet als erstes gewählt wird und die anderen so, wie man sie der Reihe nach bei positiver Umlaufung des Nullpunktes überstreicht, als zweites, drittes, viertes Gebiet u. s. w. bezeichnet werden. Dann gehören auch zu jedem Werthe „a“ n Punkte, die als erste, zweite, dritte Wurzel u. s. w. zu gelten haben, wenn sie im ersten, zweiten, dritten Gebiete u. s. w. liegen.

§ 2. Jede solche Zuordnung von Mannigfaltigkeiten erweckt das Verlangen nach einem sie beherrschenden mathematischen Gesetze. Es können freilich Symbole dazu dienen, eine Mannigfaltigkeitszuordnung von einer anderen zu unterscheiden — für den vorliegenden Fall ist das die n Wurzeln gemeinsam bezeichnende: $\sqrt[n]{a}$ ein solches Symbol; damit ist aber nur eine Bezeichnung des geforderten Gesetzes gewonnen, ähnlich den besonderen Zeichen und Benennungen für die trigonometrischen und andere Functionen. Das mathematische Gesetz selbst jedoch ist ein rechnerischer Process, der von vorgelegten Argumentwerthen zur Berechnung des Functionswerthes führt, der somit aus einer endlichen oder aus einer gesetzmässigen unendlichen Folge der vier Grundoperationen besteht. Da es seiner Natur nach eindeutig ist, so kann bloss je eine Wurzel und nicht jede Wurzel zugleich mit jeder anderen durch das Gesetz dargestellt werden. Sollte dasselbe ferner für die Gesammtheit der Argumente a die zugehörigen Werthe einer der n Wurzeln erzeugen, so dürfte sich bloss für $a = 0$ der Werth Null und bloss für $a = \infty$ der Werth Unendlich ergeben; es müsste somit durch die lineare Function $x = Const. a$ dargestellt werden. Es kann daher blos für einen geeignet abgegrenzten Bereich der Variablen a ein Ausdruck gefunden werden, durch welchen die functionelle Abhängigkeit der Wurzelwerthe von den Argumentwerthen zur Darstellung kommt.

Eine solche Darstellungsform wird gewonnen, wenn a durch $b^n + a - b^n$ ersetzt und für alle Punkte a, die innerhalb des mit $mod\,(b^n)$ als Radius um b^n als Mittelpunkt beschriebenen Kreises liegen, nach dem binomischen Satze

$$2)\qquad \sqrt[n]{a} = b\sqrt[n]{1+\frac{a-b^n}{b^n}} = b\,.\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)_{\mu}.\left(\frac{a-b^n}{b^n}\right)^{\mu}\right\},$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{\mu}.1.2\ldots\mu = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{n}-\mu+1\right)$$

gesetzt wird.

Wählt man die Werthe b^n in geeigneter Weise, so kann für jedes endliche a eine Reihendarstellung erhalten werden, die stets für den zugehörigen Convergenzkreis giltig ist. Da es immer n Werthe b giebt, deren n^{te} Potenz gleich b^n ist, so gehören jedem Convergenzkreise n Gebiete der Functionswerthe zu. Sie sind einander congruent und können durch Drehungen um Vielfache von $2\pi/n$ um den Nullpunkt, dem sie sich spitzenförmig nähern, zur Deckung gebracht werden; jedes ist einfach zusammenhängend und enthält je eine der n Wurzeln von b^n, so dass mit der Reihenfolge dieser Wurzeln: $b_1, b_2 \ldots b_n$ auch die Aufeinanderfolge der Gebiete gegeben ist. Bezeichnet man nun die dem ν^{ten} Gebiete $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ zugehörigen Functionswerthe durch $\sqrt[n]{_\nu a}$ und b_ν durch $\varepsilon_n^\nu . b_n$, (wo $\varepsilon_n = cos\, 2\pi/n + i\, sin\, 2\pi/n$), so erhält man als Darstellungen der n Functionen $\sqrt[n]{a}$:

$$3)\qquad \sqrt[n]{_\nu a} = b_\nu\,.\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)_{\mu}.\left(\frac{a-b^n}{b^n}\right)^{\mu}\right\} = \varepsilon_n^\nu\,.\,P(a),\quad (\nu = 1, 2 \ldots n),$$

so dass $\sqrt[n]{_\nu a}$ eine eindeutige, stetige Function von a vorstellt, deren Darstellungsform für den durch die Hilfsgrösse b_n bestimmten Convergenzkreis giltig ist.

§ 3. Ist die Wurzel $\sqrt[n]{_\nu a}$ durch eine Reihe darstellbar, so gilt dasselbe auch von ihren Potenzen. Eine beliebige rationale Function jener Wurzel

$$4)\qquad x_\nu = r_0 + r_1\,.\,\sqrt[n]{_\nu a} + r_2\,(\sqrt[n]{_\nu a})^2 + \ldots + r_{n-1}(\sqrt[n]{_\nu a})^{n-1},$$

wo die r rationale Functionen von a und beliebigen anderen variablen Zahlen sind, kann daher für denselben Bereich der Werthe a wie $\sqrt[n]{a}$ selbst in Reihenform dargestellt werden. Man erhält:

$$5)\qquad x_\nu = a_0 + \varepsilon_n^\nu\,.\,a_1 + \varepsilon_n^{2\nu}.\,a_2 + \ldots + \varepsilon_n^{\overline{n-1}.\nu}.\,a_{n-1},\ (\nu = 1, 2, \ldots n),$$

wo $a_0 = r_0$; $a_1 = r_1\,.\,P(a)$; $a_2 = r_2\,.\,P(a)^2$; $\ldots a_{n-1} = r_{n-1}\,.\,P(a)^{n-1}$.

Die n Werthengebiete der x_ν sind für jeden zusammenhängenden Bereich der Argumente gleichfalls zusammenhängende Gebiete, die übrigens beliebig in Endlichen verlaufen, oder in's Unendliche sich erstrecken, auch theilweise sich überdecken können, trotzdem aber in Uebereinstimmung mit den zugehörigen n^{ten} Wurzeln von a als erstes, zweites, ... n^{tes} Gebiet unterscheidbar sind.

Es kann daher für jedes Werthensystem der unabhängigen Veränderlichen, für das keine der Functionen x_ν gleich Null oder gleich Unendlich ist, ein Convergenzbereich von der Art bestimmt werden, dass die Werthengebiete der x_ν einfach zusammenhängende Ebenentheile sind, die den Nullpunkt nicht umschliessen und im Endlichen verlaufen.

§ 4. Einen solchen Convergenzbereich nehme ich an, wenn ich nun setze:

$$6)\quad x^m = x_\nu = a_0 + \varepsilon_n^\nu a_1 + \varepsilon_n^{2\nu} a_2 + \ldots + \varepsilon_n^{\overline{n-1}\cdot\nu} . a_{n-1}; \quad (\nu = 1, 2 \ldots n).$$

Die so definirten m Functionen der x_ν werden symbolisch durch:

$$7)\qquad x = \sqrt[m]{x_\nu}$$

bezeichnet.

Um ihre Darstellungsformen zu erhalten, werde zunächst vorausgesetzt, dass die Werthenbereiche der x_ν $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ ingesammt von einem Kreise mit dem Mittelpunkte c^m, der den Nullpunkt nicht in seinem Inneren enthält, umschlossen werden. Wird dann $x_\nu = c^m + x_\nu - c^m$ gesetzt, so erhält man nach dem binomischen Satze:

$$8)\qquad x = c\sqrt[m]{1 + \frac{x_\nu - c^m}{c^m}} = c . \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \left\{ \left(\frac{1}{m}\right)_\mu . \left(\frac{x_\nu - c^m}{c^m}\right)^\mu \right\}.$$

Da diese Potenzreihe unbedingt convergent ist, so kann sie mit Rücksicht auf 5) nach Potenzen von ε_n^ν geordnet werden. Da es ferner m Werthe c giebt, deren m^{te} Potenz gleich c^m ist, nämlich $c_\mu = \varepsilon_m^\mu . c_m$; $(\mu = 1, 2 \ldots m)$, wo $\varepsilon_m = \cos 2\pi/m + i . \sin 2\pi/m$, so erhält man folgende Darstellungen:

$$9)\qquad \sqrt[m]{{}_\mu x_\nu} = \varepsilon_m{}^\mu (A_0 + \varepsilon_n{}^\nu A_1 + \ldots \varepsilon_n^{\overline{n-1}\cdot\nu} A_{n-1}),$$
$$(\mu = 1,\ 2 \ldots m;\quad \nu = 1,\ 2 \ldots n),$$

wo die A eindeutige, von den Hilfsgrössen b_n und c_m abhängige Potenzreihen vorstellen, die für den vorausgesetzten Convergenzbereich der unabhängigen Variablen Geltung haben.

Können aber die Bereiche der x_ν nicht alle zugleich von einem Kreise der bezeichneten Art umschlossen werden, so können sie doch in Gruppen zusammengefasst werden, so dass die Bereiche einer Gruppe von einem solchen Kreise umschlossen werden und für jede Gruppe eine einheitliche Darstellung der Functionen möglich ist.

Ist es z. B. möglich — wie der Einfachheit wegen angenommen werden soll — die n Werthengebiete der x_ν in zwei Gruppen zusammen zu fassen, so dass die Gebiete der $x_1, x_2, \dots x_k$ von einem Kreise mit dem Mittelpunkte c^m, die Gebiete der $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots x_n$ von einem Kreise mit dem Mittelpunkte c'^m eingeschlossen werden, so gilt für die k ersten x_ν die Entwickelung

$$10\text{a)} \qquad \sqrt[m]{\mu x_\nu} = \varepsilon_m{}^\mu (A_0 + \varepsilon_n{}^\nu A_1 + \cdots + \varepsilon_n^{\overline{n-1}.\nu} A_{n-1})$$
$$(\mu = 1,\ 2 \dots m; \quad \nu = 1,\ 2 \dots k)$$

und für die $n-\nu$ übrigen $x_{\nu'}$ die Entwickelung

$$10\text{b)} \qquad \sqrt[m]{\mu x_{\nu'}} = \varepsilon_m{}^\mu (A'_0 + \varepsilon_n{}^{\nu'} A'_1 + \cdots + \varepsilon_n^{\overline{n-1}.\nu'} A'_{n-1})$$
$$(\mu = 1,\ 2 \dots m;\ \nu' = k+1,\ k+2 \dots n),$$

wo die A von den Hilfsgrössen b_n und c_m, die A' von den Hilfsgrössen b_n und c'_m abhängen.

Die Potenzreihen A_i und A_i' sind somit in diesem Falle der Form nach verschieden; dass sie aber dem Werthe nach übereinstimmen, erhellt durch folgende Ueberlegung.

Ich setze die Möglichkeit voraus, die Werthengebiete der x_ν und der $x_{\nu'}$ zum Theil in eine dritte Gruppe zusammen zu fassen, so dass z. B. die Gebiete der x_k und der x_{k+1} von einem Kreise der bezeichneten Art, dessen Mittelpunkt c''^m sei, umschlossen werden. Dann gelten die Entwickelungen

$$10\text{c)} \quad \begin{cases} \sqrt[m]{\mu x_k} = \varepsilon_m{}^\mu (A_0'' + \varepsilon_n{}^k A_1'' + \varepsilon_n{}^{2k} A_2'' + \cdots + \varepsilon_n^{\overline{n-1}.k} A''_{n-1}), \\ \sqrt[m]{\mu x_{k+1}} = \varepsilon_m{}^\mu (A_0'' + \varepsilon_n^{k+1} A_1'' + \varepsilon_n^{2.\overline{k+1}} A_2'' + \cdots + \varepsilon_n^{\overline{n-1}.\overline{k+1}} A''_{n-1}), \end{cases}$$
$$(\mu = 1,\ 2 \dots m);$$

wo die A'' von den beiden Hilfsgrössen b_n und c_m'' abhängen.

Es ist daher für den ganzen Convergenzbereich der unabhängigen Variablen

$$11\text{a)} \qquad A_i'' = A_i; \quad A_i'' = A_i', \text{ also auch } A_i = A_i'.$$

Die soeben gemachte Voraussetzung ist nur dann unzulässig, wenn die Werthengebiete der x_ν und der $x_{\nu'}$ insgesammt von einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden geschnitten werden und die eine Gruppe rechts, die andere links vom Nullpunkte liegt; denn nunmehr sind blos die anfänglich vorausgesetzten beiden Gruppen möglich.

In diesem Falle beachte man, wie die n Werthe $x_1, x_2 \dots x_n$ sich lagern, die durch das ursprünglich in's Auge gefasste System der unabhängigen Variablen, dem der Convergenzbereich zugeordnet wurde, erzeugt werden. Liegen die n Werthe nicht selbst rechts und links vom Nullpunkte auf einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden, so beschränke man den anfänglich vorhandenen Convergenzbereich der Art, dass auch die zugehörigen Werthengebiete der x_ν und $x_{\nu'}$ nicht mehr von einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden geschnitten werden. Die Gleichheit der Werthe der A_i und A_i' folgt dann in der oben angegebenen Weise für den beschränkten Convergenzbereich. Liegen aber die n Werthe $x_1, x_2 \ldots x_n$ rechts und links vom Nullpunkte auf einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden, so kann für dieses System von Werthen die Gleichheit der Werthe der A_i und A_i' nicht nach der benutzten Methode bewiesen werden. Es muss aber kraft der Stetigkeit der Functionen A_i und A_i' die Uebereinstimmung ihrer Werthe auch für die in der angegebenen Lage befindlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ gefordert werden, da die Uebereinstimmung für solche $x_1, x_2 \ldots x_n$ besteht, die beliebig wenig von der Ausnahmelage entfernt sind. Es gilt daher in allgemeiner Weise für den ganzen ursprünglichen Convergenzbereich der unabhängigen Variablen die Gleichung:

$$11)\qquad A_i = A_i'.$$

Auf Grund dieser Erkenntniss kann man eine und dieselbe Form der A_i, z. B. die für die Entwickelung von $\sqrt[m]{{}_\mu x_1}$ sich ergebende zur Darstellung aller Functionen $\sqrt[m]{{}_\mu x_\nu}$ benützen. Als gemeinsame Darstellungsform ergiebt sich somit

$$12)\qquad \sqrt[m]{{}_\mu x_\nu} = \varepsilon_m^{\mu}(A_0 + \varepsilon_n^{\nu} A_1 + \varepsilon_n^{2\nu} A_2 + \ldots \varepsilon_n^{\overline{n-1}\cdot\nu} A_{n-1})$$
$$(\mu = 1,\ 2 \ldots m;\quad \nu = 1,\ 2 \ldots n),$$

wo die A_i von Potenzreihen abhängen, die für einen geeignet gewählten Convergenzbereich der unabhängigen Variablen Geltung haben.

Es wurde beim Beginn dieser Darlegung vorausgesetzt, dass keiner der Werthe x_ν, für die ein Convergenzbereich der unabhängigen Variablen bestimmt würde, gleich Null oder gleich Unendlich sei. Ist nun eines der x_ν gleich Null oder gleich Unendlich, so kann kein Convergenzbereich der unabhängigen Variablen der Art bestimmt werden, dass dem individuellen Werthensysteme der x_ν andere Werthensysteme sich beigesellen und einen Bereich der Ebene stetig erfüllen; es muss vielmehr die Variabilität der unabhängigen Variablen in diesem Falle so beschränkt werden, dass sie bloss das individuelle Werthensystem der x_ν erzeugen. Dann ist aber für $x_\nu = \infty$ auch $\sqrt[m]{{}_\mu x_\nu} = \infty$ und die obige Darstellung verliert ihre Bedeutung; für $x_\nu = 0$ dagegen behält die Formel 12) ihre Bedeutung nur mit der Beschränkung, dass es das individuelle System der Werthe $x_1, x_2 \ldots x_n$ ist, für das die Potenzreihendarstellung hergestellt wurde.

§ 5. In gleicher Weise wie $\sqrt[m]{{}_\mu x_\nu}$ sind auch die Potenzen dieser Wurzelgrösse durch Reihen darstellbar. Für eine beliebige rationale Function dieser Wurzel und der Wurzel $\sqrt[n]{{}_\nu a}$ erhält man daher gleichfalls eine Reihenform. Setzt man somit:

13) $$x_{\mu\nu} = r_0 + r_1 \,.\, \sqrt[m]{_\mu x_\nu} + \ldots r_{n-1} \,.\, (\sqrt[m]{_\mu x_\nu})^{m-1},$$

wo die r rationale Functionen von $\sqrt[n]{_\nu a}$ und von beliebigen anderen variablen Zahlen sind, so erhält man, wenn die r nach Potenzen von ε_n^ν geordnet werden:

14) $$x_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} \sum_{\beta=0}^{\beta=n-1} \varepsilon_m^{\alpha\mu} \,.\, \varepsilon_n^{\beta\nu} \,.\, a_{\alpha\beta}.$$

Betreffs der Werthengebiete der $x_{\mu\nu}$, die dem Convergenzbereiche der unabhängigen Variablen zugehören, gelten nun dieselben Bemerkungen, die über die Werthengebiete der x_ν gemacht wurden. Für ein gegebenes Werthensystem der unabhängigen Variablen, für das kein $x_{\mu\nu}$ unendlich gross wird, kann man daher einen Convergenzbereich der Art abgrenzen, dass die Werthengebiete der $x_{\mu\nu}$ einfach zusammenhängende Ebenentheile sind, die im Endlichen verlaufen und den Nullpunkt nicht umschliessen, und dass insbesondere, wenn eines der $x_{\mu\nu}$ gleich Null wird, dem Convergenzbereiche nur das individuelle System der Werthe $x_{\mu\nu}$ zugehört.

Daraus folgt die Möglichkeit, die durch die Gleichung

15) $$x^l = x_{\mu\nu}$$

definirten Functionen $\sqrt[l]{_\lambda x_{\mu\nu}}, \quad (\lambda = 1, 2 \ldots l)$

durch Potenzreihen mittelst des binomischen Satzes darzustellen. Man wird hierbei von denselben Erwägungen geleitet werden, die zu der Darstellung der Functionen $\sqrt[m]{_\mu x_\nu}$ führten. Es muss nur $x_{\mu\nu}$ an Stelle von x_ν gesetzt werden. Es ergiebt sich so, wenn $\varepsilon_l = \cos 2\pi/l + i \sin 2\pi/l$:

16) $$\sqrt[l]{_\lambda x_{\mu\nu}} = \varepsilon_l^\lambda \,.\, \sum_{\alpha;\,\beta} \varepsilon_m^{\alpha\mu} \,.\, \varepsilon_n^{\beta\nu} \,.\, A_{\alpha\beta}.$$

Eine beliebige rationale Function dieser Wurzel und der Wurzeln $\sqrt[m]{_\mu x_\nu}$ und $\sqrt[n]{_\nu a}$ kann daher für denselben Convergenzbereich der unabhängigen Variablen wie die Wurzeln selbst in Form einer Reihe dargestellt werden.

Bedeuten somit $r_0, r_1, \ldots r_{l-1}$ rationale Functionen von $\sqrt[m]{_\mu x_\nu}$ und $\sqrt[n]{_\nu a}$, deren jede nach den Potenzen der Einheitswurzeln ε_n^ν und ε_m^μ geordnet werden kann, und setzt man

17) $$x_{\lambda\mu\nu} = r_0 + r_1 \sqrt[l]{_\lambda x_{\nu\mu}} + \ldots r_{l-1} (\sqrt[l]{_\lambda x_{\mu\nu}})^{l-1},$$

so erhält man:

18) $$x_{\lambda\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=l-1} \sum_{\beta=0}^{\beta=m-1} \sum_{\gamma=0}^{\gamma=n-1} \varepsilon_l^{\alpha\lambda} \,.\, \varepsilon_m^{\beta\mu} \,.\, \varepsilon_n^{\gamma\nu} \,.\, A_{\alpha\beta\gamma}$$

$$(\lambda = 1, 2 \ldots l;\ \mu = 1, 2 \ldots m;\ \nu = 1, 2 \ldots n).$$

Wird jetzt eine Potenz von x den Functionen $x_{\lambda\mu\nu}$ gleichgesetzt, so können die dadurch neu definirten Wurzelgrössen und ebenso beliebige rationale

Functionen derselben und der Wurzeln $\sqrt[l]{{}_\lambda x_{\mu\nu}}$, $\sqrt[m]{{}_\mu x_\nu}$, $\sqrt[n]{{}_\nu a}$ in Reihenform dargestellt und nach Potenzen der Einheitswurzeln geordnet werden.

Durch fortgesetzte Ausführung dieses Darstellungsprocesses lässt sich somit der allgemiene Wurzelausdruck in eine functionentheoretische Normalform bringen, die man in folgender Weise darstellen kann.

§ 6. Man definire eine Reihe von Wurzelgrössen als Functionen der Variablen a_1, $a_2 \ldots a_\mu$ durch die Gleichungen:

$$\text{19)} \quad \begin{cases} (x^{(1)})^{n_1} = \mathfrak{R}_1(a_1,\ a_2 \ldots a_\mu), \\ (x^{(2)})^{n_2} = \mathfrak{R}_2(x^{(1)};\ a_1,\ a_2 \ldots a_\mu), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (x^{(\nu)})^{n_\nu} = \mathfrak{R}_\nu(x^{(\nu-1)} \ldots x^{(2)},\ x^{(1)};\ a_1,\ a_2 \ldots a_\mu), \end{cases}$$

wo die n_1, $n_2 \ldots n_\nu$ beliebige ganze Zahlen und die $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2 \ldots \mathfrak{R}_\nu$ ganze Functionen der x und rationale Functionen der a sind und bilde mit demselben den allgemeinen Wurzelausdruck:

$$\text{20)} \qquad \mathfrak{R}(x^{(\nu)},\ x^{(\nu-1)} \ldots x^{(1)};\ a_1,\ a_2 \ldots a_\mu).$$

Man setze ferner:

$$\text{21)} \qquad x_{\lambda_k}^{(k)} = \sqrt[n_k]{{}_{\lambda_k} \mathfrak{R}_k}, \qquad (\lambda_k = 1, 2 \ldots n_k;\ k = 1, 2 \ldots \nu),$$

wo der dem Wurzelzeichen beigefügte Index λ_k bedeutet, dass der Werth der Wurzel dem λ_k^{ten} Gebiete unter den n_k Gebieten der Wurzelwerthe angehört, so dass $x_{\lambda_k}^{(k)}$ eine eindeutig bestimmte Function ist.

Es kann dann für ein beliebiges Werthensystem a_1, $a_2 \ldots a_\mu$, für das keine der ν Wurzelgrössen $x^{(1)}$, $x^{(2)} \ldots x^{(\nu)}$ gleich Unendlich wird, ein Bereich der unabhängigen Variablen a bestimmt werden, so dass die zugehörigen Werthengebiete der Functionen $x_{\lambda_1}{}^{(1)}$, $x_{\lambda_2}{}^{(2)} \ldots x_{\lambda_\nu}{}^{(\nu)} \ldots$ einfach zusammenhängende, den Nullpunkt nicht umschliessende Ebenentheile sind, die für den Fall, dass einer der n_k Werthe $x_{\lambda_k}^{(k)}$ gleich Null ist, auf das individuelle System der Werthe $x_{\lambda_k}^{(k)}$, $(\lambda_k = 1,\ 2 \ldots n_k)$ sich beschränken müssen.

Dann ist es möglich der Reihe nach mittelst des binomischen Satzes die n_1 Functionen $x_{\lambda_1}{}^{(1)}\,(\lambda_1 = 1,\ 2 \ldots n_1)$, sodann die n_2 Functionen $x_{\lambda_2}{}^{(2)}(\lambda_2 = 1,\ 2 \ldots n_2)$ u. s. w. und schliesslich die n_ν Functionen $x_{\lambda_\nu}{}^{(\nu)}(\lambda_\nu = 1,\ 2 \ldots n_\nu)$ durch Potenzreihen darzustellen, die für den Convergenzbereich der unabhängigen Variablen Geltung haben. Man erhält so, wenn

$$\text{22a)} \qquad \varepsilon_{n_k} = \cos 2\pi/n_k + i \,.\, \sin 2\pi/n_k, \qquad (k = 1,\ 2 \ldots \nu)$$

gesetzt wird:

$$\text{22)} \qquad x_{\lambda_k}^{(k)} = \sqrt[n_k]{{}_{\lambda_k} \mathfrak{R}_k} = \varepsilon_{n_k}^{\lambda_k} \,.\, P_k(x^{(1)},\ x^{(2)} \ldots x^{(k-1)}), \\ (\lambda_k = 1,\ 2 \ldots n_k)$$

wo P_k nach Potenzen der Einheitswurzeln ε_{n_1}, $\varepsilon_{n_2} \ldots \varepsilon_{n_{k-1}}$ geordnet werden kann.

Werden diese Potenzreihen in die $n_1 . n_2 \dots n_\nu$ Functionen

23) $$x_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\nu} = \Re(x_{\lambda_\nu}{}^{(\nu)} \dots x_{\lambda_2}{}^{(2)},\ x_{\lambda_1}{}^{(1)};\ a_1,\ a_2 \dots a_\mu)$$

des allgemeinen Wurzelausdrucks eingesetzt, so erhält man folgende einheitliche Darstellungsform, welche ich die Normalform nenne:

24) $$x_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\nu} = \sum_{\alpha_1 = 0}^{\alpha_1 = n_1 - 1} \dots \sum_{\alpha_\nu = 0}^{\alpha_\nu = n_\nu - 1} \varepsilon_{n_1}{}^{\alpha_1 \lambda_1} \dots \varepsilon_{n_\nu}{}^{\alpha_\nu \lambda_\nu} . a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu},$$

$$(\lambda_1 = 1,\ 2 \dots n_1;\ \dots \lambda_\nu = 1,\ 2 \dots n_\nu),$$

wo die a eindeutige und stetige Potenzreihen sind, die für den Convergenzbereich der ursprünglichen Variablen Geltung haben.

§ 7. Zu demselben Resultate kann man auch gelangen, wenn in $x^n = a$ die Variable $a = e^\alpha$ gesetzt und $\alpha = \log a = \log e^\gamma + \log\left(1 + \frac{a - e^\gamma}{e^\gamma}\right)$ für einen Convergenzbereich von a in eine Reihe entwickelt wird. Die n Functionen $\sqrt[n]{{}_\nu a}$ werden jetzt durch $e^{\frac{\alpha + 2\nu\pi i}{n}}$ $(\nu = 1,\ 2 \dots n)$ repräsentirt und für den allgemeinen Wurzelausdruck erhält man folgende Definitionsgleichungen:

$$25)\quad \begin{aligned}
&\text{a)} \left\{ \begin{aligned} &(x^{(1)})^{n_1} = \Re_1(a_1,\ a_2 \dots a_\mu);\ \varrho_1 = \log \Re_1; \\ &x_{\lambda_1}{}^{(1)} = e^{\frac{\varrho_1 + \lambda_1 . 2\pi i}{n_1}} = e^{\varrho_1'};\ (\lambda_1 = 1,\ 2 \dots n_1); \end{aligned} \right. \\
&\text{b)} \left\{ \begin{aligned} &(x^{(2)})^{n_2} = \Re_2(e^{\varrho_1'};\ a_1,\ a_2 \dots a_\mu);\ \varrho_2 = \log \Re_2; \\ &x_{\lambda_2}{}^{(2)} = e^{\frac{\varrho_2 + \lambda_2 . 2\pi i}{n_2}} = e^{\varrho_2'};\ (\lambda_2 = 1,\ 2 \dots n_2); \end{aligned} \right. \\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\text{c)} \left\{ \begin{aligned} &(x^{(\nu)})^{n_\nu} = \Re_\nu(e^{\varrho'_{\nu-1}} \dots e^{\varrho_1'};\ a_1,\ a_2 \dots a_\mu);\ \varrho_\nu = \log \Re_\nu; \\ &x_{\lambda_\nu}{}^{(\nu)} = e^{\frac{\varrho_\nu + \lambda_\nu . 2\pi i}{n_\nu}} = e^{\varrho'_\nu};\ (\lambda_\nu = 1,\ 2 \dots n_\nu). \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Der allgemeine Wurzelausdruck lautet dann:

26) $$\Re(e^{\varrho'_\nu} \dots e^{\varrho'_2},\ e^{\varrho'_1};\ a_1,\ a_2 \dots a_\mu),\ \left(\varrho'_k = \frac{1}{n_k}(\varrho_k + \lambda_k 2\pi i),\ \lambda_k = 1,\ 2 \dots n_k\right),$$

wo an Stelle der Wurzeln, die aus vorhandenen Wurzelgrössen gezogen werden, Exponentialfunktionen treten, deren Argumente selbst wieder Exponentialfunctionen enthalten. Ersetzt man nun in der obigen Reihe von Definitionsgleichungen die $e^{\frac{\varrho_1}{n_1}},\ e^{\frac{\varrho_2}{n_2}} \dots e^{\frac{\varrho_\nu}{n_\nu}}$ durch die für einen Convergenzbereich der Variablen a giltigen Potenzreihen und ordnet man sie, wenn sie in den Wurzelausdruck eingesetzt werden, nach Potenzen der Einheitswurzeln: $\varepsilon_{n_1}^{\lambda_1} = e^{\lambda_1 \frac{2\pi i}{n_1}};\ \varepsilon_{n_2}^{\lambda_2} = e^{\lambda_2 \cdot \frac{2\pi i}{n_2}} \dots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu} = e^{\lambda_\nu \cdot \frac{2\pi i}{n_\nu}}$, so wird auch auf diesem Wege die Normalform 24) gewonnen.

§ 8. Ist so die Möglichkeit bewiesen, den allgemeinen Wurzelausdruck in die Normalform 24) zu bringen, so ist noch die Bemerkung von

Interesse, dass die ihrer Form nach als Potenzreihen sich darstellenden $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ ihrem Werthe nach durch die Functionen $x_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu}$ der Normalform ausgedrückt werden können. Es folgt nämlich aus dem Systeme von Gleichungen 24) nach einem schon von Lagrange und Abel benützten Auflösungsprocesse das Gleichungensystem:

$$15)\qquad n_1 . n_2 \ldots n_\nu . a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} = \sum_{\lambda_1=1}^{\lambda_1=n_1} \cdots \sum_{\lambda_\nu=1}^{\lambda_\nu=n_\nu} \varepsilon_{n_1}^{-\lambda_1 \alpha_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{-\lambda_\nu \alpha_\nu} . x_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu},$$

$$(\alpha_1 = 0,\ 1 \ldots n_1 - 1;\ \ldots \alpha_\nu = 0,\ 1 \ldots n_\nu - 1).$$

§ 9. Für die Normalform des allgemeinen Wurzelausdrucks ist lediglich die Anzahl ν der Wurzelgrössen und deren Grad $n_1,\ n_2 \ldots n_\nu$ von Bedeutung. Die Reihenfolge dagegen, in der die ν Wurzeln ausgezogen werden, ist in der fertigen Normalform nicht zu erkennen. Es classificirt nun Abel die allgemeinen Wurzelausdrücke in der Abhandlung*: „Beweis der Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der allgemeinen Gleichungen, welche den vierten Grad übersteigen" nach Ordnung und Grad; ein Wurzelausdruck ist von der Ordnung μ, wenn er Wurzelgrössen enthält, die durch μ-fach wiederholtes Wurzelausziehen entstanden sind, er ist vom Grade m, wenn er m Wurzelgrössen μ^{ter} Ordnung enthält. Das μ-fach wiederholte Wurzelausziehen hat aber auf die Gestalt der Normalform keinen Einfluss, so dass diese Classification keine Anwendung finden kann.

In der Abhandlung**: „sur la résolution algébrique des équations" bezeichnet aber Abel die Anzahl der Wurzelgrössen als Ordnung des Wurzelausdrucks. Somit kann auch diese Anzahl die Ordnung der Normalform genannt werden. Völlig charakterisirt ist jedoch die Normalform durch das Product:

$$28)\qquad N = n_1 . n_2 \ldots n_\nu;$$

es kann die Charakteristik der Normalform genannt werden.

Es ist zu beachten, dass es nicht nothwendig war, den Grad der Wurzelgrössen durch Primzahlen darzustellen. Jede Wurzelgrösse, deren Grad keine Primzahl ist, kann aber durch successives Ausziehen von Wurzeln vom Primzahlgrade erzeugt werden. Es sind somit derartige Wurzelgrössen Specialisirungen eines allgemeineren Wurzelausdrucks, der blos Wurzeln vom Primzahlgrade enthält und der mit jenen gebildete allgemeine Wurzelausdruck nebst seiner Normalform ist gleichfalls eine Specialisirung eines allgemeinsten Wurzelausdrucks und dessen Normalform, der blos Wurzeln vom Primzahlgrade enthält. Da die Charakteristik dieser allgemeinsten Normalform durch das Product der Primzahlfactoren

* Oeuvres complètes 1881, Bd. I p. 66.

** Bd. II p. 217.

von N gegeben wird, so folgt, dass es für ein vorgelegtes N blos eine allgemeinste Normalform giebt, für welche die Einheitswurzeln alle vom Primzahlgrade sind, und für welche die Anzahl ν der Einheitswurzeln — die Ordnung der Normalform — ihr Maximum erreicht.

II. Die Eigenschaften der Normalformen, in welchen die Grade der Einheitswurzeln gewisse Bedingungen erfüllen.

§ 1. Die $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Functionen der Normalform:

$$1)\qquad x_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\nu} = \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}{}^{\alpha_1 \lambda_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}{}^{\alpha_\nu \lambda_\nu} . a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu}$$

bezeichne ich zusammenfassend durch des Symbol:

$$2)\qquad F(\varepsilon_{n_1};\ \varepsilon_{n_2} \ldots \varepsilon_{n_\nu}).$$

Diese Bezeichnungsweise deutet an, dass es lediglich die ν Einheitswurzeln

$$\varepsilon_{n_1} = \cos 2\pi/n_1 + i \sin 2\pi/n_1;\ \varepsilon_{n_2} = \cos 2\pi/n_2 + i \sin 2\pi/n_2; \ldots$$

sind, welche den Charakter der Normalform bestimmen, und dass das System der $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Functionen $x_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\nu}$ aus $x_{11 \ldots 1}$ erhalten wird, wenn die Reihen der aufeinander folgenden Potenzen der Einheitswurzeln an Stelle der ersten Potenzen treten.

Werden nun aus den $\varepsilon_{n_1},\ \varepsilon_{n_2} \ldots \varepsilon_{n_\nu}$ andere Einheitswurzeln derselben Grade gebildet, die durch $\eta_{n_1},\ \eta_{n_2} \ldots \eta_{n_\nu}$ bezeichnet werden sollen, und stellt dann das Symbol

$$3)\qquad F(\eta_{n_1};\ \eta_{n_2} \ldots \eta_{n_\nu})$$

gleichfalls das System der $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Functionen $x_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\nu}$ dar, wenn in $\eta_{n_1},\ \eta_{n_2} \ldots \eta_{n_\nu}$ die Reihen der aufeinander folgenden Potenzen von ε_{n_1}, $\varepsilon_{n_2} \ldots \varepsilon_{n_\nu}$ eingesetzt werden, so nenne ich dieses Symbol dem ersten äquivalent und ich setze:

$$4)\qquad F(\varepsilon_{n_1};\ \varepsilon_{n_2} \ldots \varepsilon_{n_\nu}) \sim F(\eta_{n_1};\ \eta_{n_2} \ldots \eta_{n_\nu}).$$

Dass es für ein gegebenes System von Einheitswurzeln $\varepsilon_{n_1},\ \varepsilon_{n_2} \ldots \varepsilon_{n_\nu}$ blos eine beschränkte Anzahl äquivalenter Symbole F giebt, ist evident. Die Anzahl der äquivalenten Symbole und die Bildungsweise der ein jedes charakterisirenden η_{n_k}; $(k = 1,\ 2 \ldots \nu)$ aus den $\varepsilon_{n_1},\ \varepsilon_{n_2} \ldots \varepsilon_{n_\nu}$ will ich jetzt bestimmen. Man wird dadurch zur Kenntniss der Eigenschaften der Normalform geführt.

Bei dieser Untersuchung gehe ich stufenweise vor und nehme der Reihe nach an, dass die ν Zahlen $n_1,\ n_2 \ldots n_\nu$ relative Primzahlen seien, dass sie sodann alle denselben Werth haben, und dass sie schliesslich Potenzen einer und derselben Zahl seien. Aus diesen Specialfällen ergiebt sich dann der allgemeine Fall für beliebig gewählte $n_1 \ldots n_\nu$ ohne Mühe.

§ 2. Sind die $n_1, n_2 \ldots n_\nu$ relative Primzahlen, so kann η_{n_k} blos eine Potenz von ε_{n_k} sein, so dass

$$\eta_{n_k} = \varepsilon_{n_k}^{i_k}; \qquad (k = 1, 2 \ldots \nu).$$

Da nun aber η_{n_k} durch Einsetzen der Reihe der aufeinander folgenden Potenzen von ε_{n_k} die ganze Reihe der n_k Einheitswurzeln darstellen soll, so muss i_k relativ prim zu n_k sein, so dass es $\varphi(n_k)$ Werthe η_{n_k} giebt.

Die Anzahl der äquivalenten Symbole ist somit:

$$\varphi(n_1) . \varphi(n_2) \ldots \varphi(n_\nu)$$

und die Symbole selbst werden dargellt durch:

$$5) \qquad F(\varepsilon_{n_1}; \varepsilon_{n_2} \ldots \varepsilon_{n_\nu}) \sim F(\varepsilon_{n_1}{}^{i_1}; \varepsilon_{n_2}{}^{i_2} \ldots \varepsilon_{n_\nu}{}^{i_\nu})$$
$$(i_k \text{ relativ prim zu } n_k;\ k = 1, 2 \ldots \nu).$$

Da äquivalente Symbole in gleicher Weise das System der $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Functionen der Normalform repräsentiren, so ändert sich im vorliegenden Falle das System dann und nur dann nicht, wenn die primitiven Einheitswurzeln $\varepsilon_{n_1}{}^{i_1}, \varepsilon_{n_2}{}^{i_2} \ldots \varepsilon_{n_\nu}{}^{i_\nu}$ an Stelle der $\varepsilon_{n_1}, \varepsilon_{n_2} \ldots \varepsilon_{n_\nu}$ treten. Bezeichnet man nun das System aller $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Functionen durch ein vor die einzelne Function gesetztes S, so ist:

$$6) \qquad S\sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}{}^{\alpha_1 \lambda_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{\alpha_\nu \lambda_\nu} . a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} = S\sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}{}^{i_1 \alpha_1 \lambda_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}{}^{i_\nu \alpha_\nu \lambda_\nu} . a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}.$$

Da aber, wenn i_k relativ prim zu n_k ist, die Werthe $i_k \alpha_k$ zugleich mit den α_k ein vollständiges Restensystem bezüglich des Moduls n_k darstellen, so ist:

$$7) \qquad \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}{}^{i_1 \alpha_1 \lambda_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}{}^{i_\nu \alpha_\nu \lambda_\nu} . a_{i_1 \alpha_1 \ldots i_\nu \alpha_\nu} = \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}{}^{\alpha_1 \lambda_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}{}^{\alpha_\nu \lambda_\nu} . a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu},$$

wo die Indices $i_k \alpha_k$ auf ihre kleinsten positiven Werthe bezüglich des Moduls n_k zu reduciren sind. Es ist daher:

$$8) \quad S\sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}{}^{i_1 \alpha_1 \lambda_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}{}^{i_\nu \alpha_\nu \lambda_\nu} . a_{i_1 \alpha_1 \ldots i_\nu \alpha_\nu} = S\sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}{}^{i_1 \alpha_1 \lambda_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}{}^{i_\nu \alpha_\nu \lambda_\nu} . a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}.$$

Daraus folgt, dass das System der $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Functionen der Normalform nicht geändert wird, wenn in jeder Function die $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}$ durch die $a_{i_1 \alpha_1 \ldots i_\nu \alpha_\nu}$ ersetzt werden. Diese Vertauschungen der a sind die einzigen, die vorgenommen werden dürfen, wenn keine Bedingungsgleichungen zwischen den a eingeführt werden sollen. Denn jede Vertauschung der a kann, so lange sie durch keine Bedingungsgleichung begründet ist, durch eine entsprechende Vertauschung der Einheitswurzeln, welche Coefficienten der a sind, ersetzt werden, weil die Functionen der Normalform symmetrisch sind bezüglich der aus den a und den zugehörigen Einheitswurzeln bestehenden Producte. Die einzig möglichen Vertauschungen der Einheitswurzeln, die das System der Functionen ungeändert lassen, werden aber durch die äquivalenten Symbole dargestellt. Es giebt daher auch blos die angegebenen Vertauschungen der a.

An erster Stelle ergiebt sich somit folgende Eigenschaft der Normalform:

Sind die n_1, $n_2 \ldots n_\nu$ relative Primzahlen, so bleibt das System der Functionen der Normalform 1), in welcher die a keinen geeigneten Bedingungsgleichungen unterworfen sind, dann und nur dann ungeändert, wenn in jeder Function Vertauschungen der a vorgenommen werden, deren Anzahl

$$\varphi(n_1) . \varphi(n_2) \ldots \varphi(n_\nu)$$

ist, und durch welche alle

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \text{ in } a_{i_1 \alpha_1 \ldots i_\nu \alpha_\nu}$$

$$(\alpha_k = 0, 1 \ldots n_k - 1; \; i_k \text{ relativ prim zu } n_k; \; k = 1, 2 \ldots \nu)$$

übergehen.

§ 3. Ist nun $n_1 = n_2 = \ldots n_\nu = n$, so kann in den äquivalenten Symbolen:

$$F(\eta_{n_1}; \; \eta_{n_2} \ldots \eta_{n_\nu})$$

9) $$\eta_{n_k} = \varepsilon_{n_1}{}^{i_{1k}} . \varepsilon_{n_2}{}^{i_{2k}} \ldots \varepsilon_{n_\nu}{}^{i_{\nu k}}; \qquad (k = 1, 2 \ldots \nu)$$

gesetzt werden, wo jedoch die i_{1k}, $i_{2k} \ldots i_{\nu k}$ die Werthe von 1 bis n nicht in völlig beliebiger Weise annehmen dürfen, da jedes η_{n_k} unabhängig von jedem anderen die Reihe der n Einheitswurzeln n^{ten} Grades darstellen soll, falls die aufeinander folgenden Potenzen

$$\varepsilon_{n_1}{}^{\lambda_1}, \; \varepsilon_{n_2}{}^{\lambda_2} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu}; \qquad (\lambda_i = 1, 2 \ldots n)$$

an Stelle der ε_{n_1}, $\varepsilon_{n_2} \ldots \varepsilon_{n_\nu}$ gesetzt werden.

Um in diesem Falle das Bildungsgesetz der η_{n_k} und die Anzahl der äquivalenten Symbole anzugeben, treffe ich folgende Festsetzungen:

Zwei Systeme von ν ganzen Zahlen a_1, $a_2 \ldots a_\nu$; a_1', $a_2' \ldots a_\nu'$ sollen congruent bezüglich des Moduls n heissen, wenn

$$a_1 \equiv a_1' (mod\, n); \; a_2 \equiv a_2' (mod\, n); \; \ldots a_\nu \equiv a_\nu' (mod\, n);$$

wo nicht, sollen sie incongruent bezüglich desselben Moduls genannt werden.

Die n^ν bezüglich des Moduls n incongruenten Systeme von je ν Zahlen sollen als vollständiges Restsystem bezeichnet werden.

Die Zahlen a_1, $a_2 \ldots a_\nu$ sollen relativ prim zu n genannt werden, wenn ihr grösster gemeinsamer Theiler relativ prim zu n ist.

Bezeichnen die a_{ik} $(i = 1, 2 \ldots \nu; \; k = 1, 2 \ldots \nu)$ der Reihe nach und unabhängig von einander die Werthe eines vollständigen Systems mit Bezug auf n incongruenter Zahlen und bildet man die n^{ν^2} Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{\nu 1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{\nu 2} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1\nu} & a_{2\nu} \dots a_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

so soll die Anzahl dieser Determinanten, deren Werth relativ prim zu n ist, in Analogie mit der bekannten zahlentheoretischen Function $\varphi(n)$, durch $\varphi(n, \nu)$ angegeben werden, so dass $\varphi(n, \nu)$ eine Erweiterung von $\varphi(n)$ ist und $\varphi(n, 1)$ die Function $\varphi(n)$ selbst darstellt. Diese Function $\varphi(n, \nu)$ wird durch folgende Sätze bestimmt:

1. Sind n und m zwei relative Primzahlen, so ist:

$$10) \qquad \varphi(n.m, \nu) = \varphi(n, \nu).\varphi(m, \nu).$$

Denn jede Zahl a_{ik} aus der Reihe eines vollständigen Restsystems mit Bezug auf den Modul $n.m$ kann in die Form

$$a_{ik}' n + a_{ik}'' m$$

gebracht werden. Substituirt man diese Darstellungen der a_{ik} in die obige Determinante, so ist:

$$|a_{11}, a_{22} \dots a_{\nu\nu}| \equiv |a_{11}', a_{22}' \dots a_{\nu\nu}'| n^\nu + |a_{11}'', a_{22}'' \dots a_{\nu\nu}''| m^\nu (mod\, n.m).$$

Somit ist $|a_{11}, a_{22} \dots a_{\nu\nu}|$ relativ prim zu $m.n$, wenn $|a_{11}', a_{22}' \dots a_{\nu\nu}'|$ relativ prim zu m und $|a_{11}'', a_{22}'' \dots a_{\nu\nu}''|$ relativ prim zu n ist; woraus der behauptete Satz folgt. Ueberdies zeigt sich, dass $\varphi(1, \nu) = 1$ zu setzen ist.

2. Ist n gleich einer Primzahl p, so ist:

$$11) \qquad \varphi(p, \nu) = (p^\nu - 1)(p^\nu - p) \dots (p^\nu - p^{\nu - 1}).$$

Stellt man nämlich bei der Erzeugung der Determinanten $|a_{ik}|$ beispielsweise erst die Elemente der ersten Horizontalreihe, dann die der zweiten u. s. w. her, so ergeben sich $p^\nu - 1$ Werthensysteme a_{k1}, $p^\nu - p$ Werthensysteme a_{k2}, und allgemein $p \;\, - p^{\lambda - 1}$ Werthensysteme $a_{k\lambda}$, $(k = 1, 2 \dots \nu)$. Denn es ist von den p^ν bezüglich des Moduls p incongruenten Werthensystemen $a_{11}, a_{21} \dots a_{\nu 1}$ blos das dem System der Nullwerthe congruente in Abzug zu bringen. Es sind sodann von den $p^\nu - 1$ Werthensystemen $a_{12}, a_{22} \dots a_{\nu 2}$, die zu p relativ prim sind, mit Rücksicht auf das festgewählte System $a_{11}, a_{21} \dots a_{\nu 1}$ alle diejenigen bei Seite zu lassen, für welche die Congruenzen

$$a_{k2} \equiv a_{k1}.t\,(mod\, p); \qquad (t \text{ relativ prim zu } p)$$

bestehen. Es giebt deren $p - 1$. Geht man in dieser Weise weiter und hat man die Systeme $a_{k1}, a_{k2} \dots a_{k\overline{\lambda - 1}}$, $(k = 1, 2 \dots \nu)$ so bestimmt, dass sie relativ prim zu p sind und nicht die Congruenzen erfüllen:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{k2} \equiv a_{k1} t_{11} (mod\, p); \;\; a_{k3} \equiv a_{k1} t_{21} + a_{k2} t_{22} (mod\, p); \\ a_{k4} \equiv a_{k1} t_{31} + a_{k2} t_{32} + a_{k3} t_{33} (mod\, p) \ldots \\ a_{k\,\overline{\lambda-1}} \equiv a_{k1} t_{\overline{\lambda-2}\,1} + a_{k2} t_{\overline{\lambda-2}\,2} + \cdots a_{k\,\overline{\lambda-2}} t_{\overline{\lambda-2}\,\overline{\lambda-2}} (mod\, p), \end{array}\right.$$

wo t_{11} und in gleicher Weise die Zahlensysteme t_{21}, t_{22}; t_{31}, t_{32}, t_{33}; $\ldots t_{\overline{\lambda-2}\,1}$, $t_{\overline{\lambda-2}\,2} \ldots t_{\overline{\lambda-2}\,\overline{\lambda-2}}$ zu p relativ prim sind, so ist für jedes Zahlensystem $t_{\overline{\lambda-1}\,1}$, $t_{\overline{\lambda-1}\,2} \ldots t_{\overline{\lambda-1}\,\overline{\lambda-1}}$, das zu p relativ prim ist, auch das Zahlensystem

$$a_{k1} t_{\overline{\lambda-1}\,1} + a_{k2} t_{\overline{\lambda-1}\,2} + \cdots a_{k\,\overline{\lambda-1}} t_{\overline{\lambda-1}\,\overline{\lambda-1}}; \quad (k = 1,\; 2 \ldots \nu)$$

zu p relativ prim. Es sind darum von den $p^\nu - 1$ Zahlensystemen

$$a_{k\lambda}; \qquad (k = 1,\; 2 \ldots \nu)$$

alle diejenigen in Abzug zu bringen, für welche

$$a_{k\lambda} \equiv a_{k1} t_{\overline{\lambda-1}\,1} + a_{k2} t_{\overline{\lambda-1}\,2} + \cdots a_{k\,\overline{\lambda-1}} t_{\overline{\lambda-1}\,\overline{\lambda-1}} (mod\, p).$$

Ihre Anzahl beträgt $p^{\lambda-1} - 1$, wodurch die Richtigkeit der aufgestellten Formel bewiesen wird.

3. Ist n gleich der Potenz einer Primzahl p^π, so ist:

$$\text{12)} \qquad \varphi(p^\pi,\; \nu) = p^{\nu^2(\pi-1)} \varphi(p,\; \nu).$$

Denn jede Determinante, die zu p^π relativ prim ist, ist auch zu p relativ prim. Liegt nun eine Determinante $|a_{ik}|$ vor, die zu p relativ prim ist, und deren Elemente aus einem zum Modul p gehörenden vollständigen Restsystem gewählt wurden, so kann in ihr jedes a_{ik} durch die $p^{\pi-1}$ Werthe $a_{ik} + s_{ik} p$; $(s_{ik} = 0,\; 1,\; 2 \ldots p^{\pi-1} - 1)$ ersetzt werden; denn jetzt müssen die a_{ik} aus einem zum Modul p^π gehörenden vollständigen Restsysteme gewählt werden. Es werden somit aus jeder der $\varphi(p,\, \nu)$ Determinanten, die zu p relativ prim sind, $p^{\nu^2(\pi-1)}$ Determinanten, die in Bezug auf den Modul p^π relativ prim sind. Daraus ergiebt sich die angegebene Gesammtzahl.

Auf Grund dieser Festsetzungen kann die Anzahl der äquivalenten Symbole $F(\eta_{n_1};\; \eta_{n_2} \ldots \eta_{n_\nu})$ und die Bildungsweise der

$$\eta_{n_k} = \varepsilon_{n_1}^{i_{1k}} . \varepsilon_{n_2}^{i_{2k}} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu k}}; \qquad (k = 1,\; 2 \ldots \nu)$$

leicht angegeben werden.

Es müssen nämlich die i_{1k}, $i_{2k} \ldots i_{\nu k}$ der Art bestimmt werden, dass die ν Summen

$$\lambda_1 i_{1k} + \lambda_2 i_{2k} + \cdots + \lambda_\nu i_{\nu k}; \qquad (k = 1,\; 2 \ldots \nu)$$

zugleich mit dem λ_1, $\lambda_2 \ldots \lambda_k$ ein vollständiges Restsystem bezüglich des Moduls n darstellen. Aus der Aufstellung des Systemes von Congruenzen folgt aber unmittelbar, dass dies zutrifft, wenn die aus den $i_{\lambda k}$ gebildete Determinante relativ prim zu n ist.

Die Anzahl der äquivalenten Symbole ist somit:

$$\varphi(n,\; \nu)$$

und die Symbole selbst werden dargestellt durch:

$$13)\quad \begin{cases} F(\varepsilon_{n_1};\ \varepsilon_{n_2}\ldots\varepsilon_{n_\nu}) \sim F(\eta_{n_1};\ \eta_{n_2}\ldots\eta_{n_\nu}); \\ \eta_{n_k} = \varepsilon_{n_1}{}^{i_{1k}}\cdot\varepsilon_{n_2}{}^{i_{2k}}\ldots\varepsilon_{n_\nu}{}^{i_{\nu k}}; \qquad (k=1,\ 2\ldots\nu); \\ \begin{vmatrix} i_{11} & i_{21}\ldots i_{\nu 1} \\ i_{12} & i_{22}\ldots i_{\nu 2} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ i_{1\nu} & i_{2\nu}\ldots i_{\nu\nu} \end{vmatrix} \text{ relativ prim zu } n. \end{cases}$$

Es ändert sich somit das System der n^ν Functionen der Normalform dann und nur dann nicht, wenn die Producte der Einheitswurzeln $\varepsilon_{n_1}{}^{i_{1k}}\cdot\varepsilon_{n_2}{}^{i_{2k}}\ldots\varepsilon_{n_\nu}{}^{i_{\nu k}}$ an Stelle der ε_{n_k} gesetzt werden und die Determinante der $i_{\lambda k}$ relativ prim zu n ist. Es ist daher:

$$14)\quad \begin{cases} S\sum\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}\varepsilon_{n_1}^{\alpha_1\lambda_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{\alpha_\nu\lambda_\nu}\cdot a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu} \\ \equiv S\sum\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(\varepsilon_{n_1}^{i_{11}\lambda_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu 1}\lambda_\nu})^{\alpha_1}\ldots(\varepsilon_{n_1}^{i_{1\nu}\lambda_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu\nu}\lambda_\nu})^{\alpha_\nu}\cdot a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}. \end{cases}$$

Da nun aber die ν Summen $\alpha_1 i_{k1} + \alpha_2 i_{k2} + \cdots \alpha_\nu i_{k\nu}$; $(k=1,\ 2\ldots\nu)$ zugleich mit den $\alpha_1,\ \alpha_2\ldots\alpha_\nu$ ein vollständiges Restensystem bezüglich des Moduls n darstellen, so kann

$$15)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}\varepsilon_{n_1}^{(\alpha_1 i_{11}+\cdots\alpha_\nu i_{1\nu})\lambda_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{(\alpha_1 i_{\nu 1}+\cdots\alpha_\nu i_{\nu\nu})\lambda_\nu}\cdot a_{\alpha_1 i_{11}+\cdots\alpha_\nu i_{1\nu};\ldots\alpha_1 i_{\nu 1}+\cdots\alpha_\nu i_{\nu\nu}} \\ \qquad = \sum\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}\varepsilon_{n_1}^{\alpha_1\lambda_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{\alpha_\nu\lambda_\nu}\cdot a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu} \end{cases}$$

gesetzt werden, wo die Indices $\alpha_1 i_{k1} + \cdots \alpha_\nu i_{k\nu}$ auf ihre kleinsten positiven Werthe mit Rücksicht auf n als Modul zu reduciren sind. Es ist daher auch:

$$16)\quad \begin{cases} S\sum\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}\varepsilon_{n_1}{}^{(\alpha_1 i_{11}+\cdots\alpha_\nu i_{1\nu})\lambda_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}{}^{(\alpha_1 i_{\nu 1}+\cdots\alpha_\nu i_{\nu\nu})\lambda_\nu}\cdot a_{\alpha_1 i_{11}+\cdots\alpha_\nu i_{1\nu};\ldots\alpha_1 i_{\nu 1}+\cdots\alpha_\nu i_{\nu\nu}} \\ \equiv S\sum\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(\varepsilon_{n_1}{}^{i_{11}\lambda_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}{}^{i_{\nu 1}\lambda_\nu})^{\alpha_1}\ldots(\varepsilon_{n_1}{}^{i_{1\nu}\lambda_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}{}^{i_{\nu\nu}\lambda_\nu})^{\alpha_\nu}\cdot a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}. \end{cases}$$

Aus dieser Darstellungsform folgt, dass das System der n^ν Functionen der Normalform nicht geändert wird, wenn in jeder Function die $a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}$ durch die $a_{\alpha_1 i_{11}+\cdots\alpha_\nu i_{1\nu};\ldots\alpha_1 i_{\nu 1}+\cdots\alpha_\nu i_{\nu\nu}}$ ersetzt werden. Diese Vertauschungen sind die einzigen, die vorgenommen werden dürfen, falls nicht solche durch Bedingungsgleichungen zwischen den a begründet werden, da — wie schon oben erwähnt wurde — jede Vertauschung der a auf eine solche der Einheitswurzeln zurückführt.

An zweiter Stelle findet man somit folgende Eigenschaft der Normalform:

Sind die ν Zahlen $n_1,\ n_2\ldots n_\nu$ alle gleich n, so bleibt das System der n^ν Functionen der Normalform 1), in welcher die

a keinen geeigneten Bedingungsgleichungen genügen, dann und nur dann ungeändert, wenn in jeder Function Vertauschungen der a vorgenommen werden, deren Anzahl durch $\varphi(n, \nu)$ bezeichnet wird, und durch welche alle

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu} \text{ in } a_{\alpha_1 i_{11} + \cdots \alpha_\nu i_{1\nu}; \ldots \alpha_1 i_{\nu 1} + \cdots \alpha_\nu i_{\nu\nu}}$$
$$(a_k = 0,\ 1 \ldots n-1;\ k = 1,\ 2 \ldots \nu)$$

übergehen, wo der Werth der Determinante

$$\begin{vmatrix} i_{11} & i_{21} \ldots i_{\nu 1} \\ i_{12} & i_{22} \ldots i_{\nu 2} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ i_{1\nu} & i_{2\nu} \ldots i_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

relativ prim zu n ist.

§ 4. Es werde nun vorausgesetzt, dass die Grade $n_1, n_2 \ldots n_\nu$ der Einheitswurzeln der Normalform Potenzen einer und derselben Zahl und zwar einer Primzahl seien.

Ich setze demgemäss

17) $$n_k = p^{\alpha_k}; \qquad (k = 1,\ 2 \ldots \nu)$$

und nehme überdies an, dass $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots \alpha_\nu > 1$, dass aber vorläufig keine an Werth gleiche α vorkommen.

In den äquivalenten Symbolen

$$F(\varepsilon_{n_1};\ \varepsilon_{n_2} \ldots \varepsilon_{n_\nu}) \sim F(\eta_{n_1};\ \eta_{n_2} \ldots \eta_{n_\nu})$$

kann nun gesetzt werden:

18) $$\eta_{n_k} = \varepsilon_{n_1}^{i_{1k}\frac{n_1}{n_k}} \ldots \varepsilon_{n_{k-1}}^{i_{\overline{k-1}\,k}\frac{n_{k-1}}{n_k}} \cdot \varepsilon_{n_k}^{i_{kk}} \cdot \varepsilon_{n_{k+1}}^{i_{\overline{k+1}\,k}} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu k}}.$$

Denn für

$$n_\mu = p^{\alpha_\mu},\ n_\lambda = p^{\alpha_\lambda},\ \alpha_\mu > \alpha_\lambda$$

ist

$$\varepsilon_{n_\mu}^{\frac{n_\mu}{n_\lambda}} = \varepsilon_{n_\lambda},$$

so dass:

18a) $$\eta_{n_k} = \varepsilon_{n_k}^{\left(i_{1k} + \cdots i_{\overline{k-1}\,k} + i_{kk} + \frac{n_k}{n_{k+1}} i_{\overline{k+1}\,k} + \cdots \frac{n_k}{n_\nu} i_{\nu k}\right)},$$

wo $i_{1k}, i_{2k} \ldots i_{kk}$ aus der Reihe der Zahlen $1,\ 2 \ldots n_k$; $i_{\overline{k+1}\,k}$ dagegen und entsprechend $i_{\overline{k+2}\,k} \ldots i_{\nu k}$ aus der Zahlenreihe

$$1,\ 2 \ldots n_{k+1} \text{ resp. } 1,\ 2 \ldots n_{k+2}; \ldots 1,\ 2 \ldots n_\nu$$

zu wählen sind

Die Werthe $i_{\lambda k}$ müssen aber der Art aus den zugehörigen Zahlenreihen gewählt werden, dass durch Einsetzen der successiven Potenzen $\varepsilon_{n_1}^{\lambda_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{\lambda_\nu}$ an Stelle von $\varepsilon_{n_1} \ldots \varepsilon_{n_\nu}$ in die Darstellungsformen 18) die $\eta_{n_1}, \eta_{n_2} \ldots \eta_{n_\nu}$, deren Werthe durch 18a) ausgedrückt werden, alle $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Systeme von Einheitswurzeln darstellen, die man aus den Einheitswurzeln vom Grade $n_1, n_2 \ldots n_\nu$ bilden kann.

Es müssen somit die $i_{\lambda k}$ so gewählt werden, dass die ν Congruenzen:

$$19)\quad \lambda_1 i_{1k} + \cdots \lambda_k i_{kk} + \lambda_{k+1} i_{k+1\,k} \frac{n_k}{n_{k+1}} + \cdots \lambda_\nu i_{\nu k} \frac{n_k}{n_\nu} \equiv a_k (mod\, n_k)$$
$$(k = 1,\ 2 \ldots \nu)$$

zugleich mit den $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Werthensystemen

$$\lambda_1 = 1,\ 2 \ldots n_1;\quad \lambda_2 = 1,\ 2 \ldots n_2;\quad \lambda_\nu = 1,\ 2 \ldots n_\nu$$

alle $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Systeme von Werthen $a_1 \equiv 0,\ 1 \ldots n_1 - 1\ (mod\ n_1)$; $a_2 \equiv 0,\ 1 \ldots n_2 - 1\ (mod\ n_2); \ldots a_\nu \equiv 0,\ 1 \ldots n_\nu - 1\ (mod\ n_\nu)$ darstellen.

Hierzu ist, wie aus der Betrachtung des Systems der Congruenzen 19) sich ergiebt, nothwendig und hinreichend, dass die aus den Coefficienten der $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_\nu$ gebildete Determinante

$$20)\quad \begin{vmatrix} i_{11} & i_{21} p^{\alpha_1 - \alpha_2} & i_{31} p^{\alpha_1 - \alpha_3} \ldots & i_{\nu 1} p^{\alpha_1 - \alpha_\nu} \\ i_{12} & i_{22} & i_{32} p^{\alpha_2 - \alpha_3} \ldots & i_{\nu 2} p^{\alpha_2 - \alpha_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ i_{1\nu} & i_{2\nu} & i_{3\nu} \quad \ldots & i_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

relativ prim zu p sei.

Beschränkt man die Werthe der $i_{\lambda k}$ vorerst auf die Zahlen aus der Reihe $1, 2 \ldots p$, so können (wenn die Bildung der Determinante mit den Elementen der ersten Horizontalreihe begonnen wird, um sodann die Elemente der zweiten, dritten Horizontalreihe u. s. w. zu gewinnen) $i_{21} \ldots i_{\nu 1}$ alle Zahlenwerthe von 1 bis p annehmen, während i_{11} blos die Zahlenwerthe $1 \ldots p - 1$ erhalten darf. Es existiren somit $p^{\nu - 1}(p - 1)$ Systeme $i_{11} \ldots i_{\nu 1}$ die zu p relativ prim sind. Für die $i_{12}, i_{22} \ldots i_{\nu 2}$ giebt es zunächst $(p^2 - 1) p^{\nu - 2}$ Systeme, die zu p relativ prim sind; denn es können $i_{32} \ldots i_{\nu 2}$ alle Werthe von 1 bis p annehmen, während von den p^2 Werthenpaaren für i_{21}, i_{22} nur das Werthenpaar p, p in Wegfall kommt. Von diesen Werthensystemen der $i_{12}, i_{22} \ldots i_{\nu 2}$ sind aber alle diejenigen mit Rücksicht auf das schon gewählte System der ersten Horizontalreihe in Abzug zu bringen, für welche

$$21a)\quad \begin{cases} i_{12} \equiv i_{11} t_{11},\quad i_{22} \equiv i_{21} t_{11}, \ldots i_{\nu 2} \equiv i_{\nu 1} t_{11}\ (mod\ p) \\ \qquad (t_{11} = 1,\ 2 \ldots p - 1), \end{cases}$$

so dass $p^{\nu - 2}(p^2 - 1) - (p - 1)$ Werthensysteme resultiren. Ebenso sind von den $p^{\nu - 3}(p^3 - 1)$ Werthensystemen der $i_{13}, i_{23} \ldots i_{\nu 3}$, die zu p relativ prim sind, $p^2 - 1$ in Abzug zu bringen, für welche

$$21b)\quad \begin{cases} i_{13} \equiv t_{12} i_{11} + t_{22} i_{12},\ i_{23} \equiv t_{12} i_{21} + t_{22} i_{22}, \ldots i_{\nu 3} \equiv t_{12} i_{\nu 1} + t_{22} i_{\nu 2} (mod\, p) \\ \qquad (t_{12},\ t_{22} \text{ relativ prim zu } p). \end{cases}$$

Allgemein folgt, dass es $p^{\nu - k}(p^k - 1)$ Werthensysteme der $i_{1k}, i_{2k} \ldots i_{\nu k}$ giebt, die zu p relativ prim sind, von denen $(p^{k-1} - 1)$ Systeme bei Seite zu lassen sind, für welche:

$$21\text{c)}\quad \begin{cases} i_{1k} \equiv t_{1\,\overline{k-1}}\, i_{11} + t_{2\,\overline{k-1}}\, i_{12} + \cdots t_{\overline{k-1}\,\overline{k-1}}\, i_{1\,\overline{k-1}} \pmod p \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ i_{\nu k} \equiv t_{1\,\overline{k-1}}\, i_{\nu 1} + t_{2\,\overline{k-1}}\, i_{\nu 2} + \cdots t_{\overline{k-1}\,\overline{k-1}}\, i_{\nu\,\overline{k-1}} \pmod p \\ \quad (t_{1\,\overline{k-1}},\ t_{2\,\overline{k-1}} \ldots t_{\overline{k-1}\,\overline{k-1}} \text{ relativ prim zu } p). \end{cases}$$

Als Gesammtzahl der möglichen Bestimmungsweisen der $i_{\lambda k}$ aus der Zahlenreihe 1 bis p ergiebt sich folglich:

$$22\text{a)}\ (p^{\nu}-p^{\nu-1})(p^{\nu}-p^{\nu-2}-p+1)(p^{\nu}-p^{\nu-3}-p^2+1)\ldots(p^{\nu}-p^{\nu-1}).$$

Da nun aber $i_{\lambda k}$ und $i_{k\lambda}$, wenn $\alpha_k > \alpha_\lambda$ aus der Reihe der Zahlen $1 \ldots p^{\alpha_\lambda}$ gewählt werden darf, so kann in jeder den obigen Einschränkungen gemäss construirten Determinante $i_{\lambda k}$ durch

$$i_{\lambda k} + s \cdot p,\ s = 0,\ 1 \ldots (p^{\alpha_\lambda - 1} - 1),$$

ersetzt werden und aus jeder einzelnen der Determinanten werden somit nunmehr:

$$22\text{b)}\quad \begin{cases} p^{\alpha_1-1} \cdot p^{\alpha_2-1} \cdot p^{\alpha_3-1} \ldots p^{\alpha_\nu-1} \\ \cdot p^{\alpha_2-1} \cdot p^{\alpha_2-1} \cdot p^{\alpha_3-1} \ldots p^{\alpha_\nu-1} \\ \cdot p^{\alpha_3-1} \cdot p^{\alpha_3-1} \cdot p^{\alpha_3-1} \ldots p^{\alpha_\nu-1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p^{\alpha_\nu-1} \cdot p^{\alpha_\nu-1} \cdot p^{\alpha_\nu-1} \ldots p^{\alpha_\nu-1}, \end{cases}$$

so dass als Gesammtzahl:

$$22)\quad \begin{cases} p^{\alpha-1} \cdot p^{3(\alpha_2-1)} \cdot p^{5(\alpha_3-1)} \ldots p^{(2\nu-1)(\alpha_\nu-1)} \\ \cdot (p^{\nu}-p^{\nu-1})(p^{\nu}-p^{\nu-2}-p+1)(p^{\nu}-p^{\nu-3}-p^2+1)\ldots(p^{\nu}-p^{\nu-1}) \end{cases}$$

resultirt.

Die Anzahl der äquivalenten Symbole

$$F(\varepsilon_{n_1};\ \varepsilon_{n_2} \ldots \varepsilon_{n_\nu}) \sim F(\eta_{n_1};\ \eta_{n_2} \ldots \eta_{n_\nu})$$

wird somit, wenn

$$n_k = p^{\alpha_k};\quad (k = 1,\ 2 \ldots \nu);\ \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots \alpha_\nu \geqq 1$$

durch das Product 22) dargestellt; es ist in ihnen:

$$\begin{aligned} \eta_{n_k} &= \varepsilon_{n_1}^{\;i_{1k}\frac{n_1}{n_k}} \ldots \varepsilon_{n_{k-1}}^{\;i_{\overline{k-1}\,k}\frac{n_{k-1}}{n_k}} \cdot \varepsilon_{n_k}^{\;i_{kk}} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{\;i_{\nu k}} \\ &= \varepsilon_{n_k}^{\left(i_{1k} + \cdots i_{kk} + \frac{n_k}{n_{k+1}} i_{\overline{k+1}\,k} + \cdots \frac{n_k}{n_\nu} i_{\nu k}\right)} \end{aligned}$$

zu setzen und es muss:

$$\begin{vmatrix} i_{11} & i_{21}\, p^{\alpha_1-\alpha_2} \ldots & i_{\nu 1}\, p^{\alpha_1-\alpha_\nu} \\ i_{12} & i_{22} \qquad \ldots & i_{\nu 2}\, p^{\alpha_2-\alpha_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ i_{1\nu} & i_{2\nu} \qquad \ldots & i_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

relativ prim zu p sein.

§ 5. Um nun auch den Fall, dass unter den Potenzen p^{α_k} an Werth gleiche vorkommen, zu berücksichtigen, werde angenommen, dass:

$$23)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_{k_1} = (\alpha' k_1), \\ \alpha_{k_1+1} = \alpha_{k_1+2} = \ldots \alpha_{k_1+k_2} = (\alpha'' k_2), \\ \alpha_{k_1+k_2+1} = \alpha_{k_1+k_2+2} = \ldots \alpha_{k_1+k_2+k_3} = (\alpha''' k_3), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{k_1+\cdots k_{\mu-1}+1} = \alpha_{k_1+\cdots k_{\mu-1}+2} = \ldots \alpha_{k_1+\cdots k_\mu} = (\alpha^{(\mu)} k_\mu) \\ (\alpha' k_1) > (\alpha'' k_2) > \cdots > (\alpha^{(\mu)} k_\mu) \geqq 1, \end{cases}$$

so dass:

$$\nu = k_1 + k_2 + \cdots k_\mu.$$

Wird in der Determinante 20) dieser Annahme Rechnung getragen, so wird ein Theil der Coefficienten der $i_{\lambda k}$ gleich 1 und andere Coefficienten erhalten gleiche Werthe. Die Determinante kann dann in folgender Weise angedeutet werden, wenn der Einfachheit wegen $p_{\lambda\nu} = p^{(\alpha^{(\lambda)} k_\lambda) - (\alpha^{(\nu)} k_\nu)}$ gesetzt wird:

$$24)\quad \begin{vmatrix} i_{11} & \ldots & i_{k_1 1} & i_{k_1+1\,1}\,p_{12} & \ldots & i_{k_1+k_2\,1}\,p_{12} & i_{k_1+k_2+1\,1}\,p_{13} & \ldots & i_{\nu 1}\,p_{1\mu} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ i_{1k_1} & \ldots & i_{k_1 k_1} & i_{k_1+1\,k_1}\,p_{12} & \ldots & i_{k_1+k_2\,k_1}\,p_{12} & i_{k_1+k_2+1\,k_1}\,p_{13} & \ldots & i_{\nu k_1}\,p_{1\mu} \\ i_{1\,k_1+1} & \ldots & i_{k_1\,k_1+1} & i_{k_1+1\,k_1+1} & \ldots & i_{k_1+k_2\,k_1+1} & i_{k_1+k_2+1\,k_1+1}\,p_{23} & \ldots & i_{\nu\,k_1+1}\,p_{2\mu} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ i_{1\,k_1+k_2} & \ldots & i_{k_1\,k_1+k_2} & i_{k_1+1\,k_1+k_2} & \ldots & i_{k_1+k_2\,k_1+k_2} & i_{k_1+k_2+1\,k_1+k_2}\,p_{23} & \ldots & i_{\nu\,k_1+k_2}\,p_{2\mu} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ i_{1\nu} & \ldots & i_{k_1\nu} & i_{k_1+1\,\nu} & \ldots & i_{k_1+k_2\,\nu} & i_{k_1+k_2+1\,\nu} & \ldots & i_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

Werden in dieser Determinante die Werthe der $i_{\lambda k}$ zunächst aus der Reihe der Zahlen von 1 bis p gewählt, so ergiebt sich für die Anzahl der Determinanten, deren Werth zu p relativ prim ist, durch dieselben Schlüsse, die für die Determinante 20) in Anwendung kommen, das Product:

$$25)\quad \begin{cases} (p^\nu - p^{\nu-k_1})(p^\nu - p^{\nu-k_1} - p + 1)\ldots(p^\nu - p^{\nu-k_1} - p^{k_1-1} + 1) \\ .(p^\nu - p^{\nu-k_1-k_2} - p^{k_1} + 1)(p^\nu - p^{\nu-k_1-k_2} - p^{k_1+1} + 1)\ldots(p^\nu - p^{\nu-k_1-k_2} - p^{k_1+k_2-1} + 1) \\ .(p^\nu - p^{\nu-k_1-k_2-k_3} - p^{k_1+k_2} + 1)(p^\nu - p^{\nu-k_1-k_2-k_3} - p^{k_1+k_2+1} + 1)\ldots(p^\nu - p^{\nu-k_1-k_2-k_3} - p^{k_1+k_2+k_3-1} + 1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ .(p^\nu - p^{k_1+\cdots k_{\mu-1}})(p^\nu - p^{k_1+\cdots k_{\mu-1}+1})\ldots(p^\nu - p^{\nu-1}), \end{cases}$$

das ich durch:

$$\varphi(p;\ \nu = k_1 + k_2 + \cdots k_\mu)$$

bezeichne.

Da nun aber die Werthe der $i_{\lambda k}$ und $i_{k\lambda}$ aus der Reihe der Zahlen von 1 bis p^{α_λ}, wenn $\alpha_k \geqq \alpha_\lambda$, gewählt werden dürfen, so kann in jeder Determinante, deren Elemente durch Zahlen aus der Reihe von 1 bis p

bestimmt wurden, $i_{\lambda k}$ durch $i_{\lambda k} + s.p$, $s = 0, 1 \ldots p^{\alpha_\lambda} - 1$, ersetzt werden. Aus jeder einzelnen Determinante werden so:

$$26)\quad \begin{cases} p^{\alpha_1 - 1} . p^{3(\alpha_2 - 1)} . p^{5(\alpha_3 - 1)} \ldots p^{(2\nu - 1)(\alpha_\nu - 1)} \\ = p^{k_1^2\{(\alpha' k_1) - 1\}} . p^{\{(k_1 + k_2)^2 - k_1^2\}\{(\alpha'' k_2) - 1\}} \\ \qquad \ldots . p^{\{(k_1 + \cdots k_\mu)^2 - (k_1 + \cdots k_{\mu-1})^2\}\{(\alpha^{(\mu)} k_\mu) - 1\}} \end{cases}$$

Man gelangt somit zu folgendem Resultate:

Sind die Grade der Einheitswurzeln der Normalform 1) Potenzen einer und derselben Primzahl p, so dass $n_k = p^{\alpha_k}$, und bringt man diese ν Zahlen in eine solche Reihenfolge, dass:

$$n_1 = n_2 = \cdots = n_{k_1} = p^{(\alpha' k_1)};$$

. . . .

$$n_{k_1 + \cdots k_{\mu-1} + 1} = n_{k_1 + \cdots k_{\mu-1} + 2} = \cdots n_{k_1 + \cdots k_\mu} = p^{(\alpha^{(\mu)} k_\mu)};$$

$$(\alpha' k_1) > (\alpha'' k_2) > \cdots (\alpha^{(\mu)} k_\mu) \geq 1; \quad \nu = k_1 + k_2 + \cdots k_\mu;$$

so ist in den äquivalenten Symbolen

$$\begin{cases} F(\varepsilon_{n_1};\ \varepsilon_{n_2} \ldots \varepsilon_{n_\nu}) \sim F(\eta_{n_1};\ \eta_{n_2} \ldots \eta_{n_\nu}) \\ \eta_{n_k} = \varepsilon_{n_1}^{\,i_{1k} \frac{n_1}{n_k}} \ldots \varepsilon_{n_{k-1}}^{\,i_{k-1\,k} \frac{n_{k-1}}{n_k}} . \varepsilon_{n_k}^{\,i_{kk}} \ldots \varepsilon_{n_\nu}^{\,i_{\nu k}} \\ = \varepsilon_{n_k}^{\left(i_{1k} + \cdots i_{kk} + \frac{n_k}{n_{k-1}} i_{k+1\,k} + \cdots \frac{n_k}{n_\nu} i_{\nu k}\right)} \\ (k = 1, 2 \ldots \nu) \end{cases}$$

zu setzen, wo die $i_{\lambda k}$ so zu wählen sind, dass die Determinante 24) relativ prim zu p sei. Die Anzahl der äquivalenten Symbole wird angegeben durch die Function:

$$27)\quad \begin{cases} \varphi(p^{(\alpha' k_1)}, p^{(\alpha'' k_2)}, \ldots p^{(\alpha^{(\mu)} k_\mu)};\ \nu = k_1 + \cdots k_\mu) \\ = p^{k_1^2\{(\alpha' k_1) - 1\}} . p^{\{(k_1 + k_2)^2 - k_1^2\}\{(\alpha'' k_2) - 1\}} \\ \qquad \ldots . p^{\{(k_1 + \cdots k_\mu)^2 - (k_1 + \cdots k_{\mu-1})^2\}\{\alpha^{(\mu)} k_\mu) - 1\}} \\ \qquad . \varphi(p;\ \nu = k_1 + \cdots k_\mu), \end{cases}$$

wo $\varphi(p;\ \nu = k_1 + \cdots k_\mu)$ das Product 25) darstellt.

Es ist ersichtlich, dass für $k_1 = \nu$, $k_2 = \cdots = k_\mu = 0$ diese Function auf $\varphi(p^\alpha, \nu)$, wie es sein muss, sich reducirt, wo $(\alpha' \nu) = \alpha$ gesetzt ist. Ebenso ist evident, dass für $k_1 = k_2 = \cdots = k_\mu = 1$ diese Function das Product 22) zur Darstellung bringt.

Ich bemerke schliesslich noch, dass die vorstehenden Resultate auch für den Fall, dass die Zahlen $n_1, n_2 \ldots n_\nu$ Potenzen eines Productes von Primzahlen sind, in ganz derselben Weise hätten gewonnen werden können; dabei ist zu beachten, dass die Potenzen einer beliebigen Zahl nichts anderes als Potenzen eines solchen Productes von Primzahlen sind.

Aus der Aequivalenz der Symbole folgt nun in gleicher Weise wie in den an erster und zweiter Stelle behandelten Fällen, dass:

$$29)\quad \begin{cases} S\sum\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu} \varepsilon_{n_1}^{\lambda_1\alpha_1}\ldots\varepsilon_{n}^{\lambda_\nu\alpha_\nu}.\, a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu} \\ \equiv S\sum\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(\varepsilon_{n_1}^{i_{11}\lambda_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu 1}\lambda_\nu})^{\alpha_1}.(\varepsilon_{n_1}^{i_{12}\frac{n_1}{n_2}\lambda_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu 2}\lambda_\nu})^{\alpha_2}\ldots \\ \qquad (\varepsilon_{n_1}^{i_{1\nu}\frac{n_1}{n_\nu}\lambda_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu\nu}\lambda_\nu})^{\alpha_\nu}.\, a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}. \end{cases}$$

Der in 20) resp. 24) dargestellten Bedingung für die $i_{\lambda k}$ zufolge repräsentiren die ν Summen:

$$\alpha_1 i_{k1} + \cdots \alpha_k i_{kk} + \alpha_{k+1} i_{k\,k+1}\frac{n_k}{n_{k+1}} + \cdots \alpha_\nu i_{k\nu}\frac{n_k}{n_\nu}$$
$$(k=1, 2\ldots\mu)$$

zugleich mit den $\alpha_1\ldots\alpha_\nu$ alle $n_1 . n_2 \ldots n_\nu$ Werthensysteme, die mit den $n_1, n_2\ldots n_\nu$ bezüglich der Modulen $n_1, n_2\ldots n_\nu$ incongruenten Zahlen gebildet werden können. Es ist somit:

$$30)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\alpha\ldots\alpha_\nu}\varepsilon_{n_1}^{\alpha_1\lambda_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{\alpha_\nu\lambda_\nu}.\, a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu} \\ =\sum\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}\varepsilon_{n_1}^{\left(\alpha_1 i_{11}+\alpha_2 i_{12}\frac{n_1}{n_2}+\cdots\alpha_\nu i_{1\nu}\frac{n_1}{n_\nu}\right)\lambda_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{(\alpha_1 i_{\nu 1}+\alpha_2 i_{\nu 2}+\cdots\alpha_\nu i_{\nu\nu})\lambda_\nu} \\ \qquad .\, a_{\alpha_1 i_{11}+\cdots\alpha_\nu i_{1\nu}\frac{n_1}{n_\nu};\cdots\alpha_1 i_{\nu 1}+\cdots\alpha_\nu i_{\nu\nu}}, \end{cases}$$

wo die Indices der a auf die kleinsten positiven Werthe bezüglich der zugehörigen Modulen zu reduciren sind. Daraus folgt für 29) folgende Form:

$$31)\quad \begin{cases} S\sum\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(\varepsilon_{n_1}^{i_{11}\lambda_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu 1}\lambda_\nu})^{\alpha_1}\ldots(\varepsilon_{n_1}^{i_{1\nu}\frac{n_1}{n_\nu}\lambda_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{i_{\nu\nu}\lambda_\nu})^{\alpha_\nu}.\, a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu} \\ \equiv S\sum\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}\varepsilon_{n}^{\left(\alpha_1 i_{11}+\cdots\alpha_\nu i_{1\nu}\frac{n_1}{n_\nu}\right)\lambda_1}\ldots\varepsilon_{n_\nu}^{(\alpha_1 i_{\nu 1}+\cdots\alpha_\nu i_{\nu\nu})\lambda_\nu} \\ \qquad .\, a_{\alpha_1 i_{11}+\cdots\alpha_\nu i_{1\nu}\frac{n_1}{n_\nu};\cdots\alpha_1 i_{\nu 1}+\cdots\alpha_\nu i_{\nu\nu}}. \end{cases}$$

An dritter Stelle erhält man daraus unmittelbar folgende Eigenschaft der Normalform:

Sind die ν Zahlen $n_1, n_2\ldots n_\nu$ Potenzen einer Primzahl p in der aus 17) resp. 23) ersichtlichen Weise, so bleibt das System der Functionen der Normalform 1), falls für die Grössen a keine geeigneten Bedingungsgleichungen bestehen, dann und nur dann ungeändert, wenn in jeder Function die $a_{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}$ mit den

$$a_{\alpha_1 i_{11}+\alpha_2 i_{12}\frac{n_1}{n_2}+\cdots\alpha_\nu i_{1\nu}\frac{n_1}{n_\nu};\ \cdots\alpha_1 i_{\nu 1}+\alpha_2 i_{\nu 2}+\cdots\alpha_\nu i_{\nu\nu}}$$

vertauscht werden. Es müssen hier die $i_{\lambda k}$ so gewählt werden, dass der Werth der Determinante 20) resp. 24) relativ prim zu p sei. Dann wird die Anzahl dieser Vertauschungen durch

$$\varphi\left(p^{(\alpha'\lambda)}\ldots p^{(\alpha^{(\mu)}k_\mu)};\ \nu=k_1+\cdots k_\mu\right),$$

bezeichnet, wodurch das in der Formel 22) resp. 27) angegebene Product angedeutet wird.

(Schluss folgt.)

XVII.

Ueber eine besondere cubische Raumcurve (die gleichwinklige cubische Hyperbel).

Von

Dr. H. KRÜGER
in Pless (O.-S.).

Die cubischen Raumcurven sind bisher namentlich in ihren allgemeinen projectivischen Eigenschaften untersucht worden, die sie in eine auffallende Analogie zu den ebenen Kegelschnitten stellen. Metrische Beziehungen dieser einfachsten Raumcurven sind dagegen nur wenige bekannt.* Um zu solchen zu gelangen, bietet sich u. A. folgender Weg: Man sucht unter den einer cubischen Raumcurve ein- oder umgeschriebenen Flächen zweiter Ordnung diejenigen zu ermitteln, welche durch einfache metrische Verhältnisse ausgezeichnet sind. Durch dieses Princip habe ich eine besondere Art cubischer Raumcurve gefunden, die gerade in metrischer Hinsicht interessant ist und in gewisser Weise ein Analogon zu der ebenen gleichseitigen Hyperbel darstellt.

1. Die einer Raumcurve dritter Classe K^3 einbeschriebenen gleichwinkligen Hyperboloide.

Aus den erwähnten, metrisch ausgezeichneten Regelflächen zweiter Ordnung wähle ich das gleichwinklige Hyperboloid und bezeichne damit ein solches, dessen Asymptotenkegel zu einem gleichseitigen Kegel reciprok** ist, das heisst ein und damit ∞ Tripel von zu einander rechtwinkligen Berührungsebenen besitzt. Diese Bedingung lässt sich einfacher so aussprechen: Für ein gleichwinkliges Hyperboloid reducirt sich die Orthogonalkugel (der Ort der Scheitel aller Dreiflache von zu einander rechtwinkligen Berührungsebenen) auf den Mittelpunkt desselben (Nullkugel), oder die Achsen des Hyperboloids sind durch die Gleichung verbunden:

$$r^2 = c^2 + b^2 - a^2 = 0.$$

* Vergl. Reye, Der gegenwärtige Stand unserer Kenntniss der cubischen Raumcurven, Festschrift der mathematischen Gesellschaft in Hamburg 1890, S. 57.

** Vergl. Schröter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung S. 87. — Die in diesem Werke angewandte Bezeichnung habe ich ebenfalls durchweg angenommen.

Nun gilt folgender Satz* von den Orthogonalkugeln:

Die Orthogonalkugeln von sämmtlichen einer allgemeinen Raumcurve K^3 einbeschriebenen Hyperboloiden treffen sich in zwei festen Punkten 0 und $0'$, den Orthogonalpunkten von K^3. Diese liegen symmetrisch zur Mittelpunktsebene μ von K^3, auf der ihre Verbindungslinie $p = |00'|$ senkrecht steht, und sind entweder reell oder werden durch eine elliptische Punktinvolution auf p vertreten.

Soll daher unter den Orthogonalkugeln eine „Nullkugel" vorkommen, so muss der mit ihr identische Mittelpunkt in der Ebene μ die vorliegende Punktinvolution auf der Geraden p durch eine orthogonale Strahleninvolution projiciren. Alle derartigen Punkte liegen aber auf einer Kugel, die den Abstand von irgend zwei conjugirten Punkten der Involution auf der Geraden p zum Durchmesser hat, und da eine solche Kugel die Mittelpunktsebene μ in einem Kreise schneidet, so gilt der Satz**:

Einer Raumcurve dritter Classe K^3 lassen sich ∞^1 gleichwinklige Hyperboloide einbeschreiben, deren Mittelpunkte einen Kreis $\mathfrak{K}^2\mu$ in der Mittelpunktsebene μ von K^3 erfüllen.

Der so ermittelte Kreis (und damit die einbeschriebenen gleichwinkligen Hyperboloide) sind nur reell, wenn die beiden Orthogonalpunkte 0, $0'$ durch eine elliptische Punktinvolution auf p vertreten werden; der Abstand der beiden Potenzpunkte in derselben ist dann gleich dem Durchmesser des Kreises. Bei zwei reellen Orthogonalpunkten von K^3 dagegen wird der Kreis $\mathfrak{K}^2\mu$ (und damit alle der Raumcurve K^3 einbeschriebenen gleichwinkligen Hyperboloide) imaginär.

Insbesondere trifft der Kreis $\mathfrak{K}^2\mu$ den Mittelpunktskegelschnitt μ^2 in der Ebene μ (der die Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte in den Schmiegungsebenen der Raumcurve K^3 enthält) im Allgemeinen in vier Punkten. Die diesen entsprechenden vier Kegelschnitte in den bezüglichen Schmiegungsebenen sind daher „degenerirte gleichwinklige Hyperboloide", das heisst gleichseitige Hyperbeln, oder:

Unter den Kegelschnitten in den Schmiegungsebenen einer cubischen Raumcurve K^3 giebt es im Allgemeinen vier gleichseitige Hyperbeln, deren Mittelpunkte in einem Kreise $\mathfrak{K}^2\mu$ liegen. Von denselben können indessen zwei oder alle vier imaginär sein.

Die gleichseitige Hyperbel bildet weiter den Uebergang zwischen den beiden Classen von Hyperbeln: den spitzwinkligen mit spitzem Asymptotenwinkel und den stumpfwinkligen mit stumpfwinklig gegen einander geneigten Asymptoten, so dass sich die Hyperbeln, welche in den Schmiegungsebenen einer Raumcurve K^3 enthalten sind, folgendermassen gruppiren lassen:

---

* Vergl. meine Dissertation: Die Focaleigenschaften der cubischen Raumcurven S. 38.

** Zu demselben Resultat gelangt auch Reye a. a. O. S. 56, aber auf anderem Wege.

1. Die Orthogonalpunkte von K^3 sind reell, der Kreis $\mathfrak{K}^2\mu$ also imaginär: Sämmtliche Hyperbeln in den Schmiegungsebenen von K^3 sind spitzwinklig mit der Achsenbedingung:

$$a^2 - b^2 > 0.$$

2. Die Orthogonalpunkte von K^3 sind imaginär oder werden durch eine elliptische Punktinvolution auf p vertreten; der Kreis $\mathfrak{K}^2\mu$ ist dann reell: Die Hyperbeln in den Schmiegungsebenen von K^3 können sowohl spitzwinklig als auch stumpfwinklig sein, und zwar werden beide Gruppen durch vier, bezüglich zwei gleichseitige Hyperbeln von einander geschieden.

2. Die gleichwinklige cubische Hyperbel.

Damit soll eine solche cubische Hyperbel bezeichnet werden, für die sämmtliche Kegelschnitte in ihren Schmiegungsebenen in gleichseitige Hyperbeln übergehen. Dies kann und wird nur dann eintreten, wenn der oben gefundene Kreis $\mathfrak{K}^2\mu$ mit dem Mittelpunktskegelschnitt μ^2 zusammenfällt. Als nothwendige Vorbedingung für die Existenz einer solchen besonderen Raumcurve K^3 ergiebt sich somit

a) die cubische Hyperbel mit Mittelpunktskreis.

Nach der von Geisenheimer* in der Mittelpunktsebene μ einer cubischen Hyperbel construirten Figur treffen die drei Asymptoten derselben $t_{\mathfrak{a}}$, $t_{\mathfrak{b}}$, $t_{\mathfrak{c}}$ den Mittelpunktskegelschnitt μ^2 in den Punkten eines Dreiecks $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$, dessen Schwerpunkt $\mathfrak{u}$ (als Mittelpunkt der Raumcurve K^3 bezeichnet) mit dem Mittelpunkt des Kegelschnitts μ^2, sowie mit demjenigen des durch die drei Asymptoten von K^3 bestimmten Hyperboloids A^2 zusammenfällt.

Soll daher der Mittelpunktskegelschnitt μ^2 ein Kreis sein, so wird das ihm einbeschriebene Dreieck $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ gleichseitig, die Ebene μ aber zu einer Kreisschnittebene des Asymptoten-Hyperboloids A^2, womit folgende Bedingung für die Letzteren gewonnen ist:

Die drei Asymptoten einer cubischen Hyperbel mit Mittelpunktskreis sind drei solche Erzeugende eines beliebigen Hyperboloids, welche einen Kreisschnitt desselben in drei gleiche Theile zerfällen, oder — für die Construction geeigneter — drei Gerade, welche die Ecken von zwei beliebigen, planparallelen gleichseitigen Dreiecken paarweise verbinden.

Eine weitere Eigenschaft der hiermit eindeutig bestimmten Raumcurve K^3 ergiebt sich, wenn man durch den Mittelpunkt $\mathfrak{u}$ an dieselbe die Secante und zugleich Schwerlinie m zieht, in welcher die Schwerpunkte aller zur Ebene μ parallelen Schnittpunktsdreiecke von K^3 liegen.** Diese

* Geisenheimer, Die Erzeugung polarer Elemente für Flächen und Curven in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik, XXXI, 4.

** Vergl. Geisenheimer und den Satz von Hurwitz a. a. O. S. 211 u. flg.

Schwerlinie m ist nämlich zugleich conjugirter Durchmesser zur Ebene μ in Bezug auf das durch K^3 gelegte Hyperboloid, welches in $\mathfrak{u}$ seinen Mittelpunkt hat. Für dieses Hyperboloid stellt aber im vorliegenden Fall die Ebene μ ebenfalls eine Kreisschnittebene vor; mithin enthält die Schwerlinie m zugleich die Mittelpunkte aller umschriebenen Kreise bez. der Dreiecke, in denen das zur Ebene μ parallel gelegte Ebenenbüschel der Raumcurve K^3 begegnet. Jedes derartige Schnittpunktsdreieck hat sonach Schwerpunkt und Mittelpunkt des Umkreises vereinigt oder ist gleichseitig, das heisst:

Eine cubische Hyperbel mit Mittelpunktskreis wird zugleich mit ihren drei Asymptoten durch jede zur Mittelpunktsebene μ parallele Ebene in je einem gleichseitigen Dreieck geschnitten. Die Mittelpunkte aller Schnittdreiecke erfüllen die Secante m von $\mathfrak{u}$ an die Raumcurve K^3.

Umgekehrt leitet man daraus folgende einfache Construction für eine solche cubische Hyperbel ab:

Zwei beliebige, in zwei Parallelebenen gelegene gleichseitige Dreiecke bestimmen in ihren $2.3 = 6$ Eckpunkten eine cubische Hyperbel, für welche die Mittelpunkte aller Kegelschnitte in den Schmiegungsebenen in einem zu jenen zwei Ebenen parallelen Kreise liegen.

b) Unter Voraussetzung einer cubischen Hyperbel mit Mittelpunktskreis μ^2 folgt nunmehr als hinreichende Bedingung für das Zusammenfallen der beiden Kreise μ^2 und $\mathfrak{K}^2\mu$, dass sie in drei Punkten übereinstimmen, mit anderen Worten: dass für drei Schmiegungsebenen der Raumcurve K^3 die in ihnen enthaltenen Kegelschnitte zu gleichseitigen Hyperbeln werden, was dann die nämliche Eigenschaft für alle Schmiegungsebenen von K^3 nach sich zieht.

Am geeignetsten für die Untersuchung daraufhin erscheinen die drei Asymptotenebenen $\tau_\mathfrak{a}$, $\tau_\mathfrak{b}$, $\tau_\mathfrak{c}$ von K^3, von deren zugehörigen Kegelschnitten $\tau^2_\mathfrak{a}$, $\tau^2_\mathfrak{b}$, $\tau^2_\mathfrak{c}$ die Mittelpunkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ und je eine Asymptote $t_\mathfrak{a}$, $t_\mathfrak{b}$, $t_\mathfrak{c}$ bekannt sind. Die beiden Asymptotenebenen $\tau_\mathfrak{a}$ und $\tau_\mathfrak{b}$ mögen sich in dem Schmiegungsstrahl $c = |\tau_\mathfrak{a}\tau_\mathfrak{b}|$ schneiden, welcher die Mittelpunktsebene μ im Punkte $\mathfrak{c}_2 = (c\mu)$, die beiden Asymptoten $t_\mathfrak{a}$ und $t_\mathfrak{b}$ bez. in $\mathfrak{a}' = (c\,t_\mathfrak{a})$ und $\mathfrak{b}' = (c t_\mathfrak{b})$ trifft, so dass $\mathfrak{c}_2$ (als conjugirter Punkt zu dem unendlich entfernten auf dem Strahl c) die Mitte von $|\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'|$ bildet. Dann berührt die Hyperbel $\tau^2_\mathfrak{a}$ den Schmiegungsstrahl c im Punkte $\mathfrak{b}'$, die Hyperbel $\tau^2_\mathfrak{b}$ dagegen denselben im Punkte $\mathfrak{a}'$. Da nun jedes Tangentenstück zwischen den Asymptoten einer Hyperbel durch den Berührungspunkt der Tangente halbirt wird, so begegnet die zweite Asymptote der Hyperbel $\tau^2_\mathfrak{a}$ dem Schmiegungsstrahl c in einem Punkte $\mathfrak{a}''$, so dass $\overline{\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'} = \overline{\mathfrak{b}'\mathfrak{a}''}$ und ebenso die zweite Asymptote von $\tau^2_\mathfrak{b}$ dem Strahl c in $\mathfrak{b}''$, so dass $\overline{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'} = \overline{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}''}$ wird.

Sollen mithin beide Hyperbeln gleichseitig sein, mit zu einander rechtwinkligen Asymptoten, so muss der Mittelpunkt $\mathfrak{a}_1$ von $\tau^2_\mathfrak{a}$ in dem über $\overline{\mathfrak{a}'\mathfrak{a}''}$ als Durchmesser errichteten Halbkreis liegen und ebenso der Mittelpunkt $\mathfrak{b}_1$ von $\tau^2_{\mathfrak{b}}$ in dem über der $\overline{\mathfrak{a}'\mathfrak{a}''}$ gleichen Strecke $\overline{\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''}$ als Durchmesser gezogenen Halbkreis. Andererseits schneidet das Prisma der drei Asymptotenebenen $\tau_{\mathfrak{a}}\tau_{\mathfrak{b}}\tau_{\mathfrak{c}}$ wegen der Gleichseitigkeit des Dreiecks $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ die Mittelpunktsebene μ ebenfalls in einem regulären Dreiseit $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2$, so dass $\overline{\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_1} = \overline{\mathfrak{c}_2\mathfrak{b}_1}$ ist. Daraus folgt:

Der Schmiegungsstrahl $c = |\tau_{\mathfrak{a}}\tau_{\mathfrak{b}}|$ bildet mit den Schnittlinien

$$|\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_1| = |\tau_{\mathfrak{a}}\mu| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{c}_2\mathfrak{b}_1| = |\tau_{\mathfrak{b}}\mu|$$

gleiche Winkel.

Für die beiden anderen Schmiegungsstrahlen

$$a = |\tau_{\mathfrak{b}}\tau_{\mathfrak{c}}| \quad \text{und} \quad b = |\tau_{\mathfrak{c}}\tau_{\mathfrak{a}}|$$

wiederholt sich derselbe Schluss, wenn auch die dritte Hyperbel $\tau^2_{\mathfrak{c}}$ als gleichseitig angenommen wird. Da die drei Strahlen a, b, c aber einander parallel sind, so lassen sich diese drei Bedingungen nur in dem Fall vereinigen, dass die drei Schmiegungsstrahlen a, b, c und damit die drei Asymptotenebenen $\tau_{\mathfrak{a}}$, $\tau_{\mathfrak{b}}$, $\tau_{\mathfrak{c}}$ auf der Mittelpunktsebene μ senkrecht stehen. Die drei Asymptoten sind alsdann, wie leicht ersichtlich, alle unter demselben Winkel von $\frac{1}{3}R$ gegen die Ebene μ geneigt und bilden unter sich den gleichen Winkel

$$\cos(t_{\mathfrak{a}}, t_{\mathfrak{b}}) = -\frac{1}{8}.$$

Das Gesammtergebniss lautet:

Es giebt eine besondere cubische Raumcurve, die gleichwinklige cubische Hyperbel, für welche sämmtliche in ihren Schmiegungsebenen enthaltenen Kegelschnitte gleichseitige Hyperbeln sind. Die Mittelpunkte derselben erfüllen einen Kreis $\mu^2 = \mathfrak{K}^2\mu$, welcher von den drei Asymptoten der Raumcurve in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks und unter gleichen Winkeln von je $\frac{1}{3}R$ getroffen wird.

Die vom Mittelpunkt $\mathfrak{u}$ an die gleichwinklige cubische Hyperbel gelegte Secante m steht als Parallele zu den Schmiegungsstrahlen a, b, c gleichfalls senkrecht auf der ihr conjugirten Ebene μ und ist demnach gleichzeitig die Rotationsachse von drei Umdrehungs-Hyperboloiden:

1. Für das durch die drei Asymptoten $t_{\mathfrak{a}}$, $t_{\mathfrak{b}}$, $t_{\mathfrak{c}}$ bestimmte Asymptoten-Hyperboloid A^2;

2. für das durch die cubische Hyperbel gelegte Hyperboloid, das seinen Mittelpunkt in $\mathfrak{u}$ hat;

3. für das der Raumcurve eingeschriebene Hyperboloid, welches den Mittelpunktskreis μ^2 aus der Ebene μ ausschneidet.*

* Vergl. Schröter a. a. O S. 316 u. flg.

Zu Folge der Beziehung 3) ist daher die Gerade m nach der früher von mir gewählten Bezeichnung eine Achse* der gleichwinkligen cubischen Hyperbel, um welche sich ihre Schmiegungsebenen symmetrisch vertheilen, und in Verbindung mit 1) ergeben sich daraus die Sätze:

1. Bei einer gleichwinkligen cubischen Hyperbel trifft jede auf der Achse m senkrechte (zur Ebene μ parallele) Ebene die Raumcurve in einem gleichseitigen Dreieck, dessen Mittelpunkt auf m liegt. Die drei Kegel zweiter Ordnung, welche von den Ecken eines solchen Schnittpunktsdreiecks die Raumcurve projiciren, sind einander congruent.

2. Die drei Schmiegungsebenen von einem Punkte der Achse m an die Raumcurve bilden ein gleichwinkliges Dreiflach, dessen Mittellinie die Achse m ist. Die drei Kegelschnitte, welche in diesen Schmiegungsebenen liegen, sind congruente gleichseitige Hyperbeln.

Insbesondere stehen die drei Schmiegungsebenen, welche vom Mittelpunkte u an die Raumcurve ausgehen, auf je einer Asymptote derselben bez. senkrecht.

Die gleichwinklige cubische Hyperbel verhält sich hiernach vollständig congruent in ihren drei Zweigen und in zweifacher Richtung (nach Punkten und Schmiegungsebenen) symmetrisch bezüglich der Achse m.

Zum Schluss mag noch auf die Analogie hingewiesen werden, welche die Haupteigenschaft dieser Raumcurve mit dem Steiner'schen Satz** „Ueber die Mittelpunkte der einem Dreiseit einbeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln" zeigt.

---

* Vergl. meine Dissertation S. 25 u. flg.

** J. Steiner's ges. Werke Bd. II S. 677.

XVIII.

Mechanische Vorrichtungen zum Zeichnen von Curven zweiter Ordnung.

Von

Willy Jürges

in Zürich.

Hierzu Tafel VII, Fig. 1—5.

Alle bisher bekannt gewordenen mechanischen Vorrichtungen zum Zeichnen von Kegelschnitten beruhen im Princip auf metrischen Eigenschaften dieser Curven. Im Nachstehenden sollen nun zwei Vorrichtungen beschrieben werden, welche es ermöglichen, alle Curven zweiter Ordnung zu zeichnen, sobalb dieselben durch fünf Elemente bestimmt sind.

I.

Der Kegelschnitt sei gegeben durch fünf Punkte 1, 2, 3, 4 und P_0. Bewegt sich ein Punkt P so, dass das Doppelverhältniss der vier Strahlen von P nach den Punkten 1, 2, 3, 4 immer gleich ist dem Doppelverhältniss der vier Strahlen von P_0 nach 1, 2, 3, 4, so ist der Ort von P der durch die fünf gegebenen Punkte bestimmte Kegelschnitt.

Es kommt also darauf an, einen Mechanismus zu construiren, welcher gestattet, den Punkt P so zu führen, dass das Doppelverhältniss $(P.1, 2, 3, 4)$ constant bleibt, nämlich immer gleich ist $(P_0.1, 2, 3, 4)$.

Die Construction des gesuchten Mechanismus beruht auf folgendem Satz:

Es seien gegeben zwei projectivische Strahlenbüschel von den Scheiteln T und T'. aa', bb', cc', xx' seien vier Paare correspondirender Strahlen. Schneidet man die Strahlen des ersten Büschels mit irgend einer Transversalen t in den Punkten $ABCX$, so kann man das zweite Büschel mit einer Geraden t' so schneiden, dass $A'B'C'X'$ auf t' mit der Reihe $ABCX$ auf t congruent ist.

Beweis: Da die Büschel T und T' projectivisch sind, so ist auch die Reihe $ABCX$, welche aus T hervorgegangen ist, mit T' projectivisch. Bewegt man nun die Reihe $ABCX$ so, dass A stets auf a' und B auf b'

gleitet, so beschreibt C eine Ellipse, welche den Strahl c' zweimal schneiden muss, weil c' durch den Mittelpunkt der Ellipse geht. Da somit drei entsprechende Elemente zur Deckung gelangt sind, so muss auch X auf x' liegen. Es folgt hieraus, dass es zwei Lagen giebt, wo die Reihe $ABCX$ mit dem Büschel T' perspectivisch gemacht werden kann.

Legt man daher durch das Büschel $P_0 . 1, 2, 3, 4$ eine feste Transversale t, auf welcher die Punktreihe I, II, III, IV abgeschnitten wird, so giebt es für jede Lage P auf dem Kegelschnitt $P_0\ 1, 2, 3, 4$ zwei Transversalen t' und t^*, welche aus dem Büschel $P . 1, 2, 3, 4$ eine Reihe abschneiden, welche mit I, II, III, IV congruent ist. Bewegt sich also P, z. B. von P_0 ausgehend, stetig auf dem Kegelschnitt, so wird auch die Gerade t', von der Lage t ausgehend, sich stetig verändern. Hierauf beruht die Construction der im Titel erwähnten Vorrichtung. Beschreibung eines ausgeführten Mechanismus.

Figur 1 zeigt das axonometrische Bild des Mechanismus. Die vier Strahlenstangen sind aus Stahl gefertigt und je 25 cm lang bei einem rechteckigen Querschnitt von 6 mm Breite und $1^3/_4$ mm Höhe. Dieselben sind an den Unterseiten mit gefrässten Schlitzen versehen, welche 1 mm breit und $1^3/_8$ mm tief sind. Diese Stangen, welche an ihren oberen Enden kreisförmige Oesen bilden, stecken auf einem Hohlcylinder, welcher mit der unteren Stange verlöthet ist, und um welchen sich die drei oberen Stangen drehen. Eine Schraubenmutter, welche auf ein entsprechendes Gewinde an dem Hohlcylinder passt, hält die Stangen zusammen, wie dies in Figur 2 ersichtlich ist. Durch den Hohlcylinder geht ein conischer Hohlkegel, welcher zur Aufnahme der Zeichenfeder dient, und der mittelst Gewinde durch die vorhin erwähnte Mutter geführt wird. In Figur 3a, 3b, 3c und 3d sind die Stifte dargestellt, welche über den Punkten 1, 2, 3, 4 auf der Zeichenunterlage befestigt werden. Dieselben tragen oben einen runden Dorn, über welche die Schlitze der Strahlstangen gleiten, und sind der Höhenlage der entsprechenden Strahlenstangen angepasst. Da bei Anwendung des Mechanismus die Strahlenstangen diese Stifte umzuwerfen suchen, so sind dieselben mit breiten, runden Basisflächen versehen. Die Transversalstange besteht aus zwei parallel gelagerten 25 cm langen Stahlstangen von je 4,5 mm Breite und 3,5 mm Höhe, welche zwischen sich zur Aufnahme der Vorrichtungen für Fixirung der Punktreihe I, II, III, IV einen 2 mm breiten Raum lassen und durch zwei an den Enden festgeschraubte Plättchen zusammengehalten werden. In Figur 4a und 4b, sowie 5a und 5b sind zwei von den vier Vorrichtungen zur Fixirung der Punktreihe I, II, III, IV auf der Transversalstange dargestellt. Diese vier Vorrichtungen weichen insofern von einander ab, als sie sich der Höhenlage der Strahlenstangen in den unteren Theilen anpassen müssen; in Figur 4a und 4b, sowie 5a und 5b sind die Vorrichtungen für Punkt I und IV dargestellt. Dieselben bestehen aus einem Cylinder, dessen Durchmesser gleich ist der Weite des Zwischenraums der Transversalstange und dessen unteres Ende eine aufgelöthete Platte trägt, sowie auch in der Mitte mit einer solchen versehen ist. Das obere Ende des Cylinders trägt eine Schraubenmutter, vermittelst derer die Vorrichtung durch Hilfe der mittleren Platte an die Transversalstange festgeklemmt wird. Um den unteren Theil des Cylinders ist ein Körper drehbar angebracht, welcher in seiner Drehachse dicht unter dem Cylinder einen Dorn zur Führung der Strahlstangen trägt. Von Wichtigkeit ist, dass oberhalb der Strahlenstangen in dem drehbaren Körper nur ein kleiner freier Spielraum bleibt, damit nicht die Strahlenstangen ihre Führung durch den Dorn verlieren können. Alle vier Vorrichtungen dienen gleichmässig dazu, die Transversalstange in paralleler Lage über der Zeichnungsebene zu halten und sind zu diesem Zwecke bis zur Zeichnungsebene herabgeführt, auf welcher sie gleiten.

Aufgestellt wird der Mechanismus dadurch, dass zuerst die vier Stifte über den vier gegebenen Punkten eingedrückt werden; darauf legt man die Strahlenstangen über diese Stifte und schiebt die Transversalstange mit den Vorrichtungen über die Strahlenstangen. Führt man jetzt den Scheitelpunkt des Büschels auf den fünften gegebenen Punkt P_0 und zieht die Schraubenmuttern auf der Transversalstange an, unbekümmert um die Lage der Stange zum Büschel, so kann das Zeichnen beginnen. Uebt man nämlich auf den Scheitelpunkt eine Kraft aus, so bewegt sich derselbe auf dem Kegelschnitt. Um den Kegelschnitt vollständig zu zeichnen, ist eine einmalige Umstellung der Stifte erforderlich, welche dann auf dem bereits gezeichneten Theile befestigt werden.

Die angewendete Kraft wird sich in eine Componente zerlegen, deren Richtung mit derjenigen der Tangente an den Kegelschnitt zusammenfällt und in eine andere Componente, welche durch die festen Stifte aufgenommen wird. Nur in Folge von Deformationen der Constructionstheile könnte P den Kegelschnitt verlassen.

Anwendung des Mechanismus, um Tangenten zu construiren.

Ist in irgend einem Punkte des Kegelschnitts die Tangente zu construiren, so kann dies dadurch geschehen, dass man von einem der gegebenen Punkte Strahlenstangen nach dem Berührungspunkte und den anderen drei Punkten legt, die Schraubenmuttern auf der Transversalstange anzieht und hierauf mit dem Scheitelpunkt auf den Berührungspunkt rückt, nachdem der Stift im letzteren Punkte entfernt wurde, wodurch die Strahlenstange, welche nach dem Berührungspunkte ging, in die Lage der Tangente gelangt.

Ist ein Kegelschnitt vollständig gezeichnet und werden in einer Reihe von Punkten die Tangente gesucht, so construirt man nach voriger Beschreibung zwei derselben. Hierauf legt man von irgend einem Punkte des Kegelschnitts aus je eine Strahlenstange nach den Berührungspunkten und nach dem Schnittpunkte der beiden Tangenten. Ist nun das Doppelverhältniss der Punktreihe auf der Transversalstange ein harmonisches, zu welchem Zwecke auf derselben eine harmonische Theilung eingravirt wird, so fällt der vierte Strahl in die Lage der Tangente, was aus einem bekannten geometrischen Satze folgt.

Diese Art der Anwendung des Mechanismus gestattet natürlich auch von einem beliebigen Punkte der Ebene aus Tangenten an den Kegelschnitt zu legen, wobei man die Berührungspunkte direct mit erhält.

Besonders bemerkt sei, dass der Kegelschnitt zu vorstehenden beiden Constructionen vollständig gezeichnet vorliegen muss, da der bewegliche Punkt auf demselben von dem Mechanismus nicht geführt wird. Soll die mechanische Führung dennoch erreicht werden, so ist ein zweiter über oder unter dem ersten sich befindender Mechanismus zugleich mit zu verwenden, der über vier feste Punkte des Kegelschnitts gleitet.

II.

Dual entsprechend zu I. ergiebt sich Folgendes:

Der Kegelschnitt sei gegeben durch fünf Tangenten 1, 2, 3, 4 und p_0. Bewegt sich eine Gerade p so, dass das Doppelverhältniss der vier Schnittpunkte der Tangenten 1, 2, 3, 4 auf p immer gleich ist dem Doppelverhältniss der vier Schnittpunkte von p_0 mit den Tangenten 1, 2, 3, 4, so ist die Enveloppe von p der durch die Geraden 1, 2, 3, 4, p_0 bestimmte Kegelschnitt.

Es kommt also darauf an, einen Mechanismus zu construiren, welcher die Gerade p so führt, dass das Doppelverhältniss der Punktreihe I, II, III, IV auf p constant bleibt, nämlich immer gleich ist dem Doppelverhältniss I, II, III, IV auf p_0.

Die Construction des gesuchten Mechanismus beruht auf folgendem Satz:

Es seien gegeben zwei projectivische Punktreihen auf den Geraden t und t'. AA', BB', CC', XX' seien vier Paare correspondirender Punkte. Errichtet man über der ersten Reihe von irgend einem Punkte T der Ebene aus ein Strahlenbüschel mit den Strahlen $abcx$, so kann man über der zweiten Reihe ein Büschel T' so errichten, dass $T'.a'b'c'x'$ mit dem Büschel $T.abcx$ congruent ist.

Der Beweis wird analog geführt, wie der entsprechende unter I., oder mit Hilfe des Peripherie-Winkelsatzes beim Kreis.

Errichtet man daher über der Punktreihe I, II, III, IV auf p_0 ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel T und den unter sich festen Strahlen 1, 2, 3, 4, so muss es möglich sein, die Gerade p über den gegebenen Geraden 1, 2, 3, 4 so zu bewegen, dass das Strahlenbüschel T 1, 2, 3, 4 mit der auf p entstehenden Punktreihe I, II, III, IV stets projectivisch liegt.

Da bei einer ∞ kleinen Bewegung von p auch der Scheitelpunkt T sich nur ∞ wenig verschieben kann, so folgt daraus, dass die Lagenveränderung von T eine stetige sein muss, wenn p den Kegelschnitt umhüllt.

Da ein Mechanismus dieser Art bisher nicht ausgeführt wurde, so sei von dessen Beschreibung Abstand genommen.

Um zu beweisen, dass auch die Construction des Mechanismus unter I. anwendbar ist, wenn ein Kegelschnitt durch fünf Tangenten gegeben ist, diene Folgendes:

Der Kegelschnitt sei gegeben durch die fünf Tangenten tt', welche sich im Punkte OP' schneiden und abc. Um in t und t' die Berührungspunkte zu construiren, fasst man die Tangenten t und t' als Träger von projectivischen Punktreihen auf. Man construirt daher zur Punktreihe $ABCO$ in t die entsprechende Reihe $A'B'C'O'$ in t' und zur Punktreihe $A'B'C'P'$ in t' die entsprechende Reihe $ABCP$ in t, wo dann O' und P die Berührungspunkte sind. Entsprechend verfährt man mit den Tangenten abc. Die Punkte O' und P sind mit dem Mechanismus auf folgender Weise zu construiren, vorausgesetzt, dass die Strahlenstangen zu diesem Behufe nach beiden Richtungen, vom Scheitelpunkte aus gesehen, ausgedehnt sind. Man setzt in die Punkte $ABCO$ in t die Stifte, legt das Strahlenstangenbüschel über dieselben und fixirt das Doppelverhältniss dieser Punktreihe, indem man die Schraubenmuttern auf der Transversalstange anzieht; hierauf hebt man das Büschel ab und befestigt die Stifte in $A'B'C'$, legt darauf die entsprechenden Strahlenstangen a und b über A' und B' und bewegt die Transversalstange resp. den Scheitelpunkt oder beide zugleich so, dass die Stange c auf den Stift C' zu liegen kommt, wobei die Stange o den Punkt O' auf t' ausschneidet. Die weiteren Punkte werden entsprechend construirt. Sind somit fünf Peripheriepunkte vorhanden, so geschieht die weitere Construction wie unter I. beschrieben, wobei man den Kegelschnitt sowohl als Punktreihe, wie auch als Enveloppe erhält.

Der Mechanismus *II* gestattet auf jeder Tangente den Berührungspunkt anzugeben, denn, wenn die sich bewegende Tangente in die Lage einer der gegebenen Tangenten gelangt, so ist der Punkt, welcher vorher von der festen Tangente auf der beweglichen abgeschnitten wurde, in den Berührungspunkt übergegangen. Dies entspricht dual der oben erwähnten Aufgabe, in einem Punkte die Tangente zu construiren.

Nach dem Satze, dass die Verbindungslinie zweier Berührungspunkte, die beiden Tangenten in den Berührungspunkten und der Berührungspunkt auf einer beliebigen Tangente auf der letzteren eine harmonische Punktreihe bilden, begründet sich die Construction in beliebig vielen Tangenten die Berührungspunkte mit leichter Mühe anzugeben, dual entsprechend der Aufgabe, in beliebig vielen Punkten die Tangenten zu construiren.

Nach vorstehendem Satze gelingt es auch mit leichter Mühe, die Schnittpunkte einer Geraden mit dem Kegelschnitt anzugeben, wenn Letzterer als Enveloppe gegeben ist, dual entsprechend der Aufgabe, von einem Punkte die Tangenten an den Kegelschnitt zu construiren.

Auch hier gilt die Bemerkung, dass zwei Mechanismen zugleich zur Anwendung kommen müssen, wenn man die Tangente nicht mit freier Hand leiten will.

III.

Ist ein Kegelschnitt bestimmt durch drei Punkte und eine Tangente mit ihrem Berührungspunkte, so ist der Mechanismus *I* derart zu verwenden, dass man vom Berührungspunkte aus die Strahlenstangen nach den drei Punkten legt und der vierten Stange die Lage der Tangente giebt. Hierauf zieht man die Schraubenmuttern auf der Transversalstange an, entfernt den Scheitelpunkt des Büschels vom Berührungspunkt, bringt in letzterem den vierten Stift an und erreicht leicht, dass die vierte Stange über den vierten Stift zu liegen kommt, da beim Ueberschreiten des Kegelschnitts mit dem Scheitelpunkte die vierte Stange über den Berührungspunkt gleiten muss.

Wenn der Kegelschnitt durch drei Tangenten und einer Tangente mit Berührungspunkt gegeben ist, und soll der Mechanismus *I* nicht in oben beschriebener Weise zur Anwendung gelangen, sondern Mechanismus *II* verwendet werden, so ist dessen Anwendung leicht aus dem eben besprochenen Fall abzuleiten, wenn das duale Entsprechen der einzelnen Constructionstheile berücksichtigt wird.

Ist ein Kegelschnitt bestimmt durch einen Punkt und zwei Tangenten mit Berührungspunkten, so erfordert die Anwendung des Mechanismus *I* eine Hilfsconstruction, welche darin besteht, dass man mit Hilfe des Mechanismus den vierten harmonischen Punkt construirt in Bezug auf die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte, den Schnittpunkt der beiden Tangenten und den dritten gegebenen Punkt. Hiernach läuft dieser Fall auf denjenigen hinaus, wo der Kegelschnitt durch drei Punkte und eine Tangente gegeben ist.

Wenn der Kegelschnitt durch drei Tangenten und Berührungspunkten in zweien derselben gegeben ist und der Mechanismus *II* zur Construction benutzt werden soll, so ist dual entsprechend dem letzteren Falle ebenfalls eine entsprechende Hilfconstruction vorzunehmen.

Ein Kegelschnitt, der derart durch Elemente gegeben ist, wie in vorhin besprochenen Fällen nicht vorgesehen wurde, ist nicht eindeutig bestimmt. Sobald aber durch geometrische Construction die näheren Bestimmungsstücke gefunden sind, lässt sich zur weiteren Construction des Kegelschnitts entweder Mechanismus *I* oder *II* direct verwenden.

Ist ein Kegelschnitt mit Hilfe der besprochenen Mechanismen gezeichnet, so lassen sich Mittelpunkt, Achsen, Brennpunkte und gegebenen Falls die Asymptoten auf die einfachste Weise bestimmen.

Zum Schluss sei erwähnt, dass die Bewegungen der einzelnen Constructionstheile der Zeichnenvorrichtungen vom mechanischen Standpunkte aus grosses Interesse beanspruchen. In erster Linie würden zu bestimmen sein beim Mechanismus *I*:

1. Die Enveloppe der Transversalstange;
2. Der Ort eines Punktes auf der Transversalstange;
3. Der Ort eines Punktes auf den Strahlenstangen, sowie die entsprechenden Theile des Mechanismus *II*.

Wir erlauben uns, auf die Bestimmung genannter Curven zurück zu kommen.

XIX.

Ueber die partiellen Differentialgleichungen, denen die symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung genügen.

Von

Prof. Eugen Netto

in Giessen.

Herr Faà di Bruno giebt in seinem Buche: „Einleitung in die Theorie der binären Formen“ (deutsch von Th. Walter, Leipzig 1881) einen Abschnitt: „Partielle Differentialgleichungen, denen die symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung genügen.“ Er führt dabei F. Brioschi als Denjenigen an, welcher diese Differentialgleichungen zuerst abgeleitet habe, und liefert die Beweise, oder vielmehr Verificationen ähnlich, wie dies von Brioschi in den „Annali di scienze matematiche e fisiche“ V; 1854, S. 313 flg. und S. 422 flg. geschehen ist. Aber daraus geht weder eine Einsicht in die Tragweite der Formeln, noch in ihr Wesen hervor; und nur an einer Stelle deutet Herr Faà di Bruno (l. c. S. 25) an, auf welcher Eigenschaft der Gleichung eine besondere Differentialgleichung beruhe. Im Folgenden soll das Wesen und die Tragweite der Formeln dargelegt werden.

Die Gleichung

$$x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \cdots \pm c_n = 0 \tag{1}$$

möge die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ besitzen. Die Summen der Wurzelpotenzen bezeichnen wir, wie gewöhnlich, durch $s_0, s_1, s_2, \ldots$ Ersetzt man dann jedes x_λ durch $x_\lambda^i t$, wobei t eine Variable ist, so geht dadurch

$$c_1 \text{ in } c_1 + s_i t,$$

$$c_2 \text{ in } c_2 + (s_i c_1 - s_{i+1}) t + \cdots,$$

$$c_3 \text{ in } c_3 + (s_i c_2 - s_{i+1} c_1 + s_{i+2}) t + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_\lambda \text{ in } c_\lambda + (s_i c_{\lambda-1} - s_{i+1} c_{\lambda-2} + s_{i+2} c_{\lambda-3} - \cdots \pm s_{i+\lambda-1}) t + \cdots,$$

und gleichzeitig

$$
\begin{aligned}
&s_1 \text{ in } s_1 + s_i t,\\
&s_2 \text{ in } s_2 + 2 s_{i+1} t + \cdots,\\
&s_3 \text{ in } s_3 + 3 s_{i+2} t + \cdots,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&s_\lambda \text{ in } s_\lambda + \lambda s_{i+\lambda-1} t + \cdots
\end{aligned}
$$

über. Betrachtet man daher eine symmetrische Function R der Wurzeln, die man sich gleichzeitig als Function der c_λ und als solche der s_λ denken kann, ersetzt die x_λ in der angegebenen Art und vergleicht in den drei Formen die Coefficienten von t, so entsteht die allgemeine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, in der $c_0 = 1$ zu nehmen ist,

$$2)\qquad \sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda^i \frac{\partial R}{\partial x_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{n} (s_i c_{\lambda-1} - s_{i+1} c_{\lambda-2} + \cdots) \frac{\partial R}{\partial c_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda s_{i+\lambda-1} \frac{\partial R}{\partial s_\lambda}.$$

Hierin ist die eine Serie der Brioschi'schen Formeln enthalten. Wegen der, für alle k giltigen Formel

$$s_{k+n} - c_1 s_{k+n-1} + c_2 s_{k+n-2} - \cdots \pm s_k = 0 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

giebt es im Wesentlichen nur n solcher Formeln, wie sie aus 2) entspringen. Man erhält z. B. für $i = 0, 1, 2$ mittelst der Newton'schen Formeln

$$
\begin{aligned}
\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial x_\lambda} &= \sum_{\lambda=1}^{n} (n - \lambda + 1) c_{\lambda-1} \frac{\partial R}{\partial c_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda s_{\lambda-1} \frac{\partial R}{\partial s_\lambda},\\
\sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda \frac{\partial R}{\partial x_\lambda} &= \sum_{\lambda=1}^{n} \lambda c_\lambda \frac{\partial R}{\partial c_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda s_\lambda \frac{\partial R}{\partial s_\lambda},\\
\sum_{\lambda=1}^{n} x^2_\lambda \frac{\partial R}{\partial x_\lambda} &= \sum_{\lambda=1}^{n} (c_1 c_\lambda - [\lambda + 1] c_{\lambda+1}) \frac{\partial R}{\partial c_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda s_{\lambda+1} \frac{\partial R}{\partial s_\lambda},
\end{aligned}
$$

und für $i = -1$ nach einigen Umformungen:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{x_\lambda} \frac{\partial R}{\partial x_\lambda} &= \frac{c_{n-1}}{c_n} \sum_{\lambda=1}^{n} c_{\lambda-1} \frac{\partial R}{\partial c_\lambda} - \sum_{\lambda=2}^{n} (n - \lambda + 2) c_{\lambda-2} \frac{\partial R}{\partial c_\lambda}\\
&= \frac{c_{n-1}}{c_n} \frac{\partial R}{\partial s_1} + \sum_{\lambda=2}^{\infty} \lambda s_{\lambda-2} \frac{\partial R}{\partial s_\lambda}.
\end{aligned}
$$

Statt dieser letzten Formel und der für $i = -2, \ldots$ ähnlich gebildeten erscheinen bei Faà di Bruno scheinbar einfachere, von denen bald die Rede sein wird.*

Ausser der soeben abgeleiteten giebt es noch eine zweite Formelreihe, mit der dann die vorhandenen erschöpft sind. Man erhält sie folgendermaassen. Es ist:

---

* In dem Falle $i = 1$ tritt bei einem homogenen R der Dimension p offenbar noch

$$p R = c_1 \frac{\partial R}{\partial c_1} + 2 c_2 \frac{\partial R}{\partial c_2} + \cdots = s_1 \frac{\partial R}{\partial s_1} + 2 s_2 \frac{\partial R}{\partial s_2} + \cdots$$

auf.

$$\left\{\begin{aligned}&(x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \dots)(x^k + [-1]^k t)\\ &= x^{n+k} - c_1 x^{n+k-1} + \dots + (-1)^k (c_k + t) x^n + (-1)^{k+1} (c_{k+1} + c_1 t) x^{n-1} + \dots\\ &\quad + (-1)^n (c_n + c_{n-k} t) x^k + (-1)^{n+1} c_{n-k+1} t x^{k-1} + \dots ;\end{aligned}\right.$$

diesen Ausdruck, gleich Null gesetzt, wollen wir folgendermassen schreiben:

$$x^{n+k} - \gamma_1 x^{n+k-1} + \gamma_2 x^{n+k-2} - \dots \pm \gamma_{n+k} = 0.$$

Die Summen der Wurzel-Potenzen hierfür mögen mit σ_0, $\sigma_1, \dots \sigma_\lambda \dots$ bezeichnet werden. Dann ist

$$\sigma_0 = n + k; \quad \sigma_k = s_k + (-1)^{k-1} . kt,$$

und die übrigen σ unterscheiden sich von den entsprechenden s mit gleichem Index höchstens durch Glieder, welche die zweite oder eine höhere Potenz von t als Factor haben.

Bildet man nun wieder eine symmetrische Function R der Wurzeln von

$$x^{n+k} - c_1 x^{n+k-1} + c_2 x^{n+k-2} - \dots \pm c_n x^k = 0,$$

welche dann also gleichzeitig symmetrisch in x_1, $x_2, \dots x_n$ ist, und drückt diese durch die c_λ einerseits und durch die s_λ andererseits aus; setzt dabei aber gleichzeitig voraus, dass R, als symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung $(n+k)^{\text{ten}}$ Grades aufgefasst, von keinem der Coefficienten von x^{k-1}, $x^{k-2}, \dots$ abhängt, dann sieht man, dass die Ueberführung von

$$c_1, c_2, \dots c_n \quad \text{in} \quad \gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$$

die angegebene Umwandlung der s_λ in die σ_λ hervorruft. Die Vergleichung der Coefficienten von t liefert dann wieder:

$$3) \qquad \sum_{\lambda=k}^{n} c_{\lambda-k} \frac{\partial R}{\partial c_\lambda} = (-1)^{k-1} . k \frac{\partial R}{\partial s_k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Dies ist die zweite Brioschi'sche Formelreihe. Die wesentliche eben angegebene Bedingung findet sich aber weder bei Brioschi, noch bei Faà di Bruno; und ohne diese ist die Formel unrichtig. Es möge ein einfaches Beispiel dies zeigen. Im Fall von Gleichungen vierten und höheren Grades ist

$$s_4 = c_1^4 - 4 c_1^2 c_2 + 2 c_2^2 + 4 c_1 c_3 - 4 c_4;$$

bei Gleichungen dritten Grades fällt c_4 fort, und man hat:

$$s_4 = c_1^4 - 4 c_1^2 c_2 + 2 c_2^2 + 4 c_1 c_3.$$

Wählt man $R = s_4$ und $k = 2$, so müsste sich aus 3) für $n = 3$

$$\frac{\partial s_4}{\partial c_2} + c_1 \frac{\partial s_4}{\partial c_3} = -2 \frac{\partial s_4}{\partial s_2} = 0$$

ergeben; die linke Seite wird jedoch nicht gleich Null, sondern

$$(-4 c_1^2 + 4 c_2) + c_1 . 4 c_1 = 4 c_2.$$

Im Falle $n=4, 5, \ldots$ wird dagegen das richtige Resultat

$$\frac{\partial s_4}{\partial c_2}+c_1\frac{\partial s_4}{\partial c_3}+c_2\frac{\partial s_4}{\partial c_4}=(-4c_1^2+4c_2)+c_1.4c_1+c_2.(-4)=0$$

herauskommen.

Mit Hilfe der als unbedingt richtig angesehenen Gleichung 3) finden sich bei Faà di Bruno die Gleichungen für $i=-1, -2, \ldots$ unter 2) reducirt; von diesen gilt natürlich auch der gemachte Vorbehalt.

Setzt man n als unbestimmt voraus, berechnet danach die Formel 3) und trägt erst hinterdrein die besonderen Werthe der Coefficienten einer vorliegenden Gleichung ein, dann wird natürlich 3) stets richtige Resultate liefern. Auf diesen Standpunkt wollen wir uns von jetzt ab stellen.

Offenbar gelten 2) und 3) für jedes $R=c_\lambda$ oder $R=s_\lambda$. Aber auch umgekehrt kann man die allgemeinen Formeln ohne Weiteres aus denen für $R=c_\lambda$ bezw. $R=s_\lambda$ ableiten, indem man

$$\frac{\partial R}{\partial c_\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial R}{\partial s_k}\ \frac{\partial s_k}{\partial c_\lambda}, \ldots$$

setzt. Daraus geht hervor, dass 2) und 3) nicht blos für symmetrische, sondern für irgend welche rationale, ja selbst algebraische Functionen $R(x_1, \ldots x_n)$ giltig bleiben. Man hat dann nur die x als algebraische Functionen der c_λ oder der s_λ aufzufassen. Im einfachsten Falle $n=2$, $R=x_1$ ist in der That, wie 2) es fordert:

$$\Sigma x_\lambda{}^i\frac{\partial R}{\partial x_\lambda}=\Sigma x_\lambda{}^i\frac{\partial x_1}{\partial x_\lambda}=x_1{}^i;$$

$$\begin{aligned}\Sigma(s_i c_{\lambda-1}-s_{i+1}c_{\lambda-2}+\cdots)\frac{\partial R}{\partial c_\lambda}&=\frac{1}{2}(x_1{}^i+x_2{}^i)\left(1+\frac{c_1}{\sqrt{c_1{}^2-4c_2}}\right)\\&\quad-(x_1{}^i x_2+x_1 x_2{}^i)\frac{1}{\sqrt{c_1{}^2-4c_2}}\\&=(x_1{}^i+x_2{}^i)\frac{x_1}{x_1-x_2}-(x_1{}^i x_2+x_1x_2{}^i)\frac{1}{x_1-x_2}\\&=x_1{}^i;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma\lambda s_{i+\lambda-1}\frac{\partial R}{\partial s_\lambda}&=\frac{1}{2}(x_1{}^i+x_2{}^i)\left(1-\frac{s_1}{\sqrt{2s_2-s_1{}^2}}\right)+\frac{x_1{}^{i+1}+x_2{}^{i+1}}{\sqrt{2s_2-s_1{}^2}}\\&=(x_1{}^i+x_2{}^i)\frac{-x_2}{x_1-x_2}+(x_1{}^{i+1}+x_2{}^{i+1})\frac{1}{x_1-x_2}\\&=x_1{}^i.\end{aligned}$$

Ebenso ergiebt sich die Richtigkeit der beiden aus 3) folgenden Formeln:

$$\frac{\partial x_1}{\partial c_1}+c_1\frac{\partial x_1}{\partial c_2}=\frac{\partial x_1}{\partial s_1},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial c_2}=-2\frac{\partial x_1}{\partial s_2}.$$

Hiernach ist es ersichtlich, dass die Formelreihen 2) und 3) nicht charakteristisch für symmetrische Functionen, sondern höchstens für die Beziehungen charakteristisch sein können, in denen die x, die c und die s zu einander stehen.

Wir gehen zuerst auf den Zusammenhang der x mit den s ein; dazu nehmen wir aus den Formeln 2) die Gleichungen

$$4)\qquad \sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda^i \frac{\partial s_k}{\partial x_\lambda} = k s_{k+i-1} \qquad \begin{pmatrix} i=0,\ 1,\ 2,\dots \\ k=1,\ 2,\ 3,\dots \end{pmatrix}$$

heraus. Zu $s_1, s_2, \dots$ können wir das durch $k=1$, $i=0$ definirte s_0 hinzunehmen; die Gleichungen 4) gelten dann auch für $k=0$. Wir nehmen für die allgemein zu bestimmenden Functionen s_k, welche dem Systeme 4) genügen, die Bezeichnung φ_k und gehen, um zunächst

$$5)\qquad \sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_\lambda} = k\varphi_k$$

zu lösen, in bekannter Weise auf das simultane System

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{d\varphi_k}{k\varphi_k}$$

über. Dadurch erhalten wir das Resultat, dass das allgemeine φ_k eine homogene Function der $x_1, \dots x_n$ von der Dimension k wird.

Aus φ_1 lassen sich durch

$$6)\qquad \varphi_k = \sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda^k \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\lambda}$$

alle übrigen φ_k berechnen. Hat man zwei Lösungssysteme für 4), so giebt die Summe entsprechender Functionen ein neues Lösungssystem. Es reicht daher aus, einen einzigen Summanden

$$\psi_1 = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1)$$

von φ_1 darauf hin zu prüfen, welchen Bedingungen er unterworfen sein muss, um 4) zu erfüllen, damit man allgemein φ_1 habe und daraus jedes φ_k zusammensetzen könne.

Aus 6) folgt:

$$\psi_{k+i-1} = \psi_1 \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x_\nu^{i+k-2}$$

und aus 4):

$$k\psi_{k+i-1} = \psi_1 \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_\lambda x_\lambda^{i-1} \cdot \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu x_\mu^{k-1} + (k-1)\psi_1 \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x_\nu^{i+k-2},$$

so dass, den beiden letzten Resultaten gemäss,

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_\lambda x_\lambda^{i-1} \cdot \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu x_\mu^{k-1} = \sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa x_\kappa^{i+k-2}$$

für alle Werthe von i und k und alle beliebigen $x_1, x_2, \dots x_n$ sein muss.

Das zeigt dann sofort das Bestehen der Bedingungen

$$\alpha_\lambda^2 = \alpha_\lambda; \quad \alpha_\mu \alpha_\nu = 0 \qquad (\mu \neq \nu),$$

und diese Gleichungen sind nur so lösbar, dass eins der α gleich 1 wird, während die anderen gleich Null werden.

Aus dieser Speciallösung gehen nun durch lineare Combinationen die allgemeinen Lösungen von 4) in der Gestalt

$$\varphi_k = a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + \cdots + a_n x_n^k \qquad (\Sigma a_\lambda = n)$$

hervor. Die hinzugefügte Bedingung folgt aus $\varphi_0 = n$. Wir wollen diese Ausdrücke in Rücksicht auf ihre Herleitung mit S_k bezeichnen.

Construirt man zu diesen S_k nun Functionen C_k, welche so von ihnen abhängen, wie die c_k von den s_k, so liefert dies System die allgemeinsten Lösungen von 2). Denn erstens ist es klar, dass es Lösungen liefert. Zweitens erkennt man, dass man von den allgemeinsten Lösungen der aus 2) stammenden Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda{}^i \frac{\partial c_k}{\partial x_\lambda} = \sum_{(\alpha)} x_{\alpha_1}{}^i x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_k} \quad \Big(\sum_{(\alpha)} \text{ ist symmetrisch in den } x\Big)$$

umgekehrt zu Lösungen für 4) kommen könnte.

Folglich hat man in

$$7) \qquad S_k = a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + \cdots + a_n x_n^k \qquad (\Sigma a_\lambda = n)$$

nebst

$$7^*) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 1!\ C_1 = S_1 \\ 2!\ C_2 = S_1^2 - S_2 \\ 3!\ C_3 = S_1^3 - 3 S_1 S_2 + 2 S_3 \\ 4!\ C_4 = S_1^4 - 6 S_1^2 S_2 + 8 S_1 S_3 + 3 S_2^2 - 6 S_4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

die allgemeinsten Lösungen für die Differentialgleichungen 2) und 3). Den Ausdruck der mittelst 7*) bestimmten C durch die x kann man einfach symbolisch durch

$$8) \qquad \lambda!\ C_\lambda = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)^{(\lambda)}$$

darstellen; dabei ist die symbolische Potenz

$$a_i^{(\mu)} \text{ durch } a_i(a_i - 1)(a_i - 2) \ldots (a_i - \mu + 1)$$

ersetzt zu denken.

Benutzt man die $C_1, \ldots C_n$ zur Aufstellung der Gleichung

$$9) \qquad X^n - C_1 X^{n-1} + C_2 X^{n-2} - \cdots \pm C_n = 0,$$

und benennt die Wurzeln derselben $X_1, X_2, \ldots X_n$, so gelten natürlich für diese, ihre Summen von Wurzelpotenzen und für die $C_1, \ldots C_n$ die Gleichungen 2) und 3); aber freilich sind die Summen der Wurzelpotenzen mit den S_λ nur so weit identisch, als die letzten zur Definition der C nöthig waren, das heisst bis S_n. Stellt man also diejenigen zu 9) gehörigen Differentialgleichungen auf, welche den in 2) und 3) gegebenen entsprechen, auf den rechten Seiten aber nur $S_1, S_2, \dots S_n$ enthalten, so stimmen diese mit den correspondirenden aus 2) und 3) gebildeten überein, falls man in die letzten statt der s_λ und c_λ die S_λ und C_λ mit gleichem Index einträgt. So wird z. B. für $n=3$, $i=0,1,2,3$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_1}+\frac{\partial C_1}{\partial x_2}+\frac{\partial C_1}{\partial x_3}=3=\frac{\partial C_1}{\partial X_1}+\frac{\partial C_1}{\partial X_2}+\frac{\partial C_1}{\partial X_3},$$

$$x_1\frac{\partial C_1}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial C_1}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial C_1}{\partial x_3}=C_1=X_1\frac{\partial C_1}{\partial X_1}+X_2\frac{\partial C_1}{\partial X_2}+X_3\frac{\partial C_1}{\partial X_3},$$

$$x_1^2\frac{\partial C_1}{\partial x_1}+x_2^2\frac{\partial C_1}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial C_1}{\partial x_3}=C_1^2-2C_2=X_1^2\frac{\partial C_1}{\partial X_1}+X_2\frac{\partial C_1}{\partial X_2}+X_3\frac{\partial C_1}{\partial X_3},$$

$$x_1^3\frac{\partial C_1}{\partial x_1}+\cdots \qquad =C_1^3-3C_1C_2+3C_3=X_1^3\frac{\partial C_1}{\partial X_1}+\cdots$$

Die Gleichheit der linken und der mittleren Ausdrücke folgt leicht ausser aus unseren allgemeinen Betrachtungen noch aus 7*). Ebenso erhält man:

$$\frac{\partial C_2}{\partial x_1}+\cdots \qquad =2C_1=\frac{\partial C_2}{\partial X_1}+\cdots,$$

$$x_1\frac{\partial C_2}{\partial x_1}+\cdots \qquad =2C_2=X_1\frac{\partial C_2}{\partial X_1}+\cdots,$$

$$x_1^2\frac{\partial C_2}{\partial x_1}+\cdots \qquad =C_1C_2-3C_3=X_1^2\frac{\partial C_2}{\partial X_1}+\cdots;$$

und endlich noch:

$$\frac{\partial C_3}{\partial x_1}+\cdots \qquad =C_2=\frac{\partial C_3}{\partial X_1}+\cdots,$$

$$x_1\frac{\partial C_3}{\partial x_1}+\cdots \qquad =3C_3=X_1\frac{\partial C_3}{\partial X_1}+\cdots$$

Daraus kann man dann, wenn R eine beliebige Function der x oder der X bedeutet, den Schluss ziehen, dass

$$10)\qquad \left\{\begin{aligned}\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\partial R}{\partial x_\lambda}&=\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\partial R}{\partial X_\lambda},\\ \sum_{\lambda=1}^{n}x_\lambda\frac{\partial R}{\partial x_\lambda}&=\sum_{\lambda=1}^{n}X_\lambda\frac{\partial R}{\partial X_\lambda}\end{aligned}\right.$$

sein wird. Es ist dies eine interessante Beziehung zwischen den Wurzeln der Gleichungen 1) und 9), deren Abhängigkeit von einander durch 8) vermittelt wird.

Aus der Formel 8) kann man die Beantwortung der Frage entnehmen, wie die a_i gewählt sein müssen, damit die Werthe C_{r+1}, $C_{n+2}, \dots$ sämmtlich verschwinden. In C_λ tritt eine Reihe von Gliedern der Form:

$$a_1(a_1-1)\ldots(a_1-k_1+1)\,.\,a_2(a_2-1)\ldots(a_2-k_2+1)\ldots x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots$$
$$(k_1+k_2+\cdots=\lambda)$$

auf. Offenbar ist es für das Verschwinden aller dieser bei $\lambda > n$ nothwendig und hinreichend, dass $a_1 = a_2 = \cdots = 1$ werden.

Fordert man, dass in den Differentialgleichungen 2) und 3) von den c nur die n Grössen $c_1, \ldots c_n$ von Null verschieden sind, dann liefern die
$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$$
nebst den zugehörigen $c_1, c_2, \ldots c_n$ die allgemeinsten Lösungen der Systeme partieller Differentialgleichungen, und diese sind dann also charakteristisch für die Beziehungen zwischen den Wurzeln, den Summen der Wurzelpotenzen und den Coefficienten einer Gleichung n^{ten} Grades.

Im § 4 des Faà di Bruno'schen Buches wird eine partielle Differentialgleichung angegeben, der die symmetrischen Functionen der Wurzeldifferenzen genügen. Diese folgt nach unserer Methode daraus, dass eine symmetrische Function der Wurzeldifferenzen sich bei der Substitution $x_\lambda + t$ statt x_λ nicht ändert. Hieraus ersieht man, dass diese Gleichung

$$\text{11)} \qquad \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda\, s_{\lambda-1} \frac{\partial R}{\partial s_\lambda} = 0$$

nicht sowohl für die symmetrischen Functionen der Wurzeldifferenzen, als vielmehr für die symmetrischen Functionen der Wurzeln, die zugleich Functionen der Wurzeldifferenzen sind, ein Charakteristicum bildet. Dass aber beide Arten von Functionen nicht mit einander identisch sind, erkennt man leicht. So ist für $n = 3$

$$\begin{aligned}(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)+(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)+(x_1-x_3)^2(x_1-x_2)+(x_1-x_3)^2(x_3-x_2)\\ +(x_2-x_3)^2(x_2-x_1)+(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)\\ =2c_1^3-9c_1c_2+27c_3\\ =2s_1^3-9s_1s_2+9s_3\end{aligned}$$

eine Function der zweiten aber nicht der ersten Art.

Auf 11) beruht nun ein einfacher Beweis des Satzes, den Herr Sylvester (C. R. XCVIII, 779) angegeben hat: „Die symmetrischen Functionen der Wurzeldifferenzen von

$$x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \cdots \pm c_n = 0$$

sind als ganze Functionen der Wurzel-Potenzsummen von

$$x^n - \frac{c_1}{n} x^{n-1} + \frac{c_2}{n(n-1)} x^{n-2} - \frac{c_3}{n(n-1)(n-2)} x^{n-3} + \cdots = 0$$

darstellbar, in welchen aber die Summe der ersten Potenzen niemals auftritt." Nach unseren Ueberlegungen gilt dieser Satz in der Verallgemeinerung, dass jede symmetrische Function der Wurzeln der ersten Gleichung, welche zugleich eine Function der Wurzeldifferenzen ist, eine solche Darstellung zulässt.

So ergiebt sich z. B., wenn wir die Potenzsummen der Wurzeln der letzten Gleichung mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ bezeichnen,

$$s_1 = 3\sigma_1; \quad s_2 = 3\sigma_1^2 + 6\sigma_2; \quad s_3 = 3\sigma_1^3 + 18\sigma_1\sigma_2 + 6\sigma_3$$

und es wird, dem obigen Beispiele entsprechend,

$$2s_1^3 - 9s_1 s_2 + 9s_3 = 54\sigma_3.$$

Giessen, den 13. Mai 1893.

Kleinere Mittheilungen.

XIV. Ueber Kettenbrüche, die durch Ausziehen einer Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl entstehen.

Es sei x gleich der Summe aus einer ganzen Zahl und einem unendlichen, periodischen Kettenbruche, also

$$\text{I.}\qquad x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \textit{ in inf.}}}}}},$$

oder

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + x - a}}},$$

so dass nach der Bezeichnung von Gauss (D. A. Art. 27):

$$\begin{aligned}
x &= a + \frac{[a_2,\ a_3,\ a_4 \ldots a_{n-1},\ a_n + x - a]}{[a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots a_{n-1},\ a_n + x - a]} \\
&= \frac{[a,\ a_1,\ a_2 \ldots a_{n-1},\ a_n + x - a]}{[a_1,\ a_2 \ldots a_{n-1},\ a_n + x - a]} \\
&= \frac{[a,\ a_1 \ldots a_{n-1}](a_n + x - a) + [a,\ a_1 \ldots a_{n-2}]}{[a_1,\ a_2 \ldots a_{n-1}](a_n + x - a) + [a_1,\ a_2 \ldots a_{n-2}]} \\
&= \frac{[a,\ a_1 \ldots a_n] + [a,\ a_1 \ldots a_{n-1}](x - a)}{[a_1,\ a_2 \ldots a_n] + [a_1,\ a_2 \ldots a_{n-1}](x - a)}
\end{aligned}$$

und daher:

$$\text{II.}\qquad \begin{cases} [a_1,\ a_2 \ldots a_{n-1}]\,x^2 + \big([a_1,\ a_2 \ldots a_n] - a\,[a_1,\ a_2 \ldots a_{n-1}] \\ -\,[a,\ a_1 \ldots a_{a-1}]\big)\,x = [a,\ a_1 \ldots a_n] - a\,[a,\ a_1 \ldots a_{n-1}]. \end{cases}$$

Es giebt also, wie bekannt, jeder periodische Kettenbruch ein quadratisches Radical. — Dieser Ausdruck für x geht in eine Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl über, wenn man den Factor von x in der letzten Gleichung gleich 0 setzt, also wenn:

$$[a_1,\ a_2 \ldots a_n] - a[a_1,\ a_2 \ldots a_{n-1}] - [a,\ a_1 \ldots a_{n-1}] = 0,$$

$$[a_1,\ a_2 \ldots a_n] - a[a_1,\ a_2 \ldots a_{n-1}] - a[a_1,\ a_2 \ldots a_{n-1}] - [a_2,\ a_3 \ldots a_{n-1}] = 0,$$

$$[a_1,\ a_2 \ldots a_{n-1}]\, a_n + [a_1,\ a_2 \ldots a_{n-2}] - 2a[a_1,\ a_2 \ldots a_{n-1}] - [a_2,\ a_3 \ldots a_{n-1}] = 0,$$

$$(a_n - 2a)[a_1,\ a_2 \ldots a_{n-1}] + [a_1,\ a_2 \ldots a_{n-2}] - [a_2,\ a_3 \ldots a_{n-1}] = 0,$$

$$a_n - 2a + \frac{[a_1,\ a_2 \ldots a_{n-2}] - [a_2,\ a_3 \ldots a_{n-1}]}{[a_1,\ a_2 \ldots a_{n-1}]} = 0.$$

Da nun sowohl a_n wie $2a$ ganze Zahlen sind, muss der Bruch ein Scheinbruch sein. Es ist aber

$$[a_1,\ a_2 \ldots a_{n-1}] > [a_1,\ a_2 \ldots a_{n-2}]$$

und auch

$$> [a_2,\ a_3 \ldots a_{n-1}],$$

mithin der Zähler kleiner als der Nenner, folglich muss er $= 0$ sein. Daher ist

$$a_n = 2a \quad \text{und} \quad [a_1,\ a_2 \ldots a_{n-2}] - [a_2,\ a_3 \ldots a_{n-1}] = 0.$$

Die zweite Gleichung ergiebt

$$\left\{\begin{array}{l} a_1[a_2,\ a_3 \ldots a_{n-2}] + [a_3,\ a_4 \ldots a_{n-2}] - [a_2,\ a_3 \ldots a_{n-2}]\, a_{n-1} \\ \qquad\qquad - [a_2,\ a_3 \ldots a_{n-3}] = 0, \end{array}\right.$$

$$a_1 - a_{n-1} + \frac{[a_3,\ a_4 \ldots a_{n-2}] - [a,\ a_3 \ldots a_{n-3}]}{[a_2,\ a_3 \ldots a_{n-2}]} = 0,$$

und aus demselben Grunde wie vorher ist

$$a_1 = a_{n-1} \quad \text{und} \quad [a_3,\ a_4 \ldots a_{n-2}] = [a_2,\ a_3 \ldots a_{n-3}].$$

Da sich das Verfahren in gleicher Weise fortsetzen lässt, so erhalten wir:

III. $$a_n = 2a,\ a_1 = a_{n-1},\ a_2 = a_{n-2},\ a_3 = a_{n-3}, \ldots$$

und daraus folgt der Satz:

> Bei der Entwickelung einer Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl in einen Kettenbruch erhält man eine ganze Zahl und einen periodischen Kettenbruch, bei welchem das letzte Glied der Periode gleich dem Doppelten der ganzen Zahl und die übrigen Glieder in sich symmetrisch sind.

Unsere Ableitung gilt allerdings zunächst nur für den Fall, dass die ganze Zahl $a \geqq 1$, doch behält der Satz auch seine Giltigkeit bei einer Quadratwurzel aus einem echten Bruche, wenn man nur 0 als Nenner in der Reihe der Kettenbruchnenner zulässt. So ist z. B.:

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \ldots \mathit{in\ inf.}}}}}},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\sqrt{\frac{5}{7}}=0+\frac{1}{1+\frac{1}{5+\frac{1}{1+\frac{1}{0+\frac{1}{1+\frac{1}{5+\cdots in\ inf.,}}}}}}$$

so dass die Periode 1, 5, 1, 0 ist.

Soll der Kettenbruch I eine Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl darstellen, so muss nach Gleichung II

$$\frac{[a,\ a_1\ldots a_n]-[a_1\ldots a_{n-1}]}{[a_1,\ a_2\ldots a_{n-1}]}$$

eine ganze Zahl sein. Dieser Bruch ist aber gleich

$$\frac{[a,\ a_1\ldots a_{n-1}]a_n+[a,\ a_1\ldots a_{n-2}]-a[a,\ a_1\ldots a_{n-1}]}{[a_1,\ a_2\ldots a_{n-1}]}$$

$$=\frac{a[a,\ a_1\ldots a_{n-1}]+[a,\ a_1\ldots a_{n-2}]}{[a_1,\ a_2\ldots a_{n-1}]}$$

$$=a^2+\frac{a[a_2,\ a_3\ldots a_{n-1}]+a[a_1,\ a_2\ldots a_{n-2}]+[a_2,\ a_3\ldots a_{n-2}]}{[a_1,\ a_2\ldots a_{n-1}]}.$$

Nach Gleichung III ist aber

$$[a_2,\ a_3\ldots a_{n-1}]=[a_{n-2},\ a_{n-3}\ldots a_1]=[a_1,\ a_2\ldots a_{n-2}],$$

daher ist:

$$x^2=a^2+\frac{2a[a_1,\ a_2\ldots a_{n-2}]+[a_2,\ a_3\ldots a_{n-2}]}{[a_1,\ a_2\ldots a_{n-1}]}$$

$$=a^2+\frac{[2a,\ a_1,\ a_2\ldots a_{n-2}]}{[a_1,\ a_2\ldots a_{n-1}]}.$$

Damit also x^2 eine ganze Zahl ist, muss $[a_1,\ a_2\ldots a_{n-1}]$ ein Theiler von $[2a,\ a_1,\ a_2\ldots a_{n-2}]$ sein, doch ist es mir bis jetzt nicht gelungen, daraus ein einfaches Gesetz abzuleiten, dem die Kettenbruchnenner unterworfen sein müssen.

Eine eingliedrige Periode ergiebt sich bei

$$\sqrt{n^2+1}=n+K(\overline{2n}).$$

Ist die Periode zweigliedrig, so ist

$$x^2=a^2+\frac{2a}{a_1};$$

es muss dann a_1 ein Theiler von $2a$ sein, ohne $=2a$ zu sein, da in diesem Falle die Periode nur ein Glied hat.

Es stellt uns also $x=a+K(\overline{a_1,\ a_2})$* stets dann und nur dann eine Wurzel aus einer ganzen Zahl dar, wenn $a_2=2a$ und a_1 ein Theiler von

* Durch $K(\overline{a_1,\ a_2})$ werde ein unendlicher Kettenbruch bezeichnet, dessen Nenner die Periode a_1, a_2 haben.

a_2 ist, und umgekehrt giebt die Quadratwurzel aus allen Zahlen von der Form a^2+b einen zweigliedrigen periodischen Kettenbruch, wenn b ein Theiler von $2a$ ist (1 ausgeschlossen). Es ist dann:

$$\sqrt{a^2+b} = a + K\left(\overline{\frac{2a}{b},\ 2a}\right).$$

Schon bei dreigliedriger Periode wird die Form der Zahl recht zusammengesetzt. Es ergiebt sich dann, dass die beiden ersten Kettenbruchnenner gerade Zahlen sein müssen, und dass die Zahlen, deren Quadratwurzel einen Kettenbruch mit dreigliedriger Periode liefern, von der folgenden Form sind:

$$\begin{cases} \sqrt{[(4m^2+1)n+m]^2+4mn+1} = (4m^2+1)n+m \\ \qquad + K\left(\overline{2m,\ 2m,\ 2n(4m^2+1)+2m}\right) \end{cases}$$

Die ersten dieser Zahlen sind:

41, 130, 269, 370, 458, 697, 986.

Entwickelung der Quadratwurzeln aus den Zahlen 1 bis 100 in Kettenbrüche.

$\sqrt{1} = 1$

$\sqrt{2} = 1 + K(\overline{2})$*

$\sqrt{3} = 1 + K(\overline{1,2})$

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{5} = 2 + K(\overline{4})$

$\sqrt{6} = 2 + K(\overline{2,4})$

$\sqrt{7} = 2 + K(\overline{1,1,1,4})$

$\sqrt{8} = 2 + K(\overline{1,4})$

$\sqrt{9} = 3$

$\sqrt{10} = 3 + K(\overline{6})$

$\sqrt{11} = 3 + K(\overline{3,6})$

$\sqrt{12} = 3 + K(\overline{2,6})$

$\sqrt{13} = 3 + K(\overline{1,1,1,1,6})$

$\sqrt{14} = 3 + K(\overline{1,2,1,6})$

$\sqrt{15} = 3 + K(\overline{1,6})$

$\sqrt{16} = 4$

$\sqrt{17} = 4 + K(\overline{8})$

$\sqrt{18} = 4 + K(\overline{4,8})$

$\sqrt{19} = 4 + K(\overline{2,1,1,1,2,8})$

$\sqrt{20} = 4 + K(\overline{2,8})$

$\sqrt{21} = 4 + K(\overline{1,1,2,1,1,8})$

$\sqrt{22} = 4 + K(\overline{1,2,4,2,1,8})$

$\sqrt{23} = 4 + K(\overline{1,1,1,8})$

$\sqrt{24} = 4 + K(\overline{1,8})$

$\sqrt{25} = 5$

$\sqrt{26} = 5 + K(\overline{10})$

$\sqrt{27} = 5 + K(\overline{5,10})$

$\sqrt{28} = 5 + K(\overline{3,2,3,10})$

$\sqrt{29} = 5 + K(\overline{2,1,1,2,10})$

$\sqrt{30} = 5 + K(\overline{2,10})$

$\sqrt{31} = 5 + K(\overline{1,1,3,5,3,1,1,10})$

$\sqrt{32} = 5 + K(\overline{1,1,1,10})$

$\sqrt{33} = 5 + K(\overline{1,2,1,10})$

$\sqrt{34} = 5 + K(\overline{1,4,1,4,1,10})$

$\sqrt{35} = 5 + K(\overline{1,10})$

$\sqrt{36} = 6$

* Durch $K(\overline{a,\ b,\ c})$ werde ein unendlicher Kettenbruch bezeichnet, dessen Nenner die Periode a, b, c haben.

$\sqrt{37} = 6 + K(\overline{12})$

$\sqrt{38} = 6 + K(\overline{6, 12})$

$\sqrt{39} = 6 + K(\overline{4, 12})$

$\sqrt{40} = 6 + K(\overline{3, 12})$

$\sqrt{41} = 6 + K(\overline{2, 2, 12})$

$\sqrt{42} = 6 + K(\overline{2, 12})$

$\sqrt{43} = 6 + K(\overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12})$

$\sqrt{44} = 6 + K(\overline{1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 12})$

$\sqrt{45} = 6 + K(\overline{1, 2, 2, 2, 1, 12})$

$\sqrt{46} = 6 + K(\overline{1, 3, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 12})$

$\sqrt{47} = 6 + K(\overline{1, 5, 1, 12})$

$\sqrt{48} = 6 + K(\overline{1, 12})$

$\sqrt{49} = 7$

$\sqrt{50} = 7 + K(\overline{14})$

$\sqrt{51} = 7 + K(\overline{7, 14})$

$\sqrt{52} = 7 + K(\overline{4, 1, 2, 1, 4, 14})$

$\sqrt{53} = 7 + K(\overline{3, 1, 1, 3, 14})$

$\sqrt{54} = 7 + K(\overline{2, 1, 6, 1, 2, 14})$

$\sqrt{55} = 7 + K(\overline{2, 2, 2, 14})$

$\sqrt{56} = 7 + K(\overline{2, 14})$

$\sqrt{57} = 7 + K(\overline{1, 1, 4, 1, 1, 14})$

$\sqrt{58} = 7 + K(\overline{1, 1, 1, 1, 1, 1, 14})$

$\sqrt{59} = 7 + K(\overline{1, 2, 7, 2, 1, 14})$

$\sqrt{60} = 7 + K(\overline{1, 2, 1, 14})$

$\sqrt{61} = 7 + K(\overline{1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14})$

$\sqrt{62} = 7 + K(\overline{1, 6, 1, 14})$

$\sqrt{63} = 7 + K(\overline{1, 14})$

$\sqrt{64} = 8$

$\sqrt{65} = 8 + K(\overline{16})$

$\sqrt{66} = 8 + K(\overline{8, 16})$

$\sqrt{67} = 8 + K(\overline{5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16})$

$\sqrt{68} = 8 + K(\overline{4, 16})$

$\sqrt{69} = 8 + K(\overline{3, 3, 1, 4, 1, 3, 3, 16})$

$\sqrt{70} = 8 + K(\overline{2, 1, 2, 1, 2, 16})$

$\sqrt{71} = 8 + K(\overline{2, 2, 1, 7, 1, 2, 2, 16})$

$\sqrt{72} = 8 + K(\overline{2, 16})$

$\sqrt{73} = 8 + K(\overline{1, 1, 5, 5, 1, 1, 16})$

$\sqrt{74} = 8 + K(\overline{1, 1, 1, 1, 16})$

$\sqrt{75} = 8 + K(\overline{1, 1, 1, 16})$

$\sqrt{76} = 8 + K(\overline{1, 2, 1, 1, 5, 4, 5, 1, 1, 2, 1, 16})$

$\sqrt{77} = 8 + K(\overline{1, 3, 2, 3, 1, 16})$

$\sqrt{78} = 8 + K(\overline{1, 4, 1, 16})$

$\sqrt{79} = 8 + K(\overline{1, 7, 1, 16})$

$\sqrt{80} = 8 + K(\overline{1, 16})$

$\sqrt{81} = 9$

$\sqrt{82} = 9 + K(\overline{18})$

$\sqrt{83} = 9 + K(\overline{9, 18})$

$\sqrt{84} = 9 + K(\overline{6, 18})$

$\sqrt{85} = 9 + K(\overline{4, 1, 1, 4, 18})$

$\sqrt{86} = 9 + K(\overline{3, 1, 1, 1, 8, 1, 1, 1, 3, 18})$

$\sqrt{87} = 9 + K(\overline{3, 18})$

$\sqrt{88} = 9 + K(\overline{2, 1, 1, 1, 2, 18})$

$\sqrt{89} = 9 + K(\overline{2, 3, 3, 2, 18})$

$\sqrt{90} = 9 + K(\overline{2, 18})$

$\sqrt{91} = 9 + K(\overline{1, 1, 5, 1, 5, 1, 1, 18})$

$\sqrt{92} = 9 + K(\overline{1, 1, 2, 4, 2, 1, 1, 18})$

$\sqrt{93} = 9 + K(\overline{1, 1, 1, 4, 6, 4, 1, 1, 1, 18})$

$\sqrt{94} = 9 + K(\overline{1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1, 18})$

$\sqrt{95} = 9 + K(\overline{1, 2, 1, 18})$

$\sqrt{96} = 9 + K(\overline{1, 3, 1, 18})$

$\sqrt{97} = 9 + K(\overline{1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 18})$

$\sqrt{98} = 9 + K(\overline{1, 8, 1, 18})$

$\sqrt{99} = 9 + K(\overline{1, 18})$

$\sqrt{100} = 10.$

Chemnitz, im März 1893. Dr. H. Willgrod.

XV. Der Mittelpunkt des hydrostatischen Druckes in ebenen Figuren.

§ 1. Das Lehrbuch der Physik von Violle bezeichnet in seinem soeben erschienenen 1. Bande diesen Druck, wenn ich den Dichtigkeitsfactor gleich weglasse, mit

$$\Sigma s z = S Z$$

und schreibt für die Coordinaten seines Mittelpunktes:

$$x_1 = \frac{\Sigma s z x}{S Z}, \quad y_1 = \frac{\Sigma s z y}{S Z}, \quad z_1 = \frac{\Sigma s z^2}{S Z}.$$

Dagegen sei es erlaubt, vom Standpunkte der Einfachheit aus einzuwenden, dass für einen in gegebener Ebene liegenden Punkt drei Gleichungen aufgewendet werden. Der Verfasser macht übrigens davon selbst keine directe Anwendung, indem er unmittelbar darauf sagt: „häufig wird sich eine geometrische Behandlung des Problems empfehlen“ und diese letztere in drei Beispielen mit je einer Figur erläutert. Dieselben handeln vom Rechteck, dessen eine Seite in der Oberfläche der Flüssigkeit liegt, und vom Dreieck, wenn die Grundlinie a horizontal und die Spitze in der Oberfläche, oder, wenn eine Seite in dieser Oberfläche sich befindet. Indem er die betreffende Ebene schräg (nicht vertical) in der Flüssigkeit gelegen annimmt, zeichnet er durch Projection der in der Tiefe gelegenen Rechteck- oder Dreieckseite, oder (im dritten Beispiele) des dritten Eckpunktes auf die genannte Oberfläche das dreiseitige Prisma, die vierseitige Pyramide und das Tedraeder (die drei Körper mit sechs, fünf, vier Ecken) und projicirt deren Schwerpunkte auf die genannten drei ebenen Figuren durch Senkrechte zur Oberfläche.

Also benöthigt man eines wirklichen Raumpunktes; siehe das zu den obigen drei Gleichungen Gesagte. Ferner muss man je einen Körper sich vorstellen, oder in einer einzigen Ebene zeichnend skizziren, und man muss die ursprüngliche Ebene schräg im Wasser annehmen.

Ich will diese Methode mit dem kurzen Beiworte der räumlichen benennen.

§ 2. Es ist leicht von vornherein einzusehen, dass der Druckmittelpunkt einer horizontalen Figur mit dem Schwerpunkte dieser zusammenfällt, dagegen bei jeder Neigung α zum Horizonte unabhängig von α ein und dieselbe andere und zwar tiefere Lage hat als der genannte Schwerpunkt. Darum genügt es, die Ebene der Figur vertical oder α gleich 90^0 anzunehmen. In der Schreibung des § 1 bestimmt sich sonach der Druckmittelpunkt durch die beiden letzten der drei Gleichungen, indem $x_1 = 0$ wird. (Wenn α beliebig, so bekommen z, Z, z_1 je den Divisor $\sin\alpha$, was man dann u, U, u_1 nennen könnte, die Achse der u in die fragliche Ebene legend, während die Achse der y verbleibt.)

Gemäss der Gleichung
$$z_1 S Z = \Sigma s z^2$$
will ich die nun zu besprechende Methode nach dem Trägheitsmomente benennen, welches der Schüler, will ich annehmen, schon vorher bei dem physikalischen Pendel oder bei anderer Gelegenheit kennen gelernt hat. (Der Schwingungspunkt dieses Pendels harmonirt auf's Schönste mit dem Druckmittelpunkt, wenn auch die Schwierigkeit der Uebertragung des Ausdruckes $\Sigma m r^2$ auf die ebene Figur für Anfänger nicht verschwiegen werden soll.)

Da „Beispiele lehren", soll das Rechteck im § 1 oder gleich das Rhomboid mit der Seite a in der Flüssigkeitsoberfläche und der zugehörigen Höhe h liefern
$$z_1 . a h \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{3} a h . h^2,$$
oder
$$z_1 = \frac{2}{3} h;$$
und bezüglich y_1 leuchtet ein, dass der Druckmittelpunkt auf der a halbirenden Parallelen zur anderen Rhomboidseite gelegen sein muss.

Beim Dreieck des § 1 haben wir im ersteren Falle
$$z_1 \cdot \frac{1}{2} h a \cdot \frac{2}{3} h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a h . h^2,$$
oder
$$z_1 = \frac{3}{4} h,$$
und im letzteren
$$z_1 \cdot \frac{1}{2} h a \cdot \frac{1}{3} h = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} a h . h^2,$$
oder
$$z_1 = \frac{h}{2},$$
wozu bezüglich y_1 noch die a halbirende Transversale als „geometrischer Ort" des Druckmittelpunkts die Lösung der Aufgabe vervollständigt.

Es bedarf also bei dieser Methode keiner Hervorhebung der (hinsichtlich y) mit einer Symmetrie-Achse versehenen Figuren (wie z. B. in der ersten Auflage des Ritter'schen Lehrbuches der technischen Mechanik), sondern nur einer die horizontalen Elementarstreifen der Figur halbirenden Geraden, welche beim Rhomboid und Dreieck vorhanden sind, wenn deren eine Seite horizontal gerichtet ist.

Ist die letztgenannte Bedingung nicht erfüllt, so liefert das Dreieck statt der einzigen Halbirungsgeraden eine einmal, und das Rhomboid, dessen eine Seite alsdann auch nicht mehr in die Oberfläche fallen kann, eine zweimal gebrochene Gerade. Solche Fälle, in welchen überdies auch das Trägheitsmoment eine umständlichere Rechnung erheischen würde, sollen überhaupt in gegenwärtiger Untersuchung ausgeschlossen sein.

§ 3. Der Coefficient $\frac{1}{3}$ beim Trägheitsmoment des Rhomboids (Rechtecks), sowie $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{6}$ für's Dreieck im § 2, wenn man ihn nicht dogmatisch entlehnen will, wie z. B. der Leitfaden von Beetz-Henrici einige Trägheitsmomente anführt, könnte rückwärts aus der Methode von Violle erschlossen werden. Es wäre das freilich umständlich und man hat gewöhnlich im Physik-Unterrichte zu solchen Excursen keine Zeit. Pfaundler führt deshalb auch nur das Rechteck vor und beweist durch Heranziehung des Schwerpunktes eines rechtwinkligen Hilfsdreieckes mit der Kathete h, während die andere Kathete den Druck auf den tiefsten Streifen des Rechtecks vorstellt, die Tiefenlage $\frac{2}{3}h$ des Druckmittelpunktes.

Dieses letztgenannte Resultat als bekannt vorausgesetzt, könnte man für unsere vorwürfige Aufgabe noch von einer dritten Methode sprechen: die zweimalige Streifenschneidung, wie sie Ritter a. a. O. ebenfalls auf das erste und dritte der im § 2 benutzten Beispiele anwendet.

Das Rhomboid ah wird einerseits parallel zu seiner anderen Seite b in Streifen geschnitten, andererseits wieder (wie schon im § 2) parallel zu a. Das Dreieck (Seite a in der Wasserfläche, das dritte Beispiel im § 2) zerschneiden wir in Streifen parallel seiner Seite b und erhalten so die dazu gehörige Transversale, welche b im Verhältnisse $2:1$ der Theile von oben gegen unten theilt. Ebenso wird die Transversale zur Dreieckseite c hergestellt. Die beiden Transversalen schneiden sich im Druckmittelpunkte, dessen Tiefenlage $\frac{h}{2}$ dann leicht durch die zu a parallele Hilfslinie erwiesen wird.

Statt der zweiten Transversale konnte auch die im § 2 schon erwähnte Seitenhalbirende zu a benutzt werden.

§ 4. Wenn dagegen das Dreieck seine Spitze im Niveau und die Grundlinie a parallel demselben hat, so versagt die vorige Methode und Ritter wendet a. a. O. hierauf das Verfahren an, welches ich als Methode der Addition oder Subtraction bezeichnen will.*

Man kennt nämlich den Druckmittelpunkt A des zum genannten Dreieck gehörigen Rhomboids und denjenigen B des Ergänzungsdreieckes. Wo die Gerade AB die a halbirende Transversale des ersten Dreieckes schneidet, da ist sein Druckmittelpunkt C. In A ist der Druck $\frac{ah^2}{2}$, in B derjenige $\frac{ah^2}{6}$, in C also $\frac{ah^2}{3}$ vereinigt; die Tiefe von A ist $\frac{2}{3}h$, von B ist sie $\frac{1}{2}h$, also diejenige von C, einstweilen z_1 genannt, aus

* In den beiden Dreiecksaufgaben zeichnet Ritter je eine Figur für ein rechtwinkliges $\triangle$, was als unnöthige Beschränkung noch erwähnt sei.

$$\frac{a h^2}{2} \cdot \frac{2}{3} h = \frac{a h^2}{6} \cdot \frac{h}{2} + \frac{a h^2}{3} \cdot z_1$$

bestimmbar. Vergl. § 2.

Diese Methode ist von den Schwerpunkts-Bestimmungen her bekannt; z. B. für ein Trapezoid, dieses als Summe zweier Dreiecke betrachtet.

§ 5. Zum Schlusse führe ich noch an, dass Poisson in seinem Traité de méc. nur das Beispiel des Trapezes, dessen parallele Seiten horizontal liegen, durchführt, und zwar mit Integration. Dieses Beispiel passt insofern gut hierher, als es die obigen drei Fälle als einfache Specialitäten darbietet. Indem Poisson aber für die unter dem Winkel α zum Horizonte geneigte Ebene theils eine verticale, theils eine in der Ebene liegende Strecke einführt, wird die falsche Vorstellung erweckt und auch im Texte ausdrücklich bestärkt, als ob „die Lage des Druckmittelpunktes von der Neigung der Wand abhängig" wäre. Dasselbe kann man auch in Duhamels Lehrbuch der reinen Mechanik finden.

In meinem Taschenbuche der Festigkeitslehre (Anhang über flüssige Körper) habe ich in Kürze den Standpunkt des § 2 vertreten.

Augsburg. Prof. Kurz.

XVI. Eine Anwendung der Theorie des Tauschwerthes auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Als Nützlichkeitsgrad oder wirthschaftliche Intensität J eines Gutes, von dem eine Person die Menge M besitzen möge, wird die Nützlichkeit oder Werthschätzung bezeichnet, die der Besitzer einer Vermehrung des Gutes um dM beilegt. Erfahrungsmässig steht fest, dass J eine fallende Function von M ist. Die besondere Annahme, dass J umgekehrt proportional mit M, also $J = J_0 : M$, wo J_0 eine Constante, wird durch ihre Einfachheit nahe gelegt und lässt sich innerhalb mässiger Grenzen mit denselben Gründen stützen, wie das psychophysische Gesetz überhaupt. Diese Wahl für die Function J ergiebt als Gesammtnutzen N einer Vermehrung des Besitzes an dem in Rede stehenden Gute vom Betrage M_0 auf den Betrag $M_0 + M_1$ den Werth:

$$N = \int_{M_0}^{M_0+M_1} J . dM = J_0 . log \frac{M_0 + M_1}{M_0}.$$

Welchen Nützlichkeitsgrad J' der Besitzer des Gutes M einer nur wahrscheinlichen Vermehrung um dM beilegt, ist selbstverständlich rein subjectiv und hängt von seiner Neigung zum Gewinnspiel ab. Hält er sich aber an den aus dem Wahrscheinlichkeitsbegriffe folgenden objectiven Maassstab, so muss er

$$J' = w . J$$

schätzen, wenn w die Wahrscheinlichkeit einer Vermehrung um dM bedeutet. Man erhält in diesem Falle für den Gesammtnutzen N' einer mit der Wahrscheinlichkeit w eintretenden Vermehrung des Gutes M_0 um M_1 den Betrag

$$N' = J_0 . w . log \frac{M_0 + M_1}{M_0},$$

das ist die sogenannte **moralische Hoffnung** auf jenen wahrscheinlichen Gewinn.

Zu der anderen Abschätzung wahrscheinlicher Gewinne, der mathematischen Hoffnung, gelangt man durch die nahe liegende Vorstellung, dass ein Spielgewinn nicht als Vermehrung eines vorhandenen Gutes anzusehen sei, sondern als ein qualitativ neues Gut, das sich durch den Reiz des Spieles vom sicheren Besitze unterscheidet und gegen sicheren Besitz eingetauscht wird, wie andere Güter.

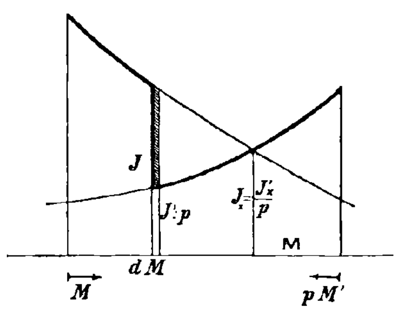
Erwirbt nun der Besitzer eines Gutes M (sicherer Besitz), dessen Nützlichkeitsgrad wieder durch eine fallende Function J von M dargestellt sei, für einen Theil M dieses Gutes zum Preise p ein anderes (blos wahrscheinlicher Besitz), von dem die Menge M' ihm nach seinem Ermessen den Nützlichkeitsgrad J' gewährt, so kann er seinen Gesammtnutzen bis zu einem Maximum erhöhen. Dass dies eintritt, wenn ein weiterer Austausch von dM gegen dM', der immer dem Preisverhältnisse gemäss die Gleichung

$$dM = p\,dM'$$

befriedigt, auch noch der Gleichung genügt:

$$J . dM = J' . dM',$$

geht aus dem Anblicke der Figur hervor. Es ist da auf die Nützlichkeitscurve des ersten Gutes rücklaufend ein Affinbild der zweiten gelegt, bei dem pM' als Abscisse und $J' : p$ als Ordinate benutzt wurden. Das Maximum tritt also bei Intensitäten J_x und J'_x ein, die der Gleichung



$$J_x = \frac{J'_x}{p}$$

entsprechen.

Die Abschätzung der Nützlichkeiten JJ' ist offenbar wieder subjectiv verschieden und ihr Verhältniss p hier nur dadurch beschränkt, dass sich mindestens ein zweiter Besitzer (Mitspieler) finden muss, der auf den Preis p eingeht. Beim Tausche sicheren Besitzes gegen blos wahrscheinlichen giebt es das oben schon benutzte objective Maass für den Nützlichkeitsgrad, das wenigstens in den Fällen berücksichtigt werden muss, in denen sich ein Besitzer (Bankhalter) geschäftsmässig anheischig macht, auf das Spiel einzugehen, so oft auch Nachfrage kommt. Bei solcher Werthschätzung wird

$$J' = wJ, \quad p = w, \quad dM = w \, . \, dM';$$

die von den beiden Gütern M und M' gegeneinander umgetauschten Mengen M und M' stehen also in der Beziehung

$$\mathsf{M} = w \, . \, M',$$

der Grundlage für die Bemessung der mathematischen Hoffnung.

Die beiden Arten, den ökonomischen Werth wahrscheinlicher Ereignisse zu bemessen, sind dadurch auf gemeinsamen Boden gestellt. Die eine ergiebt sich, wenn Gewinne und Verluste als Veränderungen sicheren Besitzes, die andere, wenn sie als Folgen eines im Austausch gegen sicheren Besitz erworbenen neuen Gutes, des Genusses am Spiel, angesehen werden.

Dresden. GEORG HELM.

XVII. Ueber einen zerfallenden quadratischen Strahlencomplex.*

Zwei räumliche Polarsysteme erzeugen bekanntlich im Allgemeinen einen quadratischen Strahlencomplex, den „Reye'schen Complex". Als Ordnungsflächen der Polarsysteme können zwei nicht singuläre Flächen zweiter Ordnung angenommen werden. Der Complex enthält jede Gerade, deren zwei Polaren sich schneiden. Jedem Punkte P' ist ein zweifach conjugirter Complexstrahl, nämlich die Schnittlinie der beiden Polarebenen von P' und ebenso jeder Ebene π' die Verbindungslinie ihrer beiden Pole als zweifach conjugirter Complexstrahl zugeordnet. Der Complex enthält im Allgemeinen höchstens vier Hauptpunkte, und ebenso viel Hauptebenen, ist also ein tetraëdraler. Er kann jedoch auch zerfallen und unendlich viele Hauptpunkte und Hauptebenen enthalten. Die Hauptpunkte bilden alsdann eine Punktreihe h und die ihnen zugeordneten Hauptebenen einen Ebenenbüschel h'. Der quadratische Complex zerfällt dadurch in die speciellen linearen Complexe h und h'. Dieser Fall tritt unter Anderem dann ein, wenn die Ordnungsflächen der beiden Polarsysteme Kugelflächen sind. Wir wollen diesen zerfallenden Strahlencomplex im Folgenden näher betrachten und voraussetzen, dass die Ordnungskugeln K und K_1 reell sind und nicht concentrisch liegen.

Die Räume Σ und Σ_1, welche durch die reciproke Beziehung zu Σ' collinear auf einander bezogen sind und mit Σ' die beiden Polarsysteme bilden, haben einen Ebenenbüschel und somit noch eine Punktreihe entsprechend gemein. Nämlich die Pole einer jeden durch die Mittelpunkte O und O_1 der Kugeln K und K_1 gehenden Ebene ε in Bezug auf diese Kugeln fallen zusammen mit dem unendlich fernen Punkte $E'\infty$, indem die auf ε in O und O_1 senkrecht stehenden (also parallelen) Geraden

---

* Vergl. Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl. II. Abth. S. 190 flg., III. Abth. S. 12 flg.

zusammentreffen. Die Ebenen des Büschels $\overline{OO_1}$, welche Gerade wir mit c bezeichnen wollen, sind also Hauptebenen des von den Polarsystemen erzeugten Strahlencomplexes Γ; ihre zugeordneten Hauptpunkte liegen auf der unendlich fernen Gerade $c'\infty$, die der Geraden c zugeordnet ist und dieselbe rechtwinklig kreuzt. Es ist zweckmässig, den Ebenenbüschel c als „Hauptebenenbüschel" und die Punktreihe $c'\infty$ als „Hauptpunktreihe" des Complexes Γ zu bezeichnen.

Die Schnittlinie zweier homologer Ebenen von Σ und Σ_1 gehen durch $c'\infty$ und die Verbindungslinie homologer Punkte schneiden die Gerade c. Der einem Punkte zweifach conjugirte Complexstrahl geht hiernach durch $c'\infty$ und der einer Ebene zweifach conjugirte Complexstrahl liegt in einer Ebene des Hauptebenenbüschels. Unter der Voraussetzung, dass sich die Kugeln K und K_1 nicht schneiden oder berühren, liegen auf c zwei reelle Hauptpunkte M' und N'; ihre beiden zugeordneten Hauptebenen μ resp. ν gehen durch die reellen oder imaginären Schnittkreise der gemeinsamen Tangentenkegel von K und K_1, schneiden also c rechtwinklig, und zwar geht μ durch N' und ν durch M'. Die Punkte M' und N' sind conjugirt hinsichtlich der Kugeln K und K_1.

Der Beweis ergiebt sich aus Folgendem: Dem Punkte P' von c sind auf dieser Geraden die Punkte P und P_1 hinsichtlich K und K_1 conjugirt und zwar liegen die Punkte P', P und P', P_1 involutorisch. Die Gerade c enthält also zwei involutorische Punktreihen und die Doppelelemente der einen involutorischen Punktreihe sind nicht durch die der anderen getrennt. Daher giebt es auf c zwei Elemente, welche sowohl in der einen als auch in der anderen Involution einander zugeordnet sind. Denken wir uns nun K und K_1 durch eine Ebene η des Hauptebenenbüschels geschnitten, so werden die gemeinsamen Tangentialkegel von K und K_1 durch η in einem Vierseit geschnitten, dessen Seiten Tangenten zu den Schnittkreisen k und k_1 von η mit K und K_1 sind. In dem uneigentlichen Dreieck nun, dessen Seiten durch die Gegenecken des Vierseits gehen, sind die Eckpunkte die Pole der gegenüber liegenden Seiten dieses Dreiecks, sowohl in Bezug auf k als auch k_1. Diese Eckpunkte sind zugleich Hauptpunkte des Complexes Γ. Der eine Hauptpunkt ist der Punkt, in dem η die Hauptpunktreihe $c'\infty$ trifft, die anderen sind die Punkte M' und N'; ihre zugeordnete Hauptebene μ und ν gehen durch N' resp. M' und stehen auf c senkrecht.

Ausser den genannten Hauptpunkten und Hauptebenen können keine weiteren in dem Complexe Γ vorkommen. Denn sei Q' irgend ein weiterer Hauptpunkt, so kann derselbe, wie leicht einzusehen ist, nicht auf c liegen; befände sich nun Q' ausserhalb c, so müsste die Ebene $Q'c'\infty$ eine sich selbst entsprechende Ebene der Räume Σ und Σ_1 sein. Die beiden collinearen Felder in $Q'c'\infty$ hätten dann ausser der Punktreihe $c'\infty$

und dem Schnittpunkte von $Q' c'\infty$ mit c noch den Punkt Q' entsprechend gemein und hätten somit alle ihre Elemente entsprechend gemein. Die Räume Σ und Σ_1 hätten dann perspectivische Lage, was nach unserer Voraussetzung nicht stattfinden kann. Die Annahme, dass ausser den genannten Hauptebenen keine weitere im Complexe Γ vorkommen kann, erledigt sich sofort dadurch, dass alsdann auch noch ausser den erwähnten ein weiterer Hauptpunkt existiren müsste, was nach dem soeben Bewiesenen ungereimt ist.

Haben also die Ordnungskugeln K und K_1 keinen Punkt mit einander gemein, so enthält c zwei reelle Hauptpunkte M' und N'. Berühren sich die Kugeln in T, so ist dieser Punkt ein Hauptpunkt und die gemeinsame Tangentialebene an beide Kugeln in T ist die zugeordnete Hauptebene. Schneiden sich K und K_1, so enthält c' überhaupt keine reellen Hauptpunkte.

Aus der reciproken Beziehung der Räume Σ und Σ_1 zu Σ' hat sich ergeben, dass Σ und Σ_1 den Ebenenbüschel c und die Punktreihe $c'\infty$ entsprechend gemein haben. Diejenigen homologen ebenen Felder von Σ und Σ_1, deren Träger durch $c'\infty$ gehen (also c rechtwinklig schneiden), sind also projectivisch ähnlich und haben perspectivische Lage. Da sich nun zwei Räume, deren homologe, unendlich ferne Punktreihen projectivisch gleich sind, in perspectivische Lage bringen lassen, so folgt, dass Σ zwei ebene Felder enthält, welche zu den entsprechenden in Σ_1 congruent sind; die Träger dieser Felder stehen auf c senkrecht. Ferner giebt es in Σ zwei Strahlenbündel, welche zu den homologen in Σ_1 projectivisch gleich sind; die Mittelpunkte dieser Bündel liegen auf c.

Zwei homologe Geraden m und m_1 von Σ resp. Σ_1, die weder zusammenfallen, noch durch einen Hauptpunkt des Complexes Γ hindurchgehen, noch in einer Hauptebene liegen, sind windschief zu einander. Denn schnitten sich m und m_1 im Punkte A, so müsste dem Punkte A von Σ (als Schnittpunkt von m mit der Ebene ε des Büschels c) derselbe Punkt in Σ_1 entsprechen; A müsste also ein Hauptpunkt sein, was nach Obigem nicht zulässig ist. Die Geraden m und m_1 gehören nicht dem Strahlencomplex Γ an.

Den Punkten einer Ebene σ sind in den Polarsystemen die Strahlenbündel S und S_1 zugeordnet. Die collinearen Bündel S und S_1 haben eine Ebene entsprechend gemein, sie erzeugen also eine Strahlencongruenz erster Ordnung und zweiter Classe, welche dem Complex Γ angehört. Die singulären Punkte dieser Congruenz liegen auf $c'\infty$ und einem durch sie hindurchgehenden Kegelschnitt ξ^1. Die durch einen beliebigen Punkt P gehenden Strahlen des Complexes bilden also zwei Strahlenbüschel erster Ordnung. Die Ebene des einen geht durch P und $c'\infty$, während die andere dem Hauptebenenbüschel angehört. Schneidet σ die Gerade c rechtwinklig, so liegen die Bündel S und S_1 perspectivisch und sind Scheine eines ebenen Feldes, dessen Träger c rechtwinklig schneidet, oder sie haben eventuell einen Strahlenbüschel entsprechend gemein, dessen Ebene durch einen Hauptpunkt von c hindurchgeht. Im Besonderen sind den Punkten der unendlich fernen Ebene die Ebenen der Bündel O und O_1 zugeordnet. Die Bündel O und O_1 sind projectivisch gleich und sind Scheine der unendlich fernen Ebene, indem je zwei homologe Ebenen derselben zu einander parallel laufen. Die unendlich ferne Ebene ist sich also selbst zugeordnet, desgleichen die Potenzebene der Kugeln K und K_1. Je zwei zugeordnete Ebenen des Ebenenbüschels $c'\infty$ haben involutorische Lage. Die Potenzebene und unendlich ferne Ebene sind die Doppelelemente des involutorischen Ebenenbüschels $c'\infty$. Sind die Ordnungskugeln K und K_1 einander gleich, so fallen die Pole der Potenzebene in Bezug auf K und K_1 zusammen mit den Mittelpunkten des anderen Paares projectivisch gleicher Strahlenbündel der Räume Σ und Σ_1.

Wenn ein Punkt eine Gerade a durchläuft, so beschreibt sein zweifach conjugirter Complexstrahl im Allgemeinen eine Regelschaar α'. Dieselbe geht durch alle Hauptpunkte des Complexes Γ. Die Regelschaar α' gehört daher einer Regelfläche an, welche $c'\infty$ enthält und somit ein hyperbolisches Paraboloid ist. Die unendlich ferne Gerade von α' ist dem unendlich fernen Punkte von a doppelt conjugirt.

Den Punkten einer Geraden l, welche in einer Ebene δ des Hauptebenenbüschels liegt und nicht etwa durch einen Hauptpunkt hindurchgeht, ist eine Cylinderfläche Λ' zugeordnet. Der Cylinder ist ein hyperbolischer, wenn l die Gerade c in einem eigentlichen Punkte schneidet, er ist ein parabolischer, wenn l zu c parallel läuft. Die sämmtlichen parabolischen Cylinder, welche den zu c parallel laufenden Geraden des Hauptebenenbüschels zugeordnet sind, haben die Gerade $c'\infty$ zum gemeinsamen Berührungsstrahle.

Die Ebene δ enthält zwei Polarsysteme, deren Ordnungscurven die Kreise k und k_1 sind, in denen die Kugeln K und K_1 von δ geschnitten werden. Den Punkten der Geraden l ist dann eine Curve zweiter Ordnung λ' in δ zugeordnet und zwischen den Punkten von l und λ' besteht eine involutorische Verwandtschaft des zweiten Grades. Die Curve λ' ist zugleich die Schnittcurve von Λ' und δ.

Wenn ein Punkt G eine Gerade g durchläuft, die durch einen Hauptpunkt Z' des Complexes Γ hindurchgeht, so beschreiben seine beiden Polarebenen zwei Ebenenbüschel. Dieselben haben die Hauptebene ζ entsprechend gemein, welche dem Hauptpunkt Z' zugeordnet ist, liegen also perspectivisch und erzeugen einen Strahlenbüschel erster Ordnung G', dessen Ebene γ_1 durch Z hindurchgeht und der dem Strahlencomplex Γ angehört. Geht g durch einen Punkt von $c'\infty$, so ist der ihren Punkten zugeordnete

Strahlenbüschel ein Parallel-Strahlenbüschel, da ihm $c'\infty$ angehört, und seine Ebene schneidet c rechtwinklig; dagegen ist der Geraden g, welche durch einen auf c gelegenen Hauptpunkt (M' oder N') geht, ein Strahlenbüschel zugeordnet, dessen Ebene auf g senkrecht steht.

Den Ebenen eines beliebigen Bündels S' sind in den beiden Polarsystemen zwei ebene Felder σ und σ_1 zugeordnet. Letztere haben einen Punkt $C\infty$ auf $c'\infty$ entsprechend gemein; sie erzeugen also eine dem Strahlencomplex Γ angehörige Strahlencongruenz erster Classe und zweiter Ordnung. Ihre singulären Ebenen bilden einen Ebenenbüschel zweiter und einen solchen erster Ordnung. Der Ebenenbüschel K_2 zweiter Ordnung wird erzeugt durch zwei in den Ebenen σ und σ_1 liegende projectivische Strahlenbüschel erster Ordnung, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Punkt $C\infty$ ist. Die Ebenen des Büschels K_2 hüllen also einen Cylinder ein. Der andere Ebenenbüschel (erster Ordnung) ist der Hauptebenenbüschel. Jede Gerade, in welcher die Ebenen der beiden Büschel zu zweien sich schneiden, gehört der Strahlencongruenz an. Die in einer Ebene liegenden Strahlen des Complexes bilden hiernach zwei Strahlenbüschel erster Ordnung.

Liegt der Mittelpunkt von S' auf c, so schneiden die Ebenen σ und $\sigma_1 c$ rechtwinklig und die in ihnen enthaltenen collinearen Felder haben perspectivische Lage.

Den Ebenen eines Büschels d ist im Allgemeinen eine Regelschaar δ' zugeordnet. Da die unendlich fernen Punkte der sie erzeugenden homologen Punktreihen von Σ und Σ_1 einander nicht entsprechen, so gehört δ' einem einschaligen Hyperboloid an. Liegt die Achse des Ebenenbüschels d in einer Hauptebene, so beschreibt der zweifach conjugirte Complexstrahl einen Strahlenbüschel erster Ordnung. Denn die beiden homologen Punktreihen, welche diesem Ebenenbüschel zugeordnet sind, haben einen Hauptpunkt entsprechend gemein, liegen also perspectivisch und erzeugen jenen Strahlenbüschel.

Jedem der Strahlenbündel O und O_1 sind zwei ebene Felder in den Polarsystemen zugeordnet, von denen das eine unendlich fern liegt. Nehmen wir an, dass die Ebene des letzteren $\varphi\infty$ dem Raume Σ angehört, so entspricht diesem die Fluchtebene φ_1 in Σ_1. Die Fluchtebene halbirt nun in jedem Raume die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Strahlenbündel, welchen im anderen Raume zwei projectivisch gleiche Strahlenbündel entsprechen. Hiernach lassen sich leicht aus der Lage der Kugeln K und K_1 die Fluchtebenen der Räume Σ und Σ_1, sowie die Mittelpunkte der beiden projectivisch gleichen Strahlenbüschelpaare von Σ und Σ_1 bestimmen, indem ja die Mittelpunkte des einen Paares mit den Mittelpunkten beider Kugeln zusammenfallen.

Sind K und K_1 einander gleich, so sind den Ebenen des Bündels, dessen Mittelpunkt $M\infty$ auf c unendlich fern liegt, Geraden zugeordnet, welche zu c parallel laufen. Denn die durch O und O_1 gehenden und auf c senkrecht stehenden Polarebenen des Punktes $M\infty$ enthalten zwei homologe congruente ebene Felder von Σ und Σ_1, die Verbindungslinien ihrer homologen Punkte müssen also zu c parallel sein. Die Ebenen des anderen Paares congruenter Felder sind Polarebenen des Punktes P^1, in dem die Potenzebene von K und K_1 die Gerade c schneidet. Die Verbindungslinien homologer Punkte A und A_1 dieser Felder gehen durch P^1 und es ist $P^1A = P^1A_1$. Berühren sich K und K_1 in T, so haben die congruenten Felder, welche dann in der Potenzebene liegen, involutorische Lage und die Verbindungslinie zweier homologer Punkte wird durch das Involutionscentrum T halbirt.

Markirch i. Elsass. Dr. KILBINGER.

XVIII. Ersatz des Pascal'schen Satzes für den Fall imaginärer Punkte.

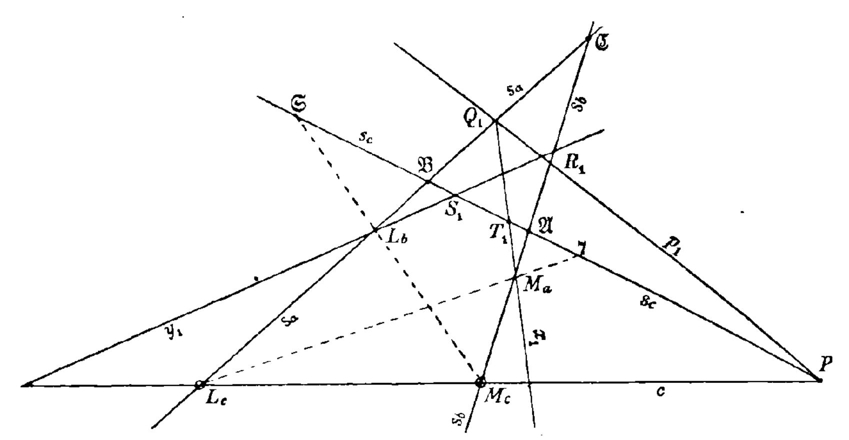
Der Pascal'sche Satz ist die lineare Bedingung dafür, dass sechs reelle Punkte auf einem Kegelschnitte liegen. Für den Fall, dass die sechs Punkte aus drei Paaren von conjugirt imaginären bestehen, $AA'BB'CC'$, lassen sich dieselben auf vier Arten so zu einem Sechseck-sechsseit verbinden, dass die gegenüber liegenden Seiten conjugirt imaginär sind, sich also in reellen Punkten schneiden. Es sind, wenn die Ecken in der Schriftfolge mit einander verbunden werden, die vier Sechseck-sechsseite

$$ABCA'B'C',\quad ACBA'C'B',$$
$$AB'CA'BC',\quad ABC'A'B'C.$$

Die vier reellen Pascal'schen Linien dieser Sechsecke enthalten je drei der sechs reellen Schnittpunkte gegenüber liegender conjugirt imaginärer Seiten, diese Punkte sind daher die sechs Ecken eines Vierseits. — Für den Fall, dass fünf reelle Punkte gegeben sind, giebt der Pascal'sche Satz zugleich die Mittel an, auf einer Geraden durch einen der fünf Punkte einen sechsten Punkt der Curve zu finden. Sind drei Paare conjugirt imaginärer Punkte gegeben, die die Pascal'sche Bedingung befriedigen, so kann man einen weiteren reellen Punkt linear nicht construiren, denn der Schnitt jeder reellen Geraden giebt zwei Punkte, deren Auffindung eine Aufgabe zweiter Ordnung ist.

Sind sechs Punkte gegeben, von denen nur ein oder zwei Paare conjugirt imaginäre sind, so hat die Pascal'sche Bedingung keinen Sinn. Es tritt dann eine andere, nahe ebenso einfache Bedingung ein. — Die sechs Punkte $AA'BB'CC'$ mögen auf den Geradenpaaren $s_a s_b s_c$ liegen, die das Dreieck $\mathfrak{ABC}$ bilden. Die Paare $AA'BB'CC'$ bestimmen auf s_a, s_b, s_c Involutionen, deren reale oder ideale Doppelpunkte sie sind.

Dem Punkte $\mathfrak{C}$ sei auf s_a der Punkt L_c, auf s_b der Punkt M_c in den Involutionen $s_a s_b$ gepaart. Die Verbindungslinie c von L_c und M_c ist die Polare von $\mathfrak{C}$. — Dem Punkte $\mathfrak{A}$ sei auf s_b der Punkt M_a, auf s_c der Punkt N_a, dem Punkte $\mathfrak{B}$ sei L_b auf s_a, N_b auf s_c gepaart, a oder $M_a N_a$ ist die Polare von $\mathfrak{A}$, b oder $L_b N_b$ ist die Polare von $\mathfrak{B}$. Die von der Realität unabhängige lineare Bedingung, dass die sechs Punkte $AA'BB'CC'$ auf einer Curve zweiter Ordnung liegen, ist die, dass die Dreiecke $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und abc perspective Lage haben, das heisst, dass die Geraden $\mathfrak{A}$, (bc); $\mathfrak{B}$, (ca); $\mathfrak{C}$, (ab) durch einen Punkt gehen, oder was dasselbe ist, dass die Schnittpunkte s_a, a; s_b, b; s_c, c in einer Geraden liegen. Dieser bekannte Satz lässt sich, was nicht bekannt zu sein scheint,



ebenso wie der Pascal'sche benutzen, den zweiten Schnittpunkt einer durch den reellen Punkt C gehenden Geraden s_c mit dem Kegelschnitt K zu construiren, der durch vier gleichviel ob reelle oder conjugirt imaginäre Punkte $AA'BB'$ und den reellen Punkt C bestimmmt ist. Durch den Punkt P, in dem sich c und s_c schneiden, legen wir gerade Linien $p_1 p_2 p_3 \ldots$ die s_a in $Q_1 Q_2 Q_3 \ldots$, s_b in $R_1 R_2 R_3 \ldots$ treffen. Die Geraden $M_a(Q_1 Q_2 Q_3 \ldots)$ oder $x_1 x_2 x_3 \ldots$ und L_b $(R_1 R_2 R_3 \ldots)$ oder $y_1 y_2 y_3 \ldots$ sind projectiv, als auch die Punktreihen $T_1 T_2 T_3 \ldots$, $S_1 S_2 S_3 \ldots$, in denen diese Linien s_c treffen. Die Dreiecke $x_1 y_1 c$, $x_2 y_2 c$, $x_3 y_3 c, \ldots$ sind $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ perspectiv, weil ihre Seiten sich in Punkten einer Geraden p der Reihe $p_1 p_2 p_3 \ldots$ schneiden. Es ist dasjenige auszuwählen, dessen Seiten $xy\, s_c$ in Punkten TS treffen, für die $CC.\mathfrak{A}T.\mathfrak{B}S$ eine Involution ist. K geht dann durch den zweiten Doppelpunkt C' dieser Involution.

Wir bilden die Involutionen aus je sechs Punkten (von denen C als Doppelpunkt zweimal gezählt ist):

$$CC.\mathfrak{A}T_1.\mathfrak{B}W_1, \quad CC.\mathfrak{A}T_2.\mathfrak{B}W_2, \quad CC.\mathfrak{A}T_3.\mathfrak{B}W_3, \ldots$$

so sind, wie leicht auf projectivem Wege bewiesen wird, $T_1 T_2 T_3 \ldots$, $W_1 W_2 W_3 \ldots$ projective Punktreihen, also ist auch $S_1 S_2 S_3 \ldots \barwedge W_1 W_2 W_3 \ldots$

Fällt T (ein Punkt der Reihe $T_1 T_2 \ldots$) auf $\mathfrak{B}$, so fällt W (der entsprechende Punkt der Reihe $W_1 W_2 \ldots$) auf $\mathfrak{A}$, fällt p auf s_c, so fällt R auf $\mathfrak{A}$, Q auf $\mathfrak{B}$, T auf $\mathfrak{B}$, S auf $\mathfrak{A}$. In der Projectivität $S_1 S_2 S_3 \ldots \barwedge W_1 W_2 W_3 \ldots$ ist demnach $\mathfrak{A}$ ein sich selbst entsprechender Punkt. Der zweite, sich selbst entsprechende, linear construirbare Punkt werde mit N_b bezeichnet, ihm entspreche in der Reihe der T der Punkt N_a. Nach ihrer Construction sind die Punkte $CC.\mathfrak{A}N_a.\mathfrak{B}N_b$ in Involution, und das Dreieck $a(M_a N_a)$, $b(L_b N_b)$, c ist dem Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ perspectiv, die Curve K geht auch durch den zweiten Doppelpunkt C' der Involution $CC.\mathfrak{A}N_a.\mathfrak{B}N_b$ auf s_c und dieser wird in bekannter Weise linear gefunden.

Von den Linien $p_1 p_2 \ldots$ braucht keine gezeichnet zu werden, denn geht p durch $\mathfrak{C}$, so fällt T auf $\mathfrak{A}$, S auf $\mathfrak{B}$, fällt p auf s_c, so fällt T auf $\mathfrak{B}$, S auf $\mathfrak{A}$, die Reihen $S_1 S_2 S_3 \ldots$, $T_1 T_2 T_3 \ldots$ bilden eine Involution in der $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ein Paar ist. Ein zweites Paar erhält man, wenn man p auf c fallen lässt, und es bilden die Punkte $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ ein zweites Paar der Involution, womit diese gegeben ist.

Jena. J. Thomae.

XIX. Ein stereometrisches Analogon zum Pythagoreischen Lehrsatz.

Begrenzt man eine dreiseitige von lauter rechten Winkeln gebildete körperliche Ecke durch eine vierte Ebene, so ist in dem entstehenden rechtwinkligen Tetraeder die Summe der Quadrate der drei Kathetenflächen gleich dem Quadrat der Hypotenusenfläche:

$$(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = H^2).$$

Beweis: Bezeichnet man die Kanten des Tetraeders, welche den rechten Winkeln anliegen, mit a, b, c, so sind die übrigen Kanten

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad e = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad f = \sqrt{c^2 + a^2};$$

ferner sind die Kathetenflächen als Dreiecke:

$$K_1 = \frac{1}{2} ab; \quad K_2 = \frac{1}{2} bc; \quad K_3 = \frac{1}{2} ca,$$

also:

$$K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = \frac{1}{4}(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2).$$

Es ist aber die Hypotenusenfläche

$$H = \frac{1}{4}\sqrt{(d+e+f)(d+e-f)(d-e+f)(-d+e+f)},$$

folglich:

$$H^2 = \frac{1}{16}(d+e+f)(d+e-f)(d-e+f)(-d+e+f)$$
$$= \frac{1}{16}[(d+e)^2 - f^2][f^2 - (d-e)^2]$$
$$= \frac{1}{16}[(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2})^2 - c^2 - a^2][c^2 + a^2 - (\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{b^2+c^2})^2]$$
$$= \frac{1}{4}(\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2} + b^2)(\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2} - b^2)$$
$$= \frac{1}{4}[(a^2+b^2)(b^2+c^2) - b^4]$$
$$= \frac{1}{4}(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2);$$

mithin:
$$K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = H^2.$$

Sorau. Dr. O. Beau.

Historisch-literarische Abtheilung.

Der V. Band des Katalogs der arabischen Bücher der viceköniglichen Bibliothek in Kairo.

Aus dem Arabischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen

von

Dr. Heinrich Suter,
Professor am Gymnasium zu Zürich.

Vorwort.

In den letzten acht Jahren erschienen in Kairo nach einander sechs Bände des Katalogs der arabischen Drucke und Handschriften der viceköniglichen Bibliothek daselbst (Fihrist al-kutub al-ʿarabijja), herausgegeben von K. Vollers, Muḥammed al-Biblâwî und Andern. Der V. Band enthält: Geschichte und Geographie, mathematische Wissenschaften, Astronomie, Geheimwissenschaften (Astrologie, Magie etc.), Physik und Chemie. Sämmtliche Abtheilungen dieses Bandes, mit Ausnahme der Geschichte und Geographie, wurden speciell bearbeitet von Ibrâhîm Efendî ʿIṣmat, einem früheren Bibliothekar, vor der Drucklegung aber nochmals durchgesehen und verbessert von Schaich Aḥmed ad-Dairûṭî, unter Mithilfe von Schaich ʿAbderraḥmân as-Sajjid.

Ich hielt nun eine Uebersetzung und Veröffentlichung des mathematischen und astronomischen Theiles dieses Kataloges für im Interesse der Geschichte dieser Wissenschaften liegend, und ich hoffe, die Vertreter dieser Disciplin werden hierin mit mir übereinstimmen. Allerdings sind die neueren Werke für die Geschichte der Wissenschaft von geringem oder keinem Belang, aber auch diese haben für Manchen doch ein gewisses, ich möchte sagen kulturhistorisches Interesse, und ich glaubte daher, diese kleinere mathematische Abtheilung vollständig wiedergeben zu müssen; für die grössere astronomische wäre vielleicht eine Auslese angezeigt.

Was nun das Formelle meiner Uebersetzung anbetrifft, so habe ich den Leser auf folgende Punkte aufmerksam zu machen:

In der Transscription befolge ich das in meiner im Supplementhefte des Jahrganges 1892 dieser Zeitschrift (auch als Abhandlung zur Geschichte der Mathematik VI) erschienenen Uebersetzung des Fihrist angewandte System. Man möge mich nicht der Inconsequenz zeihen, wenn ich, der ich das kurze a fast immer durch a statt durch e wiedergebe und also den Artikel immer al nicht el schreibe, dann doch ed-Dîn statt ad-Dîn, 'Abderraḥmân statt 'Abdarraḥmân, ferner Bekr, Aḥmed, Muḥammed etc. schreibe: diese Wörter kommen eben so häufig und immer mit e, nie mit a geschrieben vor, dass man sich an jene Schreib- und Sprechweise ganz gewöhnt hat. — Das Hamza (') lasse ich überall weg; so schreibe ich al-Hâim, nicht al-Hâ'im etc. — Es giebt Wörter, in denen das „dsch" verdoppelt vorkommt; da habe ich, um nicht das uns sehr seltsam erscheinende „dschdsch" schreiben zu müssen, das arabische Verdoppelungszeichen, Teschdîd (ـّ) über das „dsch" gesetzt. (In anderen Werken findet man diesen Buchstaben mit ǵ transscribirt, die Aegypter sprechen ihn in der That auch g, die Syrer und Perser dsch.)

Weil der Katalog in jeder Unterabtheilung nach den Büchertiteln alphabetisch geordnet ist, so habe ich die Stichworte des Titels zuerst arabisch (in Transscription), und nachher in Uebersetzung (in Klammern) wiedergegeben.

Die Titel sind sehr oft, wie es die Phantasie des Orientalen liebt, in blumen- und bilderreicher Sprache ausgedrückt und geben kaum einen Begriff vom Inhalte der Schrift, der dann aber meistens noch näher präcisirt ist. (Ueber Bilder und Wortspiele in den Titeln und Eingangsformeln vergl. Anmerkungen 31, 70, 72, 75, 82, 88.) Nesselmann sagt in seiner Uebersetzung der „Essenz der Rechenkunst" des Behâ ed-Dîn Seite 68 mit Recht: „Den Titel eines arabischen Buches zu übersetzen, wenn man den Inhalt nicht kennt, hat immer etwas Missliches." Diese Worte beruhigen mich, wenn gewiegte Orientalisten hier und da meine Titel und Bücheranfänge anders übersetzen wollten. — Auch Eigennamen, besonders von Orten hergeleitete Zunamen, sind vielleicht hier und da nicht richtig vocalisirt.

Bei den Jahreszahlen giebt die erste Zahl das muḥammedanische, die zweite das christliche Jahr an; Monats- und Tagesangaben habe ich nicht in die christliche Zeitrechnung übertragen, es bleibt dies jeweilen dem Leser überlassen. Die Uebertragung einer Jahreszahl wurde unterlassen, wenn diese unmittelbar oder kurz vorher vorgekommen ist.

Wo nichts über Druck, Druckort etc. angegeben ist, handelt es sich um ein Manuscript.

Alle Bände der Bibliothek sind fortlaufend, aber auch die Bücher jeder Abtheilung wieder besonders numerirt; so bedeutet also am Schlusse jedes Artikels A.-N. = Abtheilungs-Nummer, H.-N. = Haupt-Nummer.

Was in eckigen Klammern steht, ist auch im gedruckten Kataloge in Klammern gesetzt; was in runden Klammern steht, ist von mir zur näheren Erläuterung hinzugefügt.

Werke (Abhandlungen), deren Titel blos angeführt und dabei auf einen später folgenden Sammelband verwiesen ist, lasse ich der Kürze halber das erste Mal weg.

Zum Schlusse fühle ich mich verpflichtet, Herrn Sprachlehrer Karl Haggenmacher in Zürich meinen verbindlichsten Dank auszusprechen für die Hilfe, die er mir, namentlich bei der Uebertragung modern-arabischer Ausdrücke (wie Eigennamen, geographische Namen, technische Begriffe etc.), geleistet hat; er ist dazu durch einen langjährigen Aufenthalt in Kairo in vorzüglicher Weise befähigt.

In den Anmerkungen habe ich mich folgender Abkürzungen bedient: Cantor I. = Vorlesungen über Geschichte der Mathematik von M. Cantor I. Bd. Dorn = Drei in der kaiserl. Bibliothek zu St. Petersburg befindliche astronomische Instrumente etc. von B. Dorn (Mém. de l'acad. imp. de St. Pétersbg. Tome IX. Nr. 1). H. Ch. = Lexicon bibl. et encycl. a Ḥâdschî Chalfa compos. Edid. et lat. vert. G. Flügel. Leipzig, 1835—58. Suter, Fihrist = Das Mathematiker-Verzeichniss im Fihrist des Ibn Abî Ja'ḳûb an-Nadîm, übersetzt von H. Suter. (Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Heft VI.)

Zürich, im October 1892. HCH. SUTER.

Abtheilung: Mathematische Wissenschaften.

1. Rechenkunst.

ا (Alif).

Ibâḥat al-bâḥa (Erschliessung der Meerestiefe*): über Rechenkunst und Messkunde. Es ist dies der Commentar des **Ibrâhîm ben 'Omar ben Ḥasan ar-Ribâṭ al-Bikâ'î**, des Schâfiten[1] [gest. 885, 1480/81] zu dem Gedicht[2], betitelt **al-bâḥa**, über die Rechenkunst und die Messkunde. Anfang des Commentars: Lob sei Gott, der alle Dinge nach der Zahl geordnet hat. Anfang des Gedichtes: Lob sei Gott, dem hochgeschätzten, dem einzigen. Der Commentar wurde beendigt im Rabî' II. 836, 1432. Ein Band in älterer[3] Schrift. A.-N. 3. H.-N. 4764.

Irschâd aṭ-ṭullâb (Anleitung für die Studirenden) zum richtigen Weg in der Rechenkunst. Es ist dies der Commentar des **Muḥammed ben Muḥammed al-Ġazâl ad-Dimischḳî**, bekannt unter dem Namen **Sibṭ al-Mâridînî**[4] [geb. am 4. Ḏû'l-Ḳa'da 826, 1423] zu dem Buche, betitelt **al-wasîla** (Weg, Mittel) des **Schihâb ed-Dîn Ahmed ben Muḥammed**, bekannt unter dem Namen **Ibn al-Hâim** [geb. in Kairo 753, 1352, gest. in Jerusalem, im Dschumâdâ II. 815, 1412]. Anfang des Commentars: Lob sei Gott, dem Erleichterer des Rechnens und der (übrigen) Schwierigkeiten. Er wurde vollendet am 8. Rabî' I. 902, 1496. Ein Band in

* bâḥa kann auch übersetzt werden mit „Hof", „Vorhalle".

älterer Schrift, von der Hand des Aḥmed ben Jûnis asch-Schalabî, des Ḥanefiten, der mit der Abschrift am 11. Ṣafar 903, 1497 fertig wurde, in der Schule der Scherîfe (Vornehmen). — Mit Randnoten. Am Schlusse eine Erlaubniss von der Hand des Verfassers für diesen Abschreiber, geschrieben am 16. Dschumâdâ I. 903. A.-N. 2. H.-N. 4763. [Vergl. auch Sammelband A.-N. 181.]

Ein zweites Exemplar dieses Werkes; am Anfang schadhaft; in älterer Schrift, von der Hand des Kamâl ed-Dîn ben Scharaf ed-Dîn ad-Darûrî, des Schâfiten. A.-N. 101. H.-N. 17975.

Al-is'âf al-atamm (die vollkommenste Hilfe) in der schönsten Wissenschaft und im Rechnen mit der Feder[5] (schriftlich), von **Schaich 'Otmân ben 'Alâ ed-Dîn ben Jûnis ben Muḥammed**, bekannt unter dem Namen **Ibn al-Malik ad-Dimischḳî**. Anfang: Wahrlich das Erhabenste, was die Gedanken gewähren etc. Er beendigte es am 1. Radschab 1002, 1594. Ein Band in älterer Schrift, von der Hand des 'Alî ben Sâlim ad-Damâṭî al-Mâlikî[6], der mit der Abschrift am 20. Muḥarram 1148, 1735 zu Ende kam. A.-N. 182. H.-N. 24479.

Ifâdat al-aḏhân (die Ausbreitung oder Ausgiessung des Geistes) in den (geistigen) Uebungen der Knaben, aus dem Französischen in's Arabische übersetzt von **Muḥammed Efendî asch-Schîmî** [aus dem 13. Jahrh. d. H.]. Er theilte es in zwei Abschnitte: der erste handelt über das Rechnen, der zweite über die Geometrie. Ein Band, gedruckt in Bûlâḳ 1259, 1843. Am Ende ein alphabetisches Register, Schlussbetrachtungen und zwei Figurentafeln. A.-N. 6. H.-N. 4767.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes: am Anfang ein Inhaltsverzeichniss. A.-N. 139. H.-N. 22545.

Ein drittes Exemplar: A.-N. 140. H.-N. 22546.

Inkischâf al-dschilbâb (das Aufheben des Schleiers) von dem Kanon des Rechnens: das ist ein Commentar zum Kanon des Rechnens, beide (Kanon und Commentar) von **'Alî ben Muḥammed ben Muḥammed ben 'Alî al-Ḳalṣâdî**[7], dem Ḳuraschiten (Koreischiten) [gest. 891, 1486]. Anfang des Commentars: Lob sei Gott, dem Oeffner der Himmelspforten. Er wurde beendigt am 14. Ḏû'l-Ḳa'da 849, 1446 in der Stadt Tunis. Ein Band in älterer Schrift, von der Hand des 'Alî ben Muḥammed ben Muḥammed al-Busṭî, abgeschrieben vom Exemplar des Verfassers. Am Ende Rechnungsaufgaben. A.-N. 2. H.-N. 7808.

Al-îdâḥ wa't-tibjân (die deutliche Auseinandersetzung und Erklärung) über die Kenntniss des Maasses und Gewichtes (eigentlich der Wage), von dem **Schaich Abû'l-'Abbâs Nadschm ed-Dîn Aḥmed ben Muḥammed ben 'Alî ben ar-Rif'a**, dem Schâfiten [geb. in Kairo 645, 1247/48, gest. daselbst Freitag Nachts am 18. Radschab 710, 1310]. Schluss des Werkes in der 20. Nacht des Ṣafar 703, 1303. Anfang: Lob sei Gott für seine immerwährende Güte. Ein Band in älterer Schrift, von der Hand des Sajjid Chalîl

Maḥmûd Ḥazzat al-Kamâlî ibn as-Sajjid Muṣṭafâ Katchudâ asch-Schâmî, beendigt in einem Seitengässchen der Strasse al-Ḥimâm, am Donnerstag, den 7. Muḥarram 1256, 1840. A.-N. 4. H.-N. 4765.

Îḍâḥ al-dschawâb (deutliche Auseinandersetzung der Antworten) über die Verbesserung des Rechnens, verfasst von **Jûḥannâ ben Anton Masarra al-Ḥalebî** (von Aleppo) **al-Miṣrî**[8]. Ein Band, lithographirt in Kairo 1857 p. Ch. Am Ende ist hinzugefügt: die wahrhaftige Verbesserung zum allgemeinen Nutzen. A.-N. 5. H.-N. 4766.

Îḍâḥ al-muktatam (deutliche Auseinandersetzung des Verborgenen) im Zifferrechnen, von **Muḥammed ben 'Alî ben Muḥammed ben 'Alî asch-Schabrâmlasî (?) al-Mâlikî** [lebte um's Jahr 1021, 1612]. Anfang: Lob sei Gott, der das Rechnen vollkommen gemacht hat. Ein Band in älterer Schrift. Am Ende schadhaft, ohne Tafeln. A.-N. 3. H.-N. 7809.

ب (Bâ).

Biġjat ar-râġib (Wunsch des Begehrenden), das ist der Commentar des Schaich **'Abdallâh ben Muḥammed asch-Schanschûrî al-Faraḍî**, des Schâfiten, des Predigers in der Moschee al-azhar[9] [gest. 999, 1590/91] zu: „Richtige Leitung des Studirenden zu den höchsten Studien (Zielen)", von **Abû'l-'Abbâs Aḥmed ben Muḥammed ben 'Imâd ben 'Alî**, dem Schâfiten, bekannt unter dem Namen **Ibn al-Hâim**[10] [geb. in Kairo 753, 1352, oder 756, 1355, gest. in Jerusalem 815, 1412]. Anfang des Commentars: Lob sei Gott, sein Lob ist gerecht (oder Pflicht). Er beendigte ihn am 14. Ḏû'l-Ḥidscha 995, 1587. Zwei Theile in einem Band, in älterer Schrift, von der Hand des Sulaimân al-Wâtî al-Mâlikî. Schluss der Abschrift Sonntags, den 1. Schawwâl 1098, 1687. Wurmstichig von der Mitte an. A.-N. 12. H. N. 4773.*

Ein zweites Exemplar in einem Band, in älterer Schrift, von der Hand des 'Alî asch-Scharnûbî al-Mudschâhidî, beendigt im Ḏû'l-Ḥidscha 997, 1589. Wurmstichig von der Mitte an. A.-N. 13. H.-N. 4774.

Ein drittes Exemplar in einem Band, in älterer Schrift, von der Hand des Jûsuf ben Dschimâl ed-Dîn Abî Zaid al-Azharî, beendigt am 28. Radschab 1105, 1694. Defect von Anfang an. A.-N. 5. H.-N. 7811.

Biġjat aṭ-ṭullâb (Wunsch der Studirenden), das ist der Commentar des **Muḥammed ben Aḥmed ben Muḥammed ben Muḥammed ben 'Alî ben Ġâzî al-'Oṯmânî** [eines der Gelehrten des 9. Jahrh. d. H.] zu seinem Gedicht (Perlenschnur), genannt „Wunsch des Rechners". Anfang des Commentars: Lob sei Gott, der alle Dinge weiss. Anfang des Gedichtes: Es spricht der, welcher hofft auf Verzeihung und auf Erfolg. Der Com-

* Im Text steht 4737, es muss aber, nach der H.-N. des folgenden Werkes zu schliessen, wohl 4773 heissen.

mentar wurde beendigt in Fâs (Fez) am Donnerstag, den 24. Ramaḍân 895, 1490. Ein Band in marokkanischer Schrift, von der Hand des Aḥmed ben Muḥammed ben ʻAlî, der die Abschrift in Fez beendigt hat. A.-N. 4. H.-N. 7810.

ت (Tâ).

Tuḥfat al-aḥbâb (das Geschenk der Freunde)[11]: über die Rechenkunst, von **Muḥammed ben Muḥammed ben Aḥmed ben Muḥammed al-Ġazâl ad-Dimischḳî**, bekannt unter dem Namen **Sibṭ al-Mâridînî** [geb. im Ḏû'l-Ḳaʻda 826, 1423]. Ein Band in älterer Schrift, von der Hand des ʻOmar ben al-Ḥâdsch Manṣûr, des Schâfiten, beendigt am Freitag, den 7. Radschab 1122, 1710. A.-N. 17. H.-N. 4778. [Vergl. auch Scharḥ (Commentar) des Schanschûrî.]

Ein zweites Exemplar in älterer Schrift, von der Hand des Saʻd as-Suṭûḥî al-Baisûsî(?), des Schâfiten, beendigt am Freitag, den 4. Dschumâdâ I. 1182, 1768. A.-N. 7. H.-N. 7813.

Talchîṣ aʻmâl al-ḥisâb (kurze Darstellung der Rechnungsoperationen)[12] von **Abû'l-ʻAbbâs Aḥmed ben Muḥammed ben ʻOṯmân al-Azdî**, bekannt unter dem Namen **Ibn al-Bannâ** [geb. in Marokko im Ḏû'l-Ḥidscha 656, 1258, gest. am Abend des Sabbat, den 5. Radschab 721, 1321, begraben in Aġmât, in der Nähe von Marokko]. Anfang: Der Zweck dieses Buches, des Talchîṣ der Rechnungsoperationen... Er theilte es in zwei Abschnitte: der erste handelt über die bekannte (gegebene) Zahl, der zweite über die Regeln, mit Hilfe deren man zur Auffindung der Unbekannten gelangt. Ein Band in älterer Schrift; am Ende ein Vers (Gedicht) über die Logik (Beredtsamkeit) in persischer Sprache. A.-N. 16. H.-N. 4777.

ث (Ṯâ).

Ṯamarat al iktisâb (die Frucht des Gewinnes): über die Rechenkunst, aus dem Französischen in's Arabische übersetzt von **Muḥammed**, genannt **Bujûmî Efendî** [aus dem 13. Jahrh. d. H.]. Zwei Theile in einem Band, gedruckt in Bûlâḳ 1263, 1847. A.-N. 27. H.-N. 4788.

Der erste Theil desselben Buches: A.-N. 28. H.-N. 4789.

ج (Dschîm).

Der erste Theil (Kapitel) des **Dschawâmiʻ al-ʻilm ar-rijâḍî** (die Gesammtheit des mathematischen Wissens): er handelt über die Arithmetik oder die Elemente der Rechenkunst, und wurde in's Arabische übersetzt von dem Schotten **Doktor Tytler**, aus dem englischen Buche des Mathematikers **Hutton.** Gedruckt zu Kalkutta im November 1835, entsprechend dem Radschab 1251. A.-N. 33. H.-N. 4794.

ح (Ḥâ).

Ḥâschija (Anhang, Zugabe) des hochgelehrten **Muḥammed ben Muḥammed ben Abî Bekr al-Azharî**, des Schâfiten, genannt nach seinem Vater **al-Bilbîsî**, zur **Ma'ûne** (Beistand) des **Abû'l-'Abbâs Aḥmed ben Muḥammed**, bekannt unter dem Namen **Ibn al-Hâim** [gest. 815, 1412]. Anfang des Anhangs: Lob sei Gott, dem Führer zum richtigen Ziel. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 11. H.-N. 4772.

Ḥall al-chulâṣa (Auflösung der Essenz) für die Regierungsbeamten: das ist der Commentar des **Ramaḍân ben Abî Harîra al-Dschazarî al-Ḳâdirî** [eines der Gelehrten des 11. Jahrh. d. H.] zur **chulâṣat al-ḥisâb** (Essenz der Rechenkunst) des **Behâ ed-Dîn Muḥammed ben Ḥusain al-'Âmulî.** Anfang: Wir loben Dich, dessen Wohlthaten unzählbar sind. Abgeschlossen am Sonntag Morgen, den letzten Dschumâdâ I. 1092, 1681. Ein Band in älterer Schrift, abgeschrieben vom Exemplar des Verfassers, von der Hand des Sajjid Muḥammed as-Sakûtî, beendigt am 1. Ṣafar 1116, 1704. A.-N. 9. H.-N. 7815.

خ (Châ).

Chulâṣat al-ḥisâb (Essenz der Rechenkunst) von **Behâ ed-Dîn Muḥammed ben Ḥusain al-Ḥâriṯî al-'Âmulî al-Hamadânî** [geb. in Ba'albek am Mittwoch Abend, den 17. Ḏû'l-Ḥidscha 953, 1547, gest. in Iṣpahân am 12. Schawwâl 1031, 1622]. Anfang: Wir loben Dich, dessen Wohlthaten keine Zahl umfassen kann. Ein Band lithographirt in der Druckerei Kâstân in Kaschmîr, 1285, 1868/69. Viele Randnoten, am Ende Figuren. A.-N. 43. H.-N. 4804.

Ein zweites Exemplar in älterer Schrift, mit Randnoten. A.-N. 44. H.-N. 4805.

Ein drittes Exemplar, lithographirt in der Druckerei des Muḥammed Abû Zaid in Kairo, 1299, 1881/82. Mit Randnoten. A.-N. 108. H.-N. 18593.

Sechs weitere solche Exemplare mit den A.-Nn. 109—111 und 113 bis 115, und den H.-Nn. 18594—18596 und 20576—20578.

Ein zehntes Exemplar, lithographirt in der Druckerei aṭ-Ṭûchî in Kairo 1299. Ohne Randnoten. A.-N. 116. H.-N. 20579.

Zwei weitere solche Exemplare mit den A.-N. 117 und 118, und den H.-N. 20580 und 20581.

Al-chulâṣa al-'izijja (die 'izische Essenz): Bearbeitung (geordnete Darstellung) der Elemente der Rechenkunst, von **'Alî Efendî 'Izat**, vormals Lehrer der mathematischen und physikalischen Wissenschaften an der vicekönigliche polytechnischen Schule [gest. am Sabbat, den 6. Dschumâdâ II 1289, 1872]. Zwei Theile in einem Band, gedruckt in Bûlâḳ 1285, 1868/69. A.-N. 41. H.-N. 4802.

Ein zweites Exemplar: A.-N. 42. H.-N. 4803.

د (Dâl).

Ad-durr al-mantûr (die ausgestreuten Perlen): über die Operationen mit Brüchen, von **Mahmûd Efendî Munadschî**, vormals Lehrer der Mathematik an der polytechnischen Schule [gest. am Dienstag, den 4. Rabî' II. 1297, 1880]. Anfang: Lob sei Gott, der das Einzelne und das Ganze kennt; ich werde die Operationen mit gemeinen und decimalen Brüchen nach der koptischen (ägyptischen) und verwandten Methoden auseinandersetzen. — Ein Band, lithographirt in der Druckerei der Staatsschulen, 1287, 1870/71. A.-N. 93. H.-N. 16281.

Ad-durar al-bahijja (die glänzenden Perlen) in der Auflösung (Erklärung) der Worte der Sachâwijja: es ist dies der Commentar des **Schaich Muhammed Abû Schuhba al-Munfalûtî asch-Schâdilî al-Azharî**, des Schâfiten [eines der Gelehrten des 12. Jahrh. d. H.] zu der **Sachâwijja** des sehr gelehrten **'Abdalkâdir ben 'Alî as-Sachâwî**, des Schâfiten. Anfang des Commentars: Dank sei dem, der verschiedene Stufen der Einsicht in die äussere Wahrnehmung und das innere Wesen eingesetzt hat. Er wurde beendigt am 1. Dschumâdâ II. 1163, 1750. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 12. H.-N. 7818.

Ad-durûs al-hisâbijja (arithmetische Lectionen) für die Primarschulen, von Sr. Exc. **Schafîk Bey Mansûr Jegin** [lebt jetzt 1307, 1889/90 noch]. Anfang: Dank sei dem, der die Rechenkunst zur Ordnerin der Dinge gemacht hat. Beendigt im Jahre 1303, 1885/86. Vier Theile in vier Bänden, gedruckt in Bûlâk 1303. A.-N. 132. H.-N. 21668.

ر (Râ).

Risâla (Abhandlung) über die Maasse und Gewichte, die im ägyptischen Reiche gebräuchlich sind, von dem sel. verstorbenen **Mahmûd Pâschâ Hamdî al-Falakî** [vormals Minister des Unterrichtswesens, gest. Montag den 2. Safar 1303]. Es wurde aus dem Französischen in's Arabische übersetzt von **Zijûr Efendî**, vom Gefolge des Chediwe. Anfang: Lob sei Gott, dem Herrn des Wissens und des Wohlthuns. Ein Band, gedruckt in der Druckerei der Dschawâib[13] in Konstantinopel, 1290, 1873/74. A.-N. 48. H.-N. 4809.

Ein zweites Exemplar: A.-N. 49. H.-N. 4810.*

س (Sîn).

As-Sachâwijja von dem sehr gelehrten **'Abdalkâdir ben 'Alî as-Sachâwî**, dem Schâfiten. Anfang: Es ist dies ein Auszug aus der Rechenkunst, zurechtgemacht für Anfänger. Er enthält ein Vorwort, elf Capitel und ein Schlusswort. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 50. H.-N. 4811. [Vergl. die Sammelbände: A.-N. 29 und 83, und ad-durar al-bahijja, und fath rabb al-barijja.]

ش (Schîn).

Scharh (Commentar) des **Schaich al-islâm Zakarijjâ ben Muhammed ben Ahmed ben Zakarijjâ al-Ansârî as-Sanîkî al-Kâhirî al-Azharî** [14], des Schâfiten [geb. in Sanîka, in den östlichen Provinzen, im Jahre 826, 1423, gest. in Kairo 926, 1520], zum „Auszug aus der Leitung des Studirenden zur Klarheit des Gesuchten", genannt **an-nuzha** [15] (die Unterhaltung) von **Ibn al-Hâim** [gest. 815, 1412]. Anfang des Commentars: Lob sei Gott, dessen Wohlthaten die gesammte Rechenkunst nicht zu zählen im Stande ist. Ein Band in älterer Schrift, von der Hand des Mustafâ ben Mahfûz al-Dschîzî, beendigt am 1. Muharram 1136, 1723. A.-N. 82. H.-N. 4843.

Ein zweites Exemplar in älterer Schrift, von der Hand des Muhammed ʻÂbid, beendigt im Dschumâdâ I. 1183, 1769. A.-N. 11. H.-N. 7817.

Scharh des **Schaich ʻAbdallatîf ben Ahmed ben Muhammed ben ʻAlî ad-Dimischkî al-Hanbalî** (des Hanbaliten [16]) [gest. am 16. Schaʻbân 1036, 1627] zu seiner **Perlenschnur** (Gedicht) **„über die Auflösung (Zerlegung?) der Zahlen"**. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 10. H.-N. 7816.

Ein zweites Exemplar in älterer Schrift, beendigt in Mekka, zur Zeit des Gebetsrufes, Freitags den 13. Safar 1144, 1731. A.-N. 16. H.-N. 7822.

Scharh des **Schaich ʻAbdallâh ben Muhammed ben ʻAbdallâh asch-Schanschûrî** [gest. 999, 1590/91] zur **Tuhfat al-ahbâb** (Geschenk der Freunde) von **Muhammed ben Muhammed ben Ahmed Sibt al-Mâridînî** [geb. 826, 1423]. Anfang des Commentars: Lob sei Gott, der den Gelehrten eine hohe und bedeutende Stellung zugetheilt hat. Ein Band in älterer Schrift, mit vielen Randnoten. A.-N. 6. H.-N. 7812.

Scharh des Schaich **Zain ed-Dîn ʻUrfa ben Muhammed al-Armawî** (?) **ad-Dimischkî**, des gesetzeskundigen Schâfiten [gest. am Sonntag, den 11. Schawwâl 931, 1525] zu der Perlenschnur (Gedicht), betitelt **Fath al-wahhâb** (der Beistand des Gebers, das heisst Gottes), von dem **Schaich ʻAlî ben Muhammed ben Ismâʻîl az-Zamazî al-Mekkî** [einem der Gelehrten des 9. Jahrh. d. H.], die er für Sikâja al-ʻAbbâs in Mekka im Ramadân 878, 1474 verfasst hat. Anfang: Es spricht ʻAlî az-Zamazî al-Mekkî. Anfang des Commentars: Lob sei Gott, dem Einzigen, es giebt Keinen, der zählt... Er wurde beendigt im Jahre 918, 1512/13. Ein Band in älterer Schrift, von der Hand des ʻÎsâ ben Tarîf, des Hanbaliten. Schluss der Abschrift am 20. Muharram 919, 1513, in dem wohlbeschützten Sâlihijja (?). A.-N. 56. H.-N. 4817.

ع (ʻAin).

ʻUddat al hâsib wa ʻumdat al-kâtib (das Rüstzeug des Rechners und die Stütze des Schreibers), von **Husain Efendî ʻAlî**, bekannt unter dem Namen **ad-Dîk** [lebt jetzt 1307 noch). Anfang: Dank sei dem, der die Schrift kennt. Es enthält drei Abschnitte: der erste (handelt) über die

Erklärung der arithmetischen Grundregeln, der zweite über die Art und Weise der Einrichtung und Führung der Staats Rechenbücher, nach den gesetzlich aufgestellten Vorschriften, der dritte über das, was für den Schreiber zu wissen unerlässlich ist. Ein Band, gedruckt in der Druckerei der königlichen Schulen; am Ende Rechnungsformulare, lithographirt. 1286, 1869/70. A.-N. 57. H.-N. 4818.

ف (Fâ).

Fatḥ rabb al-barijja (der Beistand, oder Sieg des Herren des Volkes) zum Text der **Sachâwijja**, verfasst von dem Schaich **Ḥusain ben Muḥammed al-Maḥallî**, dem Schâfiten [gest. 1170, 1756/57]. Anfang: Lob sei Gott, der den Gelehrten die zweifellose Wahrheit verliehen hat. Beendigt im Radschab 1138, 1726. Ein Band in älterer Schrift, von der Hand des Aḥmed ibn as-Sajjid Amîn at-Ṭarâbîschî al-Ḥalebî (aus Aleppo); Schluss der Abschrift im Radschab 1234, 1819. A.-N. 95. H.-N. 16458.

ق (Ḳâf).

Al-ḳâ'ida al-metrijja (das metrische System) für die Umwandlung der ägyptischen Maasse, von **Musṭafâ Efendî Schauḳî** [aus dem 13. Jahrh. d. H.]. Ein Band, lithographirt, 1288, 1871/72. A.-N. 60. H.-N. 4821.

Zwei weitere Exemplare: A.-Nn. 106 und 107. H.-Nn. 18231 und 18232.

Ḳânûn al-misâḥât (Kanon der Längen- und Flächenmaasse[17]) und der neuen Hohlmaasse und Gewichte. Am Anfang die Abschrift des Hamâjûnischen[18] Decretes, erlassen am 20. Dschumâdâ II. 1286, 1869. Gedruckt zu Bûlâḳ 1286. A.-N. 59. H.-N. 4820.

Al-ḳawâ'id al-ḥisâbijja (die arithmetischen Grundlagen) für die Umwandlung der römischen (europäischen) Maasse in ägyptische, von Schaich **Muḥammed al-Ġamrî**, dem Schâfiten [einem der Gelehrten des 12. Jahrh. d. H.]. Anfang: Dank sei dem, der jeden Umstand kennt. Ein Band in älterer Schrift, von der Hand des Schams ed-Dîn ben Muḥammed Faḍlallâh al-Anṣâri, des Schâfiten, beendigt am 14. Ḏû'l-Ḳa'da 1151, 1739. A.-N. 22. H.-N. 7828. [Vergl. Sammelband A.-N. 85.]

ك (Kâf).

Kitâb Abî'l-Wafâ (das Buch des Abû'l-Wafâ)[19] **Muḥammed ben Muḥammed ben Jaḥjâ ben Ismâ'îl ben al-'Abbâs al-Bûzdschânî** [geb. Mittwochs, am ersten Tage des Ramaḍân 328, 940, gest. 376, 986]. Ein Band in älterer Schrift, von der Hand des 'Abdalmalik ben Aḥmed al-Bailḳânî, beendigt am Freitag, den 3. Ḏû'l-Ḥidsche 487, 1094. Viele Wurmstiche. A.-N. 9. H.-N. 7806.

Kurrâsa (eine Broschüre, Heft), lithographirt. A.-N. 160. H.-N. 22566. Ein zweites solches Heft. A.-N. 161. H.-N. 22567.

Kaschf al-astâr (das Aufheben der Schleier) von der Wissenschaft der Ġubârziffern[20], von **Abû'l-Hasan 'Alî ben Muhammed ben Muhammed ben 'Alî al-Bûstî al-Andalusî al-Kalsâdî**, des Kureischîten [gest. 891, 1486]. Anfang: Lob sei Gott, dem Anfang aller Ursachen. Ein Band in der Schrift des Westens (maġrebinischer Schrift), von der Hand des Muhammed Na'mûsch, beendigt (die Abschrift) am letzten Radschab 1296, 1879. Am Ende ein Blatt über die Auflösung der zusammengesetzten Zahlen (in Primfactoren?). A.-N. 81. H.-N. 4842.

Kaschf al-astâr (das Aufheben der Schleier) von der Unterhaltung des Ġubâr; es ist dies der Commentar des Schaich **Husain ben Muhammed al-Mahallî**, des Schâfiten [gest. 1170, 1756/57 zur **Unterhaltung des Ġubâr** von **Ibn al-Hâim.** Anfang: Dank sei Dem, welcher einzig ist in der Dauer und dem Bestand. Beendigt am 16. Dû'l-Ka'da 1163, 1750. Ein Band in älterer Schrift, von der Hand des Ahmed ibn asch-Schaich 'Abdalfattâh al-Mâlikî; Schluss der Abschrift Samstags, den 18. Rabî' II. 1187, 1773. A.-N. 24. H.-N. 7830.

Kaschf an-nikâb (das Aufheben des Schleiers) von der Rechenkunst, übersetzt aus dem Französischen ins Arabische von **Muhammed Efendî asch-Schîmî** [aus dem 13. Jahrh. d. H.]. Ein Band, gedruckt in Bûlâk 1266, 1850; am Schlusse mit einer fünfstelligen Logarithmentafel der Zahlen von 1—10000. A.-N. 62. H.-N. 4823.

Ein zweites Exemplar: A.-N. 63. H.-N. 4824.

Ein drittes Exemplar, gedruckt in Bûlâk 1289, 1872/73. A.-N. 166. H.-N. 23236.

ل (Lâm).

Al-luma'[21] (die Lichtblitze) des Schaich **Abû'l-'Abbâs Ahmed ben Muhammed ben 'Imâd ben 'Alî**, bekannt unter dem Namen **Ibn al-Hâim** [gest. 815, 1412]. Ein Band in Neschi-Schrift. A.-N. 64. H.-N. 4825. [Vergl. den Commentar des Sibt, Sammelband A.-N. 29.]

Ein zweites Exemplar, gedruckt in Bûlâk 1241, 1825/26. A.-N. 65. H.-N. 4826.

Ein drittes Exemplar, wie das vorhergehende. A.-N. 90. H.-N. 10178.

Ein viertes Exemplar, ein Band in älterer Schrift, von der Hand des Ahmed ben Sa'd al-Ma'lûf al-Baisûsî (?), des Schâfiten, beendigt am Donnerstag, den 26. Rabî' I. 1182, 1768. A.-N. 25. H.-N. 7831.

Ein fünftes Exemplar, ein Band in älterer Schrift, von der Hand des vorigen Abschreibers, beendigt am Donnerstag, den 13. Dschumâdâ II. 1173, 1760. A.-N. 26. H.-N. 7832.

م (Mîm).

Madschmû'a (ein Sammelband). A.-N. 85. H.-N. 4846. (Inhalt):

1. Abhandlung über die gesetzlichen Maasse und Gewichte[22], von dem Schaich **Ahmed ben 'Alî ben 'Abdalkâdir ben Muhammed**, bekannt unter

dem Namen **al-Makrîzî** [gest. in Kairo am Donnerstag, den 16. Ramadân 845, 1442 und begraben auf dem Sûfi'schen Gottesacker, ausserhalb des Thores an-Nasr]. In älterer Schrift, von der Hand des Sajjid Chalil Hazzat al-Kamâlî ad-Dimjâtî (v. Damiette), beendigt am Dienstag den 5. Rabî' I. 1256, 1840.

2. Abhandlung über die Maasse und Gewichte; in älterer Schrift, von der Hand desselben Abschreibers. Anfang: Lob sei Gott allein.

3. Die genügenden oder überzeugenden Grundlagen für die Umwandlung der vier Maasse (?)[23], von dem Schaich **Muhammed al-Ġamrî**, dem Schâfiten [einem der Gelehrten des 12. Jahrh. d. H.], beendigt am Freitag, den 16. Rabî' I. 1124, 1712. In älterer Schrift von der Hand desselben Abschreibers. Schluss der Abschrift am Sonntag, den 22. Rabî' I. 1256, 1840.

Madschmû'a (ein Sammelband). A.-N. 29. H.-N. 7835. (Inhalt):

1. Auszug (Abriss) der Rechenkunst, bekannt unter dem Titel der **Sachâwijja**, von dem Schaich **'Abdalkâdir ben 'Alî as-Sachâwî**, dem Schâfiten; in älterer Schrift.

2. Der Commentar des **Sibt al-Mâridînî** zu den „Lichtblitzen" des **Ibn al-Hâim**. In älterer Schrift, von der Hand des Muhammed ben 'Abdattawwâb, beendigt (die Abschrift) am Freitag, den 20. Dû'l-Ka'da 1011, 1603.

Madschmû'a (ein Sammelband). A.-N. 15. H.-N. 7821. Inhalt:

1. Pforte zur Rechenkunst. Anfang: Wisse, dass es im Rechnen vier Rangstufen giebt: Einer, Zehner, Hunderter und Tausender. In älterer Schrift.

2. Türkische Abhandlung über die Erbtheilungen.

Madschmû'a (ein Sammelband). A.-N. 83. H.-N. 4844. Inhalt:

1. Auszug (Abriss) der Rechenkunst [as-Sachâwijja] des Schaich **'Abdalkâdir ben 'Alî as-Sachâwî**, des Schâfiten; in älterer Schrift. Schluss der Schrift am 28. Radschab 1082, 1671.

2. Die Unterhaltung (an-nuzha) von **Ibn al-Hâim**. Anfang: Lob sei Gott, dem Einzigen in jeder Weise und Hinsicht. In älterer Schrift.

3. Abhandlung über die Auslöschungen? (Munâsichât)[24]. In älterer Schrift.

Madschmû'a (ein Sammelband). A.-N. 84. H.-N. 4845. Inhalt:

1. Das Buch des indischen (Rechnens). Anfang: Wisse, Gott sei uns und Dir gnädig, dass das indische Rechnen sich auf neun Zeichen gründet. In älterer Schrift, von der Hand des Jahjâ ben 'Alî, Schluss der Abschrift am Montag, 10 Tage vor Schluss des Ramadân 1205, 1791.

2. Anmerkungen zu dem genannten Buche des indischen (Rechnens), von **'Îsâ ben Ahmed ben Jûsuf** [einem der Gelehrten des 13. Jahrh. d. H.]. In älterer Schrift, von der Hand des eben genannten Abschreibers, der es vom Exemplar des Verfassers abgeschrieben hat. Schluss der Abschrift am Samstag, den 10. Dû'l-Hidscha 1205, 1791.

Madschmû'a (ein Sammelband) in älterer Schrift. A.-N. 181. H.-N. 24477. Inhalt:

1. „Mittel und Wege"[25] des **Ibn al-Hâim**: Auszug aus dem „Beistand". (Vergl. al-Ma'ûna, Seite 14.)

2. Commentar des **Zain al-'Âbidîn ben Sarî ed-Dîn ben Ahmed ben Muhibb ed-Dîn al-Mâlikî** zu den „Lichtblitzen" (luma') des **Ibn al-Hâim**.

3. Der Commentar **al-Bîrûnîs**[26] zu der „Unterhaltung" des **Ibn al-Hâim**, beendigt am Freitag, den 7. Rabî' II. 1031, 1622.

4. Das Aufheben der Schleier von der Wissenschaft der Gubârziffern, von **'Abdallâh ben 'Alî**, dem Koreischîten, bekannt unter dem Namen **al-Kalsâdî al-Andalusî**.

5. Die „Unterhaltung" des **Ibn al-Hâim**.

6. Die glänzenden Sterne: über die Erbschaftstheilung für das Volk (?). Ein Gedicht von Schaich **'Abdallâh al-Ansârî**, dem Schâfiten.

7. Die rechte Leitung der Studirenden zu den „Mitteln und Wegen" der Rechenkunst; es ist dies der Commentar des **Muhammed Sibt al-Mâridînî** zu den „Mitteln und Wegen" des **Ibn al-Hâim**.

8. Commentar zu der „nuzha" (Unterhaltung), geschrieben von **Muhammed ben Sulaimân ben Salâm asch-Schabrachîtî**, beendigt am Dienstag, den 10. Rabî' II. 1077, 1666.

9. Die Hilfe des Herrn der erhabenen Eigenschaften bei der Erklärung des Textes der Jâsmînijja, von dem Schaich **Ahmed as-Sadschâ'î** [gest. 1197, 1783], abgeschrieben von Ahmed al-Chairî, dem Schâfiten, und beendigt im Jahre 1180, 1766/67.

10. Algebraische Perlen und Geschenke zum Commentar des **Sibt** zur **Jâsmînijja**; es sind dies Anmerkungen von **Sîdî Muhammed al-Hafnî**, dem Schâfiten [gest. 1181, 1767/68], abgeschrieben von **'Abdallâh al-Dschâwî** und beendigt Donnerstag Nachts, den 22. Rabî' I. 1104, 1692.[27]

11. Der Commentar des **Ibn al-Hâim** zu dem Gedicht **Jâsmînijja**, abgeschrieben von Husain al-Mahallî, dem Schâfiten. Schluss der Abschrift am 17. Radschab 1138, 1726.

12. Hilfe des Schöpfers (oder Sieg des Erfinders) zur Erklärung des „Ueberzeugenden" (Genügenden), von dem **Schaich al-islâm Zakarijjâ al-Ansârî** [gest. 926, 1520]; es ist dies ein Commentar zu dem Gedichte, genannt das „Ueberzeugende", von **Ibn al-Hâim**; Abschrift des Muhammed ben Hasan ben 'Alî al-'Âsimî, des Schâfiten, beendigt am Montag, den 28. Rabî' II. 1103, 1691.

13. Der Commentar des **Sibt al-Mâridînî** zu dem Gedicht **al-Jâsmînijja**, abgeschrieben von Sulaimân Âdam al-Karîdî asch-Scharîdî, dem Hanefiten.

14. Ein zweiter Commentar desselben zu der **Jâsmînijja**. Schluss der Abschrift am Mittwoch, den 7. Safar 1020, 1611.

Muchtasar 'ilm al-hisâb (Auszug oder Abriss der Rechenkunde), verfasst von Sa'âda (das heisst Hoheit oder Excellenz) **Schafîk Bey Mansûr**

Jegin [lebt jetzt 1307 noch]. Ein Band, gedruckt zu Bûlâk 1303, 1885/86. A.-N. 131. H.-N. 21667.

Ein zweites Exemplar: A.-N. 135. H.-N. 21862.

Ein drittes Exemplar: A.-N. 136. H.-N. 21863.

Muṭâli' al-budûr (die Vollmondsaufgänge): über die Anpassung (das Gleichnamigmachen) der Brüche, von **'Abdalḥamîd Efendî Ṯâbit**, Repetitor der Mathematik an den Staatsschulen [geb. im Anfang des Muḥarram 1268, 1851, jetzt 1307 noch lebend]. Schluss der Abfassung am Montag Morgen den 2. Ḏû'l-Ḥidšcha 1291, 1875. Ein Band, gedruckt in der Druckerei der Staatsschulen 1292, 1875. A.-N. 104. H.-N. 18199.

Ein zweites Exemplar: A.-N. 105. H.-N. 18200.

Al-ma'ûna (der Beistand) von **Schihâb ed-Dîn Aḥmed ben Muḥammed**, genannt **Ibn al-Hâim** [gest. 815, 1412]. Anfang: Lob sei Gott für die Zahl seiner Wohlthaten. Es enthält eine Einleitung, drei Abschnitte und ein Schlusswort. Er beendigte seinen ersten Entwurf Mittwoch Nachts, den 4. Scha'bân 761, 1360. Ein Band in älterer Schrift. Diesem Entwurf ist zugesellt (eigentlich gegenübergestellt) eine Abschrift von der Hand des Schaich 'Abdalḥakk ben Muḥammed as-Sambâṭî, des Schâfiten. Am Ende die Siebtafel (Sieb des Eratosthenes?) und Zinstabellen. A.-N. 68. H.-N. 4829. [Vergl. die Ḥâschija des Bilbîsî, Seite 7.]

Ein zweites Exemplar: in älterer Schrift, beendigt den 7. Muḥarram 1123, 1711, abgeschrieben von einer von dem Exemplar des Verfassers gemachten Abschrift. Am Ende die Siebtafel. A.-N. 69. H.-N. 4830.

Ein drittes Exemplar: in älterer Schrift. A.-N. 32. H.-N. 7838.

Mukâla (Abhandlung) des gelehrten Metropoliten (Erzbischofs) **Elias** (?) über die Maasse und Gewichte, in 16 Capiteln; ein Band in hängender (persischer) Schrift, geschrieben von Sajjid Ḥusain, Bâsch-Tschâwîsch[28] der Scherîfe in Aegypten, ibn Ibrâhîm Ḥâfiz ben Musṭafâ Chalîfa al-Dschezâirî, beendigt am Freitag, den 3. Rabî' II. 1196, 1782. A.-N. 92. H.-N. 16278.

Manẓûma (Perlenschnur, Gedicht) des Schaich **'Abdallaṭîf ad-Dimischkî** über die Auflösung (Zerlegung?) der Zahlen. [Vergl. seinen Commentar dazu Seite 9.]

ن (Nûn).

An-nuchba al-ḥisâbijja (Auswahl aus der Rechenkunst) für die Militärschulen, übersetzt* von **Sajjid Ṣaliḥ Efendî [Bey] Madschdî** [einem der Vornehmen des 13. Jahrh. d. H.]. Anfang: Der Meister (eigentlich Kerkermeister) der ungezählten Wohlthaten... Ein Band, gedruckt in der Druckerei der viceköniglichen polytechnischen Schule, 1269, 1852/53. A.-N. 72. H.-N. 4833.

---

* Tardschama, das sonst stets „übersetzen" bedeutet, könnte hier (und an einigen anderen Orten) vielleicht auch durch „verfassen" wiedergegeben sein, da nicht angegeben ist, aus welcher Sprache die Uebersetzung gemacht wurde.

Ein zweites Exemplar: A.-N. 73. H.-N. 4834.

Nuzhat al-aḥbâb (die Unterhaltung der Freunde) über die Belehrung in der Rechenkunst, von **Ibn al-Hâim** [gest. 815, 1412]: Auszug aus seinem Buche „die rechte Leitung des Studirenden". Ein Band in älterer Schrift, von der Hand des Muḥammed 'Abdaldschawâd asch-Scharambalâlî[29] al-Aḥmedî, des Schâfiten, beendigt am Mittwoch, den 3. Rabî' II. 1147, 1734. A.-N. 94. H.-N. 16457. [Vergl. Scharḥ (Commentar) des Schaich al-islâm Zakarijjâ al-Anṣârî Seite 9.]

Ein zweites Exemplar, in älterer Schrift, mit Randnoten. A.-N. 34. H.-N. 7840.

Nuzhat al-albâb (Unterhaltung des Geistes, Verstandes) über die Rechenkunst, von **'Abdallâh Efendî Zakî** [lebt jetzt 1307 noch]. Ein Band, gedruckt in der Druckerei des muktaṭaf[30], 1885 p. Chr. A.-N. 119.* H.-N. 21053.

Vier weitere solche Exemplare, mit den A.-Nn. 120—123, und den H.-Nn. 21054—21057.

و (Wâw).

Al-wasîla (die vermittelnde Beziehung: Mittel und Wege) von **Schihâb ed-Dîn Aḥmed ben Muḥammed**, genannt **Ibn al-Hâim** [gest. 815, 1412]. Anfang: Dank sei Gott, der hoch erhaben ist und seine Wohlthaten vermehrt. Auswahl aus seinem Buche, betitelt **al-ma'ûna** (der Beistand). Es enthält eine Einleitung, drei Abtheilungen und ein Schlusswort. Er beendigte den ersten Entwurf am Freitag, den 28. Rabî' II. 772, 1370, in der Nähe des Tempels zu Jerusalem. Ein Band, in älterer Schrift, von der Hand des Jûsuf az-Zijâdî, beendigt am Sonntag, den 15. Ḏû'l-Ḥidšcha 1046, 1637. Mit Randnoten. A.-N. 70. H.-N. 4831. [Vergl. Irschâd aṭ-ṭullâb und Sammelband. A.-N. 181.]

Ein zweites Exemplar, in älterer Schrift, von der Hand des 'Alî ben Muḥammed al-'Amid (oder 'Amd), beendigt am 14. Rabî' II. 1231, 1816. A.-N. 71. H.-N. 4832.

ى (Jâ).

Al-jawâḳît al-mufaṣṣalât (die abgetheilten, das heisst in bestimmter Weise geordneten Edelsteine) mit den glänzenden Perlen: über die Operationen mit den Namentragenden und den Abgetheilten (Zahlen?)[31]; es ist dies der Commentar zu den „glänzenden Perlen", beide verfasst von dem **Schaich Muḥammed** ben **Aḥmed ben Muḥammed** ben **Bîrî al-Mekkî al-Faradî al-'Ulwânî**[32], dem Ḥanefiten [einem der Gelehrten des 11. Jahrh. d. H.]. Anfang: Lob sei Gott, welcher dem, der es wünscht, die Eigenthümlich-

---

* Im arabischen Text steht 19, was nach den folgenden Nummern zu schliessen wohl unrichtig ist.

keiten der Wissenschaft der Wurzeln aus Zahlen mittheilt. Er wurde beendigt am Mittwoch, den 14. Muharram 1017, 1608. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 99. H.-N. 16714.

2. Alte Geometrie.

ا (Alif).

Usûl al-handasa (Elemente der Geometrie) von **Legendre**; aus dem Französischen in's Arabische übersetzt von **Muhammed Efendî 'Ismat** [einem der Männer des 13. Jahrh. d. H.]. Anfang: Lob sei Gott, der die Dinge in erhabener Weisheit geschaffen hat. Die Uebersetzung wurde beendigt am Mittwoch, den 22. Rabî' I. 1255, 1839. Sie zerfällt in acht Abschnitte: die vier ersten handeln über die Linien und Figuren in einer Ebene, die vier letzten über die Eigenschaften der Figuren im Raume. Ein Band, gedruckt in Bûlâk 1255. Am Ende 13 Tafeln mit Figuren. A.-N. 8. H.-N. 4769.

Ein zweites Exemplar wie das vorige: A.-N. 168. H.-N. 23238.

Ein drittes Exemplar, gedruckt in Bûlâk 1282, 1865. A.-N. 78. H.-N. 4839.

Ein viertes Exemplar wie das vorige: A.-N. 79. H.-N. 4840.

ت (Tâ).

Tahrîr usûl Uklîdis (Recension der Elemente des Eukleides) von **Nasîr ed-Dîn Muhammed ben Muhammed at-Tûsî** [gest. im Jahre 672, 1273/74]. Anfang: Die mathematischen Wissenschaften, welche das verknüpfende Band der speculativen* Wissenschaften bilden, werden in vier Theile getheilt. Ein Band, gedruckt in Rom, der Hauptstadt des Königreichs Italien, 1594 p. Ch. A.-N. 18. H.-N. 4779.

Ein zweites Exemplar: A.-N. 19. H.-N. 4780.

Ein drittes Exemplar: A.-N. 97. H.-N. 16499.

Tahrîr usûl hisâb wa handasa Uklîdis (Recension der Elemente der Arithmetik und Geometrie des Eukleides) von **at-Tûsî**, ein anderes Buch als das vorhergehende.[33] Anfang: Lob sei Gott, der da ist von Anfang bis zu Ende. Schluss der Bearbeitung den 22. Scha'bân 646, 1248. Ein Band in persischer Schrift, mit Goldverzierungen. A.-N. 1. H.-N. 7798.

Ein zweites Exemplar: in persischer Schrift, von der Hand des Muhammed ben al-Hâdsch Mahmûd, beendigt am 4. Schawwâl 1119, 1707. A.-N. 2. H.-N. 7799.

Ein drittes Exemplar: Schluss der Abschrift am 12. Ramadân 1122, 1710. A.-N. 3. H.-N. 7800.

At-tuhfa al-bahijja (das glänzende Geschenk): über die Elemente der Geometrie, verfasst von **Ahmed Bey Nazîm**, Director der Schule Dâr

* nazarijja kann auch heissen „contemplativ".

al-'ulûm und der Uebersetzerschule [lebt jetzt 1307 noch]. Vier Theile, gedruckt in Bûlâk 1306, 1888/89. A.-N. 179. H.-N. 23973.

Ein zweites Exemplar: A.-N. 180. H.-N. 23974.

Tadkarat al-muhandisîn wa tardschamat ar-râgibîn (Nachschlagebuch für Geometer (Ingenieure) und Hilfsbuch für Studirende) von dem Wezîr **'Alî Pâschâ Mubârak** [Director des gesammten Unterrichtswesens, gegenwärtig 1307]. Gedruckt in der Druckerei der Staatsschulen, 1293, 1876. A.-N. 102. H.-N. 18195.

Ein zweites Exemplar: A.-N. 103. H.-N. 18196.

Takrîb al-handasa (Darreichung (oder Annäherung) der Geometrie). I. Theil, von dem Wezîr **'Alî Pâschâ.** A.-N. 24. H.-N. 4785.

Ein zweites Exemplar dieses I. Theils: A.-N. 25. H.-N. 4786.

Ein drittes und viertes Exemplar desselben: A.-Nn. 152 und 153. H.-Nn. 22558 und 22559.

ح (Hâ).

Hâschijat Abî'l-Fath (Anhang des **Abû'l-Fath**) **Muhammed ben al-Hâdî Abî Nasr ben Abî Sa'îd al-Husainî al-'Irâkî**, genannt **Tâdsch as-Sa'îdî** [gest. 950, 1543] zu dem Commentar des hochgelehrten Mûsâ ben Muhammed, bekannt unter dem Namen **Kâdî-Zâdeh ar-Rûmî**[34] [gest. 815, 1412 in Samarkand] zu den „Fundamentalsätzen" des **Schamseddîn Muhammed ben Aschraf as-Samarkandî**[35] [gest. um's Jahr 600, 1203/1204]. Anfang des Anhangs: Lob sei Gott, der das Maass aller Dinge voraus bestimmt hat in seiner Weisheit. Ein Band in Neschi-Schrift, darin (oder darauf)[36] die Handschrift des Schaich Hasan al-'Attâr. A.-N. 26. H.-N. 4787. (Vergl. Scharh (Commentar) Seite 18.)

Hâschijat Fasîh ed-Dîn (Anhang des **Fasîh ed-Dîn**) **Muhammed an-Nizamî** [gest. 919, 1513] zu dem Commentar des **Kadî-Zâdeh ar-Rûmî.** Anfang: Wir loben Dich, der Du die Wissenschaft (der Geometrie?) erst zu einer Wissenschaft und damit zum Glanz erhoben hast. Beginn der Abfassung (des Anhangs) am Abend des 6. Dû'l-Hidscha 878, 1474, und Schluss derselben am Abend des 8. Muharram 879, 1474. Er schenkte (widmete) es dem Emîr 'Alî Schâh[37], dem Wezîr. Ein Band in älterer Schrift, darauf (oder darin) die Handschrift des Schaich Hasan al-'Attâr. A.-N. 58. H.-N. 4819.

د (Dâl).

Ad-durûs al-handasijja (geometrische Lectionen) für die Primarschulen, verfasst von Sa'âda (Excellenz) **Schafîk Bey Mansûr Jegin** [lebt jetzt 1307 noch]. Zwei Theile gedruckt in Bûlâk 1304, 1886/87. A.-N. 162. H.-N. 22758.

Ein zweites Exemplar: A.-N. 163. H.-N. 22759.

ش (Schîn).

Scharh (Commentar) des hochgelehrten Schaich **Mûsâ ben Muhammed**, bekannt unter dem Namen **Kâdî-Zâdeh ar-Rûmî** [gest. in Samarkand 815, 1412] zu den „Fundamentalsätzen" des **Schams ed-Dîn Muhammed ben Aschraf as-Samarkandî** [gest. um's Jahr 600, 1204]. Anfang des Commentars: Lob sei Gott, der jedes Ding nach Maass und Gewicht bestimmt hat. Ein Band in älterer Schrift von verschiedenen Händen; Schluss der Abschrift am 22. Dû'l-Hidscha 1118, 1707. Wurmstichig. A.-N. 7. H.-N. 4768.

Ein zweites Exemplar: in älterer Schrift, mit Randbemerkungen. A.-N. 61. H.-N. 4822.

Ein drittes Exemplar, wie das vorige. A.-N. 98. H.-N. 16709.

ك (Kâf).

Kaschf rumûz as-sirr al-masûn (die Enthüllung der Räthsel des bewahrten Geheimnisses): über die Anwendung der Geometrie auf die (übrigen) Wissenschaften. Drei Bände, gedruckt in Bûlâk in den Jahren 1260, 1262 und 1268 (1844, 1846 und 1852): der erste wurde verfasst von **'Îsawî Efendî Zahrân**, der zweite von **Sajjid Sâlih Madschdî**, der dritte von **Muhammed al-Halwânî** [alle drei aus dem 13. Jahrh. d. H.]; am Ende vier Tafeln mit Figuren. A.-N. 141. H.-N. 22547.

Ein zweites Exemplar: A.-N. 142. H.-N. 22548.

م (Mîm).

Mabâdî al-handasa (Grundzüge der Geometrie), von dem [selig verstorbenen] **Rifâ'a Bey Badawî Râfi'**, vormals Director der Sprachen- und Uebersetzerschule [gest. 1290, 1873]. Ein Band, gedruckt in Bûlâk 1259, 1843. Am Anfang eine Erklärung geometrischer und technischer Wörter und Ausdrücke, ohne Figurentafeln. A.-N. 76. H.-N. 4837.

Ein zweites Exemplar, gedruckt in der Druckerei der polytechnischen Schule, 1270, 1853/54. Am Ende fünf Figurentafeln. A.-N. 77. H.-N. 4838.

Ein drittes Exemplar, wie das vorige. A.-N. 151. H.-N. 22557.

Ein viertes Exemplar, gedruckt in Bûlâk 1291, 1874. Am Anfang eine Erklärung geometrischer und technischer Ausdrücke, am Ende fünf Figurentafeln. A.-N. 167. H.-N. 23237.

Madschmû'a (ein Sammelband), in älterer Schrift. A.-N. 6. H.-N. 7803. (Inhalt):

1. Abhandlung des **Abû Hafs Ahmed ben Jûsuf ben Ibrâhîm** über das Verhältniss und die Proportionalität. Die Schrift (Abschrift?) wurde beendigt im Radschab 1151, 1738.

2. Eine Abhandlung über das Verhältniss der sechs (Grössen).[38]

3. Eine Abhandlung (eigentlich Aufzeichnung, Eintragung) über die Auffindung der Höhen in den Dreiecken.

4. Ein Commentar zu der Abhandlung des **Autolykos** über die Bewegung der Sphäre, die zwölf Sätze enthält.

5. Das Buch **Herons**, des Griechen, über das Heben der Lasten (eigentlich schweren Dinge)[39], aus dem Griechischen in's Arabische übersetzt von **Konstantin** (sic!) **ben Lûkâ** aus Ba'albek, für den Emir der Gläubigen Aḥmed ben al-Mu'taṣim. Es enthält drei Abschnitte, ohne Figuren.

Madschmû'a (ein Sammelband), in älterer Schrift, von der Hand des Muṣṭafâ Ṣidḳî, ausgenommen die türkische Abhandlung über den Almuḳanṭarât-Quadranten, welche von anderer Hand ist. A.-N. 7. H.-N. 7804. Inhalt:

1. Die erste Art der ersten der beiden Gattungen mathematischer Lehren aus der Wissenschaft der Eigenschaften der einfachen und zusammengesetzten Zahlen: in vier Abschnitte getheilt.

2. Das Zeichnen der Linien (geraden), Kreise und Bögen auf den Höheninstrumenten.

3. Das Zeichnen der Sonnenuhren (oder Stundenlinien) und der Sshâdruwân (?).[40]

4. Das Zeichnen der Ḳibla[41] und des Sextantenbogens.[42]

5. Türkische Abhandlung über die Beschreibung der neun astronomischen Instrumente; Schluss der Abschrift am 24. D̲û'l-Ḥids̆cha 1144, 1731/32.

6. Recension des Buches „über die sich bewegende Sphäre" von **Naṣîr ed-Dîn at-Ṭûsî** [gest. 672, 1273/74], ursprünglich verfasst von **Autolykos**, und verbessert von **T̲âbit ben Ḳurra**: nur ein Buch mit zwölf Sätzen. Schluss der Abschrift am 26. Dschumâdâ II. 1146, 1733.

7. Recension des Buches „über die bewohnten Orte" von **aṭ-Ṭûsî**, ursprünglich verfasst von **Theodosios**, übersetzt von **Ḳusṭâ ben Lûḳâ al-Ba'albekî**, 12 Sätze enthaltend. Schluss der Abschrift am 24. Dschumâdâ II. 1146, 1733.

8. Recension des Buches der „Optik" von **aṭ-Ṭûsî**, ursprünglich verfasst von **Eukleides**; es enthält 64 Sätze. Schluss der Abschrift am 6. Radschab 1146, 1734.

9. Recension des Buches der „Data" von **aṭ-Ṭûsî**, ursprünglich verfasst von **Eukleides**, übersetzt von **Isḥâḳ ben Ḥunain**, dem Arzte [gest. 298, 910/11], verbessert von **T̲âbit ben Ḳurrâ al-Ḥarrânî** [gest. am Donnerstag, den 26. Ṣafar 288, 901]; es enthält 95 Sätze. Schluss der Abschrift am 17. Dschumâdâ II. 1146, 1733.

10. Hundert und fünf Aufgaben aus den Elementen des **Eukleides** [Recension von **aṭ-Ṭûsî**]. Schluss der Abschrift am 29. D̲û'l-Ḥids̆cha 1147, 1735.

11. Türkische Abhandlung über den Almuḳanṭar-Quadranten[43] von **Muhammed ben Kâtib Sinân al-Muwaḳḳit**.

12. Das Buch über die Methoden der Analysis und Synthesis und die geometrischen Constructionen[44], von **Abû Isḥâḳ Ibrâhîm ben Sinân ben T̲âbit ben Ḳurra** [geb. 296, 908/909; gest. in Bagdad am Sonntag, Mitte des

Muharram 335, 946]. Schluss der Abschrift Montag Nachts, den 26. Schawwâl 1159, 1746.

13. Abhandlung darüber, welches der geeignetste Weg sei zur Erlangung des Geforderten in den geometrischen Wahrheiten[45], von **Abû'l-Hasan Tâbit ben Kurra** [dem Wechsler in Harrân, geb. daselbst Donnerstag, den 21. Safar 211, 826; gest. 288, 901]; abgeschrieben von der Handschrift des Ra'îs Abû 'Alî al-Husain ben 'Abdallâh ben Sînâ (Avicenna oder Ibn Sînâ). Schluss der Abschrift Mittwoch Nachts, den 6. Dû'l-Ka'da 1159.

14. Abhandlung über den dem Sokrates zugeschriebenen Beweis zu dem (Satze über das) Quadrat und seine Diagonale[46], von **Abû'l-Hasan Tâbit ben Kurra al-Harrânî**; abgeschrieben von der Handschrift des Ra'îs ibn Sînâ. Schluss der Abschrift am Donnerstag, den 3. Dû'l-Ka'da 1159.

15. Das Buch über die Ausmessung (Quadratur) des Kegelschnittes, genannt Parabel, von **Tâbit ben Kurra al-Harrânî.** Anfang: Continuirliche (stetige) Zahlen sind solche, zwischen denen keine anderen Zahlen sich befinden. Schluss der Abschrift Freitag Nachts, den 12. Dû'l-Ka'da 1159.

16. Das Buch über die Ausmessung der Parabel, von **Ibrâhîm ben Sinân ben Tâbit ben Kurra al-Harrânî.** Anfang: Wenn zwei gerade Linien gegeben sind und auf ihnen A, B, G, D (wahrscheinlich vier Punkte?). Schluss der Abschrift Sonntag Nachts, den 14. Dû'l-Ka'da 1159.

17. Abhandlung über die Auffindung des Inhaltes des parabolischen Körpers (Paraboloides), von **Abû Sahl Wîdschan* ben Rustam al-Kûhî** [einem der Gelehrten des 4. Jahrh. d. H.]. Anfang: Nachdem man die Ausmessung der Körper und der Figuren und der Grössen (?) etc. erkannt hatte... Schluss der Abschrift Montag Nachts, den 15. Dû'l-Ka'da 1159.

18. Das Buch über die Figur (Satz) genannt **al-kattâ'** (die Schneidende, Secante), von **Tâbit ben Kurra al-Harrânî.** Schluss der Abschrift Freitag Nachts, den 19. Dû'l-Ka'da 1159.

19. Abhandlung über den Beweis des berühmten Postulates des **Eukleides** (11. Axiom), von **Tâbit ben Kurra al-Harrânî.** Schluss der Abschrift Samstag Nachts, den 20. Dû'l-Ka'da 1159.

20. Abhandlung über die Construction eines gleichseitigen Fünfeckes in ein gegebenes Quadrat, von **Abû Sahl al-Kûhî.** Schluss der Abschrift Sonntags, den 21. Dû'l-Ka'da 1159.

---

* Im arabischen Text steht überall, wo dieser Name vorkommt, Wîhan statt Wîdschan, wir haben die bekanntere Lesart acceptirt; auch steht Kûhî statt Kûhî.

21. Geometrische Aufgaben, aufgestellt (oder gelöst?) von **Abû Sahl Widschan ben Rustam al-Kûhî.** Schluss der Abschrift Montag Nachts, den 22. D̠û'l-Ḳa'da 1159.

22. Ein Brief des **Abû Isḥâḳ Ibrâhîm ben Hilâl al-Ḥarrânî**, des Sabiers [gest. am 13. Schawwâl 384, 994] an **Abû Sahl al-Kûhî.** Schluss der Abschrift Sonntags den 28.* D̠û'l-Ḳa'da 1159.

23. Abhandlung über die Auffindung der Siebenecksseite[47] (im Kreise), von **Abû Sahl Widschan ben Rustam al-Kûhî.** Schluss der Abschrift Montags, den 29. D̠û'l-Ḳa'da 1159.

24. Abhandlung über die Auffindung der zwei mittleren Proportionalen zwischen zwei geraden Linien und die Theilung des Winkels in drei gleiche Theile,[48] von **Abû Sahl Wîdschan ben Rustam al-Kûhî.** Schluss der Abschrift den 29. D̠û'l-Ḳa'da 1159.

Madschmû'a (ein Sammelband), in älterer Schrift, von der Hand des Muṣṭafâ Ṣidḳî, am Schlusse einige Blätter aus dem Buche „über den vollkommenen Zirkel", von anderer Hand geschrieben. A.-N. 8. H.-N. 7805. — Inhalt:

1. Recension des Buches „über den Aufgang und Untergang", von **Naṣîr ed-Dîn Muḥammed ben Muḥammed aṭ-Ṭûsî** [gest. im Jahr 672, 1273/74], ursprünglich verfasst von **Autolykos**, nach der Verbesserung des **T̠âbit ben Ḳurra al-Ḥarrânî** [geb. Donnerstag, den 21. Ṣafar 211, 826; gest. 288, 901]; es enthält zwei Bücher mit 36 Sätzen. Schluss der Abschrift am 13. Radschab 1146, 1733.

2. Recension des Buches „über die Aufgänge", von **aṭ-Ṭûsî**, ursprünglich verfasst von **Hypsikles**, nach der Verbesserung des **al-Kindî**, und der Uebersetzung des **Ḳusṭâ ben Lûḳâ al-Ba'albekî**; es enthält drei Hilfssätze, einen Vordersatz und zwei Hauptsätze. Schluss der Abschrift am 21. Dschumâdâ II. 1146.

3. Recension des Buches des „Angenommenen" (assumptorum liber) von **aṭ-Ṭûsî**, ursprünglich verfasst von **Archimedes**, nach der Uebersetzung des **T̠âbit ben Ḳurra** und Commentirung des **Abû'l-Ḥasan 'Alî ben Aḥmed an-Nasawî**[49]; ein Buch mit 15 Sätzen. Schluss der Abschrift am 19. Dschumâdâ II. 1146.

4. Recension des Buches des „Gegebenen" (datorum liber) von **aṭ-Ṭûsî**; ursprünglich verfasst von **T̠âbit ben-Ḳurra al-Ḥarrânî**, es enthält 36 Sätze, gewisse (andere) Abschriften dagegen 34 Sätze.[50] Schluss der Abschrift am 20. Dschumâdâ II. 1146.

5. Abhandlung der **Söhne Mûsâs, nämlich Muḥammeds, al-Ḥasans** und **Aḥmeds** [es starb Muḥammed im Rabî' I. 259, 873]. Sie enthält

* Im arabischen Text steht der 22. (Verwechslung von ثانى und ثامن, die leicht stattfinden kann).

18 Sätze[51], am Schlusse fehlen zwei solche, vom Abschreiber weggelassen (wörtlich „es blieb der Abschreiber vor ihnen stehen").

6. Recension des Buches „über den Schnitt des Cylinders" und seine (des Cylinders) Oberfläche, von dem sehr gelehrten **Muḥammed 'Omar ben Aḥmed Hibatallâh ben Abî Dscharâda** (oder Dschurâda) [einem der Gelehrten des 7. Jahrh. d. H.], der mit der Abfassung am 12. Dschumâdâ II. 691, 1292 zu Ende war; ursprünglich verfasst von **Ṯâbit ben Ḳurra al-Ḥarrânî**, dem Sabier. Es enthält vier Capitel mit 37 Sätzen. Schluss der Abschrift am Montag, den 25. Rabî' I. 1153, 1740.

7. Das Buch von der Dreitheilung des Winkels und der Siebentheilung des Kreises von **Muḥammed Badr ed-Dîn ben As'ad al-Islâmbûlî.**[52] Schluss der Abschrift Dienstag Nachts, den 23. Dschumâdâ I. 1153.

8. Das Buch über die Construction des Siebenecks und anderer Vielecke in den Kreis, von **Muḥammed Badr ed-Dîn ben As'ad al-Islâmbûlî.** Schluss der Abschrift Donnerstag Nachts, den 25. Dschumâdâ I. 1153.

9. Geometrische Aufgaben von **Abû Sa'îd aḍ-Ḍarîr al-Dschurdschânî.** Schluss der Abschrift am Montag, den 29. Dschumâdâ I. 1153.

10. Abhandlung des **Abû'l-Dschûd Muḥammed ben al-Laiṯ.**[53] Schluss der Abschrift am Montag, den 29. Dschumâdâ I. 1153.

11. Das Buch über die Auffindung der Sehnen im Kreise mit Hilfe der Eigenschaften der in denselben fallenden krummen Linie[54], verfasst von **Muḥammed ben Aḥmed al-Bîrûnî.** Schluss der Abschrift Sonntags, den letzten Scha'bân 1153.

12. Das erste Buch der Elemente des **Eukleides**, aus der Bearbeitung des **Abû Sahl Wîdschan ben Rustam al-Kûhî**[55] [eines der Gelehrten des 4. Jahrh. d. H.]. Es enthält 29 Sätze. Schluss der Abschrift Montag Nachts, den 17. Muḥarram 1154, 1741.

13. Das zweite Buch der Elemente des **Eukleides** mit den Ergänzungen (das heisst auch wieder aus der Bearbeitung) des **Abû Sahl al-Kûhî**; es enthält 27 Sätze. Schluss der Abschrift am Dienstag, den 9. Ṣafar 1154.

14. Das Buch vom vollkommenen Zirkel[56] von **Abû Sahl al-Kûhî**; in zwei Abtheilungen: die erste handelt über den Beweis der Möglichkeit, mit diesem Zirkel die regelmässigen (gesetzmässigen) Linien zu zeichnen; die zweite über die Zeichnung irgend einer dieser Linien in gegebener Lage.

15. Das Buch über die Theilung des Kreises in sieben gleiche Theile von **Archimedes**,[57] übersetzt von **Abû'l-Ḥasan Ṯâbit ben Ḳurra**, verbessert und commentirt von **Muṣṭafâ Ṣidḳî** (oder Ṣadḳî); es enthält einen Abschnitt mit 18 Sätzen. Schluss der Abschrift Sonntags, den 7. Dschumâdâ I. 1153.

16. Die Synthesis zur Analysis der vorhergehenden Construction des regelmässigen Siebenecks in den Kreis. Schluss der Abschrift am Montag, den 22. Dschumâdâ I. 1153.

17. Das Buch über die Construction des Siebenecks in den Kreis und die Theilung des Winkels in drei gleiche Theile, von **Aḥmed ben Muḥammed ben 'Abdaldschalîl as-Sindscharî.**[58] Schluss der Abschrift am Dienstag, den 9. Dschumâdâ I. 1153.

18. Das Buch über die Construction des Siebenecks[59] in den Kreis, von **Abû'l-Dschûd Muḥammed ben al-Lait̲.** Schluss der Abschrift am Mittwoch, den 10. Dschumâdâ I. 1153.

19. Das Buch der Synthesis zu den Aufgaben, welche von **Abû Sa'd al-'Alâ ben Sahl** gelöst worden sind. Schluss der Abschrift am Montag, den 15. Dschumâdâ I. 1153.

20. Das Buch über die Aufdeckung des Fehlers, der nach seiner (des Verfassers) Meinung von **Abû'l-Dschûd** begangen wurde in einem der beiden Hilfssätze, die er der Construction des Siebenecks vorausgeschickt hat, verfasst von **Abû 'Abdallâh Muḥammed ben Aḥmed asch-Schannî.** Schluss der Abschrift Sonntags, den 21. Dschumâdâ I. 1153.

21. Das Buch über die Ausmessung des Paraboloids; von **Abû Sahl Wîdschan ben Rustam al-Kûhî**: ein Abschnitt mit drei Sätzen. Schluss der Abschrift am Samstag, den 1. Rabî' I. 1153.

22. Das Buch der spitzen* Winkel im Kreise von **Eukleides**: ein Abschnitt mit zehn Sätzen. Schluss der Abschrift am Freitag, dem letzten Tag des Rabî' I. 1153.

23. Das Buch über die Construction des Quadrates, das gleich einem Kreise ist, verfasst von **As'ad Efendî al-Jânîwî** (?). Schluss der Abschrift im Rabî' II. 1153.

24. Das Buch über die Ausmessung (Berechnung) jedes ungleichseitigen Dreieckes aus seinen Seiten, von dem Schaich **Muḥammed ben Aḥmed asch-Schannî.** Schluss der Abschrift am Freitag, den 20. Rabî' II. 1153.

25. Das Buch über die Berechnung jedes Dreieckes aus seinen Seiten, von **Muḥammed ben Aḥmed asch-Schannî.** Schluss der Abschrift Samstags, den 21. Rabî' II. 1153.

26. Das Buch über die Auffindung der Mittagslinie, aus dem Buche „**Analemma**“[60] (entnommen), sammt dem Beweise dazu, von **Abû Sa'îd aḍ-Ḍarîr.** Schluss der Abschrift Samstags, den 21. Rabî' II. 1153.

27. Das Buch über das Planisphaerium[61] von **Aḥmed ben 'Omar al-Karâbîsî**; es enthält zwei Abschnitte mit 25 Sätzen. Schluss der Abschrift am 28. Rabî' II. 1148, 1735.

28. Geometrische Aufgaben von **Aḥmed ben as-Sirâdsch.** Schluss der Abschrift Donnerstag, den 24. Rabî' I. 1149, 1736.

29. Das Buch über die Ausmessung (Quadratur) der Parabel von **Ibrâhîm ben Sinân ben T̲âbit ben Ḳurra al-Ḥarrânî** [geb. 296, 908/909,

* Der Text des Buches hat wohl irrthümlich حادثة (neu) statt حادة (spitz); was freilich unter diesen „spitzen Winkeln im Kreise“ verstanden ist, können wir nicht recht einsehen.

gest. Sonntags, den 15. Muḥarram 335, 946]: ein Abschnitt mit drei Sätzen. Schluss der Abschrift am ersten Tage des Rabî' I. 1153, 1740.

30. Verschiedene geometrische Aufgaben, von einigen Gelehrten, wie **Abû Sahl al-Kûhî**, **Eukleides**: aus dem Buche der Theilung (der Flächen), **Abû Maḥmûd al-Chudschandî**[62], **Abû 'Alî Ḥasan ben Ḥusain al-Baṣrî**[63], **Ṯâbit ben Ḳurra al-Ḥarrânî**; es sind zwölf Aufgaben: die Abschrift wurde vom Abschreiber nicht ganz vollendet.

31. Recension des Buches „der himmlischen Erscheinungen" (Phaenomena) von **Naṣîr ed-Dîn aṭ-Ṭûsî**, ursprünglich verfasst von **Eukleides**; es enthält 23 Sätze [andere Abschriften, von denen noch zwei existiren, haben deren 25].

32. Recension des Buches über die Grösse und Entfernung der beiden Himmelskörper (Sonne und Mond), von **aṭ-Ṭûsî**, ursprünglich verfasst von **Aristarchos**, mit 17 Sätzen. Schluss der Abschrift am 28. Dschumâdâ II. 1146; 1733.

Der erste Theil der **masâil taṭbîḳijja** (Aufgaben, die sich beziehen) auf die alte Geometrie, übersetzt (hier wohl = verfasst) von Sr. Exc. **Muḥammed Efendî Dijâb**, gegenwärtig 1307 Professor an der Taufîḳijja.[64] Lithographirt in der Druckerei al-Hilâl in Kairo, im Ḥausch[65] asch-Scharḳâwî. A.-N. 124. H.-N. 21258.

Vier weitere Exemplare dieses ersten Theils: A-Nn. 125—128. H.-Nn. 21259—21262.

ن (Nûn).

An-nuchba as-sanijja (die herrliche Auswahl) aus den Elementen der Geometrie von **Ṣâdiḳ Bey Schanân**, vormals Director der Vorbereitungsschule [gest. am Anfang des 14. Jahrh. d. H.], übersetzt (zusammengestellt?) von **Aḥmed Efendî**, Professor der mathematischen Wissenschaften an der Generalstabs- und Artillerieschule. Ein Band, lithographirt in der Druckerei der Staatsschulen 1299, 1881/82 bis zum Bogen 24, von da bis zum Ende lithographirt in der Druckerei in Bûlâḳ, 1303, 1885/86. A.-N. 177. H.-N. 23971.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes. A.-N. 178. H.-N. 23972.

Der erste Theil von **an-nuchba al-'izijja** (die 'izische Auswahl), das ist eine Bearbeitung der Elemente der Geometrie, von **'Alî 'Izat ben Badawî** [gest. am Samstag, den 3. Dschumâdâ II. 1289[65a], 1872]. Er enthält die vier ersten Bücher der alten Geometrie (der Eukl. Elemente?); gedruckt in der Druckerei der polytechnischen Schule 1274, 1857/58; am Ende vier Figurentafeln. A.-N. 80. H.-N. 4841.

(Fortsetzung folgt.)

Zur Geschichte der Decimalbrüche.

Von

K. Hunrath

(aus einem Briefe an M. Cantor).

I.

Ueber den Gebrauch des Pünktchens bei Pitiscus, die Bruchstellen einer Decimalzahl abzuschneiden (Seite 555, 568 Ihrer Vorles. Gesch. Math. Bd. II).

Die Landesbibliothek zu Kassel besitzt unter Math. in fol. 207 Viëta's Canon mathematicus seu ad triangula cum appendicibus, Paris 1579, (Seite 537 des 2. Bandes Ihres Werkes). Aus dem angehängten liber singularis', Seite 17, setze ich folgende Stelle hierher:

Numeri... Canonici — per ternas distinguuntur figuras (die Zahlen des Kanons werden in Gruppen von je drei Ziffern zerlegt), ne immensitas taedio sit, & aciem oculorum, cui consulendum est, offendat. Hac distinctionum cõmoditate non freti, solertes alioqui Logistae, magis probabant in Canonum structuris ad Triangula, vti partium Sexagesimis, & Sexagenis, adsumpto Sinu Hypothetico partium 60, seu unius Sexagenae. At, nisi praestò sit tabula ἑξ*εκονταδῶν, vix multiplicant, vix diuidunt, vix è quadratis latera extrahunt securè. Omnino lubrica est hujusmodi Logistice, & in quam negotiosum est non impingere. Neque in eâ, etsi Astronomicam vocant, vlla inest methodus, quae non sit in Catholicâ paratior, & expeditior. Quod enim in circulationibus (bei cyclometrischen Berechnungen?), per Sexagesima praestant, & Sexagenas, adfixo circa tabellã, nõ sine fastidio & laesione oculorum, intuitu, idem per partium Millesima, & Millenas promptiùs absoluitur, & felicius, absque vllius tabulae inspectione, ex solâ communi Arithmetices viâ. Denique in Mathematicis, Sexagesimorum & Sexagenarum parcus vel nullus, Millesimorum vero & Millenarum, Centesimorum & Centenarum, Decimorum & Denarum, & istius generis verè Arithmeticorum adscensuum et descensuum, frequẽs, vel omnis, vsus esto...

Eine klare Absage an die Sexagesimalbrüche zu Gunsten der Decimalbrüche. Nun zu der Art, wie Viëta die Bruchstelle bezeichnet:

1. durch kleineren Satz; Beispiele von der ersten Seite der ersten Tafel des Canon: 99,999 9831, 100,000 0169,
99,998 629, 100,001 371,

* Steht so zu lesen, statt η.

von der zweiten Seite der ersten Tafel:

$$99{,}996\,{\scriptstyle 19}, \qquad 100{,}003\,{\scriptstyle 81},$$

bei letzteren ein Sternchen: $99{,}996\,\overset{*}{\scriptstyle 19}$, $100{,}003\,\overset{*}{\scriptstyle 81}$ und am Rande die Bemerkung:

* Centesima integri, ut ante Millesima, et decies Millesima, et mox, Decima.

Beispiel für ein Bruchstelle („mox Decima') von Seite 9 der ersten Tafel:

$$99{,}744\,{\scriptstyle 1} \text{ und } 100{,}256\,{\scriptstyle 6}.$$

2. durch eine Ueberschrift am Kopf; Beispiel aus der zweiten Tafel:

Millena	Part.	Millesima
1,	745,	241
. . . . .	. . . . .	. . . . .
50,	000,	000
. . . . .	. . . . .	. . . . .
70,	710,	678.

3. noch anders in dem schon angeführten angehängten: Francisci Viétaei Universalium Inspectionum ad canonem math. liber singularis: Auf Seite 15, 51, 53, 54, 56, 57, 58, 59 werden die Decimalstellen durch kleinere Schrift und durch Unterstreichen bezeichnet; Beispiel von Seite 15: fur $r = 100{,}000{,}\underline{\scriptstyle 000{,}00}$ die Grenzen für π zu $314{,}159{,}\underline{\scriptstyle 265{,}37}$ und $314{,}159{,}\underline{\scriptstyle 265{,}35}$ der mittlere Werth zu $314{,}159{,}\underline{\scriptstyle 265{,}36}$ [zu bemerken das Abtheilen der Bruchstellen zu drei Ziffern!].

Endlich auf Seite 64 und 65 werden die Bruchstellen von der ganzen Zahl durch einen senkrechten Strich getrennt und klein geschrieben; Beispiele:

$$9{,}999{,}989{,}540\,|\,{\scriptstyle 00,27,35,29,00} \text{ und } 9{,}999{,}997{,}386\,|\,{\scriptstyle 00,01,70,82,49}.$$

[Dass hier die Bruchstellen nicht in Gruppen zu drei, sondern zu zwei Ziffern abgetheilt werden, erklärt sich daraus, dass die Zahlen Quadratzahlen sind.]

Von diesem senkrechten Strich zum Punkt ist nur ein kleiner Schritt.

II.

Auf Seite 568 heisst es bei Ihnen:

„Darüber, ob Beyer die Stevin'schen Schriften wirklich nicht gekannt hat, ist Zweifel eher möglich als bei Bürgi."

In der von mir vor längerer Zeit aus der Frankfurter Bibliothek entliehenen Ausgabe von Beyer's Logistica decimalis — leider habe ich mir das Jahr der Ausgabe und die Nummer des Katalogs nicht notirt, oder die Notiz ist mir abhanden gekommen — wird auf Seite 113 von Johann Semsen Decimalrechnung („auß Anweisung Simon Stevins") im 3., 4., 5. und 6. cap. lib. I. Geodaes. gesprochen:

„Joh. Sems schreibt die ganze vnnd Brüche vnbezeichnet bey einander: Darnach | setzet er die Nennern der Brüche neben zu: Zum dritten | numerirt er die Zehlern | und auch absonderlich die Nennern: Letzlich dividirt er was die Zehlern gegeben | durch die Nennern | und notirt den Zehler vnnd Nenner deß Bruchs neben die Gantzen."

Es werden auch Beispiele aus Sems' Geod. gegeben:

für Addition:

56036	100ste theyle
47038	100ste theyle
Summa 1030*|84	100ste theyle;

für Subtraction:

Von	12004	100sten theyl der Ruthen |
Ziehet	5625,	100ste theyl der Ruthen
Rest	6379,	100e theyl der Ruthen;

für Multiplication:

2862	100ste Ruthen
2884	100ste Ruthen
11448	10000e □t Ruthen
22896	
11448	
5724	
710*|9208	1000e □t Ruthen.

Beispiel für Division: 7109028 10000e Ruthen | durch 2862 100e Ruthen.

$$\left.\begin{array}{ll}\overline{Ds} & 7109028 \\ \overline{DR} & 2862\end{array}\right\} Q.\ 2484$$

$$\left.\begin{array}{ll}\overline{DS} & 10\,000 \\ \overline{DR} & 100\end{array}\right\} Q.\ 100$$

$$\left.\begin{array}{ll}\overline{DS} & 2484 \\ \overline{DR} & 100\end{array}\right\} Q.\ 24\frac{84}{100}.$$

Sems' Geodäsie selbst habe ich nicht zu Gesicht bekommen. Sie erwähnen (S. 566) die bei Stevin vorkommende kürzere Schreibweise

$$54 \, (2) \text{ für } \frac{54}{100} \text{ und } 707 \, (2) \text{ für } 7\frac{7}{100}.$$

Möglich, dass Sems 56036 (2) schreibt und Beyer das Zeichen in Worte übersetzt. Jedenfalls aber hat Beyer, wenn nicht Stevin's Verfahren selbst, so doch Semsens Anwendung desselben gekannt und sich zu dieser Kenntniss bekannt.

Beifolgendes Heftchen** enthält auf Seite 235 eine kurze Anzeige der auch von Ihnen besprochenen Geschichte der Rechenkunst von Villicus, die einen Hinweis auf die Beziehung Beyer's zu Stevin enthält.

* Der Strich bei 1030|84 und 710|9208 bei Beyer gedruckt.

** Neue Philosophische Rundschau, Jahrgang 1892, Nr. 15.

Recensionen.

Einleitung in die theoretische Physik. Von V. v. Lang. Zweite umgestaltete und vermehrte Auflage. 983 S. mit 126 eingedruckten Holzstichen. Braunschweig 1891. Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. Preis 20 Mk.

Schon der äussere Anblick des vorliegenden Werkes zeigt, dass gegenüber der ersten Auflage eine wesentliche Vermehrung des Stoffes stattgefunden hat. Von grösserer Wichtigkeit ist indessen die innere Umgestaltung, zu der sich der Verfasser entschlossen hat, indem er nicht mehr allein die mathematischen Kenntnisse der Mittelschulen für ausreichend erachtet, sondern gleich die Differentialrechnung zu Grunde legt. Nach unserer Ansicht muss auf den Vordersatz des den Zweck behandelnden Vorwortes der ersten Auflage: „Wer mit den physikalischen Kenntnissen der Mittelschulen ausgerüstet nun auf dem Gebiete der theoretischen Physik sich belehren will, der muss ...“ der Nachsatz folgen: der muss sich zunächst, oder mindestens gleichzeitig, mit Differential- und Integralrechnung befassen. Es ist eben durchaus nothwendig, dass bei jedem Studium, wenn es erfolgreich sein soll, auch die nöthigen Vorkenntnisse zu erwerben sind. Ganz einverstanden sind wir mit dem Verfasser, wenn er sagt, dass der Anfänger bei den meisten Büchern der theoretischen Physik einen grossen Sprung thun muss; denn diese Bücher setzen Differential- und Integralrechnung eben als bekannt voraus. Dass aber hieraus nicht die Weglassung der Differential- und Integralrechnung gefolgert werden darf, dies hat auch der Verfasser bei der Bearbeitung der zweiten Auflage sehr richtig empfunden. Jetzt erst nimmt das Buch, nach unserer Auffassung, die richtige Stelle beim Hochschulunterricht ein, indem es während der beiden ersten Semester neben den Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung für die künftigen Semester gründlich vorbereitet. Die jedem einzelnen Capitel angehängten Literaturverzeichnisse sind für das eingehendere Studium von grossem Werth für den Studirenden.

B. Nebel.

Vorlesungen über mathematische Physik. Von Gustav Kirchhoff. Zweiter Band: Mathematische Optik, herausgegeben von K. Hensel, mit einem Bildnisse Kirchhoff's. 272 S. Dritter Band: Elektricität und Magnetismus, herausgegeben von M. PLANCK. 228 S. Mit viel Figuren im Text. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 1891.

Nach dem Tode Kirchhoff's wurde allgemein bedauert, dass die Vorlesungen über mathematische Physik, mit Ausnahme derjenigen über Mechanik, nicht im Druck erschienen sind. Um diese Lücke auszufüllen, haben es die Herren Hensel und Planck unternommen, auf Grund sorgfältig ausgearbeiteter Collegienhefte Kirchhoff's, mit Benützung mehrerer Zuhörerhefte aus verschiedenen Vorlesungsperioden, die Vorlesungen in einer solchen Art herauszugeben, wie sie derjenigen Kirchhoff's am nächsten kommt. Mit welcher Mühe eine derartige Arbeit verbunden ist, weiss nur Derjenige voll und ganz zu würdigen, der sich einer ähnlichen Aufgabe schon unterzogen hat. Die noch rückständigen Vorlesungen über Wärme werden von Herrn Planck bearbeitet. Allerseits werden diese Vorlesungen mit grosser Anerkennung Aufnahme finden. B. NEBEL.

Gesammelte Abhandlungen. Nachtrag. Von GUSTAV KIRCHHOFF. Herausgegeben von L. BOLTZMANN. Mit einer Tafel. Leipzig 1891. Verlag von Johann Ambrosius Barth. 137 S.

Nachdem Kirchhoff im Jahre 1882 seine bis dahin erschienenen Abhandlungen zu einer Gesammtausgabe vereinigt und auch veröffentlicht hatte, so wünschte der Verleger, der Vollständigkeit wegen, dass auch die bis zu Kirchhoff's Tode noch erschienenen Abhandlungen, zu einem Nachtrag vereinigt, herausgegeben werden. Im Ganzen sind es noch neun Abhandlungen, die L. Boltzmann in chronologischer Reihenfolge zusammengestellt hat, da eine Gruppirung dem stofflichen Inhalte nach deswegen ausgeschlossen war, weil mehrere Gebiete in derselben Abhandlung berührt wurden. Der Vollständigkeit wegen wurden auch die Versuche Hansemann's mit aufgenommen, da sie Aufschluss geben über die physikalische Verwerthbarkeit der Kirchhoff'schen Abhandlungen. B. NEBEL.

Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichtes. Von LUDWIG BOLTZMANN. I. Theil. Ableitung der Grundgleichungen für ruhende, homogene, isotrope Körper. Mit Figuren im Text und auf zwei Tafeln. Leipzig 1891. Verlag von Johann Ambrosius Barth. — 139 S. Preis 5 Mk.

Wohl Jeder, der sich mit Maxwell's Ideen über Elektricität und Magnetismus beschäftigt hat, hatte mit mehr oder minder grossen Schwierigkeiten zu kämpfen. Selbst Diejenigen, welche bahnbrechend auf diesem Gebiete gearbeitet haben, haben dies offen zugestanden. Es ist daher wiederholt versucht worden, die Endresultate, zu denen Maxwell gelangt ist, auf eine einfachere Weise in streng mathematischer Form herzuleiten, damit namentlich der Anfänger tüchtig vorbereitet wird für die Schwierigkeiten, welche sich ihm beim Studium der Originalabhandlungen entgegenstellen werden. Diesen Zweck verfolgt auch Boltzmann durch die Herausgabe seiner Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichtes, und zwar beschränkt er sich, der Klarheit und Anschaulichkeit wegen, zunächst auf ruhende, homogene, isotrope Körper. Die Anwendung der Maxwell'schen Theorie auf inhomogene, anisotrope und bewegte Körper bleibt künftigen Veröffentlichungen vorbehalten. Unzweifelhaft ist es ein grosses Verdienst, welches sich Boltzmann durch diese Arbeit erworben hat, was gewiss auch allerseits gewürdigt wird.

B. Nebel.

Vorlesungen über die Theorie des Lichtes. Von P. Volkmann. Unter Rücksicht auf die elastische und die elektromagnetische Anschauung. Mit in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1891. Verlag von B. G. Teubner. 432 S.

Verfasser sieht es als eine Aufgabe derjenigen Lehrer an, welche vorhandene Theorien ihren Schülern vortragen, dass sie nicht eine derselben für sich allein herausgreifen, sondern dass sie diejenigen Theorien, welche zur Zeit die meisten Vertreter finden, nicht nur gleichzeitig vortragen, sondern dieselben auch kritisch einander gegenüberstellen; denn nur auf diese Weise wird die Urtheilsfähigkeit geschärft und der Zusammenhang zwischen dem gegenwärtigen Stand der Wissenschaft hergestellt. Leider kommt es nur zu häufig vor, dass sich die Lehrer in Folge ihrer einseitigen Specialarbeiten nicht mehr in die Lage ihrer Schüler hineindenken können. Die Letzteren sind sehr oft unbefriedigt, weil sie mit einem an sich auch abgeschlossenen Colleg vorerst Nichts anzufangen wissen, bis sie sich durch weitere Studien erst den Zusammenhang mit dem Uebrigen hergestellt haben.

Verfasser, der besonderen Werth auf die geschichtliche Entwickelung der Theorien legt, stellt in einer Einleitung die über das Licht aufgestellten Theorien einander gegenüber und zeigt, dass die Emissionstheorie von Newton nach den heutigen Anschauungen nur noch historisches Interesse haben kann. Obgleich in neuerer Zeit die elektromagnetische Lichttheorie wesentliche Fortschritte zur Erlangung der Alleinherrschaft zu verzeichnen hat, so ist doch die Undulationstheorie von Huygen's, gestützt auf die Elasticitätstheorie, uns zu sehr in Fleisch und Blut übergegangen, weshalb der Verfasser diese beiden Theorien in den folgenden Capiteln neben einander behandelt. Das erste Capitel umfasst die Grundlagen der Undulationstheorie, nämlich die Elemente der Undulationstheorie, das Princip der Interferenz und das Princip von Huygens. Die Theorie der Strahlung bildet den Inhalt des zweiten Capitels und dient zugleich als Einführung in die geometrische Optik isotroper Körper. Der Theorie der Beugung mit den Fraunhofer'schen und Fresnel'schen Beugungserscheinungen ist das folgende Capitel gewidmet. Darauf schliesst sich in einem besonderen Capitel die Theorie der Lichtbewegung in Krystallen an. Das fünfte Capitel dient zur Einführung in die geometrische Optik anisotroper Medien, während das nächste Capitel das Problem der Reflexion und Brechung an der Grenze optisch verschiedener Medien zum Gegenstande hat. Die Anwendungen auf die planparallele Platte umfassen dagegen ein besonderes Capitel. In dem Schlusscapitel wird auch noch die Metallreflexion behandelt. — Zweifellos wird sich das Buch einer grossen Beliebtheit, insbesondere bei der studirenden Jugend, zu erfreuen haben. B. Nebel.

Lehrbuch der Physik. Von Violle. Deutsche Ausgabe, von fünf Assistenten der physikalisch-technischen Reichsanstalt. Erster Theil: Mechanik. Erster Band: Allgemeine Mechanik und Mechanik der festen Körper. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren. Lieferung 1—3. Berlin 1891. Verlag von Julius Springer. Preis pro Lieferung 2 Mk.

Es war ein guter Gedanke von den Uebersetzern, dass sie das Violle'sche Lehrbuch der Physik auch dem deutschen Leserkreis erschlossen haben; denn schon die französische Ausgabe hat sich vielfach bei uns Eingang verschafft, wie viel mehr wird dies erst die deutsche Uebersetzung thun. In der Anordnung des Stoffes weicht Violle nicht von dem als gut erprobten Gange ab, bietet somit der Mechanik den ersten und wichtigsten Platz dar; zwei Bände, bestehend aus je fünf Lieferungen, sind ihr gewidmet, und zwar umfasst der erste Band die allgemeine Mechanik und die Mechanik der festen Körper, während den Inhalt des zweiten Bandes die Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper bildet. Eine gute Grundlage in der Mechanik erleichtert das weitere Studium der Physik ungemein. Während die Uebersetzer bestrebt waren, die elegante Schreibweise Violle's auch in die deutsche Uebersetzung zu übertragen, hat die Verlagsbuchhandlung durch die hübsche Ausstattung, insbesondere durch den reinen, gut zu lesenden Druck, wesentlich das Ihre beigetragen. Im Interesse der Verlagsbuchhandlung liegt es, der Studirenden wegen, die Herausgabe der weiteren Lieferungen möglichst zu beschleunigen, damit dieselben nicht genöthigt sind, inzwischen ein anderes Buch zu wählen. B. Nebel.

Krystallsysteme und Krystallstructur. Von Schoenflies. Mit 73 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1891. Verlag von B. G. Teubner. 638 S.

Mehr und mehr verlässt man in neuerer Zeit die rein empirische Eintheilung der Krystalle und wendet sich der deductiven Methode zu, wonach sich die Systematik der Krystalle aus dem Symmetriegesetz und die Theorie der Structur aus einer einzigen fundamentalen Hypothese in streng mathematischer Weise ableiten lassen. Nicht die äussere Form der Krystalle ist nach der heutigen Auffassung das Charakteristische, sondern die merkwürdige Abhängigkeit der Krystallsubstanz von der rein geometrischen Richtung bezüglich der physikalischen Eigenschaften. Verfasser stellte sich in dem ersten Theil des Buches die Aufgabe, die 32 Krystallclassen auf elementare Weise aufzustellen, welche schon Hessel auf Grund des Symmetriegesetzes gefunden und von welchen er nachgewiesen hatte, dass sie alle von einander verschieden sind. Der zweite Theil des Buches ist einer ausführlichen Behandlung der verschiedenen Theorien über die Krystallstructuren gewidmet. So auseinandergehend oft auch die einzelnen Theorien sind, so ist doch der Ausgangspunkt ein gemeinsamer, nämlich die Hypothese, dass die regelmässige Anordnung der Molekelen das Bedingende für die Krystallstructur sei, und in dieser Beziehung lehnen sie sich an die Theorien von Bravais und Sohncke an. Der Verfasser prüft nun die verschiedenen Structurtheorien auf ihre Möglichkeit hin und sucht nach dem Verhältniss, in welchem die verschiedenen Structur-Auffassungen zu einander stehen. Dies führt natürlich zu der Molekel selbst, welche nach Form und Qualität vielfachen Annahmen bei den einzelnen Theorien unterworfen war und daher die Basis für den weiteren Aufbau bildete. Klar ist sich dabei der Verfasser, dass sich auf rein mathematische Weise eine Entscheidung zwischen der einen oder der anderen Theorie nicht treffen lasse, sondern dass hier nur vom physikalischen und krystallographischen Standpunkte aus geurtheilt werden kann; er begnügt sich, den geometrischen Theil der Aufgabe möglichst vollständig zu erledigen. B. Nebel.

Die Elemente der photographischen Optik. Von H. Schroeder. Enthaltend eine gemeinverständliche Darstellung der Einrichtung photographischer Linsensysteme, sowie Angabe über Prüfung derselben. Zugleich als Ergänzungsband zu Vogel's Handbuch der Photographie. Vierte Auflage, II. Theil. Mit 85 Figuren im Text. Berlin 1891. Verlag von Robert Oppenheim (Gustav Schmidt). 220 Seiten. Preis 6 Mk.

In neuerer Zeit giebt sich die erfreuliche Thatsache zu erkennen, dass die praktischen Optiker mit ihren Erfahrungen an die Oeffentlichkeit rücken und somit den Schleier des Geheimnissvollen, mit dem früher die optischen Werkstätten umgeben waren, lüften. Sie fühlen, dass mit dem Geheimhalten der durch die Erfahrung gewonnenen Systeme nicht mehr auszukommen ist. Die Photographie mit ihrem Drängen nach Vorwärts gab den Impuls, rechnerisch bei der Auffindung von Linsensystemen vorzugehen, und sie fordert die mathematische Welt auf, ihr auf diesem schwierigen Gebiete behilflich zu sein. Das Umhertasten und heimliche Abmessen bewährter Systeme reicht nicht mehr aus, mathematische Klarheit muss auch hier zum Durchbruch kommen, wenn wirklich ein Fortschritt erzielt werden soll. Es ist daher das Princip der Arbeitstheilung sehr anzuerkennen, das bei der Neubearbeitung von H. W. Vogel's Handbuch der Photographie zum Ausdruck gekommen ist, indem er die photographische Optik durch einen Mann bearbeiten liess, der Theorie und Praxis seit vielen Jahren in sich vereinigt. Das Buch ist mehr für den Praktiker geschrieben, und zwar sowohl für den Optiker, als auch für den Photographen, weshalb auch keinerlei Anforderungen an höhere Mathematik gestellt. werden. Vielfach kommen Ausdrücke vor, die dem Gelehrten etwas fremd sind und an die Praxis erinnern. Ganz unglücklich ist nach unserem Dafürhalten die Einführung des Begriffes der Kraft und der Arbeit in die Optik, wie sie durch den Verfasser erfolgt ist. Er glaubte, die Uebertragung dieser Begriffe aus der Wärmetheorie in die Optik liesse sich so leicht bewerkstelligen. Mit dem Einführen der Worte ist es nicht gethan, wenn nicht, wie hier, Verwirrung geschaffen werden soll. Seite 33 ist die Arbeit als der Ablenkungswinkel eines Lichtstrahles definirt, wenn er von einem Medium in ein anderes übergeht, während Seite 38 die Vergrösserung oder Verkleinerung, hervorgebracht durch ein Linsensystem, als optische Arbeit definirt wird. Aehnliches gilt auch bezüglich des Begriffes Kraft, Flächenkraft ist z. B. definirt als sinus des Einfallswinkels. Glücklicher Weise geht dies nicht durch das ganze Buch durch; wir müssen abbrechen, damit dem wahren Werthe des Buches kein Nachtheil erwächst. Die sorgfältige Literaturzusammenstellung bedarf besonderer Anerkennung. B. Nebel.

Experimental-Untersuchungen über Elektricität. Von Michael Faraday. Deutsche Uebersetzung von S. Kalischer. Dritter Band. Mit in den Text gedruckten Abbildungen und fünf Tafeln. Berlin 1891. Verlag von Julius Springer. 646 S. Preis 16 Mk.

Das Streben nach Vollständigkeit hat den Uebersetzer veranlasst, nicht allein den dritten Band der „Experimental Researches“ hier wiederzugeben, sondern auch Dasjenige, was später erschienen ist, namentlich die 30. Reihe. Schon der einfachste Physikunterricht macht sich an den verschiedensten Stellen die wissenschaftlichen Untersuchungen Faraday's in den Endresultaten zu Nutzen. Ueberall tritt uns der Name Faraday entgegen, weshalb es für Den, der sich eingehender mit Physik beschäftigen will, unbedingt nöthig ist, sich auch mit den Arbeiten dieses genialen Forschers vertraut zu machen, zumal sie äusserst anregend wirken. Für die formelle Erleichterung dieses Studiums haben wir dem Uebersetzer und dem Verleger den Dank auszusprechen; sie haben das Verdienst, für die Verbreitung der Faraday'schen Lehren in Deutschland wesentlich beigetragen zu haben.

B. Nebel.

Der Betrieb und die Schaltungen der elektrischen Telegraphen. Von Zetzsche. Unter Mitwirkung mehrerer Fachmänner. Zugleich als zweite Hälfte des dritten Bandes des Handbuchs der elektrischen Telegraphie. Heft 3. Vierte Abtheilung. Die automatische Telegraphie. Bearbeitet von A. Tobler und E. Zetzsche. Fünfte Abtheilung. Der Betrieb der elektrischen Telegraphen. Mit 63 in den Text gedruckten Abbildungen. Halle a. S. 1891. Verlag von Wilhelm Knapp. 200 S. Preis 6 Mk.

Mit dem vorliegenden dritten Hefte ist ein Werk abgeschlossen, das ein Ganzes für sich bildet und sich zugleich in das grosse Werk von Zetzsche's Handbuch der elektrischen Telegraphie als die zweite Hälfte des dritten Bandes einreiht. Die vierte Abtheilung umfasst die automatische Telegraphie, welche von immer grösserer Wichtigkeit wird. Der Telegraphenbetrieb, welcher zum Gegenstande der fünften Abtheilung gemacht ist, kommt hier nicht in seiner allgemeinsten Bedeutung zum Ausdruck, da Alles, was zur eigentlichen Telegraphirthätigkeit gehört, schon in den früheren Heften resp. Bänden grössten Theils erledigt ist. Der Umfang des Begriffes wird enger gezogen und beschränkt sich auf den technischen Telegraphenbetrieb, das heisst auf den Telegramm-Beförderungsdienst, wobei von dem eigentlichen Administrationsdienst, wie ihn die einzelnen Verwaltungen festsetzen, abgesehen wird.

B. Nebel.

Ueber photographische Messkunst, Photogrammetrie und Photographie. Von Pollack. Vortrag, gehalten in der Jahresversammlung der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien, am 17. März 1891. Sonderabdruck aus: „Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft." Heft 4. Wien 1891. Verlag von R. Lechner's Hof- und Universitäts-Buchhandlung (Wilh. Müller). 21 Seiten. Preis 80 Pf.

Verfasser giebt zunächst einen geschichtlichen Ueberblick über die Versuche, die Photographie in der Geodäsie zu verwenden, geht dann zu den Methoden und Apparaten über, wobei er den von ihm benützten Phototheodolit besonders hervorhebt, und beschreibt schliesslich seine photogrammetrischen Arbeiten am Arlberg. Noch werden die Arbeiten Anderer erwähnt und dann auf die weitere Verbreitung der Photogrammetrie hingewirkt.

B. Nebel.

Die Einheit der Naturkräfte. Von Secchi. Ein Beitrag zur Naturphilosophie. Autorisirte Uebersetzung von Schulze. Zweite, revidirte Auflage. Mit 61 in den Text gedruckten Holzschnitten. 1. Lieferung. Braunschweig 1891. Verlag von Otto Salle. 80 S. Preis 80 Pfg.

Die neue wohlfeile Subscriptions-Ausgabe soll in neun Lieferungen erscheinen, zu einem Preise von je 80 Pfg. Obwohl die 32 Seiten lange Einleitung manchen Einblick in das Buch gewährt, so ist es doch nöthig, die weiteren Lieferungen abzuwarten. Das erste Buch beginnt mit der Wärme. — Dass das Buch einen populären Charakter trägt, und deshalb weiten Kreisen zugänglich gemacht werden soll, folgt schon aus der billigen Herausgabe durch den Verleger; mathematische Beweise sind daher auch gänzlich vermieden.

B. Nebel

Leitfaden für den Anschauungs-Unterricht in der Physik. Von Pieper. Dessau 1891. Verlag von Paul Baumann. 55 S. Preis 60 Pf. (cartonirt.)

„Noch ein physikalisches Lehrbuch!" Dies ist der Anfang des Vorwortes. Der Verfasser fühlt, dass er etwas geschaffen hat, das da und dort ein Kopfschütteln hervorrufen wird. Er sucht sich in der Einleitung zu rechtfertigen; doch, was er anführt, sind Mängel, die dem Lehrer oder der Schule anhaften. Ein energischer Lehrer, der einen guten Physikunterricht, auch in praktischer Hinsicht, genossen hat, wird nicht rasten, bis die genannten Mängel beseitigt sind. Hier ist nicht der Raum, um die Ansichten des Verfassers zu bekämpfen; wohl aber muss gesagt werden, dass das vorliegende Buch nach unserem Dafürhalten für einen Gymnasialunterricht unzureichend, dagegen bei den Volksschulen zu gebrauchen ist.

B. Nebel.

Das Intensitätsgesetz und die Gleichartigkeit der analytischen Formen in der Lehre von der Energie. Von Wronsky. Eine elementare Einführung in die Energetik. Frankfurt a. O. 1889. Verlag von G. Harnecker & Co. 24 S. Preis 80 Pf.

Verfasser erwähnt in seinem Vorwort eine Arbeit von G. Helm und ein von diesem herrührendes, für alle Energieformen giltiges Gesetz. Das Letztere dürfte aber dem Inhalte nach schon älter sein, als der Verfasser glaubt; denn es war uns ganz bekannt. Verfasser will nun dieses Gesetz in ganz elementarer Weise zur Darstellung bringen, um das Studium der Helm'schen Schrift zu erleichtern. Zu dem Zweck beginnt er mit der Ausdehnungsarbeit, geht dann zur kinetischen und potentiellen Energie über und schliesst mit der Wärme.

B. Nebel.

Ueber den Beweis des Princips von der Erhaltung der Energie. Von Theodor Gross. Berlin 1891. Verlag von Mayer & Müller. 56 S. Preis 1 Mk. 20 Pf.

Derjenige, welcher sich für den Inhalt des vorliegenden Schriftchens interessirt, hat einen grösseren Gewinn, wenn er dasselbe rasch durch-liest. Verfasser geht von den Wegen aus, die zur Herleitung des Princips von der Erhaltung der Energie von Robert Mayer und von Helmholtz eingeschlagen wurden, wobei er sehr für den Ersteren eintritt.

B. NEBEL.

100 Aufgaben aus der niederen Geometrie nebst vollständigen Lösungen. Mit 104 Abbildungen von Dr. KARL SCHWERING, Oberlehrer und Professor. Freiburg i. Br. 1891. Herder'sche Verlagshandlung. X und 154 S. 8°. Preis 2 Mk.

Die Zahl der Aufgaben ist zwar eine beschränkte — 60 Aufgaben aus der Planimetrie, 40 aus der Stereometrie — aber fast jede Aufgabe liefert Stoff und Anregung zu Erweiterungen und neuen Aufgaben, die in vielen Fällen nebenbei angegeben sind.

Die Wahl der Aufgaben muss als eine ausserordentlich glückliche bezeichnet werden. Zunächst haben die meisten einen praktischen oder wissenschaftlichen Hintergrund, wodurch das Interesse für dieselben beim Schüler unzweifelhaft erhöht werden muss. Ferner begegnen wir hier nicht den gewöhnlichen „Schulblümchen", die man aller Orten trifft, sondern die Aufgaben, sowohl wie die Lösungen, sind vielfach neu und pikant. Unwillkürlich fühlt man sich bei manchen Aufgaben bewogen, ihnen das Prädikat „klassisch" beizulegen, selbst wenn sie nicht gerade hervorragende Schönheiten zeigen oder einen besonderen Glanz entfalten. Schliesslich sind dieselben so allseitig und mannigfaltig in ihrer Art, dass man sagen kann: Der Primaner, welcher diese „100 Aufgaben" durchgearbeitet hat, kann sich ruhig der Abiturienten-Prüfung unterziehen.

Die Lösungen sind nicht blos angedeutet, sondern erschöpfend durchgeführt. „Wie man längst durch Musteraufsätze und Musterübersetzungen dem Erlernen der Sprachen ein willkommenes Hilfsmittel dargeboten hat, so glaubt der Verfasser für die Erleichterung des Eindringens in die Raumlehre einen ähnlichen Dienst zu erweisen." Der zur Lösung führende Gedanke tritt möglichst prägnant hervor und ist für viele andere Aufgaben fruchtbar. In der Reihenfolge ist eine gewisse Anordnung nach Lösungsmethoden zwar angestrebt, tritt aber keineswegs hervor. Es ist schade, dass Verfasser von der bewährten Methode, die Aufgaben nach Gruppen, denen ein gemeinsames Lösungsprincip zu Grunde liegt, deutlich zusammenzufassen, abgewichen ist. — Die zur Lösung nöthigen Sätze sind in vollem Wortlaute beigefügt. Dadurch ist das Studium der Aufgaben erleichtert und angenehm gemacht; ausserdem kann das Buch neben jedem keine Aufgaben enthaltenden Lehrbuche gebraucht werden.

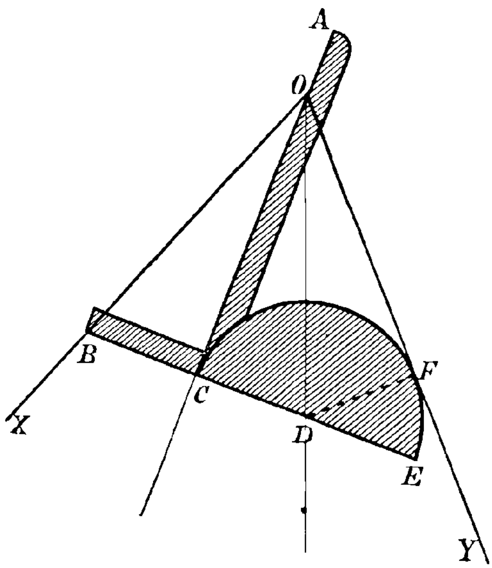
Ausser geometrischen Sätzen sind nicht nur Lehren der Algebra und Trigonometrie in die Darstellung verflochten, sondern es sind auch in höchst geschickter Weise die Kegelschnitte eingeführt, und ohne Mühe wird der Schüler mit den wichtigsten Eigenschaften derselben bekannt gemacht. Da die neuen Lehrpläne die Kegelschnitte in den Unterricht aufgenommen wissen wollen, so macht der genannte Umstand das Buch zur Einführung sehr geeignet.

Ausstattung, Druck, Papier sind tadellos. Den 100 Aufgaben sind nicht weniger als 104 sauber gestochene Holzschnitte beigefügt. Eine so reiche Ausstattung mit Figuren, die wir für einen ganz besonderen Vorzug halten, dürfte sich bei keinem anderen ähnlichen Werke finden. Dabei ist der Preis von zwei Mark ein ungemein billiger zu nennen. Kurz: Die „100 Aufgaben" mögen Lehrern und Schülern auf das Wärmste empfohlen sein.

F. Schütte.

Della Trisezione dell' Angolo, quale operazione grafica da Angelo Pegrassi. Neun Seiten Folio lithographirt, mit sieben Figuren. 1891.

Die vorliegende Schrift behandelt das berühmte Problem der Dreitheilung des Winkels als eine graphische Operation. Die vom Verfasser erfundene Lösung kann man in gewissem Sinne als eine Lösung mit Zirkel und Lineal bezeichnen. Das zur Lösung verwendete höchst einfache und (aus Carton) leicht herzustellende Instrumentchen, welches in der beigegebenen Figur schraffirt ist, besteht nämlich aus einem (Halb-)Kreise, CFE, dessen Mittelpunkt D, und einem Lineal, einer Geraden CA, welche senkrecht auf dem Durchmesser CE steht. Dieser ist verlängert um ein Stück $CB = CD = DE$.



Ist nun XOY der zu theilende Winkel, so legt man das Instrument derartig, dass der Scheitel O auf der Geraden AC zu liegen kommt, der Punkt B des Instrumentes auf dem einen Schenkel (OX) und zwar so, dass der andere Schenkel (OY) den Kreis berührt. Verbindet man jetzt O mit den Punkten C und D, so theilen diese Verbindungslinien den Winkel in drei gleiche Theile. Zum Beweise verbinde man noch den Berührungspunkt F mit D; dann ist

$$\Delta OCB \cong OCD \cong ODF.$$

Die vorliegende Arbeit behandelt die Herstellung und Anwendung des Instrumentes, den Beweis und die verschiedenen Specialfälle, ohne leider auf das Wesen der Sache einzugehen, und z. B. die Curve zu untersuchen, welche der Punkt B beschreibt, wenn man durch O die Gerade AC und längs des Schenkels OY den Kreis gleiten lässt. Immerhin verdient die Arbeit wegen der eleganten und interessanten Construction und ihrer klaren Darstellung alle Beachtung. F. Schütte.

Einladungsschrift der Fürsten- und Landesschule Grimma zu der Einweihung des neuen Schulgebäudes am 24. September 1891. **Reihensummation auf geometrischem Wege.** Von Professor Ernst Uhlich. S. 43 — 49 und **Die Ableitung der ebenen Trigonometrie aus drei Grundgleichungen.** Von Professor Dr. Theodor Häbler. S. 61—69.

Zwei Sonderabzüge aus einem kleinen Sammelbande liegen uns vor, über welche wir in Kürze und gemeinschaftlich berichten, wiewohl zwischen beiden kein anderer Zusammenhang besteht, als dass beide derselben Einladungsschrift angehören. Herr Uhlich zeigt an drei Beispielen die Anwendung des Grundgedankens, dass die Zerlegung eines geometrisch Gegebenen in eine endliche oder unendliche Anzahl von Theilstücken, welche irgend einem Gesetze gemäss gewählt werden, die Summirung einer endlichen oder unendlichen Reihe vollziehen lässt. Herr Uhlich schickt zugleich eine Angabe der nicht umfangreichen Literatur voraus, welche den gleichen Gedanken, aber an anderen Beispielen, zur Anwendung brachte. Herr Häbler hat sich die Aufgabe gestellt, diejenigen Systeme von Grundgleichungen in Parallele zu bringen, aus welchen die sämmtlichen Formeln der ebenen Trigonometrie sich ableiten lassen. Besonders hervorzuheben dürften die Untersuchungen sein, welche darauf gerichtet sind, den Satz von der Winkelsumme des ebenen Dreiecks, sofern er nicht selbst eine der gegebenen drei Gleichungen bildet, aus denselben abzuleiten.

Cantor.

Bibliographie

vom 1. bis 30. November 1892.

Periodische Schriften.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1. Bd. Herausgegeben von G. Cantor, W. Dyck und E. Lampe. (Chronik und Bericht über die Fortschritte der project. Invariantentheorie von Frz. Meyer.) Berlin, G. Reimer. 7 Mk. 60 Pf.

Mittheilungen der deutschen mathematischen Gesellschaft in Prag. V. Leipzig, Freitag. 7 Mk.

Beobachtungsergebnisse der königl. Sternwarte zu Berlin. 6. Heft. Berlin, Dümmler. 4 Mk.

Deutsches meteorologisches Jahrbuch von 1891. Abtheilung Württemberg. Bearbeitet von L. Meyer. Stuttgart, Metzler. 3 Mk.

— Dasselbe für 1892. Abtheilung Preussen. 1. Heft. Herausgegeben von W. v. Bezold. Berlin, Asher & Co. 3 Mk.

Jahresbericht des Centralbureau's für Meteorologie und Hydrographie im Grossherzogthum Baden. Jahrgang 1891. Karlsruhe, Braun. 6 Mk.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Berlet, B., Adam Riese, sein Leben, seine Rechenbücher und seine Art zu rechnen. Frankfurt a. M., Kesselring. 1 Mk. 20 Pf.

Müller, F., Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellenliteratur. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

Gilberti, Colcestrensis, medici Londinensis, de magnete, magneticisque corporibus et de magno magnete tellure etc. Londini 1600. Facsimiledruck. Berlin, Mayer & Müller. 21 Mk.

Reine Mathematik.

Bergbohm, J., Entwurf einer neuen Integralrechnung auf Grund der Potential-, Logarithmal- und Numeralrechnung. Leipzig, Teubner. 1 Mk.

Scheffler, H., Die quadr. Zerfällung von Primzahlen. Leipzig, Förster. 3 Mk.

Bachmann, P., Die Elemente der Zahlenlehre. Leipzig, Teubner. 6 Mk. 40 Pf.

Molien, Th., Ueber Systeme höherer complexer Zahlen. (Dissert.) Dorpat, Karow. 2 Mk.

Fenkner, H., Arithmetische Aufgaben mit besonderer Rücksicht auf Geometrie, Trigonometrie, Physik etc. Pensum der Prima von Gymnasien, Oberrealschulen etc. Braunschweig, Salle. 2 Mk.

Reye, Th., Geometrie der Lage. 2. und 3. Abtheilung. 3. Auflage. Leipzig, Baumgärtner. 1.—3. Abtheilung compl. 22 Mk.

Wehner, H., Leitfaden für den stereometrischen Unterricht an Realschulen. Leipzig, Teubner. 80 Pf.

Hülsen und Coler, Niedere Mathematik zum Gebrauch auf den königl. preuss. Kriegsschulen. Berlin, Mittler & Sohn. 3 Mk. 50 Pf.

Angewandte Mathematik.

Scherer, Hilfstafel zur Berechnung rechtwinkliger Coordinaten mit logarithmisch-graphischer Rechentafel. Kassel, Klaunig. 1 Mk.

Kriemler, J., Aus der Festigkeitslehre. Der Spannungszustand in den Punkten eines geraden Stabes bei den vier einfachen Fällen der Belastung. Vevey, Roth. 4 Mk.

Physik und Meteorologie.

W. Weber's Werke, Herausgegeben von der königl. Gesellschaft der Wissenschaft zu Göttingen. 1. und 2. Bd. Berlin, Springer. 34 Mk.

S. Ohm's gesammelte Abhandlungen. Herausgegeben und eingeleitet von E. Lommel. Leipzig, Barth. 20 Mk.

Miller, A., Ein experimenteller Beitrag zur Kenntniss der Verwandlung der Energieformen. München, Kellerer. 1 Mk.

Kolbe, B., Einführung in die Elektricitätslehre. I., statische Elektricität. Berlin, Springer. 2 Mk. 40 Pf.

Görtz, A., Ueber spectrometrische Affinitäts-Bestimmungen. (Dissert.) Tübingen, Moser. 1 Mk.

Kayser, H. und C. Runge, Die Spectren der Elemente. 6. Abschnitt. (Aus den Abhandlungen der königl. preuss. Akademie der Wissenschaft.) Berlin, G. Reimer. 2 Mk. (1.—6. Abschn.: 25 Mk. 30 Pf.)

Barus, C., Die physikalische Behandlung und die Messung hoher Temperaturen. Leipzig, Barth. 3 Mk.

Heerwagen, F., Ueber eine neue Methode zur Messung der Dielektricitätsconstanten von Flüssigkeiten. (Dissert.) Dorpat, Karow. 1 Mk.

Heydweiler, A., Hilfsb. z. Ausführung elektr. Messungen. Leipzig, Barth. 6 Mk.

Stricker, S., Ueber strömende Elektricität. 1. Hälfte. Wien, Deuticke. 2 Mk. 50 Pf.

Ewing, A., Die magnetische Induction in Eisen und verwandten Metallen. Deutsch von L. Holborn und S. Lindeck. Berlin, Springer. 8 Mk.

Barthold, Ueber Gewitterschäden, deren Zunahme, Verhütung etc. Leipzig, Felix. 80 Pf.

Börner, H., Lehrbuch der Physik für höhere Lehranstalten, sowie zur Einführung in die neuere Physik. Berlin, Weidmann. 6 Mk.

Recknagel, G., Lehrbuch der Physik zur ersten Einführung. 1. Bd. Bamberg, Buchner. 2 Mk. 40 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Der V. Band des Katalogs der arabischen Bücher der vicekoniglichen Bibliothek in Kairo.

Aus dem Arabischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen

von

Dr. HEINRICH SUTER,
Professor am Gymnasium zu Zürich.

Fortsetzung.

Abtheilung: Mathematische Wissenschaften.

3. Beschreibende Geometrie.

ب (Bâ).

Der erste Theil von **al-barâʿa al-maschrikijja** (die orientalische Auszeichnung) in der beschreibenden Geometrie, von **Ṣâbir Efendî Ṣabrî**, Lehrer der beschreibenden Geometrie und verwandter Fächer an der vicekoniglichen polytechnischen Schule [lebt jetzt 1307 noch]. Zwei Bände: der eine enthält den Text, gedruckt in der Druckerei des Unterrichtsministeriums 1300, 1882/83; der andere die Tafeln, lithographirt. 1300. A.-N. 171. H.-N. 23965.

Ein zweites Exemplar desselben Werkes (I. Theil): A.-N. 172. H.-N. 23966.

Bulûġ al-âmâl (die höchsten Hoffnungen oder Gedanken): über die vielen zur Anwendung kommenden krummen Linien, von **Ṣâbir Efendî Ṣâbrî** [dem vorigen]. Ein Band, gedruckt in der Druckerei des Unterrichtsministeriums, im Palast des Darb[66] al-Dschamâmîz. 1300. I. Auflage. A.-N. 173. H.-N. 23967.

Ein zweites Exemplar desselben Werkes: A.-N. 174. H.-N. 23968.

ت (Tâ).

At-tuḥfa al-bahijja (das glänzende Geschenk): über die beschreibende Geometrie, von **Aḥmed Efendî Nadschîb**, Lehrer der mathematischen Wissenschaften an der Generalstabs- und Artillerie-Schule [aus dem 13. Jahrh. d. H.]. Ein Band, gedruckt in Bûlâḳ. I. Auflage. 1290, 1873. Am Anfang ein Inhaltsverzeichniss, am Ende sieben Tafeln. A.-N. 169. H.-N. 23239.

ك (Kâf).

Kitâb (ein Buch) über die darstellende Geometrie, übersetzt aus dem Französischen in's Arabische von **Muḥammed Efendî Bujûmî** [aus dem 13. Jahrh. d. H.]. Anfang: Lob sei Gott, der die Leere des Daseins mit den Formen seiner Geschöpfe erfüllt hat. Zwei Theile in einem Band, gedruckt in Bûlâḳ, am Schlusse 18 Figurentafeln. A.-N. 74. H.-N. 4835.

Ein zweites Exemplar desselben Werkes: A.-N. 75. H.-N. 4836.

Kitâb (ein Buch) über die darstellende Geometrie. Lithographirt in der Druckerei der polytechnischen Schule; in zwei Bänden: der erste enthält den Text, der zweite 38 Figurentafeln. A.-N. 87. H.-N. 4848.

ل (Lâm).

Der erste Theil von **al-la'âlî al-bahijja** (die glänzenden Perlen): über die beschreibende Geometrie, übersetzt aus dem Französischen in's Arabische von **Ibrâhîm Efendî Ramaḍân** [aus dem 13. Jahrh. d. H.]. Ein Band, gedruckt in Bûlâḳ 1261, 1845; am Schlusse 40 Figurentafeln. A.-N. 66. H.-N. 4827.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes (I. Theil): A.-N. 67. H.-N. 4828.

Ein drittes Exemplar, ohne Einleitungsformel: A.-N. 150. H.-N. 22556.

م (Mîm).

Der erste Theil von **al-minḥa ad-danijja** (das geringe, unvollkommene Geschenk): über die beschreibende Geometrie, von **Ibrâhîm Efendî Ramaḍân** [dem vorigen]. Ein Band, gedruckt in der Druckerei der polytechnischen Schule 1269, 1852/53. Am Schlusse drei Tafeln, am Anfang ein Inhaltsverzeichniss. A.-N. 149. H.-N. 22555.

4. Perspective und Schattenlehre.

د (Dâl).

Ad-durr al-manṯûr (die ausgestreuten Perlen): über die Perspective und Schattenlehre, aus dem Französischen in's Arabische übersetzt von **Sajjid Ṣâliḥ Efendî** [**Bey**] **Madschdî**, vormals einem der Uebersetzer der mathematischen Wissenschaften und Lehrer des Französischen an der vicekoniglichen polytechnischen Schule in Bûlâḳ [aus dem 13. Jahrh. d. H.]. Zwei Theile in einem Band, lithographirt in der Druckerei der polytechnischen Schule 1269. A.-N. 45. H.-N. 4806.

Zwei weitere solche Exemplare: A.-Nn. 158 und 159. H.-Nn. 22564 und 22565.

Ein zweiter Theil des vorigen Werkes, enthaltend 23 Figurentafeln, von demselben Verfasser. Druckerei der polytechnischen Schule. A.-N. 88. H.-N. 4849.

5. Stein- und Holzschnitt.

ب (Bâ).

Biġjat aṭ-ṭullâb (der Wunsch, das Erwünschte der Studirenden): über den Stein- und Holzschnitt, aus dem Französischen in's Arabische übersetzt von **Sajjid Ṣâliḥ Efendî** [**Bey**] **Madschdî** [dem vorigen]. Zwei Bände, lithographirt in der Druckerei der polytechnischen Schule al-âṣafijja[67] in Bûlâḳ 1270, 1853/54; der erste Band enthält den Text, der zweite 25 Figurentafeln. A.-N. 14. H.-N. 4775.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes: A.-N. 15. H.-N. 4776.

6. Topographie.

ت (Tâ).

Tahḏîb al-'ibârât (die Zurechtlegung der Aufnahmen?): über das Katasterwesen (wörtlich über die Wissenschaft der Aufnahme der Vermessungen), übersetzt aus dem Französischen in's Arabische von **Sajjid 'Imâra** (oder 'Amâra) **Efendî**, vom Uebersetzungsbureau des Unterrichtsministeriums [aus dem 13. Jahrh. d. H.]. Ein Band, gedruckt in Bûlâḳ 1260, 1844. Am Anfang ein Inhaltsverzeichniss und Vorbetrachtungen, am Schlusse 14 Figurentafeln. A.-N. 20. H.-N. 4786.

ج (Dschîm).

Dschâmi' al-mabâdî wa'l-ġâjât (das Ganze, von den Elementen bis zur höchsten Stufe) des Katasterwesens, aus dem Französischen in's Arabische übersetzt von **Maḥmûd Efendî** [**Pâschâ**] **Fahmî**, einem der Professoren der viceköniglichen polytechnischen Schule [lebt jetzt 1307 noch]. Ein Band, lithographirt in der Citadelle 1275, 1858/59. A.-N. 154. H.-N. 22560.

ق (Ḳâf).

Al-ḳânûn ar-rijâḏî (der mathematische Kanon) über das Planzeichnen (wörtlich über das Zeichnen der Grundstücke*), aus dem Französischen in's Arabische übersetzt von **Ibrâhîm Efendî Ramaḏân** [aus dem 13. Jahrh. d. H.]. Vier Theile in einem Band, gedruckt in Bûlâḳ 1260, 1844. Am Schlusse neun Figurentafeln. A.-N. 21. H.-N. 4782.

Zwei weitere Exemplare dieses Werkes: A.-Nn. 147 und 148. H.-Nn. 22553 und 22554.

ك (Kâf).

Der erste Theil des **Kitâb fann aṭ-ṭobûġrâfijâ** (Buches der Disciplin der Topographie), von **Muḥammed Efendî Fauzî** und **Ḥasan Efendî Ḥusnî**, beide Lehrer der Mathematik an der polytechnischen Schule [aus dem 14. Jahrh. d. H.]. Gedruckt in Bûlâḳ 1303, 1885/86. A.-N. 164. H.-N. 22760.

Ein zweites Exemplar dieses ersten Theils: A.-N. 165. H.-N. 22761.

---

* Im Text steht أراضى wohl irrthümlich statt أرضى.

7. Trigonometrie.

ج (Dschîm).

Dschâmi' at-tamarât (die Gesammtheit der Resultate, wörtlich Früchte) in der Trigonometrie, übersetzt aus dem Französischen in's Arabische von **Muhammed**, bekannt unter dem Namen **Bujûmî Efendî** [aus dem 13. Jahrh. d. H.]; es enthält die ebene und sphärische Trigonometrie. Ein Band, gedruckt in Bûlâk 1264, 1848. Am Ende eine Figurentafel. A.-N. 35. H.-N. 4796.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes: A.-N. 36. H.-N. 4797.

ر (Râ).

Risâla (Abhandlung) über die Auffindung des Sinus eines Grades vermittelst Operationen, die sich auf Geometrie und Arithmetik stützen, von **Dschamschîd ben Mas'ûd, dem Arzte***, genannt **Ġijât al-Kâschî**.[68] Anfang: Ich preise ihn wegen der Fülle seiner Wohlthaten und seiner hohen Freigebigkeit. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 4. H.-N. 7801.

Rudâb al-ġânijât (die reichlichen Körnchen**) in der Trigonometrie, übersetzt aus dem Französischen in's Arabische von **Ahmed Efendî Dukla** [einem der Gelehrten des 13. Jahrh. d. H.]. Anfang: Die Schatten deiner Wohlthaten, o Gott, sind sehr lang. Ein Band, gedruckt in Bûlâk 1259, 1843. Am Ende eine Figurentafel. A.-N. 39. H.-N. 4800.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes: A.-N. 40. H.-N. 4801.

Ar-rauda as-sundusijja (der brokatseidene Garten): über die Trigonometrie, übersetzt (oder zusammengestellt?) von **Sajjid Efendî [Bey] Sâlih [Madschdî]**. Anfang: Lob sei Gott, dessen Wissenskreis alle Dinge umfasst. Ein Band, gedruckt in der Druckerei der polytechnischen Schule in Bûlâk 1270, 1853/54. Am Ende zwei Figurentafeln. A.-N. 37. H.-N. 4798.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes: A.-N. 38. H.-N. 4799.

8. Differential- und Integralrechnung.

ح (Hâ).

Hisâb at-tafâdul wa't-takâmul (Differential- und Integralrechnung***), übersetzt (verfasst?) von **Mahmûd [Pâschâ] Hamdî al-Falakî** [gest. am Montag, den 22. Safar 1303, 1885]. Ein Band, gedruckt in Bûlâk. A.-N. 143. H.-N. 22549.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes: A.-N. 144. H.-N. 22550.

---

* at-tabîb kann auch heissen „der Meister", „der Gelehrte".

** Freie Uebersetzung.

*** Wörtlich: Rechnung des (Weglassens des) Ueberschusses und des Vollständigseins.

Der erste Theil der **Differential- und Integralrechnung** von **Schafîḳ Bey Manṣûr Jegin** [lebt jetzt 1307 noch]. Anfang: Lob sei Gott, der da schnell (sicher) rechnet in der Rechnung, die hoch erhaben ist über der Differentialrechnung.* Ein Band, gedruckt in Bûlâḳ 1299, 1882. A.-N. 129. H.-N. 21665.

Zwei weitere Exemplare dieses ersten Theils: A.-Nn. 133 und 134. H.-Nn. 21860 und 21861.

9. Algebra.

ش (Schîn).

Scharḥ (Commentar) des **Abû'l-'Abbâs Aḥmed ben Muḥammed ben 'Imâd ben 'Alî**, bekannt unter dem Namen **Ibn al-Hâim** [gest. 815, 1412/13] zu der **Ardschûza** (Gedicht) **al-Jâsmînijja** des **Ibn al-Jâsmînî** [gest. 600, 1203/4]. Anfang des Commentars: Zum Preise desjenigen, welcher die Zahl der Dinge kennt und was in ihnen ist, im Allgemeinen und im Einzelnen, beginne ich die Abhandlung. Anfang der Ardschûza: Lob sei Gott für das, womit er uns erfreut. Ein Band, in älterer Schrift, von der Hand des Ismâ'îl ben Jûsuf ben 'Omar az-Zubaidî, des Schâfiten; er kam zu Ende damit am Mittwoch, den 20. Schawwâl 857, 1453. In den Falten wurmstichig. A.-N. 1. H.-N. 4762.

Ein zweites Exemplar. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 18. H.-N. 7824.

Ein drittes Exemplar, in älterer Schrift, von der Hand des Muḥammed al-Buchârî; beendigt am Samstag, den 20. Ramaḍân 1097, 1686. A.-N. 19. H.-N. 7825.

Scharḥ zu der **Jâsmînijja**, in älterer Schrift. A.-N. 55. H.-N. 4816.

غ (Ġain).

Ġâjat as-sûl (der höchste Wunsch) in der Bestätigung (der Wahrheit) durch die Unbekannte, von **Ibn al-Hâim** [gest. 815]. Anfang: Lob sei Gott, der jedes Ding nach der Quantität genau kennt. Ein Band in älterer Schrift, beendigt am Mittwoch, den 25. Scha'bân 858, 1454; abgeschrieben von einem Manuskript, das vom Verfasser dictirt, von einer schwachen Hand geschrieben [es verzeihe ihm (dem Schreiber) sein Herr Aḥmed ben Muḥammed ibn al-Hâim, der Schâfite] und beendigt wurde in Jerusalem, den 12. Schawwâl 797, 1395. A.-N. 21. H.-N. 7827.

ف (Fâ).

Al-Fachrî[69] (das Fachri'sche [Werk]) von **Abû Bekr Fachr ed-Dîn Muḥammed ben al-Ḥasan al-Karchî**. Ein Band in älterer Schrift, von

* Das heisst: der letzten Abrechnung (dem jüngsten Gericht).

der Hand des ʻAbderraḥmân ben ʻAlî al-Mâlikî, beendigt im Ḏû'l-Ḳa'da 1111, 1700. A.-N. 23. H.-N. 7829.

Farâid ʻawâid dschebrijja (algebraische Perlen und Nützlichkeiten) zum Commentar des **Sibṭ** zur **Jâsmînijja**; es sind dies Anmerkungen (zum Commentar des Sibṭ) des sehr gelehrten **Muḥammed al-Ḥafanî** [geb. 1101, 1689/90 im Dorfe (Flecken) Ḥafana, in der Provinz Scharḳijja, in der Nähe von Bilbîs, gest. im Rabîʻ I. 1181, 1767]. Das Buch wurde beendigt am 24. Schaʻbân 1167, 1754. Anfang: Wir preisen Dich, o Gott, durch dessen Gnade wir zum Ziele durchdringen werden in der Algebra(?)[70] am Tage des Gerichtes. Ein Band, in älterer Schrift, von der Hand des Muḥammed ben Muṣṭafâ aṭ-Ṭûchî, beendigt in der letzten Nacht des Radschab 1240, 1825. A.-N. 34. H.-N. 4795. [Vergl. Sammelwerk A.-N. 181, Rechenkunst, und das folgende Sammelwerk A.-N. 89.]

ق (Kâf).

Kitâb al-dschebr wa'l-muḳâbala (das Buch der Algebra), übersetzt (oder verfasst?) von **Muḥammed Efendî Bujûmî**, vormals Lehrer an der vicekoniglichen polytechnischen Schule [gest. in Charṭûm 1268, 1851/52]. Anfang: Lob sei Dir, der Du nach Deiner Verheissung die Dämonen bezwungen hast. Enthält eine Einleitung und 12 Capitel. Ein Band, gedruckt in Bûlâḳ 1256, 1840/41. A.-N. 29. H.-N. 4790.

Kitâb al-dschebr wa'l-muḳâbala (das Buch der Algebra) von **Abû Jûsuf Aḥmed ben al-Ḥasan.** Anfang: Lob sei Gott, dem Unvergleichlichen. Es enthält 12 Capitel und ist ein Band in älterer Schrift. A.-N. 100. H.-N. 17305.

Kitâb fî'l-dschebr wa'l-muḳâbala (ein Buch über Algebra) von **Aḥmed ben Abî ʻAbdallâh Muḥammed ben ʻOṯmân al-Azdî al-Marrâkuschî**[71], bekannt unter dem Namen **Ibn al-Bannâ** [einem der Gelehrten des 7. Jahrh. d. H.]. Anfang: Lob sei Gott, dem Einzigen und Angebeteten, dem ewig Seienden. Zwei Theile in einem Band, in älterer Schrift, beendigt (die Abschrift) am Freitag, den 17. Dschumâdâ II. 746, 1345. A.-N. 1. H.-N. 7807.

Al-kamâlât at-taufîḳijja[72] (die erfolgreichen Vollkommenheiten): über die Elemente der Algebra, von **Aḥmed Efendî Kamâl**, Lehrer der Algebra an der vicekoniglichen polytechnischen Schule [lebt jetzt 1307 noch]. Zwei Bände, gedruckt in der Druckerei des Unterrichtsministeriums 1299, 1881/82. A.-N. 175. H.-N. 23969.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes: A.-N. 176. H.-N. 23970.

Al-kawâkib ad-durrijja (die glänzenden Sterne): über die algebraischen Operationen. [Vergl. weiter unten al-minha az-zahrijja.]

ل (Lâm).

Al-lamʻa al-mâridînijja (der mâridînische Lichtblitz, Schimmer) im Commentar zur Jâsmînijja; es ist dies der Commentar des **Muḥammed**

ben **Muḥammed Sibṭ al-Mâridînî** [geb. 828, 1425] zu der **Ardschûza** (Gedicht) des **Abû Muḥammed 'Abdallâh ben Ḥadschâdsch**, bekannt unter dem Namen **Ibn al-Jâsmînî** [gest. 600, 1203/04]. Anfang: Lob sei Gott, welcher alle Dinge nach der Zahl geordnet hat. Ein Band, in älterer Schrift, von der Hand des Muḥammed Mekkî, beendigt am Dienstag, den letzten Rabî' I. 1104, 1692. Am Rande Eintragungen. A.-N. 51. H.-N. 4812. [Vergl. die folgenden Sammelwerke: A.-N. 27, 54 und 89.]

Ein zweites Exemplar dieses Werkes, in älterer Schrift: A.-N. 52. H.-N. 4813.

Ein drittes Exemplar, in älterer Schrift, von der Hand des Aḥmed Efendî ben Muḥammed Efendî, bekannt unter dem Namen 'Urfa; beendigt am Donnerstag, den 11. Dschumâdâ I. 1230, 1815. Mit Randnoten. A.-N. 53. H.-N. 4814.

Ein viertes Exemplar, in älterer Schrift: A.-N. 54. H.-N. 4815.

م (Mîm).

Madschmû'a (Sammelband). A.-N. 27. H.-N. 7833. Inhalt:

1. Der **mâridînische** Lichtblitz im Commentar zur **Jâsmînijja**, in älterer Schrift. Viele Randnoten.

2. Anmerkungen (Randglossen) zum **mâridînischen** Lichtblitz im Commentar zur **Jâsmînijja**; in älterer Schrift.

Madschmû'a (Sammelband). A.-N. 54. H.-N. 4815. Inhalt:

1. Der **mâridînische** Lichtblitz im Commentar zur **Jâsmînijja**; in älterer Schrift.

2. **Eisagoge**[73], von **Aṯîr ed-Dîn al-Mufaḍḍal ben 'Omar al-Abharî** [gest. um's Jahr 660, 1261/62]. Anfang: Wir loben Gott für seinen Beistand und bitten ihn um die Führung auf den rechten Weg; in älterer Schrift.

Madschmû'a (Sammelband). A.-N. 89. H.-N. 10177. Inhalt:

1. Der **mâridînische** Lichtblitz im Commentar zur **Jâsmînijja**; in älterer Schrift.

2. Algebraische Perlen und Nützlichkeiten zum Commentar des **Sibṭ** zur **Jâsmînijja**; in älterer Schrift.

Madschmû'a (Sammelband). A.-N. 112. H.-N. 19573. Inhalt:

1. **Ardschûza** (Gedicht) über die Wurzeloperationen, von **Abû Muḥammed 'Abdallâh ben Ḥadschâdsch**, genannt **Ibn al-Jâsmînî** [gest. 600, 1203/04]. Anfang: Lob sei Gott, der uns den rechten Weg führt; in älterer Schrift.

2. Auszug aus der Rechenkunst von **Aḥmed ben Muḥammed**, bekannt unter dem Namen **Ibn al-Hâim** [gest. 815, 1412/13]. Anfang: Lob sei Gott für seine Wohlthaten. Er enthält eine Einleitung, fünf Capitel und

ein Schlusswort. In älterer Schrift, von der Hand des 'Omar ad-Damûschî, beendigt am 10. Ramadân 777, 1376, in der Moschee al-'atîk in Kairo, abgeschrieben von einem eigenhändigen Manuskript des Autors, welches das Datum 736[74], 1335/36 trägt. Wurmstichig.

3. Die **Jâsmînijja**: über die Algebra, von **Ibn al-Jâsmînî**. Anfang: Lob sei Gott für das, womit er uns erfreut. In älterer Schrift, von der Hand des 'Omar ad-Damûschî al-Ansârî, beendigt am 10. Scha'bân 778, 1376.

Muchtasar 'ilm al-dschebr (Auszug aus, oder Abriss der Algebra), von **Schafîk Bey Mansûr Jegin** [lebt jetzt 1307 noch]. Es enthält fundamentale (principielle) Erklärungen (Definitionen) und sechs Capitel. Ein Band, gedruckt in Bûlâk 1301, 1883/84. A.-N. 130. H.-N. 21666.

Zwei weitere Exemplare dieses Werkes: A.-Nn. 137 und 138. H.-Nn. 21864 und 21865.

Al-minha az-zahrijja (das glänzende, auserlesene Geschenk): über die algebraischen Operationen, übersetzt (oder verfasst) von **'Âmir Efendî Sa'd** (aus dem 13. Jahrh. d. H). Anfang: Deinen Wohlthaten, o Aufrichter der Herzen der Gebrochenen, entspricht nicht der Dank der (Dich) Preisenden.[75] Es enthält eine Einleitung und fünf Capitel. Ein Band, gedruckt in der Druckerei der polytechnischen Schule 1269, 1852/53. A.-N. 30. H.-N. 4791.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes: A.-N. 31. H.-N. 4792.

Ein drittes Exemplar, gedruckt 1278, 1861/62. A.-N. 91. H.-N. 16170.

Ein viertes Exemplar, gedruckt in Bûlâk 1269. A.-N. 155. H.-N. 22561.

Der zweite Theil von **al-minha az-zahrijja** (das glänzende Geschenk): über die algebraischen Operationen, übersetzt (oder verfasst) von **Sajjid Sâlih Efendî [Bey] Madschdî.** Lithographirt in der Druckerei der polytechnischen Schule 1269. A.-N. 156. H.-N. 22562.

10. Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

د (Dâl).

Ad-durra as-sanijja (die herrliche Perle): über die arithmetische (algebraische) Geometrie[76], von **Ahmed Efendî Fâid** [gest. am Donnerstag, den 17. Safar 1300, 1882]. Anfang: Lob sei Gott, dem durch die Erhabenheit seiner Eigenschaften Ausgezeichneten. Zwei Bände, lithographirt in der Druckerei der polytechnischen Schule 1269. A.-N. 46. H.-N. 4807.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes: A.-N. 47. H.-N. 4808.

Der zweite Band des vorigen Werkes: A.-N. 157. H.-N. 22563.

11. Mechanik.

ا (Alif).

Aḥsan al-wasâil li-taṣrîf as-sawâjil (der beste Weg für das Strömen [Bewegung] der Flüssigkeiten [des Wassers]), von **'Âmir Efendî Sa'd,** Lehrer der mathematischen Wissenschaften an der Kriegsschule [aus dem 13. Jahrh. d. H.]; es ist dies eine kurze Darstellung der beim Strömen des Wassers aus Teichen, durch Bäche und andere ähnliche Wasserläufe zu Tage tretenden Gesetze. Anfang: Lob sei Gott, dem Ordner (eigentlich Bändiger) der Wege für die Strömung des Wassers. Ein Band, gedruckt in Bûlâḳ 1291, 1874. A.-N. 96. H.-N. 16498.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes: Am Ende ein Inhaltsverzeichniss und drei Tafeln. A.-N. 170. H.-N. 23240.

ت (Tâ).

Taḥarruk as-sawâjil (Bewegung der Flüssigkeiten), übersetzt von **Aḥmed Efendî [Bey] Fâid** [gest. am Donnerstag, den 17. Ṣafar 1300, 1882], ursprünglich verfasst von dem Geometer Blanchet?[77] Anfang: Wir preisen Dich, der Du Denen, welche Dir gehorchen, das Paradies verheissest, unter welchem die Ströme hinfliessen. Ein Band, gedruckt in Bûlâḳ 1264, 1848. A.-N. 22. H.-N. 4783.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes: A.-N. 23. H.-N. 4784.

ج (Dschîm).

Al-dschawâhir al-ḥisân (die schönen Perlen) und die Sonne des Auges der Zeit: über die Waagkunst, von **Chiḍr ben 'Abderraḥmân ben Aḥmed al-Barallusî**[78] **al-Ḳabbânî.** Anfang: Lob sei Gott, welcher in seiner Seele erwogen hat die Wissenschaft des Wägens(?), und der die Waage der Gerechtigkeit zur vornehmsten Waage gemacht hat. Es enthält eine Einleitung und zehn Capitel und ein Schlusswort. Ein Band in älterer Schrift, beendigt am Mittwoch, den letzten Ṣafar 1255, 1839. A.-N. 32. H.-N. 4793.

ر (Râ).

Risâlat al-ḳabbân[79] (Abhandlung über die Waage) von **Muḥammed** ben **Abî'l-Fatḥ as-Ṣûfî al-Miṣrî,** dem Schâfiten. Anfang: Lob sei Gott, dem Herrn der Geschöpfe. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 13. H.-N. 7819.

Risâla uḥrâ fî'l-ḳabbân (andere Abhandlung über die Waage) von **Muḥammed ben Abî'l Fatḥ** [dem vorigen]. Anfang: Wisse, dass die Mängel einer Waage, wie es bei genauer Beobachtung sich ergiebt, vierfacher Art sein können. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 14. H.-N. 7820. [Vergl. Sammelbände 28 und 30.]

ع ('Ain).

Al-'iḳd at-tamîn[80] (das kostbare Halsband): über das, was an den Waagen befestigt (angebracht) ist, von dem Schaich **Ḥasan ben Ibrâhîm al-Dchabartî** [geb. 1110, 1698/99, gest. gegen Sonnenuntergang am Dienstag, den ersten Ṣafar 1188[81], 1774]. Anfang: Lob sei Dem, welcher den Himmel erhöht und die Waage eingesetzt[82] hat, damit ihr nicht das Maass überschreitet. Es ist getheilt in ein Vorwort, eine Einleitung, ein Hauptstück und ein Schlusswort. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 20. H.-N. 7826.

م (Mîm).

Madschmû'a (ein Sammelband) in älterer Schrift: A.-N. 86. H.-N. 4847. Inhalt:

1. Abhandlung über die Waage, von dem Schaich **'Abdalmadschîd as-Sâmûlî**. Schluss der Abschrift am Dienstag, den 14. Dschumâdâ I. 1296, 1879. Viele Randnoten.

2. Abhandlung des **Schaich 'Abdalmadschîd** [des vorigen] über die Kunst der Construction (oder Handhabung) der Waage, die Theilung ihrer Arme, die Beschaffenheit ihres Aufhängeringes (?), die Construction des Gewichtes? (eigentlich des Bissens), das richtige Verhältniss aller dazu gehörigen Theile, das Senkrechtstehen der Zunge und anderes.

3. Kleine Abhandlung über die Waage, von einigen Gelehrten. Anfang: Diese Abhandlung über die Waage ist klein in Bezug auf den Umfang, der äussern Erscheinung nach zu urtheilen.

4. Kleine Abhandlung über die Waage. Anfang: Dies ist eine willkommene Auseinandersetzung über die Eintheilung der Waagen und die Kenntniss der Gewichte (Gewichtssteine).

5. Abhandlung über die Waagen von **Ja'îsch ben Ibrâhîm ben Jûsuf ben Jatmâk al-Amawî al-Andalusî**. Schluss der Abschrift Donnerstag Morgen, den 23. Dschumâdâ I. 1256, 1840.

6. Abhandlung über die Maasse und Gewichte (Waagen). Anfang: Das erste, womit die Figuren und Blätter (Bücher) bemalt werden...

Madschmû'a (ein Sammelband) in älterer Schrift: A.-N. 28. H.-N. 7834. Inhalt:

1. **Manẓûma** (Perlenschnur, auch Gedicht): über die Kunst (der Construction) der Waage, von dem Schaich **Jaḥjâ [Ḳinw al-Ḳabbânî] al-Chazardschî al-Anṣârî**. Anfang: Zuerst im Namen Gottes, dann das Lob. Von der Hand des Muḥammed asch-Schanâwî ben 'Abdallaṭîf al-Birdûnî, beendigt am Samstag, den 15. Rabî' I. 1166, 1753.

2. Abhandlung über die Waage von **Muḥammed ben Abî'l-Fath aṣ-Ṣûfî al-Miṣrî**, dem Schâfiten. Anfang: Wisse, dass die Mängel einer Waage, wie es bei genauer Beobachtung sich ergiebt, vierfacher Art sein können.

Madschmû'a (ein Sammelband) in älterer Schrift: A.-N. 30. H.-N. 7836. Inhalt:

1. Die schönen Perlen: über die Waagkunde von **Chidr ben 'Abdalkâdir ben Ahmed ben 'Alî ben Jûsuf ben Zaitûn al-Barallusî al-Kabbânî.**[83] Anfang: Lob sei Gott, welcher die Waage der Gerechtigkeit zur vornehmsten Waage gemacht hat. Von der Hand des Ridwân, beendigt im Dschumâdâ I. 1082, 1671.

2. Abhandlung über die Waagkunde von **Abû'l-Fath as-Sûfî al-Misrî.**[84]

3. Abhandlung über die Maassverhältnisse der körperlichen Gegenstände(?) genannt Walzen (eigentlich Cylinder), in Bezug auf Entfernung (Länge?), Gewicht, Verdoppelung(?) und Dicke (oder Breite)?[85]

4. Perlenschnur (auch Gedicht) des Schaich **Jahjâ Kinw al-Kabbânî** [**al-Chazardschî al-Ansârî**]: über die Waagkunde und die ihr zukommenden Nutzanwendungen.

12. Geologie.[86]

ا (Alif).

Al-akwâl al-murdija[87] (die befriedigenden Aussprüche) über den Bau der Erdkugel, übersetzt (verfasst?) von **Ahmed Efendî** [**Bey**] **Fâid,** vormals Lehrer der Physik und Chemie an der vicekoniglichen polytechnischen Schule [gest. am Donnerstag, den 17. Safar 1300, 1882]. Anfang: Wir loben Dich, der Du nicht geizest mit den Reihen (Schichten)[88] Deiner Wohlthaten. Am Ende eine kurze Erklärung der technischen Ausdrücke des Buches und eine Tafel mit einer bildlichen Darstellung der Erdkugel in den vier Perioden ihres Alters. Ein Band, gedruckt in Bûlâk 1257, 1841. A.-N. 9. H.-N. 4770.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes: A.-N. 10. H.-N. 4771.

(Für ein Werk mit ganz ähnlichem Titel ist verwiesen auf die Abtheilung „Physik und Chemie".)

13. Festungsbaukunde.

م (Mîm).

Al-matâlib al-munîfa (die trefflichen Zwecke, Studien): über die provisorischen Befestigungen, übersetzt aus dem Französischen in's Arabische von **Sajjid Sâlih Efendî** [**Bey**] **Madschdî,** vormals Uebersetzer der militärischen fortificatorischen Schriften in der Citadelle [einem der Gelehrten des 13. Jahrh. d. H.]. Ein Band, gedruckt in Bûlâk 1278, 1861/62. Im Text (zerstreut) 22 Tafeln. A.-N. 145. H.-N. 22551.

Ein zweites Exemplar dieses Werkes: A.-N. 146. H.-N. 22552.

(Schluss der mathematischen Wissenschaften: es folgt die Astronomie.)

Anmerkungen.

1. Rechenkunst.

1. Das arabische Wort für den Anhänger dieser Rechtsschule heisst „Schâfi'î", der Kürze halber habe ich überall „Schâfîte" geschrieben. — **2.** „Ardschûza" ist eine besondere Vers- oder Gedichtform. Bekanntlich wurden auch wissenschaftliche Abhandlungen von den Orientalen gern in poetischer Form dargestellt. — **3.** 'âdî heisst „alt, antik", kann aber auch „gemein, gewöhnlich, vulgär" bezeichnen. Beide Bedeutungen haben etwas für sich: die erstere, weil es sich hierbei meistens um ältere Manuskripte handelt (in der Regel über 100 Jahre alte), die zweite als Gegensatz einerseits zu der persischen und andererseits zu der maġrebinischen Schrift, die bei andern Manuskripten auch vorkommen, in diesem Falle würde es dann die ägyptische Schrift bedeuten, ich habe es nun überall mit „älterer Schrift" übersetzt. — **4.** Dieser Autor kommt bei H. Ch. öfters vor; im Inhaltsverzeichniss (Bd. VII) heisst er mit dem vollen Namen: Bedr ed-Dîn (al. Schems ed-Dîn) Abû 'Abdallâh Muḥammed ben Muḥammed ben Aḥmed al-Miṣrî, vulgo Sibṭ el-Mâridînî. Vergl. auch Dorn, S. 64 und flgg. — **5.** Ḥisâb al-ḳalam kann auch das Geschäfts-, Bureaurechnen (sog. polit. Arithmetik) bedeuten. — **6.** Mâlikî, auch Malikî, eigentlich der „königliche", bedeutet hier und auch anderswo einen Anhänger der Rechtsschule der Mâlekiten. — **7.** Das hier genannte Werk des al-Ḳalṣâdî ist ein anderes als das in Cantor I. S. 694 und flgg. besprochene, doch findet sich dieses auch im Katalog; vergl. S. 11 und 13. H. Ch. II. 180 und a. a. O. nennt diesen Autor: Nûr ed-Dîn 'Alî ben Muḥammed el-Andalusî; im Inhaltsverzeichniss (Bd. VII) tritt hinzu: Abû'l-Ḥasan el-Bestî el-Ḳalṣâwî. — **8.** Trotz den Zusätzen al-Ḥalebî und al-Miṣrî scheint dieser Verfasser ein Europäer gewesen zu sein, der im Orient gelebt und arabisch geschrieben hat: Johannes Anton Masarra? — **9.** Ist gegenwärtig (ob damals 1590 schon, ist mir unbekannt) die Universität in Kairo. — **10.** Hier hat Ibn al-Hâim den Beinamen Abû'l-'Abbâs, während er oben Seite 3 genannt ist Schihâb ed-Dîn, wie ihn auch H. Ch. an mehreren Stellen nennt, so z. B. V. 494, wo er als Verfasser des hier angeführten Werkes „Richtige Leitung des Studirenden etc." bezeichnet ist. Auch der Commentar „Wunsch des Begehrenden" findet sich bei H. Ch. an der genannten Stelle angeführt. — **11.** Vergl. H. Ch. II. 218. — **12.** Vergl. Cantor I. 689 und flgg. und H. Ch. II. 400. — **13.** Ist eine in Constantinopel erscheinende Zeitung (zu Deutsch = Antworten oder Gerüchte). — **14.** H. Ch. nennt ihn V. 218: Zein ed-Dîn Zakarîya ben Muḥammed Anṣârî. — **15.** Vergl. H. Ch. VI. 329. — **16.** Ein Anhänger der Rechtsschule der Ḥanbeliten. — **17.** Misâḥa (pl. misâḥât), das sonst „Ausmessung, Fläche", mit a nach dem m auch „Strecke" bedeutet, ist hier jedenfalls durch Längen- und Flächenmaass zu übersetzen, angesichts der folgenden Hohlmaasse und Gewichte.

— **18.** Al-Hamâjûnî ist wohl der Name des Ministers, unter welchem das Decret über die neuen Maasse erlassen worden ist. — **19.** Ist vielleicht das Buch „über das, was die Geschäftsleute und die Schreiber von der Rechenkunst gebrauchen"; vergl. Cantor I. S. 638 und Suter, Fihrist S. 39. — **20.** Vergl. Cantor I. S. 694 und flgg. — **21.** Kann auch der Sing. lam' = der Lichtblitz, Schimmer sein. — **22.** Diese Abhandlung findet sich auch bei H. Ch. I. 493. — **23.** Obgleich hier nicht das gebräuchliche Wort für „Maass" (ḳîs oder ḳijâs) steht, sondern maḳâdîr (sing. miḳdâr), das in erster Linie „Grösse, Menge, Quantität" und nur selten „Maass" bedeutet, hielt ich doch „Maass" für die richtige Uebersetzung. — **24.** Vielleicht das Auslöschen der Ziffern bei den Rechnungsoperationen, namentlich der Multiplication? — **25.** Wasîla, das ich hier durch „Mittel und Wege" wiedergegeben habe, übersetzt Flügel in H. Ch. VI. 440 mit praesidium = Schutz, Hilfe. — **26.** Dieser al-Bîrûnî kann, da er nach Ibn al-Hâim gelebt haben muss, nicht der bekannte Gelehrte des 11. Jahrhunderts sein. — **27.** Es ist wahrscheinlich, dass entweder diese Jahreszahl der Abschrift, oder dann diejenige des Todes des Autors fehlerhaft ist, denn die Abschrift wäre 75 Jahre vor dem Tode des Verfassers gemacht worden, was doch etwas unwahrscheinlich, wenn auch nicht unmöglich ist. — **28.** Bâsch-Tschâwîsch ist ein türkisches Wort und bezeichnet einen militärischen Grad: nach Meninski (Lex. turc.-pers.-arab.) einen Generaladjutanten, in Aegypten einen Wachtmeister. — **29.** H. Ch. hat diesen Beinamen auch, aber auf einen anderen Autor bezogen; Flügel liest ihn Schurumbulâlî. — **30.** Ist eine in Kairo erscheinende Zeitung (zu Deutsch: der oder das Ausgewählte). — **31.** Unter ḏawât al-asmâ wa'l-munfasilât, das ich durch „die Namentragenden (Benennungen) und Abgetheilten (Abgetrennten)" übersetzt habe, sind Ausdrücke von der Form $m+\sqrt{n}$ oder $\sqrt{m}+\sqrt{n}$, und $m-\sqrt{n}$ oder $\sqrt{m}-\sqrt{n}$ verstanden, d. h. die Binomialen und Apotomeen der Griechen; vergl. Le talkhys d'Ibn al-Bannâ, traduit par Aristide Marre, in den Atti de' nuovi lincei, Tom. XVII p. 312 u. 313; doch ist das daselbst angegebene Verfahren der Wurzelausziehung aus einem solchen Binomial falsch oder die Uebersetzung ist unrichtig. — **32.** H. Ch. hat VII. 1033 (jedoch als Beiname einer anderen Persönlichkeit) 'Alawânî, bemerkt aber, dass Andere auch 'Ulwânî schreiben.

2. Alte Geometrie.

33. Es existiren also zwei nicht ganz übereinstimmende Recensionen der Elemente Euklids durch Nasîr ed-Dîn. — **34.** Vergl. Cantor I. S. 669 und 670. — **35.** Vergl. Cantor I. 430 und H. Ch. I. 322. — **36.** Das wird heissen: der Hauptabschreiber ist unbekannt, ein Theil (entweder das Titelblatt oder irgend eine bestimmte Partie des Textes) ist von Schaich Ḥasan al-'Aṭṭâr geschrieben. — **37.** H. Ch. I. 322 hat 'Alîschîr. — **38.** Das heisst die regula sex quantitatum. — **39.** Vergl. Suter, Fihrist S. 54, Anmerkung 95. — **40.** Schâdruwân ist jedenfalls ein persisches Wort, ich habe aber nirgends eine hierher passende Bedeutung für dasselbe gefunden; es bezeichnet nun allerdings Schâdruwân unter Anderem auch einen „Springbrunnen“, und da vorher von Sonnenuhren (sâ'ât kann heissen die „Stundenlinien“ auf den Sonnenuhren, oder diese selbst) die Rede war, so möchten vielleicht unter Schâdruwân eine Art von Wasseruhren zu verstehen sein? — **41.** Im Text steht Ḳibla-numâ; numâ ist persisch und heisst „zeigend, oder Zeiger“, also der „Kiblazeiger“, das heisst die Linie, die die Richtung nach Mekka anzeigt, gewöhnlich steht dafür blos das Wort „Ḳibla“. — **42.** Im Text steht dâira sundusijja (Kreis von Seidenbrokat?), soll aber wohl dâira sudusijja heissen, was nichts anderes als Sextantenkreis oder Sextantenbogen bedeuten kann. — **43.** Vergl. Dorn, S. 20 und 88. — **44.** Vergl. Suter, Fihrist S. 60, Anmerkung 136. — **45.** Ist vielleicht die im Fihrist (vergl. Suter, Fihrist S. 25) angeführte Schrift: Ueber die Auflösung der geometrischen Aufgaben. — **46.** Vergl. Suter, Fihrist S. 25. Wir vernehmen hier bestimmter als im Fihrist, worüber dieser „dem Sokrates zugeschriebene Beweis“ handelt, nämlich über das bekannte Capitel des Menon; vergl. Cantor I. 186. — **47.** Vergl. Suter, Fihrist S. 40. — **48.** Vergl. Cantor I. 643, Suter, Fihrist S. 74, Anmerkung 264; Woepke, L'algèbre d'Alkhayyâmî S. 55 und 118. — **49.** Vergl. Cantor I. 653. — **50.** Vergleicht man diesen Artikel 4 mit demjenigen 9, S. 19, so muss man annehmen, Ṯâbit ben Ḳurrâ habe sowohl die Eukleidischen Data verbessert, als auch eigene Data verfasst; vergl. Suter, Fihrist S. 59, Anmerkung 131. — **51.** Es ist also wohl der von M. Curtze nach lateinischen Manuskripten herausgegebene Liber trium fratrum. — **52.** Al-Islâmbûlî heisst „der Constantinopolitaner“. — **53.** Ist dies vielleicht die in Cantor I. 653 angeführte Abhandlung über „Aufzählung von Gleichungsformen?“ — **54.** Dieser Wortlaut würde an die Quadratrix erinnern, doch kommt diese Curve in den von Woepke (l. c. S. 91—127) gegebenen Auflösungen des Problems der Winkeltheilung durch arabische Mathematiker nirgends vor. Dieses Werk al-Bîrûnîs findet sich im H. Ch. nicht vor, obgleich dieser Autor öfters citirt wird. Sein Todesjahr wird verschieden angegeben, meistens aber 430, 1038/39; er wird auch al-Chowârezmî genannt, weil Bîrûn in jener Provinz gelegen war. — **55.** Vergl. Suter, Fihrist S. 40 und 74. — **56.** Vergl. Woepke, Le compas parfait (Notices et extraits des Manuscripts de la bibl. impér. Tome XXII, 1) und Suter, Fihrist S. 40. — **57.** Vergl. Suter, Fihrist S. 18. — **58.** Andere, wie Woepke und nach ihm Cantor I. 644 etc. haben 'Abdaldschâlib as-Sidschzî; Hankel (Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter S. 246) zieht as-Sindscharî vor. — **59.** Was das Siebeneck anbetrifft, das hier so oft erwähnt wird, so könnte wohl bisweilen statt dessen auch „Neuneck“ zu lesen sein; denn مسبع (Siebeneck) und متسع (Neuneck) können leicht verwechselt werden; vergl. auch Cantor I. 652 und Woepke, L'algèbre d'Alkhayyâmî, S. 125—126. — **60.** Sind dies die

Analemma des Ptolemaios oder die des Diodoros? Vergl. Cantor I. 358 und 376. — **61.** Vergl. Suter, Fihrist S. 38 und 71, Anmerkung 240; ich übersetzte dort misâḥat al-ḥalḳa mit Planisphaerium, es kann aber auch „Ausmessung des Kreises“ bedeuten; hier steht der Plural ḥalaḳ statt ḥalḳa. — **62.** Al-Chudschandî: im Katalog steht wohl irrthümlich al-Dschuchandî; dagegen wird Maḥmûd und nicht Muḥammed das Richtige sein; vergl. Cantor I. 646. — **63.** Aus den anderen Namen zu schliessen, ist dieser al-Baṣrî jedenfalls Ibn al-Ḥaiṯam, den auch H. Ch. als Verfasser astronomischer Werke einige Male anführt, so I. 382, II. 180, III. 143, V. 38. Vergl. auch Cantor I. 677 und figg. — **64.** So heisst nach dem Chedîwe Taufîḳ Pascha eine der vicekönigichen Schulen in Kairo. — **65.** Ḥausch bedeutet „Hof“. — **65ᵃ.** Im Text des Katalogs steht wohl fehlerhaft 1189 statt 1289; denn es ist dies ohne Zweifel derselbe Verfasser wie der der chulâṣa al-ʿizijja (siehe Seite 7); ob nun der 6. oder 3. Dschumâdâ II. das Richtige ist, habe ich nicht nachgerechnet. Noch ist zu bemerken, dass ich das Adjectiv ʿizijja als von dem Namen des Verfassers ʿIzat hergeleitet betrachtet habe, es könnte vielleicht auch von ʿizz = Ruhm, Macht herstammen und dann „rühmlich“, „herrlich“ bedeuten.

3. Beschreibende Geometrie.

66. Darb bedeutet „Strasse“ oder auch „Thor“.

5. Stein- und Holzschnitt.

67. Die polytechnische Schule, jetzt in Kairo, befand sich damals noch in Bûlâḳ und trug diesen Beinamen, dessen Herleitung mir unbekannt ist.

7. Trigonometrie.

68. Ġijâṯ al-Kâschî wird im H. Ch. an mehreren Orten erwähnt, so z. B. III. 364, wo diese Abhandlung angeführt ist, von der es heisst: et viri eruditione excellentissimi quamquam numero plurimi ejus sensum penitus non perspexerunt — und III. 449, wo der Autor genannt wird: Ghiyath ed-Dîn Jemshîd ben Mesʿûd Kashî. Vergl. auch Hankel, l. c. S. 292–93 und Cantor I. 670–72. H. Ch. III. 452 führt von ihm weiter noch an: Tractatus de chorda et sinu trientis arcus eliciendis, cujus chorda et sinus cognita sunt — ich vermuthe, dass diese Abhandlung mit der eben genannten identisch ist. H. Ch. bemerkt dann zu dieser Abhandlung noch weiter: Dicit (al-Kâschî) in opere Miftâḥ (es ist dies sein Schlüssel zur Rechenkunst, vergl. Cantor I. 670): Haec quaestio geometrica ad illas pertinet, quae majoribus difficultatem praebebant, ut auctor Almagesti testatur, qui viam sibi ad illam quaestionem solvendam non patere fatetur. — Al-Kâschî lebte nach H. Ch. III. 559 zur Zeit Ulûġ Begs. Ibid. III. 610 wird von ihm angeführt: Sullam el-samâ: Scala coeli de explicatione figurarum, quam veteres de distantiis et corporibus dederunt; zugleich ist hier sein Todesjahr auf 919, 1513/14 angegeben.

9. Algebra.

69. Vergl. über die Herleitung des Titels „al-Fachrî" Cantor I. 655. Nach dem vorliegenden Wortlaut des Katalogs fiele also jene Muthmassung dahin, denn al-Karchî hiess selbst Fachr ed-Dîn, das heisst Stolz, Ruhm des Glaubens. Leider ist hier die Lebenszeit al-Karchîs nicht angegeben. — **70.** Wahrscheinlich ist hier „dschebr" anders zu übersetzen, vielleicht mit „Wiederherstellung", „Vereinigung" und würde dann der Satz etwa so lauten: — durch dessen Gnade wir zur Vereinigung (mit den Ḥûri?) durchdringen werden am Tage des Gerichtes. — **71.** Flügel in H. Ch. V. 74 und auch Hankel, l. c. S. 249, lesen Merâkeschî, was unrichtig ist. H. Ch. (l. c.) schreibt ihm ein Kitâb el-ḥisâb zu: vielleicht ist dieses nur der erste (arithmetische) und das hier vorliegende der zweite (algebraische) Theil seines Talchîs. Vergl. Cantor I. 689—94. — **72.** In diesem Titel, den ich wörtlich durch „die erfolgreichen Vollkommenheiten" wiedergegeben habe, liegen höchst wahrscheinlich Anspielungen auf seinen Namen „Kamâl" und auf den Vicekönig Taufîḳ Pascha. — **73.** Wie dieses Werk hier hineinkommt, ist mir nicht klar; denn nach H. Ch. I. 502 ist dasselbe eine Schrift über Logik, speciell über die quinque universalia; es heisst daselbst unter Anderem: Compendium nostris temporibus prae ceteris celebre et tritum est illud, quod viro merito Atthîr ed-Dîn Mofadhdhal ben 'Omar Abahrî, circa annum 700 mortuo, tribuitur. Continet omnes quaestiones logicas etc. Auch Dorn, S. 93, erwähnt in einer Anmerkung diese Eisagoge des Athir ed-Dîn el-Abahrî und bemerkt dazu noch, dass in einer Stelle eines arabischen Werkes des Schaich Aḥmed el-Demenhury ausdrücklich angegeben werde, dass Abahrî und nicht Abherî oder Abharî die richtige Schreibweise sei. — **74.** Dieses Datum geht etwas weit zurück; wenn Ibn al-Hâim 815 gestorben ist, so müsste er nahezu 100 Jahre alt geworden sein, wenn er schon 736 ein Werk geschrieben haben sollte. — **75.** Dieser Satz bietet ein treffendes Beispiel für die Vorliebe der Araber, in den Titel oder in die Eingangsformel ihrer Werke Anspielungen auf den Inhalt derselben einzuflechten. So kommen in diesem Satze die Wörter dschâbir (Part. act. von dschabara) = Wiederhersteller, Aufrichter, und juḳâbilu = es entspricht (von ḳâbala = gegenüberstehen, entsprechen) vor; ja auch al-munkasarîna = der Gebrochenen kann auf kasr = Bruch (arithmetisch) anspielen.

10. Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

76. Wörtlich heisst es: über die geometrischen Berechnungen, doch kann der Sinn, nach dem Titel des Abschnittes zu schliessen, kein anderer als der von mir gegebene sein.

11. Mechanik.

77. Die Transscription des arabischen Wortes Blândsche oder auch nach ägyptischer Aussprache Blânge(t) ist unsicher: zwischen B und l kann jeder kurze

Vocal stehen und B kann auch = W (französisch V) gelesen werden. — 78 Barallus ist nach Jaḳûts geographischem Wörterbuch ein kleines Städtchen am Nil. — **79.** Ḳabbân übersetzt Dorn, S. 146, durch „grosse Waage“, Vullers im persischen Lexicon durch „einarmige Waage“ (Schnellwaage); ich lasse es, wie auch Dorn an anderen Stellen thut, unentschieden und übersetze einfach „Waage“. — **80.** Dorn, S. 96, erwähnt dieses Werk des Dschabartî (oder wie er schreibt el-gabartî) auch, nennt es aber al-ʿiḳd at-tamîn = das kostbare Halsband; ich adoptire nun hier die Lesart tamîn = kostbar statt samîn = fett, wie sie im Katalog steht, weil ich letztere Schreibweise als Druckfehler auffasse. Dorn, Seite 94 und 95, hat von Dschabartî noch ein ähnliches Werk: ad-durr at-tamîn = die kostbaren Perlen, über die Waagkunst. — **81.** Dorn, S. 92, hat als Todesjahr Dschabartîs 1187. — **82.** Wadaʿa, das ich hier mit „einsetzen“ wiedergegeben habe, bedeutet auch „erniedrigen“, und dann ist die Antithese zu rafaʿa „erhöhen“ hergestellt. — **83.** Chiḍr ben ʿAbdalḳâdir wird von H. Ch. III. 561 erwähnt unter dem Namen Hadhr (im Inhaltsverzeichniss steht aber Khidhr!) ben al-Ḳâdir el-burullusî; als Bearbeiter der Tafeln Ulûġ Begs. — **84.** H. Ch. hat III. 560 einen Muḥammed ben Abî'l-Fatḥ Sûfî Miṣrî, der einen Auszug aus den Tafeln Ulûġ Begs gemacht hat. — **85.** Im Text steht hier als letztes Wort تُجزئة, aus dem Nichts zu machen ist; ich vermuthe, es sollte heissen تُخُونة = tuchûna, was „Dicke“ bedeutet; übrigens ist der Sinn der ganzen Stelle unklar.

12. Geologie.

86. Wie die Geologie zu den mathematischen Wissenschaften kommt, begreife ich nicht, zumal am Schlusse dieses Bandes noch eine Abtheilung „Physik und Chemie“ erscheint; ich halte dies für ein Versehen der Herausgeber; vergl. den Schlusssatz dieses Abschnittes 12. — **87.** Liest man al-marḍijja statt al-murḍija, so würde es heissen: die angenehmen, mit Beifall aufgenommenen. — **88.** Man beachte die Anspielung auf die Geologie in dem Wort „Schichten“.

Recensionen.

H. Poincaré. Les méthodes nouvelles de la **mécanique céleste.** T. I: Solutions périodiques. Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques. 385 S. gr. 8^0. Paris, Gauthier-Villars, 1892.

Das vorliegende Werk ist ein Anzeichen der starken, in vollem Fluss befindlichen Bewegung, in welche die Störungstheorie seit knapp 15 Jahren versetzt ist und in die Herr Poincaré durch seine im Band 13 der Acta Mathematica veröffentlichte, 1889 in Schweden preisgekrönte Schrift über das Problem der drei Körper eingegriffen hat. Für Diejenigen, welche diese Schrift, oder auch meine Analyse derselben in der Vierteljahrsschrift der Astr. Ges. Jahrg. 25, kennen, genügt zur Charakterisirung des Inhalts des hier zu besprechenden ersten Bandes die Angabe, dass er eine Bearbeitung des ersten der zwei Theile jener Abhandlung vorstellt, mit Ausschluss der Theorie der Integralinvarianten und ihrer Anwendung auf Stabilität, aber unter Zuziehung der Behandlung der Existenzfrage von eindeutigen Integralfunctionen. Der übrige Inhalt der Preisschrift, verbunden mit einer Discussion der von Herrn Gylden in die Störungstheorie so erfolgreich eingeführten Methoden etc., soll folgenden Bänden vorbehalten bleiben. So findet sich auch die in der Schrift schon ausgeführte Discussion der Lindstedt'schen Methode, welche nach der Vorrede in den ersten Band aufgenommen sein soll, in Wirklichkeit hier noch nicht explicit vor.

Veranlasst durch die 1885 gestellte Preisaufgabe — „für ein beliebiges System materieller Punkte, die einander nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, unter der Annahme, dass niemals ein Zusammentreffen zweier Punkte stattfinde, die Coordinaten jedes einzelnen Punktes in unendliche, aus bekannten Functionen der Zeit zusammengesetzte und für einen Zeitraum von unbegrenzter Dauer gleichmässig convergirende Reihen zu entwickeln" — war der Verfasser zu gewissen negativen Resultaten gelangt, welche berechtigtes Aufsehen hervorgerufen haben, wenn auch solche nach manchen schon vorher gemachten Schlüssen, insbesondere von Bruns, nicht gerade unvermuthet gekommen sind. Die positiven Ideen aber, welche Herrn Poincaré geleitet haben, sind von nicht minderer Wichtigkeit, schon deshalb, weil man sie auch in den Arbeiten der übrigen neueren Forscher auf diesem Gebiete erkennen kann; und gerade in der

Absicht, einen zusammenfassenden Blick auf diese Arbeiten zu liefern, ist das Buch geschrieben.

Die neuere Entwickelung lässt sich auf George William Hill's Abhandlung über die Bewegung des Mondperigäums, soweit sie von den mittleren Bewegungen von Sonne und Mond abhängt (Cambridge, Mass. 1877; siehe auch American J. of Math. I und den Abdruck in Acta Mathem. VIII), zurückführen, eine Arbeit, die ihrem Verfasser 1887 die goldene Medaille der R. Astr. Soc. von London eingetragen hat. Schon Laplace hat in der Absicht, die säcularen Glieder, welche bei Entwickelung der Coordinaten nach Potenzen der kleinen Massen auftreten, und welche die Zeit ausserhalb der *sin* und *cos* Zeichen enthalten, zu vermeiden, die Ermittelung der bezüglichen Ungleichungen auf die Integration eines Systems von linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten zurückgeführt. Hill gelangt nun unter Vernachlässigung der Neigung der Mondbahn, und, bei erster Näherung, auch der Excentricität der Sonne, zu dem Begriff und der Aufstellung einer (nach Gylden'schem Ausdruck) „intermediären" Bahn, einer fictiven Bahn, welche aber jene Perigaeumsbewegung schon bis auf ein $\frac{1}{80}$ wiedergiebt. Das Charakteristische dabei ist, dass die zu discutirende lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung nur periodische Coefficienten der Zeit enthält. Wenn nun auch das Integrationsverfahren für eine solche Gleichung bei Hill noch unstreng ist, so ist doch eben dieser Mangel durch functionentheoretische Betrachtungen von etwa 1882 an (Floquet etc.) beseitigt worden. Indem Herr Gylden diese Gedanken zu allgemeiner Entwickelung brachte, hat er die Störungsmethoden theoretisch und rechnerisch so weit gefördert, dass sie bereits ein ausgedehntes Feld von wichtigen Anwendungen haben finden können.

Die Frage nun, die Herr Poincaré vor Allem in's Auge fasst, ist die nach der Convergenz der älteren und neueren Entwickelungen. Die bisherigen numerischen Betrachtungen mögen diese Convergenz für kürzere Zeiträume ja genügend sicher stellen; aber so wenig wie für die älteren Entwickelungen nach Potenzen der Massen ist es für die neueren Annäherungen gelungen, ihre Giltigkeit für unbegrenzte Zeitdauer, oder gar ihre gleichmässige Convergenz für alle Zeit, nachzuweisen und Grenzen, innerhalb welcher sich ihre Genauigkeit bewegt, streng festzulegen — was doch nothwendige Voraussetzung für die theoretische Anwendbarkeit dieser Darstellungen auf Fragen wie Stabilität, unbeschränkte Giltigkeit des Newton'schen Gesetzes etc., ist. In dieser Beziehung wird der Verfasser zu dem auch sonst vermutheten Resultate geführt, dass die Mehrzahl der bisher eingeführten Reihen nicht in jenem analytischen Sinne convergent sein kann; aber noch zu dem weiteren, dass diese Reihen nichts destoweniger deshalb von grösstem praktischem Werthe sind, weil sie semiconvergent sind (nach Art der Stirling'schen Reihe), so dass sich auch Fehlerschätzungen bei Abbrechen an gewissen Gliedern aufstellen lassen.

Der Weg der Untersuchung ist durchweg — an Hill anschliessend — die Betrachtung von periodischen Lösungen der Gleichungen der Dynamik und der ihnen benachbarten Lösungen. So erscheint in dem Fall dreier Körper A, B, C von den Massen $1-\mu$, μ, 0, die sich nach dem Newton'schen Gesetze in einer Ebene bewegen sollen, eine Periodicität der Bewegung für $\mu=0$, wenn die mittleren Bewegungen in den beiden Ellipsen, die B und C um A beschreiben, ein rationales Verhältniss haben. Der Verfasser zeigt nun, dass es auch für jedes kleine μ bei geeigneter Variation der Anfangswerthe eine periodische Lösung geben muss, die jener für $\mu=0$ benachbart ist. Legt man aber eine solche Lösung als intermediäre Bahn zu Grunde, so verschwinden nun bei den weiteren Näherungen gerade die in den früheren Theorien kritisch gewordenen Glieder. — In den vom Verfasser discutirten speciellen Fällen lassen sich die periodischen Lösungen in convergente Potenzreihen nach dem kleinen Parameter μ entwickeln, deren Coefficienten periodische, durch trigonometrische Reihen darstellbare Functionen der Zeit t sind (bei den angularen Variabeln immer abgesehen von dem Coefficienten von μ^0, der von der Form nt ist); die einer solchen benachbarten Lösungen aber nicht mehr in dieser Gestalt, wohl aber die bezüglichen Variationen in der Form $e^{\alpha t}.S(\mu,t)$ darstellen, wo sowohl α, als S nach Potenzen von $\sqrt{\mu}$ convergent entwickelbar sind, und in S die Coefficienten trigonometrische Reihen in t werden.

Zum letzteren Theoreme gelangt man, indem man das System von homogenen linearen Differentialgleichungen mit periodischen Coëfficienten (Periode 2π) aufstellt, welchem die Variationen der periodischen Lösung in erster Näherung genügen. Besteht dasselbe aus n Gleichungen, so erhält man eine Gleichung n^{ten} Grades für $\beta=e^{2\pi\alpha}$ (analog der bekannten Gleichung bei constanten statt periodischen Coefficienten), welche in den speciell behandelten dynamischen Fällen für $\mu=0$ auf n Werthe 0 von α, für von 0 verschiedene kleine μ auf zwei Werthe $\alpha=0$ führt und ausserdem auf $n-2$ kleine Werthe α, die paarweise gleich und entgegengesetzt sind und sich nur nach Potenzen von $\sqrt{\mu}$ entwickeln lassen können.

Die periodischen Lösungen, welche nur bei ganz besonderen, freilich überall dicht vorhandenen, Anfangswerthen existiren, haben nun eine besondere Wichtigkeit dadurch, dass es dem Verfasser durch Betrachtung der vollständigen Variationsgleichungen gelingt, ganze Klassen von weiteren Lösungen um jene herum zu gruppiren und zu verfolgen. Es sind die sogenannten „asymptotischen" Lösungen, das heisst solche, welche zwar für endliche Zeiten von der periodischen Ausgangslösung sich ziemlich entfernen können, aber für $t=+\infty$ sich derselben asymptotisch annähern. Ebenso eine andere Classe von Lösungen mit demselben Charakter für $t=-\infty$.

Auch diese Lösungen lassen sich nach ganzen Potenzen von $\sqrt{\mu}$ entwickeln, deren Coefficienten nun Potenzreihen von einer Reihe von Grössen der Form $e^{\alpha_h t}$ und $e^{\pm i t}$ werden. Aber hier gerade erscheint das oben genannte Resultat über Convergenz: diese Entwickelungen gelten nur formal, sie haben den Charakter des Semiconvergenten, während die Reihen nach den Grössen $e^{\alpha_h t}$, $e^{\pm i t}$, wie sie vor der Entwickelung nach positiven Potenzen von $\sqrt{\mu}$ für die Lösungen herstellbar sind, noch convergent waren.

Weiter sei noch das Resultat angedeutet, welches der Verfasser in der wichtigen Frage nach dem analytischen Charakter von weiteren Integralfunctionen, als den bekannten, erhält. In den Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1,\ 2, \ldots p)$$

seien die x_i Lineargrössen, die y_i Winkelgrössen (mittl. Anomalie, Länge des Perihels etc.), welch' letztere alle möglichen reellen Werthe durchlaufen und durch Aenderungen um 2π die Lage des Systems nicht ändern sollen; die Function

$$F = F_0(x) + \mu F_1(x,\ y) + \mu^2 F_2(x,\ y) + \cdots$$

sei eine eindeutige und analytische Function der x_i, y_i, periodisch in den y_i mit Perioden 2π. Nennt man jede nur von den x, y abhängige Function Φ, welche vermöge der Differentialgleichungen eine Constante wird, ein Integral derselben, so ergiebt sich unter gewissen weiteren in unseren Drei-Körperproblemen im Allgemeinen erfüllten Ungleichungen für F_0 und F_1 der Satz: „dass das System, ausser den bekannten Integralen F etc., kein Integral zulässt, das eine eindeutige analytische Function für alle reellen Werthe der y_i und periodisch in diesen Grössen, ferner eine eindeutige analytische Function von μ und der x_i, für genügend kleine μ und für ein noch so kleines Gebiet der x_i, ist.“

Der für kleine μ geführte Beweis weicht von dem in den Acta Mathem. etwas ab, insofern er weniger den periodischen Charakter der Ausgangslösung, als die Gleichungen der Art $[F\Phi] = 0$ (in der Schreibweise der Jacobi'schen Dynamik) benutzt.

Die breite Darstellungsweise des Verfassers wird dadurch leicht verständlich, dass er die benutzten mathematischen Hilfstheorien einleitend zusammenstellt. Dieselben sind in dieser Darstellung übrigens auch an sich interessant, insofern Manches, wie die Cauchy'schen Existenztheoreme, Erweiterungen erfährt. Eine dieser Erweiterungen aber — die Ausdehnung der Darboux'schen Methode, Grenzwerthe für die Glieder hohen Ranges in der Taylor'schen und Fourier'schen Entwickelung zu bestimmen, auf Reihen von zwei Variabeln — ist in das vorletzte Capitel verlegt, welches eine Anwendung auf die Grenzwerthe der höheren Glieder in der Störungsfunction und eine Ergänzung des Beweises des zuletzt angeführten Integralsatzes bieten soll. Gerade diese Untersuchungen und Darstellungen aber, welche die Singularitäten von bestimmten Integralen, als Functionen eines eingehenden Parameters betrachtet, zum Gegenstand haben, machen nicht den Eindruck des Abgeschlossenen. M. NOETHER.

Geschichte der Physik. Von Dr. E. GERLAND, Docent für Physik und Elektrotechnik an der Königlichen Bergakademie zu Clausthal i. H. [Vierter Band von Weber's Naturwissenschaftlicher Bibliothek.] Mit 72 in den Text gedruckten Abbildungen. Leipzig 1892, J. J. Weber's Verlag. 356 S.

Der Verfasser wollte, der Anzeige der Verlagshandlung zufolge, in seiner Geschichte der Physik eine Darstellung geben, welche die Entwickelung dieses Zweiges der Culturgeschichte in grossen Zügen vorführe, ohne sich in sachliche oder biographische Einzelheiten zu verlieren. Er hat sich dabei nicht an den Fachmann, sondern an den grossen Leserkreis der allgemein Gebildeten gewandt, er hat dem entsprechend einer leichten, anziehenden Sprache sich bedient, unterstützt durch zweckmässig gewählte Holzschnitte, nicht behindert durch Anführung von Beweisstellen. Am Schlusse ist allerdings auf 17 Seiten ein Literaturverzeichniss abgedruckt, doch kann man dasselbe nicht als Allgemeinanführung der betreffenden Schriften betrachten. Solches wäre nur dann möglich, wenn im Literaturverzeichnisse jedes Buch mit einer fortlaufenden Nummer versehen und diese an allen Stellen abgedruckt wäre, wo Herr Gerland auf das betreffende Werk verweisen will. Wir haben es also mit einer wesentlich beweislos auftretenden Darstellung zu thun, bei welcher die Flagge des Verfassers für den Inhalt haften muss, und Herr Gerland hat sich seit etwa 15 Jahren einen genügend gesicherten Namen als gewissenhafter Forscher erworben, um seine Flagge in diesem Sinne entfalten zu können. Es wäre ja nicht schwer, manche Unrichtigkeiten in dem Buche hervorzuheben, insbesondere da, wo es Streifzüge auf das Gebiet der Geschichte der Mathematik und der Astronomie unternimmt. Wir sind der Meinung, Herr Gerland hätte diese Stellen besser ungeschrieben gelassen. Sie gehören nicht in eine Geschichte der Physik, für welche, auch wenn man das Wort Physik so eng als möglich fasst, eine kaum zu bewältigende Stofffülle vorliegt, und wenn, woran wir kaum zweifeln, das uns vorliegende Bändchen zu einer zweiten Auflage gelangt, so wird ein Ueberbordwerfen dieses Ballastes sehr gerathen sein. Das Register bedarf dagegen vielfacher Ergänzung, wenn es wirklich die Brauchbarkeit des Buches in dem Maasse erhöhen soll, wie ein gut angelegtes Namen- und Sachverzeichniss es zu thun vermag. Wörter wie: Anziehung, Batterie, Capilarität, Luftpumpe, Obertöne, Schallfiguren u. s. w. sollte man im Register nicht vermissen. CANTOR.

Das Leben und Wirken des Physikers und Astronomen Johann Jakob Huber aus Basel (1733—1798). Von Dr. phil. J. H. Graf, ausserordentlichem Professor der Mathematik an der Universität Bern. Mit dem Bildnisse Huber's und einer Tafel, seine von ihm erfundene freie Uhrhemmung darstellend. Bern 1892, Buchdruckerei von K. J. Wyss. 75 S.

Es ist eine Gelegenheitsschrift, über welche wir zu berichten haben. Die Basler Naturforschende Gesellschaft wurde 1817 durch Professor Daniel Huber gegründet und besteht also seit 75 Jahren. Zur Feier dieses Zeitabschnittes wollte die Berner Naturforschende Gesellschaft ihr ein literarisches Festgeschenk widmen, und was wäre passender gewesen als ein Rückblick auf das wenig bekannte Leben und Wirken von Johann Jakob Huber, dem Vater von Daniel Huber? Herr Graf, der die Geschichte Berner Naturforschung durch schätzbare Beiträge geklärt hat, war der geborene Verfasser der Festschrift, und er hat in ihr seinen schon bekannten Sammelfleiss auf's Neue bewährt. Das Bedeutsamste, worauf die Aufmerksamkeit des Lesers sich richtet, ist die freie Uhrhemmung, mit deren Herstellung Huber sich seit 1755, also seit seinem 22. Lebensjahre, beschäftigte. Er war damals viele Monate in England, und seine Tagebücher aus der ganzen Zeit sind noch vorhanden. Auf ihrem Studium beruht Herrn Graf's Darstellung. So weit nun Huber's Aufzeichnungen genau der Wahrheit entsprachen, woran zu zweifeln aber auch nicht der allergeringste Grund vorliegt, hatte Huber in London vom Anfange des Monates Juni 1755 bis Ende October mit dem Uhrmacher Thomas Mudge zu thun. Dieser sollte nach von Huber ihm gegebenen Anweisungen für diesen eine Uhr mit freier Hemmung herstellen, während er selbst im Juni keine Ahnung von der Möglichkeit einer derartigen Hemmung besass, am 18. October an der Zweckmässigkeit derselben noch zweifelte. Damals enthüllte Huber ihm den eigentlichen Zweck der Erfindung, die Anwendung bei Schiffsuhren. Später legte Mudge der Londoner königl. Gesellschaft einen Schiffschronometer mit freier Hemmung als eigene Erfindung vor und erhielt dafür einen Preis. Auf Mudge fällt damit ein starker Verdacht der unrechtmässigen Aneignung fremden geistigen Eigenthums. Nur Eines vermissen wir in der Darstellung: eine vergleichende Beschreibung von Mudge's Hemmung neben der von Huber. Diese wäre unerlässlich, um ein endgiltiges Urtheil fällen zu können. Cantor.

Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellen-Literatur von Dr. Felix Müller, Professor am Königl. Luisengymnasium zu Berlin, Mitglied der Kaiserl. Leopoldinischen Akademie. Leipzig 1892, Druck und Verlag von B. G. Teubner. IV. 104 S.

Ein gutes Register ist die Seele eines Nachschlagewerkes. Warum soll man also nicht versuchen, ein Register ohne das zugehörige Werk zu schreiben, beziehungsweise die Einrichtung treffen, dass Verweisungen auf zahlreiche fremde Werke dem Rathsuchenden anzeigen, wo er nachschlagen soll? Das ist der Gedanke, welcher den Müller'schen Zeittafeln zu Grunde liegt, und welcher sie bald zu einem beliebten Hilfsmittel für Alle stempeln wird, die rasch kurze geschichtliche Notizen und Literaturangaben sich verschaffen wollen. Wenn wir die Zeittafeln mit einem Register verglichen, so ist das allerdings nicht genau richtig, es sind vielmehr deren zwei. Das eine Verzeichniss ist nach der zeitlichen Aufeinanderfolge geordnet und nennt bei den einzelnen Persönlichkeiten ihre wichtigsten Leistungen sowie die über dieselben vorhandene Literatur; in ihm liegt selbstverständlich das Schwergewicht der ganzen Arbeit. Ein zweites alphabetisch geordnetes Register gestattet sodann das Auffinden bestimmter Namen in dem ersten Verzeichnisse, das heisst in den Zeittafeln.

Die Brauchbarkeit solcher Zeittafeln hängt wesentlich von der Richtigkeit und Vollständigkeit ihrer Angaben ab. So weit wir im Stande waren, Herrn Müller's Sammlung zu prüfen, entspricht sie allen billigen Anforderungen, welche in beiden Beziehungen gestellt werden können. Uns sind beim Durchlesen nur fünf Irrthümer aufgefallen, eine gewiss, mit der Menge der Angaben verglichen, sehr geringe Zahl. Wir wollen das von uns Bemerkte hier aussprechen, damit die leichte Verbesserung durch die Besitzer der Tafeln vorgenommen werden könne.

S. 13 ist Philippus von Mende von Philippus Opuntius unterschieden, während beide Namen mit grösster Wahrscheinlichkeit die gleiche Persönlichkeit bezeichnen.

S. 54 ist von Heron dem Jüngeren die Rede, obgleich der gemeinte byzantiner Feldmesser gar nicht Heron hiess.

S. 64 Johannes Hispalensis führt seinen Beinamen von der Stadt Hispalis = Sevilla.

S. 68 fehlt unter den Schriften des Jordanus Nemorarius dessen Algorithmus demonstratus.

S. 71 Guglielmo de Lunis hat eine arabische Algebra nicht in das Italienische, sondern in das Lateinische übersetzt.

Die Literaturangaben sind, wie gleichfalls leicht verzeiblich, noch ziemlich ergänzungsbedürftig. Manche Citate könnten wir hier noch nachtragen, wie wir selbst manche andere durch Herrn Müller kennen gelernt haben. Gerade dieser Umstand zeigte uns, wie nahezu unerreichbar eine volle Literaturkenntniss auf unserem Gebiete heute schon geworden ist.

CANTOR.

Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Deutsch herausgegeben und mit einer Uebersicht über die Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage versehen von Dr. F. Rudio, Professor am Eidgenössischen Polytechnikum. Leipzig 1892, bei B. G. Teubner. VIII. 166 S.

Im XXXVI. Band dieser Zeitschrift S. 30—31 der Histor.-liter. Abthlg. haben wir über eine sehr hübsche Abhandlung des Herrn Rudio über die Geschichte des Problems von der Zirkelquadratur berichtet. Heute liegt gewissermassen die gleiche Abhandlung in vermehrter Auflage vor uns. Aus den 51 Druckseiten sind deren 69 geworden, und dann folgt noch, in der gewohnten bescheidenen Weise des Verfassers als Haupttheil der Veröffentlichung bezeichnet, was man vielleicht sachgemässer einen stattlichen Anhang nennen würde, die Uebersetzung der Kreismessung des Archimedes, der Schrift *De circuli magnitudin inventa* von Huygens, der IV. Note zu Legendre's Geometrie und der Abdruck des von Lambert im zweiten Bande seiner Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung veröffentlichten Aufsatzes *Vorläufige Kenntniss für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen.*

Fassen wir mit dem Verfasser diese vier Abhandlungen, über deren klassischen Werth das Urtheil der Mathematiker feststeht, als Hauptbestandtheil des neuen Buches, so ist Herrn Rudio's Absicht bei der Veröffentlichung nicht am Wenigsten dahin gerichtet gewesen, den Lehrern an Mittelschulen damit einen Dienst zu erweisen. Er zweifle nicht, sagt er in dem Vorworte, dass „das Studium dieser Abhandlungen, namentlich der viel zu wenig beachteten und doch gerade für den Mathematiklehrer der Mittelschule so eminent wichtigen Huygens'schen Arbeit dem mathematischen Unterrichte reichen Gewinn wird bringen können". Der hier erhobene Vorwurf, die Huygens'sche Abhandlung zu wenig beachtet zu haben, trifft auch uns. In dem zweiten Bande unserer Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik fehlt deren Erwähnung. Wir wollen diese Lücke nicht zu rechtfertigen versuchen. Entschuldigen mag sie einigermassen der Umstand, das Huygens getheilt werden musste, dass die Arbeiten vor 1668 dem zweiten Bande unseres Werkes angehören, die späteren dem dritten Bande vorbehalten bleiben, und bei dieser Theilung fiel unglücklicher Weise die genannte Abhandlung ganz weg. Herrn Rudio's Uebersetzungen sind sehr getreu und lesen sich leicht und gut.

Die jenen vier Abhandlungen vorausgeschickte Uebersicht ist, wie wir schon sagten, eine erweiterte Ueberarbeitung des älteren Aufsatzes. Wir möchten hier nur auf einen sinnentstellenden Druckfehler aufmerksam machen, der durch mehrere Werke sich fortgeschleppt hat. S. 43, Z. 3, ist anstatt „die Kreisfläche" vielmehr „die halbe Peripherie" zu lesen.

Cantor.

Bernhard Riemann. Vortrag bei der am 20. Juli 1891 vom mathematischen Verein zu Göttingen veranstalteten Feier der 25. Wiederkehr seines Todestages, gehalten von Dr. H. BURKHARDT, Privatdocent in Göttingen. Göttingen 1892. Vandenhoeck & Ruprechts Verlag. 10 S.

Dass auf zehn Seiten nicht eine Darstellung der gesammten wissenschaftlichen Thätigkeit Bernhard Riemann's möglich ist, darüber ist Herr Burkhardt selbst gewiss nicht im Zweifel. Wie viel sich aber, sogar unter Verzicht auf mathematische Symbole und unter Wahrung einer verhältnissmässigen Allgemeinverständlichkeit, in einem so engen Raume zusammendrängen kann, zeigt der hier zum Abdruck gebrachte Vortrag. Wie die Thatsache seiner Drucklegung einen Rückschluss auf den Beifall der Zuhörer gestattet, so wird gewiss auch der mathematische Leser sich von der anspruchslosen kleinen Schrift hochbefriedigt fühlen. CANTOR.

Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Herausgegeben unter Mitwirkung von RICHARD DEDEKIND von HEINRICH WEBER. Zweite Auflage bearbeitet von HEINRICH WEBER. Mit einem Bildnisse Riemann's. Leipzig 1892, bei B. G. Teubner. X. 558 S.

Vor 16 Jahren erschien die erste Auflage von Riemann's gesammelten Werken. Nicht dass eine zweite Auflage nothwendig werden würde, konnte fraglich erscheinen, sondern nur, wann diese Nothwendigkeit eintreten würde. Waren doch Riemann's Arbeiten ihrer Zeit so sehr vorangeeilt, dass 1876, zehn Jahre nach seinem Tode, für Manches, was er geschrieben hatte, das Verständniss noch fehlte, dass Keime neuer Anschauungen, die er gepflanzt hatte, bis auf den heutigen Tag noch nicht vollkommen entwickelt sind, vielmehr noch immer der wartenden Hand harren, welche ihre Früchte zu pflücken verstehe. So sehr sind die Riemann'schen Abhandlungen noch von augenblicklichster Bedeutung und können kaum von einem Mathematiker entbehrt werden, der an der Fortentwickelung seiner Wissenschaft mit arbeitet. In der neuen Auflage ist ein kleiner Aufsatz „Verbreitung der Wärme im Ellipsoid“ (S. 437 — 439) neu hinzugetreten, welcher zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung führt, deren Integral sich in dem singulären Punkte $\lambda = \infty$ nicht regulär verhält. Andere Veränderungen sind in den Anmerkungen getroffen worden, die vielfach in ausführlicherer Umarbeitung erscheinen. CANTOR.

Zeitgleichungstafel von Dr. O. KLEINSTÜCK. Jena 1892, Fr. Mauke's Verlag (A. Schenk).

Das praktische Leben richtet sich nach dem Tage von 24 unter einander gleichen Stunden, deren Abmessung mittelst Mechanismen erfolgt, welche, wenn sie genau gearbeitet sind, Zeitmesser oder Chronometer heissen. Aber je genauer das Chronometer geht, um so sicherer weicht seine Mittagsstunde (12 Uhr), ausser an vier Tagen des Jahres (etwa 15. April, 14. Juni, 31. August, 24. December) von der Sonnenmittagszeit, das heisst, dem Augenblicke ab, in welchem die Sonne senkrecht über unserem Scheitel steht. *Zeitgleichung* nennt man die Angabe des Unterschiedes zwischen Sonnenzeit und mittlerer Zeit, und die Grenzen der Abweichung stehen rund um eine halbe Stunde von einander ab, das heisst die Sonnenmittagszeit fällt etwa zwischen $11^h\,44'$ und $12^h\,15'$ eines gutgehenden Chronometers. Astronomische Kalender geben die Zeitgleichung für jeden Tag des Jahres genau an. Herr Kleinstück hat eine Zeitgleichungstafel gezeichnet, welche den astronomischen Kalender ersetzen soll, und die wir bei dem billigen Preise von 1,60 Mk. namentlich für Schulzwecke empfehlen möchten. Ein Messingstift ist um eine Achse drehbar und zeigt mit seiner Spitze Minuten an, die zwischen 44 und 60 (beziehungsweise 0) und 0 und 15 liegen, während auf derselben Tafel eine geschlossene Curve von durch Worte nicht beschreibbarer Gestalt gezeichnet ist, auf welcher sämmtliche Tage des Jahres angegeben sind. Stellt man den Messingzeiger auf ein bestimmtes Datum ein, so zeigt dessen Spitze den Chronometeraugenblick der Sonnenmittagszeit. Natürlich müssen die Minuten 44—59 durch 11 Uhr, die 1—15 durch 12 Uhr ergänzt werden. Ein zweiter eiserner Zeiger dient zur Bestimmung der Einheitszeit, wenn er auf die gleiche Drehungsachse so aufgesetzt wird, dass er mit dem Messingzeiger einen unveränderlichen Winkel bildet, dessen Grösse von der geographischen Lage des Benutzungsortes abhängt.

Cantor.

Curso de analyse infinitesimal por F. Gomes Teixeira, Director e professor na Academia Polytechnica do Porto etc. **Calculo Integral** (Segunda Parte). Porto 1892, Typographia Occidental. 348 S.

Wir haben heute auf Band XXXV. Hist.-lit. Abth. S. 63—64 zurück zu verweisen, wo die I. Abtheilung der Integralrechnung (Porto 1889) angezeigt ist. Die II. Abtheilung, welche uns gegenwärtig zur Besprechung vorliegt, kennzeichnet sich dadurch, dass sie mit der Integration von Functionen complexer Veränderlichen beginnt und den sehr früh (S. 18) nach einer von Goursat herrührenden Methode bewiesenen Satz Cauchy's von dem Nullwerden eines längs einer geschlossenen Curve genommenen Integrals als Grundpfeiler benutzt. Das ist die functionentheoretische Behandlung der Lehre von den bestimmten Integralen im Gegensatze zu derjenigen, welche von Integralen ausschliesslich reeller Veränderlichen ihren Ausgangspunkt nimmt, und sie ist im ganzen Verlaufe des Bandes ausnahmslos festgehalten. Wenn daher im zweiten Capitel die Lehre von den Gammafunctionen vorgetragen wird, so ist die Definition von $\Gamma(x)$ als Grenzwerth einer unendlichen Factorenfolge an die Spitze gestellt, welche gestattet, auch complexe Werthe für x zu wählen, und die bekannte Prym'sche Abhandlung hat wenigstens theilweise als Vorbild gedient. Das dritte und das vierte Capitel sind dem elliptischen Functionen und ihren Anwendungen gewidmet. In folgerichtiger Durchführung des Grundgedankens geht Herr Teixeira von der Weierstrass'schen $\wp$ Function aus, deren doppelte Periodicität nachgewiesen wird, und gelangt erst nach Betrachtungen über die ζ, σ, Θ u. s. w. Functionen zu dem die Ueberschrift bildenden Gegenstand. Die Integration irrationaler Functionen, einst die Zugangspforte zu den elliptischen Transcendenten, ist in das Capitel der Anwendungen verwiesen. Im fünften Capitel der mehrdeutigen Functionen begegnen wir Puiseux' Untersuchungen über algebraische Functionen, dann einigen Transcendenten. Die Definition einer Function durch die Differentialgleichung, welcher sie genügt, giebt Gelegenheit, den Existenzbeweis für das Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen zu führen. Im sechsten und letzten Capitel ist ein Abriss der Variationsrechnung gegeben. Auch diese fast mehr als lakonische Inhaltsübersicht wird unsere Leser in der Ueberzeugung befestigen, dass Herrn Teixeira's Curso de Analyse infinitesimal ein durchaus modernes Werk ist, und dass dessen Verfasser mitten in der neuesten Entwickelungsphase der mathematischen Wissenschaften steht, wie zahlreiche von ihm herrührende, ganz oder theilweise neue Ableitungen der vorkommenden Sätze erkennen lassen.

Cantor.

Premières leçons d'algèbre élémentaire. Nombres positifs et négatifs. — Opérations sur les polynomes par Henri Padé, ancien élève de l'école normale supérieure, Professeur agrégé de l'Université. Avec une préface de Jules Tannery, sous-directeur des études scientifiques à l'école normale supérieure. Paris 1892, Gauthier-Villars et fils. XXIII, 81 S.

Man muss sich hüten, den Titel „Elementaralgebra“ so aufzufassen, wie man es in Deutschland gewohnt ist, als Anfangsgründe der Gleichungslehre. Die Meinung ist vielmehr folgende. Dreierlei Zahlenarten können gedacht und in Rechnung gebracht werden: absolute Zahlen, mit denen die Arithmetik im engeren Sinne es zu thun hat; algebraische, das heisst positive und negative Zahlen, mit welchen die Algebra rechnet; analytische, das heisst complexe Zahlen, welche das Rechengebiet der Analysis bilden. Herr Padé lehrt also, anders ausgedrückt, die Einführung entgegengesetzter Zahlen in die Mathematik unter strenger Begründung. Derartige Versuche sind wiederholt gemacht worden. Sie kämpfen alle mit der Schwierigkeit, dass die Zeichen $+$ und $-$ doppelte Bedeutung haben, bald die von Operationszeichen, bald die von Richtungscoefficienten. Theodor Wittstein in seinem Lehrbuche der Arithmetik, I. Abtheilung S. 24—25 (Hannover 1846), hat den Satz betont, die Subtraction könne immer in eine Addition verwandelt werden, deren beide Theile der Minuend und das Entgegengesetzte des Subtrahenden seien, die Subtraction als Operation sei daher überflüssig und mit ihr auch das Zeichen – als Subtractionszeichen; dieses Zeichen habe mithin fortan nur als Vorzeichen in Anwendung zu kommen. Referent dürfte dann in seinen Grundzügen einer Elementararithmetik S. 17 zuerst (Heidelberg 1855) in einer Druckschrift zweierlei Zeichen verlangt haben, + und — als Operationszeichen, ⟶ und ⟵ als Vorzeichen, wobei in einer Anmerkung ausgesprochen wurde: „Die Zeichen ⟶ und ⟵, welche eine Richtung andeuten, kann man passend Richtungscoefficienten nennen.“ So weit wir uns erinnern können, folgten wir in der Anwendung jener zweierlei Zeichen einer mündlichen Anregung durch unseren hochverehrten Lehrer Moritz Stern. Hatten wir die Richtungspfeilchen den Zahlen vorgesetzt, so haben die Herren Méray und Riquier, sicherlich ohne von einem Vorgänger zu wissen, in den Nouv-annales de mathém. Ser. 3, IX, 50 Pfeilchen über die Zahlen drucken lassen, und Herr Padé fügt statt der Pfeilchen den Zahlen indexartig die Buchstaben p, n rechts unten an, um sie als positiv, beziehungsweise negativ zu kennzeichnen. Die strenge Entwickelung dessen, was Herrmann Hankel zweckmässig die Permanenz formaler Entwickelung genannt hat, besitzt alsdann geringere Schwierigkeit, und Herr Padé legt dabei die ganze Eleganz französischer Formvollendung an den Tag. Die Commutativität der Addition ist für Herrn Padé ein Axiom. Referent ist der Ansicht, dass hier ein beweisbares Theorem vorliege, dessen Beweis mit Hilfe des zweiten von Herrn Padé angenommenen Axioms „On obtient le même résultat en ajoutant à un nombre successivement deux autres nombres ou leur somme“ zu führen ist und in den oben genannten Grundzügen einer Elementararithmetik S. 8—11 geführt worden ist.

Cantor.

Vierstellige logarithmische Tafeln der natürlichen und trigonometrischen Zahlen nebst den erforderlichen Hilfstabellen. Für den Schulgebrauch und die allgemeine Praxis bearbeitet von E. R. Müller. Stuttgart, Verlag von Julius Maier.

Wir sind nicht gewohnt, Verkaufsgegenstände des Buchhandels auf ihren Preis hin zu beurtheilen, im vorliegenden Falle aber muss derselbe mit 60 Pfennigen für die cartonnirten Tafeln als hervorragend niedrig bezeichnet werden. Druck und Papier, sowie Vollständigkeit der Tafeln innerhalb ihres Bereiches befriedigen alle billigen Wünsche. Wer also mit vierstelligen Logarithmen auskommen zu können glaubt, wird die neue Veröffentlichung freudig begrüssen dürfen.

Cantor.

Ueber die Versicherung der Bergwerks-Bruderladen und ähnlicher Casseneinrichtungen von Dr. E. KOBALD, ordentlichem Professor an der k. k. Bergakademie zu Leoben. Erster Theil: **Die Invalidenversicherung.** Neue Darstellung der Theorie und Einführung in dieselbe. [Sonderabdruck aus dem Berg- und Hüttenmännischen Jahrbuch etc., XL. Bd.] Leoben 1892, bei Ludwig Nüssler. 68 S.

Seit Hagen im Jahre 1855 aus der Invalidenunterstützung eine Invalidenversicherung ableitete, hat die Gesetzgebung die von der Theorie ihr vorgezeichneten Bahnen betreten. Knappschaftscassen oder Bruderladen, wie diese Cassen in Oesterreich genannt werden, begannen, das allgemeine deutsche Invaliden- und Altersversorgungsgesetz erweiterte dann wesentlich den Rahmen, innerhalb dessen der Segen solcher Versicherung sich geltend macht. Mögen Dummheit und Böswilligkeit sich schwesterlich verbinden, kleine Mängel aufzubauschen, wie sie einem ganz neuen Gesetze um so sicherer anhaften, je mehrköpfiger die beschliessende Behörde war, die gesetzliche Invalidenversorgung als solche auf Grundlage von Versicherung wird nicht wieder aus der Welt geschafft werden, sie wird vielmehr von Reich zu Reich ihren Siegeszug halten. Um so nothwendiger ist es, dass der rechnerische Unterbau der Versicherung feststehe, und Herr Kobald hat in dankenswerther Weise an dieser Festigung mitgearbeitet, ähnlich, wie es drei Jahre früher Herr Aug. Wilh. Wolf that, über dessen „Beiträge zur Theorie und Praxis der Invalidenversicherung“ wir Band XXXV, Histor.-liter. Abthlg. S. 64—66 berichtet haben. Herr Kobald hat sich angelegen sein lassen, die Frage der Invalidenversicherung zu analysiren. Sie besteht wesentlich aus folgenden Theilfragen. Arbeiter von gegebenem Lebensalter sind der Anzahl nach bekannt. Laut der gewöhnlichen Sterblichkeitsliste mindert sich deren Anzahl bis zum Anfange des folgenden Jahres. Eine zweite Minderung besteht in der zu Tage tretenden Invalidität einer wieder statistisch gegebenen Anzahl von Individuen, und an diese ist die Invalidenrente auszuzahlen. Im Folgejahre entstehen aus den noch arbeitskräftigen Arbeitern nach dem Gesetze der gleichen Tabellen neue Todesfälle, neue Invaliden. Ueberdies kommen von den vorjährigen Invaliden in Wegfall die unter ihnen Verstorbenen, zu deren Zählung, beziehungsweise Abschätzung, eine neu anzulegende Liste, die Invalidensterblichkeitstabelle, erforderlich ist. Man sieht sofort, dass nun die Grundlage der weiteren Rechnung gegeben ist, denn etwaige Wartezeiten bis zum Erhalten der Invalidenrente und Verwaltungsaufwand lassen zwar die Berechnung praktisch, aber nicht theoretisch ändern. Herr Kobald ist insbesondere auch auf den Einfluss der Wartezeit genauer eingegangen. Die Wirkung staatlicher Zuschüsse dagegen, wie das deutsche Reichsgesetz sie kennt, ist noch nicht berücksichtigt. Wir hoffen, der Verfasser werde seine höchst schätzbaren Untersuchungen auch nach dieser Richtung hin vervollständigen.

CANTOR.

Ueber zwei specielle Brennlinien des Kreises. Von Dr. A. KIEFER. Beilage zum Programm der Thurgauischen Kantonsschule für das Schuljahr 1891/92. Frauenfeld 1892. 50 S. 5 Figurentafeln.

Geht von einem der Peripherie eines gegebenen Kreises angehörenden Punkte ein Lichtstrahl aus, der von der Kreisperipherie selbst zurückgeworfen wird, so muss der zurückgeworfene Strahl mit der Kreisperipherie den gleichen Winkel bilden wie der einfallende, das heisst, der zurückgeworfene Strahl bewegt sich in einer Sehne, welche derjenigen gleich ist, durch welche der einfallende Strahl an die Peripherie gelangte. Alle von demselben Punkte ausgehenden Strahlen haben derartige zurückgeworfene Strahlen zur Folge, welche durch ihre consecutiven Durchschnittspunkte eine Brennlinie entstehen lassen, dieselbe einhüllen. Das ist die Grundannahme, von welcher Herr Kiefer ausgeht, und aus welcher er ohne Rechnung, nur unter Anwendung einiger elementarer Sätze vom Kreis und von den Kegelschnitten, die wesentlichen Eigenschaften der Cardiodide, denn eine solche ist jene Brennlinie, ableitet. Er erkennt sie als Curve dritter Classe und vierter Ordnung. Die in der zweiten Häfte der Abhandlung besprochene und unter Anwendung der gleichen Hilfsmittel untersuchte Brennlinie lässt gleichfalls die einfallenden Strahlen von der Kreisperipherie zurückgeworfen werden, versetzt aber den leuchtenden Punkt in die Unendlichkeit, so dass alle von ihm ausgehenden Strahlen parallel auffallen. Diese Brennlinie ist von der vierten Classe und sechsten Ordnung. Beide besondere Brennlinien des Kreises sind, wie der Verfasser selbst hervorhebt, häufig behandelt worden, und eine reiche Literatur ist im Band XV der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, S. 271 flgg. und S. 366 angegeben. Herrn Kiefer's Zusammenstellung dürfte gleichwohl manchem Leser eben so bequem als angenehm sein.

CANTOR.

Die Vertheilung der Elektricität auf der Fusspunktfläche einer Kugel. Von Dr. KARL BAER, Oberlehrer. Beilage zum Osterprogramm 1892 des Realgymnasiums zu Frankfurt a. d. Oder. Mit einer Figurentafel 43 S. [1892. Programmnummer 104.]

In einem Programme von 1888 (vergl. Band XXXIII, Histor.-liter. Abthlg. S. 216 dieser Zeitschrift) hat Herr Baer parabolische Coordinaten eingeführt und mittelst derselben Ergebnisse erzielt, welche für die Geometrie und für die Lehre vom Potential interessant waren. Eine ganz verwandte Untersuchung ist es, mit welcher des gleichen Verfassers neues Programm sich beschäftigt. Wieder sind es krummlinige Coordinaten, deren Anwendung gezeigt wird, aber dieses Mal sind die als Coordinaten dienenden Curven Pascal'sche Schneckenlinien mit orthogonaler Durchkreuzung, mithin Curven, welche in deutschen Werken über analytische Geometrie meistens recht stiefmütterlich behandelt werden. Herr Baer nimmt daraus Anlass, in einer ersten Abtheilung die Fusspunktcurve des Kreises, denn das ist die Pascal'sche Schneckenlinie, näher zu betrachten und insbesondere deren Gleichung in verschiedenen Coordinatensystemen zu entwickeln. Eine zweite Abtheilung lässt Umdrehungskörper dieser ebenen Gebilde entstehen und bestimmt auf denselben die elektrische Vertheilung, wobei das in Frage stehende Potential sich als von Kugelfunctionen abhängig erweist. CANTOR.

Wandtafeln für den Unterricht in der Stereometrie. Von AUGUST ZAHN. 38 Blätter in Schwarz- und Tondruck. Format 62/86 cm. Ansbach 1892. 22 Mk.

Im planimetrischen Unterricht gewöhnt sich der Schüler daran, den Gegenstand seiner Betrachtung in der Zeichnung selbst vor Augen zu haben, im stereometrischen tritt ihm die Schwierigkeit entgegen, Bild und Gegenstand unterscheiden zu müssen; wirkliche Anschauung kann er hier nur durch das Modell gewinnen, die Zeichnung aber muss er erst verstehen lernen. Gerade deshalb ist es von grosser Bedeutung, wie die Zeichnung ausgeführt wird. Der sorgfältige Entwurf an der Wandtafel erfordert Geschick und Zeit; der Mangel an letzterer kann wohl manchmal den Lehrer nöthigen, flüchtiger zu zeichnen, als es zur Veranschaulichung oder auch zur selbstthätigen Wiedergabe der Zeichnung durch die Schüler wünschenswerth ist. In diesem Falle können die „Wandtafeln“ gute Dienste leisten. Bei grosser Classe wird man sich freilich nicht begnügen können, die Zeichnung an der Schultafel aufzuhängen, sondern die auf Pappdeckel gezogenen Blätter den Schülern näher bringen müssen. Dass nicht die perspectivische, sondern die axonometrische oder parallel-perspectivische Darstellungsart gewählt wurde, entspricht dem allgemeinen Gebrauche. Je nach dem vom Lehrer eingeschlagenen Lehrgang kann eine und die andere Figur dieser Wandtafeln entbehrlich sein, doch wird man kaum etwas vermissen. Den Mangel der Darstellung symmetrisch entsprechender Gebilde theilt das Werk mit den meisten Lehrbüchern. Bei der Zerlegung des dreiseitigen Prismas und der Kugel fehlt eine gesonderte Darstellung der Theile. Der Tondruck ist im Allgemeinen zweckentsprechend; bei der Kugel dürfte der Lichtpunkt besser hervorgehoben sein, die Tonung des letzten Blattes (sphärisches Dreieck) ist ganz unverständlich. J. HENRICI.

Systematischer Grundriss der Elementar-Mathematik. Zweite Abtheilung: **Die Geometrie.** Von Professor Dr. E. FISCHER. Berlin, Duncker 1891. 226 S. 3 Mk.

Der vorliegende Grundriss schliesst sich, soweit er den geometrischen Anfangsunterricht behandelt, der herkömmlichen Lehrmethode an, obwohl diese, nach dem bescheidenen Dafürhalten des Referenten, in mancher Hinsicht einer Aenderung bedürftig ist. Uebungsbeispiele fehlen gänzlich.

Dagegen bietet der zweite Theil der Planimetrie vieles Gelungene dar, im Besonderen ist hier auf das sechste Capitel („Die Aehnlichkeit") hinzuweisen, wo auch die neuere Geometrie gestreift wird.

Auch die Behandlung der auf das Pensum eines Gymnasiums berechneten (ebenen wie sphärischen) Trigonometrie darf als eine durchaus zweckgemässe bezeichnet werden. Vielleicht dürfte es sich empfehlen, endlich auch das Zeichen für die Cotangente fallen zu lassen, nachdem man schon seit Langem nicht mehr die reciproken Werthe der Sinus und Cosinus durch besondere Zeichen darstellt. Ob es wirklich praktischer ist, bei den Potenzen der trigonometrischen Functionen den Exponenten, entgegen der allgemein üblichen Schreibweise, hinter den Winkel zu setzen?

Es schliesst sich ein stereometrischer Abschnitt an, wo die bekannten Körper (bis zum Ikosaeder und Dodekaeder) ihre Erledigung finden. Ein letzter Abschnitt beschäftigt sich mit den wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte, nachdem die Grundgedanken der analytischen Geometrie entwickelt worden sind.

Bezüglich der Figuren gilt dem Referenten als Vorbild das neuerdings von Herrn Martus herausgegebene Lehrbuch für Geometrie. In dem vorliegenden Grundriss treten die räumlichen Figuren nur an wenigen Stellen scharf hervor.

E. Jahnke.

Theorie der Quaternionen. Von Dr. P. Molenbroek. Leiden, Brill 1891. 284 S. 7 Mk.

Wer heut' zu Tage eine Theorie der Quaternionen schreiben will, wird nicht umhin können, sich mit der Grassmann'schen Lehre auseinander zu setzen. In der That, der Ausdehnungslehre liegt nur die eine willkürliche Annahme zu Grunde, „dass es Grössen gebe, die sich aus mehr als einer Einheit numerisch ableiten lassen. Demnach müssen alle Ausdrücke, die aus einer Anzahl unabhängiger Einheiten numerisch ableitbar sind, und also auch die Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre ihren bestimmten Ort haben und erst in ihr ihre wissenschaftliche Grundlage finden" (vergl. H. Grassmann, Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre. Mathem. Ann. Bd. 12). Die Sätze, welche die Theorie der Quaternionen aufstellt, finden sich demnach schon in der Ausdehnungslehre und erhalten erst hier ihre einfachste, natürlichste Begründung (vergl. auch F. Caspary, Bulletin d. S. m. (2), t. XIII).

Der Verfasser des vorliegenden Werkes weicht einer solchen Auseinandersetzung aus. Die Nothwendigkeit, eine neue Darstellung der Hamilton'schen Ideen zu veröffentlichen, wird aus der Thatsache hergeleitet, dass es noch immer an einer knappen und durchweg einheitlichen

Darstellung fehlt. Diese Lücke wird allerdings durch die vorliegende Arbeit ausgefüllt, welche auch eine Reihe eigner, zum Theil neuer Untersuchungen des Verfassers bringt. Dahin gehören u. A. die Deutung, welche die Wirkung des Symbols $\sqrt{-1}$ an einen Vektor und an einen Quaternion erfährt, ferner eine bestimmte geometrische Darstellung für die analytischen Gleichungen, welche complexe Coefficienten enthalten, sowie die Beantwortung mancher bisher unerledigten Frage bei der Auflösung der Quaterniongleichungen.

Dem theoretischen Bande soll in nächster Zeit ein zweiter folgen, der eine systematisch geordnete Darstellung der Anwendungen giebt.

E. Jahnke.

Die sieben Rechnungsoperationen mit allgemeinen Zahlen. Von Dr. F. Divić. Wien und Leipzig 1891, Pichler. 165 S.

Der kroatische Verfasser giebt „auf Grundlage der Anschauung und unter Anwendung verallgemeinerter Definitionen“ eine sehr breit gehaltene Darstellung der Rechnungsoperationen, die neben anderen den Vorzug haben soll, „dass, während die Operationen in ihrer gebräuchlichen Bedeutung nur bei ihrer Anwendung auf absolute ganze Zahlen einen Sinn haben, sie in unserer Bedeutung bei allen Zahlarten verständlich sind, und spätere, scheinbar willkürliche, in der That aber nothwendige Festsetzungen, die jedoch keineswegs durch das Permanenzprincip der formalen Gesetze hinlänglich begründet sind, vollkommen gegenstandslos machen“. Indessen, den Nachweis, dass derartige allgemeingiltige Definitionen möglich sind, bleibt der Verfasser schuldig, und in dem Rahmen der wirklich betrachteten Zahlarten bietet die Darstellung wohl nichts wesentlich Neues. Bei der Definition der irrationalen Zahlen fehlen nähere Angaben über das Rechnen mit solchen. Es wird nicht angegeben, was nach dem Verfasser etwa unter zwei gleichen irrationalen Zahlen zu verstehen sei. Sehr ausführlich ist dagegen das Capitel, welches vom „Rechnen mit imaginären und complexen Zahlen“ handelt.

E. Jahnke.

Die Grundzüge des geometrischen Calculs. Von G. Peano. Uebersetzt von A. Schepp. Leipzig, B. G. Teubner. 1891. 38 S.

Während hervorragende Mathematiker der verschiedensten Nationen angefangen haben, die Grassmann'schen Principien zum Allgemeingut zu machen und weiter auszubauen, stehen noch heute in Deutschland nur wenige Mathematiker derartigen Untersuchungen wohlwollend gegenüber. Zu diesen gehört in erster Linie Herr Caspary, der in neuester Zeit auf Grassmannschen Ideen eine allgemeine, ausserordentlich fruchtbare Methode aufgebaut hat, welche die Geometrie im Steiner'schen Sinne mit der Geometrie im

Hesse'schen Sinne verknüpft (vergl. Bulletin d. S. m. t. XIII 1889). Mittelst dieser ist Herrn Caspary u. A. bekanntlich die Lösung zweier Probleme gelungen, von denen das eine, ein vielumworbenes (vergl. die bezüglichen Reye'schen Arbeiten), die Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiten Grades, die durch sieben gegebene Punkte gehen, betrifft (vergl. Crelle's Journal Bd. 99), während das andere zum ersten Male die Frage aufwirft und entscheidet, ob es möglich ist, die Coordinaten einer Fläche mit Hilfe der Thetafunctionen auf mehrere wesentlich verschiedene Weisen darzustellen (vergl. Comptes rendus, juin 1891; Bulletin d. S. m. t. XV).

Die beiden einzigen Begriffe, womit man es in der Grassmann'schen Theorie zu thun hat, bilden das äussere und das innere Product, denen entsprechend man von einer äusseren und inneren Multiplication spricht. Diese beiden Operationen stehen, auf die Geometrie bezogen, in dem Verhältniss zu einander, dass sich die erstere der Geometrie der Lage und die letztere der Geometrie des Maasses anpasst, so dass die Grassmann'sche Methode ein äusserst einfaches Mittel darbietet, diese beiden Theile der Geometrie knapp und doch präcis zu charakterisiren. Dieser geometrische Calcul nun behandelt die geometrischen Fragen, indem die analytischen Operationen direct mit den geometrischen Dingen vorgenommen werden, ohne erst zu Coordinaten seine Zuflucht zu nehmen. Auf diese Weise vereinfachen sich die Formeln und gestatten eine unmittelbare Deutung, es verschwindet der Unterschied, welcher bis heute noch zwischen der analytischen und synthetischen Geometrie besteht.

Die vorliegende Schrift, ein Auszug aus Peano's Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, giebt auf wenigen Seiten in knapper Darstellung die Grundzüge des geometrischen Calculs, soweit es sich um die ersten Elemente handelt. Mit ihrer Hilfe erfolgt die Ableitung einer grossen Anzahl von Resultaten. Die wichtigsten Formeln der analytischen Geometrie werden bewiesen. Bis hierher setzt die Lectüre nur elementare Kenntnisse in der Geometrie voraus. Dabei wird der Vector als ein Specialfall, als geometrisches Gebilde mit der Masse Null eingeführt. Zum Schluss geht der Verfasser noch auf einige Fragen der Infinitesimalgeometrie ein. Die Uebersetzung liest sich gut.

E. Jahnke.

Planimetrie. Zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten bearbeitet von Dr. Richard Heger, ausserordentlicher Honorarprofessor an der Königl. Sächs. Technischen Hochschule und Oberlehrer am Wettiner Gymnasium zu Dresden. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 187 Holzschnitten. Breslau, Verlag von Eduard Trewendt, 1890. 136 S. 8°. Preis: geh. 1 Mk. 60 Pf.

Vorliegende Planimetrie ist nicht nur für Gymnasien, sondern auch für Realschulen erster Ordnung bestimmt. Darum enthält sie ausser dem gewöhnlichen Stoffe noch Capitel über das vollständige Vierseit, über Pol und Polare, über Kreisbüschel und die Kreisverwandtschaft. Die Anordnung des Stoffes ist trefflich; die Beweise sind klar und sorgfältig geführt; viele gute und vollständig ausgearbeitete Uebungssätze und Aufgaben sind beigefügt; die reiche Ausstattung mit vielen sauberen Figuren ist sehr zu loben. Kurz: Heger's Planimetrie ist ein gutes Buch, aus dem nicht nur der Schüler Vieles, sondern auch der Lehrer Manches lernen kann.

Auszusetzen hätten wir nur folgendes. Erstens: Formeln, wie

$$\text{Kathete} = \sqrt{\text{Hypotenuse} \times \text{Anl.-Abschnitt}},$$

gefallen uns nicht. Wofür hat man denn die bequemen Buchstaben? — Zweitens: Wenn man als parallel solche Geraden definirt, welche sich nicht schneiden, dann muss man nachweisen, dass es auch solche Geraden giebt. Das muss man aber nicht durch einen Scheinbeweis thun, indem man zwei unendliche Stücke, die nicht einmal congruent sind, zur Deckung bringt. Dieser Tadel trifft jedoch nicht blos dieses Buch, sondern eine Unzahl Lehrbücher.

F. Schütte.

Lehrbuch der elementaren Planimetrie. Von Dr. Julius Petersen, Professor der Mathematik an der Universität Kopenhagen, Mitglied der Königl. Dän. Gesellschaft der Wissenschaften. Deutsche Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von Professor Dr. R. v. Fischer-Benzon, Oberlehrer am Gymnasium zu Kiel. Zweite verbesserte und mit einem Anhange versehene Ausgabe. Kopenhagen, Verlag von Andr. Fred Høst & Søn, Buchhändler der Königl. Dän. Gesellschaft der Wissenschaften, 1891. 108 S. kl. 8°.

Eine in jeder Hinsicht ausführliche Besprechung dieses trefflichen Lehrbuches ist im XXVII. Bande dieser Zeitschrift (Hist.-liter. Abth. S. 27) durch Herrn Professor Dr. K. Schwering erfolgt, auf die wir hiermit verweisen. — Die vorliegende zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten hauptsächlich nur durch einen Anhang. Dieser behandelt in bemerkenswerther Kürze und Klarheit die bekannte Lücke, die sich in der Reihe der Beweise der Geometrie in der Parallelentheorie findet, und ventilirt die Frage, ob man sich diese Lücke in Zukunft ausgefüllt denken kann. Der Verfasser schlägt eine einschränkende Bestimmung für die Definition der Ebene vor, mit deren Hilfe der Satz von der Winkelsumme des Dreieckes exact bewiesen werden kann: „Eine Ebene hat die Eigenschaft, dass sie bei aufeinander folgenden Verschiebungen in sich selbst ganz in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt, wenn einer ihrer Punkte in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt.“ — Sonstige Veränderungen des Textes sind geringfügig. Gern schliessen wir uns dem vom Uebersetzer ausgesprochenen Wunsche an, dass die Ideen, welche diesem kleinen Buche

Eingang verschafft haben, sich immer weitere Kreise erobern mögen und die schon gewonnenen dauernd behaupten. F. Schütte.

Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Von Dr. E. Glinzer, Lehrer der Allgemeinen Gewerbeschule und der Schule für Bauhandwerker in Hamburg. Erster Theil: **Planimetrie.** Mit 207 Figuren und einer Sammlung von 300 Aufgaben. Vierte verbesserte und vermehrte Auflage. Dresden, Verlag von Gerhard Kühtmann, 1891. 124 S. 8°. Preis carton. 2 Mk.

Nach einem dem vorliegenden Buche beigefügten Prospecte zu urtheilen, der die Recensionen über die bisherigen Auflagen des Buches enthält, dürfte es wohl kaum ein Lehrbuch geben, dem von allen Seiten ein so überschwengliches Lob gespendet worden ist, wie diesem. Auch die im XXX. Jahrgang, Heft 2, unserer Zeitschrift befindliche Besprechung ist voll der Anerkennung. Sie hebt namentlich hervor, dass in diesem Lehrbuche „der Geist einer gesunden Praxis, der aus den Erklärungen in die Theorie hinein und aus der Theorie zu zweckmässigen Anwendungen hinausführt, wie ein frischer Hauch belebend empfunden wird.“ Das ist es, was auch wir an dieser Stelle wiederum hervorheben möchten. — Das an und für sich für den Schüler so trockene Gebiet der Congruenzsätze wird belebt, indem gezeigt wird, welch' praktischen Werth diese Sätze haben. Namentlich kommt bei der Lehre von der Proportionalität und Aehnlichkeit die praktische Verwendbarkeit zur Geltung. Es wird da z. B. der Gebrauch des Storchschnabels erklärt, die Höhenmessung aus Schattenlängen und dergl. — Der Anhang, der in jener Besprechung auch lobend erwähnt wird, ist jetzt noch erweitert und enthält geradezu reizende Aufgaben. Die neue Auflage unterscheidet sich von der vorigen ferner dadurch, dass sie in der neuen Orthographie gedruckt ist. — Das Buch verdient in der That die ihm so reichlich bisher zu Theil gewordene Empfehlung. F. Schütte.

Elemente der Trigonometrie zum praktischen Gebrauch für Unterrichtszwecke an mittleren technischen Lehranstalten. Von Jentzen, Director der städtischen Baugewerk-, Tischler-, Maschinen- und Mühlenbau-Schule zu Neustadt i. Meckl. Mit 36 Figuren. Dresden, Verlag von Gerhard Kühtmann, 1891. 52 S. gr. 8°. Preis gebunden 1 Mk. 20 Pf.

Die typographische Ausstattung dieses Buches ist musterhaft, die Figuren sind deutlich und sauber, das Papier vorzüglich. Dem äusseren Gewande entspricht aber auch der gediegene Inhalt. Die Darstellung ist correct, klar und übersichtlich. Die Theorie ist auf das Wichtige beschränkt, die Aufgaben sind alle aus der Praxis genommen in Berücksichtigung der Bedürfnisse des Technikers. Würde der Verfasser auch Aufgaben von theoretischem Interesse nebst einigen Anmerkungen hinzufügen, so ist nicht einzusehen, weshalb das Buch nicht auch z. B. auf dem Gymnasium mit Nutzen gebraucht werden könnte. Mehr als den Sinus-, Cosinus- und Tangenten-Satz haben wir nicht nöthig; sogar die Mollweide'schen Formeln können wir entbehren. — Der Lehrstoff umfasst 44 Seiten, den Rest füllt eine Tabelle der trigonometrischen Zahlen von 10 zu 10 Minuten.

F. Schütte.

Leitfaden für den ersten Unterricht in der Geometrie. Von Heinrich Seeger, Director des Realgymnasiums zu Güstrow. Fünfte Auflage mit einer Figurentafel. Wismar, Hinstorff'sche Hofbuchhandlung, Verlagsconto 1891. 24 S. kl. 8°.

Das Büchlein enthält einen knappen und klaren Abriss der Elemente der Planimetrie, etwa bis zur Lehre vom Kreise. Es kann als guter Leitfaden für den Unterricht in der Hand des Schülers dienen, jedoch nicht zum Selbstunterricht, da es wegen seiner Kürze hier und da der näheren Ausführung und Erklärung Seitens des Lehrers bedarf. Die Lehrsätze sind ohne Beweis; ob der Verfasser will, dass sie auf der untersten Stufe gar nicht bewiesen werden, oder ob der Beweis durch den Lehrer geliefert werden soll, darüber erfahren wir Nichts, da das Büchlein der Vorrede entbehrt. Die Aufgaben sind ausserordentlich hübsch und zweckmässig gewählt und ihre Fassung ist, wie die der Lehrsätze, musterhaft klar und präcise. Eine Eigenthümlichkeit und wohl ein Vorzug des Büchleins ist, dass es, obschon für die unterste Stufe berechnet, den so ungemein wichtigen Begriff der Symmetrie eingeführt hat. Nicht unerwähnt wollen wir auch die einfache und elegante Weise lassen, mit welcher die Congruenz der Figuren, sozusagen „en gros“, behandelt wird.

F. Schütte.

Bibliographie

vom 1. December 1892 bis 31. Januar 1893.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der königl. bayer. Akademie der Wissensch., mathem.-phys. Cl., 17. Bd. 3. Abth. München, Franz. 17. Bd. compl. 25 Mk.

Verhandlungen der kaiserl. Leopold.-Carol. Akademie der Naturforscher. 57. Bd. Leipzig, Engelmann. 40 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissensch., mathem.-naturw. Cl., Register zu Bd. 97—100. Wien, Tempsky. 1 Mk. 70 Pf.

Astronomische Beobachtungen auf der königl. Sternwarte in Berlin. 2. Serie, 1. Bd. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Fortschritte der Physik im Jahre 1886. Jahrg. 42, Abth. 3. Physik der Erde, redig. von B. Schwalbe. Berlin, G. Reimer. 24 Mk.

Mémoires de l'académie imp. des sciences de St. Petersbourg, VII. série, tome 38, No. 14. Leipzig, Voss. 1 Mk. 65 Pf.

Annalen des physik. Central-Observatoriums in Petersburg. Jahrg. 1891. Ebendaselbst. 25 Mk. 60 Pf.

Repertorium der Meteorologie, herausgegeben von der Petersburger Akademie der Wissensch. 15. Bd. Ebendaselbst 30 Mk. 90 Pf.

Reine Mathematik.

Rost, G., Untersuchungen über die allgemeine lineare Substitution, deren Potenzen eine endliche Gruppe bilden. Leipzig, B. G. Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

Saalschütz, L., Vorlesungen über die Bernoulli'schen Zahlen und die Secantencoefficienten etc. Berlin, Springer. 5 Mk.

Obenrauch, J., Zur Transformation und Reduction von Doppelintegralen mittelst elliptischer Coordinaten. (Progr.) Neutitschein, Hölzel. 2 Mk.

Forsyth, R., Theorie der Differentialgleichungen. 1. Theil. Exacte Gleichungen und das Pfaff'sche Problem. Deutsch von H. Maser. Leipzig, B. G. Teubner. 12 Mk.

Stahl, H. und Kommerell, V. Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie. Ebendaselbst. 4 Mk.

Sturm, R., Die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. II. Theil. Die Strahlencongruenzen 1. und 2. Ordnung. Ebendaselbst. 12 Mk.

Schnellinger, J., Fünfstellige Logarithmentafeln für die natürlichen und trigonometrischen Zahlen. Wien, Manz. 3 Mk.

Küpper, C., Geometrische Betrachtungen auf Grundlage der Functionentheorie. Prag, Rivnac. 40 Pf.

Angewandte Mathematik.

Katalog mathematischer und mathem.-physik. Modelle etc.; im Auftrage des deutschen Mathematiker-Vereins herausgegeben von W. Dyck. München, Ackermann. 14 Mk.

Groth, P., Uebersichtstabelle der 32 Abtheilungen der Krystallformen mit Beispielen etc. Leipzig, Engelmann. 1 Mk.

Rausenberger, O., Lehrbuch der analytischen Mechanik. Wohlf. Ausg. in einem Bande. Leipzig, B. G. Teubner. 8 Mk.

Tichy, A., Die Präcisions-Tachymetrie und ihre neuesten Instrumente. Vortrag. München, Buchholz. 1 Mk. 50 Pf.

Bauschinger, J., Untersuchungen über den periodischen Kometen 1889. V. (Brooks.) 1. Theil. (Aus den Annalen der Münchener Sternwarte.) München, Franz. 5 Mk.

See, Th., Die Entwickelung der Doppelsternsysteme. Dissertation. Berlin, Friedländer. 6 Mk.

Francke, A., Die mathematischen Grundlagen der Wirthschaftslehre. Berlin, Ernst & Sohn. 2 Mk.

Physik und Meteorologie.

Lavoisier und Laplace, Zwei Abhandlungen über die Wärme. (Aus Oswald's „Klassiker der exacten Wissensch.“ Nr. 40, herausgegeben von Rosenthal.) Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 20 Pf.

Barckhausen, H., Einige Betrachtungen über Magnetismus und Elektricität. Bremen, v. Halem. 2 Mk.

Seelig, E., Molecularkräfte, eine physikalisch-chemische Studie. Berlin, Friedländer. 2 Mk. 40 Pf.

Pfeil, L. v., Protuberanzen, Meteoriten, Weltennebel und Kometen. Berlin, Dümmler. 60 Pf.

Brugger, C., Die Erhaltung der Energie. (Programm.) Einsiedeln, Benziger & Co. 2 Mk.

Winkelmann, A., Handbuch der Physik. 12. Lieferung. (Aus der „Encyclopädie der Naturwissensch.“) Breslau, Trewendt. 3 Mk. 60 Pf.

Hermes, O., Elementarphysik für den Anfangsunterricht in höheren Lehranstalten. Berlin, Winckelmann & Sohn. 2 Mk.

Violle, J., Lehrbuch der Physik. Deutsch von Gumlich, Holborn etc. 1. Theil. 2 Bd. Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper. Berlin, Springer. 10 Mk.

Historisch-literarische Abtheilung.

Ein mathematischer Papyrus in griechischer Sprache.

Von

Moritz Cantor
in Heidelberg.

In Achmîm, am rechten Nilufer, ungefähr $26\frac{1}{2}$ Grad nördlicher Breite, auf dem Boden des alten Panopolis sind in koptischen Gräbern höchst merkwürdige Funde gemacht worden. Einer ist für die Geschichte der Mathematik von so hohem Interesse und der gedruckte Bericht über denselben den meisten Mathematikern vermuthlich so wenig zugänglich, dass wir uns für berechtigt, wenn nicht für verpflichtet halten, an dieser Stelle darauf hinzuweisen.

Es war ein Papyrus in griechischer Sprache, um welchen die Fellahs, welche ihn entdeckten, lebhaft stritten. Der Moudir (Bezirksvorsteher) schlichtete den Streit durch Beschlagnahme des Gegenstandes, welcher heute dem Museum von Gizeh angehört. Ein französischer Forscher, Herr J. Baillet, kam so in die Lage, den Papyrus untersuchen zu können, und er veröffentlichte seine Bearbeitung in den *Mémoires publiés par les membres de la Mission archéologique française*, welche mit Unterstützung des französischen Unterrichtsministeriums bei dem bekannten Verleger der Asiatischen Gesellschaft Ernest Leroux in Paris erscheinen. Die Abhandlung kam 1892 im ersten Fascikel des IX. Bandes der genannten Sammlung heraus, wo sie die Seiten 1—89 und acht Tafeln füllt; wir selbst wurden durch unseren Freund, Herrn August Eisenlohr, den Herausgeber des alten mathematischen Papyrus des Ahmes, mit der Druckschrift bekannt.

Der Papyrus ist nicht als Rolle, sondern als eingebundenes Buch aufgefunden worden. Der Deckel besteht aus hartem Leder. Die einzelnen Blätter, deren Abmessung 315 auf 275 Millimeter ist, hafteten fest an einander und konnten nur mit grosser Mühe von einander getrennt werden. Die meisten Blätter fanden sich leer, nur sechs derselben waren, und zwar auf beiden Seiten, beschrieben. Den Inhalt bilden zunächst einige mathematische Tabellen, dann fünfzig Aufgaben. Von grösster Wichtigkeit wäre es, eine genaue Datirung des Heftes vornehmen zu können. Leider scheint dieses unmöglich. Herr **Baillet** betont nur die unzweifelhaft christliche Religion des Schreibers, welcher mehrfach das Zeichen des Kreuzes hinmalte, betont weiter, dass also die Entstehung früher anzusetzen sei, als Aegypten unter arabische Herrschaft kam. Das sechste bis neunte Jahrhundert dürften seiner Meinung nach die Grenzen sein, innerhalb deren der Schreiber lebte; die Gestalt der Schriftzeichen veranlasst ihn dann, die Grenzen weiter einzuengen und auf das siebente und achte Jahrhundert zu beschränken.

Sprachlich sind drei Ausdrücke vornehmlich bemerkenswerth. Das **Capitel** heisst *κεφάλαιον*, wie der Römer des Wortes *caput* sich bediente. Das Anfangswort vieler Sätze ist *ὁμοίως*. Der Herausgeber sieht darin den Beweis, dass gewisse Musterbeispiele vorhanden waren, an welche mittelst dieses „ebenso" angeknüpft wurde. Wir wollen dieser Meinung nicht gerade entgegentreten, wenn wir bei dem *ὁμοίως* auch zunächst an das lateinische *item* dachten, durch welches auch im Abendlande die Angaben von Zahlenthatsachen häufig eingeleitet wird. An einigen Stellen beginnt die Auseinandersetzung des Auszuführenden mit *Οὕτω ποίει*. Bei **Heron von Alexandria** heisst es regelmässig *ποίει οὕτως*, und die im Papyrus vorkommende Umstellung sieht täuschend wie eine wörtliche Uebersetzung des *sic quaere* aus, dessen römische Feldmesser sich bedienten. Man verstehe uns recht. Wir denken natürlich nicht daran, als ob jemals römische Mathematik griechische beeinflusst haben könnte, aus der sie vielmehr zweifellos entstanden ist, aber die Schreibweise des Verfassers des Papyrus von Achmîm hat für uns wenigstens eine deutliche römische Betonung, es ist elsasser Französisch, wenn wir ein Vergleichswort anwenden dürfen.

Nun zu dem eigentlichen Inhalte. Gleich dem altägyptischen Papyrus des **Ahmes** sind die Auseinandersetzungen des **Rechenbuches von Achmîm**, wenn wir dieser Benennung uns bedienen wollen, dadurch gekennzeichnet, dass sie fortwährend Brüche behandeln, mithin nicht für Anfänger, sondern für weiter Fortgeschrittene abgefasst sind. Eine zweite Aehnlichkeit besteht, wie nicht anders zu erwarten ist, in der fortwährenden Anwendung von Stammbrüchen, welche bei ganzzahligem Nenner die Einheit als Zähler haben, und des Bruches $\frac{2}{3}$, der einem Stammbruche gleich geachtet wird. Eine dritte bildet das schon erwähnte Vorhandensein einiger an die Spitze des Ganzen gestellten Tabellen. Aber gleich bei diesen Tabellen ist ein wesentlicher Unterschied gegenüber von dem alten Handbuche bemerkbar. Wenn wir unsere Leser auf unsere Vorlesungen über Geschichte der Mathematik verweisen dürfen (welche als Gesch. Math. bezeichnet werden sollen), so finden sie dort (Gesch. Math. I, 22—23) die Tabelle des **Ahmes**, welche die Zerlegung von $\frac{2}{2n+1}$ in Stammbrüche lehrt, wo n der Reihe nach die ganzen Zahlen von 1 bis 49 bedeutet. Der Zähler bleibt unverändert, während der Nenner sich ändert, oder etwas anders und ägyptischer Denkart verwandter ausgesprochen: Eine und dieselbe Zahl 2 wird durch andere und andere Zahlen dividirt und der Quotient als Summe von Stammbrüchen aussprechbar gemacht. Das Rechenbuch von Achmîm dagegen lässt an die Stelle einer Tabelle eine grössere Anzahl von solchen treten und innerhalb jeder Tabelle den Dividenden sich ändern, während der Divisor unverändert bleibt. Mit anderen Worten: Jede Tabelle ist die Vervielfachungstabelle eines und desselben Stammbruches mit verschiedenen ganzen Zahlen. Dürfen wir dabei an einen römischen Rechenknecht erinnern, an den Calculus des Victorius aus der Mitte des fünften nachchristlichen Jahrhunderts? (Gesch. Math. I, 450.) Mit unserer ausgesprochenen Meinung von einem römisch mehr als griechisch gebildeten Lehrmeister stimmt dieser Anklang trefflich überein und ebenso auch damit, dass die einzelne Tabelle jeweils als ψῆφος dem griechischen Worte für *calculus* bezeichnet wird, wenn wir auch Herrn Baillet zugeben, dass ψῆφος bereits bei Heron von Alexandria in dem Sinne von Calcul, als Rechnungsweise gedacht, vorkommt. Der wesentliche Unterschied gegen den römischen Rechenknecht ist unter allen Umständen hervorzuheben, dass dort die vorkommenden Brüche nicht Stammbrüche, sondern Minutien, d. h. römische Duodecimalbrüche waren. Die einzelnen Tabellen fangen alle mit der Vervielfachung des jedesmaligen Bruchmultiplicators mit der Zahl (ἀρίομῳ) an, unter welcher regelmässig die Zahl 6000 verstanden ist, jedenfalls, wie Herr Baillet sehr scharfsinnig bemerkt hat, weil ein Talent ursprünglich aus 6000 Drachmen bestand, weil seit Constantin dieselbe Zahl das Verhältniss des Denars zum Goldsolidus bezeichnete, weil ebendeshalb byzantinische Rechentafeln Bruchtheile von 6000 angeben. Nach 6000 erscheinen als die zu multiplicirenden Zahlen die Einer 1 bis 9, die Zehner 10 bis 90, die Hunderter 100 bis 900, die Tausender 1000 bis 10 000, wobei unter dieser letzten Gruppe die Zahl 6000 abermals auftritt, als wenn sie nicht vorweg genommen wäre. Diese Ausdehnung haben wenigstens die Tabellen, deren Multiplicatoren $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{10}$ sind, während die folgenden mit den Multiplicatoren $\frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \dots \frac{1}{20}$ wesentlich weniger umfangreich sind; bei ihnen ist $\frac{1}{k}$ nur jeweils mit $1, 2, \dots k$ vervielfacht. Selbstverständlich reicht diese Ausdehnung hin, um die Zerlegung wirklicher Brüche mit den Nennern 3 bis 20 in Stammbrüche den Tabellen entnehmen zu können.

In den 50 Aufgaben, welche an die Tabellen sich anschliessen, ist vielfach von denselben Gebrauch gemacht, aber auch solche Bruchrechnungen sind vollzogen, bei welchen der Nenner über 20 hinausreicht, bei welchen also die Tabellen ihren Dienst versagen. Das Lehrreiche und wodurch das Rechenbuch von Achmîm besondere geschichtliche Bedeutung erhält, ist nun, dass dabei an verschiedenen Stellen deutlich gemacht ist, wie die Vereinigung von Stammbrüchen zu einem gewöhnlichen Bruche, wie die Zerlegung eines gewöhnlichen Bruches in Stammbrüche vollzogen wurde.

Ersteres geschah, wie seit der Zeit des Ahmes, durch Zurückführung auf einen gemeinsamen Nenner (Gesch. Math. I, 30), als welchen man nicht selten den grössten bereits vorkommenden Nenner wählte, ohne Rücksicht darauf, ob die Zähler des umgewandelten Bruches alsdann ganzzahlig oder gemischtzahlig ausfielen. Solcherlei Brüche blieben in anhaltender Uebung. Diophant hat dergleichen in den Aufgaben II, 36; III, 13; IV, 23, 43, 45; V, 1, 2 und bei den Arabern fehlen sie ebenso wenig wie bei Leonardo von Pisa. Herr Baillet will zwar in Nachfolge einer durch Herrn Rodet seiner Zeit gegen Herrn Eisenlohr und uns vom Zaune gebrochenen Polemik von einer Zurückführung auf einen gemeinsamen Nenner dabei Nichts wissen. Nur eine einer solchen Zurückführung ähnliche Zwischenrechnung komme vor. Aber haben wir, Herr Eisenlohr und der Verfasser dieser Notiz, Anderes behauptet? Wir fürchten fast, Herr Baillet habe das *Audiatur altera pars* nicht in vollem Umfange geübt, und wir möchten uns der Meinung hingeben, wenn er, was der deutschen Sprache wegen, deren wir uns bedienten, vielleicht weniger bequem war, unsere Schriften dem gleichen Studium unterzogen hätte, wie Herrn Rodet's Aufsatz, er die gleiche Ueberzeugung gewonnen hätte, deren auch andere Leser sind: dass Herr Rodet trotz scheinbarem Widerspruch gegen unsere Darstellungen damals kaum Anderes sagte, als was er bei uns finden konnte und wirklich gefunden hatte. Wir kämen nicht nach 11jähriger Frist auf jenen Streit zurück, wenn nicht die Redaction der Zeitschrift, in welcher der Angriff erfolgt war, eine im April 1882 ihr zugeschickte, in französischer Sprache abgefasste Erwiderung einfach unterdrückt hätte, ohne uns sofort ihre Verweigerung der Aufnahme anzuzeigen. Es liegt uns daran, auch heute noch unser damaliges scheinbares Stillschweigen zu erklären, nachdem wir von befreundeter Seite vor Kurzem über dasselbe befragt wurden.

Ueber das Zerlegen von Brüchen in Stammbrüche hat Ahmes keine Andeutung hinterlassen. Erst Leonardo von Pisa (Gesch. Math. II, 12—13) und nur dieser, soweit bekannt war, hat Regeln zusammengestellt, nach welchen man bei Lösung dieser unentbehrlichen Aufgabe zu verfahren hat. Von Leonardo's Vorschriften stimmen welche mit der einen Formel

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{\frac{p+1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+1}{2}\times p},$$

welche aus der Tabelle des Ahmes leicht herauszulesen war, überein. Eine andere Formel:

$$\frac{2}{p \times q} = \frac{1}{q \times \frac{p+q}{2}} + \frac{1}{p \times \frac{p+q}{2}},$$

welche wir (Gesch. Math. I, 27) den Zerlegungen

$$\frac{2}{35} = \frac{1}{30}\,\frac{1}{42}, \quad \frac{2}{91} = \frac{1}{70}\,\frac{1}{130}$$

entnehmen zu dürfen glaubten, fand bei dem Pisaner keine Bestätigung. Man wird es uns nicht verübeln, wenn wir heute unsere Freude ausdrücken, dass das Rechenbuch von Achmîm unsere Vermuthung als Gewissheit bestätigt hat.

Herr Baillet hat die Zerlegungsmethoden, wie sie im Rechenbuche von Achmîm gelehrt werden, sorgsam gesammelt. Sie kommen in letzter Linie auf folgende zurück:

I. Die Subtractionsmethode. Der Nenner wird in Factoren zerlegt, und, wo möglich, mehrere solche Zerlegungen vorgenommen. Einzelne Factoren werden alsdann vom Zähler abgezogen, bis derselbe erschöpft ist. In der 21. Aufgabe z. B. ist $\frac{239}{6460}$ zu zerlegen.

$$6460 = 68 \,.\, 95 = 76 \,.\, 85; \quad 239 = 76 + 68 + 95;$$

also

$$\frac{239}{6460} = \frac{1}{85}\,\frac{1}{95}\,\frac{1}{68}.$$

Eben diese Zahl 6460 hätte in zahlreiche andere Factorenpaare zerlegt werden können. Dass man gerade die hier in Verwendung gekommenen Factoren bevorzugte, beruht darauf, dass, wie sehr fein erkannt worden ist, den Stammbrüchen am Liebsten solche Nenner beigelegt wurden, die nicht durch gar zu grosse Unterschiede von einander abwichen.

II. Die Methode der durch Summentheile multiplicirten Factoren. Herr Baillet kleidet sie in die Formel:

$$\frac{a}{b \,.\, c} = \frac{1}{c \cdot \frac{b+c}{a}} + \frac{1}{b \cdot \frac{b+c}{a}}.$$

Das ist aber genau unsere oben in's Gedächtniss zurückgerufene Formel, sofern $a = 2$. Die allgemeinere Formel aufzustellen waren wir nicht in der Lage, weil Ahmes in seiner Tabelle keinen Bruch mit von der 2 verschiedenem Zähler zur Zerlegung bringt. Ein Beispiel des Rechenbuches von Achmîm aus dessen 23. Aufgabe bietet $\frac{2}{35}$. Hier ist

$$35 = 5 \,.\, 7, \;\; 5 + 7 = 12, \;\; \frac{12}{2} = 6,$$

also

$$\frac{6 \,.\, 2}{6 \,.\, 5 \,.\, 7} = \frac{5 + 7}{6 \,.\, 5 \,.\, 7} = \frac{1}{42}\,\frac{1}{30}.$$

Unsere Leser sehen, dass hier das Beispiel des Ahmes und seine Zerlegung genau wiederkehren. Dagegen ist bei Ahmes $\frac{2}{77}=\frac{1}{44}\frac{1}{308}$, indem augenscheinlich $\frac{2}{7}=\frac{1}{4}\frac{1}{28}$ durch 11 dividirt wurde. In der 19. Aufgabe des Rechenbuches von Achmîm ist folgendermassen zerlegt:

$$77=7.11,\quad 7+11=18,\quad \frac{18}{2}=9,\quad \frac{9.2}{9.7.11}=\frac{7+11}{9.7.11}=\frac{1}{99}\frac{1}{63}.$$

Hier erkennt man, dass 63 und 99 weniger weit von einander abstehen als 44 und 308, und dass deshalb jene ältere Zerlegung verlassen wurde, wenn sie vielleicht auch noch bekannt war. Eine Zerlegung nach dieser Methode mit grösserem Zähler des zu zerlegenden Bruches bietet $\frac{4}{143}$ in der 24. Aufgabe. Hier ist:

$$143=11.13,\quad 11+13=24,\quad \frac{24}{4}=6,\quad \frac{6.4}{6.11.13}=\frac{11+13}{6.11.13}=\frac{1}{78}\frac{1}{66}.$$

Wie diese Methoden combinirt werden können, zeigt beispielsweise die 18. Aufgabe an $\frac{43}{1320}$. Zunächst ist $1320=15.88$, also

$$\frac{43}{1320}=\frac{15+28}{15.88}=\frac{1}{88}+\frac{28}{1320}.$$

Ferner ist

$$1320=11.120,\quad 12.11=132,\quad 132+120=252=9.28.$$

Demzufolge ist

$$\frac{28}{11.120}=\frac{9.28}{9.11.120}=\frac{11.12+120}{9.11.120}=\frac{1}{90}\frac{1}{99}$$

und

$$\frac{43}{1320}=\frac{1}{88}\frac{1}{90}\frac{1}{99}.$$

Wir bemerken wiederholt, dass in allen von uns, nach Herrn Baillet's Vorgang, beigezogenen Beispielen, sämmtliche Zwischenrechnungen dem Rechenbuche von Achmîm genau entnommen sind, dass es sich also hier nicht um Vermuthungen, sondern um die wirklichen, damals benutzten Methoden handelt. Wer neuere Vermuthungen, die früher, als Herrn Baillet's Veröffentlichung bekannt wurde, entstanden sind, zu lesen wünscht, den verweisen wir auf den Aufsatz von Herrn Gino Loria: *Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani* in der Bibliotheca mathematica 1892, p. 97 – 109.

Die Aufgaben selbst sind, wie uns scheinen will, von geringerer Wichtigkeit, als dasjenige, was wir ihnen bezüglich der Stammbrüche entnommen haben. Es genüge die Bemerkung, dass mitunter Subtractionen gefordert werden, deren Vollziehung unter Hindurchgehen durch einen gemeinsamen Nenner gelehrt wird. Es genüge ferner die Mittheilung, dass

Zweisatzrechnungen vorkommen, welche durch Zinsaufgaben nothwendig gemacht sind. Der Zinsfuss ist theils procentual, theils in Stammbruchform angegeben.

In der 26. Aufgabe heisst es, von 100 erhalte man $1\frac{2}{3}$, wie viel von 195? Die Auflösung vervielfacht $1\frac{2}{3}$ mit 195 zu 325 und dieses mit $\frac{1}{100}$ zu $3\frac{1}{4}$.

In der 35. Aufgabe heisst es, man habe 1 von $15\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ zu fordern, wie viel von 100? Es findet sich $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ bei der Division von 3 durch 4 und $15\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ bei der Division von 63 durch 4. Folglich ist 4 mit 100 zu vervielfachen und dann 400 durch 63 zu dividiren. Damit begnügt der Verfasser sich, die Division

$$\frac{400}{63} = 6\frac{1}{3}\frac{1}{63}$$

vollzieht er nicht und giebt dieses Endergebniss nicht an.

Auch einige wenige Aufgaben geometrischen Ursprunges sind vorhanden, die indessen kaum ein längeres Verweilen lohnen. Das Wichtigste über das Rechenbuch von Achmîm und dessen sehr dankenswerthe Herausgabe dürfte in unserer Notiz enthalten sein.

Recensionen.

Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchungen von Dr. E. G. Husserl, Privatdocent der Philosophie an der Universität zu Halle. I. Band. Halle a. d. S. C. E. M. Pfeffer (Robert Stricker) 1891. IX, 323.

Der vorliegende Band gliedert sich in zwei Haupttheile, deren erster „die eigentlichen Begriffe von Vielheit, Einheit und Anzahl“ behandelt „der Hauptsache nach psychologische Fragen“, während der zweite betitelt ist: „Die symbolischen Anzahlbegriffe und die logischen Quellen der Anzahlen-Arithmetik“, worin der Verfasser „zu zeigen versucht, wie die Thatsache, dass wir fast durchgehends auf symbolische Zahlbegriffe eingeschränkt sind, den Sinn und Zweck der Anzahlen-Arithmetik bestimmt“.

Der erste Theil enthält nach einer Einleitung folgende Capitel: 1. Die Entstehung des Begriffes Vielheit vermittelst desjenigen der collectiven Verbindung. — 2. Kritische Entwickelungen. — 3. Die psychologische Natur der collectiven Verbindung. — 4. Analyse des Anzahlbegriffs nach Ursprung und Inhalt. — 5. Die Relationen Mehr und Weniger. — 6. Die Definition der Gleichzahligkeit durch den Begriff der gegenseitig-eindeutigen Zuordnung. — 7. Zahlendefinitionen durch Aequivalenz. — 8. Discussionen über Einheit und Vielheit. — 9. Der Sinn der Zahlenaussage. — Anhang: Die nominalistischen Versuche von Helmholtz und Kronecker.

W. Unverzagt sagt (in: Der Winkel als Grundlage mathematischer Untersuchungen; Wiesbaden 1878): „Der Begriff der Zahl ist in seinen Wandlungen vielleicht mit der interessanteste — freilich auch einer der schwierigsten“ und giebt dort eine kurze historische Schilderung dieser Wandlungen. Seine Aeusserungen beziehen sich allerdings in erster Linie auf die mathematische Entwickelung, die der Begriff der Zahl erfahren. M. Simon, dessen Lehrbuch der Arithmetik den Beifall hervorragender Mathematiker gefunden, spricht sich in seinem Programm: „Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie“ (Strassburg 1891) dahin aus, dass in der Arithmetik in den letzten zehn Jahren eine gewisse Uebereinstimmung sich zeige. „Mit der Kant'schen Unterordnung der Zahl unter die Zeit ist gebrochen worden. Die Zahl ist dem rein logischen Begriff der Zuordnung unterstellt.“ Diese Ansicht theilt der Verfasser des vorliegenden

Werkes nicht, er ist vielmehr der Meinung, dass „die Versuche, die die Grundfragen des behandelten Gebietes angehen, zahllos sind", und dass eine Entscheidung noch ausstehe. Freilich will er von diesen zahllosen Versuchen nur die wichtigsten in Betracht ziehen „in geduldiger Einzelforschung nach den haltbaren Fundamenten suchen, in sorgfältiger Kritik die beachtenswerthen Theorien prüfen, Richtiges und Verfehltes sondern, um so belehrt Neues und womöglich besser Gesichertes an deren Stelle zu setzen". Mit diesen Worten kennzeichnet er die Tendenz seines Werkes.

Es will uns scheinen, als ob der Verfasser manche Arbeiten, die doch von Anderen für wichtig gehalten werden, unterschätzt habe. So wäre wohl gleich anfangs ein Eingehen auf G. Cantor's Arbeiten und die damit zusammenhängenden Kerry's am Platze gewesen. Auch Bolzano hätte von älteren Bearbeitern der hierher gehörigen Probleme verdient, genannt zu werden, zumal wir ihm wohl den „Inbegriff" verdanken. Was die Darstellung selbst betrifft, so muss Referent gestehen, dass dieser ganze erste Theil ihm den Eindruck des Schwankenden, noch nicht zu klarer Einsicht Gediehenen gemacht hat, so dass auch der Leser nicht zu einem befriedigenden Ergebniss gelangt: wobei nicht verkannt werden soll, dass im Verlaufe der Untersuchungen eine Reihe treffender Erörterungen und scharfsinniger Begriffsfestsetzungen vorkommen.

Nicht sehr angenehm fällt die durchgängige Verurtheilung anderer Ansichten, darunter derer von anerkannten Autoritäten auf, während der Verfasser die völlige Evidenz der eignen Untersuchungen besonders hervorhebt, wenn er z. B. sagt: „Im Uebrigen ist aus unseren Analysen mit unwidersprechlicher Klarheit hervorgegangen . . .; das Ziel, das sich Frege setzt, ist also ein chimärisches. Es ist daher kein Wunder, wenn sein Werk, trotz allen Scharfsinnes, in unfruchtbaren Hypersubtilitäten verläuft und ohne positive Resultate endet". Es dürfte Zweifler an der unwidersprechlichen Klarheit geben und Leser, die auch in einigen Untersuchungen des Verfassers unfruchtbare Hypersubtilitäten sehen. Ganz besonders anfechtbar erscheinen uns die Ausführungen des Verfassers im achten Capitel.

Der zweite Theil umfasst folgende Capitel: 10. Die Zahlenoperationen und die eigentlichen Zahlbegriffe. — 11. Die symbolischen Vielheitsvorstellungen. — 12. Die symbolischen Zahlvorstellungen. — 13. Die logischen Quellen der Arithmetik.

Dieser Theil beginnt mit den Worten: „Nach der Discussion und Lösung der subtilen Fragen . . ."; er ist im Allgemeinen klarer und erscheint von grösserer Bedeutung. Besonders gelungen sind Capitel 11 und 12, im letzteren wiederum die Entwickelung des Zahlensystems.

Als Eigenthümlichkeit muss noch erwähnt werden, dass, wo auch immer, Rechnungen einfachster Art vorkommen, sie falsch sind (S. 150;

S. 283; S. 296), ohne dass sie in den Berichtigungen am Schlusse des Buches verbessert sind. Eigenthümlich ist auch die Orthographie des Verfassers.

Dr. H. Schotten.

Function und Begriff. Vortrag, gehalten in der Sitzung vom 9. Januar 1891 der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft von Dr. G. Frege, Professor an der Universität Jena. — Jena, Verlag von Hermann Pohle, Grossherzogl. Hofbuchdrucker, 1891. 31 S. Preis 1,20 Mk.

Der durch seine Begriffsschrift bekannte Verfasser bietet hier in etwas populärerer Form einige Aufklärungen über diese. Nach einer genauen Definition der Function, wobei die gewissenhafte Beachtung von Form und Inhalt besonders empfohlen wird, geht Verfasser näher auf das Argument ein, das nicht äusserlich zur Function gehöre, sondern mit ihr zusammen ein vollständiges Ganzes bilde. Ferner wird der Unterschied zwischen Function und Zahl behandelt und des Näheren auf den Werthverlauf einer Function eingegangen; dabei ergiebt sich, dass der Begriffsumfang gleich dem Werthverlauf der Function ist. Diese Resultate werden dann auf Urtheile angewendet (Behauptungsgrenze). Die scharfe Begrenzung der Begriffe ist identisch mit dem bestimmten Werthe, den eine Function für jedes Argument annimmt. Zum Schluss geht der Verfasser auf die Begriffsschrift ein und lehrt die Bedeutung der eingeführten Zeichen.

Dr. H. Schotten.

Les nouvelles bases de la géométrie supérieure (géométrie de position) par A. Mouchot ancien professeur de l'université, lauréat de l'academie des sciences. Paris, Gauthier-Villars et fils 1892. 8°. VII, 179 S.

Die geometrische Darstellung des Imaginären ist bereits das Ziel sehr vieler Bestrebungen gewesen. Ueber Stellung und Werth des Problems im Zusammenhange der Mathematik kann man verschiedener Ansicht sein. Wichtig ist die Lösung desselben besonders für die Vertreter zweier Standpunkte: Für jene, welche ein algebraisches Symbol erst in dem Augenblicke für berechtigt ansehen, in welchem dessen Anwendbarkeit auf etwas Substantielles nachgewiesen ist, und für jene, welche ihrem Begriffe von Geometrie eine solche Weite gegeben haben, dass sie ein Rivalisiren derselben mit der Analysis in allen denkbaren Richtungen verlangen. Dem gegenüber kann man sich aber auch auf Standpunkte stellen, von denen aus gesehen die Lösung des Problems keinen so principiellen Werth hat, wenn sie auch immerhin als sehr interessant und nützlich zu bezeichnen ist. Der Analytiker vom reinsten Wasser leugnet, bei der Schaffung und dem Gebrauch des Imaginären irgend einer ausserhalb seiner

Wissenschaft liegenden Rechtfertigung zu bedürfen, der reine Geometer hält Fragen, welche sich nicht aus der Anschauung räumlicher Gestalten ergeben, für weniger in seinem Interesse gelegen.

Mouchot führt in seinem Werke eine geometrische Deutung des Imaginären durch und vertritt mit Entschiedenheit die beiden zuerst charakterisirten Standpunkte. Er betont, dass die Reform der Mathematik, welche Cartesius anbahnte, erst durch die geometrische Deutung des Imaginären vollendet werde. Erst dieser Schritt, erst dieser Hilfsact der Geometrie mache die Algebra aus einer dunklen und verworrenen Wissenschaft zu einer lichtvollen und vernünftigen. Interessant ist die Angabe, dass auch die Descart'sche Methode ursprünglich viel mehr die Absicht hatte, der rathlosen Analysis mittelst der Geometrie zu Hilfe zu eilen, als umgekehrt der Geometrie mittelst der Analysis. Wir können dies so in Worte kleiden: Für Descarte's war seine neue Erfindung vielmehr eine „geometrische Analyse", als eine „analytische Geometrie". Mouchot belegt seine Ansicht durch Wiedergabe der Hauptpunkte aus Descarte's Schriften. Er verwirft ferner die Verbannung des Maassgeometrischen, welche sich in den Schriften v. Staudt's und seiner Nachfolger findet. Doch darüber später Genaueres.

Wir wollen die Grundlagen der Mouchot'schen Theorie anzudeuten versuchen, des rascheren Verständnisses wegen zum Theil in anderer Darstellung, als bei Mouchot selber:

Zwei gewöhnliche Punkte bilden als erste und zweite Componente (composante) zusammen einen „imaginären Punkt". Tauscht die erste Componente mit der zweiten die Rolle, so entsteht der conjugirte Punkt zu dem erstentstandenen. Ein „reeller" Punkt ergiebt sich, indem die beiden Componenten auf einen gewöhnlichen Punkt zusammen rücken.

Die Gesammtheit der als Componenten aufgefassten Punktpaare, welche in einer Ebene mit einem festen reellen Punkt als Scheitel die Ecken gleichschenkliger rechtwinkliger Dreiecke bilden, geben zusammen die sogenannte rectanguläre Gerade, zu welchen der feste Punkt als einziger reeller gehört. Die Numerirung der Componenten mit 1 und 2 ist dabei in einem einheitlichen Sinne vorzunehmen. Beliebige imaginäre Gerade entstehen durch Parallelprojection des eben geschilderten Systems auf andere Ebenen. In einer solchen Geraden sind stets zwei Richtungen ausgezeichnet. Grenzfall ist die gewöhnliche, reelle Gerade, bei welcher diese Richtungen zusammenfallen in eine einzige, gewöhnliche Gerade, auf welche dann auch sämmtliche Componenten der imaginären Punkte zu fallen kommen. Theile der Geraden sind die Strecken (segments rectilignes) zwischen zwei Punkten. Sind die Componenten eines ersten Punktes P_1, P_2, die eines zweiten Q_1, Q_2, so besteht die Strecke aus den beiden gewöhnlichen geraden Strecken P_1Q_1 und P_2Q_2 und enthält alle Punkte, deren Componenten R_1, R_2 diese respectiven Strecken proportional zertheilen.

Ein Kreis mit reellem Mittelpunkt und Radius enthält ausser seinem reellen noch imaginäre Punkte, die den ausserhalb des Kreises liegenden Raum der Ebene doppelt überdecken. Eine Hauptaufgabe ist immer die, die auftretenden doppelt unendlichen Mannigfaltigkeiten der imaginären Punkte so in einfache, linienbildende Mannigfaltigkeiten zusammen zu fassen, dass man eine übersichtliche Anschauung von der Lage derselben bekommt. Beim Kreise geschieht dies mittelst gleichseitiger Hyperbeln, deren jede einen Durchmesser des Kreises zum Hauptdurchmesser hat, in den Endpunkten desselben den Kreis berührt und als conjugirt zum Kreise bezeichnet wird. Auf einer solchen Hyperbel liegen zusammengehörige Componenten eines imaginären Punktes immer symmetrisch zur Hauptachse. Mouchot definirt dann auch Kreise mit imaginären Mittelpunkten und Radien, und mittelst derselben die Entfernung zwischen zwei beliebigen Punkten. Vom Kreise aus werden die anderen Kegelschnitte behandelt; die parallele Rolle, welche der Kreis und die gleichseitige Hyperbel spielen, kommt noch vollständiger als sonst zur Erscheinung und führt zur Anwendung des Begriffs der „hyperbolischen Entfernung" und der mit „Vectrices" bezeichneten Hyperbelradien. Besonders interessant ist Capitel IV über „Aires de mode quelconque" und „Fonctions transcendantes". Sehr schön tritt hier geometrisch die in der Gleichung

$$log(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi) = i\,\varphi$$

gründende Verwandtschaft zwischen Logarithmen und Winkeln hervor. Mouchot glaubt, durch die geometrische Methode sogar über Unklarheiten der analytischen hinweg zu kommen, vergl. die Bestimmung von i^i (S. 146, 147).

In Capitel V erweist sich, wie die Raumgeometrie ohne principielle Schwierigkeit mittelst derselben Ideen behandelt werden kann. Die Anschaulichkeit geht aber da schon recht sehr verloren. Wenn wir z. B. sehen, wie einer gewöhnlichen Kugel nicht weniger als vier verschiedene Mannigfaltigkeiten von ein- und zweischaligen Hyperboloiden conjugirt werden müssen, um die imaginären Punkte darzustellen, so fühlen wir uns bereits an den Grenzen der Nutzbarkeit von Mouchot's Theorie. Indess ist ja schon die Erkenntniss, dass die einfachsten Formeln bei Berücksichtigung des Imaginären bereits recht verwickelte Dinge darstellen, sofern man etwas mehr als das in den Formeln direct Ausgesprochene erfahren will, — es werth, gewonnen zu werden.

Mouchot legt entsprechend seinen Anfangs charakterisirten Ansichten Gewicht auf die Uebersetzung der rechnerischen Grundoperationen in geometrische und wendet im Uebrigen die Hilfsmittel der analytischen Geometrie an, wo es ihm bequem erscheint. Die einfachsten Aufgaben über Bestimmung gemeinsamer Elemente etc. werden durch elementare Constructionen zur Lösung gebracht.

Auf Curven und Flächentheorie geht Mouchot nicht ein, auch kommen keine höheren Involutionen zur Verwendung, wie dies in den Arbeiten Lüroth's und Kötter's geschieht. Er will nur die Grundlagen seiner Theorie, möglichst elementar gestaltet, vorführen. Trotzdem ist das Buch nicht überall ganz leicht verständlich, was von der neuartigen Fassung der Begriffe und der Terminologie herrührt. Man muss sich erst gewöhnen unter „la droite“ (S. 24, Z. 8 von oben etc.), „droit“ (S. 20, Z. 6 von oben, wo es statt „radiés ou droit“ heissen soll „droit ou radiés), „rectiligne“ (S. 19, Z. 4 von oben) ziemlich verschiedene Begriffe zu verstehen, das Wort „réel“ bei Punkten (S. 17), Strecken (S. 21, Z. 9 von oben) und Geraden (S. 24, S. 28 „disjointe“) in wenig analogen Bedeutungen anzuwenden, und Aehnliches. Auch scheint mir bei der Definition der Begriffe „homogène“ und „la droite“ (S. 22—24) nicht Alles zu harmoniren.

Mouchot versäumt nicht, auf andere in Frankreich entstandene Darstellungsweisen des Imaginären aufmerksam zu machen, und an verschiedenen Orten zu zeigen, dass seine eigene dieselben mit umfasst. In der That ist die Theorie der quantités géométriques von Argand — bei uns durch Gauss bekannt geworden — (s. S. 55) der supplementären Kegelschnitte und idealen Sehnen von Poncelet (vergl. S. 10 und S. 65), das Verfahren Laguerres (s. S. 14) in Mouchot's Theorie enthalten, und dasselbe sagt Mouchot auch aus von den mir unbekannten imaginären Coordinaten Maries. Der Versuch, die Hamilton'schen Quaternionen geometrisch verständlich zu machen, scheint mir weniger geglückt. Eine Einheit, wie j, k, l (S. 165), welche bald als reell, bald als imaginär, ja sogar abgesehen von ihrem Vorzeichen betrachtet wird (s. S. 166), ist ein Wachs, aus dem alles geformt werden kann. Müsste es nicht wenigstens S. 166, Z. 8 von oben statt $kj = 0\,(A, A')$ heissen $kj = -0\,(A, A')$, um die in Zeile 11 von oben auftretende Gleichung $0(C, C') = 0(A, A')$ zu vermeiden, weil dieselbe mit Seite 165 Z. 2 von oben einen Widerspruch ergiebt?

Mouchot citirt keine der neueren deutschen Arbeiten über das Imaginäre in der Geometrie, welche man von Kötter* gesammelt findet. Erst in neuerer Zeit hat Adalbert Breuer in einer Reihe von Brochüren** das Imaginäre aus dem nämlichen Gesichtspunkte behandelt, wie Mouchot. Dabei ist aber nicht aus dem Auge zu verlieren, dass Mouchot vor allen Neueren die Priorität hat, indem er sich seit 30 Jahren mit dem Problem beschäftigt und in seiner ersten Mittheilung an die Pariser Akademie vom Jahre 1865 bereits der vollständige Grundplan seines Buches angedeutet

* Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven. Von der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin gekrönte Preisschrift von Dr. Ernst Kötter. Berlin 1887. S. 290 u. flg. Nicht erwähnt wird dort die Schrift von Fritz Hofmann: Die Constructionen doppelt berührender Kegelschnitte mit imaginären Bestimmungsstücken. Leipzig, bei B. G. Teubner, 1886.

** Erschienen im Verlag von Bodo Bacmeister in Erfurt.

ist. Wer von ihm nicht citirt ist, dürfte ihn nicht citirt haben. Im Jahre 1876 veröffentliche er über den nämlichen Gegenstand: La réforme cartésienne étendue aux diverses branches des Mathématiques pures.

Nicht völlig in's Reine kommt man über Mouchot's Verhältniss zu v. Staudt. Es ist möglich, dass Mouchot auf seine Ideen unabhängig von v. Staudt gerathen ist; jedenfalls fasst er die Sache von einer ganz anderen Seite an; Terminologie und Darstellung athmen einen anderen Geist. Indessen lässt sich seine Deutung des Imaginären aus der v. Staudt'schen ableiten. Mouchot scheint sich darüber nicht ganz klar gewesen zu sein. Die einzige sachliche Bemerkung über v. Staudt (S. 14):

> „v. Staudt semble avoir eu le premier l'idée de représenter par un couple de points géométriques les points doubles d'une involution, lorsqu'ils cessent d'être réels"

ist in ihrer Kürze zu undeutlich und schliesst möglicher Weise ein Missverständniss ein, die spätere Polemik gegen denselben Geometer (S. 174 und 175) erweckt direct den Eindruck, als ob Mouchot nicht verstehe, was v. Staudt eigentlich geleistet hat, und dass der Uebergang von seinen projectivischen Sätzen zu denen der Maassgeometrie keine principielle Schwierigkeit bietet. Sonst müsste Mouchot eingesehen haben, dass er mit Behauptungen wie: „L'oeuvre de v. Staudt n'a donc pas l'importance qu'on voudrait lui donner" und „L'œuvre de v. Staudt n'est pas moins exclusive que les précédentes et rien ne prouve q'elle soit plus parfaite", anstatt das Verdienst der eigenen Arbeit zu erhöhen, sich vielmehr selbst den Ast absägt, auf dem er sitzt. Wir müssen, um den Zusammenhang klar zu stellen, Folgendes erwähnen:

v. Staudt stellt zwei conjugirt imaginäre Punkte durch eine elliptisch involutorische Punktreihe auf einer Geraden resp. durch zwei bestimmende Punktpaare dieser Involution dar. In jeder solchen Involution giebt es nur ein Paar zusammengehöriger Punkte a und a', welche von dem sogenannten Mittelpunkte der Involution gleichweit entfernt sind, und umgekehrt giebt es zu jedem Punktpaar b und b' nur eine solche Involution, in welcher dieselben die Rolle der Punkte a und a' übernehmen. Es ist dies jene Involution, in der dem Halbirpunkte m von bb' der unendlich ferne Punkt der Geraden bb' zugeordnet ist. Insofern wird das Punktpaar aa' als Darstellungsmittel conjugirt imaginärer Punkte, wie bei Mouchot, äquivalent einer ganzen involutorischen Reihe, und auch die beiden Sinne einer solchen lassen sich durch aa' und $a'a$ auseinander halten. Man hat nun zugleich einen maassgeometrischen Vortheil erreicht. Für den Fall nämlich, dass man eine Coordinatenachse mit dem Anfangspunkte o in die Gerade aa' hinein verlegt, lässt sich die Coordinate $\alpha+\beta i$ des imaginären Punktes aa' sofort ausfindig machen, indem $\alpha = om$, $\beta = ma$ wird, wobei m den Involutionsmittelpunkt bedeutet (vergl. die oben citirte Kötter'sche Preisschrift S. 237).

Wir können also die Polemik gegen v. Staudt nicht gerechtfertigt finden. Die Begriffe der Zahl- und Raumgrössen traten dem Mathematiker zunächst in einer natürlichen Verbindung entgegen, welche er zu scheiden verpflichtet war. Aber soviel ist Mouchot zuzugeben, dass, nachdem diese Scheidung hinlängliches Licht über die Tragweite der einzelnen Factoren verbreitet hat, die Wiedervermählung eine rechtmässige, ja wünschenswerthe ist. Es ist kein Grund vorhanden, warum der begriffsscheiderische Deutsche und der mehr auf das Zusammenwirken der Ideen zu einem eleganten Gedankenkunstwerk bedachte Franzose nicht ohne gegenseitige Verkleinerungssucht neben einander arbeiten könnten.

Das möchten wir noch auseinander setzen, inwiefern unter den möglichen Darstellungsweisen des Imaginären die von Mouchot herausgehobene eine besonders befriedigende ist. Von allen Vorstellungen über einen reellen Punkt bleibt doch die ursprünglichste und uns immer zuerst vorschwebende die der Fixirung des Auges auf eine bestimmte Stelle des Raumes. Wenn v. Staudt den imaginären Punkt durch eine involutorische Reihe oder durch vier Punkte, die noch an unendlich vielen Stellen liegen können, definirt, so fehlt diesem Begriff gerade jenes für den reellen Punkt entscheidende Charakteristicum. In Mouchot's Darstellungsweise dagegen ist die Analogie zwischen dem reellen und imaginären Punkte so weit, als es überhaupt möglich sein dürfte, hergestellt, indem zwar nicht eine, aber zwei ganz bestimmte Stellen für unser Auge fixirt werden, wenn ein imaginärer Punkt gegeben ist.

Zum Schlusse sei jedem Mathematiker das eigene Studium des interessanten Buches empfohlen, das sich aller jener Vorzüge erfreut, welche den Werken besserer französischer Autoren eigen zu sein pflegen.

Hermann Brunn.

Sophus Lie, **Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen;** bearbeitet und herausgegeben von Dr. Georg Scheffers. Leipzig 1891. 568 S. 8°.

Da durch eine Differentialgleichung die functionale Beziehung der abhängigen Variabeln zu den unabhängig Veränderlichen nicht vollkommen festgelegt wird, spaltet sich das Problem der Integration naturgemäss in zwei wesentlich verschiedene Aufgaben. Die eine besteht darin, die durch die Differentialgleichung gesetzte Beziehung durch eine ihr vollkommen gleichwerthige endliche Gleichung darzustellen, in welcher noch willkürliche Functionen oder Constanten auftreten, und die als allgemeine Integralgleichung bezeichnet wird; die andere sucht nach einer Function, die nebst der Forderung der vorgelegten Differentialgleichung zu genügen auch noch andere, die sogenannten Anfangsbedingungen erfüllt, und dadurch, ohne jede weitere Willkürlichkeit einzuschliessen, im Allgemeinen eindeutig bestimmt ist. Die letztere Aufgabe schliesst die erstere in sich, wenn den Anfangsbedingungen die erforderliche Allgemeinheit belassen wird, und für gewöhnliche Differentialgleichungen ist auch in der Regel umgekehrt, nach Auffindung des allgemeinen Integrals, die Erfüllung vorgeschriebener Anfangsbedingungen nicht weiter mit Schwierigkeiten verknüpft. Trotzdem lassen sich auch in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zwei verschiedene Richtungen unterscheiden, die neben einander bestehen, ohne sich bisher wesentlich beeinflusst zu haben, die aber, wenn man sich nur jede derselben gehörig entwickelt denkt, beziehungsweise auf die Lösung der einen und der anderen der beiden bezeichneten Aufgaben, also nach der eben gemachten Bemerkung, auf dasselbe Ziel hinauslaufen. Die nach Auffindung der allgemeinen Integralgleichung strebende Richtung ist von den älteren Analysten (denen, wenn man nur die auf die Theorie der Differentialgleichungen unmittelbar Bezug habenden Arbeiten in Betracht zieht, auch Jacobi zuzuzählen wäre) gepflegt; sie hat jedoch immer nur gesucht, ihre Aufgabe durch blosse Anwendung von Quadraturen zu lösen und blieb darum auf die wenigen Fälle beschränkt, wo eine Lösung in diesem Sinne möglich war. Die andere Richtung sucht die, durch eine Differentialgleichung determinirte Function in ihrer Abhängigkeit von der unabhängigen Veränderlichen einerseits und von den Anfangsbedingungen andererseits zu bestimmen*; sie hat ihren Ausgangspunkt in dem Cauchy'schen Existenztheorem und beherrscht die auf functionentheoretischer Grundlage geführten neueren Untersuchungen über Differentialgleichungen. Ersetzt man das Problem der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung auf bekannte Weise durch ein ihm äquivalentes aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, so ist die Auffindung der allgemeinen Integralgleichung einer gewöhnlichen Differentialgleichung zurückzuführen auf die Ermittelung der allgemeinen Lösung einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung; die allgemeine Integralgleichung ist durch Quadraturen zu bestimmen, wenn die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung durch das gleiche Hilfsmittel gelöst werden kann; dagegen erscheint zu Folge der nothwendigen Einführung von complexen Variabeln die functionentheoretische Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen gleichwerthig mit der Integration partieller Differentialgleichungen bei gegebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. — Schon diese allgemeinen Ueberlegungen lassen erkennen, dass die beiden hervorgehobenen Richtungen berufen sind, sich wechselseitig zu ergänzen, dass aber, um eine wirkliche Nebeneinanderstellung derselben möglich zu machen, bei der ersteren Richtung die Forderung der Integration durch blosse Quadraturen durch andere, mehr dem Wesen der Sache entsprechende

* Vergl. Fuchs, Crelle's Journal Bd. 66, S. 121, Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 26. Juni 1884.

Forderungen ersetzt, oder doch von einem höheren, der Verallgemeinerung fähigen Gesichtspunkte aus betrachtet werden müsse. So behandelt z. B. Herr Poincaré in seinen Arbeiten über die Differentialgleichungen der Dynamik die Frage nach den Fällen, wo die Integralgleichung durch eine gleich Null gesetzte eindeutige Function gegeben wird, auf der anderen Seite hat Herr Lie durch seine Theorie der Transformationsgruppen neue Methoden für die allgemeine Integration partieller Differentialgleichungen geschaffen, welche u. A. auch gestatten, die Integrabilität einer Differentialgleichung durch Quadraturen und die auf diese Frage gerichteten „speciellen Theorien" der älteren Analysten, „unter eine allgemeine Methode unterzuordnen".

Das zu besprechende Buch, dessen einleitenden Sätzen die hier unter Anführungszeichen wiedergegebenen Worte entnommen sind, hat den doppelten Zweck, einerseits, in die Lie'sche Theorie der Transformationsgruppen einzuführen, andererseits, die Anwendungen dieser Theorie auf die in dem hervorgehobenen Sinne gefasste Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen der drei ersten Ordnungen und der entsprechenden linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu geben. — Sagen wir gleich, dass dieser doppelte Zweck in mustergiltiger Weise erreicht wird, mustergiltig in Bezug auf die Klarheit und die echt wissenschaftliche — in manchen anderen neueren Publicationen leider nicht immer gewahrte — Schlichtheit der Darstellung, sowohl, wie in Bezug auf die pädagogische Anordnung des behandelten Stoffs. Von dieser letzteren werden wir uns gestatten, bei dem Bericht über den Inhalt des Lie'schen Werkes abzusehen und versuchen in gedrängter Kürze eine Uebersicht über die vorgetragenen Theorien zu geben.

Die n Gleichungen

$$x'_k = \varphi_k(x_1, \dots x_n, a) = \varphi_k(a), \qquad k = 1, 2 \dots n$$

mit dem willkürlichen Parameter a, bestimmen eine Transformation, die Schaar der ∞^1 Transformationen, die dadurch entsteht, dass a alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, bilden eine eingliedrige Gruppe, wenn alle Male

$$\varphi_k\big(\varphi_1(a), \dots \varphi_n(a), b\big) = \varphi_k(\lambda),$$

wo λ eine bestimmte Function von a, b bedeutet. Die Gruppe enthält zu jeder Transformation auch die inverse, wenn sich zu jedem a ein $\bar{a}$ so finden lässt, dass

$$\varphi_k\big(\varphi_1(a), \dots \varphi_n(a), \bar{a}\big) = x_k;$$

dann enthält die Gruppe auch die identische Transformation

$$\varphi_k(a_0) = x_k$$

und folglich auch eine infinitesimale Transformation

$$x'_k = \varphi_k(a_0 + \delta\alpha) = x_k + \xi_k(x_1, \dots x_n)\,\delta t + \cdots$$

Der Begriff der letzteren wird so gefasst, dass auch jede eingliedrige Gruppe nur **eine** infinitesimale Transformation enthält und gezeigt, dass auch umgekehrt jede gegebene infinitesimale Transformation

$$x'_k = x_k + \xi_k \delta t + \cdots,$$

die kurz durch das Symbol

$$Uf = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

bezeichnet wird, einer und nur einer eingliedrigen Gruppe mit paarweise inversen Transformationen angehöre. Die endlichen Gleichungen dieser Gruppe ergeben sich 1) durch Integration des Systems

$$\frac{dx'_k}{\xi_k(x'_1, \ldots x'_n)} = dt$$

in der Form

$$\Omega_k(x'_1, \ldots x'_n) = \Omega_k(x_1, \ldots x_n); \quad W_k(x'_1, \ldots x'_n) - t = W_k(x_1, \ldots x_n),$$

und 2) in Form von Rechenentwickelungen

$$x'_k = x_k + t\,Ux_k + \frac{t^2}{2} U(Ux_k) + \cdots$$

Eine **Function** Ω ist eine **Invariante** der Gruppe, wenn $U\Omega = 0$, also die allgemeinste Invariante eine willkürliche Function der $(n-1)$ unabhängigen Lösungen von $Uf = 0$; die **Gleichung** $\Omega = 0$ ist invariant, wenn $U\Omega = 0$ vermöge $\Omega = 0$.

Eine lineare partielle Differentialgleichung

$$Af = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

„gestattet die Transformationen einer Gruppe“, sobald sie ihre infinitesimale Transformation zulässt, das heisst, wenn ω_k $(k = 1, 2 \ldots n-1)$ die unabhängigen Lösungen von $Af = 0$ sind, sobald jedes $U\omega_k$ wieder eine Lösung ist. — Gestattet $Af = 0$ die r infinitesimalen Transformationen $U_k f$ $(k = 1, 2 \ldots r)$, so gestattet sie auch die infinitesimale Transformation

$$Uf = \sum_{k=1}^{r} u_k U_k f + v\,Af,$$

wo die $u_1, \ldots u_r$ Lösungen von $Af = 0$ und v eine willkürliche Function bedeutet; umgekehrt sind die Coefficienten der $U_k f$ in jeder linearen Beziehung zwischen diesen und Af Lösungen von $Af = 0$. Ist $r = n-1$ und besteht zwischen den $U_k f$ und Af **keine** lineare Beziehung, so ist der reciproke Werth der aus den Coefficienten von $U_1 f, \ldots U_{n-1} f$, Af gebildeten Determinante ein **Multiplicator** von $Af = 0$; jede Gleichung $Af = 0$ besitzt solche $(n-1)$ infinitesimale Transformationen.

Für $n = 2$ und $x_1 = x$, $x_2 = y$ (Punkttransformationen in der Ebene), geben die angeführten Sätze eine Integrationstheorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\alpha_1 dy - \alpha_2 dx = 0 ,$$

die eine bekannte infinitesimale Transformation gestatten, indem ja die Kenntniss einer solchen einen Multiplicator der Differentialgleichung liefert. Um jedoch diese Theorie für die allgemeine Form $\Omega(x, y, y') = 0$ einer solchen Gleichung auszugestalten, wird die Gruppe in den beiden Variabeln x, y durch Hinzunahme der den einzelnen Transformationen entsprechenden Transformation des durch eine beliebige Curve $\varphi(x, y) = 0$ bestimmten Differentialquotienten $y' = \frac{dy}{dx}$ auf eine Gruppe in den drei Variabeln (x, y, y') erweitert. Ist

$$Uf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

die infinitesimale Transformation der gegebenen Gruppe, so ist

$$U'f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'}; \quad \left(\eta' = \frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx}\right)$$

die infinitesimale Transformation der erweiterten Gruppe und wenn die Differentialgleichung erster Ordnung $\Omega(x, y, y') = 0$, mit dem allgemeinen Integral $\omega(x, y) = const,$ die durch Uf bestimmte Gruppe gestattet, das heisst, wenn $U\omega = 0$, vermöge $\omega = 0$, so ist auch $U'\Omega = 0$, vermöge $\Omega = 0$, und umgekehrt. — Die allgemeinste eine gegebene infinitesimale Transformation Uf zulassende Differentialgleichung erster Ordnung wird also gegeben durch die gleich Null gesetzte allgemeinste Invariante der erweiterten Transformation $U'f$ (Differentialvariante erster Ordnung von Uf); eine der beiden unabhängigen Invarianten von $U'f$ ist die Invariante $u(x, y)$ von Uf, ist diese bekannt, so findet man die andere, y' enthaltende, und damit also alle möglichen, durch blosse Anwendung von Quadraturen. Wenn also eine infinitesimale Transformation Uf gegeben und ihre Invariante bekannt ist, so lassen sich durch Quadraturen allein alle Differentialgleichungen erster Ordnung, die diese Transformation zulassen, herstellen, und jede solche Differentialgleichung kann dann wieder durch blosse Quadraturen integrirt werden.

Während jede Differentialgleichung erster Ordnung eine infinitesimale Transformation gestattet, ist dies für Differentialgleichungen höherer Ordnung nicht mehr der Fall. Die allgemeinste Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche die infinitesimale Transformation Uf oder die durch dieselbe definirte eingliedrige Gruppe gestattet, ergiebt sich als die gleich Null gesetzte allgemeinste Invariante der zweimal erweiterten Gruppe, deren infinitesimale Transformation durch

$$U''f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial f}{\partial y''} \quad \left(\eta'' = \frac{d\eta'}{dx} - y'' \frac{d\xi}{dx}\right)$$

dargestellt wird. Diese allgemeinste Invariante von $U''f$ (Differentialinvariante zweiter Ordnung von Uf) ist eine willkürliche Function der Invariante u von Uf, der bei gegebenem u durch Quadraturen zu ermittelnden ersten Differentialinvariante v, und der y'' enthaltenden Invariante $w = dv : du$. Analog findet man auch alle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die eine infinitesimale Transformation Uf gestatten, durch blosse Quadraturen und Differentationsprocesse, wenn die Invariante von Uf bekannt ist.

Zur Entwickelung der Integrationstheorie für Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die bekannte infinitesimale Transformationen gestatten, hat man zu beachten, dass, wenn $y'' = w(x, y, y')$ die infinitesimale Transformation Uf zulässt, die äquivalente partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + w(x, y, y') \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

die erweiterte Transformation $U'f$ zulassen müsse. Wenn aber eine partielle Differentialgleichung

$$Af = X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

die infinitesimale Transformation Uf in den drei Variabeln (x, y, z) gestattet, so bilden $Af = 0$ und $Uf = 0$ ein sogenanntes vollständiges System, das heisst, sie haben eine Lösung gemein, die nach Paul du Bois-Reymond durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in x, y gefunden werden kann, und eine zweite Lösung ergiebt sich durch eine Quadratur. Die Frage nach den Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die mehrere von einander unabhängige infinitesimale Transformationen (das heisst solche, zwischen denen keine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten besteht) gestatten, führt zu dem Begriff der Gruppen von infinitesimalen Transformationen.

Der Inbegriff der r infinitesimalen Transformationen $U_1 f, \ldots U_r f$, und der von diesen linear mit constanten Coefficienten abhängenden, bildet eine r-gliedrige Gruppe infinitesimaler Transformationen, wenn auch jeder „Klammerausdruck“

$$(U_i U_k) = U_i(U_k f) - U_k(U_i f)$$

und folglich auch jeder aus irgend zwei Transformationen der Gruppe gebildeter Klammerausdruck mit zu diesem Inbegriff gehört; die Coefficienten der Relationen

$$(U_i U_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} U_s f$$

stellen dann die **Zusammensetzung** der Gruppe dar.* Bildet schon eine geringere Anzahl $U_1 f, \ldots U_\varrho f$, $\varrho < r$, der infinitesimalen Transformationen der r-gliedrigen Gruppe für sich eine Gruppe, so heisst diese eine ϱ-**gliedrige Untergruppe** und insbesondere eine **invariante Untergruppe**, wenn die Klammerausdrücke der $U_1 f, \ldots U_\varrho f$ mit allen $U_1 f, \ldots U_r f$ zu der Untergruppe gehören. So bilden die $(U_i U_k)$ für sich eine invariante Untergruppe, die **erste derivirte Gruppe** der ursprünglichen; überhaupt gehört jede infinitesimale Transformation der Gruppe mindestens einer zweigliedrigen Untergruppe an, die sich stets auf **rein algebraische** Weise bestimmen lässt.

Die Gesammtheit der infinitesimalen Transformationen in (x, y), die eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung zulassen kann, bildet nun **höchstens** eine **achtgliedrige** Gruppe (in diesem äussersten Falle reducirt sich die Differentialgleichung im Wesentlichen auf $y'' = 0$); die äquivalente lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung in (x, y, y') lässt dann die Gruppe der erweiterten infinitesimalen Transformationen zu; die Natur der letzteren bestimmt sich aus dem Satz, dass die Erweiterung des Klammerausdrucks zweier infinitesimaler Transformationen gleich dem aus den erweiterten Transformationen gebildeten Klammerausdruck ist. — Gestattet eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwei oder mehrere infinitesimale Transformationen, so lässt sie nach dem Vorhergehenden mindestens eine zweigliedrige Gruppe zu. In diesem Falle lässt sich das Integrationsgeschäft auf zwei verschiedene Arten erledigen:

a) Durch die Reduction der zweigliedrigen Gruppe infinitesimaler Transformationen in (x, y) auf ihre vier canonischen Formen:

$$1)\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y};\quad 2)\ \frac{\partial f}{\partial y},\ x\frac{\partial f}{\partial y};\quad 3)\ \frac{\partial f}{\partial y},\ x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y};\quad 4)\ \frac{\partial f}{\partial y},\ y\frac{\partial f}{\partial y},$$

zu deren Vollzug es in den Fällen 1), 2), 3) höchstens zweier Quadraturen, dagegen im Falle 4) der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung bedarf, und die sofort ausführbare Integration der Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die eine der canonischen zweigliedrigen Gruppen gestatten.

b) In vollständigerer Weise mit Benutzung der äquivalenten partiellen Differentialgleichung. Es verlangt nämlich die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung $Af = 0$ in den drei Variabeln x, y, z, die

---

* Die allgemeinste Transformation der Gruppe wird gegeben durch

$$U_1 f + a_2 U_2 f + \cdots + a_r U_r f;$$

diese infinitesimale Transformation erzeugt eine gewisse eingliedrige Gruppe, die also nebst dem ihr eigenthümlichen Parameter t noch von den $a_2, \ldots a_r$ abhängt; lassen wir also auch noch diese variiren, so erhalten wir eine r-**gliedrige Gruppe von endlichen Transformationen**. Diese Beziehung ist für's Folgende nicht nöthig, wird deshalb im Buche auch nur beiläufig erwähnt.

zwei wesentlich verschiedene infinitesimale Transformationen zulässt, entweder zwei Quadraturen oder die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und y. Hieraus folgt durch Anwendung auf die lineare partielle Differentialgleichung in (x, y, y'), die äquivalent ist einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche eine zweigliederige Gruppe infinitesimaler Transformationen in (x, y) gestattet, dass diese letztere Differentialgleichung durch Ausübung von höchstens zwei von einander abhängiger oder unabhängiger Quadraturen integrirt werden könne.

Die Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, die eine dreigliedrige Gruppe infinitesimaler Transformationen gestattet, erfolgt durch die Reduction einer solchen Gruppe auf eine ihrer sechs canonischen Formen, was die Anwendung von Quadraturen oder die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung erfordert, und die ohne Weiteres ausführbare Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, die eine der canonischen dreigliedrigen Gruppen zulässt. Die Reduction auf die canonische Form lässt sich sogar im Allgemeinen vermeiden, indem man auf die äquivalente partielle Differentialgleichung zurückgreift.

Analoge Sätze gelten für gewöhnliche Differentialgleichungen dritter Ordnung und lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung in vier Variabeln, wenn dieselben eine dreigliedrige Gruppe von infinitesimalen Transformationen zulassen.

Die bekannte infinitesimale Transformationen zulassenden Differentialgleichungen umfassen die sämmtlichen sogenannten integrablen Fälle; die Behandlung der letzteren von dem dargelegten Gesichtspunkte aus, sowie zahlreiche geometrische und mechanische Anwendungen geben dem Leser des Lie-Scheffers'schen Buches mannigfache Gelegenheit zur Einübung der vorgetragenen Theorien und lassen deren Bedeutung für die Lehre von den Differentialgleichungen hervortreten.

Ludwig Schlesinger.

Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen. Von Krazer und Prym. Leipzig 1892. B. G. Teubner.

Das in der Ueberschrift genannte Werk zerfällt in zwei Theile, der erste Theil in acht, der zweite in sieben Abschnitte.

Der erste Theil enthält die Theorie der Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken, der zweite Theil die Transformation derselben.

Die Grundlage derselben bildet die Function:

$$\vartheta\left(w_1 + h_1\pi i + \sum_{\mu=1}^{\mu=p}{}' g_\mu a_{1\mu} \,\Big|\, \dots \,\Big|\, w_p + h_p\pi i + \sum_{\mu=1}^{\mu=p}{}' g_\mu a_{p\mu}\right)_a e^{\eta},$$

$$\eta = \sum_{\mu=1}^{\mu=p}{}' \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p}{}' a_{\mu\mu'} g_\mu g_{\mu'} + 2\sum_{\mu=1}^{\mu=p}{}' g_\mu (w_\mu + h_\mu \pi i),$$

wenn unter

$$\vartheta(w_1, w_2, \ldots w_p)_a \text{ oder auch } \vartheta\left((w)\right)_a$$

die gewöhnliche Thetafunction von p Veränderlichen mit den Parametern $a_{\mu\mu'}$ verstanden wird, wenn ferner $g_1 \ldots g_p$, $h_1 \ldots h_p$ beliebige reelle Grössen bedeuten. Diese allgemeine Thetafunctionen werden bezeichnet durch:

$$\vartheta \begin{bmatrix} g_1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{bmatrix} (w_1, \ldots w_p)_a,$$

oder auch, wo keine Verwechslung zu befürchten ist, durch:

$$\vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} \left((w)\right)_a.$$

Das Symbol

$$\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{bmatrix} \text{ oder auch } \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$$

heisst die Charakteristik der Thetafunction.

Die Untersuchungen der Herren Verfasser beziehen sich nun auf den Fall, dass die Grössen g und h rationale Zahlen bedeuten, oder, wie man sich ausdrückt, auf die Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken.

Die Hauptaufgabe des ersten Theiles des genannten Werkes ist es, ein allgemeines Additionstheorem aufzustellen, und zwar auf Grund derjenigen npfachen unendlichen Reihen, welche das Product von n Thetafunctionen mit verschiedenen Parametern darstellen. Dieses Additionstheorem lautet folgendermassen:

$$c \cdot \prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=n} \vartheta\left(\left(u^{(\varepsilon)}\right)\right)_{a^{(\varepsilon)}} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=n} \vartheta \left[\frac{\dfrac{\overset{=\,(\varepsilon)}{\alpha}}{\Delta}\; \overset{-\,(\varepsilon)}{\beta}}{r} \right] \left(\left(v^{(\varepsilon)}\right)\right)_{b^{(\varepsilon)}}.$$

Hierbei sind die Grössen u und v durch die Gleichungen verknüpft:

$$r_\mu v_\mu^{(\varepsilon)} = c_\mu^{(1\,\varepsilon)} u_\mu^{(1)} + c_\mu^{(2\,\varepsilon)} u_\mu^{(2)} + \cdots c_\mu^{(n\,2)} u_\mu^{(n)},$$

wobei die Grössen $c_\mu^{\delta\varepsilon}$ ganze Zahlen, r_μ positive ganze Zahlen bedeuten, die den Bedingungen unterliegen:

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} a_{\mu\mu'}^{(\varrho)} c_\mu^{(\varrho\,\sigma)} c_{\mu'}^{(\varrho\,\sigma')} = r_\mu r_{\mu'} b_{\mu\mu'}^{(\sigma)},$$

wenn $\sigma' = \sigma$ ist, dagegen:

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} a_{\mu\mu'}^{(\varrho)} c_\mu^{(\varrho\,\sigma)} c_{\mu'}^{(\varrho\,\sigma')} = 0,$$

wenn $\sigma' \gtrless \sigma$ ist, wenn ferner die Grössen σ, σ' die Reihe der Zahlen $1, 2, \ldots n$, die Grössen μ, μ' die Reihe der Zahlen $1, 2, \ldots p$ durchlaufen.

Durch Umkehrung ergeben sich die Beziehungen:

$$\Delta_\mu u_\mu^{(\varepsilon)} = r_\mu \left(d_\mu^{(\varepsilon\,1)} v_\mu^{(1)} + d_\mu^{(\varepsilon\,2)} v_\mu^{(2)} + \cdots d_\mu^{(\varepsilon\,n)} v_\mu^{(n)}\right).$$

Die $\overline{\overline{\alpha}}$, $\overline{\beta}$ sind lineare Formen der α, β definirt durch die Gleichungen:

$$\overline{\overline{\alpha}}_{\mu}^{(\varepsilon)} = r_{\mu}\left(d_{\mu}^{(1\varepsilon)}\alpha_{\mu}^{(1)} + d_{\mu}^{(2\varepsilon)}\alpha_{\mu}^{(2)} + \cdots d_{\mu}^{(n\varepsilon)}\alpha_{\mu}^{(n)}\right),$$
$$\overline{\beta}_{\mu}^{(\varepsilon)} = c_{\mu}^{(1\varepsilon)}\beta_{\mu}^{(1)} + c_{\mu}^{(2\varepsilon)}\beta_{\mu}^{(2)} + \cdots c_{\mu}^{(n\varepsilon)}\beta_{\mu}^{(n)}$$

und es deutet das Zeichen $\sum_{\alpha}$ an, dass für $\nu = 1, 2, \ldots n$, $\mu = 1, 2 \ldots p$ nach $\alpha_{\mu}^{(\nu)}$ von 0 bis $\overline{\Delta}_{\mu} - 1$ ($\overline{\Delta}_{\mu}$ der absolute Betrag von Δ_{μ}) das Zeichen $\sum_{\beta}$ an, dass für $r = 1, \ldots n$, $\mu = 1, 2 \ldots p$ nach $\beta_{\mu}^{(\nu)}$ von 0 bis $r_{\mu} - 1$ zu summiren ist. Die Grössen $a_{\mu\mu'}^{(\varrho)}$ und $b_{\mu\mu'}^{(\sigma)}$ sind gewisse positive rationale Multipla der Grössen $a_{\mu\mu'}$, endlich bedeutet c eine mumerische Constante, deren Werth bestimmt wird.

Neben der Herleitung dieser allgemeinen Formel enthält der erste Theil eine Reihe von Specialisirungen derselben, welche für Anwendungen besonders wichtig sind. Es möge genügen, unter ihnen eine einzige Formel herauszugreifen, die sich für den zweiten Theil von fundamentaler Bedeutung zeigt, und lautet:

$$\vartheta^n\left((w)\right)_1 = \sum_{k_1\ldots k_p}^{0,1,\ldots n-1} K_{p_1\ldots k_p}\,\vartheta\begin{bmatrix} k \\ \overline{n} \\ 0 \end{bmatrix}\left((nw)\right)_n,$$

wobei die Indices 1 und n eine leicht angebbare Bedeutung besitzen und die Grössen $K_{k_1\ldots k_p}$ Constanten sind, deren Werth auf zweierlei Wegen gefunden wird. Der zweite Weg wird erst im zweiten Theil angegeben. Die Methode, welche die Herren Verfasser bei ihren Entwickelungen anwenden, besteht, wie schon bemerkt, in einer Umformung mehrfacher Summen und zwar durch Einführung neuer Summationsbuchstaben. Hierbei kommt das Problem im Wesentlichen darauf hinaus, zwei Ausdrücke

$$A = \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p}\left(a_{\mu\mu'}^{(1)}x_{\mu}^{(1)}x_{\mu'}^{(1)} + a_{\mu\mu'}^{(2)}x_{\mu}^{(2)}x_{\mu'}^{(2)} + \cdots a_{\mu\mu'}^{(n)}x_{\mu}^{(n)}x_{\mu'}^{(n)}\right),$$
$$B = \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p}\left(b_{\mu\mu'}^{(1)}y_{\mu}^{(1)}y_{\mu'}^{(1)} + b_{\mu\mu'}^{(2)}y_{\mu}^{(2)}y_{\mu'}^{(2)} + \cdots b_{\mu\mu'}^{(n)}y_{\mu}^{(n)}y_{\mu'}^{(n)}\right)$$

durch lineare Substitutionen mit nicht verschwindender Determinante und rationalen Coefficienten in einander überzuführen.

Literaturangaben finden sich nur in beschränkter Anzahl vor. Es ist aus den Entwickelungen der Herren Verfasser nicht zu ersehen, in welchem Verhältniss die gefundenen Resultate zu den thatsächlich schon vorhandenen Resultaten anderer Autoren stehen. Es ist das bei einer Monographie, wie die vorliegende, zu bedauern.*

* Es möge in Bezug hierauf u A. auf eine Arbeit des Referenten verwiesen werden, welche sich in den Berichten der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften vom 6. Februar d. J. findet.

Der zweite Theil enthält die Transformationstheorie. Der wesentliche und schwerwiegende Unterschied gegen die bisher aufgestellte Transformationstheorie besteht darin, dass die $4p^2$ Transformationszahlen nicht wie bisher ganze Zahlen, sondern beliebige rationale Zahlen bedeuten können. Nennen wir dieselben:

$$\mathfrak{a}_{\nu\mu}, \quad \mathfrak{b}_{\nu\mu}, \quad \mathfrak{c}_{\nu\mu}, \quad \mathfrak{d}_{\nu\mu},$$

so leisten dieselben ähnlichen Bedingungsgleichungen Genüge, wie die entsprechenden Zahlen in der gewöhnlichen Transformationstheorie, nur kann der Grad der Transformation, welcher durch t bezeichnet wird, auch eine gebrochene Zahl sein. Zur Charakterisirung der Transformation denke man sich die Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ in ein quadratisches Schema von der Form gebracht:

$$T = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \mathfrak{a}_{11} & \ldots & \mathfrak{a}_{1p} & \mathfrak{b}_{11} & \ldots & \mathfrak{b}_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{a}_{p1} & \ldots & \mathfrak{a}_{pp} & \mathfrak{b}_{p1} & \ldots & \mathfrak{b}_{pp} \\ \hline \mathfrak{c}_{11} & \ldots & \mathfrak{c}_{1p} & \mathfrak{d}_{11} & \ldots & \mathfrak{d}_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{c}_{p1} & \ldots & \mathfrak{c}_{pp} & \mathfrak{d}_{p1} & \ldots & \mathfrak{d}_{pp} \end{array}\right|.$$

Dieses System von $4p^2$ Zahlen wird die Charakteristik der Transformation genannt, die wohl auch kurz folgendermassen geschrieben wird:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a}_{\mu\nu} & \mathfrak{b}_{\mu\nu} \\ \hline \mathfrak{c}_{\mu\nu} & \mathfrak{d}_{\mu\nu} \end{array}\right|.$$

Die Herren Verfasser definiren nun das Transformationsproblem folgendermassen. Setzt man:

$$A_{\mu\nu} = \mathfrak{a}_{\nu\mu}\pi i + \sum_{k=1}^{k=p} \mathfrak{b}_{\nu k}\, a_{\mu k},$$

$$B_{\mu\nu} = \mathfrak{c}_{\nu\mu}\pi i + \sum_{k=1}^{k=p} \mathfrak{d}_{\nu k}\, a_{\mu k}, \quad \mu,\ \nu = 1,\ 2, \ldots p,$$

so können p neue Veränderliche v und $\frac{1}{2}p(p+1)$ neue Parameter b aus p gegebenen Veränderlichen u und $\frac{1}{2}p(p+1)$ gegebenen Parametern a durch die Gleichungen definirt werden:

$$u_\mu = \frac{1}{\pi i} \Sigma A_{\mu\nu} v_\nu,$$

$$B_{\mu\varrho} = \frac{1}{\pi i} \Sigma A_{\mu\nu} b_{\nu\varrho}, \quad \mu,\ \varrho = 1,\ 2 \ldots p.$$

Als Transformationsproblem für die Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a$ wird dann die Aufgabe bezeichnet, die genannte Function durch Functionen:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}\big((v)\big)_b$$

auszudrücken und zuzusehen, ob das genannte Problem für alle möglichen rationalen Transformationen wirklich lösbar ist.

Der Gang der Untersuchung ist ein ähnlicher, wie in der gewöhnlichen Transformationstheorie, indessen compliciren sich die Verhältnisse ungemein, so dass die Lösung der gestellten Aufgabe den Herren Verfassern erst nach langwierigen Untersuchungen möglich wurde. Die Schwierigkeit desselben zeigt sich auch in der Lösung. Die Resultate sind ungleich complicirter und mannigfacher, als die Resultate der gewöhnlichen Transformationstheorie.

Der Schwerpunkt der ganzen Untersuchung liegt in der Zusammensetzung und Zerlegung von Transformationen aus und in andere. Es zeigt sich, dass eine Transformation vom Grade $\frac{n}{n'}$, in das Product einer speciellen zur Zahl $\frac{1}{n'}$, einer linearen und einer speciellen zur Zahl n gehörenden Transformation zerfällt werden kann. Die beiden zu den Zahlen $\frac{1}{n'}$ und n gehörenden Transformationen können auf Grund des speciellen vorhin angegebenen Additionstheoremes leicht gelöst werden, so dass das Problem auf die Lösung des Problems der linearen Transformation herauskommt. Dieses Problem wird ausführlich durchgeführt. Zunächst werden drei specielle lineare Transformationen behandelt, und zwar lautet die erste:

$$T_I = \left|\begin{array}{c|c} \dfrac{r\,d'_{\mu\nu}}{D} & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{d_{\mu\nu}}{r} \end{array}\right|,$$

wobei r eine positive ganze Zahl, $d_{\mu\nu}$ ganze Zahlen mit der Determinante D bedeuten und endlich $d'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $d_{\mu\nu}$ ist.

Die zweite Transformation lautet:

$$T_{II} = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots \\ 0 \ldots 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline e_{\mu\nu} & \begin{matrix} 1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots \\ 0 \ldots 1 \end{matrix} \end{array}\right|,$$

wobei $e_{\mu\nu}$ ganze Zahlen sind, die der Gleichung Genüge leisten:

$$e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}.$$

Bei der dritten Transformation endlich, die durch T_{III} bezeichnet wird, finden die folgenden Relationen statt:

$$\mathfrak{a}_{q+1\,q+1} = \mathfrak{a}_{q+2\,q+2} \ldots \mathfrak{a}_{pp} = 1, \qquad \mathfrak{b}_{11} = \mathfrak{b}_{22} \ldots = \mathfrak{b}_{qq} = 1,$$
$$\mathfrak{c}_{11} = \mathfrak{c}_{22} = \ldots \mathfrak{c}_{pp} = -1, \qquad \mathfrak{d}_{q+1\,q+1} = \mathfrak{d}_{q+2\,q+2} \ldots = \mathfrak{d}_{pp} = 1,$$

während alle übrigen Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ den Werth Null besitzen.

Für diese drei speciellen Transformationen resp. für deren inverse wird das gestellte Problem wirklich gelöst. Es zeigt sich das Resultat, welches auch im allgemeinen linearen Falle bestehen bleibt, dass die ursprüngliche Thetafunction mit den Argumenten u und den Parametern a, von einer einfachen Exponentialfunction abgesehen, sich stets linear durch Thetafunctionen mit den Argumenten v und den Parametern b ausdrücken lässt.

Nachdem diese drei Probleme gelöst sind, wird gezeigt, dass die allgemeine lineare Transformation sich aus den vorhin definirten speciellen auf mannigfache Arten zusammensetzen lässt. Diese Zusammensetzung bietet grosse Schwierigkeiten. Um sie zu überwinden, werden vier Fälle unterschieden. Bringt man die allgemeine lineare Transformation in die Form:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \frac{\alpha_{\mu\nu}}{r} & \frac{\beta_{\mu\nu}}{r} \\ \hline \frac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \frac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{array}\right|,$$

so lauten die vier Fälle folgendermassen:

Fall I: Die Zahlen β seien sämmtlich der Null gleich;

Fall II: Die Zahlen β seien nicht sämmtlich der Null gleich, und es besitze ihre Determinante Δ_β einen von Null verschiedenen Werth;

Fall III: Die Zahlen β seien nicht sämmtlich der Null gleich, und es besitze die Unterdeterminante q^{ten} Grades $\nabla_\beta = \Sigma \pm \beta_{11}\beta_{22}\ldots\beta_{qq}$ der Determinante Δ_β einen von Null verschiedenen Werth, während alle Unterdeterminanten $q+1^{\text{ten}}$ Grades von Δ_β verschwinden;

Fall IV: Die Zahlen β seien nicht sämmtlich der Null gleich und es besitze die Unterdeterminante q^{ten} Grades

$$\nabla_\beta^{(m,n)} = \Sigma \pm \beta_{m_1 n_1}\beta_{m_2 n_2}\ldots\beta_{m_q n_q}$$

der Determinante Δ_β einen von Null verschiedenen Werth, während alle Unterdeterminanten $q+1^{\text{ten}}$ Grades von Δ_β verschwinden.

In allen vier Fällen wird das Problem gelöst und je eine Zusammensetzung gewählt, welche die Herren Verfasser für die einfachste halten. Die Zusammenfassung der entsprechenden vier Formeln in eine einzige Hauptformel und die Specialisirung dieser letzteren für den Fall ganzzahliger Transformationszahlen bilden den Schluss der Betrachtungen, die sich auf die lineare Transformation beziehen.

Aus den vorangehenden Bemerkungen ist ersichtlich, dass das Werk der Herren H. Prym und Krazer im zweiten Theile eine Reihe neuer Gesichtspunkte für die Transformationstheorie bringt, welche geeignet sind, als Ausgangspunkt für neue Untersuchungen zu dienen. M. Krause.

Die Elemente der Zahlentheorie, dargestellt von P. Bachmann. Leipzig 1892. B. G. Teubner.

Der Verfasser beabsichtigt, wie er in der Vorrede erklärt, „eine Gesammtdarstellung des heutigen Standes der Zahlentheorie zu versuchen", und zwar nicht in Gestalt eines erschöpfenden Lehrbuches, sondern in einer Reihe von Einzeldarstellungen, welche die Hauptgebiete der Zahlentheorie in ihren wesentlichen Zügen zu zeichnen bestimmt sind.

Die vorliegende Schrift ist als Grundlage des Ganzen anzusehen; sie beschränkt sich auf die „Elemente" der Theorie, und behandelt demgemäss — abgesehen von einer Einleitung über die erforderlichen Rechnungsoperationen — in vier Abschnitten die Theilbarkeit der Zahlen, die Congruenzen, die quadratischen Reste und die quadratischen Formen. Der Verfasser hat sich bemüht, eine eigenartige Begründung der Elemente zu geben, und er bezeichnet sein Werk in diesem Sinne (wie auch in der Anlage des Ganzen) als eine Ergänzung zu dem vortrefflichen Dirichlet-Dedekind'schen Werke.

Der Referent ist in der That der Ansicht, dass diese „Ergänzung" als eine willkommene zu begrüssen ist. Während Dedekind (etc. soweit es sich um die Elemente handelt) den Standpunkt der Dirichlet'schen Vorlesungen festhält, finden wir hier nicht nur spätere Dirichlet'sche Abhandlungen herangezogen, sondern auch neuere Beweise und Anschauungen von Kronecker, Dedekind, Schering u. A. verarbeitet. Ueberdies weicht der Verfasser in manchen wesentlichen Punkten von den üblichen Darstellungen ab, indem er principiell fremdartige Hilfsmittel, wie Transformation und Kettenbrüche, verschmäht, und statt dessen einen rein arithmetischen Gang einschlägt.

Die Einführung der eben erwähnten neueren Anschauungen hat dem Verfasser Anlass gegeben, eine Reihe fundamentaler und weitreichender Begriffe, wie diejenigen einer Restclasse als Rechenelementes, einer (endlichen) Gruppe, eines Moduls, jeweils gleich im Beginne in voller Allgemeinheit zu Grunde zu legen.

Wenn nun auch keineswegs zu verkennen ist, dass dadurch die ganze Lehre etwas Durchgeistigtes annimmt, und der Leser von vornherein den Eindruck erhält, dass die moderne Zahlentheorie nicht mehr die isolirte Wissenschaft von früher ist, sondern von denselben Grundgedanken beherrscht wird, wie andere grosse Gebiete der Mathematik, so dürfte doch andererseits ein pädagogischer Zweifel auftauchen. Denn denken wir uns den Leser als einen Anfänger, so müssen wir gestehen, dass an seine Abstractionsfähigkeit nicht geringe Anforderungen gestellt werden, die möglicher Weise von einem weiteren Studium des Buches abschrecken könnten.

Wir gehen nunmehr zu einer Besprechung der einzelnen Abschnitte über.

In einer zwar knappen, aber durchsichtig geschriebenen Einleitung zeigt der Verfasser, wie der Begriff der ganzen Zahl entsteht, und welchen Gesetzen die einfachsten Verknüpfungen der Zahlen, die Addition, Subtraction und Multiplication unterliegen.

Mit Recht wird dabei betont, dass eine negative Differenz zweier Zahlen in der reinen Theorie erst dadurch einen Sinn erhält, dass sie mit einer — hinreichend gross vorauszusetzenden — dritten Zahl additiv verknüpft zu denken ist, sodass man in Wirklichkeit im Gebiete der positiven Zahlen verbleibt.

Im folgenden ersten Abschnitte werden die Euklid'schen Fundamentalsätze über die Theilbarkeit der Zahlen nicht aus dem Euklid'schen Algorithmus zur Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen hergeleitet, sondern direct aus dem Begriffe einer Periode. Die dadurch entstehende Abstractheit des Gegenstandes wird durch ein, von Poinsot herrührendes graphisches Verfahren gemildert. Ob die Verwendung derartiger geometrischer Hilfsmittel in einem Lehrbuche der reinen Zahlentheorie statthaft ist, darüber werden freilich die Vertreter der Wissenschaft stets verschiedener Meinung sein.

Als eine Anwendung wird die bekannte Aufgabe behandelt, die höchste Potenz einer Primzahl p aufzusuchen, welche in dem Producte $m! = 1.2.3\ldots m$ enthalten ist. Es wird eine elegante Schlussformel abgeleitet, welche, wie im Besonderen die einfachsten Fälle $p=2$, 3 zeigen, für praktische Berechnung geeignet ist. Auf ähnlichem Wege wird noch ein Satz bewiesen, den Catalan aus der Theorie der elliptischen Functionen gewonnen hat, dass nämlich der Quotient

$$\frac{(2a)!\,(2b)!}{a!\,(a+b)!\,b!}$$

eine ganze Zahl ist.

Am Schlusse dieses Abschnittes wird die zahlentheoretische Function $\varphi(n)$ auf Grund ihrer Functionalgleichung $\Sigma\varphi(d) = n$ mittelst eines Verfahrens bestimmt, welches Dedekind (Journ. f. Math. Bd. 51) angegeben hat.

Im zweiten Abschnitt werden die verschiedenen Restklassen $(mod\ n)$ eingeführt, und Summe, Differenz und Product von solchen definirt. In inniger Verbindung damit steht der Begriff eines Moduls (nach Dedekind), das ist eines Systems von (eigentlichen oder uneigentlichen) Zahlen, welches sich bei Anwendung von Addition und Subtraction reproducirt.

Als unmittelbare Anwendung erscheint der Lagrange'sche Hauptsatz über Congruenzen n^{ten} Grades.

Die weitere Entwickelung des Abschnittes wird fast ausschliesslich abhängig gemacht von dem fundamentalen Begriffe einer (endlichen) Gruppe von Zahlen, mit der Eigenschaft, dass das Product irgend zweier (identischer oder nicht identischer) Zahlen der Gruppe wiederum der Gruppe angehört.

So z. B. bilden die n Restclassen ($mod\ n$), oder auch die $\varphi(n)$ zu n relativ primen Restclassen eine Gruppe.

Aus der Definition der Gruppe fliesst sowohl die Auflösung der Congruenzen ersten Grades, wie der Fermat'sche Lehrsatz.

Das Interesse des Folgenden concentrirt sich auf einen von Kronecker (Berliner Ber. 1870) über die Structur einer Gruppe gegebenen Fundamentalsatz.

Unterwirft man die Multiplication von Elementen einer Gruppe der Beschränkung, commutativ zu sein, so giebt es eine Anzahl ω von „Fundamentalelementen" $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\omega$ derart, dass jedes Element der Gruppe auf nur eine Weise in der Form
$$\alpha_1^{h_1}\alpha_2^{h_2}\ldots\alpha_\omega^{h_\omega}$$
darstellbar ist, wo die Exponenten innerhalb gewisser Grenzen alle ganzzahligen Werthe durchlaufen können.

Hierauf stützt sich dann die Lehre von den primitiven Wurzeln.

Der dritte Abschnitt, welcher von den quadratischen Resten handelt, lehnt sich in seinem ersten, kleineren Theile an den bezüglichen Abschnitt bei Dedekind an.

Beachtenswerth ist das Citat einer Stelle bei Euler, aus dem in der That hervorgeht, dass dieser grosse Mathematiker das Criterium über den quadratischen Charakter einer Zahl ($mod\ p$) in voller Schärfe ausgesprochen hat, wenn der Beweis auch nicht ganz vollständig ist.

Der zweite, grössere Theil des Abschnittes ist dem quadratischen Reciprocitätsgesetze gewidmet.

Vorauf geht ein schätzenswerther historischer Ueberblick über die verschiedenen Kategorien, in welche sich die vielen Beweise des Satzes eintheilen lassen, und welche nach der Ansicht des Verfassers sämmtlich bereits in den Beweisen von Gauss vorgebildet erscheinen. Das schliesst nicht aus, dass manche Beweise, wie z. B. der elegante, letzten Endes in der Kreistheilung wurzelnde Beweis von Eisenstein, eine durchaus originelle Wendung nehmen. Die nun folgenden Beweise des einfachen, wie des verallgemeinerten Reciprocitätsgesetzes gruppiren sich sämmtlich um den dritten Gauss'schen Beweis.

Der Leser wird sich dem Verfasser zu Dank verpflichtet fühlen, auf eine so gefällige Weise in die delicaten und dabei doch durchsichtigen Entwickelungen von Zeller, Schering und Kronecker eingeführt zu werden, und insbesondere mit Hilfe des letztgenannten Forschers die wahren Quellen des in Rede stehenden Satzes kennen zu lernen.

Wir müssen uns beeilen, noch Einiges zum letzten Abschnitte zu bemerken, welcher die (elementare) Theorie der binären quadratischen Formen zum Gegenstande hat. Als ausschliessliche Grundlage dient das Problem der Darstellung einer Zahl durch eine Form; die Begriffe der Aequivalenz und Composition drängen sich weiterhin in diesem Zusammenhange von selbst auf.

Zweifellos verdient der eingeschlagene Weg mit Rücksicht auf die geringen, dabei zur Verwendung kommenden Hilfsmittel ausdrückliche Anerkennung. Während aber die früheren Abschnitte, wie hervorgehoben, von einigen wenigen allgemeinen Begriffen ausgehen und auf Grund derselben fast jede Einzelrechnung entbehrlich machen, weicht der vorliegende Abschnitt davon ab, insofern vielfach ein Calcul Platz greift, der die einzelnen Sätze nur verificirt, ohne eine volle Einsicht in die wahren Quellen derselben zu gewähren.

Beispielsweise ist derart gleich im Anfange der Nachweis der Thatsache, dass, falls eine Zahl m durch eine quadratische Form

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

von der Determinante $D = b^2 - ac$ darstellbar sein soll, die Congruenz $n^2 \equiv D \ (mod\ m)$ möglich sein muss.

Es wird zu dem Zwecke eine Zahl

$$n = (ax + by)\beta + (bx + cy)\delta$$

construirt, und von ihr durch Ausrechnung gezeigt, dass in der That $n^2 - D$ durch m theilbar wird.

Legt man dagegen die (durch blose Multiplication und Addition unmittelbar resultirende) Identität

$$f(x, y) \cdot f(\beta, \delta) \equiv \{(ax + by)\beta + (bx + cy)\delta\}^2 - D(x\delta - y\beta)^2,$$

von der ein besonderer Fall weiterhin doch benöthigt wird, von vornherein zu Grunde, so tritt nicht allein der in Rede stehende Satz nebst einer Reihe weiterer sofort in Evidenz, sondern es bietet sich zugleich der Vortheil, dass die nämliche Identität der Theorie der Composition, wie auch derjenigen der Geschlechter als Ausgangspunkt dienen kann.

Bemerkt man überdies, dass jene Identität auch die algebraische Theorie der Formen $f(x, y)$ beherrscht, indem sie nichts Anderes ist, als die allgemeinste „kanonische" Darstellung von f als Aggregat zweier Quadrate, so erkennt man deutlich die Gemeinsamkeit der Interessen in der algebraischen und arithmetischen Formentheorie. Der Referent möchte bei dieser Gelegenheit sein Bedauern darüber aussprechen, dass dieser fruchtbare Gesichtspunkt seit der Zeit, aus der die bez. älteren Arbeiten Hermite's stammen, in den Hintergrund gedrängt worden ist.

Indem der Verfasser den einfachen Zusammenhang klarlegt, welcher zwischen zwei, zur nämlichen Congruenzwurzel n gehörigen Darstellungen x, y und x', y' besteht, gelangt er ungezwungen zur Pell'schen Gleichung. Die Untersuchung dieser Gleichung im Falle einer positiven Determinante geschieht nach dem einfachen und directen Dirichlet'schen Verfahren, welches weder der Kettenbruchentwickelung, noch der Transformation der Formen bedarf.

Nach Durchführung der Untersuchung, betreffend die Darstellung einer Zahl durch eine quadratische Form, schliessen sich die Begriffe der Aequivalenz und Transformation an, die also hier demjenigen der Darstellung untergeordnet, und erst a posteriori mit der üblichen Auffassung in Uebereinstimmung gebracht werden.

Bei Gelegenheit des Beweises, dass die Anzahl der Classen äquivalenter Formen derselben Determinante eine endliche ist, wählt der Verfasser, im Anschlusse an Hermite, eine Definition der reducirten Form, welche, abgesehen von ihrer grösseren Einfachheit, den Vorzug geniesst, für positive und negative Determinanten gleichmässig zu gelten.

Von den entgegengesetzten Formen aus gelangt der Verfasser zu den aculigen Classen und damit zur Lehre von der Composition der Formen, deren Haupteigenschaften, soweit es ohne Benützung ternärer Hilfsmittel möglich ist, entwickelt werden. Die Dirichlet'schen radices concordantes von zwei Congruenzen $x^2 \equiv D \,(mod\, m)$, $x^2 \equiv D \,(mod\, m')$, für welche Dedekind den Ausdruck „einige" Wurzeln eingeführt hat, heissen hier „vereinbare" Wurzeln, eine Aenderung, mit welcher der Referent nicht recht einverstanden ist. Die Definition der Zusammensetzbarkeit (Composition) zweier Formen (S. 241) will dem Referenten nicht prägnant genug erscheinen. Eine gelungene Abrundung erhält der Abschnitt durch den Schering'schen Hauptsatz über die Zusammensetzung aller Classen (von gegebener Determinante) aus gewissen „Fundamentalclassen", ein Satz, der als unmittelbarer Ausfluss des früher erwähnten Gruppensatzes von Kronecker erscheint.

Als eine schöne Anwendung des Hauptsatzes wird zum Schlusse Kummer's zweiter Beweis des Reciprocitätsgesetzes mitgetheilt.

Das mathematische Publikum darf mit Recht auf die weitere Fortführung des Bachmann'schen Werkes gespannt sein: die betonten Vorzüge des hier vorliegenden ersten Theiles werden dann voraussichtlich in noch höherem Maasse hervortreten.

W. Fr. Meyer.

Beiträge zur Zahlentheorie, insbesondere zur Kreis- und Kugeltheilung, mit einem Nachtrage zur Theorie der Gleichungen, von Dr. H. SCHEFFLER. Leipzig 1891, Förster. 285 S.

Der Herr Verfasser hat sich zunächst die Aufgabe gestellt, gewisse Mängel in der von Gauss begründeten Zahlentheorie zu beseitigen, vor Allem den „Mangel, welcher darin besteht, dass die Gleichung $x^p - 1 = 0$ durch die bisherige Theorie gar nicht aufgelöst werden kann". Ein anderes Capitel beschäftigt sich mit der Theilbarkeit der Zahlen von der Form $2^r + 1$; es werden einige, zum Theil bekannte Sätze hergeleitet, die in gewissen Fällen zur Entscheidung über die Theilbarkeit führen können. Dabei schreibt der Herr Verfasser die von Euler als irrthümlich nachgewiesene Ansicht, wonach jede Zahl der Form $2^r + 1$, falls r eine Potenz von 2, eine Primzahl sei, noch Legendre zu, an dessen Stelle wohl der Name Fermat treten muss. Ein „Zur allgemeinen Zahlentheorie" überschriebener Abschnitt bringt Erörterungen über die polyplexe, die ideale und die algebraische Zahl und den Quaternion. Der Herr Verfasser tritt hier der Ansicht entgegen, „dass die heutigen Gesetze der Algebra und Zahlentheorie, welche sich auf komplexe Zahlen stützen, die allgemeinen Grössengesetze enthalten, trotzdem diese Ansicht an einem Ausspruche des grossen Mathematikers Gauss eine autoritative Stütze gefunden hat". Dem Herrn Verfasser dürfte vielleicht bekannt sein, in welchem Sinne, d. h. unter welchen Voraussetzungen dieser Gauss'sche Ausspruch nach Herrn Weierstrass zu Recht besteht — und wenn diese Voraussetzung zutrifft, scheint den Erörterungen des Herrn Verfassers ein Missverständniss zu Grunde zu liegen. Die Quaternionen erscheinen dem Herrn Verfasser „als ungesetzliche Haufwerke von unverstehbaren Symbolen". Und vielleicht auch die Grassmann'sche Theorie trotz der Ausbildung, die sie in neuester Zeit durch Herrn F. Caspary erfahren hat? — In einem Anhange kommt der Herr Verfasser auf das in seinen „Beiträge zur Theorie der Gleichungen" (vergl. das Referat im XXXV. Bande) gegebene „Lösbarkeitsmerkmal und die Herstellung lösbarer Gleichungen" zurück, um seine Ansicht über E. und U. Dühring's „Neue Grundmittel und Erfindungen zur Analysis u. s. w." auszusprechen.

E. JAHNKE.

Otia mea, von ARCADY MERTSCHINSKY. Selbstverlag. Dresden. 22 S.

Der Herr Verfasser hat seine „otia" zur Lösung „der seit jeher in Ungnade gewesenen Frage", die Quadratur des Kreises betreffend, benutzt. In einem anderen Capitel giebt der Herr Verfasser seine Gründe zum Besten, welche gegen die Annahme einer vierten Dimension sprechen sollen.

E. JAHNKE.

Leitfaden der Arithmetik nebst Uebungsbeispielen. Von A. Sickenberger. 5. Auflage. München, Ackermann. 196 S.

Der vorliegende, einer langjährigen Erfahrung entsprungene Leitfaden enthält eine Reihe sehr brauchbarer Uebungsaufgaben.

Die fünfte Auflage unterscheidet sich nicht wesentlich von der dritten und vierten.

E. Jahnke.

Leitfaden der elementaren Mathematik. Von A. Sickenberger. 1. Theil. Algebra. 2. Auflage. München, Ackermann. 75 S.

Die Darstellung der elementaren Mathematik muss überall möglichst kurz, einfach und anschaulich sein; sie hat nicht nöthig, in der Form bestimmte Schablonen inne zu halten. Wissenschaftliche Strenge ist mit einer solchen Lehrmethode sehr wohl vereinbar. Nach diesen Grundsätzen ist der erste Theil — der bis zu den quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten vorschreitet — bearbeitet. Für die Auflösung der Gleichungen sind die Determinanten in passender Weise herangezogen worden.

Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten weder in der Anordnung des Ganzen noch in der Numerirung.

E. Jahnke.

Die Schnellrechenkunst. Von H. Pauly. 1. Heft. Die Addition und die Subtraction. Selbstverlag. Danzig. 16 S.

Während für die Subtraction auf die bekannte Methode verwiesen wird, welche man zuweilen als die süddeutsche bezeichnen hört, werden für die schnelle Addition Winke gegeben, die auf dem Gedanken beruhen, die Ziffern *mod* 5 zu betrachten.

E. Jahnke.

Zur Transformation und Reduction von Doppelintegralen mittelst elliptischer Coordinaten. Von F. J. Obenrauch. Jahresbericht der Landes-Oberrealschule in Neutitschein. 1892.

Noch genauer lässt sich der Inhalt vorliegender Abhandlung andeuten durch den Titel: Ueber die Darstellung der Ellipsoidoberfläche durch ein Doppelintegral. Den Ausgangspunkt bildet das vielfach behandelte Doppelintegral

$$\int_b^a\int_c^b \frac{\mu^2\nu^2(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{a^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\nu^2-c^2}}\,d\mu\,d\nu,$$

welches einen Ellipsoidoctanten darstellt. Dieses Doppelintegral ergiebt sich dem Verfasser als eine Verallgemeinerung des Lamé'schen Doppelintegrals, durch welches sich die Kugeloberfläche darstellen lässt. Für beide Doppelintegrale finden wir eine fleissige Zusammenstellung der Literatur. Durchaus historisch gehalten ist das einleitende Capitel, wo der Verfasser des längeren auf die Bedeutung der elliptischen Coordinaten eingeht, welche bekanntlich von Lamé und Jacobi entdeckt und von Letzterem zuerst zur Lösung eines vielumworbenen mathematischen Problems verwendet worden sind. Hierbei wird eine Fülle, zwar nicht immer eng zugehörigen, historischen Materials beigebracht.

Referent vermisst u. A. den Namen Weierstrass; und doch gehört die Bestimmung des Inhalts der Ellipsoidfläche zu den Problemen, wo die Anwendung der σ-Functionen zu bemerkenswerthen einfachen Resultaten führt.

Auf Seite 52 transformirt der Verfasser das oben genannte Doppelintegral in die Schellbach'sche Form und knüpft die etwas missverständliche Bemerkung an, Schellbach (vergl. Die Lehre von den elliptischen Integralen etc. S. 315) habe „jedoch diesen Ausdruck mit dem entgegengesetzten Vorzeichen gefunden". Natürlich lässt sich die vom Verfasser gegebene Form genau in die Schellbach'sche — das Vorzeichen eingeschlossen — überführen, sobald nur die Vorzeichen der beliebig gelassenen Wurzelzeichen entsprechend gewählt werden. E. Jahnke.

Zirkelzeichnen, zum Gebrauche an Gewerbeschulen, Schulen für Bauhandwerker und polytechnischen Vorbildungsanstalten von Dr. A. Stuhlmann, Director der allgemeinen Gewerbeschule und der Schule für Bauhandwerker zu Hamburg. Allgemeiner Theil. Mit 18 lithographirten Tafeln. 13. Auflage. Dresden 1891. Verlag von Gerhard Kühtmann. Preis broch. 1 Mk. 20 Pf.

Der 44 Seiten umfassende Inhalt gliedert sich folgendermassen: Allgemeine Vorbemerkungen über das Zeichnen, Musteralphabete und Zahlen für die Bezeichnung der Figuren; Flächenmuster; Kreistheilung und Zeichnung regelmässiger Vielecke; Auf der Kreistheilung beruhende krummlinige Zierformen; Verschiedene Aufgaben, Zeichnung congruenter und ähnlicher Figuren, Benutzung des verjüngten Maassstabes etc.; Zeichnung der Ellipse, Parabel, Hyperbel; Eilinie, Schneckenlinie, Karnieslinie; Projection (Grundriss, Aufriss, Seitenriss, Netz) eines senkrechten Prismas mit aufgesetzter Pyramide in verschiedenen Stellungen; Projection einer Walze mit daran gesetzten Kegeln; Projection eines Kegels und seiner verschiedenen Schnitte; Durchdringung zweier Körper; Schattenconstructionen; Uebersicht über die zu diesem Hefte als Lehrmittel gehörenden Zirkelzeichen-Modelle und Andeutung zu ihrer Benutzung.

Die Einrichtung ist derartig getroffen, dass je auf der rechten Seite die Tafel mit den Figuren (welche trotz ihrer geringen Grösse sehr sauber gezeichnet sind), auf der linken Seite die zugehörigen Erläuterungen stehen, was für den Gebrauch ausserordentlich bequem ist. Die Erläuterungen sind nun, da das Buch ja nicht für den Selbstunterricht bestimmt ist, sehr knapp und enthalten nur das Nöthigste und Wichtigste. Ferner ist wegen des lediglich praktischen Zweckes keine Projectionslehre eingefügt, sondern es wird sogleich zur Orthogonalprojection von wirklichen Gegenständen, welche dem Schüler als Modelle vor Augen stehen, vorgegangen. Schwierigere Aufgaben, z. B. die Darstellung zweier sich durchdringender Körper, Schattenconstructionen, die mehr als elementare Kenntnisse verlangen, werden praktisch in einer für die technische Verwendung hinreichend genauen Weise gelöst.

Das vorliegende Heft bildet den allgemeinen Theil des Zirkelzeichnens; an dieses schliessen sich Ergänzungshefte für Bauhandwerker, Klempner, Maschinenbauer etc. an.

F. Schütte.

Die archimedische, die hyperbolische und die logarithmische Spirale. Zum Gebrauche für Studirende an Universitäten und technischen Hochschulen bearbeitet von A. Michalitschke. Zweite Auflage. Erster Theil. Mit einer Figurentafel. Prag 1891. Commissionsverlag von H. Dominicus. 78 S. 8^0. Preis 3 Mk.

Von den im Titel angegebenen Spiralen behandelt Verfasser die Gleichungen (Discussion derselben), die Construction, die Differentialgleichungen (Tangente, Normale), Berührungsgrössen (Polar-Tangente, -Subtangente, Polar-Normale, -Subnormale), die Krümmung, Quadratur und Rectification. Weil Verfasser nur die einfachsten Sätze der Differential- und Integralrechnung voraussetzt und Alles sorgfältig entwickelt, ist es selbst für den Anfänger leicht, den interessanten Untersuchungen zu folgen. Besonders eingehend wird die logarithmische Spirale ($r = a e^{m\varphi}$) bearbeitet. Es werden entwickelt ihre Evolute, Evolvente und Antevolute, ihre Fusspunktcurve, die Catacaustica und Anticaustica (Spiegelungsbrennlinien), Diacaustica und Pericaustica (Brechungsbrennlinien) und die Cykloidalis (Rollcurve). Verfasser zeigt, dass alle diese Curven wieder die logarithmische Spirale selbst sind, weshalb Bernoulli von ihr sagte: „Eadem numero mutata resurget", welcher Ausspruch der vorliegenden Schrift als Motto dient. Die Arbeit des Herrn Michalitschke gehört zu denjenigen, von denen man sagen kann, dass sie durch geschickte Behandlung eines Specialgebietes ein mehr als gewöhnliches Interesse verdienen. — Der Druck, die Figuren, das Papier sind schön.

F. Schütte.

Lehrbuch der Physik. Von Violle. Deutsche Ausgabe von fünf Assistenten der physikalisch-technischen Reichsanstalt. Erster Theil: Mechanik. Erster Band: Allgemeine Mechanik und Mechanik der festen Körper. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren. Lieferung 4 und 5. Berlin 1891. Verlag von Julius Springer. Preis pro Lieferung 2 Mk.

Was bei der Besprechung der drei ersten Lieferungen gesagt wurde, gilt auch für die beiden vorliegenden. Mit ihnen ist der erste Band und zugleich die Mechanik der festen Körper abgeschlossen. — Die Herausgeber der deutschen Auflage haben es sich zum Grundsatz gemacht, grössere Aenderungen in dem Texte nicht vorzunehmen, dagegen den Fortschritten der Wissenschaft seit dem Erscheinen des Originalwerkes durch Anmerkungen Rechnung zu tragen und die Literaturnachweise durch eingehendere Berücksichtigung deutscher Arbeiten noch zu vermehren.

B. Nebel.

A Treatise on Electricity and Magnetism. By James Clark Maxwell. Third edition. Vol. I a. II. Oxford. At the Clarendon press. 1892.

Die Herausgabe dieser dritten Auflage erfolgte durch J. J. Thomson, da Herr Niveu, welcher die zweite Auflage besorgt hatte, in Folge seiner vielseitigen amtlichen Verpflichtungen daran verhindert war. Den gewaltigen wissenschaftlichen Fortschritten, welche seit dem Erscheinen der ersten Auflage dieses Buches die Elektricität und der Magnetismus erfahren haben, wollte der Herausgeber durch geeignete Notizen deshalb Rechnung tragen, um daran die Wichtigkeit der Maxwell'schen Anschauungen für die Weiterentwickelung darzuthun. Indessen wären durch diese Anmerkungen die Verhältnisse dieses Buches so sehr geändert worden, dass sich der Herausgeber dazu entschlossen hat, seine Ergänzungen in einem besonderen, bald erscheinenden Band zu vereinigen. In den vorliegenden beiden Bänden wurden nur solche kleinere Notizen aufgenommen, die sich auf vereinzelte Punkte beziehen. — Von den Maxwell'schen Arbeiten ist es bekannt, dass sie dem Leser wegen ihrer Kürze und der oft ohne Beweis mitgetheilten Endresultate bedeutende Schwierigkeiten bereiten. Diese zu vermindern, hat sich der Herausgeber dadurch bemüht, dass er die Beweise näher ausgeführt und die unbewiesenen Resultate abzuleiten versucht hat. — Um das Prioritätsverhältniss festzuhalten, wurde die Maxwell'sche Methode der Bestimmung der Selbstinduction einer Spule aus seiner Schrift über die dynamische Theorie des elektromagnetischen Feldes wieder abgedruckt, was bei den beiden ersten Auflagen nicht der Fall war.

Da die Anschauungen Maxwell's über die Elektricität das Fundament bilden, auf welchem die wissenschaftliche Forschung heute weiter baut, so erwirbt sich Jeder ein grosses Verdienst, der die Maxwell'schen Werke einem grösseren Publikum durch klare Erläuterungen zugänglich macht.

B. Nebel.

Naturlehre, im Anschluss an das Lesebuch von J. Bumiller und J. Schuster. Illustrirte Ausgabe von M. Wildermann. Mit 111 Abbildungen.

Zweite, sehr veränderte Auflage. Freiburg i. B. 1892. Herder'sche Verlagshandlung. 120 S. Preis 80 Pf.

Durch die vollständige Umarbeitung dieses Leitfadens der Physik ist der Verfasser von der sich früher gestellten Aufgabe insofern nicht abgewichen, als er den Unterricht an der Hand der tagtäglichen Naturbeobachtung und des leichten Versuches aufbaut, ohne die Grenzen des Fassungsvermögens der Kinder in der Volksschule zu überschreiten. Was demnach über den Anschauungsunterricht hinausgeht, wird sorgfältig vermieden. — Die Erfahrung hat wohl den Verfasser veranlasst, die in der ersten Auflage vorhandene und für den Lehrer übersichtlichere Anordnung des Stoffes aufzugeben und nunmehr die genetische Behandlung zu Grunde zu legen; denn es ist für ein Kind leichter, von Beobachtungen und Versuchen auszugehen und daraus ein Gesetz abzuleiten, als ein an die Spitze gestelltes Gesetz aus Beobachtungen und Versuchen als richtig zu erweisen. Am Schluss der einzelnen Capitel sind als neu passende Fragen und Aufgaben hinzugefügt, die durch kleineren Druck äusserlich erkennbar sind. — Die Eintheilung des Stoffes in Paragraphen hätte besser für die Behandlungsweise in der ersten Auflage gepasst, wo sie indessen fehlt, wäre aber am Besten ganz unterblieben, da nach unserer Erfahrung solche Paragraphen schon die wunderlichsten Anschauungen in den Kinderköpfen zu Tage gefördert haben. — Bezüglich des gediegenen Inhalts können wir auf das bei der Recension der ersten Auflage Gesagte verweisen.

B. Nebel.

Bibliographie

vom 1. Februar bis 15. März 1893.

Periodische Schriften.

Denkschriften der königl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Math.-naturw. Cl. 59. Bd. Wien, Tempsky. 68 Mk.

Astronomisches Jahrbuch für 1895. Herausgegeben von der Berliner Sternwarte unter Leitung von F. Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. III. Bd. 3. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. 1 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 22. Bd. (1890). Herausgegeben von E. Lampe. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. 13 Mk.

Fortschritte der Physik. 43. Jahrg. (1887). 1. Abth.: Physik der Materie, redigirt von E. Budde. Ebendaselbst. 13 Mk.

Jahrbuch der meteorologischen Beobachtungen der Magdeburger Wetterwarte. Jahrg. 1891, redigirt von W. Grützmacher. Magdeburg, Faber. 6 Mk.

Reine Mathematik.

Haentzschel, E., Die Reduction der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Ein Anhang zu Heine's Kugelfunctionen. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Schellenberg, C., Neue Behandlung der hypergeometrischen Function auf Grund ihrer Definition durch ein bestimmtes Integral. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 60 Pf.

Illigens, E., Die unendliche Anzahl und die Mathematik. Münster, Theissing. 1 Mk.

Oppenheimer, H., Anwendungen des Ameseder'schen Nullsystems. (Dissert.) Rudolstadt, Dabis. 60 Pf.

Henschel, A., Versuch einer räumlichen Darstellung complexer ebener Gebilde. (Dissert.) Rudolstadt, Dabis. 60 Pf.

Bücking, F., Die Winkelgegenpunkte des Dreiecks; ein Specialfall involutorischer Verwandtschaft. (Dissert.) Metz, Fock. 1 Mk.

Angewandte Mathematik.

Vogler, Chr., Abbildungen geodätischer Instrumente. Berlin, Parey. 12 Mk.

Völker, K., Die Centralbewegung, ihre Gesetze etc. (Dissert.) Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 50 Pf.

Physik und Meteorologie.

Winkelmann, A., Handbuch der Physik. (Aus der „Encyclopädie der Naturwissenschaften".) Breslau, Trewendt. 15 Mk.

Lommel, E. v., Lehrbuch der Experimentalphysik. Leipzig, Barth. 6 Mk. 40 Pf.

Vorschläge zu gesetzlichen Bestimmungen über elektrische Maasseinheiten, entworfen vom Curatorium der physik.-techn. Reichsanstalt. Hierzu Bericht von E. Dorn über den wahrscheinlichen Werth d. Ohm. Berlin, Springer. 2 Mk. 40 Pf.

Thierbach, B., Die Verwendung der Thermoelemente zur Bestimmung von Erdtemperaturen. (Dissert.) Königsberg i. Pr. Koch. 1 Mk.

Schück, A., Magnetische Beobachtungen, auf der Nordsee angestellt in den Jahren 1884 bis 1886, 1890 und 1891. Hamburg, Selbstverlag (Hühnerposten 17, IV). 6 Mk.

Zenger, Ch., Le système du monde électrodynamique. Prag. Rivnac. 2 Mk. 80 Pf.

Berichtigung.

Aus dem Hinrichs'schen wöchentlichen Verzeichniss der Neuigkeiten des deutschen Buchhandels ist in die Bibliographie des II. Heftes die Angabe übergegangen:

Katalog mathematischer Modelle etc. Herausgegeben von W. Dyck. München. Ackermann. 14 Mk.

Von zuständiger Seite wird dagegen erinnert, dass die Firma Ackermann bei der Herausgabe des genannten Katalogs nicht betheiligt ist, und dass der letztere nur von Herrn Prof. W. Dyck (München, Hildegardstrasse $1\frac{1}{2}$) zum Preise von 9 Mk. (excl. Porto) bezogen werden kann.

Mit Bedauern theilen wir unseren Lesern mit, dass Herr Dr. **E. Kahl**, Major a. D., am 31. Januar d. J. verstorben ist. Geboren am 24. Februar 1827, studirte er von 1846 bis 1849 Mathematik und Physik auf der Universität Leipzig und promovirte daselbst. Die Unruhen der damaligen Zeit veranlassten ihn zum Eintritt in's Militär, wo er 1860 zum Premierlieutenant, 1867 zum Hauptmann, 1872 zum Major avancirte. Ende 1851 wurde er als Lehrer am Dresdener Cadettenhause angestellt und verblieb in diesem Amte bis zu seiner Pensionirung i. J. 1872. Als Mitredacteur unserer Zeitschrift wirkte er seit 1860 und lieferte eine Reihe physikalischer Artikel; ausserdem verfasste er eine Sammlung von Aufgaben aus der Physik (1. Auflage 1858, Verlag von B. G. Teubner). Wir bewahren dem Verstorbenen ein freundliches Andenken.

O. Schlömilch. M. Cantor.

Historisch-literarische Abtheilung.

Notizen zur Geschichte der Physik.

Von

G. Berthold.

I. Die beiden Nelli.

Gio. Batista Clemente de' Nelli, so nennt sich auf dem Titel der Verfasser der Vita e commercio letterario di Galileo Galilei, Losanna 1793, der nach Poggendorff (II, 267) von 1661 bis 1725 lebte. Auffallend erscheint, dass die im Jahre 1793 gedruckte Vita von dem bereits 1725 verstorbenen Nelli verfasst sein soll; vollends räthselhaft wird aber die Sache, wenn man die Biographien Galilei's durchblättert. Da wird denn, nach dem Vorgange Targioni-Tozzetti's, zunächst die bekannte Anecdote erzählt, wie „Nelli" (so ohne Zusatz bei Tozzetti), oder der „Senator Nelli", oder der „Ritter Johann Baptist Nelli" im Jahre 1739 in den Besitz der von Viviani in einer Korngrube verborgenen Manuskripte Galilei's gelangte*. Weiter heisst es dann, Nelli habe 1750 auch die Manuskripte Viviani's und anderer Gelehrten erworben. Schliesslich wird berichtet, Nelli habe, auf diese Documente gestützt, die Biographie Galilei's verfasst, welche 1793 gedruckt wurde; er habe noch einen weiteren Band hinzufügen wollen, sei aber durch den Tod daran verhindert worden. Wie reimt sich das? — Gehen wir zunächst den Quellen nach. Poggendorff beruft sich für seine Angabe auf die Biographie universelle; Letztere bezeichnet** in der That als Verfasser einer Vie de Galilée, die aber zur Zeit des Druckes des Artikels (1822) noch nicht erschienen sei, den Architekten Jean-Baptiste Nelli (1661—1725), dem, als angeblichem Verfasser der Vita, Poggendorff nunmehr, entsprechend der Titelangabe des inzwischen längst erschienenen Werkes, den weiteren Vornamen Clemente beifügte. Aus einer neueren Ausgabe der Biographie universelle führt Herr Gerland einen Baptiste-Clement Nelli, um die Mitte des vorigen Jahr-

* Clemente Nelli erwähnt dieser Acquisition v. J. 1739 mit keinem Worte, er sagt nur, er habe 1750 und 1754 viele Manuscripte Galilei's erworben; sein Stillschweigen spricht aber für die Richtigkeit der Erzählung Targioni-Tozzetti's, dem Clemente in anderen Punkten scharf entgegentritt.

** Biographie universelle. Paris, Michaud 1822. T. XXXI, p. 43.

hunderts, in's Feld, bezweifelt aber, dass einer dieser Nelli der echte Clemente sei, und beruhigt sich mit der Vermuthung, dass der wahre Verfasser der Vita wohl ein jüngerer Spross derselben Familie gewesen sei.

Des Räthsels einfache Lösung ist die, dass es sich hier um Vater und Sohn handelt. Den beiden Nelli sind ausführliche Artikel in Tipaldo's Biografia gewidmet*; allein ein eigenthümliches Verhängniss hat auch hier gewaltet. Von Giambattista Clemente de' Nelli, als dessen Vater der 1725 verstorbene Architekt Giambattista de'Nelli bezeichnet wird, heisst es, er sei 1735 geboren und 1793 im Alter von 68 Jahren gestorben. Wenn sich auch das Geburtsjahr (1735) sofort als Druckfehler erweist, so führt die weitere Bemerkung, Clemente habe von seinem Vater die sorgfältigste Erziehung genossen, indem er ihn auf die Universität zu Pisa und zu Bologna geschickt habe, zu unlösbaren Widersprüchen.

Clemente Nelli selbst ist es, der uns zur Lösung des Räthsels verhilft. Zunächst berichtet er**, dass Gio. Batista de' Nelli — „mio padre" — 1693 von Viviani beauftragt worden sei, den Entwurf zu einer neuen Ausschmückung der Façade seines, dem Andenken Galilei's geweihten Hauses in Florenz anzufertigen und die Ausführung zu leiten; sodann macht er die Angabe***, derselbe sei 1725 gestorben, wobei er ihn ausdrücklich als „il mio genitore" bezeichnet. Wir erfahren dabei zugleich, dass er, Clemente selbst, im Jahre 1737 noch unter Vormundschaft gestanden habe. Ein Brief Clemente's†, dd. 10. Gennaio 1793, beweist uns, dass Clemente zu Anfang des Jahres 1793 noch am Leben war.

Wir stellen nunmehr fest:

1. Giambattista de' Nelli, di Agostino, Architekt und Senator zu Florenz, geb. 1661, gest. 7. Sept. 1725. Verfasser der Discorsi di Architettura. Firenze 1753, posthum, von seinem Sohne Clemente edirt;

dessen Sohn:

2. Giambattista Clemente de' Nelli, di Giambattista, Senator zu Florenz, geb. 17..?, gest. 23. Dec. 1793. Verfasser des Saggio di Storia letteraria fiorentina. Lucca 1759, und der Vita e commercio letterario di Galileo Galilei. Losanna 1793.

Mag immerhin Venturi das letztere Werk als ein „libro compilato come a Dio piacque" bezeichnet haben, so hat sich Clemente Nelli

* E. de Tipaldo, Biografia degli Italiani illustri etc. Venezia 1836. Vol. III. p. 143 – 146.

** Vita e commercio letterario di Galileo Galilei etc. Losanna 1793 4⁰. Vol. I. p. 671.

*** l. c. p. 875.

† l. c. p. 742.

durch die Herausgabe des Werkes, vorzüglich aber durch die sorgfältige Sammlung und Conservirung der Manuscripte Galilei's ein bleibendes Verdienst um die Wissenschaft erworben.

II. Der Anspruch der Engländer auf die Erfindung der Pendeluhr.

Seit Herr F. Günther die Notiz von Littrow wieder an's Licht gezogen hat, der zufolge die Engländer die Ehre der Erfindung der Pendeluhr ihrem Landsmann Richard Harris vindiciren, „der schon im Jahre 1641 eine Uhr mit einem langen Pendel verfertigt haben soll"*, ist fast ein Vierteljahrhundert vergangen, ohne dass die Sache zum Austrag gebracht werden konnte, da es bisher nicht gelang, die Quelle ausfindig zu machen, aus der Littrow geschöpft hat.

Als Urquelle ergiebt sich nun eine Mittheilung in der Edinburger Encyclopädie vom Jahre 1830, wo es heisst**: Of late, another candidate for the application of the pendulum to a clock has been brought forward by such respectable authority, that leaves little or no room to doubt of its authenticity. Mr. Grignion informs us „that a clock was made in 1642, by Richard Harris of London, for the church of St. Paul's, Covent Garden, and that this clock had a pendulum to it".

Trotz des „had" und trotz der Autorität des Mr. Grignion unterliegt es nicht dem mindesten Zweifel, dass die alte Uhr von 1642, wie so manche andere, erst später mit einem Pendel versehen ist.

III. Kepler, Huygens und das Perpetuum mobile.

Unter den schwindelhaften Erfindungen, mit denen Cornelis Drebbel Kaiser, Könige und Fürsten in seinem Zauberbann zu locken verstand, figurirte natürlich das Perpetuum mobile in erster Reihe. Noch während seines ersten Aufenthaltes in England bei Jacob I. liess Kaiser Rudolph II. im Jahre 1607 an ihn die schmeichelhafte Aufforderung ergehen, an seinen Hof nach Prag zu kommen. An demselben Tage, an welchem Kepler von dieser Einladung gehört hatte, machte er dem Fürsten August von Anhalt hiervon Mittheilung, da dieser kurz vorher Kepler's Urtheil über Drebbel's Erfindungen erbeten und angefragt hatte, ob von denselben sich etwa ein Vortheil bei der Construction gewisser hydraulischer Maschinen beim Bergwerksbetriebe erwarten liesse, über welche Fürst August bereits längere Zeit mit Kepler verhandelt hatte. Kepler schickt ein ausführliches Gutachten über die eingesandten Pläne und

* Gehler, Physikalisches Wörterbuch. Leipzig 1839. Bd. IX, S. 1115.

** The Edinburgh Encyclopaedia conducted by Brewster. Edinburgh 1830. 4°. Vol. XI, p. 117.

Modelle, giebt dabei ein kurzes Exposé über den Sinn einer Maschine, und knüpft daran ein höchst abfälliges Urtheil über Drebbel's angebliche Erfindung. „Jam si Drublerus [Drebbelius] spiritus, unum vel decem, poterit conducere, qui nullius cibi et potus indigi aquam montis exhauriant; vel si creare poterit animam novam, quae instrumenta ejus sine ponderibus aliosque motus elementares moveat, et in motu conservet: tunc mihi erit magnus Apollo. Nollem autem hac de re vel duorum tantum florenorum cum aliquo facere sponsionem".*

In gleichem Sinne äussert sich 50 Jahre später Chr. Huygens über J. J. Becher's angebliches Perpetuum mobile. „Avant hier", schreibt er in einem Briefe an Boulliau vom 22. Januar 1660**, „il me vint veoir un Allemand nomme Joannes Joachimus Becherus qui se vante d'avoir construit un perpetuum mobile a Mayence au depens de l'electeur, qui auroit desia alle 6 mois durant. solis principiis mechanicis. Je n'en croy rien."

Ausführlicher streift Huygens die Sache im Horologium oscillatorium vom Jahre 1673. Nachdem er im vierten Theile desselben als erste Hypothese den Satz aufgestellt hat: Wenn beliebige Gewichte, kraft ihrer Schwere, sich zu bewegen beginnen, könne ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt nicht höher steigen, als bis dahin, wo sich Letzterer bei Beginn der Bewegung befand; und nachdem er alsdann bemerkt hat, dass diese Hypothese nichts Anderes besage, als was Niemand jemals bestritten habe, nämlich, dass schwere Körper sich nicht nach oben erheben, setzt er hinzu: „In der That, wenn die Erfinder neuer Maschinen, welche vergebens ein Perpetuum mobile zu construiren versuchen, von eben dieser Hypothese Gebrauch zu machen verständen, so würden sie ihre Irrthümer leicht selbst erkennen, und einsehen, dass die Sache auf mechanischem Wege (mechanica ratione) unmöglich sei".***

An diesem Ausdruck nimmt Herr Mach Anstoss, indem er schreibt†: „Eine jesuitische reservatio mentalis ist vielleicht in den Worten „mechanica ratione" angedeutet. Man könnte hiernach glauben, dass Huygens ein nicht mechanisches perpetuum mobile für möglich hält." Nun, Huygens ist die Antwort auf diese Frage nicht schuldig geblieben,

* M. G. Hanschius, Joannis Keppleri aliorumque epistolae mutuae. Lipsiae 1718. Fol. p. 394.

** C. Henry, Huygens et Roberval. Documents nouveaux. Leyde 1879. 4°. p. 28; dieser bisher unbekannte Brief Huygens', welcher obige Randbemerkung enthält, beweist, dass Huygens nicht, wie bisher angenommen wurde, gleichzeitig zwei verschiedene Zeichnungen von Galilei's Pendeluhr erhielt, sondern anfangs nur die erste; er äussert den lebhaften Wunsch, auch die andere Zeichnung zu sehen, welche ihm Boulliau versprochen habe.

*** Horologium oscillatorium. Paris 1673. Fol. p. 93.

† Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit. Prag 1872. S. 10.

sondern hat sich in unzweideutiger Weise darüber ausgesprochen. In einem Briefe an Leibniz erwähnt er, man habe für Uhren ein Perpetuum mobile gesucht, und führt dann fort: „Celui pour qui est cette information ne doit pas entendre les principes de l'art, s'il s'imagine de pouvoir effectuer un tel mouvement mechanice, car pour physico-mechanice il semble toujours qu'il y ait quelque espérance, comme en emploiant la pierre d'aimant.“ *

Wenn Huygens streng zwischen einem Perpetuum mobile mechanica ratione, welches er für unmöglich erklärt, und einem solchen physico-mechanice unterscheidet, welches er nicht ohne Weiteres für unmöglich hält, so entspricht dies genau der Stellung, welche die Wissenschaft in jenen Tagen erreicht hatte; um ein Perpetuum mobile in jeder Form als etwas Widersinniges abzuweisen, dazu hätte es der vollen Kenntniss des Principes der Erhaltung der Energie bedurft, zu dem Huygens eben erst den Grundstein gelegt hatte.

---

* P. J. Uylenbroek, Christiani Hugenii Exercitationes mathematicae et philosophicae. Hagae Comitum 1832. 4°. T. I, p. 146.

Nachtrag

zu

meiner Uebersetzung des Mathematiker-Verzeichnisses im Fihrist des Ibn Abî Ja'kûb an-Nadîm.

(Zeitschr. Math. Phys. XXXVII Supplementheft od. Abhdlgn. z. Gesch. d. Math. VI.)

Ich übersetzte S. 18 im Artikel „Archimedes": „Ein Buch über die Wasseruhren, welche Schleudersteine werfen." Erst nach der Herausgabe meiner Arbeit wurde ich durch den Aufsatz A. Wittstein's „Historisch-astronomische Fragmente aus der orientalischen Literatur (in demselben Heft VI der Abhandlungen) auf eine Abhandlung Carra de Vaux's im Journal asiatique, VIII. Série Bd. XVII. 1891 aufmerksam gemacht, in welcher ein Manuscript der Nationalbibliothek in Paris besprochen wird, das unter Anderem eine Abhandlung über die Wasseruhren enthält, die von Archimedes herrühren soll, der arabische Uebersetzer ist nicht genannt. Herr Carra de Vaux bemerkt auch, dass der Târîch al-Ḥukamâ des Ibn al-Ḳufṭî unter den Werken des Archimedes eine Abhandlung über die Wasseruhren anführe, die denselben Titel trägt, wie diejenige im Fihrist (aus dem eben zum grössten Theile Ibn al-Ḳufṭî geschöpft hat), die aber Herr Carra de Vaux nicht gekannt zu haben scheint. Aus dieser Abhandlung ergiebt sich nun, dass statt „Schleudersteine* werfen" zu übersetzen ist: „Kugeln werfen oder fallen lassen"; die betreffende Stelle lautet nach der Uebersetzung Carra de Vaux's: „Toutes les heures un trou du plateau supérieur vient en coïncidence avec le trou unique du plateau inférieur; une balle tombe; elle est amenée dans la tête de corbeau placée à l'extérieur de la caisse, dont le bec s'ouvre par un système de bascule et semble la cracher. On obtient une sonnerie en plaçant sous la tête de corbeau une cymbale de cuivre ou de chalybs retentissante que la balle vient frapper dans sa chute."

Man vergleiche hiermit folgende Stellen:

Vitruvii de architectura, liber IX. cap. IX (VIII), welches über die Wasseruhren handelt: „Item aliae regulae aliaque tympana ad eundem

* So übersetzte ich بنادق nach den Wörterbüchern.

modum dentata una motione coacta versando faciunt effectus varietatesque motionum, in quibus moventur sigilla, vertuntur metae, calculi aut ova proiciuntur, bucinae canunt, reliquaque parerga.

Einhardi annales Francorum, annus 807, wo er über die Geschenke berichtet, die Karl der Grosse von dem Perserkönig (d. h. v. Hârûn ar-Raschîd) erhalten habe, und speciell die berühmte Uhr mit folgenden Worten beschreibt: „necnon et horologium ex auricalco, arte mechanica mirifice compositum, in quo duodecim horarum cursus ad clepsydram vertebatur, cum totidem aereis pilulis, quae ad completionem horarum decidebant, et casu suo subjectum sibi cimbalum tinnire faciebant, additis in eodem ejusdem numeri equitibus, qui per duodecim fenestras completis horis exiebant, et impulsu egressionis suae totidem fenestras, quae prius erant apertae, claudebant etc."

Andere Stellen über diesen Gegenstand liessen sich wohl auch noch in griechischen Autoren*, deren mir gegenwärtig keine vorliegen, nachweisen; sie zeigen zur Genüge, dass den Alten schon solche Wasseruhren, „welche Kugeln werfen", bekannt waren; hieraus und aus der Thatsache sodann, dass die Araber dieselben schon unter Hârûn, also in der ersten Zeit ihrer culturiellen Entwicklung, kannten, folgt wohl mit grösster Wahrscheinlichkeit, dass die Araber nicht Erfinder dieser Uhren waren, sondern ihre Kenntniss derselben von den Griechen her erhalten hatten. Es ist daher die Ansicht Carra de Vaux's, dass die Zuweisung dieser Schrift an Archimedes wohl weiter nichts als die „abgedroschene List" (ruse banale) eines Autors gewesen sei, der gern gelesen sein wollte, kaum zu unterstützen, sondern es gewinnt im Gegentheil die Richtigkeit der Angabe des Ibn Abî Ja'kûb an-Nadîm von einer griechischen Schrift über solche Uhren grosse Wahrscheinlichkeit; ob dieselbe nun von Archimedes herstamme, ist eine andere Frage, die hier nicht weiter erörtert werden soll.

* Vitruvius verweist in jenem und dem vorhergehenden Capitel auf Ktesibios, Aristarchos von Samos, Eudoxos, Apollonios, Skopinas von Syrakus (?) u. A.

Zürich, im März 1893. HEINRICH SUTER.

Recensionen.

Ueber elektrische Kraftübertragung, insbesondere über Drehstrom. Ein gemeinverständlicher Experimentalvortrag von F. Braun. Tübingen 1892. Verlag der H. Laupp'schen Buchhandlung. 38 S. Preis 1 Mk.

Die mit so grossem Erfolg durchgeführte elektrische Kraftübertragung von Lauffen am Neckar nach Frankfurt a. M., anlässlich der in letzterem Orte stattgefundenen internationalen elektrotechnischen Ausstellung, hat das Interesse des gebildeten Publikums so sehr in Anspruch genommen, dass von ihm aus auch eine weitere Belehrung über die einzelnen Vorgänge vielfach verlangt wurde. Verfasser hat deshalb seinen mit grossem Beifall aufgenommenen Experimentalvortrag dem Druck übergeben, damit auch ein grösseres Publikum sich daraus unterrichte. Das Lesen wird sehr erleichtert, indem der Verfasser bei der Behandlung weit ausholt und dabei einen Theil der neueren Elektricitätslehre berücksichtigt. Auch die in den Text eingedruckten Abbildungen tragen wesentlich zum Verständniss des Vorgetragenen bei, so dass sicherlich Jedermann einen Begriff davon erhält, von welcher enormen Wichtigkeit diese Kraftübertragung nicht nur für die Elektrotechnik im Besonderen, sondern auch für die Technik im Allgemeinen ist.

B. Nebel.

Aufgaben aus der Physik, nebst einem Anhange, physikalische Tabellen enthaltend. Zum Gebrauche für Lehrer und Schüler in höheren Unterrichtsanstalten und besonders beim Selbstunterricht. Von C. Fliedner. 7. verbesserte und vermehrte Auflage, bearbeitet von G. Krebs. Mit 74 in den Text eingedruckten Holzstichen. Braunschweig 1891. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. 134 S. und Anhang 33 S. Preis 2 Mk. 40 Pf.

Auflösungen zu den Aufgaben aus der Physik (vergl. Vorstehendes). Mit 122 in den Text eingedruckten Holzstichen. 197 S. Preis 3 Mk. 60 Pf.

Die Fliedner'sche Aufgabensammlung ist eine von den wenigen Aufgabensammlungen, welche in der Physik allgemein als gut anerkannt werden und sich deshalb einer grossen Verbreitung erfreuen. Nachdem Fliedner gestorben war, hat Krebs die Herausgabe der neuen Auflage übernommen und dabei die Fortschritte, namentlich auf dem Gebiet von

Elektricität und Magnetismus, berücksichtigt. In erster Linie ist das absolute Maass-System zu erwähnen, ohne welches heutzutage nicht mehr auszukommen ist, weshalb die Schüler gleich von vornherein damit vertraut werden müssen. Die Aufgaben sind bei einem tüchtigen Physikunterricht unerlässlich, wenn auf diesem Gebiet etwas geleistet werden soll, daher kann der Gebrauch derselben den Lehrern nicht genug empfohlen werden. Mit Rücksicht auf den Schulunterricht sind die Auflösungen in einem besonderen Bändchen erschienen. Der den Aufgaben beigefügte Anhang mit seinen Tabellen gestattet, auf einfache Weise viele Aufgaben bezüglich der dabei vorkommenden Stoffe und Zahlen zu variiren.

B. Nebel.

Populäre Vorträge und Reden von Sir William Thomson. Autorisirte Uebersetzung nach der zweiten Auflage des Originals. Band I: Constitution der Materie. Mit Illustrationen. Berlin 1891. Verlag von Mayer & Müller. 342 S.

Durch eine Vorlesung über Capillarität wurde W. Thomson nach verschiedenen Erwägungen veranlasst, seine populären Vorträge und Reden durch einen Neudruck zu einem besonderen, in drei Bänden zu erscheinenden Werke zu machen. Dabei hat der Verfasser die verschiedenen Artikel dem Inhalte nach geordnet, so dass der erste nunmehr vorliegende Band sich mit der letzten Constitution der Materie beschäftigt, während der zweite Band Gegenstände enthalten wird, die mit Geologie im Zusammenhang stehen, und der dritte Band Erscheinungen des Oceans und sonstigen maritimen Angelegenheiten gewidmet ist. Damit nun diese Vorträge und Reden eines Mannes, der sich in der Wissenschaft des grössten Ansehens zu erfreuen hat, in deutscher Uebersetzung die grösstmögliche Verbreitung unter dem gebildeten Publikum finden, wird der Titel der einzelnen Gegenstände hier wiedergegeben. Capillaranziehung mit vier Anhängen. Elektrische Maasseinheiten. Maxwell's sortirender Dämon. Elasticität als vielleicht eine Art von Bewegung betrachtet. Die Grösse der Atome. Versuch einer kinetischen Theorie der Materie. Die sechs Eingangspforten der Erkenntniss. Die Wellentheorie des Lichts. Ueber das Alter der Sonnenwärme, in drei Theilen. Ueber die Wärme der Sonne. Elektricitätsmessungen. Schon diese Thematas sind für den, der an den Naturwissenschaften Freude hat, ein grosser Anziehungspunkt für sein Interesse. Wie viel mehr steigert sich dasselbe aber, wenn dieselben von einer solchen Leuchte der Wissenschaft verarbeitet und wiedergegeben werden. Sehr gespannt sind wir auch auf die beiden folgenden Bände, die mit ihrem Erscheinen hoffentlich nicht zu lange auf sich warten lassen.

B. Nebel.

A treatise on the mathematical theory of elasticity. By A. E. H. LOVE. Volume I. Cambridge: At the University press. 1892.

Das Werk, welches sein Entstehen einer Anregung von Mr. Webb verdankt, zeigt dieselbe Eintheilung, wie sie zuerst von Clebsch aufgestellt wurde. Der vorliegende erste Band beschäftigt sich ausschliesslich mit der allgemeinen Theorie der Elasticität solcher Körper, die allseitig endliche Dimensionen haben, und somit exacte Lösungen zulassen. Die anderen Fälle sollen in einem zweiten Bande zusammengefasst werden. Gleichsam als Einleitung wird eine kurze historische Skizze über den Ursprung und die Entwickelung der Elasticitätstheorie gegeben, die aber keinen Anspruch auf Vollständigkeit machen soll, da ein solches Geschichtswerk schon von Todhunter her existirt, sondern nur den Zweck hat, das Verständniss zu erleichtern und das Interesse für die Theorie zu wecken. Das eigentliche Ziel ist, den heutigen Stand der Elasticitätstheorie im Zusammenhang darzustellen und den Weg zu zeigen, auf welchem man soweit gekommen ist, dabei werden sowohl die rein analytischen Entwickelungen, als auch die speciell technischen Einzelheiten ganz übergangen. Bei den einzelnen Capiteln bedient sich der Verfasser der Methoden und Theorien, wie sie von den bedeutendsten Forschern auf den Specialgebieten fruchtbringend verwendet wurden, und verarbeitet sie derart, dass sie ein Ganzes bilden. Die Beispiele, von denen nur die Endresultate mitgetheilt sind, wurden so ausgewählt, dass sie mit den im Text vorgetragenen Methoden zu lösen sind. Auf den Inhalt der einzelnen Capitel näher einzugehen, würde hier zu weit führen. — Durch reinen und exacten Druck zeichnet sich das Buch schon in seinem Aeusseren vortheilhaft aus.

B. NEBEL.

Elementary Thermodynamics. By J. PARKER. Cambridge: At the University press. 1891.

Das Wort „Elementary“ im Titel soll nur andeuten, dass auf die Details der Elektricität und des Magnetismus in diesem Buche nicht eingegangen wird. — Das erste Capitel, welches der Erhaltung der Energie gewidmet ist, beginnt mit der Zusammenstellung der Maasseinheiten, und zwar mit dem Metermaass, dessen Beziehung mit dem englischen Maass unmittelbar darauf folgt. Es muss als ein grosser Fortschritt bezeichnet werden, dass der Verfasser erklärt, dass er in diesem Buche nur das Centimeter-Gramm-Secunden-System (C.-G.-S.-System) benützen werde, also dasjenige Maass-System, das auf dem Pariser Congress zur allgemeinen Annahme vorgeschlagen, von den Engländern bis jetzt aber nicht angenommen wurde. Zu wünschen wäre nur, dass noch mehr englische Autoren diesem rühmlichen Beispiel folgen würden, dann würde die englische Jugend, wenigstens in den wissenschaftlichen Kreisen, sich sehr bald des Metermaasses bedienen, was für die Allgemeinheit von grösstem Interesse ist. Nachdem der Satz von der Erhaltung der Energie in dem ersten Capitel in eine mathematische Form gebracht worden ist, folgt ein kürzeres Capitel über die sogenannten permanenten Gase, worin die Gesetze abgeleitet werden, welche zwischen Druck, Volumen und Temperatur bei solchen Gasen bestehen. Während das dritte Capitel ausschliesslich dem Carnot'schen Princip als solchem gewidmet ist, enthält das vierte Capitel Anwendungen des Carnot'schen Princips. Die beiden Schlusscapitel enthalten das thermodynamische Potential und seine Anwendungen. Im Anhang sind solche Tabellen mitgetheilt, welche für die Thermodynamik von Wichtigkeit sind, wobei stets angeführt ist, aus welchen Sammlungen dieselben entnommen sind. – Die Schreibweise des Verfassers ist leicht verständlich, weshalb das Buch namentlich der studirenden Jugend zu empfehlen ist. B. Nebel.

Elemente des Magnetismus und der Elektricität. Insbesondere für angehende Elektrotechniker. Von Andr. Jamieson. Uebersetzt und mit Zusätzen versehen von J. Kollert. Mit 330 Figuren und einer Tafel. Leipzig 1891. Verlag von Quandt & Händel. 480 S. Preis 8 Mk. 40 Pf.

Das Buch ist zunächst speciell englischen Unterrichtsverhältnissen angepasst worden, wobei der ganze Inhalt derart gruppirt ist, dass er in 28 Vorlesungen eingereiht ist. An dem Schluss jeder Vorlesung befinden sich eine Probefrage und Antwort, sowie sonstige Fragen, deren Beantwortung den Schüler für das Examen vorbereiten sollte. Bezüglich der Eintheilung des Stoffs glaubt der Verfasser die Wahrnehmung gemacht zu haben, dass es besser sei, mit dem Magnetismus zu beginnen, an den sich naturgemäss der Elektromagnetismus und die Gesetze des elektrischen Stromes anreihen. Den Schluss bildet die Elektrostatik. Um nun das Buch auch den deutschen Verhältnissen anzupassen, sah sich der Uebersetzer veranlasst, theils Zusätze, theils Ergänzungsvorlesungen einzuschalten, die sich insbesondere auf das absolute magnetische und elektrische Maass-System, sowie auf die Theorie der Messungen und der Messinstrumente beziehen. Dass damit das Richtige getroffen wurde, wird Jeder zugeben; denn ein elektrotechnischer Unterricht ohne das absolute Maass-System wird eben in Deutschland als nicht erfolgreich bezeichnet. Der äusseren Ausstattung des Buches hätte eine etwas grössere Sorgfalt zu Theil werden dürfen. Der Druck, namentlich der kleinere, ist zu dicht, die Figuren sind vielfach nicht rein und scharf genug, auch hätte z. B. in Fig. 81 die undeutliche englische Bezeichnung der Pfeile durch eine deutsche ersetzt werden sollen. Indessen sind diese Ausstellungen nur zur Berücksichtigung bei einer neuen Auflage gemacht, damit der gediegene Inhalt des Buches auch ein entsprechendes Aeussere zeige.

B. NEBEL.

Die Tabellen der Uhrmacherkunst, nebst einer Sammlung mathematischer Hilfstafeln für Uhrmacher. Herausgegeben von GELCICH und DIETZSCHOLD. Wien, Pest, Leipzig 1892. Verlag von A. Hartleben. 231 S. Preis 8 Mk.

Je mehr sich die rechnerische Methode in der Uhrmacherkunst gegenüber der graphischen verbreitet, um so mehr stellte sich das Bedürfniss heraus, die Rechnungen durch geeignete Tabellen zu unterstützen. Im Laufe der Zeit sind diese Tabellen der Zahl nach bedeutend gewachsen, ohne in einem einzigen Werke vereinigt zu sein. Die Herausgeber haben sich deshalb der dankenswerthen Mühe unterzogen, diese Tabellen zu sammeln, durch entsprechende mathematische Tabellen zu erweitern, so dass der ganze mathematische Apparat, wie er für die Uhrmacherkunst erforderlich ist, in einem Bande zusammengestellt ist. Auch dem commerciellen Bedürfnisse der Uhrmacher wird durch die Aufnahme der ausführlichen Zinseszinstabellen Rechnung getragen. Nicht allein in Uhrmacherkreisen, sondern hauptsächlich in den Uhrmacherschulen und in den Gewerbeschulen wird dieses auch in seiner Ausstattung vorzügliche Werk grossen Anklang finden.

B. NEBEL.

Beiträge zur theoretischen und rechnerischen Behandlung der Ausgleichung periodischer Schraubenfehler. Von Dr. J. DOMKE. Berlin 1892. Verlag von Julius Springer. 46 S. Preis 2 Mk.

Die vorliegenden Studienergebnisse stützen sich auf die Bessel'sche Methode der Bestimmung der Schraubenfehler. Statt alle die einzelnen Fehler für sich zu bestimmen, so kann man die Schraubenfehler, da sie in allen Theilen einen durchaus stetigen Verlauf zeigen, als Functionen der Ablesung darstellen, und zwar die fortschreitenden Fehler durch eine Potenzreihe, die periodischen durch eine trigonometrische Reihe. Nun lassen sich die Gesetze der Fehler schon aus relativ wenigen Messungen bestimmen, man hat nur nach der Methode der kleinsten Quadrate die Werthe für die Constanten zu ermitteln. Verfasser giebt in seiner Arbeit zwei Darstellungsmethoden an, welche unter Berücksichtigung einer zweiten Näherung, wie sie namentlich bei älteren Instrumenten nöthig ist, zu Ergebnissen führen, die für alle Fälle der Praxis vollkommen genügen werden.

B. NEBEL.

Die Strahlenbrechung auf der Sonne, ein geometrischer Beitrag zur Sonnenphysik von AUGUST SCHMIDT. Mit Figuren im Text. Stuttgart 1891. Verlag von J. B. Metzler. 32 S.

Verfasser sucht in seiner interessanten Schrift der heutigen Vorstellung von der Sonne, wonach sie aus einem feurig flüssigen Sonnenball, umgeben von einer Atmosphäre, besteht, eine andere gegenüber zu stellen, nach welcher es keine Grenze zwischen Sonnenkörper und Sonnenatmosphäre giebt. Die ganze Sonne ist als aus einem einzigen Körper bestehend aufgefasst, dessen Dichte mit dem Abstand von dem Centrum abnimmt. Lediglich auf Grund von Refractionserscheinungen weist der Verfasser nach, dass die Sonne für uns als Scheibe erscheinen muss, und kommt auch zu einer ungezwungenen Erklärung der Sonnenfackeln und Protuberanzen. Die Rechnungen werden auf Grund einer einzigen, zunächst noch willkürlich angenommenen Zahl durchgeführt. — Diese vollständig neue Anschauung über das Wesen unserer Sonne wird gewiss allseitiges Interesse erwecken. Das Hauptergebniss der vorliegenden Untersuchung ist in folgenden drei Thesen zusammengefasst:

1. Die Sonne ist ein unbegrenzter Himmelskörper, es giebt insbesondere keine Grenzfläche zwischen einen Sonnenkörper und einer Sonnenatmosphäre.
2. Der Rand der Sonnenscheibe ist das Product regelmässiger Strahlenbrechung in einer Atmosphäre, deren Dichte im scheinbaren Grenzgebiet weit geringer ist, als die Dichte der Luft an der Erdoberfläche.
3. Die Sonnenfackeln und die Protuberanzen sind Product unregelmässiger Strahlenbrechung. Das Licht der Letzteren stammt aus einem Gebiete der Sonne, welches unter dem Ort der scheinbaren Grenze liegt.

B. Nebel.

Ueber den Helligkeitswerth der Spectralfarben bei verschiedener absoluter Intensität. Nach gemeinsam mit R. Ritter ausgeführten Versuchen. Von A. König. Hamburg und Leipzig 1891. Verlag von Leopold Voss. 84 S. mit vier Tafeln. Preis 4 Mk.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einer strengeren Prüfung der von Brodhun gefundenen Abnahme des Purkinje'schen Phänomens mit steigender Helligkeit der verglichenen Farben. Während Herr Brodhun die obere Grenze für einen noch sicher nachweisbaren Grad des Purkinje'schen Phänomens bei etwa 15 Einheiten hält (vergl. die Definition der „Einheit" Seite 13 der Abhandlung), so vermag A. König in der vorliegenden, mit neuer besonderer Versuchsanordnung durchgeführten Untersuchung eine obere Grenze des Purkinje'schen Phänomens nicht nachzuweisen, obwohl Helligkeiten bis zu ca. 600 Einheiten vorgekommen sind. Acusserer Verhältnisse wegen wurde diese Arbeit der Oeffentlichkeit übergeben, obwohl der Verfasser sich bewusst ist, und dies auch an mehreren Stellen ausdrücklich hervorhebt, dass ein grosser Theil der Fragen mehr angedeutet als gelöst ist.

B. Nebel.

Ueber die wichtigsten internationalen Maass-Einheiten. Von Carl August Porges. Sonderabdruck aus den „Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens". Wien 1892. Verlag des Techn. und Administr.-Militär-Comité's. 72 S.

Verfasser glaubt, den vorhandenen, wirklich guten Schriften über die absoluten Maass-Einheiten noch eine weitere Schrift beifügen zu sollen. Nach unserem Dafürhalten wäre dies nicht nöthig gewesen. Besser hätten die Worte „Mega" und „Mikro" an solchen Einheiten erläutert werden sollen, die gewöhnlich auch in der Praxis vorkommen. Wann spricht man z. B. von Mikrodynen?

B. Nebel.

Die Gravitation. Eine elementare Erklärung der hauptsächlichsten Störungen im Sonnensystem. Von Sir George Biddell Airy, übersetzt von Rudolf Hoffmann. Mit 50 Textfiguren. Leipzig 1891. Verlag von Wilhelm Engelmann. 176 S. Preis 3 Mk.

Das Original dieser inhaltreichen und geistvollen Schrift des grossen englischen Astronomen erschien im Jahre 1834 und erfuhr im Jahre 1839 eine deutsche Uebersetzung. Nachdem beides im Buchhandel vergriffen war, wurde im Jahre 1884 eine neue englische Ausgabe veröffentlicht, deren Uebersetzung nunmehr dem deutschen Publikum dargeboten wird. Airy hat es in meisterhafter Weise verstanden, dem grösseren Publikum ohne jede Rechnung eine Einsicht in die zum Theil verwickelten Bewegungen der Planeten und ihrer Monde zu verschaffen, soweit dieselben dem Newton'schen Gravitationsgesetze unterworfen sind. Je mehr sich Airy mit der Zubereitung des Stoffes für dieses Buch beschäftigte, um so mehr fand er zu seinem eigenen Erstaunen, dass diese Schrift auch für einen Kreis von Studirenden nützlich ist, die ansehnliche mathematische Kenntnisse besitzen und gewöhnt sind, sie zur Erklärung schwerer physikalischer Aufgaben zu verwenden. Dieser Gesichtspunkt ist dann für ihn bei dem Druck massgebend geworden. Airy's Bestreben ist, durch Mittheilung von Resultaten in leichtverständlicher Fassung zu weiterer Forschung anzuregen, namentlich fasst er die Mathematiker in's Auge, damit sie durch Anwendung höherer Rechnungsarten die Resultate vervollständigen, die für das Begreifen des Weltsystems von Wichtigkeit sind. Airy versteht anzuregen und Interesse für die Astronomie zu erwecken, was für den Fortschritt der Wissenschaft von grosser Wichtigkeit ist. Auch das deutsche Publikum wird dem Uebersetzer Dank wissen, dass er ihm dieses Buch wieder zugänglich gemacht hat, da bei uns zur Zeit das Bestreben ist, nicht nur die Wissenschaft zu fördern, sondern das Errungene der Allgemeinheit zugänglich zu machen.

B. Nebel.

Die Einheit der Naturkräfte. Ein Beitrag zur Naturphilosophie. Von P. Angelo Secchi. Autorisirte Uebersetzung von Rud. Schulze.

Zweite revidirte Auflage. Mit 61 in den Text gedruckten Holzschnitten. Lieferung 2—9. Braunschweig 1891. Verlag von Otto Salle. Preis 80 Pf. pro Lieferung. Preis des ganzen Werkes 7 Mk. 20 Pf.

Das ganze Werk besteht aus zwei Bänden, die in ihren Unterabtheilungen zusammen in vier Bücher zerfallen. Das erste Buch behandelt die Wärme, wobei zunächst, wie dies auch bei den drei übrigen Büchern der Fall ist, nur Thatsachen angeführt werden, aus denen sich dann die Gesichtspunkte gleichsam von selbst ergeben, unter welchen das Ganze zu betrachten ist. So ergiebt sich, dass sich die Erscheinungen der Wärme auf einen einfachen Austausch der Bewegung zurückführen lassen, und dass zu ihrer Erklärung das Zurückgehen auf ein anderes Princip nicht nothwendig ist. Das zweite Buch, mit welchem zugleich der erste Band abschliesst, beschäftigt sich mit den Erscheinungen des Lichtes, die sich bis jetzt nur dadurch eindeutig erklären lassen, dass man die Existenz eines Fluidums, genannt Aether, zugiebt, das der Schwere nicht unterworfen ist und das ganze Weltall erfüllt. Der Beweis, dass ein solches Fluidum thatsächlich existirt, ist nach unserem Dafürhalten doch noch nicht erbracht. Das dritte und grösste Buch führt uns die ungeheuer vielen Erscheinungen der Elektricität vor, aus welchen der Verfasser den Schluss zieht, dass ein und derselbe Aether die Ursache für die Erscheinungen des Lichtes und der Elektricität ist, nur wirke er im ersten Falle durch seine Vibrationen, im zweiten durch seine Fortbewegung. Diese Fortbewegung des Aethers, welche der Verfasser zur Erklärung für die Erscheinungen der Elektricität annehmen zu müssen glaubt, lässt uns erkennen, dass das Buch zu einer Zeit geschrieben wurde (1864 erste Auflage), die der grossartigen, experimentellen Versuche von Hertz noch nicht theilhaftig war. Nach unserer heutigen Anschauung ist es für die Erklärung der elekrostatischen Erscheinungen nicht nöthig, dass der Aether sich fortbewege, sondern dass er nur ähnlichen Schwingungen unterworfen sein muss, wie wir sie zur Erklärung des Lichtes voraussetzen. Hier ist also das Buch für veraltet zu erklären, für uns hat es nur noch historisches Interesse bezüglich der Entwicklung der Anschauungen über das Wesen der Elektricität. Geradezu gefährlich ist es aber, diese Anschauungen, als dem heutigen Stand der Wissenschaft entsprechend (denn darauf beziehen wir das Wort „revidirte“ bei Auflage) einen grösseren Publikum unterbreiten zu wollen. Von Secchi haben wir die feste Ueberzeugung, dass, wenn er noch am Leben wäre, er mit der Herausgabe seines Buches, ohne dass es eine den heutigen Ansichten entsprechende gründliche Umarbeitung erfahren hätte, nicht einverstanden gewesen wäre. B. Nebel.

Die photographische Terrainaufnahme (Photogrammetrie oder Lichtbildmesskunst) mit besonderer Berücksichtigung der Arbeiten in Steiermark und des dabei verwendeten Instrumentes. Von VINCENZ POLLACK. Sonderabdruck aus: „Centralblatt für das gesammte Forstwesen“ 1891. Wien 1891. Verlag von R. Lechner's Hof- und Universitäts-Buchhandlung (Wilh. Müller). 15 S.

Im Grossen und Ganzen ist dieser Aufsatz eine Wiedergabe des Vortrages, welchen der Verfasser unter dem Titel: „Ueber photographische Messkunst“ auch dem Druck übergeben hat, und welcher unlängst in diesen Blättern besprochen wurde. Gegen den Schluss tritt insofern eine grössere Abweichung ein, als der Verfasser sich eingehender den Terrainaufnahmen am Arlberg und am Fusse der Reichensteingruppe beschäftigt, wo es sich hauptsächlich um Studien für den Lawinenverband handelt. Verfasser ist stets bestrebt, der Photogrammetrie mehr und mehr Eingang zu verschaffen, und wendet sich daher an Oesterreichs Forstleute, dass sie die Photogrammetrie praktisch verwerthen möchten.

Im Uebrigen wird auf die frühere, oben erwähnte Besprechung verwiesen.

B. NEBEL.

Die Gravitation ist eine Folge der Bewegung des Aethers. Von KARL SCHLICHTING. Lüben i. Schl. 1891. L. Goldschiener's Buchhandlung (H. May). 15 S. und zwei Figuren.

Verfasser geht von der Hypothese aus, dass die kleinsten Theilchen des Aethers, die er Sphären nennt, sich in gradliniger Bewegung befinden und darin verharren, bis sie an andere Sphären oder an Körper anprallen und dann nach den Gesetzen der Mechanik in anderen Bahnen weiter eilen. Treffen die Sphären einen Körper, so geht ein Theil von ihnen ungehindert durch den Raum, welcher nicht von Molekülen angefüllt ist; der andere aber wirkt treibend; denn er stösst auf die Körpermoleküle; jede Sphäre überträgt dabei dem Molekül einen Theil seiner lebendigen Kraft und prallt mit etwas verminderter Geschwindigkeit zurück. Einer Kugel, in deren endlicher Entfernung kein anderer Körper sich befindet, kann daher vom Aether kein Antrieb ertheilt werden, weil sich die Kräfte gegenseitig aufheben. Anders verhält sich die Sache, wenn zwei Kugeln in endlicher Entfernung von einander den Stössen der Sphären ausgesetzt werden. Darüber lässt uns die Schrift aber vollkommen im Unklaren, woher die Geschwindigkeit der Sphären kommt, wie gross dieselbe ist, was aus den Sphären wird, wenn sie durch fortgesetztes Aufprallen ihre Geschwindigkeit eingebüsst haben, überhaupt, wie der Satz von der Erhaltung der Energie in diesem Weltensystem zum Ausdruck kommt.

B. NEBEL.

Aesthetische Factoren der Raumanschauung. Von THEODOR LIPPS. Hamburg und Leipzig 1891. Verlag von Leopold Vosseis. 91 S. Preis 3 Mk.

Diese Abhandlung bildet einen Theil der Festschrift, welche unter dem Titel: „Beiträge zur Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane“

Hermann v. Helmholtz als Festgruss zu seinem 70. Geburtstag von acht Autoren dargebracht worden ist. — Die Erklärung für die optischen Täuschungen ist allgemein noch keine feste, die Einen wollen dieselben auf allerlei angebliche Besonderheiten der Bewegungen unserer Augen zurückführen, während die Anderen das v. Helmholtz'sche Princip der „Gewohnheiten des Sehens", das aus Erfahrungen die fraglichen Täuschungen ableitet, einer Reihe von Täuschungen zu Grunde legen. Verfasser gehört zu den Anhängern der letzteren Ansicht, wonach die optischen Täuschungen als Täuschungen des Urtheils aufzufassen sind. Dabei geht er von der Anschauung aus, dass wir z. B. eine Linie nicht als solche ansehen, sondern dass wir gewohnt sind, in ihr eine Kraft, eine Bewegung, eine Lebendigkeit wahrzunehmen; wir sehen die Gerade nur, wie sie sich streckt, wie sie von einem Ausgangspunkte zu einem Zielpunkte strebt. Sehen wir mehrere Gerade vereinigt zu Quadraten, Rechtecken und diese wieder zu architektonischen Gebilden, so treten Urtheilstäuschungen auf, die der Verfasser „optische Täuschungen aus ästhetischen Gründen" nennt, und die je nach Umständen gesteigert oder gemindert werden können, wie an Beispielen näher ausgeführt wird. Bei der specielleren Betrachtung der Grössenurtheile beim Quadrat und Rechteck führt der Verfasser den Nachweis, dass wir gewisse Richtungen als Hauptrichtungen ansehen, obgleich sie für's Auge vor anderen Richtungen keinen Vorzug haben. Solche Richtungen haben jedesmal einen ästhetischen Vorzug, was namentlich an Beispielen aus der Architektur treffend nachgewiesen wird. Im Weiteren beschränkt sich der Verfasser wieder auf die Betrachtung einzelner geometrischer Gebilde. Die Schrift wirkt ungeheuer anziehend, mit dem grösstem Interesse haben wir sie gelesen und bedauern nur, zu rasch zum Schlusse gelangt zu sein.

B. Nebel.

Die Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener-Wittwen-Societät am 31. December 1890. Begutachtet auf Grund der eigenen Erfahrungen der Anstalt und eingehender mathematisch-technischer Untersuchungen von Professor Johannes Karup, mathematischer Sachverständiger der Lebensversicherungsbank für Deutschland zu Gotha. Im Auftrage des Herzogl. Sächsischen Staatsministeriums veröffentlicht. Dresden 1893. Commissionsverlag: Heinrich Morchel's Buchhandlung. 146 S. in Folio.

So leicht durchsichtig die Verhältnisse von Lebens- und Rentenversicherungsanstalten zu sein pflegen, in welchen von vornherein das Alter der Versicherten die rechnungsmässige Grundlage des Verhältnisses der Versicherungsprämie zu der nach dem freien Belieben der Versicherten festzustellenden Leistungen der Anstalt bildet, so schwierig ist die Beurtheilung der Verhältnisse, von solchen Versicherungsgemeinschaften, bei denen das Alter auf die Versicherungsprämie gar keinen Einfluss übt, bei denen auch die Höhe der versicherten Rente nicht in das Belieben des Versichernden gestellt ist. Eine derartige Anstalt war die Professoren-Wittwen-Casse in Göttingen, deren Finanzlage 1845 durch Gauss klargestellt worden ist, eine solche ist die Gothaische Staatsdiener-Wittwen-Societät.

Sie wurde 1791 gegründet. Nach ihren anfänglichen Satzungen zahlte der Beamte als Jahresbeitrag fünf Procent seines Gehaltes, wogegen der Wittwe ein Viertel des letzten Gehaltes des Verstorbenen als Jahresgeld zugesichert war. Es ist auffallend, wie richtig damals diese Zahlen gewählt wurden, und in der That legte die Gesellschaft recht erhebliche Ueberschüsse zurück, die bei einer neugegründeten Anstalt unentbehrlich sind, aber bei noch mangelhaft ausgebildeter Versicherungstechnik zu dem irrigen Schlusse führten, man könne auch mit niedrigeren Beiträgen auskommen. Dieselben wurden 1812 auf drei Procent des Gehaltes der Versicherten herabgesetzt, während zwei andere Einnahmequellen zunächst noch unberührt blieben: ein herzoglicher Jahreszuschuss von 9000 Mk. und die Anwartschaft auf die Gnadenabgaben der besoldungspflichtigen Cassen bei dem Tode eines Beamten, welche damals zwei sogenannte Sterbequartale betrugen. Im Jahre 1818 wurde der herzogliche Zuschuss bei der Trennung von Gotha und Altenburg auf 6000 Mk. gekürzt; was aber muthmasslich keine Schädigung der Casse war, weil wohl ein Drittel der Beamten in Folge der genannten staatlichen Veränderung ausschied. Dagegen war es sichtlich von Uebel, dass 1819 die Gnadenabgaben der Gesellschaft zu Gunsten einer neugebildeten besonderen Hilfscasse für bedürftige Staats- und Hofdiener, sowie Wittwen und Waisen derselben entzogen wurden. Erst 1850 wurde durch Hopf eine wirkliche Bilanz des Gesellschaftsvermögens auf den 31. December 1849 aufgestellt, und dabei wurden als Activa ausser dem vorhandenen Vorrathe an Geld und Werthpapieren der Baarwerth der noch zu erwartenden Mitgliederbeiträge und herzoglichen Zuschüsse, als Passiva der Baarwerth der noch laufenden und der zu erwarten stehenden Wittwenpensionen, alle Posten zu den Zinssatze von $3\frac{1}{2}$ Procent discontirt, angesehen. Es erschien zum Schrecken des Rechners ein Fehlbedarf von 146 736 Mark. Er glaubte die Tilgung des Fehlbedarfs in Aussicht stellen zu können, wenn für neu zutretende Mitglieder, sowie für schon vorhandene Mitglieder mit Rücksicht auf Gehaltsaufbesserungen, der Beitrag von drei wieder auf vier Procent des Gehaltes, wenn zugleich der Zuschuss von 6000 Mark wieder auf 9000 Mark erhöht würde, wenn man endlich die Gnadenabgaben in der Höhe von einem Sterbequartale der Anstalt wieder zuwende; jedenfalls solle man in Zwischenräumen von je fünf, sieben oder höchstens zehn Jahren die technische Prüfung wiederholen, um die Wirkung seiner Vorschläge zu überwachen. Hopf's Vorschläge wurden in ihren finanziellen Theilen befolgt; die Gnadenabgaben wurden sogar statt in der

Höhe von drei Monatsraten in der von dreieinviertel Monatsraten der Gesellschaftscasse zugeführt; aber der unscheinbare und doch wichtigste Wunsch nach häufig wiederkehrender Prüfung fand keine Beachtung.

Erst auf den 30. Juni 1869 wurde durch Hansen eine neue Bilanz aufgestellt. Hansen, der vortreffliche und unermüdliche Rechner, der mit Recht berühmte Astronom, machte sich diese Sache etwas leicht, und er war sich dessen bewusst, denn er wollte seine Bilanz nicht als einen zutreffenden Ausdruck der wirklichen Gesellschaftslage, sondern nur als den Vorläufer einer ganzen Reihe ähnlicher in kurzen Zwischenräumen anzustellenden Ermittelungen angesehen wissen. Vielleicht war man durch den von Hansen errechneten Ueberschuss von 209 838 Mark zu sehr erfreut, als dass man daran gedacht hätte, dem hinzugefügten Wunsche jetzt Folge zu leisten.

Nicht früher, als neun Jahre darnach, wurde durch Herrn Geh. Staatsrath Mönich eine Bilanz auf den 31. December 1878 aufgestellt. Ihr zu Folge wäre der Ueberschuss auf 158 543 Mark heruntergegangen, und eine auf den 31. December 1880 von demselben Rechner gezogene Bilanz gab zwar noch immer einen Ueberschuss, aber einen solchen von nur noch 42 307 Mark.

Unter diesen Verhältnissen drängte die Nothwendigkeit auf eine genaue technische Prüfung, mit welcher Rechnungsrath Fleischhauer beauftragt wurde. Seine Bilanz auf den 31. Deccember 1884 schloss mit einem Fehlbedarfe von 648 278 Mark.

Wir können nicht umhin, es auffallend zu finden, dass weitere fünf Jahre vergingen, bevor wieder ein Techniker, Prof. Johannes Karup in Gotha, durch Schreiben vom 7. August 1890 den Ministerialauftrag erhielt, eine genaue Bilanz auf den 31. December gleichen Jahres zu fertigen. Sie enthüllte das Fortschreiten des Fehlbebarfs bis zu einer Summe von 813 406 Mark.

Die gegenwärtige Veröffentlichung besteht aus drei Abtheilungen: I. Die Finanzlage der Societät (S. 1—34). II. Das statistische Material und seine Verwerthung zur Herstellung der Sterblichkeitslisten, Heirathslisten und sonstigen technischen Grundtafeln (S. 35—90). III. Mathematische Formeln und Entwickelungen zur Abschätzung der Verbindlichkeiten und Forderungen der Societät nach den statistischen Unterlagen nebst zugehörigen Tabellen (S. 91—134).

Unsere seitherigen Angaben sind wesentlich der I. Abtheilung entnommen. Ebenda finden sich an verschiedenen Stellen zerstreut noch mannigfache Bemerkungen, welche allgemeines Interesse haben. Bei den früheren technisch aufgestellten Bilanzen hatte die Sterblichkeitstafel der preussischen Wittwenverpflegungsanstalt, welche nach ihrem Anfertiger die Brune'sche Tafel genannt zu werden pflegt, Anwendung gefunden. Trotzdem deren Material einem sehr ähnlichen, nur erheblich grösseren

Bevölkerungskreise entstammt, als der ist, dem die Mitglieder der Gothaer Societät angehören, glaubte Herr Karup doch, um allen Bemängelungen aus dem Wege zu gehen, eine ganz neue Tafel aus den Listen der Societät selbst herstellen zu sollen. Der Erfolg hat gezeigt, dass diese grosse Mühe keine vergeblich aufgewandte war. Die neue Karup'sche Tafel bleibt in der Sterblichkeit gegen die Brune'sche um etwa zwölf Procent zurück. Die genaueren Zahlen sind folgende: Vom 1. Januar 1850 bis zum 31. December 1889 standen 3263 Versicherte durchschnittlich mit je 15,9 Jahren, im Ganzen mit 51890,5 Jahren unter Beobachtung; von ihnen starben 1440, während die Brune'sche Tafel 1639,57 Todesfälle hätte erwarten lassen; die Untersterblichkeit belief sich also auf 200 von 1640, das heisst: $\frac{500}{41} = 12^1/_5$ Procent. Herr Karup sieht darin, unter Berücksichtigung der Thatsache, dass Brune seine Tafel auf Beobachtungen aus den Jahren 1776 bis 1845 gründete, eine Bestätigung der in Versicherungskreisen anerkannten Wahrheit, dass die Sterblichkeit innerhalb des Jahrhunderts 1750—1850 abgenommen hat, was freilich zu der Erinnerung der „ältesten“ Leute von der Widerstandsfähigkeit ihrer Zeitgenossen einen eigenthümlichen Widerspruch bildet. Das die Karup'schen Zahlen gross genug sind, um nicht in das Bereich der Zufälligkeiten verwiesen zu werden, leuchtet um so deutlicher ein, als die Societätslisten die gleichfalls untersuchte Wittwensterblichkeit wiederum niedriger als Brune's Tafeln liefern.

Die Wichtigkeit der Wittwenheirathen forderte dazu auf, auch für sie eine Liste aus dem Societätsbestande herzustellen. Dieselbe ergab nur ein Viertel der in anderen allgemeinen Listen angegebenen Wittwenheirathen. Der Grund dafür liegt auf der Hand. Die pensionsberechtigte Beamtenwittwe verliert mit der neuen Heirath ihre Pension, und darin liegt für sehr Viele ein schwerwiegender Abhaltungsgrund, eine neue Ehe einzugehen. Weniger ersichtlich ist der Grund, warum, was die Societätslisten gleichfalls zu erkennen geben, die Altersunterschiede zwischen Braut und Bräutigam geringer sind, wenn letzterer Wittwer, als wenn er noch ledig war. Sollte die vorausgegangene erste Ehe dem Wittwer die Ueberzeugung beigebracht haben, eine gewisse Gleichalterigkeit unter Gatten sei erwünscht, oder sollten erheblich jüngere Mädchen leichter einem ledigen als einem verwittweten Bewerber seine Jahre nachsehen?

Die II. und III. Abtheilung bieten der Berichterstattung weit grössere Schwierigkeiten als die erste. In ihnen handelt es sich theils um Tabellen, über welche zu berichten kaum möglich ist, theils um deren Anfertigung auf der Grundlage mathematischer Entwickelungen, und ein Bericht über solche Entwickelungen müsste, um für sich verständlich zu sein, dem Originale so genau folgen, dass er aufhörte, ein Bericht zu sein und zu einer Abhandlung anwüchse, zu deren Anfertigung Referent sich überdies nicht vollkommen befugt hält, da der ganze Inhalt seiner forschenden Thätigkeit auf weit abliegendem Gebiete sich findet, und da er mit dem Versicherungswesen nur in dem Maasse vertraut ist, in welchem die ihm übertragenen Vorlesungen über politische Arithmetik es mit sich bringen. Wir begnügen uns deshalb hier mit einer ganz kurzen Bemerkung über die von Herrn Karup in die Wissenschaft eingeführte und auch in vorliegendem Werke oft benutzte unabhängige Wahrscheinlichkeit. Der Verfasser versteht darunter die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nach Beiseiteschiebung aller derjenigen beigemengten, keineswegs einflusslosen Wahrscheinlichkeiten, welche nicht in unmittelbarer Frage stehen. Er findet dabei den Lehrsatz, der dem Grundtheoreme der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten a priori buchstäblich entspricht, dass man die einzelnen unabhängigen Wahrscheinlichkeiten mit einander zu vervielfachen habe, um die Wahrscheinlichkeiten des Gesammtereignisses zu erhalten. So ist z. B die Wahrscheinlichkeit, dass ein Lediger nach einer gewissen Zeit noch immer als Lediger lebe, das Product der beiden unabhängigen Wahrscheinlichkeiten, erstens, dass er unverheirathet sei, sofern das Leben ihm zugesichert wäre, zweitens, dass er lebe, sofern das Ledigbleiben feststeht.

Dieser verhältnissmässig kurze Bericht dürfte genügen, auf die hohe Bedeutung der uns vorliegenden Arbeit aufmerksam zu machen, welche in praktischer Beziehung auch den nahezu unschätzbaren Vortheil bietet, dass ihre Tabellen mindestens in den nächsten 15 bis 20 Jahren den technischen Bilanzen der Gothaer Societät und ähnlicher Anstalten werden zu Grunde gelegt werden können.

Von den fünf Sanirungsvorschlägen, zu welchen Herr Karup für die Gothaer Societät gelangte, sehen wir ab, da sie leider insgesammt an dem Nichtwollen des Landtages gescheitert sind.

Cantor.

Ausführlicher Bericht über die Fortschritte der projectiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert. Von W. Franz Meyer. (Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung. I. Bd. 1890/91.)

Die Entwickelung der projectiven Invariantentheorie als eines besonderen Zweiges der mathematischen Wissenschaften ist hervorgegangen aus der Vereinigung zweier wesentlicher Gesichtspunkte. Auf der einen Seite steht die Frage nach solchen Eigenschaften mathematischer Gebilde, welche bei gewissen Umformungen derselben sich nicht ändern, „invariant“ bleiben, sammt der daran geknüpften methodologischen Forderung, die Untersuchung solcher Eigenschaften so zu führen, dass diese ihre Invariantennatur im Laufe derselben stets evident bleibt. Auf der anderen Seite steht das Princip, als die wichtigste Classe von Umformungen die Gesammtheit der projectiven zu betrachten, welche sich analytisch durch lineare

Substitutionen der Veränderlichen mit willkürlichen Coefficienten, geometrisch durch Collineationen darstellen (das heisst: Punkte in Punkte, Gerade in Gerade, Ebenen in Ebenen überführen). Nicht von jeher waren beide Gesichtspunkte vereinigt: die englischen Mathematiker, denen die Begründung der Disciplin zu danken ist, haben von Anfang an auch andere in sich geschlossene Systeme („Gruppen" nach jetziger Terminologie) von Umformungen in's Auge gefasst, insbesondere diejenigen, welche sich geometrisch als Uebergänge zu congruenten bezw. ähnlichen Gebilden von nur anderer Lage, analytisch als sogenannte orthogonale Substitutionen darstellen. Dieser weiteren Auffassung verdankt es die englische Invariantentheorie, dass sie sehr bald auch auf die angewandte Mathematik Einfluss gewinnen konnte; Zeugniss dafür geben die Arbeiten von Physikern so angesehenen Namens, wie Rankine und W. Thomson, die sich schon 1856 der neuen Theorie bemächtigt hatten. Aber der Gesichtskreis verengerte sich bald wieder, selbst in England; aus der erwähnten methodologischen Forderung entsprang die Ausbildung einer eigenen, gerade für die Betrachtung aller projectiven Umformungen zugeschnittenen Symbolik, die zwar zu bequemer Auffindung einer Fülle von einzelnen Sätzen führte, aber nicht nur die Methoden, sondern auch die Resultate der Invariantentheorie der Kenntnissnahme aller Uneingeweihten entzog. Andererseits waren gleichzeitig in der deutschen Geometrie die projectiven Fragestellungen zu exclusiver Herrschaft gelangt; und die Verbindung, welche beide Disciplinen nunmehr mit einander eingingen, stärkte diese Tendenzen auf beiden Seiten. Ihren Höhepunkt erreichte diese Entwickelung, als die symbolische Methode in Gordan's Endlichkeitsbeweise einen unbestreitbaren Erfolg errang, der um so überzeugender zu ihren Gunsten wirkte, als vorher das entgegengesetzte Resultat vermuthet worden war. Die weiteren Gesichtspunkte, welche Klein und Lie etwa 1870 gemeinsam entwickelten, fanden zunächst in invariantentheoretischen Kreisen kaum Aufnahme; und ebensowenig war dies der Fall mit Kronecker's Betonung der arithmetischen Seite der Fragestellungen. So wurde in der Zeit von 1870—1890 zwar eine Menge interessanter Einzel-Resultate gewonnen (auch wohl jetzt kaum schon verwendbare Bausteine für künftige Forschungen zusammengetragen); es wurde die Begründung der Methoden in vieler Hinsicht verschärft, die Technik zur Virtuosität ausgebildet: aber im Wesentlichen blieb man bei den Fragestellungen der 60er Jahre stehen. Die bemerkenswertheste Erweiterung, Halphen's und Sylvester's Einführung der Differentialinvarianten, so nahe Verwandtschaft sie zu Lie's Ideen zeigt, hat sich von diesen unabhängig entwickelt; sie ist zudem fast ganz auf England und Amerika beschränkt geblieben. In neuen Fluss ist die Entwickelung erst in den letzten Jahren gekommen, seitdem einerseits die Lie'schen und die Kronecker'schen Theorien auch weiteren Kreisen zugänglich geworden sind, andererseits durch Hilbert's umfassende und durchsichtige Erledigung der Endlichkeitsfragen die überwuchernde Symbolik gerade aus dem Gebiet verdrängt worden ist, auf dem sie einst ihren glänzendsten Triumph gefeiert hatte.

So etwa würde das Schlussurtheil lauten, welches Referent auf Grund des vom Verfasser mit liebevollster Sorgfalt zusammengetragenen Actenmaterials fällen würde. Verfasser hat es ausdrücklich abgelehnt, ein solches Urtheil auszusprechen. Man wird ihm zustimmen müssen, wenn er auf die Nothwendigkeit hinweist, die objective Darstellung des thatsächlich Vorhandenen, welche einen allgemein giltigen und dauernden Werth beansprucht, von der Kritik zu trennen, die die Bedingungen der Zeit und wohl auch des Ortes ihrer Entstehung nie wird verleugnen können. Andererseits wird vielleicht doch Einer oder der Andere dem Referenten Dank wissen, dass er es oben versucht hat, aus den langen Linien einer 50jährigen Entwickelungsgeschichte die markantesten Punkte herauszuheben; selbst auf die Gefahr hin, dass Verfasser der Erste ist, welcher dagegen Protest einlegt, dass solche Schlüsse aus seinem Material gezogen werden.

Es sei nunmehr gestattet, einige Einzelheiten zu besprechen. Dankenswerth ist, dass Verfasser seinem eigentlichen Thema einen Abriss der Vorgeschichte vorausgeschickt hat, welche sowohl über die Entwickelung der Theorie in ihrer eigenen Umgrenzung, als über das Eingreifen der bereits von Seite der Zahlentheorie wie der Geometrie vorhandenen Fragestellungen orientirt. Ueber die Zweckmässigkeit der im Folgenden getroffenen Eintheilung des Stoffes, wird Mancher geneigt sein, mit dem Verfasser zu rechten; Referent glaubt, dass sie mit Hilfe des beigegebenen Inhaltsverzeichnisses leisten wird, was sie soll. Dass Verfasser (und Verleger?) auf ein Namen- und Sachregister Verzicht geleistet haben, wird man mit Bedauern begreiflich finden. In dem Zusatz zu Seite 93 würde Referent gerne erwähnt sehen, dass solche Dinge doch rein algebraischer Behandlung gegenüber viel spröder sich erweisen, als der Herbeiziehung transcendenter Hilfsmittel. Die ausführlichen Angaben über das Aequivalenzproblem der quadratischen und bilinearen Formen werden um so willkommener sein, als diese Theorie in den Lehrbüchern fast ganz zu fehlen pflegt; ebenso die Auszüge aus den namentlich in Deutschland noch wenig bekannten umfangreichen Untersuchungen von Capelli und von Deruyts. Der Seite 129 von einem rein mathematischen Verfahren gebrauchte Ausdruck, dass bei ihm „Beobachtungsfehler" unvermeidlich seien, wirkt frappirend, trifft aber die Sache. Den Ausführungen des Verfassers über den Werth der invariantentheoretischen Methoden der Gleichungsauflösung (S. 92), über die Bedeutung der englischen Abzählungsmethoden (S. 168) und über das Verhältniss der englischen Differentialinvarianten-Theorie zu den allgemeinen Ansätzen von Lie (S. 231) wird man zustimmen müssen. Dass Verfasser auch über solche Untersuchungen ausführlich berichtet, die zwar heute überholt sind, aber einst eine bedeutende Rolle in der Entwickelung der Invariantheorie gespielt haben, wird ihm danken, wer nicht nur über die Gegenwart, sondern auch über die Vergangenheit Belehrung sucht. Seite 244 würde für die Einführung der Differentialparameter vor Beltrami noch Lamé zu nennen sein (théorie des coordonnées curvilignes, 1859).

Doch genug dieser Einzelheiten; wünschen wir vielmehr der jungen Vereinigung deutscher Mathematiker Glück dazu, dass die entsagungsvolle Hingabe des Verfassers an seine Aufgabe es ihr ermöglicht hat, ihre Veröffentlichungen mit einem Werke zu beginnen, das den Mathematikern aller Nationen werthvolle Dienste leisten wird. Mögen diesem ersten Berichte bald weitere folgen, welche die Literatur anderer Zweige der Mathematik uns mit derselben Vollständigkeit, Uebersichtlichkeit und Unparteilichkeit gesammelt darbieten.

H. Burkhardt.

Ueber flächentreue Abbildung. Von E. Holländer. Programm. Mühlheim a. d. Ruhr. 36 S.

Stehen zwei Flächen in äquivalenter, „flächentreuer" Beziehung, das heisst, sind je zwei entsprechende Stücke von gleichem Inhalt, so besteht die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda}\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial \lambda} = \frac{\sqrt{E'G' - F'^2}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

wenn man die erste Fläche mit Hilfe der Coordinaten u, v, die zweite mit Hilfe der Coordinaten λ, φ darstellt und E, F, G auf die erste, E', F', G' auf die zweite Fläche bezieht. Herr Holländer leitet zunächst hieraus auf's Neue den Satz ab, dass auf einander abwickelbare Flächen in entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmaass besitzen müssen (Cap. I und II).

Für die äquivalente Beziehung zweier Ebenen erhält man, falls sie auf rechtwinklige Coordinaten x, y, bez. ξ, η bezogen werden, einfacher:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1.$$

Hierin kann man ξ als willkürliche Function von x und y betrachten. Herr Holländer führt zunächst einfache Abbildungen dieser Art an, die seiner Zeit von Herrn Schellhammer entwickelt wurden, und bemerkt, dass in einem dieser Fälle die Parallelen zur x-Achse das eine der beiden „automekoischen", das heisst: unverzerrt abgebildeten Systeme bilden (Cap. III).

Abschnitt IV ist der „rektangulären" Abbildung gewidmet. Auf zwei äquivalenten Flächen ergeben sich zwei ganz bestimmte orthogonale Curven-Systeme, die vermöge der Abbildung in einander übergeführt werden. Die äquivalente Beziehung zwischen zwei Ebenen wird rektangulär, wenn das System der xy-Ebene aus den Parallelen zur x- und y-Achse besteht. Das Problem hängt nahe zusammen mit der von Bonnet aufgestellten und von Herrn Korkine behandelten Problem, eine Rotationsfläche so äquivalent auf die Ebene zu beziehen, dass aus den Meridianen und Kreisen der Ersteren ein orthogonales System entsteht. Auch die von Herrn Holländer gegebene Behandlung seiner Frage berührt sich mit der Korkine'schen Methode. Man hat die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} = 1,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta} = 0.$$

Das System wird auf die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} = v$$

zurückgeführt, wo α und β nur von

$$p\left(=\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) \text{ und } q\left(=\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)$$

abhängen, v eine Hilfsgrösse ist. Wie Herr Korkine, benutzt Herr Holländer nur particuläre Lösungen der Differentialgleichung und drückt dann x, y, ξ, η durch v, α, β aus. Einer seiner Fälle kommt bei Korkine nicht vor.

Besondere Aufmerksamkeit wendet Herr Holländer dem Fall zu, wo p und q von einander abhängen und daher die obige Methode nicht mehr anwendbar ist. In diesem Fall ergeben sich zwei Geradenschaaren, die in der x, y- und ξ, η-Ebene einander entsprechen und aus Orten gleicher Deformation bestehen. Herr Holländer giebt sechs Lösungen dieser Art. Im Schlussabschnitt werden die Fächen constanter Krümmung als äquivalente Abbilder der Kugel betrachtet. Von den Resultaten wollen wir hervorheben, dass nur bei Rotationsflächen constanter Krümmung auf einer Schaar von Krümmungslinien beide Hauptkrümmungen zugleich constant sein können.

Ernst Kötter.

Einführung in die neuere construirende Geometrie. Von G. D. E. Weyer. Leipzig 1891. B. G. Teubner. 8°. VI und 68 S.

In der Vorrede bezeichnet es Herr Weyer als seine Absicht, „zu allererst und ohne Umschweif direct auf die erreichbaren Hauptsätze der neueren Geometrie auszugehen“. Nachdem er daher auf die bekannte elementare Weise gezeigt hat, dass vier Strahlen eines Büschels von anderen Strahlen unter demselben Doppelverhältniss geschnitten werden und die projectivische Beziehung als Folge projectivischer Beziehungen erklärt hat, beweist er zunächst nur den einen Hauptsatz, dass projectivische Gebilde durch drei

Paare homologer Elemente bestimmt sind und wendet sich dann sofort zu den Kegelschnitten. Dieselben werden als Zentralprojectionen des Kreises aufgefasst; ihre zweifache projectivische Erzeugbarkeit wird aus der elementar erwiesenen des Kreises abgeleitet. Die Sätze von Pascal und Brianchon und ihre Specialisirungen am ein- und umgeschriebenen Fünf- und Viereck werden ebenfalls erst am Kreise abgeleitet und durch Projectionen verallgemeinert. Diese stete Zurückbeziehung auf den Kreis hätte um so eher vermieden werden können, da die Beweise beim Kreis hier nur auf seine projectivische Erzeugung sich stützen und sofort für die Kegelschnitte im Allgemeinen gelten.

Erst nunmehr wird der Begriff der harmonischen Theilung eingeführt und im Anschluss daran einiges Hauptsächliche über Pol und Polare angeführt. Den Schluss des Buches bildet die Einführung der Involution, die zunächst auf Grund der Potenz-Eigenschaften eines Kreisbüschels eingeführt wird, aus der dann ihre andere Construction mit Hilfe des vollständigen Vierecks abgeleitet wird. Gar nicht berührt werden die Brennpunkt- und Mittelpunkt-Eigenschaften der Kegelschnitte.

Ernst Kötter.

Bibliographie

vom 16. März bis 31. Mai 1893.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der mathem.-phys. Classe der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1892. Sechs Hefte. Leipzig, Hirzel. 6 Mk.

Abhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-phys. Classe. 18. und 19. Bd. Ebendaselbst. 36 Mk.

Sitzungsberichte der mathem.-phys. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften 1892. Drei Hefte. München, Franz. 3 Mk. 60 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Classe. Abth. IIa. 101. Bd. Wien, Tempsky. 34 Mk. 70 Pf.

Publicationen des astrophysik. Observatoriums zu Potsdam. Herausgegeben von C. Vogel. Nr. 30. Helligkeitsbest. Leipzig, Engelmann i. Comm. 9 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. 27. Jahrg. Herausgegeben von R. Lehmann-Filhés und H. Seeliger. Leipzig, Engelmann. 8 Mk.

Astronomisch-nautische Ephemeriden für 1894. Herausgegeben von der nautischen Akad. in Triest, redig. von F. Anton. Triest, Schimpff. 3 Mk.

Monatshefte für Mathematik und Physik. Herausgegeben von G. v. Escherich und E. Weyr. Jahrg. 1893. Heft I—III. Wien, Eisenstein & Co. compl. 14 Mk.

Annalen der Physik u. Chemie, Beiblätter. Herausgeg. von G. u. E. WIEDEMANN. Namenreg. z. 1.—15. Bd. Zusammengest. v. F. STROBEL. Leipz., Barth. 7 Mk.

Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. Herausgegeben von J. KLEIN. 3. Jahrg. 1892. Leipzig, Mayer. 7 Mk.

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1892. 2. Heft. Herausgegeben vom königl. preuss. meteorol. Inst. durch W. v. BEZOLD. Berlin, Asher. 3 Mk.

Meteorologisches Jahrbuch der Hauptstation Bremen. II. Jahrg. Herausgegeben von BERGHOLZ. Bremen, Nössler. 3 Mk.

Reine Mathematik.

BOHL, P., Ueber die Darstellung von Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen. (Dissert.) Dorpat, Karow. 1 Mk.

MEYER, M., Untersuchung der algebr. Integrirbarkeit von linearen homogenen Differentialgleichungen vierter Ordn. mit Hilfe von Differentialinvarianten. (Dissert.) Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 20 Pf.

GÜNSCHE, R., Beitrag zur Integration der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dz}=p_0+p_1y+p_2y^2+p_3y^3.$$

(Programm.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

SCHRENTZEL, W., Ueber die Integration der Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchs'schen Classe mit drei im Endlichen gelegenen singulären Punkten. Berlin, Mayer & Müller. 2 Mk.

HELLWIG, C., Berechnung der Wurzeln cubischer und biquadr. Gleichungen, besonders im irreducibelen Falle. Leipzig, Fock. 1 Mk.

KRAFT, F., Abriss d. geometrischen Kalküls, nach Grassmann bearbeitet. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

BORGMEYER, J., Ueber den Ort der Fusspunkte der Lothe von einem Punkte auf die Strahlen einer linearen Congruenz. (Dissert.) Hildesheim, Borgmeyer. 1 Mk. 20 Pf.

FIALKOWSKI, N., Die Trisection des Winkels, mit Lineal und Zirkel ausgeführt. Wien, Halm & Goldmann. 3 Mk.

TÖPFER, H., Lehrbuch der Planimetrie. Sondershausen, Eupel. 2 Mk. 20 Pf.

DANZIG, E., Uebungsstoff zur Auflösung planimetr. Aufgaben mittelst algebr. Analysis. (Programm.) Leipzig, Fock. 1 Mk. 20 Pf.

LEONHARDT, G., Grundzüge der Trigonometrie und Stereometrie. Halle, Strien. 1 Mk. 20 Pf.

HELLER, F., Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der darstellenden Geometrie. Wien, Hölder. 80 Pf.

HERCHER, B., Lehrb. d. analyt. Geometrie f. Realsch. Leipzig, Jacobsen. 75 Pf.

Angewandte Mathematik.

KOLL, O., Theorie der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadrate nebst Anwendungen auf Geodäsie und Wassermessungen. Berlin, Springer. 10 Mk.

Rebeur-Paschwitz, E. v., Das Horizontalpendel und seine Anwendung zur Beobachtung der Richtungsänderungen der Lothlinie. Ergebnisse von Beobachtungen zu Wilhelmshaven, Potsdam, Puerto Orotava auf Teneriffa. (Aus Nova acta der k. Leop.-Carol. Akad.) Leipzig, Engelmann. 15 Mk.

Auszug aus der Nivellements der trigonom. Abthlg. der preuss. Landesaufnahme. 5. u. 6. Heft mit Nachträgen. Berlin, Mittler & S. 4 Mk. 85 Pf.

Veröffentlichung des königl. preuss. geodät. Instituts und Centralbureaus der internationalen Erdmessung. Die europäische Längengradmessung in 52^0 Breite von Greenwich bis Warschau. 1. Heft. Herausgegeben von R. Helmert. Berlin, Stankiewicz. 18 Mk.

Staude, O., Ueber d. Foucault'sche Pendel. Güstrow, Opitz & Co. 25 Pf.

Wislicenus, W., Tafeln zur Bestimmung der jährl. Auf- und Untergänge der Gestirne. Publication d. astronom. Gesellsch. Leipzig, Engelmann. 6 Mk.

Astronom. Arbeiten d. k. k. Gradmessungsbureau's. Herausgeg. von E. Weiss und R. Schram. 4. Bd. Längenbestimmungen. Leipz., Freytag i. Comm. 16 Mk.

Physik und Meteorologie.

Weber's, W., Werke, Herausgegeben von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. 3. Bd. Galvanismus und Elektrodynamik, 1. Theil, besorgt von H. Weber. Berlin, Springer. 20 Mk.

Neumann, C., Beiträge zu einzelnen Theilen der mathem. Physik, insbes. zur Elektrodynamik, Hydrodynamik, Elektrostatik und magn. Induction. Leipzig, Teubner. 10 Mk.

Boys, V., Seifenblasen. Vorlesungen über Capillarität. Uebersetzt von G. Meyer. Leipzig, Barth. 3 Mk.

Reiff, R., Elasticität und Elektricität. Freiburg i. Br., Mohr. 5 Mk.

Januschke, H., Der Aetherdruck als einheitliche Naturkraft. (Programm.) Teschen, Prochaska. 1 Mk. 80 Pf.

Grimsehl, Die magnetischen Kraftlinien in schulgemässer Behandlung. (Programm.) Hamburg, Herold. 2 Mk. 50 Pf.

Jaerisch, P., Zur Theorie der elastischen Kugelwellen mit Anwendung auf Spiegelung und Brechung. (Progr.) Hamburg, Herold. 2 Mk. 50 Pf.

Warburg, E., Lehrbuch der Experimentalphysik für Studirende. Freiburg i. Br., Mohr. 7 Mk. 60 Pf.

Müller, J., Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Mittweida, Polytechnische Buchhandlung. 7 Mk. 50 Pf.

Czapski, S., Theorie d. opt. Instrum. n. Abbe. Breslau, Trewendt. 9 Mk. 60 Pf.

Stern, P., Ergebnisse 20jähriger meteorologischer Beobachtungen zu Nordhausen am Harz. Leipzig, Fock. 1 Mk.

Schreiber, P., Das Klima des Königr. Sachsen. Publication d. königl. sächs. meteorologischen Instituts. II. Heft. Chemnitz, Bülz. 6 Mk.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1892.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Abel'sche Transcendenten.

1. Untersuchungen über Abel'sche Functionen vom Geschlechte 3. W. Wirtinger. Mathem. Annal. XL, 261.

Abzählende Geometrie.

2. Nouvelle démonstration du principe de correspondence de Cayley et Brill et méthode à la détermination des coïncidences de correspondences algébriques sur une courbe d'un genre quelconque. H. G. Zeuthen. Mathem. Annal. XL, 99.
3. Ueber das Charakteristikenproblem der Kegelschnitte. E. Study. Mathem. Annal. XL, 559. [Vergl. Bd. XXXVII, Nr. 102.]

Vergl. Geometrie (höhere) 77. Geschichte der Mathematik 108.

Analytische Geometrie der Ebene.

4. Sur un limaçon de Pascal. Bellens. Mathesis Série 2, II, 144.
5. Lieu du point d'intersection d'un certain rayon de cercle prolongé et d'une certaine tangente. Mdlle. Pompilianu. Mathesis. Série 2, II, 231.
6. Propriété d'une parabole cubique. Mdlle. Pompilianu. Mathesis Série 2, II, 103.
7. Le trifolium. H. Brocard. Mathesis Série 2, II, Supplément.
8. Engendrement d'une strophoide. Sollertinsky. Mathesis Série 2, II, 171.

Vergl. Kegelschnitte. Krümmung 168.

Analytische Geometrie des Raumes.

9. Sur les réseaux plans à invariants égaux et les lignes asymptotiques. G. Koenigs. Compt. Rend. CXIV, 55, 728. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 488.]

Vergl. Krümmung 169, 170. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

10. Sur une équation différentielle relative au calcul des perturbations. F. Tisserand. Compt. Rend. CXIV, 441.
11. Sur l'application de la méthode de M. Lindstedt au problème des trois corps. H. Poincaré. Compt. Rend. CXIV, 1305.
12. Sur la stabilité du mouvement dans un cas particulier du problème des trois corps. Coculesco. Compt. Rend. CXIV, 1339.

Vergl. Geschichte der Mathematik 91, 95.

B.

Bernoulli'sche Zahlen.

13. Verkürzte Recursionsformeln für die Bernoulli'schen Zahlen. L. Saalschütz. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 374.

Binomialcoefficienten.

14. Somme des carrés des coefficients des termes du binôme $(1+x)^n$ après Laplace (11. VIII. 1780). Mister. Mathesis. Série 2, II, 251. — De Longchamps ebenda 272.
15. Sur les coefficients binomiaux. Mandart. Mathesis Série 2, II, 228.
16. Sur les coefficients binomiaux. Cristesco. Mathesis Série 2, II, 229.

17. Trois coefficients binomiaux consécutifs en proportion arithmétique. Soons. Mathesis Série 2, II, 119.

C.

Combinatorik.

18. Sur l'analyse combinatoire circulaire. E. Jablonski. Compt. Rend. CXIV, 904.
Vergl. Binomialcoefficienten. Substitutionen 245. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zahlentheorie 266.

Cubatur.

19. Formules pour le jaugeage des tonneaux. P. Mansion. Mathesis Ser. 2, II, 14.
20. Mener parallélement à la base d'un triangle une droite telle, qu'en faisant tourer le triangle autour de sa base, les volumes engendrés par les deux parties de la figure soient équivalents. Solution élémentaire. P. Mansion. Mathesis Serie 2, II, 137.
Vergl. Schwerpunkt 241.

D.

Determinanten.

21. Ein Satz über orthosymmetrische und verwandte Determinanten aus den fundamentalen symmetrischen Functionen. H. Brunn. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 291.
22. Remarques sur un continuant. E. Cesaro. Mathesis Série 2, II, 5. [Vergl. Bd. XXXVII, Nr. 33.]
Vergl. Geschichte der Mathematik 105.

Differentialgleichungen.

23. De l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque. Riquier. Compt. Rend. CXIV, 731.
24. Sur les intégrales des équations différentielles du premier ordre, possédant un nombre limité de valeurs. P. Painlevé. Compt. Rend. CXIV, 107, 280.
25. Sur les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre. L. Autonne. Compt. Rend. CXIV, 407.
26. Zur Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen. J. Horn. Mathem. Annal. XL, 527. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 322.]
27. Sopra una classe di equazioni differenziali lineari riducibili. C. Bigiavi. Annali mat. Ser. 2, XIX, 97.
28. Sugl' integrali polidromi delle equazioni algebrico-differenziali del primo ordine. G. Vivanti. Annali mat. Ser. 2, XIX, 29.
29. Ricerca del rapporto frai discriminanti di un'equazione algebrico-differenziale di 1^0 ordine e della sua primitiva completa per mezzo della teoria delle curve piane razionali. G. Torelli. Annali mat. Ser. 2, XIX, 254.
30. Ueber den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Differentialgleichung. F. Klein. Mathem. Annal. XL, 125.
31. Intégrer l'équation $y(1+2y'^2)+xy'=0$. H. Brocard. Mathesis Série 2, II, 196.
32. Intégrer l'équation $(1-x^2)y'=xy-y^2$. Catalan. Mathesis Série 2, II, 47. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 56.]
33. Sur la courbe $2a^2=\varrho\left(\varrho'+\frac{\varrho^2}{\varrho}\right)$. H. Brocard. Mathesis Série 2, II, 196.
34. Zum Fundamentalsatz über die Existenz von Integralen partieller Differentialgleichungen. G. Mie. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 151, 193.
35. Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. E. Picard. Compt. Rend. CXIV, 805. [Vergl. Bd. XXXVII, Nr. 324.]
36. Anwendung von Sätzen über partielle Differentialgleichungen auf die Theorie der Orthogonalsysteme, insbesondere die der Ribaucour'schen cyklischen Systeme. A. V. Bäcklund. Mathem. Annal. XL, 194.
Vergl. Mechanik.

Differentialquotient.

37. Sur la définition de la dérivée. G Peano. Mathesis Ser. 2, II, 12.

Dreiecksgeometrie.

38. Sur quelques propriétés du triangle. E. Bertrand. Mathesis Série 2, II, 130. — E. Lemoine ebenda 252.

39. Notes de géométrie récente. Mdme. Prime. Mathesis Serie 2, II, 194.
40. Sur une série de triangles dérivant des trois droites tirées d'un point à trois points donnés. J. Neuberg. Mathésis Série. 2, II, 22, 56.
41. Rapport donné des puissances d'un point cherché par rapport à des cercles variables avec le point. Emmerich. Mathesis Série 2, II, 77.
42. Sur les Brocardiennes d'une droite par rapport à une autre droite. E. Lemoine. Mathesis Série 2, II, 252.
43. Sur quelqués théorèmes dependant de l'antiparallélisme. Déprez. Mathesis Série 2, II, 279.
44. Droite passant par la projection du sommet d'un triangle sur sa base et par le sommet du second triangle de Brocard. Déprez. Mathesis Série 2, II, 257. — A. Droz ebenda 258.

Vergl. Hyperbel 131.

E.

Elasticität.

45. Sur la théorie de l'élasticité. H. Poincaré. Compt. Rend. CXIV, 385.
46. Sur la répartition des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement. Flamant. Compt. Rend. CXIV, 1465.
47. Des perturbations locales que produit au dessous d'elle une forte charge, répartie uniformément le long d'une droite normale aux deux bords, à la surface supérieure d'une poutre rectangulaire et de longueur indéfinie posée de champ soit sur un sol horizontal, soit sur deux appuis transversaux équidistants de la charge. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXIV, 1510.

Elektricität.

48. Ein Widerspruch in Edlund's Theorie der Elektricität. Ruoss. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 125.
49. Application de la théorie des lignes de force à la démonstration d'un théorème d'électrostatique. L. de la Rive. Compt. Rend. CXIV, 740.
50. Bewegung eines materiellen mit Elektricität geladenen Theilchens unter der Einwirkung eines ruhenden Centrums bei Giltigkeit des Weber'schen Gesetzes. E. Ritter. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 8.
51. Examen de la possibilité d'une action réciproque entre un corps électrisé et un aimant. Vaschy. Compt. Rend. CXIV, 1474.
52. Rapport sur un Mémoire présenté par M. Blondlot et relatif à la propagation des oscillations hertziennes. H. Poincaré. Compt. Rend. CXIV, 645.
53. Sur la propagation des oscillations hertziennes. H. Poincaré. Compt. Rend. CXIV, 1046, 1229.

Ellipse.

54. Ellipse décrite au moyen d'un parallélogramme articulé. Emmerich, Lemoine, Fraipont, Déprez etc. Mathesis Série 2, II, 235.
55. Ellipse enveloppe de la droite qui réunit les deux points B, C des côtés d'un angle A donné tels que $\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{2}{p^2}$. Denys & Mandart. Mathesis Série 2, II, 149. — Droz ebenda 149.
56. Une ellipse donnée glisse dans son plan de manière à passer par deux points fixes. Quel est le lieu du centre? Quint. Mathesis Série 2, II, 170.
57. Les angles sous les quels on voit d'un même point d'une ellipse deux diamètres conjugués, possèdent des cotangentes dont la somme des carré's est constante. Déprez etc. Mathesis. Serie 2, II, 256.
58. Propriété des points de rencontre d'une tangente à une ellipse avec le cercle principal. Mlle. de Haas etc. Mathesis Série 2, II, 169.

Elliptische Transcendenten.

59. Die Legendre'sche Relation. L. Kronecker. Berl Akad. Ber. 1891, 323, 343, 447, 905.
60. Neue Beiträge zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen. R. Fricke. Mathem. Annal. XL, 469.
61. Sul rapporto $\frac{\eta'}{\eta}$ considerato come funzione del rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ dei periodi delle funzioni ellitiche di Weierstrass. C. Bigiavi. Annali mat. Ser. 2, XIX, 261.

62. Ueber eine neue Methode zur Entwickelung der Theorie der Sigmafunctionen mehrerer Argumente. E. Jahnke. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 178.
Vergl. Geschichte der Mathematik 110.

F.

Formen.

63. Algebraische Reduction der Schaaren quadratischer Formen. L. Kronecker. Berl. Akad. Ber. 1891, 9, 33. [Vergl. Bd. XXXVI Nr. 326.]
Vergl. Invariantentheorie 136, 137.

Functionen.

64. Zum Beweise eines Fundamentalsatzes der Theorie der algebraischen Functionen. M. Nöther. Mathem. Annal. XL, 140.
65. Symbolische Zahlen und Doppelzahlen. M. Philippoff. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 298.
66. Sur la théorie des fonctions Fuchsiennes. L. Schlesinger. Compt. Rend. CXIV, 1100, 1409.
67. Sur les fonctions entières de la forme $e^{G(x)}$. Hadamard. Compt. Rend. CXIV, 1053.
68. Un théorème sur les fonctions harmoniques. G. D. d'Arone. Compt. Rend. CXIV, 1055.
69. Ueber den Begriff des functionentheoretischen Fundamentalbereichs. F. Klein. Mathem. Annal. XL, 130.
70. Sur un théorème de Jacobi. Mdme. Prime. Mathesis Série 2, II, 227.
71. Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres. M. Hamy. Compt. Rend. CXIV. 993.
72. Ueber den Fuchs'schen Grenzkreis. W. Anissimoff. Mathem. Annal. XL, 145.
73. Sur une classe de fonctions analytiques d'une variable dépendant de deux constantes réelles arbitraires. E. Picard. Compt. Rend. CXIV, 1310.
74. Sulle funzioni a due variabili reali, le quali crescono o decrescono sempre nel verso positivo di ciascuno degli assi in un pezzo di piano a distanza finita. G. Ascoli. Annali mat. Ser. 2, XIX, 289.
Vergl. Abel'sche Transcendenten. Bernoulli'sche Zahlen. Binomialcoefficienten. Differentialgleichungen. Differentialquotient. Elliptische Transcendenten. Formen. Grenzwerthe. Imaginäres. Invariantentheorie. Irrationalzahlen. Kettenbrüche. Mittelwerthe. Reihen. Substitutionen. Transformationsgruppen.

G.

Geodäsie.

75. Des coordonnées rectangulaires. Hatt. Compt. Rend. CXIV, 1248.

Geometrie (höhere).

76. Theorie der Elemententripel einstufiger Elementargebilde. B. Klein. Annal. mat. Ser. 2, XIX, 39, 233. [Vergl. Bd. XXXVI Nr. 359.]
77. Le corrispondenze univoche sulle curve ellitiche di ordine n normali di uno S_{n-1}. F. Amodeo. Annali mat. Ser. 2, XIX, 1, 145.
78. Sur les courbes algébriques. M. d'Ocagne. Mathesis Série 2, II, 100.
79. Zur Erzeugung der rationalen Raumcurven. W. Stahl. Mathem. Annal. XL, 1. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 97.]
80. Kleine Beiträge zu den Anwendungen der Methoden von Grassmann. R. Mehmke. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 305.
81. Zwei Sätze über collineare Ebenen. Beyel. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 59.
82. Jacob Steiner's Sätze über die Mitten der Abschnitte, welche eine Curve auf einer Geraden bestimmt. B. Sporer. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 340.
83. Sur les points d'inflexion d'une courbe. Absolonne, Bellens, Cristesco, Déprez. Mathesis Série 2, II, 52. — Morel ebenda 53.
84. Construction einer Tangente in einem Punkte einer Curve dritten Grades. B. Sporer. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 191.
85. Cas particuliers du paradoxe de Cramer. Socoloff. Mathesis Série 2, II, 193.
86. Homologie de quatre triangles. Déprez, Listray. Mathesis Série 2, II, 51.
Vergl. Abzählende Geometrie. Kegelschnitte. Krümmung. Tetraeder. Topologie.

Geschichte der Mathematik.

87. Studo italiani sulla storia della matematica. Ant. Favaro. Biblioth. mat. 1892, 67.
88. Progrès successifs des sciences mathématiques chez des peuples de l'Europe. V. Bobynin. Biblioth. math. 1892, 110.
89. Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani. G. Loria. Biblioth. math. 1892, 97.
90. Sur l'oeuvre des Grecs dans le développement des mathématiques. V. Bobynin. Biblioth. math. 1892, 1.
91. Unsere Kenntniss von alten Erd- und Himmelsgloben. A. Wittstein. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII. Hist.-lit. Abth. 201.
92. Simplicius als Commentator des Euklid. M. Steinschneider. Biblioth. math. 1892, 7. — R. C. Besthorn ebenda 65.
93. Psellus sur Diophante. P. Tannery. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII. Hist.-lit. Abth. 41.
94. Nesselmann's Anmerkungen zu Diophant. M. Curtze. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII. Hist.-lit. Abth. 121, 161.
95. Historisch-astronomische Fragmente aus der orientalischen Literatur. A. Wittstein. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII. Supplem. 89.
96. Das Mathematiker-Verzeichniss im Fihrist. H. Suter. Zeitschr. Mathem. Phys XXXVII. Supplem. 1.
97. Einiges aus Nassir ad-Din's Euklid-Ausgabe. H. Suter. Biblioth. math. 1892, 3.
98. Die arabischen Bearbeiter des Almagest. M. Steinschneider. Biblioth. math. 1892, 53.
99. Bemerkungen zur Rhythmomachie. E. Wappler. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII. Hist.-lit. Abth. 1.
100. Die von Wilhelm von Moerbek benutzten Handschriften. J. L. Heiberg. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII. Hist.-lit. Abth. 81.
101. Sur une formule de Nicolas de Cusa. E. Lampe. Mathesis Série 2, II, 230.
102. Bibliographie relative au problème géométrique de Fermat de trouver le point de somme minima des distances à trois points donnés. J. Neuberg. Mathesis Série 2, II, 162. — Vigarié ebenda 274
103. Leibniz und Pascal. K. J. Gerhardt. Berl. Akad. Ber. 1891, 1053.
104. Leibniz in London. K. J. Gerhardt. Berl. Akad. Ber. 1891, 157.
105. Leibniz über die Determinanten. K. J. Gerhardt. Berl. Akad. Ber. 1891, 407.
106. Ueber die Zurückführung der Schwere auf Absorption und die daraus abgeleiteten Gesetze. C. Isenkrahe. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII. Supplem. 161.
107. Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini. H. Burkhardt. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, Supplem. 119.
108. Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve. Cor. Segre. Biblioth. math. 1892, 33.
109. Note historique sur la théorie des ensembles. G. Vivanti. Biblioth. math. 1892, 9.
110. Ueber die Zeit und die Art der Entstehung der Jacobi'schen Thetaformeln. L. Kronecker. Berl. Akad. Ber. 1891. 653.
111. Sur les découvertes mathématiques de Wronski. S. Dickstein. Biblioth. Math. 1892, 48, 85.
112. Sur les travaux de M. de Caligny né le 31. V. 1811. Boussineq. Compt. Rend. CXIV, 799.
113. Sonja Kovalevsky (15. I. 1850 — 10. II. 1891). A. C. Leffler. Annali mat. Ser. 2, XIX, 201.
114. Zur Erinnerung an Paul Günther (2. IV. 1867 — 27. IX. 1891). A. Gutzmer. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII. Hist.-lit. Abth. 46.
115. Nécrologe de Leopold Kronecker (7. XII. 1823 — 29. XII. 1891). P. Mansion und J. Neuberg. Mathesis Sér. 2, II, 18. — E. Lampe ebenda 136.
116. Sur les trauvaux de Mr. Kronecker. Ch. Hermite. Compt. Rend. CXIV, 19.
117. Sir Georges Biddel Airy (27. VII. 1801 — 2. I. 1892). Faye. Compt. Rend. CXIV, 91.
118. Nécrologue de Louis-Philippe Gilbert (7. II. 1832. — 4. II. 1892). P. Mansion und J. Neuberg. Mathesis Série 2, II, 57.
119. Léon Lalanne décédé eu Mars 1892. Jos. Bertrand. Compt. Rend. CXIV, 569.

Vergl. Irrationalzahlen 143.

Gleichungen.

120. Neuer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. K. Weierstrass. Berl. Akad. Ber. 1891, 1085.
121. Die trinomischen und quadrinomischen Gleichungen in elementarer Behandlungsweise. W. Heymann. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 90.
122. Ordre de multiplicité d'une racine multiple de $f[f(x)] - x = 0$ et simple en même temps de $f(x) - x = 0$. Soons. Mathesis Série 2, II, 47. — Cesaro ebenda 160. — Lemoine ebenda 276.
123. Sur une équation dont toutes les racines sont réelles. J. Neuberg. Mathesis. Série 2, II, 272.
124. Sur une extension du théorème de Sturm. E. Phragmén. Compt. Rend. CXIV, 205, 440.
125. Sur les racines de $x^4 + [2d(d-a) - b]x^2 + d^2[(d-a)^2 - b] = 0$, où d'est un paramètre variable de $-\infty$ à $+\infty$. Joachimescu. Mathesis. Série 2, II, 233.
126. Resoudre l'équation $(x-a)^3(x+a-2b) - (a-b)^3(a+b-2x) = 0$. H. Brocard etc. Mathesis Série 2, II, 211.
127. Démontrer que l'expression $\frac{1}{2} S a^2(b-c)^2(ab+ac-2bc)^2$ est un carré parfuit. E. Gelin. Mathesis. Série 2, II, 122. — Quint ebenda 123. — Denys und Decamp ebenda 123.

Grenzwerthe.

128. Limite de la racine $m^{\text{ième}}$ d'une variable. P. Mausion. Mathesis. Serie 2, II, 39.

H.

Hydrodynamik.

129. Sur le calcul théorique approché du débit d'un orifice en mince paroi. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXIV, 704, 807, 868.
130. Calcul de la diminution qu'éprouve la pression moyenne, sur un plan horizontal fixe, à l'intérieur du liquide pesant remplissant un bassin et que viennent agiter des mouvements quelconques de houle ou da clapotis. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXIV, 937.

Hyperbel.

131. Sur l'hyperbole de Kiepert. J. Neuberg. Mathesis Série 2, II, 241.
132. Hyperbole passant par deux points donnés et par les points de contact des tangentes menées des premiers points à une conique donnée. Déprez und Bellens. Mathesis Serie 2, II, 253.
133. Hyperbole lieu des centres des cercles circonscrits à des triangles ayant même périmètre et un angle commun. Mathesis Série 2, II, 246.

I.

Imaginäres.

134. Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici. Cor. Segre. Mathem. Annal. XL, 413.
135. Sui gruppi di sostituzioni lineari con coefficienti appartenenti a corpi quadratici immaginari. L. Bianchi. Mathem. Annal. XL, 332.

Invariantentheorie.

136. Ueber eine Methode zur Aufstellung eines vollständigen Systemes bloser Invarianten beliebig vieler quadratischen Formen jeder Stufe. Joh. Kleiber. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 79.
137. Bestimmung einer binären Form aus Anfangsgliedern ihrer Covarianten. P. Gordan. Mathem. Annal. XL, 503.
138. Ueber Covarianten ebener Collineationen. P. Muth. Mathem. Annal. XL, 89.
139. Sulle condizioni invariantive perchè due quintiche binarie abbiano quattro radici comuni. L. Berzolari. Annali mat. Ser. 2, XIX, 269.
140. Sur les développements canoniques en séries dont les coefficients sont les invariants différentiels d'un groupe continu. A. Tresse. Compt. Rend. CXIV, 1256.

141. Sur les invariants différentiels d'une surface par rapport aux transformations conformes de l'espace. A. Tresse. Compt. Rend. CXIV, 948.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes.

Irrationalzahlen.

142. Ueber die Einführung der irrationalen Zahlen. M. Pasch. Mathem. Annal. XL, 149.
143. Sur la définition de la racine carrée d'un nombre non carré. C. Le Paige. Mathesis Série 2, II, 273.
Vergl. Grenzwerthe.

K.

Kegelschnitte.

144. Abbildung der Mannigfaltigkeit aller Kegelschnitte einer Ebene auf einen Punktraum. E. Study. Mathem. Annal. XL, 551.
145. Ueber Systeme von Kegelschnitten. E. Study. Mathem. Annal. XL, 563.
146. Relations métriques dans les courbes du second degré. Cl. Servais. Mathesis Série 2, II, 177.
147. Schnittpunkte einer Geraden mit einer Curve zweiter Ordnung und Tangenten aus einem Punkte. Beyel. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 316.
148. Sur quelques problèmes concernant le double contact et le contact du troisième ordre des coniques. V. Retali. Mathesis Série 2, II, 178, 219.
149. Sur le produit des axes principaux des coniques touchant trois ou quatre droites données. Ph. Molenbrock. Mathesis Série 2, II, 33.
150. Propriété d'une conique inscrite dans un parallelogramme. Absolonne. Mathesis Série 2, II, 78.
151. Lieu des sommets d'un certain quadrilatère circonscrit à une conique. Déprez. Mathesis Série 2, II, 30. — Morel ebenda 31.
152. Sur une propriété commune à trois groupes de deux polygones inscrits, circonscrits ou conjugués à une une même conique. P. Serret. Compt. Rend. CXIV, 1254, 1343.
153. Discussion d'une certaine conique. Laisant. Mathesis Série 2, II, 27.
Vergl. Abzählende Geometrie 3. Dreiecksgeometrie. Ellipse. Hyperbel. Invariantentheorie 138. Kreis. Krümmung 171. Parabel.

Kettenbrüche.

154. Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche. S. Pincherle. Annali mat. Ser. 2, XIX, 75.

Kinematik.

155. Ein Beitrag zur systematischen Behandlung der ebenen Bewegung starrer Systeme. Rodenberg. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 218, 311.
156. Ueber die Kreisungspunkte einer complan bewegten Ebene. M. Grübler. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 35, 192.
157. Ueber die Bewegung eines starren ebenen Systems durch fünf unendlich benachbarte Lagen. R. Müller. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 129.
158. Ueber Bewegung starrer Systeme im Fall cylindrischer Achsenfläche. A. Schönfliess. Mathem. Annal. XL, 317.
159. Ueber die Tripel entsprechender Krümmungsmittelpunkte, welche bei der ebenen Relativbewegung dreier starrer Systeme auftreten. Rodenberg. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 366.
160. Construction der Burmester'schen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck. R. Müller. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 213.
161. Étude sur une nouvelle transformation dite transformation continue. E. Lemoine. Mathesis Série 2, II, 58, 81, 115, 264.
Vergl. Ellipse 54.

Kreis.

162. Circonférence ayant pour diamètre la droite menée du centre d'un cercle donné à l'orthocentre d'un triangle inscrit. Déprez. Mathesis Série 2, II, 118.
163. Sur un quadrilatère inscriptible. Listray. Mathesis Série 2, II, 31.
164. Sur deux cordes de produit constant d'un point fixe d'une circonférence. Sollertinsky. Mathesis Série 2, II, 123.

165. Mener une tangente telle à une circonférence que le produit de ses distances à deux points de la circonférence soit donné. Sollertinsky etc. Mathesis Série 2, II, 233.
166. Mener d'un point donné une sécante commune à deux circonférence dont la partie interceptée entre les deux circonférences soit vue d'un point donné sous un angle donné. Déprez. Mathesis Série 2, II, 26. — Sollertinsky ebenda 47.
167. Sur trois circonférences concourrant en un même point. Listray. Mathesis. Série 2, II, 278.
Vergl. Dreiecksgeometrie.

Krümmung.

168. Sur l'aberration de courbure. Cl. Servais. Mathesis Serie 2, II, 129.
169. Sur une courbe algébrique réelle à torsion constante. E. Fabry. Compt. Rend. CXIV, 158.
170. Sulla determinazione delle linee di cui il rapporto della curvatura alla torsione è una funzione nota dell' arco. G. Pirondini. Annali mat. Ser. 2, XIX, 213.
171. Conique touchant une courbe et possédant un rayon de courbure quadruple de celui de la courbe. Calisse. Mathesis Série 2, II, 49. — Bruyr ebenda 49.
172. Ueber die geodätische Krümmung der auf einer Fläche gezogenen Curven und ihre Aenderung bei beliebiger Transformation der Fläche. R. Mehmke. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 186.
173. Sui sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie con un sistema di linee di curvatura piane. L. Bianchi. Annali mat. Ser. 2, XIX, 177.
174. Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmaasses. Ruoss. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 378.
175. Ueber diejenigen Berührungstransformationen, welche das Verhältniss der Krümmungsmaasse irgend zwei sich berührender Flächen im Berührungspunkte unverändert lassen. G. Vivanti. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 1.

L.

Loxodrome.

176. Sur les propriétés de la loxodromie d'un cône de révolution et leur application au ressort conique. H. Resal. Compt. Rend. CXIV, 147, 254, 512.

M.

Maxima und Minima.

177. Maximum de l'angle que deux tangentes à un cercle font sous certaines conditions. Sollertinsky. Mathesis Série 2, II, 168.
Vergl. Geschichte der Mathematik 102. Optik 214, 218.

Mechanik.

178. Sur les considérations d'homogénéité en physique. A. Vaschy. Compt. Rend. CXIV, 1416.
179. Ueber das Virial der Kräfte. N. N. Pirogow. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 257.
180. Sur les transformations en mécanique. P. Painlevé. Compt. Rend. CXIV, 901, 1104, 1412.
181. Sur les intégrales de la dynamique. P. Painlevé. Compt. Rend. CXIV, 1168.
182. Sur un problème d'analyse qui se rattache aux équations de la dynamique. R. Liouville. Compt. Rend. CXIV, 974.
183. Sur les équations de la dynamique. R. Liouville. Compt. Rend. CXIV, 1171.
184. Ueber Saitenschwingungen. O. Krigar-Menzel & A. Raps. Berl. Akad. Ber. 1891, 613.
185. Extension des équations de Lagrange au cas du frottement de glissement. P. Appell. Compt. Rend. CXIV, 331.
186. Sur l'impossibilité de certains mouvements. A. de Saint-Germain und L. Lecornu. Compt. Rend. CXIV, 526.
187. Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Fr. Kötter. Berl. Akad. Ber. 1891, 47.

188. Du tautochronisme dans un système matériel. P. Appell. Compt. Rend. CXIV, 996.
189. Sur le mouvement du pendule conique à tige. De Sparre. Compt. Rend. CXIV, 528.
190. Sur la résistance et les faibles déformations des ressorts en hélice. H. Resal. Compt. Rend CXIV, 37, 99, 146, 194, 512.
191. Sur une méthode pour la détermination des éléments mécaniques des propulseurs hélicoïdaux. S. Drzewiecki. Compt. Rend. CXIV, 820.
192. Sur une interprétation géométrique de l'expression de l'angle de deux normales infiniment voisines d'une surface, et sur son usage dans les théories du roulement des surfaces et des engrenages sans frottement. H. Resal. Compt. Rend. CXIV, 381, 700. — A. Rateau ebenda 580.
193. Sur les déformations élastiques maximums des arcs métalliques. Bertrand de Fontvioland. Compt. Rend. CXIV, 410.
194. Équation approchée de la trajectoire d'un projectile daus l'air lorsqu'on suppose la résistance proportionnelle à la quatrième puissance de la vitesse. De Sparre. Compt. Rend. CXIV, 1172, 1259.
195. Le mouvement des êtres microscopiques analysé par la chronophotographie. Marey. Compt. Rend. CXIV, 989.

Vergl. Astronomie. Elasticität. Elektricität. Geschichte der Mathematik 106. Hydrodynamik. Kinematik. Loxodrome. Mehrdimensionale Geometrie. Optik. Potential. Schwerpunkt.

Mehrdimensionale Geometrie.

196. Ueber das analytische Problem der Rotation eines starren Körpers im Raume von vier Dimensionen. F. Schottky. Berl. Akad. Ber. 1891, 227.

Metrologie.

197. Sur la précision des comparaisons d'un mètre à bouts avec un mètre à traits. Bosscha. Compt. Rend. CXIV, 950. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 475.]

Mittelwerthe.

198. Ueber die Grössenfolge einer Reihe von Mittelwerthen. H. Brunn. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 60.

O.

Oberflächen.

199. Sur une interprétation nouvelles du théorème d'Abel. S. Lie. Compt. Rend. CXIV, 277.
200. Sur les relations qui existent autre les éléments infinitésimaux de deux surfaces polaires réciproques. A. Demoulin. Compt. Rend. CXIV, 1102.
201. Sur le problème général de la déformation des surfaces. L. Raffy. Compt. Rend. CXIV, 1407.
202. Alcuni teoremi sulle superficie sviluppabili. F. Pirondini. Annali mat. Ser. 2, XIX, 247.
203. Sur les congruences dout la surface moyenne est un plan. C. Guichard. Compt. Rend. CXIV, 729.
204. De la loi de correspondance des plans tangents dans la transformation des surfaces par symétrie courbe. S. Mangeot. Compt. Rend. CXIV, 1463.
205. Sulle sestiche di contatto alla superficie di Kummer. E. Pascal. Annali mat. Ser. 2, XIX, 159.
206. Sur les lignes asymptotiques du conoïde $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. H. Brocard. Mathesis Série 2, II, 163.
207. Nouvelle surface engendrée au moyen d'une surface $F(x, y, z) = 0$ donnée. Absolonne. Mathesis Série 2, II, 146.
208. Trouver l'équation des surfaces telles que si, par un point M de l'une d'elles, on mène la normale MP terminée au plan des xy, la longueur MP soit égale à la distance OP du point P à l'origine des coordonnées. H. Brocard. Mathesis Série 2, II, 165.
209. Le Point P étant la projection d'un point M d'une surface sur le plan des xy et le point N étant la trace de la normale en M sur le même plan,

quelle doit être la surface pour que l'angle NOP soit constant? H. Brocard. Mathesis Série 2, II, 197.

Vergl. Differentialgleichungen 36. Krümmung 172, 173, 174, 175.

Oberflächen zweiter Ordnung.

210. Zur Gruppe der acht harmonisch zugeordneten Flächen zweiten Grades. G. Kober. Mathem. Annal. XL, 153. [Vergl. Bd. XXXV Nr. 652.]
211. Théorie des plans hypercycliques des surfaces du second degré. Jos. Gillet. Mathesis Série 2, II, 153, 180, 223.
212. Construction des quadriques qui ont un contact du deuxième ordre avec une surface. S. Mangeot. Mathesis. Série 2, II, 249.
213. Intersection d'une sphère avec une surface du deuxième ordre. Mandart, Quint, Denys. Mathesis Série 2, II, 210.

Vergl. Sphärik.

Optik.

214. Kürzeste Linien im Farbensystem. H. v. Helmholtz. Berl. Akad. Ber. 1891, 1071.
215. Sur un mode anormal de propagation des ondes. H. Poincaré. Compt. Rend. CXIV, 16.
216. Sur l'aplanétisme. A. Broca. Compt. Rend. CXIV, 168.
217. Sur l'achromatisme. A. Broca. Compt. Rend. CXIV, 216.
218. Die kleinste Ablenkung im Prisma. A. Kurz. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 317.
219. Der fragwürdige dritte Regenbogen. A. Kurz. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 318.
220. Sur la méthode Doppler-Fizeau. Moessard. Compt. Rend. CXIV, 1471.
221. Bemerkung zu einer dioptrischen Construction. G. Helm. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 123.

P.

Parabel.

222. Propriété du triangle formé par les tangentes d'une parabole dans trois points dont les normales se rencontrent dans un point commun. Sollertinsky. Mathesis Série 2, II, 28. — Déprez ebenda 29.
223. Étant donnée une parabole P, on demande l'enveloppe des paraboles P', qui ont même foyer que P et pour directrice une tangente de P. V. Jamet. Mathesis Série 2, II, 172.
224. Parabole enveloppe d'une droite dans un angle donné. Quint etc. Mathesis. Série 2, II, 236. — Droz, Mandart ebenda 237. — Déprez ebenda 238.
225. Sur deux paraboles circonscrites à un triangle sous certaines conditions. Sollertinsky. Mathesis Serie 2, II, 127.
226. Engendrement d'une cissoide, d'une hypocycloide, d'une quintique et d'une parabole sémicubique au moyen de deux paraboles. Cristesco. Mathesis Série 2, II, 201.

Planimetrie.

227. Eine Verallgemeinerung des Pythagoräischen Satzes. Schönemann. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 127.
228. Einige Sätze über reguläre Polygone. B. Sporer. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 25.
229. Construction de la moyenne proportionnelle entre deux longueurs données. L. Collette. Mathesis Série 2, II, 192. — E. Catalan ebenda 250. — E. Lemoine ebenda 275.
230. Sur quelques problèmes de géométrie. Delahaye. Mathesis Série 2, II, 157.
231. Démonstration fallacieuse d'une proposition absurde. W. W. Rouse Ball. Mathesis Série 2, II, 161.

Vergl. Dreiecksgeometrie. Transformationsgruppen 252.

Potential.

232. Die Clausius'schen Coordinaten. L. Kronecker. Berl. Akad. Ber. 1891, 881.

R.

Rechnen.

233. Rapports de la commission chargée de l'examen du calculateur Inaudi. Charcot. Compt. Rend. CXIV, 1329. — Darboux ebenda 1335.

Reihen.

234. Sur la somme des termes d'une progression arithmétique. L. Collette. Mathesis Série 2, II, 160.
235. Sur quelques suites finies. Verniory. Mathesis Serie 2, II, 217.
236. Sur les séries à termes positifs. V. Jamet. Compt. Rend. CXIV, 57.
237. Sur la convergence de quelques séries. E. Cesaro. Mathesis Série 2, II, 125.
238. Sommation de quelques séries convergentes. Verniory. Mathesis Série 2, II, 265.
239. Sur la série hypergéométrique. A. Markoff. Mathem. Annal. XL, 313. — Compt. Rend. CXIV, 54.

Vergl. Invariantentheorie 140.

S.

Schwerpunkt.

240. Jacob Steiners Sätze über den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte einer Geraden und einer algebraischen Curve. B. Sporer. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 65.
241. Erweiterung der Guldin'schen Regel. P. B. Richter. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 172.

Sphärik.

242. Sur la courbe de Viviani. Mandart. Mathesis Série 2, II, 210. — Déprez ebenda 256.
243. Aire d'une figure tracée sur une sphère et formée d'arcs de petits cercles. C.-E. Wasteels. Mathesis Série 2, II, 105.

Stereometrie.

244. Ueber einen stereometrischen Satz von Schlömilch. C. Hossfeld. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 382.

Vergl. Tetraeder.

Substitutionen.

245. Ueber die Zahl der verschiedenen Werthe, die eine Function gegebener Buchstaben durch Vertauschung derselben erlangen kann. A. Bochert. Mathem. Annal. XL, 156. [Vergl. Bd. XXXV Nr. 696.]
246. Ueber die Classe der transitiven Substitutionsgruppen. A. Bochert. Mathem. Annal. XL, 176.
247. Sur les groupes discontinus de substitutions non linéaires à une variable. P. Painlevé. Compt. Rend. CXIV, 1345.
248. Die einfachen Gruppen im ersten und zweiten Hundert der Ordnungszahlen. O. Hölder. Mathem. Annal. XL, 55.

Vergl. Imaginäres 135.

T.

Tetraeder.

249. Sur les trois quadrilatères gauches dans un tétraèdre. Sollertinsky. Mathesis Série 2, II, 259. — Droz ebenda 260. — Emmerich ebenda 261.
250. Ueber Tetraederpaare. P. Muth. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 117.

Topologie.

251. Topologische Betrachtungen. H. Brunn. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 106.

Transformationsgruppen.

252. Sur les fondements de la géométrie. S. Lie. Compt. Rend. CXIV, 461.
253. Sur une application de la théorie des groupes continus à la théorie des fonctions. S. Lie. Compt. Rend. CXIV, 334.

Vergl. Geschichte der Mathematik 107. Invariantentheorie 140, 141.

Trigonometrie.

254. Sur trois expressions égales entre elles, l'égalité deux d'entre elles étant connue. J. Neuberg. Mathesis Série 2, II, 207.
255. Vérification de l'identité de certaines expressions contenant des produits de tangentes. Emmerich. Mathesis Série 2, II, 212.
256. Transformation d'une relation entre deux cosinus en produit de trois tangentes. Joachimescu. Mathesis Série 2, II, 55.

Vergl. Geschichte der Mathematik 101.

W.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

257. Sur un théorème du calcul des probabilités. Jos. Bertrand. Compt. Rend. CXIV, 701.
258. De l'accélération de la mortalité en France. Delauney. Compt. Rend. CXIV, 1348.
259. Sur la détermination du point le plus probable donné par une série de droites non convergentes. M. d'Ocagne. Compt. Rend. CXIV, 1415.

Z.

Zahlentheorie.

260. Sur la distribution des nombres premiers. V. Stanievitch. Compt. Rend. CXIV, 109. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 570.]
261. Sur la distribution des nombres premiers. E. Phragmén. Compt. Rend. CXIV, 337.
262. Neue Grundlagen einer allgemeinen Zahlenlehre. J. Kraus. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 321.
263. Bemerkungen zu einem von Herr Bachmann veröffentlichten Satz. J. Kraus. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 190. [Vergl. Bd. XXXVII, Nr. 262.]
264. Kriterien der Theilbarkeit dekadischer Zahlen. G. Speckmann. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 58, 128. — R. H. van Dorsten ebenda 58, 192. — K. Haas ebenda 63. — J. Dörr ebenda 383.
265. Caractères de divisibilité. E. Gelin. Mathesis. Série 2, II, 65, 93.
266. Sur la somme des produits p à p des n premiers nombres entiers. Baudran. Mathesis Série 2, II, 141.
267. Ueber die Gleichung $x^p + y^p = z^p$. Zeitschr. Mathem. Phys. XXXVII, 57. — Schumacher ebenda 64. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 269.]
268. Résoudre le système d'équations $(x+y)(x-y)^2 = (y+z)(y-z)^2 = (z+x)(z-x)^2$. Emmerich. Mathesis Série. 2, II, 121.

Vergl. Formen. Geschichte der Mathematik 93, 94.

Historisch-literarische Abtheilung.

Der V. Band des Katalogs der arabischen Bücher der vicekoniglichen Bibliothek in Kairo.

Aus dem Arabischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen

von

Dr. Heinrich Suter,
Professor am Gymnasium zu Zürich.

Schluss.*

Abtheilung: Astronomie.

1. Sphärische (beobachtende) Astronomie.

ب (Bâ).

Al barâhîn al-kaṭ'ijja (die kategorischen Beweise) für die Nichtexistenz der Rotation der Erdkugel[1], von **Selîm al-Jâs al-Ḥamwî ad-Dimischkî al-Miṣrî** [lebt jetzt 1307 noch]. Ein Band, gedruckt in der Druckerei des Verfassers, genannt die Druckerei al-kaukab asch-scharkî (der östliche Stern), in Alexandria, 1876. A.-N. 2. H.-N. 4260.

ح (Ḥâ).

Hâschijat al-bardschendî (der Bardschendi'sche Anhang) zum Commentar des Maulâ Schaich **Mûsâ ben Maḥmûd**[2], bekannt unter dem Namen **Ḳâḍî-Zâdeh ar-Rûmî** [eines der Gelehrten des 9. Jahrh. d. H.], zu dem **Mulachchas**[3] (Auszug, Compendium) des Schaich **Maḥmûd ben Muḥammed al-Dschagmînî**** **al-Chowârezmî**. Anfang: Lob sei Gott, dem Herrn über Ost und West. Ein Band in persischer Schrift. Schluss der Abschrift Freitag Nachts, den 12. Dschumâdâ I. 1092, 1681. Mit Noten. A.-N. 1. H.-N. 4259.

Noch drei weitere solche Exemplare, das dritte von der Hand des Dschelebî ibn al-Ḥâdsch 'Alî. Er beendigte es am Samstag, den 3. Rabî' I.

---

* Dieser Schluss enthält nur eine Auslese aus den im Katalog angeführten Werken, wie ich es im Vorwort (Heft 1 dieses Jahrgangs) schon angedeutet habe.

** Auch Tschagmînî geschrieben.

1019, 1610, in der Stadt Âmid (?) in der Chosru'schen Schule. Defect am Anfang; am Schlusse ein Anhang über die Mondstationen. A.-N. 2 (?). H.-N. 7792.

ش (Schîn).

Scharḥ (Commentar) des **Sajjid Scherîf 'Alî ben Muḥammed al-Dschurdschânî** [geb. 740, 1339/40, gest. 816, 1413/14] zu der **Taḏkira**[4] (Mémoire, Notizen) des **Naṣîr ed-Dîn Muḥammed ben Muḥammed aṭ-Ṭûsî** [gest. 672, 1273/74]. Anfang: Gesegnet sei (Gott), welcher an den Himmel die in Bezug auf Ordnung (Rang) und Zeiten verschiedenen Häuser gesetzt hat. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 11. H.-N. 16273.

Scharḥ (Commentar) des Wahrheit suchenden **Mûsâ ben Maḥmûd** genannt **Ḳâḍî-Zâdeh** [eines der Gelehrten des 9. Jahrh. d. H.][5] zu dem **Mulachchaṣ** (Compendium) der Astronomie des sehr gelehrten **Maḥmûd ben Muḥammed ben 'Omar al-Dschaġmînî** [eines der Gelehrten des 9. Jahrh. d. H.]. Anfang des Commentars: Lob sei Gott, der der Sonne und dem Monde Licht und Glanz gegeben hat. Die Abfassung desselben wurde beendigt im Jahre 813, 1410/11. Anfang des Textes (des Mulachchaṣ): Lob sei Gott, dessen Ueberlegenheit (Allem) gewachsen ist. Die Abfassung desselben wurde beendigt im Jahre 808, 1405/6. Ein Band in hängender (persischer) Schrift, von der Hand des Ḥidr ben Muḥammed an-Naschawî. Beginn der Abschrift im Anfang des Ḏû'l-Ḥidscha 929, 1523 und Schluss derselben im Anfang des Ṣafar 930, 1523. Mit Randnoten. A.-N. 8. H.-N. 4266.

ك (Kâf).

Kitâb (Buch) des sehr gelehrten Schaich **Muḥammed ben 'Alî aṣ-Ṣabân** [gest. 1206, 1791/92]. Anfang: Lob sei Gott, der Himmel und Erde erschaffen hat, der Gnädige, dessen Wohlthaten von den Umfängen der Breiten- und Längenkreise her strahlen. Es befinden sich darin: Eine Auswahl aus dem Text des Mulachchaṣ von Dschaġmînî und dem Commentar dazu von Ḳâḍî-Zâdeh, die Fatḥijja[6] und der Commentar zu derselben von Mîram Dschelebî[7], Anhänge zum Commentar des Ḳâḍî (vergl. oben unter Ḥâ), der Commentar der Mawâkif (Stationen?) und Anderes. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 6. H.-N. 4265.

م (Mîm).

(Aus den folgenden drei **madschmû'ât** = Sammelbänden ist nur zu erwähnen): Aus dem Sammelband A.-N. 10. H.-N. 4268:

1. **Al-mulachchaṣ** (Auszug, Compendium) des sehr gelehrten **Maḥmûd ben Muḥammed ben 'Omar al-Dschaġmînî** [eines der Gelehrten des 9. Jahrh. d. H.] In älterer Schrift, von der Hand des Muḥammed al-Manschâwî, des Schâfiten, beendigt am Montag, den 11. Schawwâl 1144, 1732. Ohne Figuren.

2. **Risâla** (Abhandlung) über die Astronomie[8] von **Ra'îs ibn Sînâ.** Anfang: Wisse, Gott lehrt dich, und die Erleuchtung verwandelt dich. In maġrebinischer Schrift, von der Hand des 'Alî ben at-Tardschumân, beendigt im Jahre 1163, 1750.

ن (Nûn).

Nihâjat al-idrâk (das höchste Verständniss) in der Kenntniss der Sphären, verfasst von dem sehr gelehrten Schaich **Maḥmûd ben Mas'ûd asch-Schîrâzî**[9] [gest. 710, 1310/11]. Anfang: Lob sei Gott, dem Schöpfer des Himmels über der Erde. Er theilte es in vier Abschnitte: Der erste handelt über das, was nothwendig vorausgeschickt werden muss vor dem Beginn der Hauptsache; der zweite über die äussere Erscheinung der himmlischen Körper und über Das, was von ihren gegenseitigen Stellungen abhängt etc.; der dritte über die äussere Erscheinung der Erde und ihre Eintheilung in bewohntes und unbewohntes Land und über Das, was nothwendig sich ergiebt aus den verschiedenen Stellungen der Himmelskörper zu ihr etc.; der vierte über die Kenntniss der Grösse und der Entfernungen. Ein Band in älterer Schrift, von der Hand des Muḥammed ben 'Abdalmuṭallab al-'Ulawî al-Ḥusainî, beendigt am 2. Ḏû'l-Ḥidsc̆ha 741, 1341, in der berühmten Schule al-atâbekijja in Moṣûl. A.-N. 7. H.-N. 7797.

2. Orts- und Zeitbestimmung (Theoretische Astronomie).*

ا (Alif).

Idschtinâ aṯ-ṯamarât (das Pflücken der Früchte): über das Zeichnen des Sinus (der Sinuslinien) des Kanon-Quadranten[10] und die Lage der Muḳanṭarât (-Kreise), von **Schams ed-Dîn 'Abdallâh Fatḥ al-Farġalî as-Subrabâwî.** Anfang: Lob sei Dem, welcher dem Weisen das Verständniss seines eigensten Wesens verhüllt. Er theilte es in ein Vorwort, zehn Capitel und ein Schlusswort. Ein Band in älterer Schrift, schadhaft am Ende. A.-N. 90. H.-N. 4644.

Aḥkâm taḥâwîl sinî al-'âlam (die Urtheile oder Weissagungen nach dem Wechsel der Jahre der Welt) von **Abû'l-Fatḥ Jaḥjâ ben Muḥammed ben Abî'sch-Schukr al-Maġrebî** [einem der Gelehrten des 7. Jahrh. d. H.]. Anfang: Und nach dem Lobe Gottes etc. Er theilte sie in ein Vorwort, 23 Capitel und ein Schlusswort. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 7. H.-N. 4561.

Al-aḥkâm fî fuṣûl al-aḥkâm (die Regeln oder Lehren über die Unterschiede der Urtheile) nach dem Wechsel der Jahre und der Tage,

* Die Vertheilung der astronomischen Bücher nach ihrem Inhalte unter die einzelnen Abschnitte wurde von den Bibliothekaren nicht streng durchgeführt; dieser Abschnitt enthält auch astrologische Werke, die ihren Platz wohl besser in der nächsten Abtheilung „Geheimwissenschaften“ gefunden hätten.

von Schaich **Sulaimân ar-Rûmî al-'Otmânî al-Hanefî al-Mâtrîdî al-Falakî ibn Hamza ben Bachschîsch.** Anfang: O, der Du erschaffen hast die Individuen, und ausgetheilt hast die Trefflichkeit, und reichlich ausgebreitet hast Deine Freigebigkeit... Es schliesst sich hieran eine Abhandlung über die Kenntniss des Aufsteigens der Gestirne zum höchsten Punkt ihres Glanzes und die (darauf folgende) Abnahme desselben[11], von **Jûsuf ben Ja'kûb ben Ishâk al-Kindî.** In einem Band in älterer Schrift, von der Hand des Ahmed ben 'Îsâ al-Chalîfî, des Schâfîten, beendigt am 21. Scha'bân 1184, 1770. A.-N. 1. H.-N. 7841.

Ardschûzat al-kawâkib al-maschhûra (das bekannte oder berühmte Gedicht über die Gestirne)[12] von **Abû 'Alî ben al-Husain as-Sûfî.** Es erbat es von ihm der König 'Asara (?) Schâhinschâh. Anfang: Im Namen Gottes, des Gerechten, des Einzigen, und sein Erbarmen über Muhammed. In älterer Schrift. A.-N. 163. H.-N. 4717.

Asl al-usûl (der Anfang der Anfangsgründe)[13] von **Abû'l-'Anbas as-Saimarî** [geb. in Saimar, Montag Nachts, den 5. Ramadân 213, 828]. Anfang: Lob sei Gott, dem Herrn des ausgezeichneten Ruhmes. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 11. H.-N. 4565.

ت (Tâ).

Tuhfat at-tullâb (das Geschenk der Studirenden)[14]: über den Gebrauch des Quadranten des Astrolabiums*, von **Abû'l-Bakâ 'Alî ben 'Otmân ben Muhammed ben Ahmed ben al-Kâsih** [gest. 801, 1398/99]. Anfang: Lob sei Gott, welcher die rotirende Sphäre sich drehen lässt. Er theilte es in 90 Capitel. Ein Band in älterer Schrift, alt (das heisst altes Manuscript). A.-N. 26. H.-N. 4580.

At-tuhfa al-malikijja (das königliche Geschenk): über die astronomischen Fragen und Antworten, von dem sehr gelehrten **Nasîr ed-Dîn Muhammed ben Sim'ûn** [dem Gebetsrufer, gest. im Dschumâdâ II. 737, 1337]. Ein Band in älterer Schrift, beendigt am Mittwoch, den 18. Rabî' II. 1105, 1693. A.-N. 25. H.-N. 4579.

Tashîl zîdsch Ulûġ Beg (die Erleichterung oder Erklärung der Tafeln des Ulûġ Beg) von dem Schaich **Muhammed [ben Abî'l-Fath as-Sûfî] al-Misrî** [einem der Gelehrten des 9. Jahrh. d. H.]. In älterer Schrift. A.-N. 20. H.-N. 4574.

Ta'âdîl al-kamar (Gleichungen des Mondes) nach den Principien des **Ibn Jûnis** [eines der Gelehrten des 4. Jahrh. d. H.], berechnet von **Ahmed ben al-Madschdî**[15] [einem der Gelehrten des 9. Jahrh. d. H.]. Ein Band in älterer Schrift von der Hand des 'Abdal'azîz al-Wefâî, abgeschrieben von der Handschrift des Verfassers. A.-N. 25. H.-N. 7865.

---

* Sollte vielleicht heissen: des Quadranten und des Astrolabiums.

Ta'dîl zuḥal (Gleichung des Saturns) aus der „unvergleichlichen Perle" von **Abû'l-'Abbâs Aḥmed ben Radschab ben al-Mukirr al-Aschraf al-Maulawî al-Emîr al-Atâbekî** [Ṭîbġâ? al-'Alâî, bekannt unter dem Namen] **ibn al-Madschdî** [gest. 850, 1446/47]. In älterer Schrift. A.-N. 43. H.-N. 4597.

At-ta'dîl al-muḥkam (die sichere, feststehende Gleichung): das sind Tafeln für die Regelung der Sonne und des Mondes (das heisst ihres Laufes), von **Abû'l-Ḥasan 'Alî ben Abî Sa'îd 'Abderraḥmân**, bekannt unter dem Namen **Ibn Jûnis** [gest. 399, 1008/9]. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 29. H.-N. 4583.

(Nun folgen neun „takwîm" = Kalender, von denen ich nur die folgenden drei hervorhebe):

Takwîm des Jahres 706 der persischen Zeitrechnung, für die Sonne, den Mond, den Saturn, den Jupiter, den Mars, die Venus und den Merkur. In älterer Schrift. A.-N. 35. H.-N. 4589.

Takwîm des Jahres 961 p. Chr. aus Cordova, über die Jahreszeiten und ihre Grenzen, die Zahl der Monate und ihre Tage, den Lauf der Sonne in ihren Zeichen und Häusern, die Grenzen (Zeitpunkte) ihres Aufganges und die Grösse ihrer Declination, ihre Höhe und die Verschiedenheit der Schattenlänge, den Einfluss der Jahreszeiten und die Aufeinanderfolge von Zunahme und Abnahme der Tage, veröffentlicht von R. Dozy* arabisch und lateinisch. Mit einem Vorwort in acht Blättern. Ein Band, gedruckt zu Leyden 1873 p. Chr. A.-N. 287. H.-N. 23360.

Takwîm Ḥâkimî (Ḥâkimitischer Kalender). Anfang: Die Zeitrechnung ist ein berühmter Zeitpunkt, auf welchen die nach ihm kommende Zeit zurückgeführt wird. In älterer Schrift. A.-N. 151. H.-N. 7991.

ج (Dschîm).

(Es folgen nun eine grosse Menge von Werken, alle mit dem Titel „Dschadâwil" = Tafeln, von denen ich heraushebe):

Dschadâwil über die Ungleichheiten der Monderscheinungen in Bezug auf Länge und Breite, und die Ausgleichung der Untergänge, berechnet von Schaich **'Abd el-kâdir al-Munawwifî** [einem der Gelehrten des 10. Jahrh. d. H.] und Schaich **Muṣṭafâ Abû'l-Itkân** [gest. 1203, 1788/89] nach der Methode Ulûġ Begs. In älterer Schrift. A.-N. 13. H.-N. 4567.

Dschadâwil des ausgestreckten (horizontalen) Schattens (das heisst der Cotangente), berechnet von ihrem Schreiber **Ḥusain**, nach den Principien des Ulûġ Beg as-Samarkandî. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 32. H.-N. 4586.

Dschadâwil des verkehrten und ausgestreckten Schattens (das heisst der Tangente und Cotangente). In älterer Schrift. A.-N. 39. H.-N. 4593.

* Der Katalog hat „R. Wazy".

Dschadâwil des Sinus von Minute zu Minute, nach der Berechnung des **Ulûg Beg Muhammed ben Schâhruch as-Samarkandî** [geb. 797, 1394/95, ermordet 853, 1449/50]. A.-N. 46. H.-N. 4600.

Dschadâwil der Fixsterne für den Anfang des Jahres 1771 der alexandrinischen Aera, entsprechend dem Ende des Jahres 863 d. H., berechnet von Schaich **Muhammed al-Marhûmî**. Ein Band in älterer Schrift von der Hand des genannten Berechners, beendigt am 29. Dû'l Hidscha 1100, 1689. A.-N. 86. H.-N. 4640.

Dschadâwil as-sahm (Tafeln des Pfeiles) oder des Sinus versus von Minute zu Minute. Ein Band in älterer Schrift, von der Hand des 'Abdaldschawâd, zubenannt Abû's-Safâ ibn asch-Schaich 'Îsâ as-Safitî (?) al-Ahmedî, des Hanefiten. A.-N. 56. H.-N. 7896.

Dschadâwil as-sumût (Tafeln der Azimuthe) von **Abû'l-'Abbâs Ahmed ben al-Madschdî** [gest. 850, 1446/47]. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 58. H.-N. 7898.

Dschadâwil al-hisas (Tafeln der Theilungen?) für die Breite von Damaskus, auf denen geschrieben steht, dass sie von **al-Mizzî** seien [**Abû 'Abdallâh Schems ed-Dîn Muhammed ben Ahmed ben 'Abderrahîm al-Mizzî al-Mâlikî**, gest. 750, 1349/50].[16] Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 62. H.-N. 7902.

Dschadâwil al-irtifâ' (Höhentafeln). Ein Band in älterer Schrift, von der Hand des **Muhammed ben Muhammed ben 'Abdalkawî al-Kuraschî**, bekannt unter dem Namen **Ibn al-Katânî al-Âlâtî al-Hâsib** (der Rechner) in Kairo; er beendigte ihn im Jahre 747, 1346/47. A.-N. 72. H.-N. 7912.

Dschadâwil der Sonne und des Mondes, beobachtet von **Ibn Jûnis al-Misrî** [Abû'l-Hasan 'Alî ben Abî Sa'îd 'Abderrahmân ben Ahmed ben Jûnis ben 'Abdala'lâ as-Safedî, bekannt unter dem Namen Ibn Jûnis, Verfasser der Hâkimitischen Tafeln, gest. Montag Morgen, den 3. Schawwâl 399, 1009]. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 116. H.-N. 7956.

Dschadâwil as-samt (Tafeln des Azimuthes) von **Ibn Jûnis**, dem Vorigen. In älterer Schrift. A.-N. 137. H.-N. 7977.

ح (Hâ).

Husn al-iktifâ (die Güte der Nachahmung): zur Lösung (Verständniss) des Tagebuches (rûznâmeh) des Schaich **Wafâ**: eine Abhandlung von mehreren Gelehrten über die Abfassung (Aufzeichnung) des Tagebuches des sehr gelehrten, frommen Schaich **Mustafâ**, bekannt unter dem Namen **Wafâ**; zusammengestellt für die Länge von Konstantinopel, für den Anfang des Jahres 851, 1447. Es enthält vier Abschnitte: über die Zeitrechnung der Araber und der Rumäer (Europäer), über die Art und Weise der Einrichtung der Tafeln, das Eindringen in dieselben und Anderes. In älterer Schrift, am Schlusse eine Tafel. A.-N. 77. H.-N. 7917.

د (Dâl).

Daḳâiḳ al-ḥaḳâiḳ (subtile Fragen der Wahrheiten): über die Rechnung mit Graden und Minuten, von **Muḥammed Sibṭ al-Mâridînî** [geb. 826, 1423]. Anfang: Lob sei Gott! das Lob der Preisenden... Er theilte sie in ein Vorwort, zehn Capitel und ein Schlusswort. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 50. H.-N. 4604.

Dalâil asch-schi'râ al-jamânijja (die Anzeichen des jemenischen Sirius): über die zwölf Häuser des Thierkreises von **Hermes**. Daran schliesst sich die Abhandlung über das Geburtsjahr (?) des Propheten Daniel. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 59. H.-N. 4613.

ر (Râ).

Risâla (Abhandlung) über den Gebrauch des Sinusquadranten von **'Izz ed-Dîn Abû'l-Jaman** (oder Jumn?) **'Abdal'azîz ben Muḥammed al-Wafâî** [dem Gebetsrufer in der Moschee al-Amawî (?)[17], gest. 876, 1471/72]. Er theilte sie in ein Vorwort, zehn Capitel und ein Schlusswort. In älterer Schrift. A.-N. 66. H.-N. 4620.

Risâla (Abhandlung) über die Einrichtung des Instrumentes, genannt „**ḥalazûn**“[18] (= Schnecke oder Spirale), von dem sehr gelehrten **'Abdalfattâḥ ben Ibrâhîm ad-Daisaṭî** (oder Disṭi) al-Mâliki. In älterer Schrift. A.-N. 89. H.-N. 4643.

Risâla (Abhandlung) über die Berechnung der Mondsfinsterniss, die sich Samstag Nachts, den 14. Scha'bân 1182, December 1768 ereignet hat, verfasst von **'Oṯmân al-Wardânî** [einem der Gelehrten des 12. Jahrh. d. H.]. Anfang: Lob sei Gott, der den Himmel erhöht hat ohne stützende Pfeiler, in die Atmosphäre hinauf gebaut wie eine Kuppel. In älterer Schrift. A.-N. 212. H.-N. 8052.

ز (Zâ).

Zidsch ar-raṣd al-dschadîd (Tafeln der neueren Beobachtung)[19] von **Ulûġ Beg Muḥammed ben Schâruch ben Tîmûr Ûrchân** [geb. 797, 1394/95, ermordet 853, 1449/50]. Anfang: Gesegnet sei Derjenige, welcher an den Himmel Häuser gesetzt hat und eine Sonne und einen leuchtenden Mond. Sie beginnen mit vier Abhandlungen. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 95. H.-N. 4649.

ص (Ṣâd).

Ṣuwar ad-daradsch (die Bilder der Grade) und das Weissagen nach ihnen: über das was die Umstände der Geburten beweisen und was mit ihnen zusammenhängt, von **Tinklûschâ**[20] **al-Kûfânî**, dem Babylonier. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 84. H.-N. 7924.

غ (Ġain).

Ġâjat al-intifâ' (der höchste Vortheil): über die Kenntniss des Stundenwinkels[21] und des Azimuthes aus der Höhe, von **Abû'l-Hasan 'Alî ben Abî Sa'îd 'Abderrahmân ben Ahmed ben Jûnis ben 'Abdala'lâ aṣ-Ṣafedî al-Miṣrî** [gest. in Kairo, Montag Morgen, den 3. Schawwâl 399, 1009]. Ein Band in älterer Schrift. Schluss der Abschrift am 8. Dschumâdâ II. 1218, 1803. A.-N. 108. H.-N. 4662.

ف (Fâ).

Al-fathijja fî'l-a'mâl al-dschaibijja (die Fathijja über die Sinusoperationen) von dem Schaich **Muhammed ben Muhammed ben Ahmed Sibt al-Mâridînî** [geb. 826, 1423]. Er theilte sie in ein Vorwort und 20 Capitel. In älterer Schrift, im Anfang schadhaft. A.-N. 67. H.-N. 4621.[22]

ق (Kâf).

Kitâb (das Buch) über die Lehren (Urtheile, Weissagungen) in der Astronomie, von **Sahl ben Bischr**[23], dem Juden. Anfang: Wisse, dass von den zwölf Zeichen des Thierkreises sechs männlich und sechs weiblich sind. Ein Band in älterer Schrift; am Ende schadhaft. A.-N. 9. H.-N. 4563.

Kitâb (das Buch) über die Elemente der Kunst der Urtheile (des Weissagens) von **Abû'l-Hasan Kûschjâr ben Lebnân**[24] **ben Bâschharî** (?) **al-Dschîlî.** Er theilte es in vier Abschnitte. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 120. H.-N. 4674.

ل (Lâm).

Al-lafẓ al-muṣarrah (das klare Wort): über den Gebrauch des geflügelten Quadranten[25], von dem Schaich **Muhammed ben Ahmed ben Mahmûd aṣ-Ṣâlihî**, dem Schâfiten, bekannt unter dem Namen **al-Murschidî.** Er theilte es in ein Vorwort und 35 Capitel. In älterer Schrift, von der Hand des Muhammed ben Muhammed ben Ibrâhîm al-Harauri, beendigt am Mittwoch, den 28. Radschab 794, 1392. A.-N. 142. H.-N. 4696.

م (Mîm).

Madschmû'a (Sammelband). A.-N. 64. H.-N. 4618. Inhalt:

1. Deutliche Auseinandersetzung des Verborgenen: über den Gebrauch des Sinusquadranten, von dem Schaich **'Alî ben Ibrâhîm ben Muhammed al-Mut'im al-Anṣârî**, dem Gebetsrufer in der Moschee al-Amawî[26] [gest. 777, 1375/76]. Er theilte sie in ein Vorwort und 205 Capitel.

2. Enthüllung des Verborgenen: über die Rechnung mit dem Sinusquadranten; von dem Schaich **'Alî ben Ibrâhîm**, dem Vorigen. Er theilte sie in ein Vorwort und 54 Capitel; Schluss der Abschrift im Jahre 803, 1400/01.

4. Abhandlung über den Gebrauch des Schakârî-Quadranten[27], geordnet in 19 Capitel.

5. Abhandlung über den geflügelten Quadranten: über die Kenntniss des Sinus eines (gegebenen) Bogens und des Bogens eines (gegebenen) Sinus, von **Ibn as-Sirâdsch**, beendigt 803.

Madschmû'a. A.-N. 70. H.-N. 4624. Inhalt:

1. Die fünfte Abhandlung über die Zeichnung (Construction) der neueren Instrumente zur ebenen Darstellung der Kugel, wie das nördliche, das Zarkâlische[28] und das Schakârische[29] Astrolabium, und die mit Faden und Zeiger versehenen Quadranten.

Madschmû'a. A.-N. 122. H.-N. 4676. Inhalt:

1. Das Buch der Sitzungen[30], von **Ptolemaios**, der in der ersten Hälfte des zweiten christlichen Jahrhunderts lebte.

Madschmû'a. A.-N. 124. H.-N. 4678. Inhalt:

2. Abhandlung über die Art und Weise des Gebrauches des Himmelsglobus, von dem Schaich **Abû 'Alî al-Marrâkuschî**[31] [einem der Gelehrten des 7. Jahrh. d. H.].

Madschmû'a A.-N. 132. H.-N. 4686. Inhalt:

1. Das Buch des **Hermes** [al-Herâmisa?], das ist Idrîs (Enoch) der Prophet: über das Weissagen aus den Aufgängen des Sirius und die mit ihnen zusammenhängenden, jedes Jahr auf der Welt geschehenden Ereignisse.

Madschmû'a. A.-N. 136. H.-N. 4690. Inhalt:

1. Tafeln des Sinus von Minute zu Minute, berechnet von Schaich **Muhammed ben Muhammed al-Bagdâdî.**

2. Tafeln des Sinus versus.

3. Tafeln der ersten Schiefe von Minute zu Minute, berechnet von Schaich **Scharaf ed-Dîn Abû'l-'Alî al-Marrâkuschî.**[32]

4. Tafeln der Tangente von **Abû'l-Fath Sa'îd as-Samarkandî.**

5. Tafeln der Sechziger-Tangenten von Minute zu Minute.

Madschmû'a. A.-N. 150. H.-N. 4804. Inhalt:

2. Tafeln der Zwölfer-Tangenten[33], und zwar der Cotangenten von Anfang an (gelesen), und der Tangenten vom Ende an (gelesen).

Madschmû'a. A.-N. 170. H.-N. 4724. Inhalt:

1. Die glänzende Perle: über die Operationen mit den Sechziger-Beziehungen, von dem Schaich **'Abdal'azîz al-Wafâî** [gest. 876, 1471/72]; es ist dies eine Abhandlung über das Rechnen mit Graden und Minuten, ein Auszug aus seiner Abhandlung, betitelt: Die Unterhaltung der Studirenden.

2. Abhandlung über den Gebrauch des Octanten, von **Schems ed-Dîn Muhammed** bekannt unter dem Namen **Ibn al-Gazûlî**[34] [einem der Gelehrten des 8. Jahrh. d. H.]. Er sagt im Anfang: Wisse, dass ich diese Figur (Instrument?) im Jahre 744, 1343/44 erfunden habe.

Madschmû'a A.-N. 172. H.-N. 4726. Inhalt:

3. Das Buch des **Autolykos** über die bewegte Sphäre. Schluss der Abschrift am Dienstag, den 20. Schawwâl 1038; 1629.

Madschmû'a. A.-N. 180. H.-N. 4734. Inhalt:

1. Das Buch der königlichen Eigenschaften: über die astronomischen Grundlagen von **Hermes** [Idrîs = Enoch]. Anfang: Wisse, Gott lehrt dich alles Gute.

2. Die tiefste Ergründung: über die Geheimnisse der Astronomie, von dem Schaich **Muḥammed ben Abî Bekr al-Fârisî**[35] [einem der Gelehrten des 7. Jahrh. d. H.]. Schluss der Abfassung am 13. Rabî' I. 606, 1209. Schluss der Abschrift im Rabî' II, 1238, 1822.

3. Astronomische Nützlichkeiten aus der Abhandlung des **Abû 'Alî al-Chajjâṭ.**[36]

Madschmû'a. A.-N. 158. H.-N. 7998.

1. Abhandlung des **Kûschjâr ben Lebnân** (Lebbân) **al-Dschîlî al-Chosruwânî** über das Astrolabium, in vier Abschnitte getheilt.

2. Die Pforte zur gesammten Astronomie von **Kûschjâr**, von der Hand des Muḥammed ben Ḥasan al-Ḥanefî, beendigt am 18. Scha'bân 1182, 1768.

Madschmû'a. A.-N. 190. H.-N. 8030. Inhalt:

1. Abhandlung über die Jahreszeiten[37], von **Bischr ben Sahl***, dem Juden [aus dem 3. Jahrh. d. H.]. Anfang: Wisse, dass die Jahreszeiten nicht übereinstimmen wegen der Ungleichheit der Bewegungen.

Madschmû'a. A.-N. 194. H.-N. 8034. Inhalt:

1. Das Buch über das gesammte astronomische Wissen und die himmlischen Bewegungen[38], von **Aḥmed ben Muḥammed ben Kaṯîr al-Farġânî** [einem der Astronomen al-Mâmûns]. Schluss der Abschrift 876, 1471/72.

2. Abhandlung über die Kenntniss der Zeiten, während deren der Mond über oder unter der Erde sich befindet; von derselben ist nur noch ein Blatt vorhanden, daran schliesst sich ein Blatt aus der Abhandlung über die Berechnung der sieben Klimata von **al-Farġâni**, dem Vorigen. Schluss der Abschrift 876.

Madschmû'a A.-N. 200. H.-N. 8040. Inhalt:

1. Commentar zum Centiloquium des **Ptolemaios**, von dem weisen [Naṣîr ed-Dîn] **aṭ-Ṭûsî** [gest. 672, 1273/74]. Anfang: Lob sei Gott, das Lob der Preisenden . . .

Madschmû'a. A.-N. 204. H.-N. 8044. Inhalt:

1. Abhandlung über die Urtheile aus den Gestirnen, in Hinsicht ihres Befestigtseins (?) im Weltall, das da vergänglich ist, insofern als es entstanden ist und wieder vergeht; verfasst von dem Schaich **Abû'l-'Abbâs Aḥmed ben Muḥammed ben 'Oṯmân al-Azdî**, bekannt unter dem Namen

* Sollte heissen: Sahl ben Bischr.

Ibn al-Bannâ [einem der Gelehrten des 7. Jahrh. d. H.]. Anfang: Lob sei Gott, dem Erhabenen, dem Mächtigen. Abgeschrieben von 'Alî ben Muhammed, beendigt am Samstag Morgen, den 5. Schawwâl 1052, 1643.

4. Das Buch über die Geburten, von **Abû Ma'schar al-Balchî**[39] [gest. in Wâsit am Mittwoch, zwei Nächte vor Schluss des Ramadân 272, 886]; von der Hand des eben genannten Abschreibers, beendigt am Dienstag Nachmittag, den 15. Schawwâl 1052, in der Stadt (Flecken) at-Tajjiba, im Westen (d. h. Nordafrika).

5. Das Buch des Geheimnisses von **Abû Ma'schar**, dem Vorigen, von der Hand desselben Abschreibers, beendigt Sonntags bei Sonnenuntergang, den 20. Schawwâl 1052, in Mahalla al-kubrâ.

6. Abhandlung über die Gestirne, die einer Zunahme fähig sind, von **Hunain ben Ishâk** [gest. am 6. Safar 260, 873].

Al-madchal fî ahkâm an-nudschûm (Einleitung in die Astrologie)[40], verfasst von **al-Hasan ben 'Alî**, mit dem Beinamen **Abû Nasr al-munadschim al-kamî** (= der kleine Astronom) [er verfasste sie im Jahre 357, 968]. Anfang: Lob sei Gott, der seine Diener zu seiner Erkenntniss erschaffen hat. Er theilte sie in fünf Abschnitte mit 64 Capiteln. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 208. H.-N. 8048.

Masâil (Fragen) in 138 Capiteln, von dem sehr gelehrten **'Omar ben al-Farruchân at-Tabarî**[41], ausgezogen aus den Büchern der Gelehrten; er machte sie (diese Auszüge) zu Hauptsätzen, an die sich die Fragen anschliessen. Anfang: Wisse, dass es für die Fragen eine Richtschnur (Bedingung) giebt, die der fragende Astronom nothwendig kennen muss, bevor er frägt und urtheilt. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 165. H.-N. 4540.

Masâil fî ahkâm an-nudschûm (Fragen über die Astrologie)[42], von **Abû Jûsuf Ja'kûb ben 'Alî al-Kasrânî.** Anfang: Lob sei Gott, dem Herrn des ausgezeichneten Ruhmes. Er theilte sie in zwölf Capitel, jedes mit Unterabtheilungen. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 30. H.-N. 4584.

Al-makâla al-ûlâ (die erste Abhandlung): über die Rechnung der Classen (?)* aus den vier Abhandlungen des **Kûschjâr ben Lebbân ben Bâschahjâr** (?)[43] **al-Dschîlî** zu seinen Tafeln über die Astronomie. Er theilte sie in acht Abschnitte mit 80 Capiteln. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 213. H.-N. 8053.

Mawâki' (das Eintreten) der Neumonde der Jahre des 14. Jahrh. d. H. für die gregorianischen Jahre (d. h. nach gregorianischer Zeitrechnung) von S. Exc. **Ibrâhîm Efendî 'Ismat**, vormals Schüler der polytechnischen Schulen und Sternwarten zu Paris, Washington und Berlin, gegen-

* Abwâb pl. v. bâb = Pforte, Capitel, Classe, Kategorie; keine dieser Bedeutungen giebt einen Sinn, ich vermuthe einen Druckfehler des Katalogs.

wärtig (1308) erster Astronom* der viceköngl. Sternwarte in der ʻAbbâsijja. Zwei Bände, gedruckt in der Druckerei des Muḥammed Efendî Muṣṭafâ, 1304 1886/87.

Abtheilung: Wissenschaft der Buchstaben und der Namen

(das heisst Geheimwissenschaften: Astrologie, Magie, Geomantie, Cheiromantie etc.).

ا (Alif).

Al-uṣûl wa' ḍ-ḍawâbiṭ (die Principien und die Regeln), von dem Schaich [**Aḥmed ben ʻAlî ben Jûsuf al-Ḳuraschî**] **al-Bûnî** [gest. 622, 1225].[44] Er sagt im Anfang: Und was nun die Sache betrifft, so ist diese Abhandlung von einem Bruder, der aufrichtig in der Rede gegen seine Milchbrüder an der Brust der Weisheit ist. Er theilte sie in eine Vorrede und zehn Geschenke** und ein Schlusswort. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 3. H.-N. 4434.

Al-anwâr al-lâiḥa (die hellen Lichter) und die glückbringenden Geheimnisse***, von dem Schaich **Maḥmûd Abû'l-Mawâhib al-Chalwatî**[45] **al-Ḥanefî**. Anfang: Lob sei Gott, der nach seiner Auswahl unter seinen Dienern dem die Geistes- und traditionellen Wissenschaften Lernenden Erfolg giebt. Er theilte sie in ein Vorwort, sieben Capitel und ein Schlusswort; (sie handeln) über die Dreier-, Vierer-, Fünfer-,... bis Neuner-Talismane[46] (Amulete) und ihre Vorschriften (Bedingungen), und über die Natur (Wesen) der Buchstaben. Daran schliesst sich ein Gedicht von ihm über die Amulete. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 2. H.-N. 4433.

د (Dâl).

Ad-dawârad hamzadsch? (الدوارد همزج)[47] von **Jaʻḳûb ben Isḥâḳ al-Kindî**. Anfang: Lob sei Gott, es giebt keinen Gott ausser ihm, und an Kraft kommt ihm keiner gleich. Er handelt darin über den Fâl mit Rücksicht auf die Zahl und die Rechnung nach den Gestirnen und die Weissagung aus dem Vogelflug und die Physiognomik. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 15. H.-N. 4446.

ر (Râ).

Risâla (Abhandlung) über das dem Saturn zukommende (wörtlich das Saturnische) Dreier-Amulet[48], die dem **ʻAlî ben al-Ḥusain ben ʻAlî ben Abî Ṭâlib**† zugeschrieben wird. In älterer Schrift. A.-N. 19. H.-N. 4450.

---

* Bâsch-Raṣîd (türk.-arab. Wort) = Chef, Oberster der Beobachter.

** So betitelt er die einzelnen Abtheilungen, statt bâb = Capitel, oder maḳâla = Buch, Theil.

*** Asrâr kann auch heissen: „Linien der inneren Hand".

† Das ist dem Urenkel Muhammeds von der Fâtime.

Risâla (Abhandlung) des **Ptolemaios** über die Einrichtung der Wahrsagekunst[49]; er verfasste sie für seinen Schüler Syros. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 30. H.-N. 7589.

ز (Zâ).

Zâirdscha al-murabba' al-'adadî (die Zâirdscha[50] des Zahlenquadrates) von dem Schaich **Muhjî ed-Dîn ibn al-'Arabî**[51] [gest. 638, 1240/41]. Ein Band in älterer Schrift. A. N. 36. H.-N. 7595.

ش (Schîn).

Scharh (Commentar) der schönsten Namen Gottes, von **Abû'l-'Abbâs Ahmed ben al-Makrî Abî'l-Hasan 'Alî ben Jûsuf al-Kuraschî al-Bûnî** [gest. 622, 1225]. Anfang: Lob sei Gott, der die feinsten (subtilsten) Wahrheiten eingetragen hat in die ausgesuchtesten (schönsten) Bücher der Geheimnisse. Ein Band in älterer Schrift, von der Hand des Mansûr ben Muhammed ben al-Dschelebî, beendigt am Mittwoch Morgen, den 1. Dû'l-Hidscha 952, 1546. A.-N. 57. H.-N. 7616.

Schauk al-mustahâm (die Sehnsucht des Liebestollen): über die Kenntniss der Zeichen der Schriften, verfasst von dem sehr gelehrten **Ahmed ben Abî Bekr ben Wahschijja al-Nabatî** (dem Nabatäer) **al-Kaldânî**[52] (dem Chaldäer) [aus dem 3. Jahrh. d. H.]. Anfang: Lob sei Gott und das genügt und Friede sei mit seinen Dienern, welche er auserkoren hat. Das Buch wurde beendigt am Donnerstag, den 3. Ramadân 241, 856. Er erklärt darin die Schriftzeichen der Alten. Ein Band, gedruckt in London 1806 p. Chr., zugleich mit der Uebersetzung in's Englische. A.-N. 74. H.-N. 15485.

ط (Tâ).

Tâli' al-maulûd (der Ascendent des Geborenen oder der Geburt) für männliches und weibliches Geschlecht nach den Häusern und ihren Aufgängen (Ascendenten)[53], von **Abû Ma'schar al-Balchî** [gest. in Wâsit zwei Nächte vor Schluss des Ramadân 282, 895*, über 100 Jahre alt]. Anfang: Lob sei Gott, dem Herrn der Geschöpfe und das Gebet und der Friede sei über dem Propheten. Ein Band in älterer Schrift, beendigt am 28. Schawwâl 1191, 1777. A.-N. 65. H.-N. 9812.

ق (Kâf).

Kur'a li-ichrâdsch al-fâl wa'd-damîr (das Loos im Aufschlagen des Fâls und der Bedeutung oder des Geheimnisses) von dem König (Chalifen) **al-Mâmûn** [al-'Abbâsî, dem Abbasiden]. Es enthält die Fragenkreise und die Gesammtzahl der Buchstaben, die Kenntniss der Stationen** und der

* Sollte heissen 272, 886; vergl. oben S. 171.

** Wohl „Mondstationen".

Vogelzeichen aus den himmlischen Stationen, und der Länder (Städte) aus den Namen der Vogelzeichen, und der Könige aus den Namen der Länder und Anderes. Ein Band in älterer Schrift, beendigt 1058, 1648. A.-N. 53. H.-N. 7612.

ك (Kâf).

Kitâb al-chawâṣṣ (das Buch der magischen Eigenschaften) von **Abû'l-'Abbâs Aḥmed al-Bûnî** [gest. 622, 1225]. Ein Band in älterer Schrift; am Anfang und am Ende schadhaft. A.-N. 10. H.-N. 7569.

Kitâb as-sab' kawâkib as-sajjâra (das Buch der sieben Planeten) von dem griechischen Weisen **Hermes**. Er spricht darin über die Ascendenten der männlichen und weiblichen Geburten mit Rücksicht auf die Auffindung der Bedeutungen (oder Geheimnisse) und die zufälligen Ereignisse. Ein Band, lithographirt in Kairo in der Druckerei al-'anânijja, 1297, 1880. A.-N. 84. H.-N. 19633.

Kitâb Ṭimṭim (das Buch des Ṭimṭim) [des Indiers][54]; er zeigt darin die magischen Eigenschaften der Thierkreishäuser und ihrer Grade auf speculativem und mathematischem (?) Wege, die zur Vernachlässigung des materiellen Erwerbes führen (?). Ein Band in älterer Schrift, in der Mitte und am Ende schadhaft. A.-N. 71. H.-N. 9818.

Kitâb (Buch) der Auflösung (Erklärung) der Principien der Salomonischen Talismane und der hebräischen Zeichen (Zeichenschrift, Räthselschrift) und der spiritistischen Wissenschaften (Künste), der Fàlbuchstaben und der Namen al-ḳalfatîrijja[55] und der griechischen Zauberformeln. Anfang: Lob sei Gott, der die Himmel erhöht und geschaffen hat, der die Gestirne leuchtend gemacht und sie (am Himmel) hingestreut hat. Ein Band in älterer Schrift; am Schlusse vom Abschreiber nicht ganz vollendet. A.-N. 72. H.-N. 9819.

م (Mîm).

Madschmû'a. (Sammelband). A.-N. 56. H.-N. 4487. Inhalt:

1. Der Schatz Alexanders: über die Talismane[56] von **Aristoteles** dem Philosophen. Er theilte es in 10 Capitel, (welche handeln) über die Anordnung der Steine, die Zusammensetzung der tödtlichen Gifte und der Gegengifte und Anderes; von der Hand des Sulaimân al-'Aschmâwî al-Ḥanefî al-Mâtrîdî al-Falakî ibn Ḥamza ben Bachschîsch, beendigt 1286, 1869/70.

Madschmû'a, A.-N. 57. H.-N. 4488. Inhalt:

5. Abhandlung über die Zâirdscha von **Abû'l-'Abbâs as-Sabtî** [einem der Gelehrten des 6. Jahrh. d. H.] und von **Abû'l-Faḍl ben ar-Rammâḥ al-Afrîḳî** und Andern.

Madschmû'a. A.-N. 78. H.-N. 7637. Inhalt:

3. Das Höchste der Hoffnung: über die Frage des Unbekannten; es enthält die Methoden der Zâirdscha, des Punktirens[57], der Buchstaben,

der Zahlen und des astrologischen (Wahrsagens). Aus ihm kann man die Frage nach dem Unbekannten auffinden mit Hilfe des Vierer-Talismans.

Madschmû'a. A.-N. 80. H.-N. 7639. Inhalt.

2. Einleitung in die Astrologie [**von Abû'l-Ḥasan Kûschjâr ben Lebbân al-Dschîlî**].[58] Er theilte sie in vier Abschnitte: der erste handelt über die Anfangsgründe, der zweite über das Weissagen über die Weltbegebenheiten, der dritte über das Weissagen über die Geburten und den Wechsel ihrer Jahre, der vierte über die Tagewählerei. Am Anfange schadhaft.

Muchtaṣar ṭawâli' al-aschrâḳ (Auszug aus den Ascendenten des Ostens): über die Wissenschaft der Talismane, von dem sehr gelehrten [**Muḥammed ben 'Omar ben al-Ḥasan ben 'Alî at-Taimî al-Bekrî aṭ-Ṭabaristânî**] **Fachr ed Dîn** [**ar-Râzî**, bekannt unter dem Namen **Ibn al-Chaṭîb**[59], geb. in Raj am 25. Ramaḍân 543 oder 544, 1149/50, gest. in Herat am 'îd al-fitr* 606, 1210]. Anfang: Lob sei Gott, dem Herrn der Geschöpfe, und das Gebet und den Frieden über Muḥammed. Ein Band in älterer Schrift, von der Hand des Muḥammed al-Ḥafanî, beendigt 1145, 1732/33. A.-N. 47. H.-N. 4478.

Abtheilung: Chemie (Alchymie) und Physik (Naturlehre).

ب (Bâ).

Der zweite Theil des Buches **al-burhân** (der Beweis): über die Geheimnisse der Wissenschaft (Kunst) des Wägens**, von **'Izz ed-Dîn 'Alî ben Eidemir ben 'Alî ben Eidemir al-Dschildekî**[60] [gest. im Radschab 762, 1361]. Derselbe enthält 14 Capitel und ein Schlusswort. Ein Band in älterer Schrift; es fehlen am Anfang zehn Blätter. A.-N. 35. H.-N. 9804.

ج (Dschîm).

Al-dschauhar al-manẓûm wa'd-durr al-manṯûr (die schön geordneten Edelsteine und die zerstreuten Perlen): über die Erklärung des Dîwân der goldenen Perlen; es ist dies der Commentar des sehr gelehrten [**'Izz ed-Dîn 'Alî ben**] **Eidemir ben 'Alî ben Eidemir al-Dschildekî** [gest. 762] zum Dîwân der goldenen Perlen des **Abû'l-Ḥasan 'Alî ben Mûsâ al-Ḥakîm al-Andalusî** [gest. 500, 1106/07]. Anfang des Commentars: Lob sei Gott, dem allheiligen Könige, dem Frieden (Beiname Gottes), dem Schöpfer etc. Es ist ein Auszug aus seinem Buche „das höchste Vergnügen“[61], und ist in vier Abschnitte getheilt. Ein Band in älterer Schrift,

* Das heisst das Fest des Aufhörens der Fasten des Ramaḍân = 1. Schawwâl.
** So wird die Alchymie öfters genannt.

beendigt Mitte Scha'bân 1091, 1680. Theilweise zerrissen. A.-N. 6. H.-N. 4232.

ر (Râ).

Rutbat al-ḥakîm (die Ordnung (auch Würde, Rang) des Weisen), verfasst von dem [Philosophen Schaich **Abû Muḥammed**] **Maslama ben Aḥmed** [**ben 'Omar ben Waḍḍâ'**] **al-Madschrîṭî** [Imâm (Erster) der Mathematiker in Spanien].[62] Anfang: Lob sei Gott, dem Mächtigen und Grossmüthigen. Er begann mit der Abfassung derselben im Anfange des Jahres 439, 1047 und beendigte sie 442, 1050/51.[63] Er theilte sie in vier Abschnitte; (sie handelt) über Das was er aus den Büchern der Vorfahren gesammelt hatte, und über den Stein des Einflusses (der Weisen?) und über die Wirkung (oder auch Herstellung) des Steins der Weisen und des Bindens, über die Zeichen (Räthsel) des Volkes (?); das Werk ist ein Auszug aus seinen Abhandlungen über die zehn philosophischen Wissenschaften. Ein Band in älterer Schrift. A.-N. 12. H.-N. 4238.

ش (Schîn).

Schuḏûr aḏ-ḏahab (Goldperlen) von **Abû'l-Ḥasan 'Alî ben Mûsâ ben Abî'l-Ḳâsim ben 'Alî al-Anṣârî al-Andalusî** [bekannt unter dem Namen **Ibn Arfa' Râs**, gest. 500, 1106/07]; es ist dies der Dîwân[64], geordnet nach den Buchstaben des Alphabetes. Anfang: Wenn Mars mit Venus im Gedrittschein steht, so ist es ein Mann (männliche Geburt) und ist zugleich Vollmond, so wird er intelligent. Ein Band in persischer Schrift, vocalisirt, mit vielen Notizen aus dem „höchsten Vergnügen" von Dschildekî. A.-N. 17. H.-N. 4243.

Scharḥ (Commentar) einiger romäischer Gelehrten zu den Schriften **Platons.** Deren Commentirung wurde befohlen von dem Sultan Abû'l-Fatḥ Muḥammed Chân und nach dessen Tode der Commentar seinem Sohne, dem Sultan Bâjazîd überreicht. Anfang: Lob sei Gott, dem Hersteller der geistigen Juwelen etc. Anfang der Schriften: Wenn eine Substanz gemischt ist aus zwei bekannten Körpern (Stoffen) und wir wollen wissen, wie viel von jedem einzelnen darin ist, so wägen wir jeden einzelnen der beiden Körper (Stoffe) in der Luft und im Wasser... Ein Band in älterer Schrift, von der Hand des Muṣliḥ ed-Dîn ben Sinân, beendigt am Freitag Nachmittag, den 28. Radschab 905, 1500. A.-N. 13. H.-N. 4239.

ف (Fâ).

Al-falâḥa an-nabaṭijja[65] (der nabatäische Ackerbau) von **Abû Bekr Aḥmed ben 'Alî ben Ḳais al-Kaldânî**, bekannt unter dem Namen **Ibn Waḥschijja**; er übersetzte ihn aus dem Chaldäischen in's Arabische im Jahre 291, 904 und dictirte ihn dem 'Alî ben Muḥammed ben az-Zajjât im Jahre 318, 930. Anfang: Lob und Preis und Ehre etc. sei von uns (Gott dargebracht). Es existirt von ihm noch der erste Theil, in einem Band, in älterer Schrift, von der Hand des Jûsuf ben Muḥammed ben Mûsâ ben Jûsuf ben 'Alî ben Abî Bekr ben Muḥammed ben Maḥmûd al-Ḳoraschî al-Azharî, des Schâfiten, beendigt am 22. Radschab 995, 1587. A.-N. 18. H.-N. 4244.

ق (Kâf).

Kaschf al-asrâr wa hatk al-astâr (die Enthüllung der Geheimnisse und das Aufheben der Schleier) von **Dschâbir ben Ḥajjân aṣ-Ṣûfî**[66], dem Schüler des Châlid ben Jezîd ben Mu'âwija ben Abî Sufjân. Anfang: Lob sei Gott, dem Ueberbringer der Wohlthaten etc. Es spricht (Dschâbir): Wisse, dass die Worte in diesem Buche unsere Worte sind, und dass Nichts von denselben aus unsern (anderen) Büchern oder fremden Werken entnommen ist etc. Ein Band in älterer Schrift. Mit Randnoten. A.-N. 14. H.-N. 7753.

م (Mîm).

Madschmû'a (Sammelband). A.-N. 2. H.-N. 7741. Inhalt:

1. Die Aufsuchung dessen, was in der Kraft zur Wirkung (Handlung?) liegt, von **Dschâbir ben Ḥajjân aṣ-Ṣûfî**, einem der Schüler des Châlid ben Jezîd ben Mu'âwija ben Abî Sufjân. Anfang: Lob sei Gott, dem Nichts gleichkommt und der in allen Dingen mächtig ist etc. Er handelt darin über die Natur (Elemente) der Dinge und die besonderen Eigenschaften der Gestirne und die Magie und die Talismane und die Alchymie. Von der Hand des Ḥusain ben 'Abdallâh, beendigt am Samstag, den 14. Scha'bân 996, 1588.

2. Das Buch der Regeln, von **Dschâbir ben Ḥajjân**, dem Vorigen. Es ist dies ein Buch über die Erklärung der Dinge. Anfang: Lob sei Gott, den keine Grenze einschränkt.

Madschmû'a. A.-N. 10. H.-N. 7749. Inhalt:

1. Das Buch über die göttliche Kunst und die Philosophie, von dem weisen **Dschâbir ben Ḥajjân aṣ-Ṣûfî.** Er spricht: Und was nun die Sache betrifft, so hast Du, mein trefflichster Bruder und vollkommener Mensch, mich gebeten, ich möchte Dir schreiben, was mir gelungen sei aus der Kunst (der Alchymie), doch steht es nicht in meiner Macht ohne deine Billigung; jetzt will ich Dir mittheilen den Weg der Gelehrten in der Kunst der Künste.

Madschmû'a. A.-N. 23. H.-N. 7762. Inhalt:

2. Abhandlung des **Agathodämon**[67] des Grossen (kann auch heissen „des Aelteren"); er spricht darin zu seinen Schülern über Zeit und Ort seines Todes; sie ist bekannt unter dem Namen „Abhandlung der Vorsicht". Am Ende schadhaft.

Anmerkungen.

1. Sphärische Astronomie.

1. Ich habe dieses Werk in die Uebersetzung aufgenommen, weil es ein interessantes Streiflicht auf die heutige Cultur des Orientes wirft. — 2. Man vergl. S. 17 des ersten Theiles dieser Uebersetzung (Heft 1 dieses Jahrganges), wo Muḥammed, nicht Maḥmûd steht, doch scheint der erstere Name der richtige zu sein. — 3. Dieses Werk des Dschagmînî (ein Compendium der Astronomie) citirt Dorn S. 75 und bemerkt, dass es in Petersburg als Manuscript acad. Nr. 616abc vorhanden sei. Vergl. auch Woepke, notice sur quelques manuscrits arabes etc. im Journal asiatique, Sér. V. Tom. XIX. p. 112. — 4. Wurm giebt in der „monatlichen Correspondenz" von Zach (Jahrg. 1811, Bd. XXIII, S. 74) nach einem Verzeichnisse der Werke Naṣîr ed-Dîns von Jourdain als 18. Werk desselben an: Tedskeret Alnassiriet fil hiet und bemerkt dazu: „Abulfeda citirt sie in seinen Annal. Muslem. T. V. p. 37. Nach Hadji Khalfa ist sie ein Auszug der Astronomie, welcher wissenschaftliche Untersuchungen und Beweise enthält, und in mehrere Capitel getheilt ist; dieses im Orient berühmte Werk — — ist durch zahlreiche Commentare erläutert worden; die berühmtesten derselben sind von Ali ben Muhammed Aldjordjani und von Niddameddin ben Muhammed Alnichaburi, mit dem Beinamen Elaradj oder der Hinkende." Es ist also dieses Werk identisch mit dem im Katalog genannten; vergl. auch H. Ch. II. 268. — 5. Dieser Commentar findet sich auch in Paris als Manuscript vor; vergl. Woepke, l. c. S. 113. — 6. Es ist dies wahrscheinlich die risâla al-fatḥijja (die dem Fatḥ gewidmete Abhandlung) des 'Alâ ed-Dîn 'Alî al-Kûschdschî (gest. 879, 1474) die nach Dorn, S. 5 und 79, zu Konstantinopel 1824 gedruckt worden sein soll. H. Ch. IV. 379 hat: Tractatus vincens (weil fatḥ = Sieg) de astronomia simplici des Molla 'Alâ ed-Dîn 'Alî ben Muḥammed vulgo Kuschji dictus (879 mort.). Woepke, l. c. S. 120, sagt über den Autor al-Kûschdschî: L'auteur, qui mourut en 879 de l'H., et qui avait été un des astronomes réunis par Ouloug Beg à Samarkande, dédia ce traité à Abû'l-Fatḥ Sultân Muhammed Chân, c'est-à-dire au sultan des Osmans Muḥammed II., célèbre par la prise de Constantinople. — 7. Ueber Mîram Dschelebî, den Sohn des Ḳâḍî-Zâdeh, vergl. auch Cantor I. 670, Dorn S. 5, 87, 89, Woepke l. c. 123 und H. Ch. a. v. O. Dieser nennt auch IV. 379 Mîram Dschelebî den Commentator der fatḥijja. Er starb 931, 1524/25. — 8. Welche von den verschiedenen astronomischen Abhandlungen des Ibn Sînâ, die Wüstenfeld, Gesch. d. arab. Aerzte S. 71—75 und H. Ch. III. 361 und 420 citiren, diese sei, ist schwer zu entscheiden, vielleicht der „tractatus de corporibus coelestibus"? — 9. Vergl. Wüstenfeld, Gesch. d. arab. Arzte, S. 148, woselbst das hier genannte Werk ebenfalls citirt wird; es soll als Manuscript auch in der Bibl. Bodley. existiren. Asch-Schîrâzî wurde geboren in Schîrâz 634 (1236), war ein Schüler Naṣîr ed-Dîns,

zeichnete sich besonders in Medicin, Astronomie und Philosophie aus und starb in Tebrîz im Ramaḍan 710 (Jan. 1311). Auch H. Ch. nennt dieses Werk VI. 396. Von dem gleichen Autor citirt er II. 229 ein astronomisches Werk, betitelt: at-tuḥfa asch-schâhijja = das königliche Geschenk.

2. Orts- und Zeitbestimmung.

10. Die arabischen Astronomen unterschieden verschiedene Arten von Quadranten: den Sinusquadranten, den vollständigen, umfassenden Quadranten, den abgeschnittenen Quadranten, den Quadranten ad-destûr oder Kanonquadranten, etc.; vergl. hierüber Sédillot, Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences math. Tome I. p. 321 und flg., und von demselben: Mémoire sur les instruments astron. des Arabes in Mémoires prés. par div. sav. à l'acad. royale des inscript. et belles lettres, T. I. 1844, p. 28, 29, 82, 87; und Dorn, S. 10 und 83—89. — **11.** Vielleicht die „Abhandlung über die Fragen, welche an ihn gerichtet wurden über den Zustand der Sterne"? Vergl. Suter, Fihrist S. 12. — **12.** Vergl. Suter, Fihrist, S. 40. — **13.** Sehr wahrscheinlich seine „Einleitung in die Astrologie"; vergl. Suter, Fihrist S. 33 und 66. — **14.** Dieses Werk führt auch H. Ch. an II. 231. — **15.** Vergl. Dorn, S. 32, 78, 98. — **16.** Vergl. Dorn, S. 18. Er erwähnt hier als Verfertiger eines Quadranten Muḥammed ben Aḥmed el Missy in Damaskus im Jahre 734 und bemerkt dann weiter: „In Uris Katalog (das ist der Bodley. Bibliothek) aber werden mehrere das Astrolabium betreffende Schriften eines Schemseddin Muḥammed ben Aḥmed ben Abdul-Rahim al Mezzi angeführt. Wäre das Zeitalter dieses Schriftstellers näher bekannt — ich wenigstens kenne nichts Näheres — so würde sich die Frage, ob der Verfertiger unseres Quadranten auch der Verfasser jener Abhandlungen ist, leicht entscheiden lassen, während es so für's Erste nur wahrscheinlich erscheint." Wir denken, dass diese Vermuthung Dorn's durch die in unserem Katalog angegebene Lebenszeit dieses al-Mizzî hiermit bestätigt ist. — **17.** H. Ch. hat VI. 309 und 337 „in der Moschee al-Mowajjedi (richtiger al-Mu'ajjedî)" statt al-Amawî wie unser Katalog; die richtige Lesart konnte ich nicht feststellen, doch scheint diejenige des H. Ch. die wahrscheinlichere zu sein. Den Beinamen Abû'l-Jaman kennt H. Ch. nicht. — **18.** Es ist dies eine besondere Form von Sonnenuhren; vergl. Sédillot, traité d'Aboul-Hassan 'Alî, T. II. p. 430; ḥalazûn ist jedenfalls das griechische helix oder helikon (adject.). — **19.** Vergl. H. Ch. III. 470 und 559—561. — **20.** Es ist dies der in anderen arabischen Schriften „Tinkalos" oder „Tinklos" genannte mythische Astrolog; vergl. auch Suter, Fihrist S. 22 und 55. — **21.** Faḍl ad-dâ'ir heisst wörtlich: der Ueberschuss des (ganzen) Umkreises, das heisst der Bogen, um welchen die Sonne über den Meridian hinaus ist, das ist der Stundenwinkel. Vergl. Sédillot, Mémoire etc. p. 64. — **22.** Dieses Werk ist in vielen Exemplaren vorhanden, es wird daher ziemlich geschätzt und verbreitet gewesen sein. — **23.** Vergl. Suter, Fihrist S. 28 und 62 und Steinschneider, zum Speculum astronomicum des Albertus Magnus, Zeitschr. f. Mathem. u. Physik, Jahrg. XVI, S. 388–390. — **24.** Dorn, S. 82 und der Traité du quadrilatère von Nassiruddin el-Toussy, herausgegeben von Alexander Pascha Karatheodory, Konstantinopel 1891, S. 213, haben Lebbân, was auch das Richtige zu sein scheint; dagegen liest der Traité du quadrilatère el-Dschebelî, wo Dorn und unser Katalog al-Dschîlî haben. Auch H. Ch. hat al-Dschîlî; er erwähnt dieses Werk V. 405 und 475; III. 563 erwähnt er von ihm „astronomische Tafeln", ebenso III. 570, wo als Jahr der Abfassung derselben 459, 1066/67 angegeben ist. Kûschjâr scheint nach dem Traité du quadrilatère auch in der Trigonometrie sehr bewandert gewesen zu sein; vergl. meine Besprechung des genannten „Traité" in der Bibl. math. 1893, S. 1—8. **25.** Dies ist die wörtliche Uebersetzung von ar-rub' al-mudschannaḥ, auch H. Ch. III. 402 weiss Nichts zu sagen über dieses Instrument, er lässt mudschannaḥ unübersetzt; Sédillot, Mémoire sur les instr. astron. des Arabes p. 225, übersetzt auch einfach: l'ailé, espèce de cadran. — **26.** Vergl. Anmerkung 17. Ueber al-Anṣârî vergl. Dorn, S. 77, wo als Sterbejahr 781/1379 angegeben ist. — **27.** Vergl. Dorn, 87 u. 89. Er glaubt „Schekâsî" sei das Richtige, was auch Sédillot, Mémoire etc., S. 36 und 219 hat; H. Ch. III. 401 hat Schekkâzî; Dorn giebt S. 87 eine kurze Beschreibung der Vorder- und Rückseite des Instrumentes, auf die ich den Leser verweisen muss. Nach der Zahl der Capitel (19) zu schliessen, würde unsere Abhandlung über das Schakârische Astrolabium den Mîram Dschelebî zum Verfasser haben; vergl. H. Ch. l. c. — **28.** Vergl. Sédillot, Mémoire etc. p. 30—32, 182 flg. und Suter, Fihrist S. 72. — **29.** Vergl. Anmerkung 27. — **30.** Hier ist eigenthümlicher Weise das griechische syntaxis = Zusammensetzung durch das arabische madschâlis, pl. von madschlis = das Zusammensitzen, die Sitzung, wiedergegeben; wir zweifeln nicht daran, dass dies der Almagest des Ptolemaios sei, obwohl diese Bezeichnung uns sonst nirgends vorgekommen ist. — **31.** Ist dies vielleicht Abû'l-Ḥasan 'Alî, der Verfasser des von Sédillot 1834—35 herausgegebenen „traité des instruments astronomiques des Arabes"? Sédillot bemerkt am Schlusse der Introduction, dass in gewissen Manuscripten dieser Autor auch blos Abû 'Alî genannt werde, und dass er unter diesem Namen auch zwei Mal bei H. Ch. vorkomme; wieder Andere nennen ihn Abû'l-Ḥasan 'Alî ben 'Omar. — **32.** Vergl. vorige Anmerkung. — **33.** Nach Analogie mit den Sechziger-Sinus und -Tangenten müssen dies die Tangenten für den Radius = 12 sein. — **34.** H. Ch. hat III. 388 von demselben Verfasser eine Abhandlung über „den verborgenen, abwesenden Sinus" (?) aus dem Jahre 745 (1344), zu welchem bemerkt wird: est autem ille sinus semicirculus, cujus peripheria in partes aequales divisa est (?); vergl. auch Dorn, S. 88. — **35.** Dasselbe Werk erwähnt

H. Ch. VI. 396 und giebt VI. 176, wo er al-Fârisî als Commentator eines philosophischen Werkes nennt, sein Todesjahr auf 629, 1231/32 an. — **36.** Ist jedenfalls der im Fihrist genannte Schüler Mâ-schâ-allâhs, Abû 'Alî Jahjâ ben Ġâlib al-Chajjâṭ; vergl. Suter, Fihrist S. 31 und auch H. Ch. V. 518. — **37.** Vergl. Suter, Fihrist S. 28. — **38.** Sehr wahrscheinlich sein Buch der Elemente der Astronomie; vergl. Suter, Fihrist S. 34 und 67. — **39.** Vergl. Suter, Fihrist S. 31 und 32. — **40.** Dieses Werk führt auch H. Ch. II. 4 an, unter dem Titel: al-bâri' al-mudchil ilâ aḥkâm an-nudschûm, liber excellens aditum astrologiae judiciariae patefaciens; über den Verfasser hat er keine weiteren Angaben. — **41.** Vergl. Suter, Fihrist S. 27: sein daselbst angeführtes „Buch der Fragen" wird wohl mit dem hiergenannten identisch sein. — **42.** Vergl. Suter, Fihrist S. 75; H. Ch. V. 517 hat dieses Werk auch, macht aber über die Lebenszeit Ḳaṣrânîs auch keine Angaben, gleichwie der Fihrist und Casiri; nach der Unterabtheilung zu schliessen, in die ihn der Verfasser des Fihrist gesetzt hat, muss er ein Zeitgenosse von ihm gewesen sein, also in der zweiten Hälfte des 10. Jahrh. gelebt haben. — **43.** Soll wohl der Eigenname Bâzjâr sein.

3. Wissenschaft der Buchstaben und der Namen.

44. Al-Bûnî, das heisst von Bona (Algier) gebürtig, war einer der bedeutendsten Vertreter der arabischen Geheimwissenschaften; sein Todesjahr wird auch von H. Ch. I. 281 auf 1225 angesetzt; vergl. Cantor I. 636. — **45.** Das heisst Mitglied des Ordens der Chalwatî oder Chalwetî, die immer an einem einsamen Orte (chalwa) beten sollten; vergl. Dorn, S. 99, wo als einer der berühmtesten Chalwetî Maḥmûd el-Kurdy (gest. 1195, 1781) angeführt ist; wahrscheinlich ist dieser mit dem Unsrigen identisch. — **46.** Es sind dies magische Quadrate mit $3^2, 4^2, 5^2 \ldots$ bis 9^2 Feldern, mit Buchstaben-Zahlen ausgefüllt, die neben der constanten Summe, die sie nach verschiedenen Richtungen ergeben, auch noch in Bezug auf die Wortbedeutung, die sich aus der Zusammensetzung der Buchstaben ergab, von Wichtigkeit waren. Das Dreier-Quadrat bezog sich auf den Mond, das Vierer-Quadrat auf den Merkur, das Fünfer-Quadrat auf die Venus, das Sechser-Quadrat auf die Sonne, das Siebener-Quadrat auf den Mars, das Achter-Quadrat auf den Jupiter, das Neuner-Quadrat auf den Saturn und das Zehner-Quadrat auf den Thierkreis. Vergl. Handschriftenverzeichniss der kgl. Bibliothek in Berlin, 9. Bd., Arab. Handschriften 3. Bd., herausgegeben von Ahlwardt, S. 506, und auch Cantor I. 636. — **47.** Nach der Wiener Handschrift des Fihrist müsste dies das Werk al-Kindîs „über die Zahlenkunststücke und die Kunst sie zu ersinnen" sein (vergl. Suter, Fihrist S. 11); denn nach Flügel (Al-Kindî, der Philosoph der Araber, in Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes, I. S. 39) ist in der Wiener Handschrift zu dem genannten Titel hinzugefügt:

Kitâb ad-dawârad hamzadsch ḳur'a fî nihâjat al-ḥusn, dem ich so wenig wie Flügel einen Sinn beizulegen vermag; die vier letzten Worte — ḳur'a fî etc. — heissen wörtlich: das Looszieben in (mit) äusserster Schönheit (Geschicklichkeit). Aus der Inhaltsangabe zu schliessen, wäre es aber ein anderes Werk des al-Kindî, vergl. Suter, Fihrist S. 11. — **48.** Hier ist das Dreier-Quadrat dem Saturn zugetheilt, was mit der in Anmerkung 46 nach Ahlwardt gegebenen Darstellung nicht stimmt. — **49.** Es ist dies das Quadripartitum des Ptolemaios. — **50.** Vergl. für diese magische Kunst Suter, Fihrist S. 32 und 65, Anmerkung 188; Ahlwardt a. a. O. S. 551, 560 und 561 liest zâiredsche und nennt sie Buchstaben-Zukunftsenträthselung; er sagt S. 551: „Auch hier wird ein Kreis verwendet, aber mit vielen zum Theil nach dem Mittelpunkt gehenden Linien, oder auch ein in 28 Felder getheiltes Quadrat (Rechteck?), jedes mit einem Buchstaben und auch mit einer Zahl versehen. Sie werden mit den zwölf Sternbildern (wohl eher mit den 28 Mondstationen) in Verbindung gebracht und die Deutung enthält die jedesmalige Antwort auf eine mit ob? oder ob nicht? gestellte Frage." — **51.** Es ist dies der sogenannte grosse oder grösste Schaich, Ibn al-'Arabî, gebürtig aus Andalusien (Spanien), von dem H. Ch. eine grosse Zahl von Werken mannigfachen Inhaltes anführt, doch das hier vorliegende finde ich nicht bei ihm. — **52.** Vergl. Steinschneider: Zur pseudepigraphischen Literatur des Mittelalters, an verschiedenen Stellen; auch H. Ch. erwähnt mehrere geheimwissenschaftliche Werke desselben, doch dieses nicht; er nennt ihn Abû Bekr Aḥmed ben al-Waḥschijja, giebt aber seine Lebenszeit nirgends an. — **53.** Welches seiner zahlreichen im Fihrist (vergl. Suter, Fihrist S. 32 und 33) genannten astrologischen Werke dies sei, ist nicht wohl zu entscheiden. — **54.** Angeblich ein indischer Weiser, wird auch Ṭamṭam und Ṭumṭum gelesen; vergl. H. Ch. V. 112 und Steinschneider, l. c. p. 83. — **55.** Sollte wahrscheinlich heissen „filaktîrijja" und wäre dann nach Fleischers Vermuthung (vergl. Steinschneider, l. c. S. 96) das grichische φυλακτήρια = schützende; in der That hat H. Ch. IV. 463 als Titel eines kurzen Abschnittes 'ilm el-filaktîrât (doctrina phylacteriorum), was nach der Inhaltsangabe zu schliessen, wohl die Wissenschaft der (vor Unheil) bewahrenden Namen oder Buchstaben sein wird. — **56.** Vergl. Ahlwardt, a. a. O. S. 541, wo das Werk nicht dem Aristoteles, sondern dem Hermes Trismegistos zugeschrieben wird; es sei dann aufgefunden worden von dem Weisen Bilînâs(?), von diesem an Aristoteles gekommen und von diesem Alexander dem Grossen übergeben worden. — **57.** 'Ilm ar-ramal ist die sogenannte Punktirkunst, oder Sandfigurenkunst, oder Geomantie. — **58.** Ist wahrscheinlich das S. 168 genannte Werk. — **59.** Es ist dies der berühmte arabische Philosoph und Theologe ar-Râzî, nicht zu verwechseln mit dem noch berühmteren Arzte ar-Râzî (Rhases), der fast 300 Jahre früher gelebt hat; das hier genannte Werk finde ich unter diesem Titel weder bei H. Ch. noch bei Wüstenfeld, Gesch. d. arab. Aerzte S. 111 und flg. Er wird am meisten unter dem Namen Fachr ed-Dîn Muḥammed ben 'Omar ar-Râzî genannt.

4. Chemie (Alchymie) und Physik (Naturlehre).

60. H. Ch., Wüstenfeld und Ahlwardt haben 'Izz ed-Dîn Eidemir (bei H. Ch. auch Eidemur) ben 'Alî ben Eidemir el-Dschildekî, also ist wohl in unserem Katalog das „'Alî ben" im Anfang wegzulassen; er war ein berühmter Alchymist, lebte meistens in Damaskus und starb zu Kairo. Vergl. Wüstenfeld, l. c. S. 150. Das hier genannte Werk haben auch H. Ch. II. 48 und Wüstenfeld, l. c. S. 151, übersetzen aber: Demonstratio de arcanis doctrinae metaphysicae. Auch im Handschriften-Verzeichniss der Berliner Bibliothek findet sich der vierte Theil dieses Werkes verzeichnet (vergl. Ahlwardt, l. c. S. 537); nach der daselbst gegebenen Inhaltsangabe des ganzen Buches enthält der zweite Theil hauptsächlich die Auffassung des Chalifen 'Alî von der Alchymie und die Ansichten des Plinius(?) (diesen Namen vermuthet nämlich Ahlwardt in dem arab. bilînâs) über den Einfluss der Gestirne. — **61.** Dieser grössere Commentar des Dschildekî zu demselben Werke des Abû'l-Ḥasan 'Alî ben Mûsâ al-Andalusî ist bei Wüstenfeld, l. c. S. 151, betitelt: Finis secretorum; das letztere Wort setzt arabisch „asrâr" voraus, in unserem Katalog aber steht „surûr" und dies ist mit „Vergnügen, Freude" zu übersetzen. Beide Werke, der Dîwân und der Commentar sind auch bei H. Ch. genannt, IV. 17 und 18. — **62.** Vergl. über ihn Wüstenfeld, l. c. S. 61 und 62, Steinschneider, zur pseudepig. Literatur des Mittelalters, S. 28—51 und S. 73—75. Cantor I. 631 und 681, und H. Ch. IV. 300, III. 345, V. 280 und 282 etc. Die hier vorliegende Schrift findet sich bei H. Ch. III. 345 angeführt: gradus sapientis de alchymia, und als sein Todesjahr wird 395, 1004/05 angegeben, während bei Wüstenfeld 398, 1007/8 steht. — **63.** Diese Zahlen müssen unrichtig sein nach der soeben genannten Zeitangabe seines Todes, bei Wüstenfeld wird für die Vollendungszeit dieses Werkes das Jahr 348 angegeben. — **64.** Vergl. Anmerkung 61 und Ahlwardt (l. c. S. 534), wo als Todesjahr von Ibn Arfa' Râs 593, 1197 angegeben ist. — **65.** Vergl. auch H. Ch. IV. 461, und Steinschneider, l. c. S. 4, 6, 36. — **66.** Es ist dies der berühmte Alchymist Geber (Dschâbir), nach Wüstenfeld l. c. S. 12 zu Tarsus geboren und wohnhaft zu Kufa; seine Lebenszeit giebt er nicht an; H. Ch. hat V. 34, 79 etc. als Todesjahr 160, 776/77; sein Lehrer Châlid ben Jezîd wird allgemein als der Begründer der Alchymie bei den Arabern betrachtet, er starb nach Ibn Challikân im Jahre 85/704; vergl. auch Wüstenfeld S. 9. Wüstenfeld l. c. S. 12 nennt Dschâbir einen Schüler des Dscha'far aṣ-Ṣâdiḳ, der im Jahre 148, 765 zu Medina starb, was den Zeitangaben besser entsprechen würde. — **67.** Angeblich Lehrer des Hermes, vergl. Steinschneider l. c. S. 40; Ahlwardt (l. c. S. 518) hat Folgendes (aus einem Buche über Geheimkräfte): „es wird berichtet, dass die Kunde der geheimen Bedeutung der Buchstaben von Gott verliehen sei dem Adam, dann dem Agathodämon, das ist Seth, u. s. w. bis auf 'Îsâ (= Jesus), Muḥammed, 'Alî etc.“

Anmerkung: Ich habe mich nachträglich überzeugt, dass das arab. ḳalam 'âdî, das bei den meisten Manuscripten steht, nicht mit „älterer Schrift“, wie ich es gethan habe, sondern mit „gewöhnlicher Schrift“ (Neschî), im Gegensatz zur persischen und maġrebinischen Schrift, zu übersetzen ist.

Recensionen.

Sophus Lie, **Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen.*** Bearbeitet und herausgegeben von Dr. Georg Scheffers. Leipzig, B. G. Teubner 1891. XIV und 568 S.

Mit diesem Werke ist das dankenswerthe Unternehmen begonnen worden, die ausgedehnten Theorien von Sophus Lie einem grösseren Publikum durch eigentlich pädagogische Darstellungen zugänglich zu machen. Dieser Zweck wird in dem vorliegenden Bande, nach dem bescheidenen Dafürhalten des Referenten, in der vollkommensten Weise erreicht. Nur ein verhältnissmässig geringes Maass von Vorkenntnissen wird vom Leser verlangt. Die Darstellung vermeidet Abstractionen nach Möglichkeit, und setzt überall die anschaulichen Grundgedanken der analytischen Operationen in helles Licht. Sie schreitet von ganz einfachen Aufgaben zu schwierigeren Problemen fort, die das höchste wissenschaftliche Interesse beanspruchen dürfen. Zahlreiche zumeist vom Herausgeber herrührende Beispiele (etwa 200) dienen zur Einübung der allgemeinen Theorien. Viele der betrachteten Gegenstände werden von mehreren verschiedenen Seiten beleuchtet, so dass der Leser zur wirklichen Beherrschung des Stoffes gelangen kann. Ein angenehmer, flüssiger Vortrag vollendet den erfreulichen Eindruck des Ganzen.

Die Lie'schen Integrationsmethoden sind hervorgegangen aus der Bemerkung, dass zahlreiche ältere Integrationstheorien solcher Differentialgleichungen, deren Lösungen nur einzelne willkürliche Constanten (nicht Functionen) enthalten, auf einen gemeinsamen Ursprung zurückgeführt, nämlich aus dem Umstande hergeleitet werden können, dass die genannten Differentialgleichungen bekannte infinitesimale Transformationen zulassen. Es handelt sich nun darum, eine systematische Integrationstheorie für solche Differentialgleichungen zu entwickeln.

Der vorliegende Band umfasst nur einen Theil der wunderbaren Integrationsmethoden, die man sämmtlich dem Genie und der unermüdlichen Arbeitskraft eines einzigen Mannes verdankt. Wir mögen die behandelten

---

* Wir können hier eine zweite Besprechung dieses bedeutenden Werkes bringen, welche uns zuging, während die auf S. 95—102 enthaltene im Drucke war, und welche auf einige Punkte, insbesondere auf das eigentliche Integrationsproblem, näher eingeht. M. C.

Gegenstände etwa folgendermassen classificiren, wobei wir jedoch bemerken müssen, dass in dem Werke selbst die nothwendige Reihenfolge der Beweise zu einer etwas anderen Anordnung des Stoffes geführt hat.

I. Hülfssätze aus der Theorie der Transformationsgruppen.

II. Integrationstheorie einer oder mehrerer gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung in zwei Veränderlichen, die bekannte infinitesimale Transformationen zulassen.

III. Integration einer homogenen linearen partiellen Differentialgleichung in n Veränderlichen, mit bekannten infinitesimalen Transformationen.

IV. Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung mit bekannten infinitesimalen Transformationen.

Die unter I. genannten Theorien sind auf ein kleines Maass beschränkt. Der Begriff der infinitesimalen Transformation wird im Zusammenhang mit dem Begriff der eingliedrigen Gruppe ausführlich entwickelt; bei zwei- und mehrgliedrigen Gruppen von infinitesimalen Transformationen dagegen wird der Zusammenhang mit dem Begriff der continuirlichen Gruppe nur angedeutet. Wir gehen hier auf diesen Gegenstand nicht näher ein; es mag auf eine ältere Recension des Referenten (Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. 1889, S. 171 u. flg.) verwiesen werden. Als ein Hauptresultat, das nachher für die Integration der Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung die grösste Bedeutung gewinnt, mag jedoch hervorgehoben werden die Aufstellung aller Typen von zwei- und dreigliedrigen Gruppen von Punkttransformationen in der Ebene. Jede zweigliedrige continuirliche Gruppe nämlich lässt sich durch Einführung geeigneter Veränderlicher in eine solche Form bringen, dass ihre infinitesimalen Transformationen in einer der folgenden Gestalten enthalten sind:

$$1)\ \frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y};\qquad\qquad 2)\ \frac{\partial f}{\partial y},\quad x\frac{\partial f}{\partial y};$$

$$3)\ \frac{\partial f}{\partial x},\quad x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y};\qquad\qquad 4)\ \frac{\partial f}{\partial y},\quad y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

(Theorem 41, S. 425.) Von dreigliedrigen Gruppen gibt es 13 Typen, von denen zwei von willkürlichen Parametern abhängen, einer eine willkürliche Function enthält (S. 501).

Unter II. fallen die einfachsten Anwendungen der Gruppentheorie auf die Integration von Differentialgleichungen. Hier finden wir bereits eine grosse Menge höchst interessanter und folgenreicher Sätze.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$X(x,\ y)\,dy - Y(x,\ y)\,dx = 0$$

oder die mit ihr äquivalente lineare partielle Differentialgleichung

$$X\frac{\partial \omega}{\partial x} + Y\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

gestattet eine infinitesimale Transformation

$$Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

wenn ihre Integralcurven $\omega(x, y) = const.$ von der Transformation unter einander vertauscht werden, das heisst, wenn jede Integralcurve in eine benachbarte übergeht. Dies drückt sich aus durch eine Relation von der Form $U\omega = \varphi(\omega)$, oder, bei geeigneter Wahl des Integrals ω, durch die Gleichung:

$$\xi\frac{\partial \omega}{\partial x} + \eta\frac{\partial \omega}{\partial y} = 1.$$

Hieraus folgt sofort, dass der reciproke Werth der Determinante $X\eta - Y\xi$ ein (Euler'scher) Multiplicator der vorgelegten Differentialgleichung ist, dass also ω durch Quadratur gefunden werden kann:

$$\omega = \int \frac{X\,dy - Y\,dx}{X\eta - Y\xi}. \qquad \text{(S. 97.)}$$

Dies ist eine der ältesten unter den Anwendungen des Transformationsbegriffs auf die Integrationstheorie (1874). Sie ist typisch für das ganze Verfahren. — Eine genaue Betrachtung des Gegenstandes führt zu einer interessanten geometrischen Deutung des Multiplicators (S. 151 u. flg.), die sich auch auf homogene lineare partielle Differentialgleichungen in mehreren Veränderlichen ausdehnen lässt (S. 337 u. flg.).

Capitel 9 enthält zahlreiche specielle Anwendungen dieser Theorie, die alle darauf hinauslaufen, dass eine von vornherein bekannte Eigenschaft des Systems der Integralcurven einer Differentialgleichung erster Ordnung sich als gleichbedeutend erweist mit der Kenntniss einer infinitesimalen Transformation oder eines Multiplicators. Z. B. kann man jede Differentialgleichung durch Quadratur auflösen, deren Integralcurven Parallelcurven (S. 153) oder Isothermen (S. 157, 162) sind. Die Haupttangentencurven und Krümmungslinien einer Fläche lassen sich durch Quadraturen bestimmen, wenn die Haupttangentencurven die Fläche in ein Netz von infinitesimalen Rhomben zerlegen (S. 173); die Krümmungslinien und Minimalcurven, wenn die Krümmungslinien Isothermen sind (S. 179); die Haupttangentencurven und Minimalcurven, sobald die Haupttangentencurven der einen Schaar Isothermen sind (S. 181).

Diese und ähnliche Sätze, die zu den schönsten Anwendungen der Gruppentheorie gehören, verlangen zu ihrer Herleitung nur einen sehr einfachen analytischen Apparat.

III. Eine lineare homogene partielle Differentialgleichung

$$Af = \sum_{1}^{n} {}_k\, \alpha_k(x_1 \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

gestattet eine infinitesimale Transformation

$$Uf \equiv \sum_1^n {}^k \xi_k(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

wenn die Schaar ihrer Charakteristiken, oder der Inbegriff ihrer Lösungen durch die Transformation Uf in sich selbst übergeführt wird. Der analytische Ausdruck hierfür ist das Bestehen einer Relation der Form

$$(UA) \equiv \sum_1^n {}^k [U\alpha_k - A\xi_k] \frac{\partial f}{\partial x_k} = \varrho(x_1 \dots x_n) \,.\, Af.$$

Hat man nun mehrere infinitesimale Transformationen, die dieser Bedingung genügen, so kann man unter Umständen durch blose Differentiation und Elimination Lösungen der Gleichung $Af = 0$ finden. Zunächst gestattet nämlich die Differentialgleichung zugleich mit $U_i f$ und $U_k f$ die aus beiden durch die soeben definirte Klammeroperation hervorgehende neue Transformation $(U_i U_k)$. Nehmen wir an, es seien auf diese Weise r Transformationen $U_1 f \dots U_r f$ gefunden, zwischen denen keine lineare Relation

$$c_1 U_1 f + \dots + c_r U_r f = 0$$

mit constanten Coefficienten besteht, so wird sich unter den Ausdrücken $U_1 f \dots U_r f$ eine gewisse Anzahl $U_1 f \dots U_\varrho f$ finden, die mit Af durch keine Relation von der Form

$$\mu_1(x) \,.\, U_1 f + \dots + \mu_\varrho(x) \,.\, U_\varrho f + \lambda(x) \,.\, Af \equiv 0$$

verknüpft sind, in der die Coefficienten nunmehr Functionen der Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ bedeuten sollen. Die übrigen werden sich dann durch Af, $U_1 f \dots U_\varrho f$ ausdrücken lassen:

$$U_{\varrho+i} f \equiv u_{i1} U_1 f + \dots + u_{i\varrho} U_\varrho f + v_i \,.\, Af.$$

Die Coefficienten $u_{i1} \dots u_{i\varrho}$ in dieser Identität sind Lösungen der Gleichung $Af = 0$ oder Constante.

Dieser fundamentale Satz (Theorem 31, S. 324) genügt unter Umständen schon völlig zur Integration der Gleichung $Af = 0$; in anderen Fällen führt er zu einer bedeutenden Vereinfachung des Integrationsproblems.

Die weitere Durchführung der Integration einer Gleichung $Af = 0$, die ein tieferes Eindringen in die Theorie der Transformationsgruppen voraussetzt, wird nur in besonderen Fällen geleistet. Es werden behandelt eine Gleichung $Af = 0$ in drei Veränderlichen mit einer oder zwei infinitesimalen Transformationen, und eine Gleichung $Af = 0$ in vier Veränderlichen mit einer dreigliedrigen Gruppe, die letzte jedoch nur unter einer gewissen Voraussetzung. Besonderes Interesse zieht die Behandlung des wichtigen Falles auf sich, in dem die dreigliedrige Gruppe die Zusammensetzung der projectiven Gruppe eines Kegelschnittes in der Ebene hat. Die Integration der Gleichung $Af = 0$, die zunächst die Integration zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung und eine Quadratur zu fordern scheint, wird durch einen merkwürdigen Kunstgriff auf die Integration einer Riccati'schen Differentialgleichung zurückgeführt (S. 551 u. flg.).

Die oben mit IV. bezeichnete Gruppe von Problemen bildet eine besonders wichtige Anwendung der unter I. und III. besprochenen Theorien.

Während eine vorgelegte Differentialgleichung erster Ordnung immer unendlich viele Punkttransformationen gestattet, haben Differentialgleichungen höherer Ordnung nur in besonderen Fällen die Eigenschaft, infinitesimale Transformationen zuzulassen. Die erwähnte Reduction der Gruppen von Punkttransformationen auf typische Formen bietet die Möglichkeit, alle diese besonderen Differentialgleichungen von vornherein anzugeben.

Dieses wichtige Problem wird für ein- und dreigliedrige Gruppen (S. 377, 538) vollständig gelöst, für zweigliedrige Gruppen durch ein Beispiel erläutert (S. 468).

Zur Integration einer Differentialgleichung mit bekannter Gruppe bieten sich nun in der Hauptsache zwei verschiedene Wege dar. Der erste, zunächstliegende, besteht in der Reduction der Gruppe auf ihre canonische Form. Diese Operation erfordert Hilfsmittel, die im Allgemeinen einfacher sind als die Integration der vorgelegten Differentialgleichung. (Im Fall einer zweigliedrigen Gruppe z. B. ist im ungünstigsten Fall die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung nöthig.) Nach der Reduction vereinfacht sich dann die Gestalt der Differentialgleichung derart, dass ihre Integration meist ohne Weiteres ausgeführt werden kann.

Die zweite Integrationsmethode beruht auf dem Begriff der Erweiterung einer Punkttransformation. Das Problem der Integration z. B. einer Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = \omega(x, y, y'),$$

ist bekanntlich identisch mit dem der Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung in drei Veränderlichen:

$$Af \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + \omega(x, y, y') \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

Wenn nun die vorgelegte Differentialgleichung die infinitesimale Transformation

$$Uf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

zulässt, so gestattet $Af = 0$ die „erste erweiterte Transformation“

$$U'f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \quad \left(\eta' = \frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx}\right)$$

und umgekehrt. Die Aufgabe kommt also in jedem Falle zurück auf eines der unter III. besprochenen Probleme.

Diese zweite Methode ist im Allgemeinen der ersten vorzuziehen, nicht allein darum, weil sie die dem Problem fremde Einführung der canonischen

Form vermeidet, sondern vor Allem deshalb, weil sie geringere Integrationsschwierigkeiten darbietet (vergl. jedoch die Anmerkung*). So verlangt die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer infinitesimalen Transformation nach der ersten Methode $\left(\text{Reduction der infinitesimalen Transformation auf den Typus } \frac{\partial f}{\partial y}\right)$: Die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung, eine darauf folgende Quadratur, die Integration einer zweiten Differentialgleichung erster Ordnung und schliesslich noch eine Quadratur (S. 384). Nach der zweiten Methode dagegen ist nur die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung und eine Quadratur erforderlich (vergl. Theorem 42, S. 487). Wenn die Zahl der infinitesimalen Transformationen steigt, so verringert sich der Unterschied beider Methoden, was damit zusammenhängt, dass die Differentialgleichung dann eine geringere Zahl von willkürlichen Elementen enthält oder gar durch die Gruppe bestimmt ist.*

Als besonders bemerkenswerth mag noch der Satz hervorgehoben werden, dass die Zahl der linear-unabhängigen infinitesimalen Transformationen, die eine Differentialgleichung von höherer als der ersten Ordnung zulassen kann, an eine obere Grenze gebunden ist; im Falle einer Differentialgleichung zweiter Ordnung z. B. an die Zahl 8 (Theorem 39, S. 405). Die Differentialgleichung zweiter Ordnung kann dann übergeführt werden in die Differentialgleichung $y'' = 0$ der geraden Linien, die die acht infinitesimalen Transformationen der allgemeinen projectiven Gruppe gestattet. Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die nur vier, fünf, sechs oder sieben infinitesimale Transformationen zuliessen, gibt es nicht (S. 538).

Von Differentialgleichungen dritter Ordnung wird als Beispiel für weitergehende Theorien nur der Fall abgehandelt, in dem die Differentialgleichung eine dreigliedrige Gruppe von einer gewissen besonderen Eigenschaft zulässt.

---

* Die wichtige Frage: Ob denn die aus der Kenntniss infinitesimaler Transformationen zu schöpfenden Vortheile vollständig ausgenutzt seien, wird in dem vorliegenden Werke nicht aufgeworfen. Die Entscheidung erfordert offenbar tiefer dringende Untersuchungen. In den meisten Fällen erhält man allerdings den Eindruck, dass weitergehende Vereinfachungen nicht möglich sind; doch dürfte auch in materieller Hinsicht das letzte Wort in dieser Frage noch nicht gesprochen sein. Auffallend ist das Verhalten einiger Differentialgleichungen, bei denen die zweite der im Texte besprochenen Methoden weniger zu leisten scheint, als die erste. Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit dreigliedrigen Gruppen der Typen p, q, $xp + cyq$ oder p, q, $xp + (x + y)q$ hängen noch von einem willkürlichen Parameter ab. Bei allgemeinen Werthen dieses Parameters wird die Integration durch beide Methoden auf sogenanntem algebraischem Wege geleistet, in besonderen Fällen jedoch erfordert die zweite Methode (die im Texte als die vorzüglichere bezeichnet worden war) eine Quadratur (siehe S. 516, 519, 536, 540, 541).

Unter den zahlreichen Beispielen verdient ausser den bereits erwähnten Anwendungen auf Probleme der Flächentheorie besonders hervorgehoben zu werden die Behandlung der linearen Differentialgleichungen (S. 147, 381, 388, 465). Das bekannte Verfahren zur Integration einer solchen Differentialgleichung, deren zugehörige sogenannte verkürzte Differentialgleichung schon integrirt ist, und die Integration dieser verkürzten Gleichung selbst wird erklärt und naturgemäss hergeleitet aus dem Umstande, dass die genannten Gleichungen Gruppen gestatten, die man von vornherein angeben kann.

So unvollständig diese in einen engen Rahmen gedrängte Uebersicht auch ist, so wird sie doch wohl genügen, um eine Vorstellung von dem Reichthum des vorliegenden Werkes zu geben, in dem nicht nur der Anfänger, sondern auch der Forscher eine Fülle von Belehrung und Anregung finden wird. Möchte es der Theorie der Transformationsgruppen recht viele Freunde erwerben!

Für eine zweite Auflage, die das Buch hoffentlich recht bald erlebt, darf Referent wohl den Wunsch aussprechen, dass den Literaturnachweisungen eine grössere Sorgfalt zugewendet werden möchte. Der doch nicht ganz selbstverständliche Satz, dass die Jacobi'schen Multiplicatoren einer partiellen Differentialgleichung selbst durch eine partielle Differentialgleichung definirt werden können, wird ohne eine Verweisung benutzt (S. 341 u. flg.); auch fehlt bei zahlreichen Sätzen, die zwar nicht benutzt, aber gelegentlich mitgetheilt werden, jedes Citat. Gerade in solchen Fällen wären bei der pädagogischen Tendenz des Werkes, das ja zu tiefer dringenden Studien anregen soll, recht sorgfältige Literaturangaben erwünscht gewesen. Auch würde die Brauchbarkeit des Werkes noch gewinnen durch Beifügung eines stofflich geordneten Inhaltsverzeichnisses. Zahlreiche Gegenstände werden an mehreren verschiedenen Orten behandelt, deren Zusammenstellung ein zeitraubendes Suchen erfordert.

Es folgen nun noch einige auf Einzelheiten bezügliche Bemerkungen, die sich dem Referenten bei der Durchsicht dargeboten haben.

Der Ausdruck „infinitesimale Transformationen sind linear-abhängig" wird an verschiedenen Stellen in verschiedenem Sinne gebraucht. Referent möchte vorschlagen, den Ausdruck linear-abhängig nur in dem Falle zu gebrauchen, wo zwischen den infinitesimalen Transformationen eine lineare Relation mit constanten Coefficienten besteht, und in dem allgemeineren Falle von Abhängigkeit schlechthin zu reden, ohne Zusatz eines Beiworts.

S. 12. Der Ausdruck und Begriff der Affinität ist nicht erst von Möbius, sondern schon von Euler eingeführt worden (Introd. t. II, Cap. XVIII).

S. 98. Bei Besprechung der trivialen Transformationen $Uf = \varrho(x, y) . Af$ einer partiellen Differentialgleichung $Af = 0$ wäre wohl des Ausnahmefalls

$(UA) = 0$ zu gedenken gewesen, in dem die Kenntniss der infinitesimalen Transformation dennoch zur Lösung der Gleichung führt, da dann eben ϱ selbst das Integral ist.

S. 182 und 423. Die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \lambda f + \mu, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \nu f + \pi$$

führen nicht nothwendig zu der Relation $\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \nu}{\partial u}$, bestimmen f also unter Umständen ohne Integration.

S. 336. Symmetrischer wäre es gewesen, die fragliche Determinante mit der Functionaldeterminante

$$\left(\begin{matrix} f, & \omega_1, \ldots \omega_{n-1} \\ x_1, & x_2, \ldots . x_n \end{matrix}\right)$$

zu multipliciren.

S. 394 u. flg. Trotz der Versicherung, dass es sich um eine allgemeine Methode handelt, hat Referent bei diesem Beweis den Eindruck des Künstlichen nicht überwinden können.

S. 480 lies am Rande „dreigliedrig" statt „eingliedrig", und im Text streiche „eingliedrige". S. 509 Z. 14 von oben muss es wohl heissen: „so müssen ξ und η noch zwei willkürliche Constante (Functionen der a, b, c) enthalten". S. 375 Z. 2 von oben lies „zweiter" statt „erster". S. 388 Z. 9 von oben $Uf = z(x) \frac{\partial f}{\partial y}$. S. 433 Z. 14 von unten lies $y = af(x) + b$ statt $y = f(x) + ay + b$, und weiter $f(x) = \mathfrak{x}$, $y = \mathfrak{y}$. S. 459 Z. 12 von oben lies $U_1'f$ und $U_2'f$ statt U_1f und U_2f. S. 498 Z. 3 von unten lies $y + e^{-x}\int \varphi e^x dx$ statt $e^{-x}\int \varphi e^x dx$.

E. Study.

Codex Leidensis 399,1. Euclidis elementa ex interpretatione al-Hadschdschadschii cum commentariis al-Narizii. Arabice et latine ediderunt notisque instruxerunt R. O. Besthorn et J. L. Heiberg. Partis I Fasciculus I. Hauniae, in libraria Gyldendaliana (F. Hegel et fil.) 1893. 88 S.

Mit Freuden begrüsst jeder Kenner der Geschichte der mathematischen Wissenschaften das Erscheinen des ersten Heftes der Herausgabe dieser ältesten arabischen Euklid-Uebersetzung, ausgeführt durch al-Ḥadschdschâdsch ben Jûsuf ben Maṭar*, im Auftrage des Wezîrs Hârûn ar-Raschîds, des Barmekiden Jaḥjâ ben Châlid (um 790), nachher unter der Regierung al-Mâmûns durch denselben Ḥadschdschâdsch nochmals revidirt und besser redigirt (um 820). Diese arabische Uebersetzung ist begleitet

* Das arabische Manuscript lässt das „ben" zwischen Jusûf und Matar aus, doch scheint, nach den zuverlässigsten arabischen Quellen, obiger der richtige Name zu sein.

von einem Commentar des Abû'l-'Abbâs al-Faḍl ben Ḥâtim an-Nairîzî* (um 900), der deshalb von grosser historischer Bedeutung ist, weil er uns Bruchstücke aus verloren gegangenen griechischen Commentaren des Heron und Simplikios in arabischer Uebersetzung aufbewahrt hat. Allerdings sind es nur Bruchstücke und auch diese sind leider durch Ausfall mehrerer Blätter des Codex (diejenigen über die Definitionen) noch mehr verstümmelt worden. Immerhin ist nun einmal die historische Streitfrage erledigt, ob Heron wirklich Erläuterungen zu den Elementen Euklids verfasst habe (vergl. bes. Tannery, la géométrie grecque, I. Partie, S. 165 flg.); auch dass Simplikios über die Axiome und Definitionen der Euklidischen Elemente geschrieben hat, steht nun ziemlich fest.** Ob nun, wie Tannery (l. c.) zu verneinen gewillt ist, der ganze Commentar des Heron den Arabern vorgelegen habe, oder ob sie denselben nur auszugsweise aus dem zu ihrer Zeit noch vorhandenen Commentar des Simplikios gekannt haben sollen, ist wohl nicht endgiltig zu entscheiden; mir scheint nach den Angaben des Fihrist der Schluss gezogen werden zu müssen, dass um's Jahr 900 noch beide Commentare, ob nun vollständig oder in Bruchstücken, den Arabern bekannt gewesen sein müssen.

Dieses erste Heft enthält die Definitionen, Postulate, Axiome und die 19 ersten Sätze des ersten Buches. Die Definitionen, Postulate und Axiome enthalten vielfach Zusätze des arabischen Commentators, entnommen aus Heron, Simplikios, Geminos, Pappos und Anderen (der Name des Proklos kommt nirgends vor). Von den Definitionen ist blos der Anfang der ersten (derjenigen des Punktes) und der Schluss der letzten (über die Parallelen) noch vorhanden; hier wird S. 8 (9 der lat. Uebersetzung) Geminos (arabisch اغانيس = Agânîs) erwähnt (vergl. Procl. edid. Friedlein p. 175—177). S. 12 (13) beginnen die Postulate mit dem Satze: Euklides sagt, es giebt fünf Postulate. Zunächst werden die drei ersten als reine Postulate hingestellt, das heisst als solche, quae postulentur tanquam disciplinae prorsus necessaria; dann die beiden anderen als solche, quae explicatione facili egeant, ut ratio eorum agnoscatur et ex natura sua admittantur. — Beim ersten Postulat: ut a quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducamus, befindet sich als Randnote im arabischen Text eine unbedeutende Bemerkung al-Kindîs, die uns aber zeigt, dass dieser arabische Philosoph in der That über die Euklidischen Elemente geschrieben hat (vergl. meine oben citirte Uebersetzung des Fihrist, S. 12).

* Auch hier hat das Manuscript „Narîzî“ entgegen der überlieferten Schreibweise „Nairîzî“.

** Es sind also die beiden Angaben des Ibn Abî Ja'ḳûb an-Nadîm [987] (vergl. meine Uebersetzung des Fihrist in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik Heft VI, S. 21 und 22, Artikel „Simplikios“ und „Heron“) als richtig hinzunehmen und meine diesbezüglichen Anmerkungen 83) und 94) fallen dahin, resp. sind den Thatsachen gemäss abzuändern.

Bei dem fünften Postulat (dem berühmten 11. Axiom) verweist Nairîzî auf den Beweis des 26. (sollte heissen 28.) Satzes des ersten Buches, wo er die Zusätze des Geminos und Simplikios (vergl. Besthorn in Bibl. math. 1892,3, S. 66) bringen werde. Hier wird auch eine Stelle des Simplikios angeführt, worin er als Autoren über dieses Postulat einen Anthisathus(?)* und Diodoros nennt. Nach Proklos (edid. Friedlein S. 191) könnte dieser Name mit Ptolemaios identisch sein, nach dem Fihrist (vergl. meine Uebersetzung S. 19) mit Apollonios. — Nun erscheint noch ein sechstes Postulat, nämlich: dass zwei Gerade keinen Raum einschliessen können, zu welchem die Bemerkung des Simplikios hinzugefügt wird: Hoc postulatum in antiquis codicibus non invenitur, sed causa hujus rei fortasse est, quod nulla explicatione eget, ideoque postulata quinque esse dicuntur.

Es folgen die Axiomata oder communes animi conceptiones, deren neun aufgezählt werden, wozu (aus Heron nach Proklos) bemerkt wird, dass in den älteren Codices nur drei solche angeführt seien (vergl. hierüber Heiberg, Euclidis elementa, I. S. 11 und V. S. LXXXIX flg.). Als letztes figurirt auch das ebenfalls unter die Postulate Aufgenommene: Zwei Gerade können keinen Raum einschliessen.

Der Commentar ergeht sich nun am Schlusse des einleitenden Abschnittes über die Begriffe Theorema, Problema, Porisma und die verschiedenen Theile, in welche Theorema und Problema zerfallen, wie Expositio, Determinatio, Constructio, Demonstratio, Conclusio etc., was zum grössten Theile, wie der Schluss der Einleitung es ausspricht, dem Simplikios entnommen ist, der wiederum wesentlich auf Proklos sich stützt. Hier ist zu bemerken, dass dasselbe Wort „Porisma" arabisch das eine Mal (S. 34) durch „widschdân" (= das Auffinden des Gesuchten) und das andere Mal (S. 38 und 40) durch „fâida" (= fructus = Nutzen, Gewinn) wiedergegeben ist; die erste Bedeutung entspricht also der Gattung von Porismen, die als eine Art von Problemen aufzufassen sind und deren Wesen von Proklos (edid. Friedlein S. 301,25—302,13) definirt wird, während die zweite Bedeutung von Porisma diejenige des Corollarium ist (Proklos 212,12). Hat wohl Simplikios schon zwei verschiedene Wörter für diese beiden Arten von Porismen gebraucht?**

Es beginnt das erste Buch mit den Worten: Propositio prima quinque amplectitur propositiones, propositionem Euclidis et quattuor propositiones Heronis. Diese vier Sätze Herons, die auch theilweise (der 1. und 2.) von Proklos ohne Angabe der Herkunft aufgenommen worden sind, sind

* Warum Herr Besthorn das „s" des arabischen Textes durch ein „ni" ersetzt hat und also „Anthiniathus" liest, weiss ich nicht.

** Es sollte also nach diesem der arabische Titel des Euklid. Buches über die Porismen (vergl. meine Uebersetzung des Fihrist, S. 17 und 49) eher „Kitâb al-widschdân" als „Kitâb al-fawâid" lauten.

ziemlich belanglos und beschäftigen sich mit der Construction eines gleichschenkligen und eines schiefwinkligen Dreiecks über einer gegebenen Geraden. Auch die Zusätze zum zweiten Satze sind ohne Bedeutung und finden sich auch theilweise bei Proklos; das Gleiche ist zu sagen von den Sätzen 3 bis 10. Der 11. Satz enthält einen Zusatz aus Heron, der auch bei Proklos (S. 281), doch ohne Nennung Herons, sich befindet, und in welchem gezeigt wird, wie man im Endpunkt einer Geraden eine Senkrechte errichtet, ohne dieselbe zu verlängern.* Die folgenden Sätze bis zum 18. geben zu keinen weiteren Bemerkungen Anlass, nur der letzte (19.) dieses Heftes enthält wieder einen Heron'schen Zusatz, nämlich einen anderen, nicht apagogischen Beweis des Satzes, dass in einem Dreieck dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüberliegt.

Was den arabischen Text und die Uebersetzung anbetrifft, so haben wir nur die Correctheit beider zu loben, die Namen der Herausgeber bürgen uns dafür, dass diese verdienstvolle Arbeit gediegen zu Ende geführt werde. Druck und Ausstattung des Werkes sind vortrefflich. Störende Druckfehler des arabischen Textes sind uns keine aufgefallen; kleine Unrichtigkeiten in diakritischen Punkten (wie قوق statt فوق S. 56, Z. 6 von unten, und ساف statt ساق S. 58, Z. 1 und 2 von unten) und ذللا statt ذللي (S. 32, Z. 8 von oben) und ein ر statt eines ز (S. 26, Z. 4 von oben) wird der der arabischen Sprache kundige Leser ohne Weiteres von sich aus verbessern. Die Stelle S. 56, Z. 2 von unten wäre vielleicht correcter, wenn gelesen würde: etc. عَلِم ما يشكّكه فى

Heinrich Suter.

Adalbert Breuer. Die goniometrischen Functionen complexer Winkel. 14 S., eine Tafel. — Imaginäre Kegelschnitte. 16 S., eine Tafel. — Die einfachste Lösung des Appolonischen Tactionsproblemes. 16 S., zwei Tafeln. — Die Logarithmen complexer Zahlen in geometrischer Darstellung. 6 S., eine Tafel. — Ueber Conographie. 10. S., zwei Tafeln. — Sämmtlich Erfurt, Bodo Bachmeister, 1892.

Die erste der erwähnten Arbeiten ist als völlig verfehlt zu betrachten, wie wohl aus den Resultaten

$$tg\,(i\varphi) = i\,tg\,\varphi, \quad sin\,i\pi = 0 \qquad cos\,i\pi = 1 \qquad [51\text{ ff.}]$$

zur Genüge hervorgeht. In der zweiten Arbeit wird der bereits ausführlich durchgeführte Gedanke erörtert, dass man zur Versinnlichung der

* Wir fügen hier hinzu, dass auch die Euklid-Ausgabe von Naṣîr ed-Dîn theilweise dieselben oder ähnliche Zusätze, dann aber auch wieder ganz andere enthält, wie die vorliegende; gerade dieser Zusatz findet sich auch bei Naṣîr, allein die Construction der Senkrechten ist nicht durch Halbirung des Winkels G ausgeführt, wie hier, sondern durch Gleichmachen von DE und AG; überhaupt zeigt Naṣîr grössere Selbstständigkeit; wir sind gespannt darauf, wie sich diese bei der Behandlung des Parallelenaxioms (nach Lehrsatz 28) bewähren wird.

imaginären Punkte eines Kegelschnittes mit Vortheil die zu ihm conjugirten Kegelschnitte verwenden kann. In der dritten Abhandlung giebt Herr Breuer als „Breuer's Lösung des Appolonischen Tactionsproblems" eine Construction an, die nur eine unbedeutende auf Grund der üblichen analytischen Behandlung des Problems übrigens evidente Variante der gewöhnlichen Construction ist. Letztere hat vor ihr den Vorzug, dass sie den Orthogonalkreis der drei gegebenen Kreise nicht als reell voraussetzt. Die Veranschaulichung der Logarithmen complexer Zahlen in der vierten Arbeit geschieht mit Hilfe der in räumlichen Polarcoordinaten durch die Gleichung

$$r = e^{\varphi}$$

gegebenen Fläche.

„Breuer's Universalconograph" beruht auf folgendem Satz: Verlängert man einen Brennstrahl eines Kegelschnittes über den Brennpunkt hinaus um den Parameter p und das Loth auf die zugehörige Direktrix über den Fusspunkt hinaus um ihre Entfernung vom Brennpunkt, so geht die Verbindungslinie der so erhaltenen Punkte stets durch den Schnittpunkt der Direktrix mit der Hauptachse. Da dem darauf gegründeten Mechanismus „doch nur eine theoretische Bedeutung zugesprochen werden kann", so giebt Herr Breuer noch speciell einen Hyperbolograph und einen Parabolograph an, von denen der erstere dem Jost'schen Ellipsographen nachgebildet ist.

Ernst Kötter.

Einfache Constructionen der rationalen Curven dritter Ordnung. Von Hermann Willig. Programm. I. Theil. Mainz 1892. 23 S. und 10 Tafeln. II. Theil. Mainz 1893. 7. S. und 6 Tafeln.

Bei einer quadratischen Verwandtschaft entspricht bekanntlich einem Kegelschnitt, der durch einen Fundamentalpunkt O_1 der zweiten Ebene geht, eine rationale Curve dritter Ordnung, deren Doppelpunkt in dem entsprechenden Doppelpunkt O_1 der ersten Ebene liegt. Herr Willig benutzt das, um die verschiedenen Formen der rationalen Curve dritter Ordnung zu zeichnen. Die quadratische Verwandtschaft ist derart specialisirt, dass entsprechende Punkte P' und P mit einem festen Punkte O_2 in einer Geraden liegen und die Verbindungslinien $O_1 P'$ und $O'_1 P$ sich auf einer festen Geraden g treffen.

Ernst Kötter.

Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie. Von H. Stahl und V. Kommerell. Leipzig, B. G. Teubner 1893. 114 S. 4 Mk.

Die Schrift erfüllt voll und ganz, was der Verfasser in der Vorrede sagt, dass sie geeignet ist „zur Grundlage beim Studium grösserer Werke", und sie kommt in dieser Hinsicht einem wirklichen Bedürfnisse entgegen. Es sind die Hauptformeln zur Flächentheorie in eleganter Weise entwickelt, und wenn das Buch auch nicht geeignet ist, von vornherein in die Theorie einzuführen — denn dazu ist die Ausdrucksweise zuweilen zu knapp — so wird es für eine Wiederholung und beim Studium grösserer Werke, wie specieller Untersuchungen, recht gute Dienste leisten.

Das Werkchen ist in drei Theile getheilt. Zunächst werden die allgemeinen Gleichungen einer Fläche untersucht, die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung erklärt und die verschiedenen Liniensysteme auf der Fläche behandelt, die Minimallinien, die isometrischen, geodätischen, Krümmungslinien, die conjugirten Liniensysteme und die Asymptotenlinien. Bei den drei letzten hätte der Referent lieber gesehen, wenn die Verfasser von der Indicatrix ausgegangen wären, statt dass erst zum Schluss des Paragraphen auf dieselben eingegangen wird. Gerade durch die Behandlung der Indicatrix treten ja diese Linien uns anschaulich entgegen und erhalten wir ein klares Bild der Fläche in der Nähe des betreffenden Punktes. — Der zweite Abschnitt behandelt die Herleitung einer Fläche aus gegebenen Eigenschaften. Es sind die Differentialgleichungen abgeleitet, aus denen die Fundamentalgrössen zu bestimmen sind und aus diesen Grössen erhält man dann die Coordinaten durch einfache Quadratur. Nach Zusammenstellung der wichtigsten Formeln für besondere Curven werden die Differentialgleichungen verschiedener Flächenschaaren entwickelt und eingehender die dreifach orthogonalen Flächensysteme behandelt. Es folgt sodann die wichtige von Gauss eingeführte Abbildung auf der Kugel vom Radius 1 durch parallele Normalen, sowie die Einführung der Ebenencoordinaten. Den Schluss dieses Theiles macht eine eingehende Behandlung der Minimalflächen, theilweise nach dem Aufsatze des Herrn H. A. Schwarz über Minimalflächen in Crelle's Journal, Bd. 80, doch ist dieselbe hier dem Zwecke entsprechend leichter, dabei aber elegant.

Den letzten Theil des Buches bildet die Untersuchung der allgemeinen Flächencurven. Nach Ableitung der Formeln über die allgemeine Raumcurve werden dieselben auf die Flächencurven angewendet und als Anwendung die geodätische Krümmung und die Totalkrümmung eines Flächenstückes, sowie Curvensysteme von bestimmten Charakter behandelt. WILLGROD.

Per il terzo Centenario dalla inangurazione dell' insegnamento di Galileo Galilei nello studio di Padova. VII. Decembre MDCCCXCII. Firenze 1892. 29, XXV pag. OMAGGI A GALILEO GALILEI per il terzo Centenario dalla inaugurazione del suo insegnamento nel Bò publicati per cura della R. Accademia di Padova. Padova 1892, 46 pag.

Am 7. December fand in Padua die Feier der 300. Wiederkehr des Jahrestages statt, an welchem Galileo Galilei seine Vorlesungen an der dortigen Hochschule eröffnete. Von Nah und Fern waren Gäste geladen und gekommen, an der Feier sich zu betheiligen, deren Hauptbestandtheil selbstverständlich eine Festrede bildete. Ebenso selbstverständlich ist, dass Herrn Favaro die Aufgabe zugefallen ist, die Zuhörer in die zur Weihe nöthige Stimmung zu versetzen und mit der ganzen Bedeutung des Gedenktages vertraut zu machen. Wäre auch Padua nicht sein regelmässiger Wohnsitz, seine durch mehr als ein Jahrzehnt fortgesetzte erfolgreiche Thätigkeit für das Galilei-Studium, welches zu einem eigenen Gebiete innerhalb der Geschichte der Physik und der Astronomie angewachsen ist, stempelten ihn zum Redner der Erinnerungsfeier, und er hat die ihm gestellte Aufgabe glänzend gelöst. Neues pflegt in einer solchen Festrede kaum jemals veröffentlicht zu werden. Es kommt nur darauf an, das Bekannte in würdige Form zu kleiden und übersichtlich darzustellen. Beides hat Herr Favaro in vollendeter Weise erreicht, und wenn wir nicht daran zweifeln, dass der Eindruck auf die in Padua Versammelten ein unauslöschlicher gewesen sein muss, so werden auch dem gedruckten Vortrage hochbefriedigte Leser nicht fehlen, die sich überdies an der wundervollen Ausstattung der ersten in der Ueberschrift genannten Veröffentlichung erfreuen können. Das Bild Galilei's, die als Anhang dienenden Facsimile's befriedigen alle Anforderungen.

Die zweite Festschrift, über welche wir gleichzeitig mit berichten, ist eine durchaus eigenartige. Die Veranstalter der Jubelfeier haben sich an 16 Persönlichkeiten gewandt, deren Studiengang sie veranlasste, sich mehr oder weniger eingehend mit Galilei zu beschäftigen. Sie alle haben der Aufforderung, zu Ehren Galilei's ihre Feder in Bewegung zu setzen, gern Folge geleistet, und diese 16 Beiträge bilden nun das kleine gleichfalls geschmackvoll ausgestattete Buch. CANTOR.

Algorismus prosaycus Magistri Christani anno fere 1400 scriptus. Nunc primum edidit Dr. F. J. STUDNIČKA, C. R. prof. math. publ. ord. universitatis litterarum Bohem. etc. Pragae 1893. Sumptibus R. Soc. Scunt. Boh. 17 pag.

Der *Tractatus de arte numerandi* des Johannes de Sacrobosco, in der ersten Hälfte des 13. Jahrhunderts verfasst, wurde Jahrhunderte lang dem Rechenunterrichte der Universitäten zu Grunde gelegt. War doch der Verfasser ein hervorragender Lehrer der Pariser Hochschule, und nach Pariser Muster, vielfach mit Pariser Kräften, wurden die Universitäten damals nach und nach in's Leben gerufen. Diese Thatsachen sind längst als wahr anerkannt. Es hat sich aber auch herausgestellt, dass, wo statt des Tractatus des Sacrobosco ein anderer Grundriss benutzt wurde, dessen Verfasser sich dem bekannten und anerkannten Musterwerke eng, oftmals wortgetreu anschloss. Allzuviele derartige Arbeiten sind nicht im Drucke bekannt gegeben, und so erscheint es uns verdienstlich, wenn Herr Studnička ein bisher ungedrucktes Rechenbüchlein aus dem Handschriftenschatze der Prager Bibliothek veröffentlicht hat. Der Verfasser, Cristanus Prachaticensis (1368—1439), war seit 1392 Lehrer in Prag; die Angabe, sein Leitfaden sei um 1400 entstanden, ist also zweifellos richtig. Es würde vermuthlich mit ziemlichen Schwierigkeiten des Satzes verbunden gewesen sein, die wörtlich aus Sacrobosco abgeschriebenen Stellen im Drucke hervortreten zu lassen, aber interessant wäre es gewesen. Die Eigenthätigkeit des Magister Cristanus beschränkte sich meistens auf Weglassungen, Veränderung der Reihenfolge von Sätzen, Beifügung von Zahlenbeispielen. Einen wichtigen Zusatz bildet die sowohl in quadratischer als in dreieckiger Gestalt beigefügte Einmaleinstafel. Auch ein Bruchstück des Rechnens mit Brüchen ist am Schlusse vorhanden, welches jedenfalls nicht Sacrobosco entstammt, da dieser sich auf das Rechnen mit ganzen Zahlen beschränkt hat.

Cantor.

Bibliographie

vom 1. Juni bis 31. Juli 1893.

Periodische Schriften.

Mathematische Abhandlungen der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1892. Berlin, G. Reimer. 4 Mk.

Physikalische Abhandlungen der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1892. Ebendaselbst. 27 Mk. 50 Pf.

Sitzungsberichte der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-phys. Classe. 1893. I.—III. Heft. Leipzig, Hirzel. 3 Mk.

Sitzungsberichte der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-phys. Classe 1893. I. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Classe IIa. 102. Bd., 1. und 2. Heft. Wien, Tempsky. 4 Mk. 50 Pf.

Mathem. Berichte aus Ungarn. 10. Bd., 1. Hälfte. Buda-Pest, Kilian. 4 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von C. Ohrtmann, herausg. von E. Lampe. 22. Bd. (1890). 2. Heft. Berlin, G. Reimer. 8 Mk.

Veröffentlichungen des Recheninstituts der königl. Sternwarte zu Berlin, Nr. 3 (Comet von Olbers u. v. J. 1887/88). Berlin, Dümmler. 2 Mk.

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1891. Abtheilung: Elsass-Lothringen, herausgegeben von H. Hergesell. Strassburg, Bull. 5 Mk.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorol. Instituts. Bd. XXXIII, Niederschlags-Beobacht. i. J. 1891. Herausg. v. W. Bezold. Berlin, Ascher. 10 Mk.

Astrophysikalische Beobachtungen a. Observatorium i. O'Gyalla. XIII. u. IV. Bd. (1890 u. 1891). Herausg. v. N. v. Konkoly. Halle a. S., Schmidt. 6 Mk. 50 Pf.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Karagiannides, A., Die nichteuklidische Geometrie vom Alterthum b. z. Gegenwart. Eine histor.-krit. Studie. Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 60 Pf.

OBENRAUCH, F. MONGE, Der Begründer der darstellenden Geometrie. Eine histor. Studie. I. Theil. Brünn, Selbstverlag des Verfassers. 1 Mk. 50 Pf.

Reine Mathematik.

BOHL, P., Ueber die Darstellung von Functionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen. (Dissertation.) Dorpat, Karow. 1 Mk. 20 Pf.

STOLZ, O., Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. 1. Theil. Reelle Veränderliche und Functionen. Leipzig, B. G. Teubner. 8 Mk.

SCHWERING, K., Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten. Freiburg i. Br., Herder. 1 Mk.

GALLASCH, H., Die Grundlagen der Algebra im Kant'schen Sinne. (Progr.) Berlin, Friedländer. 1 Mk. 20 Pf.

ROHRBACH, C., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Gotha, Thienemann. 60 Pf.

EGGERS, W., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Theil. Leipzig, Seemann. 1 Mk. 50 Pf.

Angewandte Mathematik.

BAUERNFEIND, C. v., Das Präcisionsnivellement in Bayern rechts des Rheins, bearbeitet von C. OERTEL, veröffentlicht von der königl. bayer. Commission für die internationale Erdmessung. München, Franz. 8 Mk.

GAUSS, G., Polygonometrische Tafeln für die Landmessung. Halle a. S., Strien. 12 Mk.

Veröffentlichung der trigonometrischen Abtheilung der königl. preuss. Landesaufnahme. 5. Theil. Die Hauptdreiecke. Berlin, Mittler & Sohn. 10 Mk.

HAMMER, E., Zeitbestimmung ohne Instrumente durch Benutzung der Ergebnisse einer Landesvermessung. Mit Tafeln der Zeitgleichung von 1893—1896. Suttgart, Metzler. 2 Mk.

WOLF, R., Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur. 4. Halbband. (Schluss). Zürich, Schulthess. 8 Mk.

GRAVELIUS, H., Anwendung der elliptischen Functionen bei Berechnung absoluter Störungen. Berlin, Stankiewicz. 2 Mk.

HUYGHENS, C., Ueber die Ursache der Schwere; deutsch von R. MEWES. Berlin, Friedländer's Druckerei. 1 Mk.

Physik und Meteorologie.

ROBERT MAYER's kleinere Schriften und Briefe nebst biographischen Mittheilungen; herausgegeben von J. WEYRAUCH. Stuttgart, Cotta. 10 Mk.

MACH's Grundriss d. Physik, f. d. höh. Schulen d. deutschen Reichs bearbeitet von F. HARBORDT und M. FISCHER. I. Theil. Leipzig, Freytag. 2 Mk.

GRUSON, H., Im Reiche des Lichts; Sonnen, Zodiakallichte, Kometen, Dämmerungserscheinungen nach den ältesten ägyptischen Quellen. Braunschweig, Westermann. 1 Mk.

SARRAZIN, F., Wandkarte der Hagelstatistik von Norddeutschland (1880 bis 1892). Berlin, D. Reimer. 8 Mk.

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

Die Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener-Wittwen-Societät am 31. December 1890, begutachtet auf Grund der eigenen Erfahrungen der Anstalt und eingehender mathematisch-technischer Untersuchungen von Professor JOHANNES KARUP. Dresden, 1892.*

Die vorstehend genannte Arbeit des bekannten Mathematikers und Statistikers ist im Auftrage der Gothaischen Regierung der Oeffentlichkeit übergeben worden. Bestimmend war hierfür nicht sowohl der Wunsch, das Gutachten dem zunächst betheiligten Lande bekannt zu machen, als auch besonders die gerechtfertigte Erwartung, dass bei der Beschaffenheit desselben ein viel weitergehendes Interesse vorhanden sein dürfte.

Schon die Vergangenheit des Instituts, dessen Verhältnisse einer Prüfung unterlagen, enthält Momente, die klar zeigen, dass die finanzielle Lage einer jeden Pensionirungsanstalt am sichersten beurtheilt werden kann unter dem Gesichtspunkte einer technischen Bilanz, welche nicht nur das vorhandene Vermögen angiebt, sondern auch den Erwartungswert aller künftigen Einnahmen und Ausgaben nach rationellen, mathematisch-statistischen Methoden schätzt.

Wiederholt bei der Gothaer Anstalt vorgenommene Prüfungen zeigen, wie aus der Schrift zu ersehen ist, von einander völlig abweichende Ergebnisse, je nachdem die Untersuchungen den Anforderungen der Technik mehr oder minder gerecht geworden sind. Ein günstiger Stand der Verhältnisse ergab sich, wenn wesentlich auf Grund der früheren Erfahrungen der Anstalt Durchschnittsberechnungen angestellt wurden oder nur in beschränkter Weise von der Sterbetafel Nutzen gezogen ist. So liefern die Resultate

* Wiewohl wir das auch nach unserer Ansicht vortreffliche Buch schon S. 137—141 besprochen haben, glauben wir diesen Bericht eines Fachmannes, der uns zugegangen ist, während der unsrige im Druck war, nachliefern zu sollen. M. C.

des bekannten Astronomen Hansen (1869) und des Geh. Staatsrath Mönich (1878/1880) ein günstiges Bild, während die Bilanzen Hopfs (1849) und des jüngst verstorbenen Fleischhauer (1884) im Allgemeinen mit dem unerfreulichen Ergebnisse Karups übereinstimmen. Der bisherige Gang der Geschäfte dürfte an sich schon geeignet sein, den vorwiegend technischen Untersuchungen Recht zu geben.

Aber diese Thatsachen allein sind es nicht, welche zum Studium des vorliegenden Buches auffordern.

Der Verfasser, welcher bei allen seinen Begutachtungen mit grossem Fleisse und Geschick bemüht ist, den Lesern ein Nachdenken und das Verständniss seiner Untersuchungen zu ermöglichen, begnügt sich auch im gegenwärtigen Falle nicht damit, lediglich die nothwendigen Berechnungen nach fertigen Formeln vor unseren Augen auszuführen. Vielmehr entrollt er vor uns ein Bild des gesammten statistischen Apparats, mit welchem er die Grundlagen seiner Rechnung in ebenso mühseliger als scharfsinniger Weise gesammelt hat; er entwickelt uns die Methoden, nach welchen er sich die rohen Daten des statistischen Materials, das zum grössten Theile den Erfahrungen der Wittwencasse selbst entstammt, dienstbar macht, um dieselben endlich in die mit peinlicher Exactheit vorgenommenen Berechnungen überzuführen. Die Mängel, welche ähnlichen Untersuchungen zuweilen anhaften, besonders wo es sich um gelegentliche Arbeiten — auch von sonst tüchtigen Männern, welchen die eine oder die andere Voraussetzung für die einheitliche Behandlung einer so complicirten Aufgabe abgeht — handelt, sind hier völlig vermieden. Man gewinnt überall den Eindruck, dass der Verfasser mit voller Beherrschung seines Gegenstandes an seine Aufgabe herantritt und über alle auftauchenden Fragen — bis zu den rechtlichen — sachkundig verfügt. Diesem Umstande kann man es zuschreiben, dass auch der finanztechnischen Problemen ferner Stehende dem Gange der Betrachtungen bis zu einem gewissen Grade wird folgen können.

Für den Mathematiker, der sich ähnlichen Aufgaben zuwenden will, wird es von Werth sein, dass er überall von einem gewandten Analytiker geführt wird, der nicht nur die vorhandenen theoretischen Resultate seines Gebietes kennt und von ihnen Gebrauch macht, sondern der sich auch die Freiheit nicht nehmen lässt, in selbstständiger Weise ihren Umfang zu erweitern. Der Verfasser hat es zum Oefteren ausgesprochen, dass er die Erfolge der Engländer in der mathematischen Behandlung statistischer Fragen hochschätzt und dass er von ihnen gelernt hat. Schon Tetens hat in der Einleitung zu seinem Buche über Leibrenten im Jahre 1785 sich darüber beklagt, dass man in Deutschland die englischen Arbeiten ignorire und er erwähnt, dass Euler im Jahre 1760 eine

Berechnung der Wittwenrenten als neu gab, die den Engländern schon längst bekannt war. Es ist verdienstlich, dass Karup die englischen Methoden denjenigen vermittelt, welchen ein directes Studium zu beschwerlich ist, zumal es wenig rathsam ist, in einer Anwendung der Mathematik, welche sich nicht mit Unrecht als eine Technik bezeichnet, an den schon vorhandenen Arbeiten vorüberzugehen. Gewisse Kunstgriffe sind in keiner „Technik" zu umgehen und es ist im günstigsten Falle eine Vergeudung der Arbeit, wenn sich ein Jeder auf seine eigene Geschicklichkeit zu ihrer Ermittlung verlässt.

Um zu dem Buche zurückzukehren sei erwähnt, dass es in drei Abschnitte zerfällt, deren erster das eigentliche Gutachten über die Finanzlage in gemeinverständlicher Darstellung und die Vorschläge für die Deckung des ermittelten, nicht unerheblichen Deficits enthält. Wie sehr der Verfasser bemüht ist, in diesem ersten Theile Verständniss für seine Aufgabe und sein Ergebniss zu erzielen, das trotz des vorhandenen Vermögens von nahezu zwei Millionen Mark einen Fehlbetrag von 800000 Mark nachweist, mag nur durch ein Beispiel illustrirt werden. Er führt das Schicksal einer fingirten Wittwencasse, welche zu geringe Beiträge erhebt, für einen Zeitraum von 60 Jahren zahlenmässig durch, indem er für jedes Jahr u. A. den vorhandenen Fonds und das Deficit einer technischen Bilanz gegenüberstellt. Man sieht, dass trotz der ungenügenden Beiträge sich anfänglich ein recht beträchtliches Capital ansammelt, das im 28. Jahre seinen höchsten Stand erreicht, um dann wieder abzunehmen und im 40. Jahre ganz aufgebraucht zu sein, so dass von da ab die Verpflichtungen der Casse nur durch eine überaus starke Erhöhung der Beiträge würden erfüllt werden können.

Der im ersten Theile beschriebene Gang der Rechnung wird in den beiden folgenden Abschnitten wissenschaftlich begründet. Wie natürlich laufen die Untersuchungen in die Erledigung vieler Einzelfragen aus, deren völlige Wiedergabe sich von selbst verbietet. Wir werden daher nur den Versuch machen, durch die Besprechung einiger Capitel, welche über die Verarbeitung und Verwerthung des statistischen Materials handeln, einen Maassstab für die Beurtheilung des Buches zu geben.

Die erste Aufgabe, welche sich der Verfasser zu stellen hatte, war die Anfertigung einer Sterbetafel. Er verwendet dazu, wie bereits angedeutet, wesentlich die in der Vergangenheit des Instituts gegebenen Zahlen und trennt die Listen für Männer, Wittwen und Ehefrauen. Die aus der Existenz von Kindern nach den Satzungen der Casse sich ergebenden Verpflichtungen sind nach der Bowser'schen Tabelle geschätzt.

Karup hat, wie bei früheren Gelegenheiten, zur Ausgleichung der Unregelmässigkeiten, welche die empirisch gegebenen Zahlen zeigen, die Gompertz-Makeham'sche Formel und zwar diesmal nach einer jüngst von dem Engländer King vorgeschlagenen Methode benutzt. Analytischen Ausdrücken, welchen sich statistische Verhältnisse der menschlichen Gesellschaft unter Umständen anschliessen können, kommt zunächst eine lediglich formale Bedeutung zu. Wie sie auch gebildet sein mögen, ob auf Grund mehr oder minder plausibler Hypothesen, immer wird es von dem empirischen Material abhängen, ob sie in dem einen oder anderen Falle zur Anwendung gelangen dürfen oder nicht. Es stellt sich also die Verwendung immer als ein Versuch dar, auf welchen wiederum ein Vergleich der durch die Formel gewonnenen Resultate mit den ursprünglichen Zahlen bejahend oder verneinend antwortet. Bisher hat sich die genannte Formel für Sterbetafeln von Männern für das Alter von 20 Jahren aufwärts bewährt, im vorliegenden Falle liess sie sich auch für höhere Alter (von 50 Jahren aufwärts) auf Frauen anwenden und die zum Vergleich angegebenen Zahlen sprechen so günstig für die Formel und sind interessant genug, um eine Wiedergabe des Verfahrens und einige seiner Ergebnisse wohl zu rechtfertigen.

Die Formel lautet in der verwendeten Gestalt

$$l_x = k s^x g^{q^x} \tag{a}$$

in welcher l_x die Zahl der Lebenden beim Alter x in einer Decremententafel, k, s, g, q aber Constante bedeuten, die aus der Beobachtung nach vier grösseren, sich über gleich viel Jahre erstreckenden und aneinander schliessenden Altersclassen bestimmt werden.

Karup setzte z. B. für Männer $x = 26$ und legte $t = 16$jährige Perioden zu Grunde, so dass er unter Benutzung der aus (a) folgenden Gleichungen

$$\sum_x^{x+t-1} log\, l_x = t\, log\, k + \frac{t}{2}(2x + t - 1)\, log\, s + \frac{q^x(q^t - 1)}{q - 1}\, log\, g,$$

$$\sum_{x+t}^{x+2t-1} log\, l_x - \sum_x^{x+t-1} log\, l_x = \varDelta \sum_x^{x+t-1} log\, l_x = t^2\, log\, s + \frac{q^x(q^t - 1)^2}{q - 1}\, log\, g,$$

$$\varDelta \sum_{x+t}^{x+2t-1} log\, l_x - \varDelta \sum_x^{x+t-1} log\, l_x = \varDelta^2 \sum_x^{x+t-1} log\, l_x = \frac{q^x(q^t - 1)^3}{q - 1}\, log\, g,$$

$$\frac{\varDelta^2 \sum_{x+t}^{x+2t-1} log\, l_x}{\varDelta^2 \sum_x^{x+t-1} log\, l_x} = q^t$$

das folgende Rechnungsschema:

x (Anfangsalter) $= 26,\ t = 16$

Altersclasse	$\Sigma \log l_x$	$\Delta \Sigma$	$\Delta^2 \Sigma$	log
26—41	62,9105			
		— 1,1318		
42—57	61,7787		— 2,2172	0,3458049
		— 3,3490		
58—73	58,4297		— 8,9579	0,9522062
		— 12,3069		
74—89	46,1228		Diff. =	0,6064013
				: 16
			$\log q =$	0,0379001

u. s. w.

$$\log(-\log g) = 6{,}8716464 \quad \log g = -0{,}00074412,$$
$$\log s = -0{,}0015723,$$
$$\log k = 3{,}9995703$$

und die angegebenen Constanten erhielt, welche zur Ermittelung der tabellirten Werthe führten.

Ein Vergleich der in den Erfahrungen der Casse gegebenen Zahlen mit den nach der Formel berechneten ergiebt für Männer die folgenden Ergebnisse:

Altersclasse.	Zahl der Personen unter Risico.	Rechnungsmässige Zahl der Sterbefälle nach den Personen unter Risico der einzelnen Lebensjahre.	Wirkliche Sterbefälle.	Differenzen.
15—29	4420,0	22,86	29	+ 6,14
30—39	11486,5	79,22	73	— 6,22
40—49	12207,5	138,84	143	+ 4,16
50—59	11136,0	242,86	252	+ 9,14
60—69	8346,0	382,72	366	— 16,72
70—79	4235,5	411,45	424	+ 12,55
80—89	740,0	146,55	141	— 5,55
90—96	39,0	11,70	12	— 2,70
Sämmtliche Alter	52610,5	1439,20	1440	+ 0,80

Altersclasse.	Sterblichkeitsprocentsätze rechnungsmässig.	wirklich.	Differenzen.
15—29	0,52	0,66	+ 0,14
30—39	0,69	0,64	— 0,05
40—49	1,14	1,17	+ 0,03
50—59	2,18	2,26	+ 0,08
60—69	4,59	4,39	— 0,20
70—79	9,71	10,01	+ 0,30
80—89	19,80	19,05	— 0,75
90—96	36,69	30,77	+ 5,92

Erwähnenswerth erscheint auch der Weg, den Karup einschlägt, um eine Tabelle für Ehefrauen — für Wittwen fanden sich hinreichende Grundlagen in den Daten der Casse vor — herzustellen. War es bei den bekannten Erfahrungen über Sterblichkeitsverhältnisse geboten, die Geschlechter getrennt zu behandeln, so musste es da, wo die Angaben des Instituts versagten, wünschenswerth sein, einen wenn auch künstlichen Anschluss an die Verhältnisse desselben herzustellen.

Wie der Verfasser zeigt, stimmen die Differenzen und ihr Verlauf nach den Tafeln von Brune und Oppermann für die Sterbeprocentsätze beider Geschlechter nahezu überein, so dass sich vermuthen lässt, dass die Unterschiede zwischen Männer- und Frauensterblichkeit auch für den vorliegenden Fall zutreffen möchten. Die Tafel für Ehefrauen ist demgemäss aus der für Männer unter Berücksichtigung des Mittels aus jenen Differenzen bei Brune und Oppermann hergeleitet, wovon die Thatsache, dass in diesen Differenzen, wie in den Grundbeobachtungen, eine Scheidung von Ehefrauen und Wittwen nicht gegeben ist, um so weniger zurückhalten konnte, als diese Tafel bei Berücksichtigung der Wiederverheirathung für die Verhältnisse der Casse überhaupt nur von untergeordneter Bedeutung ist.

Einen breiten Raum nimmt in den theoretischen Untersuchungen sowohl, als in den Anwendungen, eine Methode ein, nach welcher die Wahrscheinlichkeiten des Invalidewerdens, der Eheschliessung und ähnlicher Verhältnisse, deren Schätzung die Aufgabe erforderlich macht, berechnet werden. Dieselbe einer Besprechung an dieser Stelle zu unterziehen, kann um so weniger umgangen werden, als dieselbe bei ihrer ersten Verwendung in einem 1875 für das Reich erstatteten Gutachten Karup's auf den heftigen Widerstand eines namhaften Mathematikers gestossen ist, dessen Einwände auch in neuester Zeit noch hier und dort in statistischen Publikationen anderer Verfasser wiederkehren.

Wir müssen bekennen, dass wir durch keinen jener Einwände, die sich wesentlich auf den logisch-mathematischen Gang der Betrachtung, weniger aber auf die praktische Verwendbarkeit der Resultate beziehen, in unserer Ueberzeugung erschüttert worden sind, dass die Karup'sche Theorie nicht allein durchaus gerechtfertigt, sondern auch als eine scharfe Consequenz der einer jeden mathematischen Statistik zu Grunde liegenden Annahme von dem selbstständigen Charakter der ihrer Untersuchung zugänglichen Ereignisse anzusehen ist. Zur Rechtfertigung dieser Worte mag der Gedankengang, welchem der Verfasser bei der Behandlung von Invaliditäts-, Heiraths- etc. Wahrscheinlichkeiten folgt, hiermit nochmals einem mathematischen Leserkreise vorgelegt werden. Karup geht in seinen Untersuchungen von dem Begriffe der Intensität aus, wie er seit langer Zeit von den Engländern für die Verhältnisse des Sterbens angewandt wird und welcher zur Voraussetzung hat, dass sich die Zahlen in einer Sterbetafel auffassen lassen als die Werthe einer stetigen, differentiirbaren Function der Zeit, eine Annahme, die im Wesentlichen jeder mathematischen Behandlung statistischer Verhältnisse — der Ausgleichung, Interpolation etc. — zu Grunde liegt. Bezeichnet man mit l_x die Zahl der Lebenden vom Alter x in einer Sterbetafel, so ist die Intensität (force of mortality) μ_x der Quotient aus der Wahrscheinlichkeit in einer unendlich kleinen Zeit dx zu sterben und dieser selbst in der Formel

$$\mu_x = -\frac{d\,l_x}{l_x dx}$$

enthalten, wofür man auch schreiben kann

$$\mu_x = \frac{d\,S_x}{l_x dx}$$

wenn man unter $d\,S_x$ die für die Zeit dx anzurechnende Zahl der Sterbefälle versteht. Entsprechend setzt Karup als Invaliditätsintensität

$$i_x = \frac{d\,J_x}{B_x dx},$$

wo $d\,J_x$ die Zahl der in der Zeit dx unter B_x $x$jährigen eintretenden Invaliditätsfälle bedeutet. Denkt man sich nun eine Gesellschaft von $P(0)$ Personen, welche in der Zeit von 0 bit t durch Invalidewerden und Sterben gelichtet wird, und bezeichnet man mit $\varDelta t$ eine kleine Zeitstrecke, so ist

$$P(t+\varDelta t) - P(t) = -[J(t+\varDelta t) - J(t)] - [S(t+\varDelta t) - S(t)],$$

wenn $P(t)$, $J(t)$, $S(t)$ die zur Zeit t vorhandenen Personen, die ausgeschiedenen Invaliden und Gestorbenen zählen. Dividirt man die Gleichung durch $P(t)\,\varDelta t$ und geht man zur Grenze für das unendlich klein werdende $\varDelta t$ über, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die obigen Definitionen

$$\frac{d\,P(t)}{P(t)} = -[\mu_t + i_t]\,d\,t$$

und durch Integration zwischen 0 und t:

$$\frac{P(t)}{P(0)} = e^{-\int_0^t \mu_t dt - \int_0^t i_t dt} \tag{b}$$

Diese Gleichung gilt allgemein, gleichviel, ob es sich um Ereignisse handelt, die im Sinne der Wahrscheinlichkeits-Rechnung von einander unabhängig sind oder nicht. Sie lässt sich auf beliebig viele Ereignisse, welche den Bestand als Functionen der Zeit vermindern, erweitern. In der Wirklichkeit werden die Wahrscheinlichkeiten, invalide zu werden und zu sterben, alterirt durch die Zahl derjenigen Personen, welche auf die eine oder andere Weise aus einem Anfangsbestande von Personen im Laufe der Zeit ausscheiden. Aber die Intensitäten sind offenbar dieselben, ob eine solche Abhängigkeit statthat oder nicht. Sie geben ein Maass des Wachsens für die betrachteten Functionen in einem bestimmten Moment, wenn man das eine Mal nur auf das Invalidewerden, das andere Mal nur auf das Sterben reflectirt. Im Karup'schen Buche werden — eine Concession gegen erhobene Zweifel — an einem ähnlichen Beispiel die Grenzbetrachtungen ausgeführt, welche zeigen, dass die Störungen, welche die Invaliditäts-Wahrscheinlichkeit durch das Sterben und umgekehrt für einen Moment erfahren würden, gegenüber den anderen Grössen unendlich klein werden und aus der Rechnung herausfallen, obwohl das nach unserem Dafürhalten an sich klar ist.

Zur Auswerthung der in der Beobachtung gegebenen Zahlen macht Karup nun von der Fiction Gebrauch, dass eine Gesellschaft ein Mal nur durch Absterben, andererseits nur durch Invalidewerden gelichtet werde. Er behandelt bei der Feststellung der Invaliditäts-Wahrscheinlichkeit aus den Schicksalen einer Gesellschaft alle anderen Erscheinungen, durch welche dieselbe in ihrem Personenbestande verringert wird, nicht anders, als bisher allgemein das Ausscheiden bei Lebzeiten in Rücksicht gezogen wurde, wenn es auf die Feststellung der Sterbe-Wahrscheinlichkeit ankam.

Für jenen idealen Fall würden, unter $B(t)$ die Zahl der im Alter t existirenden activen Personen verstanden, folgende Gleichungen gelten:

$$B(0) - B(t) = J(t),$$

$$i_t dt = \frac{dJ(t)}{B(t)} = -\frac{dB(t)}{B(t)},$$

$$\int_0^t i_t dt = lB(0) - lB(t),$$

$$\frac{B(t)}{B(0)} = e^{-\int_0^t i_t dt}$$

und also wenn j_t die Wahrscheinlichkeit in der Zeit von 0 bis t invalide zu werden bedeutet, würde sein:

$$j_t = \frac{J(t)}{B(0)} = \frac{B(0) - B(t)}{B(0)} = 1 - \frac{B(t)}{B(0)} = 1 - e^{-\int_0^t i_t dt}.$$

Das Analoge gilt für die Wahrscheinlichkeit w_t zu sterben:

$$w_t = 1 - e^{-\int_0^t \mu_t dt}.$$

Vergleicht man das mit der Gleichung (b) und wird berücksichtigt, dass man unter den dort auftretenden Quotienten $\frac{P(t)}{P(0)}$ die Wahrscheinlichkeit von 0 bis t weder zu sterben, noch invalide zu werden versteht, die V heissen möge, so ist:

$$V = (1 - j_t)(1 - w_t),$$

und man sieht ohne Weiteres ein, dass für die Wahrscheinlichkeit $V_{a,b,c\ldots}$ des Nichteintretens beliebig vieler Ereignisse a, b, $c\ldots$ deren Intensitäten $i_t^{(a)}$, $i_t^{(b)}$, $i_t^{(c)}\ldots$ sind, bei analoger Verwendung der Grössen $j_t^{(a)}$, $j_t^{(b)}$, $j_t^{(c)}\ldots$ sich ergiebt:
$$\underset{a,b,c\ldots}{V} = (1 - j_t^{(a)})(1 - j_t^{(b)})\, 1 - j_t^{(c)})\ldots$$

Welche Bedeutung kommt nun den Grössen j_t, w_t etc. zu? Sie sind definirt als Quotienten im Sinne der Wahrscheinlichkeits-Rechnung, wenn gewisse Einwirkungen ausser Acht gelassen werden, die nach den empirischen Daten allerdings in die mathematische Wahrscheinlichkeit, invalide zu werden etc., mit eingehen. Karup nennt sie unabhängige Wahrscheinlichkeiten, und da er genau sagt, in welchem Sinne er diese Unabhängigkeit verstanden wissen will, so ist auch gegen diese Bezeichnung Nichts einzuwenden, so wenig wie gegen den Begriff des freien Falls, eines Dreiecks, oder den der mathematischen Wahrscheinlichkeit schlechthin, welche letztere immer absehen muss von gewissen Beziehungen unter den realen Objecten, deren die Rechnung in den meisten Fällen auch nicht annähernd Herr werden kann. Der Verfasser nennt sie auch um deswillen so, weil sie lediglich von den Intensitäten, die auch im Sinne der Wahrscheinlichkeits-Rechnung unabhängig sind, sich ableiten lassen. Freilich ist die Unabhängigkeit der Intensitäten ebenfalls in Abrede gestellt worden. Mit welchem Recht, vermögen wir um so weniger einzusehen, als wir den von Karup geführten Beweis, wie bemerkt, gar nicht für nothwendig halten. Immerhin mag aber hier hinzugefügt werden, dass dieser Beweis natürlich von der Eigenart der Abhängigkeit jener verschiedenen Ereignisse ausgeht, die man vor Augen haben muss, um die Unabhängigkeit der Intensitäten einzusehen.

Von einer fehlerhaften Anwendung der Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie sie behauptet worden ist, kann um so weniger die Rede sein, als sich die ganze Schlussfolge von dieser Disciplin durch eine veränderte Terminologie würde frei machen können. Nur den Endresultaten wäre zur Würdigung des Erkenntnisswerthes der Stempel des Wahrscheinlichkeits-Begriffes aufzudrücken. Aus diesem Grunde pflegen auch die Illustrationen, welche durch die bekannten Urnenbeispiele versucht worden sind, für die vorliegenden Betrachtungen die Ueberlegung mehr zu verwirren, als zu befördern.

Die Thatsache, dass die Grösse V die bezeichnete Wahrscheinlichkeit, activ zu bleiben, genau zum Ausdruck bringt, obwohl die Abhängigkeit der in Frage kommenden Ereignisse von der Rechnung ausgeschlossen wird, hat allerdings etwas Ueberraschendes, und es ist daher nicht zu verwundern, dass man zunächst einen Missbrauch des Productensatzes aus der Wahrscheinlichkeitstheorie vermuthete. In der neueren Darstellung, in welcher sich diese Thatsache als eine einfache Consequenz aus den Intensitäten ergiebt, wird man schwerlich einen Angriffspunkt zur Anfechtung des logisch-mathematischen Ganges der Untersuchung finden, wenn man nur im Auge behält, dass Invalidität und Sterblichkeit als selbstständige Functionen der Zeit vorausgesetzt sind, eine Annahme, deren logische Zulässigkeit keinem Zweifel unterliegt, deren thatsächliche Berechtigung aber jede in das Gebiet der Versicherungstechnik gehörende statistische Untersuchung würde nachweisen müssen. Es braucht kaum ausgeführt zu werden, dass die den Berechnungen in letzter Hinsicht zu Grunde liegenden unbekannten Ursachen sich einer exacten Analyse völlig entziehen, und es ist kaum ein Beispiel, das geeigneter wäre als das vorliegende, das Verfahren der Statistik zu rechtfertigen. Es sind offenbar dieselben, nur graduell verschiedenen Ursachen, die zur Invalidität und zum Tode führen und nur das praktische Bedürfniss in Verbindung mit der Art ihrer Wirkungen veranlasst die Fiction, dass sich für jede dieser beiden Folge-Erscheinungen ein in den Zahlen erkennbarer gesetzmässiger Verlauf documentire.

In einem Gebiete, dem das Hilfsmittel der Physik, das Experiment, völlig abgeht, muss der Rechnung allein die Aufgabe zufallen, störende Einwirkungen zu eliminiren, und das ist lediglich der Sinn des vorliegenden Verfahrens. Hat sich dasselbe wegen seiner Annahme im statistischen Sinne selbstständig wirkender Ursachen zu verantworten, so gilt dasselbe von der Statistik und ihrer Schlussfolgerungen schlechthin. Es kann nicht in Abrede gestellt werden, dass von der Wahrscheinlichkeits-Rechnung hin und wieder ein Gebrauch gemacht worden ist, der einer scharfen Kritik nicht Stand hält, aber immer möchte dabei mehr der Gegenstand für sich als unzugänglich einer rechnungsmässigen Behandlung sich erweisen, als die mathematischen Entwickelungen selbst Irrthümer zeigen.

Im vorliegenden Falle hat man sich nur gegenwärtig zu halten, dass man es mit Anwendungen der Rechnung auf praktische Verhältnisse zu thun hat, deren Erkenntnisswerth von Niemandem überschätzt wird. Jederman weiss, dass technische Bilanzen den Weg nur auf eine kurze Strecke beleuchten; sie zeigen mit grosser Sicherheit gegenwärtige Mängel, während ihnen natürlich der Charakter einer Richtschnur für alle Zeit nicht zukommt. Die Voraussetzungen der Rechnung entstammen vergangenen Erfahrungen, während die Verhältnisse, welche dabei in Betracht gekommen sind, in einem beständigen Flusse sich befinden. Nebenbei bemerkt trägt diesem Umstande auch Karup Rechnung, wenn er periodische Wiederholungen der Bilanz für die Gothaische Casse verlangt.

Wir haben gezeigt, dass der logisch-mathematische Gang des Karup'schen Verfahrens einen Einwand nicht zulässt und sind der Ansicht, dass lediglich die Frage der Zweckmässigkeit discutabel bleibt. Die ganze Anschauungsweise stützt sich auf die Verwendung der Intensität als eines Maasses für gewisse statistische Verhältnisse und ihre Vorzüge liegen wesentlich in den Vortheilen, welche der Differentialrechnung überhaupt in der Rechnung eigen ist. In lichtvoller Weise ist auf die Bedeutung der Intensitäten für die Statistik in dem von der Kopenhagener Universität preisgekrönten Werke Harald Westergaards „Die Lehre von der Mortalität und Morbilität" hingewiesen. Sie vereinfachen die ganze theoretische Betrachtung, weil man die im Moment stattfindende Veränderung einer Personengruppe zu überblicken und analytisch zu formuliren im Stande ist. Ein weiterer Nutzen, der im Besonderen im Karup'schen Gutachten von ihnen gezogen wird, ergiebt sich für die Berechnung derjenigen in kürzeren als Jahresterminen zahlbaren und der continuirlichen Renten, welche sich auf zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten beziehen und welche vortheilhaft mit der nach Euler benannten Summationsformel sich ableiten lassen.

Bevor wir auf einige Anwendungen dieser Art näher eingehen, soll noch kurz dargestellt werden, wie sich die Rechnung Karup's bei der Verwerthung der Beobachtungen thatsächlich gestaltet. Wir haben gesehen, dass Karup auf Grund der Intensitäten gewisse Hilfsgrössen einführt und diese sind es, welche durch die Daten der Beobachtung zunächst bestimmt werden. Eine unmittelbare Werthung der Intensitäten, welche unter Umständen sehr starken Veränderungen mit dem Alter unterworfen sind, empfiehlt sich häufig nicht und ist nur in einem Falle von Karup vorgenommen worden. In derselben Weise, in welcher schon immer bei gewöhnlichen Sterblichkeitsbeobachtungen die Wahrscheinlichkeit w_x für einen $x$jährigen im nächsten Jahre zu sterben aus der Gleichung

$$w_x = 1 - e^{-\int_x^{x+1} \mu_x d_x} = 1 - e^{-\int_x^{x+1} \frac{d S(t)}{B(t)}}$$

ermittelt wird, wenn nur auf abgehende Personen Rücksicht zu nehmen ist, wird auch die Grösse j_x als Wahrscheinlichkeit im nächsten Jahre invalide zu werden unter Berücksichtigung des Ausscheidens aus anderen Gründen berechnet.

Wie sich unter der Annahme, dass der Personenbestand $B(t)$ innerhalb des Jahres gleichmässige Veränderungen erfährt, sich als genügende Annäherung

$$w_x = \frac{S}{\frac{B_0 + B_1 + S}{2}} = \frac{S}{B_0 + \frac{E - A}{2}}$$

ergiebt, wenn B_0 und B_1 den Bestand zu Anfang und Ende des Jahres, E die neu eingetretenen, A die abgegangenen Personen, S die Sterbefälle des Jahres bezeichnen, ebenso folgt annähernd:

$$j_x = \frac{J}{\frac{B_0 + B_1 + J}{2}} = \frac{J}{B_0 + \frac{E - A - S}{2}},$$

worin J die Zahl der Invaliditätsfälle des Jahres angiebt.

Auch die Ableitung der Invaliditätsintensität i_x aus den auf diese Weise berechneten Grössen j_x mag noch erwähnt werden. Ist a das niedrigste Alter in einer Invaliditätstafel, A die Zahl der ursprünglich vorhandenen $a$jährigen Personen, so stellt

$$Y_x = A\,(1 - j_a)\,(1 - j_{a+1}) \cdots (1 - j_{x-1})$$

den Bestand der Gesellschaft im Alter von x-Jahren dar, wenn vorausgesetzt wird, dass ein Ausscheiden aus anderen Ursachen in der angedeuteten Weise eliminirt ist. Nun folgt andererseits aus

$$Y_x = A e^{-\int_a^x i_x dx},$$

für i_x

$$i_x = -\frac{d\,Y_x}{Y_x d_x},$$

so dass man als erste Näherung

$$i_x = \frac{Y_{x-1} - Y_{x+1}}{2\,Y_x}$$

erhält, welche den meisten praktischen Anforderungen Genüge leistet, während sich durch Hinzunehmen fernerer Glieder der Entwickelung jede gewünschte Genauigkeit würde erreichen lassen.

Wie man sieht, lassen die Resultate des Karup'schen Verfahrens an Einfachheit kaum zu wünschen übrig, womit nicht gesagt sein soll, dass man unter allen Umständen die bisher üblichen Methoden aufgeben solle. Aber bei verwickelteren Problemen und insbesondere, wenn die Daten für die Invalidität, die Sterblichkeit, die Heirathsfrequenz aus verschiedenen Beobachtungssphären sich ergeben, wird man dem neu eingeschlagenen Weg den Vorzug geben müssen.

Wir erwähnten bereits, dass in dem Gutachten für die Berechnung von Rentenwerthen die Euler'sche Summationsformel mehrfach herangezogen wird. Karup folgt hierin dem Beispiel des Engländers Woolhouse und da diese Verwendung in deutschen Arbeiten sich bisher nicht eingebürgert hat, so mag eine kurze Wiedergabe vielleicht nicht ohne Interesse sein.

Die Formel lautet in der verwendeten Gestalt:

$$\Sigma^{(m)} f(x) = \frac{1}{m}\left[f(x) + f\left(x + \frac{1}{m}\right) + f\left(x + \frac{2}{m}\right) \cdots + f\left(\omega - \frac{1}{m}\right) + f(\omega)\right] =$$
$$\int_x^\omega f(x)\,dx + \frac{1}{2m}[f(x) + f(\omega)] - \frac{1}{12m^2}[f'(x) - f'(\omega)] + \frac{1}{720m^4}[f'''(x) - f'''(\omega)] - \cdots (a)$$

wo $f(x)$ eine Function bedeutet, die eine Entwickelung nach der Taylor'schen Reihe zulässt und $\omega - x$ als durch m theilbar vorausgesetzt wird. Für $m = 1$ geht die Gleichung in:

$$\Sigma f(x) = \int_x^\omega f(x)\,dx + \frac{1}{2}\left[f(x)+f(\omega)\right] - \frac{1}{12}\left[f'(x)-f'(\omega)\right] + \frac{1}{720}\left[f'''(x)-f'''(\omega)\right] - \cdots \quad (b)$$

über und aus der Verbindung dieser beiden Beziehungen folgt:

$$\Sigma^{(m)} f(x) = \Sigma f(x) - \frac{m-1}{2m}\left[f(x)+f(\omega)\right] + \frac{m^2-1}{12m^2}\left[f'(x)-f'(\omega)\right] - \frac{m^4-1}{720m^4}\left[f'''(x)-f'''(\omega)\right] + \cdots (c),$$

womit eine Relation zwischen Summen gewonnen ist, die sich für den vorliegenden Fall einmal auf $\frac{1}{m}$ Jahr, andererseits auf die gewöhnliche Einheit, das Jahr, beziehen.

Sieht man nun z. B. die Grösse $l_x \varrho^x$, die sogenannte discontirte Zahl der Lebenden $\left(\varrho \text{ bedeutet den Abzinsungsfactor und ist für } 3\,\% = \frac{1}{1{,}03}\right)$, als eine Function von x an, in welcher die Functionswerthe mit dem höchsten Alter ω und auch die Derivirten $= 0$ zu setzen sind, so entsprechen den angegebenen Beziehungen (a), (b), (c) drei andere, in welchen nur die Grössen $f(\omega)$, $f'(\omega)\ldots$ fehlen und diese Relationen sind es, welche nicht allein häufig gebrauchte Näherungswerthe für solche Rentenwerthe, die sich auf kürzere als Jahrestermine beziehen, leicht begründen, sondern auch nicht uninteressante Gleichungen zwischen den Rentenwerthen und den Intensitäten zum Ausdruck bringen. So ergiebt sich, um ein sehr einfaches Beispiel anzuführen, der Werth einer pränumerando und halbjährlich zu zahlenden Leibrente von 1 pro anno für eine x-Jahre alte Person

$$^{\frac{2}{2}}R_x = \frac{1}{2}\,\frac{l_x\varrho^x + l_{x+\frac{1}{2}}\varrho^{x+\frac{1}{2}} + \cdots}{l_x\varrho^x} = \frac{\Sigma^{(2)} f(x)}{f(x)}$$

unter Anwendung der dritten Gleichung für $m = 2$

$$^{\frac{2}{2}}R_x = \frac{\Sigma f(x)}{f(x)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\,\frac{f'(x)}{f(x)} - \cdots$$

und wenn man beachtet, dass

$$\frac{f'(x)}{f'(x)dx} = \frac{dl_x}{l_x dx} + log\,nat\,\varrho = -\mu_x + log\,nat\,\varrho$$

$$\frac{\Sigma f(x)}{f(x)} = {}^{\frac{1}{1}}R_x,$$

wo μ_x die Sterblichkeitsintensität füs das Alter x, $^{\frac{1}{1}}R_x$ den Werth der jährlich pränumerando zahlbaren Leibrente von 1 bedeuten

$$^{\frac{2}{2}}R_x = {}^{\frac{1}{1}}R_x - \frac{1}{4} - \frac{\mu_x + log\,nat\,r}{16} + \cdots \quad \left(r = \frac{1}{\varrho}\right)$$

in welcher für praktische Zwecke der dritte Term schon vernachlässigt werden kann.

Ebenso folgt für den Werth einer continuirlichen Rente aus:

$$\overset{m}{\underset{m}{}}R_x = \overset{1}{\underset{1}{}}R_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x + log\,nat\,r) + \cdots$$

für $m = \infty$

$$\overset{\infty}{\underset{\infty}{}}R_x = \overset{1}{\underset{1}{}}R_x - \frac{1}{2} - \frac{\mu_x + log\,nat\,r}{12} + \cdots,$$

so dass sich diese annähernd als um den halben Betrag der Jahresrente kleiner erweist, als die pränumerando in jährlichen Raten zahlbare Leibrente.

Soll die continuirliche Rente nicht blos durch den Tod, sondern auch bei eintretender Invalidität erlöschen, so ergiebt sich analog

$$\overset{\infty}{\underset{\infty}{}}R_x = \overset{1}{\underset{1}{}}R_x - \frac{1}{2} - \frac{\mu_x + i_x + log\,nat\,r}{12} + \cdots,$$

wo i_x die Invaliditäts-Intensität bedeutet.

Wir wollen damit unser Referat beschliessen und auf das Buch selbst verweisen, das ein gründliches Studium wohl werth ist und als ein mustergiltiges Beispiel sowohl dem Statistiker Dienste leisten wird, als es geeignet sein dürfte, dem Neuling einen Einblick in den heutigen Stand der mathematischen Statistik zu gewähren. Von dem reichhaltigen Tabellen-Material wird sich Vieles auch für ähnliche Zwecke dienstbar erweisen. In der Tages- und Fachpresse sind der Veröffentlichung des Gutachtens sehr freundliche Worte geschenkt worden. Man wird, wie wir zuversichtlich glauben, das Buch nicht aus der Hand legen können, ohne dem immensen Fleiss, der Geschicklichkeit und dem Scharfsinn des Verfassers seine Anerkennung zu zollen und wenn in einer Besprechung, was wir für den Hauptvorzug des Buches halten, das Streben nach wissenschaftlicher Begründung, bei allem Lobe den Vorwurf „mathematischer Scholastik“ gefunden hat, so möchte das Buch selbst sich dagegen mit den Worten von Joh. Nic. Tetens verwahren können: „Die kürzeste Praxis erfordert jedes Mal die meiste Theorie“.

Dr. L. Goldschmidt.

Die Grundlagen der Geometrie ohne specielle Grundbegriffe und Grundsätze, mit Einschluss einer vollständigen Darstellung der reinen Sphärik, einheitlich dargestellt von Johann Jacob Iselin, eidgen. diplom. Arzt von Glarus. Bern, Druck und Verlag von K. J. Wyss. 1891. 264 S. 4°. Preis geh. 6 Mk.

Es ist bekannt, dass die bisher übliche Zusammenstellung der Sätze der Geometrie zu einem System gleich in den ersten Grundlagen für unser streng einheitliches Denken eine störende Lücke zeigt. Gewöhnlich wird diese Lücke in die Parallelen-Theorie verlegt. Man kann aber auch sagen, dass der Mangel darin bestehe, dass wir keinen exacten Beweis für den Satz haben: „Die Winkelsumme eines Dreiecks beträgt 180 Grad“. Es sind eine Reihe von Versuchen gemacht worden, diese Lücke auszufüllen, aber sie sind als gescheitert zu betrachten, und man wird sich fragen, ob diese Lücke überhaupt ausgefüllt werden kann. Um diese Frage zu beantworten, muss man sich klar machen, dass die Geometrie ein rein logisches Gebäude ist, das auf gewissen Voraussetzungen über Ebene und Gerade beruht, die durchaus willkürlich sind, und von der reellen Geraden, der praktischen Ebene, abstrahirt sind, statt vom logisch Einfacheren heraus entwickelt. — Diese Frage hat sich auch der Verfasser der vorliegenden, mit vielem Fleisse und grossem Scharfsinn ausgearbeiteten Schrift vorgelegt und dahin gestellt, ob sich nicht in den oberen Stockwerken des Gebäudes der Geometrie die Elemente finden lassen, die nach unten hin angewandt als Stützen bis auf die Unterlage reichen, und das Gebäude, das bisher auf einer luftigen unsicheren Schicht gebaut war, auf einer festen Grundlage aufzubauen gestatten.

Diese Umlagerung glaubt der Verfasser gefunden zu haben. Sehen wir zu, wie er sein neues Gebäude der Geometrie aufbaut, nachdem er die Grundlagen des bisherigen Systems einer einleitenden Discussion unterzogen hat.

Als einfachste Bedingung, der man ein geometrisches Gebilde unterwerfen kann, erscheint die, einen Theil, und zwar den kleinst möglichen von der Bewegung auszuschliessen. Bewegt sich irgend ein Gebilde (gleichgiltig ob Linie, Körper, Raum), so dass einer seiner Punkte fest bleibt, so ist die Summe aller möglichen Lagen eines zweiten Punktes eine Kugel. Die Kugel erscheint also als die Grundlage des geometrischen Gebäudes, was auch philosophisch interessant ist. Wir bemerken, dass die Definition der Kugel unabhängig ist von dem Begriff Gerade, Strecke, Kreis u. s. w. Die Kugel ist total in sich verschiebbar. Die Schnittlinie zweier Kugeln, oder, eine Linie, deren jeder Punkt von jedem von zwei festen Punkten je denselben „Abstandswerth“ hat, heisst Kreis. Der Begriff „Abstandswerth“ kann ohne den Begriff der Geraden durch den der Kugel definirt werden. Es werden ferner alle möglichen Lagen zweier Kugeln, speciell zweier congruenter Kugeln, untersucht, dann die dreier Kugeln u. s. w., kurz, es wird die ganze Sphärik auf das Vollständigste dargestellt, ohne dass der Begriff Ebene oder Gerade jemals benutzt wird.

Es treten allerdings Punkte auf, der Art, dass, wenn zwei fest bleiben, während das ganze Gebilde alle möglichen Lagen einnimmt, auch der dritte seine Lage nicht verändert; solche Punkte werden als „gegenseitig feste Punkte“ bezeichnet. Auch wird die Construction einer in sich verschiebbaren und in umgekehrter Lage zur Deckung zu bringenden Fläche als die Summe der Schnittkreise zweier congruenter stetig wachsender Kugeln mit festem Mittelpunkte gezeigt oder auch als Fläche der Punkte von zwei unter sich gleichen Abstandswerthen von zwei festen Punkten.

Erst in den folgenden Abschnitten wird diese Fläche als Specialfall der Kugel unter dem Namen „Ebene" eingeführt. Bei der Betrachtung zweier Ebenen erscheint dann auch die früher als Linie gegenseitig fester Punkte, Linie des Punktes von gleichem Abstandswerth von drei festen Punkten oder als Kreisachse benannte Gerade als die Schnittlinie zweier Ebenen und als Grenzform des Kreises, als Specialfall der Schraubenlinie.

Der Verfasser zeigt auch, wie eine solche Linie construirt werden kann, z. B. aus einer unendlich grossen Zahl „Mikrokugeln" (wie er sich ausdrückt), deren jede in zwei Gegenpunkten je eine andere berührt. Der früher als Definition oder Axiom aufgestellte Satz: „Die Gerade ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten", kann nunmehr bewiesen werden. — Zwei Ebenen, die sich nicht schneiden, werden parallel genannt und es wird gezeigt, dass es solche giebt und wie sie construirt werden können. Es wird dann betrachtet die Lage dreier Ebenen und zwar insbesondere die dreiseitige Ecke und deren Grenzform, der dreiseitig prismatische Raum. Hier begegnen wir folgendem Lehrsatze: „Die Summe der drei Ebenenwinkel eines geschlossenen dreiseitig prismatischen Raumes beträgt 180 Grad." Beweis: Vergleichen wir die Grösse der sieben Raumtheile, in welche der Totalraum durch die Ebenen des dreiseitig prismatischen Raumes getheilt wird, indem wir die Kanten mit A, B, C bezeichnen, den an jeder in dem geschlossenen Raume gelegenen Winkel mit dem Index 1, den vom geschlossenen Raum aus in bestimmter Stellung betrachtet links davon gelegenen Winkel mit dem Index 2, den rechts mit dem Index 3, endlich den zum ersten über's Kreuz gelegenen mit dem Index 4, wobei nach Lehrsatz $A_1 = A_4$, $A_2 = A_3$, $A_1 + A_2 = 180^0$, und halten fest, dass die Raumgrösse zweier Zweiflache sich wie ihre Winkel verhält, so ergiebt sich, wenn wir den Totalraum mit Q, den geschlossenen prismatischen Raum mit P bezeichnen:

$$\frac{C_1 Q}{360^0} = P + \frac{A_3 Q}{360^0} - \frac{B_4 Q}{360^0} = P + \frac{(180^0 - A_1)\,Q}{360^0} - \frac{B_1 Q}{360^0},$$

oder

$$\frac{A_1 + B_1 + C_1}{360^0}\,Q = P + \frac{180^0}{360^0}\,Q = P + \frac{1}{2}\,Q,$$

oder

$$A_1 + B_1 + C_1 = \frac{P \,.\, 360^0}{Q} + 180^0, \quad \text{oder } = 180^0,$$

da P gegen Q unendlich klein! Hic lepus in cuniculo!

Dass dieses Letztere der Fall ist, ist bisher nicht bewiesen worden und auch nicht ohne Weiteres einzusehen, und darin ruht die Schwäche des Beweises. Wir haben diesen Beweis absichtlich wiedergegeben, weil auf ihm der von der Winkelsumme des Dreiecks gebaut ist, durch den das berühmte Parallelenaxiom bewiesen werden soll. Es folgt nämlich das Capitel „Zwei parallele Ebenen und eine sie schneidende dritte Ebene", und dann „Vier sich schneidende Ebenen", wo zuerst das ebene Dreieck auftritt und seine Grenzform, zwei parallele Geraden von einer dritten geschnitten. Dieses ganze Capitel ist sehr ausführlich behandelt, während die folgenden Partien, Lage von fünf Ebenen zu einander, Lage von sechs und mehr Ebenen, nur kurz skizzirt sind. Den Schluss bildet eine Vergleichung der bisherigen Darstellung mit dem neuen System des Verfassers.

Wir würden nun dem Verfasser nicht so weit gefolgt sein, wenn er sich nicht thatsächlich auf dem richtigen Wege befände.

Nämlich: Unter Benutzung der vom Verfasser gegebenen Definition der Ebene als einer total in sich verschiebbaren und in umgekehrter Lage zur Deckung zu bringenden Fläche und der analogen der Geraden lässt sich exact der Satz beweisen: Die Summe der Aussenwinkel eines ebenen Vieleckes beträgt vier Rechte. Man braucht nur auf die Ebene des Vielecks eine zweite Ebene mit einer Geraden zu legen und so zu verschieben, dass die Gerade immer längs den Seiten des Vielecks gleitet und dabei sich immer um den nämlichen Punkt dreht. Da nun die Winkelsumme eines nEcks gleich $(2n - 4)$ Rechte beträgt, so ergiebt sich für das Dreieck als Winkelsumme 180^0. Nicht unerwähnt wollen wir lassen, dass auch die übrigen Flächen zweiten Grades, das Ellipsoid, Hyperboloid, Kegel u. s. w., in die Darstellung verflochten sind.

Das System des Verfassers hat gegenüber der bisherigen Darstellung verschiedene wissenschaftliche Vorzüge. Es bedarf zu seinem Aufbau nur die allgemeinsten Raumgrössen als Grundlage und nicht die speciellen Begriffe Gerade und Ebene, sowie den speciellen Lehrsatz über Parallele. Ferner ist der Aufbau durchaus logisch, gleichmässig consequent und ganz einheitlich in seiner inneren Entwickelung. Bei der bisherigen Darstellung war die Reihenfolge der Sätze eine willkürliche. Die rein äusserliche Eintheilung in Planimetrie und Stereometrie fällt fort. Diese Gebiete sind doch nicht coordinirt, sondern die Planimetrie ist dem Uebrigen subordinirt. Für eine Reihe von Sätzen bringt der Verfasser neue Beweise, die viel weniger andere Sätze voraussetzen. Verfasser hat sich genöthigt gesehen, mehrere neue Begriffe mit neuen Namen einzuführen, so den schon erwähnten Begriff des Abstandswerthes, und gegenseitig fester Punkte; dann den Begriff eines zu einem zweiten Punkte in einem dritten senkrecht stehenden Punktes, die Begriffe emmetrisch, homocentrisch u. s. w., auf die wir hier unmöglich eingehen können. Wer sich näher für die Grundlagen der Geometrie interessirt, dem können wir die nähere Bekanntschaft mit der besprochenen Schrift Iselins nur empfehlen.

F. Schütte.

Die Geometrie der Lage. Vorträge von Dr. Theodor Reye. 3 Bände. Leipzig, Baumgärtner 1886, 1892, 1892.

In stattlich vermehrtem Umfange liegt jetzt von Herrn Reye's „Geometrie der Lage“ bereits die dritte Auflage vor. Dieser für eine mathematische Schrift erstaunliche Erfolg kann nur in grossen Vorzügen des Werkes begründet sein, und in der That ist es ja dem Verfasser in hohem Maasse gegeben, durch lebendige Frische der Darstellung und glückliche Beschränkung auf das Hauptsächliche die unvergängliche Schönheit geometrischer Entwickelungen zu Tage treten zu lassen. Ganz besonders gilt dies von dem ersten Bande des Werkes, der denn auch — mit einer Ausnahme — wohl nur in der Bezeichnungsweise Aenderungen erfahren hat. (So z. B. schreibt Herr Reye jetzt durchgehends projectiv und perspectiv statt wie früher perspectivisch und projectivisch.) Umgearbeitet ist, wie das bei der Neubearbeitung einer Geometrie der Lage natürlich ist, der Abschnitt über das Fundamentaltheorem. Indem Herr Reye nach dem Vorgange Staudt's aufeinander bezogene Gebilde projectiv nennt, wenn vier harmonischen Elementen des einen vier harmonische des anderen entsprechen, benutzt er zudem noch, dass zwei projective Gebilde stetig aufeinander bezogen sind. Einen Beweis hierfür leitet Herr Reye jetzt daraus ab, dass zwei sich trennenden Paaren des einen Gebildes alle Mal zwei sich trennende des anderen entsprechen müssen. Dass z. B. zwei ineinander liegende projective Punktreihen einzelne Punkte nicht gemein haben, wenn sie drei Punkte entsprechend gemein haben, wird ausgeschlossen, weil aus der Stetigkeit der Beziehung zwei bestimmte Grenzpunkte für jede Strecke folgen, die keinen entsprechend gemeinsamen Punkt enthält.

Einen breiteren Raum hätten wir gern den Ausführungen über das Imaginäre zugewiesen gesehen. Für die Darstellungskunst des Herrn Verfassers wäre es unseres Erachtens eine schöne Aufgabe gewesen, die erstaunliche Leistung, die Staudt durch Bewältigung des Imaginären vollbracht hat, in möglichster Einfachheit uns vorzuführen.

Die Vorlesungen des bisherigen zweiten Theils sind nunmehr, um eine Reihe neuer Entwickelungen vermehrt, auf zwei Bände vertheilt worden. In den ersten acht Vorlesungen des zweiten Bandes folgt der Verfasser im Wesentlichen den entsprechenden Vorlesungen der zweiten Auflage. Er betrachtet zunächst die Collineation und Correlation in der Ebene und im Raume (1—4) und nach Erörterung der Flächen zweiten Grades und ihrer polaren Beziehungen die Ordnungsgebilde der reciproken Beziehung in einer Ebene und im Raum. Daran schliesst sich dann die Behandlung der Affinität in der Ebene und im Raum sowie, im Vortrag 9, die Erörterung der involutorischen Beziehungen, welche in den Vortrag 17 der zweiten Auflage verwiesen waren. Auf die ausgearteten Beziehungen — bei denen unendlich viele Elemente des einen Gebildes einem einzigen des anderen entsprechen — wird überall besonders hingewiesen; offenbar hat der Herr Verfasser bei seinen Untersuchungen über lineare Mannigfaltigkeiten projectivischer und collinearer Gebilde die besondere Wichtigkeit dieser Ausartungen erkannt. Uns wäre es wesentlich gewesen, alle Fälle der perspectivischen Beziehung aufgezählt zu sehen, also z. B. in der Ebene den Fall behandelt zu sehen, wo das Centrum auf der Achse der perspectivischen Beziehung liegt u. s. w.

Das symbolische Rechnen mit geometrischen Verwandtschaften wird in den neu hinzutretenden Vorträgen 10—12 behandelt. Zwei Hauptfragen dieses Gebietes — das zur Zeit bekanntlich von den italienischen Geometern besonders eifrig cultivirt wird — sind bekanntlich die, wann eine gegebene Verwandtschaft durch eine zweite in sich selbst übergeführt, mit ihr vertauschbar ist und wann sie von der zweiten Verwandtschaft umgekehrt wird. Für involutorische Verwandtschaften ist die Bedingung der Vertauschbarkeit, dass die eine aus der anderen durch Zusammensetzung mit einer Involution entstehen soll, dass beide zu einander „harmonisch" sind. Während diese Fragen in den Vorlesungen 10 und 12 behandelt werden, beschäftigt sich die 11. Vorlesung mit cyklischen Collineationen, und zwar werden wir in der Ebene bis zu den senären, im Raume bis zu den quinären Collineationen, deren Gruppen aus sechs bez. fünf Punkten bestehen, geführt. Genauer betrachtet werden eine Gruppe aus 24 ebenen und eine andere aus 120 räumlichen Collineationen, die sich ergeben, wenn man vier Punkte in der Ebene oder fünf Punkte im Raum auf alle mögliche Art collinear in sich überführt. Andere Gruppen, bestehend aus involutorischen Verwandtschaften, die paarweise mit einander vertauschbar sind, werden im 12. Vortrag eingeführt. Die Vorlesungen 13 und 14 über ineinander liegende reciproke Felder und Polar-Beziehungen in der Ebene und im Raum sind aus der Vorlesung 9 der zweiten Auflage entstanden.. Neu ist in 14 der Hinweis auf Flächen, die unendlich viele Pol-Tetraeder einer gegebenen Fläche enthalten, ferner auf den Complex der Strahlen, deren Punktreihen in einer reciproken Beziehung zu den entsprechenden Ebenenbüscheln involutorisch liegen.

In der älteren Auflage folgte nunmehr zuerst das Nullsystem und das lineare Strahlensystem; erst nach Erledigung des allgemeinen Tetraedercomplexes begann dann die Betrachtung der Achsen einer Schaar confocaler Flächen. In der neuen Auflage (Vorl. 15—17) zieht es Herr Reye vor, den Leser ohne irgend welche Vorkenntnisse aus der Strahlen-Geometrie an den Achsencomplex heranzuführen; ein Vorgehen, das unzweifelhaft grosse didactische Vortheile hat, aber manche Wiederholungen nöthig macht, die Vorlesungen 15—17 geben den Inhalt der Vorlesungen 21 und 23 der alten Ausgabe wieder; die Entwickelungen der dazwischen liegenden Vorlesung über Flächen mit gemeinsamem Asymptotenkegel sind an spätere Stelle verwiesen. Eine Vervollständigung der Theorie konnte aus dem Satz abgeleitet werden, dass in ihren Schnittpunkten mit einer Achse eine Fläche zweiten Grades Normalen besitzt, die sich schneiden. Hieraus konnte gefolgert werden, dass aufeinander folgende der Normalen, die sich im Durchschnitt confocaler Flächen auf einer von ihnen errichten lassen, einander schneiden. Diese

Curven sind also in ihrer Eigenschaft als Krümmungslinien erkannt. In diesem Abschnitt giebt Herr Reye auch Sätze über die Kreisschnitte, von dem Umstande ausgehend, dass eine Fläche ihren Focalen in cyklischen Punkten begegnet. Freilich bleibt bei dieser Betrachtungsweise das einschalige Hyperboloid unberücksichtigt, auch ergiebt sich nicht, dass beim hyperbolischen Paraboloid die Geraden nichts Anderes als entartete Kreisschnitte der Fläche sind. Erwähnen wollen wir noch, dass entgegen der Ansicht Darboux' Herr Reye hinsichtlich des Achsencomplexes die Priorität für sich in Anspruch nimmt.

In der 18. und 19. Vorlesung, welche der 10. und der 11. der alten Auflage correspondiren, folgt dann die Untersuchung des Nullsystems und des linearen Strahlensystems. Vorangeschickt ist jetzt die sehr anschauliche Sylvester'sche Definition desselben. Neu eingeführt ist der „Achsen"-Complex des Nullsystems. Er besteht aus den Paaren senkrecht sich kreuzender Geraden, die einander im Nullsystem entsprechen. In der Vorlesung 9 wird eine Abbildung des linearen Strahlencomplexes auf den Punktraum hinangefügt.

Von den Vorträgen 20—23 über Raumcurven dritter Ordnung und das zugehörige Strahlensystem erster Ordnung ist einer (23) ganz neu, während die anderen den Vorlesungen der alten Auflage correspondiren. 23 geht von dem Satz aus, dass alle Raumcurven eines Bündels (dieselben gehen durch fünf Punkte) auf einer beliebigen Ebene Poltripel eines Polarsystems ausschneiden (vergl. den Anhang der zweiten Auflage) und wendet sich sodann zu der Betrachtung der Polcurven eines Polarsystems, Curven dritter Ordnung, denen Pol-Tetraeder dieses Polarsystems in unendlicher Anzahl eingeschrieben werden können, ihre Ebenen bilden dann ein Ebenenbüschel dritter Ordnung. Die Vorlesungen 24 und 25 stimmen inhaltlich mit 15 und 16 der zweiten Auflage überein. Der 26. Vortrag führt die linearen Mannigfaltigkeiten linearer Complexe ein. Den Ausgangspunkt bildet hier der Satz, dass zwei lineare Complexe sich „stützen", sobald einer von ihnen zwei im Nullsystem des anderen homologe Geraden g und g^1 enthält. Jeder von beiden wird durch das Nullsystem des anderen in sich selbst transformirt. Gebüsch, Bündel und Büschel werden durch die Forderung definirt, dass seine Complexe sich auf 1, 2, 3 gegebene Complexe stützen sollen; die so entstehenden Mannigfaltigkeiten werden dann als lineare nachgewiesen.

Ganz erheblich hat die Anzahl der Aufgaben zugenommen, von 121 auf 136 Nummern. Die neuen Aufgaben betreffen zum Theil die Geometrie der Bewegung, zum Theil betreffen sie die Ordnungscurven eines linearen Strahlensystems u. s. w. Am meisten interessirt haben uns die Aufgaben über Polfünfecke und Polsechsecke. In einem Polfünfeck sind jede Kante und ihre gegenüber liegenden Fläche conjugirt, in einem Polsechseck je zwei gegenüberliegende Ebenen, endlich in einem Polviereck — nicht zu verwechseln mit dem Pol-Tetraeder — je zwei gegenüber liegende Kanten. Von den Resultaten ist das Wichtigste, dass zwei Polfünfecke, sowie ein Polviereck und ein Polsechseck allemal einer Fläche zweiter Ordnung angehören.

Die ersten vier Abhandlungen des dritten Bandes geben nun die Theorie des Tetraedercomplexes, im Anschluss daran die Eigenschaften des Büschels und der Schaar von Flächen zweiter Ordnung und die Beziehung des Ersteren auf Ebenenbüschel auf Grund der Polarverhältnisse (vergl. II, 18—20 der älteren Auflage). Neu hinzugetreten sind in der zweiten Vorlesung eine Construction für den associirten Punkt zu sieben gegebenen, sowie eine Methode, durch neun gegebene Punkte eine Fläche zweiter Ordnung zu legen. Es folgt ein Vortrag über Flächen mit gemeinsamem Asymptotenkegel.

Neu hinzugetreten ist (6. Vortrag) die Untersuchung des Strahlensystems (a), dass zwei zu einander collineare Flächen F^2 und $F_1{}^2$ zweiter Ordnung erzeugen, von dem das Normalensystem der Fläche zweiter Ordnung einen speciellen Fall bildet. Den Ausgangspunkt für die Untersuchung bilden einige Sätze über die Polfläche einer Geraden (g). Sucht man zu den zwei collinearen Räumen, in denen F^2 und $F_1^{(2)}$ einander entsprechen, den Tetraedercomplex, und von allen g treffenden Strahlen den zum Raum von $F^{(2)}$ gehörenden Punkt, so bilden dieselben die Polfläche von g, eine Fläche zweiten Grades, auf der zu den Punkten von g Raumcurven dritter Ordnung, zu den Ebenen von g eine Geradenschaar gehört. Daraus folgt, dass der Complex von der zweiten Classe und der sechsten Ordnung ist; da ferner vier Geraden der erwähnten Schaar $F^{(2)}$ berühren, so folgt, dass die Brennfläche des Systems von der vierten Ordnung und Classe ist. Dass die Geraden des Systems Doppeltangenten und die Focalebenen Tangentialebenen derselben sind, kann aus dem Umstande abgeleitet werden, dass für Strahlen des Systems die Polfläche in einen Kegel mit der Spitze auf $F^{(2)}$ ausartet. Für den Fall, dass $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ Regelflächen sind, trifft dasselbe für alle Flächen $F^{(2)}$, $F_1^{(2)}$, $F_2^{(2)}$, ... zu, von denen je zwei das System (a) erzeugen. Indem man nun mit jeder Regelschaar von $F^{(2)}$ die zu ihr in $F_1^{(2)}$, $F_2^{(2)}$, ... homologen zusammen nimmt, erhält man noch zwei andere Systeme (b) und (c) und es stehen dann je zwei der drei Systeme (a), (b), (c) in einem und demselben Abhängigkeitsverhältniss vom dritten. Sie haben die Brennfläche gemein; die 3.4 Fundamentalebenen der collinearen Raumbeziehungen, die zu (a), (b), (c) gehören, sind für alle drei Strahlensysteme singulär und zwar hat z. B. (a) in den Ebenen seines eigenen Tetraeders (α) rationale Curven vierter Ordnung, in denen von (β) und (γ) Curven zweiter Classe.

Den Flächen dritter Ordnung sind in der neuen Auflage acht statt drei Vorträge (7 bis 14) gewidmet. Die drei ersten stimmen im Wesentlichen mit den Vorlesungen 24 bis 26 der älteren Auflage überein. Neu hinzugekommen ist in 7 die Entwickelung des Polaren-Begriffes für Flächenpunkte und des Begriffes der gemischten Polare für Paare von Flächenpunkten. Nachdem in 10 die Fläche als Erzeugniss eines Ebenenbüschels und eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung betrachtet ist, entwickelt dann der Herr Verfasser in 11 in Anlehnung an Sturm'sche und Milinowski'sche Entwickelungen den Polarenbegriff für Punkte ausserhalb der Fläche durch consequente Anwendung des Satzes von der gemischten Polare. Da sich erkennen lässt, dass die Polaren der Punkte einer Geraden einem Büschel angehören, so ergiebt sich die „Kernfläche K^4" (Hesse'sche Fläche) der Fläche sofort vom vierten Grade. In den Vorträgen 12 bis 14 wird nun der Weg bis zum Pol-Pentaeder der Kernfläche gebahnt. Hierzu wird zuerst die Curve c^6 untersucht, welcher der eine von zwei conjugirten Punkten der Kernfläche beschreibt, wenn der andere den ebenen Schnitt von K^4 mit der Ebene π durchläuft. In dieser Curve wird sie von der Polare von π berührt, einer Fläche dritter Ordnung, welche von den Polarebenen der Punkte von π umhüllt wird. Jeder Punkt der Schnittcurve von π und K^4 sendet eine Doppelsehne an c^6; die Ebenen, welche zwei solche Doppelsehnen mit der Curve gemein haben, begegnen ihr in den sechs Ecken eines vollständigen Vierseits. Durch jede Seite eines solchen Vierseits geht noch eine zweite derartige Ebene und die so erhaltenen fünf Ebenen bilden mit π zusammen ein Hexaeder, dessen sämmtliche Ecken auf $K^{(4)}$ liegen. Jedes Hexaeder bestimmt ein Ebenenbüschel dritter Ordnung, dem unendlich viele andere Hexaeder umschrieben werden können. Zwei von diesen Ebenenbüscheln haben die fünf Ebenen des Pol-Pentaeders gemein. Jede Ecke des Pentaeders ist ein Doppelpunkt von K^4, die zugehörige erste Polare ist ein Ebenenpaar, deren Schnittlinie eine Kante des Pentaeders ist.

Die Untersuchungen über F^2-Bündel und Gebüsch und im Anschluss daran der Steiner'schen und der Kummer'schen Fläche sind im Wesentlichen ungeändert in die neue Auflage übernommen worden. Dieselbe schliesst mit der Untersuchung des $F^{(2)}$-Gebüsches mit einer Basisgeraden ab. Auch dieser dritte Band enthält einen Anhang von 103 Aufgaben.

So reich die Fülle der Resultate ist, die Herr Reye uns bietet, so scheint es doch nicht in seiner Absicht gelegen zu haben, eine erschöpfende Uebersicht über die rein geometrische Forschung zu geben. Vielmehr hat er wohl eine Zusammenstellung der Entwickelungen geben wollen, die gewissermassen das Fundament für die rein geometrische Forschung bilden. So finden wir, dass Herr Reye z. B. die trilineare Beziehung und ihre so zahlreichen Anwendungen, Ausblicke auf Curven und Flächen n^{ter} Ordnung, wie andererseits seine eigenen neuesten Untersuchungen ganz bei Seite gelassen hat.

Ernst Kötter.

Fr. Hultsch, **Die Näherungswerthe irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes.** Auszug aus den Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August's-Universität zu Göttingen vom 28. Juni 1893. S. 367 bis 428.

Die Zahl der Schriftsteller, welche mit den angenäherten Quadratwurzeln in Archimed's Kreismessung sich beschäftigt und dem Wege nachgeforscht haben, auf dem die dort erhaltenen Werthe und in erster Linie die Ungleichung

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

erreicht worden sein mögen, ist gross, aber Keiner von ihnen war nach unserer auch S. 301 bis 303 der zweiten Auflage unserer Vorles. Gesch. Math. Bd. I ausgesprochenen Ueberzeugung berechtigt, eine mehr als persönliche Geltung seiner Vermuthungen in Anspruch zu nehmen. Herr Hultsch dagegen dürfte auf unsere Zustimmung rechnen, wenn er seiner Abhandlung das selbst archimedische Wort εὕρηκα an die Spitze gestellt hätte. Um unsere Leser in den Stand zu setzen, sich leicht ein Urtheil über die Hultsch'sche Wiederherstellung der antiken Methode zu bilden, wollen wir dieselbe ohne die antike Einkleidung, welche in der uns vorliegenden Abhandlung ihr gegeben ist, ganz kurz darstellen. Herr Hultsch hat gewiss Recht daran gethan, jener Einkleidung sich zu bedienen; sie allein setzt den Kenner griechischer Mathematik in den Stand, ein Urtheil darüber zu fällen, ob nicht mehr in Archimed hineingelesen als aus ihm herausgelesen sei; aber deutlicher dürfte dem heutigen Mathematiker die Sache in analytischer Form sein. Herr Hultsch geht davon aus, dass er zeigt, dass Archimed im Besitz der Ungleichung

$$a \pm \frac{b}{2a \pm 1} < \sqrt{a^2 \pm b} < a \pm \frac{b}{2a}$$

gewesen sein kann. Da nun $3 = 2^2 - 1$, so ergab sich $\sqrt{3} > 2 - \frac{1}{4-1}$, d. h. $\sqrt{3} > \frac{5}{3}$. Nun wurde, um das Auftreten von Brüchen früher, als sie nothwendig erscheinen mussten, zu vermeiden, der Radikand mit $\frac{3^2}{3^2}$ vervielfacht. Mit anderen Worten, man schrieb $\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3 \cdot 3^2}{3^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{27}$ und suchte $\sqrt{27} = \sqrt{5^2 + 2} < 5 + \frac{2}{2 \cdot 5}$, d. h. $\sqrt{27} < \frac{26}{5}$ und $\sqrt{3} < \frac{26}{15}$. Nun musste $3 = \frac{3 \cdot 15^2}{15^2}$, $\sqrt{3} = \frac{1}{15}\sqrt{675}$ gesetzt werden, und es kam darauf an, $\sqrt{675}$ zu finden. Da war $\sqrt{675} = \sqrt{26^2 - 1} < 26 - \frac{1}{2 \cdot 26}$, d.h. $\sqrt{675} < \frac{1351}{52}$ und $\sqrt{3} < \frac{1351}{780}$. Andererseits war $\sqrt{26^2 - 1} > 26 - \frac{1}{2 \cdot 26 - 1}$,

d. h. $\sqrt{675} > \frac{1325}{51}$ und $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$, und so sind von dem Ausgangspunkte des Näherungswerthes $\sqrt{3} \sim \frac{26}{15}$ aus, der zum eisernen Bestande der rechnenden Geometrie geworden ist, die beiden archimedischen Grenzwerthe gefunden. Ausser diesem Hauptergebnisse der Hultsch'schen Untersuchung wird der aufmerksame Leser noch manches Andere ihr entnehmen können, und wir persönlich bedauern sehr, dass wir den vom Verfasser uns überschickten Abzug erst erhielten, als der Druck unserer oben erwähnten zweiten Auflage über Archimed hinausgeschritten war. Wenn Herr Hultsch die vorzugsweise Benutzung binärer Stammbrüche, d. h. Brüche von der Form $\frac{1}{2^k}$, auf die nach fortgesetzter Halbirung übliche Theilung der Längenmaasse stützt, so möchten wir ergänzend an das ägyptische Rechnen erinnern, welches dem Scholiasten des platonischen Charmides gemäss auch in Griechenland neben dem eigentlich hellenischen Rechnen Bürgerrecht erlangt hatte.

CANTOR.

Apollonii Pergaei quae graece exstant cum commentariis antiquis edidit et latine interpretatus est J. L. HEIBERG, Dr. phil. Vol. I, 1891, pag. XII, 451. Vol. II, 1893, pag. LXXXV, 361. Leipzig, B. G. Teubner's Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum.

Welche stattliche Menge von Neuausgaben griechischer Mathematiker hat nicht die Presse verlassen, seit Hultsch 1864 den Heron veröffentlichte! Die seit jener Zeit verflossenen nicht vollen 30 Jahre haben in neuem, kritisch tadellosem Gewande und, was nicht von geringer Bedeutung ist, in leicht zugänglichen, handlichen Ausgaben uns alle jene Werke gebracht, die bis dahin meistens nur in Gestalt von Folianten auf öffentlichen Bibliotheken zu finden waren und sich selten in die Büchersammlung eines Privaten verirrten. Für die Kegelschnitte des Apollonius war man auf die Halley'sche Ausgabe von 1710 angewiesen, wenn man sich nicht an der deutschen Bearbeitung von Balsam (1861) genügen lassen wollte. Es war fast eine Ehrenpflicht des Herausgebers des Archimed und der Euklidischen Elemente, in dieser Nothlage einzugreifen, und Herr Heiberg hat dieser Ehrenpflicht zu genügen gewusst. Auf Grundlage der beiden ältesten Vaticancodices V und v, deren Ersterer aus dem XII. bis XIII., Letzterer aus dem XIII. S. stammt, und unter Vergleichung zahlreicher anderer Handschriften hat Herr Heiberg die neue Ausgabe veranstaltet. Neben den Büchern I bis IV der Kegelschnitte sind die bei Pappus vorhandenen Bruchstücke anderer Schriften des Apollonius nebst den Lemmen des Pappus selbst und der Commentar des Eutokius zum Abdruck gekommen, letzterer, sowie die vier Bücher Kegelschnitte, mit beigegebener lateinischer Uebersetzung. Ausführliche Prolegomena lehren die Geschichte der Handschriften und der älteren Ausgaben kennen. Herr Heiberg hat nach den vier griechisch erhaltenen Büchern der Kegelschnitte Halt gemacht, ohne die drei Bücher anzuschliessen, welche in arabischer Uebersetzung auf uns gekommen sind. Vom sprachwissenschaftlichen Standpunkte begreifen wir vollständig, dass Herr Heiberg sich nicht zu Weiterem berechtigt fühlte. Der Mathematiker aber verlangt unbedingt die Bücher V bis VII, und des Verlegers Aufgabe scheint uns zu sein, für deren Bearbeitung, etwa durch Herrn Nix, dem auch Herr Heiberg diese Aufgabe zuweist, in einem dritten Bändchen Sorge zu tragen. CANTOR.

Bald. Boncompagni, Catalogo dei lavori di ENRICO NARDUCCI. Roma 1893. 18 S.

Enrico Narducci ist am 23. November 1832 in Rom geboren und ebenda am 11. April 1893 verschieden. Referent war nie anders als in brieflichen Beziehungen zu dem der Wissenschaft und seinen Freunden allzufrüh entrissenen Gelehrten, aber Persönlichkeiten, die das Vergnügen hatten, dem Verstorbenen näher zu treten, und auf deren Urtheil wir Gewicht legen, versichern uns, dass der unmittelbare Umgang mit dem Bibliothekar der Alessandrinischen Sammlung in Rom den angenehmen Eindruck nur zu vertiefen vermochte, den der briefliche Verkehr mit dem gefälligen, ungemein kenntnissreichen Manne schon hervorbrachte. Narducci's wesentliche wissenschaftliche Leistungen sind bibliothekarischer Natur gewesen, und unter ihnen zeichnen sich die beiden Auflagen des Boncompagni'schen Manuscriptenkatalogs (1862 und 1892) besonders vortheilhaft aus. Es war nur natürlich, dass Fürst Boncompagni das Verzeichniss von Narducci's in Druck erschienenen Arbeiten, welches dieser selbst 1886 veröffentlichte und welches bereits 241 Nummern umfasst, bis zum Tode des hilfreichen Freundes fortsetzte und neuerdings herausgab, ein gleichzeitiges Denkmal für Beide, die so lange und erfolgreich zusammen gewirkt haben. CANTOR.

Bibliographie

vom 1. August bis 30. September 1893.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. 18. Bd. 1. Abth. München, Franz. 8 Mk.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. 1893. 2. Heft. Ebendaselbst. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften, mathem.-naturw. Classe, Abth. IIa. 102 Bd., 3. u. 4. Heft. Wien, Tempsky. 4 Mk. 60 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 28. Jahrgang. 1. und 2. Heft. Leipzig, Engelmann. 4 Mk.

Tageblatt der deutschen Naturforscher-Versammlung in Nürnberg vom 11. bis 15. September 1893. Nürnberg, Schrag. 2 Mk.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 2. Bd., 1891—1892. Mit Bericht über die Entwickelung der Lehre vom Erddruck, von F. Kötter. Berlin, G. Reimer. 4 Mk. 50 Pf.

Aus dem Archive der deutschen Seewarte. Herausgegeben von der Direction. 15. Jahrgang, 1892. Hamburg, Friedrichsen. 15 Mk.

Jahresbericht des Centralbureaus für Meteorologie und Hydrographie im Grossherzogthum Baden für das Jahr 1892. Karlsruhe, Braun. 6 Mk.

Jahrbuch des königl. sächs. meteorologischen Instituts. X. Jahrgang (1892). 1. Hälfte. Herausgegeben von P. Schreiber. Chemnitz, Bülz. 10 Mk.

Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Redigirt von L. Fröhlich. 10. Bd. 2. Hälfte. Berlin, Friedländer & S. 4 Mk.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Frobenius, G., Gedächtnissrede auf Leop. Kronecker. (Berliner Akad.) Berlin, G. Reimer. 1 Mk. 50 Pf.

Kundt, A., Gedächtnissrede auf Werner v. Siemens. (Berliner Akad.) Ebendaselbst. 1 Mk. 50 Pf.

Obenrauch, J., Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie. (Progr.) Brünn, Selbstverlag des Verfassers. 2 Mk.

Reine Mathematik.

Frege, G., Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet. 1. Bd. Jena, Pohle. 12 Mk.

Gravelius, H., Lehrbuch der höheren Analysis. 1. Bd. Differentialrechnung. Berlin, Dümmler. 6 Mk.

Schwering, K., Trigonometrie für höhere Lehranstalten. Freiburg i. Br., Herder. 80 Pf.

Barthels, E., Ausführliches Lehrbuch der Stereometrie und Trigonometrie. Wiesbaden, Sadowsky. 2 Mk. 80 Pf.

Sellentin, R., Grundriss der Geometrie für höhere Lehranstalten. I. Planimetrie. Köln, Du Mont-Schauberg. 2 Mk. 40 Pf.

Müller, H., Stereometrische Constructionen, Projectionslehre für die Prima der Gymnasien. Frankfurt a. M., Hermann. 1 Mk.

Schlotke, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. II. Theil. Dresden, Kühtmann. 2 Mk.

Dorr, R., Das Problem der beliebigen Winkeltheilung ohne und mit Anwendung eines besonderen Instruments. Elbing, Meissner. 3 Mk.

Angewandte Mathematik.

Wenzel, L., Beitrag zur Schwingungstheorie elastischer Saiten. Programm. Klagenfurt, Kleinmayr. 1 Mk.

Poincaré, H., Thermodynamik. Deutsch von W. Jaeger und E. Gumlich. Berlin, Springer. 10 Mk.

Physik und Meteorologie.

Wilh. Weber's Werke. 5. Bd. Wellenlehre, besorgt durch E. Riecke. Berlin, Springer. 18 Mk.

Clapeyron, E., Die bewegende Kraft der Wärme. Deutsch herausgegeben von R. Mewes. Berlin, Friedländer's Buchdruckerei. 1 Mk. 60 Pf.

Violle, J., Lehrbuch der Physik. Deutsch von Gumlich, Holborn, Jaeger und Lindeck. II. Theil. 1. Bd. Akustik. Berlin, Springer. 8 Mk.

Blasius, W., Stürme und moderne Meteorologie. 4. Vortrag. Die Ursachen der Barometerschwankungen. Braunschweig, Limbach. 1 Mk. 80 Pf.
compl. 2 Mk. 60 Pf.

Glass, R., Abriss der Meteorologie und Elektricitätslehre. Für Realschulen. Plauen i. V., Neupert. 1 Mk. 60 Pf.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1892.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Abbildung.

269. Ueber die conforme Abbildung einer Halbebene auf ein unendlich benachbartes Kreisbogenpolygon. G. Pick. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 1387.

Abel'sche Transcendenten.

270. Bemerkung über einen Punkt in Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen. F. Franklin. Mathem. Annal. XLI, 308.
Vergl. Umkehrproblem.

Absolute Geometrie.

271. Die Trigonometrie in der absoluten Geometrie. M. Simon. Crelle CIX, 187.
Vergl. Mehrdimensionale Geometrie.

Abzählende Geometrie.

272. Sur l'analysis situs. H. Poincaré. Compt. Rend. CXV, 633.
273. Ueber die Zusammenhangszahl eines Flächensystems. C. Koehler. Crelle CIX, 118.
274. Exemples de la détermination des coniques dans un système donné qui satisfont à une condition donnée. H. G. Zeuthen. Mathem. Annal. XLI, 539 [Vergl. Nr. 3.]

Analytische Geometrie der Ebene.

275. Sur les angles et les distances en coordonnées trilinéaires. Vogt. N. ann. math. Ser. 3, XI, 148.
276. La symétrie en coordonnées polaires. J. Lefèvre. N. ann. math. Ser. 3, XI, 302, 353.
277. Ueber harmonische Strahlen. Rud. Skutsch. Grun. Archiv 2. R. XI, 206.
278. Geometrische Bestimmung der Tangente der Cassini'schen Linie. W. Rulf. Grun. Archiv 2. R. XI, 438.
279. Zur Cassinischen Linie. E. Oekinghaus. Grun. Archiv 2. R. XI, 441.
Vergl. Geodäsie 360. Kegelschnitte. Krümmung.

Analytische Geometrie des Raumes.

280. Sur la corrélation entre le systèmes de coordonnées ponctuelles et les systèmes de coordonnées tangentielles. M. d'Ocagne. N. ann. math. Ser. 3, XI, 70.
281. Fundamentalachsen der mehrfach gekrümmten Linie. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XI, 442.
282. Das Tetraeder, bezogen auf seine Hauptträgheitsachsen. R. Hoppe Grun. Archiv 2. R. XI, 85.
Vergl. Krümmung. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

283. Ueber die Gleichungen, mit deren Hilfe man die säcularen Störungen der Planeten bestimmt. K. Hensel. Crelle CX, 180.
284. Ueber die Berechnung einer Kometenbahn mit Berücksichtigung von Gliedern höherer Ordnung. E. Weiss. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 1132.
285. Sur le calcul des inégalités d'ordre élevé. O. Callandreau. Compt. Rend. CXV, 386.

286. Sur le calcul des inégalités d'ordre élevé. Application à l'inégalité lunaire à longue période causée par Venus. M. Hamy. Compt. Rend. CXV, 869.
287. Positions absolues et mouvements propres d'étoiles circompolaires. F. Gonnessiat. Compt. Rend. CXV, 400.
288. Ueber den Einfluss der Aenderung der Excentricität der Erdbahn auf die mittlere Umlaufszeit des Mondes. C. Benz. Grun. Archiv 2. R. XI, 199.
Vergl. Chronologie.

Ausdehnungslehre.

289. La méthode de Grassmann. E. Carvallo. N. ann. math. Ser. 3, XI, 8. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 306.]

B.

Balistik.

290. Sur la solution du problème balistique. E. Vallier. Compt. Rend. CXV, 648.

Bernoulli'sche Zahlen.

291. Arithmetische Entwicklungen. Fr. Rogel. Grun. Archiv 2. R. XI, 77.

Bestimmte Integrale.

292. Recherches sur la convergence des intégrales définies. C. J. de la Vallée-Poussin. Journ. Mathém. Ser. 4, VIII, 421.
293. Ueber eine Gattung von bestimmten Integralen. L. Pochhammer. Mathem. Annal. XLI, 167.
294. Remarques sur les intégrales définies. C. Jordan. Journ. Mathém. Ser. 4, VIII, 69.
Vergl. Gamafunctionen.

C.

Chronologie.

295. Die Berechnung der Jahrpunkte (Thekuphenrechnung) im Kalender der Juden. Ed. Mahler. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 71.

Combinatorik.

296. Theorie des permutations et des arrangements circulaires complets. E. Jablonski. Journ. Mathém. Ser. 4, VIII, 331.
297. Sur le partage en quatre groupes des permutations des n premièrs nombres. Dés. André. Compt. Rend. CXV, 872.
298. Ueber Variationen und Combinationen zu bestimmten Summen. K. Reich. Grun. Archiv 2. R. XI, 225.
299. Einige Aufgaben aus der Combinatorik. A. Holtze. Grun. Archiv 2. R. XI, 284.
300. Die allgemeinen Grundlagen zweier Probleme aus der Unterhaltungsarithmetik. V. Schlegel. Grun. Archiv 2. R. XI, 93.

D.

Determinanten.

301. Ueber relativ adjungirte Minoren. G. Landsberg. Crelle CIX, 225.
Vergl. Ausdehnungslehre.

Differentialgleichungen.

302. Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires. G. Peano. N. ann. math. Ser. 3, XI, 79. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 309.]
303. Zur Theorie der vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variabeln. M. Hamburger. Mathem. Annal. XLI, 597.
304. Sur les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre. L. Autonne. Compt. Rend. CXV, 587. [Vergl. Nr. 25.]
305. Sur l'application aux équations différentielles ordinaires de certaines méthodes d'approximation successives. Em. Picard. Compt. Rend. CXV, 543.
306. Sur certaines solutions asymptotiques des équations différentielles. Em. Picard. Compt. Rend. CXV, 1030.
307. Bemerkungen über die Integrale linearer Differentialgleichungen. L. Heffter. Crelle CIX, 222.

308. Sur les équations différentielles linéaires. J. Cels. Compt. Rend. CXV, 1057.
309. Ueber die bei den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auftretenden Primformen. Ludw. Schlesinger. Crelle CX, 130. — Compt. Rend. CXV, 32.
310. Ueber lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für welche die Umkehrungsfunction von endlicher Vieldeutigkeit ist. Ludw. Schlesinger. Crelle CX, 265.
311. Ueber eine specielle lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten. L. Pochhammer. Mathem. Annal. XLI, 174.
312. Sur le problème de Pfaff. A. J. Stodolkievitz. Compt. Rend. CXV, 592.
313. Erweiterung eines Pfaff'schen Satzes auf simultane totale Differentialgleichungen erster Ordnung und Integration einer Classe von simultanen partiellen Differentialgleichungen. M. Hamburger. Crelle CX, 158.
314. Ueber die Integrale simultaner partieller Differentialgleichungs-Systeme. L. Königsberger. Mathem. Annal. XLI, 260.
315. Ueber die Integrale partieller Differentialgleichungs-Systeme beliebiger Ordnung. L. Königsberger. Crelle CIX, 261.

Vergl. Hypergeometrische Reihe 409, 410. Invariantentheorie 419. Mechanik 459, 460. Wärmelehre 529.

Differentialquotient.

316. Ueber Functionen einer reellen Variabeln, welche Derivirte jeder Ordnung besitzen. L. Maurer. Mathem. Annal. XLI, 377.
317. Die Nullwerthe höherer Ableitungen gewisser zusammengesetzter Functionen. Fr. Rogel. Grun. Archiv 2. R. XI, 14.

Differenzengleichung.

318. Zur Theorie der Differenzengleichungen. W. Heymann. Crelle CIX, 112.

Dreiecksgeometrie.

319. Sur quelques propriétés du triangle. Molenbroch. N. ann. math. Ser. 3, XI, 121, 179.
320. Constructions et formnles relatives au triangle. C. A. Laisant. N. ann. math. Ser. 3, XI, 209.
321. Sur la géométrie du triangle. E. Valdès. N. ann. math. Ser. 3, XI, 249.

E.

Elasticität.

322. Des perturbations locales que produit au-dessous d'elle une forte charge, répartie uniformément le long d'une droite normale aux deux bords, à la surface supérieure d'une poutre rectangulaire. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXV, 5. [Vergl. Nr. 47.]
323. De la forme générale de la loi du mouvement vibratoire dans un milieu isotrope. E. Mercadier. Compt. Rend. CXV, 1264.
324. Rotating elastic solid cylinders of elliptic sertion. C. Chree. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIV, 70, 154.
325. Flexure of long pillars under their own weight. M. F. Fitz Gerald. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 428.
326. Struts ond tie-rods with lateral loads. J. Perry. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 269.
327. On the resistances to transverse strain in beams. R. C. Nichols. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 397.
328. The influence of flaws ond air-cavities on the strength of materials. J. Larmor. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 70.
329. On the difficulties of constructing a theory of the collapse of boiler-flues. A. B. Basset. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIV, 221.

Elektricität.

330. The „Elastic Medium" method of treating electrostatic theorems. W. H. Bragg. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIV, 18.
331. An electrolytic theory of dielectrics. A. P. Chattock. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIV, 461.
332. Some points in electrolysis. J. Swinburne. Phil. Mag. Ser. 5, XXXII, 1.

333. Ueber die Wirkungen gleichgerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in einem Leiter mit Selbstinduction. J. Puluj. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 767.
334. On the calculation of the induction-coefficients of coils and the construction of standards of inductance, and on absolute electrodynamometers. And. Gray. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 62.
335. On the resistance and self-induction of branched circuits. A Anderson. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 352.
336. Détermination des coefficients de self-induction, au moyen des oscillations électriques. P. Janet. Compt. Rend. CXV, 1286.
337. Sur les considérations d'homogénéité en Physique et sur une relation entre la vitesse de propagation d'un courant, la capacité et le coefficient de self-induction de la ligne. C. Clavenod. Compt. Rend. CXV, 470. — Vaschy ebenda 597.
338. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIV, 481.
339. Sur les réseaux de conducteurs électriques. Propriété réciproque de deux branches. Vaschy. Compt. Rend. CXV, 1280.
340. Théorie d'un condensateur intercalé dans le circuit secondaire d'un transformateur. Dés. Korda. Compt. Rend. CXV, 331, 411.
Vergl. Potential.

Ellipse.

341. Propriétés d'une ellipse et d'un cercle passant par un point et les points de contact des tangentes à l'ellipse issues de ce point. Barisien. N. ann. math. Ser. 3, XI, 394.
Vergl. Krümmung 445.

Elliptische Transcendenten.

342. Zur Theorie der elliptischen Functionen. P. Günther. Crelle CIX, 43. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 79.]
343. Das Additionstheorem der elliptischen Functionen. P. Günther. Crelle CIX, 213.
344. Zur Theorie der elliptischen und hyperelliptischen Integrale. Em. Oekinghaus. Grun. Archiv 2. R. XI, 132.
345. Zerfällung der lemniskatischen Theilungsgleichung in vier Factoren. K. Schwering. Crelle CX, 42. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 78.]
346. Neue geometrische Darstellung der lemniskatischen Function. W. Krimphoff. Crelle CX, 73.

F.

Functionen.

347. Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten. D. Hilbert. Crelle CX, 104.
348. Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der algebraischen Integrale. K. Hensel. Crelle CIX, 1.
349. Ueber die eindeutigen Functionen von zwei durch eine algebraische Gleichung verbundenen Veränderlichen. P. Günther. Crelle CIX, 199.
350. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. J. Hadamard. Journ. Mathém. Ser. 4, VIII, 101.
351. Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles généralisant les équations de la théorie desfonctions d'une variable complexe. Em. Picard. Journ. Mathém. Ser. 4, VIII, 217.
352. Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlecht Null, eine Revision und Erweiterung der Poincaré'schen Sätze. E. Ritter. Mathem. Annal. XLI, 1.
353. Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. A. Hurwitz. Mathem. Annal. XLI, 403.
354. Sur les fonctions génératrices d'Abel. V. Pareto. Crelle CX, 290.
355. Ueber das Additionstheorem der Cotangente und der Function $\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$. F. Schottky. Crelle CX, 324.
356. Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables. G Kobb. Journ. Mathém. Ser. 4, VIII, 385.
Vergl. Abel'sche Transcendenten. Abzählende Geometrie 273. Ausdehnungslehre. Bestimmte Integrale. Determinanten. Differentialgleichungen.

Differentialquotient. Differenzengleichung. Elliptische Transcendenten. Gammafunctionen. Gleichungen. Grenzwerth. Hyperelliptische Transcendenten. Hypergeometrische Reihe. Imaginäres. Invariantentheorie. Kettenbrüche. Kugelfunctionen. Maxima und Minima. Mehrdimensionale Geometrie. Reihen. Thetafunctionen. Transformationsgruppen. Umkehrproblem. Zahlentheorie 548, 555.

G.

Gammafunctionen.

357. Bemerkungen über das Integral $\overline{\Gamma}(a)$. L. Pochhammer. Mathem. Annal. XLI, 157.
358. Ueber fünf Doppelintegrale. L. Pochhammer. Mathem. Annal. XLI, 179.
359. Sur une extension de la formule de Stirling. Ch. Hermite. Mathem. Annal. XLI, 581.

Geodäsie.

360. Application d'un système conventionnel de coordonnées rectangulaires à la triangulation des côtes de Corse. Hatt. Compt. Rend. CXV, 459.
361. Sur la nouvelle méridienne de France. L. Bassot. Compt. Rend. CXV, 706.

Geometrie (descriptive).

362. Ueber einen neuen Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der klinogonalen Axonometrie. F. Ruth. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 1088.
363. Neue Constructionen der Perspective. L. Leib. Grun. Archiv 2. R. XI, 1.
364. Zur Durchdringung der Kugel mit dem geraden Kreiskegel. W. Rulf. Grun. Archiv 2. R. XI, 433.
365. Projection d'une surface par chaque point de laquelle il passe deux cercles tracés sur elle, dont les plans sont verticaux. Roubaudi. N. ann. math. Ser. 3, XI, 199.
366. Neue Beleuchtungsconstructionen für Flächen, deren zu einer Achse normale Sehnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, im Allgemeinen und für Flächen zweiten Grades im Besonderen. Jos. Bazala. Grun. Archiv 2. R. XI, 113.

Geometrie (höhere).

367. Zur Construction der Polar-Gruppen. E. Waelsch. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 315.
368. Théorème sur les foyers d'une courbe quelconque. E. Amigues. N. ann. math. Ser. 3, XI, 163.
369. Ueber Involutionen höheren Grades auf nichtrationalen Trägern. Em. Weyr. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 589.
370. Die Punktsysteme auf der Geraden und ihre Anwendung zur Erzeugung der algebraischen ebenen Curven. R. Schumacher. Crelle CX, 230.
371. Ueber das Doppelverhältniss von vier Punkten einer Geraden. E. Busche. Mathem. Annal. XLI, 591.
372. Sur un théorème analogue à celui de Carnot ou généralisation du théorème de Jean de Ceva. L. Ravier. N. ann. math. Ser. 3, XI, 349.
373. Sur les figures équipollentes. G. Tarry. N. ann. math. Ser. 3, XI, 251.
374. Sur les congruences de droites. E. Cosserat. Compt. Rend. CXV, 929.
375. Ueber lineare Systeme in der Ebene und im Raum und über deren Jacobi'sche Curve beziehungsweise Jacobi'sche Fläche. K. Doehlemann. Mathem. Annal. XLI, 545.
376. Sur les courbes du troisième degré. Moutard. N. ann. math. Ser. 3, XI, 113.
377. Sur quelques propriétés des courbes planes unicursales du troisième ordre. Astor. N. ann. math. Ser. 3, XI, 276.
378. Sur la constructions des cubiques cuspidales par points et tangentes. M. d'Ocagne. N. ann. math. Ser. 3, XI, 386.
379. Sur une série récurrente de pentagones, inscriptibles à une même courbe générale du troisième ordre, et que l'onpeut construire par le seul emploi de la règle. P. Serret. Compt. Rend. CXV, 406, 436.
380. Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. P. Appell. N. ann. math. Ser. 3, XI, 115.
381. Démonstration de quelques théorèmes au moyens de transformations par polaires réciproques. Mannheim. N. ann. math. Ser. 3, XI, 431.
382. Ueber räumliche Configurationen, welche sich aus den regelmässigen Polyedern herleiten lassen. J. de Vries. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 822.

383. Elementare Construction der Figur dreier in desmischer Lage befindlichen Tetraeder. H. Schröter. Crelle CIX, 341.
384. Sur les courbes tétraédrales symétriques. Alph. Dumoulin. Compt. Rend. CXV, 280.
385. Ueber Raumcurven sechster Ordnung vom Geschlechte 1. Em. Weyr. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 457. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 387.]
Vergl. Absolute Geometrie. Dreiecksgeometrie. Geometrie (descriptive). Invariantentheorie. Kinematik. Singularitäten.

Geschichte der Mathematik.

386. Sur la découverte de la ligne sans déclinaison. W. de Fonvielle. Compt. Rend. CXV, 450.
387. Nekrolog von Heinrich Schröter (8./I. 1829 bis 3./I. 1892). R. Sturm. Crelle CIX, 358.
388. Notice sur C. Gérono († 7./XI. 1892). E. Rouché. N. ann. math. Ser. 3, XI, 538.

Gleichungen.

389. Bemerkungen über den sogenannten Casus irreducibilis bei cubischen Gleichungen. Ad. Kneser. Mathem. Annal. XLI, 344. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 135.]
390. Sur le théorème de Budan et Fourier. G. Fouret. N. ann. math. Ser. 3, XI, 82.
391. Former une équation ayant pour racines les valeurs d'une fonction de deux racines d'une autre équation. E. Amigues. N. ann. math. Ser. 3, XI, 245.
392. Si, dans une équation algébrique, le coefficient de x^{m-k} a un module supérieur à la somme des modules des autres coefficients, l'équation a $m-k$ racines dont le module est inférieur à 1 et k racines de module supérieur à 1. Em. Picard. N. ann. math. Ser. 3, XI, 147.
393. Sur le calcul par approximation des racines des équations numériques. Modification de la formule de Newton. E. Malo. N. ann. math. Ser. 3, XI, 169.
394. Sur les nombre des racines communes à plusieurs équation simultanées. Em. Picard. Journ. Mathém. Ser. 4, VIII, 5. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 401.]
395. Démonstration analytique du théorème de M. Rouché relatif à un système d'équations algébriques du premier degré. E. Amigues. N. ann. math. Ser. 3, XI, 47.
396. Sur l'élimination. H. Laurent. N. ann. math. Ser. 3, XI, 5.
397. Sur l'élimination. Worontzoff. N. ann. math. Ser. 3, XI, 291.

Grenzwerth.

398. Asymptotischer Werth der Facultätencoefficienten. Fr. Rogel. Grun. Archiv 2. R. XI, 210.
Vergl. Differentialquotient 317.

H.

Hydrodynamik.

399. On the theory of surface forces. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 209, 468. [Vergl. Bd. XXXVI Nr. 397.]
400. On the question of the stability of the flow of fluids. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIV, 59.
401. On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIV, 145, 177.
402. Le mouvement différentiel dans l'Océan et dans l'athmosphère: marées d'eau, marées d'air. Fer. de Saintignon. Compt. Rend. CXV, 1340.
403. Sur une légère correction additive qu'il peut y avoir lieu de faire subir aux hauteurs d'eau indiquées par les marégraphes, quand l'agitation houleuse ou clapoteuse de la mer atteint une grande intensité. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXV, 77, 149.

Hyperbel.

404. Théorème sur une hyperbole équilatère et une circonférence ayant pour diamètre une corde de l'hyperbole. C. A. Laisant. N. ann. math. Ser. 3, XI, 262. — Larose ibid. 266. — Barisien ibid. 330, 441.

Hyperelliptische Transcendenten.

405. Untersuchungen auf dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen. H. Burkhardt. Mathem. Annal. XLI, 313. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 145.]
406. Die Dedekind-Weber'schen Ideale in einem hyperelliptischen Körper. L. Baur. Mathem. Annal. XLI, 491.
407. Ueber die Reduction eines Problems der Dynamik auf hyperelliptische Integrale. P. Stäckel. Mathem. Annal. XLI, 571.

Vergl. Elliptische Transcendenten 344.

Hypergeometrische Reihe.

408. Zur Theorie der hypergeometrischen Reihe. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 225.
409. Ueber die Reduction der Differentialgleichung der Reihe $\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_{n-1}; x)$. L. Pochhammer. Crelle CX, 188. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 53.]
410. Ueber die Differentialgleichungen der Reihen $\mathfrak{F}(\varrho, \sigma; x)$ und $\mathfrak{F}(\varrho, \sigma, \tau; x)$. L. Pochhammer. Mathem. Annal. XLI, 197.
411. Ueber die Function $W\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, & n \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \end{pmatrix}$ für singuläre Werthe ihrer Parameter. J. Thomae. Crelle CX, 78.
412. Sur les fonctions contignës relatives à la série hypergéométrique de deux variables. Levavasseur. Compt. Rend. CXV, 1255.

I.

Imaginäres.

413. Ueber Systeme höherer complexer Zahlen. Th. Molien. Mathem. Annal. XLI, 83.
414. Théorie des acceptions de feu l'abbé George. J. Évrard. N. ann. math. Ser. 3, XI, 103.
415. Ueber die Function $\mathsf{E}(x)$ mit complexem Argument. E. Busche. Crelle CX, 338.
416. Extension aux nombres premiers complexes des théorèmes de M. Tschebi f. H. Poincaré. Journ. Mathém. Ser. 4, VIII, 25.

Vergl. Quaternionen. Transformationsgruppen 520.

Invariantentheorie.

417. Ueber einen fundamentalen Satz der Lehre von den endlichen Gruppen linea r Substitutionen. H. Burkhardt. Mathem. Annal. XLI, 309.
418. Sur les invariants universels. Rabut. Compt. Rend. CXV, 926.
419. Sur les invariants de quelques équations différentielles. P. Rivereau. Journ. Mathém. Ser. 4, VIII, 233.
420. Zur Theorie der associirten Formen. G. Kohn. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 865.
421. Ueber die Resultante einer Covariante und einer Grundform. G. Kohn. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 1013.
422. On the covariants of a system of quantics. W. E. Story. Mathem. Annal. XLI, 469.
423. Ueber das System der covarianten Strahlencomplexe zweier Flächen zweiter Ordnung. G. Pick. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 561.
424. Ueber eine geometrische Darstellung in der Theorie der binären Formen. E. Waelsch. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa.) C, 574.
425. Ueber Formen fünfter Ordnung auf der cubischen Raumcurve. E. Waelsch. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 803.

K.

Kegelschnitte.

426. Lösung des Problems über den Schnitt von Curven zweiter Ordnung. E. Laab. Grun. Archiv 2. R. XI, 262.
427. Par 5 points donnés, tels qu'il n'yen ait pas 4 en ligne droite, on peut faire passer une conique et une seule. X. Antomari. N. ann. math. Ser. 3, XI, 212.
428. Ueber einige projective Eigenschaften der Poncelet'schen Polygone. G. Kohn. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 6.

429. Sur des coniques circonscrites à deux quadrilatères à base commune. Audibert, N. ann. math. Ser. 3, XI, 436.
430. Coniques doublement tangentes à un cercle donné. Barrisien. N. ann. math. Ser. 3, XI, 446.
431. Deux points P, Q d'une conique et le pôle M de la droite PQ par rapport à cette conique sont sur une même conique avec tout système analogue $P'Q'M'$. E. Malo. N. ann. math. Ser. 3, XI, 75.
432. Condition à laquelle doivent satisfaire deux coniques pour qu'un quadrilatère puisse être à la fois circonscrit à la première et inscrit dans la seconde. F. Farjon. N. ann. math. Ser. 3, XI, 535.

Vergl. Abzählende Geometrie 274. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Krümmung 442, 446. Parabel. Trisection 524.

Kettenbrüche.

433. Zur Theorie der periodischen Kettenbrüche. G. Landsberg. Crelle CIX. 231. — Netto ebenda CX, 349.
434. Zur Theorie der Näherungsbrüche. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 635.

Kinematik.

435. Sur la géométrie cinématique. Ch. Speckel. N. ann. math. Ser. 3, XI, 268.
436. Sur le lieu des sommets des angles constants circonscrits ou normaux à une épicycloide. Loucheur. N. ann. math. Ser. 3, XI, 374.

Vergl. Krümmung 440, 441.

Kreis.

437. Application d'une méthode d'évaluation de la simplicité des constructions à la comparaison de quelques solutions du problème d'Apolonius. E. Lemoine. N. ann. math. Ser. 3, XI, 453.
438. Sur les cercles qui touchent 3 cercles donnés ou qui les coupent sous un angle donné. M. Fouché. N. ann. math. Ser. 3, XI, 227, 331, 404.

Krümmung.

439. Détermination du centre des moyennes distances des centres de courbure des développées successives d'une ligne plane quelconque. Haton de la Goupilière. Compt. Rend. CXV, 856.
440. Sur les centres de courbure. H. Pilleux. N. ann. math. Ser. 3, XI, 384.
441. Sur le centre de courbure des podaires et antipodaires. M. d'Ocagne. N. ann. math. Ser. 3, XI, 532.
442. Sur la courbure dans les sections coniques. Cl. Servais. N. ann. math. Ser. 3, XI, 424.
443. Sur le centre de courbure de la parabole. Lemaire. N. ann. math. Ser. 3, XI, 98.
444. Construction de la parabole osculatrice en un point d'une courbe donnée. M. d'Ocagne. N. ann. math. Ser. 3, XI, 326.
445. Construction du centre de courbure de l'ellipse. L. Ravier. N. ann. math. Ser. 3, XI, 324.
446. Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Neoide mittelst eines Kegelschnittes. W. Rulf. Grun. Archiv 2. R. XI, 197.
447. Ein Beitrag zur Discussion der Bewegungsgleichungen eines Punktes. O. Staude. Mathem. Annal. XLI, 219.
448. Sur les centres de courbure géodésique. Th. Caronnet. Compt. Rend. CXV, 589.
449. Curven von constanter Krümmung, Torsion, Totalkrümmung und Krümmungsverhältniss. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XI, 101.
450. Sur la détermination des lignes dont le rapport de la courbure à la torsion est une fonction donnée de l'arc. G. Pirondini. Crelle CIX, 238.
451. Curve gegebener Krümmung auf gegebener Fläche. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XI, 193.

Kugelfunctionen.

452. Ueber die Ringfunctionen. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 745.

M.

Magnetismus.

453. On the theory of magnetism and the absurdity of diamagnetic polarity. J. Parker. Phil. Mag. Ser. 5, XXXII, 192, 253. — G. F. Fitzgerald ebenda XXXII, 318.

454. On a consequence of the Poisson-Mossotti theory. G. Adler. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 233.
455. Ueber den magnetischen Arbeitswerth von Substanzen veränderlicher Magnetisirungszahl, insbesondere von Eisen. G. Adler. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 469.
456. Ueber eine Bestimmungsmethode der Magnetisirungszahl fester Körper mittelst der Waage. G. Adler. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 897.

Vergl. Geschichte der Mathematik 386.

Maxima und Minima.

457. Ueber diejenigen Polyeder, die bei gegebener Gattung und gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche besitzen. E. Kötter. Crelle CX, 198.
458. Die Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen. O. Stolz. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 1162. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 447.]

Vergl. Wärmelehre 530.

Mechanik.

459. Sur un problème d'Analyse qui se rattache aux équations de la Dynamique. R. Liouville. Compt. Rend. CXV, 403, 646, 792. [Vergl. Nr. 182.]
460. Sur les transformations des équations de Lagrange. P. Painlevé. Compt. Rend. CXV, 495, 714, 874.
461. Sur les transformations de mouvements. P. Appel. Crelle CX, 37.
462. Sur le mouvement d'un point matériel dans le cas d'une résistance proportionnelle à la vitesse. Elliot. Compt. Rend. CXV, 1262.
463. On periodic motion of a finite conservative system. W. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XXXII, 375, 555.
464. Note accompagnant la présentation d'un ouvrage relatif aux méthodes nouvelles de la Mécanique céleste. Poincaré. Compt. Rend. CXV, 905.
465. Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit Fr. Kötter Crelle CIX, 51, 89.
466. Mouvement d'un point pesant attiré par un point fixe suivant la loi Newton. A. de Saint-Germain. N. ann. math. Ser. 3, XI, 89.
467. On graphic solution of dynamical problems. Lord Kelvin. Phil. M Ser. 5, XXXIV, 443.
468. On the relation of dimensions of physical quantities to directions in spac W. Williams. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIV, 234.
469. The kinetic theory of the dissipation of energy. W. Thomson. Phil. M Ser. 5, XXXIII, 291.
470. On Maxwell's investigation respecting Boltzmann's theorem. Lord Rayleigh Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 356.
471. On a decisive test-case disproving the Maxwell-Boltzmann doctrine regarding distribution of kinetic energy. Lord Kelvin. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 466.
472. Sur le mouvement d'un fil dans l'espace. G. Floquet. Compt. Rend. CXV, 499.
473. On a theorem in plane kinetic trigonometry suggested by Gauss's theorem of curvatura integra. W. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XXXII, 471.
474. Calcul des poutres continues; méthode satisfaisant aux nouvelles prescriptions du règlement ministériel du 29 Août 1891. Bertrand de Fontviolant. Compt. Rend. CXV, 996.
475. Le mouvement du coeur étudié par la chronophotographie. Marey. Compt. Rend. CXV, 485.

Vergl. Astronomie. Balistik. Elasticität. Elektricität. Hydrodynamik. Hyperelliptische Transcendenten 407. Krümmung 447. Magnetismus. Molekularphysik. Optik. Potential. Quaternionen. Schwerpunkt. Wärmelehre. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wellenlehre.

Mehrdimensionale Geometrie.

476. Ueber die Grundlagen der Geometrie. W. Killing. Crelle CIX, 121.
477. Beiträge zur Lehre von der $n$fachen Mannigfaltigkeit. H. Kühne. Grun. Archiv 2. R. XI, 353.

Molecularphysik.

478. Essai d'une méthode générale de synthèse chimique. R. Pictet. Compt. Rend. CXV, 708, 814.

479. A theory concerning the constitution of matter. Ch. V. Burton. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 191.
480. Les microglobules lenticulaires liquides. C. Maltézos. Compt. Rend. CXV, 717, 796.
Vergl. Wärmelehre.

O.

Oberflächen.

481. Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlencongruenzen und Flächen. E. Waelsch. Wien. Akad. Ber. (Abthl. IIa) C, 158.
482. Sur une classe de courbes et de surfaces. A. Pellet. Compt. Rend. CXV, 498.
483. Ueber die in der Theorie der Flächen auftretenden Differentialparameter. G. Frobenius. Crelle CX, 1.
484. Zur Theorie der Regelflächen. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XI, 218.
485. Construction einer Regelfläche aus gegebener Strictionslinie. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XI, 345.
486. Sur les surfaces à génératrice circulaire. A. Boulanger. N. ann. math. Ser. 3, XI, 159.
487. Sur la déformation infinitésimale et sur les surfaces associées de M. Bianchi. E. Cosserat. Compt. Rend. CXV, 1252.
488. Sur les systèmes conjugués et les couples de surfaces applicables. A. Petot. Compt. Rend. CXV, 1250.
489. Sur les systèmes triplement orthogonaux où les surfaces d'une même famille sont égales entre elles. L. Lévy. Journ. Mathém. Ser. 4, VIII, 351.
Vergl. Potential 504.

Oberflächen zweiter Ordnung.

490. Sur la discussion et la classification des surfaces du deuxième degré. Ch. Méray. N. ann. math. Ser. 3, XI, 474, 537.
491. Construction du dixième point d'une quadrique. L. Ravier. N. ann. math. Ser. 3, XI, 289.
492. Sur une quadrique circonscrite à un ellipsoïde donnée. Marchand. N. ann. math. Ser. 3, XI, 509.
Sur l'intersection d'un tore et d'une quadrique. S. Mangeot. N. ann. math. Ser. 3, XI, 519.
494. Quadriques d'un faisceau coupées par un plan tangent à une des quadriques. G. Bruyère. N. ann. math. Ser. 3, XI, 317.
495. Sur l'intersection de deux quadriques dans le cas ou elle se décompose. A. Tresse. N. ann. math. Ser. 3, XI, 216.
Vergl. Geometrie (descriptive) 366.

Optik.

496. Sur la propagation des vibrations dans les milieux absorbants isotropes. M. Brillouin. Compt. Rend. CXV, 808.
497. Sur la propagation anomale des ondes lumineuses des anneaux de Newton. Ch. Fabry. Compt. Rend. CXV, 1063.
498. Méthode Doppler-Fizeau. Formule exacte. Formule approchée. Évaluation de l'erreur commise. H. de la Fresnaye. Compt. Rend. CXV, 1289.
499. On reflexion from liquid surfaces in the neighbourhood of the polarizing angle. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 1.
500. Sur l'arc-en-ciel blanc. Mascart. Compt. Rend. CXV, 429, 453.
501. On the intensity at the focal point of a telescope, when the object-glass is covered by a diophragm pierced with circular apertures. J. Walker. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 266.
Vergl Geometrie (descriptive) 366.

P.

Parabel.

502. On an instrument for drawing parabolic curves. R. Inwards. Phil. Mag. Ser, 5, XXXIV, 57.
503. Si à partie de chacun des points d'une parabole on porte dans les deux sens sur une parallile à une direction fixe des longueurs égales à la distance de ce point au foyer de la parabole, le lieu des extrémités de ces longueurs se compose de deux paraboles. J. Lemaire. N. ann. math. Ser. 3, XI, 49. — X. ibid. 57. — E. Malo ibid. 61.
Vergl. Krümmung 443, 444.

Potential.

504. Table of zonal spherical harmonics and illustration of its use. J. Perry. Phil. Mag. Ser. 5, XXXII, 512.
505. The vector potential. A. Schuster. Phil. Mag. Ser. 5, XXXII, 9.

Q.

Quadratische Formen.

506. Anwendung der Modul-Systeme auf einen geometrischen Satz und auf das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen. E. Netto. Crelle CX, 184.

Quadratische Reste.

507. Zur Theorie der quadratischen Reste. K. Reich. Grun. Archiv 2. R. XI, 176.
Vergl. Zahlentheorie 551, 552.

Quaternionen.

508. Quaternions as a practical instrument of physical research. Al. Mac Aulay. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 477.

R.

Reihen.

509. Sur les séries à termes positifs. V. Jamet. N. ann. math. Ser. 3, XI, 99. [Vergl. Nr. 236.]
510. Sur la convergence des séries. A. de Saint-Germain. N. ann. math. Ser. 3, XI, 267. Compt. Rend. CXV, 1258
511. Ueber die Reihe der reciproken Binomialcoefficienten Fr. Rogel. Grun. Archiv 2. R. XI, 412.
512. Sur la serie de Fourier. J. de Séguier. N. ann. math. Ser. 3, XI, 299.
513. Sur une classe particulière de séries. M. d'Ocagne. N. ann. math. Ser. 3, XI, 526. — Compt. Rend. CXV, 790, 904.
514. Démonstration simple des formules qui servent au calcul des tables de logarithmes sinus. H. Laurent. N. ann. math. Ser. 3, XI, 119. — G. Peanr ibid. 289.
Vergl. Functionen 350. Hypergeometrische Reihe. Zahlentheorie 548.

S.

Schwerpunkt.

515. Der Schwerpunkt des Dreiecks als Schwerpunkt eines Systems von Vierecken. R. Hoppe. Grun. Archiv. 2. R. XI, 351.

Singularitäten.

516. Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Curven. Ad. Kneser. Mathem. Annal. XLI, 349.
517. Ueber Singularitäten verschiedener Ausnahme-Ordnung und ihre Zerlegung. J. Korteweg. Mathem. Annal. XLI, 286.

Stereometrie.

518. Sur le quadrilatère. F. Farjon. N. ann. math. Ser. 3, XI, 41.

T.

Thetafunctionen.

519. Ueber die Jacobi'sche Thetaformel. Aug. Gutzmer. Crelle CX, 177.

Transformationsgruppen.

520. Ueber die Irreducibilität complexer Zahlensysteme. G. Scheffers. Mathem. Annal. XLI, 601. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 555.]
521. Ueber den analytischen Charakter der eine endliche Transformationsgruppe darstellenden Functionen. Fr. Schur. Mathem. Annal. XLI, 509
522. Sur les groupes infinis de transformations. A. Tresse. Compt. Rend. CXV, 1003.

Trisection.

523. Zur näherungsweisen Dreitheilung eines Winkels. A. v. Frank. Grun. Archiv 2. R. XI, 207.
524. Dreitheilung jedes Winkels mittelst fester Kegelschnitte. W. Panzerbieter. Grun. Archiv 2. R. XI, 349, 408. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 409.]

U.

Umkehrproblem.

525. Sur l'inversion des intégrales abeliennes. E. Goursat. Compt. Rend. CXV, 787.

W.

Wärmelehre.

526. Commentaire aux principes de la Thermodynamique. P. Duhem. Journ. Mathém. Ser. 4, VIII, 269.
527. Ueber das Verhalten gesättigter Dämpfe. C. Puschl. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 843.
528. Ueber die inneren Kräfte von Flüssigkeiten und Gasen. C. Puschl. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 994.
529. Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ et la Théorie de la chaleur. P. Appell. Journ. Mathém. Ser. 4, VIII, 187.
530. Sur le principe du travail maximum. H. Le Chatelier. Compt. Rend. CXV, 167.
531. A kinetic theory of solids with an experimental introduction. W. Sutherland. Phil. Mag. Ser. 5, XXXII, 31, 215, 524.
532. Dynamical illustration of the isothermal formula. Lad. Natanson. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 301.
533. Dynamical problems in illustration of the theory of gases. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XXXII, 424.
534. An attempt to give a simple theoretical explanation of Raoult's law of the lowering of vapour-pressure. F. G. Donnan. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIV, 411.
535. On theories to account for glacial submergence. O. Fisher. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIV, 337.
536. On the level of no strain in a cooling homogeneous sphere. P. Rudski. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIV, 299.
537. Sur la répartition calorifique de la chaleur du soleil à la surface des hémisphères nord et sud du globe terrestre. Le Goarant de Tromelin. Compt. Rend. CXV, 409.
538. Sur le calcul pratique de la dimension des orifices d'écoulement de la vapeur d'eau saturée dans l'atmosphère, en régime constant et en régime varié; application aux soupapes de sûreté. H. Parenty. Compt. Rend. CXV, 109. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 564, 565, 566.]

Vergl. Elektricität 338.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

539. Die Willensfreiheit und der physische Determinismus. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XI, 339.
540. On the law of error and correlated averages. F. Y. Edgeworth. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIV, 190, 429, 518.
541. Mr. Sidney Lupton's method of reducing the results of experiments. Sp. U. Pickering. Phil. Mag. Ser. 5, XXXII, 90. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 147.]
542. The recognition of changes of curvature by means of a flexible lath. Sp. U. Pickering. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 436.
543. A consideration of some of the objections raised by Mr. Lupton to Mr. Pickering's methods of reducing experimental results. E. H. Hayes. Phil. Mag. Ser. 5, XXXII, 99.
544. On the probabilities of molecular configurations. Lad. Natanson. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIV, 51.
545. Sur l'accélération de la mortalité en France. R. H. van Dorsten. Compt. Rend. CXV, 693. [Vergl. Nr. 258.]

Wellenlehre.

546. On the solitary wave. J. Mac Cowan. Phil. Mag. Ser. 5, XXXII, 45, 553. XXXIII, 236. — G. G. Stokes ebenda XXXII, 314.
547. On the theory of long waves. J. Mac Cowan. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 250.

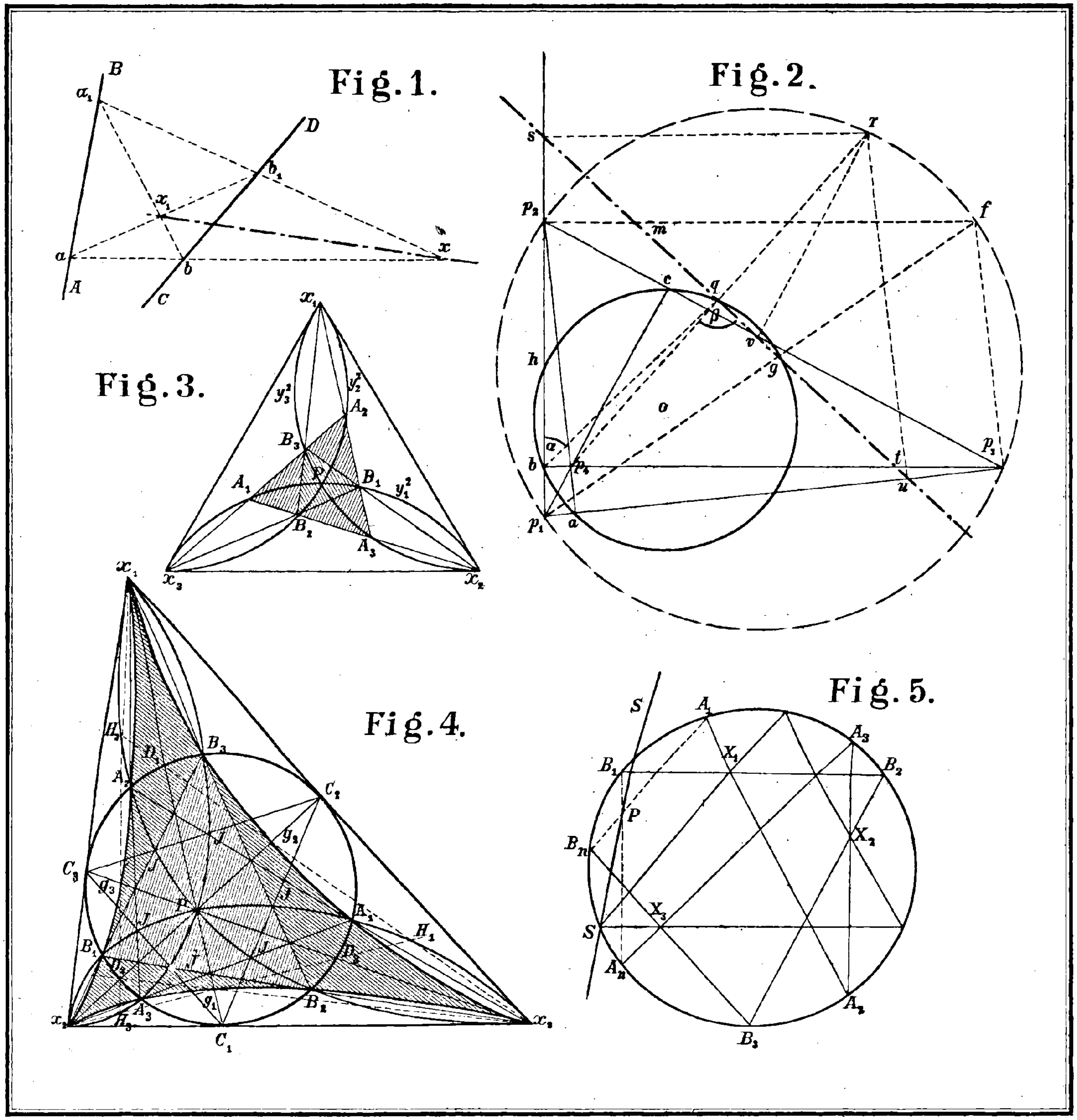
Z.

Zahlentheorie.

548. Sur un problème d'analyse indéterminée, qui se rattache à l'étude des fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques à deux variables. Levavasseur. Compt. Rend. CXV, 1006.

549. Ueber arithmetische Progressionen, in denen Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 1018.
550. Arithmetische Relationen. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 1054.
551. Ueber das Legendre-Jacobi'sche Symbol. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 855.
552. Ueber den quadratischen Rest-Charakter. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 1072.
553. Eine neue Darstellung des biquadratischen Charakters. J. A. Gmeiner. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 1093.
554. Die Ergänzungssätze zum bicubischen Reciprocitätsgesetze. J. A. Gmeiner. Wien. Akad. Ber. (Abthlg. IIa) C, 1330.
555. Ueber den arithmetischen Charakter der zu den Verzweigungen (2, 3, 7) und (2, 4, 7) gehörenden Dreiecksfunctionen. R. Fricke. Mathem. Annal. XLI, 443.
556. Zur Zahlentheorie. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XI, 439.
557. Critérium de divisibilité par un nombre quelconque. Fontés. Compt. Rend. CXV, 1259.
558. On the connexion between necurring formulae involving sums of divisors and the corresponding formulae involving differences between sums of even and uneven divisors. J. W. L. Glaisher. Phil. Mag. Ser. 5, XXXIII, 54.
559. Sur une question de la théorie des nombres. D. Mirimanoff. Crelle CIX, 82.
560. Ueber die Verwendung des Rechenbretes zur Darstellung beliebiger Zahlensysteme. G. v. d. Gabelentz. Grun. Archiv 2. R. XI, 213.

Vergl. Bernoulli'sche Zahlen. Hyperelliptische Functionen 406. Imaginäres 415, 416. Kettenbrüche. Quadratische Form. Quadratischer Rest.



Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 38. Jahrg. 1893. 1. Heft.

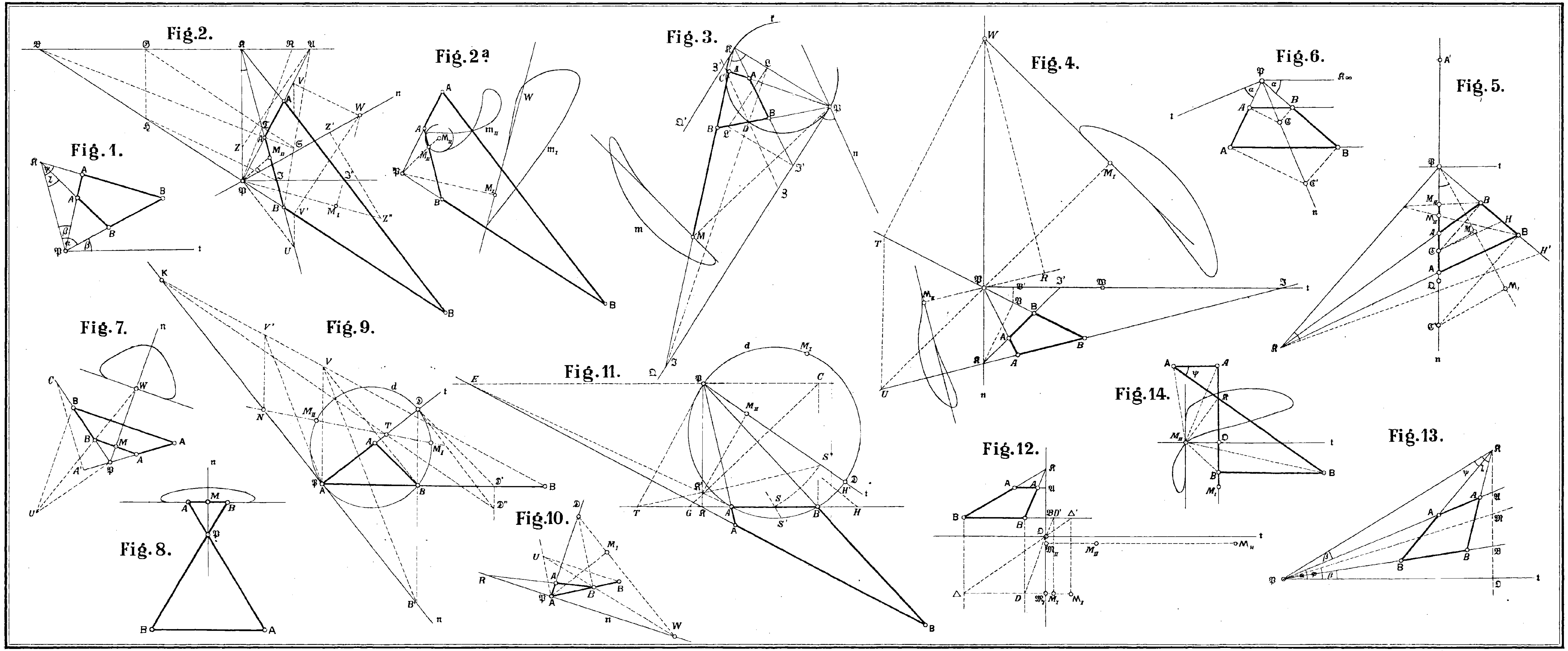


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 2a.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.

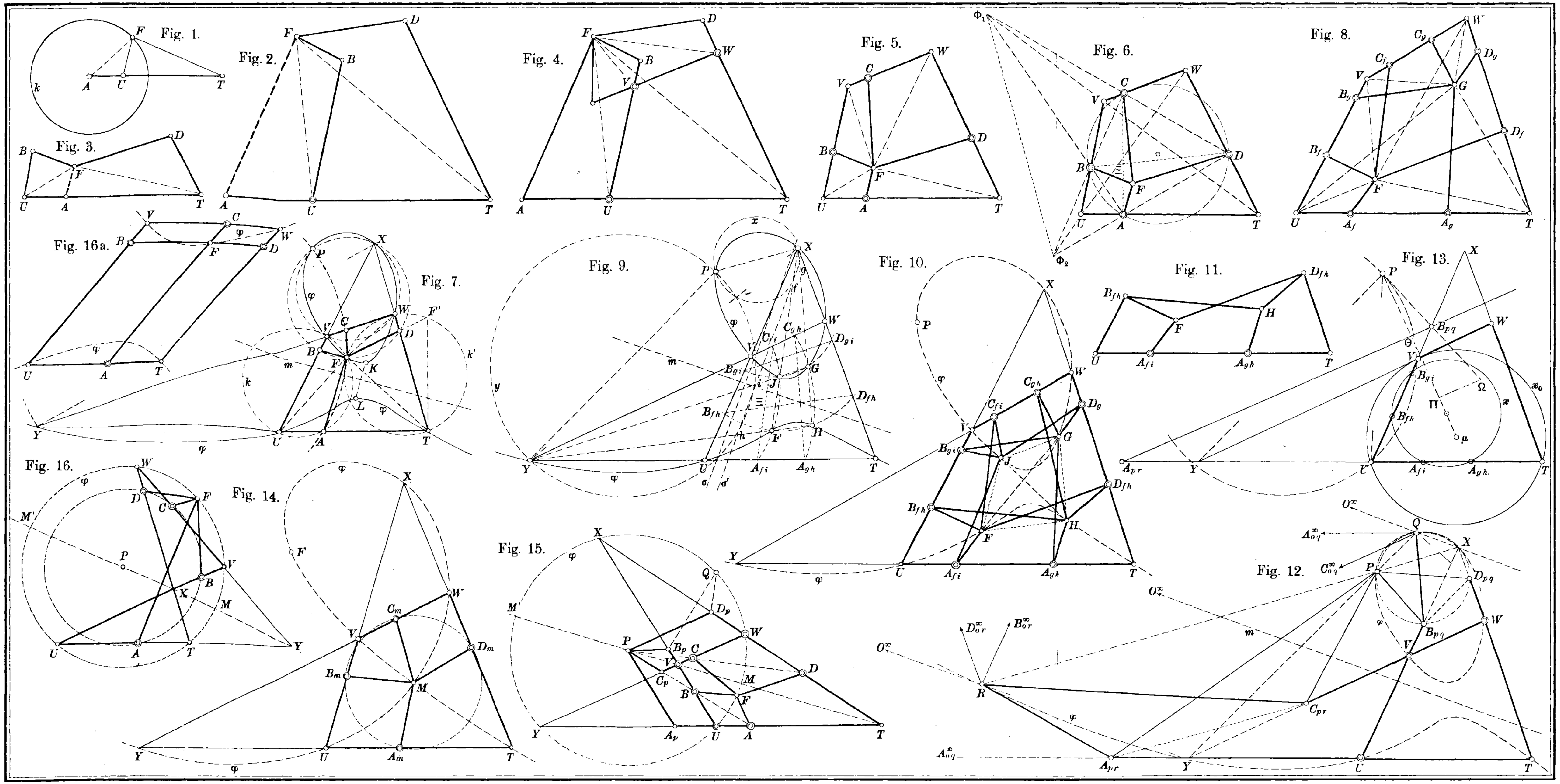


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 16a.

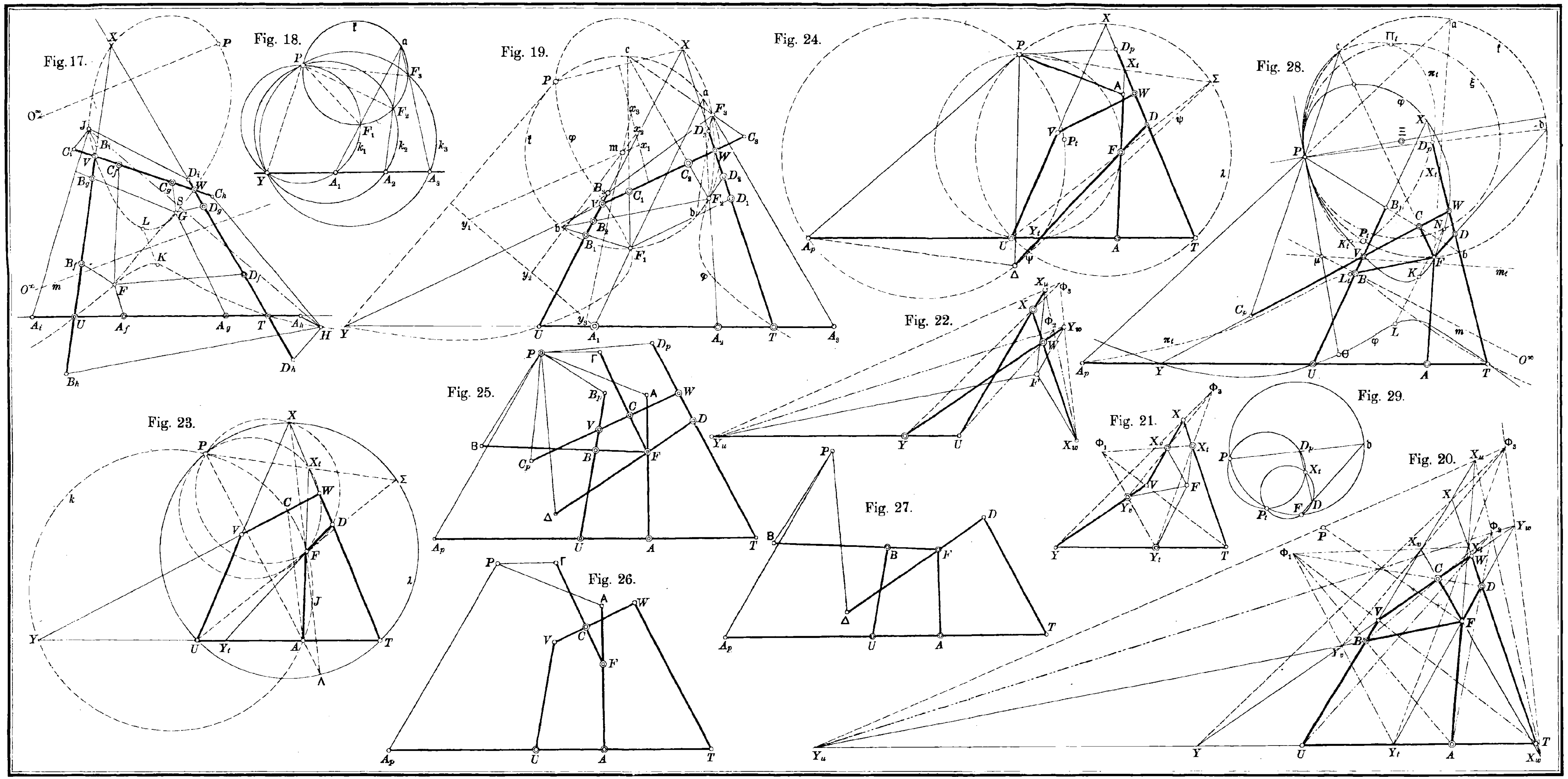
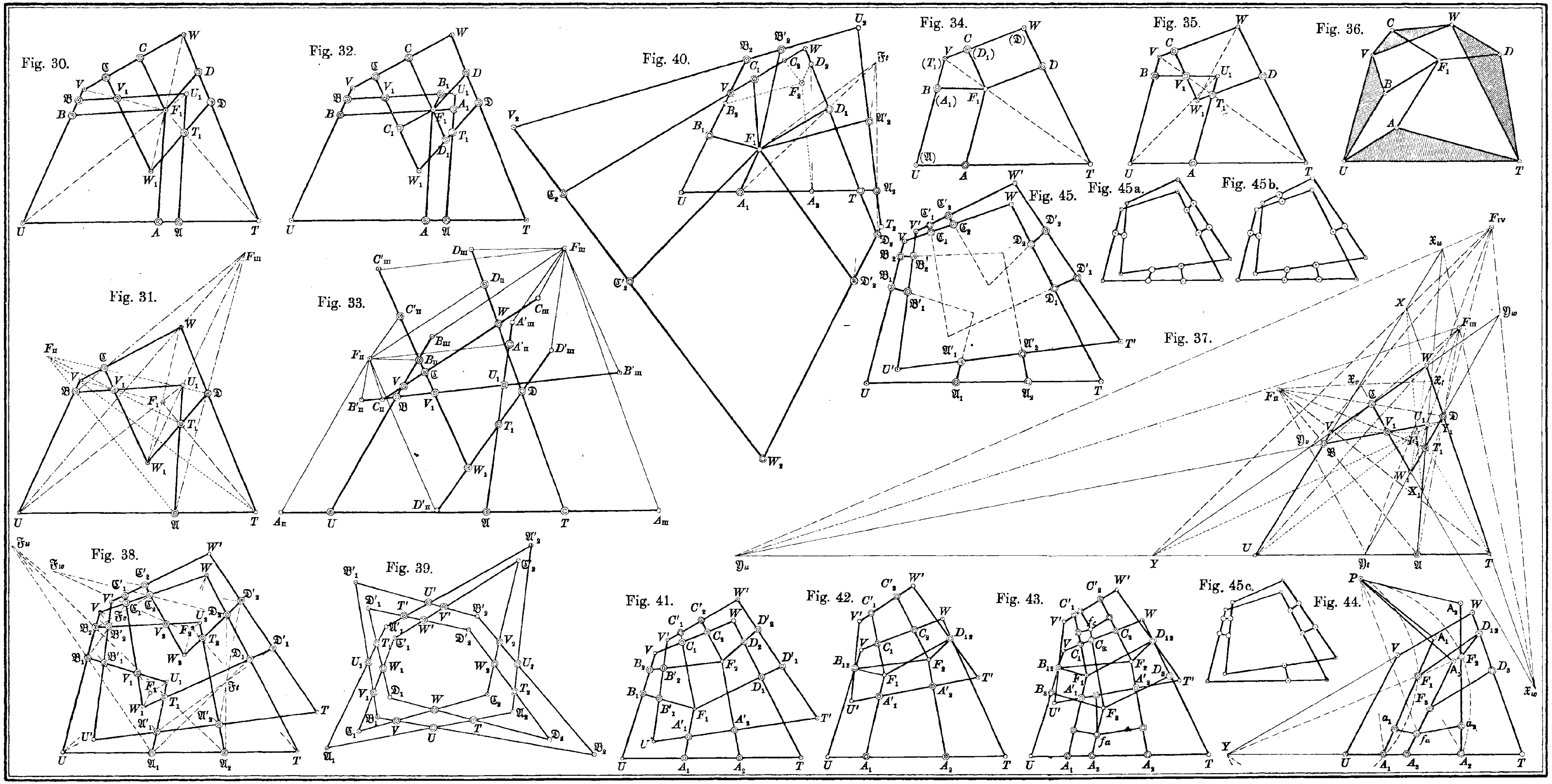
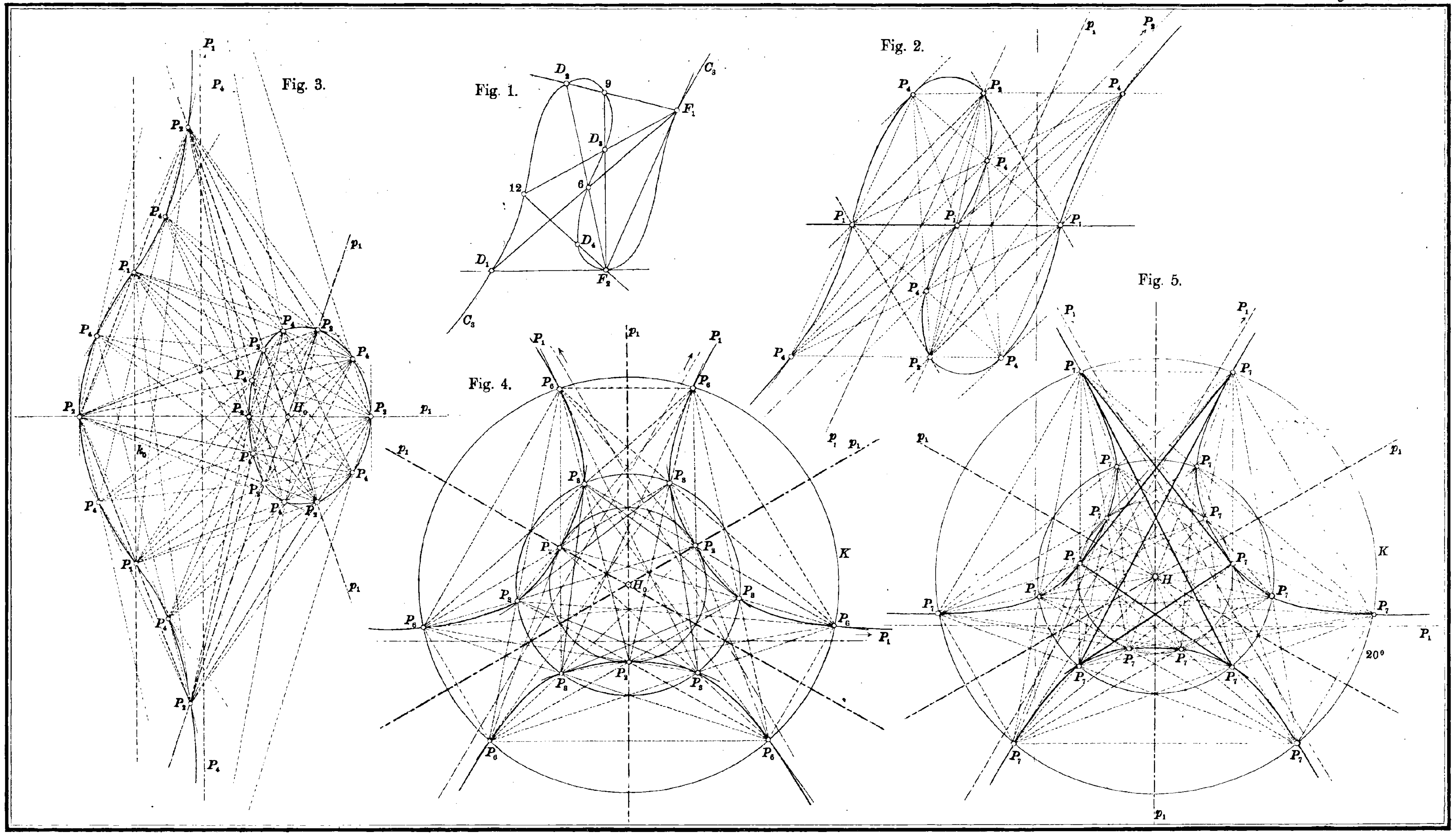


Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 24.
Fig. 28.
Fig. 22.
Fig. 25.
Fig. 23.
Fig. 21.
Fig. 29.
Fig. 27.
Fig. 26.
Fig. 20.



Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 38. Jahrg. 1893. 4. Heft.

Tafel VI.



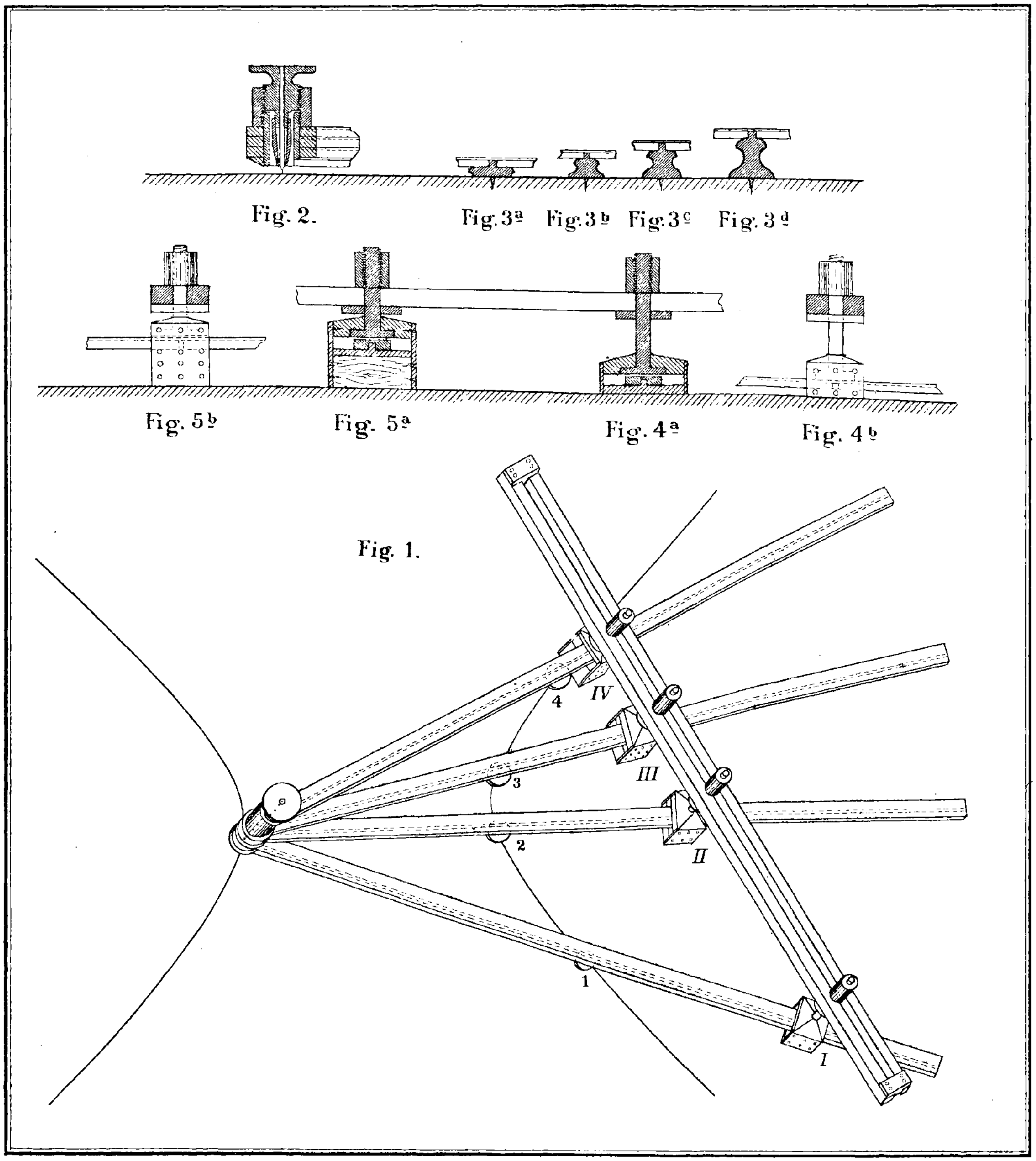


Fig. 2.
Fig. 3a
Fig. 3b
Fig. 3c
Fig. 3d
Fig. 5b
Fig. 5a
Fig. 4a
Fig. 4b
Fig. 1.
IV
III
II
I
4
3
2
1