N° D'ORDRE
429.

# THÈSES

PRÉSENTÉES

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. W. DE MAXIMOVITCH,

Licencié ès Sciences de la Faculté de Paris, ancien externe de l'École Polytechnique.

1re THÈSE. — NOUVELLE MÉTHODE POUR INTÉGRER LES ÉQUATIONS SIMULTANÉES AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

**Soutenues, le 28 juillet 1879, devant la Commission d'Examen.**

MM. HERMITE, *Président*.
BOUQUET, } *Examinateurs*.
OSSIAN BONNET, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1879

# ACADÉMIE DE PARIS.

## FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

| | MM. | |
|---|---|---|
| **DOYEN** | MILNE EDWARDS, Professeur. | Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée. |
| **PROFESSEURS HONORAIRES** | DUMAS. | |
| | PASTEUR. | |
| **PROFESSEURS** | CHASLES | Géométrie supérieure. |
| | P. DESAINS | Physique. |
| | LIOUVILLE | Mécanique rationnelle. |
| | PUISEUX | Astronomie. |
| | HÉBERT | Géologie. |
| | DUCHARTRE | Botanique. |
| | JAMIN | Physique. |
| | SERRET | Calcul différentiel et intégral. |
| | H. Ste-CLAIRE DEVILLE | Chimie. |
| | DE LACAZE-DUTHIERS | Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée. |
| | BERT | Physiologie. |
| | HERMITE | Algèbre supérieure. |
| | BRIOT | Calcul des probabilités, Physique mathématique. |
| | BOUQUET | Mécanique physique et expérimentale. |
| | TROOST | Chimie. |
| | WURTZ | Chimie organique. |
| | FRIEDEL | Minéralogie. |
| | O. BONNET | Astronomie. |
| **AGRÉGÉS** | BERTRAND | Sciences mathématiques. |
| | J. VIEILLE | Sciences mathématiques. |
| | PELIGOT | Sciences physiques. |
| **SECRÉTAIRE** | PHILIPPON. | |

5430 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

A MON MAITRE

# M. BERTRAND,

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE ET A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Hommage respectueux.

Wladimir DE MAXIMOVITCH.

# PREMIÈRE THÈSE.

## NOUVELLE MÉTHODE

POUR INTÉGRER

# LES ÉQUATIONS SIMULTANÉES

## AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

### AVANT-PROPOS.

Étant donné un système de $m$ équations faisant connaître les différentielles totales de $m$ fonctions inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_m$ de $n$ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$(\text{A}) \qquad dz_i = f_1^i dx_1 + f_2^i dx_2 + \ldots + f_n^i dx_n \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

où les coefficients $f$ contiennent $z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n$, nous dirons que ce système est *complètement intégrable* si l'on peut y satisfaire en laissant arbitraires les valeurs initiales des inconnues.

Pour abréger, nous appellerons *système total* tout système aux différentielles totales, et *système ordinaire* tout système aux différentielles ordinaires ou à une seule variable indépendante.

Une théorie complète du système total (A) a été établie par Boole ([1]). Ce géomètre montre d'abord que le premier membre F de toute inté-

([1]) *On simultaneous differential equations of the first order in which the number of the variables exceeds by more than one the number of the equations* (*Philos. Transactions for* 1862).

grale de (A),

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n) = C,$$

satisfait identiquement au système linéaire aux différences partielles

$$(1) \qquad \frac{\partial F}{\partial z_1} f_k^1 + \frac{\partial F}{\partial z_2} f_k^2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial z_m} f_k^m + \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

et que réciproquement toute solution F du système aux différences partielles (1) égalée à une constante C est une intégrale du système total (A); puis il intègre le système (1).

Avant Boole, Natani [1] avait indiqué une solution plus directe en généralisant une idée déjà émise par Cauchy et Jacobi.

Le système total (A) donne toutes les dérivées partielles premières des inconnues, entre autres

$$(2) \qquad \frac{dz_1}{dx_1} = f_1^1, \quad \frac{dz_2}{dx_1} = f_1^2, \quad \ldots, \quad \frac{dz_m}{dx_1} = f_1^m.$$

Considérant dans ces dernières équations $x_2, \ldots, x_n$ comme constants, intégrant et déterminant les constantes d'intégration pour $x_1 = x_1^0$, Natani obtenait les inconnues $z_1, \ldots, z_m$ en fonction de ce qu'elles deviennent pour $x_1 = x_1^0$ [2],

$$(3) \qquad z_i = \Psi_i[x_1, \ldots, x_n, (z_1)_{x_1=x_1^0}, \ldots, (z_m)_{x_1=x_1^0}] \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

et la question était ramenée à déterminer les nouvelles inconnues $(z_i)_{x_1=x_1^0}$. Or ces inconnues sont les solutions générales du système total

$$(4) \qquad d(z_i)_{x_1=x_1^0} = (f_2^i)_{x_1=x_1^0} dx_2 + \ldots + (f_n^i)_{x_1=x_1^0} dx_n \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

que l'on tire du proposé (A) en y faisant $x_1 = x_1^0$. Il traitait ce nouveau système (4) comme le proposé (A), et ainsi de suite. De cette manière, la recherche des inconnues $z_1, \ldots, z_m$ était ramenée à la détermination successive de ce qu'elles deviennent quand on donne des valeurs particulières à une variable $x_1$, puis à deux $x_1, x_2$, puis à trois $x_1, x_2, x_3$, et ainsi de suite.

Natani a indiqué ce procédé sans examiner les conditions dites d'in-

---

(1) *Ueber totale und partielle Differentialgleichungen* (*Journal de Crelle*, t. 58, 1861).

(2) C'est là ce qui est dû à Natani : avant lui, on prenait pour nouvelles inconnues les constantes d'intégration, sans introduire les valeurs initiales des variables.

tégrabilité qui en assurent le succès; Boole a comblé cette lacune en comparant la méthode de Natani à la sienne et montrant leur identité.

En s'inspirant d'une idée indiquée par M. du Bois-Reymond ([1]), dans un cas particulier, M. Mayer ([2]) a observé que les égalités (3) donnent immédiatement les inconnues $z_1, \ldots, z_m$ lorsque celles-ci deviennent indépendantes de $x_2, \ldots, x_n$ pour $x_1 = x_1^0$, puisque alors $(z_1)_{x_1=x_1^0}, \ldots, (z_m)_{x_1=x_1^0}$ sont des constantes arbitraires; puis il a montré que l'on pouvait toujours amener cette circonstance par un changement de variables. Posons en effet

$$(5) \qquad x_k = x_k^0 + (u_1 - u_1^0)\psi_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

on voit immédiatement que, pour $u_1 = u_1^0$, les anciennes variables $x_1, \ldots, x_n$, et par suite toute fonction $z_i$ de ces variables, deviennent indépendantes de $u_2, \ldots, u_n$.

M. Mayer ne présente pas la chose aussi directement; il transforme le système (A) par la substitution (5), calcule les expressions des différentielles totales par rapport à $u_2, \ldots, u_n$ de $(z_1)_{u_1=u_1^0}, \ldots, (z_m)_{u_1=u_1^0}$, et fait voir que ces différentielles sont identiquement nulles.

A la suite de cette modification fort ingénieuse de la méthode de Natani, M. Mayer a établi un théorème important qui porte son nom et qui permet de déduire une intégrale du système total (A) de chaque intégrale du système ordinaire

$$(6) \qquad \frac{dz_i}{du_1} = \sum_{k}^{1 \ldots n} f_k^i \frac{\partial (u_1 - u_1^0)\psi_k}{\partial u_1} \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

où l'on considère $u_2, \ldots, u_m$ comme constantes et qui est compris dans le système différentiel total (A) transformé par la substitution (5).

En partant d'un principe nouveau, nous établirons une théorie générale du système total (A) qui comprend comme cas particuliers tous les résultats que nous venons d'indiquer.

---

([1]) *Journal de Crelle*, t. 70, 1868 : *Ueber die Integration linearer totaler Differentialgleichungen, denen durch ein Integral Genüge geschieht.*

([2]) *Ueber unbeschränkt integrable Systeme linearer totaler Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen* (*Mathematische Annalen*, t. V, 1872).

Nous montrerons que le système total complètement intégrable (A) est en quelque sorte équivalent au système différentiel ordinaire qu'on a en considérant, dans (A), $x_1, \ldots, x_n$, non plus comme variables indépendantes, mais comme fonctions arbitraires d'une seule variable.

## § I. — Équivalence d'un système aux différentielles totales et d'un système aux différentielles ordinaires.

Soit le système différentiel total complètement intégrable

$$(A)\qquad dz_i = f_1^i\,dx_1 + f_2^i\,dx_2 + \ldots + f_n^i\,dx_n \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

représentons ses solutions générales par

$$(A')\qquad z_i = \zeta_i(x_1, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_n^0, z_1^0, \ldots, z_m) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

$z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0$ étant les valeurs initiales des fonctions inconnues $z_1$, $z_2, \ldots, z_m$, correspondantes aux valeurs $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (1).

Soit, d'autre part, $t$ une nouvelle variable indépendante, et $\alpha_1$, $\alpha_2, \ldots$ des *paramètres indéterminés constants;* remplaçons dans le système total (A) les variables $x_1, \ldots, x_n$ par des fonctions quelconques

$$\varphi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots),\ \varphi_2(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots),\ \ldots,\ \varphi_n(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)\ (2)$$

de $t$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, ...; nous aurons le système différentiel à une seule variable indépendante $t$,

$$(B)\quad \frac{dz_i}{dt} = (f_1^i)_{x=\varphi}\frac{d\varphi_1}{dt} + (f_2^i)_{x=\varphi}\frac{d\varphi_2}{dt} + \ldots + (f_n^i)_{x=\varphi}\frac{d\varphi_n}{dt} \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

dont le système intégral pourra être représenté, en prenant les mêmes valeurs initiales des inconnues que précédemment, par

$$(B')\qquad z_i = \psi_i(t, t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, z_1^0, \ldots, z_m^0) \quad (i = 1, 2, \ldots, m)\ (3).$$

---

(1) On suppose les valeurs $x_1^0, \ldots, x_n^0$ des variables indépendantes provisoirement indéterminées; ce sont des lettres aussi bien que $z_1^0, \ldots, z_m^0$. L'expression $\zeta_i$ se réduit identiquement à $z_i^0$ quand on égale chaque variable $x_k$ à sa valeur initiale $x_k^0$, soit qu'on remplace $x_k$ par $x_k^0$, ou $x_k^0$ par $x_k$, soit qu'on remplace les deux par une même quantité quelconque $(\varphi_k)_{t=t_0}$, comme nous le ferons dans la suite.

(2) Les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ peuvent ne contenir aucun des paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$.

(3) On peut laisser la valeur initiale $t_0$ indéterminée, ou bien se la donner soit numériquement, soit en fonction des paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$.

Cela posé, on a d'abord entre les inconnues du système total (A) et celles de même nom du système ordinaire (B) la relation suivante :

Théorème I. — *Les solutions* (B') *du système ordinaire se déduisent des solutions* (A') *du système total en posant*

$$(\mathrm{C})\quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), & x_2 = \varphi_2(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), & \ldots, & x_n = \varphi_n(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), \\ x_1^0 = \varphi_1(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), & x_2^0 = \varphi_2(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), & \ldots, & x_n^0 = \varphi_n(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots). \end{cases}$$

Il s'agit de montrer que le système (B') est identique au suivant :

$$(1)\quad z_i = \zeta_i[\varphi_1, \ldots, \varphi_n, (\varphi_1)_{t=t_0}, \ldots, (\varphi_n)_{t=t_0}, z_1^0, \ldots, z_m^0] \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

qu'on trouve en faisant dans (A') la substitution (C).

Si le système (1) était un système intégral de (B) dont on a déjà le système intégral (B'), il en résulterait que (1) et (B') sont identiques, puisque les constantes d'intégration $z_1^0, \ldots, z_m^0$ dans (1) sont les valeurs initiales des inconnues [1] aussi bien que dans (B').

Ainsi il suffit de s'assurer que (1) est un système intégral de (B), en montrant que l'élimination des constantes $z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0$ du système (1) donne précisément le système (B).

Prenant la dérivée de l'équation (1) par rapport à $t$, on a [2]

$$(2)\quad \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial(\zeta_i)_{x=\varphi}}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial(\zeta_i)_{x=\varphi}}{\partial\varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial(\zeta_i)_{x=\varphi}}{\partial\varphi_n}\frac{d\varphi_n}{dt},$$

où, d'après la règle de fonctions composées, les dérivées de $(\zeta_i)_{x=\varphi}$ sont prises partiellement, c'est-à-dire en considérant $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ comme indépendants. D'autre part (A') étant les solutions de (A), on a

$$\frac{\partial\zeta_i}{\partial x_k} = f_k^i(\zeta_1, \ldots, \zeta_m, x_1, \ldots, x_n),$$

quelles que soient $x_1, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_n^0$, et par conséquent quand on les change en $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, (\varphi_1)_{t=t_0}, \ldots, (\varphi_n)_{t=t_0}$ ; donc

$$\frac{\partial(\zeta_i)_{x=\varphi}}{\partial\varphi_k} = f_k^i[(\zeta_1)_{x=\varphi}, \ldots, (\zeta_m)_{x=\varphi}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n];$$

---

[1] Le second membre de (1) pour $t = t_0$ se réduit à $z_i^0$, étant ce que devient le second membre de (A') quand on y fait $x_1 = x_1^0 = (\varphi_1)_{t=t_0}, \ldots, x_n = x_n^0 = (\varphi_n)_{t=t_0}$ [*voir* note (1), p. 4].

[2] Désignant par $(\zeta_i)_{x=\varphi}$ le second membre de (1), afin de le distinguer de celui de (A'), dont il se déduit par la substitution (C).

par conséquent l'équation (2) devient

$$(3)\qquad \frac{dz_i}{dt}=\sum_k^{1,n} f_k^i[(\zeta_1)_{x=\varphi},\ldots,(\zeta_m)_{x=\varphi},\varphi_1,\ldots,\varphi_n]\,\frac{d\varphi_k}{dt},$$

et, pour éliminer les constantes $z_1^0, \ldots, z_m^0$, il n'y a qu'à remplacer, dans (3), $(\zeta_1)_{x=\varphi}, \ldots, (\zeta_m)_{x=\varphi}$ par leurs valeurs (1), c'est-à-dire par $z_1, \ldots, z_m$; de cette manière (3) devient

$$(4)\qquad \frac{dz_i}{dt}=\sum_k^{1,n} f_k^i(z_1,\ldots,z_m,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\,\frac{d\varphi_k}{dt}=\sum_k^{1,n}(f_k^i)_{x=\varphi}\,\frac{d\varphi_k}{dt},$$

qui n'est autre que le système (B). C. Q. F. D.

Le système (C) peut conduire, par l'élimination de $t$ et de tous les paramètres $\alpha$, à des relations entre $x_1, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_n^0$, permettant de déterminer, par exemple, $x_1, \ldots, x_k, x_1^0, \ldots, x_l^0$ en fonction de $x_{k+1}, \ldots, x_n, x_{l+1}^0, \ldots, x_n^0$, qui resteront arbitraires et indépendants; dans ce cas le système (C) pourra être remplacé par

$$(\mathrm{C}_1)\qquad x_1=\xi_1(x_{k+1},\ldots,x_n,x_{l+1}^0,\ldots,x_n^0),\quad\ldots,\quad x_k=\xi_k(x_{k+1}\ldots,x_n,x_{l+1}^0,\ldots,x_n^0),$$

$$(\mathrm{C}_2)\qquad x_1^0=\chi_1(x_{l+1}^0,\ldots,x_n^0),\quad\ldots,\quad x_l^0=\chi_l(x_{l+1}^0,\ldots,x_n^0)\quad\ldots\quad (^1),$$

$$(\mathrm{C}_3)\qquad \begin{cases} x_{k+1}=\varphi_{k+1}(t,\alpha_1,\alpha_2,\ldots), & \ldots,\quad x_n=\varphi_n(t,\alpha_1,\alpha_2,\ldots),\\ x_{l+1}^0=\varphi_{l+1}(t_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots), & \ldots,\quad x_n^0=\varphi_n(t_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots),\end{cases}$$

le nombre $k$ étant l'un quelconque des nombres entiers de 1 à $n-1$, et $l$ l'un quelconque de 0 à $n$.

Lorsque le système (C) ne permettra d'exprimer aucune des variables $x_1, \ldots, x_n$ en fonction des autres, et de $x_1^0, \ldots, x_n^0$ sans $t$, ni $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, nous remplacerons encore le système (C) par ($C_2$), ($C_3$) où l'on fera $k=0$.

Cela posé, comme réciproque du théorème I, on a le suivant :

THÉORÈME II. — *En éliminant toutes les quantités $t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ des*

---

(1) Les quantités $x_1^0, \ldots, x_l^0$ s'expriment en fonction de $x_{l+1}^0, \ldots, x_n^0$ seuls, car, si l'on avait

$$x^0=\chi(x_{k+1},\ldots,x_n,x_{l+1}^0,\ldots,x_n^0),$$

on n'aurait qu'à faire $t=t_0$ ce qui change les $x$ en $x^0$.

*équations* (B′) *au moyen de* ($C_3$), *on trouve ce que devient le système* (A′) *quand on y substitue à* $x_1, \dots, x_k$ *les expressions* ($C_1$).

*En particulier, lorsque* $k = 0$ *ou que le système* (C) *n'établit entre* $x_1, \dots, x_n$ *aucune relation sans* $t$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, *en éliminant ces dernières du système* (B′) *au moyen de* ($C_3$), *on a le système* (A′) *lui-même.*

Par supposition, $x_{k+1}, \dots, x_n, x_{l+1}^0 \dots, x_n^0$ sont indépendants; par conséquent le système ($C_3$) peut être résolu par rapport à $t$ et à $2n - k - l - 1$ des paramètres $\alpha$, que nous supposerons être $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-k-l-1}$.

Portant les valeurs de $t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-k-l-1}$ tirées de ($C_3$) dans (1), cette substitution réduit $\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n, (\varphi_{l+1})_{t=t_0}, \dots, (\varphi_n)_{t=t_0}$ respectivement à $x_{k+1}, \dots, x_n, x_{l+1}^0, \dots, x_n^0$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_k, (\varphi_1)_{t=t_0}, \dots, (\varphi_l)_{t=t_0}$ respectivement à ([1])

$$(5) \quad \begin{cases} \xi_1(x_{k+1}, \dots, x_n, x_{l+1}^0, \dots, x_n^0), & \dots, \quad \xi_k(x_{k+1}, \dots, x_n, x_{l+1}^0, \dots, x_n^0), \\ \chi_1(x_{l+1}^0, \dots, x_n^0), & \dots, \quad \chi_l(x_{l+1}^0, \dots, x_n^0). \end{cases}$$

Donc, en éliminant, au moyen de ($C_3$), $t, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ du système (1), le même que (B′), on aura

$$(6) \qquad z_i = \zeta_i(\xi_1, \dots, \xi_k, x_{k+1}, \dots, x_n, \chi_1, \dots, \chi_l, x_{l+1}^0, \dots, x_n^0, z_1^0, \dots, z_m^0),$$

système qui n'est autre que (A′), où l'on a remplacé $x_1, \dots, x_k$ par les expressions ($C_1$) et $x_1^0, \dots, x_l^0$ par ($C_2$). Cette dernière substitution est d'ailleurs indifférente, puisqu'on a le choix des valeurs initiales $x_1^0, \dots, x_n^0$. C. Q. F. D.

En particulier, lorsque $k = 0$ ou que (C) n'établit entre $x_1, \dots, x_n$ aucune relation sans $t, \alpha_1, \alpha_2, \dots$, l'équation (6) se réduit à celle-ci,

$$(7) \qquad z_i = \zeta_i(x_1, \dots, x_n, \chi_1, \dots, \chi_l, x_{l+1}^0, \dots, x_n^0, z_1^0, \dots, z_m^0),$$

---

([1]) Les équations ($C_1$) et ($C_2$) tirées de (C) deviennent des identités quand on remplace $x_1, \dots, x_n, x_1^0, \dots, x_n^0$ par leurs valeurs (C), ou bien

$$\varphi_1 = \xi_1[\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n, (\varphi_{l+1})_{t=t_0}, \dots, (\varphi_n)_{t=t_0}], \quad \dots, \quad \varphi_k = \xi_k[\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n, (\varphi_{l+1})_{t=t_0}, \dots, (\varphi_n)_{t=t_0}],$$
$$(\varphi_1)_{t=t_0} = \chi_1[(\varphi_{l+1})_{t=t_0}, \dots, (\varphi_n)_{t=t_0}], \quad \dots, \quad (\varphi_l)_{t=t_0} = \chi_l[(\varphi_{l+1})_{t=t_0}, \dots, (\varphi_n)_{t=t_0}].$$

Portant ici les valeurs de $t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-k-l-1}$, tirées de ($C_3$), $\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n, (\varphi_{l+1})_{t=t_0}, \dots, (\varphi_n)_{t=t_0}$ se réduisent à $x_{k+1}, \dots, x_n, x_{l+1}^0, \dots, x_n^0$, et par conséquent $\varphi_1, \dots, \varphi_k, (\varphi_1)_{t=t_0}, \dots, (\varphi_l)_{t=t_0}$ se réduisent respectivement aux expressions (5).

et c'est le système (A′) lui-même, avec cette seule différence qu'on y a déterminé $x_1^0, \ldots, x_l^0$ au moyen des équations ($C_2$), ce qui ne change rien aux formules (A′), dont la généralité ne dépend pas du choix des valeurs initiales $x_1^0, \ldots, x_n^0$. C. Q. F. D.

Hors le cas extrême de $k = 0$, le système (B′), après l'élimination de $t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ au moyen de ($C_3$), donne non pas les inconnues $z_i$ du système total (A), mais ce que deviennent ces inconnues quand on y attribue aux variables $x_1, \ldots, x_k$ les valeurs $\xi_1, \ldots, \xi_k$ données par ($C_1$) ou bien

$$(z_i)_{x_1=\xi_1, \ldots, x_k=\xi_k}, \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

que nous désignerons par $z'_i$ (¹).

Ainsi, pour intégrer complètement le système proposé (A), il suffit d'exprimer ses inconnues $z_1, \ldots, z_m$ en fonction de leurs valeurs particulières connues $z'_1, \ldots, z'_m$, ce qu'on fera au moyen de la proposition suivante :

Lemme. — *Pour exprimer les inconnues $z_1, \ldots, z_m$ du système* (A) *en fonction des valeurs particulières $z'_1, \ldots, z'_m$ qu'elles prennent pour*

$$(C_1) \quad x_1 = \xi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n, x_{l+1}^0, \ldots, x_n^0), \quad \ldots, \quad x_k = \xi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n, x_{l+1}^0, \ldots, x_n^0),$$

*il suffit d'intégrer le système total*

$$(A_k) \qquad dz_i = f_1^i dx_1 + \ldots + f_k^i dx_k \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

*en considérant $x_{k+1}, \ldots, x_n$ comme des constantes et en se donnant $z'_1, \ldots, z'_m$ pour valeurs initiales des inconnues qui correspondent aux valeurs* ($C_1$) *de $x_1, \ldots, x_k$.*

Effectivement, soient les expressions cherchées de $z_1, \ldots, z_m$, en fonction de $z'_1, \ldots, z'_m$, qui satisfont au système (A).

$$(8) \qquad z_i = \Theta_i(x_1, \ldots, x_n, z'_1, \ldots, z'_m) \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

l'expression $\Theta_i$ devra se réduire à $z'_i$ quand on donnera à $x_1, \ldots, x_k$

(¹) Ainsi $z'_1, z'_2, \ldots, z'_m$ sont à la fois : 1° les inconnues du système (B) exprimées en onction de $x_{k+1}, \ldots, x_n, x_{l+1}^0, \ldots, x_n^0$ ; et 2° les valeurs particulières pour $x_1 = \xi_1, \ldots, x_k = \xi_k$ des inconnues du système total (A).

les valeurs $\xi_1, \ldots, \xi_k$. D'autre part, en observant que $z'_1, \ldots, z'_m$ sont indépendants de $x_1, \ldots, x_k$, on aura, en prenant par rapport à ces variables les dérivées partielles de (8),

$$(9) \qquad \frac{\partial z_i}{\partial x_1} = \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

mais le système total (A) donne, entre autres,

$$(10) \qquad \frac{\partial z_i}{\partial x_1} = f_1^i, \quad \ldots, \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_k} = f_k^i \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

équations qui, en vertu de (8) et (9), deviennent

$$(11) \qquad \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_1} = (f_1^i)_{z=\Theta}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_k} = (f_k^i)_{z=\Theta} \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

système équivalant au système total suivant :

$$(12) \qquad d\Theta_i = (f_1^i)_{z=\Theta} dx_1 + \ldots + (f_k^i)_{z=\Theta} dx_k \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

où l'on considère $x_{k+1}, \ldots, x_n$ comme constants : donc $\Theta_i$ est une solution du système total $(A_k)$, lequel d'ailleurs n'a pas d'autre solution qui se réduise à $z'_i$ pour $x_1 = \xi_1, \ldots, x_k = \xi_k$. C. Q. F. D.

*Remarque.* — Le système $(A_k)$ n'est autre que le système proposé même (A), où l'on considère $x_{k+1}, \ldots, x_n$ comme constants, ce qui revient à égaler à zéro leurs différentielles arbitraires $dx_{k+1}, \ldots, dx_n$.

---

Les théorèmes I et II ont une signification remarquable.

Par définition, il suffit de considérer, dans le système aux différentielles totales (A), les lettres $x_1, \ldots, x_n$ comme des fonctions $\varphi$ de $t$ pour avoir le système aux différentielles ordinaires (B); cette identité de forme, qui existe entre les systèmes (A) et (B), existe dans leurs solutions (A′) et (B′), *pourvu que la substitution* (C) *n'établisse entre $x_1, \ldots, x_n$ aucune relation sans $t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$.* Sous cette réserve, les lettres $z_1, z_2, \ldots, z_m$, dans l'un et l'autre système (A) et (B) désignent les mêmes expressions inconnues

$$\zeta_i(x_1, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_n^0, z_1^0, \ldots, z_m^0) \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

qui représentent les solutions du système total (A) ou du système ordinaire (B), selon que dans $\zeta_i$ on attribue à $x_1, \ldots, x_n$ la signification qu'ils ont dans l'un ou l'autre système : ou de variables indépendantes ou de fonctions de $t$ choisies arbitrairement. Par conséquent, *toute relation entre* $z_1, \ldots, z_m$, $x_1, \ldots, x_n$, $z_1^0, \ldots, z_m^0$, $x_1^0, \ldots, x_n^0$ *ne contenant pas* $t$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... *explicitement et satisfaisant à l'un des systèmes* (A) *ou* (B) *satisfait nécessairement à l'autre.*

### § II. — Propriété des intégrales du système différentiel ordinaire (B) auquel se ramène le système total (A).

On conçoit l'intérêt qu'on a d'amener une intégrale connue du système (B) à ne pas contenir explicitement $t$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., puisqu'alors elle sera également une intégrale du système total (A), du moins si la substitution (C) laisse $x_1, \ldots, x_n$ indépendantes entre elles, et de $x_1^0, \ldots, x_n^0$.

A cet égard, nous allons montrer que les intégrales du système (B) possèdent une propriété remarquable, analogue à celle que Poisson a signalée à l'égard du système canonique.

Théorème III. — *De chaque intégrale du système* (B) *on peut déduire une seconde intégrale qui s'exprime en fonction de* $z_1, \ldots, z_m$, $x_1, \ldots, x_n$, $x_1^0, \ldots, x_n^0$, *sans dépendre explicitement ni de la variable* $t$ *ni des paramètres* $\alpha_1$, $\alpha_2$, ....

Soit une intégrale quelconque du système (B), dans laquelle on a déterminé la constante pour $t = t_0$,

$$(13) \quad f(z_1, z_2, \ldots, z_m, t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots) - f(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0, t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots) = 0;$$

soient, comme précédemment, $x_{k+1}, \ldots, x_n$, $x_{l+1}^0, \ldots, x_n^0$ celles des quantités $x$ et $x^0$ que le système (C) laisse arbitraires (¹); alors le

(¹) Les nombres $k$ et $l$ sont compris, le premier entre zéro et $n-1$ et le second entre zéro et $n$.

système $(C_3)$ pourra être résolu par rapport à $t$ et à $(2n-k-l-1)$ paramètres $\alpha$, ce qui donnera

$$(14)\begin{cases} t = \theta(x_{k+1}, \ldots, x_n, x_{l+1}^0, \ldots, x_n^0, \alpha', \alpha'', \ldots), \\ \alpha_j = \theta_j(x_{k+1}, \ldots, x_n, x_{l+1}^0, \ldots, x_n^0, \alpha', \alpha'', \ldots) \quad [j=1, 2, \ldots, (2n-k-l-1)]. \end{cases}$$

Portant ces valeurs de $t$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_{2n-k-l-1}$ dans le système (B) et dans son intégrale (13), on aura

$$(B_1) \quad \frac{dz_i}{dt} = Z_i(x_{l+1}, \ldots, x_n, x_{l+1}^0, \ldots, x_n^0, \alpha', \alpha'', \ldots) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

$$(15) \quad \begin{cases} f(z_1, \ldots, z_m, \theta, \theta_1, \ldots, \theta_{2n-k-l-1}, \alpha', \alpha'', \ldots) \\ \quad -f[z_1^0, \ldots, z_m^0, (t_0)_{\alpha=0}, \theta_1, \ldots, \theta_{2n-k-l-1}, \alpha', \alpha'', \ldots] = 0. \end{cases}$$

Mais, par l'équation (6), établie précédemment, les solutions $z_1$, ..., $z_m$ du système (B) sont des fonctions de $x_{k+1}$, ..., $x_n$, $x_{l+1}^0$, ..., $x_n^0$, qui ne contiennent pas $t$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... explicitement; donc, si l'on porte ces expressions de $z_1$, ..., $z_m$ dans l'équation (15), celle-ci aura lieu identiquement, quelles que soient $x_{k+1}$, ..., $x_n$, $x_{l+1}^0$, ..., $x_n^0$, $\alpha'$, $\alpha''$, ... [1]. De là il résulte que, en vertu des relations inconnues entre $z_1$, ..., $z_m$, $x_{k+1}$, ..., $x_n$, $x_{l+1}^0$, ..., $x_n^0$, $z_1^0$, ..., $z_m^0$, l'équation (15) sera identiquement satisfaite, *indépendamment de* $\alpha'$, $\alpha''$, ....

Par conséquent, on peut dans l'équation (15) attribuer à $\alpha'$, $\alpha''$, ... des systèmes de valeurs particulières quelconques

$$a', a'', \ldots, \quad b', b'', \ldots, \quad c', c'', \ldots, \quad \ldots,$$

et l'on aura ainsi un certain nombre de relations ne contenant pas de paramètres [2].

Chacune des relations ainsi trouvées contiendra au moins l'une

---

(1) Car, entre ces quantités, on ne saurait avoir de relation; en effet, $x_{k+1}$, ..., $x_n$, $x_{l+1}^0$, ..., $x_n^0$ étant indépendants par supposition, une relation entre $x_{k+1}$, ..., $x_n$, $x_{l+1}^0$, ..., $x_n^0$, $\alpha'$, $\alpha''$, ... donnerait l'un des paramètres $\alpha$, soit

$$\alpha' = \theta_{2n-k+l}(x_{k+1}, \ldots, x_n, x_{l+1}^0, \ldots, x_n^0, \alpha'', \ldots),$$

équation qui, jointe aux $2n-k-l$ équations (14), permettrait d'éliminer $x_{k+1}$ ... $x_n$, $x_{l+1}^0$, ..., $x_n^0$, et l'on aurait une relation entre la variable $t$ et les paramètres arbitraires $\alpha$, ce qui est absurde.

(2) Si l'équation (15) est algébrique et ordonnée par rapport à $\alpha'$, $\alpha''$, ..., on n'a qu'à égaler séparément à zéro les coefficients de leurs diverses puissances et produits.

des inconnues $z_1, \ldots, z_m$ et l'une des valeurs initiales $z_1^0, \ldots, z_m^0$, car entre $x_{k+1}, \ldots, x_n, x_{l+1}^0, \ldots, x_n^0$, indépendants par supposition, on ne saurait avoir de relations sans paramètres. Ainsi, considérant l'une de ces relations, on peut la supposer résolue par rapport à l'une des constantes $z^0$, par rapport à $z_1^0$, par exemple, et l'on a

$$(16) \qquad \mathrm{P}(z_1, \ldots, z_m, x_{k+1}, \ldots, x_n, x_{l+1}^0, \ldots, x_n^0, z_2^0, \ldots, z_m^0) = z_1^0.$$

Prenant la dérivée de cette équation par rapport à $t$ et remplaçant les dérivées des inconnues $z$ par leurs valeurs $(\mathrm{B}_1)$, il vient

$$(17) \qquad \frac{d\mathrm{P}}{dt} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z_1}\mathrm{Z}_1 + \ldots + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z_m}\mathrm{Z}_m + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t} = 0.$$

A l'égard de l'équation (17), deux cas peuvent se présenter : ou bien cette équation est identique, et alors (16) est une intégrale du système $(\mathrm{B}_1)$ lequel n'est autre que (B), intégrale telle que l'exige l'énoncé; ou bien (17) est une relation entre les quantités qui y figurent, et alors c'est une intégrale de (B). Cette intégrale nouvelle (17) est distincte de l'intégrale déjà connue (13) puisque $z_1^0$, qui figurait dans (13), ne figure pas dans (17).

En procédant à l'endroit de (17) comme on l'a fait à l'égard de (13), on trouvera ou bien une intégrale telle que l'exige l'énoncé, ou bien une nouvelle intégrale, distincte des intégrales connues (13) et (17). Continuant ainsi, ou bien on va rencontrer une intégrale telle que l'exige l'énoncé, ou bien on finira par les trouver toutes.

C. Q. F. D.

*Remarque.* — Nous avons admis tacitement que le système total (A) était complètement intégrable, puisque nous renvoyons à l'équation (6) qui n'a lieu que sous cette condition. Ainsi le système (B) ne possède la propriété que nous venons de montrer que dans le cas seulement où les expressions $f_k^i$ satisfont aux conditions connues d'intégrabilité.

### § III. — Exposition de la méthode nouvelle et sa comparaison aux anciennes.

Étant donné le système total complètement intégrable

$$\text{(A)} \qquad dz_i = f_1^i dx_1 + \ldots + f_n^i dx_n \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

remplacez les variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ par des fonctions quelconques $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ d'une nouvelle variable $t$ (¹) avec ou sans paramètres $\alpha$ ; vous aurez le système ordinaire

$$\text{(B)} \qquad \frac{dz_i}{dt} = (f_1^i)_{x=\varphi} \frac{d\varphi_1}{dt} + \ldots + (f_n^i)_{x=\varphi} \frac{d\varphi_n}{dt} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Intégrez ce système en prenant les valeurs initiales des inconnues pour constantes d'intégration, ce qui donnera

$$\text{(B')} \qquad z_i = \psi_i(t, t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, z_1^0, \ldots, z_m^0) \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$t_0$ étant à volonté une constante numérique ou une fonction des paramètres $\alpha$. Considérez le système

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), & \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), \\ x_1^0 = \varphi_1(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), & \ldots, \quad x_n^0 = \varphi_n(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots) ; \end{cases}$$

deux cas pourront se présenter.

*Règle générale.*

Si le système (C) permet d'exprimer $x_1, \ldots, x_k, x_1^0, \ldots, x_l^0$ en fonction de $x_{k+1}, \ldots, x_n, x_{l+1}^0, \ldots, x_n^0$, qui restent arbitraires, vous aurez

$$\text{(C}_1\text{)} \qquad x_1 = \xi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n, x_{l+1}^0, \ldots, x_n^0), \quad \ldots, \quad x_k = \xi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n, x_{l+1}^0, \ldots, x_n^0).$$

(¹) Rien n'empêche de prendre pour variable nouvelle $t$ l'une quelconque $x_k$ des anciennes $x_1, \ldots, x_n$, car cela revient à poser $x_k = \varphi_k(t) = t$.

Éliminez du système (B′) $t$ et tous les paramètres $\alpha$ au moyen des équations

$$(C_3)\qquad \begin{cases} x_{k+1}=\varphi_{k+1}(t,\alpha_1,\alpha_2,\ldots), & \ldots, \quad x_n=\varphi_n(t,\alpha_1,\alpha_2,\ldots),\\ x_{l+1}^0=\varphi_{l+1}(t_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots), & \ldots, \quad x_n^0=\varphi_n(t_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots),\end{cases}$$

vous aurez, en ajoutant des accents aux lettres $z_1, \ldots, z_m$ [*voir* note (¹), p. 8],

$$(B'')\quad z'_i=\varpi_i(x_{k+1},\ldots,x_n,\ \ x_{l+1}^0,\ldots,x_n^0,z_1^0,\ldots,z_m^0),\quad (i=1,2,\ldots,m).$$

Intégrez le système total

$$(A_k)\qquad dz_i=f_1^i dx_1+\ldots+f_k^i dx_k,\quad (i=1,2,\ldots,m),$$

en considérant $x_{k+1}, \ldots, x_n$ constants, et en prenant $z'_1, \ldots, z'_m$ données par (B″) comme valeurs initiales des inconnues $z_1, \ldots, z_m$ pour $x_1=\xi_1, \ldots, x_k=\xi_k$; vous aurez les solutions générales du système total (A).

Connaissant une seule intégrale du système (B) vous trouverez par le théorème III une intégrale ne contenant pas $t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ explicitement :

$$P(z'_1,\ldots,z'_m,\ x_{k+1},\ldots,x_n,\ x_{l+1}^0,\ldots,x_n^0,\ z_2^0,\ldots,z_m^0)=z_1^0.$$

Intégrez le système $(A_k)$ en déterminant les constantes d'intégration par la condition que $z_1, \ldots, z_m$ pour $x_1=\xi_1, \ldots, x_k=\xi_k$ se réduisent à $z'_1, \ldots, z'_n$ (¹); résolvez le système intégral ainsi trouvé par rapport à $z'_1, \ldots, z'_n$, portez leurs valeurs dans P et vous aurez une intégrale du système proposé (A).

Dans le cas extrême de $k=0$, la règle générale doit être modifiée de la manière suivante.

### *Règle spéciale.*

Lorsque le système (C) n'établit aucune relation entre $x_1, \ldots, x_n$ sans $t$ et les paramètres $\alpha$, et que $x_1^0, \ldots, x_l^0$ s'expriment au moyen de $x_{l+1}^0, \ldots, x_n^0$, qui restent arbitraires (le nombre $l$ étant l'un de o à $n$), éliminez $t$ et tous les paramètres $\alpha$ dans le système (B′) au moyen du

(¹) Maintenant $z'_1, \ldots, z'_m$ sont de simples lettres, leurs valeurs (B″) étant inconnues du moment qu'au lieu de toutes les intégrales (B′) de (B) on n'en connaît qu'une seule.

système

$$(C_3)\quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), & \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), \\ x^0_{l+1} = \varphi_{l+1}(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), & \ldots, \quad x^0_n = \varphi_n(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), \end{cases}$$

et vous aurez les solutions générales du système total proposé (A).

Connaissant une seule intégrale du système (B), on peut en déduire une intégrale du système total (A) en faisant usage du théorème III.

---

En comparant notre méthode à celles de M. Mayer et de Natani, on trouve qu'elles y sont comprises comme cas très-particuliers, et, quant au théorème par lequel Boole ramène un système aux différentielles totales à un système aux différentielles partielles, il est une conséquence évidente de nos théorèmes I et II.

La méthode de M. Mayer rentre dans notre *règle spéciale* à l'aide de trois suppositions particulières faites sur les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ :

1° Le nombre des paramètres $\alpha$ est $n - 1$ ;

2° La quantité $t_0$ est indépendante des paramètres $\alpha$;

3° Les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ pour $t = t_0$ sont également indépendantes des paramètres $\alpha$.

Effectivement, M. Mayer change de variables dans le système total (A), en posant

$$(18)\quad x_k = \varphi_k(u_1, \ldots, u_m) = x^0_k + (u_1 - u^0_1)\psi_k(u_1, \ldots, u_m) \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où $u^0_1$ est une constante (dans ses différentiations par rapport à $u_2, \ldots, u_m$, M. Mayer fait cette hypothèse), et, parmi toutes les dérivées $\frac{dz_i}{du_k}$ que donne le système (A) transformé, M. Mayer considère celles qui se rapportent à $u_1$ :

$$(19)\quad \frac{dz_i}{du_1} = (f^i_1)_{x=\varphi} \frac{d\varphi_1}{du_1} + \ldots + (f^i_n)_{x=\varphi} \frac{d\varphi_n}{du_1} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Quoique $u_2, \ldots, u_m$ soient des variables au même titre que $u_1$ dans (18), dans l'intégration de (19) elles sont traitées comme des constantes, et, en réalité, tout commence à l'intégration de (19), après quoi il n'y a qu'à éliminer dans le système intégral trouvé les quantités $u_1, \ldots, u_m$ au moyen de (18), de sorte que, dans les calculs essentiels de M. Mayer, on peut considérer $u_1$ comme variable unique et $u_2, \ldots, u_m$ comme des paramètres.

Pour rentrer dans notre notation, il n'y a qu'à changer le nom de $u_1$ en $t$ et de $u_2, \ldots, u_m$ en $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, après quoi le système (19) se réduit à (B), les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ étant indépendantes de $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ pour une valeur particulière $t_0 = u_1^0$ de $t$. C. Q. F. D.

La méthode de Natani est un cas encore plus particulier de notre *règle générale*, celui où l'on prend pour équations (C) les suivantes :

$$(C) \qquad x_1 = x_1^0, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = x_{n-1}^0, \quad x_n = t.$$

L'équation $x_n = t$ revient à prendre $x_n$ pour variable indépendante unique ; le système (B) devient donc, en donnant des accents aux lettres $z_1, \ldots, z_m$,

$$(20) \qquad \frac{dz_i'}{dx_n} = (f_n^i)_{x_1=x^0, \ldots, x_{n-1}=x_{n-1}^0} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Après avoir trouvé d'ici $z_1', \ldots, z_m'$, on doit les prendre pour valeurs initiales dans le système total auquel se réduit $(A_k)$ pour $k = n - 1$, c'est-à-dire

$$(21) \qquad dz_i = f_1^i\, dx_1 + \ldots + f_{n-1}^i\, dx_{n-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

C'est bien la méthode de Natani, où l'on exécuterait les calculs en ordre inverse à l'habituel. En effet, dans cette méthode, on commence par exprimer $z_1, \ldots, z_m$ en fonction de

$$z_i' = (z_i)_{x_1=x_1^0, \ldots, x_{n-1}=x_{n-1}^0} \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

ce qui exige l'intégration des $n - 1$ systèmes auxquels (21) est équivalent, après quoi on termine en déterminant $z_1', \ldots, z_m'$ par l'intégration du système (20) : ce sont bien les mêmes calculs, exécutés en ordre inverse. C. Q. F. D.

Reste à faire voir que le théorème de Boole est impliqué dans les principes de notre méthode. Soit une intégrale quelconque du système total (A)

$$(22) \qquad F(z_1, z_2, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n) = F(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0, x_1^0, \ldots, x_n^0);$$

par le théorème I, cette équation représente également une intégrale du système ordinaire (B)

$$\text{(B)} \qquad \frac{dz_i}{dt} = f_1^i \frac{dx_1}{dt} + \ldots + f_n^i \frac{dx_n}{dt} \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

où les fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $t$ sont complètement arbitraires. Prenant la dérivée de (22) par rapport à $t$ et remplaçant les dérivées des fonctions inconnues $z$ par leurs valeurs (B), on a

$$(23) \qquad \sum_k^{1 \ldots n} \left( \frac{\partial F}{\partial z_1} f_k^1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial z_m} f_k^m + \frac{\partial F}{\partial x_k} \right) \frac{dx_k}{dt} = 0.$$

Cette équation se sépare en celles-ci :

$$(24) \qquad \frac{\partial F}{\partial z_1} f_k^1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial z_m} f_k^m + \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

à cause de l'indépendance absolue qui existe entre les fonctions de $t$ que l'on a substituées à $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Réciproquement, toute solution F du système (24) satisfait identiquement à l'équation (23) et par conséquent (22) est une intégrale du système (B); mais, $x_1, \ldots, x_n$ étant des fonctions arbitraires de $t$, on peut les considérer comme indépendantes entre elles, et alors l'intégrale (22) de (B), ne contenant ni $t$ ni les paramètres $\alpha$ explicitement, est une intégrale du système total (A) ([1]). C. Q. F. D.

Pour achever notre théorie, nous allons, en partant de nos principes, retrouver à la fois comme nécessaires et *suffisantes* les conditions connues pour que le système total (A) soit complètement intégrable ([2]).

---

([1]) *Voir* la conclusion du § I.

([2]) Ces conditions sont

$$\frac{d}{dx_l}\frac{dz_i}{dx_k} = \frac{d}{dx_k}\frac{dz_i}{dx_l} \quad \text{ou bien} \quad \frac{df_k^i}{dx_l} = \frac{df_l^i}{dx_k},$$

ou encore, en effectuant les différentiations et remplaçant les dérivées partielles de $z_1, \ldots, z_m$ par leurs valeurs qui résultent du système (A),

$$\frac{df_k^i}{dz_1} f_l^1 + \ldots + \frac{df_k^i}{dz_m} f_l^m + \frac{df_k^i}{dx_l} = \frac{df_l^i}{dz_1} f_k^1 + \ldots + \frac{df_l^i}{dz_m} f_k^m + \frac{df_l^i}{dx_k}.$$

Ces conditions, évidemment nécessaires, n'ont pas été établies *a priori* comme suffisantes.

## § IV. — Conditions pour qu'un système total soit complètement intégrable.

Afin que le système total (A) soit complètement intégrable, il faut et il suffit que le système ordinaire

$$\text{(B)} \qquad \frac{dz_i}{dt} = f_1^i \frac{dx_1}{dt} + \ldots + f_n^i \frac{dx_n}{dt} \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

puisse s'intégrer sans spécifier la forme des fonctions arbitraires $x_1, \ldots, x_n$, c'est-à-dire que les inconnues du système (B) soient des expressions *déterminées* de $x_1, \ldots, x_n$ et de leurs valeurs initiales $x_1^0, \ldots, x_n^0$ pour $t = t_0$:

$$(25) \qquad z_i = \zeta_i(x_1, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_n^0, z_1^0, \ldots, z_m^0) \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$\zeta_i$ étant la même expression quelles que soient les fonctions $x_1, \ldots, x_n$.

En effet, lorsque le système total (A) est complètement intégrable, alors les solutions de (B) sont de la forme (25), d'après le théorème I.

Réciproquement, si les solutions de (B) sont de la forme (25), alors, en prenant leurs dérivées et égalant les valeurs trouvées de $\frac{dz_i}{dt}$ à celle donnée par (B), on a

$$(26) \qquad \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = f_1^i \frac{dx_1}{dt} + \cdots + f_n^i \frac{dx_n}{dt} \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

ce qui doit être une identité, car, $x_1, \ldots, x_n$ étant complètement arbitraires, on ne saurait avoir de relation entre elles et leurs dérivées; donc l'identité (26) se sépare en celles-ci :

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_1} = f_1^i, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_n} = f_n^i \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

donc l'expression $\zeta_i$, qui contient les constantes arbitraires $z_1^0, \ldots, z_m^0$, est une solution du système total (A), lequel est par conséquent complètement intégrable. C. Q. F. D.

Reste à trouver les conditions pour que les inconnues du système (B) soient des expressions déterminées de $x_1, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_n^0$.

Multipliant l'équation (B) par $dt$ et intégrant de $t_0$ à $t$, il vient

$$(27) \qquad z_i - z_i^0 = \int_{t_0}^{t} \left( f_1^i \frac{dx_1}{dt} + \cdots + f_n^i \frac{dx_n}{dt} \right) dt \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

donnons ici aux fonctions $x_1, \ldots, x_n$ des variations arbitraires qui s'annulent pour $t = t_0$ et supposons que $z_i^0$ ne varie pas ([1]), on aura, en intégrant par parties les différentielles des variations et supprimant les termes qui s'annulent à la limite $t_0$,

$$(28) \quad \delta z_i = f_1^i \delta x_1 + \ldots + f_n^i \delta x_n + \int_{t_0}^{t} \sum_{n}^{1}{}_k (\delta f_k^i dx_k - df_k^i \delta x_k) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Afin que $z_i$ soit une fonction déterminée de $x_1, \ldots, x_n$, il faut et il suffit que l'expression sous le signe $\int_{t_0}^{t}$ soit nulle, c'est-à-dire

$$(29) \qquad \sum_{n}^{1}{}_k (\delta f_k^i dx_k - df_k^i \delta x_k) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

les variations $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ restant arbitraires.

Cette condition est nécessaire, car, si $z_i$ est une expression déterminée de $x_1, \ldots, x_n$, la variation $\delta z_i$ est linéaire par rapport à $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$. Elle est en même temps suffisante : en effet, supposons que la condition (29) ait lieu; alors l'équation (28) se réduit à

$$(30) \qquad \delta z_i = f_1^i \delta x_1 + \ldots + f_n^i \delta x_n.$$

Les variations $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ étant par supposition arbitraires, on peut se les donner de manière qu'elles soient nulles pour une seconde ([2]) valeur quelconque $t_1$ de $t$; alors (30) fait voir que $\delta z_i$ s'annule également pour $t = t_1$, et, en vertu de (27), pour $t = t_1$,

$$(\delta z_i)_{t=t_1} = \delta[(z_i)_{t=t_1} - z_i^0] = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left( f_1^i \frac{dx_1}{dt} + \cdots + f_n^i \frac{dx_n}{dt} \right) dt = 0,$$

([1]) On peut toujours se donner les mêmes valeurs initiales $z_1^0, \ldots, z_m^0$ des inconnues $z_1, \ldots, z_m$ du système (B), quelles que soient les formes différentes qu'on attribue à $x_1, \ldots, x_n$.

([2]) On a déjà supposé que $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ s'annulent pour $t = t_0$.

ce qui fait voir que l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1}$ ne varie pas quand on donne à $x_1, \ldots, x_n$ des variations arbitraires $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$, qui s'annulent aux limites $t = t_0$ et $t = t_1$ ; d'où il résulte que cette intégrale a la même valeur pour toutes les fonctions possibles $x_1, \ldots, x_n$, qui ont les mêmes valeurs initiales et finales $x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$. En d'autres termes, $\int_{t_0}^{t_1}$, et par suite $(z_i)_{t=t_1}$, est une expression déterminée de $x_1^1, \ldots, x_n^1, x_1^0, \ldots, x_n^0$, et, comme $t_1$ est une valeur quelconque de $t$, $z_i$ est une expression déterminée de $x_1, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_n^0$. C. Q. F. D.

L'équation de condition (29), qu'on vient de démontrer, doit avoir lieu indépendamment de $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ ; formant $\delta f_k^i$, y remplaçant $\delta z_1, \ldots, \delta z_m$ par leurs valeurs (30) et égalant séparément à zéro les coefficients des variations $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$, on aura, en divisant par $dt$,

$$(31) \quad \sum_{k}^{1, n} \left( \frac{\partial f_k^i}{\partial z_1} f_l^1 + \ldots + \frac{\partial f_k^i}{\partial z_m} f_l^m + \frac{d f_k^i}{d x_l} \right) \frac{d x_k}{dt} - \frac{d f_l^i}{dt} = 0 \quad \begin{cases} (i = 1, 2, \ldots, m), \\ (l = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

ou bien, formant la dérivée $\frac{d f_l^i}{dt}$ et y remplaçant les dérivées de $z_1, \ldots, z_m$ par leurs valeurs (B),

$$(32) \quad \sum_{k}^{1, n} \left( \frac{\partial f_k^i}{\partial z_1} f_l^1 + \ldots + \frac{\partial f_k^i}{\partial z_m} f_l^m + \frac{\partial f_k^i}{\partial x_l} - \frac{\partial f_l^i}{\partial z_1} f_k^1 - \ldots - \frac{\partial f_l^i}{\partial z_m} f_k^m - \frac{\partial f_l^i}{\partial x_k} \right) \frac{d x_k}{dt} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m), \quad (l = 1, 2, \ldots, n),$$

ce qui est une identité, car, entre les fonctions complètement arbitraires $x_1, \ldots, x_n$ et leurs dérivées, on ne saurait avoir de relation; donc, en égalant ici séparément à zéro les coefficients de $\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}$, on trouve à la fois comme nécessaires et suffisantes les conditions connues pour que le système total (A) soit complètement intégrable.

C. Q. F. D.

Afin de rendre cette démonstration plus sensible, nous allons la reprendre en faisant une hypothèse particulière sur les fonctions arbitraires $x_1, \ldots, x_n$ ; nous supposerons que ces variables soient des fonctions déterminées de $t$ et de $2n$ paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$, et que le système des $2n$ fonctions

$$x_1, \ldots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}$$

soit distinct par rapport aux paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$.

Dans ce cas, on démontre d'abord que, *pour que le système total* (A) *soit complètement intégrable, il faut et il suffit que les inconnues du système* (B) *soient des fonctions de $x_1, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_n^0$ sans dépendre explicitement de $t$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$.*

La démonstration est la même que lorsque $x_1, \ldots, x_n$ étaient arbitraires. En effet, l'équation (26) est toujours identique comme avant, puisque entre $x_1, \ldots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}$ on ne saurait par supposition avoir de relation où ne figurent pas $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$.

Reste à trouver les conditions pour que les solutions de (B) soient des fonctions exactes de $x_1, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_n^0$ sans dépendre explicitement de $t$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$.

Dans l'équation (28), $\delta z_i$, $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ sont maintenant des différentielles totales par rapport aux paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$; par supposition, $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ doivent être nuls pour $t = t_0$, et pour cela il faut et il suffit que $x_1, \ldots, x_n$ pour $t = t_0$, c'est-à-dire que $x_1^0, \ldots, x_n^0$, soient indépendants des paramètres [1]. Sous cette réserve (28) a lieu, et il en résulte directement que la condition (29) est nécessaire et suffisante pour que $z_i$ soit fonction exacte de $x_1, \ldots, x_n$, car en vertu de (29) l'équation (28) se réduit à (30), ce qui montre que la différentielle totale de $z_i$ s'exprime au moyen des différentielles totales de $x_1, \ldots, x_n$, sans contenir explicitement $\delta\alpha_1, \ldots, \delta\alpha_{2n}$; donc $z_i$ est fonction exacte des $x$.

Ce point établi, on développe l'équation (29) comme précédemment, puisque les différentielles $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ sont indépendantes entre elles et qu'entre $x_1, \ldots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}$ on ne saurait par supposition avoir de relation où $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ ne figurent pas explicitement.

---

(1) En supposant que $t_0$ soit indépendant de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$, car c'est seulement dans ce cas qu'on peut faire $t = t_0$ sous le signe de différentiation totale et que l'on aura

$$(\delta x_k)_{t=t_0} = \delta x_k^0.$$

*Remarque.* — L'équation (29) présente à elle seule la condition nécessaire et suffisante pour que le système aux différentielles totales (A) soit complètement intégrable.

## § V. — Discussion et application de la méthode à un exemple.

En se reportant aux résultats obtenus au § III, on voit que l'intégration du système ordinaire (B) avance d'autant plus la solution du système total (A), que le nombre $k$ des variables $x_1, \ldots, x_n$ que la substitution (C) détermine en fonction des autres est plus petit.

Dans le cas limite où $k = 0$, l'intégration de (B) donne directement les solutions du système (A) sans nouvelle intégration. Dans l'autre cas extrême où $k = n - 1$, l'intégration de (B) ramène seulement la question à l'intégration d'un système total avec une seule variable de moins que le proposé (A).

Cependant, ce qu'on perd dans le chemin que l'intégration de (B) fait faire au problème, on le gagne au point de vue de cette intégration, qui est d'autant plus aisée à effectuer que le système (B) contient moins de paramètres arbitraires.

Il y a plus : le système total (A) ne peut être considéré comme réellement transformé et simplifié que si les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ qu'on substitue à $x_1, \ldots, x_n$ ne sont pas toutes indépendantes entre elles. Nous expliquerons suffisamment notre pensée sur un exemple appartenant au cas le plus simple possible : celui d'une seule équation totale à deux variables indépendantes séparées entre elles.

Soit l'équation

$$\text{(A)} \qquad dz = \sin x^2 dx + \cos y^2 dy,$$

nous en tirons d'abord immédiatement

$$\text{(A')} \qquad z = \int \sin x^2 dx + \int \cos y^2 dy ;$$

d'autre part, en remplaçant $y$ par $\varphi(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, on a, en ajoutant à $z$ un accent (*règle générale*),

$$\text{(B)} \qquad \frac{dz'}{dx} = \sin x^2 + \cos \varphi^2 \frac{d\varphi}{dx},$$

d'où

$$z' = \int \left( \sin x^2 + \cos \varphi^2 \frac{d\varphi}{dx} \right) dx. \tag{B'}$$

Tant que $\varphi$ contient des paramètres $\alpha$, cette quadrature (B'), unique en apparence, se compose, en réalité, de deux quadratures distinctes, les mêmes que celles de (A'); donc ramener le système total (A) au système ordinaire (B), c'est compliquer le problème, sans le transformer. Mais il n'en est plus ainsi lorsque $\varphi$ a été convenablement particularisé sans y faire figurer de paramètres; par exemple, si l'on fait ici $y = \varphi(x) = x$, l'équation (B) devient

$$\frac{dz'}{dx} = \sin x^2 + \cos x^2 = 1, \quad \text{d'où} \quad z' = x + z_0;$$

après quoi le problème s'achève en intégrant le système $(A_k)$, qui se réduit ici à l'équation

$$dz = \cos y^2 dy,$$

qu'il faut intégrer en prenant $z'$ comme valeur initiale de $z$ pour $y = x$, ce qui donne

$$z = x + z_0 + \int_x^y \cos y^2 dy, \tag{a}$$

solution qui exige *réellement une quadrature de moins* (¹) que la solution (A').

En général, lorsque la substitution (C) n'établit entre $x_1, \ldots, x_n$ aucune relation, par cela même que (B) est complètement équivalent à (A), leurs solutions exigent identiquement les mêmes intégrations, et ce n'est que par une substitution *plus ou moins particulière* qu'on peut espérer de diminuer le nombre des intégrations, comme cela arrive dans l'exemple précédent, c'est-à-dire en remplaçant certaines d'entre elles par des quadratures connues.

Nous terminerons ce travail en appliquant nos règles à l'exemple

---

(¹) Certainement, à quelqu'un qui saurait intégrer $\cos y^2 dy$ cette méthode apprendrait à intégrer $\sin x^2 dx$ (en remplaçant $\sin x^2$ par $1 - \cos x^2$), mais il n'est pas moins vrai que cette intégration n'est plus nécessaire pour la solution du problème; la formule ($a$) permet de résoudre l'équation totale (A) *sans savoir intégrer* $\sin x^2 dx$, et nous avons *réellement diminué le nombre des quadratures à faire* si l'on compte pour rien $\int dx$.

suivant :

$$
(\mathrm{A})\left\{
\begin{aligned}
dz_1 &= z_1 \frac{-2x_1 + x_2 + x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}\, dx_1 + z_2 \frac{x_3 - x_2}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}\, dx_2 + z_3 \frac{x_2 - x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}\, dx_3,\\
dz_2 &= z_1 \frac{x_3 - x_1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}\, dx_1 + z_2 \frac{-2x_2 + x_1 + x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}\, dx_2 + z_3 \frac{x_1 - x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}\, dx_3,\\
dz_3 &= z_1 \frac{x_2 - x_1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\, dx_1 + z_2 \frac{x_1 - x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\, dx_2 + z_3 \frac{-2x_3 + x_1 + x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\, dx_3.
\end{aligned}
\right.
$$

*Application de la règle générale.*

Commençons d'abord par faire une *substitution particulière* que nous choisirons de manière à avoir un système différentiel ordinaire linéaire à coefficients constants; à cet effet, posons (1)

$$
(\mathrm{C}_3) \qquad x_1 = x_3 + \tfrac{1}{2}, \quad x_2 = x_3 - \tfrac{1}{2};
$$

le système (A) devient, en ajoutant un accent aux lettres $z$,

$$
(\mathrm{B})\left\{
\begin{aligned}
\frac{dz'_1}{dx_3} &= -3z'_1 + z'_2 - z'_3,\\
\frac{dz'_2}{dx_3} &= -z'_1 + 3z'_2 + z'_3,\\
\frac{dz'_3}{dx_3} &= 4z'_1 - 4z'_3,
\end{aligned}
\right.
$$

d'où, en intégrant,

$$
(\mathrm{B}')\left\{
\begin{aligned}
z'_1 &= (2x_3^2 - x_3)\mathrm{C} + (1 - 4x_3)\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2,\\
z'_2 &= (2x_3^2 + x_3)\mathrm{C} - (4x_3 + 1)\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2,\\
z'_3 &= (1 - 4x_3^2)\,\mathrm{C} + 8x_3\mathrm{C}_1 - 2\mathrm{C}_2.
\end{aligned}
\right.
$$

Le problème s'achève en intégrant le système total suivant, où $x_3$ est constant,

$$
(\mathrm{A}_k)\left\{
\begin{aligned}
dz_1 &= z_1 \frac{-2x_1 + x_2 + x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}\, dx_1 + z_2 \frac{x_3 - x_2}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}\, dx_2,\\
dz_2 &= z_1 \frac{x_3 - x_1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}\, dx_1 + z_2 \frac{-2x_2 + x_1 + x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}\, dx_2,\\
dz_3 &= z_1 \frac{x_2 - x_1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\, dx_1 + z_2 \frac{x_1 - x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\, dx_2.
\end{aligned}
\right.
$$

(1) Nous prenons $x_3$ pour la variable $t$.

Or, un calcul facile donne les solutions (¹)

$$(\mathrm{A}'_k)\qquad \left\{\begin{aligned} z_1 &= \frac{\mathrm{A}+\mathrm{A}_1 x_2}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)},\\ z_2 &= -\frac{\mathrm{A}+\mathrm{A}_1 x_1}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)},\\ z_3 &= \frac{\mathrm{A}+\mathrm{A}_1 x_1}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)}+\frac{\mathrm{A}_1}{x_1-x_3}+\mathrm{A}_2, \end{aligned}\right.$$

où il convient de déterminer les constantes $\mathrm{A}$, $\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_2$ par la condition que les valeurs de $z'_1$, $z'_2$, $z'_3$ fournies par $(\mathrm{B}')$ soient les valeurs initiales de $z_1$, $z_2$, $z_3$ correspondantes aux valeurs de $x_1$ et $x_2$ données par $(\mathrm{C}_3)$. Substituant dans $(\mathrm{A}'_k)$ à $x_1$ et $x_2$ les valeurs déduites de $(\mathrm{C}_3)$ on trouve d'abord

$$z'_1 = 2\mathrm{A}+\mathrm{A}_1(2x_3-1),\quad z'_2 = 2\mathrm{A}+\mathrm{A}_1(2x_3+1),\quad z'_3 = -4\mathrm{A}-4\mathrm{A}_1 x_3+\mathrm{A}_2;$$

remplaçant ensuite $z'_1$, $z'_2$, $z'_3$ par leurs valeurs $(\mathrm{B}')$ et résolvant, on a

$$\mathrm{A} = -x_3\mathrm{C}_1+\tfrac{1}{2}\mathrm{C}_2,\quad \mathrm{A}_1 = \mathrm{C}x_3-\mathrm{C}_1,\quad \mathrm{A}_2 = \mathrm{C},$$

ce qui, porté dans $(\mathrm{A}'_k)$, donne

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{x_2x_3\mathrm{C}-(x_2+x_3)\mathrm{C}_1+\frac{1}{2}\mathrm{C}_2}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)},\\ z_2 &= \frac{-x_1x_3\mathrm{C}+(x_1+x_3)\mathrm{C}_1-\frac{1}{2}\mathrm{C}_2}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)},\\ z_3 &= \frac{x_1x_2\mathrm{C}-(x_1+x_2)\mathrm{C}_1+\frac{1}{2}\mathrm{C}_2}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)}, \end{aligned}$$

et l'on a en effet les solutions du système proposé $(\mathrm{A})$, comme on peut s'en assurer directement.

Montrons maintenant que d'une seule intégrale du système $(\mathrm{B})$, sans connaître les autres, on peut déduire une intégrale du système $(\mathrm{A})$ par l'intégration du système $(\mathrm{A}_k)$.

(¹) Les équations $(\mathrm{A}_k)$ ne contenant pas $z_3$ au second membre, il suffit d'intégrer les deux premières, après quoi, connaissant $z_1$ et $z_2$, la troisième équation donnera $z_3$ par une quadrature. Nous omettons ces calculs faciles, notre but étant de confirmer notre *règle générale* en montrant que les solutions de $(\mathrm{B})$ et de $(\mathrm{A}_k)$, n'importe d'où elles sont tirées, donnent effectivement les solutions de $(\mathrm{A})$.

On trouve directement (¹) l'intégrale suivante du système (B) :

$$(z'_1 + z'_2 + z'_3)x_3 + \tfrac{1}{2}z'_1 - \tfrac{1}{2}z'_2 = \mathrm{C}. \tag{D}$$

D'autre part, déterminant dans $(\mathrm{A}'_k)$ les constantes d'intégration de manière que, pour les valeurs de $x_1$ et $x_2$ données par $(\mathrm{C}_3)$, on ait $z_1 = z'_1$, $z_2 = z'_2$, $z_3 = z'_3$, il vient

$$\begin{gathered}
z_1[x_1 - x_3 + 2(x_1 - x_3)^2] + z_2[x_2 - x_3 + 2(x_2 - x_3)^2] = z'_1,\\
z_1[x_3 - x_1 + 2(x_1 - x_3)^2] + z_2[x_3 - x_2 + 2(x_2 - x_3)^2] = z'_2,\\
z_1[1 - 4(x_1 - x_3)^2] + z_2[1 - 4(x_2 - x_3)^2] + z_3 = z'_3,
\end{gathered}$$

et, portant ces valeurs de $z'_1$, $z'_2$, $z'_3$ dans (D), on trouve

$$z_1x_1 + z_2x_2 + z_3x_3 = \mathrm{C},$$

ce qui est en effet une intégrale du système total (A).

*Application de la règle spéciale.*

Faisons maintenant une substitution générale,

$$\tag{C} \left\{\begin{array}{lll}
x_1 = \alpha_1 t + \alpha', & x_2 = \alpha_2 t + \alpha'', & x_3 = \alpha_3 t + \alpha''',\\
x_1^0 = \alpha', & x_2^0 = \alpha'', & x_3^0 = \alpha''',
\end{array}\right.$$

qui n'établit entre $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_1^0$, $x_2^0$, $x_3^0$ aucune relation sans $t$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, .... Le système (A) devient

$$\tag{B$_1$} \left\{\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dt} &= \frac{1}{\mathrm{R}_1}\left\{\begin{array}{l}
[(-2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)t - 2\alpha' + \alpha'' + \alpha''']z_1\alpha_1\\
+ [(\alpha_3 - \alpha_2)t + \alpha''' - \alpha'']z_1\alpha_2\\
+ [(\alpha_2 - \alpha_3)t + \alpha'' - \alpha''']z_3\alpha_3
\end{array}\right\},\\
\frac{dz_2}{dt} &= \frac{1}{\mathrm{R}_2}\left\{\begin{array}{l}
[(\alpha_3 - \alpha_1)t + \alpha''' - \alpha']z_1\alpha_1\\
+ [(-2\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_3)t - 2\alpha'' + \alpha' + \alpha''']z_2\alpha_2\\
+ [(\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha' - \alpha''']z_3\alpha_3
\end{array}\right\},\\
\frac{dz_3}{dt} &= \frac{1}{\mathrm{R}_3}\left\{\begin{array}{l}
[(\alpha_2 - \alpha_1)t + \alpha'' - \alpha']z_1\alpha_1\\
+ [(\alpha_1 - \alpha_2)t + \alpha' - \alpha'']z_2\alpha_2\\
+ [(-2\alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_2)t - 2\alpha''' + \alpha' + \alpha'']z_3\alpha_3
\end{array}\right\},
\end{aligned}\right.$$

(¹) Ajoutant la première, la deuxième et la troisième équation (B), multipliées respectivement par $x_3 + \frac{1}{2}$, $x_3 - \frac{1}{2}$, $x_3$, on a une combinaison intégrable.

en posant, pour abréger,

$$\frac{1}{R_1} = [(\alpha_1 - \alpha_2)t + \alpha' - \alpha''][(\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha' - \alpha'''],$$

$$\frac{1}{R_2} = [(\alpha_2 - \alpha_1)t + \alpha'' - \alpha'][(\alpha_2 - \alpha_3)t + \alpha'' - \alpha'''],$$

$$\frac{1}{R_3} = [(\alpha_3 - \alpha_1)t + \alpha''' - \alpha'][(\alpha_3 - \alpha_2)t + \alpha''' - \alpha''].$$

Multipliant la première, la seconde et la troisième équation du système ($B_1$) respectivement par

$$(\alpha_1 t + \alpha' - \alpha_1)^2, \quad (\alpha_2 t + \alpha'' - \alpha_1)^2, \quad (\alpha_3 t + \alpha''' - \alpha_1)^2,$$

et ajoutant les résultats, on trouve

$$\begin{gathered}(\alpha_1 t + \alpha' - \alpha_1)^2 \frac{dz_1}{dt} + (\alpha_2 t + \alpha'' - \alpha_1)^2 \frac{dz_2}{dt} + (\alpha_3 t + \alpha'' - \alpha_1)^2 \frac{dz_3}{dt} \\ = -2\alpha_1 z_1(\alpha_1 t + \alpha' - \alpha_1) - 2\alpha_2 z_2(\alpha_2 t + \alpha'' - \alpha_1) - 2\alpha_3 z_3(\alpha_3 t + \alpha''' - \alpha_1),\end{gathered}$$

ce que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{d}{dt}(\alpha_1 t + \alpha - \alpha_1)^2 z_1 + \frac{d}{dt}(\alpha^2 t + \alpha'' - \alpha_1)^2 z_2 + \frac{d}{dt}(\alpha_3 t + \alpha''' - \alpha_1)^2 z_3 = 0,$$

et d'où l'on tire l'intégrale suivante du système ($B_1$) :

$$(\alpha_1 t + \alpha' - \alpha_1)^2 z_1 + (\alpha_2 t + \alpha'' - \alpha_1)^2 z_2 + (\alpha_3 t + \alpha''' - \alpha_1)^2 z_3 = C.$$

Nous allons appliquer à cette intégrale le théorème III (§ II). Déterminons la constante C par la condition que pour $t = t_0 = 0$ on ait $z_1 = z_1^0$, $z_2 = z_2^0$, $z_3 = z_3^0$, puis éliminons $t$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha'$, $\alpha''$, $\alpha'''$ au moyen de (C); nous aurons

$$\text{(E)} \quad \left\{\begin{aligned}&(x_1 - \alpha_1)^2 z_1 + (x_2 - \alpha_1)^2 z_2 + (x_3 - \alpha_1)^2 z_3 \\ &\quad - (x_1^0 - \alpha_1)^2 z_1^0 - (x_2^0 - \alpha_1)^2 z_2^0 - (x_3^0 - \alpha_1) z_3^0 = 0,\end{aligned}\right.$$

relation qui doit avoir lieu *indépendamment de* $\alpha_1$, et qui dès lors entraîne les trois suivantes :

$$z_1 x_1^2 + z_2 x_2^2 + z_3 x_3^2 - z_1^0 (x_1^0)^2 - z_2^0 (x_2^0)^2 - z_3^0 (x_3^0)^2 = 0,$$

$$z_1 x_1 + z_2 x_2 + z_3 x_3 - z_1^0 x_1^0 - z_2^0 x_2^0 - z_3^0 x_3^0 = 0,$$

$$z_1 + z_2 + z_3 - z_1^0 - z_2^0 - z_3^0 = 0.$$

On a donc le système intégral complet du système (B) aussi bien que celui du proposé (A).

Cet exemple fait ressortir l'avantage qu'on peut avoir à faire figurer dans la substitution (C) plus de paramètres qu'il n'est strictement nécessaire pour que les $x$ soient indépendants entre eux et des $x^0$.

Ici $\alpha_1$ est un paramètre supplémentaire, et l'on pourrait faire, par exemple, $\alpha_1 = 1$ sans que $x_1, x_2, x_3, x_1^0, x_2^0, x_3^0$ cessassent d'être indépendants; mais alors, au lieu de l'intégrale (E), on aurait celle-ci,

$$(x_1 - 1)^2 z_1 + (x_2 - 1)^2 z_2 + (x_3 - 1)^2 z_3 - (x_1^0 - 1)^2 z_1^0 - (x_2^0 - 1)^2 z_2^0 - (x_3^0 - 1)^2 z_3^0 = 0,$$

et pas davantage, tandis que la présence de $\alpha_1$ dans l'intégrale (E) permet d'obtenir les trois intégrales du problème.

*Vu et approuvé :*

Paris, le 25 juin 1879.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

*Permis d'imprimer :*

Paris, le 25 juin 1879.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

# SECONDE THÈSE.

## PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Théorie générale du potentiel. — Méthode de Green et principe de Dirichlet. — Application à l'attraction des ellipsoïdes.

*Vu et approuvé :*

Paris, le 25 juin 1879.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

*Permis d'imprimer :*

Paris, le 25 juin 1879.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

5130 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.