ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

Francesco Brioschi

e continuati dai professori:

Eugenio Beltrami *in Roma*
Luigi Cremona *in Roma*
Ulisse Dini *in Pisa*
Giuseppe Jung *in Milano*

SERIE III.ª - TOMO I.º

MILANO,
TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.
1898.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO I.° (SERIE III.ª)

	Pag.
Sull'integrazione dell'equazione $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \sum_1^m{}_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0$. — *Orazio Tedone*. . .	1
Rappresentazione della quartica base di un fascio di quadriche di S_n sopra un S_{n-2}. — *Carlo Rosati*.	25
Un'applicazione della teoria dei residui delle funzioni di variabile complessa. — *Ulisse Dini*.	39
Un teorema sui limiti superiori e inferiori dei moduli delle radici di una equazione algebrica. — *Idem*	77
Intorno ad un tipo di determinanti nulli d'ordine infinito. — *Tito Cazzaniga*.	83
Ueber die quadratische Transformation, durch welche die Ebenen des Raumes in ein System von Flächen zweiter Ordnung mit gemeinsamen Poltetraeder übergeführt werden. — *H. E. Timerding*	95
La composizione dei Gruppi finiti il cui grado è la quinta potenza di un numero primo. — *G. Bagnera*	137
Classificazione delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, che ammettono un gruppo infinito di trasformazioni puntuali. — *Paolo Medolaghi*	229
Ueber Systeme von Differentialgleichungen, denen die vierfach periodischen Functionen zweiter Art Genüge leisten. — *Martin Krause*	265
Su di un sistema generale di equazioni che si può integrare col metodo delle caratteristiche. — *Orazio Tedone*	283
Una estensione del problema della proiettività a gruppi di complessi e di congruenze lineari di rette. — *Domenico Montesano*	313

Sull'integrazione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \sum_1^m{}_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0.$$

(Di ORAZIO TEDONE, *a Milano.)*

Per $m = 3$ l'equazione di cui ci vogliamo occupare è la nota equazione dell'ottica ed è notissima la formola di KIRCHHOFF relativa a questa equazione, la quale rappresenta analiticamente un principio fondamentale d'ottica di cui quello di HUYGHENS è un caso particolare.

Il metodo che KIRCHHOFF ha adoperato per dedurre la sua formola, anche sotto la forma in cui l'ha presentato il prof. BELTRAMI nelle sue prime Note sull'argomento (*), a prima vista pare applicabile soltanto al caso di $m = 3$. Però al prof. VOLTERRA è riuscito di stabilire con un processo analogo appunto a quello di KIRCHHOFF-BELTRAMI e per il caso di m qualunque, delle formole analoghe a quella di KIRCHHOFF per $m = 3$ (**).

In un'altra Nota (***) poi il prof. VOLTERRA, ancora, partendo da concetti affatto differenti e che si possono ritenere, in certo modo, come una generalizzazione di quelli che servono di fondamento al metodo delle caratteristiche di RIEMANN, ha stabilito, pel caso di $m = 2$, delle formole più generali di quelle che aveva ottenuto col metodo di KIRCHHOFF-BELTRAMI ed, in seguito, io ho applicato (****) il procedimento stesso anche al caso di $m = 3$. Scopo di questo lavoro è ora di estenderne l'applicazione al caso di m qualunque.

(*) Vedi: *Sul principio di Huyghens.* Rend. dell'Ist. Lomb., 1889, e *Sull'espressione analitica del principio di Huyghens.* Rend. dell'Acc. dei Lincei, vol. I, 1.° semestre, serie V.

(**) *Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi.* Rend. dell'Acc. dei Lincei, vol. I, 2.° semestre, serie V.

(***) *Sulle onde cilindriche nei mezzi isotropi.* Rend. dell'Acc. dei Lincei, vol. I, 2.° semestre, serie V.

(****) *Sulla dimostrazione della formola che rappresenta analiticamente il principio di Huyghens.* Rend. dell'Acc. dei Lincei, vol. V, 1.° semestre, serie V.

1. Consideriamo perciò $x_1, x_2, \ldots, x_m$ come le coordinate di un punto in uno spazio lineare ad m dimensioni che indicheremo col nome di spazio (x_i) e, similmente, consideriamo $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$ come le coordinate di un punto in uno spazio lineare ad $m+1$ dimensioni che indicheremo col nome di spazio (x_i, t). Chiamiamo S_m una porzione finita, qualunque dello spazio (x_i) ed S_{m+1} una porzione finita, qualunque dello spazio (x_i, t); così chiamiamo pure Σ_{m-1} una varietà ad $m-1$ dimensioni dello spazio (x_i) e Σ_m una varietà qualunque ad m dimensioni dello spazio (x_i, t).

Se ora φ e φ_λ sono due funzioni qualunque, soddisfacenti all'equazione:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \sum_1^m {}_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0, \tag{1}$$

regolari in tutta la porzione S_{m+1} dello spazio (x_i, t) limitata dalla varietà Σ_m e, se supponiamo che la normale n a Σ_m sia diretta verso l'interno di S_{m+1}, col solito processo di integrazione per parti dalla identità:

$$\int\limits_{S_{m+1}} \left\{ \varphi_\lambda \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \sum_1^m {}_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \right] - \varphi \left[\frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial t^2} - \sum_1^m {}_i \frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial x_i^2} \right] \right\} d\, S_{m+1} = 0,$$

potremo dedurre la formola:

$$\int\limits_{\Sigma_m} \left\{ \varphi_\lambda \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{dt}{dn} - \sum_1^m {}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dn} \right] - \varphi \left[\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial t} \frac{dt}{dn} - \sum_1^m {}_i \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dn} \right] \right\} d\, \Sigma_m = 0. \tag{2}$$

2. Dinoti ora (x'_i, t') un punto determinato dello spazio (x_i, t) ed A la varietà conica ad m dimensioni, di rotazione intorno alla retta α parallela all'asse t e passante pel punto (x'_i, t'), avente il vertice in questo stesso punto e per equazione:

$$\frac{t'-t}{\pm r} = 1, \qquad r = \sqrt{\sum_1^m {}_i \left(x'_i - x_i\right)^2}. \tag{3}$$

Supponiamo quindi, dapprima, che la porzione S_{m+1} dello spazio (x_i, t) in cui vogliamo applicare la formola (2), sia limitata dalla varietà A e da una porzione Σ_m di una varietà ad m dimensioni, soggetta alla condizione di essere incontrata in un punto solo da ogni retta parallela all'asse t, e tale che in ogni punto di S_{m+1} sia $\left|\frac{t'-t}{r}\right| \geqq 1$, potendo però essere indifferentemente

$t' > t$, ovvero $t' < t$. Per φ_λ, nella (2), prendiamo invece una delle due funzioni seguenti:

$$\varphi_1 = \sum_0^{p-1}{}_h \frac{(-1)^{p-h-1}}{2h+1} \binom{p-1}{h} (\theta^{2h+1} - 1), \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2 = \frac{\theta(\theta^2-1)^{\frac{m-3}{2}}}{m-2} + \sum_2^{p-1}{}_h (-1)^{h+1} \frac{m-3}{m-2} \cdot \frac{m-5}{m-4} \cdots \frac{m-2h+1}{m-2(h-1)} \frac{\theta(\theta^2-1)^{\frac{m-(2h+1)}{2}}}{m-2h} + \\ + (-1)^p \frac{m-3}{m-2} \cdot \frac{m-5}{m-4} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \log\left[\theta + \sqrt{\theta^2-1}\right], \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

con:

$$\theta = \pm \frac{t'-t}{r}, \tag{6}$$

a seconda che m è eguale, rispettivamente, a $2p+1$, ovvero a $2p$ con $p > 1$. Ma quando $m = 2$ prendiamo $\varphi_2 = \log\left[\theta + \sqrt{\theta^2+1}\right]$. Inoltre nell'espressione di θ prenderemo il segno $+$ o il segno $-$ a seconda che $t' > t$, ovvero $t' < t$.

A questo modo resta escluso soltanto il caso di $m = 1$ di cui del resto possiamo fare a meno di occuparci a causa della sua semplicità.

Notiamo ora che, diventando le funzioni φ_λ infinite lungo tutta la retta α, supponendo che questa retta cada in parte in S_{m+1}, ovvero sia tangente a Σ_m, non possiamo applicare la formola (2) nelle condizioni indicate. Escluderemo allora da S_{m+1} quella porzione dello spazio (x_i, t) che è compresa nella varietà cilindrica C di rotazione intorno alla retta α e che ha per equazione:

$$r = \varepsilon, \tag{7}$$

dove ε è una costante che faremo poi diventare infinitamente piccola, ed indicheremo con S'_{m+1} e Σ'_m ciò che resta di S_{m+1} e di Σ_m dopo questa esclusione, con Σ''_m, Σ'''_m quelle parti di A e di C che insieme a Σ'_m determinano il contorno completo di S'_{m+1}.

Poichè ora:

$$\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial t} = \mp \frac{1}{r} \frac{d\varphi_\lambda}{d\theta}, \qquad \sum_1^m{}_i \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dn} = \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial r} \frac{dr}{dn} = \mp \frac{1}{r} \frac{d\varphi_\lambda}{d\theta} \frac{t'-t}{r} \frac{dr}{dn},$$

l'equazione (2), per il caso nostro, si potrà scrivere:

$$\int_{\Sigma'_m + \Sigma''_m + \Sigma'''_m} \left\{ \varphi_\lambda \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{dt}{dn} - \sum_1^m{}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dn} \right] \pm \frac{\varphi}{r} \frac{d\varphi_\lambda}{d\theta} \left[\frac{dt}{dn} - \frac{t'-t}{r} \frac{dr}{dn} \right] \right\} d\Sigma_m = 0. \tag{8}$$

Osservando quindi che, su A, si ha:

$$\frac{dt}{dn} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{dr}{dn} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{9}$$

a seconda che $t' > t$, ovvero $t' < t$, ne viene che in ogni punto di A è:

$$\frac{dt}{dn} - \frac{t'-t}{r}\frac{dr}{dn} = 0,$$

e questo risultato, poichè su A è anche $\varphi_\lambda = 0$, mostra che l'integrale esteso a Σ''_m che comparisce nella (8), è identicamente nullo. L'integrale esteso a Σ'''_m, invece, notando che su C è:

$$\frac{dt}{dn} = 0, \qquad \frac{dr}{dn} = 1, \tag{10}$$

si riduce a:

$$-\int\limits_{\Sigma'''_m}\left(\varphi_\lambda \frac{d\varphi}{dr} \pm \frac{t'-t}{r}\varphi\frac{d\varphi_\lambda}{d\theta}\right) d\Sigma'''_m =$$

$$= \mp \int\limits_{t'_0}^{t'} dt \int\limits_{\Omega_{m-1}} \varepsilon^{m-1}\left(\varphi_\lambda \frac{d\varphi}{dr} \pm \frac{t'-t}{\varepsilon^2}\varphi\frac{d\varphi_\lambda}{d\theta}\right) d\Omega_{m-1},$$

indicando con t'_0 il valore di t che corrisponde alla intersezione di Σ_m con la retta α, con Ω_{m-1} una varietà sferica ad $m-1$ dimensioni avente il centro nel punto (x'_i, t) e per raggio uno. Se poi la retta α tocca semplicemente la varietà Σ_m, per Ω_{m-1} s'intenderà soltanto una parte della varietà sferica di cui sopra abbiamo parlato.

Facciamo ora tendere ε a zero. Tenendo presenti le espressioni (4) e (5) di φ_λ ed osservando che, in ogni caso, si ha:

$$\frac{d\varphi_\lambda}{d\theta} = (\theta^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}},$$

si trova anche:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int\limits_{\Omega_{m-1}} \varepsilon^{m-1}\left(\varphi_\lambda \frac{d\varphi}{dr} \pm \frac{t'-t}{r}\varphi\frac{d\varphi_\lambda}{d\theta}\right) d\Omega_{m-1} = (\pm 1)^{m-2}\, 2\, \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}(t'-t)^{m-2}\,\varphi(x'_i, t),$$

supponendo che la retta α incontri Σ_m senza esserle tangente. Nel caso in cui la retta α tocca Σ_m, invece di $2\dfrac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$, si deve far comparire, nell'espressione del limite precedente, come coefficiente di $(\pm 1)^{m-2}\varphi(x'_i,\ t)$ una quantità σ che rappresenta in generale il valore dell'integrale:

$$\int_{\Omega_{m-1}} d\,\Omega_{m-1}.$$

Tenendo presente soltanto il primo caso, potremo scrivere le due formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
&2\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int_{t'_0}^{t'}(t'-t)^{m-2}\varphi(x'_i,\ t)\,d\,t = \\
&= \pm\int_{\Sigma_m}\varphi\left[\frac{d\,t}{d\,n}-\frac{t'-t}{r}\frac{d\,r}{d\,n}\right](\theta^2-1)^{\frac{m-3}{2}}\frac{d\,\Sigma_m}{r} \\
&+\int_{\Sigma_m}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{d\,t}{d\,n}-\sum_1^m{}_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{d\,x_i}{d\,n}\right]\sum_0^{p-1}{}_h\frac{(-1)^{p-h-1}}{2h+1}\binom{p-1}{h}(\theta^{2h+1}-1)\,d\,\Sigma_m,
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\pm 2\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int_{t'_0}^{t'}(t'-t)^{m-2}\varphi(x'_i,\ t)\,d\,t = \\
&= \pm\int_{\Sigma_m}\varphi\left[\frac{d\,t}{d\,n}-\frac{t'-t}{r}\frac{d\,r}{d\,n}\right](\theta^2-1)^{\frac{m-3}{2}}\frac{d\,\Sigma_m}{r} \\
&+\int_{\Sigma_m}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{d\,t}{d\,n}-\sum_1^m{}_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{d\,x_i}{d\,n}\right]\left[\frac{\theta(\theta^2-1)^{\frac{m-3}{2}}}{m-2}\right. \\
&+\sum_2^{p-1}{}_h\frac{m-3}{m-2}\cdot\frac{m-5}{m-4}\cdots\frac{m-2h+1}{m-2(h-1)}\,\frac{\theta(\theta^2-1)^{\frac{m-(2h+1)}{2}}}{m-2h} \\
&\left.+(-1)^p\frac{m-3}{m-2}\cdot\frac{m-5}{m-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\log\left[\theta+\sqrt{\theta^2-1}\right]\right]d\,\Sigma_m,
\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

la prima delle quali vale per $m = 2p + 1$ e la seconda per $m = 2p$, e, come al solito, si dovrà scegliere il segno superiore o l'inferiore a seconda che, in S_{m+1}, $t' > t$, ovvero $t' < t$.

Derivando le formole (11) e (12) $m-1$ volte rispetto a t' si ottengono le formole che andiamo a scrivere e che determinano il valore di φ nel punto (x'_i, t') in funzione dei valori che φ e le sue derivate parziali rispetto alle x_i e a t assumono su Σ_m:

$$\left.\begin{aligned} &\pm 2\,\frac{\pi^{\frac{m}{2}}\Gamma(m-1)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\varphi(x'_i, t') = \\ &= \frac{\partial^{p+1}}{\partial t'^{p+1}}\int_{\Sigma_m}\varphi\,\frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}}\left\{\left[\frac{dt}{dn}-\frac{t'-t}{r}\frac{dr}{dn}\right]\left[(t'-t)^2-r^2\right]^{\frac{m-3}{2}}\right\}\frac{d\Sigma_m}{r^{m-2}} \\ &+ \frac{\partial^p}{\partial t'^p}\int_{\Sigma_m}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dn}-\sum_1^m{}_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dn}\right]\frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}}\left\{\left[(t'-t)^2-r^2\right]^{\frac{m-3}{2}}\right\}\frac{d\Sigma_m}{r^{m-2}}, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} &2\,\frac{\pi^{\frac{m}{2}}\Gamma(m-1)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\varphi(x'_i, t') = \\ &= \frac{\partial^{p}}{\partial t'^{p}}\int_{\Sigma_m}\varphi\,\frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}}\left\{\left[\frac{dt}{dn}-\frac{t'-t}{r}\frac{dr}{dn}\right]\left[(t'-t)^2-r^2\right]^{\frac{m-3}{2}}\right\}\frac{d\Sigma_m}{r^{m-2}} \\ &+ \frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}}\int_{\Sigma_m}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dn}-\sum_1^m{}_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dn}\right]\frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}}\left\{\left[(t'-t)^2-r^2\right]^{\frac{m-3}{2}}\right\}\frac{d\Sigma_m}{r^{m-2}}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

3. Supponiamo ora che Σ_m si riduca ad una porzione S_m dell'iperpiano $t = t'_0$ dello spazio (x_i, t), per tutti i punti della quale si abbia $\left|\frac{t'-t}{r}\right| > 1$, limitata dalla varietà Σ_{m-1}, insieme alla porzione della varietà cilindrica Γ ad m dimensioni che nasce dal condurre le parallele all'asse t dai diversi punti della varietà Σ_{m-1} e compresa fra Σ_{m-1} e la varietà conica A.

Osservando allora che su S_m è:

$$\frac{dt}{dn} = \pm 1, \qquad \frac{dx_i}{dn} = \frac{dr}{dn} = 0,$$

e che su Γ è invece:

$$\frac{dt}{dn} = 0, \qquad \sum_1^m{}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dn} = \frac{d}{dn},$$

si trova subito che le formole (13) e (14) si riducono rispettivamente a:

$$
\left.
\begin{aligned}
&2\frac{\pi^{\frac{m}{2}}\Gamma(m-1)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\varphi(x'_i,\ t')=\\
&=-\int_{\Sigma_{m-1}}\frac{d\Sigma_{m-1}}{r^{m-1}}\frac{dr}{dn}\frac{\partial^{p+1}}{\partial t'^{p+1}}\int_{t'_0}^{t'\mp r}dt\,\varphi\frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}}\left\{(t'-t)\left[(t'-t)^2-r^2\right]^{\frac{m-3}{2}}\right\}\\
&\quad-\int_{\Sigma_{m-1}}\frac{d\Sigma_{m-1}}{r^{m-2}}\frac{\partial^{p}}{\partial t'^{p}}\int_{t'_0}^{t'\mp r}dt\frac{d\varphi}{dn}\frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}}\left[(t'-t)^2-r^2\right]^{\frac{m-3}{2}},
\end{aligned}
\right\}\quad(15)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&2\frac{\pi^{\frac{m}{2}}\Gamma(m-1)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\varphi(x'_i,\ t')=\\
&=\mp\int_{\Sigma_{m-1}}\frac{d\Sigma_{m-1}}{r^{m-1}}\frac{dr}{dn}\frac{\partial^{p}}{\partial t'^{p}}\int_{t'_0}^{t'\mp r}dt\,\varphi\frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}}\left\{(t'-t)\left[(t'-t)^2-r^2\right]^{\frac{m-3}{2}}\right\}\\
&\quad\mp\int_{\Sigma_{m-1}}\frac{d\Sigma_{m-1}}{r^{m-2}}\frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}}\int_{t'_0}^{t'\mp r}dt\frac{d\varphi}{dn}\frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}}\left[(t'-t)^2-r^2\right]^{\frac{m-3}{2}}\\
&\quad\pm\int_{S_m}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial^{m-2}}{\partial t'^{m-2}}\left[(t'-t'_0)^2-r^2\right]^{\frac{m-3}{2}}\frac{dS_m}{r^{m-2}}\\
&\quad\pm\int_{S_m}\varphi\frac{\partial^{m-1}}{\partial t'^{m-1}}\left[(t'-t'_0)^2-r^2\right]^{\frac{m-3}{2}}\frac{dS_m}{r^{m-2}}.
\end{aligned}
\right\}\quad(16)
$$

Facciamo ancora l'ipotesi che φ si annulli per i valori di t inferiori ad un certo limite se nelle formole precedenti vale il segno superiore, ossia se in S_{m+1} è $t' > t$, e che si annulli per i valori di t superiori ad un certo limite se nelle stesse formole vale il segno inferiore, ossia se in S_{m+1} è $t' < t$, e che t'_0 diventi infinitamente grande e negativo nel primo caso, infinitamente grande e positivo nel secondo.

In conseguenza di queste ipotesi gli ultimi due integrali che compaiono nella (16) si annullano identicamente. Per trovare poi a che cosa si riducono gli altri integrali che compaiono nella (15) e nella (16) poniamo, per brevità:

$$\varphi_h = \frac{\partial^h \varphi}{\partial t^h}, \qquad \varphi_0 = \varphi,$$

e, se siamo nel caso in cui $t' > t'_0$, poniamo nei detti integrali $t' - t = u$, mentre se siamo nel caso in cui $t' < t'_0$, poniamo $t' - t = -u$. Si trova subito che l'integrale:

$$\int_{t'_0}^{t' \mp r} d\,t \frac{d\varphi}{d\,n} \frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}} \left[(t'-t)^2 - r^2\right]^{\frac{m-3}{2}}$$

si riduce a:

$$(\pm 1)^p \int_r^\infty d\,u \frac{d\,\varphi(x_i,\, t' \mp u)}{d\,n} \frac{\partial^{p-1}}{\partial u^{p-1}} (u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} =$$

$$= \pm \int_r^\infty d\,u \frac{d\,\varphi_{p-1}(x_i,\, t' \mp u)}{d\,n} (u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} =$$

$$= \pm \frac{\partial}{\partial n} \int_r^\infty d\,u\, \varphi_{p-1}(x_i,\, t' \mp r)\,(u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}},$$

indicando col simbolo $\frac{\partial}{\partial n}$ l'operazione:

$$\sum_1^m{}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{d\,x_i}{d\,n},$$

durante la quale r deve considerarsi come una costante. Con la stessa facilità si trova pure che l'integrale:

$$\int_{t'_0}^{t' \mp r} d\,t\, \varphi \frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}} \left\{(t'-t)\left[(t'-t)^2 - r^2\right]^{\frac{m-3}{2}}\right\}$$

si riduce a:

$$(\pm 1)^{p-1} \int_r^\infty d\,u\, \varphi(x_i,\, t' \mp u) \frac{\partial^{p-1}}{\partial u^{p-1}} \left\{u\,(u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}}\right\} =$$

$$= \int_r^\infty d\,u\, \varphi_{p-1}(x_i,\, t' \mp u)\, u\,(u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}},$$

e quindi, nel caso di $m = 2p + 1$, l'espressione:

$$\frac{1}{r^{m-1}} \frac{\partial^{p+1}}{\partial t'^{p+1}} \int_{t_0}^{t' \mp r} d\,t\,\varphi \frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}} \left\{ (t'-t) \left[(t'-t)^2 - r^2 \right]^{\frac{m-3}{2}} \right\},$$

diventa:

$$\frac{1}{r^{m-1}} \frac{\partial}{\partial t'} \int_r^\infty d\,u\,\varphi_{m-2}(x_i,\ t' \mp u)\, u\,(u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} =$$

$$= \mp \frac{1}{r^{m-1}} \int_r^\infty d\,u \frac{\partial}{\partial u} \varphi_{m-2}(x_i,\ t' \mp u)\, u\,(u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} =$$

$$= \pm \frac{1}{r^{m-1}} \left\{ \int_r^\infty d\,u\,\varphi_{m-2}(x_i,\ t' \mp u)\,(u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} \right.$$

$$\left. + (m-3) \int_r^\infty d\,u\,\varphi_{m-2}(x_i,\ t' \mp u)\, u^2 (u^2 - r^2)^{\frac{m-5}{2}} \right\} =$$

$$= \mp \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^{m-2}} \int_r^\infty d\,u\,\varphi_{m-2}(x_i,\ t' \mp u)\,(u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} \right].$$

Questo calcolo suppone però $m > 3$. Ma se $m = 3$ abbiamo subito:

$$\frac{1}{r^{m-1}} \frac{\partial}{\partial t'} \int_r^\infty d\,u\,\varphi_{m-2}(x_i,\ t' \mp u)\, u\,(u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t'} \int_r^\infty u\,\varphi_1(x_i,\ t' \mp u)\, d\,u =$$

$$= \pm \frac{1}{r} \varphi_1(x_i,\ t' \mp r) \pm \frac{1}{r^2} \int_r^\infty \varphi_1(x_i,\ t' \mp u)\, d\,u =$$

$$= \mp \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \int_r^\infty \varphi_1(x_i,\ t' \mp u)\, d\,u \right].$$

Ad un identico risultato si perviene anche nel caso di $m = 2p$ se si trasforma in modo analogo l'espressione:

$$\frac{1}{r^{m-1}} \frac{\partial^p}{\partial t'^p} \int_{t'_0}^{t' \mp r} d\,t\, \varphi \frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}} \left\{ (t'-t) \left[(t'-t)^2 - r^2 \right]^{\frac{m-3}{2}} \right\}.$$

Ne viene che, nel caso di $m = 2p + 1$, possiamo scrivere la formola:

$$\left.\begin{aligned} & 2\frac{\pi^{\frac{m}{2}}\,\Gamma(m-1)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \varphi(x'_i,\ t') = \\ & = \pm \int_{\Sigma_{m-1}} d\,\Sigma_{m-1} \frac{\delta}{\delta n} \left[\frac{1}{r^{m-2}} \int_r^\infty \varphi_{m-2}(x_i,\ t' \mp u)(u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} d\,u \right] \\ & \mp \int_{\Sigma_{m-1}} d\,\Sigma_{m-1} \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{r^{m-2}} \int_r^\infty \varphi_{m-2}(x_i,\ t' \mp u)(u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} d\,u \right], \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

nella quale formola il simbolo $\frac{\delta}{\delta n}$ indica l'operazione $\frac{\partial}{\partial r} \frac{d\,r}{d\,n}$ e i segni si possono scegliere ad arbitrio purchè si scelgano o sempre i segni superiori o sempre gli inferiori. Nel caso invece in cui $m = 2p$ abbiamo la formola:

$$\left.\begin{aligned} & 2\frac{\pi^{\frac{m}{2}}\,\Gamma(m-1)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \varphi(x'_i,\ t') = \\ & = \int_{\Sigma_{m-1}} d\,\Sigma_{m-1} \frac{\delta}{\delta n} \left[\frac{1}{r^{m-2}} \int_r^\infty \varphi_{m-2}(x_i,\ t' \mp u)(u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} d\,u \right] \\ & - \int_{\Sigma_{m-1}} d\,\Sigma_{m-1} \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{r^{m-2}} \int_r^\infty \varphi_{m-2}(x_i,\ t' \mp u)(u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} d\,u \right]. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

4. Pel caso di $m = 2p + 1$ si può dare alla (15) una forma abbastanza semplice senza sottoporre φ ad altre condizioni che a quelle generali. Osserviamo perciò che si ha:

$$\frac{\partial^p}{\partial t'^p} \int_{t'_0}^{t' \mp r} d\,t \frac{d\,\varphi}{d\,n} \frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}} \left[(t'-t)^2 - r^2 \right]^{\frac{m-3}{2}} =$$

$$= \sum_0^{p-1}{}_h \left\{ \frac{\partial^{p-1+h}}{\partial t'^{p-1+h}} \left[(t'-t)^2 - r^2 \right]^{p-1} \right\}_{t = t' \mp r} \frac{d}{d\,n} \varphi_{p-1-h}(x_i,\ t' \mp r).$$

Inoltre si trova subito che:

$$\left\{ \frac{\partial^{p-1+h}}{\partial t'^{p-1+h}} \left[(t'-t)^2 - r^2 \right]^{p-1} \right\}_{t=t'\mp r} =$$

$$= (\pm 2)^{p-1-h} \frac{(p-1+h)!\,(p-1)!}{(p-1-h)!\,h!} r^{p-1-h} \text{ (*)},$$

quindi anche:

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial^p}{\partial t'^p} \int_{t'_0}^{t'\mp r} d\,t \frac{d\,\varphi}{d\,n} \frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}} \left[(t'-t)^2 - r^2 \right]^{\frac{m-3}{2}} = \\ &= (p-1)! \sum_0^{p-1}{}_h (\pm 2)^{p-1-h} \frac{(p-1+h)!}{(p-1-h)!\,h!} \frac{\partial}{\partial n} \frac{\varphi_{p-1-h}(x_i,\, t' \mp r)}{r^{p+h}}\,. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Allo stesso modo si trova:

$$\frac{\partial^{p+1}}{\partial t'^{p+1}} \int_{t'_0}^{t'\mp r} d\,t\,\varphi \frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}} \left\{ (t'-t) \left[(t'-t)^2 - r^2 \right]^{\frac{m-3}{2}} \right\} =$$

$$= \frac{\partial^{p+1}}{\partial t'^{p+1}} \int_{t'_0}^{t'\mp r} d\,t\,\varphi \left\{ (t'-t) \frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}} \left[(t'-t)^2 - r^2 \right]^{p-1} + \right.$$

$$\left. + (p-1) \frac{\partial^{p-2}}{\partial t'^{p-2}} \left[(t'-t)^2 - r^2 \right]^{p-1} \right\} =$$

$$= \sum_0^{p-1}{}_h \left\{ \frac{\partial^{p-1+h}}{\partial t'^{p-1+h}} \left[(t'-t)^2 - r^2 \right]^{p-1} \right\}_{t=t'\mp r} \left\{ \pm r\, \varphi_{p-h}(x_i,\, t' \mp r) + \right.$$

$$\left. + (p+h)\, \varphi_{p-1-h}(x_i,\, t' \mp r) \right\},$$

(*) Per convincersi della verità di questa formola si osservi che la derivata dell'ordine $p-1+h$ della potenza $[(t'-t)^2 - r^2]^{p-1}$ si può eseguire come la derivata dello stesso ordine del prodotto di $p-1$ funzioni qualunque $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{p-1}$ e che nello sviluppo di questa derivata, il coefficiente del termine che contiene la derivata α^{ma} di ψ_1, quella β^{ma} di ψ_2, ecc., coincide col coefficiente del termine $\psi_1^\alpha\, \psi_2^\beta \ldots$, dove $\alpha, \beta, \ldots$ sono da considerarsi come esponenti, nello sviluppo di $(\psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_{p-1})^{p-1+h}$. Nel nostro caso i soli termini che non ci diano un risultato nullo sono quelli in cui le $\alpha, \beta, \ldots$ hanno almeno il valore 1 e non più che il valore 2. Il coefficiente di un termine simile è, com'è noto, $\frac{(p-1+h)!}{2^h}$ ed il numero di essi $\binom{p-1}{h} = \frac{(p-1)!}{(p-1-h)!\,h!}$. Facendo poi astrazione dal coefficiente, il valore di ciascuno di questi termini, dopo la sostituzione, è $2^{p-1}(\pm r)^{p-1-h}$, quindi ecc.

e quindi:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{r^{m-1}}\frac{dr}{dn}\frac{\partial^{p+1}}{\partial t'^{p+1}}\int_{t'_0}^{t'\mp r} d\,t\,\varphi\,\frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}}\left\{(t'-t)\left[(t'-t)^2-r^2\right]^{p-1}\right\}=\\
&=(p-1)!\sum_0^{p-1}{}_h(\pm 2)^{p-1-h}\frac{(p-1+h)!}{(p-1-h)!\,h!}\left\{-\frac{1}{r^{p+h}}\frac{dr}{dn}\frac{\partial}{\partial r}\varphi_{p-1-h}(x_i,\ t'\mp r)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{p+h}{r^{p+h+1}}\frac{dr}{dn}\varphi_{p-h-1}(x_i,\ t'\mp r)\right\}=\\
&=-(p-1)!\sum_0^{p-1}{}_h(\pm 2)^{p-1-h}\frac{(p-1+h)!}{(p-1-h)!\,h!}\frac{\delta}{\delta n}\frac{\varphi_{p-h-1}(x_i,\ t'\mp r)}{r^{p+h}}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

Si osservi finalmente che per essere:

$$\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)=\frac{2p-1}{2}\cdot\frac{2p-3}{2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\pi^{\frac{1}{2}}=2^{-p}(2p-1)(2p-3)\ldots 1\,.\,\pi^{\frac{1}{2}}$$

$$\Gamma(m-1)=(2p-1)!=(2p-1)(2p-3)\ldots 3\,.\,1\times 2^{p-1}\times(p-1)!$$

si ha anche:

$$2\,\frac{\pi^{\frac{m}{2}}\,\Gamma(m-1)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}=(4\pi)^p\times(p-1)!$$

Tenendo presente questo risultato e le (19), (20) si trova immediatamente che alla (15) si può dare la forma seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&(4\pi)^p\,\varphi(x'_i,\ t')=\\
&=\int_{\Sigma_{m-1}} d\,\Sigma_{m-1}\left\{\sum_0^{p-1}{}_h(\pm 2)^{p-1-h}\frac{(p-1+h)!}{(p-1-h)!\,h!}\left[\frac{\delta}{\delta n}\frac{\varphi_{p-h-1}(x_i,\ t'\mp r)}{r^{p+h}}-\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-\frac{\partial}{\partial n}\frac{\varphi_{p-h-1}(x_i,\ t'\mp r)}{r^{p+h}}\right]\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

5. Supponiamo ora che sia $t'>0$ e che nelle (13) e (14) Σ_m coincida con la porzione S_m dell'iperpiano $t=0$ che è compresa nella varietà conica A in modo che S_m risulterà limitata da una varietà sferica Ω_{m-1} ad $m-1$ dimensioni avente il centro nel punto $(x'_i,\ 0)$ e per raggio $r=t'$. Poichè su S_m è $\frac{dt}{dn}=1$, $\frac{dx_i}{dn}=\frac{dr}{dn}=0$, le formole ricordate, ponendo $\varphi_1=\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, si

potranno scrivere:

$$
\left.\begin{aligned}
&2\,\frac{\pi^{\frac{m}{2}}\,\Gamma(m-1)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\,\varphi(x'_i,\ t') = \\
&= \frac{\partial^{p+1}}{\partial t'^{p+1}}\int_{S_m}\varphi(x_i,\ 0)\,\frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}}\,(t'^2-r^2)^{p-1}\,\frac{d\,S_m}{r^{m-2}} \\
&+ \frac{\partial^{p}}{\partial t'^{p}}\int_{S_m}\varphi_1(x_i,\ 0)\,\frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}}\,(t'^2-r^2)^{p-1}\,\frac{d\,S_m}{r^{m-2}},
\end{aligned}\right\} \tag{22}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&2\,\frac{\pi^{\frac{m}{2}}\,\Gamma(m-1)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\,\varphi(x'_i,\ t') = \\
&= \frac{\partial^{p}}{\partial t'^{p}}\int_{S_m}\varphi(x_i,\ 0)\,\frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}}\,(t'^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\,\frac{d\,S_m}{r^{m-2}} \\
&+ \frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}}\int_{S_m}\varphi_1(x_i,\ 0)\,\frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}}\,(t'^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\,\frac{d\,S_m}{r^{m-2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{23}
$$

Queste formole corrispondono alla generalizzazione delle formole di Poisson pel caso di m dispari e pel caso di m pari. La formola (22) si può porre però anche sotto una forma più semplice dalla quale l'analogia indicata potrà riuscire più manifesta. Si osservi perciò che:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{p+1}}{\partial t'^{p+1}}\int_{S_m}\varphi(x_i,\ 0)\,\frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}}\,(t^2-r^2)^{p-1}\,\frac{d\,S_m}{r^{m-2}} = \\
&= \sum_0^{p-1}{}_h\,\frac{d^{p-h}}{d r^{p-h}}\int_{\Omega_{m-1}}\varphi(x_i,\ 0)\left|\,\frac{\partial^{p-1+h}}{\partial t'^{p-1+h}}\,(t'^2-r^2)^{p-1}\right|_{t'=r}\frac{d\,\Omega_{m-1}}{r^{m-2}} = \\
&= (p-1)!\sum_0^{p-1}{}_h\,2^{p-1-h}\,\frac{(p-1+h)!}{(p-1-h)!\,h!}\,\frac{d^{p-h}}{d r^{p-h}}\left\{\frac{1}{r^{p+h}}\int_{\Omega_{m-1}}\varphi(x_i,\ 0)\,d\,\Omega_{m-1}\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{p}}{\partial t'^{p}}\int_{S_m}\varphi_1(x_i,\ 0)\,\frac{\partial^{p-1}}{\partial t'^{p-1}}\,(t'^2-r^2)^{p-1}\,\frac{d\,S_m}{r^{n-2}} = \\
&= (p-1)!\sum_0^{p-1}{}_h\,2^{p-1-h}\,\frac{(p-1+h)!}{(p-1-h)!\,h!}\,\frac{d^{p-1-h}}{d r^{p-1-h}}\left\{\frac{1}{r^{p+h}}\int_{\Omega_{m-1}}\varphi_1(x_i,\ 0)\,d\,\Omega_{m-1}\right\},
\end{aligned}
$$

per cui si avrà facilmente:

$$
\left.
\begin{aligned}
&(4\pi)^p \varphi(x'_i,\ t') = \\
&= \sum_0^{p-1}{}_h\, 2^{p-1-h} \frac{(p-1+h)!}{(p-1-h)!\,h!} \frac{d^{p-1-h}}{d r^{p-1-h}} \left\{ \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^{p+h}} \int_{\Omega_{m-1}} \varphi(x_i,\ 0)\, d\,\Omega_{m-1}\right]\right. \\
&\left. + \frac{1}{r^{p+h}} \int_{\Omega_{m-1}} \varphi_1(x_i,\ 0)\, d\,\Omega_{m-1}\right\}.
\end{aligned}
\right\} \tag{24}
$$

6. Supponiamo ora che la porzione dello spazio $(x_i,\ t)$ nel quale andiamo ad applicare la formola (2) sia limitata ancora dalla varietà conica A e da una porzione di una varietà ad m dimensioni, ma tale che in ogni suo punto sia $\frac{t'-t}{r} \leqq 1$. Una porzione dello spazio $(x_i,\ t)$, così determinata, sarà indicata da noi col simbolo $\bar{S}_{m+1}$, mentre la porzione della varietà ad m dimensioni che insieme ad A limita $\bar{S}_{m+1}$, sarà indicata col simbolo $\bar{\Sigma}_m$. La porzione dell'iperpiano $t = t'$ che cade in $\bar{S}_{m+1}$, e che chiameremo T, divide $\bar{S}_{m+1}$ e $\bar{\Sigma}_m$ in due parti ciascuna che indicheremo rispettivamente coi simboli $\bar{S}_{m+1,1}$, $\bar{\Sigma}_{m,1}$ e $\bar{S}_{m+1,2}$, $\bar{\Sigma}_{m,2}$ a seconda che in ognuno dei loro punti sia $t' > t$, ovvero $t < t$.

Ciò posto applicheremo la formola (2) prima nello spazio $\bar{S}_{m+1,1}$ e poi nello spazio $\bar{S}_{m+1,2}$ prendendo per φ_λ una delle due funzioni:

$$
\varphi_3 = \sum_0^{p-1}{}_h \frac{(-1)^{p-h-1}}{2h+1} \binom{p-1}{h} (\theta^{2h+1} - 1), \tag{25}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi_4 = &\frac{\theta(1-\theta^2)^{\frac{m-3}{2}}}{m-2} + \sum_2^{p-1}{}_h \frac{m-3}{m-2}\cdot\frac{m-5}{m-4}\cdots\frac{m-(2h-1)}{m-2(h-1)}\,\frac{\theta(1-\theta^2)^{\frac{m-(2h+1)}{2}}}{m-2h} \\
&+ \frac{m-3}{m-2}\cdot\frac{m-5}{m-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(\text{arcsen}\,\theta - \frac{\pi}{2}\right),
\end{aligned}
\right\} \tag{26}
$$

a seconda che $m = 2p+1$, ovvero $m = 2p$ con $p > 1$, e nelle quali formole $\theta = \frac{t'-t}{r}$, ovvero $\theta = -\frac{t'-t}{r}$ a seconda che siamo in $\bar{S}_{m+1,1}$, ovvero in $\bar{S}_{m+1,2}$. Nel caso poi in cui $m = 2$ prenderemo semplicemente $\varphi_4 = \text{arcsen}\,\theta - \frac{\pi}{2}$.

Per rendere poi effettivamente possibile l'applicazione della formola (2) ai nostri casi, escluderemo da $\bar{S}_{m+1,1}$ e da $\bar{S}_{m+1,2}$ quelle loro porzioni che sono comprese nella varietà C, in modo analogo a quello che è stato fatto innanzi, e chiameremo $\overline{S}'_{m+1,1}$, $\overline{S}'_{m+1,2}$, T' ciò che resta di $\overline{S}_{m+1,1}$, di $\overline{S}_{m+1,2}$ e di T dopo questa esclusione, con $\Sigma'_{m,1}$ e $\Sigma''_{m,1}$ le porzioni di A e C che insieme a $\overline{\Sigma}_{m,2}$ e a T' limitano completamente $\overline{S}'_{m+1,1}$, e con $\Sigma'_{m,2}$, $\Sigma''_{m,2}$ le porzioni di A e C che insieme a $\overline{\Sigma}_{m,2}$ e a T' limitano completamente $\overline{S}'_{m+1,2}$. Inoltre intendiamo di scegliere la direzione positiva della normale a $\Sigma'_{m,1}$, $\Sigma''_{m,1}$, $\overline{\Sigma}_{m,1}$ e a T', inquanto fa parte del contorno di $\overline{S}'_{m+1,1}$, in modo che vada all'interno di $\overline{S}_{m+1,1}$, come pure intendiamo di scegliere la direzione positiva della normale a $\Sigma'_{m,2}$, $\Sigma''_{m,2}$, $\overline{\Sigma}_{m,2}$ e a T', in quanto fa parte del contorno di $\overline{S}_{m+1,2}$, in modo che vada all'interno di $\overline{S}'_{m+1,2}$.

Dopo ciò potremo scrivere le due formole seguenti:

$$\int\limits_{\Sigma'_{m,1}+\Sigma''_{m,1}+\overline{\Sigma}_{m,1}+T'} \left\{ \varphi_\lambda \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{dt}{dn} - \sum_1^m {}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dn} \right] + \frac{\varphi}{r} \frac{d\varphi_\lambda}{d\theta} \left[\frac{dt}{dn} - \frac{t'-t}{r} \frac{dr}{dn} \right] \right\} d\Sigma_m = 0, \tag{27}$$

$$\int\limits_{\Sigma'_{m,2}+\Sigma''_{m,2}+\overline{\Sigma}_{m,2}+T'} \left\{ \varphi_\lambda \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{dt}{dn} - \sum_1^m {}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dn} \right] - \frac{\varphi}{r} \frac{d\varphi_\lambda}{d\theta} \left[\frac{dt}{dn} - \frac{t'-t}{r} \frac{dr}{dn} \right] \right\} d\Sigma_m = 0. \tag{28}$$

Si vede ora facilmente che gli integrali estesi a $\Sigma'_{m,1}$ e a $\Sigma'_{m,2}$ che compaiono nelle (27) e (28) sono identicamente nulli e che quando si fa tendere ε a zero svaniscono anche gli altri integrali estesi a $\Sigma''_{m,1}$ e a $\Sigma''_{m,2}$ sicchè le due formole (27) e (28) diventano le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{\overline{\Sigma}_{m,1}} \left\{ \varphi_\lambda \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{dt}{dn} - \sum_1^m {}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dn} \right] \right. \\ &\left. + \frac{\varphi}{r} \frac{d\varphi_\lambda}{d\theta} \left[\frac{dt}{dn} - \frac{t'-t}{r} \frac{dr}{dn} \right] \right\} d\overline{\Sigma}_{m,1} - \int\limits_T \left(\varphi_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\varphi}{r} \frac{d\varphi_\lambda}{d\theta} \right) dT = 0, \end{aligned}\right\} \tag{27'}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{\overline{\Sigma}_{m,2}} \left\{ \varphi_\lambda \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{dt}{dn} - \sum_1^m {}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dn} \right] \right. \\ &\left. - \frac{\varphi}{r} \frac{d\varphi_\lambda}{d\theta} \left[\frac{dt}{dn} - \frac{t'-t}{r} \frac{dr}{dn} \right] \right\} d\overline{\Sigma}_{m,2} + \int\limits_T \left(\varphi_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\varphi}{r} \frac{d\varphi_\lambda}{d\theta} \right) dT = 0. \end{aligned}\right\} \tag{28'}$$

Sottraendo queste due formole e distinguendo il caso in cui m è dispari da quello in cui m è pari si ottengono le due formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
&\int\limits_{\Sigma_m} \frac{\varphi}{r}\left[\frac{dt}{dn} - \frac{t'-t}{r}\frac{dr}{dn}\right](1-\theta^2)^{\frac{m-3}{2}} \frac{d\overline{\Sigma}_m}{r} \\
&+ \sum_0^{p-1}{}_h \frac{(-1)^{p-h-1}}{2h+1}\binom{p-1}{h}\int\limits_{\Sigma_m}\left(\frac{t'-t}{r}\right)^{2h+1}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dn} - \sum_1^m{}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dn}\right] d\overline{\Sigma}_m \\
&+ \left[\sum_0^{p-1}{}_h \frac{(-1)^{p-h-1}}{2h+1}\binom{p-1}{h}\right]\left\{\int\limits_{\Sigma_{m,2}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dn} - \sum_1^m{}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dn}\right] d\overline{\Sigma}_{m,2}\right. \\
&\qquad \left. - \int\limits_{\Sigma_{m,1}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dn} - \sum_1^m{}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dn}\right] d\overline{\Sigma}_{m,1}\right\} \\
&+ 2\sum_0^{p-1}{}_h \frac{(-1)^{p-h-1}}{2h+1}\binom{p-1}{h}\int\limits_T \frac{\partial\varphi}{\partial t}\, dT = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\limits_{\Sigma_m} \varphi\left[\frac{dt}{dn} - \frac{t'-t}{r}\frac{dr}{dn}\right](1-\theta^2)^{\frac{m-3}{2}} \frac{d\overline{\Sigma}_m}{r} \\
&+ \frac{1}{m-2}\int\limits_{\Sigma_m}\frac{t'-t}{r}(1-\theta^2)^{\frac{m-3}{2}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dn} - \sum_1^m{}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dn}\right] d\overline{\Sigma}_m \\
&+ \sum_2^{p-1}{}_h \frac{m-3}{m-2}\cdot\frac{m-5}{m-4}\cdots\frac{m-(2h+1)}{m-2(h-1)}\,\frac{1}{m-2h}\times \\
&\times\int\limits_{\Sigma_m}\frac{t'-t}{r}(1-\theta^2)^{\frac{m-(2h+1)}{2}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dn} - \sum_1^m{}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dn}\right] d\overline{\Sigma}_m \\
&+ \frac{m-3}{m-2}\cdot\frac{m-5}{m-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_m}\operatorname{arcsen}\frac{t'-t}{r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dn} - \sum_1^m{}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dn}\right] d\overline{\Sigma}_m \\
&+ \frac{m-3}{m-2}\cdot\frac{m-5}{m-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\left\{\int\limits_{\Sigma_{m,2}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dn} - \sum_1^m{}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dn}\right] d\overline{\Sigma}_{m,2}\right. \\
&\qquad \left. - \int\limits_{\Sigma_{m,1}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dn} - \sum_1^m{}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dn}\right] d\overline{\Sigma}_{m,1}\right\} \\
&+ \frac{m-3}{m-2}\cdot\frac{m-5}{m-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\int\limits_T \frac{\partial\varphi}{\partial t}\, dT = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Osserviamo ora che:

$$\frac{\partial}{\partial t'}\int\limits_{\overline{\Sigma}_{m,2}}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{d\,t}{d\,n}-\sum_1^m{}_i\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{d\,x_i}{d\,n}\right]d\,\overline{\Sigma}_{m,2}=-\int\limits_{\Sigma_{m-1}}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{d\,t}{d\,n}-\sum_1^m{}_i\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{d\,x_i}{d\,n}\right]\frac{d\,\Sigma_{m-1}}{\operatorname{sen}(n\,t)},$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}\int\limits_{\overline{\Sigma}_{m,1}}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{d\,t}{d\,n}-\sum_1^m{}_i\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{d\,x_i}{d\,n}\right]d\,\overline{\Sigma}_{m,1}=\int\limits_{\Sigma_{m-1}}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{d\,t}{d\,n}-\sum_1^m{}_i\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{d\,x_i}{d\,n}\right]\frac{d\,\Sigma_{m-1}}{\operatorname{sen}(n\,t)},$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}\int\limits_{T}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,d\,T=\int\limits_{T}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\,d\,T+\int\limits_{\Sigma_{m-1}}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{d\,t}{d\,n}\frac{d\,\Sigma_{m-1}}{\operatorname{sen}(n\,t)}=$$

$$=\int\limits_{T}\sum_1^m{}_i\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}\,d\,T+\int\limits_{\Sigma_{m-1}}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{d\,t}{d\,n}\frac{d\,\Sigma_{m-1}}{\operatorname{sen}(n\,t)},$$

dove Σ_{m-1} è la varietà ad $m-1$ dimensioni intersezione di $\overline{\Sigma}_m$ e di T ed n dinota la normale nei punti corrispondenti di $\overline{\Sigma}_m$. Quindi, se chiamiamo ν la normale a Σ_{m-1} che giace in T ed osserviamo che:

$$\frac{d\,x_i}{d\,n}=\operatorname{sen}(n\,t)\,\frac{d\,x_i}{d\,\nu},$$

le (29) e (30), derivate una volta rispetto a t', ci daranno:

$$\left.\begin{aligned}&\int\limits_{\Sigma_m}\varphi\,\frac{\partial}{\partial t'}\left\{\left[\frac{d\,t}{d\,n}-\frac{t'-t}{r}\frac{d\,r}{d\,n}\right][r^2-(t'-t)^2]^{\frac{m-3}{2}}\right\}\frac{d\,\overline{\Sigma}_m}{r^{m-2}}\\&+\int\limits_{\overline{\Sigma}_m}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{d\,t}{d\,n}-\sum_1^m{}_i\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{d\,x_i}{d\,n}\right][r^2-(t'-t)^2]^{\frac{m-3}{2}}\frac{d\,\overline{\Sigma}_m}{r^{m-2}}\\&+\left[2\sum_0^{p-1}{}_h\,\frac{(-1)^h}{2\,h+1}\binom{p-1}{h}\right]\left\{\int\limits_{T}\sum_1^m{}_i\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}\,d\,T+\int\limits_{\Sigma_{m-1}}\sum_1^m{}_i\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{d\,x_i}{d\,\nu}\,d\,\Sigma_{m-1}\right\}=0,\end{aligned}\right\}(29')$$

$$\left.\begin{aligned}&\int\limits_{\overline{\Sigma}_m}\varphi\,\frac{\partial}{\partial t'}\left\{\left[\frac{d\,t}{d\,n}-\frac{t'-t}{r}\frac{d\,r}{d\,n}\right][r^2-(t'-t)^2]^{\frac{m-3}{2}}\right\}\frac{d\,\overline{\Sigma}_m}{r^{m-2}}\\&+\int\limits_{\Sigma_m}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{d\,t}{d\,n}-\sum_1^m{}_i\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{d\,x_i}{d\,n}\right][r^2-(t'-t)^2]^{\frac{m-3}{2}}\left\{\frac{d\,\overline{\Sigma}_m}{r^{m-2}}\right.\\&+\frac{m-3}{m-2}\frac{m-5}{m-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\,\pi\left\{\int\limits_{T}\sum_1^m{}_i\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}\,d\,T+\int\limits_{\Sigma_{m-1}}\sum_1^m{}_i\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{d\,x_i}{d\,\nu}\,d\,\Sigma_{m-1}\right\}=0.\end{aligned}\right\}(30')$$

Ma per il lemma di Green:

$$\int_T \sum_1^m {}_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} d\,T + \int_{\Sigma_{m-1}} \sum_1^m {}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{d\,x_i}{d\,\nu} d\,\Sigma_{m-1} = 0,$$

quindi le due formole (29′) e (30′) si riducono tutte e due alla formola:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\overline{\Sigma}_m} \varphi \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \left[\frac{d\,t}{d\,n} - \frac{t'-t}{r} \frac{d\,r}{d\,n} \right] [r^2 - (t'-t)^2]^{\frac{m-3}{2}} \right\} \frac{d\,\overline{\Sigma}_m}{r^{m-2}} \\ &+ \int_{\overline{\Sigma}_m} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{d\,t}{d\,n} - \sum_1^m {}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{d\,x_i}{d\,n} \right] [r^2 - (t'-t)^2]^{\frac{m-3}{2}} \frac{d\,\overline{\Sigma}_m}{r^{m-2}}, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

che comprende tanto il caso di m dispari quanto quello di m pari.

Particolarizzeremo ora la varietà $\overline{\Sigma}_m$ supponendo che si riduca ad una varietà cilindrica qualunque con le generatrici parallele all'asse t e chiameremo ancora Σ_{m-1} l'intersezione di questa varietà cilindrica con l'iperpiano $t = t'$. La formola (31) ci dà allora subito:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\Sigma_{m-1}} \frac{d\,\Sigma_{m-1}}{r^{m-1}} \frac{d\,r}{d\,n} \int_{t'-r}^{t'+r} \varphi \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ (t'-t) [r^2 - (t'-t)^2]^{\frac{m-3}{2}} \right\} d\,t \\ &+ \int_{\Sigma_{m-1}} \frac{d\,\Sigma_{m-1}}{r^{m-2}} \int_{t'-r}^{t'+r} \frac{d\,\varphi}{d\,n} [r^2 - (t'-t)^2]^{\frac{m-3}{2}} d\,t = 0, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

e cangiando la variabile t in u per mezzo della formola $t' - t = u$ si ha anche:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\Sigma_{m-1}} d\,\Sigma_{m-1} \left\{ \frac{\delta}{\delta\,n} \left[\frac{1}{r^{m-2}} \int_{-r}^{+r} \varphi(x_i,\ t'-u)(r^2 - u^2)^{\frac{m-3}{2}} d\,u \right] \right. \\ &\left. - \frac{\partial}{\partial\,n} \left[\frac{1}{r^{m-2}} \int_{-r}^{+r} \varphi(x_i,\ t'-u)(r^2 - u^2)^{\frac{m-3}{2}} d\,u \right] \right\} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Questa identità vale tanto per m dispari quanto per m pari. Se però m è dispari alla derivata d'ordine $m - 3$, rispetto a t', della (32) si può assegnare anche la forma:

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{\Sigma_{m-1}} d\,\Sigma_{m-1}\left\{\sum_{0}^{p-1}{}_h\, 2^{p-1-h}\,\frac{(p-1+h)!}{(p-1-h)!\,h!}\left[\frac{\delta}{\delta n}\,\frac{\varphi_{p-1-h}(x_i, t-r)-(-1)^{p-1-h}\varphi_{p-1-h}(x_i, t'+r)}{r^{p+h}}\right.\right.\\ \left.\left.-\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\varphi_{p-1-h}(x_i, t'-r)-(-1)^{p-1-h}\varphi_{p-1-h}(x_i, t'+r)}{r^{p+h}}\right]\right\}=0.\end{aligned}\right\}\quad(34)$$

7. L'applicazione della formola fondamentale (2) nello spazio $\overline{S}_{m-1}$ quando per φ_λ si prenda una delle due funzioni φ_3 o φ_4 ci ha condotto, come appunto abbiamo visto nel n.° prec., a stabilire soltanto delle relazioni identiche fra i valori di φ e quelli delle sue derivate parziali rispetto alle x_i e a t. Ora vogliamo mostrare che, pel caso di m pari ed eguale a $2p$, è possibile determinare il valore di φ nel punto (x'_i, t') in funzione dei valori che φ stessa e le sue derivate parziali, rispetto alle x_i e a t, acquistano su $\overline{\Sigma}_m$.

Perciò teniamo ferme tutte le convenzioni stabilite nel n.° prec. e soltanto cerchiamo di prendere la funzione φ_λ in modo più opportuno.

Gli integrali dell'equazione (1) che dipendono soltanto da r e da t soddisfano all'equazione:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}-\frac{m-1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}=0,$$

e questa equazione mostra subito che, se una certa funzione φ soddisfa ad essa per un certo valore di m, la funzione $\nabla\varphi$, dove $\nabla=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$, soddisfa alla stessa equazione quando si cambi m in $m+2$. Ora, per $m=2$ si può determinare l'integrale seguente:

$$\int_0^\theta \log\left[r\,(1-\theta^2)\right]\frac{d\,\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}=\int_0^\theta \log\,(1-\theta^2)\,\frac{d\,\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}+\log r\,\mathrm{arc\,sen}\,\theta$$

della equazione (1), dove $\theta=\frac{t'-t}{r}$ e $|\theta|\leq 1$, in modo che la funzione da esso rappresentata risulta reale. Quindi la funzione:

$$\varphi_5=\nabla^{p-1}\int_0^\theta \log\left[r\,(1-\theta^2)\right]\frac{d\,\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\mp\left[\nabla^{p-1}\int_0^\theta \log\left[r\,(1-\theta^2)\right]\frac{d\,\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]_{\theta=1},\quad(35)$$

soddisferà alla (1) per $m=2p$ e godrà della proprietà di annullarsi, qualunque sia r, per $\theta=1$, ovvero per $\theta=-1$ secondo che si sceglie in φ_5 il segno superiore ovvero l'inferiore. Questa è la funzione che vogliamo porre al posto di φ_λ nella (2) ed in essa sceglieremo il segno superiore, ovvero l'inferiore, a seconda che siamo in $\overline{S}'_{m+1,1}$ o in $\overline{S}'_{m+1,2}$.

Possiamo allora scrivere le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned}&\int\limits_{\Sigma'_{m,1}+\Sigma''_{m,1}+\overline{\Sigma}_{m,1}+T'}\Big\{\varphi_5\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dn}-\sum_1^m{}_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dn}\right]\\&+\frac{\varphi}{r}\frac{\partial\varphi_5}{\partial\theta}\left[\frac{dt}{dn}-\frac{t'-t}{r}\frac{dr}{dn}\right]+\varphi\frac{\partial\varphi_5}{\partial r}\frac{dr}{dn}\Big\}d\Sigma_m=0,\end{aligned}\right\}\quad(36)$$

$$\left.\begin{aligned}&\int\limits_{\Sigma'_{m,2}+\Sigma''_{m,2}+\overline{\Sigma}_{m,2}+T'}\Big\{\varphi_5\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dn}-\sum_1^m{}_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dn}\right]\\&+\frac{\varphi}{r}\frac{\partial\varphi_5}{\partial\theta}\left[\frac{dt}{dn}-\frac{t'-t}{r}\frac{dr}{dn}\right]+\varphi\frac{\partial\varphi_5}{\partial r}\frac{dr}{dn}\Big\}d\Sigma_m=0,\end{aligned}\right\}\quad(37)$$

nelle quali formole la derivata di φ_5 rispetto ad r si deve eseguire come se θ fosse costante rispetto ad r. Come innanzi, possiamo osservare che gli integrali estesi a $\Sigma'_{m,1}$ e a $\Sigma''_{m,2}$ sono identicamente nulli e che quando ε tende a zero anche gli integrali estesi a $\Sigma''_{m,1}$ e a $\Sigma''_{m,2}$ tendono a zero. Invece i due integrali estesi a T' si riducono rispettivamente a:

$$-\int\limits_{T'}\Big\{-\left[\nabla^{p-1}\int_0^\theta\log[r(1-\theta^2)]\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]_{\theta=1}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\varphi}{r}\nabla^{p-1}\log r\Big\}dT,$$

$$\int\limits_{T}\Big\{\left[\nabla^{p-1}\int_0^\theta\log[r(1-\theta^2)]\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]_{\theta=1}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\varphi}{r}\nabla^{p-1}\log r\Big\}dT.$$

Sicchè sommando la (36) con la (37), dopo aver fatto in esse $\varepsilon=0$, si trova:

$$\left.\begin{aligned}&\int\limits_{\overline{\Sigma}_m}\varphi\Big\{\nabla^{p-1}\left[\log\left(\frac{r^2-(t'-t)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t'-t)^2}}\right]\left[\frac{dt}{dn}-\frac{t'-t}{r}\frac{dr}{dn}\right]\\&\qquad+\frac{dr}{dn}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^{p-1}\left[\int_0^\theta\log[r(1-\theta^2)]\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]\Big\}d\overline{\Sigma}_m\\&\qquad+\int\limits_{\Sigma_{m,2}}\varphi\frac{d}{dn}\left[\nabla^{p-1}\int_0^\theta\log[r(1-\theta^2)]\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]_{\theta=1}d\Sigma_{m,2}\end{aligned}\right\}\quad(38)$$

$$
\begin{aligned}
&- \int\limits_{\Sigma_{m,1}} \varphi \frac{d}{dn}\left[\nabla^{p-1}\int_0^\theta \log\left[r(1-\theta^2)\right]\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]_{\theta=1} d\,\Sigma_{m,1}\\
&+ \int\limits_{\Sigma_m}\left[\nabla^{p-1}\int_0^\theta \log\left[r(1-\theta^2)\right]\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dn}-\sum_1^m{}_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dn}\right]d\,\Sigma_m\\
&+ \int\limits_{\Sigma_{m,2}}\left[\nabla^{p-1}\int_0^\theta \log\left[r(1-\theta^2)\right]\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]_{\theta=1}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dn}-\sum_1^m{}_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dn}\right]d\,\Sigma_{m,2}\\
&- \int\limits_{\Sigma_{m,1}}\left[\nabla^{p-1}\int_0^\theta \log\left[r(1-\theta^2)\right]\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]_{\theta=1}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dn}-\sum_1^m{}_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dn}\right]d\,\Sigma_{m,1}\\
&+ 2\int\limits_T\left[\nabla^{p-1}\int_0^\theta \log\left[r(1-\theta^2)\right]\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]_{\theta=1}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,d\,T=0.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Da questa formola poi, derivandola una volta sola rispetto a t', deduciamo facilmente anche l'altra:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t'}\int\limits_{\Sigma_m}\varphi\,\nabla^{p-1}\left[\log\left(\frac{r^2-(t'-t)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t'-t)^2}}\right]\left[\frac{dt}{dn}-\frac{t'-t}{r}\frac{dr}{dn}\right]d\,\Sigma_m\\
&\quad+\int\limits_{\Sigma_m}\varphi\frac{dr}{dn}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^{p-1}\left[\log\left(\frac{r^2-(t'-t)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t'-t)^2}}\right]\Big\}\,d\,\Sigma_m\\
&+\int\limits_{\Sigma_m}\nabla^{p-1}\left[\log\left(\frac{r^2-(t'-t)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t'-t)^2}}\right]\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dn}-\sum_1^m{}_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dn}\right]d\,\Sigma_m\\
&\quad-2\int\limits_{\Sigma_{m-1}}\varphi\frac{d}{dn}\left[\nabla^{p-1}\int_0^\theta\log\left[r(1-\theta^2)\right]\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]_{\theta=1}\frac{d\,\Sigma_{m-1}}{\operatorname{sen}(n\,t)}\\
&-2\int\limits_{\Sigma_{m-1}}\left[\nabla^{p-1}\int_0^\theta\log\left[r(1-\theta^2)\right]\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]_{\theta=1}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dn}-\sum_1^m{}_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dn}\right]\frac{d\,\Sigma_{m-1}}{\operatorname{sen}(n\,t)}\\
&\quad+2\int\limits_T\left[\nabla^{p-1}\int_0^\theta\log\left[r(1-\theta^2)\right]\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]_{\theta=1}\sum_1^m{}_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}\,d\,T\\
&\quad+2\int\limits_{\Sigma_{m-1}}\left[\nabla^{p-1}\int_0^\theta\log\left[r(1-\theta^2)\right]\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]_{\theta=1}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dn}\frac{d\,\Sigma_{m-1}}{\operatorname{sen}(n\,t)}=0.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Facendo quindi in questa equazione delle osservazioni analoghe a quelle che abbiamo fatto nel n.° prec. essa può scriversi nel modo che segue:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t'}\int_{\Sigma_m}\varphi\,\nabla^{p-1}\left[\log\left(\frac{r^2-(t'-t)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t'-t)^2}}\right]\left[\frac{dt}{dn}-\frac{t'-t}{r}\frac{dr}{dn}\right]d\Sigma_m\\
&\quad+\int_{\Sigma_m}\varphi\frac{dr}{dn}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\nabla^{p-1}\left[\log\left(\frac{r^2-(t'-t)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t'-t)^2}}\right\}d\Sigma_m\right.\\
&+\int_{\Sigma_m}\nabla^{p-1}\left[\log\left(\frac{r^2-(t'-t)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t'-t)^2}}\right]\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dn}-\sum_1^m{}_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dn}\right]d\Sigma_m\\
&\qquad+2\int_{\Sigma_{m-1}}\left\{\left[\nabla^{p-1}\int_0^\theta\log[r(1-\theta^2)]\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]_{\theta=1}\frac{d\varphi}{d\nu}\right.\\
&\qquad\quad\left.-\varphi\frac{d}{d\nu}\left[\nabla^{p-1}\int_0^\theta\log[r(1-\theta^2)]\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]_{\theta=1}\right\}d\Sigma_{m-1}\\
&\quad+2\int_T\left[\nabla^{p-1}\int_0^\theta\log[r(1-\theta^2)]\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]_{\theta=1}\sum_1^m{}_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}\,dT=0.
\end{aligned}\right\}\quad(40)$$

Osserviamo ancora che la funzione:

$$\left[\nabla^{p-1}\int_0^\theta\log[r(1-\theta^2)]\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]_{\theta=1},$$

soddisfa all'equazione:

$$\sum_1^m{}_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}=0,$$

e che:

$$\lim_{r=0}\left\{r^{m-1}\frac{\partial}{\partial r}\left[\nabla^{p-1}\int_0^\theta\log[r(1-\theta^2)]\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]_{\theta=1}\right\}=\frac{1}{2}\pi(-2)^{p-1}(p-1)!$$

Con un processo analogo a quello che serve a stabilire la formola di Green, si trova che:

$$2^{p-1}(-\pi)^{p+1}\varphi(x'_i,\ t)=$$

$$=\int_{\Sigma_{m-1}}\left\{\left[\nabla^{p-1}\int_0^\theta\log[r(1-\theta^2)]\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right]_{\theta=1}\frac{d\varphi}{d\nu}\right.$$

$$- \varphi \frac{d}{d\nu} \left[\nabla^{p-1} \int_0^\theta \log \left[r \left(1 - \theta^2 \right) \right] \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} \right]_{\theta=1} \Bigg\} d\,\Sigma_{m-1}$$

$$+ \int_T \left[\nabla^{p-1} \int_0^\theta \log \left[r \left(1 - \theta^2 \right) \right] \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} \right]_{\theta=1} \sum_1^m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} d\,T,$$

quindi la formola (40) si può porre sotto la forma definitiva:

$$\left.\begin{aligned} & -2^p (-\pi)^{p+1} \varphi (x'_i,\ t') = \\ & = \frac{\partial}{\partial t'} \int_{\overline{\Sigma}_m} \varphi\, \nabla^{p-1} \left[\log \left(\frac{r^2 - (t'-t)^2}{r} \right) \frac{1}{\sqrt{r^2 - (t'-t)^2}} \right] \left[\frac{d\,t}{d\,n} - \frac{t'-t}{r} \frac{d\,r}{d\,n} \right] d\,\overline{\Sigma}_m \\ & + \int_{\overline{\Sigma}_m} \varphi \frac{d\,r}{d\,n} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \nabla^{p-1} \left[\log \left(\frac{r^2 - (t'-t)^2}{r} \right) \frac{1}{\sqrt{r^2 - (t'-t)^2}} \right] \right\} d\,\overline{\Sigma}_m \\ & + \int_{\overline{\Sigma}_m} \nabla^{p-1} \left[\log \left(\frac{r^2 - (t'-t)^2}{r} \right) \frac{1}{\sqrt{r^2 - (t'-t)^2}} \right] \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{d\,t}{d\,n} - \sum_1^m{}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{d\,x_i}{d\,n} \right] d\,\overline{\Sigma}_m . \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Se ora supponiamo che $\overline{\Sigma}_m$ si riduca ad una varietà cilindrica le cui generatrici siano parallele all'asse t ed abbia per direttrice la varietà Σ_{m-1} dell'iperpiano $t = t'$ la formola precedente ci darà subito l'altra:

$$\left.\begin{aligned} & 2^p (-\pi)^{p+1} \varphi (x'_i,\ t') = \\ & = \int_{\Sigma_{m-1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \nabla^{p-1} \int_{-r}^{r} \varphi (x_i,\ t'-u) \log \left(\frac{r^2 - u^2}{r} \right) \frac{d\,u}{\sqrt{r^2 - u^2}} \right. \\ & \left. - \frac{\delta}{\delta n} \nabla^{p-1} \int_{-r}^{r} \varphi (x_i,\ t'-u) \log \left(\frac{r^2 - u^2}{r} \right) \frac{d\,u}{\sqrt{r^2 - u^2}} \right\} . \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Luglio 1897.

Rappresentazione della quartica base di un fascio di quadriche di S_n sopra un S_{n-2} (*).

(*Di* Carlo Rosati, *a Pisa.*)

Il prof. Bertini, nelle lezioni del 1895-96, espose la nota rappresentazione del complesso quadratico generale nello spazio ordinario (**) proiettando sopra un S_3 la quartica base di un fascio di quadriche dello spazio S_5, da un S_1 della quartica stessa. Il procedimento è estendibile alla quartica base di un fascio di quadriche di uno spazio ad n dimensioni, quartica rappresentabile biunivocamente in un S_{n-2}. La detta estensione, che è l'oggetto del presente lavoro, non è però immediata, incontrandosi per n qualunque, come si vedrà, varietà e proprietà che scompaiono totalmente per $n = 5$.

§ 1.°

La quadrica T dello spazio Π.

Consideriamo in S_n una quartica V^4_{n-2}, che indicheremo con Q, base di un fascio di quadriche V^2_{n-1}, e in essa un S_1, che indicheremo con r, della $\infty^{2(r-4)}$ che contiene, ed infine uno spazio S_{n-2}, duale dell' S_1, che chiameremo Π, e che prenderemo per spazio rappresentativo. Un S_2 generico passante per r sega due quadriche del fascio considerato ciascuna ulterior-

(*) Estratto di tesi di laurea presentata alla R. Università di Pisa nel novembre 1897.

(**) Cfr. Caporali, *Memorie di geometria*, Napoli 1888; pag. 54. R. Sturm, *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie*, Leipzig 1896, III Theil, pag. 272.

mente in un S_1, quindi la quartica ulteriormente in un S_0, e lo spazio Π in un S'_0 che considereremo come l'immagine del punto S_0. E reciprocamente un S'_0 qualunque di Π viene da r proiettato mediante un S_2 il quale, oltre di r, avrà colla quartica Q un altro S_0 comune. Dunque *si può stabilire una corrispondenza biunivoca fra i punti della quartica Q e i punti di un S_{n-2}* (*).

Sulla quartica Q abbiamo come varietà eccezionale della rappresentazione l'S_1 che abbiamo indicato con r. Gli S_2 proiettanti gli S_0 della quartica, infinitamente vicini ad un S_0 di r, che indichiamo con M, sono gli S_2 passanti per r dell'S_{n-2} tangente in M alla quartica; questo S_{n-2} sega lo spazio Π in un S_{n-4} che chiamiamo m; i punti di questo spazio m sono le immagini dei punti della quartica infinitamente vicini ad M.

Cerchiamo, col variare M su r, che varietà descrive lo spazio m nello spazio rappresentativo. Sappiamo (**) che ad un S_1 generico di S_n è coordinata, rispetto al fascio dato, una quadrica, che si chiama *quadrica polare dell'S_1 rispetto alla quartica*, la quale contiene due serie di S_{n-2}: gli S_{n-2} polari dei punti dell'S_1 rispetto alla quartica, e gli S_{n-2} polari dell'S_1 rispetto alle singole quadriche del fascio; è inoltre una quadrica specializzata con un S_{n-4} per spazio singolare. Gli S_{n-2} tangenti nei punti di r alla quartica sono gli S_{n-2} polari di questi punti rispetto ad essa, dunque generano una quadrica V^2_{n-1} specializzata, che chiameremo ρ, polare di r rispetto alla quartica Q, e che avrà per spazio singolare l'S_{n-4} tangente lungo r a Q, il quale spazio si indicherà con O. Questa quadrica ρ ammette inoltre un'altra serie di S_{n-2}, gli S_{n-2} tangenti lungo r alle singole quadriche del fascio. Gli *spazi generatori* (secondo una denominazione di Segre) di dimensione minima della quadrica ρ, sono degli S_{n-3}, tangenti in un S_0 di r alla quartica Q e lungo r ad una quadrica del fascio. Lo spazio rappresentativo Π sega la quadrica ρ in una quadrica V^2_{n-3} specializzata, che indicheremo con T, con un S_{n-6}, che chiameremo o, per spazio singolare, e che ammette due specie di S_{n-4}. *La quadrica T è la varietà dello spazio rappresentativo corrispondente ad r, elemento di Q eccezionale nella rappresentazione; un S_0 qualunque di T è immagine di un S_0 della quartica infinitamente vicino ad un S_0 di r, e reciprocamente.*

(*) Da ora in avanti indicheremo con lettere maiuscole gli elementi obbiettivi, e colle stesse lettere, ma minuscole, le loro immagini.

(**) Segre, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1884) n.° 52.

§ 2.°

La varietà C eccezionale di Π.

Cerchiamo ora la varietà eccezionale della rappresentazione situata nello spazio rappresentativo. L' S_{n-2} tangente in un S_0 di r alla quartica, la sega in una V^4_{n-4} tutta costituita di S_1 passanti per l' S_0; variando l' S_0 sopra r la V^4_{n-4} descrive una varietà V^8_{n-3}, intersezione della quartica Q colla quadrica ρ, luogo degli S_1 di Q che si appoggiano ad r. L' S_2 proiettante da r un S_0 di questa V^8_{n-3}, contiene della quartica ulteriormente un intero S_1 e quindi l' S_0 intersezione di questo S_2 collo spazio Π è immagine di tutti i punti di quell' S_1; dalla proiezione di questa varietà nascerà la varietà eccezionale C dello spazio rappresentativo. La dimensione di questa varietà sarà evidentemente $n-4$; cerchiamone l'ordine.

Cominciamo perciò a far vedere che la r è tripla per la V^8_{n-3}. Infatti un S_3 generico condotto per un punto X di r sega la quartica Q in una quartica V^4_1, e la quadrica ρ in un cono col vertice nel punto; fra le generatrici di questo cono c' è l' S_1 intersezione dell' S_3 coll' S_{n-2} tangente in X alla quartica, il quale S_1 sarà evidentemente tangente in X alla V^4_1. Ne consegue che il vertice del cono rappresenta tre intersezioni di esso colla V^4_1. Dunque l' S_3 generico condotto per X, ha fuori di X solo cinque punti d'intersezione colla V^8_{n-3}; quindi la r è tripla per questa varietà. L'ordine della varietà eccezionale C è dato dal numero dei punti che questa varietà ha situati in un S_2 generico di Π. Un tale S_2 viene proiettato da r mediante un S_4 che interseca la V^8_{n-3} in una V^8_1 costituita da r contata tre volte e da cinque S_1 appoggiati ad r; dunque fra gli S_2 che proiettano da r i punti dell' S_2 preso in Π ce ne sono cinque che contengono, oltre di r, un S_1 della quartica Q, perciò *la varietà C è una V^5_{n-4}.*

Poichè fra i punti di Q infinitamente vicini ad un punto di r ci sono quelli situati sugli S_1 di Q passanti per quel punto, ne consegue che *la varietà C è tutta situata sulla quadrica T.*

Gli S_2 proiettanti che incontrano Π nei punti della varietà C sono S_2 *secanti la quartica* in r e in un ulteriore S_1; gli S_2 per r e situati nell' S_{n-4} tangente lungo r a Q segano la quartica in r e in un S_1 infinitamente vicino ad r, perciò sono fra gli S_2 proiettanti i punti di C. Dunque: « *La varietà eccezionale C passa per lo spazio singolare della quadrica specializzata T.* »

Studiamo ora più da vicino le relazioni che passano fra la quadrica T e la varietà C, cioè guardiamo come gli s_{n-4} della T segano la detta varietà.

L' S_{n-2} tangente in un punto X di r alla quartica Q, il quale sega lo spazio rappresentativo in un s_{n-4} del primo sistema della quadrica T, ha a comune con Q una $V^4{}_{n-4}$ tutta costituita da S_1 passanti per X; proiettando questa $V^4{}_{n-4}$ nello spazio Π, si avrà la completa intersezione dell' s_{n-4} colla varietà C. La dimensione di questa intersezione sarà evidentemente $n-5$, perchè ogni punto di essa è immagine di un intero S_1 della $V^4{}_{n-4}$; cerchiamone l'ordine. Un s_1 dell' s_{n-4} viene proiettato da r secondo un S_3 che sarà tangente in X alla quartica, e la segherà quindi oltre che in r in tre ulteriori S_1; ne consegue che l' s_1 preso nell' s_{n-4} contiene tre punti della intersezione di s_{n-4} colla C; perciò questa intersezione è una $v^3{}_{n-5}$. Fra gli S_2 proiettanti da r gli S_1 della $V^4{}_{n-4}$, ci sono quelli che proiettano gli S_1 infinitamente vicini ad r, i quali S_2 sono quelli dell' S_{n-4} tangente lungo r alla quartica Q. Possiamo dunque enunciare: « *Gli s_{n-4} del primo sistema della quadrica T hanno a comune colla varietà C una loro ipersuperficie del terzo ordine, la quale passa per lo spazio singolare o della quadrica T.* »

L' S_{n-2} tangente lungo r ad una quadrica φ del fascio sega questa quadrica in una $V^2{}_{n-3}$ tutta costituita da S_2 passanti per r, ciascuno dei quali contiene ulteriormente della quartica un S_1 appoggiato ad r; la totalità di questi S_1 costituisce la $V^4{}_{n-4}$ di intersezione dell' S_{n-2} colla quartica Q. Per questa $V^4{}_{n-4}$ la r è un S_1 doppio, perchè esso è doppio per la $V^2{}_{n-3}$ d'intersezione dell' S_{n-2} con φ, ed è semplice per la $V^2{}_{n-3}$ intersezione dell' S_{n-2} con un'altra quadrica del fascio. L' S_{n-2} considerato sega lo spazio rappresentativo in un s_{n-4} del secondo sistema della quadrica T; gli S_2 che proiettano da r gli S_1 della $V^4{}_{n-4}$ sono gli S_2 della $V^2{}_{n-3}$ intersezione dell' S_{n-2} con φ, e quindi segano l' s_{n-4} nei punti di una sua quadrica $v^2{}_{n-5}$ (*), la quale costituirà insieme allo spazio o, la completa intersezione dell' s_{n-4} del secondo sistema colla varietà eccezionale C. Lo spazio o sega la quadrica $v^2{}_{n-5}$ dell' s_{n-4} in quella varietà ($v^2{}_{n-7}$) che gli si compete per il suo ordine; perchè un S_2 tangente lungo r alla quartica, se non giace nella $V^2{}_{n-3}$ che abbiamo considerato, sega la $V^4{}_{n-4}$ in due S_1 coincidenti con r per il fatto che la r è doppia, come abbiamo visto, per questa varietà, ma non è un S_2 proiet-

(*) Che un s_{n-4} del 2.° sistema seghi C in una $v^2{}_{n-5}$, segue anche da ciò che l' s_{n-3}, passante per due s_{n-4} di sistema diverso, deve segare C in una $v^5{}_{n-5}$ di cui fa parte la $v^3{}_{n-5}$ situata nell' s_{n-4} del primo sistema.

tante un S_1 di essa. Possiamo dunque enunciare: « *Gli s_{n-4} del secondo sistema della quadrica T hanno a comune colla varietà eccezionale C, oltre che lo spazio $o\,(s_{n-6})$ singolare di T, una loro quadrica v^2_{n-5}.* »

Abbiamo visto che la considerazione di una di queste quadriche nasce dal condurre l'S_{n-2} tangente lungo r ad una quadrica del fascio; la chiameremo perciò *varietà quadrica coordinata ad una generazione della quartica* (*).

Gli spazi generatori di dimensione minima della quadrica T, cioè gli s_{n-5}, sono comuni ad un s_{n-4} del primo sistema e ad un s_{n-4} del secondo. La intersezione di un tale s_{n-5} colla varietà C non è altro che la intersezione dell's_{n-5} colla varietà di C esistente in uno dei due s_{n-4}. Ma nell's_{n-4} del primo sistema, l's_{n-5} considerato sega la v^3_{n-5} ivi esistente, oltre che nello spazio $o\,(s_{n-6})$, in una ulteriore sua quadrica v^2_{n-6}; dunque lo spazio $o\,(s_{n-6})$ e questa quadrica v^2_{n-6} costituiscono la completa intersezione dell's_{n-5} considerato colla varietà C. Ne consegue che questa v^2_{n-6} deve coincidere colla v^2_{n-6} nella quale l's_{n-5} in questione sega la varietà quadrica v^2_{n-5}, esistente nell's_{n-4} del secondo sistema passante per esso. Dunque: « *Una varietà quadrica v^2_{n-5} ed una varietà cubica v^3_{n-5} esistenti in due s_{n-4} di sistema diverso della quadrica T, si intersecano in una v^2_{n-6}.* »

§ 3.°

Elementi multipli della varietà eccezionale C.

Abbiamo visto che lo spazio $o\,(s_{n-6})$ singolare per la quadrica T appartiene alla varietà eccezionale C. Cominciamo dal far vedere che *un punto generico dello spazio o è un punto semplice per la varietà C.*

Infatti un s_2 di Π, condotto per un tal punto M, sega la quadrica specializzata T in due s_1 passanti per M e situati in due suoi spazi generatori (s_{n-5}). Ciascuno di questi s_1 contiene dunque della varietà C, oltre che il punto M, altri due punti nei quali incontra la varietà quadrica v^2_{n-6} esistente nello spazio generatore rispettivo. Dunque, fuori di M, nell's_2 si hanno altri quattro punti d'intersezione colla C.

(*) SEGRE, l. c., n.° 56.

L' S_{n-4} tangente lungo r alla quartica Q taglia il fascio di quadriche dato in un fascio di quadriche (V^2_{n-5}) tutte specializzate, con r per spazio singolare comune e tutte costituite da S_2 passanti per r. Questo fascio di quadriche specializzate viene segato dallo spazio o singolare di T (il quale spazio è, nell' S_{n-4} considerato, duale di r) in un fascio di quadriche v^2_{n-7}, il quale è anche l'intersezione di detto spazio colle varietà quadriche coordinate alle varie generazioni della quartica. Il fascio di quadriche specializzate dell' S_{n-4} ha per quartica base una V^4_{n-6} tutta costituita da S_2 passanti per r, la quale sarà l'intersezione colla quartica Q dell' S_{n-4} considerato. Questa V^4_{n-6} sega lo spazio $o\,(s_{n-6})$ nella v^4_{n-8}, quartica base del fascio di cui abbiamo parlato. La indicheremo con σ. Ogni punto di σ è immagine di un intero S_2 della quartica Q. Vogliamo ora dimostrare:

« *La varietà $\sigma\,(v^4_{n-8})$ è tutta di punti tripli per la varietà C.* »

Infatti un s_2 generico di Π per un tal punto M sega la quadrica T in due s_1 per M, i quali giaceranno in due spazi generatori s_{n-5}. Il punto M è situato su ciascuna delle due quadriche sezioni di questi spazi con C, dunque ciascuno dei due s_1 ha, oltre di M, un ulteriore punto comune con una di queste quadriche; e perciò l' s_2 fuori di M ha due soli punti d'intersezione colla C.

Dimostriamo ora l'altra proposizione:

« *La varietà σ è doppia per le V^3_{n-5} esistenti negli s_{n-4} del primo sistema della T.* »

Infatti un s_1, dell' s_{n-4} contenente la v^3_{n-5}, che passa per un punto M di σ, viene proiettato dallo spazio o mediante un s_{n-5}, che contiene della varietà C, oltre lo spazio $o\,(s_{n-6})$, una v^2_{n-6} passante per σ; questa v^2_{n-6} ha con l' s_1 preso, oltre di M, un solo ulteriore punto d'intersezione.

§ 4.°

Immagine delle sezioni lineari.

Un iperpiano S_{n-1} taglia la Q in una V^4_{n-3} che avendo un punto a comune con r e con un S_1 qualunque di Q, viene da r proiettata in una v^3_{n-3}, cioè in *una ipersuperficie del terzo ordine dello spazio rappresentativo passante per la varietà eccezionale C.* Questa ipersuperficie del terzo ordine deve avere a comune colla quadrica $T\,(v^2_{n-3})$ una v^6_{n-4}; ma di questa intersezione fa parte la $C(v^5_{n-4})$, dunque come ulteriore intersezione dobbiamo avere un s_{n-4} di T. Ora, poichè si ha che l' S_{n-3} tangente alla V^4_{n-3} nel suo punto di appoggio ad r viene da r proiettato mediante l' S_{n-2} tangente in quel punto alla Q, ne viene che l' s_{n-4}, ulteriore intersezione, deve essere del primo sistema di T.

Reciprocamente dimostriamo che *una v^3_{n-3} di Π passante per la varietà C è immagine di una sezione iperplanare di Q.* Sia V^x_{n-3} la varietà obbiettiva che ha per immagine la v^3_{n-3} presa; un S_3 generico incontra Q in una V^4_1 che, avendo a comune colla quadrica ρ otto punti, si proietterà in una v^4_1 che si appoggerà in otto punti a C e che incontra quindi la v^3_{n-3} ulteriormente in quattro punti. Ne consegue che l' S_3 arbitrario ha a comune con la V^x_{n-3} quattro punti, perciò $x = 4$. Dico inoltre che questa V^4_{n-3} appartiene ad un S_{n-1}. Cominciamo perciò coll'osservare che per $n = 4$ la proprietà si manifesta perchè nella rappresentazione di una V^4_2 base di un fascio di quadriche di S_4 (*) in un S_2, una curva del terz'ordine generica (di genere 1) passante per i cinque punti eccezionali del piano rappresentativo non può essere immagine di una V^4_1 appartenente all' S_4 ambiente (la quale è di genere zero), e quindi è immagine di una sezione iperplanare della quartica. Il nostro teorema sarà allora dimostrato in generale, quando, supponendolo vero per la dimensione $n - 1$ dello spazio ambiente, si provi che è vero per la dimensione n. Conducendo allora un S_{n-1} per r, esso incontra la $Q(V^4_{n-2})$ in una $Q'(V^4_{n-3})$; la V^4_{n-3} in questione, in una V^4_{n-4}; lo spazio $\Pi(S_{n-2})$ in uno spazio $\Pi'(S_{n-3})$; la quadrica $T(v^2_{n-3})$ in una quadrica $T'(v^2_{n-4})$; la quintica $C(v^5_{n-4})$ in una quintica $C'(v^5_{n-5})$; la v^3_{n-3} presa in una v^3_{n-4} passante per C'. Proiettando la Q' da r su Π' si hanno T' e C' come varietà eccezionali della rappresentazione; inoltre la v^3_{n-4} passante per C' è l'immagine della V^4_{n-4}. E allora per il teorema supposto vero, questa V^4_{n-4} apparterrà ad un S_{n-2}; ne consegue che un S_{n-1}, passante per questo S_{n-2} e per un punto della V^4_{n-3} che abbiamo in principio considerato, la contiene per intero.

(*) In questa rappresentazione le varietà T e C sono rispettivamente una conica del piano rappresentativo e cinque punti su di essa.

§ 5.°

Immagine degli spazi quadratici della quartica.

Per questa rappresentazione è utile distinguere i due casi in cui la dimensione dello spazio ambiente è dispari o pari.

1. Sia S_{2p+1} lo spazio ambiente e quindi una V^4_{2p-1} la quartica Q, base di un fascio di V^2_{2p}. Lo spazio rappresentativo Π sarà un S_{2p-1}; la quadrica T sarà una v^2_{2p-2} specializzata con un s_{2p-5} singolare (spazio o); contiene due sistemi di s_{2p-3}. Come varietà eccezionale C dello spazio Π avremo una v^5_{2p-3} situata sulla quadrica T e passante per lo spazio o; un s_{2p-3} del primo sistema della quadrica T ha a comune colla varietà C una sua ipersuperficie del 3.° ordine v^3_{2p-4}, passante per lo spazio singolare o; gli s_{2p-3} del secondo sistema contengono della varietà C, oltre che lo spazio o, delle v^2_{2p-4}, varietà quadriche coordinate alle generazioni della quartica. Gli s_{2p-4}, cioè gli spazi generatori di dimensione minima della quadrica T, contengono, della varietà C, oltre che lo spazio o, delle v^2_{2p-5}, che saranno situate nelle due ipersuperficie (del secondo e del terzo ordine) dei due s_{2p-3} passanti per l' s_{2p-4}. La varietà σ di punti tripli della C sarà una v^4_{2p-7} dello spazio o.

Consideriamo una generazione della quartica Q determinata dalla quadrica Λ del fascio, e la varietà quadrica $\lambda\,(v^2_{2p-4})$ coordinata a questa generazione, e giacente in un s_{2p-3} del secondo sistema della quadrica specializzata T. Questo s_{2p-3} è l'intersezione collo spazio rappresentativo dell' S_{2p-1} tangente lungo r alla quadrica Λ, e la quadrica λ è la sezione della quadrica intersezione dell' S_{2p-1} con Λ. Questa quadrica V^2_{2p-2} è tutta costituita da S_2 passanti per r; i suoi spazi generatori di dimensione massima sono degli S_p e sono divisi in due sistemi proiettanti da r i due sistemi di s_{p-2} della quadrica λ. Anche la quadrica Λ contiene due sistemi di S_p, i quali contengono della quartica delle V^2_{p-1} che sono divise pure in due sistemi. E siccome due S_p di diverso sistema della V^2_{2p-2} intersezione con Λ dell' S_{2p-1} tangente a Λ lungo r, sono di diverso sistema per Λ, così i due sistemi di spazi lineari di dimensione massima della quadrica λ sono coordinati ai due sistemi di spazi della quadrica Λ. Un S_p qualunque di Λ incontra l' S_{2p-1} tangente lungo r a Λ in un S_{p-2}; l' S'_p che proietta da r questo S_{p-2} è tutto situato su Λ (perchè ogni S_2 passante per r di questo S'_p è tangente lungo r a Λ ed ha comune con Λ un altro punto fuori di r). L' S'_p e l' S_p sono inoltre due spazi di Λ dello stesso sistema, perchè hanno a comune un S_{p-2} (*). Congiungendo r con l' S_p considerato, si ottiene un S_{p+2} che interseca Π in un s_p passante per un s_{p-2} di un sistema della quadrica λ. In questo s_p sarà dunque l'immagine dello spazio quadratico della Q contenuto nell' S_p di Λ che abbiamo preso; questa immagine sarà evidentemente una v^2_{p-1}. Ma la V^2_{p-1} della Q situata in S_p incontra la quadrica ρ in una V^4_{p-2}; gli S_2 proiettanti da r i punti di questa V^4_{p-2} contengono oltre ad r un ulteriore S_1 di Q e quindi segano lo spazio rappresentativo in punti di C, e precisamente nei punti della v^4_{p-2} intersezione ulteriore dell' s_p colla C. Dunque la quadrica v^2_{p-1} immagine dello spazio quadratico V^2_{p-1} della Q passerà per questa v^4_{p-2}.

L' S_{p+2} a cui appartengono l' S_p e l' S'_p è tangente alla quadrica Λ lungo l' S_{p-2} intersezione di S_p con S'_p; poichè quello è il suo spazio polare rispetto ad essa; taglia allora la quadrica Λ in una quadrica specializzata che ha l' S_{p-2} per spazio singolare e che quindi contiene due sistemi semplicemente infiniti di S_p; le immagini degli spazi quadratici determinati dagli S_p di questa quadrica, dello stesso sistema a cui appartengono l' S_p e l' S'_p già considerati, sono le v^2_{p-1} del fascio (nell' s_p) che ha per base la v^4_{p-2} ulteriore intersezione di s_p con C. E considerando tutti gli S_p del sistema suddetto si ottengono tutte le quadriche del fascio.

Gli S_p della quartica intersezione dell' S_{2p+2} con Λ e di sistema opposto a quello a cui appartengono S_p ed S'_p, segano l' S'_p in un S_{p-1} che ha un punto comune con r; e quindi le V^2_{p-1} di questi S_p, appoggiandosi ad r, vengono proiettate (dentro all' s_p considerato dello spazio rappresentativo) nel fascio di s_{p-1} che ha per base l' s_{p-2} che avevamo preso in λ.

Reciprocamente, se prendiamo nello spazio rappresentativo Π una quadrica λ di un s_{2p-3} del secondo sistema di T, coordinata alla generazione di Q determinata dalla quadrica Λ del fascio, e per un s_{p-2} di λ conduciamo un s_p, questo viene proiettato da r mediante un S_{p+2} che passa per l' S_p di Λ proiezione dell' s_{p-2}. L' S_{p+2} è allora tangente a Λ lungo un S_{p-2} e quindi si ricade nella stessa configurazione del caso diretto (**).

(*) BERTINI, *Sugli spazi lineari delle quadriche a numero pari di dimensioni* (Atti della R. Acc. di Torino, 1895).

(**) Nel modo seguente si può dimostrare direttamente che *una varietà quadrica a un numero qualunque di dimensioni dello spazio rappresentativo, che ha una sua quartica*

Dunque nel caso che la quartica Q abbia dimensione dispari, possiamo enunciare:

« *Ogni varietà quadrica* λ (v^2_{2p-4}) *coordinata ad una generazione* Λ *di* Q *contiene due sistemi di* s_{p-2}, *coordinati ai due sistemi di spazi quadratici di dimensione massima di* Q. *Ogni* s_p *di* Π *passante per un* s_{p-2} *di un sistema interseca la* C *ulteriormente in una* v^4_{p-2} *base in* s_p *di un fascio di quadriche* v^2_{p-1}. *Esse sono immagini di spazi quadratici di* Q *di un sistema della generazione considerata e che non hanno nessun punto comune con* r. *Se gli* s_p *si conducono per gli* s_{p-2} *dell'altro sistema si hanno le immagini degli spazi quadratici del secondo sistema della medesima generazione. Gli spazi quadratici di un sistema che hanno un punto comune colla* r *hanno per immagine gli* s_{p-1} *di* Π *passanti per gli* s_{p-2} *di* λ *del sistema non coordinato al primo* (*). *Gli spazi quadratici di un sistema che contengono tutta la* r *hanno per immagine gli* s_{p-2} *del sistema coordinato di* λ. »

Per gli spazi quadratici di Q appartenenti alla generazione Λ, ma che non sono di dimensione massima, cioè determinati dagli $S_{p-\alpha}$ di Λ, si fa un ragionamento analogo al precedente; si può dunque enunciare:

---

a comune colla varietà eccezionale C, *è immagine di uno spazio quadratico della* Q. Poichè una conica che si appoggia in quattro punti alla C è manifestamente immagine di uno spazio quadratico (V_1^2) di Q, il teorema sará dimostrato in generale quando, suppostolo vero per una v^2_{m-1}, si provi che è vero per una v^2_m. Sia S_n lo spazio ambiente (n qualunque). Una v^2_m di $\Pi\,(S_{n-2})$, che ha una v^4_{m-1} comune colla $C\,(v^5_{n-4})$, interseca una v^3_{n-3}, immagine di una sezione iperplanare generica di Q, in una v^6_{m-1} che si scinderà nella v^4_{m-1} che essa ha comune con C e in una ulteriore v^2_{m-1}. Soltanto i punti di questa v^2_{m-1} saranno immagini di punti d'intersezione della varietà obbiettiva coll'iperpiano generico. Ma la v^2_{m-1} e la v^4_{m-1} sono situate nella v^2_m; si intersecano quindi in una v^4_{m-2} che sarà della C (è la v^4_{m-2} che l's_m, a cui appartiene la v^2_{m-1}, sega la v^4_{m-1}). La v^2_{m-1} è dunque immagine di una V^2_{m-1} di Q. Ne consegue che la varietà obbiettiva, di cui vogliamo trovare l'ordine, è segata da un iperpiano generico in una v^2_{m-1}; è quindi una V^2_m.

(*) Il caso in cui lo spazio quadratico della quartica si appoggia in un punto ad r, si può considerare come un caso limite di quello generale. Sia infatti una V^2_{p-1} di Q generica di cui un punto M tenda ad avvicinarsi ad un punto M' di r; l'S_{p+1} che proietta da r l'S_{p-1} tangente in M a questa V^2_{p-1} ha per posizione limite un S_{p+1} passante per r e tangente in M' a Q. Questo S_{p+1} sega Π in un s_{p-1} dell's_{2p-3} di T corrispondente ad M' (cioè luogo delle immagini dei punti infinitamente vicini ad M'). D'altra parte l's_{p-1} di cui si parla nel testo e che è l'immagine della V^2_{p-1} appoggiata ad M' incontra la T ulteriormente in un altro s'_{p-2} che collo spazio O determina l's_{2p-3} di T corrispondente ad M'. L's_{p-1} che si distacca dall'immagine quando si va al limite sarà un s_{p-1} di questo s_{2p-3} e passante per l's'_{p-2}.

« *Un s_{p-x} qualunque di Π passante per un s_{p-2-x} qualunque di λ sega la C in una v^4_{p-2-x} base nell' s_{p-x} di un fascio di v^2_{p-x-1}; esse sono le immagini degli spazi quadratici V^2_{p-x-1} di Q appartenenti alla generazione Λ e che non hanno nessun punto comune con r. Gli s_{p-x-1} di Π passanti per gli s_{p-2-x} di λ sono le immagini delle V^2_{p-x-1} di Q appartenenti alla medesima generazione ed aventi un punto comune colla r. Gli s_{p-2-x} di λ sono le immagini degli spazi V^2_{p-x-1} di Q della generazione Λ e che contengono tutta la r.* »

2. Supponiamo che lo spazio ambiente sia di dimensione pari, cioè sia un S_{2p}. La quartica Q è dunque una V^4_{2p-2} base di un fascio di V^2_{2p-1}. Nello spazio rappresentativo $\Pi(S_{2p-2})$ avremo una quadrica $T(v^2_{2p-3})$ immagine dei punti della quartica infinitamente vicini ai punti di r; essa è specializzata con un s_{2p-6} (spazio o) singolare, e contiene due serie di s_{2p-4}. Nella quadrica T avremo come varietà eccezionale C una v^5_{2p-4} che passa per lo spazio o. Un s_{2p-4} del primo sistema di T ha comune colla varietà C una sua ipersuperficie del terz'ordine v^3_{2p-5} passante per o. Un s_{2p-4} del secondo sistema ha comune colla varietà C, oltre che lo spazio o anche una sua quadrica v^2_{2p-5}. Le ipersuperficie, del terzo e second'ordine, giacenti in due s_{2p-4} di diverso sistema hanno comune una v^2_{2p-6} che è l'ulteriore intersezione colla C dell' s_{2p-5} comune ai due s_{2p-4}. Nello spazio o singolare di T è contenuta una v^4_{2p-8} (che abbiamo indicato con σ) che è tutta di punti tripli per la C e di punti doppi per le ipersuperficie del terzo ordine contenute negli s_{2p-4} del primo sistema di T.

Collo stesso ragionamento che abbiamo fatto precedentemente, osservando però che nel presente caso gli spazi quadratici di dimensione massima di una generazione della quartica costituiscono un unico sistema, si giunge al risultato:

« *Ogni s_{p-1} di Π condotto per un s_{p-3} della varietà quadrica $\lambda(v^2_{2p-5})$, coordinata alla generazione Λ della quartica, interseca la C ulteriormente in una v^4_{p-3}, base in s_{p-1} di un fascio di quadriche v^2_{p-2}. Esse sono le immagini degli spazi quadratici di dimensione massima della generazione Λ, i quali non hanno nessun punto comune colla r. Gli s_{p-2} di Π passanti per gli s_{p-3} di λ sono le immagini degli spazi quadratici della medesima generazione aventi però un punto comune con r. Gli s_{p-3} di λ sono le immagini di quelli che contengono tutta la r.* »

Per la rappresentazione degli spazi quadratici di dimensione inferiore, si fa lo stesso ragionamento che si è fatto nel caso precedente.

§ 6.°

Immagine degli spazi lineari della quartica.

Ritorniamo a indicare con S_n lo spazio ambiente. Uno spazio lineare generico $S_m \left(m \leq \frac{n-2}{2}\right)$ della quartica $Q(V^4_{n-2})$ sega la quadrica ρ in una V^2_{m-1}; quindi *ha per immagine nello spazio rappresentativo un* s_m *che contiene una* v^2_{m-1} *di* C.

Reciprocamente vogliamo ora dimostrare che *un* s_m *dello spazio rappresentativo il quale contiene una* v^2_{m-1} *di* C *è l'immagine di un* S_m *di* Q.

Dimostriamo il teorema per un s_p supponendolo vero per un s_{p-1}; perchè allora (siccome un s_1 congiungente due punti di C è manifestamente immagine di un s_1 di Q) potremo dire che il teorema è generale.

Consideriamo allora un s_p di Π che contiene una v^2_{p-1} di C; esso ha comune con una ipersuperficie del terz'ordine v^3_{n-3} di Π, immagine di una sezione iperplanare di Q, una v^3_{p-1}, ma di questa intersezione fa parte la v^2_{p-1} lungo la quale si appoggia l' s_p a C; dunque l' s_p sega la v^3_{n-3} ulteriormente in un s_{p-1}. Questo s_{p-1} contiene della C la v^2_{p-2}, nella quale interseca la v^2_{p-1} di s_p; perciò è immagine di un S_{p-1} della Q. Ma soltanto i punti dell' s_{p-1} sono immagini di punti comuni alla varietà obbiettiva incognita coll'iperpiano di cui la sezione con Q ha per immagine la v^3_{n-3}, perchè un punto della v^2_{p-1} sarà immagine di due punti diversi (situati sopra un medesimo S_1 appoggiato ad r) secondochè si considera come dell' S_p o come della v^3_{n-3}. Dunque la varietà incognita è incontrata da un iperpiano generico in un S_{p-1}; sarà perciò un S_p.

§ 7.°

Applicazioni.

Le cose dette possono applicarsi alla rappresentazione nel piano della congruenza (2, 2) e nello spazio ordinario del complesso quadratico generale; perchè la geometria della congruenza (2, 2) è identica a quella della quartica (V^4_2), base di un fascio di quadriche di un S_4, una delle quali si considera come l'immagine del complesso lineare a cui appartiene la congruenza; e la geometria del complesso quadratico generale è identica a quella della quartica (V^4_3), base di un fascio di quadriche di un S_5, una delle quali è l'immagine dello spazio rigato.

a) Nella rappresentazione della congruenza (2, 2), avremo come varietà eccezionali nel piano rappresentativo una conica T, i cui punti sono le immagini delle rette della congruenza infinitamente vicine ai raggi del fascio fondamentale; e inoltre cinque punti di essa, che sono le immagini dei cinque fasci della congruenza che hanno un raggio a comune col fascio fondamentale. Le rigate θ del quart'ordine che la congruenza (2, 2) ha a comune con una congruenza lineare appartenente allo stesso complesso lineare hanno per immagini le cubiche del piano rappresentativo passanti per i punti eccezionali, ecc., ecc.

b) Nella rappresentazione del complesso quadratico, abbiamo come varietà eccezionali dello spazio rappresentativo una quadrica $T\,(V^2_2)$ non specializzata, i cui punti sono le immagini delle rette del complesso infinitamente vicine ai raggi del fascio fondamentale; ed una quintica C situata sulla quadrica, i cui punti sono immagini di interi fasci che hanno un raggio a comune col fondamentale. Le generatrici di T sono trisecanti della quintica, le direttrici sono bisecanti. Le congruenze (2, 2) contenute nel complesso quadratico hanno per immagine le superficie del terzo ordine passanti per la quintica. Le coppie di punti della quintica (punti *associati* secondo Caporali), situati sopra una stessa direttrice di T, sono coordinate alle varie generazioni del complesso. Se M ed N sono due di tali punti, le coniche dello spazio rappresentativo appoggiate in quattro punti a C e i cui piani passano per M, sono le immagini delle rigate del second' ordine contenute in un sistema di una generazione del complesso; quelle i cui piani passano per N sono le immagini delle serie rigate contenute nell'altro sistema della stessa generazione. In particolare esiste sulla quintica C una coppia ($X_1\,X_2$) di punti associati (punti *fondamentali* secondo Caporali) che ci dà nel modo suindicato le immagini dei coni e delle coniche del complesso.

I fasci del complesso (spazi lineari della quartica) sono rappresentati dalle corde della quintica.

Un'applicazione della teoria dei residui delle funzioni di variabile complessa.

(Di ULISSE DINI, *a Pisa.)*

---

1. In un lavoro che si sta pubblicando nelle *Memorie dell'Accademia dei Lincei* collo stesso titolo di questo (*) ho dato molte formole che servono alla determinazione e allo studio di integrali della forma:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\nu\varphi} f(k\,e^{i\varphi})\,d\varphi}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\nu\varphi} f(k\,e^{i\varphi})\log(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\cos\varphi)\,d\varphi,$$

dove ν, p, k, p_0, p_1, q_1 sono quantità costanti, delle quali la prima ν è un numero intero o nullo, e la seconda p è ordinariamente zero o un numero intero e positivo, ma in certi casi può anche essere complessa; e alcuni di questi integrali giovano assai nella teoria delle funzioni sferiche di LEGENDRE $X_n(x)$.

Voglio ora in questo nuovo lavoro esporre altri risultati notevoli che si ottengono pure dalla teoria dei residui, valendomi in parte per questo anche di alcune delle formole e delle considerazioni esposte nel lavoro suddetto.

2. Incomincierò dal fare esplicitamente la seguente osservazione generale che, per quanto semplicissima, forse non è stata per anco rilevata e applicata in modo generale da altri, o almeno non ha fermato l'attenzione di altri quanto si conveniva.

(*) Nel corso di questo lavoro volendo riferirmi a quello ora citato scriverò V. M. c.

Osserverò cioè che quando si ha una funzione $f(z, \xi)$ di due variabili z e ξ che riguardata come funzione di z, pei varii valori di ξ che si hanno da considerare, nell'intorno del punto $z = 0$ è sempre uniforme e nel punto stesso ha al più una singolarità polare o una singolarità essenziale isolata, *i coefficienti delle varie potenze n* (positive, negative o nulla) *di z nello sviluppo per potenze intere di z della funzione stessa $f(z, \xi)$ saranno i residui per $z = 0$ della funzione $\frac{f(z, \xi)}{z^{n+1}}$.*

Segue da ciò che quelle funzioni $Z_n(\xi)$ che, come ad es.: le funzioni di Legendre X_n, vengono definite come i coefficienti delle potenze n^e di tali sviluppi corrispondono precisamente ai residui indicati, e il loro studio potrà farsi facendo quello di questi residui.

Le funzioni stesse Z_n adunque si potranno sempre rappresentare per mezzo d'integrali definiti $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z, \xi)}{z^{n+1}} dz$ estesi a un piccolo cerchio o a una piccola curva qualsiasi che nel suo interno, pei valori che si considerano di ξ, abbia soltanto il punto singolare $z = 0$ della funzione $\frac{f(z, \xi)}{z^{n+1}}$, e sul contorno non abbia punti singolari di questa funzione, o avendoceli questi presentino particolarità speciali, come corrispondano ad es.: a punti nei quali la funzione non sia infinita, o il cui ordine d'infinito sia logaritmico, o sia inferiore al primo; nel qual caso essi non vengono ad avere influenza sull'integrale (V. M. c. §§ 2 e 7 in nota).

Ne segue pure che mutando la funzione $\frac{f(z, \xi)}{z^{n+1}}$ in un altra $\varphi(z, \xi)$ il cui residuo per $z = 0$ sia ancora lo stesso, la Z_n potrà rappresentarsi anche per mezzo dell'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int \varphi(z, \xi)\, dz$ esteso a una curva convenientemente scelta che potrà anche essere presa come precedentemente, donde apparisce che si avranno per le stesse funzioni Z_n infinite rappresentazioni per mezzo d'integrali definiti, sia mutando opportunamente la funzione da integrare, sia mutando la forma del contorno.

3. Similmente quando una funzione di ξ sia definita per mezzo di un integrale definito $\int_a^b f(\xi, \omega)\, d\omega$, come avviene ad es. per le funzioni di Bessel, se questo integrale potrà ridursi ad uno esteso al contorno chiuso di un campo di una variabile complessa z per una funzione $\varphi(z, \xi)$ che abbia una singo-

larità polare o essenziale isolata soltanto in un punto $z = \alpha_1$ del campo stesso, allora quella funzione potrà anche definirsi o riguardarsi come il residuo di $\varphi(z, \xi)$ per $z = \alpha_1$, e volendo potrà considerarsi come il coefficiente di $(z - \alpha_1)^{n-1}$ nello sviluppo di $(z - \alpha_1)^n \varphi(z, \xi)$ nell'intorno del punto α_1.

Così ad es. se si prendono gli integrali:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^n \omega \, d\omega, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^n \omega \, d\omega, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\xi \operatorname{sen}\omega - n\omega)} \, d\omega,$$

l'ultimo dei quali ci riporta subito alle funzioni di Bessel, se si osserva che introducendo nei calcoli una variabile z che si consideri sul cerchio di raggio uno, si vede che sarà:

$$e^{i\omega} = z, \qquad 2\cos\omega = z + \frac{1}{z}, \qquad 2i \operatorname{sen}\omega = z - \frac{1}{z}, \qquad d\omega = \frac{dz}{iz},$$

e gli integrali stessi si ridurranno ai seguenti:

$$\frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi i}\int \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}, \quad \frac{1}{(2i)^n}\frac{1}{2\pi i}\int \left(z - \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}, \quad \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{z^{n+1}} e^{\frac{\xi}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} dz,$$

estesi al cerchio di raggio uno, e corrisponderanno quindi ai residui delle funzioni:

$$\frac{1}{2^n z^{n+1}}(1 + z^2)^n, \qquad \frac{i^n}{2^n z^{n+1}}(1 - z^2)^n, \qquad \frac{e^{-\frac{\xi}{2z}(1-z^2)}}{z^{n+1}}.$$

Ora per le due prime di queste funzioni se n è dispari i residui sono evidentemente nulli; mentre se n è un numero pari $2m$ basterà trovare i coefficienti di z^{2m} nello sviluppo di $(1 \pm z^2)^n$, per vedere che i residui delle stesse funzioni sono precisamente $\frac{1}{2^{2m}}(2m)_m$, ovvero:

$$\frac{\pi(2m)}{2^{2m}\pi(m)^2} = \frac{\pi(2m)}{(2.4.6\ldots 2m)^2};$$

e si conclude quindi che i valori dei due integrali:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^n \omega \, d\omega, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^n \omega \, d\omega,$$

per n dispari sono zero, e per n pari sono uguali a $\frac{\pi(n)}{(2.4.6\ldots n)^2}$.

Per l'ultima funzione poi osserveremo che si ha:

$$\frac{1}{z^{n+1}} e^{-\frac{\xi}{2z}(1-z^2)} = \sum_0^\infty (-1)^m \frac{\xi^m (1 - z^2)^m}{2^m \pi(m) z^{m+n+1}};$$

e poichè la serie del secondo membro converge evidentemente in ugual grado, e quindi ad essa può applicarsi la integrazione termine a termine lungo ogni curva che non si accosti indefinitamente all'origine, è evidente che il residuo cercato sarà la serie $\sum_0^\infty A_m \xi^m$ dove le A_m sono i residui della funzione $\frac{(-1)^m (1-z^2)^m}{2^m \pi(m) z^{m+n+1}}$, o i coefficienti di z^{m+n} nello sviluppo di $\frac{(-1)^m (1-z^2)^m}{2^m \pi(m)}$.

Ora avendosi:

$$(1-z^2)^m = 1 - m_1 z^2 + m_2 z^2 + \cdots + (-1)^h m_h z^{2h} + \cdots + (-1)^m m_m z^{2m},$$

e supponendo dapprima n positivo o nullo, si vede subito che se $m+n > 2m$, cioè $m < n$, le A_m saranno tutte zero, e lo stesso accadrà anche se essendo $m+n \leq 2m$, $m+n$ non sarà un numero pari; quindi dovrà essere $m = n + 2h$, e il residuo cercato sarà $\xi^n \sum A_{n+2h} \xi^{2h}$ essendo A_{n+2h} il coefficiente di z^{2n+2h} nello sviluppo di:

$$\frac{(-1)^n (1-z^2)^{n+2h}}{2^{n+2h} \pi(n+2h)}, \quad \text{cioè:} \quad \frac{(-1)^h (n+2h)_{n+h}}{2^{n+2h} \pi(n+2h)},$$

ovvero:

$$\frac{(-1)^h}{2^{n+2h}} \frac{1}{\pi(h)\pi(n+h)} = \frac{(-1)^h}{(2.4\ldots 2h)(2.4.6\ldots(2n+2h))},$$

per modo che si avrà per la funzione $I_n(z)$ la formola nota:

$$I_n(\xi) = \xi^n \sum_0^\infty \frac{(-1)^h}{(2.4.6\ldots 2h)(2.4.6\ldots(2n+2h))} \xi^{2h},$$

che per $n = 0$ si riduce all'altra più semplice:

$$I_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{z^2} + \frac{\xi^4}{2^2.4^2} + \frac{\xi^6}{2^2.4^2.6^2} \cdots$$

In modo simile per n negativo e $= -n_1$ si troverà come è noto:

$$I_{-n_1}(\xi) = (-1)^{n_1} I_{n_1}(\xi).$$

4. Prendiamo ora a considerare la espressione $(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)^\mu$ nell'intorno del punto $z = 0$ quando μ ha un valore qualsiasi reale o complesso, e i coefficienti a_0, a_1, a_2 sono funzioni di un'altra variabile ξ; e fissiamo, pel caso che μ non sia un numero intero, che il valore di $(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)^\mu$ per $z = 0$ sia un valore determinato speciale (qualsiasi) fra quelli che a_2^μ può avere. O anche invece della espressione $(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)^\mu$ consideriamo l'altra $\log(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)$, fissando il valore di $\log a_2$ da prendersi come valore di questa funzione per $z = 0$; e indichiamo con $Z_{\mu,n}$ e con Z_n i coefficienti di

z^n negli sviluppi di queste espressioni all'intorno del punto $z=0$; con che le funzioni $Z_{\mu,n}$ nel caso particolare di $\mu=-\frac{1}{2}$, $a_0=a_2=1$, $a_1=-2\xi$ diverranno le solite funzioni $X_n(\xi)$ di LEGENDRE.

Evidentemente per quanto abbiamo osservato in principio del § 2 queste funzioni $Z_{\mu,n}$, Z_n saranno i residui di:

$$\frac{1}{z^{n+1}}(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)^\mu, \qquad \frac{1}{z^{n+1}} \log (a_0 z^2 + a_1 z + a_2),$$

e corrisponderanno quindi agli integrali:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)^\mu}{z^{n+1}}\, d\, z, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\log (a_0 z^2 + a_1 z + a_2)}{z^{n+1}}\, d\, z,$$

che potranno intendersi estesi a un cerchio di raggio k che abbia il centro nel punto $z=0$, e non abbia nel suo interno nè sul contorno radici della equazione $a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0$, per modo che potranno scriversi rispettivamente:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k^{\mu-n}\, e^{i(\mu-n)\varphi} \left\{ a_1 + \left(a_0 k + \frac{a_2}{k}\right)\cos\varphi + \left(a_0 k - \frac{a_2}{k}\right) i \operatorname{sen}\varphi \right\}^\mu d\,\varphi,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k^{-n} e^{-in\varphi}\left[\log k + i\varphi + \log\left\{ a_1 + \left(a_0 k + \frac{a_2}{k}\right)\cos\varphi + \left(a_0 k - \frac{a_2}{k}\right) i \operatorname{sen}\varphi\right\}\right] d\,\varphi\,,$$

quando si prendano convenientemente i valori delle potenze μ^e di $e^{i\varphi}$ e della quantità fra parentesi, e così quelli del logaritmo di questa quantità in relazione coi valori iniziali scelti di a_2^μ e $\log a_2$ per $z=0$.

Ora se si indica con k_0 il modulo minimo delle due radici della equazione $a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0$, quando i loro moduli sono differenti, e il valore comune dei loro moduli quando questi sono uguali, è certo che se a_2 non sarà zero questo valore k_0 sarà diverso da zero, e le espressioni precedenti rappresenteranno $Z_{\mu,n}$ e Z_n per ogni valore di k inferiore a k_0; e il limite di queste espressioni per $k=k_0$ rappresenterà pure le stesse funzioni. La seconda delle espressioni stesse poi rappresenterà sempre Z_n anche pel valore k_0 di k; e la stessa particolarità di rappresentare $Z_{\mu,n}$ anche per $k=k_0$ si avrà pure per la prima se μ sarà un numero reale o complesso la cui parte reale sia superiore a $-\frac{1}{2}$ quando le due radici della stessa equazione di 2.° grado sono uguali, e sia superiore a -1 negli altri casi (V. M. c. § 2).

E nel caso che μ sia intero e positivo o nullo nella espressione di $Z_{\mu,n}$ k potrà anche avere un valore positivo qualsiasi.

Ora è evidente che con queste limitazioni nei valori che k potrà avere le espressioni precedenti ricadono nei casi di quelle considerate al § 26 della M. c. quando in queste vi si faccia $\nu = n$ e:

$$p_0 = a_1, \qquad p_1 = a_0 k + \frac{a_2}{k}, \qquad q_1 = \left(a_0 k - \frac{a_2}{k}\right) i,$$

$$p_1 - i q_1 = 2 a_0 k, \qquad p_1 + i q_1 = 2 \frac{a_2}{k}, \qquad p_1^2 + q_1^2 = 4 a_0 a_2,$$

dunque evidentemente potremo scrivere:

$$\left.\begin{aligned} Z_{\mu,n} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k^{\mu-n} e^{i(\mu-n)\varphi}\left\{a_1 + \left(a_0 k + \frac{a_2}{k}\right)\cos\varphi + \left(a_0 k - \frac{a_2}{k}\right) i \operatorname{sen}\varphi\right\}^{\mu} d\varphi = \\ &= a_2^{\mu-n}\sum \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+s+1)}{\pi(s)\,\pi(n-2s)}\, a_1^{n-2s}(a_0 a^2)^s, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} Z_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k^{-n} e^{-in\varphi}\Big[\log k + i\varphi + \log\Big\{a_1 + \left(a_0 k + \frac{a_2}{k}\right)\cos\varphi + \\ &\qquad + \left(a_0 k - \frac{a_2}{k}\right) i \operatorname{sen}\varphi\Big\}\Big] d\varphi = \\ &= \frac{1}{a_2^n}\sum(-1)^{n-s-1}\frac{\pi(n-s-1)}{\pi(s)\,\pi(n-2s)}\, a_1^{n-2s}(a_0 a_2)^s \quad \text{per} \quad n \geqq 1, \\ Z_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\log k + i\varphi + \log\Big\{a_1 + \left(a_0 k + \frac{a_2}{k}\right)\cos\varphi + \\ &\qquad + \left(a_0 k - \frac{a_2}{k}\right) i \operatorname{sen}\varphi\Big\}\Big] d\varphi = \log a_2, \quad \text{per} \quad n = 0; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

e queste formole, nelle quali s'intende che il numero s prenda i valori interi e positivi da 0 fino a $\frac{n}{2}$ o $\frac{n-1}{2}$ secondochè n è pari o dispari, varranno pei valori di $k < k_0$, e in certi casi, come dicemmo, anche per $k = k_0$. E il numero k_0 sarà il modulo di quella delle due radici $\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4 a_0 a_2}}{2 a_0}$ per la quale il radicale è preso in modo che il rapporto $\frac{1}{a_1}\sqrt{a_1^2 - 4 a_0 a_2}$ abbia la parte reale positiva, non essendo da considerarsi il caso in cui questa parte reale o a_1 sono zero, perchè allora i moduli delle due radici sono uguali.

5. In particolare se saremo nel caso comune di $a_0 = a_2 = 1$, $a_1 = -2\xi$, come si ha appunto nel caso delle funzioni di Legendre, allora, siccome le due radici sono $\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}$, supponendo ξ reale e non superiore ad uno in valore assoluto avremo $k_0 = 1$; e quindi allora le formule (2) varranno tanto per $k < 1$ che per $k = 1$; e le (1) varranno sempre per $k < 1$, e varranno anche per $k = 1$ purchè in quest'ultimo caso μ abbia la parte reale superiore a -1 finchè ξ non è uguale a ± 1, e superiore a $-\frac{1}{2}$ quando $\xi = \pm 1$.

Supponendo dunque senz'altro $k = 1$, si vede che si avranno le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned} Z_n &= -\frac{1}{n} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} \log(2\cos\varphi - 2\xi)\, d\varphi = \\ &= \sum (-1)^{s-1} \frac{\pi(n-s-1)}{\pi(s)\,\pi(n-2s)} (2\xi)^{n-2s}, \\ Z_0 &= \pi i + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log(2\cos\varphi - 2\xi)\, d\varphi = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

nella prima delle quali $n \geqq 1$, che varranno pei valori di ξ compresi fra -1 e $+1$ (± 1 incl.); e avremo pure l'altra:

$$\left.\begin{aligned} Z_{\mu,n} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\mu-n)\varphi} (2\cos\varphi - 2\xi)^{\mu}\, d\varphi = \\ &= (-1)^n \sum \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+s+1)}{\pi(s)\,\pi(n-2s)} (2\xi)^{n-2s}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

che varrà quando la parte reale di μ sia superiore a -1 finchè ξ (che è compresa fra -1 e 1) non sia uguale a ± 1, e superiore a $-\frac{1}{2}$ se $\xi = \pm 1$; e in queste formole i valori di $\log(2\cos\varphi - 2\xi)$ e $(2\cos\varphi - 2\xi)^{\mu}$ dovranno essere presi convenientemente dipendentemente dai soliti valori iniziali di $\log(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)$ e $(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)^{\mu}$ per $z = 0$, pei quali in questo caso di $a_0 = a_2 = 1$, $a_1 = -2\xi$ noi abbiamo qui già fissato che siano rispettivamente 0 e 1.

Ora, con questi valori iniziali 0 e 1 di $\log(1-2\xi z+z^2)$ e $(1-2\xi z+z^2)^\mu$, se si osserva che, andando dal punto 0 ai punti $z=\pm 1$ secondo il cammino rettilineo, o anche secondo qualsiasi altro cammino entro il cerchio di raggio uno, i valori delle stesse quantità nei punti $z=\pm 1$ per ξ diverso da ± 1 vengono ad essere rispettivamente $\log 2(1\mp\xi)$, $[2(1\mp\xi)]^\mu = e^{\mu \log 2(1\mp\xi)}$ ove di $\log(1\mp\xi)$ s'intende preso il valore aritmetico, si vede subito che siccome nelle nostre formole con $z=k\,e^{i\varphi}$ abbiamo scritto:

$$\log(a_0 z^2 + a_1 z + a_2) =$$

$$= \log k + i\varphi + \log\left\{a_1 + \left(a_0 k + \frac{a_2}{k}\right)\cos\varphi + \left(a_0 k - \frac{a_2}{k}\right) i \operatorname{sen}\varphi\right\},$$

$$(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)^\mu = k^\mu e^{i\mu\varphi}\left\{a_1 + \left(a_0 k + \frac{a_2}{k}\right)\cos\varphi + \left(a_0 k - \frac{a_2}{k}\right) i \operatorname{sen}\varphi\right\}^\mu,$$

nel caso nostro per le quantità $\log(2\cos\varphi - 2\xi)$ e $(2\cos\varphi - 2\xi)^\mu$ che figurano nelle formole precedenti bisognerà prendere quei valori che per $\varphi=\pi$ portano a $-\pi i + \log(2+2\xi)$ e $e^{-i\mu\pi}(2+2\xi)^\mu$ e per $\varphi = 2\pi$ portano a $-2\pi i + \log(2-2\xi)$ e $e^{-2i\mu\pi}(2-2\xi)^\mu$; e quindi, se φ_0 è il valore di ξ fra 0 e π pel quale $\cos\varphi=\xi$, evidentemente nelle nostre formole pei valori delle stesse quantità $\log(2\cos\varphi - 2\xi)$, e $(2\cos\varphi-2\xi)^\mu = e^{\mu\log(2\cos\varphi - 2\xi)}$ quando φ è fra 0 e φ_0 bisognerà prenderle sotto la loro forma stessa; per φ fra φ_0 e $2\pi - \varphi_0$ bisognerà prenderle sotto la forma:

$$-\pi i + \log(2\xi - 2\cos\varphi), \quad e^{-i\mu\pi}(2\xi - 2\cos\varphi)^\mu = e^{-i\mu\pi + \mu\log(2\xi - 2\cos\varphi)};$$

e per φ fra $2\pi - \varphi_0$ e 2π bisognerà prenderle sotto la forma:

$$-2\pi i + \log(2\cos\varphi - 2\xi), \quad e^{-2i\mu\pi}(2\cos\varphi - 2\xi)^\mu = e^{-2i\mu\pi + \mu\log(2\cos\varphi - 2\xi)}.$$

E similmente si troverà che se $\xi = -1$ o $\varphi_0 = \pi$, quando φ sarà fra 0 e π per le solite quantità bisognerà prendere:

$$\log(2\cos\varphi - 2\xi) \quad \text{e} \quad (2\cos\varphi - 2\xi)^\mu = e^{\mu\log(2\cos\varphi - 2\xi)},$$

e per φ fra π e 2π bisognerà prendere:

$$-2\pi i + \log(2\cos\varphi - 2\xi), \quad \text{e} \quad e^{-2i\mu\pi}(2\cos\varphi - 2\xi)^\mu = e^{-2i\mu\pi + \mu\log(2\cos\varphi - 2\xi)},$$

cioè tutto sarà come nel caso precedente salvo a non parlare più del tratto da φ_0 a $2\pi - \varphi_0$ che nel caso nostro viene a sparire da sè; e infine se $\xi = 1$ con chè $\varphi_0 = 0$, pei valori delle stesse quantità in tutto il percorso di φ da

0 a 2π bisognerà prendere:

$$-\pi i + \log(2\xi - 2\cos\varphi), \quad \text{e} \quad e^{i\mu\pi}(2\xi - 2\cos\varphi)^\mu = e^{-i\mu\pi+\mu\log(2\xi-2\cos\varphi)},$$

intendendo sempre che in queste espressioni nelle quali le quantità sotto i logaritmi sono positive, si debbono prendere pei logaritmi stessi i loro valori reali (valori aritmetici).

Da queste considerazioni segue dunque che, indicando sempre con φ_0 il valore di φ fra 0 e π pel quale si ha $\cos\varphi = \xi$, avremo le formole seguenti:

$$\begin{aligned} Z_n = &-\frac{1}{n} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\varphi_0} e^{in\varphi}\log(2\cos\varphi - 2\xi)\,d\varphi + \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0} e^{-in\varphi}\left\{-\pi i + \log(2\xi - 2\cos\varphi)\right\}d\varphi + \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi-\varphi_0}^{2\pi} e^{-in\varphi}\left\{-2\pi i + \log(2\cos\varphi - 2\xi)\right\}d\varphi, \end{aligned}$$

o anche con facili trasformazioni:

$$\left.\begin{aligned} Z_n = -\frac{1}{n}\cos n\varphi_0 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\varphi_0}\cos n\varphi\log(2\cos\varphi - 2\xi)\,d\varphi + \\ + \frac{1}{\pi}\int_{\varphi_0}^{\pi}\cos n\varphi\log(2\xi - 2\cos\varphi)\,d\varphi = \sum(-1)^{s-1}\frac{\pi(n-s-1)}{\pi(s)\,\pi(n-2s)}(2\xi)^{n-2s}, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

per $n \geqq 1$ e ξ compreso fra -1 e 1 (± 1 incl.); e in modo simile si troverà:

$$Z_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varphi_0}\log(2\cos\varphi - 2\xi)\,d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_{\varphi_0}^{\pi}\log(2\xi - 2\cos\varphi)\,d\varphi = 0, \quad (6)$$

sempre per ξ compreso fra -1 e 1 (± 1 incl.), e:

$$\left.\begin{aligned} Z_{\mu,n} = &\frac{1}{\pi}\int_0^{\varphi_0}\cos(\mu-n)\varphi\,(2\cos\varphi - 2\xi)^\mu\,d\varphi + \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{\varphi_0}^{\pi}\cos\left\{(\mu-n)\varphi - \mu\pi\right\}(2\xi - 2\cos\varphi)^\mu\,d\varphi = \\ &= (-1)^n\sum\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+s+1)}{\pi(s)\,\pi(n-2s)}(2\xi)^{n-2s}, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

per ξ compreso fra -1 e 1, e μ tale che la sua parte reale sia superiore a -1, e potendo anche essere $\xi = \pm 1$ quando la parte reale di μ sia superiore anche a $-\frac{1}{2}$.

6. Supponendo $\mu = -\frac{1}{2}$, con chè $Z_{\mu,n}$ diviene la X_n, si avrà la formola:

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varphi_0} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{2\cos\varphi - 2\xi}}\, d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{2\xi - 2\cos\varphi}}\, d\varphi,$$

per ξ compreso fra -1 e 1 (± 1 escl.); e questa è precisamente la formola di Dirichlet per le funzioni X_n per qualsiasi valore intero di n ($n = 0$ incl.).

Questa formola è analoga a quelle che si hanno dalle (5) e (6) per le funzioni Z_n e Z_0, che corrispondono ai coefficienti di z^n nello sviluppo di $\log(1 - 2\xi z + z^2)$, come le X_n corrispondono ai coefficienti di z^n nello sviluppo di $\frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi z + z^2}}$; e colla (7), di cui essa ora risulta un caso particolare, la stessa formola viene estesa a tutte le funzioni $Z_{\mu,n}$ per qualsiasi valore di μ anche complesso, la cui parte reale sia, come dicemmo, superiore a -1 quando ξ è fra -1 e 1 (± 1 escl.), e superiore a $-\frac{1}{2}$ quando $\xi = \pm 1$.

7. Così per le funzioni $Z_{\mu,n}$ abbiamo formole che le rappresentano per polinomii o per integrali definiti per qualsiasi valore reale o complesso di μ, e qualunque sia il numero intero e positivo n, e queste sono le (1) per $k < k_0$, per modo che esse sono rappresentate anche dai limiti per $k = k_0$ degli integrali che compariscono nelle formole stesse. Questi integrali poi continuano a rappresentare le dette funzioni $Z_{\mu,n}$ anche per $k = k_0$, ma allora bisogna che la parte reale di μ sia superiore a -1 quando le due radici della solita equazione $a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0$ non sono uguali fra loro, e sia superiore a $-\frac{1}{2}$ quando queste radici sono uguali.

E similmente per le funzioni Z_n abbiamo le formole (2) che le rappresentano per polinomii o per integrali definiti tanto per $k < k_0$ che per $k = k_0$.

Possono poi aversi altre espressioni per integrali definiti che rappresentino queste funzioni $Z_{\mu,n}$ e Z_n e anche altre; e queste espressioni si ottengono da una formola generale che credo nuova per la forma che dà ai coefficienti dello sviluppo in serie di potenze intere e positive di z per una funzione qualsiasi $F(z)$ regolare nell'intorno del punto $z=0$.

Ricordiamo perciò che si ha la prima delle formole (68) del § 17 della Memoria citata, cioè:

$$\frac{(p_1 - i\,q_1)^p}{r_1^{2p+1}} = \frac{(-1)^p}{2\pi(2p)_p}\int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi}\,\frac{d\varphi}{(p_0 + p_1\cos\varphi + q_1\,\mathrm{sen}\,\varphi)^{p+1}}, \tag{9}$$

quando siamo nel caso di quelle che nella stessa Memoria dicemmo *condizioni* (A) (*), e si ha $r_1 = \sqrt{p_0^2 - p_1^2 - q_1^2}$, intendendo che di questo radicale

(*) È bene ricordare che al § 12 della Mem. cit. supponendo:

$$p_0 = \lambda\, e^{i\mu}, \qquad p_1 = \alpha\, e^{i\gamma}, \qquad q_1 = \beta\, e^{i\delta},$$

o:

$$p_0 = a + i\,a', \qquad p_1 = b + i\,b', \qquad q_1 = c + i\,c',$$

e formando le espressioni:

$$\alpha^2\beta^2\,\mathrm{sen}^2(\delta-\gamma) - \alpha^2\lambda^2\,\mathrm{sen}^2(\gamma-\mu) - \beta^2\lambda^2\,\mathrm{sen}^2(\delta-\mu), \tag{α}$$

o:

$$(bc'-b'c)^2 - (ab'-a'b)^2 - (ac'-a'c)^2 = (a^2-b^2-c^2)(a'^2-b'^2-c'^2) - (aa'-bb'-cc')^2, \tag{β}$$

si stabilì di dire che si hanno:

Le condizioni (A) quando le espressioni (α) o (β) sono negative, e quando essendo zero si ha $\alpha\beta\,\mathrm{sen}(\delta-\gamma)=0$, o $b\,c' - b'\,c = 0$, purchè allora si abbia $\lambda^2 > \alpha^2 + \beta^2$, o $a^2 + a'^2 > b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2$; e nel caso di queste condizioni il p_0 non può essere zero.

Le condizioni (B) quando le (α) o (β) sono positive, e $\mathrm{sen}(\delta-\gamma)$ o $b\,c' - b'\,c$ sono pure positive.

Le condizioni (C) quando le espressioni (α) o (β) sono positive, e $\mathrm{sen}(\delta-\gamma)$ o $b\,c' - b'\,c$ sono negative, o quando, essendo zero le (α) o (β), le quantità $\mathrm{sen}(\delta-\gamma)$ o $b\,c' - b'\,c$ sono diverse da zero e sempre negative, o essendo zero anche queste, si ha $\lambda^2 \leq \alpha^2 + \beta^2$, o $a^2 + a'^2 \leq b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2$.

E riferendosi alla equazione di secondo grado:

$$(p_1 - i\,q_1)\gamma^2 + 2\,p_0\gamma + (p_1 + i\,q_1) = 0, \tag{γ}$$

le condizioni (A) corrispondono al caso in cui delle sue due radici una cade dentro e una cade fuori del cerchio di raggio uno; le condizioni (B) corrispondono al caso in cui le due radici cadono ambedue entro questo cerchio; e le condizioni (C) corrispondono al caso in cui esse cadono ambedue fuori del cerchio, o in cui una o tutte e due cadono sul cerchio, con questo che quando sul cerchio ne cada una sola l'altra debba cadere fuori sia preso quel valore pel quale $\frac{1}{p_0}\sqrt{p_0^2 - p_1^2 - q_1^2}$ ha la parte reale positiva; e cerchiamo di ridurre una funzione $\psi(z)$ che sia regolare e diversa da zero in un intorno sufficientemente piccolo del punto $z=0$ alla forma $p_0^2 - p_1^2 - q_1^2$, con p_0, p_1, e q_1 funzioni regolari di z in questo intorno.

Posto $p_0 = p_0(z)$, $p_1 = p_1(z)$, $q_1 = q_1(z)$ e $p_1 - i\,q_1 = \chi$, dovrà essere $p_0^2 - \chi(p_1 + i\,q_1) = \psi(z)$; quindi lasciando ora da parte il caso in cui χ fosse sempre zero nell'intorno del punto $z=0$, nel qual caso dovrebbe essere $p_0^2 = \psi(z)$, $p_1 = i\,q_1$, e osservando che fuori di questo caso, quando il detto intorno sia sufficientemente piccolo, χ non potrà essere zero che per $z=0$, si vede che si potrà sempre scrivere:

$$p_1 = \frac{p_0^2 - \psi(z) + \chi^2}{2\chi}, \qquad q_1 = \frac{p_0^2 - \psi(z) - \chi^2}{2\,i\,\chi}, \tag{10}$$

$$\frac{\chi^p}{\psi(z)^{\frac{2p+1}{2}}} = \frac{(-1)^p}{2\pi(2p)_p}\int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi}\,\frac{d\varphi}{(p_0 + p_1\cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}, \tag{11}$$

e in quest'ultima p_1 e q_1 saranno le funzioni di z date dalle precedenti (10), per modo che si potrà scrivere anche:

$$\frac{\chi^p}{\psi(z)^{\frac{2p+1}{2}}} = \frac{(-1)^p}{2\pi(2p)_p}\int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi}\,\frac{d\varphi}{\left(p_0 + \frac{p_0^2 - \psi(z)}{2\chi}\,e^{-i\varphi} + \frac{\chi}{2}e^{i\varphi}\right)^{p+1}}; \tag{12}$$

intendendo sempre in tutte queste formole che quando χ sia zero per $z=0$ i numeratori di p_1, q_1 e $p_0^2 - \psi(z)$ debbano pure esserlo, e i valori di p_1, $i\,q_1$ e $\frac{p_0^2 - \psi(z)}{2\chi}$ siano il limite comune $\frac{p_1(0) + i\,q_1(0)}{2}$ di queste quantità per $z=0$.

E in queste formole considerandovi come dato il $\psi(z)$, p_0 e χ rimarranno due funzioni arbitrarie di z che supporremo però sempre regolari esse

---

del cerchio; e talvolta invéce di fare le verifiche sulle espressioni (α) o (β) tornerà più comodo di farle direttamente sulle radici di questa equazione.

E resta sempre fuori il caso in cui una radice sia sul cerchio e l'altra dentro il cerchio, pel qual caso bisognerébbe richiedere che negli integrali della forma di quello che trovasi nel secondo membro della formola (9) l'esponente p fosse diverso da zero e intero, ma negativo.

pure nell'intorno del punto $z=0$, e tali che in quest'intorno le p_0, p_1, q_1 vengano a soddisfare alle indicate condizioni (A), ciò che porta che p_0 non debba mai essere zero, mentre χ potrà esserlo solo per $z=0$.

Ora, come abbiamo ricordato nella nota precedente, queste condizioni (A) esprimono che delle radici della equazione (γ), ovvero:

$$\chi\gamma^2+2p_0\gamma+\frac{p_0^2-\psi(z)}{\chi}=0, \tag{13}$$

una cade dentro del cerchio di raggio uno, e l'altra cade fuori; dunque poichè questa è una equazione della forma $f(z,\gamma)=0$ che definisce i due rami di una funzione γ di z che sono finiti e continui e si riuniscono soltanto quando la equazione stessa ha le due radici uguali cioè quando $\psi(z)=0$, così evidentemente se le condizioni (A) saranno soddisfatte dai valori $p_{0,0}$, $p_{1,0}$, $q_{1,0}$ che si avranno per p_0, p_1, q_1 per $z=0$, o (il che è lo stesso quando $\chi(0)$ non sia zero) per la equazione:

$$\chi(0)\gamma^2+2p_{0,0}\gamma+\frac{p_{0,0}^2-\psi(0)}{\chi(0)}=0, \tag{14}$$

cui si riduce la (13) per $z=0$, esse saranno soddisfatte anche in tutto un intorno c di $z=0$ sufficientemente piccolo, nel quale certamente (non potendo allora naturalmente essere uguali le radici della (13)) il $\psi(z)$ sarà sempre diverso da zero.

E quando $\chi(0)$ sia zero, nel qual caso una delle radici della (13) per $z=0$ viene ad essere infinita, allora se indichiamo con A il limite $p_1(0)+iq_1(0)$ di $\frac{p_0^2-\psi(z)}{\chi}$ per $z=0$, bisognerà che il rapporto $-\frac{A}{2p_{0,0}}$ che corrisponde all'altra radice abbia un modulo minore dell'unità.

Segue da ciò che per assicurarsi che le condizioni (A) siano soddisfatte, basterà studiare le espressioni (α) o (β) della nota precedente pel caso di $p_0=p_{0,0}$, $p_1=p_{1,0}$, $q_1=q_{1,0}$; o anche (il che per noi tornerà ora più comodo) verificare che le due radici:

$$\frac{-p_{0,0}+\sqrt{\psi(0)}}{\chi(0)},\qquad \frac{-p_{0,0}-\sqrt{\psi(0)}}{\chi(0)}, \tag{15}$$

della equazione (14) quando $\chi(0)$ non è zero cadono la prima dentro, e la seconda fuori del cerchio di raggio 1; e quando $\chi(0)$ sia zero bisognerà che cada entro il cerchio di raggio 1 la radice $-\frac{p_1(0)+iq_1(0)}{2p_{0,0}}$, o il limite di

$-\dfrac{p_0^2-\psi(z)}{2p_0\chi}$ per $z=0$; e in ogni caso dovendo il rapporto $\dfrac{\sqrt{\psi(0)}}{p_{0,0}}$ avere la parte reale positiva.

E se questo avverrà per la funzione data $\psi(z)$ e per le funzioni che saranno state scelte p_0 e χ, le formole (11) o (12) nelle quali p_1 e q_1 abbiano i valori (10) sussisteranno in tutto un intorno c del punto $z=0$ che avrà l'ampiezza di quello nel quale le condizioni stesse (A) continueranno ad essere soddisfatte.

E nel caso speciale in cui, senza che sia $\chi(0)=0$, nell'intorno del punto $z=0$, o anche soltanto in questo punto, si abbia $\pm\chi^2=p_0^2-\psi(z)$ (o il che è lo stesso $q_1=0$, o $p_1=0$), allora basterà assicurarsi che il rapporto $\dfrac{\sqrt{\psi(0)}}{p_{0,0}}$ abbia la parte reale positiva, e non occorrerà occuparsi delle radici (15); perchè, in questo caso, la prima delle stesse radici si potrà scrivere:

$$\varepsilon\sqrt{\frac{p_{0,0}-\sqrt{\psi(0)}}{p_{0,0}+\sqrt{\psi(0)}}}=\varepsilon\sqrt{\frac{1-\dfrac{1}{p_{0,0}}\sqrt{\psi(0)}}{1+\dfrac{1}{p_{0,0}}\sqrt{\psi(0)}}},$$

con $\varepsilon=\pm 1$, o $\varepsilon=\pm i$, e avrà evidentemente il modulo minore di uno; e la seconda, venendo ad essere l'inversa di questa all'infuori tutto al più del segno, avrà il modulo maggiore di uno.

D'altra parte poi, osservando che il trinomio $p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi$ che figura nella (11) è precisamente il valore che prende il primo membro della equazione (13) diviso per 2γ quando γ è sul cerchio di raggio uno, si vede subito che, se le condizioni suindicate saranno soddisfatte nel detto intorno c del punto $z=0$, esso è sempre diverso da zero per qualunque valore di φ, perchè allora le radici della stessa equazione (13) non cadono mai su quel cerchio; dunque la funzione:

$$\tau(z)=\frac{1}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}=\frac{1}{\left(p_0+\dfrac{p_0^2-\psi(z)}{2\chi}e^{-i\varphi}+\dfrac{\chi}{2}e^{i\varphi}\right)^{p+1}},\qquad(16)$$

in un intorno circolare c_1 del punto $z=0$, che potremo supporre *tutto interno* all'intorno c, sarà sviluppabile in serie di Cauchy $\sum\limits_0^\infty C_n(\varphi)\,z^n$, essendo:

$$C_n(\varphi)=\frac{\tau_n(0)}{\pi(n)}=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\tau(z)}{z^{n+1}}\,dz,$$

ove l'integrale è esteso al cerchio c_1.

Ora, se si indica con ρ_1 il raggio di questo cerchio c_1, e con M il massimo modulo di $\tau(z)$ entro il cerchio stesso per qualsiasi valore di φ, si vede subito che si avrà mod $C_n(\varphi) \leqq \frac{2\pi M}{\rho_1{}^n}$, e quindi la serie $\sum\limits_0^\infty C_n(\varphi) z^n$ che rappresenta $\tau(z)$ sarà convergente in ugual grado relativamente a φ per ogni valore speciale di z nell'*interno* di c_1, e ad essa in conseguenza potrà applicarsi l'integrazione termine a termine rispetto a φ.

Ne segue che la (11) o la (12) ci daranno la formola:

$$\frac{\chi^p}{\psi(z)^{\frac{2p+1}{2}}} = \frac{(-1)^p}{2\pi(2p)_p} \sum_0^\infty z^n \int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi} C_n(\varphi)\, d\varphi,$$

che corrisponde a una forma dello sviluppo di $\frac{\chi^p}{\psi(z)^{\frac{2p+1}{2}}}$ per potenze intere e positive di z in un intorno circolare del punto $z=0$ nel quale siano sempre soddisfatte le condizioni (A).

E poichè per qualsiasi funzione $F(z)$ che sia regolare nell'intorno del punto $z=0$, e per qualsiasi valore intero e positivo o nullo di p, è sempre possibile trovare infinite funzioni χ, $\psi(z)$ e p_0 regolari esse pure nell'intorno del punto $z=0$ e per le quali nello stesso intorno si abbia $\frac{\chi^p}{\psi(z)^{\frac{2p+1}{2}}} = F(z)$, e siano soddisfatte le solite condizioni (A), così si avrà evidentemente la formola seguente:

$$F(z) = \frac{(-1)^p}{2\pi(2p)_p} \sum_0^\infty z^n \int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi} C_n(\varphi)\, d\varphi, \tag{17}$$

che varrà per qualsiasi funzione $F(z)$ che sia regolare nell'intorno del punto $z=0$, per modo che a causa della arbitrarietà che resta nelle funzioni χ, $\psi(z)$, e p_0, e nel numero p, si hanno ora infinite espressioni che credo nuove per mezzo d'integrali definiti dei coefficienti degli sviluppi di una tale funzione $F(z)$ per potenze di z nell'intorno del solito punto $z=0$.

E si può aggiungere che quando, anzichè richiedere che le condizioni (A) si verifichino pel punto $z=0$, ci si contenti di trovarle verificate per ogni altro punto prossimo quanto si vuole a $z=0$ senza occuparci di ciò che accade in questo punto, allora questi risultati si estendono anche alle funzioni $F(z)$ che nel punto $z=0$ hanno una singolarità polare o una singolarità essenziale isolata, intendendo allora che lo sviluppo di $\tau(z)$ debba essere quello di Laurent e che la serie che figurerà in $F(z)$ sia di potenze sempre intere ma positive o negative di z.

8. Particolarizzando la funzione $F(z)$ e ponendo ogni volta condizioni speciali per le funzioni χ, $\psi(z)$ e p_0 e pel numero p, in modo però che restino sempre soddisfatte le condizioni (A), si ottengono espressioni speciali notevoli pei coefficienti dello sviluppo di $F(z)$; e noi volendo valerci di questi risultati per trovare altre forme delle funzioni $Z_{\mu,n}$ e Z_n che considerammo nel § 4, ci fermeremo al caso più semplice di $F(z) = \lambda \chi^p (a_0 z^2 + a_1 z + a_2)^\mu$, essendo λ una quantità costante, e intendendo fissato il valore a_2^μ da prendersi per $(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)^\mu$, per $z = 0$, e lasciando per ora indeterminata la funzione χ, purchè sempre regolare nell'intorno del punto $z = 0$.

Supponendo dunque:

$$F(z) = \lambda \chi^p (a_0 z^2 + a_1 z + a_2)^\mu, \tag{18}$$

si vede che si avrà:

$$\psi(z) = \lambda^{-\frac{2}{2p+1}} (a_0 z^2 + a_1 z + a_2)^{-\frac{2\mu}{2p+1}}, \tag{19}$$

intendendo ora fissato, oltre al valore da prendersi per a_2^μ come già abbiamo detto, anche quello da prendersi per $\sqrt{\psi(0)}$, o per $\lambda^{-\frac{1}{2p+1}} a_2^{-\frac{\mu}{2p+1}}$, o anche per $\lambda^{-\frac{1}{2p+1}}$ e $a_2^{-\frac{\mu}{2p+1}}$ separatamente; e ora dalle (17) avremo:

$$(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)^\mu = \frac{(-1)^p}{\lambda \chi^p \, 2\pi (2p)_p} \sum_0^\infty z^n \int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi} C_n(\varphi)\, d\varphi, \tag{20}$$

essendo $C_n(\varphi)$ il coefficiente di z^n nello sviluppo di Cauchy nell' intorno del punto $z = 0$ per la funzione (16) cioè:

$$\frac{1}{\left(p_0 + \frac{p_0^2 - \psi(z)}{2\chi} e^{-i\varphi} + \frac{\chi}{2} e^{i\varphi}\right)^{p+1}}, \tag{21}$$

nella quale $\psi(z)$ abbia il valore (19), e p_0 e χ siano scelti in modo che la quantità:

$$p_{0,0} \lambda^{\frac{1}{2p+1}} a_2^{\frac{\mu}{2p+1}}, \tag{22}$$

abbia la parte reale positiva, e che, quando $\chi(0)$ non è zero, le due radici

(15) cioè:

$$-\frac{p_{0,0}-\lambda^{-\frac{1}{2p+1}}a_2^{-\frac{\mu}{2p+1}}}{\chi(0)}, \qquad -\frac{p_{0,0}+\lambda^{-\frac{1}{2p+1}}a_2^{-\frac{\mu}{2p+1}}}{\chi(0)}, \tag{23}$$

abbiano la prima il modulo minore di uno e la seconda il modulo maggiore di uno, e quando $\chi(0)$ è zero il limite per $z=0$ di:

$$\frac{p_0^2-\lambda^{-\frac{2}{2p+1}}(a_0 z^2+a_1 z+a_2)^{-\frac{2\mu}{2p+1}}}{2\chi p_0}, \tag{24}$$

cioè del rapporto del coefficiente di $e^{-i\varphi}$ nella (21) al primo termine p_0, abbia il modulo inferiore ad uno; e basterà verificare soltanto la condizione relativa alla espressione (22) quando $\chi(0)$ non sia zero, e si abbia:

$$\pm\chi^2(0)=p^2_{0,0}-\chi^{-\frac{2}{2p+1}}a_2^{-\frac{2\mu}{2p+1}}.$$

9. E così in particolare per $p=0$ si avrà:

$$Z_{\mu,n}=\frac{1}{2\pi\lambda}\int_0^{2\pi}C_n(\varphi)\,d\varphi, \tag{25}$$

essendo $C_n(\varphi)$ il coefficiente di z^n nello sviluppo di Cauchy per potenze intere e positive di z per la funzione:

$$\frac{1}{p_0+\dfrac{p_0^2-\psi(z)}{2\chi}e^{-i\varphi}+\dfrac{\chi}{2}e^{i\varphi}}, \tag{26}$$

dove $\psi(z)$ è dato dalla formola:

$$\psi(z)=\frac{1}{\lambda^2}(a_0 z^2+a_1 z+a_2)^{-2\mu}, \tag{27}$$

e la funzione χ può prendersi comunque purchè sempre regolare nell'intorno di $z=0$, e purchè siano soddisfatte le altre condizioni testè indicate rispetto alle quantità (22), e (23) o (24).

E se si ammette che p possa anche essere diverso da zero (essendo però sempre positivo, allora quando si supponga $\chi=\lambda_0 z^s$ (λ_0 cost. e s intero e positivo, o nullo) avremo:

$$Z_{\mu,n-ps}=\frac{(-1)^p}{\lambda\lambda_0^p\,2\pi\,(2p)_p}\int_0^{2\pi}e^{-ip\varphi}C_n(\varphi)\,d\varphi, \tag{28}$$

per $n \geqq p\,s$, e per $n < p\,s$ avremo invece $\int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi}\,C_n(\varphi)\,d\varphi = 0$, essendo $C_n(\varphi)$ il coefficiente di z^n nello sviluppo solito di Cauchy per la funzione:

$$\frac{1}{\left(p_0 + \frac{p_0^2 - \psi(z)}{2\lambda_0 z^s}\,e^{-i\varphi} + \frac{\lambda_0 z^s}{2}\,e^{i\varphi}\right)^{p+1}}, \tag{29}$$

dove $\psi(z)$ è dato dalle formole (19), cioè:

$$\psi(z) = \lambda^{-\frac{2}{2p+1}}\,(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)^{-\frac{2\mu}{2p+1}}, \tag{30}$$

e si suppongono soddisfatte le altre condizioni indicate sopra per le quantità (22), e (23) o (24).

E naturalmente quest'ultimo caso per $p = 0$ rientra senz'altro nel caso precedente.

10. Fermandoci sulle espressioni così trovate (25) e (28) per le funzioni $Z_{\mu,n}$ e $Z_{\mu,n-ps}$, osserviamo che, a seconda dei valori che si sceglieranno pel numero p e per la funzione p_0, e nel caso di $p = 0$ anche della funzione χ, si avranno altrettante forme diverse, per mezzo d'integrali definiti, delle stesse funzioni $Z_{\mu,n}$ e $Z_{\mu,n-ps}$; ma queste saranno assai complicate.

Sono però specialmente notevoli, e anche abbastanza semplici quelle che si ottengono quando la scelta indicata del numero p e delle funzioni p_0 e χ nei rispettivi casi sono fatte in modo che le espressioni che figurano nei denominatori delle funzioni (26) o (29) da svilupparsi in serie di Cauchy siano funzioni di primo grado in z, e noi tratteremo qui separatamente i vari casi che possono presentarsi.

11. Incominciando dal caso di $p = 0$, nel quale la espressione da considerarsi è la (26), se prenderemo:

$$p_0 = \alpha z + \beta, \qquad \chi = \gamma z + \delta,$$

con α, β, γ e δ quantità costanti delle quali la seconda β sia anche diversa da zero, perchè $p_{0,0}$ non può essere zero, si vede chiaro che, onde anche il coefficiente $\frac{p_0^2 - \psi(z)}{2\chi}$ che figura nella (26) possa essere una funzione di primo grado mentre $\psi(z)$ è dato dalla (27), bisognerà essere nel caso di $\mu = -\frac{1}{2}$, e la quantità $p_0^2 - \psi(z) = (\alpha z + \beta)^2 - \frac{1}{\lambda^2}(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)$ dovrà essere divisibile per $\gamma z + \delta$ quando γ sia diverso da zero; mentre se $\gamma = 0$ dovrà essere $\alpha^2 = \frac{a_0}{\lambda^2}$.

Lasciando ora di trattare quest'ultimo caso di $\gamma = 0$, perchè, non potendo allora essere $\delta = 0$, corrisponde a $\chi = \text{cost.}$ e rientra nel caso che tratteremo poi di $\chi = \lambda_0 z^s$, con p zero o intero e positivo qualsiasi (poichè non vi sarà che da supporre allora $s = 0$, $p = 0$), si vede dunque che, con γ diverso da zero, la sola condizione che avremo sarà quella che $p_0^2 - \psi(z)$ si annulli per $z = -\frac{\delta}{\gamma}$, cioè sia:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^2(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 - (a_0\delta^2 - a_1\gamma\delta + a_2\gamma^2) = \\ &= (\lambda^2\alpha^2 - a_0)\delta^2 - (2\lambda^2\alpha\beta - a_1)\gamma\delta + (\lambda^2\beta^2 - a_2)\gamma^2 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

e quando questa condizione sia soddisfatta avremo:

$$\frac{p_0^2 - \psi(z)}{2\chi} = \frac{1}{2\lambda^2\gamma^2}\left\{(\lambda^2\alpha^2 - a_0)\gamma z + (2\lambda^2\alpha\beta - a_1)\gamma - (\lambda^2\alpha^2 - a_0)\delta\right\},$$

e per δ diverso da zero, a causa delle precedenti (31), si potrà scrivere:

$$\frac{p_0^2 - \psi(z)}{2\chi} = \frac{\lambda^2\alpha^2 - a_0}{2\lambda^2\gamma} z + \frac{\lambda^2\beta^2 - a_2}{2\lambda^2\delta},$$

mentre per $\delta = 0$, nel qual caso per la (31) si avrà $\lambda^2\beta^2 = a_2$, sarà:

$$\frac{p_0^2 - \psi(z)}{2\chi} = \frac{\lambda^2\alpha^2 - a_0}{2\lambda^2\gamma} z + \frac{2\lambda^2\alpha\beta - a_1}{2\lambda^2\gamma}.$$

Ne segue che *quando δ non è zero* la funzione (26) diverrà:

$$\frac{\lambda}{\lambda\beta + \frac{\lambda^2\beta^2 - a_2}{2\lambda\delta}e^{-i\varphi} + \frac{\lambda\delta}{2}e^{i\varphi} + \left[\lambda\alpha + \frac{\lambda^2\alpha^2 - a_0}{2\lambda\gamma}e^{-i\varphi} + \frac{\lambda\gamma}{2}e^{i\varphi}\right]z},$$

e il suo sviluppo secondo la solita serie di Cauchy, quando z si mantenga in un intorno sufficientemente piccolo del punto $z = 0$, sarà il seguente:

$$\lambda \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\left[\lambda \alpha + \frac{\lambda^2 \alpha^2 - a_0}{2 \lambda \gamma} e^{-i\varphi} + \frac{\lambda \gamma}{2} e^{i\varphi}\right]^n}{\left[\lambda \beta + \frac{\lambda^2 \beta^2 - a_2}{2 \lambda \delta} e^{-i\varphi} + \frac{\lambda \delta}{2} e^{i\varphi}\right]^{n+1}} z^n ,$$

e quindi sarà:

$$Z_{-\frac{1}{2}, n} = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left[\alpha + \frac{\alpha^2 - a_0}{2\gamma} e^{-i\varphi} + \frac{\gamma}{2} e^{i\varphi}\right]^n}{\left[\beta + \frac{\beta^2 - a_2}{2\delta} e^{-i\varphi} + \frac{\delta}{2} e^{i\varphi}\right]^{n+1}} d\varphi , \tag{32}$$

quando per semplicità si mutino α, β, γ, δ in $\frac{\alpha}{\lambda}$, $\frac{\beta}{\lambda}$, $\frac{\gamma}{\lambda}$, $\frac{\delta}{\lambda}$, ciò che equivale a supporre senz'altro $\lambda = 1$; e in queste le α, β, γ, δ sono quantità costanti rispetto alle variabili z e φ (ma possono però dipendere da altre variabili), e delle quali le ultime tre sono diverse da zero, mentre tutte soddisfano alla condizione:

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha \delta - \beta \gamma)^2 - (a_0 \delta^2 - a_1 \delta \gamma + a_2 \gamma^2) = \\ &= (\alpha^2 - a_0) \delta^2 - (2 \alpha \beta - a_1) \delta \gamma + (\beta^2 - a_2) \gamma^2 = 0 , \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

cui ora si riduce la (31), e all'altra che le due solite radici:

$$-\frac{\beta - \sqrt{a_2}}{\delta}, \qquad -\frac{\beta + \sqrt{a_2}}{\delta}, \tag{34}$$

cui ora si riducono le (23) abbiano le prime il modulo minore di uno e la seconda il modulo maggiore di uno, e inoltre, in relazione al valore preso per $\sqrt{a_2}$ come valore iniziale di $\sqrt{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}$ per $z = 0$, il segno di β sia preso in modo che il rapporto $\frac{\sqrt{a_2}}{\beta}$ abbia la parte reale positiva. E nel caso particolare in cui, sempre non essendo $\delta = 0$, si abbia $\pm \delta^2 = \beta^2 - \alpha^2$ allora non importerà occuparsi delle radici (34), ma basterà assicurarsi che resti soddisfatta la condizione che il rapporto $\frac{\sqrt{a_2}}{\beta}$ abbia la sua parte reale positiva.

Nel caso poi di $\delta = 0$ osservando prima che per la (31) o (33) si avrà $\beta^2 = a_2$, e quindi $\beta = \sqrt{a_2}$ perchè il rapporto $\frac{\sqrt{a_2}}{\beta}$ deve ancora, come nel caso precedente, soddisfare alla condizione di avere la parte reale positiva, e avendo riguardo ai valori dati sopra per $\frac{p_0^2 - \psi(z)}{2\chi}$ si vede subito che per avere il valore corrispondente di $Z_{-\frac{1}{2}, n}$ basta nella (32) sopprimere nel denominatore il termine $\frac{\delta}{2} e^{i\varphi}$, e al rapporto $\frac{\beta^2 - \alpha_2}{\delta}$ che si presenterebbe sotto la forma $\frac{0}{0}$ sostituire l'altro $\frac{2\alpha\beta - a_1}{2\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}\left(\alpha - \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)$; e si avrà quindi:

$$Z_{-\frac{1}{2}, n} = \frac{(-1)^n}{2\pi (\sqrt{a_2})^{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\left[\alpha + \frac{\alpha^2 - a_0}{2\gamma} e^{-i\varphi} + \frac{\gamma}{2} e^{i\varphi}\right]^n}{\left[1 + \frac{1}{\gamma}\left(\alpha - \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right) e^{-i\varphi}\right]^{n+1}} d\varphi, \tag{35}$$

dove α e γ sono costanti qualsiansi per le quali si ha soltanto la condizione che γ sia diversa da zero, e il limite per $z = 0$ della espressione cui ora si riduce la (24), cioè il coefficiente $\frac{1}{\gamma}\left(\alpha - \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)$ di $e^{-i\varphi}$ nel denominatore abbia il modulo minore di uno.

12. Le formole trovate (32) e (35) col particolarizzare le costanti che vi figurano α, β, γ, δ danno infinite espressioni per integrali definiti della funzione $Z_{-\frac{1}{2}, n}$ che per $a_0 = a_2 = 1$, $a_1 = -2\xi$ si riduce alla solita funzione $X_n(\xi)$ di Legendre; e alcune di queste formole sono notevolissime.

Così nel caso di δ diverso da zero, cioè della (32), supponendo $\alpha^2 = a_0$, con che la (33) ci dà $\gamma = \frac{2\alpha\beta - a_1}{\beta^2 - a_2}\delta = \left(\beta - \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}\right)\frac{2\delta\sqrt{a_0}}{\beta^2 - a_2}$, dalla (32) stessa avremo la formola:

$$Z_{-\frac{1}{2}, n} = \frac{(-1)^n (\sqrt{a_0})^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left[1 + \left(\beta - \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}\right)\frac{\delta}{\beta^2 - a_2} e^{i\varphi}\right]^n}{\left[\beta + \frac{\beta^2 - a_2}{2\delta} e^{-i\varphi} + \frac{\delta}{2} e^{i\varphi}\right]^{n+1}} d\varphi, \tag{36}$$

nella quale le costanti β e δ dovranno essere diverse da zero, e soddisfare alla solita condizione che delle due radici (34), cioè $-\frac{\beta - \sqrt{a_2}}{\delta}$, $-\frac{\beta + \sqrt{a_2}}{\delta}$ la prima abbia il modulo minore di uno, e la seconda lo abbia maggiore di uno, supponendo sempre che il rapporto $\frac{\sqrt{a_2}}{\beta}$ abbia la parte reale positiva. E supponendo che sia anche $\pm \delta^2 = \beta^2 - a_2$, di qui avremo le formole:

$$\left.\begin{aligned} Z_{-\frac{1}{2}, n} &= \frac{(-1)^n (\sqrt{a_0})^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left[1 + \left(\beta - \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}\right) \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{\beta^2 - a_2}}\right]^n}{[\beta + \sqrt{\beta^2 - a_2}\cos\varphi]^{n+1}} d\varphi, \\ Z_{-\frac{1}{2}, n} &= \frac{(-1)^n (\sqrt{a_0})^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left[1 + i\left(\beta - \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}\right) \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{\beta^2 - a_2}}\right]^n}{[\beta - \sqrt{\beta^2 - a_2}\,\mathrm{sen}\,\varphi]^{n+1}} d\varphi, \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

nella quale per la costante β si ha la solita condizione che il rapporto $\frac{\sqrt{a_2}}{\beta}$ abbia la sua parte reale positiva.

Supponendo invece $\beta^2 = a_2$ e quindi $\beta = \sqrt{a_2}$, senza che sia $\delta = 0$ con che la (33) ci dà $\delta = \frac{2\alpha\beta - a_1}{\alpha^2 - a_0}\gamma = \left(\alpha - \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\frac{2\gamma\sqrt{a_2}}{\alpha^2 - a_0}$, dalla (32) avremo la formola:

$$Z_{-\frac{1}{2}, n} = \frac{(-1)^n}{2\pi(\sqrt{a_2})^{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\left(\alpha + \frac{\alpha^2 - a_0}{2\gamma} e^{-i\varphi} + \frac{\gamma}{2} e^{i\varphi}\right)^n}{\left[1 + \left(\alpha - \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\frac{\gamma}{\alpha^2 - a_0} e^{i\varphi}\right]^{n+1}} d\varphi, \quad (38)$$

nella quale per le costanti α e γ si ha soltanto la condizione che γ sia diversa da zero, e che la seconda delle due radici (34) (la prima essendo ora uguale a zero) abbia il modulo maggiore di uno, cioè sia:

$$\mathrm{mod}\,\gamma < \mathrm{mod}\,\frac{\alpha^2 - a_0}{\alpha - \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}};$$

per modo che quando si prenda $\pm \gamma^2 = \alpha^2 - a_0$ si troveranno le altre:

$$\left.\begin{aligned} Z_{-\frac{1}{2}, n} &= \frac{(-1)^n}{2\pi(\sqrt{a_2})^{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - a_0}\cos\varphi)^n}{\left[1 + \left(\alpha - \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{\alpha_2 - a_0}}\right]^{n+1}} d\varphi, \\ Z_{-\frac{1}{2}, n} &= \frac{(-1)^n}{2\pi(\sqrt{a_2})^{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - a_0}\,\mathrm{sen}\,\varphi)^n}{\left[1 + i\left(\alpha - \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{\alpha^2 - a_0}}\right]^{n+1}} d\varphi, \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

che varranno quando sia $\mathrm{mod}\,\dfrac{\alpha - \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}}{\sqrt{\alpha^2 - a_0}} < 1$.

E queste per $\alpha = 0$ si riducono alle altre più semplici:

$$\left.\begin{aligned} Z_{\frac{1}{2}, n} &= \frac{(-i\sqrt{a_0})^n}{2\pi(\sqrt{a_2})^{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^n\varphi}{\left(1 + i\,\dfrac{a_1}{2\sqrt{a_0}\sqrt{a_2}}\,e^{i\varphi}\right)^{n+1}}\, d\varphi\,, \\ Z_{-\frac{1}{2}, n} &= \frac{(i\sqrt{a_0})^n}{2\pi(\sqrt{a_2})^{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^n\varphi}{\left(1 + \dfrac{a_1}{2\sqrt{a_0}\sqrt{a_2}}\,e^{i\varphi}\right)^{n+1}}\, d\varphi\,, \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

nelle quali bisognerà supporre che sia $\bmod \frac{a_1^2}{4a_0a_2} < 1$; mentre per $\alpha = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}$ le stesse (39) danno le due:

$$\left.\begin{aligned} Z_{-\frac{1}{2}, n} &= \frac{(-1)^n}{2\pi(\sqrt{a_2})^{2n+1}} \int_0^{2\pi} (a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}\cos\varphi)^n\, d\varphi\,, \\ Z_{-\frac{1}{2}, n} &= \frac{(-1)^n}{2\pi(\sqrt{a_2})^{2n+1}} \int_0^{2\pi} (a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}\operatorname{sen}\varphi)^n\, d\varphi\,, \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

che valgono qualunque siano i coefficienti a_0, a_1 e a_2.

Ponendoci invece nel caso di $\delta = 0$, cioè della (35), e supponendovi $\pm\gamma^2 = \alpha^2 - a_0$ si ottengono due formole che si riducono subito a combinare colle (39) quando vi si cambi φ in $2\pi - \varphi$, e che valgono sotto le stesse condizioni; talchè anche il caso di $\delta = 0$ ci riporta alla (39), (40) e (41) che trovammo quando supponevamo δ diverso da zero.

Supponendo invece nella (35) $\alpha^2 = a_0$, o $\alpha = \sqrt{a_0}$, si trova la formola:

$$Z_{-\frac{1}{2}, n} = \frac{(-1)^n}{2\pi(\sqrt{a_2})^{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\left(\sqrt{a_0} + \frac{\gamma}{2}e^{i\varphi}\right)^n}{\left[1 + \dfrac{1}{2\gamma\sqrt{a_2}}(2\sqrt{a_0}\sqrt{a_2} - a_1)\,e^{-i\varphi}\right]^{n+1}}\, d\varphi\,, \quad (42)$$

che vale sempre quando il coefficiente di $e^{i\varphi}$ nel denominatore ha il modulo minore di uno, cioè quando:

$$\bmod\gamma > \bmod \frac{2\sqrt{a_0}\sqrt{a_2} - a_1}{2\sqrt{a_2}}\,,$$

ovvero:

$$\bmod\gamma > \bmod\left(\sqrt{a_0} - \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right).$$

E si noterà una volta per tutte che il valore di $\sqrt{a_2}$ che figura in queste formole s'intende sempre che sia quello che viene scelto come valore iniziale di $\sqrt{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}$ per $z = 0$, mentre per gli altri radicali che vi figurano cioè $\sqrt{a_0}$, $\sqrt{\beta^2 - a_2}, \ldots$ potremo prendere sempre quello dei loro valori che più ci piacerà.

13. Tornando ora alle considerazioni generali, completeremo le nostre ricerche attuali relative ai casi nei quali i denominatori delle espressioni (26) o (29) vengono di 1.° grado in z, trattando cioè ora il caso di $\chi = \lambda_0 z^s$, con λ_0 cost. e $s = 0$, o $s = 1$, e p nullo o intero e positivo qualsiasi; con che troveremo varie espressioni per integrali definiti non solo per la funzione $Z_{-\frac{1}{2}, n}$ come nel caso precedente, ma per tutte quelle più generali $Z_{-p-\frac{1}{2}, n}$ che corrispondono a qualsiasi valore nullo, o intero e positivo di p.

14. Il caso di $s = 0$ (che per $p = 0$ si riduce appunto a quello lasciato da parte di $\gamma = 0$ negli studi del § 11) si tratta subito nel modo seguente:

Si osserva cioè che essendo $s = 0$, e avendosi ancora $p_0 = \alpha z + \beta$, con α e β costanti e β diversa da zero, onde la funzione che figura nel denominatore della espressione (29) divenga del 1.° grado in z bisognerà che si abbia $-\frac{2\mu}{2p+1} = 1$, ovvero $\mu = -p - \frac{1}{2}$, e $\alpha^2 = \lambda^{-\frac{2}{2p+1}} a_0$, ovvero $\alpha = \lambda^{-\frac{1}{2p+1}} \sqrt{a_0}$ essendo $\sqrt{a_0}$ uno qualsiasi dei due valori di questo radicale; e allora la espressione (29) stessa diverrà:

$$\frac{1}{\left[\beta + \frac{(\beta^2 - \lambda^{-\frac{2}{2p+1}} a_2)}{2\lambda_0} e^{-i\varphi} + \frac{\lambda_0}{2} e^{i\varphi} + \left[\alpha + \frac{(2\alpha\beta - \lambda^{-\frac{2}{2p+1}} a_1)}{2\lambda_0} e^{-i\varphi}\right] z\right]^{p+1}}$$

e il suo sviluppo in serie di Cauchy sarà:

$$\sum_0^\infty (-p-1)_n \frac{\left(\alpha + \frac{2\alpha\beta - \lambda^{-\frac{2}{2p+1}} a_1}{2\lambda_0} e^{-i\varphi}\right)^n}{\left(\beta + \frac{\beta^2 - \lambda^{-\frac{2}{2p+1}} a_2}{2\lambda_0} e^{-i\varphi} + \frac{\lambda_0}{2} e^{i\varphi}\right)^{n+p+1}} z^n;$$

e quindi per la (28) avremo la formola:

$$
\left.\begin{aligned}
&Z_{-p-\frac{1}{2},\, n} = \\
&= (-1)^{n+p}\,\frac{\pi(p)\pi(n+p)}{\pi(n)\pi(2p)}\,\frac{\lambda^{-\frac{n}{2p+1}}(\sqrt{a_0})^n}{2\pi\lambda\lambda_0{}^p}\int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi}\,\frac{\left(1+\dfrac{\beta-\lambda^{-\frac{1}{2p+1}}\dfrac{a_1}{2\sqrt{a_0}}\,e^{-i\varphi}}{\lambda_0}\right)^n}{\left(\beta+\dfrac{\beta^2-\lambda^{-\frac{2}{2p+1}}a_2}{2\lambda_0}\,e^{-i\varphi}+\dfrac{\lambda_0}{2}\,e^{i\varphi}\right)^{n+p+1}}\,d\varphi,
\end{aligned}\right\} \tag{43}
$$

nella quale β, λ e λ_0 siano costanti diverse da zero, e tali che le solite radici (23), cioè:

$$
-\frac{\beta-\lambda^{-\frac{2}{2p+1}}\sqrt{a_2}}{\lambda_0}, \qquad -\frac{\beta+\lambda^{-\frac{2}{2p+1}}\sqrt{a_2}}{\lambda_0}, \tag{44}
$$

abbiano la prima il modulo minore di uno, e la seconda il modulo maggiore di uno, e il rapporto $\dfrac{\lambda^{-\frac{1}{2p+1}}\sqrt{a_2}}{\beta}$ abbia la parte reale positiva.

E al solito quando sia $\pm\lambda_0{}^2 = \beta^2 - \lambda^{-\frac{2}{2p+1}}a_2$, nel qual caso si avrà:

$$
\left.\begin{aligned}
&Z_{-p-\frac{1}{2},\, n} = \\
&= (-1)^{n+p}\,\frac{\pi(p)\pi(n+p)}{\pi(n)\pi(2p)}\,\frac{\lambda^{-\frac{n}{2p+1}}(\sqrt{a_0})^n}{2\pi\lambda\lambda_0{}^p}\int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi}\,\frac{\left[1+\left(\beta-\lambda^{-\frac{1}{2p+1}}\dfrac{a_1}{2\sqrt{a_0}}\right)\dfrac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{\beta^2-\lambda^{-\frac{2}{2p+1}}a_2}}\right]^n}{\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\lambda^{-\frac{2}{2p+1}}a_2}\cos\varphi\right)^{n+p+1}}\,d\varphi,\\
&Z_{-p-\frac{1}{2},\, n} = \\
&= (-1)^{n+p}\,\frac{\pi(p)\pi(n+p)}{\pi(n)\pi(2p)}\,\frac{\lambda^{-\frac{n}{2p+1}}(\sqrt{a_0})^n}{2\pi\lambda\lambda_0{}^p}\int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi}\,\frac{\left[1-i\left(\beta-\lambda^{-\frac{1}{2p+1}}\dfrac{a_1}{2\sqrt{a_0}}\right)\dfrac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{\beta^2-\lambda^{-\frac{2}{2p+1}}a_2}}\right]^n}{\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\lambda^{-\frac{2}{2p+1}}a_2}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)^{n+p+1}}\,d\varphi,
\end{aligned}\right\} \tag{45}
$$

non occorrerà occuparsi delle radici (44) ma basterà assicurarsi che il rapporto $\frac{\lambda^{-\frac{1}{2p+1}}\sqrt{a_2}}{\beta}$ ha la sua parte reale positiva.

E più particolarmente ancora se sarà anche: $\beta = \lambda^{-\frac{1}{2p+1}} \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}$, e quindi $\pm \lambda_0^2 = \lambda^{-\frac{2}{2p+1}} \frac{a_1^2 - 4\,a_0\,a_2}{4\,a_0}$ avremo le formole più semplici:

$$
\left.
\begin{aligned}
& Z_{-p-\frac{1}{2},\,n} = \\
& = (-1)^{n+p} \frac{\pi(p)\,\pi(n+p)}{\pi(n)\,\pi(2p)} \frac{2^p (\sqrt{a_0})^{2n+2p+1}}{2\,\pi\,(\sqrt{a_1^2 - 4\,a_0\,a_2})^p} \int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi} \frac{d\varphi}{\left(\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4\,a_0\,a_2}\cos\varphi\right)^{n+p+1}}, \\
& Z_{-p-\frac{1}{2},\,n} = \\
& = (-1)^{n} \frac{\pi(p)\,\pi(n+p)}{\pi(n)\,\pi(2p)} \frac{2^p\, i^p (\sqrt{a_0})^{2n+2p+1}}{2\,\pi\,(\sqrt{a_1^2 - 4\,a_0\,a_2})^p} \int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi} \frac{d\varphi}{\left(\frac{a_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4\,a_0\,a_2}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)^{n+p+1}},
\end{aligned}
\right\} \quad (46)
$$

nelle quali ora $\sqrt{a_0}$ in conseguenza del valore che sarà stato scelto per $\sqrt{a_2}$ dovrà intendersi preso in modo che il rapporto $\frac{a_1}{2\sqrt{a_0}\sqrt{a_2}}$ abbia la sua parte reale positiva.

Supponendo $p = 0$ si hanno di qui le formole molto più semplici che corrispondono al caso di $\gamma = 0$ che fu escluso nel § 11. Così ad es.: dalle (46) abbiamo le due:

$$
\left.
\begin{aligned}
Z_{-\frac{1}{2},\,n} &= \frac{(-1)^n (\sqrt{a_0})^{2n+1}}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4\,a_0\,a_2}\cos\varphi\right)^{n+1}}, \\
Z_{-\frac{1}{2},\,n} &= \frac{(-1)^n (\sqrt{a_0})^{2n+1}}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(\frac{a_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4\,a_0\,a_2}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)^{n+1}},
\end{aligned}
\right\} \quad (47)
$$

le quali richiedono solo che il rapporto $\frac{a_1}{2\sqrt{a_0}\sqrt{a_2}}$ abbia la sua parte reale positiva.

15. Resta ora da considerarsi il caso di $s=1$, o di $\chi=\lambda_0 z$.

In questo caso, essendo al solito $p_0=\alpha z+\beta$, perchè la funzione che figura nel denominatore della (29) possa essere di primo grado bisognerà che si abbia ancora $\mu=-p-\frac{1}{2}$, e che sia $\beta^2=\lambda^{-\frac{2}{2p+1}}a_2$, ciò che, per la condizione che il rapporto $\frac{\sqrt{\psi(0)}}{\beta}$ abbia la parte reale positiva, porterà che debba prendersi $\beta=\lambda^{-\frac{1}{2p+1}}\sqrt{a_2}$, dove il valore di $\sqrt{a_2}$ sarà quello che sarà stato scelto.

La espressione (29) diverrà dunque ora:

$$\frac{1}{\left[\beta+\frac{2\alpha\beta-\lambda^{-\frac{2}{2p+1}}a_1}{2\lambda_0}e^{-i\varphi}+\left(\alpha+\frac{\alpha^2-\lambda^{-\frac{2}{2p+1}}a_0}{2\lambda_0}e^{-i\varphi}+\frac{\lambda_0}{2}e^{i\varphi}\right)z\right]^{p+1}},$$

e il suo sviluppo in serie di Cauchy sarà:

$$\sum_0^\infty(-p-1)_n\frac{\left[\alpha+(\alpha^2-\lambda^{-\frac{2}{2p+1}}a_0)\frac{e^{-i\varphi}}{2\lambda_0}+\frac{\lambda_0}{2}e^{i\varphi}\right]^n}{\left[\beta+(2\alpha\beta-\lambda^{-\frac{2}{2p+1}}a_1)\frac{e^{-i\varphi}}{2\lambda_0}\right]^{n+p+1}}z^n;$$

e quindi per la (28) per $n\geqq p$ avremo la formola:

$$\left.\begin{aligned}&Z_{-p-\frac{1}{2},\,n-p}=\\&=(-1)^{n+p}\frac{\pi(p)\pi(n+p)}{\pi(n)\pi(2p)}\frac{\lambda^{\frac{n+p+1}{2p+1}}}{2\pi\lambda\lambda_0^{p}(\sqrt{a_2})^{n+p+1}}\int_0^{2\pi}e^{-ip\varphi}\frac{\left[\alpha+(\alpha^2-\lambda^{-\frac{2}{2p+1}}a_0)\frac{e^{-i\varphi}}{2\lambda_0}+\frac{\lambda_0}{2}e^{i\varphi}\right]^n}{\left[1+\left(\alpha-\lambda^{-\frac{1}{2p+1}}\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\frac{e^{-i\varphi}}{\lambda_0}\right]^{n+p+1}}d\varphi,\end{aligned}\right\}\qquad(48)$$

e per $n<p$ avremo l'altra:

$$\int_0^{2\pi}e^{-ip\varphi}\frac{\left[\alpha+(\alpha^2-\lambda^{-\frac{2}{2p+1}}a_0)\frac{e^{-i\varphi}}{2\lambda_0}+\frac{\lambda_0}{2}e^{i\varphi}\right]^n}{\left[1+\left(\alpha-\lambda^{-\frac{1}{2p+1}}\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\frac{e^{-i\varphi}}{\lambda_0}\right]^{n+p+1}}d\varphi=0,\qquad(49)$$

le quali per essere ora $\chi(0)=0$ varranno quando il limite per $z=0$ della espressione cui si riduce ora la (24) cioè il coefficiente $\dfrac{\alpha-\lambda^{-\frac{1}{2p+1}}\dfrac{a_1}{2\sqrt{a_2}}}{\lambda_0}$ di $e^{-i\varphi}$ nel denominatore abbia il modulo minore di uno.

E cambiando n in $n+p$ la (48) potrà scriversi:

$$
\left.\begin{aligned}
&Z_{-p-\frac{1}{2},\,n}= \\
&=(-1)^n\frac{\pi(p)\pi(n+2p)}{\pi(n+p)\pi(2p)}\,\frac{\lambda^{\frac{n}{2p+1}}}{2\pi\lambda_0^{\,p}(\sqrt{a_2})^{n+2p+1}}\int_0^{2\pi}e^{-ip\varphi}\frac{\left[\alpha+(\alpha^2-\lambda^{-\frac{2}{2p+1}}a_0)\dfrac{e^{-i\varphi}}{2\lambda_0}+\dfrac{\lambda_0}{2}e^{i\varphi}\right]^{n+p}}{\left[1+\left(\alpha-\lambda^{-\frac{1}{2p+1}}\dfrac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\dfrac{e^{-i\varphi}}{\lambda_0}\right]^{n+2p+1}}\,d\varphi\,.
\end{aligned}\right\}\quad(50)
$$

E quando sia $\pm\lambda_0^2=\alpha^2-\lambda^{-\frac{2}{2p+1}}a_0$, questa darà luogo ad altre due più semplici nelle quali i numeratori sotto gli integrali avranno la forma $(\alpha+\lambda_0\cos\varphi)^{n+p}$, o $(\alpha-\lambda_0\,\mathrm{sen}\,\varphi)^{n+p}$, e la cui validità è sottoposta alla condizione che il rapporto $\dfrac{\alpha-\lambda^{-\frac{1}{2p+1}}\dfrac{a_1}{2\sqrt{a_2}}}{\sqrt{\alpha^2-\lambda^{-\frac{2}{2p+1}}a_0}}$ abbia il modulo minore di uno; e infine se sarà anche $\alpha=\lambda^{-\frac{1}{2p+1}}\dfrac{a_1}{2\sqrt{a_2}}$, con che quest'ultima condizione è certo soddisfatta, avremo le altre:

$$
\left.\begin{aligned}
&Z_{-p-\frac{1}{2},\,n}= \\
&=(-1)^n\frac{\pi(p)\pi(n+2p)}{\pi(n+p)\pi(2p)}\,\frac{2^p}{2\pi(\sqrt{a_2})^{2n+2p+1}(\sqrt{a_1^2-4a_0a_2})^p}\int_0^{2\pi}e^{-ip\varphi}\left(\frac{a_1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}\cos\varphi\right)^{n+p}d\varphi\,, \\
&Z_{-p-\frac{1}{2},\,n}= \\
&=(-1)^{n+p}\frac{\pi(p)\pi(n+2p)}{\pi(n+p)\pi(2p)}\,\frac{(2\,i)^p}{2\pi(\sqrt{a_2})^{2n+2p+1}(\sqrt{a_1^2-4a_0a_2})^p}\int_0^{2\pi}e^{-ip}\left(\frac{a_1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}\,\mathrm{sen}\varphi\right)^{n+p}d\varphi\,,
\end{aligned}\right\}\quad(51)
$$

che valgono per qualsiasi valore dei coefficienti, come pel caso di $n<p$ val-

gono le altre:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4\,a_0\,a_2}\cos\varphi\right)^n d\varphi = 0\,,\\
&\int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi}\left(\frac{a_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4\,a_0\,a_2}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)^n d\varphi = 0.
\end{aligned}\right\}\qquad (52)$$

16. Tutte queste formole col farvi $p = 0$, $a_0 = a_2 = 1$, $a_1 = -2\,\xi$, $\sqrt{a_2} = 1$, danno altrettante espressioni per integrali definiti per le funzioni $X_n(\xi)$ di LEGENDRE.

Così ad es.: avendo riguardo alle (37) si troveranno subito le due:

$$\left.\begin{aligned}
X_n(\xi) &= \frac{(\mp 1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left(1 + \dfrac{\beta \pm \xi}{\sqrt{\beta^2 - 1}}\,e^{i\varphi}\right)^n}{(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}\cos\varphi)^{n+1}}\,d\varphi\,,\\
X_n(\xi) &= \frac{(\mp 1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left(1 + i\,\dfrac{\beta \pm \xi}{\sqrt{\beta^2 - 1}}\,e^{i\varphi}\right)^n}{(\beta - \sqrt{\beta^2 - 1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)^{n+1}}\,d\varphi\,,
\end{aligned}\right\}\qquad (53)$$

con β numero qualsiasi colla parte reale positiva; e così prendendo $\beta = \xi$ avremo le altre:

$$\left.\begin{aligned}
X_n(\xi) &= \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left(1 + \dfrac{2\,\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\,e^{i\varphi}\right)^n}{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\cos\varphi)^{n+1}}\,d\varphi\,,\\
X_n(\xi) &= \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left(1 + \dfrac{2\,i\,\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\,e^{i\varphi}\right)^n}{(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)^{n+1}}\,d\varphi\,,\\
X_n(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\cos\varphi)^{n+1}}\,,\\
X_n(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)^{n+1}}\,,
\end{aligned}\right\}\qquad (54)$$

che valgono pei valori reali o complessi di ξ la cui parte reale è positiva; e le ultime due di queste si hanno subito anche dalle (47).

Similmente le (39) ci danno le due:

$$\left.\begin{aligned} X_n(\xi) &= \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\cos\varphi)^n}{\left(1+\frac{\alpha+\xi}{\sqrt{\alpha^2-1}}e^{i\varphi}\right)^{n+1}}d\varphi, \\ X_n(\xi) &= \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)^n}{\left(1+i\frac{\alpha+\xi}{\sqrt{\alpha^2-1}}e^{i\varphi}\right)^{n+1}}d\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

le quali richiedono che si abbia mod $\frac{\alpha+\xi}{\sqrt{\alpha^2-1}} < 1$; e queste per $\alpha = 0$ ci danno, come le (40), le altre due:

$$X_n(\xi) = \frac{(\pm i)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^n\varphi}{(1\pm i\xi e^{i\varphi})^{n+1}}d\varphi = \frac{(\pm i)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{sen}^n\varphi}{(1\pm\xi e^{i\varphi})^{n+1}}d\varphi, \tag{56}$$

che valgono pei valori di ξ che cadono *nell'interno* del cerchio del raggio uno.

Le (41) poi, come le (51), ci danno le altre:

$$X_n(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\cos\varphi)^n d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)^n d\varphi, \tag{57}$$

che sono le formole date da LAPLACE per le funzioni X_n; e in tutte queste formole i segni dei radicali che ci figurano possono essere presi comunque.

Infine poi la (42) ci dà la seguente:

$$X_n(\xi) = \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(\pm 1+\frac{\gamma}{2}e^{i\varphi}\right)^n}{\left(1+\frac{\xi\pm 1}{\gamma}e^{-i\varphi}\right)^{n+1}}d\varphi, \tag{58}$$

che vale quando mod $\gamma >$ mod $(\xi\pm 1)$.

17. I risultati ottenuti mostrano già l'utilità della formola (9) del § 7, e dell'altra (17) che ne abbiamo dedotto, e fanno anche chiaramente apparire che possono condurre ad altre formole notevoli, sì per le funzioni $Z_{\mu,n}$ che per una immensità di altre.

Qui non farò ora queste ricerche; solo osserverò che nel caso di $\mu = -p - \frac{1}{2}$, come abbiamo supposto $\chi = \lambda_0 z^s$ con $s = 0$, o $s = 1$, avremmo potuto supporre $\chi = \lambda_0 z^s + \mu_0$ con μ_0 anche diverso da zero, e con s anche superiore ad uno, determinando le p_0, $\psi(z)$ e μ nella (29) in modo che la espressione che figura nel denominatore fosse della forma $(A + B z^s + C z^{2s})^{p+1}$ con s intero e A, B, C funzioni di φ soltanto, riducibili alla forma:

$$\lambda + \mu e^{i\varphi} + \nu e^{i\varphi},$$

con chè lo sviluppo della (29) stessa in serie di Cauchy è ancora facile a trovarsi; ma allora le $Z_{\mu,n}$ invece di esprimersi per un integrale soltanto come in tutte le formole precedenti, si esprimono per una somma di integrali.

18. Limitandoci poi al caso in cui si suppone ancora $\mu = -p - \frac{1}{2}$, e si richiede che la espressione che figura fra parentesi nel denominatore della (29) sia di primo grado in z (come si suppone sempre nei paragrafi precedenti), osserveremo che anche con altro processo semplice si può giungere ai risultati ottenuti.

Tornando infatti alla formola (9) del § 7, si vede che in sostanza non si tratta che di ridurre la quantità $p_0^2 - p_1^2 - q_1^2$ alla forma $a_0 z^2 + a_1 z + a_2$ con p_0, p_1, e q_1 funzioni di primo grado in z reali o complesse; e quindi se si pone:

$$p_0 = \lambda_0 z + \mu_0, \qquad p_1 = (\lambda_1 z + \mu_1)\, i, \qquad q_1 = (\lambda_2 z + \mu_2)\, i,$$

si vede che dovremo avere:

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = a_0, \quad \lambda_0 \mu_0 + \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 = \frac{a_1}{2}, \quad \mu_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2 = a_2; \tag{59}$$

e siccome dovremo continuare ancora a supporre come precedentemente che a_2 non sia zero, potremo sempre scrivere:

$$\mu_0 = \sqrt{a_2}\, \eta_0, \qquad \mu_1 = \sqrt{a_2}\, \eta_1, \qquad \mu_2 = \sqrt{a_2}\, \eta_2, \tag{60}$$

essendo η_0, η_1, η_2 quantità reali o complesse che dovranno soddisfare alla equazione:

$$\eta_0^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 = 1, \tag{61}$$

onde venga soddisfatta la 3.ª delle precedenti; e se intendiamo al solito che in queste per $\sqrt{a_2}$ sia preso il valore che sarà stato scelto come valore iniziale di $\sqrt{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}$ per $z = 0$, η_0 dovrà avere la sua parte reale diversa da zero e positiva, onde il rapporto $\frac{1}{p_0}\sqrt{p_0^2 - p_1^2 - q_1^2}$ possa avere anch'esso diversa da zero e positiva la parte reale per $z = 0$; e così in particolare μ_0 non potrà essere uguale a -1, o avere altro valore reale negativo qualsiasi.

Ne segue che *se* η_0 *non sarà uguale ad uno* potremo sempre scrivere:

$$\eta_0 = \cos\theta', \qquad \eta_1 = \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\varphi', \qquad \eta_2 = \operatorname{sen}\theta' \cos\varphi', \tag{62}$$

e $\cos\theta'$ dovrà avere la parte reale diversa da zero e positiva; o in altri termini la parte reale di θ' dovrà essere compresa fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ $\Big($gli estremi $\pm\frac{\pi}{2}$ escl. e se θ' sarà reale anche $\theta'=0$ escl.$\Big)$; mentre *se* $\eta_0 = 1$ *avremo* $\eta_2 = \pm i\eta_1$, *con* η_1 *quantità reale o complessa;* e dovendo sempre le λ_0, λ_1, e λ_2 soddisfare alle due prime delle condizioni (59).

D'altra parte devono anche essere sempre soddisfatte le condizioni (A), o, il che è lo stesso, quelle che si avevano al § 7 per le radici della equazione (13) che ora deve scriversi:

$$(p_1 - i q_1)\gamma^2 + 2p_0\gamma + (p_1 + i q_1) = 0, \tag{63}$$

e che per $z=0$ si riduce all'altra:

$$(\eta_2 + i\eta_1)\gamma^2 + 2\eta_0\gamma - (\eta_2 - i\eta_1) = 0; \tag{64}$$

dunque poichè, nel caso in cui, non essendo $\eta_0 = 1$, si hanno le equazioni (62), questa equazione diviene:

$$\operatorname{sen}\theta' e^{i\varphi'}\gamma^2 + 2\cos\theta'\gamma - \operatorname{sen}\theta' e^{-i\varphi'} = 0,$$

e ha le radici:

$$\frac{-\cos\theta' + 1}{\operatorname{sen}\theta'} e^{-i\varphi'}, \qquad \frac{-\cos\theta' - 1}{\operatorname{sen}\theta'} e^{-i\varphi'},$$

ovvero:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta'}{2} e^{-i\varphi'}, \qquad -\cot\frac{\theta'}{2} e^{-i\varphi'}, \tag{65}$$

si vede che θ' e φ' dovranno essere prese in modo che di queste radici la prima abbia il modulo minore di uno, e la seconda lo abbia maggiore di uno; e ciò qualunque poi sia il modo che si terrà per soddisfare alle due prime della (59).

E così in particolare si soddisfarà alle condizioni che qui abbiamo per θ' e φ' quando per queste quantità si prendano valori reali che per θ' siano compresi fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ $\Big($0 e gli estr. $\pm\frac{\pi}{2}$ escl.$\Big)$ e per φ' siano qualunque.

Se poi essendo $\eta_0 = 1$ sarà $\eta_2 = \pm i\eta_1$, nel qual caso le formole (62) non potrebbero usarsi senza introdurre in campo valori infiniti di φ', allora col tendere di z a zero, delle radici della equazione (63), nel caso di $\eta_2 = i\eta_1$ una tenderà a zero e l'altra a $\frac{i}{\eta_1}$, e nel caso di $\eta_2 = -i\eta_1$ il modulo di una crescerà indefinitamente e l'altra tenderà a $-i\eta_1$; dunque quando $\eta_0 = 1$ e quindi $\eta_2 = \pm i\eta_1$, bisognerà sempre prendere per η_1 una funzione il cui modulo sia inferiore ad uno.

19. Tutto questo qualunque siano i valori di a_0 e a_1, e colla sola condizione che a_2 non sia zero.

Distinguendo ora i due casi di a_0 diverso da zero, e $a_0 = 0$, osserviamo che nel primo caso potremo fare, anche per le λ_0, λ_1, e λ_2, quello che si è fatto colle (60) per le μ_0, μ_1, e μ_2, cioè potremo porre:

$$\lambda_0 = \sqrt{a_0}\,\xi_0, \qquad \lambda_1 = \sqrt{a_0}\,\xi_1, \qquad \lambda_2 = \sqrt{a_0}\,\xi_2, \tag{66}$$

essendo $\sqrt{a_0}$ quello che meglio ci piacerà di scegliere dei due valori di $\sqrt{a_0}$, e ξ_0, ξ_1, ξ_2 dovendo soddisfare alla equazione:

$$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1; \tag{67}$$

e avendosi, per soddisfare anche alla seconda delle (59), l'altra condizione:

$$\xi_0\eta_0 + \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}\sqrt{a_2}}. \tag{68}$$

Ne segue che in questo caso in cui, oltre ad a_2, anche a_0 è diverso da zero, i coefficienti λ e μ potranno determinarsi per mezzo delle (60) e (66) quando si prendano per (ξ_0, ξ_1, ξ_2), e (η_0, η_1, η_2) le coordinate di due punti M e M', reali o immaginari, della sfera di raggio uno, scelti in modo che i raggi ad essi corrispondenti della sfera facciano fra loro un angolo γ (o intercettino sulla sfera un arco γ di circolo massimo), reale o immaginario, pel quale si abbia $\cos\gamma = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}\sqrt{a_2}}$; e quindi, se si escludono dapprima i casi di $\xi_0 = \pm 1$ e $\eta_0 = 1$, potremo anche prendere nelle (60) e (66):

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= \cos\theta, & \xi_1 &= \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, & \xi_2 &= \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \\ \eta_0 &= \cos\theta', & \eta_1 &= \operatorname{sen}\theta'\cos\varphi', & \eta_2 &= \operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\varphi', \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

con θ' e φ' quantità reali o complesse per le quali dovremo intendere soddisfatte le condizioni poste sopra, e θ e φ pure reali o complesse la prima delle quali non sia zero o π, e che insieme a θ' e φ' soddisfino alla condizione:

$$\cos\theta \cos\theta' + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \cos(\varphi - \varphi') = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}\sqrt{a_2}}, \tag{70}$$

alla quale evidentemente si potrà soddisfare sempre in infiniti modi.

E così in particolare, quando il rapporto $\frac{a_1}{2\sqrt{a_0}\sqrt{a_2}}$ sia reale e non superiore ad uno in valore assoluto, potremo prendere per M' un punto reale qualsiasi nell' emisfero al quale appartiene il polo di colatitudine $\theta' = 0$, escludendo questo polo, e i punti dell'equatore $\theta' = \frac{\pi}{2}$, e prendere poi per M un punto qualsiasi del cerchio descritto da M' col raggio sferico γ, essendo γ l'arco fra 0 e π pel quale si ha $\cos\gamma = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}\sqrt{a_2}}$.

Se poi, sempre pel caso di a_0 diverso da zero, si vorrà prendere $\eta_0 = 1$, allora dovremo intendere che sia $\eta_2 = \pm i\eta_1$, con η_1 quantità reale o complessa che abbia il modulo inferiore ad uno, e potremo ancora prendere per λ_0, λ_1, e λ_2 i valori (66), pei quali i valori di ξ_0, ξ_1, e ξ_2 quando non sia $\xi_0 = \pm 1$ potranno anche prendersi sotto la forma data dalle prime tre delle (69); mentre se sarà $\xi_0 = \pm 1$, dovremo prendere $\xi_2 = \pm i\xi_1$ senza avere ora condizioni rispetto a ξ_1 salvo a dovere essere ancora soddisfatta la (68).

E infine, sempre pel caso di a_0 diverso da zero, se sarà $\xi_0 = \pm 1$ e quindi $\xi_2 = \pm i\xi_1$, senza che sia $\eta_0 = 1$, o $\eta_2 = \pm i\eta_1$ (per non ricadere nel caso precedente), allora per η_0, η_1, e η_2 potranno prendersi i valori (62) nei quali dovrà ancora intendersi che θ' e φ' soddisfino alle condizioni poste sopra.

Passando poi a considerare il caso di $a_0 = 0$, osserveremo che allora per le quantità μ_0, μ_1, e μ_2, o η_0, η_1, e η_2 varranno ancora i risultati precedenti senz'altro; mentre la prima delle (59) si ridurrà alla seguente:

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 0,$$

e richiederà perciò che se λ_0 non è zero si abbiano le due:

$$\lambda_1 = i\lambda_0 \cos\tau, \qquad \lambda_2 = i\lambda_0 \operatorname{sen}\tau,$$

con λ_0 e τ quantità reali o complesse qualsiansi, e se λ_0 sarà zero dovrà essere $\lambda_2 = \pm i\lambda_1$ con λ_1 pure reale o complessa qualsiasi; e dovendo sempre essere soddisfatta anche la seconda delle equazioni (59), la quale potrà anche scriversi:

$$\lambda_0 \eta_0 + \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}},$$

e quindi nel caso di λ_0 diverso da zero prenderà la forma:

$$\lambda_0 (\eta_0 + i\eta_1 \cos\tau + i\eta_2 \operatorname{sen}\tau) = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}},$$

e nel caso di $\lambda_0 = 0$ prenderà l'altra:

$$\lambda_1 (\eta_1 \pm i\eta_2) = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}.$$

20. Tutti questi risultati mostrano come esistano infiniti sistemi di funzioni p_0, p_1, q_1 di primo grado in z, cioè:

$$p_0 = \lambda_0 z + \mu_0, \qquad p_1 = (\lambda_1 z + \mu_1) i, \qquad q_1 = (\lambda_2 z + \mu_2) i,$$

per le quali si abbia $p_0^2 - p_1^2 - q_1^2 = a_0 z^2 + a_1 z + a_2$, e danno anche il modo di determinare i vari sistemi di valori dei coefficienti λ e μ.

Supposto dunque che $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, (μ_0, μ_1, μ_2) siano uno di questi sistemi di valori delle quantità λ e μ determinati come precedentemente, dalle formole (9) del § 7 si vede che sarà:

$$(-1)^p (2p)_p \frac{[(\lambda_2 + i\lambda_1) z + \mu_2 + i\mu_1]^p}{(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)^{\frac{2p+1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi} \frac{d\varphi}{[\mu_0 + i\mu_1\cos\varphi + i\mu_2 \operatorname{sen}\varphi + (\lambda_0 + i\lambda_1\cos\varphi + i\lambda_2\operatorname{sen}\varphi) z]^{p+1}},$$

e in questa il trinomio $\mu_0 + i\mu_1\cos\varphi + i\mu_2\operatorname{sen}\varphi$ non sarà zero per nessun valore di φ perchè esso corrisponde al primo membro della equazione (64) quando vi sia posto $\gamma = e^{i\varphi}$, e questa non ha radici col modulo uguale ad uno.

Ne segue che finchè z è in un intorno sufficientemente piccolo del punto $z = 0$ si avrà:

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^p (2p)_p \frac{[(\lambda_2 + i\lambda_1) z + (\mu_2 + i\mu_1)^p]}{(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)^{\frac{2p+1}{2}}} = \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_0^\infty \frac{(-p-1)_n}{(\sqrt{a_2})^{n+p+1}} z^n \int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi} \frac{(\lambda_0 + i\lambda_1\cos\varphi + i\lambda_2\operatorname{sen}\varphi)^n}{(\eta_0 + i\eta_1\cos\varphi + i\eta_2\operatorname{sen}\varphi)^{n+p+1}} d\varphi,\end{aligned}\right\} \quad (71)$$

quindi se si ha riguardo dapprima al caso in cui si abbia contemporaneamente $\lambda_2 + i\lambda_1 = 0$, $\mu_2 + i\mu_1 = 0$, nel qual caso, per le formole precedenti sarà $\mu_0 = \sqrt{a_2}$ o $\eta_0 = 1$, e $\lambda_0 = \sqrt{a_0}$ con a_0 qualsiasi, otterremo intanto la formola seguente:

$$\int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi} \frac{(\sqrt{a_0} + i\lambda_1 e^{-i\varphi})^n}{(1 + i\eta_1 e^{-i\varphi})^{n+p+1}} d\varphi = 0, \tag{72}$$

che varrà per qualsiasi valore reale o complesso di a_0, e per qualsiasi valore intero e positivo o nullo di n e di p, e con η_1 quantità reale o complessa di modulo inferiore ad uno.

21. Fuori di questo caso poi avremo evidentemente dalla (71):

$$\left.\begin{aligned} &(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)^{-\frac{2p+1}{2}} = \\ &= \frac{(-1)^p[(\lambda_2 + i\lambda_1)z + \sqrt{a_2}(\eta_2 + i\eta_1)]^{-p}}{(2p)_p(\sqrt{a_2})^{n+p+1}} \sum_0^\infty (-p-1)_n z^n \int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi} \frac{(\lambda_0 + i\lambda_1\cos\varphi + i\lambda_2 \operatorname{sen}\varphi)^n}{(\eta_0 + i\eta_1\cos\varphi + i\eta_2\operatorname{sen}\varphi)^{n+p+1}} d\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

e quindi se sarà $p = 0$, allora comunque siano state determinate le quantità λ e μ secondo i processi precedenti, avremo la formola:

$$Z_{-\frac{1}{2}, n} = \frac{(-1)^n}{(\sqrt{a_2})^{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{(\lambda_0 + i\lambda_1 \cos\varphi + i\lambda_2 \operatorname{sen}\varphi)^n}{(\eta_0 + i\eta_1\cos\varphi + i\eta_2 \operatorname{sen}\varphi)^{n+1}} d\varphi, \tag{74}$$

dove:

$$\left.\begin{aligned} \eta_0^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 = 1, \qquad \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = a_0, \\ \lambda_0\eta_0 + \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}, \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

senza però che si abbia contemporaneamente $\lambda_2 + i\lambda_1 = 0$, $\eta_2 + i\eta_1 = 0$; e se p non è zero, allora quando si abbia $\lambda_2 + i\lambda_1 = 0$, senza che sia $\eta_2 + i\eta_1 = 0$, ciò che darà $\lambda_0 = \sqrt{a_0}$ e $\lambda_2 = -i\lambda_1$ con λ_1 quantità reale o complessa qualsiasi, avremo la formola:

$$\left.\begin{aligned} &Z_{-p-\frac{1}{2}, n} = \\ &= (-1)^{n+p} \frac{\pi(p)\pi(n+p)}{\pi(n)\pi(2p)} \frac{(\eta_2 + i\eta_1)^{-p}}{(\sqrt{a_2})^{n+2p+1}} \int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi} \frac{(\sqrt{a_0} + i\lambda_1 e^{-i\varphi})^n}{(\eta_0 + i\eta_1\cos\varphi + i\eta_2\operatorname{sen}\varphi)^{n+p+1}} d\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

nella quale le η_0, η_1, η_2, e λ_1 devono soddisfare alle condizioni:

$$\eta_0^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 = 1, \qquad \sqrt{a_0}\,\eta_0 - i\lambda_1(\eta_2 + i\eta_1) = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}, \tag{77}$$

e alle altre che indicammo nel § 18; mentre se sarà invece $\eta_2 + i\eta_1 = 0$, con che $\eta_0 = 1$, senza che sia $\lambda_2 + i\lambda_1 = 0$, allora per $n \geqq p$ avremo:

$$Z_{-p-\frac{1}{2},\, n-p} =$$

$$=(-1)^{n+p} \frac{\pi(p)\pi(n+p)}{\pi(n)\pi(2p)} \frac{(\lambda_2 + i\lambda_1)^{-p}}{(\sqrt{a_2})^{n+p+1}} \int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi} \frac{(\lambda_0 + i\lambda_1\cos\varphi + \lambda_2 \operatorname{sen}\varphi)^n}{(1 + i\eta_1 e^{-i\varphi})^{n+p+1}}\, d\varphi,$$

e per $n < p$ avremo invece:

$$\int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi} \frac{(\lambda_0 + i\lambda_1\cos\varphi + \lambda_2 \operatorname{sen}\varphi)^n}{(1 + i\eta_1 e^{-i\varphi})^{n+p+1}}\, d\varphi = 0, \tag{78}$$

per modo che cambiando nella precedente n in $n+p$ avremo anche:

$$\left.\begin{aligned} &Z_{-p-\frac{1}{2},\, n} = \\ &=(-1)^{n} \frac{\pi(p)\pi(n+2p)}{\pi(n+p)\pi(2p)} \frac{(\lambda_2 + i\lambda_1)^{-p}}{(\sqrt{a_2})^{n+2p+1}} \int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi} \frac{(\lambda_0 + i\lambda_1\cos\varphi + \lambda_2 \operatorname{sen}\varphi)^{n+p}}{(1 + i\eta_1 e^{-i\varphi})^{n+2p+1}}\, d\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

essendo sempre in questa formola η_1 una quantità reale o complessa qualsiasi, ma di modulo inferiore ad uno, e dovendo λ_0, λ_1, λ_2 soddisfare alle condizioni:

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = a_0, \qquad \lambda_0 - i\eta_1(\lambda_2 + i\lambda_1) = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}. \tag{80}$$

Invece, se nessuna delle due quantità $\lambda_2 + i\lambda_1$, $\eta_2 + i\eta_1$ sarà zero, allora la formola (73) ci darà ancora la funzione $Z_{-p-\frac{1}{2},\, n}$ espressa, anzichè per un solo integrale definito, per una somma d'integrali definiti, e condurrà a una relazione di primo grado fra le funzioni:

$$Z_{-p-\frac{1}{2},\, 0},\quad Z_{-p-\frac{1}{2},\, 1},\quad Z_{-p-\frac{1}{2},\, 2}, \dots\quad Z_{-p-\frac{1}{2},\, n},$$

che studiata condurrebbe a risultati notevoli, e alla generalizzazione di altre proprietà note delle funzioni X_n.

22. Queste formole che comprendono quelle dei §§ 11 e segg., per $a_0 = a_2 = 1$, $a_1 = -2\xi$, $p = 0$ comprendono anche tutte le varie espressioni note per integrali definiti che si hanno per le funzioni di Legendre X_n. E siccome nei casi di a_0 e a_2 diversi da zero si possono prendere sempre le λ e μ sotto le forme (60) e (66) colle ξ e η date dalla (69) e θ, φ, θ', e φ' legate fra loro dalla (70), così le espressioni per integrali definiti che si hanno per le funzioni sferiche di due variabili ordinariamente designate con P_n, si trovano qui estese anche alle funzioni più generali che vengono dalle $Z_{-p-\frac{1}{2},n}$ come le P_n vengono dalle X_n, e per valori reali o complessi di quelle variabili; per modo che ora su queste funzioni più generali di due variabili si potrebbero fare con facilità studi analoghi a quelli che si fanno per le P_n.

E notiamo infine che gli studi fatti in questa Memoria dànno le estensioni alle funzioni $Z_{-p-\frac{1}{2},n}$, e in alcuni casi anche a quelle più generali $Z_{\mu,n}$ (con μ reale o complesso) delle formole o proprietà integrali che si hanno per le X_n di Legendre; quale estensione, mentre per molte delle altre proprietà era già stata fatta da altri, e segnatamente da Mehler, Heine, Tonelli, Escary, Amanzio, Morera, Gegenbauer, ecc., non era stata fatta però, almeno che io sappia, altro che per pochissime delle formole che si riferiscono alle proprietà integrali. E questa estensione si è presentata qui in modo tutto naturale, con un processo generale che viene dalla teoria dei residui.

Debbo poi aggiungere che in una Memoria del compianto prof. Schlaefli pubblicata in occasione del centenario della Università di Berna, la conoscenza della quale io debbo alla gentilezza del prof. Graff, si trovano anche alcuni studî molto importanti relativi a funzioni che provengono dalla generalizzazione della formola (57) di Laplace per le funzioni X_n, e che hanno molta analogia con quelle che qui ho considerate.

Pisa, 3 febbraio 1898.

Un teorema sui limiti superiori e inferiori dei moduli delle radici di una equazione algebrica.

(*Di* Ulisse Dini, *a Pisa.*)

1. Quando si ha una equazione:

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z + a_m = 0, \tag{1}$$

e k è il massimo modulo dei rapporti:

$$\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots \frac{a_{m-1}}{a_0}, \frac{a_m}{a_0},$$

è noto che un limite superiore dei moduli delle radici è $1+k$. (V. p. es.: Serret, *Algèbre supérieure*, tom. 1.°, pag. 105.)

Ve ne sono altri però assai più vicini al modulo massimo delle radici stesse, e uno dei quali è anche molto notevole; e questi, come il limite $1+k$, si trovano nel modo seguente.

S'indichino con $a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_{m-1}, a'_m$ i moduli di $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m$, e con ρ il modulo di una radice qualsiasi α della nostra equazione. Avendosi:

$$\alpha^m = -\frac{a_1}{a_0}\alpha^{m-1} - \frac{a_2}{a_0}\alpha^{m-2} - \cdots - \frac{a_{m-1}}{a_0}\alpha - \frac{a_m}{a_0},$$

sarà evidentemente:

$$\rho^m \leqq \frac{a'_1}{a'_0}\rho^{m-1} + \frac{a'_2}{a'_0}\rho^{m-2} + \cdots + \frac{a'_{m-1}}{a'_0}\rho + \frac{a'_m}{a'_0}, \tag{2}$$

e quindi anche, per ρ diverso da uno:

$$\rho^m \leqq k\,\frac{\rho^m - 1}{\rho - 1};$$

e se si saprà che la radice α che si considera ha il modulo $\rho > 1$, sarà anche: $\rho^{m+1} - \rho^m \leq k\,\rho^m - k$, e a fortiori: $\rho^{m+1} < (1+k)\,\rho^m$, donde $\rho < 1 + k$; e per questo, e perchè la cosa sarebbe evidente di per sè quando fosse $\rho \leq 1$, si ritrova così il risultato noto che $1 + k$ è sempre un limite superiore dei moduli delle radici della equazione data (1).

Si osservi ora che se l è un limite superiore dei moduli delle radici della (1), pel modulo ρ di qualsiasi radice si avrà dalla (2):

$$\rho^m \leq \frac{a'_1}{a'_0}\,l^{m-1} + \frac{a'_2}{a'_0}\,l^{m-2} + \cdots + \frac{a'_{m-1}}{a'_0}\,l + \frac{a'_m}{a'_0},$$

e quindi evidentemente:

$$\sqrt[m]{\frac{a'_1}{a'_0}\,l^{m-1} + \frac{a'_2}{a'_0}\,l^{m-2} + \cdots + \frac{a'_{m-1}}{a'_0}\,l + \frac{a'_m}{a'_0}},$$

sarà un nuovo limite superiore dei moduli delle radici.

D'altra parte se si prende $l = 1 + k$ si ha:

$$\frac{a'_1}{a'_0}\,l^{m-1} + \frac{a'_2}{a'_0}\,l^{m-2} + \cdots + \frac{a'_{m-1}}{a'_0}\,l + \frac{a'_m}{a_0} \leq$$

$$\leq k\left\{(1+k)^{m-1} + (1+k)^{m-2} + \cdots + (1+k) + 1\right\},$$

ovvero:

$$\frac{a'_1}{a'_0}\,l^{m-1} + \frac{a'_2}{a'_0}\,l^{m-2} + \cdots + \frac{a'_{m-1}}{a'_0}\,l + \frac{a'_m}{a_0} \leq$$

$$\leq (1+k)^m - 1 = (1+k)^m\left\{1 - \frac{1}{(1+k)^m}\right\},$$

dunque evidentemente *oltre ad* $1 + k$, *anche* $(1+k)\sqrt[m]{1 - \frac{1}{(1+k)^m}}$ *sarà un limite superiore dei moduli delle radici della* (1); e questo limite sarà minore di $1 + k$.

Ne segue che se si parte dal limite $l = 1 + k$, pel nuovo limite:

$$l_1 = \sqrt[m]{\frac{a'_1\,l^{m-1} + a'_2\,l^{m-2} + \cdots + a'_{m-1}\,l + a'_m}{a'_0}},$$

si avrà $l_1 < l$.

Partendo poi da l_1, pel nuovo limite:

$$l_2 = \sqrt[m]{\frac{a'_1 l_1^{m-1} + a'_2 l_1^{m-2} + \cdots + a'_{m-1} l_1 + a'_m}{a'_0}},$$

si avrà evidentemente $l_2 < l_1$; partendo da l_2, pel nuovo limite:

$$l_3 = \sqrt[m]{\frac{a'_1 l_2^{m-1} + a'_2 l_2^{m-2} + \cdots + a'_{m-1} l_2 + a'_m}{a'_0}},$$

si avrà $l_3 < l_2, \ldots$ dunque ponendo per abbreviare:

$$\theta(\lambda) = \frac{a'_1 \lambda^{m-1} + a'_2 \lambda^{m-2} + \cdots + a'_{m-1} \lambda + a'_m}{a'_0},$$

si può dire evidentemente che:

$$l = 1 + k, \qquad l_1 = \sqrt[m]{\theta(1+k)}, \qquad l_2 = \sqrt[m]{\theta(l_1)}, \qquad l_3 = \sqrt[m]{\theta(l_2)}, \ldots$$

saranno altrettanti limiti superiori dei moduli delle radici della (1) che vanno sempre decrescendo, ed essi in conseguenza avranno un limite c; e questo numero c sarà alla sua volta un limite superiore dei moduli delle radici della equazione (1) o sarà il massimo di questi moduli.

A causa però della continuità di $\sqrt[m]{\theta(\lambda)}$ si vede chiaramente che quando λ si accosta sempre più a c insieme a $\sqrt[m]{\theta(\lambda)}$, questa quantità $\sqrt[m]{\theta(\lambda)}$ si accosta indefinitamente a $\sqrt[m]{\theta(c)}$ ed ha appunto per limite $\sqrt[m]{\theta(c)}$; dunque si avrà evidentemente $c = \sqrt[m]{\theta(c)}$ e perciò anche:

$$a'_0 c^m = a'_1 c^{m-1} + a'_2 c^{m-2} + \cdots + a'_{m-1} c + a'_m;$$

talchè si può ora evidentemente enunciare il seguente teorema:

Avendosi la equazione (1) *e costruendo l'altra:*

$$a'_0 \lambda^m - a'_1 \lambda^{m-1} - a'_2 \lambda^{m-2} - \cdots - a'_{m-1} \lambda - a'_m = 0, \tag{3}$$

che non è altro che la equazione dei moduli nella quale è cambiato il segno a tutti i termini meno che al primo, e che pel teorema di DESCARTES *ha sempre una radice positiva c e una sola, questa radice sarà un limite superiore dei moduli delle radici della equazione data* (1), *o sarà il massimo di questi moduli.*

E ora, che la radice positiva c della equazione (3) abbia la particolarità indicata, di essere cioè un limite superiore dei moduli delle radici della (1), si riscontra subito anche coll'osservare che ogni numero positivo λ superiore a c rende positivo il primo membro della equazione (3) e quindi non può soddisfare alla condizione (2).

2. Cambiando ora z in $\frac{1}{z}$ nella equazione (1) e applicando il teorema precedente si trova subito anche il seguente:

Avendosi ancora la equazione (1) *nella quale supporremo che* a_m *non sia zero per escludere il caso che abbia la radice zero, se si costruisce la equazione:*

$$a'_0 \lambda^m + a'_1 \lambda^{m-1} + \cdots + a'_{m-1} \lambda - a'_m = 0, \tag{4}$$

che è ancora la equazione dei moduli nella quale è cambiato il segno soltanto all'ultimo termine, la sua radice positiva c_1 *darà un limite inferiore dei moduli delle radici della equazione stessa* (1), *o il minimo di questi moduli.*

In particolare dunque *se sarà* $a'_0 > a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_{m-1} + a'_m$, *le radici della equazione data* (1) *cadranno tutte entro il cerchio di raggio uno; e se sarà* $a'_0 + a'_1 + \cdots + a'_{m-1} < a'_m$, *esse cadranno tutte fuori di questo cerchio.*

3. I teoremi qui dimostrati danno processi semplici per determinare i limiti superiori e inferiori dei moduli delle radici di una equazione data (1), perchè col metodo delle sostituzioni successive potremo con tutta facilità avvicinarci quanto vorremo alle radici positive c e c_1 delle equazioni (3) e (4) che danno appunto questi limiti. Naturalmente poi queste radici potranno anche sempre trovarsi col processo stesso della ricerca di un limite che ci ha condotti ai teoremi medesimi.

E fermandoci sul limite superiore che abbiamo dato, si può notare che esso è più piccolo, e quindi assai più utile, di quello dato da Gauss nella celebre Memoria: *Beiträge zur theorie der algebraischen Gleichungen*, perchè Gauss dette come limite superiore la radice positiva λ_1 della equazione:

$$a'_0 \lambda^m - \sqrt{2}\,(a'_1 \lambda^{m-1} + a'_2 \lambda^{m-2} + \cdots + a'_{m-1} \lambda + a_m) = 0,$$

e, per essere $\sqrt{2} > 1$, questa radice λ_1 rende evidentemente positivo il primo membro della equazione (3) e quindi è superiore alla sua radice c.

Lo stesso nostro limite superiore è anche minore di quello che il sig. L. Desaint ha data recentemente nella sua Memoria: *Sur quelques points de la théorie des fonctions* pubblicata nel volume del decorso anno 1897 degli *Annales de l'École normale supérieure de Paris.*

Il sig. Desaint dà come limite superiore dei moduli delle radici della (1) il maggiore dei valori delle quantità:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2m}}\, m\,\dfrac{a'_1}{a'_0}, \qquad \dfrac{1}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2m}}\sqrt{m\,\dfrac{a'_2}{a'_0}}, \\ \dfrac{1}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2m}}\sqrt[3]{m\,\dfrac{a'_3}{a'_0}}, \ldots \quad \dfrac{1}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2m}}\sqrt[m-1]{m\,\dfrac{a'_{m-1}}{a'_0}}, \quad \dfrac{1}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2m}}\sqrt[m]{m\,\dfrac{a'_m}{a_0}}; \end{array}\right\} \tag{5}$$

ma, supponendo che i termini diversi da zero che si trovano dopo il primo nella (1) siano s e siano $a_p z^{m-p}$, $a_q z^{m-q}$, $a_r z^{m-r}, \ldots$, si può osservare che moltiplicando per s la equazione corrispondente (3) potremo scriverla sotto la forma:

$$(a'_0 \lambda^m - s\, a'_p \lambda^{m-p}) + (a'_0 \lambda^m - s\, a'_q \lambda^{m-q}) + (a'_0 \lambda^m - s\, a'_r \lambda^{m-r}) + \ldots = 0,$$

ovvero:

$$a'_0 \lambda^{m-p}\left(\lambda^p - s\,\frac{a'_p}{a'_0}\right) + a'_0 \lambda^{m-q}\left(\lambda^q - s\,\frac{a'_q}{a'_0}\right) + a'_0 \lambda^{m-r}\left(\lambda^r - s\,\frac{a'_r}{a'_0}\right) + \cdots = 0,$$

donde apparisce che se si prende il massimo dei valori:

$$\sqrt[p]{s\,\frac{a'_p}{a'_0}}, \qquad \sqrt[q]{s\,\frac{a'_q}{a'_0}}, \qquad \sqrt[r]{s\,\frac{a'_r}{a'_0}}, \ldots \tag{6}$$

e si sostituisce al posto di λ nel primo membro della (3) esso lo rende positivo, e quindi è superiore alla sua radice c; talchè *questo numero così determinato* [prendendo cioè il massimo dei valori (6)] *è un limite superiore dei moduli delle radici della equazione* (1), ma è superiore a quello che abbiamo dato sopra, mentre esso stesso è sempre evidentemente assai inferiore a quello del sig. Desaint, perchè nelle quantità (6) non figura come nelle (5) il divisore $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2\,m}$, e sotto i radicali invece di figurarci il grado m della equazione vi figura il numero s dei termini che effettivamente si hanno dopo il primo nella equazione data, il qual numero sarà inferiore ad m ogni volta che l'equazione data (1) non sarà completa.

Pisa, 15 Dicembre 1897.

Intorno ad un tipo di determinanti nulli d'ordine infinito.

(Di Tito Cazzaniga, *a Göttingen.)*

In un recente lavoro (*) accennavo rapidamente ad un tipo di determinanti nulli infiniti, di cui lo studio mi fu suggerito da una Nota del prof. Pincherle (**). Di tali determinanti dimostrai la convergenza a zero, per la qual cosa ne restarono stabilite tutte le proprietà generali (comuni agli altri convergenti), ed anche accennai a' loro possibili sviluppi, ed alle disuguaglianze cui debbono soddisfare gli elementi del determinante reciproco. Ad ogni modo ivi non erano opportunamente precisate certe condizioni, nè fatte rilevare certe proprietà, analoghe a quelle dei *normali*, che ritengo opportuno sieno conosciute. In quanto segue provvedo a integrare succintamente il soggetto.

1. Indichiamo con:

$$\vartheta = [a_{ik}], \qquad (i,\ k = 1 \dots \infty),$$

un det. i cui elementi soddisfacciano alla condizione, che esistano tre numeri positivi r, s, A, tali, che per ogni valore di i, k, sia:

$$a_{ik} \leqq \frac{A}{r^i s^k}, \qquad (a)$$

posto:

$$|r s| = \gamma^2 > 1.$$

Sotto questa condizione si è dimostrato (***) che:

$$\vartheta = \lim \vartheta_m \leqq \lim \frac{A^m m!}{\gamma^{m(m+1)}} = 0, \qquad (m = \infty).$$

(*) *Sopra i det. d'ordine infinito.* Ann. di Mat., 1897.

(**) *Sui sistemi di funzioni, ecc.* Ann. di Mat., 1884.

(***) Vedi nota (*).

Dunque i determinanti del tipo ϑ sono nulli senza che sussistano particolari relazioni fra gli elementi delle linee parallele.

2. *Un determinante del tipo ϑ resta convergente a zero, quando in luogo degli elementi di una sua linea, si ponga una successione di numeri a_i tali, che per ogni valore di i, sia:*

$$| a_i | \leq i^{ni}, \qquad (i = 1, 2, \ldots \infty),$$

dove n rappresenta un numero finito arbitrario.

Si imagini di eseguire la sostituzione indicata sopra la linea h^{ma}, si indichi con ϑ' il nuovo determinante che ne risulta, e con ϑ'_m il determinante finito che si ottiene da ϑ' considerando le prime m linee, e le prime m colonne. Si ha:

$$\vartheta'_m \leq \sum_{k=1}^{m} | a_k | \, | A_{hk}^{(m)} |,$$

per:

$$| A_{hk}^{(m)} | \leq \sum | a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{h-1\alpha_{h-1}} a_{h+1\alpha_{h+1}} \ldots a_{m\alpha_m} |, \qquad (k = 1 \ldots m),$$

dove le $\alpha_1 \ldots \alpha_{h-1} \alpha_{h+1} \ldots \alpha_m$ rappresentano una permutazione degli $m-1$ numeri;

$$1, 2, \ldots k-1, k+1 \ldots m,$$

ed il sommatorio va esteso a tutte queste permutazioni. Tenuto conto poi delle condizioni a cui soddisfanno le a_{ik}, si ha:

$$| A_{hk} | \leq \frac{A^{m-1} \, m-1\,!}{\gamma^{m(m+1)}} \, r^h \, s^k,$$

donde:

$$\vartheta'_m \leq \frac{A^{m-1} \, m-1\,!}{\gamma^{m(m+1)}} \cdot \sum_{k=1}^{m} | a_k | \, r^h \, s^k.$$

E poichè:

$$| a_k | \leq k^{nk} \leq m^{nm}, \qquad (k = 1, 2, \ldots m),$$

risulta ancora:

$$\vartheta'_m \leq m^{nm} \, r^h \, \frac{A^{m-1} \, m-1\,!}{\gamma^{m(m+1)}} \sum_{k=1}^{m} s^k, \tag{1}$$

Ma:

$$\sum_{k=1}^{m} s^k = s \, \frac{s^m - 1}{s - 1}.$$

e questa formula ci dà per:

$$s < 1\,, \qquad \sum_{k=1}^{m} s^k < \frac{s}{1-s}\,,$$

$$s = 1\,, \qquad \sum_{k=1}^{m} s^k = m\,,$$

$$s < 1\,, \qquad \sum_{k=1}^{m} s^k < \frac{s^{m+1}}{s-1}\,.$$

Onde sostituendo in ϑ'_m, tenuto fermo che $m\,! < m^m$, si hanno corrisp. le tre espressioni:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta'_m &\leq \frac{s\,r^h}{A\,(1-s)} \left\{ \frac{A\,m^n}{\gamma^{m+1}} \right\}^m, \\ \vartheta'_m &\leq \frac{r^h}{A} \left\{ \frac{A\,m^{n+1}}{\gamma^{m+1}} \right\}^m, \\ \vartheta'_m &\leq \frac{s\,r^h}{A\,(1-s)} \left\{ \frac{s\,A\,m^n}{\gamma^{m+1}} \right\}^m, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

in cui nella prima e terza si è trascurato un divisore m. Poichè n è finito è facile ora osservare, che le quantità fra parentesi tendono a zero col crescere di m, e quindi:

$$\vartheta' = \lim \vartheta_m = 0.$$

E più generalmente ancora:

$$\lim \;|\sqrt[m]{\vartheta_m}\,| = 0\,, \qquad\qquad \lim m = \infty.$$

Notiamo che l'effettuata sostituzione è così generale, che in essa rientrano gran parte delle sostituzioni ordinarie. Così in particolare potremo porre le tre successioni:

$$\begin{array}{cccccc} a & 2\,a & 3\,a & \ldots & m\,a & \ldots \\ a & a^2 & a^3 & \ldots & a^m & \ldots \\ (1)^n & (2\,!)^n & (3\,!)^n & \ldots & (m\,!)^n & \ldots \end{array}$$

al posto della linea i, per a ed n finiti, ma affatto arbitrari.

3. Il precedente teorema può essere esteso in due sensi:

a) Imaginiamo di sostituire contemporaneamente alla prima linea (o a qualunque) di ϑ la successione di elementi a_i tali, che:

$$a_i \leq i^{ni}\,, \qquad\qquad (i = 1,\ 2 \ldots \infty),$$

ed alla prima colonna una successione di elementi b_i, tali che:

$$b_i \leqq i^{n_1 i}, \qquad (i = 1, 2 \ldots \infty).$$

Il determinante che risulta è ancora convergente a zero, e si ha pure $\lim |\sqrt[m]{\vartheta_m}| = 0$. La dimostrazione si conduce come la precedente, quando si parta dallo sviluppo:

$$\vartheta_m = a_{11} A_{11} + \sum a_{1\alpha} a_{\beta 1} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}_m, \quad (\alpha, \beta = 2, 3 \ldots m),$$

dove il simbolo $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}_m$ rappresenta al solito, il minore che si ottiene da ϑ_m, sopprimendo le linee 1, α, e le colonne β, 1, e attribuendogli un segno opportuno $(-1)^{\alpha+\beta}$.

b) La seconda estensione del teorema avviene in questo senso, che la sostituzione indicata, può effettuarsi contemporaneamente sopra un numero qualunque, ma finito, di linee e di colonne.

La dimostrazione è analoga alle precedenti; basta partire dallo sviluppo di ϑ'_m per le linee e colonne sostituite.

Riassumendo adunque possiamo enunciare il teorema così modificato:

Un determinante del tipo ϑ resta convergente a zero, in modo che anche $\lim |\sqrt[m]{\vartheta_n} = 0$, *quando lo si bordi con p linee di elementi:*

$$|\alpha_{ik}| \leqq k^{n_i k}, \qquad (i = 1 \ldots p;\ k = 1, 2 \ldots \infty),$$

e q colonne di elementi:

$$|\beta_{ik}| \leqq i^{m_k i}, \qquad (i = 1 \ldots \infty,\ k = 1, 2 \ldots q),$$

dove m_k ed n_i sono numeri finiti.

4. Se ora al posto di tutti gli elementi delle linee $i_1 i_2 \ldots i_r$ e delle colonne $k_1, k_2 \ldots k_r$ poniamo lo zero, eccetto che per gli elementi:

$$a_{i_1 k_1}, \ a_{i_2 k_2}, \ldots a_{i_r k_r},$$

al cui posto mettiamo l'unità, per definizione si ottiene il minore infinito:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_r \end{pmatrix},$$

del dato. Dal teorema (3) segue:

Tutti i minori infiniti di ϑ convergono a zero.

5. Come utile esempio, si consideri il gruppo di numeri G_x:

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ldots x_n \ldots$$

tutti finiti. Indichiamo poi con α il massimo (o limite superiore) dei punti del suo primo gruppo derivato G'_x, e si supponga $\alpha < 1$.

Così per ogni k maggiore di un certo indice m, opportunamente determinato, sta la relazione:

$$x_k \leqq |\alpha + \delta|,$$

dove δ è un numero positivo qualunque, scelto in modo che:

$$|\alpha + \delta| < 1,$$

il che è sempre possibile.

Allora il determinante infinito di Vandermonde:

$$D = [x_k^{i-1}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

è del tipo ϑ' e converge a zero. Infatti si ponga:

$$s = 1, \qquad r = \frac{1}{|\alpha + \delta|} > \frac{1}{\alpha}, \qquad A > r,$$

risulta subito per ogni $k > m$:

$$a_{ik} = x_k^{i-1} \leqq (\alpha + \delta)^{i-1} \leqq \frac{1}{r^{i-1}}, \qquad (i = 1 \dots \infty),$$

od anche:

$$a_{ik} \leqq \frac{A}{r^i},$$

per:

$$r = |r\,s| > 1.$$

Dunque D è del tipo ϑ', in quanto risulta da un determinante ϑ con la sostituzione di m linee, mediante successioni di numeri, che crescono in progressione geometrica di base finita. Così, se:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

è una funzione olomorfa intera, con infinite radici:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \dots \quad a_n \dots,$$

il determinante infinito di Vandermonde:

$$D = \left[\frac{1}{a_k^{i-1}}\right], \qquad (k,\ i = 1,\ 2, \dots \infty),$$

è zero, e quindi non può, in nessun caso, rappresentare la radice quadrata del discriminante.

6. Nello studio dei det. inf. è senza dubbio di somma importanza il riconoscere se un determinante è, o meno, del tipo ϑ, (o di quello più generale ϑ'). Tale studio in sostanza si riduce a determinare se esistano tre numeri A, r, s, per $|rs| > 1$, tali che, eccettuati gli elementi di un numero finito di linee e colonne, tutti i restanti soddisfacciano alla relazione:

$$|a_{ik}| \leq \frac{A}{r^i s^k}. \tag{a}$$

Svolgiamo in proposito qualche considerazione che in molti casi può condurre alla determinazione effettiva dei numeri in discorso. Sia:

$$M = [a_{ik}], \qquad (i, k = \ldots. \infty),$$

una matrice di elementi qualsiansi. Formiamo le serie in numero infinito:

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x^k, \qquad (i = 1, 2 \ldots \infty),$$

e col metodo dell' Hadamard, determiniamo i *veri raggi* di convergenza $\alpha_i . (i = 1, 2 \ldots \infty.)$

Il gruppo di numeri G_α:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_i \ldots,$$

ammette un primo gruppo derivato G'_α; sia α il minimo, od il limite inferiore di questo gruppo. Se $\alpha = 0$ è chiaro che la matrice M non può definire un determinante del tipo ϑ (o ϑ'), perchè gli elementi di infinite linee non soddisfanno alla condizione (a).

Sia dunque $\alpha \neq 0$. Per la natura della sua determinazione, α è tale che, fissato con δ un numero piccolo ad arbitrio, risulta:

$$\frac{1}{|\alpha - \delta|} \geq \frac{1}{\alpha_i},$$

per tutti i valori di i (eccettuati al più un numero finito), e:

$$\frac{1}{\alpha + \delta} \leq \frac{1}{\alpha_i},$$

per infiniti valori di i.

Analogamente costruendo le serie:

$$\bar{f}_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} x^i, \qquad (k = 1, 2 \ldots \infty),$$

si può determinare un gruppo G_β di numeri:

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_k, \ldots$$

ed un numero β, limite inferiore, o minimo di G'_β, per cui risulta:

$$\frac{1}{|\beta - \delta|} \geq \frac{1}{\beta_k},$$

per tutti i valori di k (eccettuati al più un numero finito), e:

$$\frac{1}{|\beta + \delta|} \leq \frac{1}{\beta_k},$$

per infiniti valori di k.

I due numeri α e β così definiti li chiameremo i *numeri caratteristici* di M.

a) Per α e β diversi da zero, e sotto una condizione opportuna cui debbono soddisfare le $f_i(x)$, esistono infinite coppie di numeri r, s tali che:

$$a_{ik} \leq \frac{A}{r^i s^k}, \qquad (A \neq 0), \quad (a)$$

per tutti i valori di i e k superiori ad un certo numero m finito. In tal caso α e β rappresentano rispettivamente i limiti superiori od i massimi dei due gruppi G_s e G_r.

Dimostriamo infatti che scelto un valore: $\bar{s} > \alpha$, ed un r comunque, ma diverso da zero, non può sussistere per tali numeri la relazione (a).

Supponiamo che sia:

$$a_{ik} \leq \frac{A}{r^i \bar{s}^k} \leq \frac{C}{\bar{s}^k},$$

per i e k maggiori di un certo numero finito m. Poichè C è costante e finita per ogni valore di i, risulta dalla scritta relazione, che, per infiniti valori di i, le serie:

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x^k,$$

sono convergenti in un cerchio di raggio $\bar{s} > \alpha$; e questo contrasta l'ipotesi.

D'altra parte poniamo:

$$s < \alpha \quad .\dot{}. \quad s = \alpha - \delta,$$

e dimostriamo che, sotto una certa condizione, è sempre determinabile un r tale, che per esso e per tutti i numeri ad esso inferiori, la (a) resti soddisfatta.

Infatti, per ipotesi, le serie $f_i(x)$ or ora considerate, eccetto un numero finito di esse, sono equiconvergenti in tutto il cerchio di raggio s, la circonferenza compresa; onde, indicando con A_i il massimo valore che assume il modulo rispettivo sulla circonferenza (s), risulta per un noto teorema:

$$a_{ik} \leq \frac{A_i}{s^k}, \tag{2}$$

a cominciare da un k opportunamente grande.

Si costruisca ora la serie di potenze:

$$F(x) = \sum_i A_i x^i, \qquad (i = m \dots \infty),$$

e ammettiamo che converga in un cerchio di raggio non nullo per tutti i sistemi di A_i corrispondenti ai valori di δ.

È questa la condizione sufficiente per la validità del precedente teorema. Poichè se $\beta_1 \neq 0$ è il vero raggio di convergenza di $F(x)$, fissato un $r > \beta_1$, ma differente da questo per una quantità piccola ad arbitrio, si ha:

$$A_i \leq \frac{A}{r^i},$$

dove A è il *modulo massimo di F* sul cerchio (r).

Sostituendo allora nella (2) risulta:

$$a_{ik} \leq \frac{A}{r^i s^k}, \qquad (i,\ k = m, \dots \infty).$$

E questo risultato, riguardo ad α integra la dimostrazione del teorema. Analogamente per β. Per tal modo ad ogni $s < \alpha$ corrisponde un certo numero β', e ad ogni $r < \beta$ un altro numero α', i quali godono delle enunciate proprietà. Quando poi s tende ad α, ed r a β, α' e β' in generale tenderanno a due limiti determinati $\bar{\alpha} \leq \alpha$ e $\bar{\beta} \leq \beta$. Essi sono tali che: per ogni coppia di numeri:

$$r < \bar{\beta}, \qquad s < \alpha,$$

od anche:

$$r < \beta, \qquad s < \bar{\alpha},$$

la (1) resta soddisfatta.

7. Supponiamo ora che le prime m linee e colonne della matrice considerata, costituiscano delle successioni tali che bordando con esse un determinante del tipo ϑ, esso diventi del tipo ϑ'. Indicando con p il maggiore fra i prodotti $\bar{\alpha}\beta$, $\alpha\bar{\beta}$, si ha:

Se $p > 1$ *la matrice M definisce un det.* ϑ'.

Sia p. es.:

$$p = \bar{\beta}\alpha = 1 + \varepsilon,$$

e si ponga:

$$r = \bar{\beta} - \delta; \qquad s = \alpha - \delta,$$

allora per ogni:

$$\delta \leqq \frac{\varepsilon}{1 + r + s},$$

risulta:

$$|rs| > 1 \quad \text{e} \quad a_{ik} \leqq \frac{A}{r^i s^k}.$$

come appunto si voleva.

Così pure si ottiene:

Se $\alpha\beta < 1$ *la matrice M non può definire un determinante del tipo* ϑ *o* ϑ'.

Il criterio resta incerto quando $\alpha\beta > 1$ e $p < 1$. In questo caso praticamente può tornar utile di verificare se la (1) sia soddisfatta dalla coppia di valori:

$$s = \frac{1}{\beta - \delta} + \delta_1, \qquad r = \beta - \delta,$$

oppure dall'altra:

$$s = \alpha - \delta, \qquad r = \frac{1}{\alpha - \delta} + \delta_1,$$

per δ_1 positivo e diverso da zero, e δ positivo tendente a zero.

Da ultimo si noti che se $\alpha = \bar{\alpha}$ oppure $\beta = \bar{\beta}$, ciò che può avvenire in casi abbastanza generali, il criterio diventa molto semplice:

Se $\alpha\beta > 1$ *il determinante definito da M è del tipo* ϑ (o ϑ'); *se* $\alpha\beta < 1$ *appartiene ad altri tipi, o diverge.*

8. Consideriamo rapidamente gli sviluppi ammessi dai det. ϑ.

È chiaro che per essi le relazioni:

$$\vartheta = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{i}{k} a_{ik} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{i}{k} a_{jk} = 0, \qquad (i \neq j),$$

sono illusorie, perchè i coefficienti hanno valor zero. Sia ora ϑ_m il solito determinante d'ordine m, $A_{ik}^{(m)}$ il complemento algebrico di a_{ik} in ϑ_m, e definiamo le quantità:

$$\alpha_{ik}^{(m)} = \frac{A_{ik}^{(m)}}{\vartheta_m}.$$

Intorno a queste si pongano le seguenti ipotesi:

a) Le $\alpha_{ik}^{(m)}$ ammettono un limite α_{ik} per m crescente all'infinito.

b) Ammesso $r > 1$ si costruisca la successione di differenze:

$$| \alpha_{1k} - \alpha_{1k}^{(m)} |, \quad | \alpha_{2k} - \alpha_{2k}^{(m)} |, \quad \ldots \quad | \alpha_{ik} - \alpha_{ik}^{(m)} |, \ldots$$

per k arbitrario. Allora supporremo che fissato δ piccolo ad arbitrio, per ogni valore di m, maggiore di un certo M_k, *almeno* le prime m differenze sieno minori di δ.

Se fosse $s > 1$ si farebbero analoghe ipotesi sopra la corrispondente successione di differenze.

Sotto queste condizioni si ha:

$$\sum_i \alpha_{ik}\, a_{ik} = 1; \qquad \sum_i \alpha_{ik}\, a_{ih} = 0, \qquad (r > 1).$$

Oppure:

$$\sum_k \alpha_{ik}\, a_{ik} = 1; \qquad \sum_k \alpha_{ik}\, a_{jk} = 0, \qquad (s > 1),$$

e tutte e quattro le relazioni coesisteranno, quando sieno insieme $r > 1$, $s > 1$.

Si consideri per esempio la differenza:

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik}\, a_{ik} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik}^{m}\, a_{ik} \right|,$$

per un m scelto secondo l'ipotesi (*b*).

Tal differenza è minore, o uguale a:

$$\delta \left| \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \right| \leqq \frac{\delta\, A}{s^k} \frac{1}{r-1},$$

e poichè inoltre il suo secondo termine è uguale identicamente ad 1, per ogni valore di m, risulta:

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik}\, a_{ik} - 1 \right| \leqq \delta\,.\, L,$$

dove L è un numero finito. E ciò prova l'asserto. Affatto analogamente si procede per le altre formule nelle varie ipotesi considerate.

Se poi le condizioni (a) e (b) si suppongono soddisfatte per i rapporti:

$$\frac{\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ k_1 & k_2 & \dots & k_r \end{pmatrix}_m}{\vartheta_m} = A^{(m)}_{(i)(k)},$$

è chiaro che si potranno dedurre altre quattro formule in cui figurano i minori finiti e infiniti di ordine r.

9. *Ora, supposto che sieno validi i precedenti sviluppi, e fissati due numeri* ρ, σ *per modo che:*

$$|r\rho| > 1, \qquad |\sigma s| > 1,$$

è sempre possibile determinare un numero B, *finito, per cui, eccettuati al più un numero finito di elementi per ogni linea e per ogni colonna, tutti gli altri elementi del determinante:*

$$R = [\alpha_{ik}], \qquad (i,\ k = 1,\ 2 \dots \infty),$$

soddisfino la relazione:

$$|\alpha_{ik}| \leq \frac{B}{\rho^i \sigma^k}.$$

Di questo teorema già diedi la dimostrazione nella Memoria citata, soltanto ivi non erano precisamente enunciate, come ora, *tutte le condizioni* sufficienti alla sua esistenza.

È chiaro poi che, la determinazione delle incognite x_r, in un sistema di equazioni lineari in numero infinito:

$$\sum_i a_{ik} x_i = y_k, \qquad (k = 1,\ 2 \dots \infty),$$

dipendendo dal teorema precedente, sarà possibile soltanto allora che le dette condizioni sieno verificate.

10. La regola della moltiplicazione sta in parte per i det. ϑ.

Se $\vartheta(a)$, $\vartheta(b)$ *sono determinanti tali che i loro elementi* a_{ik}, b_{ik} *soddisfino le relazioni:*

$$a_{ik} \leq \frac{A}{r^i s^k}, \qquad b_{ik} \leq \frac{B}{\rho^i \sigma^k},$$

per:

$$r s > 1, \qquad \rho\sigma > 1,$$

e dippiù i due prodotti $|r\rho|$, $|s\sigma|$ *sono maggiori dell'unità, allora il de-*

terminante :

$$\vartheta(c) = [c_{ik}], \qquad (i, k = 1, 2 \ldots \infty),$$

dove :

$$c_{ik} = \sum_{\gamma} a_{ij} b_{kj},$$

è del tipo dei dati, e quindi convergente e nullo.

Infatti:

$$c_{ik} \leqq \sum_{j} | a_{ij} b_{kj} | \leqq \frac{A B}{\sigma s - 1} \frac{1}{r^i \rho^k},$$

fatte le opportune sostituzioni per a_{ij}, b_{kj}.

Poichè $\dfrac{A B}{s \sigma - 1}$ è un fattore costante e finito, mentre poi $| r \rho | > 1$, la precedente relazione è appunto quella che dimostra il teorema.

Si potrà dire quindi *per definizione* che $\vartheta(c) = \vartheta(a) . \vartheta(b)$.

Si noti che delle quattro condizioni:

$$r s > 1, \quad \rho \sigma > 1, \quad r \rho > 1, \quad \sigma s > 1,$$

una è conseguenza delle altre.

Segue:

1.° Dato un determinante ϑ, esiste un gruppo di det. della medesima specie moltiplicabili per esso.

2.° Non è sempre possibile innalzare a quadrato un det. ϑ moltiplicando linee per linee, se non nel caso che r, $s > 1$ contemp. È sempre possibile però di moltiplicare linee per colonne, nel qual caso le precedenti condizioni si riducono all'unica $r s > 1$, sempre soddisfatta dai det. ϑ.

3.° Supposto che il determinante:

$$R = [\alpha_{ik}], \qquad (i, k = 1 \ldots \infty),$$

sia convergente esso è sempre moltiplicabile per ϑ, e si ottiene $R \vartheta = 0$.

Notiamo che tutte le condizioni fissate, sono sufficienti e non necessarie per la validità dei teoremi esposti, onde è anche possibile che per ogni caso particolare, si possono stabilire altre condizioni meno restrittive intorno alla natura dei det. ϑ, e per le quali le dette proprietà continuano a sussistere.

Göttingen, 10 Febbraio 1898.

Ueber die quadratische Transformation, durch welche die Ebenen des Raumes in ein System von Flächen zweiter Ordnung mit gemeinsamem Poltetraeder übergeführt werden.

(Von H. E. Timerding *in Strassburg.)*

Nachdem Herr Reye durch seine Abhandlung im 48. Bande der *Math. Annalen* die Aufmerksamkeit wieder nachdrücklich auf die bisher sehr vernachlässigten nicht wechselseitig eindeutigen quadratischen Verwandtschaften hingelenkt hat, indem er sie insbesondere zu einer ergiebigen Diskussion der rationalen Flächen benutzte, scheint es an der Zeit zu sein, diejenigen besonderen Fälle dieser Verwandtschaften aufzusuchen, die auch eine einfache analytische Behandlung gestatten. Man könnte hierbei zunächst an die umgekehrt zweideutigen Transformationen denken, bei denen also die Flächen zweiter Ordnung, in die die Ebenen des Raumes übergehen, entweder alle denselben Kegelschnitt oder dieselbe Gerade und dieselben zwei Punkte oder dieselben sechs Punkte gemein haben. Diese Fälle erweisen sich auch nicht als ungeeignet für die analytische Behandlung, nur der letzte, der für die synthetische Behandlung der nächstliegende ist, scheint sich in analytischer Beziehung ganz der ein-vierdeutigen Verwandtschaft, bei der die Flächen zweiter Ordnung nur die Ecken eines Tetraeders gemein haben, unterzuordnen.

Weitaus einfacher gestaltet sich aber die Darstellung, wenn die quadratischen Flächen alle ein gemeinsames Poltetraeder haben, denn dann drücken sich die transformirten Coordinaten einfach durch die Quadrate der ursprünglichen und diese also umgekehrt durch die Quadratwurzeln jener aus. Diese Verwandtschaft benutzte Wilhelm Stahl (im 101. Bande des *Crelle'schen Journals*, S. 73), um aus der Tangentenfläche der biquadratischen Raumcurve zweiter Art die desmische Fläche 12. Ordnung herzuleiten, indem er dem inneren Grunde der von Salmon zufällig gemachten Bemerkung nachging, dass die erstere Fläche in die letztere übergeht, wenn man bei geeigneter Wahl des Coordinatensystems in ihrer Gleichung die Veränderlichen durch deren Quadrate ersetzt. Stahl hat gleichzeitig die in Rede stehende Verwandtschaft kurz charakterisirt, zwar nur soweit, als es für sein Problem nötig war, aber durch dasselbe nahm er gerade das Schwierigste vorweg.

Am nützlichsten aber erweist sich die genannte Verwandtschaft für die sog. Steiner'sche Fläche und zwar liegt dies daran, dass sie sofort ihre einfachste Abbildung auf eine Ebene liefert. So viele bemerkenswerte Eigenschaften man auch für die Flächen erhält, die als entsprechende Gebilde anderer, insbesondere quadratischer, Flächen erscheinen, sie lassen doch, so lange die Beziehung keine eindeutige ist, vor allem die Vollständigkeit vermissen. Wir halten es aber doch für keinen Nachteil, wenn auch die Grenzen deutlich hervortreten, bis zu denen der Nutzen einer bestimmten Methode reicht. Das Feld, auf dem sich diese besondere quadratische Transformation als erspriesslich erweist, bleibt immerhin ein sehr weites, und Beachtung verdient es auch, dass, so einfach die Verwandtschaft selbst, in analytischer und rein geometrischer Beziehung, ist, so verwickelt und schwierig doch die Verhältnisse werden können, zu denen sie schliesslich führt, und so ausserordentlich mannigfaltig die Gebiete, in die sie den Weg leitet.

ERSTER ABSCHNITT.

Das Gebüsch der quadratischen Flächen mit gemeinsamem Poltetraeder.

1. Das Gebüsch der quadratischen Flächen mit gemeinsamem Poltetraeder ist wohl zuerst von Painvin in einer sehr reichhaltigen, aber nicht systematisch geordneten Arbeit (*) untersucht worden. Später ist es in einer Preisschrift von K. Meister behandelt (**). Herr Reye hat ihm im Anhang zum letzten Band seiner Geometrie der Lage einen Abschnitt gewidmet, in

(*) *Crelle's Journal*, Bd. 63.
(**) *Schlömilch's Zeitschrift*, Bd. 34.

dem die wesentlichen Eigenschaften zusammengestellt sind. Wir wollen kurz hervorheben, was für unsere Zwecke nötig ist.

2. Das gemeinsame Poltetraeder der quadratischen Flächen wollen wir als das Haupttetraeder T bezeichnen und auf dasselbe homogene Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 beziehen. Dann stellt sich eine beliebige Fläche f des Gebüschs, $(f)^3$, durch eine Gleichung von folgender Form dar:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0.$$

Die Flächen des Gebüschs gehen durch die Collineationen, die das Haupttetraeder ungeändert lassen, in einander über.

3. Durch die 8 assoziirten Schnittpunkte dreier Flächen des Gebüschs gehen sechs Ebenenpaare des Gebüschs, die je eine Kante des Haupttetraeders zur Axe haben. Von den Verbindungslinien je zweier der 8 Punkte gehen durch jede Ecke des Haupttetraeders vier. Von den übrigen zwölf schneiden sich zwölfmal je zwei auf einer Kante des Haupttetraeders, während gleichzeitig ihre Verbindungsebene durch die Gegenkante geht.

4. Für die 8 assoziirten Punkte sind die Quadrate der Coordinaten einander gleich und die Coordinaten selbst daher bis auf die Vorzeichen dieselben. Durch beliebige Aenderung der Vorzeichen erhalten wir somit aus einem Punkte die 7 assoziirten. Diese Vorzeichenänderungen stellen 7 Involutionen dar. Von denselben sind 4 centrisch und 3 geschaart. Die Ecken des Haupttetraeders sind die Centren und die gegenüberliegenden Seitenflächen die zugehörigen Involutionsebenen der centrischen Involutionen, und je zwei Gegenkanten des Tetraeders sind die Axen der geschaarten Involutionen.

5. Durch die centrischen Involutionen gehen aus einem Punkte eines Oktupels vier andere hervor, aber dieselben Punkte gehen auch aus irgend einem der drei noch übrigen Punkte durch dieselben Involutionen hervor. Die letzteren drei samt dem ersten Punkte gehen ihrerseits ebenfalls durch die vier centrischen Involutionen aus irgend einem der übrigen Punkte hervor.

Das Oktupel der assoziirten Punkte erscheint so in zwei Quadrupel gesondert. Ein Punkt des einen Quadrupels geht durch die vier centrischen Involutionen in die Punkte des anderen Quadrupels und durch jede dieser Involutionen geht ein Quadrupel in das andere über.

Durch die drei geschaarten Involutionen geht ein Punkt eines Quadrupels in die drei übrigen Punkte desselben Quadrupels über und jedes Quadrupel somit in sich selbst.

6. Beide Quadrupel sollen einander assoziirt heissen. Die Punkte eines Quadrupels liegen zu je zweien mit einer beliebigen Kante des Haupttetraeders in zwei Ebenen, die die Eckpunkte der Gegenkante harmonisch trennen, und dieselben Ebenen enthalten auch das assoziirte Quadrupel. Auf den Geraden, die die Punkte eines Quadrupels mit einer Ecke des Hauptetraeders verbinden, liegen auch die Punkte des assoziirten Quadrupels.

Zwei assoziirte Quadrupel bilden die Ecken zweier Tetraeder, T_1 und T_2, die zu einander vierfach perspektive Lage haben, indem die Projektionscentren mit den Ecken des Haupttetraeders T zusammenfallen.

Es müssen aber auch die Geraden, welche einen Punkt eines Quadrupels mit den Punkten des assoziirten Quadrupels verbinden, durch je einen Eckpunkt des Haupttetraeders laufen. Es hat also auch jedes der Tetraeder T_1 und T_2 vierfach perspektive Lage zum Haupttetraeder T, indem die Projektionscentren jedesmal die Ecken des noch übrigen dritten Tetraeders sind.

Die drei Tetraeder T, T_1, T_2 befinden sich also in der bekannten desmischen Lage (Reye, in den *Acta Mathematica*, Bd. I, S. 99).

7. Zwei assoziirte Punktquadrupel bilden die Ecken von zwei Tetraedern, deren Ebenen zwei assoziirte Ebenenquadrupel bilden. Für solche Ebenenquadrupel gelten genau die reziproken Sätze wie für die analogen Punktquadrupel.

8. Zwei Gruppen von 8 assoziirten Punkten lassen sich auf 8 verschiedene Arten so durch 8 Gerade verbinden, dass diese 8 Geraden selbst assoziirt sind und mit den assoziirten Punkten durch die 7 Involutionen in einander übergehen.

Acht assoziirte Gerade teilen sich in zwei Quadrupel, derart dass die Geraden des einen Quadrupels der einen Regelschaar und die Geraden des anderen Quadrupels der anderen Regelschaar eines und desselben Hyperboloids angehören. Die 16 Punkte, in denen die Geraden des einen Quadrupels sonach die Geraden des anderen Quadrupels schneiden, verteilen sich zu vieren auf die Ebenen des Haupttetraeders.

9. Drei Gruppen von 8 assoziirten Punkten lassen sich auf 64 verschiedene Arten so durch 8 Ebenen, die aus jeder Gruppe einen Punkt enthalten, verbinden, dass diese 8 Ebenen selbst assoziirt sind.

Insbesondere sind die Tangentialebenen einer Fläche des Gebüschs $(f)^3$ in 8 assoziirten Punkten selbst 8 assoziirte Ebenen und lassen sich so in zwei Quadrupel teilen, dass die Ecken der von beiden Quadrupeln gebildeten Tetraeder wieder 8 assoziirte Punkte sind.

10. Von diesen Betrachtungen lassen sich sehr bemerkenswerte Anwendungen auf die Raumcurve vierter Ordnung erster Art machen. Man erhält so alle die Sätze, die H. Schröter in seinem Büchlein über diese Curve auf S. 47 ff. entwickelt.

11. Um die Flächen des Gebüschs $(f)^3$, die alle ein gemeinsames Poltetraeder T haben, eindeutig auf die Ebenen des Raumes zu beziehen, braucht man nur von einem beliebigen festen Punkte P bezüglich aller dieser Flächen die Polarebenen aufzusuchen (*). Zu jeder Ebene π gehört dann auch nur eine Fläche des Gebüschs, da die polare Verwandtschaft durch das Poltetraeder T' und die entsprechenden Elemente P und π eindeutig festgelegt ist, und damit auch ihre Ordnungsfläche.

12. Dem Flächensysteme $(f)^3$ gehören vier Bündel von Kegeln an, deren Scheitel immer eine Ecke des Haupttetraeders T ist, während die in der Ecke sich schneidenden Kanten für den Kegel ein Poldreikant bilden. Diesen Kegeln sind die Ebenen zugeordnet, die durch je eine Ecke des Haupttetraeders gehen.

13. Dem Systeme $(f)^3$ gehören sechs Büschel von Ebenenpaaren an, die mit je zwei Ebenen des Haupttetraeders als Doppelebenen eine Involution bilden. Diesen Ebenenpaaren sind die Ebenen zugeordnet, die durch je eine Kante des Haupttetraeders gehen.

14. Dem Systeme $(f)^3$ gehören vier doppelt zählende Ebenen an: die Ebenen des Haupttetraeders. Diese Ebenen sind sich selbst zugeordnet.

15. Der Durchschnittscurve zweier Flächen des Systems $(f)^3$ entspricht allemal die gerade Linie, in der sich die den Flächen entsprechenden Ebenen schneiden. Acht assoziirten Punkten, in denen sich drei Flächen des Systems schneiden, entspricht ein einziger Punkt.

16. Den Raum des Systems $(f)^3$ wollen wir als den Raum (x) bezeichnen, den Raum der den Flächen des Systems entsprechenden Ebenen als Raum (X), indem wir gleichzeitig Coordinaten, die sich auf den ersten Raum beziehen, mit kleinen Buchstaben, und solche, die zum zweiten Raum gehören, mit grossen Buchstaben schreiben.

Das Haupttetraeder T sollen beide Räume gemein haben, indem die Ecken, Seiten und Kanten dieses Tetraeders sich selbst entsprechen.

17. Um nun die Beziehung der Flächen des Systems auf die Ebenen des Raumes (X) analytisch auszudrücken, wählen wir als den festen Punkt

---

(*) Reye, *Geometrie der Lage*, 3. Bd. der 3. Aufl., S. 142. Vgl. auch seine letzte Arbeit über diesen Gegenstand, *Math. Ann.*, Bd. 48.

den Einheitspunkt, d. h. den Punkt, dessen Coordinaten, auf das Haupttetraeder bezogen, alle einander gleich sind. Dann entspricht der Fläche:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0,$$

die Ebene:

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 = 0,$$

und die Beziehung zwischen den Punkten der beiden Räume drückt sich einfach aus wie folgt:

$$\rho X_1 = x_1^2,$$
$$\rho X_2 = x_2^2,$$
$$\rho X_3 = x_3^2,$$
$$\rho X_4 = x_4^2.$$

Die Coordinaten eines Punktes des Raumes (X) sind proportional den Quadraten der Coordinaten der entsprechenden Punkte im Raume (x).

Umgekehrt sind die Coordinaten eines Punktes des Raumes (x) proportional den Quadratwurzeln aus den Coordinaten des entsprechenden Punktes im Raume (X).

18. Aus dieser Darstellungsform der Verwandtschaft ist sofort ersichtlich, dass einem beliebigen Punkte des Raumes (X) acht Punkte des Raumes (X) zugeordnet sind. Liegt aber der Punkt in einer Ebene des Haupttetraeders, so sind ihm nur vier und zwar in derselben Ebene gelegene Punkte zugeordnet, liegt er auf einer Kante des Haupttetraeders, so sind ihm zwei Punkte derselben Kante zugeordnet, und die Ecken des Haupttetraeders endlich entsprechen nur sich selbst.

19. Die biquadratische Raumcurve des Raumes (x), die einer Geraden des Raumes (X) entspricht, zerfällt, wenn diese Gerade eine Kante des Haupttetraeders trifft, in zwei Kegelschnitte, die zum Haupttetraeder folgende ausgezeichnete Lage haben. Sie schneiden sich auf der Tetraederkante in zwei Punkten, die die auf der Kante liegenden Eckpunkte harmonisch trennen, ihre Ebenen schneiden sich darum in dieser Tetraederkante und trennen gleichzeitig die in der Kante sich schneidenden Ebenen des Tetraeders harmonisch.

20. Geht die gerade Linie des Raumes (X) durch eine Ecke des Haupttetraeders T, so zerfällt die entsprechende Curve des Raumes (x) in vier Gerade, die alle durch dieselbe Ecke von T und deren Verbindungsebenen paarweise durch eine Kante von T gehen.

21. Liegt die gerade Linie des Raumes (X) in einer Ebene des Haupttetraeders, so entspricht ihr im Raume (x) ein doppelt zu zählender Kegelschnitt derselben Ebene, für den die in der letzteren liegenden Kanten und Ecken des Haupttetraeders ein Poldreieck bilden.

22. Umgekehrt entspricht einer geraden Linie des Raumes (x) ein Kegelschnitt im Raume (X), welcher die vier Ebenen des Haupttetraeders berührt (*).

Einem jeden solchen Kegelschnitt des Raumes (X) entsprechen aber auch immer 8 assoziirte Gerade des Raumes (x), und wie man zwei Gruppen assoziirter Punkte auf 8 Arten durch 8 assoziirte Gerade verbinden kann (8), so giebt es auch 8 Kegelschnitte, die durch zwei gegebene Punkte gehen und vier feste Ebenen berühren.

Die in irgend einer Ebene liegenden unter den in Rede stehenden Kegelschnitten bilden eine Schaar und sind dem Vierseit einbeschrieben, in dem die Ebene das Haupttetraeder schneidet. Ihnen entsprechen im anderen Raume die beiden Regelschaaren der der Ebene zugeordneten Regelfläche. Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei dieser Kegelschnitte.

23. Trifft die Gerade im Raume (x) eine Kante des Haupttetraeders, so berührt der entsprechende Kegelschnitt dieselbe Kante und die zwei Ebenen des Haupttetraeders, die sich in der Gegenkante schneiden.

24. Geht die Gerade im Raume (x) durch eine Ecke des Haupttetraeders, so ist sie in einfach unendlich vielen Kegeln des Flächengebüschs $(f)^3$ enthalten, die einen Büschel bilden. Ihr entspricht deswegen im Raume (X) eine Gerade, die durch die gleiche Ecke des Haupttetraeders geht. (Vgl. § 20.)

25. Ebenso geht durch eine Gerade des Raumes (x), welche zwei Gegenkanten des Haupttetraeders trifft, ein Büschel von Flächen des Systems $(f)^3$ hindurch. Dieselben haben ausser der vorgelegten noch drei Gerade gemein, die mit der ersten ein windschiefes Vierseit bilden, dessen Ecken paarweise auf den beiden Gegenkanten des Haupttetraeders liegen. Diesen vier Geraden des Raumes (x) entspricht eine Gerade des Raumes (X), welche dieselben Gegenkanten des Haupttetraeders trifft.

26. Liegt die Gerade des Raumes (x) in einer Ebene des Haupttetraeders, so entspricht ihr im Raume (X) ein Kegelschnitt, der die drei in der Ebene liegenden Kanten des Haupttetraeders berührt. Demselben Kegelschnitt entsprechen noch drei andere Gerade des Raumes (x), diese bilden mit der ersten zusammen ein Vierseit, dessen Diagonalen Kanten des Tetraeders sind.

(*) Reye, *Geom. d. L.*, 3. A., Bd. 3, S. 210.

27. Im allgemeinen Falle ist die Gerade des Raumes (x) auf den ihr entsprechenden Kegelschnitt des Raumes (X) Punkt für Punkt eindeutig bezogen. In den Spezialfällen aber, wo ihr wieder eine Gerade entspricht, findet diese eindeutige Beziehung nicht mehr statt; jedem Punkte der Geraden des Raumes (X) entsprechen zwei Punkte der Geraden des Raumes (x), die im einen Falle durch eine Ecke und die gegenüberliegende Ebene des Haupttetraeders, im anderen Falle durch zwei Gegenkanten desselben harmonisch getrennt werden.

ZWEITER ABSCHNITT.

Ueber eine Reihe besonderer Flächen vierter Ordnung.

1. Einer beliebigen Fläche 2. Ordnung F^2 im Raume (X) entspricht im Raume (x) eine Fläche 4. Ordnung f^4, welche die Eigenschaft hat, durch 7 Involutionen in sich selbst übergeführt zu werden, und deren Gleichung, auf das Haupttetraeder bezogen, nur die Quadrate und vierten Potenzen der Veränderlichen enthält. Jedem Punkte von F^2 entsprechen i. A. 8 assoziirte Punkte von f^4 (I, 18).

2. Fragen wir nun nach den Bedingungen, unter denen diese Fläche f^4 einen Knotenpunkt bekommt, ohne dass die Fläche F^2 ein Kegel ist, so ist dies zunächst jedesmal der Fall, wenn die Fläche F^2 durch eine Ecke des Haupttetraeders geht. Ihrer Tangentialebene in dieser Ecke entspricht dann der Kegel, welcher sich der Fläche f^4 in dem zugehörigen Knotenpunkte anschmiegt. (Vgl. I, 12.)

3. Die Fläche f^4 bekommt aber immer vier Knotenpunkte, wenn die Fläche F^2 eine Ebene des Haupttetraeders T berührt. Findet diese Berührung auf einer Kante von T statt, so fallen die Knotenpunkte paarweise, und findet sie in einer Ecke von T statt, so fallen sie alle vier zusammen.

Wenn F^2 nämlich eine Ebene des Haupttetraeders berührt, so schneidet die Fläche die Ebene in zwei Geraden, diesen entsprechen im anderen Raume zwei Kegelschnitte derselben Ebene, deren Durchschnittspunkte die Knotenpunkte von f^4 sind (*). Es sind Knotenpunkte und nicht etwa Berührungs-

(*) Die Fläche f^4 wird längs der beiden Kegelschnitte von Kegeln 2. O. berührt, deren Mittelpunkte mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt des Haupttetraeders zusammenfallen.

punkte schon deshalb, weil diese Ebene des Haupttetraeders Involutionsebene einer Involution ist, durch die die Fläche f^4 in sich übergeht, und weil die Schnittlinien der Fläche mit zwei auf beiden Seiten der ersten Ebene sehr nahe benachbarten assoziirten Ebenen infolge dessen congruente Curven sind.

4. Berührt die Fläche F^2 eine Kante des Haupttetraeders, so erhält die entsprechende f^4 zwei Knotenpunkte auf derselben Kante.

5. Die Fläche 4. Ordnung des Raumes (x) hat also nur dann 16 Knotenpunkte, wenn die entsprechende Fläche 2. Ordnung des Raumes (X) alle Ebenen des Haupttetraeders berührt (3). Diese Knotenpunkte bilden in den Ebenen des Haupttetraeders vier Vierecke, deren Diagonaldreiecke jedesmal durch drei Kanten des Haupttetraeders gebildet werden. Eine solche Fläche heisst nach Cayley (*) Tetraedroid. Sie hängt von 17 Parametern ab, während die allgemeine Fläche 4. Ordnung mit 16 Knotenpunkten, die Kummer'sche Fläche, von 18 Parametern abhängt, und sie ist die projektive Verallgemeinerung der Fresnel'schen Wellenfläche, bei der aber wie bekannt immer nur vier Knotenpunkte reell sind, während sie bei den Tetraedroiden alle reell sein können.

6. Die Gleichungsform, welche die Tetraedroide, auf das Haupttetraeder bezogen, zeigen, ergiebt sich sofort aus der Gestalt, in der die Gleichung einer die vier Ebenen des Coordinatentetraeders berührenden quadratischen Fläche erscheint, wenn man von ihrer Gleichung in Ebenencoordinaten:

$$a_{12}u_1u_2 + a_{13}u_1u_3 + a_{23}u_2u_3 + a_{14}u_1u_4 + a_{24}u_2u_4 + a_{34}u_3u_4 = 0\,,$$

ausgeht. Die Gleichung des zugehörigen Tetraedroids lautet dann in Determinantenform geschrieben:

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^2 & 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ x_2^2 & a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ x_3^2 & a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ x_4^2 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

eine Form, die auch Cayley angiebt.

(*) S. dessen Aufsätze *Liouville's Journal*, Bd. XI; *Crelle's Journal*, Bd. 65 u. 87.

7. Jedem Kegel des Raumes (X), welcher drei Ebenen des Haupttetraeders berührt, dessen Spitze somit in einer Ecke desselben liegt, entsprechen im Raume (X) vier Ebenen, die sich alle in derselben Ecke und zweimal paarweise in jeder durch die Ecke gehenden Ebene des Haupttetraeders schneiden.

Die Gleichung eines solchen Kegels lässt sich nämlich in der Form schreiben:

$$\alpha_1 \sqrt{X_1} + \alpha_2 \sqrt{X_2} + \alpha_3 \sqrt{X_3} = 0,$$

und analog für die anderen Ecken des Haupttetraeders. Aus dieser Gleichungsform ist sofort ersichtlich, dass dem Kegel die Ebenen entsprechen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 &= 0\,, \\ -\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 &= 0\,, \\ \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 &= 0\,, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ein solcher Kegel wird von jeder Ebene in einem Kegelschnitte geschnitten, der drei Ebenen des Haupttetraeders berührt. Jedem derartigen Kegelschnitte entsprechen im anderen Raume wieder Kegelschnitte, und zwar vier, einer in jeder der dem Kegel entsprechenden Ebenen.

8. Die Tangentialkegel K_i, welche sich aus den Ecken des Haupttetraeders an die alle Ebenen des letzteren berührende Fläche F^2 legen lassen, berühren nun drei Ebenen des Haupttetraeders, dasselbe gilt von ihren Berührungskegelschnitten. Die ihnen im Raume (x) entsprechenden Ebenen berühren die entsprechende Fläche f^4 längs Kegelschnitten.

Das Tetraedroid hat also 16 singuläre Tangentialebenen, die es längs Kegelschnitten berühren, und von diesen Ebenen gehen je vier durch eine Ecke des Haupttetraeders T, indem sie ein Vierseit bilden, von dem je zwei Gegenkanten in einer Ebene von T liegen. Ausser diesen 16 Kegelschnitten enthält das Tetraedroid noch 8 andere, nämlich zwei in jeder Ebene von T (3).

Die 6 Kanten eines solchen Vierseits entsprechen den drei Geraden, welche eine Ecke des Haupttetraeders mit drei der vier Berührungspunkte von F^2 verbinden, jede dieser Kanten enthält zwei Knotenpunkte und jede singuläre Ebene somit 6 Knotenpunkte.

Diese 6 Knotenpunkte lassen sich ferner paarweise durch 3 Gerade verbinden, die durch denselben Eckpunkt des Haupttetraeders gehen. Sie bilden also die Ecken eines Brianchon'schen Sechseckes, während sie gleichzeitig, als auf dem singulären Kegelschnitt in der Ebene gelegen, ein Pascal'sches Sechseck bilden.

9. Da die 16 Knotenpunkte sich gleichmässig auf die 16 singulären Ebenen verteilen müssen, so gehen auch durch jeden Knotenpunkt 6 singuläre Ebenen (*) und berühren alle den Schmiegungskegel in demselben. Da solche 6 Ebenen aber immer durch eine centrische Involution in einander übergehen müssen, werden sie von einer beliebigen Ebene in den Seiten eines Pascal'schen Sechsecks geschnitten, das gleichzeitig ein Brianchon'sches sein muss, weil die 6 Ebenen denselben Kegel berühren.

10. Von den 120 Verbindungslinien der 16 Knotenpunkte liegen je 6 in den Ebenen des Haupttetraeders. Von diesen 24 Linien gehen auch je 6 durch eine Ecke des Haupttetraeders und bilden die Schnittlinien der durch diese Ecke gehenden singulären Ebenen.

Die übrigen 96 Verbindungslinien entsprechen den 12 Kegelschnitten des Raumes (X), welche die vier Ebenen des Haupttetraeders berühren und davon je zwei in denselben Punkten wie die Fläche F^2. Durch diese Kegelschnitte gehen aber auch je zwei der Tangentialkegel K_i, die immer in je zwei von ihnen sich schneiden, und die 96 Verbindungslinien singulärer Punkte sind deshalb auch Schnittlinien je zweier singulärer Ebenen.

Die 120 Verbindungslinien je zweier Knotenpunkte sind mit den 120 Schnittlinien je zweier singulärer Ebenen identisch.

11. Die Coordinaten der singulären Punkte ergeben sich aus dem folgenden Schema:

Ebene	x_1	x_2	x_3	x_4
$x_1 = 0$	0	$\pm\sqrt{a_{12}}$	$\pm\sqrt{a_{13}}$	$\pm\sqrt{a_{14}}$
$x_2 = 0$	$\pm\sqrt{a_{12}}$	0	$\pm\sqrt{a_{23}}$	$\pm\sqrt{a_{24}}$
$x_3 = 0$	$\pm\sqrt{a_{13}}$	$\pm\sqrt{a_{23}}$	0	$\pm\sqrt{a_{34}}$
$x_4 = 0$	$\pm\sqrt{a_{14}}$	$\pm\sqrt{a_{24}}$	$\pm\sqrt{a_{34}}$	0

(*) Dies lässt sich auch so erkennen: Jeder der Berührungspunkte der Fläche F^2 mit den Ebenen des Haupttetraeders liegt auf drei der Tangentialkegel K_i aus den Ecken des Haupttetraeders. Durch jeden der entsprechenden Knotenpunkte von f^4 gehen daher zunächst drei singuläre Ebenen, dann aber noch drei weitere, die aus den ersteren durch eine centrische Involution hervorgehen.

Die Tangentialkegel K_i, welche sich aus den Ecken des Haupttetraeders an die Fläche F^2 legen lassen, haben folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{lllll}
 & \sqrt{a_{34}X_2} & +\sqrt{a_{24}X_3} & +\sqrt{a_{23}X_4} & =0\,, \\
\sqrt{a_{34}X_1} & & +\sqrt{a_{14}X_3} & +\sqrt{a_{13}X_4} & =0\,, \\
\sqrt{a_{24}X_1} & +\sqrt{a_{14}X_2} & & +\sqrt{a_{12}X_4} & =0\,, \\
\sqrt{a_{23}X_1} & +\sqrt{a_{13}X_2} & +\sqrt{a_{12}X_3} & & =0.
\end{array}$$

Die Coordinaten der singulären Ebenen der Fläche f^4 lassen sich demnach durch folgendes Schema darstellen:

Punkt	u_1	u_2	u_3	u_4
$u_1 = 0$	0	$\pm\sqrt{a_{34}}$	$\pm\sqrt{a_{24}}$	$\pm\sqrt{a_{23}}$
$u_2 = 0$	$\pm\sqrt{a_{34}}$	0	$\pm\sqrt{a_{14}}$	$\pm\sqrt{a_{13}}$
$u_3 = 0$	$\pm\sqrt{a_{24}}$	$\pm\sqrt{a_{14}}$	0	$\pm\sqrt{a_{12}}$
$u_4 = 0$	$\pm\sqrt{a_{23}}$	$\pm\sqrt{a_{13}}$	$\pm\sqrt{a_{12}}$	0

12. Geht eine quadratische Fläche F^2 des Raumes (X) durch eine Kante des Haupttetraeders hindurch, so hat die entsprechende Fläche f^4 des Raumes (x) dieselbe Kante zur Doppellinie (s. I, 13).

13. Einem Hyperboloid, welches 4 Kanten des Haupttetraeders enthält, entspricht daher ein Paar von Hyperboloiden, welche dieselben Kanten mit einander gemein haben.

14. Einem Hyperboloid F^2, welches 3 Kanten des Haupttetraeders enthält, entspricht eine biquadratische Regelfläche f^4, welche dieselben drei Kanten zu Doppellinien hat. Die beiden windschiefen unter den drei Kanten sind durch die eine Regelschaar der Fläche F^2 projektiv auf einander bezogen, diese eindeutige Beziehung geht durch die quadratische Verwandtschaft in eine zweideutige über (I, 18), und die Geraden der Regelfläche f^4 sind diejenigen, welche jeden Punkt einer der beiden windschiefen Doppellinien mit den beiden entsprechenden Punkten der anderen verbinden. (Vgl. I, 25.) Die letzteren beiden Punkte trennen immer zwei Ecken des Haupttetraeders harmonisch.

15. Jede der Ebenen durch die dritte Doppellinie schneidet die Fläche f^4 ausserdem in einem Kegelschnitte. Diese Kegelschnitte entsprechen, während

die Geraden der Fläche f^4 der einen Regelschaar von F^2 entsprechen, paarweise den Geraden der anderen Regelschaar (I, 19).

16. Diese Kegelschnittschaar der Fläche f^4 hat eine besondere Lage zum Haupttetraeder. Durch jeden Punkt der dritten Doppellinie gehen zwei von ihnen, dieselben haben noch einen zweiten Punkt dieser Linie gemein, der von dem ersten durch die beiden auf der Linie liegenden Tetraederecken harmonisch getrennt ist, und die Ebenen der beiden Kegelschnitte bilden mit den in der Linie sich schneidenden Seitenflächen des Haupttetraeders vier harmonische Ebenen.

17. Die Regelfläche f^4 lässt sich durch eine Gleichung von folgender Form darstellen:

$$x_1^2 x_2^2 \pm x_2^2 x_3^2 \pm x_3^2 x_4^2 = 0.$$

18. Nun entspricht umgekehrt einem Hyperboloid f^2 des Raumes (x), das drei Kanten des Haupttetraeders enthält, im Raume (X) eine Regelfläche F^4, die dieselben drei Kanten zu Doppellinien hat. Der Gleichung dieser Fläche lässt sich folgende Form geben:

$$\sqrt{X_1 X_2} + \sqrt{X_2 X_3} + \sqrt{X_3 X_4} = 0,$$

oder rational gemacht:

$$X_2^2 (X_1^2 - 2 X_1 X_3) + X_3^2 (X_4^2 - 2 X_2 X_4) + X_2 X_3 (X_2 X_3 - 2 X_1 X_4) = 0.$$

Derselben Fläche F^4 entsprechen vier Hyperboloide des Raumes (x); durch jeden Punkt einer der beiden windschiefen unter den drei Kanten des Haupttetraeders, die auf den vier Regelflächen enthalten sind, geht von jeder der letzteren ein Regelstrahl, diesen vier Strahlen entsprechen zwei Gerade im Raume (X), die auf der Fläche F^4 liegen (I, 25).

19. Die Ebenen des Haupttetraeders, welche eine und keine zweite der Doppelgeraden enthalten, berühren die Fläche F^4 ausserdem jede längs einer anderen Geraden, die durch eine Ecke des Haupttetraeders geht. Dieselbe entspricht der zweiten Geraden, in der die gleiche Ebene des Haupttetraeders eines der vier entsprechenden Hyperboloide im Raume (x) schneidet (I, 24). Den zweiten Regelschaaren dieser Hyperboloide entspricht auf der Fläche F^4 eine Schaar von Kegelschnitten, deren Ebenen durch die dritte Doppelgerade gehen (I, 23). Diese Kegelschnitte der Fläche F^4 berühren alle die dritte Doppelgerade und ausserdem zwei Ebenen des Haupttetraeders, und zwar liegen diese Berührungspunkte in den bereits erwähnten Geraden, längs denen die beiden Ebenen des Haupttetraeders die Fläche F^4 berühren.

20. Einem Hyperboloid im Raume (X), welches 2 Kanten des Haupttetraeders enthält, entspricht im Raume (x) eine Fläche 4. Ordnung mit zwei geraden Doppellinien.

Scheiden sich also die beiden Tetraederkanten, so haben wir eine Fläche f^4 vor uns, welche zu den biquadratischen Flächen mit einer quadratischen Doppelcurve gehört. Beiden Regelschaaren des Hyperboloides entsprechen Kegelschnittschaaren von f^4. In denselben sind 16 Gerade enthalten. (I, 20 und 25.)

Geht das Hyperboloid des Raumes (X) durch zwei Gegenkanten des Haupttetraeders, so erhalten wir als entsprechende Fläche wieder eine biquadratische Regelfläche, welche sich von einer vorhin besprochenen nur dadurch unterscheidet, dass die dritte Doppelgerade und damit die Kegelschnittschaar wegfällt.

21. Einem Hyperboloid, welches nur eine Kante des Haupttetraeders enthält, entspricht eine Fläche 4. Ordnung mit einer geraden Doppellinie. Nur der einen Regelschaar des Hyperboloids entsprechen dann Kegelschnitte, deren Ebenen durch die Doppellinie gehen. Unter ihnen sind vier paar zerfallende. Für die genauere Untersuchung dieser Flächen ist hier nicht der Ort.

22. Einen Doppelkegelschnitt hat eine Fläche f^4 des Raumes (x), die einer quadratischen Fläche des Raumes (X) entspricht, nur dann, wenn diese letztere eine Ebene des Haupttetraeders längs einer Geraden berührt (I, 21 und II, 3 am Ende), also ein Kegel K^2 ist, dessen Spitze in der betr. Ebene liegt.

23. Auf der Doppelcurve der Fläche f^4 liegen dann noch vier merkwürdige Punkte e, die der Spitze des Kegels K^2 entsprechen. Sind diese vier Punkte e reell, so besteht f^4 aus zwei Stücken, (sodass nur ein Teil der Doppelcurve zu reellen Flächenteilen gehört,) und die vier Punkte e sind die Enden dieser Stücke. Die Stücke platten sich nach den Enden zu unendlich ab, und in den Punkten e giebt es nur je eine Flächentangente, diese geht durch die gegenüberliegende Ecke des Haupttetraeders. Projizirt man aus dieser Ecke den Doppelkegelschnitt der Fläche durch einen Kegel, so schneidet derselbe die Fläche noch in einer biquadratischen Raumcurve, für die die vier Punkte e Wendeberührungspunkte sind. (Vgl. später IV, 3.) Die Wendeberührungsebenen in ihnen sind die Ebenen, denen sich die Fläche f^4 bei ihrer Abplattung unendlich nähert.

24. Jeder Kegelschnitt auf dem Kegel K^2 berührt die eine Ebene des Haupttetraeders. Damit er noch zwei andere Ebenen desselben berührt, muss

er die zwei Kegelschnitte berühren, in denen diese Ebenen den Kegel K^2 schneiden, muss seine Ebene also Tangentialebene des Kegels sein, der sich durch die beiden Kegelschnitte ausser K^2 noch hindurchlegen lässt. Unter diesen Tangentialebenen sind vier, welche auch noch den Kegelschnitt berühren, in dem die vierte Ebene des Haupttetraeders den Kegel K^2 schneidet.

25. Den drei sich so ergebenden Kegelschnittschaaren auf dem Kegel K^2 entsprechen wieder Kegelschnittschaaren auf der zugehörigen Fläche f^4 (7), und zwar gehen durch jeden Punkt der Fläche zwei Kegelschnitte jeder Schaar. Diese Kegelschnitte liegen paarweise in Ebenen, welche die Fläche doppelt berühren. Denn jeder der entsprechenden Kegelschnitte auf K^2 wird aus einer Ecke des Haupttetraeders T durch einen Kegel projizirt, der drei Ebenen von T berührt und aus dem Kegel K^2 noch einen (dieselben drei Ebenen von T berührenden) Kegelschnitt ausschneidet.

26. Die Fläche f^4 enthält 32 Gerade, von denen je 8 einem der 4 Kegelschnitte auf K^2 entsprechen, welche alle vier Ebenen des Haupttetraeders berühren (I, 22). Da jeder von diesen Kegelschnitten die übrigen drei in je zwei Punkten schneidet, trifft auch jede der 32 Geraden $3 \times 2 = 6$ andere.

27. Je zwei Kegelschnitte auf der Fläche f^4 entsprechen ferner den Strahlen des Kegels K^2, welche eine der drei ihn nicht berührenden Kanten des Haupttetraeders treffen (I, 19); so erhalten wir 12 einzelne Kegelschnitte der Fläche f^4. Legen wir ferner durch eine der den Kegel berührenden Kanten des Haupttetraeders eine Ebene, die eine Tetraederebene der Gegenkante in einer Tangente des Kegels schneidet, so entsprechen der Schnittcurve dieser Ebene und des Kegels vier Kegelschnitte auf f^4 (*). Auf diese Art erhalten wir noch $4 \times 6 = 24$ einzelne Kegelschnitte der Fläche f^4.

28. Den Strahlen des Kegels K^2 entsprechen auf f^4 biquadratische Raumcurven, längs denen die Fläche von quadratischen Flächen berührt wird, die das Haupttetraeder zum Poltetraeder haben.

29. Wenn die Spitze des Kegels K^2 auf eine Kante des Haupttetraeders fällt, so vereinigen sich die Knotenpunkte der entsprechenden Fläche f^4 paarweise auf derselben Kante und werden zu zwei Selbstberührungspunkten. Jede Ebene durch diese Kante schneidet die Fläche f^4 in zwei Kegel-

(*) Es ist in der That leicht einzusehen, dass jedem Kegelschnitt des Raumes (X), der eine Kante und ausserdem noch eine Ebene des Haupttetraeders berührt, vier Kegelschnitte im Raume (x) entsprechen.

schnitten (1, 19), die sich in ihren Schnittpunkten mit der Kante berühren. Für zwei Ebenen ausser der Ebene des Doppelkegelschnittes fallen diese Kegelschnitte zusammen.

Diese Kegelschnitte teilen sich ferner derart in Paare ein, dass f^4 längs den Curven eines Paares von einer quadratischen Fläche berührt wird, die das Haupttetraeder zum Poltetraeder hat. Zu diesen quadratischen Flächen gehört das Paar der singulären Berührungsebenen von f^4, die sich in der Kante der Selbstberührungspunkte schneiden; durch die Gegenkante gehen die beiden ausgezeichneten Tangentialebenen von f^4 in den Selbstberührungspunkten.

30. Berührt der Kegel K^2 die Ebene des Haupttetraeders längs einer Kante desselben, so ist die Kante für die entsprechende Fläche f^4 eine Selbstberührungslinie. Alle ihre Ebenen schneiden aus der Fläche noch je einen Kegelschnitt aus; alle diese Kegelschnitte gehen durch die beiden singulären Punkte der Fläche hindurch, die der Kegelspitze entsprechen. Die Fläche hat eine eigentümliche Gestalt, welche unter Umständen einem Wecken ähnlich sieht.

31. Einem Kegel D^2 des Raumes (X), der dem Haupttetraeder umschrieben ist, entspricht im Raume (x) eine Fläche vierter Ordnung d^4, welche, wie der Kegel von einem quadratischen Ebenenbüschel, von einem quadratischen Büschel von Flächen zweiter Ordnung umhüllt wird. Dieser Büschel besteht aus Flächen eines gewöhnlichen (linearen) Bündels im Gebüsch $(f)^3$ und ist insofern ein besonderer, als in ihm die acht Kegel, die der allgemeine quadratische Büschel enthält, paarweise zusammenfallen; sie entsprechen den Tangentialebenen des Kegels D^2 im Raume (X), die durch die Ecken des Haupttetraeders gehen (I, 12). Jeder dieser Kegel schmiegt sich der Fläche d^4 in einem Doppelpunkte an, der in eine Ecke des Haupttetraeders fällt (2), und berührt sie längs vier Geraden, die dem durch die Ecke des Haupttetraeders gehenden Strahl des Kegels D^2 entsprechen. Den übrigen Strahlen des Kegels entsprechen die biquadratischen Raumcurven auf der Fläche d^4, längs denen sie von ihren einhüllenden Flächen berührt wird. Der Spitze des Kegels entsprechen 8 Knotenpunkte der Fläche d^4, so dass die Fläche im Ganzen 12 Knotenpunkte hat; diese sind die Ecken dreier Tetraeder, die ein desmisches System bilden (I, 6). Die Fläche selbst heisst eine desmische Fläche.

32. Die 16 Geraden, welche die Fläche enthält und welche den Kegelstrahlen nach den Ecken des Haupttetraeders entsprechen (I, 20), bilden die

Geraden der desmischen Configuration. Auf jeder von ihnen liegen drei Knotenpunkte und durch jeden Knotenpunkt gehen vier von ihnen. Es giebt ferner 12 Ebenen, in welchen je vier von ihnen liegen, diese Ebenen enthalten je 6 Knotenpunkte und von jedem der drei Tetraeder, die das desmische System bilden, eine Kante; sie sind selbst wieder die Ebenen dreier Tetraeder, die ein neues desmisches System bilden, und zwar bestehen die Kanten dieser Tetraeder aus je drei Paaren Gegenkanten der Tetraeder des alten Systems.

33. Die 16 Geraden bilden die Grundcurve eines Büschels von desmischen Flächen, zu dem auch die Tetraeder des zweiten desmischen Systems gehören. Durch die 4 entsprechenden Geraden des anderen Raumes geht nämlich ein Büschel von Kegeln 2 Ordnung hindurch; zu demselben gehören drei Ebenenpaare, deren jedes ein Paar Gegenkanten des Haupttetraeders mit der gemeinsamen Spitze der Kegel verbindet.

34. Jedes der drei Tetraeder, welche die Knotenpunkte der desmischen Fläche bilden, kann man zum Haupttetraeder einer quadratischen Verwandtschaft der von uns betrachteten Art machen, und immer entspricht der desmischen Fläche ein quadratischer Kegel, der dem Haupttetraeder der Verwandtschaft umschrieben ist.

Die desmische Fläche lässt sich also auch auf dreifache Art als Enveloppe eines quadratischen Büschels von Flächen 2. O. erzeugen, die sie längs biquadratischen Raumcurven berühren. Alles folgende gilt für jede der drei Erzeugungsarten.

35. Die Regelschaaren der Flächen eines der quadratischen Büschel bilden zwei Strahlencongruenzen. Weil durch jeden Punkt zwei Flächen des Büschels gehn und jede Ebene von sechs Flächen des Büschels berührt wird, sind diese Strahlencongruenzen von der 2. Ordnung und 6. Classe, und zwar von der 1. Art (*). Den Regelschaaren, welche diese Congruenzen bilden, entsprechen im anderen Raume die Schaaren von Kegelschnitten, welche in den Tangentialebenen des der desmischen Fläche entsprechenden Kegels liegen und die vier Ebenen des Haupttetraeders berühren (I, 22). Von diesen Kegelschnitten ist aber sofort ersichtlich, dass sie den Kegel D^2 doppelt berühren, die Strahlen der zugehörigen Congruenzen sind also Doppeltangenten der desmischen Fläche, und die letztere ist Brennfläche für beide Strahlencongruenzen.

(*) S. Reye, *Crelle's Journal*, Bd. 93, S. 81.

36. Es giebt nun aber noch mehr Kegelschnitte, welche die Ebenen des Haupttetraeders und den Kegel D^2 doppelt berühren. Dies erkennen wir mit Hülfe des Satzes:

Jede Ebene durch die Spitze eines Kegels schneidet diesen und ein ihm einbeschriebenes Tetraeder T zusammen in sechs Tangenten eines Kegelschnittes.

Sehen wir nämlich den Kegel als Kegel eines tetraedralen Complexes mit dem Haupttetraeder T an, so ist der Kegelschnitt die Complexcurve der betr. Ebene.

Aus diesem Satze folgt aber sofort, dass jeder Kegelschnitt, welcher die vier Ebenen des Haupttetraeders und eine Seitenlinie des Kegels D^2 berührt, noch eine Seitenlinie dieses Kegels berühren muss und dass ihm somit Doppeltangenten der desmischen Fläche entsprechen müssen. Die Tangenten der Schaar biquadratischer Raumcurven auf der desmischen Fläche, die den Strahlen des zugehörigen Kegels D^2 im Raume (X) entsprechen, sind also Doppeltangenten der desmischen Fläche (*) und bilden die dritte Strahlencongruenz zweiter Ordnung sechster Classe, von der d^4 Brennfläche ist.

DRITTER ABSCHNITT.

Die Steiner'sche Fläche.

1. Einer Ebene des Raumes (x) entspricht im Raume (X), wie bei der allgemeinen quadratischen Verwandtschaft (**), eine Steiner'sche Fläche vierter Ordnung dritter Classe, und zwar ist dies die allgemeine, und nicht etwa eine durch die spezielle Verwandtschaft ebenfalls spezialisirte Fläche.

Wir erhalten aber so eine Art kanonischer Form der Abbildung dieser Fläche auf eine Ebene, und dem entsprechend ergeben sich eine Reihe sehr einfacher Formeln, die in unmittelbarem Zusammenhang stehen mit den bereits von Kummer und Clebsch angegebenen einfachsten analytischen Darstellungsformen der Steiner'schen Fläche und die wir nicht übergehen dürfen.

2. Die Steiner'sche Fläche hat bekanntlich drei gerade Doppellinien, die sich in einem dreifachen Punkte der Fläche schneiden. Jede ihrer Tan-

(*) Vgl. J. Feder, *Math. Ann.*, Bd. 47.

(**) Reye, *Geom. der Lage*, Bd. 3 der 3. Aufl., S. 147.

gentialebenen schneidet die Fläche in zwei Kegelschnitten. Sie hat ferner vier singuläre Tangentialebenen, die sie längs Kegelschnitten berühren. Diese vier singulären Kegelschnitte berühren alle einander, und zwar liegen die Berührungspunkte auf den Doppellinien und heissen die Cuspidalpunkte der Fläche. Allgemein giebt es nämlich in einem Punkte einer Doppellinie zwei Tangentialebenen, diese gehen durch die Doppellinie und fallen für den dreifachen Punkt mit den Ebenen zusammen, die die Doppellinie mit je einer anderen verbinden. Diese Tangentialebenen in den Punkten einer Doppellinie bilden eine Involution; für zwei Punkte auf jeder Doppellinie fallen die zwei Tangentialebenen zusammen, und dies sind die Cuspidalpunkte. (Die Fläche hat also 6 Cuspidalpunkte, einen auf jeder Schnittlinie zweier singulärer Tangentialebenen.)

Auf jeder Doppellinie giebt es ferner einen Punkt der Art, dass die Tangentialebenen in ihm nicht nur die Tangentialebenen in den Cuspidalpunkten, sondern auch die Ebenen, welche die Doppellinie mit je einer anderen verbinden, harmonisch trennen. Dieser Punkt ist durch die Cuspidalpunkte, die auf der Doppellinie liegen, von dem dreifachen Punkt der Fläche harmonisch getrennt. Die Ebene, welche die so auf den Doppellinien gefundenen Punkte verbindet, hat für die Steiner'sche Fläche eine besondere Bedeutung und soll ihre Hauptebene genannt werden. Die Kanten des Tetraeders, das die singulären Ebenen bilden, werden von der Hauptebene in Punkten geschnitten, die von den Cuspidalpunkten durch je zwei Tetraederecken harmonisch getrennt sind.

Diese bereits von Cremona (*) angegebenen Hauptsätze ergeben sich aus unserer Abbildung der Fläche auf eine Ebene mit Leichtigkeit.

3. Gehen wir nun dazu über, diese Abbildung näher zu betrachten. Sei mit E die Steiner'sche Fläche und mit ε die Bildebene bezeichnet. Es ist nun nützlich, folgendes zu beachten.

Transformiren wir den Raum (x) collinear, derart dass das Haupttetraeder ungeändert bleibt, so wird der Raum (X) in der gleichen Weise collinear transformirt. Stellt sich die eine Transformation durch vier Gleichungen:

$$\rho x'_i = a_i x_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

dar, so stellt sich die andere dar durch die Gleichungen:

$$\rho^2 X'_i = a_i^2 X_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

(*) *Crelle's Journal*, Bd. 63.

Hieraus folgt sofort, dass alle Steiner'schen Flächen, welche wir als entsprechende Gebilde der Ebenen des Raumes (x) erhalten, durch collineare Transformationen aus einander hervorgehen, die alle das Haupttetraeder ungeändert lassen.

4. Sei nun:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

die Gleichung der Bildebene ε, so ist die Gleichung der Steiner'schen Fläche E:

$$\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} + \sqrt{X_3} + \sqrt{X_4} = 0,$$

und auf diese Form lässt sich nach dem vorigen § die Gleichung der Steiner'schen Fläche immer bringen, wenn man ausser dem Coordinatentetraeder den Einheitspunkt passend wählt.

5. Die Ebenen des Haupttetraeders sind die singulären Tangentialebenen der Fläche E; die Gleichungen der Kegelschnitte, längs denen sie die Fläche berühren, ergeben sich, wenn man in der Flächengleichung eine der Coordinaten $= 0$ setzt. Die Kegelschnitte berühren also die Kanten des Haupttetraeders, welches das singuläre Tetraeder der Steiner'schen Fläche ist, in den Punkten, für welche die zwei nicht verschwindenden Coordinaten einander gleich werden. Ziehen wir durch den Einheitspunkt P (den dreifachen Punkt der Fläche E) die drei Geraden a, b, c, welche je zwei Gegenkanten des singulären Tetraeders T treffen, so sind dies die Doppellinien der Fläche E und ihre Schnittpunkte A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 mit den Tetraederkanten die Cuspidalpunkte.

6. Die singulären Kegelschnitte liegen auf einer Fläche 2. Ordnung, welche die Kanten des Haupttetraeders berührt und deren Gleichung lautet:

$$\Phi = 0,$$

wenn wir setzen:

$$\Phi = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2$$
$$- 2(X_1 X_2 + X_1 X_3 + X_1 X_4 + X_2 X_3 + X_2 X_4 + X_3 X_4).$$

Dies ergiebt sich auch sofort daraus, dass die Gleichung der Fläche E, rational gemacht, die Form annimmt:

$$\Phi^2 = 64 X_1 X_2 X_3 X_4.$$

7. Die Geraden a, b, c bestimmen sich durch die Gleichungspaare:

$$X_1 = X_2, \; X_3 = X_4; \quad X_1 = X_3, \; X_4 = X_2; \quad X_1 = X_4, \; X_2 = X_3.$$

In der Bildebene ε entsprechen diesen Geraden wieder gerade Linien, die durch folgende Gleichungen dargestellt werden:

$$x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0;\ x_1 + x_3 = 0,\ x_4 + x_2 = 0;\ x_1 + x_4 = 0,\ x_2 + x_3 = 0.$$

Dies sind aber die Verbindungslinien der Punkte, in denen die Ebene ε je zwei Gegenkanten des Haupttetraeders trifft, oder die Diagonalen des Vierseits V, in dem ε die Ebenen des Haupttetraeders schneidet. Den Ecken dieses Diagonaldreiecks Δ entspricht allein der dreifache Punkt P der Fläche E, und je zwei Punkten auf einer Seite von Δ, welche harmonisch sind zu den auf ihr liegenden Ecken des Vierseits V, entspricht ein einziger Punkt der Doppellinien a, b, c (*). Die Cuspidalpunkte A_1, A_2;... entsprechen den Ecken des Vierseits V, und zwar jeder Punkt nur einer Ecke.

8. Die Bildebene ε wird von den Flächen des Gebüsches $(f)^3$ in einem linearen System $(k)^3$ von Kegelschnitten geschnitten; diesen entsprechen im Raume (X) die rationalen Curven vierter Ordnung, in denen die Steiner'sche Fläche E von den Ebenen des Raumes geschnitten wird und deren Doppelpunkte die Durchschnitte der Ebenen mit den Doppelgeraden der Fläche sind.

9. Die zerfallenden Kegelschnitte in dem System $(k)^3$ werden von den Flächen des Systems $(f)^3$ ausgeschnitten, die die Ebene ε berühren. Diesen Geradenpaaren entsprechen auf der Steiner'schen Fläche Kegelschnittpaare (I, 22), welche den Schnitt je einer Tangentialebene der Fläche bilden (**). Da die zweifach unendlich vielen Kegelschnitte der Steiner'schen Fläche sonach den Geraden der Bildebene entsprechen, ergiebt sich, was auch aus dem Vorhergehenden (5) folgt: Alle Kegelschnitte der Steiner'schen Fläche berühren die vier Ebenen des singulären Tetraeders.

Die doppelt zählenden Geraden in dem Kegelschnittsystem $(k)^3$ sind die Seiten des Vierseits V; sie entsprechen den singulären Kegelschnitten der Steiner'schen Fläche.

10. Die Geraden eines Geradenpaares in dem System $(k)^3$ werden in ihrem Schnittpunkte von zwei Kegelschnitten berührt, die dem Vierseit V einbeschrieben sind. Diesen Kegelschnitten entsprechen auf der Steiner'schen Fläche E biquadratische Raumcurven 2. Species, welche in jedem ihrer Punkte

(*) Reye, *Geom. der Lage*, 3. Bd. der 3. Aufl., S. 219.

(**) Weil in jedem Büschel des Kegelschnittsystems $(k)^3$ drei Geradenpaare enthalten sind, ergiebt sich sofort, dass die Steiner'sche Fläche von der dritten Classe sein muss. (Reye, a. a. O., pag. 147.)

einen Kegelschnitt von E dort berühren, wo seine Ebene die Fläche E berührt, welche also überall auch eine Haupttangente berühren und mithin Haupttangentencurven der Fläche sind, und diese Curven berühren sonach auch die vier singulären Kegelschnitte K_i, wie ihre Bildcurven die Seiten des Vierseits V (*).

11. Durch jede Seite des Diagonaldreiecks Δ in der Ebene ε gehen, da sie je zwei Gegenkanten des Haupttetraeders trifft, unendlich viele Flächen des Gebüsches $(f)^3$. Jede dieser Flächen schneidet ε ausserdem in einer zweiten Geraden, die jedesmal durch die gegenüberliegende Ecke von Δ geht, weil die drei Ecken von Δ assoziirte Punkte sind. Jeder dieser Geraden entspricht auf der Fläche E ein Kegelschnitt, der durch den dreifachen Punkt P geht und dessen Ebene eine Doppellinie enthält und Tangentialebene der Fläche in dem Punkte der Doppellinie ist, wo diese den Kegelschnitt ausser P schneidet. Zwei Geraden von ε, die durch eine Ecke des Dreiecks Δ gehen und die auf der gegenüberliegenden Seite liegenden Ecken des Vierseits V harmonisch trennen, entsprechen die beiden Kegelschnitte, die durch denselben Punkt einer Doppellinie gehen. Diese Kegelschnitte fallen in einer Ebene, die eine Doppellinie mit einer Kante des singulären Tetraeders verbindet, zusammen und gehen durch einen Cuspidalpunkt, wenn die entsprechenden Geraden in die Verbindungslinie einer Ecke von Δ mit einer Ecke von V zusammenfallen.

12. Der Kürze halber wollen wir die Tangentialebenen in den Cuspidalpunkten Cuspidalebenen und die in ihnen enthaltenen Kegelschnitte der Steiner'schen Fläche Cuspidalkegelschnitte derselben nennen. Die Haupttangenten in den Cuspidalpunkten, deren es nur je eine giebt und die als vierpunktig berührende anzusehen sind, sollen Cuspidaltangenten heissen; sie fallen mit den Kanten des singulären Tetraeders zusammen.

Die Cuspidalkegelschnitte sind, wie einige Ueberlegung zeigt, als die Kegelschnitte, welche durch den Punkt P gehen, zwei Ebenen des singulären Tetraeders T und die keiner von diesen angehörende Kante in dem auf ihr liegenden Cuspidalpunkte berühren, in der That eindeutig bestimmt.

13. Jeder Strahl durch den dreifachen Punkt P schneidet die Fläche E ausserdem nur noch in einem Punkte, so dass die Fläche eindeutig auf den Strahlenbündel P bezogen ist, der ihre Punkte aus dem Punkte P projizirt. Nur für die Doppellinien a, b, c, die durch den Punkt P gehen,

(*) Reye, a. a. O., pag. 150.

und die Strahlen durch P in den Ebenen α, β, γ, die je zwei Doppellinien verbinden, hört diese eindeutige Beziehung auf.

Der Strahlenbündel P ist mit den Punkten der Bildebene ε durch eine eindeutige quadratische Verwandtschaft verbunden (*). Den Geraden von ε entsprechen in der That auf der Steiner'schen Fläche Kegelschnitte, welche die Strahlen a, b, c alle treffen, und somit im Bündel P quadratische Kegel, die durch die Geraden a, b, c hindurchgehen.

14. In dem Bündel P sind vier Strahlen besonders ausgezeichnet, nämlich die, welche durch die Ecken des Tetraeders T gehen. Sie bilden ein Vierkant, dessen Gegenebenen sich in a, b, c schneiden. Sie seien mit s_1, s_2, s_3, s_4 und die Punkte, in denen sie ausser P die Fläche E schneiden, mit S_1, S_2, S_3, S_4 bezeichnet. Dann ist klar, dass von den Cuspidalebenen, die aus P die Cuspidaltangenten (oder Kanten des singulären Tetraeders) projiziren, je drei sich in einem der Strahlen s schneiden. Es müssen sich deshalb die in solchen drei Cuspidalebenen liegenden Cuspidalkegelschnitte in einem der Punkte S schneiden. Nennen wir die vier Punkte S die Contracuspidalpunkte der Steiner'schen Fläche, so können wir demnach sagen:

Je drei Cuspidalkegelschnitte, deren zugehörige Cuspidaltangenten sich in einem Punkte treffen, schneiden sich ausser in dem dreifachen Punkte noch in einem Contracuspidalpunkte der Steiner'schen Fläche.

15. Es liegen ferner je drei Cuspidalkegelschnitte, deren zugehörige Cuspidaltangenten in einer Ebene liegen, auf einer Fläche 2. Ordnung. Die vier Flächen, welche wir so erhalten, haben die Gleichungen:

$$\Phi = 4\,X_1\,(X_2 + X_3 + X_4 - X_1)\,,$$
$$\Phi = 4\,X_2\,(X_3 + X_4 + X_1 - X_2)\,,$$
$$\Phi = 4\,X_3\,(X_4 + X_1 + X_2 - X_3),$$
$$\Phi = 4\,X_4\,(X_1 + X_2 + X_3 - X_4)\,,$$

wo Φ in derselben Bedeutung gebraucht ist wie früher (6). Diese Gleichungen lassen erkennen, dass jede der vier Flächen durch einen singulären Kegelschnitt der Steiner'schen Fläche E geht. Ausserdem ergiebt sich, dass die Tangentialebene einer der vier Flächen im Punkte P die Ebene des auf der Fläche liegenden singulären Kegelschnittes in einer Geraden der Ebene π

(*) Reye, a. a. O., pag. 151.

schneidet, deren Gleichung lautet:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0.$$

Diese Ebene ist aber offenbar die oben (2) erwähnte Hauptebene der Steiner'schen Fläche. Sie trifft in der That die Geraden a, b, c in Punkten, die vom Einheitspunkt P durch je zwei Cuspidalpunkte harmonisch getrennt sind.

16. Die in Rede stehenden Tangentialebenen der vier quadratischen Flächen im Punkte P bilden ein Vierseit, dessen Kanten die Tangenten der Cuspidalkegelschnitte im Punkte P sind und dessen Diagonaldreikant von den Doppellinien a, b, c gebildet wird.

17. Die Contracuspidalpunkte haben noch eine Eigenschaft, die hervorzuheben ist. Sie sind nämlich die Berührungspunkte derjenigen Tangentialebenen, welche sich durch die Schnittlinien der Hauptebene π mit den singulären Ebenen ausser den letzteren an die Steiner'sche Fläche legen lassen.

Allgemein nämlich ist die Gleichung einer Tangentialebene der Steiner'schen Fläche:

$$\frac{X_1}{\sqrt{Z_1}} + \frac{X_2}{\sqrt{Z_2}} + \frac{X_3}{\sqrt{Z_3}} + \frac{X_4}{\sqrt{Z_4}} = 0,$$

wenn die Z die Coordinaten des Berührungspunktes bezeichnen. Hieraus erkennt man sofort, wenn man z. B. $Z_1 = Z_2 = Z_3$ setzt, dass die Tangentialebene die Ebene $X_4 = 0$ in derselben Geraden schneidet wie die Hauptebene:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0.$$

18. Die Steiner'sche Fläche E ist nicht nur auf die Ebene ε, deren Gleichung lautet:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\,,$$

eindeutig bezogen, sondern auch auf die assoziirten Ebenen, deren Gleichungen aus der vorstehenden hervorgehen, wenn man in ihr beliebige Vorzeichenänderungen vornimmt.

Diese 8 assoziirten Ebenen sondern sich in der früher (I, 5) angegebenen Weise in Quadrupel. Diese Quadrupel bilden zwei Tetraeder, deren Ecken 8 assoziirte Punkte sind. Die drei Ecken, welche in ε liegen, sind aber nichts wie die Ecken des Diagonaldreiecks Δ in dieser Ebene. Ihre Coordinaten sind durch die Beziehungen festgelegt:

$$x_1 = \quad x_2 = -x_3 = -x_4\,,$$
$$x_1 = -x_2 = \quad x_3 = -x_4\,,$$
$$x_1 = -x_2 = -x_3 = \quad x_4\,.$$

19. Die Ebenen, welche mit ε ein Quadrupel bilden und diese Punkte paarweise enthalten, haben die Gleichungen:

$$\eta_1 = 0, \quad \eta_2 = 0, \quad \eta_3 = 0,$$

wenn wir setzen:

$$4\,\eta_1 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4\,,$$
$$4\,\eta_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4\,,$$
$$4\,\eta_3 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4\,.$$

Aus diesen Gleichungen zusammen mit:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

ergiebt sich aber:

$$x_1 = \quad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3,$$
$$x_2 = \quad \eta_1 - \eta_2 - \eta_3,$$
$$x_3 = -\eta_1 + \eta_2 - \eta_3,$$
$$x_4 = -\eta_1 - \eta_2 + \eta_3.$$

20. Die Grössen η lassen sich nun als Coordinaten in der Ebene ε, bezogen auf das Dreieck Δ als Fundamentaldreieck, auffassen. Die Ebenen des Haupttetraeders treffen ε dann in den Geraden:

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0, \quad \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 = 0, \quad -\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = 0, \quad -\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 = 0.$$

Diese Geraden entsprechen also den singulären Kegelschnitten der Steiner'schen Fläche E und bilden das Vierseit V. Dessen 6 Eckpunkte bestimmen sich wie folgt:

$$\eta_1 = 0\,, \quad \eta_2 + \eta_3 = 0\,; \quad \eta_1 = 0\,, \quad \eta_2 - \eta_3 = 0\,;$$
$$\eta_2 = 0\,, \quad \eta_3 + \eta_1 = 0\,; \quad \eta_2 = 0\,, \quad \eta_3 - \eta_1 = 0\,;$$
$$\eta_3 = 0\,, \quad \eta_1 + \eta_2 = 0\,; \quad \eta_3 = 0\,, \quad \eta_1 - \eta_2 = 0.$$

Sie entsprechen den Cuspidalpunkten der Steiner'schen Fläche. Verbinden wir sie mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks Δ, so erhalten wir als

Gleichungen der 6 Geraden die schon in dem vorstehenden System enthaltenen:

$$\eta_2 + \eta_3 = 0, \quad \eta_3 + \eta_1 = 0, \quad \eta_1 + \eta_2 = 0;$$
$$\eta_2 - \eta_3 = 0, \quad \eta_3 - \eta_1 = 0, \quad \eta_1 - \eta_2 = 0.$$

Diese 6 Geraden entsprechen den Cuspidalkegelschnitten. Sie bilden die Seiten eines Vierecks Υ (*), dessen Ecken durch die Beziehungen bestimmt sind:

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3, \quad \eta_1 = -\eta_2 = -\eta_3, \quad -\eta_1 = \eta_2 = -\eta_3, \quad -\eta_1 = -\eta_2 = \eta_3.$$

Diese vier Punkte entsprechen den Contracuspidalpunkten der Steiner'schen Fläche.

21. Dem Kegelschnittsystem $(k)^3$, in dem das Flächensystem $(f)^3$ die Ebene ε schneidet, gehören alle Kegelschnitte an, deren Gleichung von der Form:

$$\mu_1(\eta_1+\eta_2+\eta_3)^2+\mu_2(\eta_1-\eta_2-\eta_3)^2+\mu_3(-\eta_1+\eta_2-\eta_3)^2+\mu_4(-\eta_1-\eta_2+\eta_3)^2=0,$$

oder was dasselbe heisst, von der Form:

$$\rho_0(\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2)+2\rho_1\eta_2\eta_3+2\rho_2\eta_3\eta_1+2\rho_3\eta_1\eta_2=0$$

ist. Sollen die Geraden:

$$\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2+\alpha_3\eta_3=0, \quad \beta_1\eta_1+\beta_2\eta_2+\beta_3\eta_3=0$$

ein Paar bilden, das dem Kegelschnittsystem angehört, so muss:

$$\alpha_1\beta_1=\alpha_2\beta_2=\alpha_3\beta_3$$

sein. Die Geraden, die dem System angehörende Geradenpaare bilden, stehen also miteinander in einer eindeutigen, quadratischen Verwandtschaft, deren singuläres Dreieck das Dreieck Δ ist. Sie sind einander conjugirt bez. aller Curven zweiter Classe, die dem Vierseit V der doppelt zählenden Geraden des Systems einbeschrieben sind und deren Gleichungen in Liniencoordinaten, bezogen auf das Dreieck Δ, sich schreiben:

$$\sigma_1 v_1^2+\sigma_2 v_2^2+\sigma_3 v_3^2=0,$$

indem:

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0.$$

(*) Die Beziehungen, in denen das Viereck Υ und das Vierseit V zu einander stehen, sind ausführlich untersucht von G. Kohn, *Abhdlgn. d. Wiener Akad.* Bd. XCIII.

22. *Die Gleichungen der Ebenen* α, β, γ, welche *je zwei* Doppelgeraden der Steiner'schen Fläche enthalten, lauten:

$$\lambda_1 = 0\,, \quad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,,$$

wenn man setzt:

$$\lambda_1 = X_1 + X_2 - X_3 - X_4\,,$$
$$\lambda_2 = X_1 - X_2 + X_3 - X_4\,,$$
$$\lambda_3 = X_1 - X_2 - X_3 + X_4\,.$$

Die Grössen λ lassen sich als Coordinaten der Strahlen im Bündel P betrachten. Die Cuspidalebenen haben in diesen Coordinaten die Gleichungen:

$$\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_3 + \lambda_1 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$
$$\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \quad \lambda_3 - \lambda_1 = 0, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 0.$$

Sie schneiden sich zu dreien in den Strahlen, deren Coordinaten durch die Doppelgleichungen bestimmt sind:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3\,, \; \lambda_1 = -\lambda_2 = -\lambda_3\,, \; -\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3\,, \; -\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3\,.$$

Dies sind die Strahlen s, welche den Punkt P mit den Ecken des singulären Tetraeders und den Contracuspidalpunkten verbinden. Durch die Gleichungen:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \; \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \; -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \; -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

werden die Ebenen dargestellt, welche den Punkt P mit den Schnittlinien der Hauptebene π und der singulären Ebenen der Fläche verbinden.

23. Als analytischer Ausdruck für die Verwandtschaft zwischen dem ebenen Punktfeld ε und dem Strahlenbündel P ergiebt sich mit Hülfe der Coordinaten η und λ die Doppelgleichung:

$$\eta_1 \lambda_1 = \eta_2 \lambda_2 = \eta_3 \lambda_3\,.$$

Denn die vier Strahlen s im Bündel P und die entsprechenden Punkte in der Ebene ε sind bei beiden Coordinatenbestimmungen die Einheitselemente.

24. Die Kegel im Bündel P, welche die singulären Kegelschnitte der Fläche E enthalten, haben in den λ die Gleichungen:

$$\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 = 0\,,$$
$$-\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 = 0\,,$$
$$\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 = 0\,,$$
$$\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 - \lambda_1 \lambda_2 = 0\,.$$

Diese Kegel stehen in der Beziehung zu einander, dass sich je zwei von ihnen in einer Kante des Doppelliniendreikants berühren und in den beiden anderen so schneiden, dass ihre Tangentialebenen in denselben zwei Seitenflächen des Dreikants harmonisch trennen. Diese Tangentialebenen sind nichts anderes als die Cuspidalebenen der Steiner'schen Fläche.

25. An die Punktcoordinaten in der Ebene ε knüpft sich unmittelbar die Parameterdarstellung der Steiner'schen Fläche. Da nämlich:

$$\rho X_1 = x_1^2, \quad \rho X_2 = x_2^2, \quad \rho X_3 = x_3^2, \quad \rho X_4 = x_4^2,$$

so ergiebt sich aus den Gleichungen des § 17, welche die x durch die η ausdrücken, sofort (*):

$$\left.\begin{aligned} \rho X_1 &= (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)^2, \\ \rho X_2 &= (\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)^2, \\ \rho X_3 &= (-\eta_1 + \eta_2 - \eta_3)^2, \\ \rho X_4 &= (-\eta_1 - \eta_2 + \eta_3)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Aus dieser Parameterdarstellung folgt sofort eine andere, indem wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} \rho Y_1 &= 2\eta_2\eta_3, \\ \rho Y_2 &= 2\eta_3\eta_1, \\ \rho Y_3 &= 2\eta_1\eta_2, \\ \rho Y_4 &= \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2. \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Es ist dann:

$$\begin{aligned} X_1 &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4, \\ X_2 &= -Y_1 - Y_2 + Y_3 + Y_4, \\ X_3 &= -Y_1 + Y_2 - Y_3 + Y_4, \\ X_4 &= Y_1 - Y_2 - Y_3 + Y_4, \end{aligned}$$

und hieraus:

$$\begin{aligned} 4Y_1 &= X_1 - X_2 - X_3 + X_4, \\ 4Y_2 &= X_1 - X_2 + X_3 - X_4, \\ 4Y_3 &= X_1 + X_2 - X_3 - X_4, \\ 4Y_4 &= X_1 + X_2 + X_3 + X_4. \end{aligned}$$

(*) Diese Darstellung giebt Clebsch a. a. O., ebenso die folgende.

Die Ebenen $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0$, $Y_3 = 0$ sind also die mit α, β, γ bezeichneten, welche je zwei Doppellinien enthalten; die Ebene $Y_4 = 0$ ist die Hauptebene π der Fläche E.

26. (A) ist die erste Parameterdarstellung der Steiner'schen Fläche, bezogen auf das singuläre Tetraeder T, (B) ihre zweite, bezogen auf das Tetraeder Π der Ebenen α, β, γ, π. Die singulären Ebenen haben für dieses Tetraeder genau dieselben Gleichungen wie die Ebenen α, β, γ, π für das singuläre Tetraeder. Die Beziehungen zwischen den beiden Tetraedern sind durchaus wechselseitig, jede Kante des einen wird von zwei Gegenkanten des anderen getroffen und harmonisch geteilt.

27. Aus den Gleichungen (B) ergiebt sich durch Elimination der η:

$$Y_2^2 Y_3^2 + Y_3^2 Y_1^2 + Y_1^2 Y_2^2 = 2\, Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 .$$

Dies ist die einfachste rationale Gleichungsform der Steiner'schen Fläche, die zuerst von Kummer angegeben wurde.

Die Tangenten in den Doppelpunkten der Curve:

$$Y_2^2 Y_3^2 + Y_3^2 Y_1^2 + Y_1^2 Y_2^2 = 0 ,$$

in der π die Fläche E schneidet, sind Schmiegungsstrahlen der Fläche und gleichzeitig Tangenten des Kegelschnittes:

$$Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = 0 ,$$

in dem die Ebene π die Fläche $\Phi = 0$ schneidet.

28. Diese quadratische Fläche, welche die Kanten des singulären Tetraeders T in den Cuspidalpunkten berührt, hat nämlich in den Y die Gleichung:

$$Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 - Y_4^2 = 0 ,$$

sie hat also das Tetraeder Π zum Poltetraeder. Da nun, auf ein Tangententetraeder bezogen, die Gleichung einer quadratischen Fläche sich immer in die Form $\Phi = 0$ bringen lässt, wo Φ dieselbe Bedeutung hat wie in § 6, so ergiebt sich beiläufig:

Jedes Tangententetraeder einer quadratischen Fläche steht zu einem bestimmten Poltetraeder derselben in der Beziehung, das jede Kante des einen Tetraeders von zwei Gegenkanten des anderen getroffen und harmonisch geteilt wird. Sechs von diesen zwölf Treffpunkten sind die Berührungspunkte der Tangenten, und zwar gehen die Kanten des Poltetraeders, die sie paarweise verbinden, durch eine Ecke desselben.

Es giebt noch ein zweites Tangententetraeder, welches mit demselben Poltetraeder in der gleichen Beziehung steht, und diese beiden Tangententetraeder bilden mit dem Poltetraeder zusammen ein desmisches System.

Dieser Satz wird zur Trivialität, wenn man an die Kugel und einen ihr umschriebenen Würfel denkt. Die Diagonalen in dessen Seitenflächen bilden zwei gleichseitige Tetraeder, deren Kanten Tangenten der Kugel sind.

29. Die Steiner'sche Fläche wird in sich transformirt durch 24 Collineationen einschliesslich der Identität, die zusammen eine Gruppe bilden. Es sind dies die Collineationen, die den dreifachen Punkt P unverändert lassen und die vier singulären Ebenen irgendwie unter einander vertauschen. Sie führen dann naturgemäss auch die Doppellinien, die durch den Punkt P gehen und je zwei Gegenkanten des Tetraeders T der singulären Ebenen treffen, und damit auch die Cuspidalpunkte in einander über. Sie führen weiter die Hauptebene π in sich über, welche als Verbindungsebene der vierten harmonischen Punkte anf den Doppellinien zu ihren Cuspidalpunkten und dem Punkt P definirt war.

Sie müssen ferner die Verbindungslinien des Punktes P mit den Ecken des Tetraeders T und damit die Contracuspidalpunkte auf der Steiner'schen Fläche in einander überführen. In den Coordinaten X stellen sie sich dar durch beliebige Permutationen derselben ohne Vorzeichenänderung, in den Coordinaten Y durch beliebige Vertauschung und geeignete Vorzeichenänderung der drei ersten Y_1, Y_2, Y_3. In den Coordinaten η der Bildebene ε stellen sie sich ebenfalls dar durch beliebige Vertauschung und Vorzeichenänderung dieser Grössen. Die zugehörigen 24 Collineationen in der Bildebene ε führen sonach, wie es sein muss, das Vierseit V, das den singulären Kegelschnitten der Steiner'schen Fläche E entspricht, und gleichzeitig das Viereck Υ, dessen Ecken und Seiten den Contracuspidalpunkten und Cuspidalkegelschnitten entsprechen, in sich über. Sie transformiren gleichzeitig das Dreieck Δ in sich, dessen Ecken und Seiten dem dreifachen Punkte und den Doppellinien der Steiner'schen Fläche E entsprechen (*).

30. Bemerkenswert sind die Curven 4. Ordnung auf ε und die entsprechenden Raumcurven 4. Ordnung auf E, welche die Ebene und die Fläche einfach überdecken und durch die 24 Collineationen in sich übergehen.

(*) Ueber diese merkwürdige Gruppe von 24 Collineationen ist 1896 eine Strassburger Dissertation von L. Renner in Bayreuth erschienen, in welcher dieselbe ausführlich behandelt ist.

Die Raumcurven werden aus der Steiner'schen Fläche ausgeschnitten durch die quadratischen Flächen:

$$Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 - \lambda Y_4^2 = 0,$$

die in der That alle durch die 24 Collineationen in sich übergeführt werden. Die entsprechenden Curven in der Ebene haben die Gleichungsform:

$$\eta_1^4 + \eta_2^4 + \eta_3^4 = \mu (\eta_2^2 \eta_3^2 + \eta_3^2 \eta_1^2 + \eta_1^2 \eta_2^2).$$

Sie zerfallen in dreizügige und vierzügige Curven. Eine Curve der ersteren Gattung schrumpft scheinbar auf die Ecken des Dreiecks Δ, eine der letzteren Gattung auf die Ecken des Vierecks Υ zusammen. Beide Gattungen grenzen an einander durch das Vierseit V, dem die singulären Kegelschnitte der Steiner'schen Fläche entsprechen, d. h. der Schnitt der letzteren mit der Fläche $\Phi = 0$.

VIERTER ABSCHNITT.

Die Raumcurve vierter Ordnung erster Art.

1. Jeder biquadratischen Raumcurve des Raumes (x), welche die Schnittlinie zweier Flächen des Gebüschs $(f)^3$ ist, entspricht im Raume (X) eine gerade Linie (I, 15).

Ist die Raumcurve die Schnittlinie der Flächen:

$$\Sigma a_i x_i^2 = 0, \quad \Sigma a'_i x_i^2 = 0,$$

so ist die entsprechende Gerade g die Schnittlinie der Ebenen:

$$\Sigma a_i X_i = 0, \quad \Sigma a'_i X_i = 0,$$

und ihre Coordinaten sind:

$$a_{ik} = a_i a'_k - a_k a'_i.$$

Ebendiese Grössen, zwischen denen die identische Beziehung statt hat:

$$a_{12} a_{34} + a_{13} a_{42} + a_{14} a_{23} = 0,$$

können wir auch als Coordinaten der biquadratischen Raumcurve, bezogen auf ihr Haupttetraeder, bezeichnen.

2. Die vier Kegel k_1, k_2, k_3, k_4, welche sich durch die Raumcurve hindurchlegen lassen, entsprechen den vier Ebenen K_i, welche die Gerade

mit den Ecken des Haupttetraeders verbinden, und haben deswegen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
a_{12}x_2^2 + a_{13}x_3^2 + a_{14}x_4^2 &= 0\,, \\
a_{21}x_1^2 \phantom{+ a_{32}x_2^2} + a_{23}x_3^2 + a_{24}x_4^2 &= 0\,, \\
a_{31}x_1^2 + a_{32}x_2^2 \phantom{+ a_{33}x_3^2} + a_{34}x_4^2 &= 0\,, \\
a_{41}x_1^2 + a_{42}x_2^2 + a_{43}x_3^2 &= 0\,,
\end{aligned}$$

wobei zu beachten, dass $a_{ki} = -a_{ik}$ ist.

3. Die 16 Wendeberührungspunkte p_i^k der Raumcurve entsprechen den 4 Schnittpunkten P_i der Geraden g mit den Ebenen des Haupttetraeders. Ihre Coordinaten ergeben sich daher aus dem folgenden Schema:

Ebene	x_1	x_2	x_3	x_4
$x_1 = 0$	0	$\pm\sqrt{a_{34}}$	$\pm\sqrt{a_{42}}$	$\pm\sqrt{a_{23}}$
$x_2 = 0$	$\pm\sqrt{a_{34}}$	0	$\pm\sqrt{a_{41}}$	$\pm\sqrt{a_{13}}$
$x_3 = 0$	$\pm\sqrt{a_{24}}$	$\pm\sqrt{a_{41}}$	0	$\pm\sqrt{a_{12}}$
$x_4 = 0$	$\pm\sqrt{a_{23}}$	$\pm\sqrt{a_{31}}$	$\pm\sqrt{a_{12}}$	0

4. Die Wendeberühungslinien l_i^k entsprechen den Geraden L_i, welche je einen Punkt P_i mit der gegenüberliegenden Ecke des Haupttetraeders verbinden.

5. Die Wendeberührungsebenen w_i^k entsprechen den Kegeln des anderen Raumes, die je drei Ebenen des Haupttetraeders und eine Ebene K_i, letztere in der zugehörigen Geraden L_i, berühren, und sind die Tangentialebenen der Kegel k_i in den auf ihnen liegenden Punkten p_i^k oder Strahlen l_i^k. Für ihre Coordinaten ergiebt sich daher sofort, wenn wir abkürzend:

$$\sqrt{a_{12}a_{34}} = a\,, \quad \sqrt{a_{13}a_{42}} = a'\,, \quad \sqrt{a_{14}a_{23}} = a''$$

setzen, das Schema:

Punkt	u_1	u_2	u_3	u_4
$u_1 = 0$	0	$\pm\sqrt{a_{12}}\cdot a$	$\pm\sqrt{a_{13}}\cdot a'$	$\pm\sqrt{a_{14}}\cdot a''$
$u_2 = 0$	$\pm\sqrt{a_{21}}\cdot a$	0	$\pm\sqrt{a_{23}}\cdot a''$	$\pm\sqrt{a_{24}}\cdot a'$
$u_3 = 0$	$\pm\sqrt{a_{31}}\cdot a'$	$\pm\sqrt{a_{32}}\cdot a''$	0	$\pm\sqrt{a_{34}}\cdot a$
$u_4 = 0$	$\pm\sqrt{a_{41}}\cdot a''$	$\pm\sqrt{a_{42}}\cdot a'$	$\pm\sqrt{a_{43}}\cdot a$	0

6. Es giebt drei Collineationen, welche die Ebenen eines Tetraeders unter sich vertauschen und gleichzeitig eine Gerade in sich selbst überführen. Durch sie muss nämlich der Wurf der vier Schnittpunkte der Geraden mit den Ebenen des Tetraeders in sich übergehen, und dies ist auf 3 Arten möglich, entsprechend den 3 verschiedenen Arten, auf die sich 4 Elemente paarweise vertauschen lassen (*). Diese drei Collineationen sind geschaarte Involutionen, deren Axen je zwei paar Eckpunkte des Tetraeders harmonisch trennen.

Da jeder solchen Transformation des Raumes (X), welche die Ebenen des Haupttetraeders vertauscht, 8 Collineationen im Raume (x) entsprechen, welche die der Geraden entsprechende biquadratische Raumcurve in sich überführen, so geht die letztere ausser durch die Identität und die 7 Involutionen, die alle Gruppen assoziirter Punkte in sich transformiren, durch 24 Collineationen, im Ganzen also, die Identität einbegriffen, durch 32 Collineationen in sich über.

7. Die drei Involutionen, welche die Gerade g mit den Coordinaten a_{ik} in sich überführen, lassen sich durch das folgende Schema für die Coordinaten X'_i des aus X_i entstandenen Punktes darstellen:

	X'_1	X'_2	X'_3	X'_4
I.	$-a_{13}a_{14}X_2$	$-a_{23}a_{24}X_1$	$a_{31}a_{32}X_4$	$a_{41}a_{42}X_3$
II.	$-a_{14}a_{12}X_3$	$a_{21}a_{23}X_4$	$-a_{32}a_{34}X_1$	$a_{43}a_{41}X_2$
III.	$-a_{12}a_{13}X_4$	$a_{24}a_{21}X_3$	$a_{34}a_{31}X_2$	$-a_{42}a_{43}X_1$

Hieraus ergeben sich sofort die zugehörigen Transformationen des Raumes (x) (**).

8. Je zwei der drei Involutionen liefern mit einander combinirt die dritte, alle drei combinirt die Identität. So lässt sich auch die Gruppe der 32 Involutionen im Raume (x) in Untergruppen teilen, derart dass die zugehörigen Gruppen von 32 Punkten sich in Paare sondern durch eine Involution, oder in Quadrupel durch 3 Involutionen, die verschiedenen Transfor-

(*) Die Doppelpunkte der so auf der geraden Linie entstehenden projektiven, und zwar involutorischen, Verwandtschaften sind jedesmal die Punkte, welche beide Paare, in die sich die 4 Punkte sondern, harmonisch trennen und somit die Verschwindungspunkte der zu einer jene 4 Punkte liefernden Binärform gehörigen Covariante T (Clebsch, *Binärformen*, pag. 142).

(**) S. Harnack, *Math. Ann.*, Bd. 12, S. 82 Anm.

mationen der Geraden in sich entsprechen, oder auch durch die Involutionen, welche die früher besprochenen Quadrupel auf der biquadratischen Raumcurve liefern u. s. f.

9. Den Sehnen der biquadratischen Raumcurve entsprechen die dem Haupttetraeder einbeschriebenen Kegelschnitte, welche die Gerade g doppelt schneiden, und insbesondere entsprechen den Tangenten der Raumcurve die Kegelschnitte, welche die Gerade g und die Ebenen des Haupttetraeders berühren.

Durch den Berührungspunkt P eines dieser Kegelschnitte kann man in derselben Ebene einen anderen legen, welcher die Gerade g noch einmal schneidet und ebenfalls dem Haupttetraeder einbeschrieben ist. Dieser Kegelschnitt entspricht den Schmiegungsstrahlen der zu P gehörigen Punkte, d. h. den in den Schmiegungsebenen dieser Punkte liegenden wirklichen Sehnen.

10. Eine Schmiegungsebene der biquadratischen Raumcurve wird, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\alpha_1 = a_{12}\, a_{13}\, a_{14}\,, \quad \alpha_2 = a_{21}\, a_{23}\, a_{24}\,, \quad \alpha_3 = a_{31}\, a_{32}\, a_{34}\,, \quad \alpha_4 = a_{41}\, a_{42}\, a_{43}\,,$$

dargestellt durch folgende Gleichung:

$$\Sigma\, \alpha_i\, z_i^3\, x_i = 0,$$

wenn die z_i die Coordinaten des Schmiegungspunktes bezeichnen. Diese Schmiegungsebene ist aber Tangentialebene der Fläche:

$$\Sigma\, \alpha_i\, z_i^2\, x_i^2 = 0,$$

und dieser Fläche entspricht im anderen Raume die Ebene:

$$\Sigma\, \alpha_i\, Z_i\, X_i = 0,$$

die ihrerseits Tangentialebene der Fläche:

$$\Sigma\, \alpha_i\, Z_i^2 = 0$$

im Punkte (Z) der Geraden g ist. Diese Fläche muss somit die Gerade g enthalten und ist die einzige Fläche, die durch diese Gerade geht und das Haupttetraeder zum Poltetraeder hat.

11. Dies können wir umgekehrt benutzen, um die Ebene des Kegelschnittes zu bestimmen, welcher im Raume (X) einer Geraden mit den Coordinaten a_{ik} des Raumes (x) entspricht. Da nach dem Obigen die Fläche des Systems $(f)^3$, die diese Gerade enthält, die Gleichung hat:

$$\Sigma\, \alpha_i\, x_i^2 = 0,$$

so lautet die Gleichung der Ebene im Raume (X), die den entsprechenden Kegelschnitt enthält:

$$\Sigma \alpha_i X_i = 0.$$

12. Der Kegelschnitt selbst wird aus der Ebene ausgeschnitten durch jeden der vier Kegel:

$$\begin{array}{llll} & a_{12}\sqrt{X_2} + a_{13}\sqrt{X_3} + a_{14}\sqrt{X_4} = 0, \\ a_{21}\sqrt{X_1} & + a_{23}\sqrt{X_3} + a_{24}\sqrt{X_4} = 0, \\ a_{31}\sqrt{X_1} + a_{32}\sqrt{X_2} & + a_{34}\sqrt{X_4} = 0, \\ a_{41}\sqrt{X_1} + a_{42}\sqrt{X_2} + a_{43}\sqrt{X_3} & = 0. \end{array}$$

Diese Kegel haben aber ausser dem einen Kegelschnitt zu zweien noch je einen anderen gemein, und diesen 6 Kegelschnitten entsprechen im Raume (x) 48 Gerade: diese Geraden verbinden die Punkte paarweise, in denen die dem ersten Kegelschnitt entsprechenden acht assoziirten Geraden die Ebenen des Haupttetraeders schneiden, und bilden mit diesen acht assoziirten Geraden zusammen die sämtlichen Verbindungslinien der 16 Schnittpunkte, sofern sie nicht in den Ebenen des Haupttetraeders liegen. Durch jeden der 16 Schnittpunkte gehen 8 von diesen Linien. Jede der 8 ausgezeichneten wird also von 28 der übrigen Geraden geschnitten, in jedem Schnittpunkt mit einer Ebene des Haupttetraeders von 7. Von den 48 anderen Geraden trifft jede 16 der übrigen.

13. In der Sehnencongruenz der biquadratischen Raumcurve ist eine Reihe von bemerkenswerten Regelschaaren, i. A. 8. Grades, enthalten (*), unter denen vier besonders hervorzuheben sind: einmal die Tangentenschaar der Curve und sodann die Schaaren derjenigen Sehnen, welche zwei Gegenkanten des Haupttetraeders treffen. Die letzteren erfüllen je eine Regelfläche 4. Grades. Diesen Regelflächen sind im Raume (X) die drei Hyperboloide zugeordnet, welche die der Raumcurve entsprechende Gerade g mit je einem Paar Gegenkanten des Haupttetraeders verbinden.

14. Der Tangentenfläche t^8 der biquadratischen Raumcurve entspricht die Fläche T^4, welche von den die Gerade g und die vier Ebenen des Haupttetraeders T berührenden Kegelschnitten erfüllt wird. Diese Fläche ist eine

(*) S. Harnack, a. a. O., S. 77 ff.

Plücker'sche Complexfläche (*); einer der zugehörigen quadratischen Complexe ist ein tetraedraler mit dem Haupttetraeder T. Sie wird gleichzeitig erfüllt von den cubischen Raumcurven, welche die Gerade g berühren und dem Tetraeder T umschrieben sind.

15. Sie ist von der vierten Ordnung und der vierten Classe. Die Gerade g ist für sie eine Schneide. Sie hat ferner acht Knotenpunkte, von denen vier die Ecken des Haupttetraeders sind und die übrigen auf g liegen, und acht singuläre Ebenen, darunter die vier Ebenen des Haupttetraeders, die sie längs Kegelschnitten berühren. Die übrigen vier singulären Ebenen berühren sie längs Geraden und gehen durch die Gerade g und je eine Ecke des Haupttetraeders, durch die auch die Berührungslinie geht.

16. Die Fläche ist sich selbst reciprok zugeordnet in der polaren Correlation, deren Ordnungsfläche durch die Gerade g geht und das Haupttetraeder zum Poltetraeder hat.

17. Die cubischen Raumcurven (C) der Fläche sind durch die Kegelschnitte (K) der Fläche und deren Ebenen projektiv auf einander bezogen. Umgekehrt sind die Kegelschnitte (K) durch die Raumcurven (C) projektiv auf einander bezogen, indem entsprechende Punkte immer auf derselben Curve (C) liegen. Insbesondere entsprechen die Berührungspunkte der Kegelschnitte mit derselben Ebene des Haupttetraeders einander, die auf einem singulären Kegelschnitte der Fläche liegen. Die Strahlen aus den Berührungspunkten der Kegelschnitte (K) mit der Geraden g nach ihren Berührungspunkten mit den 4 Ebenen des Haupttetraeders haben constantes Doppelverhältnis.

18. Der tetraedrale Complex, zu dem die Complexfläche T^4 gehört, hat auch für die biquadratische Raumcurve, die der Geraden g entspricht, eine besondere Bedeutung.

Jedem Punkte P des Raumes können wir bez. der biquadratischen Raumcurve eine Gerade p als Polare zuweisen, die so entsteht: Wir ziehen durch den Punkt P die beiden Sehnen an die Raumcurve, suchen auf ihnen die vierten harmonischen Punkte zu P und den auf ihnen liegenden Curvenpunkten und verbinden dieselben durch eine Gerade, dies ist dann die Polare p von P. Sie ist die Schnittlinie der Polarebenen des Punktes bez. der quadratischen Flächen, die durch die biquadratische Raumcurve gehen. Sind nun, wie oben, a_{ik} die Coordinaten der Raumcurve, bezogen auf ihr Haupt-

(*) Vgl. u. a. Sturm, *Liniengeometrie*, zu Anfang des 3. Bandes.

tetraeder T, x_i die Coordinaten des Punktes P, so sind die Coordinaten der Polare p:

$$p_{ik} = a_{ik}\, x_i\, x_k\,,$$

zwischen denen, wie sofort ersichtlich, in der That die Beziehung:

$$p_{12}\, p_{34} + p_{13}\, p_{42} + p_{14}\, p_{23} = 0\,,$$

stattfindet. Es ist aber ferner:

$$\frac{p_{12}\, p_{34}}{a_{12}\, a_{34}} = \frac{p_{13}\, p_{42}}{a_{13}\, a_{42}} = \frac{p_{14}\, p_{23}}{a_{14}\, a_{23}}\,, \tag{Γ}$$

d. h. die Polaren aller Punkte des Raumes bilden einen tetraedralen Complex Γ, zu dem auch die Gerade mit den Coordinaten a_{ik}, also die Gerade g, die Polare des Einheitspunktes ist, gehört. Mit diesem Complex Γ ist demnach auch der Complex identisch, auf den wir durch die Complexfläche T^4 geführt wurden.

18[a]. Die Tangenten der biquadratischen Raumcurve sind Strahlen des Complexes Γ und die ihnen im Raume (X) entsprechenden Kegelschnitte sind Complexcurven von Γ.

18[b]. Den Punkten einer Geraden sind bez. der biquadratischen Raumcurve als Polaren die Strahlen einer quadratischen Regelschaar zugeordnet; gehört die Gerade aber selbst dem Complex Γ an, so entsprechen ihren Punkten die Strahlen des Complexkegels, dessen Spitze der Geraden entspricht.

18[c]. Den Punkten einer Ebene sind die Sehnen einer cubischen Raumcurve zugeordnet, die dem Haupttetraeder umschrieben ist, und die Tangenten dieser Raumcurve entsprechen den Punkten des Complexkegelschnittes, der in der Ebene liegt.

19. Diese Complexkegelschnitte sind nichts anderes als die Kegelschnitte, welche im Raume (X) den zum Raume (x) gerechneten Strahlen des Complexes Γ entsprechen.

Eine charakteristische Eigenschaft des tetraedralen Complexes ist es nämlich, dass man alle seine Geraden aus einer hervorgehen lassen kann durch die Collineationen, die sein Haupttetraeder ungeändert lassen. Durch dieselben Collineationen müssen auch alle Complexkegelschnitte aus einem hervorgehen. Durch dieselben Collineationen müssen aber auch die Kegelschnitte, die den Complexstrahlen in der von uns betrachteten Punktverwandtschaft entsprechen, in einander übergehen (vgl. III, 3), und deshalb, weil sie sich teil-weise mit den Complexkegelschnitten decken (18^a), ganz mit ihnen zusammenfallen.

20. Rechnet man nun den Complex Γ zum Raume (X), so entsprechen seinen Strahlen im Raume (x) dreifach unendlich viele biquadratische Raumcurven, die alle aus einer durch die Collineationen, die das Haupttetraeder ungeändert lassen, hervorgehen. Wollen wir den tetraedralen Complex Γ in der oben (18) angegebenen Weise auf den Punktraum beziehen, so können wir irgend eine von diesen biquadratischen Raumcurven zur Ordnungscurve wählen. Denn die Coordinaten p_{ik} dieser Ordnungscurve müssen, damit sie den Complex Γ liefert, der Bedingung:

$$\frac{p_{12}\,p_{34}}{a_{12}\,a_{34}} = \frac{p_{13}\,p_{42}}{a_{13}\,a_{42}} = \frac{p_{14}\,p_{23}}{a_{14}\,a_{42}}$$

genügen, d. h. die ihr im Raume (X) entsprechende Gerade muss zum Complex Γ gehören.

21. Aus diesen Betrachtungen geht hervor, wie sich der Gesamtheit der Geraden im Raume, wenn man ein festes Tetraeder T annimmt, gleichartige Mannigfaltigkeiten von Kegelschnitten zuordnen, die alle die Ebenen des Tetraeders berühren, von cubischen Raumcurven, die alle durch die Ecken des Tetraeders gehen, und endlich von biquadratischen Raumcurven, die alle das Tetraeder zum Haupttetraeder haben. Aus allen diesen Mannigfaltigkeiten heben sich solche Complexe heraus, deren sämtliche Curven aus einer durch die Collineationen hervorgehen, welche das Tetraeder T ungeändert lassen.

22. Fragen wir nun nach den Collineationen, die das Tetraeder T und eine von diesen Curven in sich überführen, so ist die Frage bereits beantwortet für die Geraden und biquadratischen Raumcurven. Ganz ähnlich lautet die Antwort auch für die Kegelschnitte und cubischen Raumcurven. Ausser der Identität ergeben sich auch hier drei Involutionen, welche die vier Punkte, die die Curven mit dem Tetraeder T gemein haben, paarweise vertauschen. Bei den biquadratischen Raumcurven nimmt die Antwort deswegen einen etwas anderen Charakter an, weil diese Curven nicht mehr rational sind.

23. Für die cubische Raumcurve verdienen die erwähnten drei Involutionen und die Quadrupelanordnung, welche sie auf der Raumcurve begründen, eine kurze Darstellung (*).

(*) Vgl. für das Folgende W. Stahl in *Crelle's Journal*, Bd. 101, S. 83 ff.

Die cubische Raumcurve wird aus den Ecken des ihr einbeschriebenen Tetraeders T durch 4 Kegel zweiter Ordnung projizirt, deren Gleichungen sich schreiben lassen wie folgt:

$$\begin{array}{llll} & b_{12}\,x_3\,x_4 + b_{13}\,x_4\,x_2 + b_{14}\,x_2\,x_3 = 0\,, \\ b_{21}\,x_3\,x_4 & + b_{23}\,x_4\,x_1 + b_{24}\,x_1\,x_3 = 0\,, \\ b_{31}\,x_2\,x_4 + b_{32}\,x_4\,x_1 & + b_{34}\,x_1\,x_2 = 0\,, \\ b_{41}\,x_2\,x_3 + b_{42}\,x_3\,x_1 + b_{43}\,x_1\,x_2 & = 0\,, \end{array}$$

indem:

$$b_{ik} = -\,b_{ki}.$$

24. Aus der Analogie dieser Gleichungen mit denen für die Verbindungsebenen einer Geraden mit den Ecken des Coordinatentetraeders ergiebt sich für die drei Involutionen, welche die cubische Raumcurve zugleich mit dem Coordinatentetraeder in sich überführen, das Schema:

	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4
I.	$-b_{23}\,b_{24}\,x_2$	$-b_{13}\,b_{14}\,x_1$	$b_{41}\,b_{42}\,x_4$	$b_{31}\,b_{32}\,x_3$
II.	$-b_{32}\,b_{34}\,x_3$	$b_{43}\,b_{41}\,x_4$	$-b_{14}\,b_{12}\,x_1$	$b_{21}\,b_{23}\,x_2$
III.	$-b_{42}\,b_{43}\,x_4$	$b_{34}\,b_{31}\,x_3$	$b_{24}\,b_{21}\,x_2$	$-b_{12}\,b_{13}\,x_1$

25. Durch je zwei Gegenkanten des Tetraeders T und die cubische Raumcurve geht ein Hyperboloid. Die Gleichungen dieser drei Flächen ergeben sich sofort durch Addition je zweier der vier Kegelgleichungen und lauten:

$$\begin{array}{l} b_{23}\,x_1\,x_4 + b_{24}\,x_1\,x_3 + b_{13}\,x_2\,x_4 + b_{14}\,x_2\,x_3 = 0\,, \\ b_{34}\,x_1\,x_2 + b_{32}\,x_1\,x_4 + b_{14}\,x_3\,x_2 + b_{12}\,x_3\,x_4 = 0\,, \\ b_{42}\,x_1\,x_3 + b_{43}\,x_1\,x_2 + b_{12}\,x_4\,x_3 + b_{13}\,x_4\,x_2 = 0\,. \end{array}$$

Diese Hyperboloide haben zu zweien ausser der cubischen Raumcurve eine Gerade gemein. Die Coordinaten der drei Geraden, die wir so erhalten, sind die folgenden:

	p_{12}	p_{34}	p_{13}	p_{42}	p_{14}	p_{23}
1.	$-b_{34}$	$-b_{12}$	b_{42}	b_{13}	b_{23}	b_{14}
2.	b_{34}	b_{12}	$-b_{42}$	$-b_{13}$	b_{23}	b_{14}
3.	b_{34}	b_{12}	b_{42}	b_{13}	$-b_{23}$	$-b_{14}$

Um diese Formeln zu deuten, nehmen wir die Gerade mit den Coordinaten:

$$b_{34} \qquad b_{12} \qquad b_{42} \qquad b_{13} \qquad b_{23} \qquad b_{14}$$

hinzu, dann bilden diese vier Geraden ein Quadrupel im Sinne des § 5 im ersten Abschnitt und liegen auf einer Fläche 2. Ordnung, deren Gleichung lautet:

$$b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2 = 0\,, \tag{L}$$

indem wir setzen:

$$b_1 = b_{34}\, b_{42}\, b_{23}\,, \quad b_2 = b_{43}\, b_{31}\, b_{14}\,, \quad b_3 = b_{12}\, b_{24}\, b_{41}\,, \quad b_4 = b_{21}\, b_{13}\, b_{32}\,.$$

Suchen wir aber die Verbindungsebene der drei Punkte, welche aus einem beliebigen Punkte durch die drei Involutionen I, II, III hervorgehen, so zeigt sich, dass diese Ebene die Polarebene des Punktes bez. der Fläche (L) ist. Die Punktquadrupel des Raumes, welche durch die drei Involutionen in sich übergehen, bilden also je ein Poltetraeder der Fläche (L).

Die von uns ausführlich behandelte quadratische Verwandtschaft hat, wie bereits erwähnt, Wilhelm Stahl benutzt, um aus der Tangentenfläche der Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art die desmische Fläche 12. Ordnung herzuleiten. Es sei uns gestattet, mit wenigen Worten noch auf diesen Punkt zu sprechen zu kommen.

Die desmische Fläche 4. Ordnung fanden wir als Enveloppe eines quadratischen Büschels von Flächen 2. Ordnung mit gemeinsamem Poltetraeder (II, 31). Die reziproke Fläche 4. Classe muss darum die Enveloppe einer quadratischen Schaar von Flächen 2. Classe sein. Diese Flächen 2. Classe haben 8 gemeinsame Tangentialebenen und berühren dieselben in den Punkten je eines Kegelschnittes k. Jeder dieser Kegelschnitte k muss die vier Ebenen des Haupttetraeders berühren. Die 8 singulären Flächen der quadratischen Schaar fallen nämlich paarweise zusammen und ihre Kegelschnitte liegen in den Ebenen des Haupttetraeders. (Vgl. I, 31.) Die gemeinsamen Tangentialebenen der Flächen der quadratischen Schaar entsprechen nun, wenn man sie zum Raume (x) rechnet, in unserer Verwandtschaft einer Steiner'schen Fläche des Raumes (X) (III, 1) und die in ihnen liegenden Kegelschnitte k einer Haupttangentencurve K der Steiner'schen Fläche (III, 10). Den Schmiegungsebenen dieser biquadratischen Raumcurve entsprechen ferner die Flächen der quadratischen Schaar selbst, und darum der Tangentenfläche dieser Raumcurve die desmische Fläche 4. Classe. Die Tangentenfläche ist von der 6. Ordnung und die desmische Fläche von der 12. Ordnung.

Betreffs der Eigenschaften der desmischen Fläche, die sich sonach aus den Eigenschaften der Tangentenfläche der biquadratischen Raumcurve ableiten lassen, sei auf die letzten Seiten der Stahl'schen Abhandlung verwiesen.

Strassburg, den 13. Mai 1897.

La composizione dei Gruppi finiti il cui grado è la quinta potenza di un numero primo.

(Di G. Bagnera, *a Palermo.)*

PREFAZIONE.

Cayley ha per il primo posta l'importante questione (*) di costruire tutti i possibili gruppi di un dato grado n.

Non bisogna, nemmeno lontanamente, sperare che il problema, enunciato in termini così generali, possa in qualche maniera essere abbordabile: delle ipotesi sono necessarie sopra l'intero n per servire di fondamento ad un ragionamento qualsiasi, e le ipotesi che hanno condotto in questi ultimi anni ai più rimarchevoli risultati si riferiscono al modo con cui l'intero n è composto con i suoi fattori primi.

Il sig. Netto ha dato (**) tutti i gruppi il cui grado è il prodotto di due soli numeri primi eguali o diseguali; il sig. Hölder ha, per la prima volta (***), dimostrato che tutti i gruppi il cui grado è il prodotto di tre numeri primi, eguali o diseguali, sono metaciclici (risolubili) (****); poi, in un lavoro posteriore (*****), lo stesso Autore ha dato la composizione dei

(*) Cayley's *Mathematical papers,* Vol. II, 125.

(**) Netto. *Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra*, 1882, pag. 133.

(***) Hölder. *Die einfachen Gruppen im ersten und zweiten Hundert der Ordnungszahlen.* Mathematische Annalen, Band 40, a. 1892.

(****) Nel presente lavoro mi servo delle denominazioni che, per i gruppi finiti, sono state adottate dal sig. H. Weber nel suo libro: *Lehrbuch der Algebra.*

(*****) Hölder. *Die Gruppen der Ordnungen* p^3, $p\,q^2$, $p\,q\,r$, p^4. Mathematische Annalen, Band 43, a. 1893.

gruppi di tale grado e quella di tutti i gruppi, il cui grado è la quarta potenza di un numero primo.

Seguendo lo stesso ordine d'idee, il sig. FROBENIUS ha osservato (*) che tutti i gruppi, il cui grado è il prodotto di quattro fattori primi, sono metaciclici, fatta eccezione per il grado $2^2 . 3 . 5 = 60$ dove si presenta il noto gruppo dell'icosaedro che è un gruppo semplice. Il sig. FROBENIUS è andato molto più in là: egli ha stabilito i due sorprendenti risultati generali che ogni gruppo, il cui grado è il prodotto di ν fattori primi tra cui ve ne siano $\nu - 1$ eguali, oppure il prodotto di ν fattori primi due a due diseguali, è necessariamente metaciclico, e, chi ha interesse di conoscere le ingegnose dimostrazioni di questi due teoremi, potrebbe leggerle nel libro del signor H. WEBER (**).

Il sig. HÖLDER, con molta fortuna, è ritornato sulla questione nell'anno 1895 (***) e, ponendo a fondamento l'ultimo dei due citati teoremi del sig. FROBENIUS, ha dato la composizione e la classificazione di tutti i possibili gruppi, il cui grado è il prodotto di quanti si vogliano fattori primi due a due diseguali; inoltre, nello stesso lavoro, ha stabilito il notevolissimo risultato che ogni gruppo di tale grado è necessariamente isomorfo ad un gruppo lineare di permutazioni.

Ma, dare la composizione e la classificazione di tutti i gruppi, il cui grado è il prodotto di quanti si vogliano fattori primi eguali, è un problema di ben altra portata. Su questo riguardo i risultati generali più importanti sono dovuti a SYLOW (****). Il sig. HÖLDER, nel citato lavoro del 1893, ha formato tutti i gruppi dei gradi p^3 e p^4, e, quasi contemporaneamente, è apparso un lavoro del sig. YOUNG (*****) il quale, in fondo, si è anche limitato a dare la composizione di tutti i gruppi dei gradi p^3 e p^4.

Io do, per la prima volta, la composizione di tutti i gruppi di grado p^5.

(*) FROBENIUS. *Ueber auflösbare Gruppen.* Sitzungsberichte der Berliner Akademie, a. 1893, I, pag. 337.

(**) H. WEBER. *Lehrbuch der Algebra.* Vol. II, pag. 129 e sg.

(***) HÖLDER. *Die Gruppen mit quadratfreier Ordnungszahl.* Göttinger Nachr., a. 1895.

(****) SYLOW. *Théorèmes sur les groupes de substitutions.* Mathematische Annalen, Band V.

(*****) YOUNG. *On the determination of Groups whose order is a power of a prime.* American Journal of Mathematics, Vol. XV, a. 1893.

È precisamente a partire dal valore $\nu = 5$ che il problema della composizione dei gruppi di grado p^ν mostra la sua vera faccia, giacchè, mentre qualunque sia il numero primo p esistono sempre:

un solo gruppo di grado p; due soli gruppi di grado p^2; cinque soli gruppi di grado p^3; soltanto quindici gruppi di grado p^4 tutte le volte che è $p > 2$; per i gruppi di grado p^5 accade invece che il loro numero dipende essenzialmente dal valore del numero primo p.

Il caso particolare di $p = 2$ è stato tentato dal sig. LEVAVASSEUR: egli dice (*) di aver trovato più di settantacinque gruppi di grado $2^5 = 32$ e di non avere ancora terminata la enumerazione; però, i risultati del sig. LEVAVASSEUR sono stati messi in dubbio dal sig. MILLER (**), il quale, sebbene giunga anch'egli a risultati non esatti, si accosta maggiormente al vero; giacchè, come appresso si vedrà, i gruppi di grado 32 sono soltanto in numero di cinquanta.

Nella prima parte di questo lavoro, dopo di avere stabilito nel § I il principio generale, che serve di fondamento alle successive ricerche, ritrovo anzitutto nel § II i gruppi di grado p^3 e p^4: ciò è stato necessario per potere, con uniformità di metodo, trattare i gruppi di grado p^5. Le differenze che si potrebbero osservare tra la tabella che sta alla fine del detto paragrafo ed i risultati dei sig. HÖLDER e YOUNG non hanno, e si comprende, niente di sostanziale: esse provengono dal fatto che io ho, qualche volta, scelto in modo diverso i tipi ridotti; però, nella maggior parte dei casi, per fare il confronto basta cambiare il nome agli elementi generatori.

Nel § III poi mi occupo della composizione dei gruppi di grado p^5, limitandomi al caso in cui questi posseggono più d'un divisore Abeliano d'indice p.

Nella seconda parte del lavoro, la quale comprende i §§ IV, V, VI e VII, è sviluppata l'analisi che riguarda gli altri casi, ed è data la classificazione completa di tutti i gruppi di grado p^5.

La classificazione, che ho adottata, a me basta per esser sicuro che nessun gruppo di grado p^5 mi sia sfuggito, e non mi curo di sapere se questa classificazione sia più o meno conveniente nel caso generale. D'altronde, giacchè in tal caso nulla o poco è conosciuto, una classificazione generale sarebbe cosa perfettamente arbitraria.

(*) *Comptes Rendus*, a. 1896, t. 122, pag. 182.
(**) *Comptes Rendus*, a. 1896, t. 122, pag. 370.

Quantunque io abbia fatto ogni sforzo per dare la massima omogeneità ai procedimenti, debbo confessare che, su questo punto, non ho potuto trionfare giacchè, ho dovuto spesso ricorrere ad artifizi ed a suddivisioni di ripiego anche nella ricerca dei gruppi appartenenti ad una medesima classe; ma, io dubito fortemente che questo fatto sia una necessità inerente alla natura del problema.

PARTE PRIMA.

§ I. Generalità.

1. Sia P un gruppo finito di grado n e Γ una classe di n elementi sopra la cui natura non si fa alcuna ipotesi. Io suppongo che, in un modo qualunque, si sia stabilita una corrispondenza S, univoca e reciproca, tra gli elementi del gruppo P e quelli della classe Γ e denoto con $S(e)$ l'elemento di Γ che corrisponde all'elemento e di P.

Essendo e' ed e'' due arbitrari elementi di P, si ponga *per definizione:*

$$S(e')\,S(e'') = S(e'\,e'')\,;$$

allora, rispetto a questa legge di composizione, gli elementi di Γ costituiscono un gruppo $G = S(P)$ che si può pensare come il più generale gruppo oloedricamente isomorfo a P. Chiamerò brevemente il gruppo G una *rappresentazione* di P in Γ: cambiando la corrispondenza S cambia, in generale, la legge di composizione degli elementi di Γ e si ottiene un'altra rappresentazione di P in Γ.

Se T è una operazione che permuta gli elementi di Γ, l'operazione $T\,S$ stabilisce una nuova corrispondenza tra gli elementi di P e gli elementi di Γ, e può accadere, in particolare, che le due corrispondenze S e $T\,S$ definiscano la stessa legge di composizione negli elementi di Γ. Allora, l'operazione $S^{-1}\,T\,S$ fa corrispondere ad un elemento di P un elemento di P, in modo tale che al prodotto di due elementi corrisponde il prodotto dei due elementi corrispondenti. Esprimerò questo fatto dicendo che l'operazione $S^{-1}\,T\,S$ produce una trasformazione d'isomorfismo del gruppo P in sè.

È chiaro che tutte le possibili operazioni T, che corrispondono a trasformazioni d'isomorfismo del gruppo P in sè, costituiscono un gruppo divisore del gruppo simmetrico delle permutazioni di n cifre.

2. Siano:

$$E_1\,,\ E_2\,,\ldots,\ E_\nu\,, \tag{1}$$

elementi di Γ. Se, nella rappresentazione $G = S(P)$, il composto:

$$E_1^{\alpha_1} E_2^{\alpha_2} \ldots E_\nu^{\alpha_\nu},$$

facendo percorrere ai numeri interi indipendenti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ dati sistemi di numeri, fornisce tutti gli elementi di Γ, e ciascuno una sola volta, dirò che il gruppo G possiede la *base* (1) a ν dimensioni.

Denoti:

$$\Phi(E_1, E_2, \ldots, E_\nu) = \Psi(E_1, E_2, \ldots, E_\nu), \tag{2}$$

una relazione tra gli elementi (1), e si faccia subire agli elementi di Γ una qualunque operazione T. Allora si passa dalla rappresentazione $S(P)$ alla rappresentazione $TS(P)$ e viene perciò ad essere cambiata la legge di composizione degli elementi di Γ: dunque, la relazione (2), che sussiste nella rappresentazione $S(P)$, non si verifica, in generale, nella rappresentazione $T(G) = TS(P)$.

Epperò, una volta fissate alcune relazioni come la (2), io posso propormi il problema di cercare tutte le possibili operazioni T, che conservano le dette relazioni. Queste tali operazioni costituiscono un gruppo, il quale contiene, come divisore, il gruppo formato da tutte le operazioni T che corrispondono a trasformazioni d'isomorfismo del gruppo P in sè.

3. Io mi debbo occupare nel presente lavoro solamente di gruppi P_ν il cui grado è una potenza p^ν di un numero primo p: è quindi conveniente di fissare le idee al caso mio.

Se G_ν è una rappresentazione qualunque di un tale gruppo in Γ, è noto (*) che è possibile costruire una serie di composizione:

$$G_\nu, \; G_{\nu-1}, \; G_{\nu-2}, \ldots, \; G_1, \tag{3}$$

tale che ogni termine della serie sia divisore normale di tutti i termini che lo precedono. L'ultimo termine G_1 della serie è allora un divisore normale di grado p del gruppo G_ν e quindi, l'elemento generatore E_1 di G_1 ha la nota (**) proprietà di essere invertibile con tutti gli elementi di G_ν.

(*) V. ad es. una mia Nota: *Sopra i divisori normali d'indice primo di un gruppo finito.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Vol. VII, 2.° sem., anno 1898.

(**) Se E è un elemento di G_ν di grado p^k, dalla relazione $E^{-1} E_1 E = E_1^\alpha$ si deduce $\alpha^{p^k} \equiv 1 \pmod{p}$ e quindi $\alpha \equiv 1 \pmod{p}$.

Gli elementi di G_ν, che godono la detta proprietà, formano evidentemente gruppo e questo gruppo, giacchè contiene G_1, non può coincidere col gruppo formato dall'elemento identico.

Ciò posto, chiamerò *divisore invertibile* di G_ν il massimo divisore *proprio* di G_ν tale che ogni suo elemento è invertibile con qualunque elemento del gruppo principale G_ν, e supporrò, cosa sempre possibile, che questo divisore faccia parte della serie di composizione (3).

Bisogna osservare che il divisore invertibile H di un gruppo G_ν è perfettamente determinato, tranne il caso in cui G_ν è un gruppo Abeliano: allora si può scegliere come gruppo H un divisore qualunque d'indice p di G_ν.

Se p^h è il grado di H, il numero:

$$\mu = \nu - h - 1,$$

è un numero invariantivo del gruppo G_ν e questo numero è, per quel che segue, della massima importanza.

Un gruppo G_ν, che ha il numero invariantivo μ, sarà denotato con G_ν^μ; così, ad es., i gruppi G_ν^0 sono gruppi Abeliani.

4. Nella Nota citata precedentemente, supponendo che un gruppo finito G possegga divisori normali d'indice primo p, ho chiamato *indipendenti* λ di tali divisori, quando la loro intersezione K ha in G l'indice p^λ, ed ho fatto vedere che, se λ è il numero totale dei divisori normali indipendenti d'indice p contenuti in G, questo possiede $\frac{p^\lambda - 1}{p - 1}$, e non più, divisori normali d'indice p.

Inoltre ho dimostrato che il gruppo complementare $G|K$ è Abeliano ed ha tutti i suoi elementi di grado p; dunque, due arbitrari elementi del gruppo G sono invertibili rispetto a mod. K e le potenze p^{me} di tutti gli elementi di detto gruppo appartengono a K.

In un gruppo G_ν, di grado p^ν, ogni divisore d'indice p è normale, quindi si ha $\lambda \geqq 1$, ed io dico che si ha $\lambda = 1$ solamente quando il gruppo G_ν è ciclico.

Siccome la proposizione si verifica per i gruppi di grado p^2, basta provare che, ammettendola vera per i gruppi di grado $p^{\nu-1}$, sussiste ancora per i gruppi di grado p^ν. Si chiami G_1 un divisore normale di grado p del gruppo G_ν: se questo gruppo ha un solo divisore d'indice p, anche il gruppo $G_\nu|G_1$ complementare di G_1, ha un solo divisore d'indice p, e giacchè detto gruppo complementare è di grado $p^{\nu-1}$, esso è ciclico per ipotesi. Sia dunque

E un elemento di G_ν di grado $p^{\nu-1}$ rispetto a mod. G_1 ed E_1 un elemento generatore di G_1. Se fosse $E^{p^{\nu-1}}=1$, il gruppo G_ν, contrariamente all'ipotesi, ammetterebbe il divisore d'indice p generato dall'elemento E ed il divisore d'indice p generato dai due elementi E^p ed E_1. Dunque, l'elemento E è di grado p^ν e quindi G_ν è un gruppo ciclico.

Ciò posto, di ogni gruppo G_ν^μ io do anche il numero λ dei divisori indipendenti d'indice p che il detto gruppo possiede e convengo di denotare G_ν^μ con $G_\nu^{\mu\lambda}$ quando voglio mettere in evidenza il numero invariantivo λ.

È utile osservare che, se è $\mu>0$, deve essere $2\leq\lambda<\nu$: ciò risulta dalle cose ultimamente dette.

Inoltre si noti che, nell'ipotesi di $\mu>0$, il gruppo $G_\nu|H$ non è ciclico, e quindi esistono almeno due distinti divisori d'indice p di G_ν che contengono il gruppo H.

5. Ritornando alla serie (3), che io chiamo una serie *canonica* di composizione di G_ν, sia E_i ($i=1, 2,\ldots, \nu$) un elemento di G_i fuori di G_{i-1} e G_0 il gruppo formato dall'elemento identico: siano poi E'_i, $E''_i,\ldots$ elementi qualunque di G_i.

Ciò posto, giacchè il gruppo $G_i|G_{i-1}$ è un divisore normale di grado p del gruppo $G_\nu|G_{i-1}$, risulta che l'elemento E_i è invertibile con ogni elemento del gruppo G_ν rispetto a mod. G_{i-1}; dunque, in particolare, supponendo $j>i$, si ha:

$$E_j^{-1}E_iE_j=E_iE'_{i-1},\quad E_i^p=E''_{i-1}; \tag{4}$$

dove gli elementi E'_{i-1} ed E''_{i-1} appartengono, per quello che si è detto nel n.° precedente, al gruppo K intersezione dei divisori d'indice p del gruppo G_ν.

Data la serie di composizione (3) e, relativamente ad essa, definendo gli elementi:

$$E_\nu,\ E_{\nu-1},\ldots,\ E_1,$$

nell'anzidetto modo, il composto:

$$E_\nu^{\alpha_\nu}E_{\nu-1}^{\alpha_{\nu-1}}\ldots E_1^{\alpha_1},$$

fornisce tutti gli elementi del gruppo G_ν, e ciascuno una sola volta, attribuendo agli interi α_ν, $\alpha_{\nu-1},\ldots$, α_1 valori scelti ad arbitrio nel sistema di numeri $0, 1, 2,\ldots, p-1$. Dunque, gli elementi E_ν, $E_{\nu-1},\ldots$, E_1 costituiscono una base a ν dimensioni del gruppo G_ν e tra i detti elementi sussistono le relazioni (4). Una tale base la chiamerò una *base canonica* (*) di G_ν.

(*) L'esistenza di una base canonica per un gruppo di grado p^ν è stata, per la prima volta, dimostrata da Sylow, l. c.

Quando si conosce una base canonica di G_ν è perfettamente individuata una serie canonica di composizione del gruppo G_ν; ma, in corrispondenza ad ognuna di dette serie, si possono definire più basi canoniche.

Sia:

$$\mathbf{E}_\nu\,,\ \mathbf{E}_{\nu-1}\,,\dots,\ \mathbf{E}_1\,,$$

una base canonica di G_ν diversa dalla precedente. L'operazione che porta ogni elemento $\mathbf{E}_\nu^{\alpha_\nu}\mathbf{E}_{\nu-1}^{\alpha_{\nu-1}}\dots\mathbf{E}_1^{\alpha_1}$ nell'elemento $E_\nu^{\alpha_\nu}E_{\nu-1}^{\alpha_{\nu-1}}\dots E_1^{\alpha_1}$, e che rappresenterò con la notazione:

$$T=\begin{pmatrix}E_\nu\,, & E_{\nu-1}\,,\dots, & E_1\\ \mathbf{E}_\nu\,, & \mathbf{E}_{\nu-1}\,,\dots, & \mathbf{E}_1\end{pmatrix},$$

lascia inalterata la forma di tutte le relazioni (4), ma cambia, in generale, gli elementi E'_i ed E''_i che ivi figurano. Si può allora scegliere l'operazione T in modo che la rappresentazione $T(G_\nu)$ sia, da un dato punto di vista, più conveniente della rappresentazione G_ν.

Ma ciò che è ancora più importante è il fatto che, date due rappresentazioni dello stesso gruppo P_ν in Γ e scegliendo in ciascuna di esse una base canonica, si può passare dalla serie di relazioni (4) relativa alla prima rappresentazione alla serie di relazioni (4) relativa alla seconda rappresentazione mediante una operazione T appartenente al gruppo delle operazioni che portano una base canonica in una base canonica.

§ II. I Gruppi di grado p^3 e p^4.

6. Esistono soltanto tre gruppi $G_3{}^0$, i quali sono:

un gruppo $G_3{}^{0,1}$, che è il gruppo ciclico;

un gruppo $G_3{}^{0,2}$, che ha un elemento di grado p^2 ed un elemento di grado p il quale non è una potenza del primo;

un gruppo $G_3{}^{0,3}$, che ha tutti i suoi elementi di grado p.

Mettendo in evidenza, per ciascuno di questi tre gruppi, gl'invarianti del sig. Frobenius (*), scriverò:

$$G_3{}^{0,1}\,\{[p^3]\}\,,\qquad G_3{}^{0,2}\,\{[p^2]\,[p]\}\,,\qquad G_3{}^{0,3}\,\{[p][p][p]\}\,.$$

(*) Frobenius u. Stickelberger. *Crelle's Journal*, Vol. LXXXVI, pp. 224-236.

7. I gruppi G_3 che non sono Abeliani sono gruppi $G_3^{1,2}$.

Se:

$$E_3,\ E_2,\ E_1,$$

è una base canonica di un tale gruppo, con le notazioni del paragrafo precedente si ha $G_1 = H = K$, e quindi è:

$$\left.\begin{array}{l} E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2 E_1^{\alpha}, \qquad E_3^{-1} E_1 E_3 = E_1, \qquad E_2^{-1} E_1 E_2 = E_1; \\ \qquad E_3^{p} = E_1^{\gamma}, \qquad E_2^{p} = E_1^{\beta}, \qquad E_1^{p} = 1; \end{array}\right\} \quad (1)$$

dove il numero α è primo con p. Allora, dati i due elementi E_3, E_2, si può definire l'elemento E_1 mediante la relazione:

$$E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2 E_1, \tag{2}$$

e perciò, nelle relazioni (1), ritengo $\alpha \equiv 1 \pmod p$.

Io ho, in questo modo, dimostrato che, se esiste un gruppo P_3 rappresentato in Γ da un $G_3^{1,2}$, gli elementi E_3, E_2, E_1 di una base canonica del gruppo rappresentativo debbono soddisfare le (1). Bisogna pertanto provare che un tale gruppo P_3 effettivamente esiste.

Si considerino come elementi tutti i simboli:

$$e_3^{x}\, e_2^{y}\, e_1^{z}, \tag{3}$$

che si ottengono attribuendo agli esponenti x, y, z arbitrari valori interi, e si chiamino eguali due tali simboli quando si deducono l'uno dall'altro facendo variare ordinatamente i detti esponenti di $p\,k_3$, $p\,k_2$, h_1, purchè gl'interi h_1, k_2, k_3 soddisfino alla congruenza:

$$h_1 + \beta\, k_2 + \gamma\, k_3 \equiv 0 \pmod p.$$

Si ottengono così soltanto p^3 elementi distinti.

Così posto, se si assume come definizione del prodotto di due elementi la relazione:

$$(e_3^{x'}\, e_2^{y'}\, e_1^{z'})\,(e_3^{x''}\, e_2^{y''}\, e_1^{z''}) = e_3^{x'+x''}\, e_2^{y'+y''}\, e_1^{z'+z''+y'x''}, \tag{4}$$

riesce facile verificare che, essendo A, B, C elementi (3), sono soddisfatte le condizioni:

1.ª) se è $A = B$, è $A\,C = B\,C$ e $C\,A = C\,B$,
2.ª) se è $A\,C = B\,C$ oppure $C\,A = C\,B$, è $A = B$,
3.ª) in ogni caso, è $(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$.

I simboli (3), rispetto alla legge di composizione (4), costituiscono dunque un gruppo P_3, di cui l'elemento unità è il simbolo $e^0{}_3 e^0{}_2 e^0{}_1$, e se si rappresenta detto gruppo in Γ facendo corrispondere agli elementi $e_3^1 e_2^0 e_1^0$, $e_3^0 e_2^1 e_1^0$, $e_3^0 e_2^0 e_1^1$ ordinatamente gli elementi E_3, E_2, E_1, questi costituiscono una base canonica di un gruppo $G_3^{1,2}$ e soddisfano alle relazioni (1), le quali perciò, nel senso del sig. Dyck (*), definiscono sempre un gruppo $G_3^{1,2}$ qualunque siano gl'interi β e γ.

8. Ma, giacchè non sono da considerarsi come gruppi distinti le diverse rappresentazioni di uno stesso gruppo, bisogna vedere come variano β e γ relativamente al gruppo delle operazioni:

$$T = \begin{pmatrix} E_3, & E_2, & E_1 \\ \mathbf{E}_3, & \mathbf{E}_2, & \mathbf{E}_1 \end{pmatrix},$$

che lasciano inalterata la (2).

Ponendo:

$$\mathbf{E}_3 \equiv E_3^u E_2^v, \qquad \mathbf{E}_2 \equiv E_3^r E_2^s, \qquad (\text{mod } G_1), \tag{5}$$

affinchè la relazione (2) si conservi, bisogna prendere $\mathbf{E}_1 = E_1^{\Delta}$; quindi, per non contraddire alla definizione dell'elemento $\mathbf{E}_1$, deve essere il determinante $\Delta = u\,s - v\,r$ primo con p.

D'altra parte, io osservo che le operazioni T appartenenti alla classe definita dalle relazioni:

$$\mathbf{E}_3 \equiv E_3, \qquad \mathbf{E}_2 \equiv E_2, \qquad (\text{mod } G_1),$$

non alterano β e γ e costituiscono un divisore normale del gruppo delle operazioni T definito precedentemente; dunque, rispetto alla questione di cui mi sto occupando, posso ritenere eguale all'operazione identica ogni operazione di detta classe. In questa ipotesi, le (5) definiscono un'unica operazione che io rappresento con la notazione:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ r & s \end{vmatrix}.$$

Ora, si osservi che la relazione (2) dà subito:

$$(E_3 E_2)^n = E_3^n E_2^n E_1^{\binom{n}{2}}, \tag{6}$$

(*) W. Dyck. *Gruppentheoretische Studien.* Mathematische Annalen, Band XX, a. 1882.

e quindi, *se è* $p > 2$, si ha:

$$E_3^p = E_3^{up} E_2^{vp} = E_1^{\gamma u + \beta v}, \qquad E_2^p = E_3^{rp} E_2^{sp} = E_1^{\gamma r + \beta s}.$$

Dunque, se β_1 e γ_1 sono i nuovi valori di β e γ dopo avere eseguita la detta operazione, si trova:

$$\Delta \gamma_1 \equiv \gamma u + \beta v, \qquad \Delta \beta_1 \equiv \gamma r + \beta s, \qquad (\mathrm{mod}\, p).$$

Allora, se β e γ sono entrambi nulli (mod p), lo stesso accade per β_1 e γ_1 ed il gruppo $G_3^{1,2}$ ha tutti i suoi elementi di grado p; in caso contrario una almeno delle due operazioni:

$$\begin{vmatrix} \beta & -\gamma \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \beta & -\gamma \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

ha il determinante primo con p, e questa porta β e γ ordinatamente nei resti 1 e 0 presi rispetto al modulo p.

In conclusione esistono, se è $p > 2$, due soli gruppi $G_3^{1,2}$ in corrispondenza alle due serie di formole:

$$\left.\begin{array}{lll} E_3^p = 1, & E_2^p = 1, & E_1^p = 1; \\ E_3^p = 1, & E_2^p = E_1, & E_1^p = 1; \end{array}\right\} \qquad (7)$$

e, tralasciando di scrivere le relazioni che esprimono che l'elemento E_1 appartiene al divisore invertibile H, questi due gruppi sono perfettamente determinati dalle relazioni (7) insieme alla (2).

9. Il caso di $p = 2$ esige una breve analisi particolare. In questa ipotesi, tutte le possibili operazioni:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ r & s \end{vmatrix},$$

formano un gruppo di grado sei che può essere generato dalle due operazioni:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$

di secondo e terzo ordine rispettivamente.

Osservando che la (6) dà:

$$(E_3 E_2)^2 = E_3^2 E_2^2 E_1,$$

si vede che l'ipotesi di $E_2^2 = E_1$ ed $E_3^2 = E_1$ non è cambiata dalle dette due operazioni; mentre qualunque altro caso si può ridurre a quello in cui è $E_2^2 = 1$ ed $E_3^2 = 1$.

Dunque, anche quando è $p = 2$, esistono due soli gruppi $G_3^{1,2}$ di grado $2^3 = 8$ definiti dalle due serie di formole:

$$E_3^2 = 1\,, \quad E_2^2 = 1\,, \quad E_1^2 = 1\,;$$

$$E_3^2 = E_1\,, \quad E_2^2 = E_1\,, \quad E_1^2 = 1\,,$$

e dalla relazione (2).

10. Passo ora ad occuparmi dei gruppi di grado p^4 cominciando a scrivere senz'altro i gruppi di tale grado che sono Abeliani.

Esistono soltanto cinque gruppi G_4^0 i quali sono:

un gruppo $G_4^{0,1}$, due gruppi $G_4^{0,2}$, un gruppo $G_4^{0,3}$ ed un gruppo $G_4^{0,4}$.

Mettendo in evidenza i rispettivi invarianti, rappresenterò i detti gruppi nel seguente modo:

$$G_4^{0,1}\,\{[p^4]\}, \quad G_4^{0,2}\,\{[p^3]\,[p]\}, \quad G_4^{0,2}\,\{[p^2]\,[p^2]\},$$

$$G_4^{0,3}\,\{[p^2]\,[p]\,[p]\}, \quad G_4^{0,4}\,\{[p]\,[p]\,[p]\,[p]\}.$$

Il gruppo $G_4^{0,1}$ è il gruppo ciclico di grado p^4; il primo dei due gruppi $G_4^{0,2}$ ha p divisori $G_3^{0,1}$ ed un solo divisore $G_3^{0,2}$, mentre il secondo ha $p+1$ divisori $G_3^{0,2}$; il gruppo $G_4^{0,3}$ ha un solo divisore $G_3^{0,3}$ e $p^2 + p$ divisori $G_3^{0,2}$; finalmente, tutti i $\dfrac{p^4-1}{p-1}$ divisori d'indice p del gruppo $G_4^{0,4}$ sono gruppi $G_3^{0,3}$.

11. I gruppi G_4 che non sono Abeliani sono gruppi G_4^1 oppure gruppi G_4^2: io comincio ad occuparmi dei primi.

Sia:

$$G_4^1, \quad G_3, \quad G_2, \quad G_1,$$

una serie canonica di composizione di un gruppo G_4^1 scelta in modo che si abbia $G_2 = H$.

Giacchè esistono (n.° 4) due divisori d'indice p di G_4^1 che contengono H, il gruppo K, o coincide con H oppure è un divisore proprio di H, secondo che G_4^1 è un $G_4^{1,2}$ od un $G_4^{1,3}$.

Ciò posto, se:

$$E_4, \quad E_3, \quad E_2, \quad E_1,$$

denota una base canonica relativa alla precedente serie di composizione, si ha:

$$E_4^{-1}\,E_3\,E_4 = E_3\,E_2', \; E_4^p = E_2'', \; E_3^p = E_2''', \; E_2^p = E_1', \; E_1^p = 1. \qquad (8)$$

Trattandosi di un gruppo G_4^1, l'elemento E_3 non è invertibile con E_4, mentre il contrario accade per l'elemento E_3^p che appartiene ad H; quindi, dalla prima delle (8), risulta che E_2' è un elemento di grado p ed io posso ritenere $E_2' = E_1$. Allora, la prima delle formole (8) si può sostituire con:

$$E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1 . \tag{9}$$

Se il gruppo $H = G_2$ è ciclico, E_2'' ed E_2''' sono potenze di E_2; quindi, scegliendo E_2 in modo che sia $E_2^p = E_1$, le ultime quattro delle relazioni (8) si possono, in questo caso, sostituire con:

$$E_4^p = E_2^\alpha , \quad E_3^p = E_2^\beta , \quad E_2^p = E_1 , \quad E_1^p = 1. \tag{10}$$

Dopo ciò, si può subito dimostrare che le formole (9) e (10), insieme a quelle che esprimono che l'elemento E_2 appartiene ad H, definiscono, qualunque siano gl'interi α e β, un gruppo G_4^1.

Si considerino i simboli che si ottengono da:

$$e_4^x\, e_3^y\, e_2^z\, e_1^t ,$$

attribuendo ad x, y, z, t arbitrari valori interi, e si chiamino eguali due tali simboli quando si possono ottenere l'uno dall'altro facendo variare i detti interi ordinatamente di $p\,k_4$, $p\,k_3$, h_2, h_1, purchè sia:

$$\alpha\, k_4 + \beta\, k_3 + h_2 + p\, h_1 \equiv 0, \quad (\mathrm{mod}\ p^2).$$

Dietro questa convenzione si ottengono solamente p^4 simboli distinti.

Ora, ponendo per definizione:

$$(e_4^{x'} e_3^{y'} e_2^{z'} e_1^{t'})\ (e_4^{x''} e_3^{y''} e_2^{z''} e_1^{t''}) = e_4^{x'+x''} e_3^{y'+y''} e_2^{z'+z''} e_1^{t'+t''+y'x''} ,$$

riesce facile verificare che, rispetto a questa legge di composizione i simboli $e_4^x e_3^y e_2^z e_1^t$ costituiscono un gruppo. Se si rappresenta questo gruppo in Γ facendo corrispondere ai simboli:

$$e_4^1 e_3^0 e_2^0 e_1^0 , \quad e_4^0 e_3^1 e_2^0 e_1^0 , \quad e_4^0 e_3^0 e_2^1 e_1^0 , \quad e_4^0 e_3^0 e_2^0 e_1^1 ,$$

ordinatamente gli elementi E_4, E_3, E_2, E_1, questi costituiscono una base canonica di un gruppo G_4^1 e verificano le relazioni (9) e (10).

Si osservi che l'operazione:

$$\begin{pmatrix} E_4 & E_3 & E_2 & E_1 \\ E_4 E_2^\lambda & E_3 E_2^\mu & E_2 & E_1 \end{pmatrix},$$

cambia α e β rispettivamente in $\alpha + \lambda p$ e $\beta + \mu p$; quindi, se α e β sono multipli di p, si può supporre $\alpha = \beta = 0$.

Se uno dei due numeri α, β è primo con p, io suppongo che sia β primo con p giacchè, in caso contrario, scambio α in β mediante l'operazione:

$$\begin{pmatrix} E_4 & E_3 & E_2 & E_1 \\ E_3^{-1} & E_4^{-1} & E_2^{-1} & E_1^{-1} \end{pmatrix};$$

poi, eseguendo la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_4 & E_3 & E_2 & E_1 \\ E_4^{\beta} & E_3 & E_2^{\beta} & E_1^{\beta} \end{pmatrix},$$

mi riduco al caso di $\beta = 1$. Ciò posto, cambiando l'elemento E_4 in $E_4 E_3^{-\alpha}$. si vede facilmente che si può sempre ritenere $\alpha = 0$.

Esistono perciò due soli gruppi $G_4{}^1$ che hanno il divisore invertibile ciclico e questi due gruppi sono definiti dalla (9) e dalle seguenti modificazioni delle (10):

$E_4^p = 1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = E_1$,	$E_1^p = 1$
$E_4^p = 1$,	$E_3^p = E_2$,	$E_2^p = E_1$,	$E_1^p = 1$

Il primo di questi gruppi è un $G_4{}^{1,3}$ e fra tutti i suoi divisori d'indice p ve ne sono p^2 non Abeliani; il secondo gruppo è un $G_4{}^{1,2}$ e tutti i suoi $p+1$ divisori d'indice p sono Abeliani.

12. Si supponga ora che il gruppo $H = G_2$ non sia ciclico. Allora le ultime quattro delle relazioni (8) si scrivono:

$$E_4^p = E_2^{\alpha} E_1^{\beta}, \quad E_3^p = E_2^{\gamma} E_1^{\delta}, \quad E_2^p = 1, \quad E_1^p = 1. \tag{11}$$

Per dimostrare che le formole (9) e (11) definiscono, in ogni caso, un gruppo $G_4{}^1$, basta ripetere il ragionamento del n.° precedente, convenendo però, per andare d'accordo con le (11), di ritenere eguale al simbolo:

$$e_4{}^x e_3{}^y e_2{}^z e_1{}^t,$$

ogni altro che da quello si ottiene facendo variare gli esponenti ordinatamente di $p k_4$, $p k_3$, h_2, h_1 in modo che siano soddisfatte le congruenze:

$$\left.\begin{aligned} \alpha k_4 + \gamma k_3 + h_2 \equiv 0 \\ \beta k_4 + \delta k_3 + h_1 \equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod p.$$

Se il gruppo $G_4{}^1$ è un $G_4{}^{1,2}$, almeno uno degl'interi α, γ deve essere primo con p ed io suppongo che sia γ primo con p. Allora si può definire l'elemento E_2 mediante la relazione $E_3^p = E_2$; poi, chiamando E_4 l'elemento $E_4 E_3^{-\alpha}$ mi riduco al caso di $\alpha = 0$. Ciò posto, se non è β un multiplo di p, la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_4 & E_3 & E_2 & E_1 \\ E_4 & E_3^\beta & E_2^\beta & E_1^\beta \end{pmatrix},$$

porta β in 1.

Esistono perciò due gruppi $G_4^{1,2}$ tali che il divisore invertibile abbia tutti i suoi elementi di grado p e questi due gruppi corrispondono alle seguenti modificazioni delle formole (11):

$E_4^p = 1$,	$E_3^p = E_2$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_4^p = E_1$,	$E_3^p = E_2$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$

Se il gruppo G_4^1 è un gruppo $G_4^{1,3}$, nelle (11) bisogna supporre $\alpha = \gamma = 0$, ed allora è necessario distinguere il caso di $p > 2$ dal caso di $p = 2$.

Nel primo caso, se è $\beta = \delta = 0$, il gruppo $G_4^{1,3}$ ha tutti i suoi elementi di grado p, e ciò risulta dalla formola:

$$(E_4 E_3)^n = E_4^n E_3^n E_1^{\binom{n}{2}}; \tag{12}$$

se invece uno dei due numeri β, δ è primo con p, io posso supporre che sia δ primo con p. Allora, facendo la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_4 & E_3 & E_2 & E_1 \\ E_4^\delta & E_3 & E_2 & E_1^\delta \end{pmatrix},$$

mi riduco al caso di $\delta = 1$; poi, chiamando E_4 l'elemento $E_4 E_3^{-\beta}$ porto β in 0.

Esistono quindi, nel presente caso, due soli gruppi $G_4^{1,3}$ i quali sono definiti dalle formole:

$E_4^p = 1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_4^p = 1$,	$E_3^p = E_1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$

e dalla formola (9).

Nell'ipotesi di $p = 2$, tenendo presente la (12), si vede subito che il caso $E_4^2 = E_1$, $E_3^2 = E_1$ è irreduttibile, mentre qualunque altro caso si riduce a quello in cui è $E_4^2 = 1$, $E_3^2 = 1$.

Dunque, anche quando è $p = 2$, esistono due soli gruppi $G_4^{1,3}$ tali che il divisore invertibile non è ciclico e questi due gruppi corrispondono alle seguenti modificazioni delle formole (11):

$E_4^2 = 1$,	$E_3^2 = 1$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$
$E_4^2 = E_1$,	$E_3^2 = E_1$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$

13. Ritornando alla distinzione fatta al principio del n.° 11, io mi voglio ora occupare dei gruppi G_4 che sono G_4^2 e comincio col dimostrare che un tale gruppo possiede sempre un divisore Abeliano d'indice p ed uno solo (*).

Sia:

$$G_4^2, \quad G_3, \quad G_2, \quad G_1,$$

una serie canonica di composizione di un gruppo G_4^2 e si considerino le classi distinte di elementi:

$$G_2, \quad E' \, G_2, \quad E'' \, G_2, \ldots$$

contenute in G_4^2. Ognuno degli elementi E', E'',... deve trasformare un elemento E_2 di G_2 nel prodotto di E_2 per una potenza di E_1; ora, giacchè gli elementi E', E'',... sono in numero di $p^2 - 1$, necessariamente esistono due tali elementi, per es. E', E'', che trasformano E_2 nel prodotto di E_2 per una stessa potenza di E_1; quindi l'elemento $E'^{-1} E''$, che non sta in G_2, è invertibile con E_2. Se chiamo E_3 il detto elemento, i tre elementi E_1, E_2, E_3, permutabili due a due, generano un gruppo Abeliano il cui grado non è minore, e non può essere maggiore di p^3.

Se il gruppo G_4^2 avesse due divisori Abeliani di grado p^3, la loro intersezione, che è di grado p^2, dovrebbe essere contenuta nel gruppo H il quale è attualmente di grado p: dunque la mia tesi è dimostrata.

Ciò posto, io dico che ogni gruppo G_4^2 è un gruppo $G_4^{2,2}$. Infatti, se fosse possibile un gruppo $G_4^{2,3}$, per un tal gruppo sarebbe $K = H = G_1$ e quindi sarebbe:

$$E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1^{\alpha}, \quad E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2 E_1^{\beta},$$

(*) Questo risultato è stato comunicato per lettera dal sig. Hölder al sig. Miller. Cfr. Miller. *Sur les groupes de substitutions.* Comptes Rendus, t. 122, a. 1896, pag. 371.

con β primo con p. Allora, scegliendo l'intero m in modo che sia $\beta m + \alpha \equiv 0 \pmod{p}$, l'elemento $E_3 E_2^m$ risulta permutabile con E_4 e quindi G_3 non sarebbe il solo divisore Abeliano d'indice p contenuto in $G_4^{2,3}$.

Le considerazioni che precedono mostrano che è possibile determinare una base canonica:

$$E_4, \quad E_3, \quad E_2, \quad E_1,$$

di un gruppo G_4^2 in modo tale che sia:

$$E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_2, \quad E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2 E_1, \quad E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2. \tag{13}$$

Dopo ciò si osservi che l'elemento E_4^p sta certamente in $K = G_2$; ma, giacchè il detto elemento è invertibile con E_4, esso sta in $G_1 = H$.

Inoltre *se è* $p > 2$, dalle (13) si ricava:

$$E_4^{-p} E_3 E_4^p = E_3 E_2^p,$$

e siccome E_4^p sta in H, deve essere $E_2^p = 1$; quindi l'elemento E_3^p, che risulta allora invertibile con E_4, sta in H. Si ha dunque:

$$E_4^p = E_1^\alpha, \quad E_3^p = E_1^\beta, \quad E_2^p = 1, \quad E_1^p = 1. \tag{14}$$

Le formole (13) e (14) definiscono sempre un gruppo $G_4^{2,2}$ tutte le volte che è $p > 2$.

Infatti, considero i simboli già precedentemente definiti:

$$e_4^x \, e_3^y \, e_2^z \, e_1^t,$$

e, come mi consigliano le (14), chiamo eguali due tali simboli quando si possono dedurre l'uno dall'altro facendo variare ordinatamente gli esponenti di $p k_4$, $p k_3$, $p k_2$, h_1, purchè sia:

$$\alpha k_4 + \beta k_3 + h_1 \equiv 0 \pmod{p};$$

inoltre, per andare poi d'accordo con le (13), pongo per definizione:

$$(e_4^{x'} e_3^{y'} e_2^{z'} e^{t'}) \, (e_4^{x''} e_3^{y''} e_2^{z''} e_1^{t''}) = e_4^{x'''} e_3^{y'''} e_2^{z'''} e_1^{t'''},$$

essendo:

$$x''' = x' + x'', \quad y''' = y' + y'', \quad z''' = z' + z'' + y' x'',$$

$$t''' = t' + t'' + z' x'' + y' \binom{x''}{2}.$$

Poste queste definizioni e chiamando A, B, C tre qualunque elementi come $e_4^x e_3^y e_2^z e_1^t$, quando si vuole stabilire che tutte le volte che è $A = B$ è anche $A\,C = B\,C$, bisogna tenere conto della condizione $p > 2$; e supponendola verificata, le dette definizioni dànno origine ad un gruppo che è rappresentato in Γ con un $G_4^{2,2}$, e facendo corrispondere ai simboli:

$$e_4^1\, e_3^0\, e_2^0\, e_1^0, \quad e_4^0\, e_3^1\, e_2^0\, e_1^0, \quad e_4^0\, e_3^0\, e_2^1\, e_1^0, \quad e_4^0\, e_3^0\, e_2^0\, e_1^1,$$

ordinatamente gli elementi E_4, E_3, E_2, E_1, questi elementi verificano le relazioni (13) e (14).

14. Ponendo a fondamento le dette relazioni, la serie canonica:

$$G_4^{2,2}, \quad G_3, \quad G_2, \quad G_1,$$

è perfettamente determinata nel senso che, se:

$$\mathbf{E}_4, \quad \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{E}_1,$$

è un'altra base canonica di $G_4^{2,2}$, tale che l'operazione:

$$T = \begin{pmatrix} E_4, & E_3, & E_2, & E_1 \\ \mathbf{E}_4, & \mathbf{E}_3, & \mathbf{E}_2, & \mathbf{E}_1 \end{pmatrix}$$

non alteri la forma delle (13) e (14), la detta base definisce la stessa serie canonica.

Ponendo dunque, nella più generale maniera:

$$\mathbf{E}_4 \equiv E_4^u\, E_3^v, \quad \mathbf{E}_3 \equiv E_3^s, \quad (\mathrm{mod}\ G_2), \tag{15}$$

affinchè si conservino le formole (13) si deve scegliere $\mathbf{E}_2 \equiv E_2^{us}$ (mod G_1) ed $\mathbf{E}_1 = E_1^{u^2 s}$; allora, per non contraddire alla definizione di $\mathbf{E}_1$, bisogna supporre u ed s primi con p.

Se dopo avere definita in tal modo la nuova base $\mathbf{E}_4$, $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_1$, si fa l'operazione che porta la detta base in E_4, E_3, E_2, E_1 e si chiamano α_1 e β_1 i valori trasformati di α e β, si trova facilmente:

$$u^2\, s\, \alpha_1 \equiv \alpha\, u + \beta\, v, \quad u^2\, \beta_1 \equiv \beta, \quad (\mathrm{mod}\, p),$$

purchè si supponga $p > 3$ e si osservi che, in virtù delle (13), si ha:

$$(E_4\, E_3)^n = E_4^n\, E_3^n\, E_2^{\binom{n}{2}}\, E_1^{\binom{n}{3}}.$$

Sia, in prima ipotesi, $\beta = 0$: allora, se non è $\alpha = 0$, scegliendo $u = 1$, $s = \alpha$, ottengo $\alpha_1 \equiv 1$ (mod p).

Sia, in seconda ipotesi, β primo con p: allora, posso scegliere v in modo che sia $\alpha_1 \equiv 0$ (mod p); inoltre, se β è un residuo quadratico di p, posso determinare u in modo che sia $\beta_1 \equiv 1 \pmod p$; e se β non è residuo quadratico di p, essendo ε una qualunque radice primitiva di p, posso determinare u in modo che sia $\beta_1 \equiv \varepsilon \pmod p$.

Esistono dunque, se è $p > 3$, quattro gruppi $G_4^{2,2}$, i quali sono definiti dalle (13) e dalle seguenti modificazioni delle formule (14):

$$\begin{array}{|llll|}
\hline
E_4^p = 1, & E_3^p = 1, & E_2^p = 1, & E_1^p = 1 \\
\hline
E_4^p = E_1, & E_3^p = 1, & E_2^p = 1, & E_1^p = 1 \\
\hline
E_4^p = 1, & E_3^p = E_1, & E_2^p = 1, & E_1^p = 1 \\
\hline
E_4^p = 1, & E_3^p = E_1^\varepsilon, & E_2^p = 1, & E_1^p = 1 \\
\hline
\end{array} \qquad (16)$$

Il divisore Abeliano G_3 dei primi due gruppi è un $G_3^{0,3}$ e quello degli ultimi due è un $G_3^{0,2}$.

15. Si supponga ora $p = 3$.

Giacchè due qualunque operazioni T appartenenti alla classe definita dalle congruenze (15) per dati valori di u, v, s, producono lo stesso effetto sopra i numeri α e β che figurano nelle formule (14), io ritengo eguali tutte le operazioni appartenenti alla detta classe e quest'unica operazione la rappresento col simbolo:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ 0 & s \end{vmatrix}.$$

Tutte le possibili operazioni così definite costituiscono, nel presente caso, un gruppo di grado 12; ma, giacchè l'operazione:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},$$

non cambia α e β, io la posso ritenere eguale all'elemento identico del detto gruppo e quindi il grado di questo si riduce a 6. Il gruppo di grado 6, che qui si presenta, è isomorfo a quello di cui ho discorso nel n.° 9 e si può generare mediante le due operazioni:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

che sono rispettivamente di secondo e terzo ordine.

La prima di queste operazioni cambia α in 2α e la seconda cambia α in $\alpha + \beta + 1$; ma, nè l'una nè l'altra alterano β. Dunque, se β è 0 od 1, posso sempre supporre $\alpha = 0$, e se è $\beta = 2$, posso ridurre il caso di $\alpha = 2$ al caso di $\alpha = 1$.

Esistono quindi, anche quando è $p = 3$, quattro gruppi $G_4^{2,2}$ i quali corrispondono alle seguenti modificazioni delle formole (14):

$E_4^3 = 1$,	$E_3^3 = 1$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$
$E_4^3 = 1$,	$E_3^3 = E_1$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$
$E_4^3 = 1$,	$E_3^3 = E_1^2$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$
$E_4^3 = E_1$,	$E_3^3 = E_1^2$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$

(17)

Soltanto per il primo di questi gruppi il divisore Abeliano G_3 è un $G_3^{0,3}$; per gli altri tre gruppi il detto divisore è un $G_3^{0\,2}$.

16. Io considero finalmente il caso, finora escluso, di $p = 2$, per il quale non sussistono le formole (14).

Le relazioni (13) dànno:

$$E_4^{-2} E_3 E_4^2 = E_3 E_2^2 E_1,$$

e siccome E_4^2 sta in H, deve essere $E_2^2 = E_1$; allora, l'elemento E_3^2 che, a causa della prima delle dette relazioni, non risulta permutabile con E_4, è una potenza impari di E_2.

Le (14) debbono dunque essere sostituite con le formole:

$$E_4^2 = E_1^\alpha, \quad E_3^2 = E_2^\beta, \quad E_2^2 = E_1, \quad E_1^2 = 1;$$

ed è facile vedere che, tutte le volte che β è impari, queste formole e le (13) definiscono un gruppo di grado $2^4 = 16$ che è un $G_4^{2,2}$.

Cambiando ora la base canonica e ponendo, nella maniera più generale,

$$\mathbf{E}_4 = E_4 E_3^v, \quad \mathbf{F}_3 = E_3^s,$$

la corrispondente operazione T non altera β ma cambia α in un numero α_1 tale che:

$$s\,\alpha_1 \equiv \alpha + \frac{\beta + 1}{2} v, \quad (\text{mod } 2).$$

Dunque, se è $\beta = 1$, si può sempre ritenere $\alpha = 0$, ma, se è $\beta = 3$, bisogna distinguere il caso di $\alpha = 0$ dal caso di $\alpha = 1$.

Esistono perciò tre gruppi di grado 16 che sono $G_4^{2,2}$, i quali sono definiti dalle formole:

$E_4^2 = 1$,	$E_3^2 = E_2$,	$E_2^2 = E_1$,	$E_1^2 = 1$
$E_4^2 = 1$,	$E_3^2 = E_2 E_1$,	$E_2^2 = E_1$,	$E_1^2 = 1$
$E_4^2 = E_1$,	$E_3^2 = E_2 E_1$,	$E_2^2 = E_1$,	$E_1^2 = 1$

insieme alle formole (13).

Per questi tre gruppi il divisore Abeliano G_3 è ciclico.

17. Io riepilogo brevemente i risultati ottenuti nel presente paragrafo.

Esistono soltanto *cinque* gruppi di grado p^3, dei quali: tre sono gruppi $G_3{}^0$ e gli altri due sono gruppi $G_3{}^{1,2}$.

Esistono soltanto *quattordici* gruppi di grado $2^4 = 16$, dei quali: cinque sono gruppi $G_4{}^0$, tre sono gruppi $G_4{}^{1,2}$, tre sono gruppi $G_4{}^{1,3}$ ed i rimanenti tre sono gruppi $G_4{}^{2,2}$.

Per tutti i valori del numero primo $p > 2$ esistono soltanto *quindici* gruppi di grado p^4, dei quali: cinque sono gruppi $G_4{}^0$, tre sono gruppi $G_4{}^{1,2}$, tre sono gruppi $G_4{}^{1,3}$ ed i rimanenti quattro sono gruppi $G_4{}^{2,2}$.

Le formole di composizione di tutti questi gruppi sono rappresentate nella seguente tabella:

Gruppi di grado p^3.

I. Gruppi G_3^0 $\{[p^3], [p^2][p], [p][p][p]\}$.

II. Gruppi $G_3{}^{1,2}$ $\{E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2 E_1, H(E_1)\}$.

E_3^p	E_2^p	E_1^p	
1	1	1	$p \geqq 2$
1	E_1	1	$p > 2$
E_1	E_1	1	$p = 2$

Gruppi di grado p^4.

I. Gruppi G_4^0 $\{[p^4], [p^3][p], [p^2][p^2], [p^2][p][p], [p][p][p][p]\}$.

II. Gruppi G_4^1 $\{E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1, H(E_2, E_1)\}$.

	$p \geq 2$	$p \geqq 2$	$p \geqq 2$	$p \geqq 2$	$p \geqq 2$	$p > 2$	$p = 2$
E_4^p	1	1	E_1	1	1	1	E_1
E_3^p	E_2	E_2	E_2	1	1	E_1	E_1
E_2^p	E_1	1	1	E_1	1	1	1
E_1^p	1	1	1	1	1	1	1
	Gruppi $G_4^{1,2}$			Gruppi $G_4^{1,3}$			

III. Gruppi $G_4^2 = G_4^{2,2}$, $\{H(E_1)\}$.

$$E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_2, \quad E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2 E_1, \quad E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2$$

	$p \geqq 3$	$p > 3$	$p \geqq 3$	$p \geqq 3$	$p = 3$	$p = 2$	$p = 2$	$p = 2$
E_4^p	1	E_1	1	1	E_1	1	1	E_1
E_3^p	1	1	E_1	E_1^{ε}	E_1^2	E_2	E_2^{-1}	E_2^{-1}
E_2^p	1	1	1	1	1	E_1	E_1	E_1
E_1^p	1	1	1	1	1	1	1	1

§ III. I Gruppi G_5^0 e G_5^1.

18. Esistono sette gruppi Abeliani di grado p^5, i quali sono: un gruppo $G_5^{0,1}$, due gruppi $G_5^{0,2}$, due gruppi $G_5^{0,3}$, un gruppo $G_5^{0,4}$ ed un gruppo $G_5^{0,5}$.

Mettendo in evidenza per ciascuno di questi sette gruppi gl'invarianti del sig. Frobenius, li rappresenterò nel seguente modo:

$$G_5^{0,1}\{[p^5]\},\quad G_5^{0,4}\{[p^2][p][p][p]\},\quad G_5^{0,5}\{[p][p][p][p][p]\},$$

$$G_5^{0,2}\{[p^4][p]\},\quad G_5^{0,2}\{[p^3][p^2]\},\quad G_5^{0,3}\{[p^3][p][p]\},\quad G_5^{0,3}\{[p^2][p^2][p]\}.$$

Il gruppo $G_5^{0,1}$ è il gruppo ciclico di grado p^5; il gruppo $G_5^{0,4}$ possiede $\frac{p^4-1}{p-1}-1$ divisori $G_4^{0,3}$ ed un solo divisore $G_4^{0,4}$, mentre tutti i divisori d'indice p del gruppo $G_5^{0,5}$ sono gruppi $G_4^{0,4}$. Il primo dei due gruppi $G_5^{0,2}$ ha un solo divisore $G_4^{0,2}\{[p^3][p]\}$ e p divisori $G_4^{0,1}$, mentre il secondo dei detti due gruppi ha p divisori $G_4^{0,2}\{[p^3][p]\}$ ed un solo divisore $G_4^{0,2}\{[p^2][p^2]\}$.

Finalmente, il primo dei due gruppi $G_5^{0,3}$ ha un solo divisore $G_4^{0,3}$ e $p(p+1)$ divisori $G_4^{0,2}\{[p^3][p]\}$, mentre tutti i divisori d'indice p del secondo dei detti due gruppi sono: $p+1$ gruppi $G_4^{0,3}$ e p^2 gruppi $G_4^{0,2}\{[p^2][p^2]\}$.

Io mi limito a dimostrare soltanto quello che ho asserito relativamente al gruppo $[p^2][p^2][p]$.

Scegliendo in modo conveniente tre elementi E'', E', E dei gradi p^2, p^2, p rispettivamente, un arbitrario elemento di un tale gruppo si può rappresentare con:

$$E''^{\alpha}\,E'^{\beta}\,E^{\gamma},$$

dove α, β, γ sono tre interi presi ordinatamente rispetto ai moduli p^2, p^2, p.

I tre gruppi di grado p^4, costituiti rispettivamente dagli elementi dei seguenti tre tipi:

$$E''^{p\alpha}\,E'^{\beta}\,E^{\gamma},\quad E''^{\alpha}\,E'^{p\beta}\,E^{\gamma},\quad E''^{\alpha}\,E'^{\beta},$$

sono indipendenti, perchè s'intersecano secondo il gruppo K di grado p^2 costituito dagli elementi del tipo:

$$E''^{p\alpha}\,E'^{p\beta}.$$

Inoltre, un elemento qualunque del detto gruppo di grado p^2 è la p^{ma} potenza di un elemento del gruppo principale e quindi questo non può avere più di tre divisori indipendenti d'indice p: dunque il gruppo principale $[p^2][p^2][p]$ è un $G_5^{0,3}$.

Tutti gli elementi di grado p di questo gruppo formano il gruppo $G_3^{0,3}$ costituito dagli elementi del tipo:

$$E''^{p\alpha}\,E'^{p\beta}\,E^{\gamma}.$$

Dei divisori d'indice p del gruppo principale, quelli che contengono $G_3^{0,3}$ sono necessariamente gruppi $G_4^{0,3}$ e, pensando al gruppo complementare di $G_3^{0,3}$ nel detto gruppo principale, si vede subito che il loro numero è $p+1$.

Inoltre, ogni divisore $G_4^{0,3}$ del gruppo principale contiene evidentemente $G_3^{0,3}$: dunque il detto gruppo possiede $p+1$, e non più, divisori $G_4^{0,3}$.

Ciò posto, i rimanenti p^2 divisori d'indice p sono necessariamente gruppi $G_4^{0,2} \{[p^2][p^2]\}$.

19. I gruppi G_5^1 possono essere o gruppi $G_5^{1,2}$ o gruppi $G_5^{1,3}$, oppure gruppi $G_5^{1,4}$, ed io mostrerò che effettivamente esistono gruppi in ognuna di queste classi.

Sia:

$$G_5^1, \quad G_4, \quad G_3, \quad G_2, \quad G_1,$$

una serie canonica di un gruppo G_5^1 scelta in modo tale che sia $G_3 = H$, ed:

$$E_5, \quad E_4, \quad E_3, \quad E_2, \quad E_1,$$

una base canonica relativa alla detta serie.

Giacchè la potenza E_4^p sta in H, l'elemento E'_3, che figura nella relazione $E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E'_3$, è di grado p ed io lo posso assumere come elemento E_1; quindi si ha:

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_1. \tag{1}$$

Se il gruppo H è ciclico, scegliendo opportunamente l'elemento E_3, posso scrivere:

$$E_5^p = E_3^\alpha, \quad E_4^p = E_3^\beta, \quad E_3^p = E_2, \quad E_2^p = E_1, \quad E_1^p = 1; \tag{2}$$

e si può facilmente dimostrare che, qualunque siano gl'interi α e β, le formole (1) e (2) definiscono un gruppo G_5^1.

Ciò posto, si osservi che l'operazione:

$$\begin{pmatrix} E_5, & E_4, & E_3, & E_2, & E_1 \\ E_5 E_3^h, & E_4 E_3^k, & E_3, & E_2, & E_1 \end{pmatrix},$$

cambia α e β rispettivamente in $\alpha + hp$ e $\beta + kp$; dunque, se α e β sono multipli di p, si può supporre $\alpha = \beta = 0$.

Se uno dei due numeri α, β è primo con p, io suppongo che sia β primo con p giacchè, in caso contrario, scambio α in β mediante l'operazione:

$$\begin{pmatrix} E_5, & E_4, & E_3, & E_2, & E_1 \\ E_4^{-1}, & E_5^{-1}, & E_3^{-1}, & E_2^{-1}, & E_1^{-1} \end{pmatrix};$$

poi, eseguendo la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_5, & E_4, & E_3, & E_2, & E_1 \\ E_5^\beta, & E_4, & E_3^\beta, & E_2^\beta, & E_1^\beta \end{pmatrix},$$

mi riduco al caso di $\beta = 1$. Dopo ciò, chiamando E_5 l'elemento $E_5 E_4^{-\alpha}$, si vede facilmente che è sempre lecito ritenere $\alpha = 0$.

Esistono quindi due soli gruppi G_5^1, che hanno il divisore invertibile ciclico, i quali sono definiti dalla (1) e dalle formole:

$E_5^p = 1$,	$E_4^p = 1$,	$E_3^p = E_2$,	$E_2^p = E_1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = 1$,	$E_4^p = E_3$,	$E_3^p = E_2$,	$E_2^p = E_1$,	$E_1^p = 1$

Il primo di questi gruppi è un $G_5^{1,3}$ e fra tutti i suoi divisori d'indice p, i quali s'intersecano in G_2, ve ne sono p^2 non Abeliani; il secondo gruppo è un $G_5^{1,2}$ e tutti i suoi $p+1$ divisori d'indice p sono Abeliani.

20. Si supponga ora che il gruppo $H = G_3$ sia un $G_3^{0,2}$.

In questo caso, scegliendo come gruppo G_2 l'unico divisore non ciclico di grado p^2 che possiede H, due ipotesi sono possibili rispetto all'elemento E_3^p, che è necessariamente di grado p: o questo elemento sta in G_1 oppure è fuori di G_1. Nella prima ipotesi posso supporre $E_3^p = E_1$, e nella seconda ipotesi pongo $E_3^p = E_2$: si hanno in corrispondenza ai due casi le due serie di formole:

$$E_5^p = E_3^\alpha E_2^\beta, \quad E_4^p = E_3^\gamma E_2^\delta, \quad E_3^p = E_1, \quad E_2^p = 1, \quad E_1^p = 1 \tag{3}$$

$$E_5^p = E_3^\alpha E_1^\beta, \quad E_4^p = E_3^\gamma E_1^\delta, \quad E_3^p = E_2, \quad E_2^p = 1, \quad E_1^p = 1. \tag{4}$$

Io dimostro ora che le (3) e la (1) definiscono sempre un gruppo G_5^1 qualunque siano gl'interi α, β, γ, δ, e in un modo perfettamente analogo si può dimostrare che anche le (4) e la (1) definiscono, in ogni caso, un gruppo G_5^1.

Si considerino i simboli che si ottengono da:

$$e_5^x \, e_4^y \, e_3^z \, e_2^t \, e_1^w,$$

attribuendo ad x, y, z, t, w arbitrari valori interi, e si chiamino eguali due tali simboli quando si ottengono l'uno dall'altro facendo variare i detti interi ordinatamente di $p\,k_5$, $p\,k_4$, h_3, h_2, h_1, purchè sia:

$$\alpha\,k_5 + \gamma\,k_4 + h_3 + p\,h_1 \equiv 0, \quad (\mathrm{mod}\, p^2)$$

$$\beta\,k_5 + \delta\,k_4 + h_2 \equiv 0, \quad (\mathrm{mod}\, p).$$

Dietro questa convenzione si ottengono soltanto p^5 simboli distinti.

Ora, ponendo per definizione:

$$(e_5^{x'} e_4^{y'} e_3^{z'} e_2^{t'} e_1^{w'})\,(e_5^{x''} e_4^{y''} e_3^{z''} e_2^{t''} e_1^{w''}) = e_5^{x'+x''} e_4^{y'+y''} e_3^{z'+z''} e_2^{u'+u''} e_1^{w'+w''+y'x'},$$

si può subito verificare che, rispetto a questa legge di composizione, i simboli considerati costituiscono un gruppo P_5. Se si rappresenta questo gruppo in Γ facendo corrispondere ai cinque elementi di P_5:

$$e_5^1\, e_4^0\, e_3^0\, e_2^0\, e_1^0, \quad e_5^0\, e_4^1\, e_3^0\, e_2^0\, e_1^0, \ldots, \quad e_5^0\, e_4^0\, e_3^0\, e_2^0\, e_1^1,$$

ordinatamente, i cinque elementi E_5, E_4, E_3, E_2, E_1 di Γ, questi elementi costituiscono una base canonica di un G_5^1 e verificano le relazioni (3) ed (1).

Io non ripeterò in seguito un simile ragionamento, che deve essere oramai familiare al lettore: mi limiterò solamente ad asserire, quando si presenta il caso, che una data serie di relazioni definiscono un gruppo di una data classe.

Riferendomi alle formole (3), se i numeri α e γ sono multipli di p, siccome la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_5 & E_4 & E_3 & E_2 & E_1 \\ E_5\, E_3^h & E_4\, E_3^k & E_3 & E_2 & E_1 \end{pmatrix},$$

cambia i detti numeri rispettivamente in $\alpha + h\,p$ e $\gamma + k\,p$, posso supporre $\alpha = \gamma = 0$. Ciò posto, se uno dei due numeri β, δ è primo con p, ritengo, senza nuocere alla generalità, δ primo con p e pongo a definizione dell'elemento E_2 la relazione $E_4^p = E_2$; allora, cambiando $E_5\, E_4^{-\beta}$ in E_5, si vede facilmente che si può assumere $\beta = 0$. Ottengo quindi due gruppi G_5^1 definiti dalla (1) e dalle relazioni:

$E_5^p = 1$,	$E_4^p = E_2$,	$E_3^p = E_1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = 1$,	$E_4^p = 1$,	$E_3^p = E_1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$

Il primo di questi gruppi è un $G_5^{1,3}$ ed il relativo gruppo K coincide con G_2, mentre il secondo è un $G_5^{1,4}$ ed il relativo gruppo K coincide con G_1.

Se uno dei due numeri α, γ è primo con p, posso supporre che sia γ primo con p: allora, facendo la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_5, & E_4, & E_3, & E_2, & E_1 \\ E_5^\gamma, & E_4, & E_3^\gamma E_2^\delta, & E_2, & E_1^\gamma \end{pmatrix},$$

ottengo $E_4^p = E_3$. Ciò posto, chiamando E_5 l'elemento $E_5 E_4^{-\alpha}$, si vede facilmente che si può assumere $\alpha = 0$; allora, se è β primo con p, pongo a definizione dell'elemento E_2 la relazione $E_5^p = E_2$.

Ottengo quindi due nuovi gruppi G_5^1 definiti dalle (1) e dalle formole:

$$E_5^p = E_2, \quad E_4^p = E_3, \quad E_3^p = E_1, \quad E_2^p = 1, \quad E_1^p = 1$$

$$E_5^p = 1, \quad E_4^p = E_3, \quad E_3^p = E_1, \quad E_2^p = 1, \quad E_1^p = 1$$

Il primo di questi gruppi è un $G_5^{1,2}$ ed il relativo gruppo K coincide con H, mentre il secondo è un $G_5^{1,3}$ ed il relativo gruppo K coincide col gruppo ciclico generato dall'elemento E_3.

21. Riferendomi alle formole (4), siano, in prima ipotesi, α e γ multipli di p: in tale caso posso supporre come prima $\alpha = \gamma = 0$. Ciò posto, se uno dei due numeri β, δ è primo con p, io suppongo δ primo con p; poi, facendo la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_5, & E_4, & E_3, & E_2, & E_1 \\ E_5^\delta, & E_4, & E_3, & E_2, & E_1^\delta \end{pmatrix},$$

mi riduco al caso di $\delta = 1$. Allora, *supponendo* $p > 2$ e chiamando E_5 l'elemento $E_5 E_4^{-\beta}$, posso supporre $\beta = 0$.

Ottengo perciò due gruppi i quali, nell'attuale ipotesi di $p > 2$, sono distinti, e questi gruppi sono definiti dalla (1) e dalle seguenti modificazioni delle formole (4):

$$E_5^p = 1, \quad E_4^p = E_1, \quad E_3^p = E_2, \quad E_2^p = 1, \quad E_1^p = 1$$

$$E_5^p = 1, \quad E_4^p = 1, \quad E_3^p = E_2, \quad E_2^p = 1, \quad E_1^p = 1$$

Entrambi questi gruppi appartengono alla classe dei gruppi $G_5^{1,3}$ ed i relativi gruppi K coincidono con G_2.

Se invece è $p=2$, si vede subito, pensando alla (1), che il caso di $E_5 = E_1$, $E_4 = E_1$ non è riducibile ad alcun altro caso, mentre poi tutti questi altri casi sono riducibili al caso di $E_5 = 1$, $E_4 = 1$.

Dunque ottengo due gruppi G_5^1 di grado $2^5 = 32$, i quali sono definiti dalle formole:

$E_5^2 = E_1$,	$E_4^2 = E_1$,	$E_3^2 = E_2$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = 1$,	$E_4^2 = 1$,	$E_3^2 = E_2$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$

insieme alla formula (1).

Entrambi questi gruppi sono gruppi $G_5^{1,3}$ e, in ognuno di essi, il divisore K coincide con G_2.

Sia, in seconda ipotesi, uno dei due numeri α, γ primo con p e precisamente si supponga γ primo con p. Allora, facendo la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_5 & E_4 & E_3 & E_2 & E_1 \\ E_5 & E_4 & E_3^\gamma E_2^\delta & E_2^\gamma & E_1 \end{pmatrix},$$

ottengo $E_4^p = E_3$. Ciò posto, chiamando E_5 l'elemento $E_5 E_4^{-\alpha}$, posso ritenere $\alpha = 0$; poi, se non è β multiplo di p, facendo la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_5 & E_4 & E_3 & E_2 & E_1 \\ E_5 & E_4^\beta & E_3^\beta & E_2^\beta & E_1^\beta \end{pmatrix},$$

mi riduco al caso di $\beta = 1$.

Ottengo perciò due gruppi G_5^1, che sono definiti dalla (1) e dalle formole:

$E_5^p = E_1$,	$E_4^p = E_3$,	$E_3^p = E_2$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = 1$,	$E_4^p = E_3$,	$E_3^p = E_2$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$

Ognuno di questi due gruppi è un gruppo $G_5^{1,2}$ che ha il relativo divisore K coincidente con H.

22. Io abbandono ora l'ipotesi fatta al principio del n.° 20 e suppongo invece che il gruppo $H = G_3$ sia un $G_3^{0,3}$.

In questo caso si può porre nella più generale maniera:

$$E_5^p = E_3^\alpha E_2^\beta E_1^\lambda, \quad E_4^p = E_3^\gamma E_2^\delta E_1^\mu, \quad E_3^p = 1, \quad E_2^p = 1, \quad E_1^p = 1, \quad (5)$$

e queste formole, insieme alla (1), definiscono sempre un gruppo G_5^1 qualunque siano gl' interi α, β, λ, γ, δ, μ.

Siano, in prima ipotesi, i quattro numeri α, β, γ, δ multipli di p. Allora, se uno dei due numeri λ, μ è primo con p, io suppongo μ primo con p; poi, mediante la traformazione:

$$\begin{pmatrix} E_5 & E_4 & E_3 & E_2 & E_1 \\ E_5^\mu & E_4 & E_3 & E_2 & E_1^\mu \end{pmatrix},$$

mi riduco al caso di $\mu = 1$. Ciò posto, se è $p > 2$, chiamando E_5 l'elemento $E_5 E_4^{-\lambda}$, si vede che è lecito ritenere $\lambda = 0$.

Si hanno quindi due gruppi G_5^1 in corrispondenza alle formole:

$E_5^p = 1$,	$E_4^p = E_1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = 1$,	$E_4^p = 1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$

Questi due gruppi appartengono alla classe dei gruppi $G_5^{1,4}$ e, per ognuno di essi, il gruppo K coincide con G_1.

Se è $p = 2$, si vede facilmente che il caso di $E_5^2 = E_1$, $E_4^2 = E_1$ si trasforma sempre in sè stesso mediante le operazioni T, che lasciano inalterata la (1) e la forma delle (5), mentre qualunque altro caso è riducibile a quello in cui è $E_5^2 = 1$, $E_4^2 = 1$.

Perciò si hanno due gruppi G_5^1 di grado 32 in corrispondenza alle due serie di formole:

$E_5^2 = E_1$,	$E_4^2 = E_1$,	$E_3^2 = 1$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = 1$,	$E_4^2 = 1$,	$E_3^2 = 1$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$

e questi due gruppi appartengono alla classe dei gruppi $G_5^{1,4}$.

Sia, in seconda ipotesi, uno dei numeri α, β, γ, δ primo con p. In tal caso, senza nuocere alla generalità, si può ritenere che uno dei due numeri γ, δ sia primo con p e quindi è lecito porre a definizione dell'elemento E_2 la relazione $E_4^p = E_2$; allora chiamando E_5 l'elemento $E_5 E_4^{-\beta}$, si vede che si può assumere $\beta = 0$. Ciò posto, se α è primo con p, pongo a definizione dell'elemento E_3 la relazione $E_5^p = E_3$; in caso contrario, bisogna distinguere l'ipotesi di λ primo con p da quella in cui è λ un multiplo di p; e, nella prima ipotesi, facendo la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_5, & E_4, & E_3, & E_2, & E_1 \\ E_5, & E_4^\lambda, & E_3, & E_2^\lambda, & E_1^\lambda \end{pmatrix},$$

mi riduco al caso di $\lambda = 1$.

Si hanno quindi tre gruppi G_5^1 che sono definiti dalla (1) e dalle seguenti modificazioni delle formole (5):

$E_5^p = E_3$,	$E_4^p = E_2$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = E_1$,	$E_4^p = E_2$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = 1$,	$E_4^p = E_2$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$

Il primo di questi gruppi è un $G_5^{1,2}$, mentre gli ultimi due appartengono alla classe dei gruppi $G_5^{1,3}$.

23. Riepilogando: qualunque sia il numero primo p, io ho trovato nel presente paragrafo *ventidue* gruppi di grado p^5.

Di questi ventidue gruppi, *sette* sono Abeliani e *quindici* sono gruppi G_5^1.

I quindici gruppi G_5^1 trovati sono tutti i possibili gruppi G_5^1 e sono: *cinque* gruppi $G_5^{1,2}$, *sette* gruppi $G_5^{1,3}$ e *tre* gruppi $G_5^{1,4}$.

I detti ventidue gruppi di grado p^5 sono brevemente rappresentati nella seguente tabella:

I. *Gruppi* G_5^0.

$$[p^5],\quad [p^2]\,[p]\,[p]\,[p],\quad [p]\,[p]\,[p]\,[p]\,[p],$$
$$[p^4]\,[p],\quad [p^3]\,[p^2],\quad [p^3]\,[p]\,[p],\quad [p^2]\,[p^2]\,[p].$$

II. *Gruppi* G_5^1.

$$E_5^{-1}\,E_4\,E_5 = E_4\,E_1\,,\ \{ H(E_3,\ E_2,\ E_1) \}.$$

	E_5^p	E_4^p	E_3^p	E_2^p	E_1^p	
Gruppi $G_5^{1.2}$	1	E_3	E_2	E_1	1	$p \geqq 2$
	E_2	E_3	E_1	1	1	$p \geqq 2$
	E_1	E_3	E_2	1	1	$p \geqq 2$
	1	E_3	E_2	1	1	$p \geqq 2$
	E_3	E_2	1	1	1	$p \geqq 2$
Gruppi $G_5^{1.3}$	1	1	E_2	E_1	1	$p \geqq 2$
	1	E_2	E_1	1	1	$p \geqq 2$
	1	E_3	E_1	1	1	$p \geqq 2$
	1	E_1	E_2	1	1	$p > 2$
	1	1	E_2	1	1	$p \geqq 2$
	E_1	E_1	E_2	1	1	$p = 2$
	E_1	E_2	1	1	1	$p \geqq 2$
	1	E_2	1	1	1	$p \geqq 2$
Gruppi $G_5^{1.4}$	1	1	E_1	1	1	$p \geqq 2$
	1	E_1	1	1	1	$p > 2$
	1	1	1	1	1	$p \geqq 2$
	E_1	E_1	1	1	1	$p = 2$

La composizione dei Gruppi finiti il cui grado è la quinta potenza di un numero primo.

(*Di* G. Bagnera, *a Palermo.*)

PARTE SECONDA.

§ IV. I Gruppi G_5^2 che non posseggono alcun divisore Abeliano d'indice p.

24. I gruppi G_5^2 possono essere o gruppi $G_5^{2,2}$ o gruppi $G_5^{2,3}$ giacchè, come ora dimostrerò, non esistono gruppi $G_5^{2,4}$.

Infatti, supposta l'esistenza di un gruppo $G_5^{2,4}$, sia E un elemento di grado p generatore del gruppo K di $G_5^{2,4}$.

Siccome E appartiene certamente ad H, il gruppo complementare $G_5^{2,4} | H$, di grado p^3, è Abeliano ed ha tutti i suoi elementi di grado p. Essendo $E' H$, $E'' H$, $E''' H$ tre elementi generatori del detto gruppo complementare, si ha:

$$E'^{-1} E'' E' = E'' E^{\alpha}, \; E'^{-1} E''' E' = E''' E^{\beta}, \; E''^{-1} E''' E'' = E''' E^{\gamma}. \qquad (1)$$

Giacchè il determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{vmatrix}$$

è nullo identicamente, riesce possibile determinare tre numeri interi x, y, z, non tutti multipli di p, tali che sia:

$$\alpha y + \beta z \equiv 0, \quad -\alpha x + \gamma z \equiv 0, \quad -\beta x - \gamma y \equiv 0, \quad (\mathrm{mod}\, p).$$

Allora l'elemento $E'^x E''^y E'''^z$, che è fuori di H, risulta, in virtù delle (1), invertibile con ogni elemento di $G_5^{2,4}$ e ciò è assurdo.

Stabilito ciò, io passo ora a dimostrare che, se è $p > 2$, la potenza p^{ma} di un elemento qualunque di un gruppo G_{5^2} appartiene al divisore invertibile H.

Sia, se è possibile, E un elemento di G_{5^2} tale che E^p non appartenga ad H. Il gruppo di grado minimo, che contiene l'elemento E ed il divisore H, è Abeliano; quindi, non potendo coincidere con G_{5^2}, detto gruppo è un divisore G_4, d'indice p, di G_{5^2}.

Si chiami E' un elemento di G_{5^2} fuori di G_4 e si ponga:

$$E'^{-1} E E' = E E'', \quad E'^{-1} E'' E' = E'' E'''. \tag{2}$$

L'elemento E'^p appartiene certamente ad H; altrimenti il gruppo di grado minimo che contiene E' ed H sarebbe un secondo divisore Abeliano di G_{5^2}; allora, l'intersezione di questi due divisori, che è di grado p^3, dovrebbe essere contenuta nel gruppo H che, in un gruppo G_{5^2}, è di grado p^2. L'elemento E'' appartiene al gruppo K intersezione di tutti i divisori d'indice p di G_{5^2} e si può, in prima ipotesi, ammettere che E'' appartenga ad H. Allora dalla prima delle (2) si ricava:

$$E'^{-p} E E'^p = E E''^p, \quad E'^{-1} E^p E' = E^p E''^p;$$

quindi, giacchè E'^p sta in H, risulta $E''^p = 1$. L'elemento E^p è dunque invertibile con E' e perciò con ogni elemento di G_{5^2}, il che contraddice alla definizione di E.

Sia, in seconda ipotesi, E'' fuori di H e si pensi alla intersezione dei gruppi K ed H. Se K è di grado p^3, il gruppo G_{5^2} è un $G_{5^{2,2}}$ e quindi (n.° 4) H è contenuto in K; se invece K è di grado p^2, il gruppo G_{5^2} è un $G_{5^{2,3}}$ di cui K è divisore normale, e siccome detto divisore non coincide con H, esso contiene un sotto gruppo proprio di H. In ogni caso, si vede che la detta intersezione è un divisore d'indice p di K; quindi E''^p ed E''' sono elementi di questa intersezione e perciò di H.

Allora le formole (2) dànno:

$$E'^{-p} E E'^p = E E''^p E'''^{\binom{p}{2}}, \quad E'^{-1} E''^p E' = E''^p E'''^p,$$

e quindi deve essere $E'''^p = 1$, $E''^p = 1$, purchè si pensi che è $p > 2$.

Dopo ciò, tenendo presente la prima delle (2), si vede che E^p risulta invertibile con E' e con ogni elemento di G_{5^2}: dunque l'elemento E è assurdo.

25. Un gruppo G_5^2 o contiene uno, ma soltanto uno, oppure nessuno divisore Abeliano d'indice p, ed io voglio anzitutto mettermi in quest'ultima ipotesi.

Se:

$$G_5^2, \quad G_4^1, \quad G_3, \quad G_2, \quad G_1,$$

è una serie canonica di composizione di un tale gruppo scelta in modo che sia $G_2 = H$, ed

$$E_5, \quad E_4, \quad E_3, \quad E_2, \quad E_1,$$

è una base relativa alla detta serie, si ha:

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3', \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_2', \quad E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_2''. \tag{3}$$

Giacchè E_3^p sta in H, dalle (3) risulta $E_2'^p = 1$, $E_2''^p = 1$; inoltre gli elementi E_2' ed E_2'' non possono appartenere ad uno stesso gruppo ciclico, perchè, se fosse ad es. $E_2'^\gamma = E_2''$, l'elemento $E_5^{-\gamma} E_4$, che non sta in G_3, risulterebbe permutabile con E_3 e quindi, contrariamente all'attuale ipotesi, il gruppo G_5^2 ammetterebbe un divisore Abeliano d'indice p. Dunque E_2' ed E_2'' sono due elementi di grado p capaci di generare il gruppo G_2.

Riguardo all'elemento E'_3, dico che esso è fuori di G_2; giacchè, se fosse $E_3' = E_2'^\alpha E_2''^\beta$, i due elementi $E_5 E_3^\beta$, $E_4 E_3^{-\alpha}$, in virtù delle (3), risulterebbero invertibili e quindi il gruppo G_5^2 ammetterebbe il divisore Abeliano d'indice p generato dai detti due elementi e dagli elementi E_2', E_2''.

Il ragionamento precedente prova che, dati i due elementi E_5, E_4, si possono definire E_3, E_2, E_1 mediante le formole:

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3, \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_2, \quad E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1. \tag{4}$$

Escludo subito il caso di $p = 2$, perchè mediante le (4) si può dimostrare che ogni gruppo G_5^2 di grado 32 ha necessariamente un divisore Abeliano d'indice 2.

Infatti, se un tale gruppo G_5^2 non ha un divisore Abeliano d'indice 2, debbono essere verificate le (4) e quindi deve essere:

$$E_5^{-2} E_4 E_5^2 = E_4 E_3^2 E_2;$$

allora, se E_5^2 sta in H, risulta $E_3^2 = E_2$. In questo caso, siccome le (4) dànno anche:

$$E_5^{-1} E_4^2 E_5 = E_4^2 E_3^2 E_1 = E_4^2 E_2 E_1,$$

l'elemento E_4^2 non sta in H e quindi, contrariamente all'ipotesi, il gruppo G_5^2 contiene il divisore Abeliano d'indice 2 generato dagli elementi E_4, E_2, E_1.

Supponendo dunque $p > 2$, dalle (4) facilmente si ricava:

$$E_5^{-p} E_4 E_5^p = E_4 E_3^p ;$$

e siccome E_5^p sta (n.° 24) in H, risulta $E_3^p = 1$. Posso dunque scrivere:

$$E_5^p = E_2^\alpha E_1^\beta, \quad E_4^p = E_2^\gamma E_1^\delta, \quad E_3^p = 1, \quad E_2^p = 1, \quad E_1^p = 1; \tag{5}$$

e, tenendo presente che E_2, E_1 appartengono al divisore invertibile H, si dimostra col solito procedimento che, nell'ipotesi di $p > 2$, qualunque siano gl'interi α, β, γ, δ, le formole (5) e (4) definiscono sempre un gruppo G_5^2. È poi evidente che tutti i gruppi G_5^2 così definiti sono gruppi della classe $G_5^{2,2}$.

26. Bisogna ora vedere come variano α, β, γ, δ relativamente al gruppo delle operazioni:

$$T = \begin{pmatrix} E_5 & E_4 & E_3 & E_2 & E_1 \\ \mathbf{E}_5 & \mathbf{E}_4 & \mathbf{E}_3 & \mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_1 \end{pmatrix},$$

che lasciano inalterate le (4).

Ponendo:

$$\mathbf{E}_5 \equiv E_5^u E_4^v, \quad \mathbf{E}_4 \equiv E_5^r E_4^s, \quad (\text{mod } G_3), \tag{6}$$

affinchè la prima delle (4) si conservi, bisogna prendere $\mathbf{E}_3 \equiv E_3^\Delta$ (mod G_2); quindi, per non contraddire alla definizione di $\mathbf{E}_3$, deve essere il determinante $\Delta = us - vr$ primo con p; poi, affinchè si conservino le ultime due delle formole (4), deve essere:

$$\mathbf{E}_2 = E_2^{\Delta u} E_1^{\Delta v}, \quad \mathbf{E}_1 = E_2^{\Delta r} E_1^{\Delta s}.$$

D'altra parte, io osservo che le operazioni T appartenenti alla classe definita dalle relazioni:

$$\mathbf{E}_5 \equiv E_5, \quad \mathbf{E}_4 \equiv E_4, \quad (\text{mod } G_3),$$

non alterano α, β, γ, δ, perchè allora, rammentando che è $p > 2$, le (4) dànno:

$$\mathbf{E}_5^p = E_5^p, \quad \mathbf{E}_4^p = E_4^p, \quad \mathbf{E}_2 = E_2, \quad \mathbf{E}_1 = E_1.$$

Inoltre le dette operazioni costituiscono evidentemente un gruppo, che è divisore normale del gruppo di tutte le operazioni T che conservano le (4); dunque, giacchè m'interessa studiare le variazioni di α, β, γ, δ, posso ritenere eguale all'operazione identica ogni operazione di detta classe. In questa ipotesi le (6) definiscono un' unica operazione che io rappresenterò con la notazione:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ r & s \end{vmatrix}.$$

Ora si osservi che le relazioni (4), dietro un facile calcolo, dànno:

$$(E_5^h\,E_4^k)^n = E_5^{nh}\,E_4^{nk}\,E_3^{\binom{n}{2}hk}\,E_2^{\lambda}\,E_1^{\mu}\,, \tag{7}$$

dove per brevità si è ritenuto:

$$\lambda = k\left\{h^2\binom{n}{3} + \binom{h}{2}\binom{n}{2}\right\},\quad \mu = h\left\{2\,k^3\binom{n}{3} + k^2\binom{n}{2} + \binom{k}{2}\binom{n}{2}\right\}.$$

Dunque, *supponendo* $p > 3$, in virtù delle (5) si ha:

$$(E_5^h\,E_4^k)^p = E_5^{ph}\,E_4^{pk} = E_2^{h\alpha+k\gamma}\,E_1^{h\beta+k\delta}.$$

Ciò posto, chiamando α_1, β_1, γ_1, δ_1 i valori che assumono rispettivamente α, β, γ, δ dopo avere eseguita la trasformazione:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ r & s \end{vmatrix},$$

in seguito ad un breve calcolo si ha:

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2\,\alpha_1 &\equiv (\alpha\,u + \gamma\,v)\,s - (\beta\,u + \delta\,v)\,r \\ \Delta^2\,\beta_1 &\equiv (\beta\,u + \delta\,v)\,u - (\alpha\,u + \gamma\,v)\,v \\ \Delta^2\,\gamma_1 &\equiv (\alpha\,r + \gamma\,s)\,s - (\beta\,r + \delta\,s)\,r \\ \Delta^2\,\delta_1 &\equiv (\beta\,r + \delta\,s)\,u - (\alpha\,r + \gamma\,s)\,v. \end{aligned}\right\}\ (\mathrm{mod}\ p) \tag{8}$$

Dalle formole (8) risulta:

$$\Delta\,(\alpha_1 + \delta_1) \equiv \alpha + \delta\,,\quad \Delta^2\,(\alpha_1\,\delta_1 - \beta_1\,\gamma_1) \equiv \alpha\,\delta - \beta\,\gamma,\quad (\mathrm{mod}\ p). \tag{9}$$

Io introduco il numero:

$$D = (\alpha + \delta)^2 - 4\,(\alpha\,\delta - \beta\,\gamma),$$

e distinguo i tre casi possibili:

$$\left(\frac{D}{p}\right) = +\,1\,,\quad \left(\frac{D}{p}\right) = -\,1\,,\quad \left(\frac{D}{p}\right) = 0;$$

dove, secondo Legendre, il simbolo $\left(\frac{D}{p}\right)$ denota il resto di $D^{\frac{p-1}{2}}$, che è preso rispetto al numero primo p ed ha il minimo valore assoluto.

27. *Caso* $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$.

Il minimo intero q, positivo o nullo, che verifica la congruenza:

$$D\,q - (\alpha + \delta)^2 \equiv 0, \quad (\operatorname{mod} p), \tag{10}$$

in virtù delle (9) resta inalterato per tutte le possibili operazioni:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ r & s \end{vmatrix},$$

e quindi è un numero invariantivo per il gruppo rappresentato dal $G_5^{2,2}$ definito dalle relazioni (4) e (5) del presente paragrafo.

Ciò posto, il discriminante D della congruenza quadratica:

$$\rho^2 - (\alpha + \delta)\,\rho + (\alpha\,\delta - \beta\,\gamma) \equiv 0, \quad (\operatorname{mod} p),$$

è, nel caso attuale, un numero quadrato rispetto a mod p, e perciò la detta congruenza è soddisfatta da due interi ρ_1, ρ_2, che sono distinti rispetto a questo modulo.

È possibile dunque determinare quattro numeri u, v, r, s che verifichino le congruenze:

$$\left.\begin{matrix} \rho_1\,u \equiv \alpha\,u + \gamma\,v \\ \rho_1\,v \equiv \beta\,u + \delta\,v \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} \rho_2\,r \equiv \alpha\,r + \gamma\,s \\ \rho_2\,s \equiv \beta\,r + \delta\,s \end{matrix}\right\}, \quad (\operatorname{mod} p),$$

e tali che risulti il determinante $\Delta = u\,s - v\,r$ primo con p; allora, facendo la trasformazione:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ v & s \end{vmatrix},$$

le (8) dànno:

$$\Delta\,\alpha_1 \equiv \rho_1, \quad \Delta\,\delta_1 \equiv \rho_2, \quad \beta_1 \equiv \gamma_1 \equiv 0, \quad (\operatorname{mod} p).$$

In conclusione, per i gruppi considerati nel presente caso, le relazioni (5) possono essere sostituite dalle relazioni:

$$E_5^p = E_2^\alpha, \quad E_4^p = E_1^\delta, \quad E_3^p = 1, \quad E_2^p = 1, \quad E_1^p = 1, \tag{11}$$

dove la differenza $\delta - \alpha$ non è divisibile per p.

Prendendo come formole iniziali le (11), mediante le (8) si vede che, eseguendo la trasformazione:

$$\begin{vmatrix} u & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix},$$

non viene alterata la loro forma, ma i numeri α e δ acquistano uno stesso fattore arbitrario primo con p: si può dunque supporre:

$$\delta - \alpha \equiv 2\,, \quad (\mathrm{mod}\, p).$$

Ciò posto, se la somma $\alpha + \delta$ non è divisibile per p, denotando con ε una radice primitiva di p, si può porre:

$$\alpha \equiv \varepsilon^m - 1\,, \quad \delta \equiv \varepsilon^m + 1\,, \quad (\mathrm{mod}\, p)\,;$$

allora, sostituendo questi valori di α e δ nella (10), si ottiene:

$$q \equiv \varepsilon^{2m}, \quad (\mathrm{mod}\, p). \tag{12}$$

Quando si cambia m in $m + \frac{p-1}{2}$, il numero q resta inalterato, ma α e δ si cambiano rispettivamente in $-\delta$ e $-\alpha$.

Giacchè la trasformazione:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

produce lo stesso cambiamento, io debbo fare sul numero m solamente le ipotesi:

$$m = 0\,,\ 1\,, \ldots, \frac{p-3}{2}\,.$$

In corrispondenza a questi tali valori di m, si hanno $\frac{p-1}{2}$ gruppi $G_5^{2,2}$ definiti dalle formole:

$$\boxed{E_5^p = E_2^{\varepsilon^m - 1}, \quad E_4^p = E_1^{\varepsilon^m + 1}, \quad E_3^p = 1\,, \quad E_2^p = 1\,, \quad E_1^p = 1}$$

e dalle formole (4).

Questi gruppi sono effettivamente distinti, perchè in virtù della (12) due qualunque di essi hanno i numeri invariantivi q diseguali.

Se la somma $\alpha + \delta$ è divisibile per p, il che equivale a supporre $q = 0$, si ha:

$$\alpha \equiv -1\,, \quad \delta \equiv 1\,, \quad (\mathrm{mod}\, p)\,,$$

e quindi si ottiene un nuovo gruppo $G_5^{2,2}$ corrispondente alle formole:

$$\boxed{E_5^p = E_2^{-1}, \quad E_4^p = E_1\,, \quad E_3^p = 1\,, \quad E_2^p = 1\,, \quad E_1^p = 1}$$

28. *Caso* $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$.

Il numero q che soddisfa alla (10) è, anche in questo caso, invariantivo per il gruppo rappresentato dal $G_5^{2,2}$ definito dalle formole (4) e (5); però, se detto numero non è zero, esso è un non residuo quadratico di p.

Giacchè nelle attuali ipotesi, nessuno dei numeri β, γ può essere multiplo di p, è possibile determinare un intero v in modo che sia:

$$2\gamma v \equiv \delta - \alpha, \quad (\mathrm{mod}\, p);$$

allora, eseguendo la trasformazione:

$$\begin{vmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

le (8) dànno $\alpha_1 \equiv \delta_1$ (mod p).

Io suppongo dunque che i valori iniziali di α e δ, presi rapporto a mod p, abbiano uno stesso valore ρ e cerco tutte le trasformazioni:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ v & s \end{vmatrix},$$

che lasciano sussistere questa ipotesi.

Ora, essendo $\alpha \equiv \delta \equiv \rho$, affinchè sia $\alpha_1 \equiv \delta_1 \equiv \rho_1$, è necessario e sufficiente che u, v, r, s verifichino la congruenza:

$$\beta u v - \gamma v s \equiv 0, \quad (\mathrm{mod}\, p); \tag{13}$$

e ciò risulta subito dalle formole (8).

Supponendo soddisfatta la (13), le (8) si possono sostituire con le formole:

$$\Delta \rho_1 \equiv \rho, \quad \Delta^2 \beta_1 \equiv \beta u^2 - \gamma v^2, \quad \Delta^2 \gamma_1 \equiv \gamma s^2 - \beta r^2, \quad (\mathrm{mod}\, p), \tag{14}$$

mediante le quali si verifica subito che è:

$$\Delta^2 \beta_1 \gamma_1 \equiv \beta\gamma, \quad (\mathrm{mod}\, p).$$

Giacchè si ha ora $D = 4\beta\gamma$, i due numeri β e γ sono necessariamente uno residuo e l'altro non residuo quadratico rispetto a mod p, ed è indifferente attribuire una di queste proprietà all'uno od all'altro numero, perchè si può dimostrare che esiste una trasformazione la quale, senza alterare ρ, scambia β con γ.

Infatti, se -1 è un numero quadrato mod p, il che ha luogo soltanto quando $p - 1$ è multiplo di 4, trovato un intero v tale che $v^2 \equiv -1$ (mod p), ottengo l'intento mediante la trasformazione:

$$\left|\begin{matrix} 0 & v \\ v & 0 \end{matrix}\right|$$

Se invece $p-1$ non è divisibile per 4, si considerino i $\frac{p+1}{2}$ numeri che si ottengono da $1+v^2$ attribuendo a v i valori:

$$0,\ 1, \ldots, \frac{p-1}{2}.$$

I detti numeri risultano distinti rispetto a $\bmod p$, e perciò non possono essere tutti residui quadratici di p. Dunque, giacchè per ipotesi non è mai $1+v^2$ un multiplo di p, nella serie dei valori attribuiti a v ne esiste almeno uno per cui $1+v^2$ è un non quadrato $(\bmod p)$.

Allora, fissato per v un tale valore, scelgo, il che riesce possibile, per u ed s una soluzione del sistema:

$$\left.\begin{matrix} \beta u - \gamma s \equiv 0 \\ u s - v^2 \equiv 1 \end{matrix}\right\} \pmod p,$$

e considero poi la trasformazione:

$$\left|\begin{matrix} u & v \\ v & s \end{matrix}\right|.$$

Questa trasformazione appartiene alla classe definita dalla formola (13) ed ha il determinante eguale ad 1 $(\bmod p)$; inoltre, le (14) mostrano che essa scambia semplicemente i numeri β e γ.

Sia dunque β un residuo quadratico di p. Se si pone $v \equiv r \equiv 0 \pmod p$, la (13) è verificata e le (14) dànno:

$$u s \rho_1 \equiv \rho, \quad s^2 \beta_1 \equiv \beta, \quad (\bmod p);$$

perciò, *se non è* ρ multiplo di p, si possono determinare s ed u in modo che sia:

$$\rho_1 \equiv 1, \quad \beta_1 \equiv 1, \quad (\bmod p);$$

poi la (10) dà:

$$\gamma_1 q \equiv 1, \quad (\bmod p).$$

Quindi, ponendo $\gamma_1 \equiv \varepsilon^{2m+1} \pmod p$, si ha:

$$q \equiv \varepsilon^{-2m-1}, \quad \pmod p. \tag{15}$$

In conclusione, ottengo $\frac{p-1}{2}$ gruppi $G_5{}^{2,2}$ che sono definiti dalle (4) e dalle formole che si ottengono da:

$$\boxed{E_5^p = E_2 E_1, \quad E_4^p = E_2 E_1^{\varepsilon^{2m+1}}, \quad E_3^p = 1, \quad E_2^p = 1, \quad E_1^p = 1}$$

facendo successivamente:

$$m = 0,\ 1, \ldots, \frac{p-3}{2}.$$

Questi gruppi sono effettivamente distinti perchè, in virtù della (15), due qualunque di essi hanno i numeri invariantivi q diseguali.

Se invece il numero ρ è un multiplo di p, il che equivale a supporre $q = 0$, ponendo come prima $v \equiv r \equiv 0 \pmod p$, le (14) dànno:

$$s^2 \beta_1 \equiv \beta, \quad u^2 \gamma_1 \equiv \gamma, \quad \pmod p;$$

e perciò si possono determinare s ed u in modo che sia:

$$\beta_1 \equiv 1, \quad \gamma_1 \equiv \varepsilon, \quad \pmod p):$$

ottengo quindi un nuovo gruppo $G_5{}^{2,2}$ definito dalle formole:

$$\boxed{E_5^p = E_1, \quad E_4^p = E_2^\varepsilon, \quad E_3^p = 1, \quad E_2^p = 1, \quad E_1^p = 1}$$

e dalle relazioni (4).

29. *Caso* $\left(\frac{D}{p}\right) = 0.$

Si ha allora $D \equiv 0 \pmod p$ e quindi la congruenza:

$$\rho^2 - (\alpha + \delta)\rho + (\alpha\delta - \beta\gamma) \equiv 0 \quad \pmod p$$

è soddisfatta da un solo resto ρ di p.

Scegliendo come numeri u e v una soluzione propria del sistema:

$$\left.\begin{aligned} \rho u &\equiv \alpha u + \gamma v \\ \rho v &\equiv \beta u + \delta v \end{aligned}\right\} \pmod p,$$

la seconda delle (8) dà $\beta_1 \equiv 0 \pmod p$; quindi direttamente dalle (9) si ricava $\Delta\alpha_1 \equiv \Delta\delta_1 \equiv \rho \pmod p$.

Assumendo dunque:

$$\beta \equiv 0\,, \quad \alpha \equiv \delta \equiv \rho\,, \quad (\mathrm{mod}\, p),$$

le (8) si scrivono:

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2\alpha_1 &\equiv \Delta\rho + \gamma v s\,, & \Delta^2\beta_1 &\equiv -v^2\gamma \\ \Delta^2\delta_1 &\equiv \Delta\rho - \gamma v s\,, & \Delta^2\gamma_1 &\equiv \quad s^2\gamma \end{aligned}\right\} \pmod p.$$

Ciò posto, se γ è primo con p, volendo conservare le condizioni iniziali, bisogna supporre v nullo $\pmod p$; indi si può determinare u in modo che sia $\gamma_1 \equiv 1 \pmod p$ ovvero $\gamma_1 \equiv \varepsilon \pmod p$. Allora, se ρ è un multiplo di p, si ha $\alpha_1 \equiv \delta_1 \equiv 0 \pmod p$, in caso contrario si possono scegliere r ed s in modo che sia $\alpha_1 \equiv \delta_1 \equiv 1 \pmod p$.

Se poi è γ un multiplo di p, si ha sempre $\beta_1 \equiv \gamma_1 \equiv 0 \pmod p$, ma è $\alpha_1 \equiv \delta_1 \equiv 0 \pmod p$, ovvero si può supporre $\alpha_1 \equiv \delta_1 \equiv 1 \pmod p$, secondo che è, ovvero non è, ρ un multiplo di p.

In conclusione, in corrispondenza all'ipotesi $\left(\frac{D}{p}\right) = 0$, si hanno soltanto *sei* gruppi, i quali sono definiti dalle (4) e dalle seguenti modificazioni delle formole (5):

$E_5^p = 1$,	$E_4^p = E_2$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = E_2$,	$E_4^p = E_2 E_1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = 1$,	$E_4^p = E_2^\varepsilon$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = E_2$,	$E_4^p = E_2^\varepsilon E_1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = 1$,	$E_4^p = 1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = E_2$,	$E_4^p = E_1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$

30. Finalmente io passo ad esaminare il caso di $p = 3$, che ho escluso verso la fine del n.° 26. Quando è $p = 3$ tutte le possibili operazioni:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ r & s \end{vmatrix},$$

definite precedentemente costituiscono un gruppo di grado 48; però, osservando che l'operazione:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

lascia inalterati i quattro numeri α, β, γ, δ che figurano nelle (5), io non considero come distinte le due operazioni:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ r & s \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -u & -v \\ -r & -s \end{vmatrix},$$

ed allora il grado del detto gruppo si riduce di metà. Il gruppo di grado 24, che così si ottiene, è isomorfo al gruppo dell'ottaedro (*): esso può essere generato mediante le tre operazioni:

$$U = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad V = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad W = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},$$

che sono ordinatamente di secondo, terzo e quarto ordine e che soddisfano alle relazioni:

$$V^2 W = W^3 V, \quad W^3 U = U W, \quad U V^2 = V U.$$

Si vede subito, tenendo presenti le formole (4) e (5), che la U non altera β e γ, ma cambia soltanto di segno α e δ.

Facendo uso della (7), si verifica facilmente che l'operazione V cambia la somma $\alpha + \delta$ in $\alpha + \delta + 1$ e quindi l'operazione V^2 cambia la detta somma in $\alpha + \delta + 2$; perciò non si lede la generalità ponendo:

$$\alpha + \delta \equiv 0, \quad (\text{mod } 3). \tag{16}$$

Ciò posto, servendosi della (7) e tenendo conto della congruenza (16), un breve calcolo mostra che l'operazione W produce sopra i numeri α, β, γ, δ la sostituzione congrua:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_1 \equiv \beta + \gamma, & \beta_1 \equiv \alpha + \beta - \gamma + 1, \\ \delta_1 \equiv -\beta - \gamma, & \gamma_1 \equiv -\beta + \gamma - \delta - 1, \end{array}\right\} \quad (\text{mod } 3).$$

(*) Per convincersene, basta far corrispondere alle tre operazioni che sono denotate in seguito con U, V, W, ordinatamente le tre sostituzioni: (0 2), (0 1 2), (0 1 2 3).

Dunque le operazioni W ed U lasciano inalterata la (16) e lo stesso fa ogni operazione del gruppo di grado 8 da esse generato; mentre una qualunque delle rimanenti 16 operazioni, potendosi ottenere come prodotto di una operazione del detto gruppo di grado 8 per V, ovvero per V^2, non lascia sussistere la congruenza (16). In virtù di questa congruenza, relativamente ai valori di α e δ, si possono fare le seguenti tre ipotesi:

$$\alpha \equiv 0,\ \delta \equiv 0;\quad \alpha \equiv 1,\ \delta \equiv 2;\quad \alpha \equiv 2,\ \delta \equiv 1,\quad (\mathrm{mod}\ 3);$$

poi a ciascuna di queste tre coppie si può associare una coppia qualunque di valori di β e γ: si ottengono così 27 quaterne di numeri $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ a ciascuna delle quali corrisponde un gruppo $G_5^{2,2}$ di grado $3^5 = 243$.

Però due quaterne, che si deducono l'una dall'altra mediante una operazione del precedente gruppo di grado 8, si debbono ritenere equivalenti in quanto che esse definiscono due gruppi isomorfi di grado 243.

Nella tabella che segue io scrivo tutte le 27 quaterne, mettendo in una stessa linea orizzontale le quaterne che sono equivalenti.

(1 0 1 2)	(1 1 1 2)	(2 2 0 1)	(2 2 2 1)	(2 0 1 1)	(2 1 1 1)	(1 2 0 2)	(1 2 2 2)
(1 0 2 2)	(2 0 2 1)	(2 1 0 1)	(1 1 0 2)				
(0 1 1 0)	(2 1 2 1)	(0 2 2 0)	(1 1 2 2)				
(0 0 1 0)	(1 0 0 2)	(0 2 0 0)	(2 0 0 1)				
(0 0 2 0)	(2 2 1 1)	(0 1 0 0)	(1 2 1 2)				
(0 0 0 0)	(0 1 2 0)						
(0 2 1 0)							

Si vede dunque che esistono soltanto *sette* gruppi $G_5^{2,2}$ di grado 243, che non posseggono alcun divisore Abeliano d'indice 3 e questi gruppi si posson fare corrispondere alle sette quaterne $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$, che stanno nella prima linea verticale della precedente tabella.

Io scrivo le formole che, insieme alle (4), servono a definire i detti gruppi.

$E_5^3 = E_2$,	$E_4^3 = E_2 E_1^2$,	$E_3^3 = 1$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$
$E_5^3 = E_2$,	$E_4^3 = E_2^2 E_1^2$,	$E_3^3 = 1$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$
$E_5^3 = E_1$,	$E_4^3 = E_2$,	$E_3^3 = 1$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$
$E_5^3 = 1$,	$E_4^3 = E_2$,	$E_3^3 = 1$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$
$E_5^3 = 1$,	$E_4^3 = E_2^2$,	$E_3^3 = 1$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$
$E_5^3 = 1$,	$E_4^3 = 1$,	$E_3^3 = 1$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$
$E_5^3 = E_1^2$,	$E_4^3 = E_2$,	$E_3^3 = 1$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$

31. Nel presente paragrafo io ho stabilito quanto segue.

Ogni gruppo $G_5^{2,2}$, che non possiede alcun divisore Abeliano d'indice p, è perfettamente definito dalle formole (4) e (5), purchè si tenga presente che E_2 ed E_1 appartengono al divisore invertibile H.

Non esistono di tali gruppi di grado $2^5 = 32$.

Esistono soltanto sette di tali gruppi di grado $3^5 = 243$.

Finalmente, quando il numero primo p supera 3, esistono $p + 7$, e non più, di tali gruppi, i quali, rispetto alle formole (4) e (5), si classificano nella seguente maniera.

Quando gl'interi α, β, γ, δ verificano la congruenza:

$$D = (\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma) \equiv 0, \quad (\mathrm{mod}\, p),$$

si ha uno dei sei gruppi trovati al n.° 29; in ogni altro caso, il minimo numero q positivo o nullo, che verifica la congruenza:

$$D q - (\alpha + \delta)^2 \equiv 0, \quad (\mathrm{mod}\, p),$$

è un numero invariantivo per il gruppo definito dalla quaterna $(\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta)$.

In corrispondenza ad ogni numero $q > 0$ si ha un solo gruppo; ma, per $q = 0$, si hanno due gruppi secondo che D è, ovvero non è, un residuo quadratico di p.

I diversi tipi di gruppi trovati nel presente paragrafo sono rappresentati nella seguente tabella.

I.

$$\{H(E_2,\ E_1)\},\ \{K(E_3,\ E_2,\ E_1)\}.$$

$$E_5^{-1}\,E_4\,E_5 = E_4\,E_3\,,\quad E_5^{-1}\,E_3\,E_5 = E_3\,E_2\,,\quad E_4^{-1}\,E_3\,E_4 = E_3\,E_1\,.$$

	E_5^p	E_4^p	E_3^p	E_2^p	E_1^p	
Gruppi $G_5^{2,2}$	$E_2^{\varepsilon^m-1}$	$E_1^{\varepsilon^m+1}$	1	1	1	$\left(\frac{D}{p}\right)=+1$
	E_2^{-1}	E_1	1	1	1	
	$E_2\,E_1$	$E_2E_1^{\varepsilon^{2m+1}}$	1	1	1	$\left(\frac{D}{p}\right)=-1$
	E_1	E_2^{ε}	1	1	1	
	1	E_2	1	1	1	$\left(\frac{D}{p}\right)=0$
	E_2	$E_2\,E_1$	1	1	1	
	1	E_2^{ε}	1	1	1	
	E_2	$E_2^{\varepsilon}\,E_1$	1	1	1	
	1	1	1	1	1	
	E_2	E_1	1	1	1	

$$m = 0\,,\ 1\,,\ldots,\ \frac{p-3}{2}\qquad \{p > 3\}$$

II.

	E_5^3	E_4^3	E_3^3	E_2^3	E_1^3
Gruppi $G_5^{2,2}$ di grado 243	E_2	$E_2\,E_1^2$	1	1	1
	E_2	$E_2^2\,E_1^2$	1	1	1
	E_1	E_2	1	1	1
	1	E_2	1	1	1
	1	E_2^2	1	1	1
	1	1	1	1	1
	E_1^2	E_2	1	1	1

§ V. I Gruppi G_5^2 che posseggono un divisore Abeliano d'indice p.

32. Al principio del n.° 25 si è osservato che un gruppo G_5^2 può contenere uno oppure nessuno divisore Abeliano d'indice p. Io ho svolto nel paragrafo precedente l'analisi relativa alla seconda ipotesi ed ora mi propongo di svolgere in questo paragrafo l'analisi relativa alla prima.

Il divisore Abeliano G_4^0 contenuto per ipotesi in G_5^2, contiene evidentemente il divisore invertibile H, e quindi è possibile costruire una serie canonica di composizione:

$$G_5^2, \quad G_4^0, \quad G_3, \quad G_2, \quad G_1,$$

tale che sia $G_2 = H$.

Denotando con:

$$E_5, \quad E_4, \quad E_3, \quad E_2, \quad E_1,$$

una base relativa alla detta serie e scrivendo le formole:

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E'_3, \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E'_2, \quad E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3,$$

l'elemento E'_3 può essere contenuto o non essere contenuto in H. Questi due casi si debbono distinguere accuratamente, perchè, in corrispondenza, si hanno due classi di gruppi G_5^2 ben diverse.

Comincio ad occuparmi del primo caso, il quale è equivalente all'ipotesi di ritenere il gruppo K coincidente col gruppo H, perchè, in virtù del ragionamento fatto al n.° 24, in tal caso, anche quando è $p = 2$, la potenza p^{ma} di un elemento qualunque di G_5^2 sta in H.

Dunque deve essere $E'^p_3 = 1$, $E'^p_2 = 1$; e siccome gli elementi E'_3, E'_2 non possono appartenere ad uno stesso gruppo ciclico (n.° 24), i detti elementi sono di grado p e possono generare il gruppo H.

Io posso dunque scrivere le formole:

$$\left.\begin{array}{l} E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_2, \ E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_1, \ E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3, \\ E_5^p = E_2^\lambda E_1^\mu, \ E_4^p = E_2^\alpha E_1^\beta, \ E_3^p = E_2^\gamma E_1^\delta, \ E_2^p = 1, \ E_1^p = 1. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Queste formole definiscono, qualunque siano gl'interi λ, μ, α, β, γ, δ, un gruppo G_5^2, e tutti i gruppi così definiti appartengono evidentemente alla classe dei gruppi $G_5^{2,3}$.

Si consideri una nuova base canonica:

$$\mathbf{E}_5, \quad \mathbf{E}_4, \quad \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{E}_1,$$

tale che l'operazione T che porta questa nuova base nella primitiva non alteri le prime tre delle relazioni (1).

Ponendo:

$$\mathbf{E}_5 \equiv E_5\,,\quad \mathbf{E}_4 \equiv E_4^u\,E_3^v\,,\quad \mathbf{E}_3 \equiv E_4^r\,E_3^s\,,\quad (\mathrm{mod}\ G_2)\,, \tag{2}$$

si trova:

$$\mathbf{E}_2 \equiv E_2^u\,E_1^v\,,\quad \mathbf{E}_1 \equiv E_2^r\,E_1^s\,;$$

e giacchè $\mathbf{E}_2$ ed $\mathbf{E}_1$ sono due elementi generatori di H, deve supporsi il determinante $\Delta = u\,s - v\,r$ primo con p. Per la osservazione più volte fatta, considero come una sola operazione tutte le operazioni T appartenenti alla classe definita dalle (2), quando si attribuiscono ad u, v, r, s determinati resti di p, e quest'unica operazione la rappresento col simbolo:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ r & s \end{vmatrix}.$$

Inoltre, se si cambia soltanto l'elemento $\mathbf{E}_5$ ponendo, nella maniera più generale,

$$\mathbf{E}_5 \equiv E_5^\sigma\,,\quad (\mathrm{mod}\ G_4{}^0)\,,$$

essendo σ primo con p, risulta subito dalle (1) che i quattro numeri α, β, γ, δ acquistano uno stesso fattore arbitrario primo con p: dunque le due quaterne $(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)$, $(\sigma\,\alpha,\ \sigma\,\beta,\ \sigma\,\gamma,\ \sigma\,\delta)$ debbono ritenersi equivalenti.

Ciò posto, eseguendo l'operazione:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ r & s \end{vmatrix},$$

si trovano facilmente le relazioni:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\,\alpha_1 &\equiv (\alpha\,u + \gamma\,v)\,s - (\beta\,u + \delta\,v)\,r \\ \Delta\,\beta_1 &\equiv (\beta\,u + \delta\,v)\,u - (\alpha\,u + \gamma\,v)\,v \\ \Delta\,\gamma_1 &\equiv (\alpha\,r + \gamma\,s)\,s - (\beta\,r + \delta\,s)\,r \\ \Delta\,\delta_1 &\equiv (\beta\,r + \delta\,s)\,u - (\alpha\,r + \gamma\,s)\,v \end{aligned}\right\}\ (\mathrm{mod}\ p), \tag{3}$$

dalle quali risulta:

$$\alpha_1 + \delta_1 \equiv \alpha + \delta\,,\quad \alpha_1\,\delta_1 - \beta_1\,\gamma_1 \equiv \alpha\,\delta - \beta\,\gamma\,,\quad (\mathrm{mod}\ p). \tag{4}$$

Allora, *supponendo* $p > 2$, introduco il numero:

$$D = (\alpha + \delta)^2 - 4\,(\alpha\,\delta - \beta\,\gamma)\,,$$

e distinguo, come nel paragrafo precedente, i tre casi di:

$$\left(\frac{D}{p}\right) = +1, \qquad \left(\frac{D}{p}\right) = -1, \qquad \left(\frac{D}{p}\right) = 0.$$

33. Nei primi due casi, il minimo numero intero q, positivo o nullo, che verifica la congruenza:

$$D\,q - (\alpha + \delta)^2 \equiv 0\,, \quad (\mathrm{mod}\, p)\,,$$

resta inalterato per tutte le possibili operazioni T, perchè, quando si moltiplicano i quattro numeri α, β, γ, δ per uno stesso fattore σ primo con p, i numeri D ed $(\alpha + \delta)^2$ acquistano lo stesso fattore σ^2; quindi q ha carattere invariantivo per il gruppo rappresentato dal $G_5^{2,3}$ definito dalle relazioni (1) del presente paragrafo.

Quando è $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$, la congruenza:

$$\rho^2 - (\alpha + \delta)\,\rho + (\alpha\,\delta - \beta\,\gamma) \equiv 0\,, \quad (\mathrm{mod}\, p)\,,$$

è soddisfatta da due distinti resti di p; mentre quando è $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, non esiste alcun numero intero che verifichi la detta congruenza; allora, relativamente alla quaterna di numeri α, β, γ, δ, l'analisi procede in modo perfettamente analogo a quella dei n.i 27 e 28 del § IV e non è necessario ripeterla qui.

In riguardo ai numeri λ e μ io faccio la seguente osservazione.

Cambiando solamente l'elemento $\mathbf{E}_5$ che figura nelle (2), ponendo:

$$\mathbf{E}_5 \equiv E_5\, E_4^h\, E_3^k\,, \quad (\mathrm{mod}\, G_2)\,,$$

i numeri α, β, γ, δ restano inalterati, ma λ e μ si cambiano rispettivamente in due numeri λ_1 e μ_1 tali che:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &\equiv \lambda + \alpha\, h + \gamma\, k \\ \mu_1 &\equiv \mu + \beta\, h + \delta\, k \end{aligned}\right\} \ (\mathrm{mod}\, p). \tag{5}$$

Infatti, dalle formule (1) si ricava:

$$(E_5\, E_4^h\, E_3^k)^n = E_5^n\, E_4^{nh}\, E_3^{nk}\, E_2^{h\binom{n}{2}}\, E_1^{k\binom{n}{2}}\,, \tag{6}$$

e quindi, avendo supposto $p > 2$, si ha:

$$\mathbf{E}_5^p = E_5^p\, E_4^{ph}\, E_3^{pk}.$$

Ciò posto, quando il determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ è primo con p, cioè quando E_4^p ed E_3^p sono due elementi generatori del gruppo H, si possono determinare gl'interi h e k in modo che sia:

$$\lambda_1 \equiv \mu_1 \equiv 0\,, \quad (\operatorname{mod} p)\,;$$

dunque, in tale ipotesi, è lecito supporre $E_5^p = 1$.

Fatte queste considerazioni, si vede che nel caso di $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$, si hanno $\frac{p-1}{2}$ gruppi $G_{5^{2,3}}$ in corrispondenza alle seguenti modificazioni delle ultime cinque formole (1):

$$\boxed{E_5^p = 1\,,\quad E_4^p = E_2^{\varepsilon^{m-1}}\,,\quad E_3^p = E_1^{\varepsilon^{m+1}}\,,\quad E_2^p = 1\,,\quad E_1^p = 1} \tag{7}$$

essendo $m = 0\,, \ldots\,, \frac{p-3}{2}$.

Oltre ai detti $\frac{p-1}{2}$ gruppi, esistono ancora altri due particolari gruppi: il primo di questi si presenta quando il numero invariantivo q è nullo. In tal caso si ha un gruppo che corrisponde alle formole:

$$\boxed{E_5^p = 1,\quad E_4^p = E_2^{-1},\quad E_3^p = E_1,\quad E_2^p = 1,\quad E_1^p = 1}$$

Il secondo gruppo particolare si presenta qualora si osservi che, nell'ipotesi di $m = 0$, non è sempre lecito supporre nelle (7) $E_5^p = 1$, perchè, nella detta ipotesi, E_4^p ed E_3^p non sono due elementi generatori di H. Ma essendo, nel caso attuale, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ e $\delta = 2$, le (5) mostrano che si può sempre supporre $\mu = 0$; poi, se non è λ un multiplo di p, chiamando E_1 l'elemento E_1^λ, dalle (1) risulta che si può ritenere $\lambda = 1$. Ottengo così un nuovo gruppo $G_{5^{2,3}}$ corrispondente alle formole:

$$\boxed{E_5^p = E_2\,,\quad E_4^p = 1\,,\quad E_3^p = E_1\,,\quad E_2^p = 1\,,\quad E_1^p = 1}$$

Nel caso di $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$ si hanno $\frac{p-1}{2}$ gruppi $G_{5^{2,3}}$ sostituendo le ultime cinque delle relazioni (1) con:

$$\boxed{E_5^p = 1\,,\quad E_4^p = E_2\,E_1\,,\quad E_3^p = E_2\,E_1^{\varepsilon^{2m+1}}\,,\quad E_2^p = 1\,,\quad E_1^p = 1}$$

e facendo poi successivamente:

$$m = 0, \ldots, \frac{p-3}{2};$$

inoltre, si ha un nuovo gruppo $G_5^{2,3}$ nell'ipotesi di $q = 0$ e questo gruppo corrisponde alle formole:

$$\boxed{E_5^p = 1, \quad E_4^p = E_1, \quad E_3^p = E_2^\varepsilon, \quad E_2^p = 1, \quad E_1^p = 1}$$

34. *Caso* $\left(\frac{D}{p}\right) = 0.$

Si ha allora $D \equiv 0 \pmod p$ e quindi la congruenza:

$$\rho^2 - (\alpha + \delta)\rho + (\alpha\delta - \beta\gamma) \equiv 0 \pmod p$$

è soddisfatta da un solo resto ρ di p; poi, ragionando come nel n.° 29, si vede che è lecito supporre:

$$\beta \equiv 0, \quad \alpha \equiv \delta \equiv \rho \pmod p$$

e quindi le formole (3) si scrivono:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta\alpha_1 \equiv \Delta\rho + \gamma v s, & \Delta\beta_1 \equiv -v^2\gamma \\ \Delta\delta_1 \equiv \Delta\rho - \gamma v s, & \Delta\gamma_1 \equiv s^2\gamma \end{array}\right\} \pmod p.$$

Ciò posto, se γ è primo con p, volendo conservare le condizioni iniziali, bisogna supporre $v \equiv 0 \pmod p$; indi, se ρ è primo con p, scelgo gl'interi u ed s in modo che sia $\gamma_1 \equiv \rho \pmod p$, e se ρ è un multiplo di p, scelgo i detti interi in modo che sia $\gamma_1 \equiv 1 \pmod p$. Dunque, se è γ primo con p, giacchè α, β, γ, δ si possono moltiplicare per un fattore arbitrario (n.° 32), è lecito assumere:

$$\alpha = \delta = \gamma = 1, \quad \beta = 0,$$

ovvero:

$$\alpha = \delta = \beta = 0, \quad \gamma = 1.$$

Se invece γ è un multiplo di p, si vede subito che si può assumere:

$$\alpha = \delta = 1, \quad \beta = \gamma = 0,$$

ovvero:

$$\alpha = \delta = 0, \quad \beta = \gamma = 0.$$

Nel primo e nel terzo di questi quattro casi, per l'osservazione fatta nel n.° precedente, suppongo $\lambda = 0$, $\mu = 0$; ma il secondo e quarto caso si scindono ognuno in due dietro le considerazioni che seguono.

Quando è $\alpha=\delta=\beta=0$ e $\gamma=1$, le (5) mostrano che si può supporre $\lambda=0$: allora, se μ è un multiplo di p, si ha $E_5^p=1$; e se μ è primo con p, eseguendo l'operazione:

$$\begin{vmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{vmatrix},$$

α, β, γ, δ non si alterano e μ va nel resto 1 di p.

Quando è $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$ ed uno dei due numeri λ, μ è primo con p, una delle due operazioni:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & \mu \end{vmatrix},$$

ha il determinante primo con p, e questa tale operazione dà $E_5^p=E_1$; se poi i numeri λ, μ sono entrambi multipli di p, allora è $E_5^p=1$.

In conclusione, nel caso $\left(\frac{D}{p}\right)=0$, si hanno *sei* gruppi $G_5^{2,3}$ i quali corrispondono alle seguenti modificazioni delle ultime cinque formole (1):

$E_5^p=1$,	$E_4^p=E_2$,	$E_3^p=E_2E_1$,	$E_2^p=1$,	$E_1^p=1$
$E_5^p=1$,	$E_4^p=E_2$,	$E_3^p=E_1$,	$E_2^p=1$,	$E_1^p=1$
$E_5^p=1$,	$E_4^p=1$,	$E_3^p=E_2$,	$E_2^p=1$,	$E_1^p=1$
$E_5^p=E_1$,	$E_4^p=1$,	$E_3^p=E_2$,	$E_2^p=1$,	$E_1^p=1$
$E_5^p=E_1$,	$E_4^p=1$,	$E_3^p=1$,	$E_2^p=1$,	$E_1^p=1$
$E_5^p=1$,	$E_4^p=1$,	$E_3^p=1$,	$E_2^p=1$,	$E_1^p=1$

35. Io prendo ora in esame il caso di $p=2$ che fu escluso alla fine del n.° 32.

In questo caso, tutte le operazioni:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ r & s \end{vmatrix},$$

costituiscono un gruppo di grado 6, che è isomorfo a quello che si è presentato nel n.° 9 del § II.

Le due operazioni:

$$U = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad V = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$

generatrici del detto gruppo producono sopra i numeri α, β, γ, δ le due sostituzioni congrue:

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha_1 \equiv \alpha + \gamma, & \beta_1 \equiv \alpha + \beta + \gamma + \delta, & \gamma_1 \equiv \gamma, & \delta_1 \equiv \gamma + \delta; \\ \alpha_1 \equiv \gamma + \delta, & \beta_1 \equiv \gamma, & \gamma_1 \equiv \alpha + \beta + \gamma + \delta, & \delta_1 \equiv \alpha + \gamma; \end{array}\right\} \pmod 2,$$

rispettivamente; e ciò si verifica subito mediante le (3).

Siccome ognuno dei numeri α, β, γ, δ può ritenersi, indipendentemente, eguale a *0* od eguale ad *1*, si hanno 16 quaterne $(\alpha\beta\gamma\delta)$; però io assumo come equivalenti due tali quaterne che si deducono l'una dall'altra eseguendo una operazione composta con U e V.

Nella tabella che segue sono scritte tutte le 16 quaterne in modo che le quaterne equivalenti stanno in una stessa linea orizzontale.

(0 0 0 1)	(1 0 1 0)	(1 1 0 0)	(0 1 0 1)	(0 0 1 1)	(1 0 0 0)
(0 0 1 0)	(1 1 1 1)	(0 1 0 0)			
(0 1 1 0)	(1 1 0 1)	(1 0 1 1)			
(0 1 1 1)	(1 1 1 0)				
(1 0 0 1)					
(0 0 0 0)					

Allora io considero le sei quaterne che figurano nella prima verticale del precedente quadro e, per ognuna di esse, mi formo il gruppo $\boxed{\alpha\beta\gamma\delta}$ costituito da tutte operazioni:

$$\begin{pmatrix} E_5, & E_4, & E_3, & E_2, & E_1 \\ \mathbf{F}_5, & \mathbf{F}_4, & \mathbf{F}_3, & \mathbf{F}_2, & \mathbf{E}_1 \end{pmatrix},$$

che lasciano inalterata la quaterna $(\alpha\beta\gamma\delta)$.

Chiamando W una qualunque delle quattro operazioni definite dalle formole:

$$\mathbf{E}_5 \equiv E_5 E_4^h E_3^k, \quad \mathbf{E}_4 \equiv E_4, \quad \mathbf{E}_3 \equiv E_3, \quad (\text{mod } G_2),$$

è evidente che il gruppo generato dalle operazioni W e dalle operazioni U, V contiene tutte le possibili trasformazioni T.

Il detto gruppo è isomorfo al gruppo dell'ottaedro: alle quattro operazioni W corrispondono le quattro sostituzioni del gruppo quaternario normale.

Per rendere chiaro quel che segue, scrivo le relazioni:

$$(E_5 E_4)^2 = E_5^2 E_4^2 E_2, \quad (E_5 E_3)^2 = E_5^2 E_3^2 E_1,$$

che si possono, se più piace, ricavare dalla (6).

Ciò posto, il gruppo $\boxed{0001}$ è costituito dalle operazioni W: una qualunque di esse o lascia inalterati i numeri λ e μ oppure cambia soltanto λ in $\lambda + 1$; dunque, associando alla quaterna (0 0 0 1) una delle due coppie (0 0), (0 1) come coppia $(\lambda\,\mu)$, si ottengono in corrispondenza due gruppi $G_5^{2,3}$ distinti di grado 32.

Il gruppo $\boxed{0010}$ è generato dalle operazioni W e dall'operazione $U\,V$, e mediante le W si può portare la coppia $(\lambda\,\mu)$ in (0 0).

Il gruppo $\boxed{0110}$ è generato dalle operazioni W e dalla operazione $U\,V^2$: una qualunque W o non altera i numeri λ e μ oppure aumenta i detti numeri contemporaneamente di una unità; e la $U\,V^2$ scambia semplicemente λ con μ. Dunque, associando alla quaterna (0 1 1 0) o la coppia (0 0) oppure la coppia (0 1) si ottengono, in corrispondenza, due gruppi distinti $G_5^{2,3}$ di grado 32.

Il gruppo $\boxed{0111}$ è generato dalla operazione V e dalle W e mediante le W si può portare la coppia $(\lambda\,\mu)$ nella coppia (0 0).

Il gruppo $\boxed{1001}$ è il gruppo principale generato dalle W e dalle U, V: una qualunque delle W non altera λ e μ; l'operazione U cambia soltanto μ in $\mu + \lambda$ e l'operazione V cambia soltanto λ in $\lambda + \mu$. Dunque, associando alla quaterna (1 0 0 1) la coppia (0 0) oppure la coppia (0 1), si ottengono, in corrispondenza, due gruppi distinti $G_5^{2\,3}$ di grado 32.

Finalmente, il gruppo $\boxed{0000}$ coincide anche col detto gruppo principale e mediante le W si può portare la coppia $(\lambda\,\mu)$ nella coppia (0 0).

La conclusione della precedente analisi è che, nelle attuali ipotesi, esistono *nove* gruppi $G_5^{2,3}$ di grado 32, e questi gruppi corrispondono alle seguenti modificazioni delle ultime cinque delle formole (1).

$E_5^2 = 1$,	$E_4^2 = 1$,	$E_3^2 = E_1$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = E_1$,	$E_4^2 = 1$,	$E_3^2 = E_1$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = 1$,	$E_4^2 = 1$,	$E_3^2 = E_2$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = 1$,	$E_4^2 = E_1$,	$E_3^2 = E_2$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = E_1$,	$E_4^2 = E_1$,	$E_3^2 = E_2$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = 1$,	$E_4^2 = E_1$,	$E_3^2 = E_2 E_1$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = 1$,	$E_4^2 = E_2$,	$E_3^2 = E_1$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = E_1$,	$E_4^2 = E_2$,	$E_3^2 = E_1$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = 1$,	$E_4^2 = 1$,	$E_3^2 = 1$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$

36. Io ritorno all'ordine d'idee col quale ho incominciato il presente paragrafo e riscrivo le formole:

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E'_3 , \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E'_2 , \quad E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 .$$

Ho già studiato in modo completo il caso in cui l'elemento E'_3 appartiene al gruppo H, ed ora voglio fare l'ipotesi che il detto elemento stia fuori di H.

La potenza E_3^p sta in H e quindi si ha $E'^p_2 = 1$; inoltre, giacchè non può E'_2 coincidere con l'elemento identico perchè E_3 è fuori di H, posso scrivere le relazioni:

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3 , \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_1 , \quad E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 . \tag{8}$$

Si supponga $p > 2$: allora, siccome l'elemento E_4^p sta (n.° 24) in H, deve essere $E_3^p = 1$.

Si ammetta, in prima ipotesi, il gruppo H ciclico: in tale caso, scegliendo E_2 in modo che sia $E_2^p = 1$, ho:

$$E_5^p = E_2^\alpha , \quad E_4^p = E_2^\beta , \quad E_3^p = 1 , \quad E_2^p = E_1 , \quad E_1^p = 1 ; \tag{9}$$

e, purchè si rammenti che gli elementi E_2, E_1 stanno in H, queste formole, insieme alle (8), definiscono un gruppo G_{5^2} qualunque siano gl'interi α e γ.

Se chiamo E_5 ed E_4 gli elementi $E_5 E_2^h$ ed $E_4 E_2^k$ rispettivamente, i numeri α e β si cambiano in $\alpha + p h$ e $\beta + p k$, e quindi i detti numeri si debbono intendere determinati a meno di multipli di p.

Ciò posto, avendosi una seconda base canonica:

$$\mathbf{E}_5, \quad \mathbf{E}_4, \quad \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{E}_1,$$

definita nello stesso modo della prima, se, nella maniera più generale, si ha:

$$\mathbf{E}_5 \equiv E_5^u E_4^v, \quad \mathbf{E}_4 \equiv E_4^s, \quad (\mathrm{mod}\; G_3),$$

deve essere:

$$\mathbf{E}_3 \equiv E_3^{us}, \quad \mathbf{E}_2 \equiv E_2^{u^2 s}, \quad (\mathrm{mod}\; G_1),$$

ed il prodotto $u s$ deve necessariamente supporsi primo con p.

Intanto, dalle (8) si ricava:

$$(E_5 E_4)^n = E_5^n E_4^n E_3^{\binom{n}{2}} E_2^{\binom{n}{3}},$$

e perciò, *se è* $p > 3$, si ha:

$$(E_5 E_4)^p = E_5^p E_4^p.$$

Allora, sia p maggiore od eguale a 3, eseguendo l'operazione:

$$\begin{pmatrix} E_5, & E_4, & E_3, & E_2, & E_1 \\ \mathbf{E}_5, & \mathbf{E}_4, & \mathbf{E}_3, & \mathbf{E}_2, & \mathbf{E}_1 \end{pmatrix},$$

si vede subito che α e β subiscono la sostituzione congrua:

$$\left.\begin{aligned} u^2 s\, \alpha_1 &\equiv \alpha u + \beta v \\ u^2 \beta_1 &\equiv \beta \end{aligned}\right\} (\mathrm{mod}\; p).$$

Dunque: se β è un multiplo di p, posso determinare u ed s in modo che α_1 sia o il resto *0* o il resto *1* di p; se invece β è primo con p, posso determinare u in modo che sia o $\beta_1 \equiv 1$ $(\mathrm{mod}\; p)$ oppure $\beta_1 \equiv \varepsilon$ $(\mathrm{mod}\; p)$ e, in entrambi i casi, dispongo di v in modo che α_1 sia il resto *0* di p.

In conclusione, quando H è ciclico ed è $p > 2$, si hanno quattro gruppi G_{5^2} in corrispondenza alle seguenti quattro serie di formole che sono modificazioni delle (9).

$E_5^p = 1,$	$E_4^p = 1,$	$E_3^p = 1,$	$E_2^p = E_1,$	$E_1^p = 1$
$E_5^p = E_2,$	$E_4^p = 1,$	$E_3^p = 1,$	$E_2^p = E_1,$	$E_1^p = 1$
$E_5^p = 1,$	$E_4^p = E_2,$	$E_3^p = 1,$	$E_2^p = E_1,$	$E_1^p = 1$
$E_5^p = 1,$	$E_4^p = E_2^\varepsilon,$	$E_3^p = 1,$	$E_2^p = E_1,$	$E_1^p = 1$

Il G_5^2 corrispondente alla prima serie di formole è un gruppo $G_5^{2,3}$, ed il relativo gruppo K è generato dagli elementi E_3, E_1; invece i tre gruppi corrispondenti alle ultime tre formole sono gruppi $G_5^{2,2}$ e, per ciascuno di essi, il gruppo K è generato dagli elementi E_3', E_2', E_1'.

37. Si ammetta, in seconda ipotesi, che il gruppo H abbia tutti i suoi elementi di grado p.

In tale caso bisogna sostituire le (9) con le formole:

$$E_5^p = E_2^\alpha E_1^\beta, \quad E_4^p = E_2^\gamma E_1^\delta, \quad E_3^p = 1, \quad E_2^p = 1, \quad E_1^p = 1, \qquad (10)$$

le quali, insieme alle (8), definiscono un gruppo G_5^2 qualunque siano gl'interi α, β, γ, δ.

Se il gruppo G_5^2 così definito è un $G_5^{2,2}$, uno almeno dei due numeri α, γ è primo con p.

Quando è γ primo con p, io pongo a definizione dell'elemento E_2 la relazione $E_4^p = E_2$. Allora, se v ed s sono interi ed il secondo è primo con p, eseguendo l'operazione:

$$\begin{pmatrix} E_5, & E_4, & E_3, & E_2, & E_1 \\ E_5 E_4^v, & E_4^s, & E_3^s E_1^s, & E_2^{s^2}, & E_1^s \end{pmatrix},$$

la quale non altera nè la detta relazione nè le formole (8), si vede subito che i numeri α, β si portano in due numeri α_1, β_1 tali che:

$$s\,\alpha_1 \equiv \alpha + v, \quad s\,\beta_1 \equiv \beta, \quad (\mathrm{mod}\, p > 3),$$

ovvero tali che:

$$s\,\alpha_1 \equiv \alpha + v, \quad s\,\beta_1 \equiv \beta + v, \quad (\mathrm{mod}\, p = 3).$$

Dunque, in entrambi i casi, disponendo opportunamente di v ed s si può portare la coppia $(\alpha\,\beta)$ o in $(0\,1)$ ovvero in $(0\,0)$.

Quando è γ un multiplo di p ma è α primo con p, io pongo a definizione dell'elemento E_2 la relazione $E_5^p = E_2$. Allora, se u è un intero primo con p, eseguendo l'operazione:

$$\begin{pmatrix} E_5, & E_4, & E_3, & E_2, & E_1 \\ E_5^u, & E_4, & E_3^u E_1^{\binom{u}{2}}, & E_2^u, & E_1^{u^2} \end{pmatrix},$$

la quale non altera nè la detta relazione nè le formole (8), si ha:

$$u^2\,\delta_1 \equiv \delta, \quad (\mathrm{mod}\, p).$$

Dunque, disponendo convenientemente del numero intero u, si può portare δ in uno dei tre resti ε, 1, 0 relativi a p ed, evidentemente, uno qualunque di questi casi esclude gli altri due.

In conclusione, continuando a supporre $p > 2$, i gruppi $G_5^{2,2}$ definiti dalle relazioni (8) e (10) sono cinque e corrispondono alle seguenti modificazioni delle formole (10).

$E_5^p = E_1$,	$E_4^p = E_2$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = 1$,	$E_4^p = E_2$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = E_2$,	$E_4^p = 1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = E_2$,	$E_4^p = E_1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = E_2$,	$E_4^p = E_1^\varepsilon$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$

Se il gruppo definito dalle relazioni (8) e (10) è un $G_5^{2,3}$, i due numeri α, γ sono multipli di p; allora le dette relazioni mostrano che il gruppo $G_5^{2,3}$, così definito, si ottiene aggiungendo in modo ovvio l'elemento E_2 al gruppo $G_4^{2,2}$ generato dagli elementi E_5, E_4, E_3, E_1. Le formole di composizione dei gruppi $G_4^{2,2}$ sono le (16) del § II nel caso di $p > 3$ e le (17) dello stesso paragrafo nel caso di $p = 3$; quindi, riscrivendo le dette formole dopo avere osservato che gli elementi che vi figurano E_4, E_3, E_2 hanno ora, ordinatamente, i nomi E_5, E_4, E_3, ed aggiungendo la relazione $E_2^p = 1$, si ottengono tutte le modificazioni delle (10) che corrispondono a gruppi $G_5^{2,3}$ distinti.

Dunque, nelle attuali ipotesi, se è $p > 3$, si hanno quattro gruppi $G_5^{2,3}$ corrispondenti alle formole:

$E_5^p = 1$,	$E_4^p = 1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = E_1$,	$E_4^p = 1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = 1$,	$E_4^p = E_1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = 1$,	$E_4^p = E_1^\varepsilon$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$

e se è $p = 3$, si hanno pure quattro gruppi $G_5^{2,3}$ corrispondenti alle formole:

$E_5^3 = 1$,	$E_4^3 = 1$,	$E_3^3 = 1$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$
$E_5^3 = 1$,	$E_4^3 = E_1$,	$E_3^3 = 1$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$
$E_5^3 = 1$,	$E_4^3 = E_1^2$,	$E_3^3 = 1$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$
$E_5^3 = E_1$,	$E_4^3 = E_1^2$,	$E_3^3 = 1$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$

38. Mi rimane a considerare il caso di $p = 2$ che ho escluso al principio del n.° 36.

Giacchè un gruppo G_{5^2} non può avere che un solo divisore Abeliano d'indice p, risulta che, nella presente ipotesi di $p = 2$, il quadrato dell'elemento E_5 che figura nelle relazioni (8) deve appartenere necessariamente al gruppo H. Intanto le dette relazioni dànno:

$$E_5^{-2} E_1 E_5^2 = E_4 E_3^2 E_1,$$

e perciò deve essere $E_3^2 = E_1$. Allora la prima delle (8) mostra che la potenza E_4^2 è fuori di H e quindi essa coincide con uno dei quattro elementi:

$$E_3, \quad E_3 E_2, \quad E_3 E_1, \quad E_3 E_2 E_1.$$

Io suppongo che si avveri il primo od il secondo caso, perchè, se fosse altrimenti, assumerei come elemento E_4 l'elemento $E_4 E_3$ e quindi come elemento E_3 l'elemento $E_3 E_1$.

Ciò posto, si dimostra col solito procedimento che, aggiungendo alle (8) le relazioni:

$$E_5^2 = E_2^\alpha E_1^\beta, \quad E_4^2 = E_3, \quad E_3^2 = E_1, \quad E_2^2 = E_1^h, \quad E_1^2 = 1, \tag{11}$$

oppure le relazioni:

$$E_5^2 = E_2^\alpha E_1^\beta, \quad E_4^2 = E_3 E_2, \quad E_3^2 = E_1, \quad E_2^2 = E_1^h, \quad E_1^2 = 1, \tag{12}$$

si definisce in ogni caso un gruppo G_{5^2} di grado 32.

Essendo, in virtù delle (8),

$$(E_5 E_4)^2 = E_5^2 E_4^2 E_3,$$

si vede che, chiamando E_5 l'elemento $E_5 E_4$, se hanno luogo le (11), gl'interi α e β si cambiano rispettivamente in α e $\beta + 1$, e, se hanno luogo le (12), i detti interi si cambiano rispettivamente in $\alpha + 1$ e $\beta + 1$.

Dunque, nelle (11) io posso supporre che sia $E_5^2 = 1$ ovvero $E_5^2 = E_2$, ed è poi facile convincersi che questi due casi non si possono ridurre l'uno nell'altro qualunque sia h.

Nelle (12) posso supporre che sia $E_5^2 = 1$ ovvero $E_5^2 = E_1$, e questi due casi sono tra loro irreduttibili soltanto quando è $h = 0$; ma, se è $h = 1$, i detti casi si possono ridurre l'uno nell'altro chiamando E_5 l'elemento $E_5 E_2$.

In conclusione, nell'attuale ipotesi, si hanno *sette* gruppi G_5^2 di grado 32, i quali sono definiti dalle (8) insieme alle seguenti relazioni:

$E_5^2 = 1$,	$E_4^2 = E_3$,	$E_3^2 = E_1$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = 1$,	$E_4^2 = E_3$,	$E_3^2 = E_1$,	$E_2^2 = E_1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = E_2$,	$E_4^2 = E_3$,	$E_3^2 = E_1$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = E_2$,	$E_4^2 = E_3$,	$E_3^2 = E_1$,	$E_2^2 = E_1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = 1$,	$E_4^2 = E_3 E_2$,	$E_3^2 = E_1$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = 1$,	$E_4^2 = E_3 E_2$,	$E_3^2 = E_1$,	$E_2^2 = E_1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = E_1$,	$E_4^2 = E_3 E_2$,	$E_3^2 = E_1$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$

I due gruppi, che corrispondono alle prime due serie di formole, sono gruppi $G_5^{2,3}$; invece i cinque gruppi corrispondenti alle ultime cinque formole sono gruppi $G_5^{2,2}$.

39. Io riepilogo brevemente i risultati ottenuti nel presente paragrafo.

I gruppi G_5^2, che posseggono un divisore Abeliano d'indice p, si dividono in due categorie, secondo che il gruppo K coincide ovvero non coincide col gruppo H.

Nella prima categoria esistono $p + 8$, e non più, gruppi G_5^2 di grado p^5 con $p > 2$, e soltanto *nove* gruppi G_5^2 di grado 32.

Tutti i gruppi della prima categoria sono gruppi $G_5^{2,3}$.

Nella seconda categoria esistono soltanto *tredici* gruppi G_5^2 di grado p^5 con $p > 2$: di questi tredici gruppi, cinque sono gruppi $G_5^{2,3}$ ed i rimanenti otto sono gruppi $G_5^{2,2}$.

La detta seconda categoria contiene ancora *sette* gruppi G_5^2 di grado 32: di questi gruppi, due sono gruppi $G_5^{2,3}$ ed i rimanenti cinque sono gruppi $G_5^{2,2}$.

Tutti i gruppi che sono stati trovati in questo paragrafo sono rappresentati nelle seguenti tabelle.

I.

$$\{H(E_2,\ E_1)\};\quad \{K=H\}.$$

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_2\,,\quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_1\,,\quad E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3\,.$$

	E_5^p	E_4^p	E_3^p	E_2^p	E_1^p	
Gruppi $G_5^{2,3}$	1	$E_2^{\varepsilon^m-1}$	$E_1^{\varepsilon^m+1}$	1	1	$\left(\frac{D}{p}\right)=+1$
	1	E_2^{-1}	E_1	1	1	
	E_2	1	E_1	1	1	
	1	$E_2 E_1$	$E_2 E_1^{\varepsilon^{2m+1}}$	1	1	$\left(\frac{D}{p}\right)=-1$
	1	E_1	E_2^{ε}	1	1	
	1	E_2	E_1	1	1	$\left(\frac{D}{p}\right)=0$
	1	E_2	$E_2 E_1$	1	1	
	1	1	E_2	1	1	
	E_1	1	E_2	1	1	
	E_1	1	1	1	1	
	1	1	1	1	1	

$$m=0\,,\ldots,\ \frac{p-3}{2}\quad \{p>2\}$$

II.

Gruppi G_5^2 *di grado* 32.

$\{H(E_2, E_1)\}$; $\{K = H\}$.

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_2, \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_1, \quad E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3.$$

	E_5^2	E_4^2	E_3^2	E_2^2	E_1^2
Gruppi $G_5^{2,3}$. $\{p = 2\}$.	1	1	E_1	1	1
	E_1	1	E_1	1	1
	1	1	E_2	1	1
	1	E_1	E_2	1	1
	E_1	E_1	E_2	1	1
	1	E_1	$E_2 E_1$	1	1
	1	E_2	E_1	1	1
	E_1	E_2	E_1	1	1
	1	1	1	1	1

$\{H(E_2, E_1)\}$; $\{K \neq H\}$.

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3, \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_1, \quad E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3.$$

	E_5^2	E_4^2	E_3^2	E_2^2	E_1^2
$G_5^{2,3}$	1	E_3	E_1	1	1
	1	E_3	E_1	E_1	1
Gruppi $G_5^{2,2}$	E_2	E_3	E_1	1	1
	E_2	E_3	E_1	E_1	1
	1	$E_3 E_2$	E_1	1	1
	1	$E_3 E_2$	E_1	E_1	1
	E_1	$E_3 E_2$	E_1	1	1

III.

$$\{H(E_2, E_1)\}; \quad \{K \mathrel{=\!\!\!|\!\!\!=} H\}.$$

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3, \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_1, \quad E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3.$$

	E_5^p	E_4^p	E_3^p	E_2^p	E_1^p	
Gruppi $G_5^{2,2}$ $\{p > 2\}$	1	1	1	E_1	1	$p \geqq 3$
	E_2	1	1	E_1	1	$p \geqq 3$
	1	E_2	1	E_1	1	$p \geqq 3$
	1	E_2^ε	1	E_1	1	$p \geqq 3$
	E_1	E_2	1	1	1	$p \geqq 3$
	1	E_2	1	1	1	$p \geqq 3$
	E_2	1	1	1	1	$p \geqq 3$
	E_2	E_1	1	1	1	$p \geqq 3$
	E_2	E_1^ε	1	1	1	$p \geqq 3$
Gruppi $G_5^{2,3}$	1	1	1	1	1	$p \geqq 3$
	E_1	1	1	1	1	$p > 3$
	1	E_1	1	1	1	$p \geqq 3$
	1	E_1^ε	1	1	1	$p \geqq 3$
	E_1	E_1^2	1	1	1	$p = 3$

§ VI. I Gruppi $G_5^{3,2}$.

40. In un gruppo G_5^3 il divisore invertibile H è di grado p ed è quindi contenuto in ogni divisore normale di G_5^3. Nel presente paragrafo mi propongo di trovare tutti i gruppi G_5^3 che hanno due soli divisori indipendenti d'indice p: distinguerò questi gruppi in due categorie, ascrivendo alla prima categoria ogni gruppo $G_5^{3,2}$, che ammette un divisore Abeliano d'indice p, ed alla seconda categoria ogni gruppo $G_5^{3,2}$ che non possiede un tale divisore.

Se:

$$G_5^{3,2}, \quad G_4^0, \quad G_3, \quad G_2, \quad G_1,$$

è una serie canonica di composizione di un gruppo della prima categoria ed:

$$E_5, \quad E_4, \quad E_3, \quad E_2, \quad E_1,$$

è una base relativa alla detta serie si ha:

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3', \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_2', \quad E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1',$$
$$E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3, \qquad E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2, \qquad E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2.$$

Qualsiasi elemento di G_4^0 che è invertibile con E_5 appartiene necessariamente ad H: infatti, un tale elemento risulta invertibile con ogni altro elemento di $G_5^{3,2}$.

Ciò posto, l'elemento E_1' che figura nelle formole precedenti è un elemento generatore E_1 del gruppo $G_1 = H$.

L'elemento E_2' è fuori di G_1, perchè, se fosse $E_2' = E_1^\alpha$, l'elemento $E_3 E_2^{-\alpha}$, che è fuori di H, risulterebbe invertibile con E_5. Suppongo dunque $E_2' = E_2$.

L'elemento E_3' è fuori di G_2, perchè, se fosse $E_3' = E_2^\alpha E_1^\beta$, l'elemento $E_4 E_3^{-\alpha} E_2^{-\beta}$, che è fuori di H, risulterebbe invertibile con E_5. Suppongo dunque $E_3' = E_3$.

Io posso ora scrivere le formole definitive:

$$\left.\begin{array}{lll} E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3, & E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_2, & E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1, \\ E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3, & E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2, & E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2, \end{array}\right\} \quad (1)$$

le quali mostrano che il gruppo G_3 coincide necessariamente con K; inoltre, il ragionamento che ho fatto per stabilire le (1) prova che ogni gruppo G_5^3, che possiede un divisore Abeliano d'indice p, è certamente un gruppo $G_5^{3,2}$.

È importante osservare che la potenza E_5^p appartiene al gruppo G_3 ed è invertibile con E_5: dunque la detta potenza sta in H.

Dalle relazioni (1) si ricava:

$$E_5^{-n} E_4 E_5^n = E_4 E_3^n E_2^{\binom{n}{2}} E_1^{\binom{n}{3}}, \quad E_5^{-n} E_3 E_5^n = E_3 E_2^n E_1^{\binom{n}{2}};$$

quindi, *supposto* $p > 3$, per l'osservazione precedente deve essere:

$$E_2^p = 1, \quad E_3^p = 1.$$

Allora, siccome è:

$$E_5^{-1} E_4^p E_5 = E_4^p E_3^p,$$

l'elemento E_4^p risulta invertibile con E_5 e perciò sta in H.

Si hanno dunque le formole:

$$E_5^p = E_1^\alpha, \quad E_4^p = E_1^\beta, \quad E_3^p = 1, \quad E_2^p = 1, \quad E_1^p = 1, \tag{2}$$

le quali, insieme alle (1) definiscono un gruppo $G_5^{3,2}$ qualunque siano gl'interi α, β purchè si tenga presente che E_1 appartiene ad H e che è $p > 3$.

Sia ora:

$$\mathbf{E}_5, \quad \mathbf{E}_4, \quad \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{E}_1,$$

una seconda base canonica di $G_5^{3,2}$ definita come la prima. Ponendo, nel modo più generale,

$$\mathbf{E}_5 \equiv E_5^u E_4^v, \quad \mathbf{E}_4 \equiv E_4^s, \quad (\mathrm{mod}\ G_3),$$

si trova successivamente:

$$\mathbf{E}_3 \equiv E_3^{us} (\mathrm{mod}\ G_2), \quad \mathbf{E}_2 \equiv E_2^{u^2 s} (\mathrm{mod}\ G_1), \quad \mathbf{E}_1 \equiv E_1^{u^3 s},$$

e quindi il prodotto $u\,s$ deve supporsi primo con p.

Dopo ciò, pensando alle (1), dopo un breve calcolo si ha:

$$(E_5 E_4)^n = E_5^n E_4^n E_3^{\binom{n}{2}} E_2^{\binom{n}{3}} E_1^{\binom{n}{4}};$$

dunque, avendo supposto $p > 3$, risulta:

$$(E_5 E_4)^p = E_5^p E_4^p,$$

e quindi:

$$\mathbf{E}_5^p = E_5^{pu} E_4^{pv} = E_1^{\alpha u + \beta v}.$$

Si vede allora immediatamente che l'operazione:

$$\begin{pmatrix} E_5, & E_4, & E_3, & E_2, & E_1 \\ \mathbf{E}_5, & \mathbf{E}_4, & \mathbf{E}_3, & \mathbf{E}_2, & \mathbf{E}_1 \end{pmatrix},$$

porta i numeri α e β nei numeri α_1 e β_1 tali che:

$$\left.\begin{aligned} u^3 s\,\alpha_1 &\equiv a\,u + \beta\,v\,, \\ u^3\,\beta_1 &\equiv \beta. \end{aligned}\right\} \pmod p.$$

Qui bisogna distinguere il caso in cui $p-1$ è primo con 3 dal caso in cui $p-1$ è un multiplo di 3. Nel primo caso, se non è β un multiplo di p, si può scegliere u in modo che sia $u^3 \equiv \beta \pmod p$: quindi β_1 si può portare o nel resto 1 oppure nel resto 0 di p; invece, nel secondo caso, il numero β_1 si può portare in uno dei quattro resti 0, 1, ε, ε^2 di p, ed una qualunque di queste quattro ipotesi esclude le altre tre. Inoltre si osservi che tutte le volte che è β primo con p, disponendo convenientemente di v, posso portare α_1 nel resto 0 di p; e se è β un multiplo di p, disponendo convenientemente di s posso portare α_1 in uno dei due resti 1, 0 di p.

In conclusione, se è $p-1$ primo con 3, esistono solamente tre gruppi $G_5^{3,2}$ che hanno ciascuno un divisore Abeliano d'indice p, e questi tre gruppi corrispondono alle seguenti modificazioni delle formole (2):

$E_5^p = 1$,	$E_4^p = 1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = E_1$,	$E_4^p = 1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = 1$,	$E_4^p = E_1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$

Se poi $p-1$ è un multiplo di 3, oltre ai precedenti tre gruppi, si hanno ancora due nuovi gruppi $G_5^{3,2}$ che corrispondono alle seguenti modificazioni delle (2):

$E_5^p = 1$,	$E_4^p = E_1^{\varepsilon}$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = 1$,	$E_4^p = E_1^{\varepsilon^2}$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$

41. Supponendo ora $p = 3$, le (1) danno:

$$E_5^{-3} E_4 E_5^3 = E_4 E_3^3 E_2^3 E_1\,, \quad E_5^{-3} E_3 E_5^3 = E_3 E_2^3\,;$$

quindi, giacchè E_5^3 sta in H, si ha successivamente:

$$E_2^3 = 1\,, \quad E_3^3 = E_1^2\,.$$

Allora le formole (1) e la relazione:

$$E_5^{-1} E_4^3 E_5 = E_4^3 E_3^3 = E_4^3 E_1^2 ,$$

mostrano che l'elemento E_4 deve coincidere con un elemento di G_2 del tipo $E_2^2 E_1^\beta$.

Si hanno dunque le formole:

$$E_5^3 = E_1^\alpha , \quad E_4^3 = E_2^2 E_1^\beta , \quad E_3^3 = E_1^2 , \quad E_2^3 = 1 , \quad E_1^3 = 1 , \qquad (3)$$

le quali, insieme alle (1), definiscono sempre un gruppo $G_5^{3,2}$ di grado 243.

Si osservi che l'operazione:

$$\begin{pmatrix} E_5 , & E_4 , & E_3 , & E_2 , & E_1 \\ E_5^2 , & E_4 , & E_3^2 E_2 , & E_2 E_1 , & E_1^2 \end{pmatrix},$$

lascia inalterate le (1) e cambia α e β rispettivamente in α e $2\beta + 2$: dunque si può ritenere o $\beta = 0$ oppure $\beta = 1$. Se è $\beta = 0$, osservando che è:

$$(E_5 E_4)^3 = E_5^3 E_4^3 E_3^3 E_2 = E_1^{\alpha+2},$$

si vede che, chiamando E_5 uno dei due elementi $E_5 E_4$, $E_5 E_4^2$, si può supporre $\alpha = 0$. Ma, se è $\beta = 1$, è facile verificare che, cambiando comunque la base canonica, in modo tale però che le (1) si conservino, i numeri α e β restano inálterati: dunque, se è $\beta = 1$, le tre ipotesi $\alpha = 0$, 1, 2 non si possono ridurre una in un'altra.

In conclusione, esistono soltanto quattro gruppi $G_5^{3,2}$ di grado 243 che posseggono ciascuno un divisore Abeliano di grado 81, e questi quattro gruppi sono definiti dalle (1) e dalle seguenti modificazioni delle formole (3):

$E_5^3 = 1$,	$E_4^3 = E_2^2$,	$E_3^3 = E_1^2$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$
$E_5^3 = 1$,	$E_4^3 = E_2^2 E_1$,	$E_3^3 = E_1^2$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$
$E_5^3 = E_1$,	$E_4^3 = E_2^2 E_1$,	$E_3^3 = E_1^2$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$
$E_5^3 = E_1^2$,	$E_4^3 = E_2^2 E_1$,	$E_3^3 = E_1^2$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$

42. Io suppongo finalmente $p = 2$.

Dalle (1) si ricava:

$$E_5^{-2} E_4 E_5^2 = E_4 E_3^2 E_2 , \quad E_5^{-2} E_3 E_5^2 = E_3 E_2^2 E_1 ;$$

quindi, giacchè E_5^2 sta in H, si ha successivamente:

$$E_2^2 = E_1, \quad E_3^2 = E_2^{-1}.$$

Allora le formole (1) e la relazione:

$$E_5^{-1} E_4^2 E_5 = E_4^2 E_3^2 = E_4^2 E_2^{-1},$$

mostrano che l'elemento E_4^2 deve coincidere con un elemento di G_3 del tipo $E_3^{-1} E_1^{\beta}$.

Si hanno dunque le formole:

$$E_5^2 = E_1^{\alpha}, \quad E_4^2 = E_3^{-1} E_1^{\beta}, \quad E_3^2 = E_2^{-1}, \quad E_2^2 = E_1, \quad E_1^2 = 1, \tag{4}$$

le quali, insieme alle (1) definiscono sempre un gruppo $G_5^{3,2}$ di grado 32.

Ciò posto, si verifica facilmente che, cambiando comunque la base canonica in modo tale però che le (1) si conservino, il numero β resta sempre inalterato ed il numero α o resta inalterato oppure si cambia in $\alpha + \beta$.

Dunque, se è $\beta = 0$, le due ipotesi $\alpha = 0$, 1 non si possono ridurre l'una nell'altra; ma, se è $\beta = 1$, si può sempre supporre $\alpha = 0$.

In conclusione, esistono soltanto tre gruppi $G_5^{3,2}$ di grado 32 che posseggono ciascuno un divisore Abeliano di grado 16, e questi tre gruppi sono definiti dalle formole (1) e dalle seguenti modificazioni delle (4):

$E_5^2 = 1$,	$E_4^2 = E_3^{-1}$,	$E_3^2 = E_2^{-1}$,	$E_2^2 = E_1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = E_1$,	$E_4^2 = E_3^{-1}$,	$E_3^2 = E_2^{-1}$,	$E_2^2 = E_1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = 1$,	$E_4^2 = E_3^{-1} E_1$,	$E_3^2 = E_2^{-1}$,	$E_2^2 = E_1$,	$E_1^2 = 1$

Ho già osservato che i gruppi G_5^3, che posseggono un divisore Abeliano d'indice p, sono necessariamente gruppi $G_5^{3,2}$; ma è ancora notevole il fatto che i rimanenti p divisori d'indice p sono gruppi $G_4^{2,2}$: ciò risulta dalle formole di composizione trovate nei tre ultimi numeri.

43. Si abbia ora un gruppo $G_5^{3,2}$ tale che in esso non sia contenuto alcuno divisore Abeliano d'indice p.

Sia G_2 un divisore normale di $G_5^{3,2}$ appartenente al gruppo K ed E_2 un elemento di G_2 fuori di H: ragionando come al n.° 13 del § II, si dimostra che esiste un elemento E_3, fuori di G_2, che è invertibile con E_2; poi, considerando il gruppo Abeliano G_3 generato dall'elemento E_3 e dagli elementi di G_2, si dimostra ancora che esiste un elemento E_4 fuori di G_3, che è pure invertibile con E_2. Il gruppo G_4 generato dall'elemento E_4 e dagli elementi di G_3 è un G_4^1 che ha come divisore invertibile in gruppo G_2. Questo gruppo G_4^1 deve contenere il gruppo K di $G_5^{3,2}$ ed io pongo $K = G_3$; poi, denotando con E_1 un elemento generatore del gruppo $H = G_1$, considero la serie di composizione:

$$G_5^{3,2}, \quad G_4^1, \quad G_3, \quad G_2, \quad G_1.$$

Dopo ciò, ponendo:

$$E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_2'', \quad E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1',$$

l'elemento E_2'' non è l'elemento identico perchè il gruppo G_4^1 non è Abeliano; inoltre, giacchè E_3^p sta in G_2, risulta $E''^p_2 = 1$. Ora, il gruppo ciclico generato dalle potenze di E_2'' è l'unico della sua specie contenuto in G_4^1, e siccome G_4^1 è divisore normale di $G_5^{3,2}$, il detto gruppo è anche divisore normale di $G_5^{3,2}$ e coincide quindi con G_1: si può dunque ritenere $E_2'' = E_1$.

Similmente, E_1' non è l'elemento identico altrimenti l'elemento E_2, che è fuori di H, risulterebbe permutabile anche con E_5 e quindi con ogni elemento di $G_5^{3,2}$: dunque si ha $E_1' = E_1^h$ essendo l'intero h primo con p.

Si hanno perciò le formole:

$$\left.\begin{array}{lll} E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3', & E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_2', & E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1^h, \\ E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1, & E_4^{-2} E_2 E_4 = E_2, & E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2, \end{array}\right\} \quad (5)$$

Io comincio coll'osservare che il gruppo K non può essere ciclico.

Infatti, giacchè il gruppo $G_5^{3,2}$ non contiene per ipotesi alcun divisore Abeliano d'indice p, la potenza E_5^p non è di grado superiore a p^2 e quindi sta in G_2. Allora l'elemento E_3' che figura nelle (5) non sta in G_2 perchè, in tale caso, i quattro elementi E_5, E_4, E_2, E_1 generano un gruppo di grado p^4 e questo gruppo non conterrebbe K. Ponendo dunque:

$$E_3' = E_3, \quad E_3^p = E_2,$$

dalle (5) risulta:

$$E_5^{-1} E_4^p E_5 = E_4^p E_3^p E_1^{\binom{p}{2}} = E_4^p E_2 E_1^{\binom{p}{2}}:$$

ciò è assurdo giacchè, dovendo la potenza E_4^p appartenere a G_2, si ha:

$$E_5^{-1} E_4^p E_5 \equiv E_4^p, \quad (\mathrm{mod}\, G_1).$$

44. Si ammetta, in prima ipotesi, che il gruppo Abeliano K abbia tutti i suoi elementi di grado p; in altri termini, che sia G_3 un gruppo $G_3^{0,3}$.

Supponendo allora $p > 3$, dalle (5) risulta:

$$E_5^{-p} E_4 E_5^p = E_4 , \quad E_5^{-p} E_3 E_5^p = E_3 , \quad E_5^{-p} E_2 E_5^p = E_2 ,$$
$$E_5^{-1} E_4^p E_5 = E_4^p , \quad E_4^{-p} E_3 E_4^p = E_3 , \quad E_4^{-p} E_2 E_4^p = E_2 ;$$

quindi gli elementi E_5^p, E_4^p, i quali riescono invertibili con qualsiasi elemento di $G_5^{3,2}$, appartengono ad H.

Ciò posto, se E_3' potesse appartenere a G_2, i quattro elementi E_5, E_4, E_2, E_1 genererebbero un gruppo di grado p^4 il quale non conterrebbe K: dunque, si può porre $E_3' = E_3$. Similmente, se E_2' potesse appartenere a G_1, i quattro elementi E_5, E_4, E_3, E_1 genererebbero un gruppo di grado p^4 il quale non conterrebbe K: dunque si può porre $E_2' = E_2$.

Dopo quello che si è detto, si possono scrivere le formole:

$$\left.\begin{array}{lll} E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3 , & E_5^{\ 1} E_3 E_5 = E_3 E_2 , & E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1^h , \\ E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1 , & E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2 , & E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2 . \end{array}\right\} \quad (6)$$

$$E_5^p = E_1^\alpha , \quad E_4^p = E_1^\beta , \quad E_3^p = 1 , \quad E_2^p = 1 , \quad E_1^p = 1. \quad (7)$$

Col solito ragionamento si prova che queste formole definiscono sempre un gruppo $G_5^{3,2}$, purchè si pensi che E_1 appartiene ad H e che è $p > 3$.

Inoltre si osservi che si può ritenere $h = 1$, perchè, se fosse altrimenti, eseguendo la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_5 , & E_4 , & E_3 , & E_2 , & E_1 \\ E_5 , & E_4^h , & E_3^h E_1^{\binom{h}{2}} , & E_2^h , & E_1^{h^2} \end{pmatrix},$$

la quale non altera la forma delle (6) e (7), si porta subito il numero h nel resto *1* di p.

Se:

$$\mathbf{E}_5 , \quad \mathbf{E}_4 , \quad \mathbf{E}_3 , \quad \mathbf{E}_2 , \quad \mathbf{E}_1 ,$$

è una seconda base canonica definita come la prima, si vede immediatamente sulle formole (6) e (7) che le trasformazioni definite dalle congruenze:

$$\mathbf{E}_5 \equiv E_5 , \quad \mathbf{E}_4 \equiv E_4 , \quad (\mathrm{mod}\ G_3) ,$$

non alterano gl'interi α, β, h; dunque io posso considerare come un'unica trasformazione tutte quelle definite da:

$$\mathbf{E}_5 \equiv E_5^u E_4^v , \quad \mathbf{E}_4 \equiv E_4^s , \quad (\mathrm{mod}\ G_3) ,$$

per dati valori degli interi u, v, s, i quali d'altronde debbono essere tali che il prodotto us risulti primo con p.

Gli elementi $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_1$, che bisogna associare agli elementi $\mathbf{E}_5$, $\mathbf{E}_4$ ultimamente definiti, sono tali che:

$$\mathbf{E}_3 \equiv E_3^{us} \pmod{G_2}, \quad \mathbf{E}_2 \equiv E_2^{u^2 s} \pmod{G_1}, \quad \mathbf{E}_1 = E_1^{us^2};$$

quindi, dopo avere osservato che è:

$$(E_5 E_4)^n = E_5^n E_4^n E_3^{\binom{n}{2}} E_2^{\binom{n}{3}} E_1^{\binom{n}{4}},$$

e perciò, avendo supposto $p > 3$, che è:

$$(E_5 E_4)^p = E_5^p E_4^p,$$

si vede facilmente che la detta trasformazione fa subire agli interi α, β, h la sostituzione congrua:

$$s^2 u \alpha_1 \equiv \alpha u + \beta v, \quad s u \beta_1 \equiv \beta, \quad s h_1 \equiv u^2 h, \quad (\text{mod}\, p).$$

Avendo supposto $h = 1$, se si vuole che sia ancora $h_1 = 1$, bisogna prendere $s \equiv u^2 \pmod{p}$ e quindi si ha:

$$u^5 \alpha_1 \equiv u \alpha + v \beta, \quad u^3 \beta_1 \equiv \beta, \quad (\text{mod}\, p).$$

Osservo anzitutto che ogni volta che non è β un multiplo di p, si può determinare il numero v in modo che sia $\alpha_1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Ciò posto, iò distinguo i seguenti quattro casi possibili:

$$p \equiv -1, \quad p \equiv -5, \quad p \equiv 5, \quad p \equiv 1, \quad (\text{mod}\, 12).$$

Nel primo caso, il numero $p - 1$ non è divisibile nè per *3* nè per *4* e quindi ogni numero è cubo $(\text{mod}\, p)$ ed ogni numero quadrato $(\text{mod}\, p)$ è un biquadrato $(\text{mod}\, p)$.

Dunque, se β non è multiplo di p, si può determinare u in modo che β_1 sia il resto *1* di p: se invece è β un multiplo di p, tutte le volte che non è α un multiplo di p, si può determinare u in modo che sia o $\alpha_1 \equiv 1 \pmod{p}$ ovvero $\alpha_1 \equiv \varepsilon \pmod{p}$, secondo che α è della forma u^4 ovvero della forma εu^4 rispetto a mod p.

Ottengo quindi quattro gruppi $G_5^{3,2}$, che corrispondono alle seguenti modificazioni delle (7):

$E_5^p = 1$,	$E_4^p = E_1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = 1$,	$E_4^p = 1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = E_1$,	$E_4^p = 1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = E_1^{\varepsilon}$,	$E_4^p = 1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$

Nel secondo caso, $p - 1$ è divisibile per 3 ma non per 4, quindi ogni numero ha, rispetto a $\mathrm{mod}\, p$, una delle forme:

$$u^3, \quad \varepsilon u^3, \quad \varepsilon^2 u^3;$$

allora, se β è della prima forma, si hanno i quattro gruppi trovati precedentemente, ma se β è della seconda o della terza forma, si hanno due nuovi gruppi $G_5^{3,2}$, i quali corrispondono alle seguenti modificazioni delle (7):

$E_5^p = 1$,	$E_4^p = E_1^{\varepsilon}$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = 1$,	$E_4^p = E_1^{\varepsilon^2}$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$

Nel terzo caso, $p - 1$ è divisibile per 4 ma non per 3, quindi ogni numero ha, rispetto a $\mathrm{mod}\, p$, una delle forme:

$$u^4, \quad \varepsilon u^4, \quad \varepsilon^2 u^4, \quad \varepsilon^3 u^4.$$

I due ultimi gruppi trovati sono ora isomorfi al primo dei quattro gruppi che si riferiscono al primo caso; ma, oltre a questi, si hanno ancora due nuovi gruppi i quali si presentano quando è β un multiplo di p e che corrispondono alle seguenti modificazioni delle formole (7):

$E_5^p = E_1^{\varepsilon^2}$,	$E_4^p = 1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = E_1^{\varepsilon^3}$,	$E_4^p = 1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$

Se si fosse nel secondo caso, questi due gruppi sarebbero isomorfi rispettivamente ai due ultimi gruppi che si riferiscono al primo caso.

Finalmente, nel quarto caso, $p-1$ è divisibile per *3* e per *4* e quindi gli *otto* gruppi scritti nei tre casi precedenti sono effettivamente distinti e sono tutti i possibili gruppi $G_{5}^{3,2}$ che rientrano nell'attuale caso.

45. Nell'ultimo numero ho supposto che il gruppo $G_{5}^{3,2}$ non abbia alcun divisore Abeliano d'indice p e che il gruppo K, intersezione dei $p+1$ divisori d'indice p di $G_{3}^{3,2}$ abbia tutti i suoi elementi di grado p.

In queste ipotesi, io posso dimostrare che non esistono gruppi $G_{5}^{3,2}$ di grado 243. Infatti, se è $p=3$, riferendomi alle formole (5), concludo come prima $E_3'=E_3$, $E_2'=E_2$, e quindi dovrebbero sussistere le formole (6). Allora da queste si ricava:

$$E_5^{-3} E_4 E_5^3 = E_4 E_3^3 E_2^3 E_1^h = E_4 E_1^h ;$$

perciò l'elemento E_5^3 è un elemento di K del tipo $E_3^{-h} E_2^{\alpha} E_1^{\beta}$. Questo elemento, essendo una potenza di E_5, dovrebbe essere invertibile con E_5 e ciò contraddice alle stesse formole (6).

Invece, se è $p=2$, esiste un gruppo di grado 32 ed uno solo, che soddisfa a tutte le attuali ipotesi. Allora l'elemento E_3' non può appartenere a G_1, perchè, se così fosse, il quadrato E_5^2, che appartiene a G_3, risulterebbe permutabile con E_4 e quindi dovrebbe essere contenuto in G_2, anzi in G_1, perchè il detto quadrato è invertibile con E_5: ciò non può essere a meno che non sia E_2' un elemento di G_1; ma, in tale caso, il gruppo definito dalle (5) e (7) sarebbe evidentemente un gruppo $G_5^{3,4}$.

Si ammetta dunque in primo luogo $E_3'=E_2$. Allora l'elemento E_5^2 non è invertibile con E_4 e quindi il detto elemento appartiene a G_3 ma non a G_2: dunque posso ritenere $E_5^2=E_3$ e conseguentemente $E_2'=1$. Inoltre, l'elemento E_4^2 risulta invertibile con E_5 e perciò sta in G_1; anzi io ritengo addirittura $E_4^2=1$, perchè, se fosse altrimenti, chiamerei E_4 l'elemento $E_4 E_3$.

Dopo ciò posso scrivere le formole:

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_2 , \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 , \quad E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1 ,$$
$$E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1 , \quad E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2 , \quad E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2 ,$$
$$E_5^2 = E_3 , \quad E_4^2 = 1 , \quad E_3^2 = 1 , \quad E_2^2 = 1 , \quad E_1^2 = 1 ,$$

le quali definiscono effettivamente un gruppo $G_5^{3,2}$ di grado 32.

Questo gruppo ha tre divisori di grado 16, ciascuno dei quali è generato da uno dei tre elementi:

$$E_4 , \quad E_5 , \quad E_5 E_4 ,$$

e dagli elementi di $G_3=K$.

Mi resta ad esaminare il caso di $E_3' = E_3$: anche a questo caso corrisponde un gruppo di grado 32, che soddisfa alle attuali ipotesi; ma questo gruppo, è isomorfo al precedente e si ottiene scambiando nelle ultime formole E_5 con E_4 e, nello stesso tempo, E_3 con E_2.

È bene osservare che gli otto gruppi trovati nel numero precedente hanno un solo divisore G_4^1 e tutti gli altri p divisori d'indice p sono gruppi G_4^2; mentre, per l'unico gruppo di grado 32 ora trovato, accade che tutti i suoi divisori d'indice *2* sono gruppi G_4^1.

46. Si ammetta, in seconda ipotesi, che il gruppo K sia un $G_3^{0,2}$.

Allora il gruppo K possiede un solo divisore d'indice p tale che tutti i suoi elementi sono di grado p. Questo divisore è dunque normale in $G_5^{3,2}$ e si può assumere come gruppo G_2.

Se E_2 è un elemento di G_2 fuori di G_1, io mi costruisco come al n.° 43 il gruppo G_4^1 costituito da tutti gli elementi di $G_5^{3,2}$ che sono permutabili con E_2 e poi considero la serie canonica:

$$G_5^{3,2}, \quad G_4^1, \quad G_3^{0,2}, \quad G_2, \quad G_1,$$

ed una base:

$$E_5, \quad E_4, \quad E_3, \quad E_2, \quad E_1,$$

relativa alla detta serie.

Dopo ciò, ragionando come nel n.° 44, concludo che, se è $p > 2$, l'elemento E_3' che figura nelle (5) non può appartenere a G_2 e quindi posso porre $E_3' = E_3$.

L'elemento E_3 è nelle presenti ipotesi di grado p^2 e perciò la relazione:

$$E_5^{-1} E_4^p E_5 = E_4^p E_3^p,$$

mostra che la potenza E_4^p non è invertibile con E_5: dunque questa potenza è un elemento di G_2 fuori di G_1 e posso allora ritenere $E_4^p = E_2$. In tale caso la detta relazione si scrive:

$$E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_3^p,$$

e quindi deve necessariamente essere $E_3^p = E_1^h$.

Supponendo ora $p > 3$, le formole (5) mostrano che la potenza E_5^p non è invertibile con E_4 e quindi la detta potenza sta in G_3 ma non in G_2. Dunque il gruppo G_3 contiene elementi fuori di G_2 che sono invertibili con E_5 e per questo è necessario che l'elemento E_2' che figura nelle formole (5) appartenga a G_1.

Le considerazioni precedenti portano alle formole:

$$\left.\begin{array}{lll} E_5^{-1}E_4E_5=E_4E_3\,, & E_5^{-1}E_3E_5=E_3E_1^k\,, & E_5^{-1}E_2E_5=E_2E_1^h\,, \\ E_4^{-1}E_3E_4=E_3E_1\,, & E_4^{-1}E_2E_4=E_2\,, & E_3^{-1}E_2E_3=E_2\,, \end{array}\right\} \qquad (8)$$

$$E_5^p=E_3^\alpha E_2^\beta E_1^\gamma\,, \quad E_4^p=E_2\,, \quad E_3^p=E_1^h, \quad E_2^p=1\,, \quad E_1^p=1, \qquad (9)$$

le quali, come subito dimostrerò, non possono definire un gruppo ${G_5}^{3,2}$ se non quando è:

$$\alpha+h\equiv 0\,, \quad \beta\equiv k\,, \quad (\mathrm{mod}\,p). \qquad (10)$$

Infatti, trasformando la prima delle relazioni (9) mediante l'elemento E_4, si ha:

$$E_4^{-1}E_5^pE_4=E_3^\alpha E_1^\alpha\cdot E_2^\beta E_1^\gamma=E_5^pE_1^\alpha\,,$$

donde si ricava:

$$E_5^{-p}E_4E_5^p=E_4E_1^{-\alpha}.$$

Ma dalla prima delle (8) e dalle altre si ha:

$$E_5^{-p}E_4E_5^p=E_4E_3^p=E_4E_1^h;$$

dunque:

$$\alpha+h\equiv 0\,, \quad (\mathrm{mod}\,p).$$

Inoltre, l'elemento E_5^p è invertibile con E_5 e quindi:

$$E_5^p=E_5^{-1}E_3^\alpha E_2^\beta E_1^\gamma E_5=E_5^pE_1^{\alpha k}E_1^{\beta h}\,,$$

sicchè:

$$\alpha k+\beta h\equiv 0\,, \quad (\mathrm{mod}\,p);$$

poi, da questa congruenza e dalla precedente segue:

$$\beta-k\equiv 0\,, \quad (\mathrm{mod}\,p).$$

Ciò posto, eseguendo la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_5\,, & E_4\,, & E_3\,, & E_2\,, & E_1 \\ E_5\,, & E_4^h\,, & E_3^hE_1^{\binom{h}{2}k}\,, & E_2^h\,, & E_1^{h^2} \end{pmatrix},$$

l'intero h nel resto *1* di p; ed eseguendo la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_5\,, & E_4\,, & E_3\,, & E_2\,, & E_1 \\ E_5E_4\,, & E_4\,, & E_3E_1\,, & E_2\,, & E_1 \end{pmatrix},$$

i numeri k e β si cambiano in $k+1$ e $\beta+1$. Finalmente, eseguendo la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_5, & E_4, & E_3, & E_2, & E_1 \\ E_5 E_3, & E_4, & E_3 E_1^{-1}, & E_2, & E_1 \end{pmatrix},$$

si cambia soltanto γ in $\gamma + h$.

Supponendo dunque $h \equiv 1$, $k \equiv 0$, $\gamma \equiv 0 \pmod p$, le (10) dànno $\alpha \equiv -1$, $\beta \equiv 0 \pmod p$, e quindi non può, nella presente ipotesi, esistere che un solo gruppo $G_5^{3,2}$ corrispondente alle formole:

$$\left.\begin{array}{lllll} E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3, & E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3, & E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1, \\ E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1, & E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2, & E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2, \\ E_5^p = E_1^{-1}, \quad E_4^p = E_2, & E_3^p = E_1, & E_2^p = 1, \quad E_1^p = 1. \end{array}\right\} \quad (11)$$

D'altra parte è facile verificare che queste formole, se è $p > 3$, definiscono effettivamente un gruppo $G_5^{3,2}$ tale che il relativo gruppo K è un $G_3^{0,2}$.

I $p+1$ divisori d'indice p del gruppo ora trovato sono gruppi G_4^1: uno solo di essi ha come divisore invertibile il gruppo G_2 e gli altri hanno il divisore invertibile ciclico.

47. *Caso di* $p = 3$.

Riferendomi sempre alle formole (5) si conclude, come nel numero precedente, $E_3' = E_3$, $E_4^3 = E_2$; poi, ammettendo l'ipotesi che E_2' appartenga a G_1, con un ragionamento identico a quello fatto nel detto numero, si trova un gruppo $G_5^{3,2}$ di grado 243, che è definito dalle formole (11) quando vi si suppone $p = 3$.

Ma oltre a questo gruppo, ne esiste un altro di grado 243, che si presenta quando si fa l'ipotesi che l'elemento E_2' non appartenga a G_1. In tale ipotesi io definisco l'elemento E_2 mediante la relazione:

$$E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_2,$$

ed osservo che allora il gruppo G_3 non contiene alcun elemento permutabile con E_5, fatta eccezione degli elementi di G_1: dunque la potenza E_5^3 appartiene a G_1.

Ciò posto, la relazione:

$$E_5^{-3} E_4 E_5^3 = E_4 E_3^3 E_2^3 E_1^h,$$

dà $E_3^3 = E_1^{2h}$; poi la relazione:

$$E_5^{-1} E_4^3 E_5 = E_4^3 E_3^3 = E_4^3 E_1^{2h},$$

mostra che la potenza E_4^p è un elemento di G_2 del tipo $E_2^2 E_1^\beta$.

Dietro le considerazioni che precedono hanno luogo le formole:

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3\,, \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_2\,, \quad E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1^h\,,$$

$$E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1\,, \quad E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2\,, \quad E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2\,,$$

$$E_5^3 = E_1^\alpha\,, \quad E_4^3 = E_2^2 E_1^\beta\,, \quad E_3^3 = E_1^{2h}\,, \quad E_2^3 = 1\,, \quad E_1^3 = 1.$$

Eseguendo la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_5\,, & E_4\,, & E_3\,, & E_2\,, & E_1 \\ E_5\,, & E_4^2\,, & E_3^2 E_1\,, & E_2^2\,, & E_1 \end{pmatrix},$$

il numero h si cambia in $2h$ e quindi posso ritenere che sia $h = 1$.

Allora, chiamando E_5, E_4 rispettivamente gli elementi $E_5 E_3$, $E_4 E_3$, gl'interi α e β si possono fare aumentare, ciascuno in modo indipendente, di una unità.

Dunque, giacchè si può supporre $\alpha \equiv \beta \equiv 0$ (mod 3), si ha soltanto un nuovo gruppo $G_5^{3,2}$ di grado 243, che si può ritenere definito dalle ultime formole quando ivi si fa $h = 1$, $\alpha = \beta = 0$.

48. *Caso di* $p = 2$.

Ragionando come nel n.° 45, si conclude che l'elemento E_3' che figura nelle formole (5) non può appartenere a G_1.

Se si ammette in primo luogo $E_3' = E_2$, il quadrato E_5^2 non risulta invertibile con E_4 e quindi esso è un elemento di G_3 fuori di G_2: posso perciò supporre $E_5^2 = E_3$ e conseguentemente $E_2' = 1$.

L'elemento E_4^2 risulta invertibile con E_5 e perciò sta in H; inoltre l'elemento E_3^2, che è pure invertibile con E_5, sta in H e, siccome E_3 è di grado *4* per ipotesi, risulta $E_3^2 = E_1$.

Dunque, supponendo $E_3' = E_2$, si hanno soltanto due possibili gruppi $G_5^{3,2}$ di grado 32 definiti dalle seguenti modificazioni delle (5):

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_2\,, \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3\,, \quad E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1\,,$$

$$E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1\,, \quad E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2\,, \quad E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2\,,$$

e dalle formole:

$$\begin{array}{|c|} \hline E_5^2 = E_3\,, \quad E_4^2 = E_1\,, \quad E_3^2 = E_1\,, \quad E_2^2 = 1\,, \quad E_1^2 = 1 \\ \hline E_5^2 = E_3\,, \quad E_4^2 = 1\,, \quad E_3^2 = E_1\,, \quad E_2^2 = 1\,, \quad E_1^2 = 1 \\ \hline \end{array} \qquad (12)$$

Si può subito verificare che questi due gruppi realmente esistono e non sono isomorfi, perchè i corrispondenti gruppi G_4^1, i quali si sono presentati nel n.° 12 del § II, non sono isomorfi.

Nelle attuali ipotesi, non accade il fatto notato al n.° 45 cioè, non esiste un isomorfismo che porti l'elemento E_2 nell'elemento E_3; quindi io debbo continuare la mia analisi supponendo in secondo luogo $E_3' = E_3$.

Si osservi che gli elementi di grado 4 contenuti in G_3 hanno tutti lo stesso quadrato e quindi E_3^2 è invertibile con E_5 e con ogni elemento del gruppo principale: dunque deve essere E_2' un elemento di H ed $E_3^2 = E_1$.

Io posso ritenere $E_2' = 1$ giacchè, se fosse altrimenti, chiamerei E_5 l'elemento $E_5 E_4$; allora le (5) forniscono le relazioni:

$$E_5^{-1} E_4^2 E_5 = E_4^2 E_3^2 E_1, \quad E_5^{-2} E_4 E_5^2 = E_4 E_3^2,$$

le quali mostrano che l'elemento E_4^2 è invertibile con E_5 e perciò esso appartiene ad H, e che l'elemento E_5^2 non è invertibile con E_4 e perciò esso è un elemento di G_3 fuori di G_2.

Ponendo quindi:

$$E_5^2 = E_3 E_2^{\beta} E_1^{\gamma},$$

giacchè E_5^2 è permutabile con E_5, deve essere $\beta \equiv 0 \pmod 2$ e si può ritenere anche $\gamma \equiv 0 \pmod 2$ perchè, in caso contrario, si chiamerebbe E_5 l'elemento $E_5 E_3$.

Dunque, quando è $E_3' = E_3$, si hanno soltanto due possibili gruppi $G_5^{3,2}$ di grado 32 definiti dalle seguenti modificazioni delle (5):

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3, \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3, \quad E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1,$$
$$E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1, \quad E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2, \quad E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2,$$

e dalle formole (12).

In conclusione, esistono quattro, e non più, gruppi $G_5^{3,2}$ di grado 32 tali che i corrispondenti gruppi K sono gruppi $G_3^{0,2}$.

49. Io riassumo brevemente i risultati ottenuti nel presente paragrafo.

Esistono soltanto *otto* gruppi $G_5^{3,2}$ di grado 32 e soltanto *sei* gruppi $G_5^{3,2}$ di grado 243.

Se poi è $p > 3$ bisogna distinguere i seguenti quattro casi:

$$p \equiv -1, \quad p \equiv 5, \quad p \equiv -5, \quad p \equiv 1, \quad \pmod{12}.$$

Quando il numero primo p soddisfa alla prima congruenza, esistono solamente *otto* gruppi $G_5^{3,2}$, quando p soddisfa alla seconda congruenza esistono solamente *dieci* gruppi $G_5^{3,2}$, quando p soddisfa alla terza congruenza esistono solamente *dodici* gruppi $G_5^{3,2}$; finalmente, quando il numero primo p soddisfa alla quarta congruenza esistono soltanto *quattordici* gruppi $G_5^{3,2}$.

Tutti i detti gruppi sono rappresentati nelle tre tabelle che seguono.

I.

Gruppi $G_5^{3,2}$ *di grado* 32.

$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3, \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_2, \quad E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1,$ $E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3, \quad E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2, \quad E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2.$
$E_5^2 = 1, \quad E_4^2 = E_3^{-1}, \quad E_3^2 = E_2^{-1}, \quad E_2^2 = E_1, \quad E_1^2 = 1.$
$E_5^2 = E_1, \quad E_4^2 = E_3^{-1}, \quad E_3^2 = E_2^{-1}, \quad E_2^2 = E_1, \quad E_1^2 = 1.$
$E_5^2 = 1, \quad E_4^2 = E_3^{-1} E_1, \quad E_3^2 = E_2^{-1}, \quad E_2^2 = E_1, \quad E_1^2 = 1.$

$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_2, \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3, \quad E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1,$ $E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1, \quad E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2, \quad E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2.$
$E_5^2 = E_3, \quad E_4^2 = 1, \quad E_3^2 = 1, \quad E_2^2 = 1, \quad E_1^2 = 1.$
$E_5^2 = E_3, \quad E_4^2 = E_1, \quad E_3^2 = E_1, \quad E_2^2 = 1, \quad E_1^2 = 1.$
$E_5^2 = E_3, \quad E_4^2 = 1, \quad E_3^2 = E_1, \quad E_2^2 = 1, \quad E_1^2 = 1.$

$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3, \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3, \quad E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1,$ $E_4^{-1} E_3 E_4 = E_4 E_1, \quad E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2, \quad E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2.$
$E_5^2 = E_3, \quad E_4^2 = E_1, \quad E_3^2 = E_1, \quad E_2^2 = 1, \quad E_1^2 = 1.$
$E_5^2 = E_3, \quad E_4^2 = 1, \quad E_3^2 = E_1, \quad E_2^2 = 1, \quad E_1^2 = 1.$

II.

Gruppi $G_5^{3,2}$ *di grado* 243.

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3\,,\quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_2\,,\quad E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1\,,$$
$$E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3\,,\quad E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2\,,\quad E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2\,.$$

$$E_5^3 = 1\,,\quad E_4^3 = E_2^2,\quad E_3^3 = E_1^2,\quad E_2^3 = 1\,,\quad E_1^3 = 1.$$

$$E_5^3 = 1\,,\quad E_4^3 = E_2^2 E_1,\quad E_3^3 = E_1^2,\quad E_2^3 = 1\,,\quad E_1^3 = 1.$$

$$E_5^3 = E_1\,,\quad E_4^3 = E_2^2 E_1,\quad E_3^3 = E_1^2,\quad E_2^3 = 1\,,\quad E_1^3 = 1.$$

$$E_5^3 = E_1^2,\quad E_4^3 = E_2^2 E_1,\quad E_3^3 = E_1^2,\quad E_2^3 = 1\,,\quad E_1^3 = 1.$$

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3\,,\quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3\,,\quad E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1\,,$$
$$E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1\,,\quad E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2\,,\quad E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2\,.$$

$$E_5^3 = E_1^{-1},\quad E_4^3 = E_2\,,\quad E_3^3 = E_1\,,\quad E_2^3 = 1\,,\quad E_1^3 = 1.$$

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3\,,\quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_1\,,\quad E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1\,,$$
$$E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1\,,\quad E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2\,,\quad E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2\,.$$

$$E_5^3 = 1\,,\quad E_4^3 = E_2^2,\quad E_3^3 = E_1^2,\quad E_2^3 = 1\,,\quad E_1^3 = 1.$$

III.

$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3$, $E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_2$, $E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1$, $E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3$, $E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2$, $E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2$.	$G_5^{3,2}$
$E_5^p = 1$, $E_4^p = 1$, $E_3^p = 1$, $E_2^p = 1$, $E_1^p = 1$.	$p > 3$
$E_5^p = E_1$, $E_4^p = 1$, $E_3^p = 1$, $E_2^p = 1$, $E_1^p = 1$.	
$E_5^p = 1$, $E_4^p = E_1$, $E_3^p = 1$, $E_2^p = 1$, $E_1^p = 1$.	
$E_5^p = 1$, $E_4^p = E_1^{\varepsilon}$, $E_3^p = 1$, $E_2^p = 1$, $E_1^p = 1$.	$p = 1 + 3m$
$E_5^p = 1$, $E_4^p = E_1^{\varepsilon^2}$, $E_3^p = 1$, $E_2^p = 1$, $E_1^p = 1$.	

$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3$, $E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_2$, $E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1$, $E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1$, $E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2$, $E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2$.	$G_5^{3,2}$
$E_5^p = 1$, $E_4^p = E_1$, $E_3^p = 1$, $E_2^p = 1$, $E_1^p = 1$.	$p > 3$
$E_5^p = 1$, $E_4^p = 1$, $E_3^p = 1$, $E_2^p = 1$, $E_1^p = 1$.	
$E_5^p = E_1$, $E_4^p = 1$, $E_3^p = 1$, $E_2^p = 1$, $E_1^p = 1$.	
$E_5^p = E_1^{\varepsilon}$, $E_4^p = 1$, $E_3^p = 1$, $E_2^p = 1$, $E_1^p = 1$.	
$E_5^p = E_1^{\varepsilon^2}$, $E_4^p = 1$, $E_3^p = 1$, $E_2^p = 1$, $E_4^p = 1$.	$p = 1 + 4m$
$E_5^p = E_1^{\varepsilon^3}$, $E_4^p = 1$, $E_3^p = 1$, $E_2^p = 1$, $E_1^p = 1$.	
$E_5^p = 1$, $E_4^p = E_1^{\varepsilon}$, $E_3^p = 1$, $E_2^p = 1$, $E_1^p = 1$.	$p = 1 + 3m$
$E_5^p = 1$, $E_4^p = E_1^{\varepsilon^2}$, $E_3^p = 1$, $E_2^p = 1$, $E_1^p = 1$.	

$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_3$, $E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3$, $E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1$, $E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1$, $E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2$, $E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2$.	$G_5^{3,2}$
$E_5^p = E_1^{-1}$, $E_4^p = E_2$, $E_3^p = E_1$, $E_2^p = 1$, $E_1^p = 1$.	$p > 3$

§ VII. I Gruppi $G_5^{3,3}$ e $G_5^{3,4}$.

50. Il gruppo K intersezione di tutti i divisori d'indice p di un gruppo $G_5^{3,3}$ è di grado p^2. Sia E_1 un elemento generatore del divisore invertibile H di $G_5^{3,3}$ ed E_2 un elemento di K fuori di H; indi si consideri il gruppo G_4^1 costituito da tutti gli elementi di $G_5^{3,3}$ che sono permutabili con E_2.

Denotando con E_5 un elemento di $G_5^{3,2}$ fuori di G_4^1, per definizione, non è E_5 permutabile con E_2; però, io voglio dimostrare che esistono elementi di G_4^1, fuori di K, che sono permutabili con E_5.

Siano E_4 ed E_3 due elementi di G_4^1 tali che E_4 non appartenga al gruppo di grado p^3 generato dall'elemento E_3 e dagli elementi di K. Ponendo:

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_2^\alpha E_1^\beta, \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_2^\gamma E_1^\delta,$$

uno almeno degli interi α, γ deve essere primo con p. Infatti, se α e γ sono due multipli di p, i tre elementi E_5^p, E_4^p, E_3^p risultano permutabili con ogni elemento di $G_5^{3,3}$ e quindi debbono appartenere ad H; inoltre, per la ragione detta al n.° 43 si può sempre ritenere:

$$E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1^h,$$

essendo h primo con p: quindi gli elementi E_5, E_4, E_3, E_1 generano un gruppo di grado p^4 e questo gruppo, giacchè non contiene l'elemento E_2, non contiene K.

Ciò posto, l'elemento $E_4^\gamma E_3^{-\alpha}$ è fuori di K e si ha:

$$E_5^{-1}(E_4^\gamma E_3^{-\alpha}) E_5 = (E_4^{-\gamma} E_3^\alpha) E_1^{\alpha\delta-\beta\gamma}.$$

Ora, giacchè E_5 non è invertibile con E_2, ponendo:

$$E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1,$$

risulta subito che l'elemento:

$$E_4^{-\gamma} E_3^\alpha E_2^{-(\alpha\delta-\beta\gamma)},$$

il quale non appartiene a K, è permutabile con E_5.

Io assumo un tale elemento come elemento E_3 e, scelto poi E_4 fuori del gruppo G_3 generato da E_3 e dagli elementi di K, definisco l'elemento E_2 mediante la relezione:

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_2;$$

inoltre, posso ritenere che sia:

$$E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1 ,$$

perchè, in caso contrario, chiamerei E_3 una conveniente potenza di E_3.

Ciò posto, gli elementi:

$$E_5 , \quad E_4 , \quad E_3 , \quad E_2 , \quad E_1 ,$$

definiti nella detta maniera costituiscono una base canonica di un gruppo $G_5^{3,3}$ e soddisfano alle relazioni:

$$\left.\begin{array}{lll} E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_2 , & E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 , & E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1 , \\ E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1 , & E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2 , & E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2 . \end{array}\right\} \qquad (1)$$

51. L'elemento E_5^p appartiene a K ed è permutabile con E_5, quindi deve essere E_5^p un elemento di H. Intanto dalle (1) si ricava:

$$E_5^{-p} E_4 E_5^p = E_4 E_2^p E_1^{\binom{p}{2}} ;$$

dunque, *supponendo* $p > 2$, si ottiene $E_2^p = 1$.

Allora, le formole:

$$E_5^{-1} E_4^p E_5 = E_4^p E_2^p , \quad E_4^{-p} E_3 E_4^p = E_3 E_1^p ,$$

mostrano che la potenza E_4^p è invertibile con ogni elemento del gruppo principale e perciò la detta potenza sta in H. Similmente la potenza E_3^p è invertibile con ogni elemento del gruppo principale e perciò sta in H: dunque si hanno le relazioni:

$$E_5^p = E_1^\alpha , \quad E_4^p = E_1^\beta , \quad E_3^p = E_1^\gamma , \quad E_2^p = 1 , \quad E_1^p = 1 , \qquad (2)$$

le quali, insieme alle (1), definiscono sempre un gruppo $G_5^{3,3}$ purchè si tenga presente che è $p > 2$.

Essendo s un intero primo con p, si vede subito che eseguendo la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_5 , & E_4 , & E_3 , & E_2 , & E_1 \\ E_5 E_3^\lambda , & E_4^s E_3^\mu , & E_3 , & E_2^s E_1^{-s\lambda} , & E_1^s \end{pmatrix} , \qquad (3)$$

la quale non altera la forma delle (1) e (2), i numeri α, β, γ subiscono la sostituzione:

$$s \alpha_1 \equiv \alpha + \lambda \gamma , \quad s \beta_1 \equiv s \beta + \mu \gamma , \quad s \gamma_1 \equiv \gamma \quad (\mathrm{mod}\, p);$$

quindi, se γ è primo con p, determinando convenientemente s, λ, μ, si può supporre:

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 1.$$

Esiste allora un solo gruppo $G_5^{3,3}$ definito dalle relazioni (1) e dalle (2) modificate come segue:

$$\boxed{E_5^p = 1\,, \quad E_4^p = 1\,, \quad E_3^p = E_1\,, \quad E_2^p = 1\,, \quad E_1^p = 1}$$

Se il numero γ è un multiplo di p, bisogna distinguere il caso in cui è $p > 3$ dal caso in cui è $p = 3$.

Nel primo caso, se u è un intero primo con p, eseguendo la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_5\,, & E_4\,, & E_3\,, & E_2\,, & E_1 \\ E_5^u E_4^v\,, & E_4\,, & E_3^{u^2} E_2^{-uv}\,, & E_2^u E_1^{\binom{u}{2}}\,, & E_1^{u^2} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

la quale non altera la forma delle (1) e (2), si vede facilmente che α e β si portano rispettivamente in due numeri α_1 e β_1 tali che:

$$u^2 \alpha_1 \equiv u\,\alpha + v\,\beta, \quad u^2 \beta_1 \equiv \beta \pmod{p}.$$

Dunque, tutte le volte che è β primo con p, si può determinare u in modo che sia $\beta_1 \equiv 1 \pmod{p}$ oppure $\beta_1 \equiv \varepsilon \pmod{p}$; poi si determina v in modo che sia $\alpha_1 \equiv 0 \pmod{p}$. Se invece è β un multiplo di p, si può determinare u in modo da portare α_1 nel resto *1* ovvero nel resto *0* di p.

In conclusione, quando è $p > 3$, oltre all'ultimo gruppo trovato esistono altri quattro, e non più, gruppi $G_5^{3,3}$ i quali sono definiti dalle (1) e dalle seguenti modificazioni delle formole (2):

$E_5^p = 1\,, \quad E_4^p = E_1\,, \quad E_3^p = 1\,, \quad E_2^p = 1\,, \quad E_1^p = 1$
$E_5^p = 1\,, \quad E_4^p = E_1^{\varepsilon}\,, \quad E_3^p = 1\,, \quad E_2^p = 1\,, \quad E_1^p = 1$
$E_5^p = E_1\,, \quad E_4^p = 1\,, \quad E_3^p = 1\,, \quad E_2^p = 1\,, \quad E_1^p = 1$
$E_5^p = 1\,, \quad E_4^p = 1\,, \quad E_3^p = 1\,, \quad E_2^p = 1\,, \quad E_1^p = 1$

I cinque gruppi $G_5^{3,3}$ che ho trovato sono effettivamente distinti: infatti, assumendo come operazione identica ogni cambiamento della base canonica che lasci inalterati i tre numeri α, β, γ, è evidente che qualunque cambiamento della detta base, che conservi soltanto la forma delle (1) e (2), equivale al prodotto di una operazione del tipo (3) per una operazione del tipo (4).

52. *Caso di* $p = 3$.

Quando è $p = 3$ le formole (1) e (2) dànno:

$$(E_5^u E_4^v)^3 = E_5^{3u} E_4^{3v} E_1^{u^2 v},$$

e quindi, eseguendo la trasformazione (4) ed osservando che è $u^2 \equiv 1 \pmod 3$, si vede subito che i numeri α e β si portano rispettivamente in due numeri α_1 e β_1 tali che:

$$\alpha_1 \equiv u\alpha + (\beta + 1)v, \quad \beta_1 \equiv \beta \pmod 3.$$

Dunque, se β è *0* od *1*, si può determinare v in modo che sia $\alpha_1 \equiv 0 \pmod 3$; ma se è $\beta = 2$, disponendo di u si può portare α_1 nel resto *1* oppure nel resto *0* di p.

Ottengo così quattro nuovi gruppi $G_5^{3,3}$ di grado 243, i quali sono definiti dalle (1) e dalle formole (2) modificate come segue:

$E_5^3 = 1$,	$E_4^3 = 1$,	$E_3^3 = 1$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$
$E_5^3 = 1$,	$E_4^3 = E_1$,	$E_3^3 = 1$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$
$E_5^3 = E_1$,	$E_4^3 = E_1^2$,	$E_3^3 = 1$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$
$E_5^3 = 1$,	$E_4^3 = E_1^2$,	$E_3^3 = 1$,	$E_2^3 = 1$,	$E_1^3 = 1$

53. *Caso di* $p = 2$.

Nel caso in cui è $p = 2$ le relazioni (2) non si verificano.

Però, siccome l'elemento E_5^2 sta in H, la relazione:

$$E_5^{-2} E_4 E_5^2 = E_4 E_2^2 E_1,$$

dà $E_2^2 = E_1$. Allora la formola:

$$E_5^{-1} E_4^2 E_5 = E_4^2 E_2^2 = E_4^2 E_1,$$

mostra che l'elemento E_4^2 non è invertibile con E_5 e quindi il detto elemento appartiene a K ma non ad H. L'elemento E_3^2 è invece permutabile con ogni elemento del gruppo principale e quindi sta in H.

Le (2) debbono perciò essere sostituite con le relazioni:

$$E_5^2 = E_1^\alpha, \quad E_4^2 = E_2 E_1^\beta, \quad E_3^2 = E_1^\gamma, \quad E_2^2 = E_1, \quad E_1^2 = 1, \tag{5}$$

le quali, insieme alle (1), definiscono effettivamente un gruppo $G_5^{3,3}$ di grado 32 qualunque siano gl'interi α, β, γ.

Ciò posto, io posso sempre supporre $\gamma = 0$, perchè, in caso contrario, raggiungo lo scopo eseguendo la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_5, & E_4, & E_3, & E_2, & E_1 \\ E_5 E_4, & E_4, & E_3 E_2, & E_2, & E_1 \end{pmatrix},$$

la quale non altera le (1).

Poi, eseguendo la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_5, & E_4, & E_3, & E_2, & E_1 \\ E_5, & E_4 E_2, & E_3, & E_2, & E_1 \end{pmatrix},$$

si vede che il numero β si cambia in $\beta + 1$ e quindi posso supporre $\beta = 0$.

Si può d'altra parte verificare subito che tutti i cambiamenti della base canonica che lasciano inalterate le (1) e che conservano le ipotesi $\beta = \gamma = 0$, non alterano α.

Dunque, si hanno due gruppi distinti $G_5^{3\,3}$ di grado 32, i quali sono definiti dalle (1) e dalle seguenti modificazioni delle formole (5):

$E_5^2 = 1$,	$E_4^2 = E_2$,	$E_3^2 = 1$,	$E_2^2 = E_1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = E_1$,	$E_4^2 = E_2$,	$E_3^2 = 1$,	$E_2^2 = E_1$,	$E_1^2 = 1$

54. Io debbo in ultimo luogo ricercare i gruppi $G_5^{3,4}$ e, in questa ricerca, mi fonderò sul fatto che, tutte le volte che è $p > 2$, ogni gruppo $G_5^{3,4}$ contiene un divisore G_4^1 che ha tutti i suoi elementi di grado p.

Per stabilire ciò, si osservi anzitutto che, se E, E' sono due arbitrarî elementi di $G_5^{3,4}$ ed E_1 è un elemento generatore del gruppo $H = K$, si ha:

$$E^{-1} E' E = E' E_1^k,$$

donde si ricava:

$$(E E')^p = E^p E'^p E_1^{k\binom{p}{2}};$$

quindi, avendo supposto $p > 2$, risulta:

$$(E E')^p = E^p E'^p.$$

Sia ora E_2 un elemento di $G_5^{3\,4}$ fuori del gruppo H ed E_3 un elemento fuori del gruppo generato dagli elementi E_2, E_1. Ponendo:

$$E_3^p = E_1^\alpha, \quad E_2^p = E_1^\beta,$$

se l'intero β è primo con p, l'elemento $E_3^\beta E_2{}^\alpha$, che non sta in H, è di grado p ed io lo assumo come elemento E_2.

Sia E_3 un elemento fuori del gruppo G_2 generato dagli elementi E_2, E_1 così definiti ed E_4 un elemento fuori del gruppo generato dagli elementi E_3, E_2, E_1. Ponendo:

$$E_4^p = E_1^\alpha, \quad E_3^p = E_1^\beta,$$

se l'intero β è primo con p, l'elemento $E_4^\beta E_3{}^{-\alpha}$, che non sta in G_2, è di grado p ed io lo assumo come elemento E_3.

Sia E_4 un elemento fuori del gruppo G_3 generato dagli elementi E_3, E_2, E_1 così definiti, ed E_5 un elemento fuori del gruppo generato dagli elementi E_4, E_3, E_2, E_1. Ponendo:

$$E_5^p = E_1^\alpha, \quad E_4^p = E_1^\beta,$$

se è β primo con p, l'elemento $E_5^\beta E_4^{-\alpha}$, che non sta in G_3, è di grado p ed io lo assumo come elemento E_4.

Il gruppo G_4 generato dagli elementi E_4, E_3, E_2, E_1 così definiti ha tutti i suoi elementi di grado p e possiede evidentemente tre divisori indipendenti d'indice p.

Il detto gruppo, per l'osservazione fatta al n.° 40 non può essere Abeliano; quindi, giacchè non esistono (n.° 13) gruppi $G_4{}^{2,3}$, il gruppo G_4 è un G_4^1.

Ciò posto, se G_2 è il divisore invertibile di G_4^1 ed E_5 è un elemento di $G_5{}^{3,4}$ fuori di G_4^1, si ha:

$$\begin{gathered}
E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_1^\lambda, \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_1^\mu, \quad E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1^h, \\
E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1, \quad E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2, \quad E_4^{-1} E_2 E_3 = E_2, \\
E_5^p = E_1^\alpha, \quad E_4^p = 1, \quad E_3^p = 1, \quad E_2^p = 1, \quad E_1^p = 1.
\end{gathered}$$

dove l'intero h è necessariamente primo con p, altrimenti l'elemento E_2 risulterebbe permutabile con ogni elemento del gruppo principale $G_5{}^{3,4}$.

Chiamando E_2 una conveniente potenza di E_2, io posso ritenere $h = 1$; poi, chiamando E_4, E_3 ordinatamente gli elementi $E_4 E_2^{-\lambda}$, $E_3 E_2^{-\mu}$, mi posso ridurre al caso di $\lambda = \mu = 0$.

Si hanno quindi le formole:

$$\left.\begin{aligned}
E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4, \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3, \quad E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1, \\
E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1, \quad E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2, \quad E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Se l'intero α è un multiplo di p, il gruppo principale ha tutti i suoi elementi di grado p. Se invece α è primo con p, eseguendo la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} E_5, & E_4, & E_3, & E_2, & E_1 \\ E_5, & E_4, & E_3^\alpha, & E_2^\alpha, & E_1^\alpha \end{pmatrix},$$

porto α nel resto 1 di p.

Dunque, se è $p > 2$, si hanno due soli gruppi $G_5^{3,4}$, i quali sono definiti dalle (6) e dalle formole:

$E_5^p = 1$,	$E_4^p = 1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$
$E_5^p = E_1$,	$E_4^p = 1$,	$E_3^p = 1$,	$E_2^p = 1$,	$E_1^p = 1$

55. *Caso di* $p = 2$.

Quando è $p = 2$, chiamo E_2 un elemento di $G_5^{3,4}$ fuori del gruppo $H = K$ e chiamo E_3 un elemento permutabile con E_2 fuori del gruppo generato dagli elementi E_2, E_1. Se E_2 ed E_3 sono entrambi di grado 4, l'elemento $E_3 E_2$ è di grado 2 ed io lo assumo come elemento E_2. Poi si consideri il gruppo G_4^1 costituito da tutti quegli elementi del gruppo principale che sono invertibili col detto elemento E_2.

Allora, se E_3 è un elemento di G_4^1 fuori del gruppo generato da E_2, E_1, ed E_4 è un elemento di G_4^1 fuori del gruppo generato dagli elementi E_3, E_2, E_1; finalmente, se E_5 è un elemento del gruppo principale fuori di G_4^1, si hanno le formole:

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_1^\lambda, \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 E_1^\mu, \quad E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1,$$
$$E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1, \quad E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2, \quad E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2,$$
$$E_5^2 = E_1^\alpha, \quad E_4^2 = E_1^\beta, \quad E_3^2 = E_1^\gamma, \quad E_2^2 = 1, \quad E_1^2 = 1,$$

le quali definiscono sempre un gruppo $G_5^{3,4}$ di grado 32.

Io posso supporre $\lambda = 0$ altrimenti chiamo E_4 l'elemento $E_4 E_2$ ed analogamente posso supporre $\mu = 0$; inoltre, se occorre, chiamando E_5 l'elemento $E_5 E_2$, posso ritenere $\alpha = 0$.

Si ritrovano quindi le formole (6) e le formole:

$$E_5^2 = 1, \quad E_4^2 = E_1^\beta, \quad E_3^2 = E_1^\gamma, \quad E_2^2 = 1, \quad E_1^2 = 1. \tag{7}$$

Se uno dei due numeri β, γ che vi figurano è zero, si può ritenere che sia $\gamma = 0$, perchè, in caso contrario, si scambierebbe E_4 con E_3; il che non altera le (6). Allora chiamando E_4 l'elemento $E_4 E_3$, si può ritenere anche $\beta = 0$.

Se invece β e γ hanno entrambi il valore *1*, è facile verificare che nessun cambiamento della base canonica che conservi la forma delle (6) e (7) altera β e γ.

Dunque, anche quando è $p = 2$, esistono due soli gruppi $G_5^{3,4}$ di grado 32, i quali sono definiti dalle (6) e dalle seguenti modificazioni delle formole (7):

$E_5^2 = 1$,	$E_4^2 = 1$,	$E_3^2 = 1$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$
$E_5^2 = 1$,	$E_4^2 = E_1$,	$E_3^2 = E_1$,	$E_2^2 = 1$,	$E_1^2 = 1$

56. Riepilogo brevemente i risultati ottenuti nel presente paragrafo.

Per tutti i valori del numero primo $p > 2$ esistono *cinque*, e non più, gruppi $G_5^{3,3}$; invece, quando è $p = 2$, esistono soltanto *due* gruppi $G_5^{3,3}$ di grado 32.

Qualunque sia il numero primo p esistono soltanto *due* gruppi $G_5^{3,4}$.

Tutti i gruppi che si sono presentati in questo paragrafo sono rappresentati nella seguente tabella:

I.

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 E_2, \quad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3, \quad E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1,$$
$$E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1, \quad E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2, \quad E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2.$$

	E_5^p	E_4^p	E_3^p	E_2^p	E_1^p	
Gruppi $G_5^{3,3}$	1	1	E_1	1	1	$p \geq 3$
	1	E_1	1	1	1	$p > 3$
	1	E_1^ε	1	1	1	$p \geq 3$
	E_1	1	1	1	1	$p > 3$
	1	1	1	1	1	$p \geq 3$
	E_1	E_1^2	1	1	1	$p = 3$
	1	E_2	1	E_1	1	$p = 2$
	E_1	E_2	1	E_1	1	$p = 2$

II.

$$E_5^{-1} E_4 E_5 = E_4 , \qquad E_5^{-1} E_3 E_5 = E_3 , \qquad E_5^{-1} E_2 E_5 = E_2 E_1 ,$$
$$E_4^{-1} E_3 E_4 = E_3 E_1 , \qquad E_4^{-1} E_2 E_4 = E_2 , \qquad E_3^{-1} E_2 E_3 = E_2 .$$

	E_5^p	E_4^p	E_3^p	E_2^p	E_1^p	
Gruppi $G_5^{3,4}$.	1	1	1	1	1	$p \geq 2$
	E_1	1	1	1	1	$p > 2$
	1	E_1	E_1	1	1	$p = 2$

§ VIII. Conclusione.

57. Tutti i possibili gruppi di grado $2^5 = 32$ sono *cinquanta.* Di questi 50 gruppi, 22 tipi figurano nei quadri I e II alla fine del § III, altri 16 tipi nel quadro II alla fine del § V, altri 8 tipi nel quadro I alla fine del § VI e finalmente altri 4 tipi figurano nei quadri I e II alla fine del precedente paragrafo.

Tutti i possibili gruppi di grado $3^5 = 243$ sono *sessantasei.* Di questi 66 gruppi, 22 tipi figurano nei quadri I e II alla fine del § III, altri 7 tipi nel quadro II alla fine del § IV, altri 24 tipi nei quadri I e III alla fine del § V, altri 6 tipi nel quadro II alla fine del § VI e finalmente altri 7 tipi figurano nei quadri I e II alla fine del § VII.

Il numero di tutti i possibili gruppi di grado p^5, essendo $p > 3$, è uno dei quattro numeri:

$$2p + 65, \quad 2p + 67, \quad 2p + 69, \quad 2p + 71,$$

secondo che il numero primo p soddisfa, ordinatamente, ad una delle quattro congruenze:

$$p \equiv -1, \quad p \equiv 5, \quad p \equiv -5, \quad p \equiv 1 \quad (\text{mod } 12).$$

Nei quadri I e II alla fine del § III figurano 22 tipi di gruppi di grado p^5, altri $p + 7$ tipi figurano nel quadro I alla fine del § IV, altri $p + 21$ tipi nei quadri I e III alla fine del § V ed altri 7 tipi nei quadri I e II alla fine del § VII. Finalmente, nel quadro III alla fine del § VI figurano 8, 10, 12, 14 tipi di gruppi di grado p^5, secondo che il numero primo p soddisfa, ordinatamente, alla 1ª, 2ª, 3ª, 4ª delle precedenti congruenze.

Nella tabella che segue sono scritti i numeri dei diversi tipi di gruppi di grado p^5 contenuti in ciascuna classe $G_5^{\lambda,\mu}$ in corrispondenza alle varie forme del numero primo p.

	$p=2$	$p=3$	$p=12m-1$	$p=12m+5$	$p=12m-5$	$p=12m+1$
$G_5^{0,1}$	1	1	1	1	1	1
$G_5^{0,2}$	2	2	2	2	2	2
$G_5^{0,3}$	2	2	2	2	2	2
$G_5^{0,4}$	1	1	1	1	1	1
$G_5^{0,5}$	1	1	1	1	1	1
$G_5^{1,2}$	5	5	5	5	5	5
$G_5^{1,3}$	7	7	7	7	7	7
$G_5^{1,4}$	3	3	3	3	3	3
$G_5^{2,2}$	5	16	$p+16$	$p+16$	$p+16$	$p+16$
$G_5^{2,3}$	11	15	$p+12$	$p+12$	$p+12$	$p+12$
$G_5^{3,2}$	8	6	8	10	12	14
$G_5^{3,3}$	2	5	5	5	5	5
$G_5^{3,4}$	2	2	2	2	2	2

Palermo, Marzo 1898.

Classificazione delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, che ammettono un gruppo infinito di trasformazioni puntuali.

(Di Paolo Medolaghi, *a Roma.)*

In una Memoria, pubblicata tra i *Leipziger Berichte* (*), il prof. Lie ha sviluppata una generale teoria di integrazione per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine che ammettono un gruppo infinito di trasformazioni.

La teoria generale è in quella Memoria illustrata con alcuni esempi, — altri esempi furono portati dal sig. Beudon (**), il quale anche indicò un programma di lavoro di cui le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine potrebbero essere l'oggetto (***). Questo programma è sul genere di quello che in una celebre Nota del 1874 (****) il Lie formulava per le equazioni differenziali ordinarie, e che lo stesso Autore, in una serie di Memorie divenute oramai classiche (*****), portava a compimento.

Per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine ci si presenta un programma di lavoro composto di quattro parti. Occorre infatti:

1.° determinare tutti i diversi tipi di gruppi infiniti di trasformazioni di contatto in tre variabili;

2.° per ognuno dei tipi trovati, determinare le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine invarianti;

(*) *Sulla teoria delle equazioni differenziali di un ordine qualunque* (1895).

(**) *Comptes Rendus* (1895).

(***) *Comptes Rendus* (1894).

(****) *Göttinger Nachrichten* (1874).

(*****) Pubblicate per la maggior parte nell'*Archivio Norvegese* e riprodotte nelle parti essenziali nei *Mathem. Annalen.* Vol. XI, XVI, XXV, XXXII.

3.° per ognuna delle equazioni trovate e ridotte così a forme canoniche, sviluppare una razionale teoria di integrazione (come è possibile, essendo ogni volta applicabile il metodo di Darboux);

4.° stabilire i criteri che permettono di riconoscere se una proposta equazione $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ ammette un gruppo infinito, e studiare le operazioni che in tal caso sono necessarie per ridurla alla forma canonica.

A questo vasto programma di lavoro, che ancora restava tutto a sviluppare, io mi sono proposto di portare con queste ricerche un primo, modesto contributo.

Mi sono limitato a considerare le equazioni che ammettono un gruppo di trasformazioni *puntuali*, e per queste equazioni ho cercato di sviluppare le prime due parti del programma sopra indicato; nell'intento di togliere ogni complicazione inutile ho sostituito al problema primitivo un problema più semplice; i criteri che mi hanno guidato in questa riduzione vengono accennati nel primo capitolo.

Nei tre capitoli seguenti determino quei tipi di gruppi infiniti che sono il fondamento della presente classificazione — con questo è svolta la prima parte del programma. La seconda parte forma l'oggetto degli ultimi due capitoli, i quali dunque contengono la determinazione delle equazioni invarianti pei diversi gruppi.

30 Novembre 1897.

I. Riduzione del problema fondamentale.

A fondamento delle nostre ricerche si deve porre, come abbiamo veduto, la determinazione di tutti i tipi di gruppi infiniti in tre variabili. Voglio ora mostrare che a questo problema se ne può sostituire uno di gran lunga più semplice. Ricorro, per chiarezza, a un esempio.

Consideriamo, successivamente, i gruppi:

$$\xi(x)p + \eta(y)q, \qquad (G_1)$$

$$\xi(x)p + Cq, \qquad (G_2)$$

$$\xi(x)p. \qquad (G_3)$$

La equazione alle derivate parziali del secondo ordine la più generale che ammetta il gruppo (G_1) è:

$$\frac{s}{p\,q} = \varphi(z); \tag{Σ_1}$$

la equazione più generale che ammetta il gruppo (G_2) è:

$$\frac{s}{p} = \varphi(z, q, t); \tag{Σ_2}$$

e finalmente quella più generale che ammetta il gruppo (G_3) è:

$$\frac{s}{p} = \varphi(y, z, q, t), \tag{Σ_3}$$

dove ogni volta nei secondi membri di (Σ_1), (Σ_2), (Σ_3) il simbolo φ rappresenta una funzione arbitraria degli argomenti. Le equazioni (Σ_1), (Σ_2) sono naturalmente casi particolari della equazione (Σ_3).

Cerchiamo ora le condizioni perchè la equazione:

$$q = \lambda(y, z),$$

sia un integrale intermediario di (Σ_3). Si trova per λ la condizione (*):

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z} = \varphi\left(y, z, \lambda, \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\lambda\right), \tag{e_3}$$

questa condizione diventa per (Σ_2):

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z} = \varphi\left(z, \lambda, \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\lambda\right), \tag{e_2}$$

e per (Σ_1):

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z} = \lambda\,\varphi(z). \tag{e_1}$$

La (e_3) è una equazione per λ alle derivate parziali del primo ordine affatto generale (almeno finchè la funzione φ rimane una funzione arbitraria dei suoi argomenti). Invece le equazioni (e_2), (e_1) hanno una forma più particolare: noi possiamo definire in modo più preciso questa differenza, osservando che la equazione (e_2) si deduce dalla (e_3) imponendo a quest'ultima di

(*) BEUDON, *Comptes Rendus* (1894).

ammettere il gruppo finito:

$$\delta z = 0, \quad \delta y = a\,\delta t, \quad \delta\lambda = 0,$$

e la equazione (e_1) si ottiene imponendo alla (e_3) di ammettere il gruppo infinito:

$$\delta z = 0, \quad \delta y = \eta(y)\,\delta t, \quad \delta\lambda = -\lambda\,\eta'(y)\,\delta t,$$

in cui $\eta(y)$ rappresenta una funzione arbitraria di y.

Inversamente, supponiamo che la (e_3) ammetta un gruppo di trasformazioni tra y, z, λ; e supponiamo inoltre che tra le δy, δz, $\delta\lambda$ abbia luogo la relazione:

$$\delta\lambda = \frac{\partial\,\delta z}{\partial y} - \lambda\,\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}.$$

La funzione φ, e quindi la equazione (Σ_3), avranno una forma meno generale: *questa particolarizzazione è geometricamente rappresentata dalla condizione a cui ora soddisfa la* (Σ_3) *di ammettere un gruppo più esteso che* (G_3).

Se, dopo aver trovata la equazione (Σ_3) nella nostra classificazione, si volessero discutere le equazioni ausiliari (del primo ordine) a cui il problema della integrazione è stato ricondotto; bisognerebbe fare una classificazione delle equazioni (e_3) secondo i gruppi in y, z, λ. Ognun vede come la complicazione che ne risulterebbe è sproporzionata all'interesse, tanto più che per questa parte noi ci possiamo riferire ai lavori del Lie che contengono una discussione delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine.

Non abbiamo dunque a preoccuparci delle diverse particolarità che può presentare la funzione φ; dal punto in cui ci poniamo le equazioni (Σ_1) e (Σ_2) non meritano di essere considerate; nella equazione (Σ_3) è concentrato tutto l'interesse.

Risalendo dalle equazioni ai gruppi si vede che *basta determinare tutti quei tipi di gruppi infiniti nei quali non è contenuto nessun sottogruppo infinito.*

I gruppi che siamo ora condotti a ricercare sono destinati a rappresentare una parte importante nella teoria dei gruppi infiniti: io ho iniziato alcune ricerche su questi gruppi anche pel caso di un numero qualunque di variabili. Mi valgo qui di due risultati la cui dimostrazione mi porterebbe troppo lontano dall'argomento:

1.° ogni gruppo infinito contiene almeno un sottogruppo infinito con una funzione arbitraria di un solo argomento e nessuna costante arbitraria;

2.° i gruppi infiniti che contengono una funzione arbitraria di un solo argomento (e nessuna costante arbitraria), sono o formati di trasformazioni permutabili, oppure isomorfi al gruppo di tutte le trasformazioni in una variabile. In altre parole sono o isomorfi al gruppo $\xi(x)\frac{\partial f}{\partial y}$, o isomorfi al gruppo $\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x}$.

La trasformazione infinitesima generica di un gruppo che contiene soltanto una funzione arbitraria di un argomento (e nessuna costante arbitraria), è della forma:

$$\xi(x_1)X_0 + \sum_{i=1}^{s}\frac{d^i\xi}{d x_1^i}X_i, \tag{a}$$

essendo X_0, $X_1, \ldots,$ X_s trasformazioni infinitesime determinate. Come argomento si è presa, per la funzione arbitraria, la variabile x_1; ciò, se non fosse, si può realizzare con un cambiamento di variabili.

Poichè ogni gruppo infinito contiene un gruppo della forma (a), o riducibile alla forma (a) con un cambiamento di variabili, e questi ultimi non possono contenere un sottogruppo infinito, sono appunto i gruppi (a) a cui ci conduce il nostro programma di lavoro. Noi dobbiamo dunque determinare tutti i tipi di gruppi della forma (a), tra le variabili x_1, x_2, x_3. Essendo possibili due composizioni questa ricerca si presenta naturalmente divisa in due parti.

II. Gruppi isomorfi al gruppo $\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x}$.

Consideriamo la trasformazione:

$$\xi(x_1)X_0 + \sum_{i=1}^{s}\xi^{(i)}X_i, \qquad \left(\xi^{(i)} = \frac{d^i\xi}{d x_1^i}\right),$$

indichiamo con η un'altra funzione di x_1, e formiamo la espressione:

$$\left(\sum_{i=0}^{s}\xi^{(i)}X_i, \qquad \sum_{i=0}^{s}\eta^{(i)}X_i\right).$$

Si trova che quella parentesi, quando si convenga di porre $X_{-1}=0$, si può sviluppare in una espressione della forma:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\substack{\mu,k\\(\mu<k)}}^{0\,.\,s}\left(\xi^{(\mu)}\eta^{(k)}-\xi^{(k)}\eta^{(\mu)}\right)\left\{(X_\mu X_k)+X_\mu(x_1)X_{k-1}-X_k(x_1)X_{\mu-1}\right\}+\\&\qquad+\sum_{i=0}^{s}\left(\xi^{(i)}\eta^{(s+1)}-\eta^{(i)}\xi^{(s+1)}\right)X_i(x_1)X_s.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Poniamo ora:

$$\zeta^{(0)} = \xi^{(0)}\,\eta^{(1)} - \xi^{(1)}\,\eta^{(0)},$$

ed indichiamo in generale con $(i,\ k)$ la espressione:

$$\xi^{(i)}\,\eta^{(k)} - \xi^{(k)}\,\eta^{(i)}.$$

Si ha allora:

$$\zeta^{(0)} = (0,\ 1), \quad \zeta^{(1)} = (0,\ 2), \quad \zeta^{(2)} = (0,\ 3) + (1,\ 2), \ldots,$$

ed in generale:

$$\zeta^{(\mu)} = (0,\ \mu + 1) + c_{1\mu}(1,\ \mu) + c_{2,\mu-1}(2,\ \mu - 1) + \cdots,$$

dove nel secondo membro non compariscono che quei simboli $(i,\ k)$ in cui $i < k$. Le costanti c si determinano con la formola di ricorrenza:

$$c_{i,k} = c_{i-1,k} + c_{i,k-1},$$

si ha così:

$$c_{1\mu} = \mu - 1, \qquad c_{2\mu} = \frac{(\mu - 2)(\mu + 1)}{1\,.\,2}, \ldots$$

La espressione:

$$\sum_{i=0}^{s} \zeta^{(i)}\,X_i,$$

diventa, per le posizioni precedenti, della forma:

$$\sum_{i,k}^{0..s} c_{ik}(i,\ k)\,X_{i+k-1}, \qquad (i < k,\ i + k \leqq s + 1), \tag{2}$$

convenendo di porre $c_{0\mu} = 1$.

La espressione (1) diventa, per le fatte posizioni:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\substack{i,k \\ (i<k)}}^{0..s} (i,\ k)\,\{(X_i X_k) + X_i(x_1)\,X_{k-1} - X_k(x_1)\,X_{i-1}\} + \\ &\qquad + \sum_{i=0}^{s} (i,\ s+1)\,X_i(x_1)\,X_s. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Le espressioni (2), (3) dovendo essere identiche qualunque siano le funzioni $\xi(x_1)$, $\eta(x_1)$ dovranno essere identici i coefficienti di $(i,\ k)$ dalle due parti.

Poichè in (2) entrano soltanto simboli $(i,\ k)$ per cui è $i + k \leqq s + 1$ lo stesso deve accadere in (3), e perciò il coefficiente di $(i,\ s + 1)$ quando $i > 0$, è necessariamente nullo. Dunque intanto:

$$X_1(x_1) = 0, \ldots \quad X_s(x_1) = 0,$$

ed anche:

$$(X_i X_s) = 0 \quad \text{se} \quad i + k > s + 1.$$

Confrontiamo ora il coefficiente di $(0, s+1)$ dalle due parti: in (2) si ha X_s come coefficiente di $(0, s+1)$, mentre in (3) il coefficiente è $X_0(x_1) X_s$. Dunque:

$$X_0(x_1) = 1.$$

Confrontiamo ora i coefficienti di $(0, i)$ dalle due parti; si trovano le condizioni:

$$X_{i-1} = (X_0 X_i) + X_0(x_1) X_{i-1},$$

e poichè $X_0(x_1) = 1$:

$$(X_0 X_i) = 0.$$

Finalmente confrontiamo i coefficienti di (i, k), $(i, k \neq 0)$, dalle due parti: si avrebbero le relazioni:

$$c_{ik} X_{i+k-1} = (X_i X_k) + X_i(x_1) X_{k-1} - X_k(x_1) X_{i-1},$$

le quali diventano, ricordando che $X_1(x_1) = 0, \ldots X_s(x_1) = 0$:

$$(X_i X_k) = c_{ik} X_{i+k-1}, \quad (i + k \leqq s + 1, \ i < k).$$

Riassumendo:

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè il gruppo la cui trasformazione infinitesima generale è:

$$\sum_{i=0}^{s} \xi^{(i)} X_i,$$

sia isomorfo al gruppo generale della retta sono le seguenti:

$$\left.\begin{array}{ll} X_1(x_1) = 0, \ldots \quad X_s(x_1) = 0, & X_0(x_1) = 1, \\ (X_0 X_1) = 0, \ldots \quad (X_0 X_s) = 0, & \\ \quad (X_i X_k) = c_{ik} X_{i+k-1}, & (i + k \leqq s + 1, \quad i < k), \\ \quad (X_i X_k) = 0, & (i + k > s + 1). \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Operiamo un primo cambiamento di variabili, assumendo come nuove variabili $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, un sistema di soluzioni indipendenti di $X_0 f = 0$. Poichè $X_0(x_1) = 1$, la x_1 sarà certamente indipendente da $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$; dopo la trasformazione, X_0 avrà presa la forma canonica p_1. Le condizioni (4) assumono ora un significato più semplice: le equazioni:

$$X_1(x_1) = 0, \dots \quad X_s(x_1) = 0,$$

unite alle:

$$(p_1 X_1) = 0, \dots \quad (p_1 X_s) = 0,$$

ci dicono che le $X_1, \dots X_s$ devono essere trasformazioni nelle variabili $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, che non contengono x_1 nemmeno come parametro. Torneremo ora a scrivere x_2, x_3 in luogo di $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ non portando ciò nessun equivoco.

Per fissare le idee è bene cominciare a fermare l'attenzione sopra due casi particolari.

Supponiamo $s = 1$; consideriamo cioè gruppi della forma:

$$\xi p_1 + \xi' X_1,$$

la X_1 deve essere una trasformazione nelle x_2, x_3: non è soggetta ad altre condizioni. Con un opportuno cambiamento di variabili si potrà dunque portare alla forma canonica p_2. Dunque:

ogni gruppo, isomorfo al gruppo generale della retta, per cui $s = 1$, si può portare alla forma canonica:

$$\boxed{\xi p_1 + \xi' p_2}\,.$$

Supponiamo $s = 2$. Consideriamo cioè gruppi della forma:

$$\xi p_1 + \xi' X_1 + \xi'' X_2.$$

Le X_1, X_2 sono trasformazioni nelle x_2, x_3 soggette all'unica condizione:

$$(X_1 X_2) = X_2.$$

Qui si possono presentare due casi:

(α): le X_1, X_2 hanno traiettorie distinte; con un opportuno cambiamento di variabili si può fare in modo che sia:

$$X_1 = x_2 p_2, \quad X_2 = x_2 p_3.$$

(β): le X_1, X_2 non hanno traiettorie distinte; si può allora disporre del cambiamento di variabili in modo che sia:

$$X_1 = -x_2 p_2, \quad X_2 = p_2.$$

Dunque: *ogni gruppo isomorfo al gruppo generale della retta, per cui* $s = 2$, *è riducibile all'una o all'altra delle due forme canoniche:*

$$\boxed{\xi p_1 + \xi' x_2 p_2 + \xi'' x_2 p_3},$$

$$\boxed{\xi p_1 - \xi' x_2 p_2 + x'' p_2}.$$

Ritorniamo ora al caso generale. Le $X_1 \ldots X_s$ sono trasformazioni nelle x_2, x_3 formanti un gruppo con la composizione rappresentata dalle formole (4). In particolare dunque deve essere:

$$(X_1 X_2) = X_2,$$

cioè le trasformazioni X_1, X_2 formano un sottogruppo nel gruppo $X_1 \ldots X_s$; a questo sottogruppo si possono applicare le considerazioni fatte pel caso $s = 2$: si può dunque portare il gruppo proposto o alla forma:

$$\xi p_1 + \xi' x_2 p_2 + \xi'' x_2 p_3 + \sum_{i=3}^{s} \xi^{(i)} X_i, \tag{α}$$

oppure alla forma:

$$\xi p_1 - \xi' x_2 p_2 + \xi'' p_2 + \sum_{i=3}^{s} \xi^{(i)} X_i. \tag{β}$$

Esaminiamo ora i gruppi della forma (β). Se guardiamo alle condizioni (4), si vede che deve essere:

$$(X_1 X_s) = (s-1) X_s, \quad (X_2 X_s) = 0.$$

cioè:

$$(-x_2 p_2, X_s) = (s-1) X_s, \quad (p_2 X_s) = 0;$$

la prima condizione, sviluppata, diventa:

$$-x_2 (p_2, X_s) + X_s(x_2) p_2 = (s-1) X_s,$$

e tenendo conto della seconda condizione:

$$X_s(x_2) p_2 = (s-1) X_s.$$

Ma è:

$$X_s = X_s(x_2) p_2 + X_s(x_3) p_3,$$

deve dunque essere:

$$X_s(x_3) = 0, \quad (s-1) X_s(x_2) = X_s(x_2).$$

Non può dunque essere $s > 2$: se un gruppo è riducibile alla forma (β) deve essere necessariamente $s = 2$.

Dunque: *i gruppi per cui $s > 2$ sono riducibili alla forma:*

$$\xi p_1 + \xi' x_2 p_2 + \xi'' x_2 p_3 + \sum_{i=3}^{s} \xi^{(i)} X_i , \tag{α}$$

con un opportuno cambiamento di variabili.

Dopo aver condotto un gruppo alla forma (α), si può ancora disporre di qualche cambiamento di variabili: però occorrendo conservare ad X_1, X_2 la forma canonica ad essi attribuita, i cambiamenti di cui possiamo disporre devono lasciare inalterata ciascuna delle trasformazioni $x_2 p_2$, $x_2 p_3$. Resta dunque soltanto disponibile il gruppo:

$$\left.\begin{aligned} x'_2 &= a\, x_2 , \\ x'_3 &= a\, x_3 + b, \end{aligned}\right\} \tag{γ}$$

(a, b costanti arbitrarie).

Non è stato tratto fin qui, dalle condizioni (4), tutto il vantaggio che se ne poteva trarre: ritorneremo ora su queste condizioni nell'intento di riconoscere la natura delle trasformazioni $X_3, \dots X_s$.

La X_3 è soggetta ad una prima condizione:

$$(X_1 X_3) = 2\, X_3 ,$$

che si scompone nelle due seguenti:

$$X_1 [X_3(x_2)] - X_3 [X_1(x_2)] = 2\, X_3(x_2) ,$$
$$X_1 [X_3(x_3)] - X_3 [X_1(x_3)] = 2\, X_3(x_3).$$

Notando che $X_1 = x_2 p_2$, quelle due condizioni diventano:

$$X_1 [X_3(x_2)] = 3\, X_3(x_2) ,$$
$$X_1 [X_3(x_3)] = 2\, X_3(x_3) ,$$

quindi finalmente:

$$X_3(x_2) = x_2^3 \varphi(x_3) , \quad X_3(x_3) = x_2^2 \psi(x_3). \tag{5}$$

Una seconda condizione a cui è soggetta X_3 si presenta osservando che col combinare successivamente la X_2 con X_3 si deve trovare dopo un numero finito di volte un risultato identicamente nullo. Si ha infatti dalle (4):

$$(X_2 X_3) = c_{23} X_4 , \quad (X_2 X_4) = c_{24} X_5 , \quad .. \quad (X_2 X_s) = 0.$$

Per vedere che profitto si può trarre da questa condizione consideriamo prima la trasformazione $c_{23} X_4$.

Si ha:

$$X_2 [X_3 (x_2)] - X_3 [X_2 (x_2)] = c_{23} X_4 (x_2),$$

$$X_2 [X_3 (x_3)] - X_3 [X_2 (x_3)] = c_{23} X_4 (x_3);$$

tenendo conto delle (5), e ricordando che $X_2 = x_2 p_3$, le relazioni precedenti divengono:

$$x_2^4 \frac{d\varphi}{d x_3} = c_{23} X_4 (x_2), \quad x_2^3 \left(\frac{d\psi}{d x_3} - \varphi\right) = c_{23} X_4 (x_3). \tag{5$_1$}$$

I primi membri delle (5$_1$) non differiscono dai secondi membri delle (5) che per la forma delle funzioni φ, ψ, e per essere aumentati tutti di una unità gli esponenti della x_2. Analogamente dunque si trova:

$$c_{23} c_{24} X_5 (x_2) = x_2^5 \frac{d^2 \varphi}{d x_3^2},$$

$$c_{23} c_{24} X_5 (x_3) = x_2^4 \left(\frac{d^2 \psi}{d x_3^2} - 2 \frac{d\varphi}{d x_3}\right).$$

La legge di formazione di questi successivi sistemi di equazioni è subito veduta. Qui importa scrivere l'ultimo sistema. Dalla condizione $(X_2 X_s) = 0$ si ricava che:

$$0 = x_2^{s+1} \frac{d^{s-2} \varphi}{d x_3^{s-2}},$$

$$0 = x_2^s \left(\frac{d^{s-2} \psi}{d x_3^{s-2}} - (s-2) \frac{d^{s-3} \varphi}{d x_3^{s-3}}\right).$$

La prima equazione ci dice che φ è un polinomio di grado $s-3$; la seconda equazione ci dice che ψ è un polinomio di grado $s-2$: e che i coefficienti delle più alte potenze di x_3 in φ, ψ sono eguali tra loro.

Si può dunque porre la trasformazione X_3 sotto la forma:

$$X_3 = x_2^2 \{ \varphi (x_2 p_2 + x_3 p_3) + \Phi \cdot p_3 \},$$

in cui φ e Φ sono polinomi di grado $s-3$ in x_3.

E si avrà allora, come si riconosce facilmente dalle formole (5$_1$):

$$\overline{X}_4 = c_{23} X_4 = x_2^3 \{ \varphi' (x_2 p_2 + x_3 p_3) + \Phi' \cdot p_3 \}, \quad \left(\varphi' = \frac{d\varphi}{d x_3}, \ \Phi' = \frac{d\Phi}{d x_3}\right).$$

Nello stesso modo si avrebbe:

$$\overline{X}_5 = c_{23} \cdot c_{24} X_5 = x_2^4 \{ \varphi'' (x_2 p_2 + x_3 p_3) + \Phi'' \cdot p_3 \},$$

. . . .

$$\overline{X}_s = c_{23} \cdot c_{24} \ldots c_{2,s-1} X_s = x_2^{s-1} \{ \varphi^{(s-3)} (x_2 p_2 + x_3 p_3) + \Phi^{(s-3)} p_3 \}.$$

Poichè φ e Φ sono polinomi di grado $s - 3$, $\varphi^{(s-3)}$, $\Phi^{(s-3)}$ sono delle costanti: le rappresenteremo rispettivamente con c, C.

Cominciamo ora a supporre che sia $c \gtrless 0$. Con la seguente trasformazione del gruppo (γ):

$$x'_2 = c^{\frac{1}{s-1}} x_2,$$

$$x'_3 = c^{\frac{1}{s-1}} x_3 + c^{\frac{2-s}{s-1}} C,$$

si può portare $\overline{X}_s$ alla forma canonica:

$$\overline{X}_s = x_2^{s-1} (x_2 p_2 + x_3 p_3),$$

in cui non vi è più nulla di indeterminato.

Poniamo ora $U = x_2 p_2 + x_3 p_3$, e cerchiamo di trar profitto della condizione:

$$(X_3 X_s) = 0,$$

questa si scompone nelle due seguenti:

$$X_3 (x_2^s) = x_2^{s-1} \cdot U (x_2^3 \cdot \varphi).$$

$$X_3 (x_2^{s-1} x_3) = x_2^{s-1} \,.\, U (x_2^2 (\varphi x_3 + \Phi)).$$

Sviluppando queste relazioni, si trova:

$$U(\varphi) = (s-3)\varphi,$$

$$U(\Phi) = -\Phi.$$

Dovrebbe dunque essere:

$$\varphi = A x_3^{s-3}, \quad \Phi = B x_3^{-1}, \quad (A,\ B,\ \text{costanti}).$$

D'altra parte Φ deve essere una funzione razionale intera rispetto x_3, dunque $B = 0$, e per la forma canonica attribuita ad $\overline{X}_s$ deve essere $\varphi^{(s-3)} = 1$, dunque:

$$\varphi = \frac{x_3^{s-3}}{s-3!}.$$

La trasformazione X_3 è dunque della forma:

$$X_3 = \frac{1}{s-3\,!}\, x_2^2\, x_3^{s-3}\, (x_2\, p_2 + x_3\, p_3),$$

ed è allora:

$$\overline{X}_4 = c_{23}\, X_4 = \frac{1}{s-4\,!}\, x_2^3\, x_3^{s-4}\, (x_2\, p_2 + x_3\, p_3).$$

. . . .

Formiamoci ora la parentesi $(X_3 \cdot \overline{X}_4)$: si riconosce che è: $(X_3\, \overline{X}_4) = 0$, quindi anche $(X_3\, X_4) = 0$. Volendo stabilire l'accordo tra questa relazione e quelle della composizione (4), siamo costretti a concludere che $3 + 4 > s + 1$.

Il numero s deve essere necessariamente inferiore a sei. Che possa assumere tutti i valori 1, 2,... 5 è d'altra parte presto accertato.

Per completare questa discussione non rimane che a considerare il caso in cui la costante c è nulla per la trasformazione $\overline{X}_s$. Si ha allora:

$$\overline{X}_s = C\, x_2^{s-1}\, p_3\,.$$

La condizione $(X_3\, X_s) = 0$ ci mostra che deve essere:

$$X_s\, [X_3\, (x_2)] = 0\,,$$

$$X_3\, [X_s\, (x_3)] = X_s\, [X_3\, (x_3)].$$

Dalla prima equazione si ricava $\frac{d\varphi}{d\, x_3} = 0$; dunque φ è una costante che rappresenteremo con M.

Dalla seconda equazione si ricava:

$$\Phi' = (s - 2)\, M,$$

quindi:

$$\Phi = (s - 2)\, M\, x_3 + N.$$

La trasformazione X_3 è dunque della forma:

$$X_3 = x_2^2\, \{ M\, U + (s-2)\, M\, x_3\, p_3 + N\, p_3 \},$$

si ha poi:

$$\overline{X}_4 = x_2^3 \cdot (s - 2)\, M \cdot p_3\,,$$

$$\overline{X}_5 = 0\,, \quad \overline{X}_6 = 0\,, \ldots$$

In questo caso dunque è $s = 4$. Con la trasformazione:

$$x'_2 = \sqrt{M} \cdot x_2 ,$$

$$x'_3 = \sqrt{M} \cdot x_3 + \frac{N}{3\sqrt{M}} ,$$

si portano X_3, $\overline{X}_4$ alla forma canonica:

$$X_3 = x_2^2 (x_2 p_2 + 3 x_3 p_3), \quad \overline{X}_4 = 2 x_2^3 p_3 .$$

Rimane finalmente a considerare il caso di $M = 0$, allora rimane:

$$X_3 = N x_2^2 p_3 ,$$

in questo caso dunque è $s = 3$; si vede poi che son una sostituzione del gruppo (γ) si può fare in modo che sia $N = 1$.

Riassumendo i risultati di questa discussione, si può enunciare il seguente teorema:

I gruppi dello spazio x_1, x_2, x_3, isomorfi al gruppo generale della retta, si possono con un cambiamento di variabili portare all'una o all'altra delle seguenti forme canoniche:

$$\boxed{\xi(x_1) p_1} , \quad \boxed{\xi p_1 + \xi' p_2} ,$$

$$\boxed{\xi p_1 - \xi' x_2 p_2 + \xi'' p_2} , \quad \boxed{\xi p_1 + \xi' x_2 p_2 + \xi'' x_2 p_3} ,$$

$$\boxed{\xi p_1 + \xi' x_2 p_2 + \xi'' x_2 p_3 + \xi''' x_2^2 (x_2 p_2 + x_3 p_3)} ,$$

$$\boxed{\xi p_1 + \xi' x_2 p_2 + \xi'' x_2 p_3 + U\left(\xi''' x_2^2 x_3 + \xi^{\mathrm{IV}} \frac{x_2^3}{2}\right)} ,$$

$$\boxed{\xi p_1 + \xi' x_2 p_2 + \xi'' x_2 p_3 + U\left(x''' \frac{x_2^2 x_3^2}{2} + \xi^{\mathrm{IV}} \frac{x_2^3 x_3}{2} + \xi^{\mathrm{V}} \frac{x_2^4}{10}\right)}$$

$$\boxed{\xi p_1 + \xi' x_2 p_2 + \xi'' x_2 p_3 + \xi''' x_2^2 p_3} ,$$

$$\boxed{\xi p_1 + \xi' x_2 p_2 + \xi'' x_2 p_3 + \xi''' x_2^2 (x_2 p_2 + 3 x_3 p_3) + \xi^{\mathrm{IV}} x_2^3 p_3}$$

III. Gruppi isomorfi al gruppo $\xi(x)\frac{\partial f}{\partial y}$.

Riprendiamo ora in esame la espressione (3) del Capitolo precedente: se questa espressione deve essere identicamente nulla qualunque siano le funzioni $\xi(x_1)$, $\eta(x_1)$ bisogna che siano identicamente nulli i coefficienti delle singole (i, k). Si trova dunque che:

le condizioni necessarie e sufficienti perchè il gruppo la cui trasformazione infinitesima generale è:

$$\sum_{i=0}^{s} \xi^{(i)} X_i ,$$

sia composto di trasformazioni permutabili, sono le seguenti:

$$\left.\begin{array}{c} X_0(x_1)=0, \quad X_1(x_1)=0, \ldots \quad X_s(x_1)=0, \\ (X_i X_k)=0. \end{array}\right\} \tag{1}$$

La trasformazione X_0 è dunque della forma:

$$X_0 = \alpha_{02}\, p_2 + \alpha_{03}\, p_3 ;$$

prendiamo come nuova variabile $\bar{x}_3$ una soluzione di $X_0 f = 0$; si ha allora:

$$X_0 = \beta_{02}\, p_2 .$$

Se β_{02} fosse una funzione della sola x_1 si potrebbe immaginare compenetrata questa funzione nel simbolo $\xi(x_1)$. Se invece fosse β_{02} una funzione, oltre che di x_1, di una o di entrambe le x_2, x_3 si potrebbe determinare una nuova variabile $\bar{x}_2$ in modo che fosse:

$$X_0 = \bar{p}_2 .$$

In ogni caso si vede che il nostro gruppo può essere portato ad una forma:

$$\xi(x_1)\, p_2 + \cdots$$

Dopo aver ottenuto questo risultato, noi non potremo più disporre, per ridurre il nostro gruppo ad una forma canonica, che di quelle trasformazioni che lasciano invariante la trasformazione p_2. Possiamo dunque disporre del gruppo:

$$\left.\begin{aligned} x'_2 &= x_2 + \varphi(x_1,\ x_3), \\ x'_3 &= \psi(x_1,\ x_3), \end{aligned}\right\} \qquad (g)$$

(φ, ψ funzioni arbitrarie degli argomenti).

La trasformazione X_1, dovendo soddisfare alle condizioni:

$$(p_2 X_1) = 0, \quad X_1(x_1) = 0,$$

sarà della forma:

$$X_1 = \alpha_{12} p_2 + \alpha_{13} p_3,$$

in cui α_{12}, α_{13} sono funzioni delle sole x_1, x_3. Ciò posto, supponiamo dapprima che α_{13} non sia identicamente nulla, e determiniamo la funzione φ nel gruppo (g) con la condizione:

$$\alpha_{12} + \alpha_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0,$$

e la funzione ψ con la condizione:

$$\alpha_{13} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 1.$$

Per la sostituzione così determinata diventerà $X_1 = p_3$. Se poi fosse $\alpha_{13} = 0$, si dovrebbe prendere $\alpha_{12} = x'_3$, e si avrebbe per X_1 la forma canonica $x_3 p_2$.

Riassumendo: i gruppi composti di trasformazioni permutabili si possono con un opportuno cambiamento di variabili portare all'una o all'altra delle seguenti forme canoniche:

$$\xi(x_1) p_2 + \xi' p_3 + \cdots \qquad (\alpha)$$

$$\xi(x_1) p_2 + \xi' x_3 p_2 + \cdots \qquad (\beta)$$

Ci resta ora ad esaminare la natura delle trasformazioni X_2, X_3,... X_s per ciascuna delle due categorie (α), (β).

Per un gruppo (α) la trasformazione X_2 è soggetta alle condizioni:

$$X_2(x_1) = 0, \quad (p_2 X_2) = 0, \quad (p_3 X_2) = 0;$$

essa ha dunque la forma:

$$X_2 = \alpha_2(x_1) p_2 + \beta_2(x_1) p_3.$$

Nello stesso modo si trova che è in generale:

$$X_i = \alpha_i(x_1) p_2 + \beta_i(x_1) p_3;$$

le funzioni α, β in tutte queste trasformazioni sono interamente arbitrarie, e non possono essere eliminate con un cambiamento di variabili: esse sono dunque delle funzioni *caratteristiche* pel gruppo. Il numero s può essere un intero positivo qualunque.

Per un gruppo (β) la trasformazione X_2 è soggetta alle condizioni:

$$X_2(x_1) = 0\,,\quad (p_2 X_2) = 0\,,\quad (x_3 p_2\,,\ X_2) = 0\,,$$

l'ultima delle quali, combinata con la seconda, dà:

$$X_2(x_3) = 0.$$

La trasformazione X_2 è dunque della forma:

$$X_2 = \varpi_2(x_1\,,\ x_3)\, p_2\,.$$

Nello stesso modo si trova che è in generale:

$$X_i = \varpi_i(x_1\,,\ x_3)\, p_2\,;$$

le ϖ sono funzioni arbitrarie dei loro argomenti; esse sono *caratteristiche* per un gruppo. Anche qui il numero s può essere un intero, positivo qualunque.

Riassumendo:

I gruppi dello spazio x_1, x_2, x_3, isomorfi al gruppo $\xi(x)\dfrac{\partial f}{\partial y}$, si possono con un cambiamento di variabili portare all'una o all'altra delle seguenti forme canoniche:

$$\boxed{\xi(x_1)\, p_2}\,,\quad \boxed{\xi(x_1)\, p_2 + \xi' p_3}\,,\quad \boxed{\xi\, p_2 + \xi' x_3\, p_2}\,,$$

$$\boxed{\xi\, p_2 + \xi' p_3 + \sum_{i=2}^{s} \xi^{(i)}\left[\alpha_i(x_1)\, p_2 + \beta_i(x_1)\, p_3\right]}\,,$$

$$\boxed{\xi\, p_2 + \xi' x_3\, p_2 + \sum_{i=2}^{s} \xi^{(i)}\, \varpi_i(x_1\,,\ x_3)\, p_2}\,.$$

IV. Gruppi che occorrono nella presente classificazione.

Conveniamo ora di prendere:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z.$$

Con le regole del calcolo delle variazioni si calcoleranno per ogni gruppo le variazioni di p, q, r, s, t; e si procederà alla ricerca delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine invarianti. Equazioni invarianti si possono costruire in due modi diversi: o stabilendo delle relazioni arbitrarie tra gli invarianti differenziali del gruppo che sono di ordine eguale o inferiore a *due*, o scrivendo che certi determinanti formati con i coefficienti delle trasformazioni infinitesime sono identicamente nulli. Lasceremo da parte, per ora, le equazioni invarianti di questa ultima categoria. Perchè per un dato gruppo esistano equazioni invarianti della prima categoria è soltanto necessario che il gruppo stesso abbia degli invarianti del secondo ordine. Esaminiamo ora quali tra i gruppi determinati negli ultimi due capitoli soddisfano a questa condizione.

Sia p. es. un gruppo isomorfo a $\xi(x)\dfrac{\partial f}{\partial x}$: sia

$$\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{i=1}^{s} \xi^{(i)} X_i;$$

nelle variazioni di x, y, z, entrano le derivate fino all'ordine s di $\xi(x)$. Allora nelle variazioni di p, q entrerà certamente la derivata di ordine $s+1$, nelle variazioni di r, s, t entrerà la derivata di ordine $s+2$. Per formare gli invarianti del secondo ordine noi dovremmo integrare un sistema completo di $s+3$ equazioni tra 8 variabili: x, y, z, p, q, r, s, t, è necessario dunque che sia $s < 5$.

Un risultato identico si ottiene nell'identico modo pei gruppi isomorfi a $\xi(x)\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Supponiamo per di più che il gruppo proposto abbia α invarianti di ordine zero; poichè noi cerchiamo delle *vere* equazioni differenziali invarianti, dovrà essere:

$$8 - (s+3) > \alpha.$$

Pei gruppi composti di trasformazioni permutabili, ad es., vi è sempre un invariante di ordine zero: x. Il numero s deve dunque per essi soddisfare alla condizione:

$$8 - (s + 3) > 1 \quad \text{quindi} \quad s < 4.$$

Tra questi gruppi poi quelli che sono riducibili alla forma:

$$\xi p_2 + \xi' x_3 p_2 + \sum_{i=2}^{s} \xi^{(i)} \varpi_i (x_1, x_3) p_2,$$

ammettono due invarianti di ordine zero: x_1, x_3 (per le convenzioni fatte: x, z); per essi dunque deve essere $s < 3$.

Riassumendo questi risultati, si vede che dei gruppi determinati nei due capitoli precedenti ci basta conservare i seguenti:

$$\boxed{\xi(x_1) p_1}, \quad \boxed{\xi p_1 + \xi' p_2}, \quad \boxed{\xi p_1 - \xi' x_2 p_2 + \xi'' p_2},$$

$$\boxed{\xi p_1 + \xi' x_2 p_2 + \xi'' x_2 p_3},$$

$$\boxed{\xi p_1 + \xi' x_2 p_2 + \xi'' x_2 p_3 + U \xi''' x_2^2},$$

$$\boxed{\xi p_1 + \xi' x_2 p_2 + \xi'' x_2 p_3 + U\left(\xi''' x_2^2 x_3 + \xi^{\mathrm{IV}} \frac{x_2^3}{2}\right)},$$

$$\boxed{\xi p_1 + \xi' x_2 p_2 + \xi'' x_2 p_3 + \xi''' x_2^2 p_3},$$

$$\boxed{\xi p_1 + \xi' x_2 p_2 + \xi'' x_2 p_3 + \xi''' x_2^2 (x_2 p_2 + 3 x_3 p_3) + \xi^{\mathrm{IV}} x_2^3 p_3},$$

$$\boxed{\xi(x_1) p_2}, \quad \boxed{\xi p_2 + \xi' p_3}, \quad \boxed{\xi p_2 + \xi' x_3 p_2};$$

$$\boxed{\xi p_2 + \xi' x_3 p_2 + \xi'' \varphi(x_3 x_1) p_2},$$

$$\boxed{\xi p_2 + \xi' p_3 + \xi'' (\alpha(x) p_2 + \beta(x) p_3)},$$

$$\boxed{\xi p_2 + \xi' p_3 + \xi'' (\alpha_1(x) p_2 + \beta_1(x) p_3) + \xi''' (\alpha_2(x) p_2 + \beta_2(x) p_3)},$$

Verremo ora esaminando successivamente ciascuno di questi gruppi.

V. Equazioni che ammettono un gruppo isomorfo al gruppo generale della retta.

Nelle equazioni di cui ora ci occupiamo non entra certamente la variabile x. Si dimostra che non può entrare nemmeno la variabile r, osservando che nella variazione δr entrano le derivate di ξ fino all'ordine $s+2$, mentre nelle δs, δt non entrano le derivate di ξ che fino all'ordine $s+1$.

1. $\boxed{\xi(x_1) p_1}$.

Per questo gruppo vi sono due invarianti di ordine zero y, z. Si ha poi (*):

$$\delta p = -p\xi', \quad \delta q = 0,$$
$$\delta s = -s\xi', \quad \delta t = 0.$$

Le equazioni differenziali invarianti sono dunque della forma:

$$\Omega\left(\frac{s}{p}, y, z, q, t\right) = 0,$$

in cui Ω è una funzione qualunque degli argomenti.

2. $\boxed{\xi(x_1) p_1 + \xi' \cdot p_2}$.

Si ha qui:

$$\delta x = \xi(x), \quad \delta y = \xi'(x), \quad \delta z = 0.$$

(*) Ora e sempre in seguito ometteremo il fattore costante δt nelle espressioni delle variazioni.

Quindi:

$$\delta p = -p\,\xi' - q\,\xi'', \quad \delta q = 0,$$
$$\delta s = -s\,\xi' - t\,\xi'', \quad \delta t = 0.$$

Gli invarianti devono soddisfare alle equazioni:

$$q\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} - p\frac{\partial f}{\partial p} - s\frac{\partial f}{\partial s} = 0.$$

Le soluzioni della prima equazione sono:

$$y, \; z, \; q, \; t, \quad \alpha = q\,s - p\,t;$$

la seconda equazione, introducendo la α, diventa:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \alpha\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0;$$

gli invarianti cercati sono dunque:

$$z, \; q, \; t, \; (q\,s - p\,t)\,e^y;$$

e le equazioni invarianti sono della forma:

$$\Omega(z, \; q, \; t, \; (q\,s - p\,t)\,e^y) = 0.$$

3. $\boxed{\xi\,p_1 - \xi'\,x_2\,p_2 + \xi''\,p_2}$.

Per questo gruppo è:

$$\delta x = \xi(x), \quad \delta y = -\xi'\,y + \xi'', \quad \delta z = 0.$$

Quindi:

$$\delta p = -p\,\xi' - q\,(\xi''' - \xi''\,y), \quad \delta q = q\,\xi',$$
$$\delta s = (q + t\,y)\,\xi'' - t\,\xi''', \qquad \delta t = 2\,t\,\xi'.$$

Il sistema completo che determina gli invarianti è:

$$q\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} + y\,q\frac{\partial f}{\partial p} + (y\,t + q)\frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$
$$-y\frac{\partial f}{\partial y} - p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q} + 2\,t\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Le soluzioni della prima equazione sono:

$$y, \quad z, \quad q, \quad t, \quad \alpha = qs - pt,$$

la seconda equazione diventa:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + q^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0,$$

ed ammette quindi le soluzioni:

$$q^2 y - \alpha, \quad q, \quad t, \quad z;$$

finalmente l'ultima equazione ci mostra che gli invarianti cercati sono:

$$z, \quad \frac{t}{q^2}, \quad \frac{q^2 y - \alpha}{q};$$

le equazioni invarianti sono dunque della forma:

$$\Omega\left(z, \quad \frac{t}{q^2}, \quad qy + \frac{pt}{q} - s\right) = 0.$$

4. $\boxed{\xi p_1 + \xi' x_2 p_2 + \xi'' x_2 p_3}$.

Per questo gruppo è:

$$\delta x = \xi(x), \quad \delta y = y\xi', \quad \delta z = y\xi''.$$

Si ha dunque:

$$\begin{aligned}
\delta p &= \xi''' y - p\xi' - qy\xi'', \\
\delta q &= \xi'' - q\xi', \\
\delta s &= \xi''' - 2s\xi' - q\xi'' - ty\xi'', \\
\delta t &= -2t\xi'.
\end{aligned}$$

Il sistema completo che definisce gli invarianti è:

$$\begin{aligned}
& y\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial s} = 0, \\
& y\frac{\partial f}{\partial z} - qy\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q} - (q + ty)\frac{\partial f}{\partial s} = 0, \\
& y\frac{\partial f}{\partial y} - p\frac{\partial f}{\partial p} - q\frac{\partial f}{\partial q} - 2s\frac{\partial f}{\partial s} - 2t\frac{\partial f}{\partial t} = 0.
\end{aligned}$$

Le soluzioni della prima equazione sono:

$$y, \quad z, \quad q, \quad t, \quad \beta = y s - p;$$

la seconda equazione diventa:

$$y \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial q} - t y^2 \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0,$$

ed ammette le soluzioni:

$$y, \quad t, \quad y q - z, \quad t y^2 z + y \beta;$$

tenendo ora conto dell'ultima equazione si trovano gli invarianti:

$$y q - z, \quad t y^2 z + y \beta, \quad y^2 t.$$

Le equazioni invarianti sono pel nostro gruppo della forma:

$$\Omega (y q - z, \quad y^2 t, \quad t y^2 z + y^2 s - y p) = 0.$$

5. $\boxed{\xi p_1 + \xi' x_2 p_2 + \xi'' x_2 p_3 + \xi''' x_2^2 p_3}$.

Per questo gruppo è:

$$\begin{aligned}
&\delta x = \xi(x), \quad \delta y = y \xi', \quad \delta z = y \xi'' + y^2 \xi''', \\
&\delta p = \xi''' y + \xi^{\mathrm{IV}} y^2 - p \xi' - q y \xi'', \\
&\delta q = \xi'' + 2 y \xi''' - q \xi', \\
&\delta s = \xi''' + 2 y \xi^{\mathrm{IV}} - 2 s \xi' - t y \xi'' - q \xi'', \\
&\delta t = 2 \xi''' - 2 t \xi'.
\end{aligned}$$

Il sistema completo che definisce gli invarianti è:

$$\begin{aligned}
&y \frac{\partial f}{\partial y} - p \frac{\partial f}{\partial p} - q \frac{\partial f}{\partial q} - 2 s \frac{\partial f}{\partial s} - 2 t \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \\
&y \frac{\partial f}{\partial z} - q y \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q} - (q + t y) \frac{\partial f}{\partial s} = 0, \\
&y^2 \frac{\partial f}{\partial z} + y \frac{\partial f}{\partial p} + 2 y \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial s} + 2 \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \\
&y^2 \frac{\partial f}{\partial p} + 2 y \frac{\partial f}{\partial s} = 0.
\end{aligned}$$

Soluzioni dell'ultima equazione sono:

$$y, \quad z, \quad q, \quad t, \quad \beta = y s - 2 p.$$

La penultima equazione diventa:

$$y^2 \frac{\partial f}{\partial z} + 2\, y \frac{\partial f}{\partial q} - y \frac{\partial f}{\partial \beta} + 2 \frac{\partial f}{\partial t} = 0;$$

essa ammette dunque le soluzioni:

$$y, \quad q + 2\beta, \quad y\, q - 2\, z, \quad y^2 t - 2\, z,$$

che indicheremo rispettivamente con y, u, v, w. La seconda equazione allora diventa:

$$(1 + 2\,(v - w)) \frac{\partial f}{\partial u} - y \frac{\partial f}{\partial v} - 2\, y \frac{\partial f}{\partial w} = 0,$$

le cui soluzioni sono:

$$y, \quad 2\, v - w, \quad y\, u + v^2 + v - \frac{w^2}{2},$$

di queste le ultime due sono anche soluzioni della prima equazione.

Le equazioni invarianti pel nostro gruppo sono dunque della forma:

$$\Omega \left(2\, v - w, \quad y\, u + v^2 + v - \frac{w^2}{2}\right) = 0.$$

6. $\boxed{\xi\, p_1 + \xi'\, x_2\, p_2 + \xi''\, x_2\, p_3 + \xi'''\, x_2^2\, (x_2\, p_2 + x_3\, p_3)}$

Per questo gruppo si ha:

$$\delta\, x = \xi\,(x), \quad \delta\, y = \xi'\, y + \xi'''\, y^3, \quad \delta\, z = \xi''\, y + \xi'''\, y^2\, z.$$

Si ha dunque:

$$\begin{aligned} \delta\, p &= \xi'''\, y + \xi^{IV}\, y^2\, z + \xi'''\, y^2\, p - p\, \xi' - q\,(\xi''\, y + \xi^{IV}\, y^3), \\ \delta\, q &= \xi'' + 2\, \xi'''\, y\, z + \xi'''\, y^2\, q - q\,(\xi' + 3\, y^2\, \xi'''), \\ \delta\, s &= \xi''' + 2\, \xi^{IV}\, y\, z + 2\, \xi'''\, y\, p - t\,(\xi''\, y + \xi^{IV}\, y^3) - q\, \xi'' - \\ &\qquad - 2\, s\, \xi' - 2\, s\, y^2\, \xi''' - 2\, q\, y^2\, \xi^{IV} \\ \delta\, t &= 2\, \xi'''\, z - 2\, t\, \xi' - 5\, y^2\, t\, \xi''' - 2\, y\, q\, \xi'''. \end{aligned}$$

Il sistema completo da cui dipende la determinazione degli invarianti è:

$$(y^2\, z - y^3\, q) \frac{\partial f}{\partial p} + (2\, y\, z - t\, y^3 - 2\, y^2\, q) \frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

$$\begin{aligned} y^3 \frac{\partial f}{\partial y} + y^2\, z \frac{\partial f}{\partial z} + (y + y^2\, p) \frac{\partial f}{\partial p} + (2\, y\, z - 2\, y^2\, q) \frac{\partial f}{\partial q} + \\ + (1 + 2\, y\, p - 2\, s\, y^2) \frac{\partial f}{\partial s} + (2\, z - 2\, y\, q - 5\, y^2\, t) \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \end{aligned}$$

$$y\frac{\partial f}{\partial z}-q\,y\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial q}-(t\,y+q)\frac{\partial f}{\partial s}=0,$$

$$y\frac{\partial f}{\partial y}-p\frac{\partial f}{\partial p}-q\frac{\partial f}{\partial q}-2\,s\frac{\partial f}{\partial s}-2\,t\frac{\partial f}{\partial t}=0.$$

Le soluzioni della prima equazione sono:

$$y,\quad z,\quad q,\quad t,\quad \beta=(y^2 z-y^3 q)s-(2\,y\,z-t\,y^3-2\,y^2 q)\,p;$$

la seconda equazione diventa:

$$y^3\frac{\partial f}{\partial y}+y^2 z\frac{\partial f}{\partial z}+(2\,y\,z-2\,y^2 q)\frac{\partial f}{\partial q}+(2\,z-2\,y\,q-5\,y^2 t)\frac{\partial f}{\partial t}+$$
$$+(t\,y^4+q\,y^3-y^2 z-y^2\beta)\frac{\partial f}{\partial \beta}=0,$$

le cui soluzioni sono:

$$\mu=\frac{z}{y},\quad \nu=y\,z-y^2 q,\quad \rho=y^2\nu-y^5 t,$$
$$\sigma=\nu-y^3 t-2\,y\,\beta.$$

La terza equazione diventa:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}+(2\,\nu^2-2\,\mu\,\rho)\frac{\partial f}{\partial \sigma}=0,$$

essa ammette quindi le soluzioni:

$$\nu,\quad \rho,\quad \rho\,\mu^2-2\,\nu^2\mu+\sigma;$$

tenendo conto della quarta equazione si vede che gli invarianti cercati sono:

$$\frac{\rho\,\mu^2-2\,\nu^2\mu+\sigma}{\nu},\quad \frac{\nu^3}{\rho}.$$

Pel nostro gruppo le equazioni invarianti hanno dunque la forma:

$$\Omega\left(\frac{\rho\,\mu^2-2\,\nu^2\mu+\sigma}{\nu},\ \frac{\nu^3}{\rho}\right)=0.$$

7.	$\xi p_1+\xi' x_2 p_2+\xi'' x_2 p_3+\xi''' x_2^2 x_3(x_2 p_2+x_3 p_3)+\xi^{\mathrm{IV}}\frac{x_2^3}{2}(x_2 p_2+x_3 p_3)$

Per questo gruppo si ha:

$$\delta x = \xi(x), \quad \delta y = \xi' y + \xi''' y^2 z + \xi^{IV} \frac{y^4}{2},$$

$$\delta z = \xi'' y + \xi''' y^2 z^2 + \xi^{IV} \frac{y^3 \cdot z}{2}.$$

$$\delta p = -p\xi' - q y \xi'' + (y + 2 z y^2 p - y^3 p q)\xi''' + \\ + \left(y^2 z^2 + \frac{y^3 p}{2} - y^3 z q\right)\xi^{IV} + \left(\frac{y^3 z}{2} - \frac{y^4 q}{2}\right)\xi^{V}.$$

$$\delta q = -q\xi' + \xi'' + (2 y z^2 - y^2 z q - y^3 q^2)\xi''' + \left(\frac{3}{2} y^2 z - \frac{3}{2} y^3 q\right)\xi^{IV}.$$

$$\delta s = -2 s\xi' - (t y + q)\xi'' + (1 - p q y^2 - z s y^2 + 4 z y p - 2 y^3 s q - y^3 p t)\xi''' + \\ + \left(2 y z^2 - y^2 z q + \frac{3}{2} y^2 p - \frac{3}{2} y^3 s - t y^3 z - q^2 y^3\right)\xi^{IV} + \\ + \left(\frac{3}{2} y^2 z - \frac{3}{2} y^3 q - \frac{t y^4}{2}\right)\xi^{V}.$$

$$\delta t = -2 t \xi' + (2 z^2 + 2 y z q - 4 y^2 q^2 - 4 y^2 z t - 3 y^3 q t)\xi''' + \\ + \left(3 y z - 3 y^2 q - \frac{7}{2} y^3 t\right)\xi^{IV}.$$

Per determinare gli invarianti si deve integrare il sistema completo:

$$X_1 = y \frac{\partial f}{\partial y} - p \frac{\partial f}{\partial p} - q \frac{\partial f}{\partial q} - 2 s \frac{\partial f}{\partial s} - 2 t \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

$$X_2 = y \frac{\partial f}{\partial z} - q y \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q} - (t y + q)\frac{\partial f}{\partial s} = 0.$$

$$X_3 = y^3 z \frac{\partial f}{\partial y} + y^2 z^2 \frac{\partial f}{\partial z} + (y + 2 z p y^2 - y^3 p q)\frac{\partial f}{\partial p} + (2 y z^2 - y^2 z q - y^3 p^2)\frac{\partial f}{\partial q} + \\ + (1 - p q y^2 - z s y^2 + 4 z y p - 2 y^3 s q - y^3 p t)\frac{\partial f}{\partial s} + \\ + (2 z^2 + 2 y z q - 4 y^2 q^2 - 4 y^2 z t - 3 y^3 q t)\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

$$X_4 = \frac{y^4}{2}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{y^3 z}{2}\frac{\partial f}{\partial z} + \left(y^2 z^2 + \frac{y^3 p}{2} - q y^3 z\right)\frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{3}{2} y^2 z - \frac{3}{2} y^3 q\right)\frac{\partial f}{\partial q} + \\ + \left(2 y z^2 - y^2 z q + \frac{3}{2} y^2 p - \frac{3}{2} y^3 s - t y^3 z - q^2 y^3\right)\frac{\partial f}{\partial s} + \\ + \left(3 y z - 3 y^2 q - \frac{7}{2} y^3 t\right)\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

$$X_5 = (y^3 z - q y^4)\frac{\partial f}{\partial p} + (3 y^2 z - 3 y^3 q - t y^4)\frac{\partial f}{\partial s} = 0.$$

Soluzioni di quest'ultima equazione sono:

$$y, \quad z, \quad q, \quad t, \quad \beta = (3z - 3yq - ty^2)p - (yz - y^2 q)s,$$

ci calcoleremo allora $X_4(\beta)$, $X_3(\beta)$, $X_2(\beta)$, $X_1(\beta)$. Si trova:

$$X_4(\beta) = z^3 y^2 - 3z^2 y^3 q + 3y^4 q^2 z - q^3 y^5 - 2y^3 \beta,$$
$$X_3(\beta) = 2zy - 2y^2 q - ty^3 - \beta(zy^2 + 3y^3 q),$$
$$X_2(\beta) = ty^2 z + 2y^2 q^2 - 2zyq, \quad X_1(\beta) = -\beta.$$

Dobbiamo ora cercare le soluzioni di:

$$X_4 = \frac{y^4}{2}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{y^3 z}{2}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{3}{2}(y^2 z - y^3 q)\frac{\partial f}{\partial q} + \left(3yz - 3y^2 q - \frac{7}{2}y^3 t\right)\frac{\partial f}{\partial t} +$$
$$+ (z^3 y^2 - 3z^2 y^3 q + 3y^4 q^2 z - q^3 y^5 - 2y^3 \beta)\frac{\partial f}{\partial \beta} = 0,$$

una prima soluzione è $\frac{z}{y}$; porremo $\mu = \frac{z}{y}$: un' altra soluzione è $y^3(\mu - q)$; porremo $\nu = y^3(\mu - q)$. Le altre due soluzioni sono allora:

$$y^7 t - 2\nu y^3, \quad y^4 \beta + \frac{2\nu^3}{3y^3};$$

le indicheremo rispettivamente con ρ, σ.

Osserviamo che:

$$X_3(\mu) = 0, \quad X_3(\nu) = \nu^2, \quad X_3(\rho) = 3\nu\rho,$$
$$X_3(\sigma) = 3\nu\sigma - \rho - 2\nu^3\mu.$$

Si devon dunque determinare le soluzioni di:

$$X_3 = \nu^2\frac{\partial f}{\partial \nu} + 3\nu\rho\frac{\partial f}{\partial \rho} + (3\nu\sigma - \rho - 2\nu^3\mu)\frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0,$$

si trova che le soluzioni cercate sono:

$$\frac{\rho}{\nu^3}, \quad \frac{\sigma}{\nu^3} - \frac{\rho}{\nu^4} - \frac{2\mu}{\nu},$$

e le indicheremo rispettivamente con u, v.

Finalmente poichè:

$$X_2(\mu) = 1, \quad X_2(u) = 0, \quad X_2(v) = \mu u.$$

si dovrà integrare la equazione:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} + \mu u \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

La soluzione di questa equazione è: $\mu^2 u - 2v$. Ora, poichè:

$$X_1(u) = -u, \quad X_1(\mu^2 u - 2v) = -3(\mu^2 u - 2v),$$

L'invariante cercato è:

$$\frac{\mu^2 u - 2v}{u^3}.$$

Le equazioni invarianti pel nostro gruppo sono dunque:

$$\frac{\mu^2 u - 2v}{u^3} = \text{costante}.$$

8. Ci rimane a considerare il gruppo:

$$\left| \xi p_1 + \xi' x_2 p_2 + \xi'' x_2 p_3 + \xi''' x_2^2 (x_2 p_2 + 3 x_3 p_3) + \xi^{IV} x_2^3 p_3 \right|.$$

Qui si ha:

$$\delta x = \xi(x), \quad \delta y = \xi' y + \xi''' y^3, \quad \delta z = \xi'' y + 3 z y^2 \xi''' + y^3 \xi^{IV},$$

$$\delta p = y \xi''' + 3 p y^2 \xi''' + 3 z y^2 \xi^{IV} + y^3 \xi^{V} - p \xi' - q y \xi'' - q y^3 \xi^{IV},$$

$$\delta q = \xi'' + 6 y z \xi''' + 3 y^2 \xi^{IV} - q \xi',$$

$$\delta s = \xi''' + 6 y p \xi''' + 6 z y \xi^{IV} + 3 y^2 \xi^{V} - 2 s \xi' - t y \xi'' - q \xi'' - t y^3 \xi^{IV},$$

$$\delta t = 6 z \xi''' + 6 y q \xi''' + 6 y \xi^{IV} - 2 t \xi' - 3 y^2 t \xi'''.$$

Il sistema completo che siamo ridotti ad integrare è:

$$X_1 = y \frac{\partial f}{\partial y} - p \frac{\partial f}{\partial p} - q \frac{\partial f}{\partial q} - 2 s \frac{\partial f}{\partial s} - 2 t \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

$$X_2 = y \frac{\partial f}{\partial z} - q y \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q} - (t y + q) \frac{\partial f}{\partial s} = 0.$$

$$X_3 = y^3 \frac{\partial f}{\partial y} + 3 z y^2 \frac{\partial f}{\partial z} + (y + 3 p y^2) \frac{\partial f}{\partial p} + 6 z y \frac{\partial f}{\partial q} + \\ + (1 + 6 y p) \frac{\partial f}{\partial s} + (6 z + 6 y q - 3 y^2 t) \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

$$X_4 = y^3 \frac{\partial f}{\partial z} + (3 z y^2 - q y^3) \frac{\partial f}{\partial p} + 3 y^2 \frac{\partial f}{\partial q} + (6 z y - t y^3) \frac{\partial f}{\partial s} + 6 y \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

$$X_5 = y^3 \frac{\partial f}{\partial p} + 3 y^2 \frac{\partial f}{\partial s} = 0.$$

Soluzioni dell'ultima equazione sono:

$$y, \quad z, \quad q, \quad t, \quad \alpha = y s - 3 p,$$

e si ha:

$$X_4(\alpha) = 3 q y^3 - 3 z y^2 - t y^4, \quad X_3(\alpha) = y^2 \alpha - 2 y,$$

$$X_2(\alpha) = 2 q y - t y^2, \qquad X_1(\alpha) = -\alpha.$$

Si deve dunque anzitutto considerare l'equazione:

$$X_4 = y^3 \frac{\partial f}{\partial z} + 3 y^2 \frac{\partial f}{\partial q} + 6 y \frac{\partial f}{\partial t} + (3 q y^2 - 3 z y^2 - t y^4) \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0,$$

di cui le soluzioni sono:

$$y, \quad \lambda = 3 z - y q, \quad \mu = 2 q - y t.$$

$$\nu = \frac{q^2 y}{2} - \frac{t^2 y^3}{12} - \frac{3 z^2}{2 y} - \alpha.$$

Osserviamo che è:

$$X_3(\lambda) = y^2 \lambda, \quad X_3(\mu) = 2 y \lambda - 2 y^2 \mu,$$

$$X_3(\nu) = \frac{\lambda \mu y^2}{3} + \frac{y^3 \mu^2}{3} - \frac{2}{3} y \lambda^2 + y^2 \nu + 2 y.$$

Si deve quindi integrare l'equazione:

$$X_3 = y^3 \frac{\partial f}{\partial y} + y^2 \lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda} + (2 y \lambda - 2 y^2 \mu) \frac{\partial f}{\partial \mu} +$$

$$+ \left(\frac{\lambda \mu y^2}{3} + \frac{y^3 \mu^2}{3} - \frac{2}{3} y \lambda^2 + y^2 \nu + 2 y \right) \frac{\partial f}{\partial \nu} = 0,$$

di cui le soluzioni sono:

$$\frac{\lambda}{y}, \quad y^2 \mu - y \lambda, \quad \frac{\nu}{y} + \frac{1}{12} \left(\mu - \frac{\lambda}{y} \right)^2 + \frac{\lambda}{2 y} \left(\mu - \frac{\lambda}{y} \right) + \frac{1}{y^2},$$

ossia ponendo:

$$u = \frac{\lambda}{y}, \quad v = y^2 \mu - y \lambda = y^2 (\mu - u),$$

ed indicando con w la terza soluzione:

$$w = \frac{\nu}{y} + \frac{v^2}{12 y^4} + \frac{u v + 2}{2 y^2}.$$

La equazione $X_2 = 0$ diventa:

$$2\frac{\partial f}{\partial u} - 2u\frac{\partial f}{\partial w} = 0,$$

ed ammette quindi le soluzioni:

$$v, \quad u^2 - 2w.$$

Tenendo ora conto della prima equazione si trova che l'invariante cercato è:

$$v^2(u^2 - 2w),$$

e le equazioni invarianti pel nostro gruppo sono dunque le:

$$v^2(u^2 - 2w) = \text{costante}.$$

VI. Equazioni che ammettono un gruppo di trasformazioni permutabili.

Come nelle equazioni del capitolo precedente, non entra in quelle che ci proponiamo di determinare la derivata r. Un invariante di ordine zero è la variabile x; inoltre poichè la funzione arbitraria $\xi(x)$ non si presenta che nella variazione δy, la variabile y non entrerà in nessuna delle equazioni di questo capitolo.

1. $\boxed{\xi(x_1)p_2}$.

Per questo gruppo si conoscono due invarianti di ordine zero: x, z. Si ha poi:

$$\delta y = \xi(x), \quad \delta q = 0, \quad \delta t = 0,$$
$$\delta p = -q\xi', \quad \delta s = -tz'.$$

Quindi q, t, sono altri due invarianti: un terzo invariante deve soddisfare alla equazione:

$$q\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

ed è quindi $qs - pt$. Le equazioni invarianti pel nostro gruppo sono dunque della forma:

$$\Omega(x, z, q, t, qs - pt) = 0.$$

2. $\boxed{\xi p_2 + \xi' p_3}$

Si ha:

$$\delta x = 0, \quad \delta y = \xi(x), \quad \delta z = \xi',$$
$$\delta p = \xi'' - q\,\xi', \qquad \delta q = 0,$$
$$\delta s = -t\,\xi', \qquad \delta t = 0.$$

Gli invarianti dovono soddisfare alle relazioni:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} - t\frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

e sono quindi x, q, t, $z\,t + s$. Le equazioni invarianti pel nostro gruppo hanno la forma:

$$\Omega(x, q, t, z\,t + s) = 0.$$

3. $\boxed{\xi p_2 + \xi' x_3 p_2}$.

Per questo gruppo è:

$$\delta x = 0, \quad \delta y = \xi(x) + \xi' z, \quad \delta z = 0,$$
$$\delta p = -q\,\xi' - q\,\xi'' z - q\,p\,\xi',$$
$$\delta q = -q^2\,\xi',$$
$$\delta s = -t\,\xi' - t\,z\,\xi'' - q^2\,\xi'' - t\,p\,\xi' - 2\,s\,q\,\xi',$$
$$\delta t = -3\,q\,t\,\xi'.$$

Il sistema che definisce gli invarianti è:

$$(q + q\,p)\frac{\partial f}{\partial p} + q^2\frac{\partial f}{\partial q} + (t + t\,p + 2\,s\,q)\frac{\partial f}{\partial s} + 3\,q\,t\frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$
$$q\,z\frac{\partial f}{\partial p} + (t\,z + q^2)\frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

soluzioni dell'ultima equazione sono:

$$q, \; t, \; \alpha = q\,z\,s - (t\,z + q^2)\,p,$$

e la prima equazione si può scrivere così:

$$q^2\frac{\partial f}{\partial q} + 3\,q\,t\frac{\partial f}{\partial t} + (3\,q\,\alpha - q^3)\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0,$$

le sue soluzioni sono dunque:

$$\frac{t}{q^3}, \quad \frac{\alpha}{q^3}-\frac{1}{q},$$

e le equazioni invarianti sono della forma:

$$\Omega\left(x,\ z,\ \frac{t}{q^3},\ \frac{\alpha}{q^3}-\frac{1}{q}\right)=0.$$

4. $\boxed{\xi\, p_2+\xi'\, x_3\, p_2+\xi''\, \varphi\,(x_3\, x_1)\, p_2}$.

Si ha dunque:

$$\delta x=0,\quad \delta y=\xi\,(x)+\xi'\, z+\xi''\,\varphi\,(x\, z),\quad \delta z=0,$$

$$\delta p=-q\left(\xi'+\xi' p+\xi'' z+\xi''\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\xi''\frac{\partial \varphi}{\partial z}p+\xi'''\varphi\right),$$

$$\delta q=-q\left(\xi' q+\xi''\frac{\partial \varphi}{\partial z}q\right),$$

$$\delta s=-t\left(\xi'+\xi' p+\xi'' z+\xi''\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\xi''\frac{\partial \varphi}{\partial z}p+\xi'''\varphi\right)-$$

$$-2s\left(\xi' q+\xi''\frac{\partial \varphi}{\partial z}q\right)-q\left(\xi'' q+\xi'''\frac{\partial \varphi}{\partial z}q+\xi''\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial z}q+\xi''\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}p\,q\right),$$

$$\delta t=-2t\left(\xi' q+\xi'' q\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)-q\left(\xi' t+\xi''\frac{\partial \varphi}{\partial z}t+\xi''\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}q^2\right).$$

Il sistema completo che definisce gli invarianti è:

$$X_1=(q+p\,q)\frac{\partial f}{\partial p}+q^2\frac{\partial f}{\partial q}+(t+t\,p+2\,s\,q)\frac{\partial f}{\partial s}+3\,q\,t\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

$$X_2=\left(q\,z+q\frac{\partial \varphi}{\partial x}+q\,p\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p}+q^2\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial q}+\left(3\,t\,q\frac{\partial \varphi}{\partial z}+q^3\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)\frac{\partial f}{\partial t}+$$

$$+\left(t\,z+t\frac{\partial \varphi}{\partial x}+p\,t\frac{\partial \varphi}{\partial z}+q^2+q^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial z}+2\,q\,s\frac{\partial \varphi}{\partial z}+q^2 p\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)\frac{\partial f}{\partial s}=0,$$

$$X_3=q\,\varphi\frac{\partial f}{\partial p}+\left(t\varphi+q^2\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial s}=0.$$

Soluzioni dell'ultima equazione sono:

$$q,\quad t,\quad q\varphi s-\left(t\varphi+q^2\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)p=\alpha.$$

Poichè è:

$$X_2(\alpha) = 3\,q\,\alpha \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + q^3 \left(\varphi + \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right),$$

si deve ora integrare la equazione:

$$X_2 = q^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial q} + \left(3\,t\,q \frac{\partial \varphi}{\partial z} + q^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) \frac{\partial f}{\partial t} + \left(3\,q\,\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial z} + q^3\,\Phi\right) \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0,$$

in cui si è posto:

$$\Phi = \varphi + \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Come soluzioni di $X_2 = 0$ possiamo prendere le:

$$\frac{t}{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \cdot q^3} + \frac{1}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot q}, \quad \frac{\alpha}{\Phi\, q^3} + \frac{1}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot q},$$

che indicheremo rispettivamente con μ, ν. La $X_1 = 0$ allora diventa:

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial \mu} + \left\{ \frac{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}{\Phi} + 1 \right\} \frac{\partial f}{\partial \nu} = 0.$$

Le equazioni invarianti pel nostro gruppo sono dunque della forma:

$$\Omega \left(x,\ z,\ \Phi \nu - \left[\Phi + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] \mu\right) = 0.$$

5. $\boxed{\xi\, p_2 + \xi'\, p_3 + \xi''\, (\alpha\, p_2 + \beta\, p_3)}$,

$$\left(\alpha,\ \beta, \text{ funzioni di } x_1\text{:}\ \alpha' = \frac{d\alpha}{dx}, \ldots\right).$$

Qui si ha:

$$\delta x = 0, \quad \delta y = \xi(x) + \alpha\, \xi'', \quad \delta z = \xi' + \beta\, \xi'',$$

$$\delta p = \xi'' + \beta'\, \xi'' + \beta\, \xi''' - q\,(\xi' + \alpha'\, \xi'' + \alpha\, \xi'''), \quad \delta q = 0,$$

$$\delta s = -\,t\,(\xi' + \alpha'\, \xi'' + \alpha\, \xi'''), \qquad \delta t = 0.$$

Per determinare gli invarianti bisogna integrare il sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial z} - q\frac{\partial f}{\partial p} - t\frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

$$\beta\frac{\partial f}{\partial z} + (1+\beta' - q\,\alpha')\frac{\partial f}{\partial p} - t\,\alpha'\frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

$$(\beta - \alpha\, q)\frac{\partial f}{\partial p} - t\,\alpha\frac{\partial f}{\partial s} = 0.$$

Questo è un sistema di tre equazioni in tre variabili z, p, s: in generale non vi è nessuna soluzione comune: — fa eccezione il caso in cui tra le funzioni α, β ha luogo la relazione:

$$\alpha + \beta'\alpha - \beta\,\alpha' + \beta^2 = 0. \qquad (A)$$

In questo caso il sistema si riduce a due sole equazioni, ed esse ammettono la soluzione comune:

$$(\beta - \alpha\, q)\, s + t\,\alpha\, p + t\,\beta\, z.$$

Dunque se la relazione (A) è soddisfatta dalle funzioni α, β, l'equazione invariante più generale pel nostro gruppo è della forma:

$$\Omega\,(x,\ q,\ t,\ (\alpha - \beta\, q)\, s + t\,\alpha\, p + t\,\beta\, z) = 0\,.$$

Se la relazione (A) non è soddisfatta, la equazione invariante più generale ha la forma:

$$\Omega\,(x,\ q,\ t) = 0\,.$$

6. $\left.\overline{\underline{\xi\, p_2 + \xi'\, p_3 + \xi''\,(\alpha\, p_2 + \beta\, p_3) + \xi'''\,(\gamma\, p_2 + \vartheta\, p_3)}}\right|$,

$$\left(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \vartheta \text{ funzioni di } x_1;\ \alpha' = \frac{d\,\alpha}{d\,x}, \ldots\right).$$

Qui si ha:

$$\delta\, x = 0,\quad \delta\, y = \xi + \xi''\,\alpha + \xi'''\,\gamma,\quad \delta\, z = \xi' + \xi''\,\beta + \xi'''\,\vartheta,$$

$$\delta\, p = \xi'\,(1 + \beta' - q\,\alpha') + \xi'''\,(\beta + \vartheta' - q\,\alpha - q\,\gamma') + \xi^{\mathrm{IV}}\,(\vartheta - q\,\gamma) - q\,\xi',$$

$$\delta\, q = 0,\quad \delta\, t = 0,$$

$$\delta\, s = -\, t\,(\xi' + \xi'''\,\alpha + \xi'''\,\gamma' + \xi''\,\alpha' + \xi^{\mathrm{IV}}\,\gamma).$$

Si ha da integrare il sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial z}-q\frac{\partial f}{\partial p}-t\frac{\partial f}{\partial s}=0,$$

$$\beta\frac{\partial f}{\partial z}+(1+\beta'-q\alpha')\frac{\partial f}{\partial p}-t\alpha'\frac{\partial f}{\partial s}=0,$$

$$\vartheta\frac{\partial f}{\partial z}+(\beta+\vartheta'-q\alpha-q\gamma')\frac{\partial f}{\partial p}-(t\alpha+t\gamma')\frac{\partial f}{\partial s}=0,$$

$$(\vartheta-\gamma q)\frac{\partial f}{\partial p}-\gamma t\frac{\partial f}{\partial s}=0.$$

Perchè questo sistema ammetta delle soluzioni è necessario che si riduca a due equazioni sole distinte: scrivendo p. es. che le equazioni seconda e terza devono essere conseguenze delle altre due, si trovano le seguenti condizioni per α, β, γ, ϑ.

$$\gamma(\beta+\vartheta')+\vartheta(\vartheta-\alpha-\gamma')=0, \qquad (B_1)$$

$$\gamma(1+\beta')+\vartheta(\beta-\alpha')=0. \qquad (B_2)$$

Quando le condizioni (B_1), (B_2) sono soddisfatte, si ha ancora un invariante:

$$(\vartheta-\gamma q)s+(\gamma p+\vartheta z)t,$$

ed allorà le equazioni invarianti più generali hanno la forma:

$$\Omega(x,\ q,\ t,\ (\vartheta-\gamma q)s+(\gamma p+\vartheta z)t)=0.$$

Se non sono soddisfatte le condizioni (B_1), (B_2), la equazione invariante più generale ha la forma:

$$\Omega(x,\ q,\ t)=0.$$

Uno sguardo alle equazioni trovate nel numero precedente ci mostra che il gruppo che ora consideriamo non conduce in nessuno dei due casi ad equazioni invarianti diverse da quelle che già sono state determinate.

Ueber Systeme von Differentialgleichungen, denen die vierfach periodischen Functionen zweiter Art Genüge leisten.

(Von Martin Krause *in Dresden.)*

Die vierfach periodischen Functionen sind in neuerer Zeit mehrfach zur Integration von Differentialgleichungen gebraucht worden. Gewisse Rotationsprobleme sowie andere physicalische Probleme führten zu Differentialgleichungen, die mit Hülfe der genannten Functionen integrirt werden konnten. Es möge in Bezug hierauf auf Arbeiten von Weber (*), Kowalevski (**) und Koetter (***) hingewiesen werden. Daneben haben Caspary und Jahnke andere Methoden angegeben, mit deren Hülfe Differentialgleichungen der angegebenen Art aufgestellt werden können. Bei der grossen Einfachheit dieser Betrachtungen mögen sie kurz characterisirt werden. Caspary zeigt einerseits (****), dass die Thetafunctionen mit den sechszehn Coefficienten g_{mn} einer orthogonalen Substitution zusammen hängen, deren Determinante

---

(*) *Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlichen auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit.* Math. Annalen, Band 14.

(**) *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.* Acta Math., tome 12. *Sur une propriété du système d'équations diff. qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.* Acta Math., 14.

(***) *Sur le cas traité par M.me* Kowalevski *de rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe.* Acta Math., 17. *Ueber die Bewegung einen festes Körpers in einer Flüssigkeit.* Journal für Math., Band 109. *Ueber die Darstellung der Richtungs cosinus etc.* Berichte der Berliner Academie, 1895, Journal für Math. Band 116.

(****) *Journal für Math.*, Band 94, pag. 74-86; *Comptes Rendus*, Tome 104, pagina 490-493.

gleich g^2 ist und andrerseits (*) mit 15 Grössen in Verbindung stehen, die er Elemente eines Orthogonalsystemes nennt. Unter den letzteren sind die neun Coefficienten a_{mn} einer orthogonalen Substitution von der Determinante 1 verstanden, sowie die sechs aus ihnen gebildeten Grössen:

$$p_h = -(a_{1k}\, d\, a_{1l} + a_{2k}\, d\, a_{2l} + a_{3k}\, d\, a_{3l}), \qquad \left(h,\ k,\ l = \begin{matrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 1 \\ 3, & 1, & 2 \end{matrix}\right),$$

$$v_h = a_{k1}\, d\, a_{l1} + a_{k2}\, d\, a_{l2} + a_{k3}\, d\, a_{l3}.$$

Mit Hülfe dieser Grössen ist es einerseits möglich die algebraischen Relationen abzuleiten, welche zwischen den hyperelliptischen Functionen bestehen, andrerseits (**) aber auch Systeme von Differentialgleichungen herzustellen, welchen jene Functionen Genüge leisten, insbesondere diejenigen, zu denen Weber in der citirten Arbeit kommt. Iahnke (***) hat dann die Untersuchungen von Caspary fortgesetzt, indem er 28 Elemente eines orthogonalen Sechzehnersystemes einführt. Diese 28 Elemente bestehen aus den 16 von Caspary eingeführten Grössen g_{mn} und zwölf weiteren, die definirt sind durch:

$$g\, p_{rs} = -(g_{1i}\, d\, g_{1j} + g_{2i}\, d\, g_{2j} + g_{3i}\, d\, g_{3j} + d_{4i}\, d\, g_{4j}),$$

$$g\, v_{rs} = g_{i1}\, d\, g_{j1} + g_{i2}\, d\, g_{j2} + g_{i3}\, d\, g_{j3} + g_{i4}\, d\, g_{j4},$$

$$g = g_{1i}^2 + g_{2i}^2 + g_{3i}^2 + g_{4i}^2,$$

wobei die Indices in bestimmter Weise zu wählen sind. Die Beziehungen, die zwischen diesen Grössen bestehen führen zu einer Reihe von Differentialgleichungen, darunter auch derjenigen, die in der Rotationstheorie eine Rolle spielen und von den schon genannten Autoren behandelt worden sind. Im Folgenden soll nach anderer Richtung hin vorgegangen werden. In der Theorie der doppelt periodischen Functionen haben sich die Functionen 2^ter^ Art auf Grund der ausgezeichneten Arbeiten von Hermite und Picard von besonderer Bedeutung für die Integration von Differentialgleichungen gezeigt. Es soll nun versucht werden, nachzuweisen, dass im Gebiete der

(*) *Comptes Rendus*, 111, pag. 225-237: Liouville, *Journal de Math.* (4) VI, pagina 367-404; *Annales de l'école Normale* (3) X, pag. 253-294.

(**) *Comptes Rendus*, 112, pag. 1305-1308.

(***) *Berichte der Berliner Academie*, Jahrgang 1896, pag. 1023-1030. *Journal für Math.*, Band 118, pag. 224-233.

vierfach periodischen Functionen aehnliche Theorien entwickelt werden können, indem zunächst für gewisse Fundamentalfunctionen die Existenz von Differentialgleichungen nachgewiesen und diese Differentialgleichungen für die einfachsten Fälle wirklich aufgestellt werden. Es knüpft diese Betrachtung an eine frühere Arbeit des Verfassers (*) an, deren Resultate weitergeführt werden. Im Uebrigen liegen soweit dem Verfasser bekannt noch einige Arbeiten über dieses Gebiet vor und zwar sind dieses Arbeiten von Picard und Appell (**), welche sich mit gewissen Systemen von partiellen Differentialgleichungen 2ter Ordnung beschäftigen, deren Coefficienten vierfach periodische Functionen sind und für diese eine Anzahl fundamental wichtiger Sätze enthalten.

§ 1.

Definition und Reihenentwickelungen der fundamentalen Functionen.

Unter v_1, v_2 resp. a_1, a_2 wollen wir die Argumente von Thetafunctionen zweier Veränderlichen, unter u_1, u_2 resp. α_1, α_2 die Argumente der entsprechenden hyperelliptischen Functionen verstehen. Dann definiren wir eine Function $\chi_r(u_1, u_2)$ durch die Gleichung:

$$\chi_r(u_1, u_2) = \chi_r(u) = \frac{\vartheta_r(v+a)}{\vartheta_5(a)}\, e^{-\Sigma \frac{\partial \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_\varepsilon} u_\varepsilon - \frac{1}{2}\omega}, \tag{1}$$

wobei gesetzt ist:

$$\omega = \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v)_0}{\partial u_1^2} u_1^2 + 2\frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v)_0}{\partial u_1 \partial u_2} u_1 \cdot u_2 + \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v)_0}{\partial u_2^2} u_2^2 .$$

Differenciren wir logarithmisch nach u_1 und u_2, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \log \chi_r(u)}{\partial u_1} &= \frac{\partial \log \vartheta_r(v+a)}{\partial u_1} - \frac{\partial \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_1} - \left(\frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v)_0}{\partial u_1^2} u_1 + \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v)_0}{\partial u_1 \partial u_2} u_2\right), \\ \frac{\partial \log \chi_r(u)}{\partial u_2} &= \frac{\partial \log \vartheta_r(v+a)}{\partial u_2} - \frac{\partial \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_2} - \left(\frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v)_0}{\partial u_1 \partial u_2} u_1 + \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v)_0}{\partial u_2^2} u_2\right).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(*) *Journal de Math.*, par Liouville (4), tome III, 1887.
(**) *Comptes Rendus*, tome XC, pag. 296, 731, tome XCII, pag. 692.

Aehnlich ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \log \chi_r(u)}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial \log \vartheta_r(v+a)}{\partial u_1} - \frac{\partial \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_1} - \left(\frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_1^2} u_1 + \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} u_2\right), \\ \frac{\partial \log \chi_r(u)}{\partial \alpha_2} &= \frac{\partial \log \vartheta_r(v+a)}{\partial u_2} - \frac{\partial \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_2} - \left(\frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} u_1 + \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_2^2} u_2\right).\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Durch entsprechende Subtraction erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \chi_r(u)}{\partial u_1} - \frac{\partial \chi_r(u)}{\partial \alpha_1} &= g_1 \cdot u_1 + g_2 \cdot u_2, \\ \frac{\partial \chi_r(u)}{\partial u_2} - \frac{\partial \chi_r(u)}{\partial \alpha_2} &= g_2 \cdot u_1 + g_3 \cdot u_2,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wobei die Grössen g durch die Gleichungen definirt sind:

$$\left.\begin{aligned}g_1 &= \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_1^2} - \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)_0}{\partial \alpha_1^2}, \\ g_2 &= \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)_0}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \\ g_3 &= \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)}{\partial \alpha_2^2} - \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(a)_0}{\partial \alpha_2^2}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wir sind nun berechtigt, den Ansatz zu machen:

$$\chi_r(u) = \sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_n c_{m,n} \cdot u_1^m \cdot u_2^n. \tag{6}$$

Mit Hülfe der soeben angestellten Entwickelungen ergeben sich dann die Recursionsformeln:

$$\left.\begin{aligned}(m+1)\, c_{m+1,n} - \frac{\partial c_{mn}}{\partial \alpha_1} &= g_1 \cdot c_{m-1,n} + g_2 \cdot c_{m,n-1}, \\ (m+1)\, c_{m,n+1} - \frac{\partial c_{mn}}{\partial \alpha_2} &= g_2 \cdot c_{m-1,n} + g_3 \cdot c_{m,n-1}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Die Grösse $c_{0,0}$ ist bekannt und zwar gleich:

$$\frac{\vartheta_r(a)}{\vartheta_5(a)} = c \cdot a\, l_r(\alpha),$$

dann sind die übrigen Constanten aus den obigen Gleichungen bestimmt und wir erhalten als einfachste Werthe:

$$\left.\begin{aligned} c_{10} &= c\,\frac{\partial\, a\, l_r(\alpha)}{\partial\,\alpha_1}, \quad c_{20} = c\,\frac{\partial\, a\, l_r(\alpha)}{\partial\,\alpha_2}, \\ 2\,c_{20} &= c\,\frac{\partial^2\, a\, l_r(\alpha)}{\partial\,\alpha_1^2} + c\cdot a\, l_r(\alpha)\, g_1, \\ 2\,c_{11} &= c\,\frac{\partial^2\, a\, l_r(\alpha)}{\partial\,\alpha_1\,\partial\,\alpha_2} + c\cdot a\, l_r(\alpha)\, g_2, \\ 2\,c_{02} &= c\,\frac{\partial^2\, a\, l_r(a)}{\partial\,\alpha_2^2} + c\cdot a\, l_r(\alpha)\, g_3. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Ferner kann bekanntlich die Function:

$$\frac{\vartheta_5}{\vartheta_5(v)}\, e^{\frac{1}{2}\omega},$$

nach Potenzen von u_1 und u_2 entwickelt werden, so zwar, dass die Coefficienten sich ganz und rational durch k^2, λ^2, μ^2 darstellen lassen. Unter solchen Umständen finden wir den:

Lehrsatz: Die Function:

$$\psi_r(u) = \frac{\vartheta_5\cdot\vartheta_r(v+a)}{\vartheta_5(a)\,\vartheta_5(v)}\, e^{-\Sigma\frac{\partial\log\vartheta_5(a)}{\partial\alpha\varepsilon}u\varepsilon}, \quad \varepsilon:1,\ 2,$$

kann nach Potenzen von u_1 und u_2 entwickelt werden. Von dem gemeinsamen Factor c abgesehen können die Coefficienten als ganze rationale Functionen der hyperelliptischen Functionen mit den Argumenten α entwickelt werden. Als Constanten treten die Grössen k^2, λ^2, μ^2 ganz und rational auf.

Die sechs ersten Coefficienten haben dabei die vorhin angegebenen Werthe c_{00}, c_{01}, c_{10}, c_{20}, c_{11}, c_{02}.

Die Functionen $\psi_r(u)$ sind dann vierfach periodische Functionen 2ter Ordnung und zwar wollen wir sie als *fundamentale* ansehen. Als Nenner ist die Grösse $\vartheta_5(v)$ gewählt worden. Es ist das geschehen, weil der Nenner der hyperelliptischen Functionen auch $\vartheta_5(v)$ ist Andrerseits könnte eine jede andere ϑ — Function als Nenner genommen werden. Wählen wir die Function $\vartheta_0(v)$ und modificiren demgemäss die anderen Factoren, so kommen wir zu einer Function:

$$\varphi_r(u) = \frac{\vartheta_0\cdot\vartheta_r(v+a)}{\vartheta_0(u)\,\vartheta_0(v)}\, e^{-\Sigma\frac{\partial\log\vartheta_0(a)}{\partial\alpha\varepsilon}u\varepsilon}, \tag{10}$$

welche das unmittelbare Analogon zu derjenigen Function im Gebiete der doppeltperiodischen Functionen ist, welche für die Theorie der entsprechenden Differentialgleichungen als fundamentale gewaehlt worden ist (*). Offenbar ist es im wesentlichen gleichgültig, welche der Functionen wir zu Grunde legen, zumal die lineare Transformation, sowie die Substitution halber Perioden die Mittel an die Hand giebt, um aus der einen Categorie die andere abzuleiten. Wir wollen die Function $\psi_r(u)$ zunaechst beibehalten.

§ 2.

Existenz von Systemen von Differentialgleichungen, denen die Functionen $\psi_r(u)$ Genüge leisten.

Es ist nicht schwer, nachzuweisen, dass die Functionen $\psi_r(u)$ unendlich vielen Differentialgleichungen Genüge leisten, deren Coefficienten vierfach periodische Functionen sind. Wir nehmen dazu zunächst die Ausdrücke:

$$\vartheta_5^m(v)\frac{\partial^\mu \psi_r(u)}{\partial v_1^{\mu_1}\cdot\partial v_2^{\mu_2}},\quad \mu_1+\mu_2=\mu,\quad m\geq\mu+1. \tag{1}$$

Dieselben sind ganze transcendente vierfach periodische Functionen dritter Art von der Ordnungszahl m, die einen gewissen Multiplicator besitzen. Etwas aehnliches findet für die Functionen Statt:

$$\vartheta_5^m(v)\,\Pi\,\vartheta_s^{m_s}(v)\frac{\partial^\mu \psi_r(u)}{\partial v_1^{\mu_1}\cdot\partial v_2^{\mu_2}}. \tag{2}$$

wobei m, μ, μ_1, μ_2 denselben Bedingungen wie vorhin Genüge leisten. Das Product ist über alle Thetafunctionen zu erstrecken, m_s sind beliebige ganze positive Zahlen oder Null. Auch diese Grössen sind ganze transcendante vierfach periodische Functionen 3[ter] Art und zwar von der Ordnungszahl:

$$n=m+\sum m_s,$$

denen ein ganz bestimmter Multiplicator zu kommt. Halten wir n, ferner die Grössen a und der Multiplicator fest, lassen dagegen die Grössen m, m_s,

(*) Siehe das Werk des Verfassers: *Theorie der doppelt periodischen Functionen einer veränderlichen Grösse*, II[ter] Band, Leipzig, 1897.

r, μ, μ_1, μ_2 innerhalb der angegebenen Grenzen varüren, so ergeben sich Functionen *von der Eigenschaft, dass zwischen je* n^2+1 *derselben mindestens eine lineare Relation besteht.* Derartige Relationen sind dann entweder lineare Beziehungen oder Differentialgleichungen, denen die Functionen $\psi_r(u)$ Genüge leisten. Die Coefficienten sind in beiden Fällen gewöhnliche vierfach periodische Functionen. Unter den Differentialbeziehungen werden zwei Categorien von besonderer Bedeutung sein. Erstens sind es diejenigen, denen ein Quadrupel von Functionen $\psi_r(u)$ Genüge leistet. Wir wollen uns im Folgendem auf *ein* solches beschränken und zwar das Quadrupel $\psi_5(u)$, $\psi_1(u)$, $\psi_3(u)$, $\psi_{13}(u)$. Für dasselbe werden im Allgemeinen vier zusammengehörende Gleichungen aufgestellt werden können. Dann aber wird zweitens besonderes Gewicht auf diejenigen Differentialgleichungen zu legen sein, denen eine der Functionen $\psi_r(u)$ allein — und zwar wählen wir $\psi_1(u)$ — Genüge leistet. Es sollen für die einfachsten Werthe von n eine Reihe von Gleichungen der beiden genannten Categorien aufgestellt werden, daneben sollen auch einige der wichtigsten Beziehungen hinzugezogen werden, die zwischen den Grössen $\psi_r(u)$ selbst bestehen.

Es möge bemerkt werden, das die Betrachtungen, die wir angestellt haben, nach mehrfachen Richtung hin verallgemeinert werden können. Erstens können an Stelle der Functionen $\psi_r(u)$ allgemeinere Functionen gesetzt werden, die die Form haben:

$$\frac{\Pi\, \vartheta_r(v+a)\, e^{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2}}{\Pi\, \vartheta_s(v+a)}, \tag{3}$$

und zweitens können Summen zu Grunde gelegt werden, die sich aus einer ψ — Function und Differentialquotienten von ihr zusammensetzen lassen.

Von diesen Verallgemeinerungen soll im Folgenden abgesehen werden.

§ 3.

Betrachtung des Falles $n=2$.

Wir wollen nun zunächst den Fall $n=2$ ins Auge fassen. In diesem Falle können wir die Functionen bilden:

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\psi_r(v), \quad \vartheta_5^2(v)\,\frac{\partial\,\psi_r(u)}{\partial\,u_\varepsilon}, \quad r:5,\ 1,\ 3,\ 13,$$

wobei die Grössen a_1 und a_2 als constant angenommen werden. Zwischenje fünf derselben, die dieselbe Characteristik besitzen, besteht dann mindestens eine lineare Relation. Wir wählen die Characteristiken 5, 1, 3, 13, so erhalten wir die Systeme:

$$\vartheta_5^2(v)\frac{\partial\psi_5(u)}{\partial u_\varepsilon},\ \vartheta_5^2(v)\psi_5(u),\ \vartheta_5(v)\vartheta_1(v)\psi_1(u),\ \vartheta_5(v)\vartheta_3(v)\psi_3(u),\ \vartheta_5(v)\vartheta_{13}(v)\psi_{13}(u),$$

$$\vartheta_5^2(v)\frac{\partial\psi_1(u)}{\partial u_\varepsilon},\ \vartheta_5(v)\vartheta_1(v)\psi_5(u),\ \vartheta_5^2(v)\psi_1(u),\ \vartheta_5(v)\vartheta_{13}(v)\psi_3(u),\ \vartheta_5(v)\vartheta_3(v)\psi_{13}(u),$$

$$\vartheta_5^2(v)\frac{\partial\psi_3(u)}{\partial u_\varepsilon},\ \vartheta_5(v)\vartheta_3(v)\psi_5(u),\ \vartheta_5(v)\vartheta_{13}(v)\psi_1(u),\ \vartheta_5^2(v)\psi_3(u),\ \vartheta_5(v)\vartheta_1(v)\psi_{13}(u),$$

$$\vartheta_5^2(v)\frac{\partial\psi_{13}(u)}{\partial u_\varepsilon},\ \vartheta_5(v)\vartheta_{13}(v)\psi_5(u),\ \vartheta_5(v)\vartheta_3(v)\psi_1(u),\ \vartheta_5(v)\vartheta_1(v)\psi_3(u),\ \vartheta_5^2(v)\psi_{13}(u).$$

Zwischen den Gliedern je einer Horizontalreihe besteht dann für $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon = 2$ je eine lineare Relation. Die Coefficienten bestimmen sich unmittelbar mit Hülfe der Betrachtungen des ersten Paragraphen. Setzen wir:

$$x_r = \vartheta_r(a)\,\psi_r(u), \tag{1}$$

$$y_r^{(\varepsilon)} = \frac{1}{\vartheta_5}\,\frac{\partial\vartheta_r(v)_0}{\partial u_\varepsilon}\,\frac{\vartheta_r(v)}{\vartheta_5(v)}, \tag{2}$$

so erhalten wir die beiden einfachen Systeme von partiellen Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x_5}{\partial u_\varepsilon} &= \qquad - y_1^{(\varepsilon)}\cdot x_1 - y_3^{(\varepsilon)}\cdot x_3 - y_{13}^{(\varepsilon)}\cdot x_{13},\\
\frac{\partial x_1}{\partial u_\varepsilon} &= - y_1^{(\varepsilon)}\cdot x_5 + \frac{\partial \log a\, l_1(\alpha)}{\partial\alpha_\varepsilon}\,x_1 - y_{13}^{(\varepsilon)}\cdot x_3 + y_3^{(\varepsilon)}\cdot x_{13},\\
\frac{\partial x_3}{\partial u_\varepsilon} &= - y_3^{(\varepsilon)}\cdot x_5 + y_{13}^{(\varepsilon)}\cdot x_1 + \frac{\partial \log a\, l_3(\alpha)}{\partial\alpha_\varepsilon}\,x_3 - y_1^{(\varepsilon)}\cdot x_{13},\\
\frac{\partial x_{13}}{\partial u_\varepsilon} &= - y_{13}^{(\varepsilon)}\cdot x_5 - y_3^{(\varepsilon)}\cdot x_1 + y_1^{(\varepsilon)}\cdot x_3 + \frac{\partial \log a\, l_{13}(\alpha)}{\partial\alpha_\varepsilon}\,x_{13}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Es können hieraus andere Systeme hergeleitet werden, darunter ein solches welches zwischen den drei Functionen x_1, x_3, x_{13} besteht. Eine Gleichung desselben würde lauten:

$$k^2\frac{\partial x_1}{\partial u_1} - \frac{\partial x_1}{\partial u_2} = -\frac{\partial\vartheta_{04}(v)_0}{\partial u_1}\,\frac{\vartheta_{23}}{\vartheta_2\,\vartheta_{12}}\,\frac{\vartheta_3(a)\,\vartheta_{13}(a)}{\vartheta_1(a)\,\vartheta_5(a)}\,k_1^2 x_1 - (k^2-\mu^2)\,y_{13}^{(1)}\cdot x_3 - y_3^{(2)}\cdot x_{13}.$$

§ 4.

Der Fall $n = 3$.

Im Falle $n = 3$ sind die folgenden Functionen zubetrachten:

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\psi_r(u), \quad \vartheta_5^2(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\frac{\partial\,\psi_r(u)}{\partial\,u_\varepsilon}, \quad \vartheta_5^3(v)\,\frac{\partial^2\,\psi_r(u)}{\partial\,u_\varepsilon\,\partial\,u_{\varepsilon_1}},$$

wobei die Grössen a_1 und a_2 in allen Functionen den nämlichen Werth besitzen. Zwischen je zehn derselben, die dieselbe Characteristik besitzen, besteht dann mindestens eine lineare Relation. Wir beschränken uns auf die Characteristick:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

und wollen unter dieser Voraussetzung die Functionen:

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\psi_r(u), \quad r: 1,\ 3,\ 13,\ 5,$$

untersuchen. Nehmen wir $r = 1$, so können wir uns offenbar auf die vier Functionen beschränken:

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta^2(v)\,\psi_1(u),$$

wenn für β gesetzt wird 5, 1, 3, 13. Es sei dieses das Quadrupel (1).

Für $r = 3$ wählen wir das Quadrupel (2):

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\psi_3(u),$$

wobei für β und γ resp. gesetzt ist:

5, 13; 3, 1; 02, 4; 14, 34.

Für $r = 13$ wählen wir das Quadrupel (3):

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\psi_{13}(u),$$

wobei für β und γ resp. gesetzt ist:

5, 3; 1, 13; 02, 14; 34, 4.

Für $r = 5$ endlich wählen wir das Quadrupel (4):

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\psi_5(u),$$

wobei für β und γ gesetzt ist resp.:

$$5,\ 1;\ 13,\ 3;\ 02,\ 34;\ 4,\ 14.$$

Wir erhalten dann 4 Quadrupel oder auch 16 Functionen, die denselben characteristischen Bedingungsgleichungen Genüge leisten. Von besonderer Bedeutung ist es, neun derselben zu finden, welche linear von einander unabhängig sind. Es kann das auf mehrfachem Wege geschehen. Jedenfalls gilt der

Lehrsatz: Die vier Functionen des ersten Quadrupels, drei beliebige eines anderen Quadrupels und je eine der beiden übrigen Quadrupel sind linear von einander unabhängig.

Wir wollen den Beweis für einen speciellen Fall kurz andeuten. Wir fragen, können die Constanten c derart bestimmt werden, dass die Gleichung besteht:

$$\vartheta_1(v+a)\sum c_\beta \vartheta_\beta^2(v) + \vartheta_3(v+a)(c_3' \vartheta_5(v)\vartheta_{13}(v) + c_3'' \vartheta_3(v)\vartheta_1(v) + c_3''' \vartheta_{02}(v)\vartheta_4(v))$$
$$+ c'_{13}\vartheta_{13}(v+a)\vartheta_5(v)\vartheta_3(v) + c_5'\vartheta_5(v+a)\vartheta_3(v)\vartheta_{13}(v) = 0? \quad \beta: 5,\ 1,\ 3,\ 13.$$

Setzen wir $v = -a$, so folgt $c_5' = 0$, analog ergiebt sich $c'_{13} = 0$. Eine lineare Beziehung zwischen den vier Functionen des ersten Quadrupels und drei Functionen eines anderen Quadrupels kann aber keines falls bestehen, wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Aehnlich folgt der Lehrsatz:

Die vier Functionen des ersten Quadrupels bilden mit je zwei Functionen zweier anderer Quadrupel und einer Function des übrig bleibenden Quadrupels ein System von linear von einander unabhängigen Functionen.

Jedenfalls sind wir also im Stande eine Reihe von Systemen von je neun Functionen anzugeben, die linear von einander unabhängig sind.

Daneben aber giebt es Systeme von weniger als neun Functionen, zwischen denen eine lineare Relation thatsächlich besteht. Es gilt der

Lehrsatz: Zwischen den acht Functionen je zweier Quadrupel besteht eine lineare Relation.

Es folgt das entweder aus den von uns aufgestellten Principien oder aber wir können diese Relationen aus den bekannten Additionstheoremen herleiten, wenn wir erwägen, dass die Functionen:

$$\vartheta_r(v+a)\,\vartheta_s(v-a),$$

sich durch die Thetafunctionen mit den Argumenten v und a darstellen lassen.

Nehmen wir ferner diejenigen 10 Functionen, die aus den vier Functionen des ersten Quadrupels und je zwei Functionen der drei anderen Quadrupel bestehen, bei welchen nur die Thetafunctionen $\vartheta_5(v)$, $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_3(v)$, $\vartheta_{13}(v)$ vorkommen, so muss zwischen ihnen eine lineare Relation bestehen. Man überzeugt sich leicht, dass die Glieder, die zu dem ersten Quadrupel gehören, fortfallen müssen, so dass zwischen den sechs definirten Gliedern der drei anderen Quadrupel eine lineare Relation bestehen muss. Nach leichten Betrachtungen ergiebt sich dieselbe in der Form:

$$\psi_5(u)\,A - \psi_3(u)\,B + \psi_{13}(u)\,(\mu^2 - k^2)\,C = 0, \tag{1}$$

wobei gesetzt ist:

$$A = \frac{\partial\,\vartheta_3(v)_0}{\partial u_2}\,\frac{\partial\,\vartheta_{13}(v)_0}{\partial u_1}\,(\vartheta_3(a)\,\vartheta_{13}(a)\,\vartheta_5(v)\,\vartheta_1(v) + \vartheta_5(a)\,\vartheta_1(a)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_{13}(v)),$$

$$B = \frac{\partial\,\vartheta_1(v)_0}{\partial u_1}\,\frac{\partial\,\vartheta_3(v)_0}{\partial u_2}\,(\vartheta_{13}(a)\,\vartheta_5(a)\,\vartheta_5(v)\,\vartheta_{13}(v) + \vartheta_3(a)\,\vartheta_1(a)\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_3(v)),$$

$$C = \frac{\partial\,\vartheta_{13}(v)_0}{\partial u_1}\,\frac{\partial\,\vartheta_1(v)_0}{\partial u_1}\,(\vartheta_5(a)\,\vartheta_3(a)\,\vartheta_5(v)\,\vartheta_3(v) - \vartheta_{13}(a)\,\vartheta_1(a)\,\vartheta_{13}(v)\,\vartheta_1(v)).$$

Offenbar ist diese Gleichung nicht die einzige ihrer Art, sondern als Repräsentant einer Categorie von Beziehungen anzusehen.

Wir haben im Vorhergehenden gezeigt, dass es Systeme von neun Functionen:

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\psi_r(u),$$

giebt, die linear von einander unabhängig sind. An ihre Stelle können auch Systeme anderer Art treten, z. B. solche, die aus sieben geeignet gewählten unter ihnen und den beiden Grössen:

$$\vartheta_5^3(v)\,\frac{\partial\,\psi_1(u)}{\partial u_\varepsilon},$$

bestehen. Jedenfalls lässt sich eine jede zu $n = 3$ gehörende Function mit demselben Multiplicator und der Characteristik $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ mit Hülfe irgend eines der genannten Systeme darstellen. Zu diesen Functionen gehören Differentialaus drücke erster und zweiter Ordnung. Die entsprechenden Darstellungen ergeben dann Differentialbeziehungen erster und zweiter Ordnung. Die Beziehungen erster Ordnung bieten zunächst kein grösseres Interesse dar, wohl aber ist dasselbe mit den Differentialbeziehungen zweiter Ordnung der Fall.

Nach dem soeben entwickelten können wir jedenfalls den Ansatz machen:

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta_5^2(v)\frac{\partial^2\psi_1(u)}{\partial u_1^2}=\psi_1(u)\sum c_\beta\vartheta_\beta^2(v)+\psi_3(u)(c_3'\vartheta_5(v)\vartheta_{13}(v)+c_3''\vartheta_{02}(v)\vartheta_4(v))\\&+\psi_{13}(u)(c'_{13}\vartheta_5(v)\vartheta_3(v)+c''_{13}\vartheta_{02}(v)\vartheta_{14}(v))+c'_5\psi_5(u)\vartheta_3(v)\vartheta_{13}(v).\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Die Bestimmung der Constanten hat keinerlei Schwierigkeiten. Es ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1^2}=x_1(c-2y_1^2-2y_{13}^2)-2x_3\cdot y_{13}\frac{\partial\log a\,l_3(\alpha)}{\partial\alpha_1}.\quad(3)$$

Genau so wird:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1\,\partial u_2}=x_1(c'-2k^2y_1^2-2\mu^2y_{13}^2)\\&-x_3\cdot y_{13}\left(\mu^2\frac{\partial\log a\,l_3(\alpha)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\log a\,l_3(\alpha)}{\partial\alpha_2}\right)+x_{13}\cdot y_3\frac{\partial\log a\,l_{13}(\alpha)}{\partial\alpha_1},\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_2^2}=x_1(c''-2k^4y_1^2-2y_3^2-2\mu^4y_{13}^2)\\&-2x_3\cdot y_{13}\mu^2\frac{\partial\log a\,l_3(\alpha)}{\partial\alpha_2}+2x_{13}\cdot y_3\frac{\partial\log a\,l_{13}(\alpha)}{\partial\alpha_2}.\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Bei den Grössen y_1 und y_{13} ist der obere Index 1, bei y_3 der obere Index 2 fortgelassen.

Jede dieser drei Gleichungen ist der Repräsentant eines Systemes von Differentialgleichungen, denen die drei Functionen x_1, x_3, x_{13} Genüge leisten.

Nehmen wir die Gleichung hinzu:

$$k^2\frac{\partial x_1}{\partial u_1}-\frac{\partial x_1}{\partial u_2}=-\frac{\partial\vartheta_{04}(v)_0}{\partial u_1}\frac{\vartheta_{23}}{\vartheta_2\vartheta_{12}}\frac{\vartheta_3(a)\vartheta_{13}(a)}{\vartheta_1(a)\vartheta_5(a)}k_1^2x_1-y_{13}(k^2-\mu^2)x_3-y_3\cdot x_{13},$$

so können wir die Grösse $y_3\cdot x_{13}$ eliminiren und erhalten die drei Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1^2}=x_1(c-2y_1^2-2y_{13}^2)-2x_3\cdot y_{13}\frac{\partial\log a\,l_3(\alpha)}{\partial\alpha_1},\\&\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1\,\partial u_2}+\frac{\partial\log a\,l_{13}(\alpha)}{\partial\alpha_1}\left(k^2\frac{\partial x_1}{\partial u_1}-\frac{\partial x_1}{\partial u_2}\right)\\&=x_1(c_1'-2k^2y_1^2-2\mu^2y_{13}^2)+c_3'\,x_3\cdot y_{13},\\&\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_2^2}+2\frac{\partial\log a\,l_{13}(\alpha)}{\partial\alpha_2}\left(k^2\frac{\partial x_1}{\partial u_1}-\frac{\partial x_1}{\partial u_2}\right)\\&=x_1(c_1''-2k^4y_1^2-2y_3^2-2\mu^4y_{13}^2)+c_3''\,x_3\cdot y_{13},\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

wobei die übrig gebliebenen Constanten unmittelbar zu bestimmen sind.

In diesen Gleichungen kommen noch die beiden Grössen x_1 und x_3 vor. Man kann schliesslich auch noch x_3 eliminiren und kommt dann zu 2 Differentialgleichungen, denen x_1 allein Genüge leistet. Wirwählen die Formen:

$$\left.\begin{aligned} &- k\lambda\mu\, \vartheta_{03}^2(a)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial u_1^2} + \vartheta_{13}^2(a)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial u_2^2} \\ &+ 2\lambda\mu\frac{\vartheta_{01}(a)\,\vartheta_{03}(a)\,\vartheta_{13}(a)}{\vartheta_5(a)}\left(k^2\frac{\partial\psi_1}{\partial u_1} - \frac{\partial\psi_1}{\partial u_2}\right) = \psi_1\cdot M_1, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta_{03}(a)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{03}(a)}{\vartheta_5(a)}}{\partial\alpha_2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial u_1^2} \\ &- 2k\frac{\vartheta_{13}(a)\,\vartheta_{01}(a)\,\vartheta_{03}(a)}{\vartheta_5^2(a)}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial u_1\,\partial u_2} + \frac{\vartheta_{34}^2}{\vartheta_2^2}\vartheta_{13}(a)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{13}(a)}{\vartheta_5(a)}}{\partial\alpha_1}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial u_2^2} = \psi_1\cdot M_2. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Hierbei haben wir gesetzt:

$$\begin{aligned} M_1 = c_1 &+ 2k^2 y_1^2\left(\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_{34}^2}\vartheta_{03}^2(a) - k^2\vartheta_{13}^2(a)\right) \\ &- 2\vartheta_{13}^2(a)\,y_3^2 + 2\mu^2 y_{13}^2\left(\frac{\vartheta_{23}^2}{\vartheta_4^2}\vartheta_{03}^2(a) - \mu^2\vartheta_{13}^2(a)\right), \end{aligned}$$

$$M_2 = c_2 - 2c_1'\,y_1^2 - 2\frac{\vartheta_{34}^2}{\vartheta_2^2}\vartheta_{13}(a)\,y_3^2 - 2c'_{13}\,y_{13}^2.$$

Die beiden Constanten c_1' und c'_{13} haben die Form:

$$c_1' = \vartheta_{03}(a)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{03}(a)}{\vartheta_5(a)}}{\partial\alpha_2} - \frac{2k^3\,\vartheta_{13}(a)\,\vartheta_{01}(a)\,\vartheta_{03}(a)}{\vartheta_5^2(a)} + k^4\frac{\vartheta_{34}^2}{\vartheta_2^2}\vartheta_{13}(a),$$

$$c'_{13} = \vartheta_{03}(a)\frac{\partial\dfrac{\vartheta_{03}(a)}{\vartheta_5(a)}}{\partial\alpha_2} - \frac{2k\mu^2\,\vartheta_{13}(a)\,\vartheta_{01}(a)\,\vartheta_{03}(a)}{\vartheta_5^2(a)} + \mu^4\frac{\vartheta_{34}^2}{\vartheta_2^2}\vartheta_{13}(a).$$

Damit sind die wichtigsten zu $n = 3$ gehörenden Differentialbeziehungen abgeleitet. Es möge bemerkt werden, dass die entsprechenden Gleichungen für $\varphi_1(u)$ sich etwas einfacher gestalten (*).

(*) In Bezug hierauf wird auf eine Note des Verfassers inden *Comptes Rendus* dieses Iahres (4 April) verwiesen.

§ 5.

Betrachtung des Falles $n = 4$.

Im Falle $n = 4$ sind die Functionen zubetrachten:

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\vartheta_\delta(v)\,\psi_r(u)\,,\quad \vartheta_5^2(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\frac{\partial\,\psi_r(u)}{\partial\,u_\varepsilon}\,,$$
$$\vartheta_5^3(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\frac{\partial^2\,\psi_r(u)}{\partial\,u_\varepsilon\,\partial\,u_{\varepsilon_1}}\,,$$

wobei die Grössen a_1 und a_2 wieder bei allen Functionen denselben Werth besitzen sollen. Zwischen je 17 unter ihnen, die dieselbe Characteristik besitzen, besteht dann mindestens eine lineare Relation. Wir wollen als Characteristik die Grösse $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ wählen und uns von vorneherein auf die Grössen beschränken:

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\vartheta_\delta(v)\,\psi_r(u)\,,\quad \vartheta_5^2(v)\,\vartheta_\beta^2(v)\,\frac{\partial\,\psi_1(u)}{\partial\,u_\varepsilon}\,,\quad \vartheta_5^4(v)\,\frac{\partial^2\,\psi_1(u)}{\partial\,u_\varepsilon\,\partial\,u_{\varepsilon_1}}\,,$$

wobei bei den ersten Producten die Characteristiken β, γ, δ, r so zu wählen sind, dass ihre Summe gleich der Characteristik von $\vartheta_1(v)$ ist. Bei der zweiten Art von Producten können wir uns darauf beschränken β der Reihe nach gleich 5, 1, 3, 13 zu setzen.

Setzt man für r der Reihe nach 5, 1, 3, 13 so werden sich stets neun linear von einander unabhängige Producte:

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\gamma(v)\,\vartheta_\delta(v)\,\psi_r(u)\,,$$

ergeben, auf welche alle andern reducirt werden können. In der Wahl herrscht bekanntlich eine grosse Mannigfaltigkeit. Es können z B. für $r = 1$ an Stelle von β, γ, δ die Werthsysteme gesetzt werden:

5, 5, 5; 5, 1, 1; 5, 3, 3; 5, 13, 13; 1, 04, 23; 1, 2, 12;
3, 2, 23; 13, 12, 23; 13, 1, 3.

Wir erhalten auf diesem Wege 36 Functionen der genannten Art. Es ist zu untersuchen, ob unter ihnen 16 linear von einander unabhängige existiren. Es kann diese Frage, wie überhaupt die Frage nach den linearen Beziehungen zwischen den Functionen, die zu $n = 4$ gehören, aehnlich behandelt werden, wie bei $n = 3$. Für unsere Zwecke genügt es aber vollkommen ein einziges System von 16 linear von einander unabhängigen Functionen zu kennen. Wir wählen das folgende. Für $r = 1$ nehmen wir die vorhin angegebenen Werthsysteme β, γ, δ für $r = 3$ wählen wir an Stelle von β, γ, δ die Systeme:

$$13,\ 13,\ 13;\ 13,\ 1,\ 1;\ 13,\ 3,\ 3;\ 5,\ 2,\ 04;\ 5,\ 1,\ 3;$$

schliesslich können die beiden Producte genommen werden:

$$\vartheta_5(v)\,\vartheta_3^3(v)\,\psi_{13}(u)\,, \quad \vartheta_5(v)\,\vartheta_1^3(v)\,\psi_5(u).$$

Durch diese 16 Functionen lassen sich die übrigen von uns eingeführten, resp. lineare Verbindungen derselben linear ausdrücken. Von besonderem Interesse sind diejenigen linearen Verbindungen, welche sich lediglich mit Hülfe von $\psi_1(u)$ darstellen lassen, bei welchen also die Glieder mit den Factoren $\psi_3(u)$, $\psi_{13}(u)$, $\psi_5(u)$ fortfallen. Die entsprechenden Gleichungen sind Differentialgleichungen für die Grösse $\psi_1(u)$ allein. Diese Frage wollen wir allgemein lösen. Hierbei legen wir das Haupt gewicht auf die Bildung der linearen Verbindung — ist dieselbe erfolgt, so ist die Darstellung in der Form $\psi_1(u)\,M$, wo M eine Thetafunction 4ter Ordnung ist, ohne alle Schwierigkeit vorzunehmen. Wir wollen zunächst die linearen Verbindungen von Differential ausdrücken erster Ordnung untersuchen. Eine leichte Betrachtung zeigt, dass in den beiden Ausdrücken:

$$\vartheta_5^2(v)\sum c_\beta^{(\varepsilon)}\cdot\vartheta_\beta^2(v)\,\frac{\partial\,\psi_1(u)}{\partial\,u_\varepsilon}\,,$$

die Constanten sich stets in der angegebenen Weise bestimmen lassen. Es geschieht das, indem der Reihe nach gesetzt wird:

$$v_1 = -a_1 + \frac{s_1}{2}\,, \quad v_2 = -a_2 + \frac{s_2}{2}\,,$$

wobei unter $\frac{s_1}{2}$, $\frac{s_2}{2}$ halbe Perioden verstanden sind, welche die Function $\vartheta_1(v)$ in die ungeraden Thetafunctionen überführen. Wir erhalten dann den:

Lehrsatz: Die Function $\psi_1(u)$ leistet den beiden Differentialgleichungen Genüge:

$$2\,F(v,\,a)\,\frac{\partial\,\psi_1(u)}{\partial\,u_\varepsilon} = \psi_1(u)\left(\frac{\partial\,F}{\partial\,u_\varepsilon} + \frac{\partial\,F}{\partial\,\alpha_\varepsilon}\right),$$

wobei gesetzt ist:

$$F(v,\,a) = \frac{\vartheta_1(v+a)\,\vartheta_1(v-a)}{\vartheta_5^2(a)\,\vartheta_5^2(v)}\,,$$

oder auch:

$$F(v, a) = -\frac{\vartheta_1^2(a)}{\vartheta_5^2(a)} + \frac{\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_5^2(v)} - \frac{\vartheta_{13}^2(a)}{\vartheta_5^2(a)}\frac{\vartheta_3^2(v)}{\vartheta_5^2(v)} + \frac{\vartheta_3^2(a)}{\vartheta_5^2(a)}\frac{\vartheta_{13}^2(v)}{\vartheta_5^2(v)}.$$

Es fragt sich im Anschluss an dieses Resultat, ob es nicht noch andere lineare Verbindungen der Grössen:

$$\vartheta_5^2(v)\,\vartheta_\beta^2(v)\frac{\partial \psi_1(u)}{\partial u_\varepsilon},$$

giebt, welche sich als Product von $\psi_1(u)$ und einer Thetafunction 4ter Ordnung darstellen lassen. Jedenfalls können wir uns darauf beschränken, Ausdrücke zu untersuchen:

$$\vartheta_5^2(v)\left(f_1^{(1)}(v)\frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} + f_1^{(2)}(v)\frac{\partial \psi_1}{\partial u_2}\right), \tag{1}$$

wenn $f_1^{(1)}(v)$ und $f_1^{(2)}(v)$ die Formen besitzen:

$$f_1^{(1)}(v) = c_1^{(1)}\cdot\vartheta_1^2(v) + c_2^{(1)}\cdot\vartheta_3^2(v) + c_3^{(1)}\cdot\vartheta_{13}^2(v),$$

$$f_1^{(2)}(v) = c_1^{(2)}\cdot\vartheta_1^2(v) + c_2^{(2)}\cdot\vartheta_3^2(v) + c_3^{(2)}\cdot\vartheta_{13}^2(v).$$

Um diese Untersuchung durchzuführen, denken wir uns die Substitutionen halber Perioden angewandt, für welche $\vartheta_1(v)$ der Reihe nach übergeht in $\vartheta_3(v)$, $\vartheta_{13}(v)$, $\vartheta_{24}(v)$, $\vartheta_{04}(v)$, $\vartheta_{02}(v)$ und die entsprechenden Functionen f eingeführt, die wir bezeichnen wollen durch:

$$f_3^{(\varepsilon)}(v) = -c_1^{(\varepsilon)}\vartheta_3^2(v) + c_2^{(\varepsilon)}\vartheta_1^2(v) + c_3^{(\varepsilon)}\vartheta_5^2(v),$$

$$f_{13}^{(\varepsilon)}(v) = c_1^{(\varepsilon)}\vartheta_{13}^2(v) + c_2^{(\varepsilon)}\vartheta_5^2(v) - c_3^{(\varepsilon)}\vartheta_1^2(v),$$

$$f_{24}^{(\varepsilon)}(v) = -c_1^{(\varepsilon)}\vartheta_{24}^2(v) - c_2^{(\varepsilon)}\vartheta_0^2(v) + c_3^{(\varepsilon)}\vartheta_{01}^2(v),$$

$$f_{04}^{(\varepsilon)}(v) = c_1^{(\varepsilon)}\vartheta_{04}^2(v) - c_2^{(\varepsilon)}\vartheta_2^2(v) - c_3^{(\varepsilon)}\vartheta_{12}^2(v),$$

$$f_{02}^{(\varepsilon)}(v) = c_1^{(\varepsilon)}\vartheta_{02}^2(v) + c_2^{(\varepsilon)}\vartheta_4^2(v) + c_3^{(\varepsilon)}\vartheta_{14}^2(v).$$

Setzen wir $v = -a$, so müssen die entsprechenden Ausdrücke:

$$f^{(1)}(v)\frac{\partial \psi}{\partial u_1} + f^{(2)}(v)\frac{\partial \psi}{\partial u_2},$$

verschwinden, so dass wir die Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} f_1^{(1)}(a)+k^2 f_1^{(2)}(a)&=0\,,\\ f_3^{(2)}(a)&=0\,,\\ f_{13}^{(1)}(a)+\mu^2 f_{13}^{(2)}(a)&=0\,,\\ f_{24}^{(1)}(a)&=0\,,\\ f_{04}^{(1)}(a)+f_{04}^{(2)}(a)&=0\,,\\ f_{02}^{(1)}(a)+\lambda^2 f_{02}^{(2)}(a)&=0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Gleichungen sind auflösbar und zwar wird ihnen Genüge geleistet, wenn wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} &f_1^{(1)}(v)=\vartheta_5(a)\,\vartheta_0(a)\,\vartheta_{01}(a)\,\vartheta_1^2(v)\\ &+\frac{\vartheta_{14}\cdot\vartheta_{12}}{\vartheta_{23}\cdot\vartheta_{34}}\vartheta_{13}(a)\vartheta_{24}(a)\vartheta_{01}(a)\vartheta_3^2(v)+\frac{\vartheta_2\cdot\vartheta_4}{\vartheta_{23}\cdot\vartheta_{34}}\vartheta_{24}(a)\vartheta_0(a)\vartheta_3(a)\vartheta_{13}^2(v)\,,\\ &-k^2 f_1^{(2)}(v)=\vartheta_5(a)\,\vartheta_0(a)\,\vartheta_{01}(a)\,\vartheta_1^2(v)\\ &+\frac{\vartheta_{14}\cdot\vartheta_{12}}{\vartheta_2\cdot\vartheta_4}\vartheta_{13}(a)\vartheta_3(a)\vartheta_5(a)\vartheta_{24}^2(v)+\frac{\vartheta_{23}\cdot\vartheta_{34}}{\vartheta_2\cdot\vartheta_4}\vartheta_{24}(a)\vartheta_0(a)\vartheta_3(a)\vartheta_{13}^2(v). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Hierbei möge daran erinnert werden, dass die Beziehung besteht:

$$\vartheta_5^2\cdot\vartheta_{24}^2(v)=-\vartheta_{03}^2\cdot\vartheta_1^2(v)+\vartheta_{01}^2\cdot\vartheta_3^2(v)+\vartheta_0^2\cdot\vartheta_{13}^2(v).$$

Die Weiterführung des Problems hat keinerlei Schwierigkeiten. Wir finden den:

Lehrsatz: Die Function $\psi_1(u)$ leistet einer Differentialgleichung erster Ordnung Genüge:

$$f_1^{(1)}(v)\frac{\partial\psi_1}{\partial u_1}+f_1^{(2)}(v)\frac{\partial\psi_1}{\partial u_2}=\psi_1(u)\,\frac{M}{\vartheta_5(v)}\,,$$

wenn unter M eine gewöhnliche Thetafunction 3^{ter} Ordnung von der Characteristik Null verstanden wird.

Damit sind die linearen Ausdrücke der Differentialquotienten erster Ordnung erschöpft.

Wir nehmen jetzt die zweiten Differentialquotienten hinzu. Unter Berücksichtigung der Resultate des vorigen Paragraphen, insbesondere der Gleichungen (7, 8) können wir uns auf einen derselben beschränken z. B. $\frac{\partial^2\psi_1}{\partial u_1^2}$, ferner folgt aus den zuletzt gefundenen Resultaten, dass wir als allgemeinsten zu betrachtenden Ausdruck die Grösse wählen können:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial u_1^2} + g_1^{(1)}(v) \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} + g_1^{(2)}(v) \frac{\partial \psi_1}{\partial u_2}, \tag{4}$$

wobei $g_1^{(1)}(v)$ und $g_1^{(2)}(v)$ die Form haben:

$$g_1^{(1)}(v) = c_3^{(1)} \cdot \vartheta_3^2(v) + c_{13}^{(1)} \cdot \vartheta_{13}^2(v),$$

$$g_1^{(2)}(v) = c_1^{(2)} \cdot \vartheta_1^2(v) + c_3^{(2)} \cdot \vartheta_3^2(v) + c_{13}^{(2)} \cdot \vartheta_{13}^2(v).$$

Stellen wir aehnliche Betrachtungen, wie vorhin an, so erhalten wir den *Lehrsatz: Die Function $\psi_1(u)$ leistet der Differentialgleichung Genüge:*

$$\vartheta_{01}(a)\vartheta_0(a)\vartheta_5(a)\vartheta_1(a)\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial u_1^2} + \mu\,\vartheta_{13}^2(a)\left(g_1^{(1)}(v)\frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} + g_1^{(2)}(v)\frac{\partial \psi_1}{\partial u_2}\right) = \psi_1(u)\frac{N}{\vartheta_5^3(v)},$$

wobei gesetzt ist:

$$\vartheta_5^2(v)\,g_1^{(1)}(v) = \vartheta_{01}^2(a)\,\vartheta_3^2(v) + c\cdot\vartheta_0^2(a)\,\vartheta_{13}^2(v),$$

$$\mu^2\,\vartheta_5^2(v)\,g_1^{(2)}(v) = -\vartheta_5^2(a)\,\vartheta_{24}^2(v) + \vartheta_0^2(a)\,\vartheta_{13}^2(v),$$

$$\vartheta_2\cdot\vartheta_4\cdot\vartheta_0(a)\,\vartheta_{13}(a)\,c = -(\vartheta_{12}\cdot\vartheta_{14}\cdot\vartheta_3(a)\,\vartheta_{01}(a) + \vartheta_{23}\cdot\vartheta_{34}\cdot\vartheta_{03}(a)\,\vartheta_1(a)).$$

Unter N ist eine gewöhnliche Thetafunction 3ter Ordnung von der Characteristik Null verstanden.

Hiermit sind auch die definirten Differentialgleichungen zweiter Ordnung vollständig entwickelt.

Su di un sistema generale di equazioni che si può integrare col metodo delle caratteristiche.

(*Di* Orazio Tedone, *a Milano.*)

I.

1. Sia $u_1, u_2, \ldots, u_m$ un sistema di m funzioni regolari, qualunque delle $m+1$ variabili $x, x_1, x_2, \ldots, x_m$ e poniamo:

$$\theta = \sum_1^m {}_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \varpi_{h,k} = \frac{\partial u_h}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_h}, \tag{1}$$

d' onde:

$$\varpi_{h,h} = 0, \quad \varpi_{h,k} = -\varpi_{k,h}.$$

Proponiamoci, quindi, il problema di determinare il sistema delle funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_m$ in modo che soddisfino al sistema delle m equazioni:

$$\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial \theta}{\partial x_l} - a^2 \sum_1^m {}_i \frac{\partial \varpi_{l,i}}{\partial x_i} - X_l = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, m), \tag{2}$$

dove le X_l sono delle funzioni regolari, note.

Le equazioni (2) possono porsi sotto una qualunque delle forme seguenti:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} - a^2 \sum_1^m {}_i \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i^2} - (b^2 - a^2) \frac{\partial \theta}{\partial x_l} - X_l = 0 && (2')\\ &\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} - (b^2 - 2a^2) \frac{\partial \theta}{\partial x_l} - 2a^2 \sum_1^m {}_i \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i^2} - a^2 \sum_1^m {}_i \frac{\partial \varpi_{i,l}}{\partial x_i} - X_l = 0 && (2'') \end{aligned}\right\} (l = 1, 2, \ldots, m),$$

e, se x s'interpreta come il valore del tempo ed $x_1, x_2, \ldots, x_m$ s'interpretano come le coordinate ortogonali di un punto in uno spazio lineare ad m dimensioni, si vede facilmente che esse possono interpretarsi come le equazioni del moto elastico di un corpo solido, omogeneo ed isotropo in quello spazio ad m

dimensioni. In questo caso le u_i sono da interpretarsi come le componenti dello spostamento, θ come la dilatazione e le $\varpi_{h,k}$ come le rotazioni del corpo solido intorno alle intersezioni degli m iperpiani coordinati a due a due.

2. Per procedere alla integrazione delle equazioni (2) consideriamo x, x_1, $x_2, \ldots$, x_m come le coordinate di un punto in uno spazio lineare ad $m+1$ dimensioni, spazio che indicheremo col simbolo (x, x_i). Indichiamo con S_{m+1} una porzione finita di questo spazio, con Σ_m la varietà ad m dimensioni che le serve di contorno e, come al solito, indichiamo con n la direzione della normale a Σ_m diretta verso l'interno di S_{m+1}. Supporremo poi che Σ_m soddisfi alle solite condizioni perchè allo spazio S_{m+1} possa applicarsi il teorema di Green.

Allora, se u'_1, $u'_2, \ldots$, u'_n è un altro sistema di funzioni pure regolari, soddisfacenti alle (2), quando per le X_l si sostituiscono altre funzioni X'_l, col solito procedimento, si può stabilire la formola fondamentale:

$$\int\limits_{S_{m+1}} \left(\sum_1^m {}_i X_i u'_i - \sum_1^m {}_i X'_i u_i \right) d S_{m+1} + \int\limits_{\Sigma_m} \left(\sum_1^m {}_i U_i u'_i - \sum_1^m {}_i U'_i u_i \right) d \Sigma_m = 0, \qquad (A)$$

dove:

$$U_l = \frac{\partial u_l}{\partial x} \frac{d x}{d n} - b^2 \theta \frac{d x_l}{d n} - a^2 \sum_1^m {}_i \varpi_{l,i} \frac{d x_i}{d n}, \qquad (3)$$

e le U'_l rappresentano le espressioni analoghe alle U_l calcolate con le funzioni u'_l. Chiameremo le U_l le *funzioni coniugate alle* u_l.

3. Sia ora (x', x'_i) un punto determinato dello spazio (x, x_i) e chiamiamo α la retta parallela all'asse x condotta per questo punto. Introduciamo, quindi, nelle nostre considerazioni le due varietà coniche, di rotazione intorno alla retta α, aventi il vertice nel punto (x', x'_i) e per equazioni:

$$\frac{b(x' - x)}{\pm r} = 1, \quad \frac{a(x' - x)}{\pm r} = 1, \quad r = \sqrt{\sum_1^m {}_i (x'_i - x_i)}. \qquad (4)$$

Chiameremo queste due varietà col nome di *varietà caratteristiche delle equazioni* (2) e le indicheremo con i simboli B ed A rispettivamente.

Se supponiamo che la direzione positiva della normale a queste varietà sia quella che va all'interno della porzione dello spazio (x, x_i) in cui sia $\left| \frac{b(x' - x)}{r} \right| > 1$, ovvero $\left| \frac{a(x' - x)}{r} \right| > 1$, nei punti di esse si avrà:

$$\frac{d r}{d n} = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}}, \text{ ovvero } \frac{d r}{d n} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}, \qquad (5)$$

e, se supponiamo scelta convenientemente la direzione positiva dell'asse x, sulle falde delle stesse varietà coniche su cui $x' > x$ si avrà:

$$\frac{dx}{dn} = -\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}, \text{ ovvero } \frac{dx}{dn} = -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \tag{6}$$

mentre sulle falde su cui $x' < x$ si avrà:

$$\frac{dx}{dn} = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}, \text{ ovvero } \frac{dx}{dn} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}. \tag{6'}$$

Sarà pure necessario, per le nostre considerazioni, introdurre la varietà cilindrica di rotazione intorno alla stessa retta α, che ha per equazione $r = \varepsilon$, ε essendo una costante arbitraria, e che indicheremo col simbolo C. Notiamo, a questo proposito, che in tutti i punti di C è $\frac{dx}{dn} = 0$ e che sceglieremo la direzione positiva della normale a C in modo che in ogni suo punto sia pure $\frac{dr}{dn} = +1$.

4. Supponiamo ora che sia:

$$u'_i = \frac{\partial \psi_b}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{7}$$

In conseguenza di questa posizione avremo:

$$\theta' = \sum_1^m{}_i \frac{\partial^2 \psi_b}{\partial x_i^2}, \quad \varpi_{h,k} = 0,$$

e, quindi, i primi membri delle equazioni (2) si riducono a:

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\frac{\partial^2 \psi_b}{\partial x^2} - b^2 \sum_1^m{}_i \frac{\partial^2 \psi_b}{\partial x_i^2}\right] - X_l \quad (l = 1, 2, \ldots, m).$$

Se dunque $\psi(x, x_i)$ soddisfa alla equazione:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \sum_1^m{}_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} = 0, \tag{8}$$

le funzioni u'_l date dalle (7) e costruite con la funzione:

$$\psi_b = \psi\,[\pm\, b\,(x' - x),\ x'_i - x_i], \tag{9}$$

forniranno un sistema di integrali particolari delle (2) quando le X_l sieno eguali a zero.

Ricercando ora gli integrali della (8) che sono della forma:

$$\psi = x\,\varphi(\tau)\,, \quad \tau = \frac{x}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{\sum_1^m x_i^2},$$

si trova che la funzione φ deve soddisfare all'equazione:

$$\tau(1-\tau^2)\,\varphi''(\tau) + [2 + (m-3)\tau^2]\,\varphi'(\tau) = 0\,, \tag{10}$$

onde, se $\tau > 1$, possiamo porre:

$$\varphi(\tau) = \int_0^\tau \frac{(\tau^2-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\tau^2}\,d\tau\,, \tag{11}$$

e, se $\tau < 1$, possiamo porre:

$$\varphi(\tau) = \int_0^\tau \frac{(1-\tau^2)^{\frac{m-1}{2}}}{\tau^2}\,d\tau. \tag{11'}$$

Le funzioni u'_i date dalle (7) quando la funzione ψ_b è determinata a questo modo si chiameranno *integrali principali delle equazioni* (2) *di prima specie.*

Supponiamo, in secondo luogo, che:

$$u'_h = -\frac{\partial\,\psi_a}{\partial\,x_k}, \quad u'_k = \frac{\partial\,\psi_a}{\partial\,x_h}, \quad u'_i = 0 \text{ per } i \neq h,\ k. \tag{12}$$

In questo caso, osservando che $\theta' = 0$, i primi membri delle equazioni (2) diventano:

$$\frac{\partial^2 u'_h}{\partial\,x^2} - a^2 \sum_1^m{}_i \frac{\partial\,\varpi'_{h,i}}{\partial\,x_i} - X_h = -\frac{\partial}{\partial\,x_k}\left[\frac{\partial^2\psi_a}{\partial\,x^2} - a^2 \sum_1^m{}_i \frac{\partial^2\,\psi_a}{\partial\,x_i^2}\right] - X_h\,,$$

$$\frac{\partial^2 u'_k}{\partial\,x^2} - a^2 \sum_1^m{}_i \frac{\partial\,\varpi_{k,i}}{\partial\,x_i} - X_k = -\frac{\partial}{\partial\,x_h}\left[\frac{\partial^2\psi_a}{\partial\,x^2} - a^2 \sum_1^m{}_i \frac{\partial^2\,\psi_a}{\partial\,x_i^2}\right] - X_k\,,$$

$$-a^2 \sum_1^m{}_i \frac{\partial\,\varpi_{l,i}}{\partial\,x_i} - X_l = -X_l \text{ per } l \neq h,\ k\,,$$

quindi le equazioni (2) saranno verificate se supporremo:

$$X_l = 0\,(l = 1,\ 2, .., m) \quad \text{e} \quad \psi_a = \psi\,[\pm\,a\,(x'-x),\ x'_i - x_i]\,,$$

la funzione ψ soddisfacendo sempre alla solita equazione (8).

Supporremo anche, nel caso presente, che ψ abbia la forma $x\,\varphi(\tau)$ e che quindi $\varphi(\tau)$ sia ancora determinata dalla (11) o (11').

Chiameremo le funzioni u'_l, date dalle (12), quando la funzione ψ_a è determinata come sopra, *integrali principali delle equazioni* (2) *di seconda specie.*

5. Facciamo coincidere ora, dapprima, la porzione S_{m+1} dello spazio (x, x_i) che comparisce nella (A), con la porzione $S'_{m+1,b}$ la quale è limitata dalla varietà B, dalla varietà C e dalla porzione $\Sigma'_{m,b}$ di una varietà Σ_m ad m dimensioni tale che ogni retta parallela all'asse x la incontri in un punto solo e che non abbia la retta α per tangente. In ogni punto di $S'_{m+1,b}$ sia inoltre:

$$|\tau_b| \geqq 1, \quad \tau_b = \frac{b(x'-x)}{r},$$

potendo, del resto, però, essere $x' > x$, ovvero $x' < x$. Facciamo invece coincidere le funzioni u'_i col sistema degli integrali di prima specie delle nostre equazioni.

Con calcolo semplice si trova allora che in questo caso:

$$\left.\begin{aligned} u'_i &= -(\tau_b^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial r}{\partial x_i}, \\ U'_i &= (m-1)\tau_b \frac{b}{r}(\tau_b^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{dx}{dn} - b^2 \frac{m-1}{r}(\tau_b^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \frac{dx_i}{dn}. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Ne viene, quindi, che su B è $u'_i = U'_i = 0$, mentre su C:

$$\left.\begin{aligned} u'_i &= -(\tau_b^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial r}{\partial x_i}, \\ U'_i &= -b^2 \frac{m-1}{\varepsilon}(\tau_b^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \frac{\partial r}{\partial x_i}, \quad \tau_b = \frac{b(x'-x)}{\varepsilon} \text{ (*)}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Indicando, quindi, con (C) la porzione di C che fa parte del contorno di $S'_{m+1,b}$, la formola (A), nel caso che ci occupa, ci darà:

$$\int_{S'_{m+1,b}} \sum_1^m {}_i X_i u'_i \, dS_{m+1} + \int_{\Sigma'_{m,b}+(C)} \left(\sum_1^m {}_i U_i u'_i - \sum_1^m {}_i U'_i u_i \right) d\Sigma_m = 0. \quad (15)$$

(*) Nelle nostre considerazioni non insistiamo, in modo speciale, sui casi di $m = 2$ e $m = 3$ i quali richiederebbero qualche osservazione in più che nel caso generale, perchè essi sono svolti completamente nella Memoria del prof. VOLTERRA: *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes.* Act. Math., t. 18, e nella mia: *Sulle vibrazioni dei corpi solidi, omogenei ed isotropi.* Atti della R. Accad. di Torino, s. II, t. XLVII.

E, se in questa formola facciamo tendere ε a zero, osservando che su C è $\frac{d\,x_i}{d\,n}=\frac{\partial\, r}{\partial\, x_i}$, quindi:

$$\sum_1^m{}_i\, u'_i \sum_1^m{}_j\, \varpi_{i.j}\, \frac{d\,x_i}{d\,n}=-(\tau_b^2-1)^{\frac{m-1}{2}} \sum_1^m{}_i \sum_1^m{}_j\, \varpi_{i.j}\, \frac{\partial\, r}{\partial\, x_i}\frac{\partial\, r}{\partial\, x_j}=0,$$

$$\sum_1^m{}_i\, U_i\, u'_i=b^2(\tau_b^2-1)^{\frac{m-1}{2}}\,\theta, \quad \sum_1^m{}_i\, U'_i\, u_i=-\,b^2\,\frac{m-1}{\varepsilon}(\tau_b^2-1)^{\frac{m-3}{2}} \sum_1^m{}_i\, u_i\,\frac{\partial\, r}{\partial\, x_i},$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{(C)}\left(\sum_1^m{}_i\, U_i\, u'_i-\sum_1^m{}_i\, U'_i\, u_i\right) d\,\Sigma_m=\pm\, 2\,\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\, b^{m+1}\int_{x_0}^{x'}(x'-x)^{m-1}\,\theta\,(x,\, x'_i)\,d\,x,$$

dove x_0 dinota il valore di x che corrisponde alla intersezione di α con Σ_m e dove vale il segno $+$, o il segno $-$, secondo che $x'>x_0$, ovvero $x'<x_0$, si trova, indicando con $S_{m+1,b}$ e $\Sigma_{m,b}$ ciò che diventano $S'_{m+1,b}$ e $\Sigma'_{m,b}$ quando $\varepsilon=0$,

$$\left.\begin{aligned}\pm\, 2\,\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\, b^{m+1}\int_{x_0}^{x'}(x'-x)^{m-1}\,\theta(x,\, x'_i)\,d\,x=\int_{S_{m+1,b}}(\tau_b^2-1)^{\frac{m-1}{2}}\sum_1^m{}_i\, X_i\,\frac{\partial\, r}{\partial\, x_i}\,d\,S_{m+1}\\ +\int_{\Sigma_{m,b}}(\tau_b^2-1)^{\frac{m-1}{2}}\sum_1^m{}_i\, U_i\,\frac{\partial\, r}{\partial\, x_i}\,d\,\Sigma_m-(m-1)\,b\int_{\Sigma_{m,b}}(\tau_b^2-1)^{\frac{m-3}{2}}\,\tau_b\,\frac{d\,x}{d\,n}\sum_1^m{}_i\, u_i\,\frac{\partial\, r}{\partial\, x_i}\frac{d\,\Sigma_m}{r}\\ +(m-1)\,b^2\int_{\Sigma_{m,b}}(\tau_b^2-1)^{\frac{m-3}{2}}\sum_1^m{}_i\, u_i\,\frac{d\,x_i}{d n}\,\frac{d\,\Sigma_m}{r}\,.\end{aligned}\right\}\ (16)$$

Se deriviamo questa formola m volte, rapporto ad x', la formola che si ottiene determina il valore di θ nel punto $(x',\, x'_i)$ in funzione dei valori che acquistano le X in tutti i punti di $S_{m+1,b}$ e dei valori che le u_i e le derivate delle u_i, rapporto alle x ed x_i, acquistano su $\Sigma_{m,b}$.

6. Supponiamo, in secondo luogo, che S_{m+1} coincida con la porzione $S'_{m+1,a}$ dello spazio $(x,\, x_i)$ limitata alla varietà A, dalla varietà C e dalla porzione $\Sigma'_{m,a}$ della stessa varietà Σ_m di prima; mentre le u'_i coincidono con un sistema di integrali principali di seconda specie.

Come innanzi, si trova, allora, facilmente:

$$
\left.\begin{aligned}
&u'_h=(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{\partial r}{\partial x_k},\ u'_k=-(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{\partial r}{\partial x_h},\ u'_l=0 \text{ per } l \neq h,\ k,\\
&U'_h=-(m-1)\frac{a}{r}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-3}{2}}\tau_a\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{d x}{d n}-a^2(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{d}{d n}\frac{\partial r}{\partial x_k}\\
&\quad+(m-1)\frac{a^2}{r}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-3}{2}}\tau_a^2\frac{d r}{d n}\frac{\partial r}{\partial x_k}\\
&\quad+a^2(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_k\,\partial x_h}\frac{d x_h}{d n}-\frac{\partial^2 r}{\partial x_h^2}\frac{d x_k}{d n}\right)\\
&\quad-(m-1)\frac{a^2}{r}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-3}{2}}\tau_a^2\frac{\partial r}{\partial x_h}\left(\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{d x_h}{d n}-\frac{\partial r}{\partial x_h}\frac{d x_k}{d n}\right),\\
&U'_k=(m-1)\frac{a}{r}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-3}{2}}\tau_a\frac{\partial r}{\partial x_h}\frac{d x}{d n}+a^2(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{d}{d n}\frac{\partial r}{\partial x_h}\\
&\quad-(m-1)\frac{a^2}{r}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-3}{2}}\tau_a^2\frac{d r}{d n}\frac{\partial r}{\partial x_h}\\
&\quad+a^2(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_k^2}\frac{d x_h}{d n}-\frac{\partial^2 r}{\partial x_h\,\partial x_k}\frac{d x_k}{d n}\right)\\
&\quad-(m-1)\frac{a^2}{r}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-3}{2}}\tau_a^2\frac{\partial r}{\partial x_k}\left(\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{d x_h}{d n}-\frac{\partial r}{\partial x_h}\frac{d x_k}{d n}\right),\\
&U'_l=a^2(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_k\,\partial x_l}\frac{d x_h}{d n}-\frac{\partial^2 r}{\partial x_h\,\partial x_l}\frac{d x_k}{d n}\right)\\
&\quad-(m-1)\frac{a^2}{r}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-3}{2}}\tau_a^2\frac{\partial r}{\partial x_l}\left(\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{d x_h}{d n}-\frac{\partial r}{\partial x_h}\frac{d x_k}{d n}\right)\\
&\qquad\text{per } l \neq h,\ k
\end{aligned}\right\}\quad(17)
$$

$$\tau_a=\frac{a\,(x'-x)}{r},$$

quindi, su A è $u'_l = U'_l = 0$ $(l = 1, 2, \ldots, m)$, mentre su C è:

$$\left.\begin{aligned}
&u'_h = (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial r}{\partial x_k}, \quad u'_k = -(\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial r}{\partial x_h}, \quad u'_l = 0 \text{ per } l \neq h, k, \\
&U'_h = (m-1)\frac{a^2}{\varepsilon}(\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a^2 \frac{\partial r}{\partial x_k} - \frac{a^2}{\varepsilon}(\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial r}{\partial x_k}, \\
&U'_k = -(m-1)\frac{a^2}{\varepsilon}(\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a^2 \frac{\partial r}{\partial x_h} + \frac{a^2}{\varepsilon}(\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial r}{\partial x_h}, \\
&\qquad U'_l = 0 \quad \text{per} \quad l \neq h, k \\
&\qquad\quad \tau_a = \frac{a(x' - x)}{\varepsilon}.
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Chiamando (C') la porzione di C che appartiene al contorno di $S'_{m+1,a}$, la formola (A) ci darà dapprima:

$$\int_{S'_{m+1,a}} (X_h u'_h + X_k u'_k)\, d S_{m+1} + \int_{\Sigma'_{m,a}+(C')} (U_h u'_h + U_k u'_k)\, d\Sigma_m - \int_{\Sigma'_{m,a}+(C')} \sum_1^m {}_i\, U'_i u_i\, d\Sigma_m = 0. \quad (19)$$

Facciamo poi, come nel caso precedente, tendere, in questa formola, ε a zero. Poichè su C:

$$U_h u'_h + U_k u'_k = -a^2 (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \sum_1^m {}_i \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \varpi_{h,i} - \frac{\partial r}{\partial x_h} \varpi_{k,i} \right) \frac{\partial r}{\partial x_i},$$

$$\sum_1^m {}_i\, U'_i u_i = (m-1)\frac{a^2}{\varepsilon}(\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a^2 \left(u_h \frac{\partial r}{\partial x_k} - u_k \frac{\partial r}{\partial x_h} \right)$$

$$- \frac{a^2}{\varepsilon}(\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \left(u_h \frac{\partial r}{\partial x_k} - u_k \frac{\partial r}{\partial x_h} \right),$$

si ha, per $\varepsilon = 0$:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{(C')} (U_h u'_h + U_k u'_k)\, d\Sigma_m = \mp \frac{2}{m}\, 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} a^{m+1} \int_{x_0}^{x'} (x' - x)^{m-1} \varpi_{h,k}(x, x'_i)\, dx,$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{(C')} \sum_1^m {}_i U'_j u_i\, d\Sigma_m = \pm \frac{m-2}{m}\, 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} a^{m+1} \int_{x_0}^{x'} (x' - x)^{m-1} \varpi_{h,k}(x, x'_i)\, dx,$$

quindi, chiamando $S_{m+1,a}$ e $\Sigma_{m,a}$ ciò che diventano $S'_{m+1,a}$ e $\Sigma'_{m,a}$ per $\varepsilon = 0$, la (19), per $\varepsilon = 0$, ci darà:

$$\left.\begin{aligned}
&\pm 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} a^{m+1} \int_{x_0}^{x'} (x' - x)^{m-1} \varpi_{h,k}(x, x'_i)\, dx \\
&= \int_{S_{m+1,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \left(X_h \frac{\partial r}{\partial x_k} - X_k \frac{\partial r}{\partial x_h} \right) d S_{m+1} \\
&+ \int_{\Sigma_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \left(U_h \frac{\partial r}{\partial x_k} - U_k \frac{\partial r}{\partial x_h} \right) d\Sigma_m \\
&+ (m-1)\, a \int_{\Sigma_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a \frac{dx}{dn} \left(u_h \frac{\partial r}{\partial x_k} - u_k \frac{\partial r}{\partial x_h} \right) \frac{d\Sigma_m}{r} \\
&+ a^2 \lim_{\varepsilon=0} \int_{\Sigma'_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \left(u_h \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial x_k} - u_k \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial x_h} \right) d\Sigma_m \\
&- (m-1)\, a^2 \lim_{\varepsilon=0} \int_{\Sigma'_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a^2 \frac{dr}{dn} \left(u_h \frac{\partial r}{\partial x_k} - u_k \frac{\partial r}{\partial x_h} \right) \frac{d\Sigma_m}{r} \\
&- a^2 \lim_{\varepsilon=0} \int_{\Sigma'_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \sum_1^m {}_i\, u_i \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_i} \frac{dx_h}{dn} - \frac{\partial^2 r}{\partial x_h \partial x_i} \frac{dx_k}{dn} \right) d\Sigma_m \\
&+ (m-1)\, a^2 \lim_{\varepsilon=0} \int_{\Sigma'_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \tau_a^2 \sum_1^m {}_i\, a_i \frac{\partial r}{\partial x_i} \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{dx_h}{dn} - \frac{\partial r}{\partial x_h} \frac{dx_k}{dn} \right) \frac{d\Sigma_m}{r}.
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Possiamo eliminare, facilmente, da questa formola gli integrali impropri. Perciò osserviamo che:

$$(m-1) \int_{\Sigma'_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a^2 \frac{dr}{dn} u_h \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{d\Sigma_m}{r} = \int_{\Sigma'_{m,a}} \frac{dr}{dn} u_h \frac{\partial}{\partial x'_k} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} d\Sigma_m$$

$$= \int_{\Sigma'_{m,a}} \frac{\partial}{\partial x'_k} \left[\frac{dr}{dn} u_h (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \right] d\Sigma_m + \int_{\Sigma'_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} u_h \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial x_k} d\Sigma_m,$$

e che:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_{m,a}}\frac{\partial}{\partial x'_k}\left[\frac{dr}{dn}u_h(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]d\,\Sigma_m$$

$$=\frac{\partial}{\partial x'_k}\int_{\Sigma_{m,a}}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}u_h\frac{dr}{dn}d\,\Sigma_m\mp\frac{2}{m}\cdot\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}(x'-x_0)^{m-1}u_h^0\frac{d\,x_0}{d\,x'_k},$$

dove u_h^0 rappresenta il valore di u_h nel punto (x_0, x'_i) e $\frac{d\,x_0}{d\,x'_k}$ il valore della derivata di x rapporto ad x_k, ricavata dall'equazione di Σ_m, nel punto stesso. Similmente:

$$(m-1)\int_{\Sigma'_{m,a}}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-3}{2}}\tau_a^2u_i\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{d\,x_h}{d\,n}\frac{d\,\Sigma_m}{r}=\int_{\Sigma'_{m,a}}u_i\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{d\,x_h}{d\,n}\frac{\partial}{\partial x'_i}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}d\,\Sigma_m$$

$$=\int_{\Sigma_{m,a}}\frac{\partial}{\partial x'_i}\left[u_i\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{d\,x_h}{d\,n}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]d\,\Sigma_m+\int_{\Sigma'_{m,a}}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}u_i\frac{\partial^2 r}{\partial x_k\,\partial x_i}\frac{d\,x_h}{d\,n}d\,\Sigma_m,$$

e:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_{m,a}}\frac{\partial}{\partial x'_i}\left[u_i\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{d\,x_h}{d\,n}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]d\,\Sigma_m$$

$$=\frac{\partial}{\partial x'_i}\int_{\Sigma_{m,a}}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}u_i\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{d\,x_h}{d\,n}d\,\Sigma_m \text{ per } i\neq k,$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_{m,a}}\frac{\partial}{\partial x'_k}\left[u_k\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{d\,x_h}{d\,n}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]d\,\Sigma_m$$

$$=\frac{\partial}{\partial x'_k}\int_{\Sigma_{m,a}}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}u_k\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{d\,x_h}{d\,n}d\,\Sigma_m\mp\frac{2}{m}\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}(x'-x_0)^{m-1}u_k^0\frac{d\,x_0}{d\,x'_h}.$$

L'equazione (20) può scriversi, quindi,

$$\left.\begin{aligned}
&\pm 2\,\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\,a^{m+1}\int_{x_0}^{x'}(x'-x)^{m-1}\,\varpi_{h,k}(x,\,x'_i)\,dx \\
&=\pm\frac{4}{m}\,\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}(x'-x_0)^{m-1}\left(u_h^0\,\frac{dx_0}{dx'_k}-u_k^0\,\frac{dx_0}{dx'_h}\right) \\
&+\int_{S_{m+1,a}}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(X_h\,\frac{\partial r}{\partial x_k}-X_k\,\frac{\partial r}{\partial x_h}\right)d\,S_{m+1} \\
&+\int_{\Sigma_{m,a}}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(U_h\,\frac{\partial r}{\partial x_k}-U_k\,\frac{\partial r}{\partial x_h}\right)d\,\Sigma_m \\
&+(m-1)\,a\int_{\Sigma_{m,a}}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-3}{2}}\,\tau_a\,\frac{dx}{dn}\left(u_h\,\frac{\partial r}{\partial x_k}-u_k\,\frac{\partial r}{\partial x_h}\right)\frac{d\,\Sigma_m}{r} \\
&-a^2\left\{\frac{\partial}{\partial x'_k}\int_{\Sigma_{m,a}}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}\,u_h\,\frac{dr}{dn}\,d\,\Sigma_m-\frac{\partial}{\partial x'_h}\int_{\Sigma_{m,a}}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}\,u_k\,\frac{dr}{dn}\,d\,\Sigma_m\right\} \\
&+a^2\sum_1^m{}_i\,\frac{\partial}{\partial x'_i}\int_{\Sigma_{m\,a}}(\tau_a^2-1)^{\frac{m-1}{2}}\,u_i\left(\frac{\partial r}{\partial x_k}\,\frac{dx_h}{dn}-\frac{\partial r}{\partial x_h}\,\frac{dx_k}{dn}\right)d\,\Sigma_m.
\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

Derivando m volte, come prima, questa formola, rispetto ad x', la formola che ne risulta determina il valore di $\varpi_{h,k}$ nel punto $(x',\,x'_i)$ in funzione dei valori che le X assumono in $S_{m+1,a}$ e dei valori che le u_i e le derivate delle u_i rapporto alle x ed x_i assumono su $\Sigma_{m,a}$.

7. Si può pervenire a formole analoghe a quelle stabilite nel n.° prec. operando nel modo che segue.

Poniamo:

$$u'_h=\varphi(\tau_a),\quad u'_l=0 \text{ per } l \neq h, \tag{22}$$

e $\varphi(\tau)$ soddisfi alla equazione (8). In conseguenza di questa ipotesi sarà:

$$\varphi'(\tau)=(\tau_a^2-1)^{\frac{m-3}{2}}.$$

Supporremo poi che la costante arbitraria che viene a comparire in $\varphi(\tau)$ sia determinata in modo che, se $x' > x$, $\varphi(\tau_a)$ si annulli su quella falda di A su cui $x' > x$ e che, se, invece, $x' < x$, $\varphi(\tau_a)$ si annulli sull'altra falda di A su cui $x' < x$.

In conseguenza delle nostre posizioni, con calcolo agevole, si trova:

$$\theta' = \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}, \quad \varpi_{i,h} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\varpi_{i,j} = 0 \text{ per } i \text{ e } j \neq h,$$

$$\left.\begin{aligned} U'_h &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d x}{d n} - a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{d r}{d n} - b^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}\frac{d x_h}{d n} + a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}\frac{d x_h}{d n}, \\ U'_l &= \qquad\qquad\qquad - b^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}\frac{d x_l}{d n} + a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_l}\frac{d x_h}{d n} \text{ per } l \neq h, \\ X'_l &= -(b^2 - a^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_l \, \partial x_h} (l = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Sostituendo nella formola (A) questi risultati, si trova:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{S_{m+1}} X_h \varphi \, d S_{m+1} + (b^2 - a^2) \int\limits_{S_{m+1}} \sum_1^m {}_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h \, \partial x_i} u_i \, d S_{m+1} \\ &+ \int\limits_{\Sigma_m} U_h \varphi \, d \Sigma_m - \int\limits_{\Sigma_m} u_h \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d x}{d n} - a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{d r}{d n}\right] d \Sigma_m \\ &+ b^2 \int\limits_{\Sigma_m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \sum_1^m {}_i u_i \frac{d x_i}{d n} d \Sigma_m - a^2 \int\limits_{\Sigma_m} \frac{d x_h}{d n} \sum_1^m {}_i u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d \Sigma_m = 0, \end{aligned}$$

nell'ipotesi, s'intende, che il punto (x', x'_i) non sia contenuto in S_{m+1}, e, per essere:

$$\int\limits_{S_{m+1}} \sum_1^m {}_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial x_h} u_i \, d S_{m+1} = -\int\limits_{S_{m+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \theta \, d S_{m+1} - \int\limits_{\Sigma_m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \sum_1^m {}_i u_i \frac{d x_i}{d n} d \Sigma_m,$$

la formola precedente si potrà scrivere:

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{S_{m+1}} X_h \varphi \, d S_{m+1} + (b^2 - a^2) \int\limits_{S_{m+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x'_h} \theta \, d S_{m+1} \\ &+ \int\limits_{\Sigma_m} U_h \varphi \, d \Sigma_m - \int\limits_{\Sigma_m} u_h \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d x}{d n} - a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{d r}{d n}\right] d \Sigma_m \\ &+ a^2 \int\limits_{\Sigma_m} \sum_1^m {}_i u_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_h}\frac{d x_i}{d n} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{d x_h}{d n}\right) d \Sigma_m = 0. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Supponendo ora di avere scelto S_{m+1} come nel n.° prec. ed osservando che su una varietà di rotazione qualunque intorno alla retta α è:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_h}\frac{d x_i}{d n}-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{d x_h}{d n}=0,$$

e che su A:

$$\varphi=0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d x}{d n}-a^2\frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{d r}{d n}=0,$$

la formola (24) ci darà subito la:

$$\left.\begin{aligned}&\int\limits_{S'_{m+1,\alpha}} X_h\,\varphi\, d S_{m+1}+(b^2-a^2)\int\limits_{S'_{m+1,\alpha}}\frac{\partial \varphi}{\partial x'_h}\,\theta\, d S_{m+1}\\&+\int\limits_{\Sigma'_{m,\alpha}+(C)} U_h\varphi\, d\Sigma_m-\int\limits_{\Sigma'_{m,\alpha}+(C)} u_h\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d x}{d n}-a^2\frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{d r}{d n}\right]d\Sigma_m\\&+a^2\int\limits_{\Sigma'_{m,\alpha}}\sum_1^m{}_i\, u_i\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_h}\frac{d x_i}{d n}-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{d x_h}{d n}\right)d\Sigma_m=0.\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

E, se in questa formola facciamo tendere ε a zero, osservando che:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int\limits_{(C)} U_h\,\varphi\, d\Sigma_m=0, \quad \lim_{\varepsilon=0}\int\limits_{(C)} u_h\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d x}{d n}-a^2\frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{d r}{d n}\right]d\Sigma_m$$

$$=\pm 2\,\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\,a^m\int_{x_0}^{x'}(x'-x)^{m-2}\,u_h(x,\ x'_i)\,d x,$$

abbiamo anche:

$$\left.\begin{aligned}&\pm 2\,\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\,a^m\int_{x_0}^{x'}(x'-x)^{m-2}\,u_h(x,\ x'_i)\,d x\\&=\int\limits_{S_{m+1,\alpha}} X_h\,\varphi\, d S_{m+1}+(b^2-a^2)\,\frac{\partial}{\partial x'_h}\int\limits_{S_{m+1,\alpha}}\theta\,\varphi\, d S_{m+1}\\&+\int\limits_{\Sigma_{m,\alpha}} U_h\,\varphi\, d\Sigma_m-\int\limits_{\Sigma_{m,\alpha}} u_h\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d x}{d n}-a^2\frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{d r}{d n}\right]d\Sigma_m\\&+a^2\int\limits_{\Sigma_{m,\alpha}}\sum_1^m{}_i\, u_i\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_h}\frac{d x_i}{d n}-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{d x_h}{d n}\right)d\Sigma_m.\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Non ci resta ora che a derivare questa equazione rispetto ad x'_k, a cambiare nel risultato h e k e a sottrarre dalla prima equazione la seconda per pervenire alla formola seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&\pm 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} a^m \int_{x_0}^{x'} (x'-x)^{m-2} \varpi_{h,k}(x, x'_i)\, dx \\
&= \pm 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} a^m (x'-x_0)^{m-2} \left(u_h^0 \frac{dx_0}{dx'_k} - u_k^0 \frac{dx_0}{dx_h}\right) \\
&+ \int_{S_{m+1,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a \left(X_h \frac{\partial r}{\partial x_k} - X_k \frac{\partial r}{\partial x_h}\right) \frac{dS_{m+1}}{r} \\
&+ \int_{\Sigma_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a \left(U_h \frac{\partial r}{\partial x_k} - U_k \frac{\partial r}{\partial x_h}\right) \frac{d\Sigma_m}{r} \\
&+ a \frac{\partial}{\partial x'_k} \int_{\Sigma_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} u_h \left(\frac{dx}{dn} - a\tau_a \frac{dr}{dn}\right) \frac{d\Sigma_m}{r} \\
&- a \frac{\partial}{\partial x'_h} \int_{\Sigma_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} u_k \left(\frac{dx}{dn} - a\tau_a \frac{dr}{dn}\right) \frac{d\Sigma_m}{r} \\
&- a^2 \frac{\partial}{\partial x'_k} \int_{\Sigma_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a \sum_1^m{}_i\, u_i \left(\frac{\partial r}{\partial x_h}\frac{dx_i}{dn} - \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{dx_h}{dn}\right) \frac{d\Sigma_m}{r} \\
&+ a^2 \frac{\partial}{\partial x'_h} \int_{\Sigma_{m\,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a \sum_1^m{}_i\, u_i \left(\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{dx_i}{dn} - \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{dx_k}{dn}\right) \frac{d\Sigma_m}{r},
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

la quale non differisce dalla derivata prima della (21) rispetto ad x' che per il coefficiente del termine $a^m (x'-x_0)^{m-2} \left(u_h^0 \frac{dx_0}{dx'_k} - u_k^0 \frac{dx_0}{dx'_h}\right)$.

8. Servendoci delle (21), ovvero delle (27), formiamo le espressioni:

$$b^2 \int_{x_0}^{x'} (x'-x)\, \theta(x, x'_i)\, dx, \quad a^2 \int_{x_0}^{x'} (x'-x)\, \varpi_{h,k}(x, x'_i)\, dx,$$

derivando la (16) e la (21) $m-2$ volte, rispetto ad x', ovvero la (16) $m-2$ volte e la (27) $m-3$ volte, e indichiamo i risultati, rispettivamente, con T e $P_{h,k}$. Avremo allora:

$$\frac{\partial T}{\partial x'_l} + \sum_1^m {}_i \frac{\partial P_{l,i}}{\partial x'_i} = \int_{x_0}^{x'} (x'-x) \left\{ b^2 \frac{\partial \theta(x, x'_i)}{\partial x'_l} + a^2 \sum_1^m {}_i \frac{\partial \varpi_{l,i}(x, x'_i)}{\partial x'_i} \right\} d x$$
$$-(x'-x_0)\left(b^2 \theta^0 \frac{d x_0}{d x'_l} + a^2 \sum_1^m {}_i \varpi_{l,i}^0 \frac{d x_0}{d x'_i}\right),$$

dove θ^0 e $\varpi_{l,i}^0$ indicano i valori di θ e di $\varpi_{l,i}$ nel punto (x_0, x'_i). E, per mezzo delle equazioni (2) in cui si siano cambiate le x_i nelle x'_i, l'equazione precedente si potrà scrivere:

$$\int_{x_0}^{x'} (x'-x) \frac{\partial^2 u_l(x, x'_i)}{\partial x^2} d x = (x'-x_0)\left(b^2 \theta^0 \frac{d x_0}{d x'_l} + a^2 \sum_1^m {}_i \varpi_{l,i}^0 \frac{d x_0}{d x'_i}\right)$$
$$+\frac{d T}{d x'_l} + \sum_1^m {}_i \frac{\partial P_{l,i}}{\partial x'_i} + \int_{x_0}^{x'} (x'-x) X_l(x, x'_i) d x .$$

Questa equazione, poi, alla sua volta, per essere:

$$\int_{x_0}^{x'} (x'-x) \frac{\partial^2 u_l(x, x'_i)}{\partial x^2} d x = -(x'-x_0)\left(\frac{\partial u_l}{\partial x}\right)^0 + u_l(x', x'_i) - u_l^0,$$

ci darà finalmente:

$$\left.\begin{aligned} u_l(x', x'_i) = u_l^0 + (x'-x_0)\left\{\left(\frac{\partial u_l}{\partial x}\right)^0 + b^2 \theta^0 \frac{d x_0}{d x'_l} + a^2 \sum_1^m {}_i \varpi_{l,i}^0 \frac{d x_0}{d x'_i}\right\} \\ + \frac{\partial T}{\partial x'_l} + \sum_1^m {}_i \frac{\partial P_{l,i}}{\partial x'_i} + \int_{x_0}^{x'} (x'-x) X_l(x, x'_i) d x \ (l = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Le formole che sono rappresentate dalle (28) ci determinano i valori delle u_l nel punto (x', x'_i) per mezzo dei valori che le X_l e le u_l insieme alle derivate delle u_l rapporto alle x, x_i acquistano, rispettivamente, in $S_{m+1,b}$ ed in $\Sigma_{m,b}$, ovvero in $S_{m+1,a}$ ed in $\Sigma_{m,a}$, secondo che $b > a$, ovvero $a > b$.

9. Si potrebbero stabilire delle formole analoghe alle precedenti, partendo dalla forma (2'), ovvero dalla forma (2''), delle nostre equazioni, invece che dalla forma (2).

Così pure, si possono assoggettare $\Sigma_{m,b}$ e $\Sigma_{m,a}$ ad ipotesi particolari. Si può immaginare, ad es., che tanto $\Sigma_{m,b}$ come $\Sigma_{m,a}$ sieno composte di una stessa porzione dell'iperpiano $x = x_0$, limitata dalla varietà ad $m - 1$ dimensioni Σ_{m-1} e dalle porzioni della varietà cilindrica risultante dall'insieme delle parallele all'asse x condotte per i vari punti di Σ_{m-1}, comprese, rispettivamente, fra Σ_{m-1} stessa e le varietà coniche B od A. Le formole che si ottengono a questo modo, possono essere interpretate anche nello spazio lineare ad n dimensioni (x_i) quando ad x si dia un significato differente da quello di coordinata, com'è il caso in cui s'interpreti come il valore del tempo. Queste formole, però, non attuano la integrazione del nostro sistema di equazioni, perchè in esse compaiono più elementi di quelli che son necessari per individuare i valori delle u, ma sarebbero da tenersi in considerazione speciale quando si volesse sviluppare la teoria dell'elasticità negli spazi superiori. Noi che abbiamo di mira, principalmente, la integrazione delle nostre equazioni, lascieremo da parte queste formole, come pure quelle quistioni che vi si riannodano.

Vogliamo però aggiungere l'osservazione seguente. Il processo indicato innanzi per la determinazione delle u, vien meno nel caso in cui il sistema integrale delle equazioni (2) è un sistema di funzioni indipendenti da x. In questo caso le equazioni (2) si riducono alle:

$$b^2 \frac{\partial \theta}{\partial x_l} + a^2 \sum_1^m{}_i \frac{\partial \varpi_{l,i}}{\partial x_i} + X_l = 0 \;\; (l = 1, 2, \ldots, m), \tag{29}$$

e possono interpretarsi, quando $b^2 > 2a^2$, come le equazioni dell'equilibrio elastico nello spazio lineare ad m dimensioni (x_i). Per la trattazione di esse è superflua la considerazione dello spazio (x, x_i).

Le formole precedentemente stabilite sono suscettibili di determinarci, soltanto, i valori di θ e delle $\varpi_{l,i}$, e non è difficile pervenire da questi valori a quelle delle u_l. Noi, però, vogliamo, per questo, indicare un metodo che poi ci siamo accorti essere stato dato in modo completo dal prof. SOMIGLIANA (*) e che non abbiamo soppresso, soltanto per lasciare al soggetto la sua forma completa primitiva.

Anche su queste formole noi non intendiamo fermarci di proposito perchè esse non rappresentano l'integrale delle equazioni (29), contenendo più elementi di quelli che servono a determinare le u_l.

(*) *Annali di Matematica,* 1889, pag. 41.

Cominciamo perciò dal notare che, nel caso particolare che ci occupa, la formola fondamentale (A) si riduce a:

$$\int_{S_m}\left(\sum_1^m{}_i X_i u'_i - \sum_1^m{}_i X'_i u_i\right) d\, S_m + \int_{\Sigma_{m-1}}\left(\sum_1^m{}_i U_i u'_i - \sum_1^m{}_i U'_i u_i\right) d\, \Sigma_{m-1} = 0, \qquad (30)$$

dove S_m indica una porzione finita dello spazio (x_i), Σ_{m-1} il contorno di S_m e le U_i sono date dalle formole:

$$U_l = -\, b^2\, \theta\, \frac{d\, x_l}{d\, n} - a^2 \sum_1^m{}_i\, \varpi_{l,i}\, \frac{d\, x_i}{d\, n}\,. \qquad (31)$$

Notiamo poi che se:

$$\varphi_1,\ \varphi_2, \ldots,\ \varphi_m,$$

è un sistema di integrali particolari dell'equazione:

$$\sum_1^m{}_i \sum_1^m{}_j \frac{\partial^4 \varphi}{\partial\, x_i^2\, \partial\, x_j^2} = 0\,,$$

posto:

$$S = \sum_1^m{}_i \frac{\partial\, \varphi_i}{\partial\, x_i}\,,$$

si ha in:

$$u'_l = \sum_1^m{}_i \frac{\partial^2\, \varphi_l}{\partial\, x_i^2} + \alpha\, \frac{\partial\, S}{\partial\, x_l}\,, \qquad \alpha = \frac{a^2 - b^2}{b^2}\,, \qquad (32)$$

un sistema di integrali particolari delle equazioni (29) quando le X sono nulle.

Supponendo ora che (x'_i) sia un punto determinato interno ad S_m e non sul suo contorno Σ_{m-1}, potremo porre:

pel caso di $m = 2$:

$$\varphi_h = r^2 (\log r - 1), \quad \varphi_i = 0 \ \text{per}\ i \neq h,$$

pel caso di $m = 3$:

$$\varphi_h = r\,, \quad \varphi_i = 0 \ \text{per}\ i \neq h\,,$$

pel caso di $m = 4$:

$$\varphi_h = \log r\,, \quad \varphi_i = 0 \ \text{per}\ i \neq h\,,$$

e pel caso di $m > 4$:

$$\varphi_h = \frac{1}{r^{m-h}}\,, \quad \varphi_i = 0 \ \text{per}\ i \neq h, \quad r = \sqrt{\sum_1^m{}_i (x_i - x'_i)^2}.$$

Per poter applicare la formola (30) quando le u'_l sono così determinate, seguendo il solito processo, cominceremo ad applicarla allo spazio S'_m che si ottiene escludendo da S_m la porzione di esso che è limitata da una sfera Ω_{m-1} ad $m - 1$ dimensioni col centro nel punto (x'_i) e con raggio ε e poi faremo tendere ε a zero. Si trova a questo modo facilmente:

$$A\, u\,(x'_i) = \int\limits_{S_m} \sum_1^m{}_i\, X_i\, u'_i\, d\, S_m + \int\limits_{\Sigma_{m-1}} \left(\sum_1^m{}_i\, U_i\, u'_i - \sum_1^m{}_i\, U'_i\, u_i \right) d\, \Sigma_{m-1}\,, \tag{33}$$

dove A indica un coefficiente numerico che per $m=2$ è eguale a $8\pi a^2$, per $m=3$ a $-8\pi a^2$, per $m=4$ a $-8\pi^2 a^2$ e per $m>4$ a $-4(m-4)(m-2)\dfrac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\, a^2$.

II.

10. Dalle formole precedentemente stabilite si ottengono, però, dei risultati notevoli, supponendo in esse che $\Sigma_{m,b}$ si riduca alla porzione dell'iperpiano $x=x_0$, limitata dalla varietà caratteristica B, e che $\Sigma_{m,a}$ si riduca alla porzione dello stesso iperpiano, limitata dalla varietà caratteristica A.

Indicheremo queste due porzioni dell'iperpiano $x=x_0$, rispettivamente, con $S_{m,b}$ e con $S_{m,a}$. Esse sono limitate da due varietà sferiche concentriche ad $m-1$ dimensioni dello spazio (x_i), il cui centro comune è il punto (x_0, x'_i) ed i cui raggi sono rispettivamente: $r_b = b\,(x'-x_0)$, $r_a = a\,(x'-x_0)$, presi in valore assoluto. Queste due varietà sferiche le indicheremo poi con $\Sigma_{m-1,b}$ e $\Sigma_{m-1,a}$, rispettivamente.

Per le formole che andiamo a stabilire supporremo, per semplicità, che le X_i sieno tutte nulle.

Osservando allora che sull'iperpiano $x=x_0$ è:

$$\frac{d\,x_i}{d\,n} = 0\,, \quad \frac{d\,x}{d\,n} = \pm\, 1\,,$$

a seconda che $x' > x_0$, ovvero $x' < x_0$, troviamo subito pel caso di $m = 2p+1$:

$$\left.\begin{aligned} & 2\,\frac{\pi^{\frac{m}{2}}\,\Gamma\,(m)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\, b^{m+1} \int_{x_0}^{x'} (x'-x)\,\theta\,(x,\, x'_i)\, d\,x = 2\,\frac{\pi^{\frac{m}{2}}\,\Gamma\,(m)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\, b^{m-1}\, T \\ & = \frac{\partial^{p-1}}{\partial\, x'^{p-1}} \int\limits_{S_{m,b}} \frac{\partial^p}{\partial\, x'^p}\, \left[b^2\,(x'-x_0)^2 - r^2\right]^{\frac{m-1}{2}} \sum_1^m{}_i\, \psi_i\, \frac{\partial\, r}{\partial\, x_i}\, \frac{d\, S_{m,b}}{r^{m-1}} \\ & + \frac{\partial^p}{\partial\, x'^p} \int\limits_{S_{m,b}} \frac{\partial^p}{\partial\, x'^p}\, \left[b^2\,(x'-x_0)^2 - r^2\right]^{\frac{m-1}{2}} \sum_1^m{}_i\, \varphi_i\, \frac{\partial\, r}{\partial\, x_i}\, \frac{d\, S_{m,b}}{r^{m-1}}\,, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} &2\frac{\pi^{\frac{m}{2}}\Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}a^{m+1}\int_{x_0}^{x'}(x'-x)\,\varpi_{h,k}(x,\ x'_i)\,dx = 2\frac{\pi^{\frac{m}{2}}\Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}a^{m-1}P_{h,k} \\ &= \frac{\partial^{p-1}}{\partial x'^{p-1}}\int_{S_{m,a}}\frac{\partial^p}{\partial x'^p}\left[a^2(x'-x_0)^2-r^2\right]^{\frac{m-1}{2}}\left(\psi_h\frac{\partial r}{\partial x_k}-\psi_k\frac{\partial r}{\partial x_h}\right)\frac{dS_{m,a}}{r^{m-1}} \\ &+\frac{\partial^p}{\partial x'^p}\int_{S_{m,a}}\frac{\partial^p}{\partial x'^p}\left[a^2(x'-x_0)^2-r^2\right]^{\frac{m-1}{2}}\left(\varphi_h\frac{\partial r}{\partial x_k}-\varphi_k\frac{\partial r}{\partial x_h}\right)\frac{dS_{m,a}}{r^{m-1}}, \end{aligned} \tag{35}$$

e pel caso di $m=2p$:

$$\begin{aligned} &2\frac{\pi^{\frac{m}{2}}\Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}b^{m+1}\int_{x_0}^{x'}(x'-x)\,\theta(x,\ x'_i)\,dx = 2\frac{\pi^{\frac{m}{2}}\Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}b^{m-1}T \\ &= \frac{\partial^{p-2}}{\partial x'^{p-2}}\int_{S_{m,b}}\frac{\partial^p}{\partial x'^p}\left[b^2(x'-x_0)^2-r^2\right]^{\frac{m-1}{2}}\sum_1^m{}_i\,\psi_i\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{dS_{m,b}}{r^{m-1}} \\ &+\frac{\partial^{p-1}}{\partial x'^{p-1}}\int_{S_{m,b}}\frac{\partial^p}{\partial x'^p}\left[b^2(x'-x_0)^2-r^2\right]^{\frac{m-1}{2}}\sum_1^m{}_i\,\varphi_i\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{dS_{m,b}}{r^{m-1}}, \end{aligned} \tag{34'}$$

$$\begin{aligned} &2\frac{\pi^{\frac{m}{2}}\Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}a^{m+1}\int_{x_0}^{x'}(x'-x)\,\varpi_{h,k}(x,\ x'_i)\,dx = 2\frac{\pi^{\frac{m}{2}}\Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}a^{m-1}P_{h,k} \\ &= \frac{\partial^{p-2}}{\partial x'^{p-2}}\int_{S_{m,a}}\frac{\partial^p}{\partial x'^p}\left[a^2(x'-x_0)^2-r^2\right]^{\frac{m-1}{2}}\left(\psi_h\frac{\partial r}{\partial x_k}-\psi_k\frac{\partial r}{\partial x_h}\right)\frac{dS_{m,a}}{r^{m-1}} \\ &+\frac{\partial^{p-1}}{\partial x'^{p-1}}\int_{S_{m,a}}\frac{\partial^p}{\partial x'^p}\left[a^2(x'-x_0)^2-r^2\right]^{\frac{m-1}{2}}\left(\varphi_h\frac{\partial r}{\partial x_k}-\varphi_k\frac{\partial r}{\partial x_h}\right)\frac{dS_{m,a}}{r^{m-1}}, \end{aligned} \tag{35'}$$

nelle cui formole le ψ_i e le φ_i indicano i valori che assumono le quantità $\frac{\partial u_i}{\partial x}$ ed u_i quando al posto di x si sostituisce x_0.

Le formole (28) ci danno invece:

$$u_l(x',\ x'_i) = \varphi_l^0 + (x'-x_0)\,\psi_l^0 + \frac{\partial T}{\partial x'_l} + \sum_1^m{}_i\frac{\partial P_{l,i}}{\partial x'_i},\quad (l=1,\ 2,\ldots,\ m), \tag{36}$$

dove φ_l^0 e ψ_l^0 indicano i valori di φ_l e ψ_l nel punto $(x_0,\ x'_i)$.

11. Le formole (36) rappresentano l'integrale generale delle equazioni (2) quando le X_l sono eguali a zero. Infatti, si vede facilmente che T e $P_{l,i}$, $\frac{\partial T}{\partial x'}$ e $\frac{\partial P_{l,i}}{\partial x'}$ per $x' = x_0$ si annullano, perciò, per $x' = x_0$, $u_l(x', x'_i)$ si riduce a $\varphi_l{}^0$ e $\frac{\partial u_l}{\partial x'}$ si riduce a $\psi_l{}^0$. Inoltre, dati ad arbitrio $\varphi_l{}^0$ e $\psi_l{}^0$ si trova che:

$$\varphi_l = \varphi_l{}^0\left[x'_i + b\,(x' - x_0)\,\frac{\partial r}{\partial x_i}\right], \quad \psi_l = \psi_l{}^0\left[x'_i + b\,(x' - x_0)\,\frac{\partial r}{\partial x_i}\right],$$

e quindi si possono costruire le espressioni di T e di $P_{l,i}$ e le (36).

Se le $\varphi_l{}^0$, $\psi_l{}^0$ sono funzioni analitiche dei loro argomenti anche le u_l sono funzioni analitiche delle x', x'_i e le (36) rappresentano quell'integrale delle equazioni (2) la cui esistenza è dimostrata dal teorema della Kowalevsky.

12. Può anche facilmente dimostrarsi in modo diretto che le funzioni u_l date dalle (36) soddisfano all'equazione (2), quando le X_l sono eguali a zero.

Se deriviamo, infatti, le (36) due volte rispetto ad x' si trova:

$$\frac{\partial^2 u_l}{\partial x'^2} = \frac{\partial}{\partial x'_l}\,\frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} + \sum_1^m{}_i\,\frac{\partial}{\partial x'_i}\,\frac{\partial^2 P_{l,i}}{\partial x'^2}\,.$$

Il nostro asserto sarà dunque dimostrato quando avremo fatto vedere che:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} = b^2\,\theta\,, \quad \frac{\partial^2 P_{l,i}}{\partial x'^2} = a^2\,\varpi_{l,i}\,, \tag{37}$$

dove, ora, le θ e $\varpi_{l,i}$ sono da costruirsi con le funzioni u_l delle x'_i date dalle (36).

Ma, poichè $P_{h,k} = -P_{k,h}$, $P_{h,h} = 0$, si trova subito che:

$$\sum_1^m{}_{l,i}\,\frac{\partial^2 P_{l,i}}{\partial x'_l\,\partial x'_i} = 0,$$

quindi, se indichiamo con θ^* e $\varpi^*_{l,i}$ le espressioni analoghe alle θ e $\varpi_{l,i}$, costruite con le funzioni:

$$\varphi_l{}^0 + (x' - x_0)\,\psi_l{}^0\,,$$

avremo anche subito:

$$\theta = \theta^* + \sum_1^m{}_i\,\frac{\partial^2 T}{\partial x'^2_i}\,.$$

Similmente, osservando che:

$$\frac{\partial P_{h,i}}{\partial x'_k} + \frac{\partial P_{i,k}}{\partial x'_h} + \frac{\partial P_{k,h}}{\partial x'_i} = 0,$$

si trova anche:

$$\varpi_{l,i} = \varpi^*_{l,i} + \sum_1^m{}_i\,\frac{\partial^2 P_{l,i}}{\partial x'^2_i}\,.$$

Ne viene che le formole (37) possono anche scriversi:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} = b^2 \sum_1^m{}_i \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2_i} + b^2 \theta^*, \quad \frac{\partial^2 P_{l,i}}{\partial x'^2} = a^2 \sum_1^m{}_i \frac{\partial^2 P_{l,i}}{\partial x'^2_i} + a^2 \varpi^*_{l,i}. \tag{38}$$

Noi ci limiteremo a dimostrare soltanto la prima di queste relazioni, giacchè le altre si dimostrano all'identico modo.

Anzi possiamo limitare la dimostrazione, evidentemente, al solo caso in cui soltanto le ψ_i sieno diverse da zero.

13. Prendiamo dapprima a considerare il caso di $m = 2p + 1$. Nelle ipotesi fatte, la (34) si potrà scrivere:

$$2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} b^{m-1} T = \frac{\partial^{m-2}}{\partial x'^{m-2}} \int_{S_{m,b}} \left[\frac{b^2 (x' - x_0)^2}{r^2} - 1\right]^p \sum_1^m{}_i \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} d S_{m,b}. \tag{39}$$

Ora:

$$\int_{S_{m,b}} \left[\frac{b^2 (x' - x_0)^2}{r^2} - 1\right]^p \sum_1^m{}_i \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} d S_{m,b}$$

$$= \sum_0^p{}_j (-1)^j \binom{p}{j} b^{2j} (x' - x_0)^{2j} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m{}_i \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{d S_{m,b}}{r^{2j}}$$

$$= \sum_0^p{}_j (-1)^{j+1} \binom{p}{j} \frac{b^{2j}}{2j-1} (x' - x_0)^{2j} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m{}_i \psi_i \frac{\partial \frac{1}{r^{2j-1}}}{\partial x_i} d S_{m,b}$$

$$= \sum_0^p{}_j (-1)^j \binom{p}{j} \frac{b^{2j}}{2j-1} (x' - x_0)^{2j} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \frac{d S_{m,b}}{r^{2j-1}}$$

$$+ \sum_0^p{}_j (-1)^{j+1} \binom{p}{j} \frac{b}{2j-1} (x' - x_0) \int_{S_{m,b}} \sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} d S_{m,b}.$$

Quindi, osservando che:

$$\frac{\partial}{\partial x'} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \frac{d S_{m,b}}{r^{2j-1}} = \frac{b}{r_b^{2j-1}} \int_{\Sigma_{m-1,b}} \sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} d \Sigma_{m-1,b},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \frac{d S_{m,b}}{r^{2j-1}} = \frac{b^2}{r_b^{2j-1}} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m{}_h \frac{\partial^2}{\partial x^2_h} \left(\sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}\right) d S_{m,b} - (2j-1) \frac{b^2}{r_b^{2j}} \int_{\Sigma_{m-1,b}} \sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} d \Sigma_{m-1,b},$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} d S_{m,b} = b \int_{\Sigma_{m-1,b}} \sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} d \Sigma_{m-1,b},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} d S_{m,b} = b^2 \int_{S_{m,b}} \sum_1^m{}_h \frac{\partial^2}{\partial x^2_h} \left(\sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}\right) d S_{m,b},$$

risulta:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\left\{\int\limits_{S_{m,b}}\left[\frac{b^2(x'-x_0)^2}{r^2}-1\right]^p \sum_1^m{}_i\, \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i}\, d\, S_{m,b}\right\} \\
&= \sum_1^p{}_j (-1)^j \binom{p}{j} 2j\, b^{2j}(x'-x_0)^{2j-2}\int\limits_{S_{m,b}} \sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}\frac{d\, S_{m,b}}{r^{2j-1}} \\
&\quad + \sum_0^p{}_j (-1)^j \binom{p}{j} b^2 \int\limits_{\Sigma_{m-1,b}} \sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}\, d\, \Sigma_{m-1,b}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Allo stesso modo si ottiene facilmente:

$$\frac{\partial}{\partial x'_h}\left\{\int\limits_{S_{m,b}}\left[\frac{b^2(x'-x_0)^2}{r^2}-1\right]^p \sum_1^m{}_i\, \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i}\, d\, S_{m,b}\right\}$$

$$= \sum_0^p (-1)^j \binom{p}{j} \frac{b^{2j}}{2j-1}(x'-x_0)^{2j}\frac{\partial}{\partial x'_h}\int\limits_{S_{m,b}}' \sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}\frac{d\, S_{m,b}}{r^{2j-1}}\,,$$

dove l'accento messo sull'integrale indica che nel fare la derivata rispetto ad x'_h bisogna supporre che la sfera $S_{m,b}$ resti immobile. La formola precedente si può quindi scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial x'_h}\left\{\int\limits_{S_{m,b}}\left[\frac{b^2(x'-x_0)^2}{r^2}-1\right]^p \sum_1^m{}_i\, \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i}\, d\, S_{m,b}\right\}$$

$$= \frac{b^{2p}}{2p-1}(x'-x_0)^{2p}\frac{\partial}{\partial x'_h}\int\limits_{S_{m,b}}' \sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}\frac{d\, S_{m,b}}{r^{2p-1}}$$

$$+ \sum_0^{p-1}{}_j (-1)^{j+1}\binom{p}{j}\frac{b^{2j}}{2j-1}(x'-x_0)^{2j}\int\limits_{S_{m,b}}\left(\sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \frac{1}{r^{2j-1}}}{\partial x_h}\, d\, S_{m,b}\,.$$

Perciò anche:

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2_h}\left\{\int\limits_{S_{m,b}}\left[\frac{b^2(x'-x_0)^2}{r^2}-1\right]^p \sum_1^m{}_i\, \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i}\, d\, S_{m,b}\right\}$$

$$= \sum_0^p{}_j (-1)^j \binom{p}{j}\int\limits_{\Sigma_{m-1,b}}\left(\sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x_h}\right)^2 d\, \Sigma_{m-1,b}$$

$$+ \frac{b^{2p}}{2p-1}(x'-x_0)^{2p}\frac{\partial^2}{\partial x'^2_h}\int\limits_{S_{m,b}}' \sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}\frac{d\, S_{m,b}}{r^{2p-1}}$$

$$+ \sum_0^{p-1}{}_j (-1)^j \binom{p}{j}\frac{b^{2j}}{2j-1}(x'-x_0)^{2j}\int\limits_{S_{m,b}}\left(\sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2 \frac{1}{r^{2j-1}}}{\partial x_h^2}\, d\, S_{m,b}\,,$$

e:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_1^m{}_h \frac{\partial^2}{\partial x'^2_h}\left\{\int\limits_{S_{m,b}}\left[\frac{b^2(x'-x_0)^2}{r^2}-1\right]^p \sum_1^m{}_i \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i}\, d\, S_{m,b}\right\} \\
&\qquad = \sum_0^p{}_j (-1)^j \binom{p}{j} \int\limits_{\Sigma_{m-1,b}} \sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}\, d\, \Sigma_{m-1,b} \\
&\qquad + 2\, \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\, b^{2p}(x'-x_0)^{2p} \sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i^0}{\partial x_i} \\
&+ \sum_0^{p-1}{}_j (-1)^{j+1} \binom{p}{j} 2(p-j)\, b^{2j}(x'-x_0)^{2j} \int\limits_{S_{m,b}} \sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \frac{d\, S_{m,b}}{r^{2j+1}}.
\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Osservando poi, infine, che:

$$\frac{\partial^{m-2}}{\partial x'^{m-2}}\left\{2\, \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\, b^{2p}(x'-x_0)^{2p} \sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i^0}{\partial x_i}\right\} = 2\, \frac{\pi^{\frac{m}{2}}\, \Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\, b^{m-1}(x'-x_0) \sum_1^m{}_i \frac{\partial \psi_i^0}{\partial x_i}$$

$$= 2\, \frac{\pi^{\frac{m}{2}}\, \Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\, b^{m-1}\, \theta^*,$$

si trova, finalmente, dimostrata la prima delle (38) (*), come si vede confrontando la (40) con la (41) dopo aver cambiato, nel primo termine del secondo membro di quest'ultima, j in $j-1$ ed aver osservato che:

$$\binom{p}{j-1}(p-j+1) = \binom{p}{j} j.$$

(*) La dimostrazione di questa proposizione si sarebbe potuta condurre anche in un modo alquanto differente. E vogliamo accennare particolarmente ad essa perchè è analoga a quella che abbiamo data pel caso di $m=3$ nella Memoria della R. Acc. di Torino, già citata. Senza assoggettare l'integrale:

$$\int\limits_{S_{m,b}}\left[\frac{b^2(x'-x_0)^2}{r^2}-1\right]^p \sum_1^m{}_i \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i}\, d\, S_{m,b},$$

ad alcuna trasformazione, si può cominciare dall'osservare che al variare di x', ovvero di x'_h, l'integrale precedente varia in due modi differenti: nel primo modo varia soltanto il contorno di $S_{m,b}$ e nel secondo soltanto la funzione sotto il segno integrale, e serven-

14. Resta però sempre a considerare il caso di $m = 2p$. Perciò si osservi che:

$$\int\limits_{S_{m,b}} \left[\frac{b^2 (x' - x_0)^2}{r^2} - 1\right]^{\frac{m-1}{2}} \sum_1^m{}_i \, \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} \, d\, S_{m,b}$$

$$= \int\limits_{S_{m,b}} \frac{b^{m-1} (x' - x_0)^{m-1}}{r^{m-1}} \left[1 - \frac{r^2}{b^2 (x' - x_0)^2}\right]^{\frac{m-1}{2}} \sum_1^m{}_i \, \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} \, d\, S_{m,b}$$

$$= \sum_0^\infty{}_j \, (-1)^j \binom{\frac{m-1}{2}}{j} \int\limits_{S_{m,b}} \frac{b^{m-2j-1} (x' - x_0)^{m-2j-1}}{r^{m-2j-1}} \sum_1^m{}_i \, \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} \, d\, S_{m,b} \,,$$

Poichè ora la serie precedente si può derivare termine a termine, la dimostrazione si può condurre, precisamente, come nel caso di $m = 2p + 1$.

III.

15. Facciamo ora coincidere la porzione S_{m+1} dello spazio (x, x_i), che comparisce nella (A), con la porzione $\overline{S}'_{m+1,b}$ dello stesso spazio, la quale è limitata dalla varietà caratteristica B, dalla varietà cilindrica C e da una porzione $\overline{\Sigma}_{m,b}$ di una varietà $\overline{\Sigma}_m$ ad m dimensioni tale che in ogni suo punto sia $|\tau_b| \leqq 1$. Questa condizione è allora soddisfatta in ogni punto di $\overline{S}'_{m+1b}$. Facciamo inoltre coincidere le u'_i con gli integrali principali di prima specie delle nostre equazioni (2).

L'equazione (A) dietro queste ipotesi si ridurrà alla seguente:

$$\int\limits_{\overline{S}'_{m+1,b}} \sum_1^m{}_i \, X_i \, u'_i \, d\, S_{m+1} + \int\limits_{\overline{\Sigma}_{m,b}+(\overline{C})} \left(\sum_1^m{}_i \, U_i \, u'_i - \sum_1^m{}_i \, U'_i \, u_i\right) d\, \overline{\Sigma}_m = 0,$$

---

dosi poi del seguente principio generale, facilmente dimostrabile, e che contiene come caso particolare il teorema di Leibnitz:

Allorchè una funzione A al variare di un suo argomento x varia in k modi differenti, facendo corrispondere a ciascuno di questi modi di variare della A, ciascuna delle k quantità: $a, b, c \ldots$, la derivata h^{ma} di A si può ottenere sostituendo nello sviluppo della potenza h^{ma} del polinomio $a + b + c + \ldots$, al posto della potenza $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ la derivata di A di ordine $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ ottenuta facendo variare A, α volte nella maniera che corrisponde ad a, β volte nella maniera che corrisponde a b, ecc.

dove $(\overline{C})$ indica la porzione della varietà C che fa parte del contorno di $\overline{S}'_{m+1,b}$. Facendo ora tendere a zero il raggio ε di C la parte del secondo integrale che è estesa a $(\overline{C})$ si annulla ed il primo integrale si riduce all'integrale analogo che è esteso a tutta la porzione $\overline{S}_{m+1\,b}$ dello spazio (x, x_i) che è compresa fra la varietà caratteristica B e $\overline{\Sigma}_{m,b}$. A questo modo l'equazione precedente si riduce a:

$$\int\limits_{\overline{S}_{m+1,b}} \sum_1^m {}_i X_i u'_i \, d\, S_{m+1} + \int\limits_{\overline{\Sigma}_{m,b}} \left(\sum_1^m {}_i U_i u'_i - \sum_1^m {}_i U'_i u_i \right) d\, \Sigma_m = 0\,,$$

la quale è una relazione identica fra le varie quantità che in essa compaiono.

A relazioni identiche si perviene supponendo che, sulla (A), S_{m+1} si riduca alla porzione di spazio $\overline{S}'_{m+1,a}$ che è limitata dalla varietà caratteristica A, da C e dalla porzione $\overline{\Sigma}_{m,a}$ della stessa varietà Σ_m di prima, tale che in ogni suo punto sia $|\tau_a| \leqq 1$, facendo coincidere le u'_i con uno qualunque dei sistemi degli integrali di seconda specie delle nostre equazioni e poi andando al limite per $\varepsilon = 0$.

16. Nel caso di m pari è possibile però trovare altri sistemi d'integrali particolari delle nostre equazioni che ci permettano di determinare i valori delle u_l nel punto (x', x'_i) in funzione dei valori delle X_l nelle porzioni di spazio $\overline{S}_{m+1,b}$ ed $\overline{S}_{m+1,a}$ e dei valori delle u_l e delle derivate parziali delle u_l rispetto alle variabili x, x_i in tutti i punti di $\overline{\Sigma}_{m,b}$ e di $\overline{\Sigma}_{m,a}$. È ciò che ora ci proponiamo di mostrare brevemente.

Introduciamo perciò nelle nostre considerazioni l'iperpiano $x = x'$ e chiamiamo I' la parte di questo iperpiano che è compresa fra $\overline{\Sigma}_m$ e C. I' divide la porzione dello spazio (x, x_i) compresa fra $\overline{\Sigma}_m$, B e C che innanzi abbiamo chiamata $\overline{S}'_{m+1,b}$ in due parti. Quella in cui $x \geqq x'$ continueremo a chiamarla $\overline{S}'_{m+1,b}$ e quella in cui $x \leqq x'$ la chiameremo, invece, $\overline{S}''_{m+1,b}$. Chiameremo ancora $\overline{\Sigma}_{m,b}$ e (C') le porzioni di Σ_m e di C che insieme a B e ad I' formano il contorno di $\overline{S}'_{m+1,b}$; chiameremo invece $\overline{\Sigma}''_{m,b}$ e (C'') le porzioni di Σ_m e di C che insieme, ancora, a B e ad I' formano il contorno di $\overline{S}''_{m+1,b}$.

Ricordiamo poi che, nel caso di $m = 2\,p$, la funzione:

$$\psi = (x' - x)\, \nabla^{p-1} \int_0^{x'-x} \frac{\sqrt{r^2 - u^2}}{u^2} \log \frac{r^2 - u^2}{r}\, d\, u\,, \quad \nabla = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\,,$$

soddisfa alla equazione (8). Essa può porsi anche sotto l'altra forma:

$$\psi = (x' - x)\,\nabla^{p-1} \int_0^{\tau} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2))\,d\tau\,, \quad \tau = \frac{x'-x}{r}\,.$$

Possiamo quindi costruire i due sistemi di integrali delle equazioni (2), analoghi agli integrali di prima specie che abbiamo di già considerati:

$$\left.\begin{aligned} v'_i = b(x'-x)\Bigg\{ & \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_b} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2))\,d\tau\right) \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial \tau_b}\left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_b} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2))\,d\tau\right)\right]_{\tau_b=1} \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x_i} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_b} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2))\,d\tau\right)_{\tau_b=1}\Bigg\}, \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

$$\left.\begin{aligned} v''_i = b(x'-x)\Bigg\{ & \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_b} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2))\,d\tau\right) \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial \tau_b}\left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_b} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2))\,d\tau\right)\right]_{\tau_b=1} \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x_i} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_b} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2))\,d\tau\right)_{\tau_b=1}\Bigg\}, \\ & \tau_b = \frac{b(x'-x)}{r}, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Si vede facilmente che le v'_i e le loro funzioni coniugate, che indicheremo con V'_i, si annullano su quella falda di B su cui $x' \leqq x_i$; mentre le v''_i e le loro funzioni coniugate, V''_i, si annullano sull'altra falda di B su cui $x' \geqq x$. Similmente possiamo costruire sistemi di integrali analoghi a quelli di seconda specie, ponendo:

$$\left.\begin{aligned}
v_h''' = &- a(x'-x)\Bigg\{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nabla^{p-1}\int_0^{\tau_a}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2}\log\left(r(1-\tau^2)\right)d\tau\right)\\
&+\left[\frac{\partial}{\partial\tau_a}\left(\nabla^{p-1}\int_0^{\tau_a}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2}\log\left(r(1-\tau^2)\right)d\tau\right)\right]_{\tau_a=1}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x_k}\\
&+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nabla^{p-1}\int_0^{\tau_a}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2}\log\left(r(1-\tau^2)\right)d\tau\right)_{\tau_a=1}\Bigg\},\\
v_k''' = &\; a(x'-x)\Bigg\{\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\nabla^{p-1}\int_0^{\tau_a}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2}\log\left(r(1-\tau^2)\right)d\tau\right)\\
&+\left[\frac{\partial}{\partial\tau_a}\left(\nabla^{p-1}\int_0^{\tau_a}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2}\log\left(r(1-\tau^2)\right)d\tau\right)\right]_{\tau_a=1}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x_h}\\
&+\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\nabla^{p-1}\int_0^{\tau_a}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2}\log\left(r(1-\tau^2)\right)d\tau\right)_{\tau_a=1}\Bigg\},\\
&v_i''' = 0 \quad \text{per } i \neq h,\ k.
\end{aligned}\right\}\tag{44}$$

$$\left.\begin{aligned}
v_h^{\mathrm{IV}} = &- a(x'-x)\Bigg\{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nabla^{p-1}\int_0^{\tau_a}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2}\log\left(r(1-\tau^2)\right)d\tau\right)\\
&+\left[\frac{\partial}{\partial\tau_a}\left(\nabla^{p-1}\int_0^{\tau_a}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2}\log\left(r(1-\tau^2)\right)d\tau\right)\right]_{\tau_a=1}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x_k}\\
&-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nabla^{p-1}\int_0^{\tau_a}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2}\log\left(r(1-\tau^2)\right)d\tau\right)_{\tau_a=1}\Bigg\},\\
v_k^{\mathrm{IV}} = &\; a(x'-x)\Bigg\{\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\nabla^{p-1}\int_0^{\tau_a}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2}\log\left(r(1-\tau^2)\right)d\tau\right)\\
&+\left[\frac{\partial}{\partial\tau_a}\left(\nabla^{p-1}\int_0^{\tau_a}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2}\log\left(r(1-\tau^2)\right)d\tau\right)\right]_{\tau_a=1}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x_h}\\
&-\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\nabla^{p-1}\int_0^{\tau_a}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2}\log\left(r(1-\tau^2)\right)d\tau\right)_{\tau_a=1}\Bigg\},\\
&v_i^{\mathrm{IV}} = 0 \quad \text{per } i \neq h,\ k.
\end{aligned}\right\}\tag{45}$$

Si vede anche ora facilmente che il sistema di integrali v_i''' e le loro funzioni coniugate V_i''' si annullano su quella falda di A su cui $x' \leqq x$; mentre gli integrali (45) e le loro funzioni coniugate V_i^{IV} si annullano sull'altra falda di A, su cui $x' \geqq x$.

Ed ora applichiamo la formola (A) in ciascuna delle due porzioni dello spazio (x, x_i): $\overline{S}'_{m+1,b}$ ed $\overline{S}''_{m+1,b}$, ponendo, per le u'_i, nel primo caso gli integrali (42) e nel secondo gli integrali (43). Notando allora che su I' è $x = x'$, potremo scrivere le due formole seguenti:

$$\int\limits_{\overline{S}'_{m+1,b}} \sum_1^m {}_i X_i v'_i \, d\, S_{m+1} + \int\limits_{\overline{\Sigma}'_{m,b}+(C')} \left(\sum_1^m {}_i U_i v'_i - \sum_4^m {}_i V'_i u_i \right) d\, \Sigma_m - \int\limits_{I'} \sum_1^m {}_i u_i \frac{\partial v'_i}{\partial x} d\, I' = 0,$$

$$\int\limits_{\overline{S}''_{m+1,b}} \sum_1^m {}_i X_i v_i'' \, d\, S_{m+1} + \int\limits_{\overline{\Sigma}''_{m,b}+(C'')} \left(\sum_1^m {}_i U_i v_i'' - \sum_1^m {}_i V_i'' u_i \right) d\, \Sigma_m + \int\limits_{I'} \sum_1^m {}_i u_i \frac{\partial v_i''}{\partial x} d\, I' = 0.$$

. Facendo ora, in queste formole, tendere ε a zero, si trova subito che gli integrali estesi a (C') e a (C'') svaniscono, mentre l'integrale esteso ad I' diventa l'integrale esteso a tutta la porzione I dell'iperpiano $x = x'$, compresa fra la varietà $\overline{\Sigma}_m$. Inoltre, al limite, $\overline{S}'_{m+1,b}$ ed $\overline{S}''_{m+1,b}$ rappresentano le due porzioni dello spazio (x, x_i) limitate da $\overline{\Sigma}'_{m,b}$, B ed I e da $\overline{\Sigma}''_{m,b}$, B ed I, rispettivamente. Se ora sommiamo le due relazioni precedenti, ponendo prima:

$$\left.\begin{aligned} \overline{T} = & \int\limits_{\overline{S}'_{m+1,b}} \sum_1^m {}_i X_i v'_i \, d\, S_{m+1} + \int\limits_{\overline{S}''_{m+1,b}} \sum_1^m {}_i X_i v_i'' \, d\, S_{m+1} \\ & + \int\limits_{\overline{\Sigma}'_{m,b}} \left(\sum_1^m {}_i U_i v'_i - \sum_1^m {}_i V'_i u_i \right) d\, \Sigma_m + \int\limits_{\overline{\Sigma}''_{m,b}} \left(\sum_1^m {}_i U_i v_i'' - \sum_1^m {}_i V_i'' u_i \right) d\, \Sigma_m , \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

potremo scrivere la formola:

$$\overline{T} = 2\, b \sum_1^m {}_i \frac{\partial}{\partial x'_i} \int\limits_I u_i \left(\nabla^{p-1} \int\limits_0^{\tau_b} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log\, (r\,(1-\tau^2))\, d\, \tau \right)_{\tau b = 1} d\, I. \quad (47)$$

Allo stesso modo, applicando la formola (A) nelle due porzioni dello spazio (x, x_i): $\overline{S}'_{m+1,a}$, $\overline{S}''_{m+1,b}$, dopo aver posto per le u'_i nel primo caso gli integrali (44) e nel secondo gli integrali (45), si possono stabilire delle formole analoghe. E, se poniamo:

$$\left.\begin{aligned}\overline{P}_{h,k} = & \int_{\overline{S}'_{m+1,a}} (X_h v_h''' + X_k v_k''')\, d\, S_{m+1} + \int_{\overline{S}''_{m+1,a}} (X_h v_h^{\mathrm{IV}} + X_k v_k^{\mathrm{IV}})\, d\, S_{m+1} \\ & + \int_{\Sigma'_{m,a}} (U_h v_h''' + U_k v_k''' - V_h''' u_h - V_k''' u_k)\, d\, \Sigma_m \\ & + \int_{\Sigma''_{m,a}} (U_h v_h^{\mathrm{IV}} + U_k v_k^{\mathrm{IV}} - V_h^{\mathrm{IV}} u_h - V_k^{\mathrm{IV}} v_k)\, d\, \Sigma_m ,\end{aligned}\right\} \quad (48)$$

queste formole potranno scriversi come segue:

$$\left.\begin{aligned}\overline{P}_{h,k} = 2\, a \Bigg\{ & \frac{\partial}{\partial x'_k} \int_I u_h \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_a} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log\,(r\,(1-\tau^2))\, d\,\tau \right)_{\tau_{a=1}} d\, I \\ & - \frac{\partial}{\partial x'_h} \int_I u_k \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_a} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log\,(r\,(1-\tau^2))\, d\,\tau \right)_{\tau_{a=1}} d\, I \Bigg\} \\ & (h,\ k = 1,\ 2, \dots\ m).\end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Per determinare ora il valore di una qualunque delle u, per es., di u_j, nel punto (x', x'_i), deriviamo la (47) rispetto ad x'_j e tutte le formole analoghe alla (49) in cui h ha il valore j, rispetto ad x'_k e sommiamo i risultati dopo di aver divisa la prima per b e le altre per a. Troviamo, facilmente, a questo modo:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{1}{b} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x'_j} + \frac{1}{a} \sum_1^m {}_k \frac{\partial \overline{P}_{j,k}}{\partial x'_k} \\ & = 2 \sum_1^m {}_i \frac{\partial^2}{\partial x'^2_i} \int_I u_j \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_b} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log\,(r\,(1-\tau^2))\, d\,\tau \right)_{\tau_{b=1}} d I.\end{aligned}\right\} \quad (50)$$

A questo punto notiamo che:

$$\left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_b} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log\,(r\,(1-\tau^2))\, d\,\tau \right)_{\tau_{b=1}} = \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_a} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log\,(r\,(1-\tau^2))\, d\,\tau \right)_{\tau_{a=1}},$$

è un integrale particolare dell'equazione:

$$\sum_1^m {}_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0,$$

e che nel punto $x_i = x'_i$ diventa infinita come $\frac{1}{r^{m-2}}$.

Applicando quindi un ragionamento analogo a quello che si fa per stabilire il teorema di Poisson, nella teoria del potenziale, e notando che:

$$2 \lim_{r=0} r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r}\left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_b} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log\left(r\left(1-\tau^2\right)\right) d\tau\right)_{\tau_b=1} = \pi(-2)^{p-1}\Gamma(p),$$

si trova:

$$2^p(-\pi)^{p+1} u_j(x', x'_i) = \frac{1}{b}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x'_j} + \frac{1}{a}\sum_1^m {}_k \frac{\partial \overline{P}_{j,k}}{\partial x'_k}, \quad (j = 1, 2, \ldots m). \quad (51)$$

Novembre 1897.

Una estensione del problema della proiettività a gruppi di complessi e di congruenze lineari di rette.

(*Di* Domenico Montesano, *a Napoli.*)

In questa Memoria sono risolute le seguenti quistioni:

1.ª *Dati nello spazio* μ *complessi lineari di rette* $K_1, \ldots, K_\mu$, *studiare il sistema dei fasci di rette dello spazio nei quali i raggi* $r_1, \ldots r_\mu$ *che appartengono rispettivamente ai complessi dati, formano un gruppo proiettivo ad un gruppo dato* $g \equiv e_1 \ldots e_\mu$ *di una forma fondamentale geometrica di 1ª specie; per* $\mu = 4, 5, 6, 7, 8$.

2.ª *Date in un complesso lineare di rette* ν *congruenze lineari* $Q_1, \ldots Q_\nu$, *studiare il sistema dei fasci di raggi del complesso, nei quali i raggi* $r_1, \ldots r_\nu$ *che appartengono rispettivamente alle congruenze date, formano un gruppo proiettivo ad un gruppo dato* $g \equiv e_1, \ldots e_\nu$ *di una forma fondamentale geometrica di 1.ª specie; per* $\nu = 4, 5, 6$.

3.ª *Dati 5 complessi lineari di rette* $K_1, \ldots K_5$, *studiare la curva luogo di un punto a cui nei complessi dati corrispondono piani formanti un gruppo omografico ad un gruppo assegnato costituito da 5 piani* $\pi_1, \ldots \pi_5$ *di una stella, e stabilire le proprietà della congruenza lineare formata dalle curve dello spazio del tipo indicato.*

Fra i molteplici risultati ottenuti degni di speciale menzione sono quelli stabiliti pel sistema ∞^4 dei fasci di raggi che si presenta nella prima quistione per $\mu = 4$. Questo sistema è collegato ad un *complesso di coniche* e ad un *complesso di coni di 2ª classe* dello spazio, il cui studio forma la prima parte della presente Memoria (Cap. I e II).

Notevole è anche il fatto che nella prima quistione per $\mu = 5$ si presenta un sistema ∞^3 di fasci di raggi sì fatti che un punto od un piano generico dello spazio è sostegno di un unico fascio del sistema, onde ne risulta una *reciprocità birazionale nulla* nello spazio di 7° grado, studiata ampiamente nel Cap. V.

La seconda e la terza quistione ed altre che ad esse si connettono, sono trattate rispettivamente nei Cap. III e IV, e i risultati ottenuti sono stati applicati per stabilire vari notevoli teoremi su la superficie di 3° ordine, che riguardano specialmente i gruppi formati da 5 o da 6 rette della superficie due a due fra loro sghembe.

Infine i sistemi di fasci di raggi che si presentano nella prima quistione per $\mu = 6$ e per $\mu = 7$ o 8, sono studiati rispettivamente nei Cap. VI e VII.

Da alcune proposizioni di *Geometria numerativa* ottenute in questa Memoria, possono dedursi vari teoremi già stabiliti da Sturm (*Ueber correlative oder reciproche Bündel.* Math. Annalen, Bd. XII) e da Schubert (*Abzählende Geometrie*), supponendo che i complessi lineari, a cui esse proposizioni si riferiscono, fossero tutti singolari. E di ciò nei singoli casi si fa cenno.

I.

1. *I fasci di rette dello spazio nei quali i raggi appartenenti a 4 complessi lineari di rette $K_1, .. K_4$ dati ad arbitrio formano un gruppo proiettivo ad un gruppo assegnato $g \equiv e_1 .. e_4$, costituiscono un sistema Σ.*

In un piano generico dello spazio esistono ∞^1 fasci di raggi del sistema aventi i centri su di una conica.

Un punto generico dello spazio è centro di ∞^1 fasci di raggi del sistema situati nei piani di un cono di seconda classe.

Infatti designando con $O_1, .. O_4$ i poli di un piano ω nelle polarità nulle $\Pi_1, .. \Pi_4$ dovute ai complessi dati, i fasci di raggi del sistema Σ situati in ω hanno per centro i punti del piano dai quali proiettando i punti $O_1, .. O_4$ ottengonsi quaterne proiettive al gruppo dato g. Essi centri si trovano perciò su di una conica che contiene i punti $O_1, .. O_4$ i quali su di essa costituiscono un gruppo proiettivo a g.

L'assieme ∞^3 delle coniche dovute nel modo ora indicato ai piani dello spazio (una per ogni piano) costituisce un *complesso di coniche* Γ.

L'assieme ∞^3 dei coni di 2ª classe dovuti nel modo anzidetto ai punti dello spazio (uno per ogni punto) costituisce un *complesso di coni* Γ'.

Le leggi di generazione pei due complessi sono dunque le seguenti:

Una conica del complesso Γ contiene i poli del suo piano nelle polarità nulle $\Pi_1, .. \Pi_4$ dovute ai complessi dati, e questi poli formano su di essa un gruppo proiettivo al gruppo dato g.

Un cono di 2ª classe del complesso Γ' contiene i piani polari del suo vertice nelle polarità nulle $\Pi_1, ... \Pi_4$ dovute ai complessi dati, e questi piani formano nel cono un gruppo proiettivo al gruppo dato g.

Di più fra i due complessi Γ, Γ' intercedono le seguenti relazioni:

Le ∞^1 coniche del complesso Γ che passano per un punto O, sono nei piani del cono del complesso Γ' che ha il vertice in O.

Gli ∞^1 coni del complesso Γ' che contengono un piano ω hanno i vertici sulla conica del complesso Γ che si trova nel piano ω.

2. Siano q, q' i raggi comuni ai complessi $K_1, .. K_4$. Essendo $(O - \omega)$ un fascio arbitrario del sistema Σ, si consideri la congruenza lineare di rette Q che contiene le q, q' ed il fascio $(O - \omega)$. Essa ammette per direttrici le rette d, d' appoggiate alle q, q', di cui l'una passa per O e l'altra giace in ω.

Il quadrilatero gobbo $q\,d\,q'\,d'$ che ne risulta, trovasi sulle quadriche sostegni delle schiere rigate $\rho_1, .. \rho_4$ comuni alla Q ed ai complessi $K_1, .. K_4$, sicchè tali quadriche formano un fascio-schiera, ed i 4 raggi delle $\rho_1, .. \rho_4$ che si trovano in un qualsiasi fascio della congruenza Q, formano un gruppo proiettivo al gruppo analogo dovuto ad $(O - \omega)$; epperò tutti i fasci della congruenza Q al pari di $(O - \omega)$ appartengono al sistema Σ. Ne segue che

I fasci di raggi del sistema Σ si distribuiscono in ∞^3 congruenze lineari le cui direttrici si appoggiano ai raggi q, q' comuni ai complessi dati.

Diremo che tali congruenze *appartengono* al sistema Σ.

Una retta d che incontri le q, q', è direttrice di ∞^1 congruenze del sistema.

Le loro seconde direttrici formano una rigata la quale essendo segata da un piano arbitrario ω del fascio (d) secondo la conica del complesso Γ situata in ω (e correlativamente essendo proiettata da un punto O della d secondo il cono del complesso Γ' che ha il vertice in O) risulta di 4° grado ed ha per direttrici doppie le q, q' e per generatrice doppia la d. Di più essa contiene le rette $d_1, ... d_4$ coniugate alla d nelle polarità $\Pi_1, .. \Pi_4$, e queste rette costituiscono su di essa un gruppo proiettivo a g; ciò che la determina completamente.

Dunque: *Se nella congruenza di rette che ha per direttrici i raggi q, q' comuni ai complessi dati, si riguardano corrispondenti due rette che siano direttrici di una congruenza del sistema Σ, nella corrispondenza involutoria che ne risulta, ad una retta generica d della congruenza corrisponde una rigata razionale di 4º grado che ha per retta doppia la d.*

3. Sia r un raggio comune a tre qualunque dei complessi dati, per esempio ai complessi K_2, K_3, K_4. Ad un piano ω che contenga il raggio r corrispondono nelle polarità Π_2, Π_3, Π_4 tre punti O_2, O_3, O_4 situati sulla r, sicchè la conica del complesso Γ situata in ω si spezza nella retta r e nella retta r' che unisce il punto O_1 coniugato ad ω nella Π_1, a quel punto O' della r che assieme ai punti O_2, O_3, O_4 forma un gruppo $O' O_2 O_3 O_4$ proiettivo a g.

In particolare in un piano ω che contenga uno dei raggi comuni ai complessi dati la conica del complesso Γ riducesi a tale raggio q contato due volte.

Soltanto nel caso che i 4 poli $O_1,.. O_4$ del piano ω nelle polarità date formino sulla q un gruppo proiettivo al gruppo dato g, si ha che ogni fascio di raggi del piano ω appartiene al sistema Σ, sicchè allora ogni retta del piano forma con la q una conica del complesso Γ.

Per determinare il numero di questi piani *singolari* nel fascio (q) basta notare che se per ogni piano ω del fascio si costruiscono i poli $O_1,.. O_4$ nelle polarità $\Pi_1,.. \Pi_4$, e si determina quel punto O' della q per cui il gruppo $O' O_2 O_3 O_4$ è proiettivo al gruppo g, la corrispondenza che viene ad aversi fra i punti O_1 e O' della q, col variare del piano ω, è una corrispondenza $(1, 3)$, sicchè ammette 4 coincidenze che sono appunto dovute ai piani singolari del fascio. Dunque:

In un piano dello spazio esiste una sola conica del complesso Γ. Fanno eccezione soltanto 8 piani singolari, 4 del fascio (q) e 4 del fascio (q'), dei quali ciascuno è sostegno di ∞^2 coniche del complesso formate dalla q (o dalla q') e dalle singole rette del piano.

Correlativamente per ogni punto di un raggio r comune a tre dei complessi dati il cono del complesso Γ' si spezza in due fasci di piani, di cui uno ha per asse la retta r. Per un punto generico di uno dei raggi q, q' il cono del complesso si riduce al fascio (q) (o al fascio (q')) contato due volte; ma su ognuna delle rette q, q' esistono 4 punti *singolari* dei quali ciascuno ha per corrispondenti nelle polarità $\Pi_1,.. \Pi_4$ 4 piani formanti un gruppo proiettivo a g, sicchè ognuno di tali punti è centro di ∞^2 fasci di raggi del sistema Σ e corrispondentemente è vertice di ∞^2 coni del complesso Γ', di cui ciascuno si scinde nel fascio (q) (o (q')) ed in un fascio arbitrario della stella. Dunque:

Un punto dello spazio è vertice di un solo cono del complesso Γ'. Esistono soltanto 8 punti singolari, 4 sulla retta q e 4 sulla q', dei quali ciascuno è vertice di ∞^2 coni del complesso, costituiti da coppie di fasci di piani aventi per asse la retta q (o la q') e le singole rette della stella.

Dalle proprietà caratteristiche dei punti e dei piani singolari del sistema Σ segue che:

Un punto singolare O del sistema si trova sulle ∞^2 coniche del complesso Γ, situate nei singoli piani passanti per O.

Un piano singolare ω del sistema fa parte degli ∞^2 coni del complesso Γ' che hanno per vertici i singoli punti del piano ω

È agevole anche riconoscere che i 4 punti singolari del sistema situati su una delle rette q, q' appartengono uno ad uno ai 4 piani singolari che passano per l'altra di tali rette.

Infatti se ω è un piano singolare del fascio (q') che ammetta per poli nelle polarità $\Pi_1,.. \Pi_4$ i punti O_1, .. O_4 e che incontri in O la q, i piani polari di questo punto nelle $\Pi_1,.. \Pi_4$ hanno in comune la retta q e passano rispettivamente per le rette $O\,O_1,.. O\,O_4$, onde costituiscono un gruppo prospettivo alla quaterna $O_1.. O_4$ e perciò proiettivo al gruppo g, sicchè il punto O è singolare pel sistema.

Un punto singolare O e un piano singolare ω che si appartengano, determinano una congruenza lineare di rette degenere, formata dalla stella di raggi (O) e dal sistema piano rigato (ω). Un fascio di raggi di questa congruenza fa parte o della stella (O) o del piano (ω). Nell'un caso o nell'altro esso appartiene al sistema Σ, sicchè la congruenza in esame appartiene al sistema. Dunque:

Nel sistema Σ vi sono 8 congruenze lineari degeneri.

Si noti in ultimo *che per determinare il sistema Σ, dati i complessi $K_1,.. K_4$, si può assegnare un suo punto singolare o un suo piano singolare che appartengano a un raggio comune ai complessi dati,* perchè con ciò in entrambi i casi resta noto il *gruppo caratteristico g* del sistema (*).

Se questo gruppo varia in tutti i modi possibili, il sistema Σ varia descrivendo un assieme ∞^1 che comprende tutti i fasci di raggi dello spazio, in modo che un fascio generico appartiene ad un unico sistema dell'assieme; ec., ec.

(*) Dai risultati ottenuti segue che dati 4 complessi lineari di rette in posizione affatto arbitraria fra loro che abbiano in comune i raggi q, q', se si riguardano corrispondenti un punto O di q ed un punto O' di q', ai quali nelle polarità $\Pi_1,.. \Pi_4$ dovute ai com-

4. I tre complessi K_2, K_3, K_4 abbiano in comune la schiera rigata ρ_1; e sia σ_1 la schiera incidente alla ρ_1.

Ad una retta arbitraria d della σ_1 corrispondono nelle polarità Π_2, Π_3, Π_4 tre rette d_2, d_3, d_4 situate del pari sulla σ_1. Ora costruita su questa schiera la retta d' tale che il gruppo $d' d_2 d_3 d_4$ risulti proiettivo al gruppo g, si consideri la schiera rigata ρ' che ha per direttrici la d, la d' e la d_1 coniugata alla d nella Π_1.

In un piano π del fascio (d) che contenga i raggi r, r' delle schiere ρ_1, ρ', la conica del complesso Γ si scinde in tali rette r, r' (§ 3); e correlativamente per ogni punto P della d il cono del complesso Γ' si spezza nei due fasci di piani che hanno per assi i raggi delle schiere ρ, ρ' che passano per P.

Da ciò segue che la superficie luogo delle seconde direttrici delle congruenze lineari del sistema Σ che hanno per prima direttrice la retta d, si spezza nelle quadriche sostegni delle ρ_1, ρ' (§ 2).

Di più è agevole riconoscere che col variare della d sulla σ_1, la schiera ρ' descrive una congruenza di 4° grado contenuta nel complesso K_1.

Infatti le rette r' della congruenza che passano per un punto arbitrario O dello spazio, si trovano nei piani π comuni al cono del complesso Γ' ed al cono-inviluppo circoscritto alla quadrica sostegno della ρ_1, che hanno il vertice in O, sicchè il loro numero è 4.

Variando la retta d sulla σ_1, quando essa coincide con una delle due rette coniugate fra loro in entrambe le polarità Π_2, Π_3, le rette d_2, d_3 e perciò anche la d' coincidono con l'altra di tali rette, e la corrispondente schiera ρ' coincide con la schiera ρ_4 comune ai tre complessi K_1, K_2, K_3; sicchè la ρ_4 si presenta due volte nella genesi della congruenza in esame, e perciò risulta costituita da raggi doppi di tale congruenza.

---

plessi dati corrispondano due quaterne di piani fra loro proiettive, la corrispondenza che ne risulta fra le q, q', riducesi ad una corrispondenza biunivoca fra i gruppi di due involuzioni di 4° ordine. Ora è degno di nota il fatto che la superficie luogo delle congiungenti i punti di ciascuna quaterna della q ai punti della corrispondente quaterna della q', è costituita dalle rette che nella polarità $\Pi_1, .. \Pi_4$ hanno per coniugate rette di una stessa schiera rigata; vale a dire che

Il luogo delle rette a cui in 4 polarità nulle dello spazio fra loro indipendenti corrispondono rette di una stessa schiera rigata, è una superficie gobba di 8° grado che ha per direttrici quadruple i raggi comuni ai 4 complessi lineari determinati dalle polarità date. La superficie contiene le direttrici delle congruenze lineari comuni a questi complessi presi due a due.

Questa dunque ha le tre schiere di raggi doppi ρ_2, ρ_3, ρ_4. Inoltre dalla costruzione data per le rette della congruenza che passano per un punto O dello spazio, assumendo questo punto su una delle rette q, q', si deduce che queste rette sono quadruple per la congruenza.

Infine notando che un punto singolare O di Σ determina con un raggio arbitrario r della ρ_1 un piano π, in cui la conica del complesso Γ si spezza nella retta r e nel raggio r' del complesso K_1 che appartiene al fascio $(O-\pi)$, sicchè variando la r e tenendo fisso il punto O tale raggio r' descrive il fascio del complesso K_1 che ha il centro in O, si deduce che la congruenza contiene gli 8 fasci di raggi del complesso K_1 che hanno per centri i punti singolari del sistema.

Correlativamente si dimostra che la congruenza contiene gli 8 fasci del complesso K_1 situati nei piani singolari, ed agevolmente si riconosce che i due fasci della congruenza dovuti a un punto singolare O e ad un piano singolare ω che si appartengono, costituiscono la schiera rigata ρ' dovuta alla retta d della σ_1 situata nel fascio $(O-\omega)$, ecc, ecc.

Quel che si è detto per la schiera rigata ρ_1 può ripetersi per le altre schiere ρ_2, ρ_3, ρ_4 comuni ai complessi $K_1, .. K_4$ presi tre a tre; e può affermarsi che

Le rette che assieme ai raggi delle schiere rigate comuni ai complessi $K_1, .. K_4$ presi tre a tre costituiscono coniche degeneri del complesso Γ (e coni degeneri del complesso Γ') appartengono a 4 congruenze di 4° grado $X_1, .. X_4$ contenute rispettivamente nei complessi $K_1, .. K_4$.

5. L'assieme ∞^3 dei complessi lineari di rette che passano per i raggi q, q', può essere riferito proiettivamente allo spazio ordinario in modo che ai complessi, alle congruenze lineari ed alle schiere rigate che contengono i raggi base q, q' del sistema, corrispondano rispettivamente i piani, le rette ed i punti dello spazio rappresentativo (*).

In tale riferimento alle ∞^3 congruenze del sistema Σ corrispondono ∞^3 rette godenti la proprietà di segare il gruppo dei piani $\omega_1, .. \omega_4$ corrispondenti ai complessi $K_1, .. K_4$, secondo quaterne di punti proiettive al gruppo g, sicchè le rette in quistione appartengono al complesso tetraedrale θ che ha per tetraedro fondamentale quello costituito dai piani $\omega_1, .. \omega_4$ e per gruppo caratteristico il gruppo g.

(*) Vegg. Reye, *Die Geometrie der Lage.* 3.ª edizione, II Parte, pag. 328, e la mia Nota, *Su i complessi di rette di secondo grado generati da due fasci proiettivi di complessi lineari.* (Napoli, 1886.)

Le rette d appoggiate alle q, q' sono assi dei complessi singolari dell'assieme che si considera. A questi complessi corrispondono nello spazio rappresentativo i piani δ di una quadrica-inviluppo $\chi_{(2)}$ (che viene chiamata *quadrica fondamentale* della rappresentazione) e che risulta riferita con corrispondenza biunivoca alla congruenza lineare di rette Q che ha per direttrici le q, q'.

In tale riferimento alla rigata $\rho_1 \equiv d^2$ della Q formata dalle seconde direttrici delle conguenze di Σ che hanno per prima direttrice un raggio arbitrario d della Q, corrisponde l'inviluppo $j_{(4)} \equiv \delta^2$ formato dai piani della $\chi_{(2)}$ condotti per i raggi del complesso θ giacenti nel corrispondente piano δ della $\chi_{(2)}$.

Ora se la retta d è una direttrice della schiera rigata $\rho_1 \equiv K_2 K_3 K_4$, il corrispondente piano δ passa per il punto $O_1 \equiv \omega_2 \omega_3 \omega_4$ e l'inviluppo $j_{(4)}$ precedentemente indicato si spezza nei due coni della $\chi_{(2)}$ che hanno i vertici nel punto O_1 ed in quel punto O' che con O_1 forma la conica-inviluppo del complesso θ dovuta al piano δ. Perciò questo punto O' nella rappresentazione stabilita corrisponde alla schiera rigata ρ', dovuta alla d, della congruenza di 4° grado X_1 studiata nel § precedente, vale a dire che tale congruenza X_1 nella rappresentazione stabilita ha per corrispondente la curva $c_{(4)} \equiv (O_2\, O_3\, O_4)^2$ del piano ω_1, formata dai centri dei fasci del complesso θ situati nei piani del cono circoscritto alla $\chi_{(2)}$ che ha per vertice il punto O_1, sicchè le ulteriori proprietà della congruenza possono essere stabilite facilmente con metodi da me altrove indicati (*).

Inoltre, siccome nello spazio rappresentativo i vertici $O_1, .. O_4$ del tetraedro fondamentale vengono proiettati dai raggi del complesso θ secondo quaterne proiettive al gruppo g, perciò si ha che:

Le schiere rigate $\rho_1, .. \rho_4$ comuni ai complessi $K_1, . K_4$ presi tre a tre, determinano con ciascuna congruenza del sistema Σ un gruppo di quattro complessi lineari proiettivo al gruppo dato g.

In particolare per le otto congruenze degeneri del sistema Σ (le quali corrispondono agli otto raggi del complesso θ situati sulla quadrica $\chi_{(2)}$) si ha che:

Nei singoli fasci di raggi che hanno per sostegni un punto ed un piano singolari del sistema Σ che si appartengano, le direttrici delle schiere rigate $\rho_1, .. \rho_4$ formano un gruppo proiettivo al gruppo dato g.

(*) *Su i complessi di rette di 2.° grado, ecc.*, Mem. cit. § 6.

II.

6. Un complesso di coniche nello spazio presenta vari numeri caratteristici.

Noi assumeremo come *caratteristiche elementari* del complesso: 1.° il numero delle sue coniche che si trovano in un piano generico dello spazio; 2.° la classe del cono formato dai piani sostegni delle coniche del complesso che passano per un punto generico dello spazio.

La superficie luogo delle coniche del complesso situate nei piani di un fascio generico dello spazio, ha per retta multipla secondo β l'asse r del fascio, se β è il secondo dei due numeri indicati; e la sua sezione variabile con un piano del fascio equivale ad una linea di ordine 2α, se α è il primo dei predetti numeri, sicchè l'ordine della superficie è $2\alpha + \beta$.

Pel complesso Γ definito nel capitolo precedente $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Da ciò e dalla genesi del complesso segue che:

1.° *Le coniche del complesso Γ situate nei piani di un fascio arbitrario formano una superficie di 4° ordine che ha per linea doppia l'asse r del fascio e per linee semplici le rette $r_1, \ldots r_4$ coniugate alla r nelle polarità $\Pi_1, \ldots \Pi_4$. La superficie contiene gli otto punti singolari del sistema Σ.*

Se la r incontra una delle rette q, q' comuni ai complessi dati $K_1, \ldots K_4$, essa retta q (o q') risulta doppia per la superficie $\rho_{(4)}$. Più particolarmente se la r cade in uno dei piani singolari di Σ, dalla superficie $\rho_{(4)}$ si stacca tale piano singolare; invece se la r passa per un punto singolare del sistema, tale punto risulta triplo per la superficie $\rho_{(4)}$.

Infine se la retta r è un raggio comune a tre dei complessi $K_1, \ldots K_4$ la superficie $\rho_{(4)}$ risulta rigata, ha la retta r per direttrice tripla, ed è contenuta in una delle congruenze $X_1, \ldots X_4$ del § 4.

L'inviluppo di piani correlativo alla superficie di 4° ordine presa ora in esame, essendo costituita dagli ∞^1 coni del complesso Γ' (definito nel capitolo precedente) che hanno i vertici su di una retta arbitraria s, risulta l'assieme dei piani delle coniche del complesso Γ che incontrano la s. Dunque:

2.° *Le ∞^2 coniche del complesso Γ che si appoggiano ad una retta s, sono nei piani di un inviluppo di 4ª classe, di cui sono doppi i piani del fascio (s) e semplici i piani dei fasci che hanno per assi le rette $s_1, \ldots s_4$ coniugate alla s nelle polarità $\Pi_1, \ldots \Pi_4$. All'inviluppo appartengono gli otto piani singolari del sistema.*

I piani comuni all'inviluppo ora indicato e ad un cono arbitrario del complesso Γ' di vertice P, sono sostegni di coniche del complesso Γ che passano per P e si appoggiano alla s; vale a dire che:

3.° *Le coniche del complesso Γ che incontrano una retta arbitraria s, formano una congruenza di 8° ordine e di 4ª classe* (*).

4.° *Le coniche del complesso Γ che passano per un punto generico P dello spazio, formano una superficie di 8° ordine.*

Questa superficie ha in P un punto sestuplo. Da ciò segue che:

5.° *Vi sono sei coniche del complesso Γ che risultano tangenti ad un piano π in un punto P di tale piano.*

Si è ora al caso di determinare gli altri numeri caratteristici del complesso Γ.

Per es. dalla proposizione 1.ª si deduce che il numero delle coniche del complesso tangenti ad una retta arbitraria r è 4 e che il numero delle coniche del complesso che hanno per corda una retta arbitraria r e sono tangenti a un piano ω non passante per la r è 6 (numero delle tangenti che da un punto doppio di una curva piana di 4.° ordine e di genere 2 vanno a toccare altrove la curva), mentre nel caso che la r sia in un piano singolare ω, il numero anzidetto, non tenendo conto del piano ω, riducesi a 4.

E può affermarsi che:

6.° *Le ∞^2 coniche del complesso Γ tangenti ad un piano arbitrario π dello spazio, sono in piani di un inviluppo di 6ª classe, di cui il piano π è doppio e la relativa linea di contatto è la conica del complesso situata in π. Dell'inviluppo sono doppi gli 8 piani singolari del sistema Σ e sono semplici gli altri piani dei fasci (q), (q').*

I 12 piani che il precedente inviluppo ha in comune con un cono del complesso Γ' di vertice P, nel caso che questo punto appartenga al piano π, coincidono due a due con i piani sostegni delle 6 coniche indicate nella proposizione 4.ª Invece nel caso generale essi risultano distinti, e sono sostegni di coniche di Γ che passano per il punto P e toccano il piano ω. Ne segue che:

7.° *Le coniche del complesso Γ tangenti ad un piano ω formano una congruenza di 12° ordine e di 6ª classe.*

Infine si ha che:

(*) Chiamo *ordine* di una congruenza di coniche il numero delle coniche della congruenza che passano per un punto generico dello spazio, e *classe* il numero delle coniche della congruenza che hanno per corda una retta generica dello spazio.

8.° *Le coniche del complesso Γ situate nei piani di una stella arbitraria* (P) *formano una congruenza di 2° ordine e di 1ª classe. La superficie focale di questa congruenza* (formata dai vertici dei coni del complesso Γ' che passano per il punto P, e perciò correlativa all'inviluppo della precedente proposizione) *è di 6° ordine, contiene le rette q, q'; ha per punti doppi il punto P e gli 8 punti singolari di Σ; ha per cono tangente in P il cono del complesso Γ', e da ogni conica della congruenza è toccata in 6 punti,* ecc., ecc.

7. La superficie di 8° ordine $\sigma_{(8)}$ luogo delle coniche del complesso Γ che passano per un punto arbitrario O dello spazio, avendo in O un punto sestuplo, è segata ulteriormente dal piano di una conica $c_{(2)}$ secondo una curva di 6° ordine che ha in O un punto 5-plo. Esistono perciò sulla $\sigma_{(8)}$ due sistemi ∞^1 di curve piane razionali $c_{(2)} \equiv O$, $c_{(6)} \equiv O^5$ situate nei piani del cono $\chi_{(2)}$ del complesso Γ' di vertice O.

Due coniche $c_{(2)}$, $c'_{(2)}$ della superficie non hanno in generale oltre di O un secondo punto in comune, sicchè il punto in cui la prima di esse incontra, oltre che in O, il piano della seconda, si trova sulla curva $c'_{(6)}$ ulteriore sezione della superficie con tale piano. Da ciò segue che due curve $c_{(6)}$ della superficie non hanno, oltre di O, un secondo punto variabile in comune; una $c_{(2)}$ e una $c'_{(6)}$ hanno in comune, in generale, un solo punto variabile; e per un punto generico della superficie passa una sola curva di ciascuno dei due sistemi.

Perciò riferiti il sistema delle $c_{(2)}$ e quello delle $c_{(6)}$ con corrispondenze proiettive rispettivamente a due fasci di raggi (P), (Q) di un medesimo piano ω, ne risulta una corrispondenza birazionale fra questo piano ω e la superficie $\sigma_{(8)}$, sì fatta che alle sezioni piane della $\sigma_{(8)}$ corrispondono in ω delle curve di 8° ordine, per le quali il punto P è 6-plo ed il punto Q è doppio.

Ogni conica $c_{(2)}$ della superficie $\sigma_{(8)}$ contiene i poli del suo piano nelle polarità $\Pi_1, .. \Pi_4$. Di conseguenza la superficie $\sigma_{(8)}$ contiene le quattro coniche che nelle predette polarità corrispondono al cono $\chi_{(2)}$ già indicato. Esse si trovano nei piani del cono $\chi_{(2)}$ che corrispondono al punto O nelle $\Pi_1, .. \Pi_4$, ed una qualsiasi c_i di esse forma una curva $c_{(6)}$ della $\sigma_{(8)}$ con i quattro raggi uscenti da O della congruenza X_i del § 4.

D'altra parte uno qualsiasi di questi raggi fa parte di una conica $c_{(2)}$ della $\sigma_{(8)}$, perciò nella rappresentazione stabilita della $\sigma_{(8)}$ sul piano ω, al raggio anzidetto corrisponde un punto fondamentale semplice della rappresentazione.

Nè questa ammette altri punti fondamentali; cioè le curve immagini delle sezioni piane della superficie sono delle $c_{(8)} \equiv P^6 Q^2$, 16 R, essendo i punti R su 4 rette del fascio (Q), 4 su ogni retta.

Alla curva di sezione della $\sigma_{(8)}$ con un piano arbitrario della stella (O) corrisponde sul piano α una curva che ha un solo punto variabile in comune con ogni retta dei fasci (P), (Q) e che passa semplicemente per i punti P, Q (immagini di una $c_{(6)}$ e di una $c_{(2)}$ rispettivamente), corrisponde cioè una conica $c_{(2)} \equiv P\,Q$; donde segue che al punto O della $\sigma_{(8)}$ corrisponde su ω una curva $c_{(6)} \equiv P^5\,Q,\,16\,R$.

Dalla rappresentazione data segue anche che il genere di una sezione piana arbitraria della $\sigma_{(8)}$ è 5, mentre le sezioni prodotte nella superficie dai piani della stella (O) sono razionali; e siccome sulla $\sigma_{(8)}$ oltre di O non vi può essere alcun punto di multiplicità superiore a 2, perciò la superficie ammette una linea doppia di 16° ordine che ha in O un punto multiplo secondo 10.

I sei punti variabili di sezione di tale linea $c_{(16)}$ con un piano τ del cono $\chi_{(2)}$ non potendo essere doppi per l'una o per l'altra delle due curve $c_{(2)}$, $c_{(6)}$ prodotte dal piano τ nella $\sigma_{(8)}$, risultano comuni alle due curve; mentre il 7° punto (diverso da O) che le due linee hanno in comune, è punto di contatto del piano τ con la superficie.

Da ciò segue che le coniche $c_{(2)}$ e le curve $c_{(6)}$ si appoggiano ciascuna in 6 punti alla $c_{(16)}$; e analogamente dalla considerazione dei piani polari del punto O nelle $\Pi_1, \ldots\, \Pi_4$ si deduce che le 16 rette r della $\sigma_{(8)}$ che passano pel punto O, hanno ciascuna un altro punto solo in comune con la $c_{(16)}$, sicchè l'immagine di questa curva nel piano ω è una $c_{(12)} \equiv P^6\,Q^6$, 16 R.

La completa sezione della superficie $\sigma_{(8)}$ con il cono di 6° ordine che dal punto O proietta la $c_{(16)}$, è costituita da questa curva e dalle 16 rette r, sicchè il cono indicato non ammette alcuna generatrice multipla, perchè altrimenti tale retta apparterrebbe anche alla $\sigma_{(8)}$.

Ne segue che la $c_{(16)}$ è di genere 10.

Infine è agevole riconoscere che la $c_{(16)}$ passa semplicemente per gli 8 punti singolari del complesso.

8. Su una quadrica $\varphi_{(2)}$ che contenga i raggi q, q' si assuma ad arbitrio una generatrice d di sistema opposto ai predetti raggi, e si consideri la superficie $\rho_{(4)} \equiv (q\,q'\,d)^2$ luogo delle seconde direttrici delle congruenze del sistema Σ che hanno per prima direttrice la d (§ 2).

Le superficie $\varphi_{(2)}$, $\rho_{(4)}$ hanno in comune, oltre alle q, q', d, due generatrici d', d'_1 di cui ciascuno determina con la d una congruenza del sistema Σ. Col variare della d nella schiera rigata α' della $\varphi_{(2)}$ che non contiene le q, q', variano del pari in tale schiera le d', d'_1 e corrispondono alla d in una corrispondenza involutoria $j_{2,2}$.

Dunque *su ogni quadrica* $\varphi_{(2)} \equiv q\,q'$, *nella schiera incidente a questi raggi, si ha una corrispondenza involutoria* $j_{2,2}$, *nella quale due rette coniugate sono direttrici di una medesima congruenza del sistema* Σ.

Ora per un noto teorema se nella $j_{2,2}$ a due raggi distinti d, d_1 della schiera α' corrispondono gli stessi due raggi d', d'_1 fra loro distinti, allora la $j_{2,2}$ risulta una proiettività involutoria $j' \equiv \left| \begin{matrix} d\,d_1, & e\,e_1, \ldots \\ d'\,d'_1, & e'\,e'_1, \ldots \end{matrix} \right|$ intercedente fra le coppie di un'involuzione ordinaria $j \equiv (d\,d_1,\ d'\,d'_1,\ e\,e_1,\ e'\,e'_1 \ldots)$ della schiera α' (*).

In tale caso due coppie di rette corrispondenti $d\,d_1$, $d'\,d'_1$ della j determinano rispettivamente con una generatrice g della $\varphi_{(2)}$ dello stesso sistema delle q, q' una coppia di punti $P \equiv g\,d$, $P' \equiv g\,d'$ ed una coppia di piani $\pi \equiv g\,d_1$, $\pi' \equiv g\,d'_1$ godenti la proprietà che i punti P, P' si trovano entrambi su le coniche del complesso Γ situate nei piani π, π'; e viceversa questi piani appartengono entrambi ai coni di Γ' che hanno i vertici in P, P'; cioè allora nella schiera rigata α della $\varphi_{(2)}$ che contiene le q, q' ogni generatrice g è sostegno di due involuzioni ordinarie, l'una di punti, l'altra di piani, riferite fra loro proiettivamente in modo che ogni coppia dell'una involuzione appartiene alle due coniche di Γ o ai due coni di Γ' determinati dalla corrispondente coppia dell'altra involuzione.

Inversamente è agevole riconoscere che se una retta r è incontrata da due coniche del complesso Γ nella stessa coppia di punti P, P' (nel quale caso i due coni del complesso Γ' dovuti a tali punti, hanno in comune la coppia dei piani π, π' sostegni delle suddette coniche) allora nella involuzione $j_{2,2}$ che viene ad aversi sulla quadrica $\varphi \equiv q\,q'\,r$, a ciascuna delle rette d, d' che passano rispettivamente per i punti P, P', corrispondono le stesse due rette d_1, d'_1 che giacciono rispettivamente nei piani π, π', sicchè la $j_{2,2}$ si trova nelle condizioni particolari precedentemente indicate e perciò sulla r e nel fascio (r) esistono infinite altre coppie analoghe alle $P\,P'$, $\pi\,\pi'$; ed ogni altra retta della schiera rigata $\alpha \equiv q\,q'\,r$ gode le stesse proprietà della r.

E tenendo calcolo che le rette di una stella arbitraria (O) soddisfacenti alla condizione precedentemente indicata, sono le generatrici del cono di 6^0 ordine che dal punto O proietta la curva doppia $c_{(16)}$ della superficie $\sigma_{(8)}$ formata dalle coniche del complesso Γ che passano per O, e correlativamente, si deduce che:

(*) Il teorema a cui ci riferiamo, equivale alla nota proposizione che « se nel piano due coniche sono tali che esista un quadrilatero semplice iscritto in una di esse e circoscritto all'altra, esistono ∞^1 altri quadrilateri analoghi al precedente ».

Esiste un complesso di rette di 6° grado $H_{(6)}$ di cui ogni raggio r è sostegno di due involuzioni ordinarie, l'una di punti, l'altra di piani, fra loro proiettive e tali che ogni coppia dell'una involuzione appartiene alle coniche di Γ (o ai coni di Γ') che hanno per sostegni gli elementi della coppia corrispondente dell'altra involuzione. Questo complesso è costituito da schiere rigate che hanno in comune i raggi q, q', i quali perciò sono sestupli per esso.

Per un punto O di un raggio r della schiera $\rho_4 \equiv K_2 K_3 K_4$ la superficie $\sigma_{(8)} \equiv O^6$ del complesso Γ si spezza nella superficie rigata $\rho_{(4)} \equiv r^3$ della congruenza X_1 ed in una superficie $o_{(4)} \equiv O^3 r r'^2$, essendo r' la generatrice della $\rho_{(4)}$ che passa per O, sicchè le due superficie nel punto O che è triplo per entrambe, hanno in comune il piano tangente $r r'$ e perciò la ulteriore loro sezione è una $c_{(11)} \equiv O^5$ che da O viene proiettata secondo un cono di 6° ordine avente per raggio triplo la r. Questo cono appartiene al complesso di rette $H_{(6)}$. Perciò *i raggi delle schiere rigate $\rho_1, .. \rho_4$ sono tripli pel complesso $H_{(6)}$.*

9. Ogni corrispondenza proiettiva dello spazio che trasformi ciascuno dei complessi dati $K_1, .. K_4$ in sè stesso, fa corrispondere ad un fascio di raggi del sistema Σ un fascio di raggi dello stesso sistema, cioè trasforma del pari in sè stesso il sistema Σ, e perciò o fa corrispondere ciascuno dei complessi Γ, Γ' a sè stesso, o fa corrispondere uno di tali complessi all'altro, secondo che essa corrispondenza è una omografia o una correlazione.

In particolare se uno dei complessi dati, ad esempio il complesso K_1, è in involuzione con gli altri tre, allora nella polarità nulla Π_1 ciascuno dei complessi dati è coniugato a sè stesso, sicchè in tale polarità al complesso Γ corrisponde il complesso Γ', cioè allora la conica $c_{(2)}$ del complesso Γ situata in un piano arbitrario ω coincide con la conica $c_{(2)}'$ che nella Π_1 corrisponde al cono del complesso Γ' avente per vertice il punto O polo del piano ω nella Π_1.

Ma queste coniche $c_{(2)}$, $c_{(2)}'$ appartengono entrambe alla superficie $\sigma_{(8)}$ del complesso Γ dovuta al punto O, perciò nel caso indicato esse coincidono in una conica doppia della superficie $\sigma_{(8)}$ che staccasi dalla curva $c_{(16)} \equiv O^{10}$ del caso generale, in modo che il cono che proietta questa curva dal punto O (cono che appartiene al complesso $H_{(6)}$ del § precedente) viene a contenere il fascio di raggio $(O - \omega)$. Ne segue che:

Se uno dei complessi $K_1, .. K_4$ è in involuzione con gli altri tre, esso fa parte del complesso $H_{(6)}$.

Perciò dal complesso $H_{(6)}$ possono staccarsi o uno o due o tutti e quattro i complessi dati. Quest'ultimo fatto si verifica quando ciascuno dei complessi dati è in involuzione con gli altri tre, nel quale caso la superficie $\sigma_{(8)} \equiv O^6$ del complesso Γ ha per linee doppie le quattro coniche del complesso situate nei piani polari del punto O nelle $\Pi_1, .. \Pi_4$, ed una curva razionale di 8° ordine $c_{(8)} \equiv O^6$.

Ai risultati ora ottenuti si giunge anche facendo uso della rappresentazione indicata nel § 5, nella quale al complesso $H_{(6)}$ corrisponde una superficie di 6° ordine $\varphi_{(6)} \equiv (O_1, .. O_4)^3$ luogo di un punto A si fatto che il cono circoscritto alla quadrica fondamentale $\chi_{(2)}$ di vertice A, e il cono formato dai raggi del complesso tetraedrale θ uscenti da A, godono la proprietà che al primo dei due coni sono circoscritti ∞^1 angoli tetraedri semplici iscritti nel secondo.

10. Un caso particolare degno di nota si presenta pel sistema Σ quando uno dei complessi $K_1, .. K_4$, ad esempio il complesso K_1, risulta singolare. Indicandone con a l'asse, si ha che tutte le coniche del complesso Γ si appoggiano alla a e tutti i coni del complesso Γ' risultano ad essa tangenti. Inoltre uno dei punti (o piani) singolari appartenente al raggio q (o al raggio q') è quello che tale raggio determina con la a.

Infine dal fatto che la a si trova su tutte le superficie $\rho_{(4)}$ di Γ e che i piani che passano per essa fanno parte degli inviluppi duali di Γ', segue che la superficie σ del complesso Γ dovuta ad un punto arbitrario O dello spazio risulta di 7.° ordine. Essa può essere rappresentata su di un piano in modo che le sezioni piane abbiano per immagini curve:

$$c_{(7)} \equiv P^5 Q^2, \ 4 R_1, \ 3 R_2, \ 3 R_3, \ 3 R_4,$$

essendo i punti R_i su una retta del fascio (Q), la quale per $i = 1$ è l'immagine della a che è retta semplice della superficie. Questa ammette per linea doppia una curva $c_{(11)} \equiv O^6$ che contiene i sei punti singolari del sistema non situati su a, ecc., ecc.

Analogamente se dei complessi $K_1, .. K_4$ i primi due, o i primi tre o tutti e quattro risultano singolari, la superficie σ del complesso Γ dovuta ad un punto O, risulta rispettivamente di 6°, di 5° o di 4° ordine, e può essere rappresentata su di un piano in modo che le sezioni piane abbiano per immagini

nel 1.° caso curve $c_{(6)} \equiv P^4 Q^2, \ 3 R_1, \ 3 R_2, \ 2 R_3, \ 2 R_4$;
» 2.° » » $c_{(5)} \equiv P^3 Q^2, \ 2 R_1, \ 2 R_2, \ 2 R_3, \ R_4$;
» 3.° » » $c_{(4)} \equiv P^2 Q^2, \ R_1, \ R_2, \ R_3, \ R_4$,

ove i punti R_i si trovano su una retta del fascio (Q) la quale, se il complesso K_i è singolare con la retta a_i per asse, è l'immagine di tale retta a_i.

E nei singoli casi la linea doppia della superficie è una $c_{(7)} \equiv O^3$ o una $c_{(4)} \equiv O$ o una conica non passante per O.

III.

11. *Date in un complesso lineare di rette, K, 4 congruenze lineari $Q_1, .. Q_4$ in posizione affatto arbitraria fra loro, i fasci di raggi del complesso K nei quali le rette appartenenti alle congruenze date formano un gruppo proiettivo ad un gruppo assegnato $g \equiv e_1 .. e_4$ hanno i centri su una superficie di 4° ordine λ e i loro piani appartengono ad un inviluppo di 4ª classe J coniugato alla λ nella polarità nulla Π dovuta al complesso K.*

Infatti per le congruenze date $Q_1, \dots Q_4$ si facciano passare rispettivamente 4 complessi lineari di rette $K_1, .. K_4$ e si consideri il sistema Σ dei fasci di rette nei quali i raggi che appartengono ai predetti complessi formano un gruppo proiettivo al gruppo dato g.

I fasci di raggi indicati nel teorema sono i fasci comuni al sistema Σ ed al complesso K; sicchè fra di essi quelli che trovansi in piani passanti per una retta arbitraria r, hanno per centri i punti in cui la superficie $\rho_{(4)}$, luogo dei centri dei fasci di Σ situati nei piani per r (§ 6°, 1.ª prop.) è segata dalla retta r' coniugata alla r nella polarità Π; e perciò il numero dei fasci in quistione è 4, vale a dire che per la retta r passano 4 piani dell'inviluppo J su indicato e sulla r' si trovano 4 punti della superficie λ, donde segue il teorema.

La superficie λ contiene evidentemente le 8 direttrici d_i, d'_i delle congruenze date Q_i e le 4 coppie di raggi r_i, r'_i che queste congruenze prese tre a tre hanno in comune; e correlativamente per l'inviluppo J.

Se per caso le congruenze date avessero in comune un raggio $q = r_1 = .. = r_4$, questo apparterrebbe ai 4 complessi $K_1, .. K_4$, in modo che la superficie $\rho_{(4)}$ del sistema Σ precedentemente considerato, dovuta ad una retta r appoggiata alla q, avrebbe per retta doppia la q (§ 6, 1.ª prop.) e dei suoi punti di sezione con la retta r' coniugata alla r nella Π, due coinciderebbero nel punto $r'q$; cioè allora la retta q risulterebbe doppia per la superficie λ, e correlativamente nell'inviluppo J risulterebbero doppii i piani del fascio (q).

Invece nel caso generale la superficie λ e l'inviluppo J non hanno rispettivamente alcun punto o piano doppio.

In tale caso *esiste un'omografia assiale armonica che trasforma ciascuna delle forme* λ, J *in sè stessa.*

Si supponga infatti che i complessi $K_1, .. K_4$ oltre a passare rispettivamente per le congruenze $Q_1, .. Q_4$, soddisfacciano all'altra condizione di essere in involuzione con il complesso dato K (il che li determina completamente). Allora i raggi q, q' che essi hanno in comune, non appartenendo al complesso K ed essendo coniugati fra di loro nella polarità Π dovuta a tale complesso (*), risultano distinti, epperò esiste un' omografia assiale armonica Ω che li ha per assi. Questa omografia trasforma in sè stesso ognuno dei complessi K, $K_1, .. K_4$ (**), sicchè trasforma in sè stessa ognuna delle congruenze date $Q_1 \equiv K K_1, .. Q_4 \equiv K K_4$ (facendo corrispondere l'una all'altra le direttrici d_i, d'_i di tale congruenze), epperò la Ω muta in sè stesso il sistema dei fasci di raggi che si considera e quindi anche la superficie λ e l'inviluppo J.

Gli assi della Ω sono coniugati nella polarità Π, sicchè la corrispondenza Π' prodotto delle Ω, Π è anch' essa una polarità nulla, e propriamente è quella dovuta al complesso lineare K' che è in involuzione con i 5 complessi K, $K_1, .. K_4$. Essa al pari delle corrispondenze Ω, Π trasforma in sè stesso il sistema dei fasci di raggi che si considera, epperò:

Esiste una seconda polarità nulla Π' *nella quale si corrispondono la superficie* λ *e l'inviluppo* J.

Le rette r_i, r'_i comuni alle congruenze date Q_l, Q_m, Q_n appartenendo ai 4 complessi K, K_l, K_m, K_n che sono tutti in involuzione col complesso K', risultano fra loro coniugate nella polarità Π', sicchè in questa sono unite le direttrici d_i, d'_i delle congruenze date, per $i, l, m, n = 1, 2, 3, 4$ in qualsiasi ordine.

12. La superficie λ indicata nel precedente § è del tutto determinata dalle congruenze lineari $Q_1, .. Q_4$ a cui è dovuta, e dal *gruppo caratteristico* $g \equiv e_1 .. e_4$. Ora se si tengono fisse le $Q_1, .. Q_4$ e i primi tre elementi di g, e si fa variare l'ultimo elemento e_4 del gruppo, facendogli descrivere tutta la forma $f \equiv e_1 e_2 e_3$, allora la superficie λ descrive un fascio che ha

(*) De Paolis, *Fondamenti di una teoria dello spazio generato dai complessi lineari.* Mem. Acc. Lincei. Serie 4ª, Vol. I (1885), § IV, 22.

(**) Montesano, *Su certi gruppi di superficie di secondo grado.* Annali di Matematica, Serie II, tomo XIV.

per base le 8 direttrici d_i, d'_i delle congruenze date e gli 8 raggi r_i, r'_i che queste congruenze prese tre a tre hanno in comune.

Tale fascio risulta riferito proiettivamente alla forma f descritta dall'elemento e_4, in modo che agli elementi e_1, e_2, e_3 della f corrispondono nel fascio le superficie degeneri λ_1, λ_2, λ_3 formate rispettivamente:

la λ_1 dalle quadriche $\rho_{(2)} \equiv d_1 d'_1 d_4 d'_4 r_2 r'_2 r_3 r'_3$, $\rho'_{(2)} \equiv d_2 d'_2 d_3 d'_3 r_1 r'_1 r_4 r'_4$,

la λ_2 » » $\sigma_{(2)} \equiv d_2 d'_2 d_4 d'_4 r_3 r'_3 r_1 r'_1$, $\sigma'_{(2)} \equiv d_3 d'_3 d_1 d'_1 r_2 r'_2 r_4 r'_4$,

la λ_3 » » $\tau_{(2)} \equiv d_3 d'_3 d_4 d'_4 r_1 r'_1 r_2 r'_2$, $\tau'_{(2)} \equiv d_1 d'_1 d_2 d'_2 r_3 r'_3 r_4 r'_4$.

Ora tutto ciò che si è detto per le congruenze $Q_1, .. Q_4$, si ripeta per le congruenze lineari $R_1, .. R_4$ che hanno rispettivamente per direttrici le coppie di rette $r_1 r'_1, .. r_4 r'_4$, le quali congruenze appartengono al complesso lineare K' indicato nel precedente §.

Siccome le $R_1, .. R_4$ a tre a tre hanno in comune le rette d_i, d'_i, perciò esse dànno origine allo stesso fascio φ di superficie λ' e stabiliscono fra questo fascio e la forma f la stessa proiettività che le $Q_1, .. Q_4$ (proiettività ben determinata dalle terne corrispondenti $e_1 e_2 e_3$, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$); vale a dire che la superficie λ dovuta alla congruenza $Q_1, .. Q_4$ ed al gruppo caratteristico g coincide con la superficie λ' dovuta alle congruenze $R_1, ... R_4$ ed allo stesso gruppo caratteristico g.

In altre parole i due gruppi di raggi delle congruenze $Q_1, .. Q_4$; $R_1, .. R_4$ che passano per un medesimo punto dello spazio (o che giacciono, correlativamente, in un medesimo piano dello spazio) risultano sempre proiettivi fra di loro.

Se si chiamano *involutorie* due congruenze lineari di rette non degeneri, di cui ciascuna abbia per raggi le direttrici dell'altra, può affermarsi che

Due gruppi di congruenze lineari di rette formati ciascuno da 4 congruenze con le direttrici distinte a due a due sghembe, e riferiti fra di loro in modo che ogni congruenza dell'un gruppo risulti in involuzione con le tre congruenze non omologhe (e con queste soltanto) dell'altro gruppo, godono le seguenti proprietà:

1.° *Le congruenze di uno stesso gruppo appartengono ad un medesimo complesso lineare.*

2.° *Le due quaterne di raggi delle congruenze dei due gruppi che appartengono ad un medesimo punto (o piano) dello spazio, sono proiettive fra di loro.*

3.° *I punti (o i piani) dello spazio per i quali le predette quaterne sono proiettive ad un gruppo dato $g \equiv e_1 .. e_4$, appartengono ad una superficie di 4° ordine (o inviluppano una superficie di 4ª classe), la quale col variare del gruppo g descrive un fascio (o una schiera), che ha per base le 16 direttrici delle congruenze dei due gruppi.*

13. *Date in un complesso lineare di rette K 5 congruenze lineari $Q_1, \ldots Q_5$ in posizione affatto arbitraria fra di loro, esistono ∞^1 fasci di raggi del complesso K nei quali i raggi appartenenti alle date congruenze formano un gruppo proiettivo ad un gruppo dato $g \equiv e_1 \ldots e_5$. I centri di questi fasci si trovano su una curva gobba di 8° ordine e di genere 5, e i loro piani inviluppano la forma duale alla precedente.*

Si consideri infatti la superficie di 4° ordine λ_i luogo dei punti per i quali i raggi delle 4 congruenze date Q_l, Q_m, Q_n, Q_p formano un gruppo proiettivo al gruppo $g_i \equiv e_l\, e_m\, e_n\, e_p$, per $i, l, m, n, p = 1, \ldots 5$ in qualsiasi ordine.

La completa sezione di due di queste 5 superficie, per esempio delle λ_1, λ_2, è costituita dalla curva c indicata nel teorema, dalle rette d_3, d'_3, d_4, d'_4, d_5, d'_5 direttrici delle congruenze Q_3, Q_4, Q_5, e dai raggi q_{12}, q'_{12} comuni a queste congruenze; sicchè la c è di 8° ordine.

D'altra parte il numero dei raggi di una stella arbitraria che incontrano in due punti distinti due delle 8 rette d_3, d'_3, d_4, d'_4, d_5, d'_5, q_{12}, q'_{12}, è 16, sicchè il numero dei punti doppii apparenti della c è anche 16, cioè la c risulta di genere 5 (*), come si era affermato.

Ogni direttrice d_i di una qualsiasi delle congruenze date ha in comune con la curva c 4 punti (che sono le sezioni della d_i con la superficie λ_i), mentre ogni raggio comune a tre delle congruenze date non ha alcun punto sulla c. Ora inversamente si ha che:

Ogni curva di 8° ordine che abbia per quadriseganti le direttrici delle 5 congruenze date, è una curva del tipo che si studia, cioè i gruppi di raggi appartenenti alle date congruenze che passano per i singoli punti della curva sono tutti proiettivi fra di loro.

Si consideri infatti il fascio delle superficie di 4° ordine λ_i di cui ogni superficie è formata da punti per i quali i gruppi dei raggi appartenenti alle congruenze date Q_l, Q_m, Q_n, Q_p sono fra loro proiettivi. Una curva

(*) Noether, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven.* Abhandlungen der k. Ak. der Wissenschaften zu Berlin, 1882, pag. 95, a_5).

$c_{(8)} \equiv (d_i d'_i)^4$ non è segata in punti variabili dalle λ_i, sicchè giace per intero su *una* superficie del fascio, e ne segue il teorema.

Per un punto dello spazio che non sia sulle d_i, d'_i, passa una sola curva $c_{(8)}$ del tipo che si considera. Può dunque affermarsi che:

Cinque coppie di rette d_i, d'_i coniugate in una medesima polarità nulla dello spazio determinano una congruenza lineare di curve di 8° ordine e di genere 5 soddisfacenti alla sola condizione di appoggiarsi a ciascuna delle rette d_i, d'_i in 4 punti (*). *Due punti situati su una medesima curva della congruenza godono la proprietà che le rette uscenti rispettivamente da essi ed appoggiate alle d_i, d'_i formano due quintuple proiettive fra loro. La congruenza ammette 5 fasci generatori di superficie di 4° ordine* (**), *di cui ciascuno ha per base 4 coppie di rette d_i, d'_i e gli 8 raggi appoggiati alle predette coppie prese tre a tre.*

Le basi di due fasci generatori della congruenza hanno tre coppie di rette $d\,d'$ in comune, distribuite su tre quadriche di cui ciascuna fa parte tanto di una superficie degenere dell'un fascio, come di una superficie degenere dell'altro fascio, diversa dalla precedente.

Da ciò riesce agevole dedurre che:

Il numero delle curve della congruenza che hanno per corda una retta generica dello spazio, è $(4-1)^2 - 3 = 6$.

Reggono considerazioni correlative alle precedenti.

14. *Date in un complesso lineare di rette 6 congruenze lineari $Q_1, \ldots Q_6$ in posizione affatto arbitraria, esistono 8 fasci di rette del complesso nei quali il gruppo dei raggi appartenenti alle date congruenze, è proiettivo ad un gruppo dato $g \equiv e_1 \ldots e_6$.*

Si considerino infatti la curva $c_{(8)}$, determinata dalle 5 congruenze Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 e dal gruppo caratteristico $g_6 \equiv e_1 e_2 e_3 e_4 e_5$ e la superficie di 4° ordine $\lambda_{(4)}$ determinata dalle 4 congruenze Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 e dal gruppo caratteristico $g_{1,2} \equiv e_3 e_4 e_5 e_6$. I punti comuni alle $c_{(8)}$, $\lambda_{(4)}$ non situati sulle direttrici delle congruenze Q_3, Q_4, Q_5 sono i centri dei fasci di raggi indicati nel teorema, sicchè il loro numero è $4 \cdot 8 - 6 \cdot 4 = 8$.

(*) Le curve della congruenza non hanno altre quadriseganti, perchè il numero di tali rette per una curva gobba di 8° ordine e di genere 5 è appunto 10. (Berzolari, *Su le secanti multiple di una curva algebrica.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo IX, pag. 191.)

(**) Un *fascio generatore* di una congruenza di linee nello spazio è un fascio formato da superficie di cui ciascuna contiene ∞^1 linee della congruenza.

Dal precedente teorema segue l'altro che:

Assunte ad arbitrio 6 congruenze lineari di rette in un medesimo complesso lineare, i punti dello spazio si aggruppano 8 ad 8 in modo che i raggi delle congruenze date che passano per due punti di uno stesso gruppo formano due sestuple proiettive fra di loro. E correlativamente.

L'involuzione I determinata nello spazio dagli anzidetti gruppi di punti $P_1 \ldots P_8, \ldots, Q_1 \ldots Q_8, \ldots$, ammette 15 fasci di superficie unite $\lambda_{(4)}$ e 6 congruenze lineari di curve unite $c_{(8)}$. Facendo uso di questi sistemi di superficie e di curve unite, riuscirebbe agevole stabilire le proprietà fondamentali della involuzione I, ma tale studio ci porterebbe troppo lontano dai limiti propostici, nè perciò insisteremo su di esso.

15. Le proposizioni stabilite sino ad ora in questo Capitolo valgono per gruppi di congruenze lineari $Q_1, \ldots Q_\nu$ la cui scambievole posizione nel complesso lineare K a cui appartengono, sia affatto arbitraria. Subiscono invece delle modificazioni quando le congruenze Q siano in posizione speciale fra loro.

Fra i molteplici casi particolari possibili sono degni di menzione i seguenti:

1.° Per $\nu = 4$, le congruenze date $Q_1, \ldots Q_4$ possono avere due raggi r, r' in comune. Allora esistono nel complesso $K \infty^1$ congruenze lineari contenenti i raggi r, r', sì fatte che le 4 schiere rigate che ciascuna di esse ha in comune con le $Q_1, \ldots Q_4$, trovansi su quadriche che nel fascio-schiera a cui appartengono, costituiscono un gruppo proiettivo al gruppo caratteristico $g \equiv e_1 \ldots e_4$ del sistema. Le direttrici di queste congruenze, riguardate come locali di punti o come inviluppi di piani, costituiscono la superficie $\lambda_{(4)}$ e l'inviluppo $J_{(4)}$ del § 11. I raggi r, r' ne sono direttrici doppie.

2.° Per $\nu = 4$, tre delle congruenze date: le Q_1, Q_2, Q_3 possono avere un fascio di raggi $(O - \omega)$ in comune. Allora la superficie $\lambda_{(4)}$ del caso generale si spezza nel piano $\omega \equiv d'_1 d'_2 d'_3$ ed in una superficie di 3° ordine $\lambda_{(3)} \equiv O^2 d_1 d_2 d_3 d_4 d'_4 r r_1 r_2 r_3$, ove le r, r_1, r_2, r_3 sono i raggi della quarta congruenza data Q_4 situati rispettivamente nei piani ω, $\omega_1 \equiv d_2 d_3$, $\omega_2 \equiv d_3 d_1$, $\omega_3 \equiv d_1 d_2$.

Più particolarmente se anche le Q_2, Q_3, Q_4 hanno un fascio di raggi $(O_1 - \omega_1)$ in comune, allora la superficie $\lambda_{(3)}$ ora indicata si spezza a sua volta nel piano $\omega_1 \equiv d_2 d_3 d_4 r r_1$ ed in una quadrica $\lambda_{(2)} \equiv d_1 d'_4 r_2 r_3$.

E correlativamente per l'inviluppo $J_{(4)}$.

3.° Per $\nu = 5$, quattro delle congruenze date: le Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 possono avere un raggio comune r_5. Allora la curva $c_{(8)}$ del caso generale (§ 13) si spezza nella retta r_5 ed in una curva gobba $c_{(7)}$ di genere 4, che ha per trisecanti le $d_1, d'_1, .. d_4, d'_4$, per quadrisecanti le d_5, d'_5 e per corda la r_5, come è agevole riconoscere rappresentando su di un piano la superficie di 4° ordine $\lambda_5 \equiv r^2_5 d_1 d'_1 \ldots d_4 d_4$ che contiene la $c_{(7)}$.

In generale se esistono x raggi $r_1, .. r_x$ (per $x \leqq 5$) che appartengano alle congruenze date prese a quattro a quattro, in modo che il raggio r_i appartenga alle Q_l, Q_m, Q_n, Q_p (per $i = 1, .. x$), allora la curva $c_{(8)}$ si spezza nelle rette $r_1, .. r_x$ ed in una curva di ordine $8 - x$ e di genere $5 - x$, che ha in comune 2 punti con ciascuna delle rette $r_1, .. r_x$ e $4 - y_i$ punti con le rette d_i, d'_i, se y_i dei raggi $r_1, .. r_x$ appartengono alla congruenza Q_i.

Col variare del gruppo caratteristico la curva $c_{(8-x)}$ descrive nello spazio una congruenza lineare, senza soddisfare ad altre condizioni oltre a quelle degli appoggi alle rette d, r.

4.° Per $\nu = 6$, le direttrici $d_1, .. d_6, d'_1, .. d'_6$ delle congruenze date possono essere gli spigoli di due tetraedri θ, θ' coniugati fra loro nella polarità nulla Π dovuta al complesso dato K. Se questo fatto si verifica, supponendo opposti su θ gli spigoli d_1, d_4; d_2, d_5; d_3, d_6, e di conseguenza su θ' gli spigoli d'_1, d'_4; d'_2, d'_5; d'_3, d'_6, due casi potranno darsi: o nel gruppo caratteristico g del sistema le tre coppie $e_1 e_4$, $e_2 e_5$, $e_3 e_6$ appartengono ad una medesima involuzione, o ciò non succede.

Nel secondo caso i fasci di rette del complesso K nei quali i raggi appartenenti alle congruenze date formano un gruppo proiettivo al gruppo dato g, sono gli 8 fasci che hanno per sostegni i vertici e le facce dei tetraedri θ, θ'.

Invece nel primo caso, per una nota proprietà del quadrilatero piano completo, i fasci di raggi soddisfacenti alla condizione indicata sono ∞^1, e i loro centri si trovano sopra una curva gobba di 4° ordine e di 1ª specie intersezione di due quadriche $\lambda_{(2)}$ del tipo indicato alla fine del n.° prec. Tale curva $c_{(4)}$ passa per gli 8 vertici dei due tetraedri θ, θ' e col variare del gruppo caratteristico $g \equiv e_1 \ldots e_6$ (formato da tre coppie di elementi in involuzione), essa descrive nello spazio una congruenza lineare avente per rete generatrice la rete di quadriche che ha per base gli 8 vertici dei due tetraedri. Ne segue il teorema che:

I vertici di due tetraedri che si corrispondano in una polarità nulla Π *dello spazio, sono base di una rete di quadriche. La congruenza formata dalle curve basi dei fasci di questa rete gode la proprietà che in due fasci* *di rette aventi rispettivamente per centri due punti situati su una medesima curva della congruenza e per piani quelli che corrispondono ai due centri nella* Π, *i raggi appoggiati alle coppie di spigoli omologhi dei due tetraedri formano due sestuple proiettive. E correlativamente.*

16. Veniamo ora ad estendere i risultati ottenuti nei § precedenti al caso particolare in cui il complesso che contiene le congruenze $Q_1, .. Q_\nu$, sia singolare.

Ragionando come nel caso generale, riesce agevole dimostrare che:

1.° *I fasci di raggi situati in piani passanti per una retta data* k *(o aventi i centri sulla* k*) nei quali i raggi appoggiati a 4 rette date* $d_1, .. d_4$ *formano un gruppo proiettivo ad un gruppo dato* g, *hanno i centri su una superficie di 4° ordine* $\lambda = k^2 d_i r_i r'_i$ (*) *(o si trovano negli* ∞^2 *piani di un inviluppo di 4ª classe* $J \equiv k^2 d_i r_i r'_i$*), essendo* r_i, r'_i *le rette appoggiate alla* k *ed alle* d *prese tre a tre* (**).

La superficie λ *e l'inviluppo* J *dovute alle stesse rette ed al medesimo gruppo* g, *si corrispondono nella polarità nulla determinata dal complesso lineare* $K' \equiv k d_1 .. d_4$. *In ogni fascio di tale complesso che abbia per sostegni un punto della* λ *ed il corrispondente piano dell'inviluppo* J, *le rette appoggiate alle coppie* r_i, r'_i *formano una quaterna proiettiva al gruppo* g.

Da questo teorema segue che le proposizioni stabilite nel § 12 per due quaterne di congruenze lineari riferite fra loro in modo che ciascuna congruenza dell'un gruppo sia in involuzione con le tre congruenze non omologhe dell'altro gruppo, valgono anche nel caso che le congruenze dell'una quaterna appartengano ad un complesso singolare K, nel qual caso le congruenze dell'altra quaterna hanno un raggio comune (che è l'asse del complesso K), o viceversa.

Fra i molteplici casi particolari che si presentano per la speciale posizione delle rette k, $d_1, .. d_4$; degno di nota è quello che si ha quando le 5 rette

(*) Sturm, *Ueber correlative oder reciproke Bündel.* Math. Annalen. Bd. XII, § 38, teor. 2.°

(**) La superficie λ può essere rappresentata su di un piano in modo che le sue sezioni piane abbiano per immagini delle curve $c_4 \equiv O^2 1 \dots 8$ essendo il punto 1 inf.te vicino ad O, e trovandosi le terne di punti 238, 458, 678 su tre rette immagini delle d_2, d_3, d_4, mentre il punto 1 è l'immagine della d_1. Le rette r_1, r'_1, r_2, r'_2, r_3, r'_3, r_4, r'_4 sono rappresentate rispettivamente dal punto 8 e dalle rette $O1$, $O2$, $O3$, $O4$, $O5$, $O6$, $O7$.

hanno una segante comune $r = r'_1 .. = r'_4$. In tal caso la retta r risulta doppia per la superficie $\lambda_{(4)}$, e questa, oltre che alle rette k, $d_1 .. d_4$ ed al gruppo caratteristico g, può immaginarsi dovuta in modo analogo alle rette r, $r_1 .. r_4$ ed allo stesso gruppo g; vale a dire che sulle coniche sezioni della superficie con i piani dei fasci (k), (r) i gruppi di sezione con le rette $r_1, .. r_4$, se sono in piani per k, o con le $d_1, .. d_4$ se sono in piani per r, risultano proiettivi fra di loro (*).

Proprietà correlative reggono per l'inviluppo $J_{(4)}$, senza però che esista alcuna polarità che muti una delle forme λ, J nell'altra, perchè nel caso in esame il complesso lineare $K' \equiv k\, d_1 .. d_4$ risulta singolare.

Sempre nell'ipotesi che la retta k si appoggi ad una segante comune r delle $d_1, .. d_4$, può ulteriormente succedere che il gruppo g sia proiettivo al gruppo di punti $r(d_1 .. d_4)$. In tale caso la superficie $\lambda_{(4)}$ si scinde nel piano $\lambda \equiv k\, r$ e nella superficie di 3° ordine $\lambda_{(3)} \equiv k\, r\, d_1 .. d_4\, r_1 .. r_4$, la quale può immaginarsi dovuta in modo analogo alle rette r, $r_1 .. r_4$ ed allo stesso gruppo g.

2.° *I fasci di raggi situati in piani passanti per una retta data k, nei quali i raggi appoggiati a 5 rette date $d_1, \dots d_5$ formano un gruppo proiettivo ad un gruppo dato, hanno i centri su una curva gobba di 7° ordine e di genere zero, che incontra in 6 punti la k e in quattro punti ciascuna delle rette $d_1, \dots d_5$* (**). *E correlativamente.*

Inversamente date nello spazio 6 rette $k, d_1, .. d_5$ in posizione affatto arbitraria fra loro, ogni curva gobba di 7° ordine che incontri in 6 punti la k e in 4 punti ciascuna delle $d_1, .. d_5$ è del tipo ora studiato, sicchè le curve in quistione costituiscono una congruenza lineare. Questa ammette 5 fasci generatori di superficie di 4° ordine aventi tutte per rette doppia la k. Una retta dello spazio è corda di 6 curve del sistema. E correlativamente.

Ogni conica $c_{(2)}$ situata in un piano ω del fascio (k) e che contenga il gruppo di punti $\omega(d_1 .. d_5)$, fa parte di una curva della congruenza, costituita dalla $c_{(2)}$ e da una curva gobba razionale $c_{(5)} \equiv k^4 (d_1 \dots d_5)^3 c^1_{(2)}$. Più par-

(*) La superficie $\lambda_{(4)}$ può essere rappresentata su di un piano in modo che le sue sezioni piane abbiano per immagini delle $c_{(3)} \equiv 1 \dots 5$, la k e la r siano rappresentate da una $c_{(1)} \equiv 1$ e da una $c_{(2)} \equiv 2345$, e le rette d_1, d_2, d_3, r_1, r_2, r_3, d_4, r_4 abbiano rispettivamente per immagini le rette 12, 13, 14, 25, 35, 45 ed i punti 5, 1. Allora il gruppo caratteristico g della superficie è quello delle rette 5 (2, 3, 4, 1).

(**) Sturm, Mem. cit., § 54, teor. 3.°

ticolarmente se il piano ω è sì fatto che nel fascio (k) esista un secondo piano ω' tale che le due quintuple di punti $\omega(d_1 .. d_5)$, $\omega'(d_1 .. d_5)$ siano proiettive fra loro sulle coniche $c_{(2)}$, $c'_{(2}$ a cui appartengono (ed a ciò è necessario e sufficiente che i piani ω, ω' siano tangenti ad una medesima sviluppabile di 3ª classe $\sigma_{(3}$ che abbia per assi le rette k, $d_1, .. d_5$), allora esiste una curva $c_{(7)}$ della congruenza, che spezzasi nelle $c_{(2)}$, $c'_{(2}$ ed in una cubica gobba $c_{(3}$ che ha per corde le k, $d_1, .. d_5$ e si appoggia semplicemente alle $c_{(2)}$, c'_{2}.

Viceversa ogni cubica gobba $c_{(3)}$ che abbia per corde le k, $d_1, .. d_5$, fa parte di una curva degenere $c_{(7)}$ del tipo indicato, il cui gruppo caratteristico è proiettivo al gruppo delle 5 quadriche $k\,c_{3}\,d_1, \ldots, k\,c_{3)}\,d_5$, onde esiste una sviluppabile di 3ª classe avente per assi le k, $d_1, \ldots d_5$ e sì fatta che su ogni suo piano tangente le tracce delle $d_1, \ldots d_5$ formano sulla conica che passa per esse, un gruppo proiettivo a quello delle 5 quadriche indicate.

Ne deriva una notevole relazione intercedente fra le 6 cubiche gobbe e le 6 sviluppabili di 3ª classe che hanno rispettivamente per corde e per assi le stesse 6 rette dello spazio.

Di un solo caso particolare faremo cenno: del caso in cui le rette k, $d_1, .. d_5$ abbiano una trasversale comune r. Allora la curva c essendo la sezione di due superficie di 4° ordine che hanno ulteriormente in comune le rette doppie k, r e le rette semplici d_m, d_n, d_p, r_{il}, risulta di 4° ordine.

Reggono le proposizioni correlative.

3.° *Esistono 4 fasci di raggi situati in piani passanti per una retta data k, nei quali i raggi appoggiati a 6 rette date $d_1, \ldots d_6$ formano un gruppo proiettivo ad un gruppo assegnato; e correlativamente* (*).

Soltanto nel caso che le rette d_1 e d_4, d_2 e d_5, d_3 e d_6 siano spigoli opposti di un tetraedro θ e che le coppie di elementi $e_1\,e_4$, $e_2\,e_5$, $e_3\,e_6$ del gruppo caratteristico appartengano ad una medesima involuzione, esistono ∞^1 fasci di raggi soddisfacenti alle condizioni indicate nel teorema. Essi hanno i centri su di una cubica gobba che ha per corda la k e passa per i vertici del tetraedro θ. E correlativamente.

(*) SCUBERT, *Abzählende Geometrie*, pag. 206 $(p^3\, e^2\, p'^2\, Z'^6 = 4)$.

IV.

17. *Dati nello spazio 5 complessi lineari di rette $K_1, \ldots K_5$ in posizione affatto arbitraria fra loro, dovuti rispettivamente alle polarità nulle $\Pi_1, \ldots \Pi_5$, le 5 coppie di rette $q_1 q'_1, \ldots q_5 q'_5$ che i complessi dati presi 4 a 4 hanno in comune, segano un piano generico ω dello spazio in 5 coppie di punti situate su raggi che appartengono ad un medesimo fascio e costituiscono un gruppo proiettivo a quello che i poli $O_1, \ldots O_5$ del piano ω nelle polarità $\Pi_1, \ldots \Pi_5$ formano sulla conica $c_{(2)} \equiv O_1, \ldots O_5$ che passa per essi.*

Infatti le rette q_1, q'_1;... q_5, q'_5 sono coniugate fra loro nella polarità nulla Π dovuta al complesso H che è in involuzione con i complessi dati, sicchè i raggi $r_1, \ldots r_5$ del piano ω che si appoggiano alle predette coppie di rette, appartengono a tale complesso H e perciò concorrono in un medesimo punto O.

Di più indicando con Q_{lm} la congruenza lineare comune ai complessi dati K_l, K_m e con S_l la congruenza lineare che ha per direttrici i raggi q_l, q'_l, si ha che i due gruppi di congruenze Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}, Q_{15}; S_2, S_3, S_4, S_5 sono riferiti fra di loro in modo che ogni congruenza dell'un gruppo è in involuzione con le 3 congruenze non omologhe dell'altro gruppo, sicchè nel piano ω le due quaterne di raggi $O_1(O_2 O_3 O_4 O_5)$, $r_2 r_3 r_4 r_5$ che appartengono alle predette congruenze, sono proiettive fra di loro (§ 12); vale a dire che la quaterna dei punti $O_2 O_3 O_4 O_5$ della conica $c_{(2)} \equiv O_1 \ldots O_5$ è proiettiva a quella dei raggi $r_2 r_3 r_4 r_5$.

Analogamente il gruppo di punti $O_1 O_3 O_4 O_5$ della $c_{(2)}$ è proiettivo al gruppo $r_1 r_3 r_4 r_5$, onde per la $c_{(2)}$ ed il fascio $(O - \omega)$ si ha:

$$(O_1 \ldots O_5)_2 \ \pi \ r_1 \ldots r_5 \ (*); \qquad c. \ v \ d.$$

Correlativamente può affermarsi che

Dati 5 complessi lineari di rette, i piani polari di un punto O nelle corrispondenti polarità nulle costituiscono sul cono di 2ª classe che li contiene, un gruppo proiettivo a quello formato dai raggi uscenti da O ed appoggiati alle coppie di rette $q_1 q'_1, \ldots q_5 q'_5$ che i complessi dati presi 4 a 4 hanno in comune.

(*) Con i simboli $(O_1 \ldots . O_5)_2$, $(\omega_1 \ldots . \omega_5)_2$ ora ed in seguito designeremo il gruppo costituito su una conica (o in un cono di 2ª classe) da cinque punti $O_1, \ldots O_5$ della curva (o da cinque piani $\omega_1, \ldots \omega_5$ del cono).

Da questo teorema e dai risultati ottenuti nel § 13 segue che:

Date 5 polarità nulle $\Pi_1, \ldots \Pi_5$ nello spazio ed assegnati in una stella 5 piani $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_5$ di cui tre non appartengano ad uno stesso fascio, i punti dello spazio a cui nelle polarità date corrispondono piani formanti un gruppo omografico a quello dei piani $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_5$, si trovano su di una curva gobba di 8º ordine e di genere 5, che ha per quadriseganti i raggi comuni ai complessi lineari determinati dalle polarità date, presi 4 a 4. E correlativamente.

Variando il *gruppo caratteristico* $(\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_5)$, l'anzidetta curva $c_{(8)}$ descrive una congruenza di 1º ordine del tipo indicato nel § 13, che ha per direttrici le 5 coppie di rette $q_i q'_i$ e per fasci generatori i fasci φ_i costituiti da superficie:

$$\lambda_{(4)} \equiv q_l q'_l q_m q'_m q_n q'_n q_p q'_p d_{il} d'_{il} d_{im} d'_{im} d_{in} d'_{in} d_{ip} d'_{ip},$$

per $i, l, m, n, p = 1, 2, 3, 4, 5$ in qualsiasi ordine; avendo indicato con d_{il}, d'_{il} le rette coniugate fra loro in entrambe le polarità Π_i, Π_l.

Una retta arbitraria r dello spazio è corda di 6 curve della congruenza (§ 13). Le coppie dei punti di appoggio di queste curve con la r coincidono con quelle dovute alle cubiche gobbe che hanno per corde la r e le sue coniugate nelle polarità $\Pi_1, \ldots \Pi_5$.

Il teorema stabilito al principio di questo § vale anche nel caso che i 5 complessi dati abbiano un raggio comune $r = q'_1 \ldots = q'_5$ (§ 16, 1º) (*). In tale caso la curva $c_{(8)}$ si spezza nella retta r ed in una curva razionale $c_{(7)} \equiv r^6 (q_1 \ldots q_5)^4$, la quale col variare del gruppo caratteristico descrive una congruenza lineare del tipo indicato nel § 16, 2.º

E così se fra i complessi dati ve ne sono x singolari, allora i loro assi $k_1, \ldots k_x$ si staccano dalla curva c e resta una curva c' di ordine $8 - x$ e di genere $5 - x$ (§ 15, 3º) o di ordine $7 - x$ e di genere zero, secondo che non esiste o esiste un raggio comune ai 5 complessi.

Nel primo caso la c' ha per corde le $k_1, \ldots k_x$ e si appoggia ad ogni retta q comune a 4 dei complessi dati in $4 - y$ punti, se y dei 4 complessi

(*) Invece nel caso che i complessi dati abbiano due raggi in comune, la proiettività indicata nel teorema, risulta degenere. Se q, q' sono i raggi comuni ai 5 complessi, la curva c e l'inviluppo j si spezzano nelle q, q' ed in 6 rette t appoggiate alle precedenti. Ciò può riconoscersi ricorrendo alla rappresentazione stabilita nel § 5, nella quale ai complessi lineari che hanno per assi le rette t, corrispondono piani della quadrica inviluppo fondamentale che segano i piani corrispondenti ai complessi dati secondo rette formanti un gruppo omografico al gruppo dato.

sono singolari; nel secondo caso invece essa ha $6-x$ punti sulla r, si appoggia semplicemente alle $k_1, \dots k_x$ ed incontra ogni retta q comune a 4 dei complessi dati, in $4-y$ punti, se y dei 4 complessi sono singolari.

In particolare se tutti i 5 complessi dati sono singolari con gli assi $k_1, \dots k_5$ in posizione affatto arbitraria, la c' è di 3° ordine e col variare del gruppo caratteristico essa descrive tutto il sistema delle cubiche gobbe che hanno per corde le $k_1, \dots k_5$ (*). Onde può affermarsi inversamente che:

Cinque corde arbitrarie $k_1, \dots k_5$ di una cubica gobba, prese 4 a 4, determinano 5 congruenze lineari di rette $Q_1, \dots Q_5$. I raggi di queste congruenze che passano per un punto della cubica, costituiscono una quintupla di un fascio, la quale, col variare del punto sulla curva, varia restando sempre proiettiva al gruppo che i 5 piani proiettanti le $k_1, \dots k_5$ da un punto generico della curva formano sul cono di 2ª classe a cui essi piani appartengono.

18. Se i complessi dati sono tutti singolari ed hanno *un* raggio comune, senza presentare ulteriori particolarità, allora i loro assi $k_1, \dots k_5$ appartengono ad una superficie di 3° ordine $\sigma_{(3)}$ del tipo più generale, ed esiste su questa superficie un sistema doppiamente infinito di cubiche gobbe aventi per corde le $k_1, \dots k_5$ e tali che per due punti della superficie passa *una* cubica del sistema. Ne segue che tutti i gruppi di piani che proiettano le $k_1, \dots k_5$ dai singoli punti della superficie $\sigma_{(3)}$ sono fra loro omografici.

Uno qualsiasi di essi o ogni gruppo di piani $g_0 \equiv \varepsilon_1 \dots \varepsilon_5$ che gli sia omografico, sarà da noi detto *gruppo fondamentale* della quintupla $k_1 \dots k_5$.

Ora innanzi tutto si ha inversamente che ogni punto dal quale le rette $k_1, \dots k_5$ vengono proiettate secondo una quintupla omografica al gruppo fondamentale indicato, appartiene alla superficie $\sigma_{3)}$, giacchè per esso e per un punto della σ_3 passa una cubica che ha per corde le $k_1, \dots k_5$ e che perciò giace per intero sulla $\sigma_{(3)}$ con la quale ha in comune 11 punti.

Dunque il gruppo fondamentale della quintupla $k_1 \dots k_5$ presenta questo di notevole che il luogo dei punti dai quali le $k_1, \dots k_5$ vengono proiettate secondo quintuple omografiche ad esso gruppo fondamentale, non è una curva (come nel caso generale) ma una superficie, e propriamente è la $\sigma_{(3)}$ che passa per le $k_1, \dots k_5$.

Su di essa designando con k_6 l'altra retta della sestupla che contiene le $k_1, \dots k_5$ e con $q_1, \dots q_6$ le rette della sestupla associata, sicchè la q_6 è il

(*) Sturm. Loc. cit. § 51, 7.

raggio comune ai complessi dati e le $q_1, \ldots q_5$ sono i raggi che questi complessi hanno ulteriormente in comune presi 4 a 4, per un punto generico O della superficie si ha che i 5 piani $O\,k_1, \ldots O\,k_5$ formano sul cono di 2ª classe che li contiene, un gruppo $O\,(k_1 \ldots k_5)_2$ proiettivo a quello costituito dai raggi che passano per O, giacciono nel piano $\omega \equiv O\,q_6$ e si appoggiano rispettivamente alle $q_1, \ldots q_5$, e ciò in virtù del teorema stabilito al principio del Capitolo.

D'altra parte il gruppo di raggi indicato è proiettivo al gruppo di punti $\omega\,(q_1 \ldots q_5)_2$ che ha per sostegno la conica $c_{(2)}$ sezione del piano $\omega \equiv O\,q_6$ con la σ_3; a sua volta la quintupla $\omega\,(q_1 \ldots q_5)_2$ proiettata dalla retta k_6, che si appoggia alla $c_{(2)}$, dà il gruppo di piani $k_6\,(q_1 \ldots q_5)$ proiettivo ad essa e prospettivo al gruppo di punti $q_6\,(c_{16} \ldots c_{56})$, avendo indicato con c_{il} la retta della superficie sezione dei piani $k_i\,q_l$, $k_l\,q_i$, ed infine il gruppo di punti ottenuto $q_6\,(c_{16} \ldots c_{56})$ è coniugato al gruppo di punti $q_6\,(k_1 \ldots k_5)$ nel l'involuzione determinata sulla retta q_6 dalle coniche della superficie che l' hanno per corda, onde può affermarsi che:

I piani del gruppo fondamentale della quintupla $k_1 \ldots k_5$ formano sul cono di 2ª classe, che li contiene, un gruppo proiettivo a quello costituito dai punti di sezione delle $k_1, \ldots k_5$ con la segante comune q_6.

Proiettando questi punti $q_6\,(k_1, \ldots k_5)$ dal punto O della σ_3, le rette che ottengonsi, sono le sezioni del piano $\omega \equiv O\,q_6$ con i piani $O\,k_1, \ldots O\,k_5$. Ma esse formano una quintupla proiettiva al gruppo $O\,(k_1 \ldots k_5)_2$, onde il piano ω appartiene al cono di 2ª classe che contiene i piani $O\,k_1, \ldots O\,k_5$.

Viceversa se un punto O determina con le 6 rette $k_1, \ldots k_5$, q_6 6 piani appartenenti ad un medesimo cono di 2ª classe, allora il gruppo $O\,(k_1 \ldots k_5)_2$ è proiettivo al gruppo di punti $q_6\,(k_1 \ldots k_5)$ e perciò anche alla quintupla di piani $(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_5)_2$ dovuta al gruppo fondamentale $g_0 \equiv \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_5$ della quintupla data. Perciò i due gruppi $O\,(k_1 \ldots k_5)$, $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_5$ risultano omografici, ed il punto O, per proprietà già dimostrata, appartiene alla superficie $\sigma_{(3)} \equiv k_1 \ldots k_5$. Ne deriva il teorema che:

Date nello spazio 6 rette di cui una incontri le altre cinque a due a due fra loro sghembe, il luogo dei punti dai quali le rette date vengono proiettate secondo piani appartenenti ad un medesimo cono di 2ª classe, è la superficie di 3º ordine che contiene le rette date (*).

(*) Cfr. KOHN: *Ueber die Sextupel von geraden Linien, welche von sämmtlichen Punkten einer cubischen Fläche als sechs Tangenten eines Kegelschnitts gesehen werden.* Monatsh. f. Mathematik u. Physik. II Jahrg. 1891.

In un piano arbitrario τ che non passi per alcuna delle 6 rette date, il gruppo di punti $\tau(k_1 \ldots k_5)_2$ non è mai proiettivo al gruppo di punti $q_6(k_1 \ldots k_5)$, giacchè se lo fosse, esisterebbe una rigata di 3° o di 2° grado contenente le $k_1 \ldots k_5$, e queste avrebbero almeno un'altra segante comune, il che è contrario alle ipotesi fatte.

Perciò nel piano τ esiste un unico punto T dal quale il gruppo di punti $\tau(k_1 \ldots k_5)$ viene proiettato secondo una quintupla di raggi proiettiva al gruppo di punti $q_6(k_1 \ldots k_5)$ (*).

Ora nella stella (T) si considerino i 7 piani $Tk_1, \ldots Tk_5, \tau, \tau' \equiv Tq_6$. I primi cinque sono segati dagli ultimi due secondo quintuple di rette fra loro proiettive, onde i 7 piani appartengono ad un medesimo cono di 2^a classe χ_2, epperò T è un punto della superficie $\sigma_{(3)}$, ed il cono $\chi_{(2)}$ fa parte dell'assieme che si considera. Dunque:

Gli ∞^2 coni indicati nel precedente teorema godono la proprietà che un piano dello spazio, che non passi per alcuna delle 6 rette date, appartiene ad uno e ad uno solo di essi.

19. Assegnato ad arbitrio in una stella di piani un gruppo $g \equiv \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_5$ che non sia omografico al gruppo fondamentale g_0 della quintupla di rette $k_1 \ldots k_5$, la cubica gobba luogo dei punti dai quali le rette date vengono proiettate secondo piani formanti un gruppo omografico al gruppo dato g, si spezza nella retta q_6 ed in una conica $c_{(2)}$ che si appoggia semplicemente alle $k_1, \ldots k_5, q_6$ (§ 15).

Col variare del gruppo g, la conica $c_{(2)}$ descrive nello spazio una congruenza lineare che è la forma correlativa all'insieme dei coni studiato in fine del prec. §; cioè le coniche in quistione sono nei singoli piani dell'inviluppo di 3^a classe $J_{(3)} \equiv k_1 \ldots k_6$ (**), e su ciascuna di esse i punti di appoggio con le $k_1, \ldots k_5$ formano un gruppo proiettivo alla quintupla di piani $q_6(k_1 \ldots k_5)$ (***).

(*) Staudt: *Geometrie der Lage*, n.° 263.

(**) Di questa congruenza di coniche si fa cenno nel n. 5 della mia Memoria: *Su i varii tipi di congruenze lineari di coniche nello spazio*. Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Napoli. Aprile 1895.

(***) Quattro qualunque delle rette $k_1, \ldots k_5$ determinano con la q_6 due gruppi, l'uno di punti, l'altro di piani, che non sono proiettivi fra loro, non essendovi alcuna retta infinitamente vicina alla q_6 che si appoggi alle 4 rette k.

Come invarianti della superficie $\sigma_{(3)}$ potrebbero assumersi i rapporti anarmonici delle quaterne di punti $q_6(k_1 k_2 k_3 k_4)$, $q_6(k_1 k_2 k_3 k_5)$ e delle quaterne di piani $q_6(k_1 k_2 k_3 k_4)$, Un legame più intimo intercede fra l'assieme dei coni indicati nel § prec. e la congruenza di coniche presa in esame. Esso è conseguenza immediata di un teorema di SCHUR (*), di cui vogliamo dare ora una dimostrazione diretta assai semplice.

Il teorema in quistione è il seguente: *Due sestuple di rette associate $k_1 \ldots k_6$, $q_1 \ldots q_6$ di una superficie generale di 3° ordine σ_3 si corrispondono in una polarità ordinaria dello spazio.*

Designando con c_{il} la retta della σ_3, sezione dei piani $k_i q_l$, $k_l q_i$, si considerino i punti $R_1 \equiv k_6 q_1, \ldots R_5 \equiv k_6 q_5$ e i piani $\rho_1 \equiv q_6 k_1, \ldots \rho_5 \equiv q_6 k_5$. Questi segano la k_6 nei punti $R'_1 \equiv k_6 c_{16}, \ldots R'_5 \equiv k_6 c_{56}$ coniugati ad $R_1, \ldots R_5$ nell'involuzione determinata sulla k_6 dalle coniche della superficie che l'hanno per corda. Perciò le due quintuple $R_1 \ldots R_5$, $\rho_1 \ldots \rho_5$ sono fra loro involutorie.

Analogamente il gruppo dei piani $\tau_1 \equiv k_6 q_1, \ldots \tau_5 \equiv k_6 q_5$ ed il gruppo dei punti $T_1 \equiv q_6 k_1, \ldots T_5 \equiv q_6 k_5$ sono in involuzione, epperò esistono ∞^1 polarità ordinarie dello spazio nelle quali alla k_6 è coniugata la q_6 e ai punti $R_1, \ldots R_5$, $T_1, \ldots T_5$ corrispondono rispettivamente i piani $\rho_1, \ldots \rho_5$, $\tau_1, \ldots \tau_5$. Per individuare una di queste polarità basta della retta k_1 che passa per T_1 e giace in ρ_1, assegnare la retta corrispondente che deve trovarsi nel piano τ_1 e passare pel punto R_1. Sia essa la q_1, che soddisfa alle condizioni indicate. Allora la polarità è ben determinata, ed in essa alla retta k_2 che passa per T_2, giace in ρ_2 e si appoggia alla q_1, è coniugata la retta q_2, che giace in τ_2, passa per R_2 e si appoggia alla k_1; e così di seguito; donde il teorema.

Da questo segue che: *L'assieme dei coni studiato nel § prec. e la congruenza di coniche presa in esame in questo § si corrispondono in una polarità ordinaria dello spazio ben deteterminata.*

20. Due sestuple di rette associate di una superficie di 3° ordine sono assi di 12 complessi singolari di rette, distribuiti in due gruppi in modo che ogni complesso dell'un gruppo è in involuzione con i 5 complessi non omologhi dell'altro gruppo.

Ora in generale è possibile costruire due sestuple di complessi lineari di rette, formate ciascuna da complessi non appartenenti ad uno stesso sistema lineare ∞^4 e riferite fra di loro in modo che ogni complesso di una di esse sia in involuzione con i complessi non omologhi dell'altra.

$q_6\,(k_1\,k_2\,k_3\,k_5)$. Ciò appunto fa il BOBEK nella sua Nota: *Ueber die Invarianten der Flächen dritter Ordnung.* Monatsh. f. Mathematik u. Physik. VIII Jahrg. 1897.

(*) *Math. Annalen*, Bd. XVIII, § 5.

Due sestuple siffatte saranno da noi dette *associate* (*). Data una di esse ad arbitrio, l'altra è perfettamente determinata.

Nelle polarità nulle dovute ai complessi $H_1, \ldots H_6$; $H'_1, \ldots H'_6$ di due sestuple associate ad un piano arbitrario ω dello spazio corrispondono due sestuple di punti $O_1, \ldots O_6$; $O'_1, \ldots O'_6$ fra le quali intercede una notevole relazione proiettiva.

Per ottenere questa relazione basta notare che i 5 complessi $H_1, \ldots H_5$ della prima sestupla presi 4 a 4 hanno in comune 5 coppie di rette q_{16}, $q'_{16}; \ldots q_{56}$, q'_{56} le quali sono rispettivamente le direttrici delle congruenze lineari comuni alle coppie di complessi $H'_1 H'_6, \ldots H'_5 H'_6$, sicchè i raggi del piano ω appoggiati alle anzidette coppie di rette sono i raggi $O'_1 O'_6, \ldots O'_5 O'_6$; e perciò pel 1.° teorema del § precedente è:

$$O'_6 (O'_1 \ldots O'_5) \;\pi\; (O_1 \ldots O_5)_2. \qquad (a)$$

Scambiando fra loro le due sestuple si riconosce che è anche:

$$O_6 (O_1 \ldots O_5) \;\pi\; (O'_1 \ldots O'_5)_2, \qquad (a')$$

e si deduce che i punti O, O' formano due gruppi *linearmente associati* (*linearabhängige Punktsysteme* secondo la designazione di Rosanes (**)), vale a dire che per ogni punto P del piano ω esiste in tale piano *un* punto P' tale che:

$$P (O_1 \ldots O_6) \;\pi\; P' (O'_1 \ldots O'_6).$$

Dunque *i poli di un medesimo piano (o i piani coniugati ad un medesimo punto) nelle polarità nulle dovute ai complessi lineari di due sestuple associate, costituiscono due gruppi associati linearmente.*

Ed in particolare, per l'osservazione fatta al principio del §, si ha che:

Segando due sestuple di rette associate di una superficie di 3° ordine con un piano (o proiettandole da un centro arbitrario) si ottengono due gruppi di punti (o di piani) associati linearmente (***).

Siano $K_1 \ldots K_6$, $Q_1 \ldots Q_6$ due di siffatti gruppi di punti dovuti alle sestuple $k_1 \ldots k_6$, $q_1 \ldots q_6$ della superficie $\sigma_{(3)}$ e ad un piano arbitrario τ. Questo seghi la $\sigma_{(3)}$ secondo la curva $c_{(3)} \equiv K_1 \ldots K_6\, Q_1 \ldots Q_6$.

(*) Esse furono assunte da De Paolis come sestuple fondamentali di riferimento nello stabilire il sistema più generale di coordinate dei complessi lineari di rette. (Mem. cit., cap. XII.)

(**) Rosanes, *Ueber linearabhängige Punktsysteme.* Giornale di Crelle, vol. 88. 1880.

(***) Di questo teorema trovasi un cenno alquanto vago nella Memoria di Kantor: *Ueber die algemeinsten linearen Systeme linearer transformationen*, § IV, 3 *a*). (Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. 46.)

Riguardando corrispondenti due punti P, P' del piano τ, per i quali sia:

$$P(K_1 \dots K_6) \ \pi \ P'(Q_1 \dots Q_6),$$

ne risulta una corrispondenza cremoniana di 5° ordine ben nota, la quale ammette per punti fondamentali (doppii) nell'un sistema i punti K e nell'altro i punti Q.

Si supponga che in essa al punto K_6 riguardato appartenente al secondo sistema corrisponda nel primo il punto T_6. Sarà:

$$T_6(K_1 \dots K_5) \ \pi \ K_6(Q_1 \dots Q_5) \ \pi \ k_6(q_1 \dots q_5) \ \pi \ q_6(k_1 \dots k_5),$$

ove delle ultime due quintuple la prima è costituita da piani e la seconda da punti. Ne deriva che il punto T_6 coincide col vertice del cono di 2ª classe tangente al piano τ ed alle rette $k_1, \dots k_5$, q_6, epperò appartiene alla curva $c_{(3)}$ (§ 18).

Quel che si è detto per il punto K_6, può ripetersi per i punti $K_5, \dots K_1$ per dedurne che *la curva $c_{(3)}$ è unita nella corrispondenza cremoniana indicata*, ecc., ecc.

21. Un'altra proposizione che deriva dal teorema generale dimostrato nel prec. §, è la seguente:

La superficie inviluppo di un piano a cui in 6 polarità nulle $\Pi_1, \dots \Pi_6$ assegnate ad arbitrio corrispondono punti di una medesima conica, coincide con la superficie inviluppo dovuta in modo analogo alle polarità nulle $\Pi'_1, \dots \Pi'_6$ formanti sestupla associata a quella delle $\Pi_1, \dots \Pi_6$.

Infatti nel caso che i punti $O_1, \dots O_6$ siano su di una conica, si ha che:

$$(O_1 \dots O_5)_2 \ \pi \ O_6(O_1 \dots O_5),$$

onde per le relazioni a), a') del § prec. è anche:

$$O'_6(O'_1 \dots O'_5) \ \pi \ (O'_1 \dots O'_5)_2;$$

cioè anche i punti $O'_1, \dots O'_6$ si trovano su di una conica, diversa in generale dalla precedente.

E può notarsi che *la superficie inviluppo indicata nel precedente teorema è di 8ª classe.*

Infatti assunta ad arbitrio una retta r a cui nelle polarità $\Pi_1, \dots \Pi_6$ corrispondano rispettivamente le $r_1, \dots r_6$, i piani che passano per la r e che appartengono all'inviluppo che si considera, sono quelli che segano le $r_1, \dots r_6$ in punti di una medesima conica, onde il loro numero è 8 (*).

(*) Vegg. fra gli altri SCHUBERT, *Abzählende Geometrie*, pag. 95 ($\mu^2 \nu^6 = 8$).

Se due delle rette $r_1, \ldots r_6$ coincidono fra loro, ogni piano passante per la r sega le $r_1, \ldots r_6$ in punti di una conica e perciò appartiene all'inviluppo che si considera. Questo perciò contiene 60 fasci di piani, che hanno per assi i raggi comuni ai complessi della prima (o della seconda) sestupla presi quattro a quattro. Reggono considerazioni correlative riguardanti una superficie di 8^0 ordine:

$$\sigma_{(8)} \equiv q_{12} q'_{12} \ldots q_{56} q'_{56} \; d_{12} d'_{12} \ldots d_{56} d'_{56},$$

completamente determinata da due sestuple associate di complessi lineari $(H_1 \ldots H_6)$, $(H'_1 \ldots H'_6)$, ecc., ecc.

Se una di queste sestuple è costituita da complessi singolari aventi per assi 6 rette $k_1, \ldots k_6$ in posizione affatto arbitraria fra loro, allora ognuna delle rette k coincide con 5 rette d e risulta doppia per la corrispondente superficie $\sigma_{(8)}$; si presenta cioè in tale caso la nota superficie di 8^0 ordine $\sigma_{(8)} \equiv (k_1 \ldots k_6)^2 q_{12} q'_{12} \ldots q_{56} q'_{56}$, luogo dei vertici dei coni di 2^0 grado tangenti a 6 rette arbitrarie dello spazio (*).

Più particolarmente se le rette $k_1, \ldots k_6$ formano una sestupla su di una superficie di 3^0 ordine, allora anche le rette q coincidono a 5 a 5 con le rette $q_1, \ldots q_6$ della sestupla associata alla precedente, sicchè le $q_1, \ldots q_6$ risultano anche esse doppie per la corrispondente superficie $\sigma_{(8)}$.

V.

22. *Dati cinque complessi lineari di rette $K_1, \ldots K_5$ in posizione affatto arbitraria fra di loro, i fasci di rette dello spazio nei quali i raggi appartenenti ai complessi dati formano un gruppo proiettivo ad un gruppo assegnato $g \equiv e_1 \ldots e_5$, costituiscono un sistema ∞^3: Σ'.*

In un piano generico dello spazio esiste un unico fascio di rette del sistema.

Un punto generico dello spazio è centro di un unico fascio di rette del sistema.

Infatti designando con $O_1, \ldots O_5$ i poli di un piano ω nelle polarità nulle $\Pi_1, \ldots \Pi_5$ dovute ai complessi dati, il fascio di raggi del sistema Σ' situato

(*) Vegg. Cayley, *Memoir on Quartic surfaces*. Proc. Lond. Math. Soc. Vol. III; *On a surface of the eight order*. Math. Annalen. Bd. VI; Hierholzer, *Ueber Kegelschnitte im Raume*. Math. Annalen. Bd. II.

in ω, è quello che ha per centro il punto O di ω da cui i punti $O_1, \ldots O_5$ vengono proiettati secondo un gruppo di rette proiettivo al dato.

Dai precedenti teoremi deriva che:

Un punto e un piano dello spazio che siano sostegni di un fascio di raggi del sistema Σ', si corrispondono in una reciprocità birazionale nulla.

I punti che corrispondono in questa reciprocità ai piani passanti per una retta arbitraria k, sono i centri dei fasci situati nei piani per k, nei quali i raggi appoggiati alle rette $k_1, \ldots k_5$, coniugate alla k nelle $\Pi_1, \ldots \Pi_5$, formano un gruppo proiettivo al dato. Perciò i punti indicati si trovano su di una curva di 7° ordine che ha per segante sestupla la k e per quadriseganti le $k_1, \ldots k_5$ (§ 16, 2°).

Dunque:

La reciprocità birazionale Θ indicata nel teorema è di 7° grado.

Se i piani polari di un punto O nelle $\Pi_1, \ldots \Pi_5$ formano nel cono di 2ª classe che li contiene, un gruppo proiettivo al gruppo dato g, allora ogni piano di questo cono corrisponde nella reciprocità Θ al punto O, il quale perciò risulta doppio per tutte le superficie $\varphi_{(7)}$ che corrispondono nella Θ alle stelle di piani dello spazio.

Il luogo dei punti O ora indicati è una curva gobba di 8° ordine e di genere 5 che ha per quadriseganti le 10 rette q_i, q'_i comuni ai complessi dati presi 4 a 4 (§ 17).

Anche queste rette sono fondamentali per la Θ, perchè ad un punto O di una di esse corrispondono tutti i piani del fascio di cui essa retta è asse. Nè la corrispondenza Θ ammette altri punti eccezionali, sicchè le superficie che in essa corrispondono alle stelle di piani dello spazio sono delle $\varphi_{(7)} \equiv c_{(8)}^2$, $10\, q$.

Correlativamente ad un piano punteggiato corrisponde nella Θ un inviluppo di ∞^2 piani $I_{(7)} \equiv j_{(8)}^2$, $10\, q$, avendo l'inviluppo fondamentale $j_{(8)}$ genesi correlativa a quella della curva $c_{(8)}$.

La Iacobiana del sistema delle superficie φ è una superficie $\sigma_{(24)} \equiv c^7{}_{(8)}$, $10\, q^4$ che corrisponde nella Θ all'inviluppo $j_{(8)}$; e correlativamente ecc.

Un'altra osservazione è da farsi sulla reciprocità Θ, ed è la seguente:

In un fascio di raggi $(O - \omega)$ che appartenga a due dei complessi dati, per esempio a K_1 e a K_2, si considerino i raggi r_3, r_4, r_5 che si trovano nei complessi K_3, K_4, K_5 ed i raggi r_1, r_2 pei quali si ha:

$$r_1\, r_2\, r_3\, r_4\, r_5 \;\pi\; g \equiv e_1\, e_2\, e_3\, e_4\, e_5 .$$

Le rette r_1, r_2 appartenendo ai complessi K_1, K_2, ne deriva che il fascio

$(O - \omega)$ fa parte del sistema Σ', sicchè il punto O e il piano ω si corrispondono nella Θ.

Da ciò segue che due rette che siano coniugate fra loro in due delle polarità date, si corrispondono anche nella reciprocità Θ, nel senso che ai piani che passano per una di tali rette, corrispondono nella Θ i punti dell'altra.

23. La polarità nulla Π dello spazio, determinata dal complesso lineare K che è in involuzione con i complessi dati $K_1, \ldots K_5$, facendo corrispondere ciascuno di questi complessi a sè stesso, trasforma del pari in sè stesso il sistema dei fasci di rette Σ' del § precedente, facendo corrispondere alla curva fondamentale $c_{(8)}$ l'inviluppo fondamentale $j_{(8)}$ del sistema.

Ed i centri di due fasci del sistema Σ' che si corrispondano nella Π, sono coniugati fra loro in una corrispondenza birazionale involutoria J dello spazio (prodotto delle reciprocità commutabili Θ e Π), la quale ha lo stesso grado e le stesse linee fondamentali della Θ; cioè in essa ai piani dello spazio corrispondono le superficie $\varphi_{(7)} \equiv c^2{}_{(8)}, 10\, q$ già indicate nel § precedente; ad ogni punto di una delle rette q_i, q'_i corrisponde per intero l'altra di tali rette; mentre ad un punto della $c_{(8)}$ corrisponde una conica il cui assieme costituisce la superficie $\sigma_{(24)} \equiv c^7{}_{(8)}, 10\, q^4$ già indicata nel precedente §, che è la Iacobiana del sistema delle superficie $\varphi_{(7)}$ (*).

La conica $o_{(2)}$ che corrisponde ad un punto generico O della $c_{(8)}$ nell'involuzione J ora definita, è coniugata nella Π al cono di 2ª classe $\chi_{(2)} \equiv \omega_1 \ldots \omega_5$ che corrisponde allo stesso punto O nella reciprocità Θ; essa perciò si trova sul piano ω polare di O nella Π (piano che appartiene all'inviluppo $j_{(8)}$) e contiene i punti $O_1, \ldots O_5$, poli di ω nelle $\Pi_1, \ldots \Pi_5$, i quali formano su di essa un gruppo proiettivo al gruppo caratteristico del sistema. Inoltre la conica $o_{(2)}$

(*) Nella corrispondenza birazionale che l'involuzione J stabilisce fra un piano τ e la corrispondente superficie $\varphi_{(7)}$, alle sezioni piane della $\varphi_{(7)}$ corrispondono curve:

$$c_{(7)} \equiv 8\, D^2,\ 10\, Q,$$

e ai singoli punti della curva doppia $c_{(8)}$ corrispondono coppie di punti di una curva:

$$c_{(24)} \equiv 8\, D^7,\ 10\, Q^4,$$

di genere 25, situate su rette di un inviluppo di 8ª classe, sezione del piano τ con l'inviluppo $j_{(8)}$; sicchè il numero di tali coppie formate da punti coincidenti è 32. E facendo uso della *formola di* Zeuthen (*Math. Annalen.* Bd. III) per la corrispondenza (1, 2) che intercede fra le $c_{(8)}$, $c_{(24)}$, può riconoscersi che il genere della $c_{(8)}$ è 5, ciò che per altra via abbiamo già stabilito.

non avendo punti variabili di sezione con le superficie $\varphi_{(7)}$, e non incontrando le q_i, q'_i che sono linee fondamentali *di 2.ª specie* dell'involuzione J, si appoggia necessariamente in 7 punti alla $c_{(8)}$: donde segue che:

Una curva $c_{(8)}$ *del tipo indicato nei § 12 e 17, le cui quadriseganti si corrispondano 2 a 2 nella polarità nulla* Π, *è segata dal piano polare di un suo punto O nella* Π, *oltre che in O, in 7 punti di una medesima conica.*

Due punti coniugati nella involuzione J sono su di un raggio del complesso K; nè la J ammette superficie punteggiata unita, ma soltanto una curva punteggiata unita $u_{(8)}$, luogo dei punti per i quali i raggi appartenenti alle congruenze lineari $(K K_1), \ldots (K K_5)$ formano un gruppo proiettivo al gruppo caratteristico del sistema. Perciò *un raggio generico del complesso K contiene tre coppie di punti coniugati nella J.*

La curva unita $u_{(8)}$ ora indicata ha soltanto 8 punti variabili in comune con le superficie $\varphi_{(7)}$ coniugate nella J ai piani dello spazio, nè incontra le rette q_i, q'_i; sicchè si appoggia alla curva $c_{(8)}$ in 24 punti; vale a dire che sulla $c_{(8)}$ esistono 24 punti di cui ciascuno si trova sulla conica che gli corrisponde nella J.

È opportuno anche notare che le rette d_{il}, d'_{il} che si corrispondono in entrambe le polarità date Π_i, Π_l, corrispondono l'una all'altra nella J con proiettività non degenere.

Se si tengono fissi i complessi $K_1, \ldots K_5$, e si fa variare in tutti i modi possibili il gruppo g, si presentano ∞^2 sistemi Σ' di fasci di raggi ed altrettante involuzioni J del tipo ora studiato. Queste dànno tutte origine al complesso di rette K contato tre volte, e presentano ulteriormente le seguenti proprietà:

1.° Esiste una sola involuzione del sistema nella quale si corrispondono due punti assegnati posti su di un medesimo raggio del complesso K.

2.° Le curve fondamentali $c_{(8)}$ delle involuzioni del sistema costituiscono una congruenza di 1° ordine che ha per direttrici le rette q_i, q'_i.

3.° Le curve punteggiate $u_{(8)}$ delle involuzioni del sistema costituiscono una congruenza di 1° ordine dello stesso tipo della precedente, che ha per direttrici le rette d_i, d'_i coniugate fra loro nella polarità Π e nelle singole polarità date Π_i.

Se ai complessi $K_1, \ldots K_5$ si sostituiscono i complessi $K'_1, \ldots K'_5$ che con K formano la sestupla associata a quella costituita da $K_1, \ldots K_5$, K, si presenta un secondo sistema di involuzioni J riferito al precedente in modo che di due involuzioni corrispondenti, aventi lo stesso gruppo caratteristico, l'una ha per curva fondamentale la curva punteggiata unita dell'altra; ecc., ecc.

24. Può succedere che uno dei complessi dati, ad esempio il complesso K_5, sia singolare con la retta k per asse. In tale caso designando con $k_1, .. k_4$ le rette conjugate alla k nelle polarità dovute agli altri 4 complessi dati, si ha che ad un piano ω che passi per la k, corrispondono nella reciprocità Θ definita nel prec. §, tutti i punti di una conica $c_{(2)}$ appoggiata alle $k_1, \dots k_4$ in punti che sulla $c_{(2)}$ formano un gruppo proiettivo al gruppo $g_5 \equiv e_1 \dots e_4$. Ne segue che il fascio (k) fa parte dell'inviluppo fondamentale $j_{(8)}$ della Θ e la superficie corrispondente è una $\sigma_{(4)} \equiv k^2 k_1 .. k_4$ di tipo noto (§ 6, 1.°). E correlativamente per la k riguardata come forma di punti.

Può succedere in secondo luogo che i complessi dati abbiano un raggio comune $r = q'_1 = \dots = q'_5$. In tal caso il complesso K che è in involuzione con essi, è singolare; onde la corrispondente polarità Π e l'involuzione $J \equiv \Theta \Pi$ risultano degeneri.

Di più nel caso in esame le forme fondamentali $c_{(8)}$, $j_{(8)}$ della corrispondenza Θ vengono a contenere rispettivamente la retta r ed il fascio (r) (§ 17); e siccome ad un fascio di piani (o ad una punteggiata) che abbia per sostegno una retta appoggiata alla r, corrisponde nella Θ una curva c di 4° ordine (o un inviluppo j di 4ª classe) (§ 16, 2°), perciò le superficie φ che corrispondono nella Θ alle stelle di piani, sono delle $\varphi_{(7)} \equiv r^3, c^2_{(7)}, 5\,q$; e correlativamente ai piani punteggiati corrispondono inviluppi $I_{(7)} \equiv r^3, j^2_{(7)}, 5\,q$.

In sostanza la r corrisponde per intero *contata tre volte* ad ogni suo piano, epperò risulta multipla secondo 12 per la superficie iacobiana delle $\varphi_{(7)}$; e correlativamente ecc.

Se tutti i complessi dati sono singolari con le rette $k_1, \dots k_5$ per assi e col raggio comune q_6, allora le superficie φ sono delle $\varphi_{(7)} \equiv q^3_6, (k_1 \dots k_5\, c_{(2)})^2, 5\,q$; e gli inviluppi I sono degli $I_7 \equiv q^3_6, (k_1 \dots k_5\, j_{(2)})^2, 5\,q$, ove la conica fondamentale $c_{(2)}$ ed il cono inviluppo $j_{(2)}$ sono del tipo indicato nei § 19 e 18; cioè la $c_{(2)}$ si trova in un piano ω dell'inviluppo $J_{(3)} \equiv k_1 \dots k_5\, q_1 \dots q_6$ e il cono $j_{(2)}$ ha il suo vertice O sulla superficie $\sigma_{(3)} \equiv k_1 \dots k_5\, q_1 \dots q_6$.

Ai fasci di piani che hanno per assi le $k_1, \dots k_5$, corrispondono nella Θ le superficie di 4° ordine:

$$\sigma_1 \equiv k_1^2\, q_6^2\, k_2 \dots k_5\, c_{(2)}\, q_2 \dots q_5, \dots, \sigma_5 \equiv k_5^2\, q_6^2\, k_1 \dots k_4\, c_{(2)}\, q_1 \dots q_4;$$

onde al cono $j_{(2)}$ è coniugata la superficie di 4° ordine $\sigma \equiv k_1 \dots k_5\, q_6^2\, c^2_{(2)}$, ed alla stella di piani (O) che contiene il cono, la superficie di 3° ordine $\sigma_{(3)} \equiv k_1 \ldots k_5\, q_1 \ldots q_6\, O$ già indicata.

E si noti che il punto O è un punto generico della $\sigma_{(3)}$; cioè si può sempre determinare il gruppo caratteristico $g \equiv e_1 \ldots e_5$ del sistema in modo che il punto O coincida con un punto della superficie assegnata *a priori*, e ciò in un solo modo.

Ora si consideri la corrispondenza biunivoca e prospettiva che la reciprocità Θ, dovuta nel senso ora indicato ad un determinato punto O della $\sigma_{(3)}$, stabilisce fra la stella di piani (O) e la $\sigma_{(3)}$. In tale corrispondenza ad un fascio di piani (g) della (O) corrisponde la curva variabile di sezione della $\sigma_{(3)}$ con la superficie $\varphi_{(7)}$ coniugata nella Θ ad un punto O' dell'asse g, corrisponde cioè una cubica gobba $g_{(3)}$ che ha per corde le $k_1, \ldots k_5$, come può facilmente riconoscersi considerando le sezioni prodotte nelle superficie $\sigma_{(3)}$, $\varphi_{(7)}$ da un piano che passi per una delle rette k.

Di più la $g_{(3)}$ contiene i punti di sezione, diversi da O, della g con la $\sigma_{(3)}$, perchè ad uno di questi punti corrisponde nella Θ un piano che passa per esso e per O, corrisponde cioè un piano del fascio (g). Onde la $g_{(3)}$ è perfettamente determinata dall'avere per corde le $k_1, \ldots k_5$ e dal passare per i punti O', O'' anzidetti.

Ora ad una qualsiasi delle rette $k_1, \ldots k_5$, per esempio alla k_5, si sostituisca la retta k_6 della $\sigma_{(3)}$ che forma sestupla con le precedenti, e si consideri la reciprocità Θ' dovuta alla quintupla $k_1 \ldots k_4\, k_6$ ed allo stesso punto O della Θ.

In essa al fascio di piani (g) della stella (O) corrisponde la stessa cubica gobba $g_{(3)}$ che nella Θ, onde le reciprocità Θ, Θ' stabiliscono la stessa corrispondenza biunivoca e prospettiva H fra i piani della stella ed i punti della superficie; e per la natura delle Θ, Θ' si ha che in tutti i fasci di raggi che hanno per sostegni due elementi corrispondenti nella H, le rette appoggiate alle $k_1, \ldots k_6$ formano sestuple proiettive fra di loro. Dunque:

Una sestupla di rette $(k_1 \ldots k_6)$ di una superficie generale di 3° ordine ed un punto generico O della superficie individuano una corrispondenza biunivoca e prospettiva fra i punti della superficie ed i piani della stella (O) sì fatta che le sestuple di raggi appoggiati alle $k_1, \ldots k_6$ che appartengono ad un piano della stella ed al corrispondente punto della superficie, sono tutte proiettive fra di loro.

La corrispondenza indicata coincide con quella che si presenta nella genesi della superficie mediante stelle di piani omografiche $O(k_1 \ldots k_6)$,

$O'(k_1 \ldots k_6)$, $O''(k_1 \ldots k_6)$ *aventi per centri il punto O che si considera, ed altri due punti arbitrarii della superficie* (*).

Ne segue che al punto O corrisponde il piano tangente in esso alla $\sigma_{(3)}$, epperò una delle sestuple del sistema è formata dalle tangenti in O alla superficie appoggiate alle $k_1, \ldots k_6$; ecc., ecc.

Reggono i teoremi correlativi.

VI.

25. *Dati sei complessi lineari di rette $K_1, \ldots K_6$ in posizione affatto arbitraria fra di loro, i fasci di rette dello spazio nei quali i raggi appartenenti ai complessi dati formano un gruppo proiettivo ad un gruppo assegnato $g \equiv e_1 \ldots e_6$, hanno i centri su una superficie σ di 4° ordine e i loro piani appartengono ad un inviluppo J di 4ª classe.*

Infatti assunta ad arbitrio una retta r, designando con $r_1, \ldots r_6$ le rette che le corrispondono nelle polarità nulle $\Pi_1, \ldots \Pi_6$ dovute ai complessi dati, esistono nel fascio (r) 4 piani di cui ciascuno è sostegno di un fascio di rette nel quale i raggi appoggiati alle $r_1, \ldots r_6$ formano un gruppo proiettivo al dato (§ 16, 3.°). Questi fasci appartengono al sistema Σ'' che si considera, nè esistono altri fasci del sistema situati in piani passanti per la r, sicchè l'inviluppo J indicato nel teorema è di 4ª classe, e correlativamente la superficie σ è di 4° ordine.

Il sistema di fasci di raggi Σ'' di cui ora abbiamo iniziato lo studio, fa parte di ogni sistema di fasci di raggi Σ'_i determinato da 5 complessi dati K_l, K_m, K_n, K_p, K_q e dal gruppo caratteristico g_i costituito dagli elementi omologhi e_l, e_m, e_n, e_p, e_q del gruppo dato g. Ciò equivale a dire che un punto di σ ed un piano di J che siano sostegni di un fascio di rette del sistema Σ'', si corrispondono fra di loro nella reciprocità nulla Θ_i determinata dagli anzidetti complessi e dal gruppo caratteristico g_i. Da ciò segue che le due forme σ, J contengono rispettivamente l'una la curva fondamentale c_i e l'altra l'inviluppo fondamentale j_i della corrispondenza Θ_i.

In sostanza un piano ω che appartenga, per esempio, all'inviluppo fondamentale j_1 della corrispondenza Θ_1, gode la proprietà che i suoi poli $O_2, \ldots O_6$ nelle polarità nulle dovute ai complessi $K_2, \ldots K_6$, formano sulla conica $s_{(2)}$

(*) Vegg. Reye, *Die Geometrie der Lage*. 3.ª edizione, 3ª parte, pag. 60.

che li contiene, un gruppo proiettivo a $g_1 \equiv e_2 \ldots e_6$. Ora se si costruisce sulla $s_{(2)}$ il punto Q_1 pel quale sia:

$$(Q_1 O_2 \ldots O_6)_2 \;\pi\; g \equiv e_1 e_2 \ldots e_6,$$

e si unisce tale punto Q_1 col punto O_1 polo di ω nella polarità dovuta al complesso K_1, il secondo punto di incontro O della retta $O_1 Q_1$ con la conica $s_{(2)}$ è tale che:

$$O(O_1 O_2 \ldots O_6) \;\pi\; O(Q_1 O_2 \ldots O_6) \;\pi\; g \equiv e_1 e_2 \ldots e_6,$$

sicchè il fascio $(O - \omega)$ appartiene al sistema Σ'' ed il piano ω all'inviluppo J.

Il cono di 4^a classe e di genere 3 formato dai piani dell'inviluppo J che passano per un punto generico O dello spazio, avendo in comune 8 piani con l'inviluppo fondamentale j_i della reciprocità Θ_i, ha per corrispondente in tale reciprocità una curva o di genere 3 e di ordine $4 \,.\, 7 - 8 \,.\, 2 = 12$, la quale si appoggia alla curva fondamentale $c_{(8)}$ della Θ_i in $4 \,.\, 24 - 7 \,.\, 8 = 40$ punti. Questa curva *è il luogo dei centri dei fasci del sistema Σ'' situati in piani passanti per O.*

Ne segue che:

I fasci del sistema Σ'' costituiscono un complesso di rette di 12° grado

Le proprietà sino ad ora dimostrate pel sistema Σ'' non cessano di essere vere quando tutti o alcuni dei complessi dati siano singolari con gli assi $k_1, \ldots k_x$ in posizione affatto arbitraria fra loro. L'unica particolarità che si presenta in tale caso per la superficie σ e per l'inviluppo J, si è di contenere come elementi semplici l'una i punti e l'altro i piani delle rette $k_1, \ldots k_x$.

Di più ciascuna di queste rette ha in comune con la curva $o_{(12)}$ precedentemente indicata $4 \,.\, 4 - 2 - 7 = 7$ punti (*).

Un'ultima proprietà del sistema Σ'' degna di menzione è la seguente:

Sia $(K'_1 \ldots K'_6)$ la sestupla associata alla $(K_1 \ldots K_6)$; $(O - \omega)$ sia un fascio generico del sistema Σ''; ed $O_1, \ldots O_6$, $O'_1, \ldots O'_6$ siano i poli del piano ω nelle polarità nulle dovute ai complessi delle due sestuple.

Siccome i due gruppi di punti $O_1 \ldots O_6$, $O'_1 \ldots O'_6$ sono linearmente associati (§ 20), perciò esiste in ω un punto O' (diverso da O) pel quale si ha:

$$O'(O'_1 \ldots O'_6) \;\pi\; O(O_1 \ldots O_6) \;\pi\; g \equiv e_1 \ldots e_6,$$

(*) Nel caso in cui tutti i complessi dati siano singolari, cfr. STURM, Mem. cit., § 54, 5.

vale a dire che lo stesso piano ω è sostegno di un fascio di rette nel quale i raggi appartenenti ai complessi $K'_1, \dots K'_6$ formano un gruppo proiettivo a g. Da questa proposizione e dalla correlativa deriva che:

Due sistemi di fasci di raggi, del tipo studiato in questo §, che siano determinati rispettivamente da due sestuple di complessi lineari associate e che abbiano lo stesso gruppo caratteristico, dànno origine alla stessa superficie σ ed al medesimo inviluppo di piani J.

26. Può succedere che i complessi dati siano tutti singolari e che i loro assi $k_1, \dots k_6$ siano gli spigoli di un tetraedro T. In tale caso o il gruppo caratteristico g del sistema Σ'' è affatto arbitrario, ed allora la superficie σ e l'inviluppo J si spezzano rispettivamente nei 4 piani $\omega_1, \dots \omega_4$ e nei 4 vertici $O_1, \dots O_4$ del tetraedro T; ovvero può succedere che, essendo spigoli opposti k_1 e k_4, k_2 e k_5, k_3 e k_6, siano in involuzione le tre coppie $e_1\, e_4$, $e_2\, e_5$, $e_3\, e_6$ del gruppo g, ed allora i fasci di raggi del sistema Σ'' risultano ∞^3 ed ogni punto (o piano) dello spazio è sostegno di un unico fascio del sistema.

La reciprocità birazionale nulla Θ che si presenta nello spazio in questo ultimo caso, risulta di 3° grado, per le proprietà dimostrate nel § 16, 3°; cioè in essa alle stelle di piani corrispondono le superficie di 3° ordine $\varphi_{(3)} \equiv (O_1 \dots O_4)^2$, $6\, k$ e ai piani punteggiati gli inviluppi di 3ª classe $J_{(3)} \equiv (\omega_1 \dots \omega_4)^2$, $6\, k$, avendo ogni punto O (o ogni piano ω) per corrispondenti tutti i piani (o tutti i punti) che gli appartengono.

Per individuare la reciprocità Θ basta assegnare il tetraedro T ed una coppia di elementi corrispondenti affatto arbitraria.

Ora si ha il teorema che:

Ogni reciprocità birazionale nulla dello spazio di 3° grado a tetraedro fondamentale, è del tipo che si esamina.

Sia infatti Θ' una reciprocità nulla di 3° grado che faccia corrispondere ai vertici $O_1, \dots O_4$ di un tetraedro T le stelle di piani di cui essi punti sono centri, e di conseguenza anche ad ogni faccia del tetraedro tutti i suoi punti. Sia $O\,\omega$ una coppia arbitraria di elementi corrispondenti nella Θ'.

Si consideri la reciprocità Θ del tipo in esame, dovuta al tetraedro T ed alla coppia di elementi corrispondenti $O\,\omega$. Il suo prodotto con la Θ' è una omografia che ha i 5 punti uniti $O_1, \dots O_4$, O e che perciò risulta identica; onde le Θ, Θ' coincidono fra loro, e ne segue il teorema.

Si noti infine che: *Essendo $O\,\omega$ una coppia generica di elementi corrispondenti nella reciprocità Θ, tutti i gruppi del tipo $O\,(O_1 \dots O_4)$, ω; $\omega\,(\omega_1 \dots \omega_4)$, O sono due a due fra loro omografici o reciproci.*

Infatti su un altro piano arbitrario ω' si costruisca il punto O' che corrisponde al punto O nell'omografia individuata fra i piani ω, ω' dalle quaterne di rette corrispondenti $o_1 .. o_4$, $o'_1 .. o'_4$ tracce sui due piani delle facce del tetraedro T. Sarà:

$$O'(o'_1 o'_2, \ldots o'_1 o'_4) \ \pi \ O(o_1 o_2, \ldots o_1 o_4) \ \pi \ g,$$

onde O' è il corrispondente di ω' nella θ, e ne segue il teorema per i gruppi $\omega(\omega_1 .. \omega_4)$, O; $\omega'(\omega_1 .. \omega_4)$, O'. E analogamente per gli altri casi (*).

VII.

27. Dati nello spazio 7 complessi lineari di rette $K_1, \ldots K_7$ in posizione arbitraria, ed assegnati in una forma fondamentale di 1ª specie 7 elementi $e_1, \ldots e_7$ in determinato ordine, si considerino i sistemi di fasci di raggi Σ''_1, Σ''_2 del tipo studiato nel § prec., determinati rispettivamente l'uno dai complessi $K_2, K_3, \ldots K_7$ e dal gruppo caratteristico $g_1 \equiv e_2 e_3 \ldots e_7$, l'altro dai complessi K_1, $K_3, \ldots K_7$ e dal gruppo caratteristico $g_2 \equiv e_1 e_3 \ldots e_7$.

Le due superficie di 4° ordine σ_1 e σ_2 determinate dai due sistemi passano entrambe per la curva fondamentale $c_{(8)}$ della reciprocità Θ_{12} dovuta ai complessi $K_3, \ldots K_7$ ed al gruppo caratteristico $g_{12} \equiv e_3 \ldots e_7$, onde si segano ulteriormente secondo una curva x di 8° ordine e di genere 5 che ha 24 punti in comune con la $c_{(8)}$ (**).

Un punto generico O di questa curva è centro di due fasci di rette $(O - \omega_1)$, $(O - \omega_2)$, nel primo dei quali i raggi che appartengono ai complessi

(*) Il teorema su dimostrato mette in evidenza l'analogia esistente fra la corrispondenza Θ e l'unico tipo di reciprocità birazionale nulla che si ha nel piano.

(**) SALMON FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes*. II Theil, n.° 108.

In generale se due superficie degli ordini n_1, n_2 si segano secondo due curve semplici degli ordini μ, μ' aventi rispettivamente h e h' punti doppi apparenti, si ha che:

$$2(h - h') = (\mu - \mu')(n_1 - 1)(n_2 - 1);$$

e se i è il numero dei punti comuni alle due curve, è:

$$2i = (\mu + \mu')(n_1 + n_2 - 1) - (\mu^2 + \mu'^2) + 2(h + h').$$

$K_2, \ldots K_7$ formano un gruppo proiettivo a g_1, mentre nel secondo i raggi che appartengono ai complessi K_1, $K_3, \ldots K_7$ formano un gruppo proiettivo a g_2.

I piani ω_1 e ω_2 di questi fasci corrispondono entrambi al punto O nella reciprocità nulla Θ_{12}, senza che il punto O risulti singolare per tale corrispondenza; onde i due piani coincidono in un unico, e il punto O risulta centro di un fascio di rette nel quale i raggi che appartengono ai complessi dati $K_1, \ldots K_7$, formano un gruppo proiettivo al gruppo $g \equiv e_1 \ldots e_7$.

Viceversa se in un fascio $(O - \omega)$ i raggi che appartengono ai complessi dati, formano un gruppo proiettivo a g, il centro O del fascio deve trovarsi sulle superficie σ_1, σ_2 anzidette, senza appartenere, in generale, alla curva fondamentale $c_{(8)}$ della Θ_{12}, e correlativamente. Ne segue che:

I fasci di rette nei quali i raggi che appartengono a 7 complessi lineari dati, formano un gruppo proiettivo ad un gruppo assegnato, hanno i centri su una linea gobba x di 8° ordine e di genere 5, e i loro piani inviluppano la forma duale $y_{(8)}$. Essi perciò costituiscono una congruenza di rette di 8° ordine e di 8ª classe.

Le due forme x, y si corrispondono in ogni reciprocità nulla Θ_{il} determinata da 5 qualunque dei complessi dati e dal gruppo formato con gli elementi omologhi di g; e ciò porge una conferma della proprietà già dimostrata di esservi 24 punti comuni alla $x_{(8)}$ ed alla curva fondamentale della Θ_{il}. E correlativamente per l'inviluppo $y_{(8)}$.

I risultati ora ottenuti non subiscono alcuna modificazione nel caso particolare in cui alcuni dei complessi dati siano singolari con gli assi $k_1, \ldots k_x$ in posizione affatto arbitraria fra loro. Queste rette risultano quadriseganti per la curva $x_{(8)}$, cioè questa contiene i punti in cui la retta k_i incontra la superficie σ dovuta agli altri 6 complessi dati ed al gruppo caratteristico formato con gli elementi omologhi del gruppo g. E correlativamente per l'inviluppo $y_{(8)}$ (*).

28. *Dati nello spazio 8 complessi lineari di rette $K_1, \ldots K_8$ in posizione arbitraria fra di loro, esistono 8 fasci di rette nei quali i raggi che appartengono ai complessi dati, formano un gruppo proiettivo ad un gruppo assegnato $g \equiv e_1 \ldots e_8$.*

Si considerino infatti la superficie di 4° ordine σ_{12} determinata dai complessi $K_3, \ldots K_8$ e dal gruppo caratteristico $g_{12} \equiv e_3 \ldots e_8$ (§ 25), e la curva di 8° ordine $x_{(8)}$ determinata dai complessi K_1, K_2, $K_4, \ldots K_8$ e dal gruppo

(*) Se tutti i complessi dati sono singolari, cfr. STURM, Mem. cit., § 54, 6).

caratteristico $g_3 \equiv e_1 e_2 e_4 \dots e_8$ (§ prec.). Dei 32 punti comuni alla σ_{12} ed alla $x_{(8)}$ 24 si trovano sulla curva fondamentale della reciprocità nulla θ_{123} determinata dai complessi $K_4, \dots K_8$ e dal gruppo caratteristico $g_{123} \equiv e_4 \dots e_8$, e i restanti sono i centri dei fasci indicati nel teorema, il cui numero perciò è 8.

Questo numero non varia se tutti o alcuni dei complessi dati risultano singolari. Nel primo caso si presenta il teorema (*) che:

Esistono nello spazio 8 fasci di rette nei quali i raggi che si appoggiano ad 8 rette date formano un gruppo proiettivo ad un gruppo assegnato (**).

Potenza, Aprile 1898.

(*) Cfr. Sturm, Mem. cit. § 65, 5 (ove bisogna leggere 8 invece di 6) e Schubert, Op. cit. pag. 207 ($p^3 e^2 z^8 = 8$).

(**) La proposizione stabilita alla fine del § 19 come corollario del teorema di Schur regge evidentemente nel caso che le due quintuple di rette che determinano l'assieme dei coni e la congruenza delle coniche ivi indicate, appartengano alla stessa superficie di 3° ordine e siano fra loro associate.

Fine del Tomo I.° (Serie III.ª)