ASSOCIATION FRANÇAISE

POUR

L'AVANCEMENT DES SCIENCES

FUSIONNÉE AVEC

L'ASSOCIATION SCIENTIFIQUE DE FRANCE

(Fondée par Le Verrier, en 1864)

Reconnues d'utilité publique.

COMPTE RENDU DE LA 38e SESSION

LILLE

— 1909 —

NOTES ET MÉMOIRES

PARIS
AU SECRÉTARIAT DE L'ASSOCIATION
rue Serpente, 28
ET CHEZ MM. MASSON ET Cie, LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE
boulevard Saint-Germain, 120

1910

M. le Commandant E.-N. BARISIEN

(Paris)

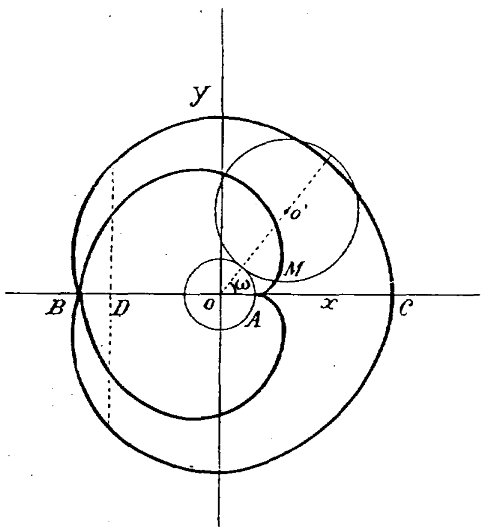
SUR QUELQUES FORMULES DE LA THÉORIE DES NOMBRES OBTENUES PAR DES CONSIDÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES (*)

512.81 : 513.26

— *3 août* —

Les liaisons de toutes les parties de la science mathématique entre elles, sont telles que fréquemment des propriétés des nombres sont la conséquence de formules algébriques, lesquelles proviennent de considérations géométriques.

Nous croyons intéressant d'exposer les résultats suivants que nous venons de trouver et qui doivent être inédits, tellement la façon d'y parvenir est originale. Si on ne donnait que les formules elles-mêmes, on ne pourrait jamais se douter de leur provenance.



J'étudiais l'*épicycloïde* ci-contre, *engendrée par un point d'un cercle* O′ *de rayon* 2 a *roulant extérieurement sur un cercle fixe* O *de rayon* a.

A étant le point d'origine sur le cercle O du roulement, en prenant pour axe des x la droite OA, et pour axe des y la perpendiculaire élevée en O à OA, et en désignant par ω l'angle O′OA, on a pour les coordonnées d'un joint M de l'épicycloïde :

$$(1) \qquad x = 3a\cos\omega - 2a\cos\frac{3\omega}{2},$$

$$(2) \qquad y = 3a\sin\omega - 2a\sin\frac{3\omega}{2}.$$

(*) Il y a lieu d'apporter au volume du Résumé des travaux du Congrès de Lille 1909, les corrections suivantes :

Page 61. Lignes 10 et 11. — Les valeurs t et θ de l'identité sont liées par la relation

$$t = \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}$$

Ligne 12. — Au lieu de $64\,\mathrm{tg}_6\,\varphi\,(5 - 3\,\mathrm{tg}_2^2\,\varphi)_2$
lire $64\,\mathrm{tg}^6\,\varphi\,(5 - 3\,\mathrm{tg}^2\,\varphi)^2$

En recherchant l'équation cartésienne de cette courbe, j'ai remarqué que

$$x^2 + y^2 = 13a^2 - 12a^2 \cos\frac{\omega}{2}.$$

Donc

$$\cos\frac{\omega}{2} = \frac{-(x^2 + y^2 - 13a^2)}{12a^2}, \tag{3}$$

et comme

$$x = 3a\left(2\cos^2\frac{\omega}{2} - 1\right) - 2a\left(4\cos^3\frac{\omega}{2} - 3\cos\frac{\omega}{2}\right),$$

il en résulte au moyen de (3) que l'équation cartésienne de la courbe est

$$(x^2 + y^2 - 13a^2)\left[\frac{(x^2 + y^2 - 13a^2)^2}{108a^4} + \frac{(x^2 + y^2 - 13a^2)}{12a^2} - 1\right] - 2a(x + 3a) = 0. \tag{4}$$

C'est une courbe du 6e degré ayant un point double B, un point de rebroussement A, et dont on détermine aisément les points d'intersection avec la droite $x + 3a = 0$, et avec le cercle $x^2 + y^2 - 13a^2 = 0$. Le point double B est $(x = -4a, y = 0)$. Le point de rebroussement A est $(x = a, y = 0)$. La courbe a un sommet au point C $(x = 5a, y = 0)$ et passe par les points $(x = -3a, y = \pm 2a)$.

Elle passe aussi par les points $\left(x = -3a, y = \pm a\sqrt{\frac{3\sqrt{57} - 1}{2}}\right)$

Ajoutons que cette courbe qui a la forme d'une double cardioïde, a pour aire $30\pi a^2$ et pour périmètre $48a$.

Je donne des détails sur cette courbe qui, je crois, a été peu étudiée, et mériterait peut-être une étude analogue à celle d'autres épi ou hypocycloïdes célèbres, telles que la cardioïde, l'hypocycloïde triangulaire et l'astroïde.

J'aborde le cœur du sujet :

En posant $\cos\frac{\omega}{2} = t$, on a d'après (1) et (2) :

$$x = a(6t + 6t^2 - 8t^3 - 3), \tag{5}$$

$$y = 2a\sqrt{1 - t^2}\,(1 - t)(1 + 4t). \tag{6}$$

D'autre part, si l'on pose $\operatorname{tg}\frac{\omega}{4} = \theta$, on a pour x et y des valeurs unicursales en fonction du paramètre θ, et en remarquant que $t = \frac{1 - \theta^2}{1 + \theta^2}$

$$x = \frac{a(5\theta^6 - 45\theta^4 + 15\theta^2 + 1)}{(1 + \theta^2)^3}, \tag{7}$$

$$y = \frac{8a\theta^3(5 - 3\theta^2)}{(1 + \theta^2)^3}. \tag{8}$$

Mais, d'après (3), on a

$$x^2 + y^2 = a^2(13 - 12t) = \frac{a^2(1 + 25\theta^2)}{1 + \theta^2}.$$

Par conséquent, en portant dans cette relation, soit les valeurs (5) et (6), soit les valeurs (7) et (8), on obtient les deux identités

(9) $(8t^3 - 6t^2 - 6t + 3)^2 + 4(1 - t^2)(1 + 3t - 4t^2)^2 = 13 - 12t,$

(10) $(5\theta^6 - 45\theta^4 + 15\theta^2 + 1)^2 + [8\theta^3(5 - 3\theta^2)]^2 = (1 + 25\theta^2)(1 + \theta^2)^5.$

Voici des propriétés relatives à la théorie des nombres qui découlent immédiatement de ces identités.

I. — *L'expression* $13 - 12t$, *lorsque* $t = \dfrac{1 - \theta^2}{1 + \theta^2}$, *est toujours une somme de deux carrés.*

On a, en effet

(11) $(8t^3 - 6t^2 - 6t + 3)^2 + \left[\dfrac{8\theta^3(5 - 3\theta^2)}{(1 + \theta^2)^3}\right]^2 = 13 - 12t.$

Exemples. — 1°) $\theta = 1,\ t = 0$

$$3^2 + 2^2 = 13.$$

2°) $\theta = 2, t = -\dfrac{3}{5}$

$$\left(\frac{339}{125}\right)^2 + \left(\frac{448}{125}\right)^2 = \frac{101}{5}$$

3°) $\theta = \dfrac{1}{2},\quad t = \dfrac{3}{5}$

$$\left(\frac{129}{125}\right)^2 + \left(\frac{272}{125}\right)^2 = \frac{29}{5}$$

4°) $\theta = \sqrt{2},\quad t = -\dfrac{1}{3}$

$$\left(\frac{109}{27}\right)^2 + \left(\frac{16\sqrt{2}}{27}\right)^2 = \frac{51}{3}$$

II. — *Si* $t = \dfrac{1 - \theta^2}{1 + \theta^2}$, *l'expression*

$$P = 13 - 12t - (8t^3 - 6t^2 - 6t + 3)^2$$

est toujours un carré parfait.

On trouve, en effet, d'après l'identité (9)

$$P = \left[\frac{8\theta^3(5 - 3\theta^2)}{(1 + \theta^2)^3}\right]^2.$$

III. — En changeant t en $-t$ dans (9), on a

(12) $(8t^3 + 6t^2 - 6t - 3)^2 + 4(1 - t^2)(1 - 3t - 4t^2)^2 = 13 + 12t.$

En ajoutant et retranchant (9) et (12), on obtient les deux autres identités

$$(13)\quad 8t^3 - 6t^2 - 6t + 3)^2 + (8t^3 + 6t^2 - 6t - 3)^2 + 8(1 - t^2) \times [(4t^2 - 1)^2 + 9t^2] = 26,$$

$$(14)\quad (8t^3 + 6t^2 - 6t - 3)^2 - (8t^3 - 6t^2 - 6t + 3)^2 + 48t(1 - t^2)(4t^2 - 1) = 24t.$$

IV. — *Le nombre 26 peut toujours être décomposé en une somme de quatre carrés entiers divisé par un cinquième carré de nombre entier, et d'une infinité de manières.*

Si on change dans (11) θ en $\frac{1}{\theta}$, et par conséquent t en $-t$, on a

$$(15)\quad (8t^3 + 6t^2 - 6t - 3)^2 + \left[\frac{8\theta(5\theta^2 - 3)}{(1 + \theta^2)^3}\right]^2 = 13 + 12t,$$

et en ajoutant (10) et (15)

$$(16)\quad (8t^3 - 6t^2 - 6t + 3)^2 + (8t^3 + 6t^2 - 6t - 3)^2 + \left[\frac{8\theta^3(5 - 3\theta^2)}{(1 + \theta^2)^3}\right]^2 + \left[\frac{8\theta(5\theta^2 - 3)}{(1 + \theta^2)^3}\right]^2 = 26.$$

Exemples. — 1°) $\theta = 1,\ t = 0$

$$26 = \frac{3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2}{1^2}.$$

2°) $\theta = 2,\ t = -\frac{3}{5}$.

$$(17)\quad 26 = \frac{\overline{339}^2 + \overline{448}^2 + \overline{129}^2 + \overline{272}^2}{\overline{125}^2}.$$

V. — En remarquant que $26 = 5^2 + 1^2$, la formule (16) donne un moyen de *décomposer une somme de quatre carrés entiers en une somme de deux autres carrés,* et réciproquement.

Il suffit de porter dans (16) une valeur quelconque de θ, entière ou fractionnaire.

Exemples. — 1°) $\theta = 1,\ t = 0$

$$3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 = 5^2 + 1^2.$$

2°) $\theta = 2,\ t = -\frac{3}{5}$

$$\overline{129}^2 + \overline{272}^2 + \overline{339}^2 + \overline{448}^2 = \overline{125}^2 + \overline{615}^2$$

VI. — En retranchant (11) et (15), on a la relation

$$(8t^3 + 6t^2 - 6t - 3)^2 - (8t^3 - 6t^2 - 6t + 3)^2 + \left[\frac{8\theta(5\theta^2 - 3)}{(1 + \theta^2)^3}\right]^2 - \left[\frac{8\theta^3(5 - 3\theta^2)}{(1 + \theta^2)^3}\right]^2 = 24t$$

qui donne un moyen de *décomposer un nombre en une somme de* *deux carrés, diminué d'une autre somme de deux carrés,* lorsque ce nombre est de la forme $24\,t$.

Exemple. — $\theta = 2$, $t = -\dfrac{3}{5}$.

$$\left(\frac{339}{125}\right)^2 + \left(\frac{448}{125}\right)^2 - \left(\frac{129}{125}\right)^2 - \left(\frac{272}{125}\right)^2 = \frac{72}{5}.$$

VII. — La formule (10) montre que tout nombre de la forme $(1 + 25\,\theta^2)$ *est une somme de deux carrés divisée par une cinquième puissance.*

Exemples. — 1°) $\theta = 1$

(18) $$26 = \frac{\overline{24}^2 + \overline{16}^2}{2^5}.$$

2°) $\theta = 2$

$$101 = \frac{\overline{339}^2 + \overline{448}^2}{5^5}.$$

En comparant (17) et (18), on a la relation assez curieuse

$$26 = \frac{\overline{24}^2 + \overline{16}^2}{2^5} = \frac{\overline{129}^2 + \overline{272}^2 + \overline{339}^2 + \overline{448}^2}{5^6}$$

VIII. — La formule (10) montre encore que, comme

$$1 + 25\,\theta^2 = 1 + (5\,\theta)^2,$$

on peut encore dire que *tout nombre de la forme* $(1 + \theta^2)$ *a sa cinquième puissance égale au rapport d'une somme de deux carrés à une autre somme de deux carrés.*

Exemples. — 1°) $\theta = 1$

$$2^5 = \frac{\overline{24}^2 + \overline{16}^2}{5^2 + 1^2}.$$

2°) $\theta = 2$

$$5^5 = \frac{\overline{339}^2 + \overline{448}^2}{10^2 + 1^2}.$$

IX. — En changeant θ en $\dfrac{1}{\theta}$ dans (10), on obtient l'identité

(19) $$(\theta^6 + 15\,\theta^4 - 45\,\theta^2 + 5)^2 + [8\,\theta\,(5\,\theta^2 - 3)]^2 = (\theta^2 + 25)\,(\theta^2 + 1)^5$$

Par conséquent, *tout nombre de la forme* $(\theta^2 + 25)$ *est égal à une somme de deux carrés divisée par une cinquième puissance.*

Exemples. — 1°) $\theta = 1$

$$26 = \frac{\overline{24}^2 + \overline{16}^2}{2^5}$$

2°) $\theta = 2$

$$29 = \frac{\overline{129}^2 + \overline{272}^2}{5^5}.$$

X. — La formule (19) donne comme dans le paragraphe VIII un autre moyen de décomposer $(1 + \theta^2)^5$ en un rapport d'une somme de deux carrés à une autre somme de deux carrés.

Exemple. — $\theta = 2$

$$5^5 = \frac{\overline{129}^2 + \overline{272}^2}{2^2 + 5^2}.$$

XI. — En ajoutant (10) et (19), on a

$$(20) \qquad (\theta^2 + 1)^5 = \frac{(5\theta^6 - 45\theta^4 + 15\theta^2 + 1)^2 + (\theta^6 + 15\theta^4 - 45\theta^2 + 5)^2 + [8\theta^3(5 - 3\theta^2)]^2 + [8\theta(5\theta^2 - 3)]^2}{1^2 + \theta^2 + 5^2 + (5\theta)^2}.$$

ce qui donne le moyen de décomposer *tout nombre de la forme* $(\theta^2 + 1)^5$ *en un rapport de deux sommes de quatre carrés.*

Exemple. — $\theta = 2$

$$5^5 = \frac{\overline{129}^2 + \overline{272}^2 + \overline{339}^2 + \overline{448}^2}{1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2}.$$

XII. — (20) s'écrit aussi

$$(\theta^2 + 1)^6 = \frac{(5\theta^6 - 45\theta^4 + 15\theta^2 + 1)^2 + (\theta^6 + 15\theta^4 - 45\theta^2 + 5)^2 + [8\theta^3(5 - 3\theta^2)]^2 + [8\theta(5\theta^2 - 3)]^2}{26}.$$

Donc, *tout nombre de la forme* $(\theta^2 + 1)^6$ *peut se décomposer en une somme de quatre carrés, divisée par 26.*

Exemple. — $\theta = 2$

$$5^6 = \frac{\overline{129}^2 + \overline{272}^2 + \overline{339}^2 + \overline{448}^2}{26}.$$

XIII. — En retranchant (10) et (19), on a encore l'identité

$$[5\theta^6 - 45\theta^4 + 15\theta^2 + 1)^2 - (\theta^6 + 15\theta^4 - 45\theta^2 + 5)^2 + [8\theta^3(5 - 3\theta^2)]^2 - [8\theta(5\theta^2 - 3)]^2 = 24(\theta^2 - 1)(\theta^2 + 1)^5$$

Donc, *tout nombre de la forme* $24(\theta^2 - 1)(\theta^2 + 1)^5$ *est décomposable en une somme de deux carrés, diminuée de la somme de deux autres carrés.*

Exemple. — $\theta = 2$

$$72 \times 5^5 = \overline{339}^2 + \overline{448}^2 - \overline{129}^2 - \overline{272}^2.$$

XIV. — En faisant $t = \sin\alpha$ dans (9), on a l'identité

$$(8\sin^3\alpha - 6\sin^2\alpha - 6\sin\alpha + 3)^2 + 4\cos^2\alpha\,(4\sin^2\alpha - 3\sin\alpha - 1)^2 = 13 - 12\sin\alpha$$

ce qui revient à dire que $(13 - 12\sin\alpha)$ est toujours une somme de deux carrés.

XV. — En faisant $\theta = \operatorname{tg}\varphi$ dans (10), on a aussi l'identité

$$(5\operatorname{tg}^6\varphi - 45\operatorname{tg}^4\varphi + 15\operatorname{tg}^2\varphi + 1)^2 + 64\operatorname{tg}^6\varphi\,(5 - 3\operatorname{tg}^2\varphi)^2 = \frac{1 + 25\operatorname{tg}^2\varphi}{\cos^{10}\varphi}.$$