ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

SERIE QUARTA - TOMO XIII
(LXXII DELLA RACCOLTA)

NICOLA ZANICHELLI, EDITORE
BOLOGNA, 1935-XIII

Bologna, Cooperativa Tipografica Azzoguidi, 1935-XIII

Sulla differenziabilità totale delle funzioni di più variabili reali.

Memoria di FRANCESCO SEVERI (a Roma).

Sunto. - *Sul fondamento delle nozioni (altrove introdotte dall'A.) di tangenti e corde improprie d'un insieme di punti in un punto d'accumulazione, si determinano condizioni necessarie e sufficienti per la differenziabilità o per l'iperdifferenziabilità di una funzione di più variabili in un punto d'accumulazione d'un insieme o all'interno di un dominio in cui essa sia definita. La consueta considerazione delle derivate parziali non esaurisce nè può esaurire la questione. Perciò l'A. deve anzitutto definire l'operazione di derivazione per una funzione di più variabili in modo adeguato alla natura della funzione, la quale esige che non ci si limiti a studiar la derivazione rispetto alle variabili separatamente considerate.*

L'argomento è di quelli studiati e ristudiati fin dagl'inizi della revisione critica dell'Analisi (1). Mi sembra tuttavia che possan ancora trovar posto le considerazioni che seguono, sia perchè esse conducono, in modo elementare, a condizioni necessarie e sufficienti per la differenziabilità o per l'iperdifferenziabilità in un punto P_0 (mentre le condizioni note riguardan la differenziabilità in *quasi tutti* i punti d'un insieme misurabile); sia perchè l'insieme in cui la funzione è data è vincolato dalla sola condizione che P_0 ne sia un punto d'accumulazione (sicchè in P_0 le derivate parziali non posson generalmente considerarsi); sia infine perchè dal presente lavoro risulta una condizione necessaria e sufficiente per la differenziabilità o per l'iperdifferenziabilità in *tutti* i punti di un dominio.

La differenziabilità in P_0 di una funzione $f(P)$ di un punto P variabile in un insieme piano serrato I (mi limito alle funzioni di due variabili, facile presentandosi l'estensione ad $n > 2$ variabili), è intesa nel senso generale di STOLZ, cioè nel senso che esista un'espressione $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$, con α, β costanti, tale che:

$$\lim \frac{1}{\overline{P_0P}}[f(P) - f(P_0) - \alpha\Delta x - \beta\Delta y] = 0,$$

(1) Indicazioni bibliografiche aggiornate si leggono nel t. II delle monografie matematiche di Varsavia, *Théorie de l'intégrale*, dovuto a S. SAKS (Varsavia, 1933, pag. 222 e segg.). Pei rapporti di questa mia Memoria con una recentissima di G. GUARESCHI ved. i nn. 1; 5, Oss.; 16.

per P comunque tendente a P_0 in I; Δx, Δy denotando le componenti del vettore P_0P.

Intendo invece per *iperdifferenziale* $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ un'espressione tale che:

$$\lim \frac{1}{QP}[f(P) - f(Q) - \alpha\Delta x - \beta\Delta y] = 0,$$

per P, Q distinti, tendenti comunque a P_0 in I; Δx, Δy denotando le componenti del vettore QP.

Allo scopo di ottenere le desiderate condizioni, introduco i concetti di *derivate, ultraderivate, iperderivate direzionali* di $f(P)$ in P_0. Vi son funzioni elementari che hanno derivate direzionali e non ultraderivate nè iperderivate; funzioni che hanno derivate e ultraderivate e non iperderivate. Quando esistono le ultraderivate, esistono le derivate ed hanno valori uguali nelle stesse direzioni; quando esistono le iperderivate, esistono le ultraderivate e le derivate ed hanno valori uguali nelle stesse direzioni.

Le condizioni cui ho alluso divengon particolarmente significative allorchè si tratta della differenziabilità e dell' iperdifferenziabilità nei punti di un dominio piano I. Poichè si dimostra che le iperderivate, quando esistono in un dominio piano, son necessariamente *continue*, ne deriva che la condizione necessaria e sufficiente (la sufficienza è ovvia!) per l'iperdifferenziabilità all'interno di I è che esistano in ogni punto interno ad I le derivate parziali e sieno continue. Vale naturalmente la proprietà analoga per le funzioni di una variabile. Dal punto di vista geometrico questi fatti s'esprimon così:

Una linea piana di Jordan con tutti i suoi punti semplici ha la tangente continua.

Conformemente alla definizione generale, che ho altrove dato pei punti semplici di una varietà topologica (ved. le citazioni in seguito) un punto P della linea è semplice se esiste in esso una sola tangente e se una retta qualsiasi, con direzione diversa da quella della tangente, vicina a P, incontra la curva attorno a P in un punto al più (esattamente in *un* punto, se P è *interno* alla linea, al più in uno, se P è un *estremo*).

Una superficie di Jordan con tutti i suoi punti semplici ha il piano tangente continuo.

Un punto P della superficie è semplice quando le tangenti giacciono in un piano e una retta vicina a P, non parallela a questo piano, incontra la superficie attorno a P in un punto al più; ecc..

Per ciò che concerne la semplice differenziabilità in un punto P_0 interno ad un dominio piano I, dove sia data $f(P)$, le considerazioni dei nn. 21, 22, 23 mostrano che, a voler tenere nel debito conto la proprietà di $f(P)$ come funzione della *coppia* (x, y) e non delle variabili prese separatamente, occorre svincolarsi dall'ordinaria nozione di derivate parziali, per le quali bisogna prescrivere modi troppo particolari di variabilità di P verso P_0.

Sembra che convenga meglio alla natura dell'ente variabile indipendente (che è una coppia di variabili *simultanee*), di assumer come derivate parziali i limiti dei rapporti incrementali

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0}, \quad \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0}$$

(in cui la y o rispettivamente la x è la stessa nei due termini del numeratore), quando $P(x, y) \to P_0(x_0, y_0)$ in modo che $\lim P_0P$ sia una semiretta λ, per cui non sia rispettivamente costante x od y; sempre che, naturalmente, questi limiti esistano finiti e indipendenti da λ.

S'ottengon così le *derivate parziali generalizzate.* Ebbene la loro esistenza in P_0 è *condizione necessaria e sufficiente per la differenziabilità.* Esse dunque estendono, nel modo più appropriato, il concetto di derivata delle funzioni di una variabile, la cui esistenza equivale appunto alla differenziabilità.

La continuità superficiale di f è conseguenza del solo fatto che gl'incrementi parziali generalizzati $f(x, y) - f(x_0, y)$, $f(x, y) - f(x, y_0)$ tendano a zero, per $P \to P_0$ nelle condizioni precedenti: il che dà una riprova dell'opportunità della loro considerazione.

Una condizione sufficiente, singolarmente espressiva, per la differenziabilità di $f(P)$ in tutti i punti interni ad un dominio piano I, si ottiene supponendo che i limiti $\alpha(x_0, y_0)$, $\beta(x_0, y_0)$ dei predetti rapporti esistano finiti, per P tendente a P_0 *sopra una retta qualunque* uscente da P_0 (nella quale non sia $x = \text{cost.}$ o rispettivamente $y = \text{cost.}$), e siano indipendenti dalla retta medesima, purchè si aggiunga l'ipotesi che le funzioni $\alpha(x_0, y_0)$, $\beta(x_0, y_0)$ si conservino limitate in ogni dominio tutto interno ad I.

Questo risultato ha una certa analogia col bel teorema di RADEMACHER che una $f(P)$, le cui derivate parziali si conservin limitate in un dominio piano, è ivi *quasi* dappertutto differenziabile. Però per esser sicuri che la funzione sia *ovunque* differenziabile bisogna come vedesi passare dai rapporti incrementali parziali ordinari ai rapporti incrementali generalizzati [2].

---

[2] Alcune delle considerazioni svolte nella presente Memoria son legate (a prescinder dalla forma) ai concetti sviluppati da G. BOULIGAND in un suo interessante libro recente (*Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Paris, Vuibert, 1932), come indicherò con maggior precisione in seguito. Le nozioni di semitangenti e di corde improprie di un insieme di punti in un punto di accumulazione, che stanno a fondamento del mio lavoro, corrispondono a quelle di *contingente* e di *paratingente* di BOULIGAND. All'egregio geometra è evi-

Tangenti e corde improprie in un punto d'accumulazione d'un insieme.

1. Richiamo anzitutto le nozioni di *tangenti, semitangenti, corde improprie* di un insieme qualunque I di punti di un S_n (reale), in un punto d'accumulazione O, da me introdotte in precedenti lavori (3).

Una semiretta a di origine O dicesi *semitangente* in O ad I quando essa contiene infiniti punti di I, accumulati attorno ad O, oppure quando, scelto $\varepsilon > 0$ e determinato l'insieme K_ε delle semirette proiettanti da O i punti di I diversi da O, situati nell'intorno di raggio ε, la a è di accumulazione per K_ε qualunque sia ε. Le due alternative posson anche presentarsi insieme. Una *tangente* è una retta contenente una semitangente.

Una retta b per O dicesi una *corda impropria* di I quando essa contiene infiniti punti di I attorno ad O, oppure quando, scelto $\varepsilon > 0$, e considerato l'insieme H_ε delle rette che congiungon coppie di punti di I, diversi tra loro, situati nell'intorno di raggio ε, b è di accumulazione per H_ε, qualunque sia ε. Le due alternative posson presentarsi insieme.

Ho dimostrato che in O vi son sempre semitangenti e corde improprie. Una tangente è una corda impropria; ma non necessariamente viceversa.

---

dentemente sfuggito che le sue ricerche in proposito sono state iniziate un po' più tardi delle mie: il che ho già avuto occasione di porre in rilievo nella Nota di Cracovia, più sotto citata. (Anche la nozione di *distanza* di due insiemi di punti, esposta al n. 34 del libro di BOULIGAND, trovavasi già in varii lavori miei: « Rendiconti dei Lincei ». 1927, p. 476; 1929, p. 918; *Conferenze di geometria algebrica*, Roma, 1927-30, p. 122; *Conferenze sulla topologia* tenute a Buenos Aires, Imprenta de la Universidad, 1930, pag. 28). Ma non gli muovo rimprovero per questo, perchè neppur io riesco a seguire con cura minuziosa la bibliografia e leggo più volentieri una memoria o un libro dopo aver pensato per conto mio all'argomento.

(3) Ved. la mia più recente Nota in proposito: *Su alcune questioni di topologia infinitesimale* (« Annales de la Societé polonaise de Math. », t. IX, 1930). Ivi si troveranno anche i riferimenti alle ricerche di BOULIGAND. Il GUARESCHI nell'interessante lavoro: *Un concetto di derivazione delle funzioni di più variabili reali*, ecc. (« Memorie della R. Accademia d'Italia », 1934-XII, p. 173) ha dedotto dai concetti che sto per richiamare un'espressiva condizione geometrica per la differenziabilità totale di una funzione di più variabili in un punto. Il teorema del GUARESCHI è ritrovato come corollario alla fine del n. 5 di questa Memoria. Il teorema medesimo ha consentito all'A. di estendere la considerazione delle derivate parziali, in guisa da ottenere enti più generali (ch'egli chiama *derivate perfette*, ved. n. 16 della presente Memoria), i quali esistono e posson introdursi nel calcolo, anche quando non vi sono le derivate parziali ordinarie. Ved. altresì, a proposito del significato geometrico dell'esistenza del differenziale totale, il n. 72 del libro di BOULIGAND.

Inoltre, se l'insieme I è serrato [1]: ogni semitangente può definirsi come il limite per $n \to \infty$ della semiretta OP_n, ove P_n percorra una conveniente successione di punti di I convergente ad O; ogni corda impropria è il limite per $n \to \infty$ della retta $P_n Q_n$, ove i punti distinti P_n, Q_n percorran due convenienti successioni convergenti ad O (una delle quali può ridursi al punto fisso O, se la corda è tangente).

2. Converrà qui distinguere le corde dalle *semicorde improprie,* cioè dalle semirette in cui le corde son divise da O. Dimostriamo che:

Data una semicorda impropria, esiston sempre nell' insieme I due successioni P_n, Q_n convergenti ad O, tali che, per ogni n, P_n, Q_n son distinti; ciascuna delle due successioni ha in O una sola semitangente e la semiretta $P_n Q_n$ ha per limite la data semicorda.

Sia invero λ la data semicorda ed l la corda impropria che la contiene. Limitiamo le due successioni a quei punti, d'un intorno abbastanza ristretto di O, tali che le rette $A_n B_n$ (ove le successioni A_n, B_n convergono ad O in guisa che $\lim A_n B_n = l$), formino con l un angolo (acuto) minore d'un angolo prefissato δ. Nessuna delle rette $A_n B_n$ sarà allora parallela ad un dato iperpiano Ω passante per O, ma non per l; epperò si può su ognuna di esse determinare un verso che abbia per limite il verso di λ quando $A_n B_n$ tende ad l. Coi punti A_n, B_n posson in conseguenza formarsi due nuove successioni A_n', B_n' ponendo nella prima quello dei due punti A_n, B_n che precede l'altro nel verso fissato. In tal modo risulta $\lambda = \lim A_n' B_n'$.

Se la successione A_n' ha in O più di una semitangente, è possibile estrarre da essa una successione parziale A_n'', che abbia in O una sola semitangente λ_1. Chiamiamo B_n'' l'omologo di A_n'' nella successione B_n'. Se la successione B_n'' ha in O più di una semitangente, si potrà da essa estrarre una successione parziale Q_n, che abbia in O una sola semitangente λ_2. Diciamo P_n il punto omologo di Q_n nella successione A_n''. Allora le successioni P_n, Q_n soddisfanno al teorema enunciato.

3. Le semitangenti λ_1, λ_2 alle successioni P_n, Q_n del n. prec. posson benissimo essere allineate (cioè coincidenti od opposte). Perchè si possan costruire le successioni stesse in modo che λ_1, λ_2 non risultino allineate, basta che due

---

(1) Cioè contiene tutti i propri punti d'accumulazione. L'ipotesi che I sia serrato diventa superflua, ora e nel seguito, se si ammette che abbia senso l'operazione di formare una ben definita successione togliendo un punto da ciascun insieme di una successione d'insiemi di punti.

delle tangenti alle successioni iniziali A_n, B_n sieno distinte (il che accade sempre che una delle successioni abbia più di una tangente in O).

Può darsi però che, comunque si costruiscano le successioni P_n, Q_n soddisfacenti al teorema del n. 2, esse abbian di necessità in O la medesima tangente. Questo avviene di certo quando I ha in O una sola tangente.

A noi importa invece di considerare il caso in cui per ogni semicorda λ si posson determinare due successioni P_n, Q_n che abbiano in O tangenti distinte. Definiremo perciò quelli che chiameremo *punti di accumulazione regolare* (rispetto al concetto di semicorda impropria).

Il punto O si chiamerà di accumulazione regolare quando scelta comunque una semitangente x e una semicorda impropria λ di I in O, può determinarsi (almeno) una semitangente y non allineata con x, tale che λ sia ottenibile come *limite* della semiretta PQ per P, Q tendenti ad O sotto le condizioni $\lim OP = x$, $\lim OQ = y$.

Ogni punto O interno ad un dominio piano I è di accumulazione regolare; ed è altresì di accumulazione regolare ogni punto contorno del dominio piano racchiuso da una linea di JORDAN a punti tutti semplici (cfr. col. n. 18). Se invece la linea ha p. es. una cuspide, ivi cade un'accumulazione irregolare del dominio.

Differenziali e derivate direzionali.

4. Mi riferisco alle funzioni di due variabili reali x, y, giacchè facili si presentan le estensioni alle funzioni di n variabili.

Per snellire l'esposizione ulteriore occorre il seguente elementarissimo lemma: « Se

$$z - z_0 = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0), \tag{1}$$

ossia $z = \varphi(M)$, ove M è un punto mobile sul piano xy è l'equazione di un piano non parallelo a z (x, y, z assi cartesiani anche obliqui) e P, Q son due punti del piano xy variabili in un insieme serrato I, che abbia un'accumulazione in P_0, risulta

$$\lim \frac{\varphi(P) - \varphi(Q)}{QP} = \alpha \frac{\sin \lambda y}{\sin xy} + \beta \frac{\sin x\lambda}{\sin xy}, \tag{2}$$

ogni volta che P, Q tendano a P_0 in modo che la semiretta QP tenda ad una semicorda impropria λ di I in P_0 ».

S'intende che QP denota il valore assoluto della distanza dei due punti, sicchè la retta QP va orientata positivamente da Q verso P.

Si ha infatti dalla (1):

$$\frac{\varphi(P)-\varphi(Q)}{QP}=\alpha\frac{\Delta x}{QP}+\beta\frac{\Delta y}{QP},$$

ove Δx, Δy son le componenti del vettore QP; e siccome, denotata con r la semiretta QP sussistono (in valore e segno rispetto ai versi delle rette considerate e al verso positivo delle rotazioni su xy), le:

$$\frac{\Delta x}{QP}=\frac{\sin ry}{\sin xy},\quad \frac{\Delta y}{QP}=\frac{\sin xr}{\sin xy},$$

passando al limite per P, $Q \to P_0$ si ottiene la (2).

In particolare, la conclusione vale quando Q è fisso e coincidente con P_0, sicchè λ è semitangente ad I in P_0.

5. La *differenziabilità* (si sottintende *totale*) di una funzione reale $f(x, y)$ o $f(P)$, si può intendere da due punti di vista: uno *ristretto* ed uno *lato*.

La $f(P)$ sia data, finita, in un insieme serrato I avente un'accumulazione in P_0 e sia continua in P_0. Dal punto di vista ristretto si può considerare come *differenziale totale* di $f(P)$ in P_0 un'espressione $\alpha\Delta x+\beta\Delta y$ ($\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y \quad y_0$) con α, β costanti, tale che:

$$\text{(3)}\qquad \lim\frac{1}{P_0P}[f(P)-f(P_0)-\alpha\Delta x-\beta\Delta y]=0,$$

quando $P\to P_0$ in modo che lim P_0P sia una semitangente determinata, ma qualunque di I in P_0.

Dal punto di vista lato, che è quello di STOLZ, $\alpha\Delta x+\beta\Delta y$ è un differenziale totale di $f(P)$ in P_0, quando la (3) vale comunque P tenda a P_0.

Orbene, sussiste il teorema:

Se $f(P)$ è differenziabile in P_0 in senso ristretto, lo è pure nel senso di STOLZ.

Supponiamo che la (3) valga in senso ristretto e indichiamo con $\overline{P}(x, y, z)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i punti del diagramma F, di equazione $z=f(P)$, corrispondenti ai punti $P(x, y)$, $P_0(x_0, y_0)$ di I.

Se $P\to P_0$ in I in modo che $\lim P_0P=\lambda$, la (3) porge senz'altro (n. 4):

$$\lim\frac{f(P)-f(P_0)}{P_0P}=\lim\frac{\varphi(P)-\varphi(P_0)}{P_0P}.$$

Pertanto la semiretta $\overline{P}_0\overline{P}$ ha un limite determinato λ, che giace in (1); cioè le tangenti in P_0 al diagramma F giaccion tutte in un piano, che perciò si dirà il *piano tangente* in P_0 ad F.

Proviamo che l'angolo della semiretta $P_0\bar{P}$ col piano (1) ha sempre per limite zero, comunque P tenda a P_0 e ciò anche se la semiretta P_0P e quindi la P_0P non hanno limite. Questa può, grosso modo, ritenersi conseguenza ovvia dal fatto che il piano (1) contiene tutte le semirette di accumulazione comuni agl'insiemi descritti da P_0P, per $P \to P_0$.

Volendo precisare si ragionerà così. Se, scelto arbitrariamente piccolo un angolo δ, può sempre determinarsi un $\varepsilon > 0$, tale che nel campo Γ_δ limitato dal cono rotondo (a due falde) di apertura $\frac{\pi}{2} - \delta$, avente per asse la perpendicolare in $\bar{P}_0$ al piano (1), cada un numero *finito* > 0 di semirette proiettanti da P_0 punti di F, distinti da $\bar{P}_0$, situati nell'intorno di raggio ε di $\bar{P}_0$, impiccolendo ancora ε, si otterrà che nessuna di quelle semirette cada in Γ_δ e pertanto il limite dell'angolo che $\bar{P}_0P$ forma con (1) sarà zero. Se dunque questo limite non esiste o non è zero, per δ abbastanza piccolo non c'è alcun ε soddisfacente alla predetta condizione.

Vuol dire che, per δ abbastanza piccolo, l'insieme K_ε delle semirette proiettanti da P_0 punti di F, distinti da $\bar{P}_0$, situati in Γ_δ e nell'intorno di raggio ε, contiene, qualunque sia ε, infinite semirette. Esiste perciò ([5]) qualche semiretta di Γ_δ, che è di accumulazione per K_ε, qualunque sia ε. Una tal semiretta è semitangente ad F in P_0 e non giace sul piano (1), contrariamente alla precedente conclusione. È dunque assurdo ammettere che l'angolo formato da $\bar{P}_0\bar{P}$ con (1) non abbia per limite zero.

Ciò premesso, indichiamo con P' la proiezione di P (e di $\bar{P}$) sul piano (1), secondo z. Sussistono allora in valore e segno (comunque scelgasi il verso positivo sul piano $PP_0\bar{P}\bar{P}_0P'$), le relazioni:

$$\frac{f(P) - f(P_0)}{P_0P} = \frac{\sin \bar{r} r}{\sin z \bar{r}}, \quad \frac{\varphi(P) - \varphi(P_0)}{P_0P} = \frac{\sin r' r}{\sin z r'}, \tag{4}$$

ove r, $\bar{r}$, r' denotan le semirette P_0P, $\bar{P}_0\bar{P}$, $\bar{P}_0P'$. Dunque:

$$H(P) = \frac{1}{P_0P}[f(P) - f(P_0) - \alpha\Delta x - \beta\Delta y] = \frac{\sin \bar{r} r \sin zr' - \sin z\bar{r} \sin r'r}{\sin z\bar{r} \sin zr'},$$

da cui, mercè il legame fra i seni di quattro direzioni orientate di un piano, si trae:

$$H(P) = \frac{\sin \bar{r} r' \sin zr}{\sin z\bar{r} \sin zr'}.$$

([5]) Ved. la mia Nota di Cracovia, n. 4.

Si determini ora un cono Γ_δ, come quello sopra definito, che contenga nel suo interno la parallela per P_0 all'asse z; e sia θ il minimo angolo formato da z colle generatrici di questo cono ($\theta > 0$), ψ l'angolo > 0, che z forma con (1). Siccome l'angolo di r con (1) tende a zero, per ogni P di un intorno abbastanza ristretto di P_0 varranno le disuguaglianze:

$$|\sin z\bar{r}| \geq \sin\theta, \quad |\sin zr'| \geq \sin\psi,$$

e quindi:

$$|H(P)| \leq \frac{|\sin \bar{r}\,r' \sin zr|}{\sin\theta \sin\psi}.$$

Tendendo comunque P a P_0 l'angolo acuto $\bar{r}r'$ tende a zero e $\sin zr$ si conserva limitato. Perciò $\lim H(P) = 0$ e $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ è differenziale in senso lato.

La conclusione è che differenziabilità in senso stretto ed in senso lato si equivalgono; onde si può parlare semplicemente di differenziabilità.

OSSERVAZIONE. — Se le tangenti al diagramma F in $\overline{P}_0$ giacciono in un piano (1) non parallelo all'asse z, sarà $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ differenziale di f in senso stretto epperò in senso lato.

Viceversa, se $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ è differenziale di f in P_0, è evidente che le tangenti di F in $\overline{P}_0$ giacciono in (1). Onde *$f(P)$ è differenziabile in P_0 allora e solo allora che esista qualche piano non parallelo a z, che contenga le tangenti in P_0 al diagramma F;* e questo è appunto il risultato del GUARESCHI. Il differenziale è unico se in $\overline{P}_0$ c'è un sol piano tangente a F (non parallelo all'asse z); vi è invece in P_0 un *fascio lineare di differenziali*, se F ammette in P_0 una sola tangente.

6. Può darsi che l'espressione:

$$H(P, Q) = \frac{1}{QP}[f(P) - f(Q) - \alpha\Delta x - \beta\Delta y], \tag{5}$$

ove P, Q sieno due punti variabili in I e Δx, Δy rappresentino le componenti del vettore QP, tenda a zero, *comunque* P, Q tendano a P_0. Si dirà allora che $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ è un *iperdifferenziale* di $f(P)$ in P_0.

P. es. quando I è un dominio piano e $f(P)$ ammette in ogni punto P_0, interno ad I, derivate parziali *continue* f_x', f_y', si riconosce ovviamente che il differenziale totale di f in P_0 è iperdifferenziale. Vedremo nel n. 19 che vale pure la proprietà reciproca.

OSSERVAZIONE. — È evidente che *se $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ è un differenziale o un iperdifferenziale di $f(P)$ in P_0, la $f(P)$ è differenziabile o iperdifferenziabile* *rispetto a due altri assi cartesiani qualunque x', y'.* Basta per passare dall'uno all'altro differenziale esprimere Δx, Δy per $\Delta x'$, $\Delta y'$.

7. Passiamo a introdurre il concetto *intrinseco* di derivazione per la funzione $f(P)$, finita nell'insieme serrato I, avente in P_0 un'accumulazione e continua in P_0.

Denotino P, Q due punti variabili in I. Consideriamo i rapporti incrementali

$$\frac{f(P)-f(P_0)}{P_0P}, \tag{6}$$

$$\frac{f(P)-f(Q)}{QP}, \tag{7}$$

in cui i denominatori si assumon sempre positivi (sicchè le rette P_0P, QP son rispettivamente orientate da P_0 a P e da Q a P). Se $P\to P_0$ in modo che $\lim P_0P=\lambda$, ovvero P, Q tendono a P_0 in modo che $\lim QP=\lambda$; si potranno cercare, se esistono finiti, i limiti dei predetti rapporti.

Quando esiste finito il limite del rapporto (6), questo limite si chiamerà la *derivata direzionale di f secondo la semitangente λ in P_0 all'insieme I* e si designerà con $f'_\lambda(P_0)$. S'intende naturalmente che questo limite dipenda soltanto da λ e non dal modo come P tende a P_0, sotto la condizione $\lim P_0P=\lambda$.

Quando esiste finito il limite del rapporto (7), ed è indipendente dal modo come P, Q tendono a P_0, sotto la condizione $\lim QP=\lambda$, si dirà che il limite stesso è la *iperderivata direzionale di f secondo la semicorda impropria λ in P_0 all'insieme I* e si designerà con $f^*_\lambda(P_0)$. In particolare, quando λ sia semitangente, esistendo $f^*_\lambda(P_0)$ esisterà anche $f'_\lambda(P_0)$ (ma non viceversa) e sarà $f'_\lambda(P_0)=f^*_\lambda(P_0)$.

Se, sempre nell'ipotesi che λ sia una semicorda impropria, esiste finito il limite del rapporto (7), allorchè P, Q tendono a P_0 comunque, compatibilmente colle condizioni che la semiretta QP tenda a λ e le semirette P_0P, P_0Q tendano a limiti determinati e *distinti*, ma qualsiansi, quel limite si dirà la *ultraderivata direzionale di f secondo la semicorda impropria λ in P_0 all'insieme I* e s'indicherà con $f_\lambda(P_0)$.

In particolare, quando λ sia una semitangente s'intende che la successione descritta da Q possa esser sostituita dal punto fisso P_0, nel qual caso $\lim QP=\lim P_0P$ coincide con λ e $\lim P_0Q$ è una semiretta qualunque distinta da λ.

È chiaro che, se in P_0 l'insieme I presenta un'accumulazione regolare e se esiste $f^*_\lambda(P_0)$, esiste $f_\lambda(P_0)$ ed è $f_\lambda(P_0)=f^*_\lambda(P_0)$. Quando λ sia una semitangente ed esiste $f_\lambda(P_0)$, esiste anche $f'_\lambda(P_0)$ ed è $f'_\lambda(P_0)=f_\lambda(P_0)$.

Cangiando λ nell'opposta λ, se esiste $f_\lambda^*(P_0)$ od $f_\lambda(P_0)$ esiste pure $f_{-\lambda}^*(P_0)$ ed $f_{-\lambda}(P_0)$, e risulta:

$$f_\lambda^*(P_0) = -f_{-\lambda}^*(P_0), \quad f_\lambda(P_0) = \quad f_{-\lambda}(P_0).$$

Se I è un dominio piano e P_0 un punto ad esso interno, le ordinarie derivate parziali coincidono colle derivate direzionali secondo le direzioni *positive* x; y, mentre le derivate direzionali secondo $-x$, $-y$ hanno segni contrarî.

Si costruiscono facilmente *esempi di funzioni che posseggono derivate direzionali in tutte le direzioni uscenti da un punto, ma non ultraderivate; ed esempi di funzioni che posseggono ultraderivate (e quindi derivate) in tutte le direzioni, ma non iperderivate.*

P. es. la funzione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (ove il radicale è positivo) nel punto $x = y = 0$ è derivabile in tutte le direzioni, mentre non è parzialmente derivabile (perchè sull'asse x dà luogo ad una funzione che ha in $x = 0$ la derivata destra uguale ad 1 e la sinistra uguale a -1; e analogamente su y) e non esiste alcuna direzione in cui sia ultraderivabile (nè, quindi, iperderivabile); una funzione $z = f(x, y)$, differenziabile in ogni punto interno P_0 di un dominio piano, ma colle derivate parziali non ambedue continue in P_0, è ultraderivabile in tutte le direzioni (n. 8), ma non iperderivabile (n. 19); una funzione $z = f(x, y)$ colle derivate parziali continue in ogni punto interno P_0 di un dominio piano, è iperderivabile in tutte le direzioni.

Condizione per la differenziabilità.

8. Vale in proposito il teorema seguente:

Sia $f(P)$ una funzione finita di un punto P variabile in un insieme piano serrato I, avente in P_0 un' accumulazione regolare. La $f(P)$ sia continua in P_0. Allora condizione necessaria e sufficiente perchè $f(P)$ sia differenziabile in P_0 è che esistano ivi le ultraderivate secondo le semitangenti dell' insieme I in P_0. In tal caso il differenziale di $f(P)$ in P_0 è individuato.

Assumansi come semiassi cartesiani positivi x, y due semitangenti non allineate di I in P_0. Se $f(P)$ è differenziabile rispetto a due assi distinti da x, y, lo è pure (n. 6, Oss.) rispetto ad x, y. Sia $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ un differenziale di $f(P)$ in P_0. Dalla relazione (n. 5) $\lim H(P) = 0$, supposto $\lim P_0P = \lambda$, si ricava ovviamente, qualunque siano i versi delle componenti di λ sugli assi x, y:

$$\lim \frac{f(P) - f(P_0)}{P_0P} = \alpha \frac{\sin \lambda y}{\sin xy} + \beta \frac{\sin x\lambda}{\sin xy}. \tag{8}$$

Ciò premesso, dicasi μ una semicorda impropria di I in P_0. Essendo P_0 regolare, si può supporre che P, Q variino in I in modo che $\lim P_0P$, $\lim P_0Q$ sieno due semitangenti non allineate λ_1, λ_2 in P_0 (di cui una arbitraria) e $\lim QP = \mu$. Dalla relazione

$$(9) \qquad \frac{f(P)-f(Q)}{QP} = \frac{f(P)-f(P_0)}{P_0P}\,\frac{P_0P}{QP} + \frac{f(Q)-f(P_0)}{P_0Q}\,\frac{QP_0}{QP}$$

(nella quale, si ricordi, QP, P_0P, P_0Q son positivi, così che QP_0 è negativo), tenendo conto sia delle relazioni derivanti dalla (8) per $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$, sia delle

$$\lim \frac{P_0P}{QP} = \frac{\sin \mu\lambda_2}{\sin \lambda_1\lambda_2}, \quad \lim \frac{QP_0}{QP} = \frac{\sin \lambda_1\mu}{\sin \lambda_1\lambda_2},$$

e infine dal legame fra i seni di quattro direzioni orientate di un piano, si deduce che:

$$(10) \qquad \lim \frac{f(P)-f(Q)}{QP} = \alpha \frac{\sin \mu y}{\sin xy} + \beta \frac{\sin x\mu}{\sin xy}.$$

Dunque il primo membro della (10) è indipendente dalla coppia λ_1, λ_2 e coincide col primo membro della (8) quando $\mu = \lambda$ è una semitangente di I in P_0 e all'insieme dei Q è sostituito il punto fisso P_0. Epperò, secondo la definizione del n. 7, esiste $f_\mu(P_0)$. In particolare per $\mu = x, y$ si ha:

$$(11) \qquad f_x(P_0) = \alpha, \quad f_y(P_0) = \beta;$$

e pertanto $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ è individuato. Di più cangiando μ in $-\mu$ viene $f_{-\mu}(P_0) = -f_\mu(P_0)$.

Viceversa, suppongasi la $f(P)$ ultraderivabile secondo ogni semitangente μ di I in P_0. Per la regolarità di P_0, μ può ottenersi come limite d'una semiretta QP (Q, P variabili in I) per Q, P tendenti a P_0 in modo che $\lim P_0P = x$, $\lim P_0Q = y$, ove x, y son due convenienti semitangenti (non allineate) di I in P_0 (di cui una arbitraria). Dalla (9) in virtù delle

$$\lim \frac{P_0P}{QP} = \frac{\sin \mu y}{\sin xy}, \quad \lim \frac{QP_0}{QP} = \frac{\sin x\mu}{\sin xy}$$

e dal fatto che i rapporti $\dfrac{f(P)-f(P_0)}{P_0P}$, $\dfrac{f(Q)-f(P_0)}{P_0Q}$ hanno i limiti (11), si deduce la (10). E poichè il valore $f_\mu(P_0)$ del primo membro della (10), uguaglia (n. 7) $f'_\mu(P_0)$, si conclude che tutte le semitangenti ad F in P_0 giaccion sul piano (1). Dunque $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ è differenziale di f in P_0.

9. *Se I possiede in P_0 una sola semitangente λ, condizione necessaria e sufficiente per la differenziabilità di $f(P)$ in P_0, è che esiste la derivata $f'_\lambda(P_0)$; se I possiede in P_0 due semitangenti opposte λ, $-\lambda$, condizione necessaria e sufficiente per la differenziabilità, è che esistano $f'_\lambda(P_0)$, $f'_{-\lambda}(P_0)$ ed abbian valori opposti. In questi casi si ha in P_0 un fascio lineare di differenziali.*

Questo teorema è conseguenza ovvia dell'equivalenza del fatto analitico che esistano ∞^1 differenziali in P_0 e del fatto geometrico che F possegga in $\bar{P}_0$ una sola tangente (n. 5, Oss.). Quando esistano $f'_\lambda(P_0)$, $f'_{-\lambda}(P_0)$ ed abbian valori *non* opposti, il diagramma F possiede in P_0 un sol piano tangente, ma questo è parallelo all'asse z.

10. In particolare, se I è un dominio piano contornato da una linea di JORDAN chiusa, le rette del piano uscenti da un punto interno o da un punto contorno semplice per la linea (cfr. col n. 18) sono tutte tangenti al dominio nel punto stesso, che è un punto d'accumulazione regolare. Dunque *una funzione $f(x, y)$ finita sopra una cella piana contornata da una linea di Jordan con tutti i punti semplici, è differenziabile in tutta la cella, contorno incluso, allora e solo allora che sia ultraderivabile dovunque e in ogni direzione.*

Se il contorno ha una cuspide, perchè f sia differenziabile anche nella cuspide occorre e basta che esista l'ultraderivata di f secondo la tangente alla cuspide. Però ivi si hanno ∞^1 differenziali.

Ogni retta uscente dalla cuspide è in questo caso corda impropria del dominio.

Condizione per l'iperdifferenziabilità.

11. Dimostriamo ora il teorema seguente:

Sia $f(P)$ una funzione finita di un punto P mobile in un insieme piano serrato I, avente in P_0 un'accumulazione. La $f(P)$ sia continua in P_0. Allora condizione necessaria e sufficiente perchè $f(P)$ sia iperdifferenziabile in P_0, è che le corde improprie del diagramma $F[z = f(P)]$ nel punto $\bar{P}_0$ corrispondente a P_0, giacciano tutte in (almeno) un piano non parallelo all'asse z.

Sia anzitutto $\lim H(P, Q) = 0$, comunque P, Q tendano a P_0 (n. 6). Denotati con $\bar{P}$, $\bar{Q}$ i punti di F corrispondenti a P, Q; con P', Q' le proiezioni secondo z dei punti P, Q (e $\bar{P}$, $\bar{Q}$) sul piano (1); e infine con r, $\bar{r}$, r' le semirette QP, $\bar{Q}\bar{P}$, $Q'P'$, si ottiene (come nel n. 5) la relazione:

$$H(P, Q) = \frac{\sin \bar{r} r' \sin zr}{\sin z\bar{r} \sin zr'},$$

da cui segue:

$$|H(P, Q)| \geq |\sin \overline{r}r' \sin zr|.$$

Onde, chiamato τ l'angolo di z col piano xy:

$$|H(P, Q)| \geq |\sin \overline{r}r'| \sin \tau,$$

dalla quale si deduce che $\lim \overline{r}r' = 0$; epperò le corde improprie di F giaccion tutte nel piano (1).

Viceversa, se il piano (1) contiene tutte le corde improprie di F in $\overline{P}_0$, l'angolo di $\overline{r}$ con (1) tende a zero comunque P, Q tendano a P_0. La cosa è pressochè evidente; ma, se si vuol precisarla, basterà ripetere qui un ragionamento perfettamente analogo a quello svolto, in condizioni simili, per le semitangenti, nel n. 5. Si posson pertanto definire gli angoli θ, ψ, analogamente a quanto fu fatto nel n. 5; e si ottiene così:

$$|H(P, Q)| \leq \frac{|\sin \overline{r}r' \sin zr|}{\sin \theta \sin \psi}.$$

Ora $\sin \overline{r}r'$ tende a zero e $\sin zr$ si conserva limitato; dunque $\lim H(P, Q) = 0$, comunque P, Q tendano a P_0 ed $f(P)$ è perciò iperdifferenziabile in P_0.

OSSERVAZIONE. — L'iperdifferenziale di f in P_0 sarà *individuato* se in $\overline{P}_0$ il diagramma F possiede almeno due corde improprie non allineate e non situate in un piano parallelo a z; *potrà variare in un fascio*, se in P_0 vi è una sola corda impropria.

12. *Se P_0 è un punto d'accumulazione regolare per I, condizione necessaria e sufficiente per l'iperdifferenziabilità di $f(P)$ in P_0 è che la funzione sia iperderivabile secondo ogni semicorda impropria di I in P_0. In tal caso l'iperdifferenziale è individuato.*

Sia $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ un iperdifferenziale di F in P_0. Allora (n. 11) tutte le corde improprie di F in $\overline{P}_0$ giaccion sul piano (1). E siccome fra queste corde, attesa la regolarità di P_0, vi son due tangenti distinte, così intanto si conclude che $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ è individuato.

Ciò posto, designamo con λ una semicorda impropria di I in P_0 e con P, Q due punti di I, che tendan comunque a P_0, sotto la sola condizione $\lim QP = \lambda$. Indichiamo inoltre con H_ε l'insieme delle semirette QP, i cui Q, P giacciono in un intorno di raggio ε di P_0 e con $\overline{H}_\varepsilon$ l'insieme delle corrispondenti semirette $\overline{Q}\overline{P}$. Ogni semiretta $\overline{\lambda}$, che sia di accumulazione per $\overline{H}_\varepsilon$ per ε qualunque, ha per proiezione λ, perchè questa è l'unica retta di accumulazione comune agli H_ε. E siccome λ, in quanto semicorda impropria di F, giace sul piano (1), ne segue che $\bar{\lambda}$ è individuata come intersezione del piano (1) col piano parallelo a z condotto per λ. Ciò significa che il rapporto incrementale (7) tende verso un limite determinato e finito espresso da (n. 4):

$$f_\lambda^*(P_0) = \alpha \frac{\sin \lambda y}{\sin xy} + \beta \frac{\sin x\lambda}{\sin xy}. \tag{12}$$

Proviamo che la condizione enunciata è sufficiente. Bisogna dimostrare che ogni corda impropria di F in $\bar{P}_0$ sta sul piano (1), perchè ciò equivale appunto (n. 11) ad affermare che $f(P)$ è iperdifferenziabile in P_0.

Sia λ una qualsiasi semicorda impropria di I in P_0. Attesa la regolarità di P_0, λ si può ottenere come limite di una semiretta QP (Q, P variabili in I) per Q, P tendenti a P_0 in modo che $\lim P_0P = x$, $\lim P_0Q = y$, ove x, y son due semitangenti convenienti non allineate (di cui una arbitraria). Per ipotesi esistono $f_x^*(P_0) = \alpha$, $f_y^*(P_0) = \beta$. Dalla relazione (9), tenuto conto che

$$\lim \frac{P_0P}{QP} = \frac{\sin \lambda y}{\sin xy}, \quad \lim \frac{QP_0}{QP} = \frac{\sin x\lambda}{\sin xy}$$

e che:

$$\lim \frac{f(P) - f(P_0)}{P_0P} = \alpha, \quad \lim \frac{f(Q) - f(P_0)}{P_0Q} = \beta,$$

si ricava:

$$\lim \frac{f(P) - f(Q)}{QP} = \alpha \frac{\sin \lambda y}{\sin xy} + \beta \frac{\sin x\lambda}{\sin xy}.$$

Ma siccome, esistendo la iperderivata $f_\lambda^*(P_0)$, il limite del rapporto $\dfrac{f(P) - f(Q)}{QP}$ resta lo stesso comunque P, Q tendano a P_0, purchè $\lim QP = \lambda$, la precedente relazione riducesi alla (12), la quale esprime che ad ogni semicorda impropria λ di I in P_0 corrisponde *una* semicorda impropria di F in $\bar{P}_0$, avente per proiezione λ e situata sul piano (1). Poichè, viceversa, ogni semicorda impropria di F in $\bar{P}_0$ si proietta in *una* semicorda di I in P_0, si conclude che tutte le corde improprie di F in P_0 giaccion sul piano (1); c. d. d.

13. *Se I ammette in P_0 una sola corda impropria, condizione necessaria e sufficiente per la iperdifferenziabilità di $f(P)$ in P_0 è che $f(P)$ sia iperderivabile secondo una (e quindi secondo l'altra) delle due semicorde in cui P_0 divide quella corda. In tal caso vi è in P_0 un fascio di iperdifferenziali.*

Infatti, quando I ha in P_0 una sola corda impropria b, il diagramma F non può avere che una sola corda impropria in P_0 o più corde improprie situate sul piano parallelo a z condotto per b. Se $f(P)$ è iperdifferenziabile in P_0 quest'ultima eventualità va esclusa (n. 11). Ma allora ogni piano (1) passante per l'unica corda impropria di F in P_0 (e non parallelo all'asse z) dà luogo ad un iperdifferenziale (n. 11).

14. Un esempio di una $f(P)$ possedente in P_0 un fascio di iperdifferenziali è dato dalla $z = f(P)$ di un punto $\bar{P}$ mobile su una linea di JORDAN F, che si proietti biunivocamente sulla linea I del piano xy e che abbia nel punto $\bar{P}_0$ un punto semplice. Invero, in $\bar{P}_0$ il diagramma F possiede una sola corda impropria: la tangente.

Ma una $f(P)$ può anche possedere in P_0 un fascio di differenziali e un solo iperdifferenziale.

Un esempio elegante è fornito dalla $z = f(P)$ di un punto $\bar{P}$ mobile sopra un diagramma F costituito da due linee di JORDAN l, m tracciate sopra una superficie di JORDAN Φ, nelle ipotesi che le l, m si proiettin biunivocamente sul piano xy; che l, m passino semplicemente per $\bar{P}_0$, toccandosi ivi; che Φ abbia in $\bar{P}_0$ un punto semplice col piano tangente π non parallelo a z.

In questo caso le corde improprie al diagramma F in P_0 riempiono il fascio $\bar{P}_0$ sopra π. A π corrisponde il solo iperdifferenziale che $f(P)$ ha in P_0. Agli altri piani passanti per la tangente comune corrispondono altrettanti differenziali.

La stessa conclusione vale se l, m son rami analitici lineari di origine $\bar{P}_0$. Allora il piano delle corde improprie di F in $\bar{P}_0$ è il cosidetto *piano principale* di HALPHEN, luogo dei punti da cui i rami l, m si proiettano sopra un piano secondo due rami aventi un contatto più intimo di quello che hanno le proiezioni da un punto generico.

Se il piano π (tangente a Φ o piano principale dei due rami) è parallelo a z, ma la tangente comune non lo è, si ha l'esempio di *una $f(P)$ che possiede in P_0 un fascio di differenziali e nessun iperdifferenziale.*

La regola generale di derivazione delle funzioni composte.

15. Le considerazioni precedenti permettono di decidere quand'è che ad una $f(P)$ può applicarsi la regola di derivazione delle funzioni composte, intesa *nella più generale accezione.* Si dirà che tale regola è applicabile, quando, fissata una qualunque semitangente λ di I in P_0 e considerato un sottoinsieme K di I avente in P_0 la sola semitangente λ, sussiste la relazione:

$$g_\lambda'(P_0) = \alpha x_\lambda'(P_0) + \beta y_\lambda'(P_0),$$

ove $g(P)$ è la funzione $f(P)$ per P variabile in K; α, β son due coefficienti numerici, indipendenti dal sottoinsieme K considerato, e $x_\lambda'(P_0)$, $y_\lambda'(P_0)$, derivate direzionali secondo λ delle coordinate x, y del punto P mobile in K, dipendono solo da λ.

È facile riconoscere che *la regola suddetta è applicabile allora e solo allora che $f(P)$ ammetta in P_0 almeno un differenziale.*

Invero, se $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ è un differenziale di $f(P)$ in P_0, sarà:

$$g_\lambda'(P_0) = f_\lambda'(P_0) = \alpha \frac{\sin \lambda y}{\sin xy} + \beta \frac{\sin x\lambda}{\sin xy}, \tag{13}$$

e d'altronde è chiaro che

$$x_\lambda'(P_0) = \frac{\sin \lambda y}{\sin xy}, \quad y_\lambda'(P_0) = \frac{\sin x\lambda}{\sin xy}.$$

Viceversa, se la (13) vale comunque sieno scelti λ e il sottoinsieme K, le tangenti a F in $\bar{P}_0$ giaccion sul piano (1), onde (n. 5) $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ è un differenziale di $f(P)$ in P_0.

Quando K sia un arco rettificabile di origine P_0, avente ivi la semitangente λ, risulta in particolare

$$x_\lambda'(P_0) = \frac{dx}{ds}, \quad y_\lambda'(P_0) = \frac{dy}{ds},$$

ove s sia la lunghezza dell'arco P_0P da P_0 verso P.

16. Se gli assi positivi x, y, cui riferiscesi il differenziale $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$, son due semicorde (in particolare semitangenti) di I in P_0, e P_0 è regolare, i coefficienti α, β, che compaiono nella regola di derivazione delle funzioni composte, son le ultraderivate direzionali di f secondo x, y; altrimenti i numeri stessi non hanno significato intrinseco rispetto ad $f(P)$.

Ma, come il differenziale di $f(P)$ in P_0 si può scrivere, ove esista, rispetto a due assi cartesiani qualunque (n. 6, Oss.), così la regola di derivazione delle funzioni composte può riferirsi a due assi qualunque. Se x, y son due semitangenti non allineate di $f(P)$ in P_0, risulta (tanto se P_0 è regolare, quanto se non lo è):

$$\alpha = f_x'(P_0), \quad \beta = f_y'(P_0).$$

Presi due assi cartesiani qualunque x', y', oltre alla (13), vale la:

$$g_\lambda'(P_0) = f_\lambda'(P_0) = \alpha' \frac{\sin \lambda y'}{\sin x'y'} + \beta' \frac{\sin x'\lambda}{\sin x'y'},$$

ove

$$\alpha' = \alpha \frac{\sin x'y}{\sin xy} + \beta \frac{\sin xx'}{\sin xy}, \quad \beta' = \alpha \frac{\sin y'y}{\sin xy} + \beta \frac{\sin xy'}{\sin xy},$$

le quali definiscono i coefficienti α', β' con cui si compone il differenziale totale di $f(P)$ in P_0, rispetto agli assi x', y', allorchè esso è intrinsecamente individuato dalle due derivate direzionali $f_{x'}'(P_0)$, $f_{y'}'(P_0)$.

I numeri α', β' non posson però generalmente concepirsi come limiti di rapporti incrementali. Tuttavia, da un punto di vista puramente formale, α', β' son da considerarsi come derivate di f in P_0, rispetto ad x', y', in quanto definiscono il differenziale $\alpha'\Delta x' + \beta'\Delta y'$. Sono le *derivate perfette* del GUARESCHI.

Se $f(P)$ ha in P_0 un fascio di differenziali, ogni coppia α, β di numeri soddisfacenti alla (13) può esser assunta come coppia di derivate perfette di f rispetto a due assi qualunque x, y; ma in realtà in questo caso la regola di derivazione delle funzioni composte dice ben poco, perchè l'insieme I e un qualunque suo sottoinsieme K hanno in P_0 la medesima tangente.

Continuità delle iperderivate quando esistono in un dominio piano.

17. Cominciamo dal caso delle funzioni di una variabile.

Per una funzione $f(P)$ di un punto P variabile in un insieme rettilineo I, si posson definire, in un punto P_0 d'accumulazione di I, le derivate e le iperderivate direzionali (ma non le ultraderivate).

Se l'insieme I è addirittura un intervallo, si riconosce immediatamente che l'iperderivata esiste in ogni punto di I quando ivi esista la derivata ordinaria e sia continua.

Molto più interessante è la proposizione reciproca, che pure è vera. Vale cioè il teorema:

Se una funzione $f(P)$ di un punto P variabile in un intervallo rettilineo I, è iperderivabile in ogni punto dell'intervallo, la derivata $f'(P)$ è dovunque continua. (La reciproca è ovvia).

Dimostreremo questo teorema nel n. successivo, riducendolo ad un'espressiva proprietà geometrica, che gli equivale.

18. Conviene che ricordiamo prima la definizione di *punto semplice* P di una varietà topologica M_k appartenente ad uno spazio S_n, data nella mia Nota di Cracovia.

Il punto P (che può esser interno o situato sul contorno di M_k) dicesi semplice, quando le corde improprie di M_k per P giacciono in uno spazio lineare S_k [6]. Tale definizione equivale a quest'altra: Il punto P è semplice, quando un S_{n-k} prossimo a P sega M_k nell'intorno di P al più in un punto (esattamente in un punto se P è interno ad M_k). Fanno eccezione soltanto gli S_{n-k} abbastanza prossimi a spazi S_{n-k} appartenenti ad *un* certo S_k passante per P, che si chiama lo S_k *tangente* ad M_k in P.

Ebbene, vale il teorema:

Se una linea di Jordan ha tutti i punti semplici, la tangente in un punto su essa mobile varia con continuità [7].

Basta dimostrare il teorema per le linee piane (cfr. col successivo n. 28).

Scelta sul piano una direzione y non parallela alla retta tangente alla linea data F in suo punto $\overline{P}_0$, se P_0 è interno ad F le rette abbastanza prossime a $\overline{P}_0$, parallele ad y, segan la linea attorno a $\overline{P}_0$ in un sol punto. Onde F può esser rappresentata intorno a $\overline{P}_0$ da un'equazione del tipo $y = f(P)$, ove P varii in un intorno del punto P_0 proiezione di $\overline{P}_0$ sopra un asse x.

La conclusione analoga vale se P_0 è un estremo di F, purchè si assuma come asse y una retta non tangente ad F in P_0 e si considerino le parallele ad y situate da quella parte di y cui appartiene un intorno abbastanza ristretto di P_0 su F. Allora $y = f(P)$ sarà definita soltanto da una parte di P_0.

Dall'ipotesi che F abbia in $\overline{P}_0$ una sola corda impropria (coincidente colla tangente), segue che in P_0 la $f(P)$ ammette l'iperderivata direzionale (nelle due direzioni uscenti da P_0, se il punto è interno all'intervallo I dove risulta definita $f(P)$, in una sola direzione, se P_0 è un estremo di I). In ogni punto interno di F vi son dunque due semitangenti opposte.

Viceversa, se $f(P)$ è iperderivabile in ogni punto dell'intervallo I, il dia-

---

(6) Nella mia Nota, *Le curve intuitive* (« Rendiconti di Palermo », 1930) un punto semplice P di una linea piana è definito dalla condizione che vi sia in esso una sola tangente sulla quale si possa proiettare ortogonalmente un intorno di P sulla linea. Questa definizione è più generale di quella del testo: ossia un punto P può esser semplice nel senso attuale e non esserlo nel senso della Nota di Cracovia. Però allora la tangente in quel punto ha ivi una discontinuità. Un esempio è fornito da una curva $y = f(x)$, in cui $f(x)$ sia derivabile in un intervallo, con derivata non sempre continua. È chiaro che la definizione della Nota di Cracovia aderisce meglio alla nozione intuitiva di punto semplice.

(7) Ved. il n. 85 del libro citato di BOULIGAND ove è dimostrato un teorema equivalente a questo, sul fondamento della semicontinuità superiore del « paratingente .

gramma $y = f(P)$ ha in ogni punto una sola corda impropria e quindi ogni tal punto è semplice pel diagramma. Da ciò intanto segue l'equivalenza della proprietà geometrica da dimostrarsi e del teorema del n. 17.

Passiamo a stabilire il teorema geometrico. Fissato un punto P_0 di I, diciamo t_0 la tangente al diagramma F nel punto P_0 corrispondente e t la tangente nel punto $\bar{P}$ corrispondente a P mobile su I Indichiamo inoltre con K_ε l'insieme delle tangenti a F nei punti situati in un intorno di raggio ε di $\bar{P}_0$. Esistono certamente rette di accumulazione per K_ε, qualunque sia ε; sia r una di queste. Occorre dimostrare che r coincide necessariamente con t_0.

Scelti un numero $\varepsilon > 0$ e un angolo (acuto) δ, esiste qualche tangente t ad F in un punto distinto da $\bar{P}_0$, situato nell'intorno di raggio ε di $\bar{P}_0$, la quale forma con r un angolo $< \delta$. Ragionando come nel n. 4 della mia Nota di Cracovia, si conclude che è possibile trovare in F un insieme numerabile $\bar{P}_1, P_2, \ldots$ di punti convergente a $\bar{P}_0$ e tale che la tangente t_n in $\bar{P}_n$, per $n \to \infty$, tenda ad r. Da questo dedurremo che r è corda impropria di F in $\bar{P}_0$ e quindi che coincide con t_0.

Si fissino all'uopo due successioni decrescenti e infinitesime di numeri positivi non nulli e di angoli acuti non nulli:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots; \quad \delta_1, \delta_2, \ldots. \tag{14}$$

Sia $\bar{P}_1'$ il *primo* punto della successione $\bar{P}_n$, che trovasi nell'intorno di raggio $1/2\, \varepsilon_1$ di $\bar{P}_0$ e t_1' la tangente a F in $\bar{P}_1'$. Considerato l'intorno di raggio $1/2\, \varepsilon_1$ di $\bar{P}_1'$, ivi potrà scegliersi (pel principio Z del n. 2 della mia Nota di Cracovia) *un* punto $\bar{P}_1''$ distinto da $\bar{P}_1'$, tale che la retta $\bar{P}_1' \bar{P}_1''$ formi con t_1' un angolo acuto $< \delta_1$. Sia similmente $\bar{P}_2'$ il primo punto della successione $\bar{P}_n'$, distinto da P_1', che trovasi nell'intorno di raggio $1/2\, \varepsilon_2$ di $\bar{P}_0$ e t_2' la tangente ad F in $\bar{P}_2'$. Si potrà allora determinare nell'intorno di raggio $1/2\, \varepsilon_2$ di $\bar{P}_2'$ un punto $\bar{P}_2''$, distinto da $\bar{P}_2'$, tale che la retta $\bar{P}_2' \bar{P}_2''$ formi con t_2' un angolo acuto $< \delta_2$; e così proseguendo.

La retta $\bar{P}_n' \bar{P}_n''$ viene in tal guisa ad avere i suoi punti distinti $\bar{P}_n', \bar{P}_n''$ nell'intorno di raggio ε_n di $\bar{P}_0$ e l'angolo acuto (o retto) φ_n, ch'essa forma con r è minore dell'angolo δ_n aumentato dell'angolo acuto (o retto) θ_n, che la tangente t_n' a F in $\bar{P}_n'$ forma con r.

Presi ora ad arbitrio il numero $\varepsilon > 0$ e l'angolo acuto $\delta > 0$, da un certo n in poi risulta $\varepsilon_n < \varepsilon$, $\delta_n < 1/2\, \delta$, $\theta_n < 1/2\, \delta$, onde $\varphi_n < \delta$; epperò $\lim\limits_{n \to \infty} \bar{P}_n' \bar{P}_n'' = r$; c. d. d.

OSSERVAZIONE. — *Una linea di Jordan a punti semplici risulta sempre rettificabile,* appunto perchè la sua tangente è variabile con continuità, così che è applicabile la conclusione del n. 7 della mia citata Nota sulle curve intuitive. Essa ammette sempre perciò una rappresentazione parametrica *regolare* in grande.

19. Consideriamo ora una funzione $f(P)$ di un punto P variabile in un dominio piano I. Vale il teorema analogo a quello indicato nel n. 17 per le funzioni di una variabile; cioè:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione reale $f(P)$ di un punto variabile in un dominio piano I sia iperdifferenziabile in ogni punto interno al dominio, è che esistano dovunque nell' interno di I le derivate parziali di f e sieno continue. (La sufficienza della condizione è ovvia).

Questo teorema equivale alla proprietà geometrica, che stabiliremo nel n. successivo.

20. *Una superficie di Jordan coi punti tutti semplici ha il piano tangente variabile con continuità* (8).

È chiaro che basterà dimostrare il teorema in piccolo per una superficie dello spazio ordinario.

L' intorno F di un punto $\overline{P}_0$ interno alla data superficie può rappresentarsi con un' equazione del tipo $z = f(P)$, ove $f(P)$ sia una funzione reale, continua di un punto P variabile nell' interno di una cella piana I, comprendente il punto P_0 che corrisponde a $\overline{P}_0$. Tale rappresentazione si ottiene proiettando l' intorno di $\overline{P}_0$ sul piano xy, secondo una direzione z non parallela al piano tangente ad F in $\overline{P}_0$, tenuto conto della proprietà caratteristica dei punti semplici.

Il fatto che i punti di F sieno semplici (cioè che le corde improprie in ciascuno di essi giacciano sul piano tangente) equivale (n. 11) all' iperdifferenziabilità della $f(P)$ in ogni punto di I: donde l' asserita equivalenza fra la proprietà geometrica e il teorema del n. 19.

Considereremo dapprima (come del resto nell' enunciato del teor. 19) i punti interni ad F, cioè i punti interni ad I.

Sia λ una semiretta di origine P_0. Nel punto P di F, corrispondente a P variabile nell' interno di I, vi è una sola tangente t ad F, la quale ap-

(8) Ved. a tal proposito il n. 86 del citato libro di BOULIGAND.

partenga alla giacitura $z\lambda$ dei piani paralleli a z e a λ. Dimostreremo che la derivata $f'_\lambda(P)$ è continua in P_0. Da ciò per $\lambda = x, y$ trarremo la conclusione del teorema.

Avvertiamo anzitutto che la continuità di $f'_\lambda(P)$ in P_0 equivale al fatto che per $P \to P_0$ la tangente t tende all'analoga tangente t_0 in P_0. Invero, se t ha per limite t_0, quella delle due semitangenti in cui $\overline{P}$ divide t, che si proietta nella semiretta avente la direzione λ, ha per limite l'analoga semitangente in $\overline{P}_0$.

D'ora innanzi indicheremo brevemente con t le tangenti che appartengono alla giacitura $z\lambda$. Scelto un intorno di raggio ε di $\overline{P}_0$, denotiamo con K_ε l'insieme delle t che toccano F nei punti dell'intorno fissato e con r una retta d'accumulazione (uscente da $\overline{P}_0$) di K_ε, qualunque sia ε. Poichè le t appartengono alla giacitura $z\lambda$, così sarà di r. Per dimostrare il teorema, basterà provare che r è una corda impropria di F, perchè allora ne seguirà che r coincide con t_0, che è l'unica corda impropria di F in $\overline{P}_0$, appartenente alla giacitura $z\lambda$.

Non c'è qui che da ripetere, con lievi cangiamenti di parole, il ragionamento del n. 18. Fissata una successione $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots$ di punti interni ad F, che converga a P_0, in modo che $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = r$ (ove t_n è la t relativa a $\overline{P}_n$), consideriamo le successioni (14). Sia P_1' il primo dei punti $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots$ che cade nell'intorno di raggio $^1/_2\,\varepsilon_1$ di $\overline{P}_0$ e t_1' la t relativa. Il piano parallelo a $z\lambda$ passante per P_1' taglia F secondo una linea di JORDAN, che ha in P_1' un punto semplice e per tangente ivi t_1'. Si può dunque scegliere nell'intorno di raggio $^1/_2\,\varepsilon_1$ di $\overline{P}_1'$ un punto P_1'' (interno alla linea), distinto da P_1' e tale che la retta $\overline{P}_1'\overline{P}_1''$ formi con t_1' un angolo $< \delta_1$; e così proseguendo. Si giunge in tal guisa a costruire due successioni $\overline{P}_1', \overline{P}_2', \ldots; \overline{P}_1'', \overline{P}_2'', \ldots$ di punti interni ad F e tali che $\overline{P}_n', \overline{P}_n''$ giaccion nell'intorno di raggio ε_n di $\overline{P}_0$ e la retta $\overline{P}_n'P_n''$ forma con t_n' (la t relativa a $\overline{P}_n'$) un angolo $\psi_n < \delta_n$. Siccome poi le rette r, $\overline{P}_n'\overline{P}_n''$, t_n' appartengono alla giacitura $z\lambda$, l'angolo φ_n che la retta $\overline{P}_n'\overline{P}_n''$ forma con r è non maggiore della somma dell'angolo non ottuso θ_n che t_n' forma con r e dell'angolo ψ_n; e quindi è minore di $\theta_n + \delta_n$.

Di qui si deduce (n. 18) che $\lim \overline{P}_n'\overline{P}_n'' = r$; epperò r è corda impropria; c. d. d.

Se P_0 è un punto contorno del dominio piano I, la conclusione vale immutata, purchè si riferisca ad una semicorda impropria λ, di origine P_0, dell'insieme I, tale che per *ciascuno* dei punti di I situati in un intorno abbastanza piccolo di P_0 passi una semicorda impropria di I parallela a λ. Questa condizione è sempre soddisfatta pei punti contorno di I, quando il contorno è costituito da una linea di JORDAN a punti tutti semplici; epperò *la continuità del piano tangente ad una superficie di Jordan a punti tutti semplici, vale anche pei punti del contorno, quando questi costituiscono una linea di Jordan a punti semplici.*

OSSERVAZIONE. — Nei riguardi della *quadrabilità di una superficie di Jordan F a punti tutti semplici* è ovvio ch'essa sussiste in piccolo, per ogni cella abbastanza piccola di F, la quale sia *regolarmente* rappresentabile (p. es. per mezzo di una proiezione) sopra una cella piana. La possibilità di una rappresentazione parametrica regolare in grande di una superficie di JORDAN, che sia una cella a due dimensioni coi punti tutti semplici, non pare sia tanto facile a dimostrarsi.

Condizione per la differenziabilità in un dominio piano.

21. Stabilita la condizione d'iperdifferenziabilità in un dominio piano, occupiamoci della semplice differenziabilità.

Sia $f(P)$ una funzione definita in un dominio piano I e $P_0(x_0, y_0)$ sia un punto interno ad I. Secondo il n. 8 la condizione necessaria e sufficiente perchè $f(P)$ sia differenziabile in P_0 (che è un punto d'accumulazione regolare), è che $f(P)$ sia ultraderivabile secondo ogni direzione uscente da P_0. Ora questa condizione può rendersi notevolmente più espressiva, nel caso attuale.

Prendiamo come *rapporti incrementali parziali (generalizzati)* di $f(P)$ in P_0 i rapporti

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0}, \quad \frac{f(x, y) \quad f(x, y_0)}{y - y_0},$$

nei quali si abbandoni la troppo esigente condizione che il punto $P(x, y)$ si muova rispettivamente sopra una retta $y = \text{cost.}$ o rispettivamente $x = \text{cost.}$ È soltanto abbandonando tale condizione che si può sperare di far giuocare il vero carattere della $f(P)$, la quale deve concepirsi come funzione della *coppia* (x, y) e non di ciascuna delle variabili. Ebbene, se comunque P tende a P_0, sotto la sola condizione che la semiretta P_0P tenda ad una semiretta qualsiasi prefissata, in cui non sia rispettivamente costante x od y, esistono finiti i limiti dei predetti rapporti, tali limiti si chiameranno le *derivate parziali generalizzate* di $f(P)$ in P_0 e si designeranno con $f_x(P_0)$, $f_y(P_0)$.

Sono questi i medesimi simboli delle ultraderivate; ma la cosa non dà luogo ad ambiguità, perchè, come risulterà dal seguito, i valori di $f_x(P_0)$, $f_y(P_0)$, quando esistono entrambi, coincidono appunto coi valori delle ultraderivate.

Stabiliamo il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $f(P)$ del punto $P(x, y)$ di un dominio piano I, sia differenziabile nel punto $P_0(x_0, y_0)$ interno ad I, è che in P_0 esistano le derivate parziali generalizzate $f_x(P_0)$; $f_y(P_0)$.

La necessità della condizione è già contenuta nel n. 8, perchè la definizione delle derivate parziali generalizzate fornisce un modo particolare di ottenere, ove esistano, i valori delle ultraderivate omonime.

Stabiliamo la sufficienza della condizione. Se facciamo variare $P(x, y)$ sulla parallela ad x condotta per P_0, eppoi sulla parallela ad y per P_0, in forza dell'ipotesi risulta $\alpha = f_x(P_0) = \bar{f}_x'(P_0)$, $\beta = f_y(P_0) = \bar{f}_y'(P_0)$, ove f_x, f_y denotan le derivate generalizzate e $\bar{f}_x'$, $\bar{f}_y'$ le derivate parziali ordinarie.

Indichiamo con $M(x, y_0)$, $N(x_0, y)$ le proiezioni di $P(x, y)$, comunque variabile, sulle parallele per P_0 ad x, y. Sussiston le relazioni:

$$\frac{f(P)-f(P_0)}{P_0P} = \frac{f(P)-f(M)}{MP}\,\frac{MP}{P_0P} + \frac{f(M)-f(P_0)}{P_0M}\,\frac{P_0M}{P_0P} \tag{15}$$

$$\frac{f(P)-f(P_0)}{P_0P} = \frac{f(P)-f(N)}{NP}\,\frac{NP}{P_0P} + \frac{f(N)-f(P_0)}{P_0N}\,\frac{P_0N}{P_0P}. \tag{16}$$

Supposto che $P \to P_0$ in modo che $\lim P_0P = x'$ (ove x' è equipollente al semiasse positivo x o al semiasse $-x$), la semiretta NP tende pure ad x'. Pertanto viene:

$$\lim \frac{NP}{P_0P} = \frac{\sin x'y'}{\sin x'y'} = 1, \quad \lim \frac{P_0N}{P_0P} = \frac{\sin x'x'}{\sin x'y'} = 0, \tag{17}$$

ove y' è il limite di P_0N. La (16) dimostra allora che:

$$\lim \frac{f(P)-f(P_0)}{P_0P} = \pm\alpha,$$

secondo che x' è equipollente ad x o a $-x$. Esiste perciò la derivata direzionale $f'_{x'}(P_0)$. Similmente dalla (15) si deduce che esiste $f'_{y'}(P_0) = \pm\beta$, valendo il $+$ o il $-$ secondo che y' è equipollente ad y o a $-y$.

Supponiamo ora che $P \to P_0$ in modo che $\lim P_0P = \lambda$, ove λ è una semiretta non parallela agli assi. Sieno x', y' i limiti delle semirette P_0M, MP. Dalla (15) tenuto conto delle

$$\lim \frac{MP}{P_0P} = \frac{\sin x'\lambda}{\sin x'y'}, \quad \lim \frac{P_0M}{P_0P} = \frac{\sin \lambda y'}{\sin x'y'}, \tag{18}$$

si deduce:

$$\lim \frac{f(P)-f(P_0)}{P_0P} = f'_{x'}(P_0)\frac{\sin \lambda y'}{\sin x'y'} + f'_{y'}(P_0)\frac{\sin x'\lambda}{\sin x'y'},$$

cioè:

$$\lim \frac{f(P)-f(P_0)}{P_0P} = \alpha \frac{\sin \lambda y}{\sin xy} + \beta \frac{\sin x\lambda}{\sin xy},$$

epperò tutte le semitangenti in P_0 alla superficie $F(z=f(P))$, ivi comprese quelle che corrispondono alle direzioni degli assi, giacciono sul piano (1); e quindi (n. 5, Oss.) la $f(P)$ è differenziabile in P_0.

OSSERVAZIONE. — Il teorema dimostrato prova che il concetto di derivate parziali generalizzate è quello che più naturalmente estende il concetto di derivata per le funzioni di una variabile, perchè fa equivalere la differenziabilità all'esistenza delle derivate generalizzate, come per le funzioni di una variabile la differenziabilità equivale all'esistenza della derivata.

22. Si può chiedere se per la differenziabilità di $f(P)$ in un punto P_0 interno al dominio piano I, basti l'esistenza dei limiti dei rapporti incrementali generalizzati *sopra le rette* uscenti da P_0. Ebbene, la sola esistenza di questi limiti (finiti) in *ogni* punto interno ad I non basta; ma essa divien sufficiente quando i limiti medesimi, considerati come funzioni del punto P_0 variabile nell'interno di I, siano limitati. Vale cioè il teorema:

Se in ogni punto (x, y) interno ad un dominio piano I, dove sia data una funzione $f(x, y)$, esistono, univocamente determinati dal punto, i limiti

$$(19)\qquad \begin{aligned} \alpha(x, y) &= \lim \frac{f(\bar{x}, \bar{y}) - f(x, \bar{y})}{\bar{x} - x} \\ \beta(x, y) &= \lim \frac{f(\bar{x}, \bar{y}) - f(\bar{x}, y)}{\bar{y} - y} \end{aligned}$$

quando il punto $(\bar{x}, \bar{y})$ tende ad (x, y) sopra una retta **qualunque** *uscente da (x, y), sulla quale non sia rispettivamente costante x od y; e le funzioni $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ son limitate nell'interno di I* (⁹), *la data funzione $f(x, y)$ è differenziabile nell'interno del dominio.*

Anzitutto è chiaro che $f(P)$ ammette in un punto $P_0(x_0, y_0)$ interno ad I

(⁹) Cioè limitate in ogni dominio interno ad I, il che equivale, pel teorema di WEIERSTRASS, a supporre che α, β siano limitate nell'intorno di ogni punto interno ad I.

le derivate parziali $\bar{f}_x'(P_0)$, $\bar{f}_y'(P_0)$, aventi i valori $\alpha(x_0, y_0)$, $\beta(x_0, y_0)$. Ne deriva che, se P, Q son due punti distinti variabili nell'interno di I colla condizione che la retta PQ si conservi parallela ad un asse, p. es. y, il rapporto $\dfrac{f(P)-f(Q)}{QP}$ si mantiene limitato, perchè

$$|f(P)-f(Q)| = QP\,|\beta(R)|,$$

ove R è un conveniente punto interno al segmento QP.

Proviamo ora che in P_0 esiston altresì le derivate direzionali secondo gli assi e che:

$$\begin{aligned}\alpha(x_0, y_0) &= \bar{f}_x'(P_0) = f_x'(P_0) = -f'_{-x}(P_0)\\ \beta(x_0, y_0) &= \bar{f}_y'(P_0) = f_y'(P_0) = -f'_{-y}(P_0).\end{aligned} \tag{20}$$

Conservando le notazioni del n. prec., si muova dalla (15) e facciasi tendere P a P_0 in modo affatto arbitrario, colla sola condizione che $\lim P_0P = x'$ sia una semiretta parallela all'asse x (equipollente ad x o a $-x$). Sarà allora $\lim P_0M = x'$. Si chiami y' il limite di MP. Viene:

$$\lim\frac{MP}{P_0P} = \frac{\sin x'x'}{\sin x'y'} = 0, \quad \lim\frac{P_0M}{P_0P} = \frac{\sin x'y'}{\sin x'y'} = 1,$$

e, siccome $\dfrac{f(P)-f(M)}{MP}$ si conserva limitato, perchè la retta PM è sempre parallela ad y, così la (15) prova l'esistenza del limite del primo membro, cioè l'esistenza di $f'_{x'}(P_0)$ e il fatto che:

$$f'_{x'}(P_0) = \lim\frac{f(M)-f(P_0)}{P_0M} = \pm\,\alpha(x_0, y_0),$$

valendo il $+$ o il $-$ secondo che x' è equipollente ad x o a $-x$.

Similmente dalla (16) si deduce l'esistenza di $f'_{y'}(P_0)$, ove y', parallela ad y, sia il limite di P_0P, e si dimostra la seconda delle (20).

Suppongasi ora che $P(x, y)$ muovasi sopra una semiretta λ per P_0, non parallela agli assi, sicchè rimane fisso il segno di $y - y_0$. Quando $y \to y_0$ (cioè $P \to P_0$) la seconda delle (19) porge:

$$\lim\frac{f(P)-f(M)}{MP} = \pm\,\beta(x_0, y_0),$$

ove vale il $+$ o il $-$ secondo che $\lim MP$ è equipollente ad y o a $-y$, cioè secondo che $y > y_0$ o $y < y_0$.

Posto $\lim MP = y'$, $\lim P_0M = x'$, sussistono le (18), e dalla (15) segue:

$$\lim \frac{f(P)-f(P_0)}{P_0P} = f'_{x'}(P_0)\frac{\sin \lambda y'}{\sin x'y'} + f'_{y'}(P_0)\frac{\sin x'\lambda}{\sin x'y'},$$

cioè:

(21) $$\lim \frac{f(P)-f(P_0)}{P_0P} = \alpha(x_0, y_0)\frac{\sin \lambda y}{\sin xy} + \beta(x_0, y_0)\frac{\sin x\lambda}{\sin xy}.$$

Facciamo infine tendere comunque P a P_0 colla sola condizione $\lim P_0P = \lambda$. Designata con M l'intersezione della semiretta λ colla parallela all'asse y per P (intersezione certo esistente per P abbastanza prossimo a P_0, perchè $\lim P_0P = \lambda$), vale la (15) (dove però M non ha il significato di prima). Se $\lim MP = y'$ viene:

$$\lim \frac{MP}{P_0P} = \frac{\sin \lambda\lambda}{\sin \lambda y'} = 0, \quad \lim \frac{P_0M}{P_0P} = \frac{\sin \lambda y'}{\sin \lambda y'} = 1;$$

epperò, essendo limitato il rapporto $\dfrac{f(P)-f(M)}{MP}$, dalla (15) si trae:

$$\lim \frac{f(P)-f(P_0)}{P_0P} = \lim \frac{f(M)-f(P_0)}{P_0M}.$$

Ma pel calcolo del secondo membro si può applicare la (21) (dove P fa le veci di M); dunque questa relazione vale anche quando P si approssima comunque a P_0 sotto la condizione $\lim P_0P = \lambda$.

La conclusione è che la (21) vale qualunque sia λ, anche parallela all'asse x o all'asse y, sotto la sola condizione $\lim P_0P = \lambda$; epperò tutte le semitangenti ad F in $\overline{P}_0$ giaccion sul piano:

$$z - z_0 = \alpha(x_0, y_0)(x - x_0) + \beta(x_0, y_0)(y - y_0),$$

e quindi (n. 5, Oss.) $f(P)$ è differenziabile in P_0.

OSSERVAZIONE 1ª. — La condizione indicata non è però necessaria. Per es. la funzione

$$f(0) = 0, \quad f(x) = x^{1+\gamma} \sin\frac{1}{x} \; (x \neq 0,\ 0 < \gamma < 1),$$

concepita come funzione di due variabili, è ovunque differenziabile, perchè $f(x)$ è ovunque derivabile. Ma le sue derivate parziali non sono limitate, perchè il massimo ed il minimo limite di $f'(x)$ per $x \to 0$ sono $+\infty$, $-\infty$. Pertanto in ogni punto dell'asse y i numeri $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ relativi a questa funzione non son limitati ([10]).

OSSERVAZIONE 2ª. — Se all'ipotesi che $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ sieno limitati nell'interno di I si sostituisce l'ipotesi che esistano in ogni punto interno ad I le derivate $\bar{f}_x'$, $\bar{f}_y'$ e sieno limitate, secondo il teorema di RADEMACHER citato nella prefazione, si può soltanto affermare che $f(P)$ è differenziabile *quasi dappertutto* in I. Nè è possibile eliminare questa indeterminazione dell'enunciato, perchè è nella natura della cosa, come lo mostra l'esempio della funzione

$$f(0, 0) = 0, \quad f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(radicale positivo; x, y non ambedue nulli), la quale ha derivate limitate attorno all'origine e non è ivi differenziabile ([11]).

23. La opportunità di sostituire agli ordinari rapporti incrementali parziali i rapporti incrementali generalizzati nello studio delle funzioni di più variabili, e quindi agli incrementi parziali della funzione gl'incrementi parziali generalizzati, si manifesta evidente anche quando si pon soltanto mente alla continuità *superficiale* di $f(P)$. Si sa che per la continuità superficiale di $f(P)$ in P_0 non basta che gl'incrementi $f(x, y) - f(x_0, y)$, $f(x, y) - f(x, y_0)$, $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ tendano tutti a zero quando $P(x, y)$ tende a P_0 sulla parallela ad x per P_0 o sulla parallela ad y per P_0 o sopra una retta qualunque per P_0. Invece, come vedremo:

Perchè una funzione $f(x, y)$ sia superficialmente continua in un punto $P(x_0, y_0)$ interno ad un dominio piano I dov'essa è definita, bisogna e basta che

$$\lim [f(x, y) - f(x_0, y)] = 0, \quad \lim [f(x, y) - f(x, y_0)] = 0,$$

quando $P(x, y)$ tende a $P_0(x_0, y_0)$ in modo che $\lim P_0P$ sia una qualunque semiretta λ, sulla quale x, y rispettivamente non si conservino costanti.

Chiamiamo ancora M, N i punti (x, y_0), (x_0, y). La necessità della condizione è evidente, perchè $f(P) - f(N) = [f(P) - f(P_0)] + [f(P_0) - f(N)]$, e analo-

([10]) Il ragionamento del n. 21 prova che quando $f(P)$ è differenziabile in ogni punto interno ad un dominio piano I, le possibili rette d'accumulazione in $\bar{P}_0$ delle tangenti ad F nei punti d'un intorno di $\bar{P}_0$ la cui massima corda tenda a zero, son corde improprie di F in P_0. Perciò quando una almeno delle derivate parziali di f non è limitata attorno a P_0, vi è in $\bar{P}_0$ una corda impropria di F parallela all'asse z.

([11]) Quest'esempio ed il precedente mi sono stati addotti dal prof. PICONE, al quale avevo comunicato i miei risultati.

gamente per $f(P) - f(M)$. Si vede anzi che i limiti degl'incrementi parziali son zero comunque $P \to P_0$. Ma quel che *basta* è che i limiti stessi si annullino quando $P \to P_0$ nel modo enunciato.

Ragioniamo per assurdo, supponendo dunque che f non sia superficialmente continua in P_0. Vi sarà allora ivi un valore d'accumulazione L di $f(P)$, diverso da $f(P_0)$ e in ogni intorno di P_0 cadranno punti Q tali che $|f(Q) - L| \leq \varepsilon$, ove $2\varepsilon < |L - f(P_0)|$.

Da qui, ammessa la forma particolare del postulato di ZERMELO, concernente la possibilità di costruire una successione di punti estraendone uno da ciascun insieme di una successione [12], si deduce ovviamente l'esistenza di una successione P_ν convergente a P_0 e tale che $|f(P_\nu) - L| \leq \varepsilon$. Se questa successione ha in P_0 più d'una semitangente, si potrà (n. 1) estrarre da essa una successione parziale avente in P_0 una sola semitangente λ. Continueremo a indicare con P_ν tale successione parziale. La semitangente λ sarà non parallela ad uno almeno, p. es. y, dei due assi; e quindi su essa non sarà $x = \text{cost.}$.

Designate con x_ν, y_ν le coordinate di P_ν e con N_ν il punto (x_0, y_ν), siccome da un certo ν in poi l'angolo della semiretta P_0P_ν con λ è minore di un angolo comunque prefissato, i punti P_ν saranno distinti dai corrispondenti punti N_ν. Si ha ora:

$$\begin{aligned} |f(x_\nu, y_\nu) - f(x_0, y_\nu)| &\geq |L - f(N_\nu)| - |f(P_\nu) - L| \geq |L - f(N_\nu)| - \varepsilon \\ &\geq |L - f(P_0)| - |f(P_0) - f(N_\nu)| - \varepsilon, \end{aligned}$$

e siccome, in virtù dell'ipotesi, $f(P_0) - f(N_\nu)$ tende a zero per $\nu \to \infty$, così, da un certo ν in poi, $|f(P_0) - f(N_\nu)| < \varepsilon$ e

$$|f(x_\nu, y_\nu) - f(x_0, y_\nu)| > |L - f(P_0)| - 2\varepsilon,$$

che è un numero fisso > 0. Ciò contraddice all'ipotesi di partenza. È dunque assurdo ammettere che f non sia superficialmente continua in P_0.

OSSERVAZIONE. — Un ragionamento dello stesso tipo, ma più semplice, prova che $f(P)$ è superficialmente continua in P_0 allora e solo allora che $\lim [f(P) - f(P_0)] = 0$ per $P \to P_0$ in modo che $\lim P_0P$ sia una qualunque prefissata semiretta per P_0, il che si può esprimer dicendo che *$f(P)$ è continua nelle diverse direzioni per P_0*. Però questa condizione è molto meno significativa della precedente.

---

(12) Qui e nell'osservazione del n. 24 son i soli punti della presente Memoria dove si ammette il postulato di ZERMELO (sotto la forma indicata).

Osservazioni varie.

24. La nozione di semitangente di un insieme, consente di rendere più espressivo e concreto un teorema relativo ai massimi e minimi di una funzione $f(P)$ di due variabili, il quale rimette in valore, nel solo senso in cui essa può rigorosamente sussistere, la vecchia idea di LAGRANGE per la ricerca dei massimi e minimi di $f(P)$, e si applica anche ai massimi e minimi vincolati. Si dimostra infatti facilmente che:

Se $f(P)$ è una funzione reale e continua di un punto P variabile in un insieme piano serrato I, per verificare che in un punto d'accumulazione P_0 di I essa presenta un massimo o un minimo (relativo), basta verificare che $f(P)$ gode di questa proprietà quando P s'avvicina a P_0 sotto la sola condizione che la semiretta P_0P tenda ad una qualunque, ma determinata, semitangente λ di I in P_0 [13].

Ammessa soddisfatta la condizione p. es. pel massimo, si tratta di provare che in un intorno di P_0 in I è $f(P) \leq f(P_0)$. Se, invero, esistono punti Q di I in ciascun dei quali sia $f(Q) > f(P_0)$, poichè in ogni punto d'accumulazione dei Q la funzione (attesa la sua continuità) assume un valore non minore di $f(P_0)$, i punti R dell'intorno di P_0 in cui $f(R) \geq f(P_0)$ costituiscono un sottoinsieme *serrato* K di I. L'insieme K avrà in P_0 almeno una semitangente λ e si potrà far variare P in una successione S di punti di K convergente a P_0, in modo che $\lim P_0P = \lambda$. Si contraddice così all'ipotesi. Pertanto è assurdo ammettere che $f(P)$ non sia massima in P_0, per P variabile in I.

OSSERVAZIONE. — In realtà il ragionamento precedente è esauriente soltanto nel caso in cui $f(P_0)$ sia un massimo o un minimo effettivo (o, come altri dice, proprio), ogni volta che $\lim P_0P$ sia una semiretta determinata. Invero, se $f(P_0)$ è semplicemente un massimo quando $\lim P_0P$ è determinato, non si può escludere che nei punti della successione S sia sempre $f(R) = f(P_0)$, epperò non si arriva all'assurdo. Nel caso di un massimo o di un minimo ineffettivo, per concludere sembra necessario di ricorrere al postulato di ZERMELO (sotto la forma particolare applicata nel n. 23). Ammettendo questo

---

[13] Il VIVANTI (« Rend. dei Lincei », 1898. 1° sem., p. 240) ridusse la verifica alla variabilità di P sulle linee cantoriane uscenti da P_0 (facendo però uso implicito del postulato di ZERMELO). Nella premessa alla Memoria, *Sugli estremanti delle funzioni di due variabili* (« Memorie della R. Acc. d'Italia », 1930-VIII) io avevo ridotto la verifica alla variabilità di P sulle linee di JORDAN uscenti da P_0.

postulato basta considerare l'insieme H (non necessariamente serrato) dei punti Q tali che $f(Q) > f(P_0)$ e costruire mediante H una successione di punti Q convergente a P_0, tale che $f(Q) > f(P_0)$ e $\lim QP_0 = \lambda$. Donde l'assurdo.

25. Dato un insieme piano serrato I chiamiamo *punto interiore* di I ogni punto P_0 tale che le semitangenti ad I in P_0 sieno a due a due opposte. Quando I è un dominio piano ogni punto interno è interiore. Si prova agevolmente che:

Se $f(P)$ presenta un massimo od un minimo (relativo) in un punto P_0 interiore all'insieme serrato I dov'essa è definita, ed in P_0 la funzione è differenziabile, tutte le derivate direzionali di f son ivi nulle.

Infatti, le derivate direzionali in P_0 relative a due semitangenti opposte λ, $-\lambda$ debbon aver lo stesso valore assoluto e segni contrari, per l'ipotesi della differenziabilità. D'altronde esse risultano ambedue non positive o ambedue non negative, secondochè $f(P_0)$ è un massimo o un minimo; epperò son nulle.

26. Si tenga ora conto del teorema di WEIERSTRASS per gli estremi di una funzione, nel caso in cui l'insieme piano I, dov'essa è data, è un insieme qualunque limitato e serrato (non necessariamente un dominio) ([14]). Se ne deduce ovviamente che una $f(P)$ continua in ogni punto di un tal insieme, assume in I un massimo ed un minimo (assoluto). E da ciò segue subito la seguente estensione del teorema di ROLLE ([15]).

Se una funzione $f(P)$, finita e continua in tutti i punti di un insieme piano, limitato e serrato, I, e differenziabile nei punti interiori, assume valori uguali nei punti non interiori di I, esiste qualche punto interiore dove tutte le derivate direzionali son nulle.

Se $z = f(P)$ è una superficie F di JORDAN a punti semplici, se ne deduce altresì facilmente che, separata da F una cella con un contorno l a punti semplici (piano o sghembo), esiste almeno un punto P interno alla cella, tale che la proiezione ortogonale di l sul piano tangente in P circonda l'area massima (rispetto alle aree contornate dalle proiezioni ortogonali di l su altri piani dello spazio).

([14]) Ved. le mie *Lezioni di Analisi* (Bologna, Zanichelli, 1933-XI), p. 171, n. 19.

([15]) Estensioni in altro senso si trovano p. es. nelle *Lezioni di Analisi infinitesimale* di PICONE (« Circolo Mat. di Catania », 1923, vol. I), pp. 133, 244.

27. Le osservazioni precedenti stanno alla base di una trattazione dei massimi e minimi delle funzioni di più variabili, di cui ho appena iniziato lo sviluppo. La considerazione delle derivate direzionali prime evidentemente non basta. Occorre introdurre le *derivate direzionali successive.* E perciò bisogna anzitutto definire in modo topologico-infinitesimale gl' intorni dei diversi ordini di un punto di accumulazione O di un insieme serrato I di punti di un S_n. È ciò che ho fatto mediante le *semiparabole osculatrici* (dei varii ordini) ad I nel punto O, oppure mediante una trasformazione birazionale reale, senza eccezioni, dell' intorno di O, in guisa da mutare il dato insieme in uno di uno spazio di dimensione tanto alta, che gl' intorni dei varii ordini, da prendersi in considerazione, sieno raggiungibili con spazi lineari uscenti da O. Si arriva così alle derivate direzionali dei varii ordini e alla formula di TAYLOR sotto ipotesi molto più ampie delle consuete. Spero di poter tornare un' altra volta su quest' argomento.

28. Le nozioni di tangenti e corde improprie di un insieme in un punto di accumulazione permettono di considerare nel gruppo delle trasformazioni topologiche (omeomorfismi) un sottogruppo caratterizzante una geometria intermedia fra la topologia e la geometria differenziale, e che potrebbe chiamarsi topologia del 1° ordine ([16]).

Sieno I, I' due insiemi perfetti ([17]) di punti appartenenti a due spazi lineari qualunque; e fra I, I' interceda un omeomorfismo Ω. Si dirà che questo è un *omeomorfismo del 1° ordine* quando, considerati due punti O, O' di I, I', omologhi in Ω, l' omeomorfismo fa corrispondere biunivocamente ad ogni semitangente o semicorda impropria di I in O una semitangente o rispettivamente semicorda impropria di I' in O', ad ogni tangente e ad ogni corda impropria, una tangente od una corda impropria. Con ciò si vuol dire che, mentre P tende in I a O in guisa che $\lim OP = \lambda$, P' tende in I' ad O' in guisa che la semiretta $O'P'$ tende essa pure verso un limite determinato λ'; e che mentre P, Q tendono in I a O in modo che $\lim PQ = \mu$, P', Q' tendono in I' ad O' in guisa che la semiretta $P'Q'$ tende anch' essa verso un limite determinato μ'. Inoltre a semitangenti o semicorde opposte corrispondono semitangenti e semicorde opposte.

([16]) È in sostanza la stessa geometria avente come gruppo fondamentale il gruppo topologico ristretto, di cui al n. 67 del libro di BOULIGAND.

([17]) Si può anche supporre soltanto che I, I' siano serrati, bastando allora riferire la definizione successiva a coppie di punti omologhi che siano di accumulazione pei due insiemi.

Le operazioni di proiezione entro uno spazio lineare S_n dànno generalmente luogo ad omeomorfismi del 1° ordine. Sia O un punto di accumulazione di un insieme serrato I di S_n e sia C un centro di proiezione. Allora *condizione necessaria e sufficiente perchè fra l'intorno di O in I e l'intorno del punto O' nell'insieme I' proiezione di I da C sopra un iperpiano, vi sia un omeomorfismo del 1° ordine, è che le corde improprie di I in O stieno tutte (almeno) in un iperpiano non passante per C.*

L'asserzione è di verifica immediata.

Si può così parlare di *dimensione di un insieme serrato I in un suo punto d'accumulazione O* come della dimensione dello spazio lineare minimo in cui si può proiettare l'intorno di O in I, in guisa che l'intorno proiezione sia omeomorfo del 1° ordine al dato. È chiaro che la dimensione k di I in O uguaglia la dimensione del minimo spazio lineare congiungente le corde improprie di I in O (le quali, è superfluo dirlo, non costituiscono però sempre uno spazio lineare!) ([18]). È altresì evidente che *la dimensione di accumulazione di una M_k topologica in un suo punto uguaglia k e supera k secondo che il punto di M_k è semplice o no.*

Non sembra facile rispondere alla questione se la dimensione k di un insieme serrato I in un suo punto d'accumulazione O sia o meno un invariante di fronte agli omeomorfismi del 1° ordine (la cosa è ovvia per $k=1$). Possiamo invece agevolmente dimostrare che:

Il concetto di punto semplice di una varietà topologica è invariante di fronte agli omeomorfismi del 1° ordine.

Esponiamo la dimostrazione, per brevità di linguaggio, nel caso di una superficie F. Premettiamo che, se due linee di JORDAN l, m di S_n aventi in O un punto semplice, non si toccano ivi, l'insieme $l+m$ ha come corde improprie in O tutte le rette per O, appartenenti al piano ω delle due tangenti. Indichiamo invero con H_ε l'insieme delle rette che congiungono coppie di punti distinti P, Q di $l+m$, situati nell'intorno di raggio ε di O. Se una retta a per O è di accumulazione per H_ε qualunque sia ε, ed esistono rette PQ formanti con a un angolo comunque piccolo ed i cui punti P, Q variano o su l o su m, la a coincide colla tangente in O ad l o ad m. Se invece esistono rette PQ formanti con a un angolo comunque piccolo ed i cui punti P, Q

([18]) Il GUARESCHI nel lavoro citato introduce la locuzione di « dimensione di un'accumulazione O » come numero delle tangenti linearmente indipendenti in O. Ma un insieme I di S_n, che abbia in O un'accumulazione di dimensione $n-1$ in questo senso, può benissimo non esser biunivocamente proiettabile (nell'intorno di O) sopra un iperpiano.

distinti fra loro e da O stieno uno su l e l'altro su m, il piano OPQ (*individuato* per ε abbastanza piccolo!) ha per limite il piano ω e quindi a giace in ω.

Viceversa, ogni retta a del fascio O in ω è corda impropria, perchè, se è distinta dalle tangenti in O ad l, m (che si sa già esser corde improprie), condotto per a un iperpiano S_{n-1}, che non contenga ω, ogni iperpiano parallelo a quello e ad esso abbastanza vicino, sega l, m, attorno ad O, ciascuna in *un* punto e la congiungente di questi due punti ha per limite a.

Ciò premesso, sia F' la trasformata di F mediante un omeomorfismo Ω del 1° ordine fra gl'intorni dei punti omologhi O, O' di F, F'. Su F' si posson intanto tracciare infinite linee di JORDAN, aventi in O' un punto semplice; le trasformate mediante Ω delle linee analoghe uscenti da O su F. Anzi esistono in F' linee di JORDAN passanti semplicemente per O' con un'assegnata tangente. Per ogni coppia di linee di JORDAN uscenti su F' da O', con tangenti distinte, si hanno ∞^1 corde improprie di F' in O' situate sul piano delle due tangenti. Pertanto tutte le corde improprie di F' giacciono in questo piano, che non muta al variar delle due linee, se no non ci potrebbe esser corrispondenza biunivoca fra le corde improprie di F e le corde improprie di F' in O, O'. Dunque O' è semplice per F'.

29. *La corrispondenza indotta da un omeomorfismo del 1° ordine fra le tangenti in due punti semplici omologhi di due varietà topologiche di dimensione k, è proiettiva.*

Questa è conseguenza ovvia del teorema precedente, per $k > 2$. Invero, se O, O' son i due punti corrispondenti delle varietà M_k, M_k', la corrispondenza indotta fra le due stelle di tangenti omologhe in O, O' è proiettiva, perchè è biunivoca e ad un fascio di rette fa corrispondere un fascio di rette.

Suppongasi $k = 2$, e si osservi anzitutto che quando la superficie F, avente in O un punto semplice, appartiene ad uno spazio S_r ($r \geqq 3$), si può sempre proiettarla da un S_{r-3}, che non incontri il piano tangente in O (epperò nessuna corda impropria di F), sopra un piano. La corrispondenza Ω fra l'intorno di O in F e l'intorno piano del punto omologo O' è un omeomorfismo del 1° ordine (n. 28) e la corrispondenza indotta fra le tangenti in O, O' ai due insiemi è proiettiva, perchè generata da una proiezione.

Sicchè tutto si riduce a provare che un omeomorfismo del 1° ordine Ω fra due intorni piani π, π', di centri O, O', dà luogo ad un'omografia fra le direzioni omologhe. Infatti le coordinate x', y' di un punto mobile in π' risultano funzioni continue delle coordinate x, y del punto corrispondente in π, le quali, a cagion delle proprietà di Ω, ammettono in O' iperderivate in tutte le direzioni. Perciò le x', y' sono differenziabili (anzi iperdifferenziabili). In conseguenza il coefficiente angolare di una direzione uscente da O' è funzione lineare del coefficiente angolare dell'omologa direzione per O.

Un elegante corollario delle precedenti considerazioni è questo:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una $f(P)$ di un punto P mobile in un dominio piano I, sia iperdifferenziabile in un punto P_0 interno ad I, è che fra i punti di un intorno di P_0 e i corrispondenti valori di $f(P)$ vi sia un omeomorfismo del 1° ordine.

Osservazione. — Si posson altresì considerare *omeomorfismi di ordine superiore* definiti in relazione agl'intorni topologico-infinitesimali dei varii ordini di un punto di accumulazione di un insieme.

Le proprietà metriche della quadrica di Moutard.

H. R. PHALEN (New York, U. S. A.).

INTRODUZIONE

Consideriamo una tangente assoluta ad un punto dato su una superficie data, e conduciamo un piano a traverso questa retta. Questo piano sega la superficie secondo una curva piana che passa attraverso il punto di tangenza e ammette in quel punto una conica osculatrice per l' insieme dei piani secanti che passano attraverso la tangente data e una quadrica di MOUTARD.

MOUTARD approssimativamente nel 1865 comunica una descrizione di questa superficie in unione a diverse note e commenti alla « Societé philomatique ». Nonostante questo, tuttavia, gli stessi e simili teoremi ritrovati da DARBOUX (1) nel 1880, da WILCZYNSKI (2) nel 1908, furono annunziati da questi senza che essi sapessero dell' opera precedente di MOUTARD.

EDWARD CECH (3), usando l' equazione di WILCZYNSKI come base e la linea tangente $x_4 = x_3 - nx_2 = 0$ come asse del fascio di piani, ha dedotto l' equazione della quadrica in coordinate omogenee. L' equazione di CECH è stata però rettificata dal prof. LANE della università di Chicago.

Nella sua dissertazione *Projective Properties of the Quadric of Moutard*, il dott. V. A. TAN ha studiato le proprietà proiettive delle quadriche di MOUTARD ed ha stabilito diversi importanti teoremi che contengono alcuni risultati metrici della presente ricerca come casi speciali.

In questa dissertazione ci proponiamo di dedurre dapprima l' equazione della quadrica di MOUTARD in coordinate Cartesiane a proposito della superficie S, generale, non sviluppabile. Dopo, per mezzo di metodi di geometria differenziale, studiamo il paio di quadriche che accompagna le tangenti di linee di incurvature; il paio di quadriche che accompagna le due tangenti ortogonali rispettivamente alle tangenti asintotiche; ed anche il paio di quadriche che accompagna un paio generale di tangenti ortogonali. Per ultimo i casi precedenti si considerano solo se la superficie S è minima.

---

(1) « Comptes Rendus », vol. 91 (1880), p. 969.
(2) WILCZYNSKI, *Projective Differential Geometry of Curved Surfaces*, 5th memoir, p. 280.
(3) CECH « Annali di Matematica », vol. 31 (1922), p. 195.

PARTE PRIMA

La equazione della quadrica di Moutard, la cubica caratteristica, e le coordinate del centro.

Sieno S una superficie ed O un suo punto che sceglieremo per origine. Sceglieremo il piano tangente come piano xy. Sia t una retta tangente uscente da O; consideriamo un piano passante per t, il quale sega S in una curva piana. La proiezione di questa curva d'intersezione sul piano xy passa per l'origine e vi ha una conica osculatrice, di cui troveremo l'equazione.

Questa sarà anche una delle equazioni della conica osculatrice C alla intersezione di S col piano considerato. Facendo variare tale piano nel fascio dei piani passanti per t, noi troviamo che se la superficie S ha l'equazione,

$$
\begin{aligned}
z = {} & \frac{1}{2}(\alpha_0 x^2 + 2\alpha_1 xy + \alpha_2 y^2) \\
& + \frac{1}{6}(\beta_0 x^3 + 3\beta_1 x^2 y + 3\beta_2 xy^2 + \beta_3 y^3) \\
& + \frac{1}{24}(\gamma_0 x^4 + 4\gamma_1 x^3 y + 6\gamma_2 x^2 y^2 + 4\gamma_3 xy^3 + \gamma_4 y^4) + \dots,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

e la tangente t ha le equazioni

$$z = \lambda x + \mu y = 0, \tag{2}$$

allora l'equazione del luogo delle coniche C è

$$Az^2 + 2Jxz + 2Lyz + K(\alpha_0 x^2 + 2\alpha_1 xy + \alpha_2 y^2 - 2z) = 0; \tag{3}$$

tale luogo (3) è dunque la quadrica di MOUTARD relativa alla tangente fissa il cui coefficiente angolare è $c = -\dfrac{\lambda}{\mu}$ (se $\mu \neq 0$).

I coefficienti A, J, L e K della equazione (3) hanno i valori seguenti:

$$
\left\{
\begin{aligned}
A = {} & [(3\alpha_0\gamma_0 - 4\beta_0^2) - 6(2\alpha_0\gamma_1 + \alpha_1\gamma_0 - 4\beta_0\beta_1)c \\
& + 3(6\alpha_0\gamma_2 + 8\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_0 - 12\beta_1^2 - 8\beta_0\beta_2)c^2 \\
& - 4(3\alpha_0\gamma_3 + 9\alpha_1\gamma_2 + 3\alpha_2\gamma_1 - 2\beta_0\beta_3 - 18\beta_1\beta_2)c^3 \\
& + 3(\alpha_0\gamma_4 + 8\alpha_1\gamma_3 + 6\alpha_2\gamma_2 - 12\beta_2^2 - 8\beta_1\beta_3)c^4 \\
& - 6(\alpha_1\gamma_4 + 2\alpha_2\gamma_3 - 4\beta_2\beta_3)c^5 + (3\alpha_2\gamma_4 - 4\beta_3^2)c^6] \\
J = {} & 3[\alpha_0^2\beta_0 - 6\alpha_0\alpha_1\beta_0 c - (6\alpha_0\alpha_1\beta_1 - 4\alpha_0\alpha_2\beta_0 + 3\alpha_0^2\beta_2 - 8\alpha_1^2\beta_0)c^2 \\
& + 2(3\alpha_0\alpha_1\beta_2 - 3\alpha_0\alpha_2\beta_1 + \alpha_0^2\beta_3 - 5\alpha_1\alpha_2\beta_0 - 6\alpha_1^2\beta_1)c^3 \\
& - 3(2\alpha_0\alpha_1\beta_3 - 6\alpha_1\alpha_2\beta_1 - \alpha_2^2\beta_0)c^4 \\
& + 2(\alpha_0\alpha_2\beta_3 - 3\alpha_1\alpha_2\beta_2 + 2\alpha_1^2\beta_3 - 3\alpha_2^2\beta_1)c^5 \\
& - (2\alpha_1\alpha_2\beta_3 - 3\alpha_2^2\beta_2)c^6]
\end{aligned}
\right.
\tag{4}
$$

$$
(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
L = 3[&3\alpha_0^2\beta_1 \quad 2\alpha_0\alpha_1\beta_0 - 2(3\alpha_0\alpha_1\beta_1 - \alpha_0\alpha_2\beta_0 + 3\alpha_0^2\beta_2 - 2\alpha_1^2\beta_0)c \\
&+ 3(6\alpha_0\alpha_1\beta_2 + \alpha_0^2\beta_3 - 2\alpha_1\alpha_2\beta_0)c^2 \\
&- 2(5\alpha_0\alpha_1\beta_3 + 3\alpha_0\alpha_2\beta_2 - 3\alpha_1\alpha_2\beta_1 + 6\alpha_1^2\beta_2 - \alpha_2^2\beta\ )c^3 \\
&+ (4\alpha_0\alpha_2\beta_3 + 6\alpha_1\alpha_2\beta_2 + 8\alpha_1^2\beta_3 \quad 3\alpha_2^2\beta_1)c^4 \\
&- 6\alpha_1\alpha_2\beta_3 c^5 + \alpha_2^2\beta_3 c^6] \\
K = 9(&\alpha_0 - 2\alpha_1 c + \alpha_2 c^2)^3.
\end{aligned}\right.
$$

È ovvio che il discriminante della quadrica è

$$
(5)\qquad \Delta = - K^4(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2).
$$

Il discriminante dei termini di secondo grado è

$$
(6)\qquad D = K[AK(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2) + J(\alpha_1 L - \alpha_2 J) - L(\alpha_0 L - \alpha_1 J)].
$$

Posto

$$
(7)\qquad I_1 = AK(\alpha_0 + \alpha_2) + K^2(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2) - (J^2 + L^2),
$$

$$
(8)\qquad I_2 = K(\alpha_0 + \alpha_2)A,
$$

si trova che l'equazione cubica caratteristica è:

$$
(9)\qquad \begin{aligned}
&\lambda^3 - \lambda^2[K(\alpha_0 + \alpha_2) + A] \\
&+ \lambda[AK(\alpha_0 + \alpha_2) + K^2(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2) - (J^2 + L^2)] \\
&- K[AK(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2) + J(\alpha_1 L - \alpha_2 J) - L(\alpha_0 L - \alpha_1 J)] = 0.
\end{aligned}
$$

Le coordinate del centro della quadrica sono

$$
(10)\qquad \left\{\begin{aligned}
x &= R(\alpha_1 L - \alpha_2 J), \\
y &= - R(\alpha_0 L - \alpha_1 J), \\
z &= RK(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2),
\end{aligned}\right.
$$

dove

$$
(11)\qquad R = \frac{2K^2}{D}.
$$

Con calcoli piuttosto lunghi se ne deduce:

TEOREMA 1. — Le quadriche di MOUTARD relative a un punto O di una superficie S, toccano S in O e vi hanno curvatura totale e curvatura media uguali a quella della superficie S.

TEOREMA 2. — Un punto piatto (punto minimo) sulla superficie S è pure un punto piatto in ogni quadrica MOUTARD relativa a tal punto.

TEOREMA 3. — Il centro di ogni quadrica di MOUTARD relativa ad un punto P di una superficie S è esterno al piano tangente di S in P.

TEOREMA 4. — In un punto P su una superficie S esistono dodici tangenti a cui corrisponde una quadrica di MOUTARD priva di centro.

Se K_t è la curvatura totale. abbiamo:

TEOREMA 5. — Una condizione necessaria e sufficiente perchè la quadrica di MOUTARD Q_m sia un paraboloide iperbolico, è che $D = 0$ e $K_t < 0$; un iperboloide ad una falda, è che $D \neq 0$ e $K_t < 0$; un paraboloido ellitico, è che $D = 0$ e $K_t > 0$. Se $D \neq 0$ e $K_t > 0$ la quadrica Q_m sarà un ellissoide se

$$(J^2 - AK\alpha_0) < 0,$$
$$[(J^2 - AK\alpha_0)(L^2 - AK\alpha_2) - (JL - AK\alpha_1)]^2 > 0.$$

Se $K_t < 0$, la totalità delle quadriche di MOUTARD consiste di una infinità semplice di iperboloidi ad una falda e di dodici paraboloidi iperbolici.

TEOREMA 6. — Ogni quadrica di MOUTARD corrispondente ad una tangente tale che sia $A = 0$, è una quadrica a centro.

Studierò più tardi il caso delle quadriche di MOUTARD corrispondenti alle tangenti di curvatura ed alle tangenti normali alle tangenti asintotiche.

Ricerche di Calcolo delle Variazioni.

Memoria di ARMANDO CHIELLINI (a Cagliari).

Sunto. - *L'Autore mostra dapprima come sia possibile il sostituire, in un caso particolare, la funzione* $Q = \Sigma \frac{\partial^2 F}{\partial x_i' \partial x_k'} \rho_i' \rho_k'$ *con un' altra più semplice; inoltre come mediante questa nuova funzione, oltre che mediante la funzione* E *di* WEIERSTRASS, *sia possibile applicare i metodi diretti del prof.* TONELLI *alla ricerca dell' estremo di un integrale della forma* $J = \int_C F(x_1 \ldots x_n ; x_1' \ldots x_n')ds$. *Infine mostra, per tale caso particolare, un' interessante conseguenza geometrica delle equazioni di* EULERO.

§ I. Generalità. Scopo del lavoro.

1. L' introduzione, nel Calcolo delle Variazioni, dovuta al prof. TONELLI, dei così detti *metodi diretti*, fondati sulla semicontinuità, è stata così feconda di risultati che, naturalmente, ha fatto subito pensare alla possibilità di estenderli sia agli integrali multipli, sia agli integrali

$$J = \int_C F(x_1 x_2 \ldots x_n ;\; x_1' x_2' \ldots x_n')ds \tag{1}$$

relativa ad una curva C di uno spazio ad n dimensioni.

Riguardo agli integrali multipli, le ricerche sono state iniziate dallo stesso prof. TONELLI e da alcuni suoi scolari come anche da altri, direttamente (o indirettamente) da Lui inspirati. L' estensione invece agli integrali del tipo (1) è stata fatta principalmente da americani, i quali però, dato anche che si riferivano agli integrali non in forma parametrica, hanno considerato quasi sempre la funzione E di WEIERSTRASS, cioè la funzione definita simbolicamente da

$$E(x, y, y', \bar{y}') = F(x, y, \bar{y}') - F(x, y, y') - (\bar{y}' - y')F_{y'}(xyy') \text{ (}^1\text{)},$$

la quale si presta allo scopo meglio della funzione di LEGENDRE-CLEBSCH.

$$Q = \Sigma\, F_{y_i' y_k'} \eta_i' \eta_k'.$$

(1) Vedi p. es. la Memoria del GRAVES in « Annals of Mathematics », 1927.

Inoltre la funzione Q, che è quella che sostituisce nel problema spaziale la funzione F_1 del caso piano (e così largamente usata dal TONELLI [2]), come risulta evidente dalla sua definizione, non si presta certo agevolmente ad un esame completo rispetto alla sua variazione di segno e forse anche in ciò è da ricercarsi un'altra delle ragioni della preferenza data alla E.

2. Da questa considerazione discende appunto il perchè del presente lavoro, suggeritomi dallo scopo delle mie ricerche future che è quello di applicare i metodi diretti del Calcolo delle Variazioni al così detto *problema di Lagrange* (ricerche consigliatemi dal prof. TONELLI).

Esaminando i varii casi pratici più importanti del problema di LAGRANGE (p. es. il problema delle geodetiche, quello della catenaria in un mezzo resistente, ecc.) si vede che la funzione $F(x_1 x_2 x_3, x_1' x_2' x_3')$ con la quale abbiamo da trattare, ha sempre una forma abbastanza semplice; mi venne perciò in mente di ricercare se in tali casi non fosse possibile sostituire alla funzione Q una funzione f_1 più semplice e che ugualmente si prestasse all'applicazione dei metodi diretti ai problemi in discorso.

3. La possibilità di applicare la funzione Q ai metodi diretti per la ricerca degli estremi degli integrali spaziali del tipo (1) è fornita dall'esistenza di una formula, dovuta al BLISS, che lega la E alla Q; formula del tutto analoga a quella nota di SCHWARZ per il caso piano.

Io farò vedere, mediante una dimostrazione semplicissima, come una formula analoga valga anche per il caso particolare da me esaminato, sostituendo alla Q la mia funzione f_1.

Inoltre, mediante la funzione da me introdotta, dimostrerò una condizione necessaria per la semicontinuità, per mostrare come effettivamente i bei risultati del TONELLI possano estendersi anche al caso di $n > 2$.

Infine, dalle note equazioni di EULERO, ricaverò, per il caso particolare in discorso, una proprietà geometrica per le estremali.

4. L'obbiezione che si può fare all'introduzione della mia funzione f_1, atta a sostituire la Q, è che tale funzione serve solo in casi particolari; deve però essere riconosciuto che, in quei casi particolari in cui la f_1 può essere adoperata, i risultati e le dimostrazioni acquistano forma più semplice e più espressiva ed inoltre le dimostrazioni si ottengono come immediate estensioni di quelle del TONELLI.

---

[2] Vedi TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. 1 e 2.

§ II. Caso in cui è possibile sostituire la funzione Q di Legendre-Clebsch mediante una funzione più semplice. Relativa formula di Schwarz.

5. Sia l'integrale spaziale

$$J = \int_C F(x_1 x_2 \dots x_n ;\ x_1' x_2' \dots x_n') ds$$

e sulla funzione

$$F(xx') \equiv F(x_1 x_2 \dots x_n ;\ x_1' x_2' \dots x_n')$$

facciamo le ipotesi analoghe a quelle che si fanno nel caso piano ([3]); supponiamo poi, per semplicità di scrittura, che sia $n = 3$, non diminuendosi con ciò per niente la generalità di quanto diremo.

Se poniamo per brevità $F_{ik} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i' \partial x_k'}$, poichè la $F(xx')$ è positivamente omogenea di primo grado, avremo

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1' F_{11} + x_2' F_{12} + x_3' F_{13} = 0, \\ x_1' F_{12} + x_2' F_{22} + x_3' F_{23} = 0, \quad \| F_{ik} \| = 0, \\ x_1' F_{13} + x_2' F_{23} + x_3' F_{33} = 0. \end{cases}$$

Supponiamo ora che esista una funzione

$$f_1 \equiv f_1(x, x'),$$

tale che sia

$$(3) \qquad f_1 = \frac{F_{11}}{x_2'^2 + x_3'^2} = \frac{F_{22}}{x_1'^2 + x_3'^2} = \frac{F_{33}}{x_1'^2 + x_2'^2} = \frac{-F_{ik}}{x_i' x_k'} \ ([4]), \quad (i \neq k);$$

in tale ipotesi le (2) sono evidentemente soddisfatte, come si verifica subito con un calcolo immediato, ed avremo per la funzione

$$Q(r, \rho) \equiv \Sigma F_{ik} \eta_i' \eta_k',$$

dove con r si indica la direzione di coseni $(x_1' x_2' x_3')$ e con ρ quella di coseni $(\eta_1' \eta_2' \eta_3')$:

$$(4) \qquad \begin{cases} Q(r, \rho) = f_1(x, x') \{ (x_2'^2 + x_3'^2)\rho_1'^2 + (x_1'^2 + x_3'^2)\rho_2'^2 + (x_1'^2 + x_2'^2)\rho_3'^2 - \\ \qquad - 2x_1' x_2' \rho_1' \rho_2' - 2x_1' x_3' \rho_1' \rho_3' - 2x_2' x_3' \rho_2' \rho_3' \} = \\ = f_1(x, x') \{ (x_2' \rho_1' - x_1' \rho_2')^2 + (x_3' \rho_2' - x_2' \rho_3')^2 + (x_1' \rho_3' - x_3' \rho_1')^2 \}. \end{cases}$$

([3]) Vedi TONELLI, *Fondamenti....*, Vol. 1, pag. 203-4.

([4]) Supponendo, al solito, la terna x_1', x_2', x_3' normalizzata, non possono essere contemporaneamente nulle tutte e tre le x' e quindi uno almeno di questi rapporti può esser sempre considerato.

Ne segue senz'altro che il segno di Q sarà sempre quello di f_1, e che sarà $Q=0$ per $f_1=0$ e viceversa, escludendo naturalmente il caso in cui ρ_1', ρ_2', ρ_3' siano proporzionali rispettivamente ad x_1', x_2', x_3', il che deve esser sempre escluso, perchè la Q va appunto considerata per $(r) \mp (\rho)$.

Un caso notevole in cui valgono senz'altro le (3) è dato dal seguente

$$\text{(I)} \qquad F(xx') \equiv \varphi(x_1, x_2, x_3)\sqrt{x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2} + \varphi_1(x_1, x_2, x_3)x_1' + \\ + \varphi_2(x_1, x_2, x_3)x_2' + \varphi_3(x_1, x_2, x_3)x_3',$$

ed in quest'ipotesi si ha

$$\text{(I}_1\text{)} \qquad f_1(xx') = \frac{\varphi(x_1, x_2, x_3)}{(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

ESEMPII. — *a)* Sia $F \equiv \sqrt{x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2}$; avremo

$$f_1(x;\, x') = \frac{1}{(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

b) Sia $F \equiv (x_1+x_2+x_3)\sqrt{x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2}$; avremo

$$f_1(x;\, x') = \frac{x_1+x_2+x_3}{(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

positiva in tutto il campo $x_1+x_2+x_3>0$.

c) Sia $F \equiv x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3'$; avremo

$$f_1 \equiv 0.$$

6. Vediamo ora come sotto l'ipotesi dell'esistenza della f_1 si possa dedurre, in maniera semplice, una relazione fra tale funzione e quella E di WEIERSTRASS; relazione del tutto analoga a quella di SCHWARZ per il caso piano.

Per questo ricordiamo la definizione della E nel caso parametrico; si ha

$$E(x_1, x_2, x_3;\, x_1', x_2', x_3';\, \bar{x}_1'\bar{x}_2'\bar{x}_3') \equiv F(x_1, x_2, x_3;\, \bar{x}_1', \bar{x}_2', \bar{x}_3') - \\ - \sum_{1}^{3}{}_i\, \bar{x}_i' F_{x_i'}(x_1, x_2, x_3;\, x_1', x_2', x_3'),$$

da cui risulta senz'altro che la E è positivamente omogenea di grado zero rispetto alle x_i' e di grado 1 rispetto alle $\bar{x}_i'$. Potremo allora supporre senz'altro normalizzata la terna x_i', e dapprima supporremo normalizzata anche la terna $\bar{x}_i'$; detta poi r la direzione di coseni di direzione (x_i') e $\tilde{r}$ quella di coseni di direzione $(\dot{\bar{x}}_i')$, potremo scrivere evidentemente

$$(5)\quad E(x, r, \tilde{r}) = \cos\tilde{\alpha}\,\{ F_{x_1'}(x, \tilde{r}) - F_{x_1'}(x, r) \} + \cos\tilde{\beta}\,\{ F_{x_2'}(x, \tilde{r}) - F_{x_2'}(x, r) \} + $$
$$+ \cos\tilde{\gamma}\,\{ F_{x_3'}(x, \tilde{r}) - F_{x_3'}(x, r) \}$$

dove si è posto

$$\cos\tilde{\alpha} = \tilde{x}_1', \quad \cos\tilde{\beta} = \tilde{x}_2'. \quad \cos\tilde{\gamma} = \tilde{x}_3'.$$

Diciamo poi r_0 la direzione secondo cui il piano passante per l'origine,

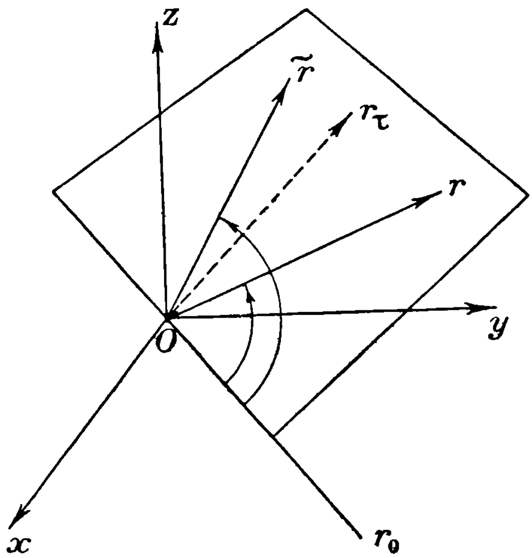


Fig. 1

e determinato dalle due direzioni r e $\tilde{r}$, sega il piano (xy) e poniamo (vedi fig. 1)

$$\tau_0 \equiv \widehat{r_0 r}, \quad \tau_1 \equiv \widehat{r_0 \tilde{r}}$$

e in generale

$$\tau \equiv \widehat{r_0 r_\tau}$$

dove r_τ indica una qualunque direzione, giacente sul piano $(r, \tilde{r})$ e passante per l'origine, di coseni direttori

$$\cos\alpha(\tau), \quad \cos\beta(\tau), \quad \cos\gamma(\tau).$$

Assumendo come parametro variabile τ, la (5) può anche scriversi

$$E(x, r, \tilde{r}) = \cos\tilde{\alpha}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{d}{d\tau}F_{x_1'}(x, r_\tau)d\tau + \cos\tilde{\beta}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{d}{d\tau}F_{x_2'}(x, r_\tau)d\tau + \cos\tilde{\gamma}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{d}{d\tau}F_{x_3'}(x, r_\tau)d\tau.$$

Ma si ha, evidentemente,

$$\frac{d}{d\tau} F_{x_1'}(x, r_\tau) = - F_{11} \operatorname{sen} \alpha \cdot \alpha'(\tau) - F_{12} \operatorname{sen} \beta \cdot \beta'(\tau) - F_{13} \operatorname{sen} \gamma \cdot \gamma'(\tau) =$$
$$= f_1 \{ -(\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \operatorname{sen} \alpha \cdot \alpha'(\tau) + \cos \alpha \cos \beta \operatorname{sen} \beta \cdot \beta'(\tau) + $$
$$+ \cos \alpha \cos \gamma \operatorname{sen} \gamma \cdot \gamma'(\tau) \},$$

e analogamente per

$$\frac{d}{d\tau} F_{x_2'}(x, r_\tau), \quad \frac{d}{d\tau} F_{x_3'}(x, r_\tau).$$

Introducendo nella precedente espressione di $E(x, r, \tilde{r})$, avremo

$$E(x, r, \tilde{r}) = \cos \tilde{\alpha} \int_{\tau_0}^{\tau_1} f_1 \{ -(\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \operatorname{sen} \alpha \cdot \alpha'(\tau) + \cos \alpha \cos \beta \operatorname{sen} \beta \cdot \beta'(\tau) +$$
$$+ \cos \alpha \cos \gamma \operatorname{sen} \gamma \cdot \gamma'(\tau) \} d\tau +$$
$$+ \cos \tilde{\beta} \int_{\tau_0}^{\tau_1} f_1 \{ \cos \alpha \cos \beta \operatorname{sen} \alpha \cdot \alpha'(\tau) - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) \operatorname{sen} \beta \cdot \beta'(\tau) +$$
$$+ \cos \beta \cos \gamma \operatorname{sen} \gamma \cdot \gamma'(\tau) \} d\tau +$$
$$+ \cos \tilde{\gamma} \int_{\tau_0}^{\tau_1} f_1 \{ \cos \alpha \cos \gamma \operatorname{sen} \alpha \cdot \alpha'(\tau) + \cos \beta \cos \gamma \operatorname{sen} \beta \cdot \beta'(\tau) -$$
$$- (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) \operatorname{sen} \gamma \cdot \gamma'(\tau) \} d\tau =$$
$$= \cos \tilde{\alpha} \int_{\tau_0}^{\tau_1} f_1 \{ - \operatorname{sen}^3 \alpha \cdot \alpha'(\tau) + \cos \alpha \cdot (\cos \beta \operatorname{sen} \beta \cdot \beta'(\tau) +$$
$$+ \cos \gamma \cdot \operatorname{sen} \gamma \cdot \gamma'(\tau)) \} d\tau + \dots .$$

Ma $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ e derivando rispetto a τ:

$$\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \cdot \alpha'(\tau) + \cos \beta \operatorname{sen} \beta \cdot \beta'(\tau) + \cos \gamma \operatorname{sen} \gamma \cdot \gamma'(\tau) = 0,$$

da cui anche

$$E(x, r, \tilde{r}) = \cos \tilde{\alpha} \int_{\tau_0}^{\tau_1} f_1 \{ - \operatorname{sen}^3 \alpha \cdot \alpha'(\tau) - \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha \cdot \alpha'(\tau) \} d\tau +$$
$$+ \cos \tilde{\beta} \int_{\tau_0}^{\tau_1} f_1 \{ - \operatorname{sen}^3 \beta \cdot \beta'(\tau) - \cos^2 \beta \operatorname{sen} \beta \cdot \beta'(\tau) \} d\tau +$$
$$+ \cos \tilde{\gamma} \int_{\tau_0}^{\lambda_1} f_1 \{ - \operatorname{sen}^3 \gamma \cdot \gamma'(\tau) - \cos^2 \gamma \operatorname{sen} \gamma \cdot \gamma'(\tau) \} d\tau,$$

ed introducendo $\cos\tilde{\alpha}$, $\cos\tilde{\beta}$, $\cos\tilde{\gamma}$ entro i segni d'integrale:

$$E(x, r, \tilde{r}) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} - f_1 \{ \cos\tilde{\alpha} \operatorname{sen}\alpha \cdot \alpha'(\tau) + \cos\tilde{\beta} \operatorname{sen}\beta \cdot \beta'(\tau) + \cos\tilde{\gamma} \operatorname{sen}\gamma \cdot \gamma'(\tau) \} \, d\tau.$$

Ma è anche

$$\cos \widehat{r_\tau \tilde{r}} = \cos\tilde{\alpha}\cos\alpha + \cos\tilde{\beta}\cos\beta + \cos\tilde{\gamma}\cos\gamma = \cos(\tau_1 - \tau)$$

da cui derivando rispetto a τ

$$-\cos\tilde{\alpha}\operatorname{sen}\alpha \cdot \alpha'(\tau) - \cos\tilde{\beta}\operatorname{sen}\beta \cdot \beta'(\tau) - \cos\tilde{\gamma}\operatorname{sen}\gamma \cdot \gamma'(\tau) = \operatorname{sen}(\tau_1 - \tau)$$

e quindi infine

$$E(x, r, \tilde{r}) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} f_1(x, r_\tau) \operatorname{sen}(\tau_1 - \tau) d\tau \tag{6}$$

che è la formula cercata.

7. Applicando alla (6) il teorema del valor medio, come si vede subito esser lecito ed indicando con $\bar{\tau}$ un valore opportuno compreso tra τ_0 e τ_1, abbiamo

$$E(x, r, \tilde{r}) = f_1(x, r_{\bar{\tau}}) \int_{\tau_0}^{\tau_1} \operatorname{sen}(\tau_1 - \tau) d\tau = f_1(x, r_{\bar{\tau}}) \{ 1 - \cos(\tau_1 - \bar{\tau}) \}$$

da cui anche

$$f_1(x, r) = \lim_{\tau_1 \to \tau} \frac{E(x, r_\tau, r_{\tau_1})}{1 - \cos(\tau_1 - \tau)}. \tag{7}$$

Da queste formule si traggono delle conseguenze del tutto analoghe a quelle che si traggono nel caso piano e cioè: se in un punto x_1, x_2, x_3 e per qualunque r è $f_1 \geq 0$, è anche $E(x, r, \tilde{r}) \geq 0$ e viceversa. Se poi per una certa r e per tutte le $\tilde{r}$ entro un cono di vertice l'origine, di asse r e di apertura sufficientemente piccola, è $f_1(x, \tilde{r}) \geq 0$, sarà anche per le stesse $\tilde{r}$, $E(x, r, \tilde{r}) \geq 0$ e viceversa. Se, infine, per ogni r è $f_1(x, r) \equiv 0$, è sempre $E(x, r, \tilde{r}) = 0$, ed inoltre

$$F \equiv \varphi_1(x_1, x_2, x_3)x_1' + \varphi_2(x_1, x_2, x_3)x_2' + \varphi_2(x_1, x_2, x_3)x_3'.$$

8. OSSERVAZIONE. — Come si è già detto al § I, mediante la Q di LEGENDRE si possono estendere i risultati dati dal prof TONELLI per il caso piano. appunto in virtù della formula data dal BLISS, che lega la E alla Q, per quanto qualche volta tale estensione non risulti immediata; inoltre i

calcoli mediante la Q riescono quanto mai laboriosi. Io ora voglio invece mostrare come la suddetta estensione risulti immediata nel caso da me considerato, mediante l'uso della funzione f_1.

A questo scopo dimostrerò una condizione necessaria per la semicontinuità in tutto il campo.

§ III. **Una condizione necessaria per la semicontinuità in tutto il campo.**

9. Dimostriamo la seguente condizione:

Nel caso in cui la F(x, x') *sia della forma* (I), *condizione necessaria affinchè l'integrale*

$$J_C = \int_C F(x_1 x_2 x_3 ;\ x_1' x_2' x_3') ds$$

sia una funzione semicontinua in tutto il campo A (5), *è che per ogni terna normalizzata* $(x_1' x_2' x_3')$ *e per tutti i punti* $(x_1 x_2 x_3)$ *interni al campo e sulla frontiera, sia*

$$f_1(x, x') \geq 0 \ (^6).$$

A questo scopo ricordando che si ha

$$f_1(x, x') = \frac{F_{11}}{x_2'^2 + x_3'^2} = \ldots,$$

procediamo in modo del tutto analogo a quello che tiene il prof. TONELLI, per dimostrare la condizione analoga nel caso piano.

Supponiamo cioè che in un punto P_0 interno al campo e per una certa direzione r_0 di coseni direttori $\cos\alpha_0$, $\cos\beta_0$, $\cos\gamma_0$ si abbia

$$f_1(x_1^0 x_2^0 x_3^0 ;\ \cos\alpha_0 \cos\beta_0 \cos\gamma_0) < 0;$$

allora, per la continuità della f_1 rispetto ai suoi parametri, sarà anche

$$f_1(x_1 x_2 x_3 ;\ \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma) < -\eta \tag{8}$$

(5) Per le notazioni, vedi TONELLI, *Fondamenti....*, Vol. 1, pag. 203.

(6) Tale condizione si può dimostrare che è vera in generale, considerando però la Q, e la dimostrazione si conduce in modo del tutto analogo a quello tenuto nel testo, servendoci della formula già ricordata del BLISS, che lega la Q alla E.

con $\eta > 0$, sufficientemente piccolo, per tutti i valori soddisfacenti alle limitazioni

$$|x_i - x_i^0| < \delta; \quad |\alpha - \alpha_0| < \delta, \quad |\beta - \beta_0| < \delta, \quad |\gamma - \gamma_0| < \delta$$

con δ opportuno, dipendente da η.

Per il punto P_0 conduciamo un segmento di lunghezza $l < \delta$, di coseni direttori

$$\cos\alpha_0, \quad \cos\beta_0, \quad \cos\gamma_0$$

ed immaginiamo il cono di vertice P_0, di asse l e di angolo di apertura δ; dopo ciò prendiamo per P_0 un segmento l_1, interno al cono e nel piano (ll_1) costruiamo una spezzata formata da tanti triangoli isosceli aventi per base l e per angoli alla base l'angolo $\widehat{ll_1}$ (vedi fig. 2). Detta C_n la curva così ottenuta e C_0 il segmento l, avremo

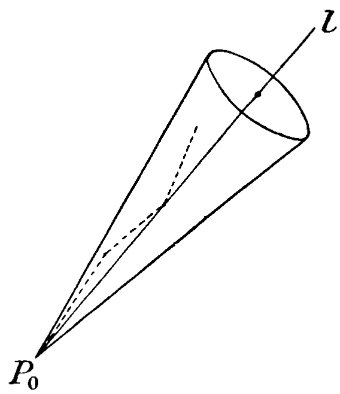


Fig. 2

$$\begin{cases} C_0): x_1 = x_1^0 + s\cos\alpha_0, \quad x_2 = x_2^0 + s\cos\beta_0, \quad x_3 = x_3^0 + s\cos\gamma_0 \quad (0 \le s \le l) \\ C_n): x_{1,n} = x_{1,n}(s_n), \quad x_{2,n} = x_{2,n}(s_n), \quad x_{3,n} = x_{3,n}(s_n); \end{cases}$$

indicando poi con $\cos\tilde{\alpha}$, $\cos\tilde{\beta}$, $\cos\tilde{\gamma}$ i coseni direttori di l_1 e con θ l'angolo $\widehat{ll_1}$, avremo

$$\begin{cases} s_n = \dfrac{s}{\cos\theta} \\ \dfrac{dx_1}{ds} = \cos\alpha_0, \qquad \dfrac{dx_2}{ds} = \cos\beta_0, \qquad \dfrac{dx_3}{ds} = \cos\gamma_0 \\ \dfrac{dx_{1,n}}{ds} = \dfrac{dx_{1,n}}{ds_n} \cdot \dfrac{ds_n}{ds} = \dfrac{\cos\tilde{\alpha}}{\cos\theta}, \quad \dfrac{dx_{2,n}}{ds} = \dfrac{\cos\tilde{\beta}}{\cos\theta}, \quad \dfrac{dx_{3,n}}{ds} = \dfrac{\cos\tilde{\gamma}}{\cos\theta} \end{cases}$$

e quindi

$$\Delta J = J_{C_n} - J_{C_0} = \int_{C_n} F(x_n;\, x_n')ds_n - \int_{C_0} F(x;\, x')ds =$$

$$= \int_0^l \{ F(x_n;\, x_n') - F(x;\, x') \} ds,$$

da cui, senz' altro

$$\text{(9)} \qquad \Delta J = \int_0^l \{ F(x_n;\, x_n') - F(x;\, x_n') \} ds + \int_0^l \{ F(x;\, x_n') - F(x;\, x') \} ds.$$

Ma si ha, per la funzione E di WEIERSTRASS

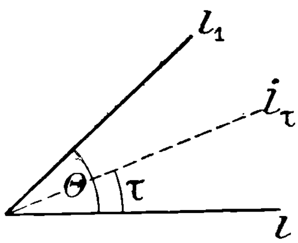


Fig. 3

$$E(x, l, l_1) = F(x; x_n') - \bar{x}'_{1,n} F_{x_1'}(x; x') - \\ - \bar{x}'_{2,n} F_{x_2'}(x; x') - \bar{x}'_{3,n} F_{x_3'}(x; x') =$$

$$= \sqrt{x'^2_{1,n} + x'^2_{2,n} + x'^2_{3,n}} \int_0^\theta f_1(x, l_\tau) \operatorname{sen}(\theta - \tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} \int_0^\theta f_1(x, l_\tau) \operatorname{sen}(\theta - \tau) d\tau$$

da cui

$$F(x; x_n') - F(x; x') = \sum_1^3{}_i\, x'_{i,n} F_{x'_i}(x; x') + \frac{1}{\cos\theta} \int_0^\theta f_1(x, l_\tau) \operatorname{sen}(\theta - \tau) d\tau - F(x; x')$$

$$= \sum_1^3{}_i\, (x'_{i,n} - x_i') F_{x'_i}(x; x') + \frac{1}{\cos\theta} \int_0^\theta f_1(x, l_\tau) \operatorname{sen}(\theta - \tau) d\tau$$

e perciò

$$\int_0^l \{ F(x; x_n') - F(x; x') \} ds = \int_0^l \sum_1^3{}_i\, (x'_{i,n} - x_i') F_{x'_i}(x; x') ds +$$

$$+ \frac{1}{\cos\theta} \int_0^l \left\{ \int_0^\theta f_1(x, l_\tau) \operatorname{sen}(\theta \quad \tau) d\tau \right\} ds$$

e per la (8)

$$\int_0^l \{ F(x; x_n') - F(x; x') \} ds < \int_0^l \sum_1^3{}_i\, (x'_{i,n} - x_i') F_{x'_i}(x; x') ds - \frac{\eta(1 - \cos\theta) l}{\cos\theta}.$$

Introducendo questa diseguaglianza nella (19) avremo quindi

$$\Delta J < \int_0^l \{ F(x_n; x_n') - F(x; x_n') \} ds + \int_0^l \sum_1^3{}_i\, (x'_{i,n} - x_i') F_{x'_i} ds - \frac{\eta(1 - \cos\theta) l}{\cos\theta}$$

da cui senz'altro, come per il caso piano [7],

$$\Delta J < - \varepsilon$$

con $\varepsilon > 0$, piccolo a piacere. Ne segue che ΔJ non sarebbe semicontinuo inferiormente sul segmento l.

In tal modo la condizione necessaria risulta stabilita.

---

[7] Vedi TONELLI, *Fondamenti....*, Vol. 1, pag. 234.

10. OSSERVAZIONE. — Esaminando questa dimostrazione, che a tale scopo abbiamo appunto eseguita, risulta evidente che, salvo le necessarie modificazioni di linguaggio e di simboli, essa è *identica* a quella che da il prof. TONELLI; analogamente si potrebbe verificare l'identità delle dimostrazioni per tutti gli altri risultati che si hanno sia per le condizioni necessarie che per quelle sufficienti.

§ IV. Proprietà geometrica delle estremali di un integrale spaziale, nel caso che la funzione $F(x; x')$ sia del tipo del paragrafo II.

11. Cominciamo a supporre una $F(x; x')$ di tipo qualunque, perchè naturalmente soddisfacente alle solite condizioni generali di continuità, derivabilità ed omogeneità, analoghe a quelle che si suppongono per il caso piano.

Sia α un arco di estremale, di classe 2, tutto interno al campo A [8] di esistenza per la $F(x; x')$; allora le equazioni di EULERO [9]

$$F_{x_i} - \frac{d}{ds} F_{x_i'} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

divengono, tenendo presente che F_{x_i} sono, come la F, positivamente omogenee di primo grado rispetto alle x_i':

$$(10) \begin{cases} F_{x_1} - \dfrac{d}{ds} F_{x_1'} = (F_{x_1 x_2'} - F_{x_1' x_2}) x_2' + (F_{x_1 x_3'} - F_{x_1' x_3}) x_3' - F_{x_1' x_1'} x_1'' - \\ \qquad\qquad - F_{x_1' x_2'} x_2'' - F_{x_1' x_3'} x_3'' = 0 \\ F_{x_2} - \dfrac{d}{ds} F_{x_2'} = (F_{x_2 x_3'} - F_{x_2' x_3}) x_3' + (F_{x_2 x_1'} - F_{x_2' x_1}) x_1' - F_{x_2' x_2'} x_2'' - \\ \qquad\qquad - F_{x_2 x_3'} x_3'' - F_{x_2' x_1'} x_1'' = 0 \\ F_{x_3} - \dfrac{d}{ds} F_{x_3'} = (F_{x_3 x_1'} - F_{x_3' x_1}) x_1' + (F_{x_3 x_2'} - F_{x_3' x_2}) x_2' - F_{x_3' x_3'} x_3'' - \\ \qquad\qquad - F_{x_3' x_1'} x_1'' - F_{x_3' x_2'} x_2'' = 0. \end{cases}$$

Indicando ora per brevità con M_1, M_2, M_3 i primi membri delle equazioni di EULERO, cioè ponendo

$$M_i = F_{x_i} - \frac{d}{ds} F_{x_i'} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

[8] Per le notazioni, vedi, al solito, TONELLI, *Fondamenti....*, Vol. 1, pag. 203.

[9] La limitazione al caso di tre variabili è dovuto solo a semplicità di scrittura.

dalle (10) otteniamo senz' altro

$$M_1 x_1' + M_2 x_2' + M_3 x_3' \equiv 0 \tag{11}$$

il che dimostra come le tre equazioni di Eulero *non siano indipendenti*, in quanto la (11) è una identità.

12. Ciò premesso, introduciamo l'ipotesi (I), cioè che la nostra $F(x; x')$ sia della forma

$$F(x; x') \equiv \varphi(x_1 x_2 x_3) \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} + \sum_1^3 {}_i \, \varphi_i(x_1 x_2 x_3) x_i';$$

in tal caso possiamo considerare la funzione $f_1(x; x')$, tale che

$$\left\{\begin{array}{l} F_{x_1'x_1'} = (x_2'^2 + x_3'^2) f_1, \quad F_{x_2'x_2'} = (x_3'^2 + x_1'^2) f_1, \quad F_{x_3'x_3'} = (x_1'^2 + x_2'^2) f_1 \\ F_{x_1'x_2'} = - x_1' x_2' f_1, \quad F_{x_2'x_3'} = - x_2' x_3' f_1, \quad F_{x_3'x_1'} = - x_1' x_3' f_1 . \end{array}\right. \tag{12}$$

Introducendo allora le (12) nelle (10) risulta

$$\begin{array}{c} (F_{x_1 x_2'} - F_{x_1' x_2}) x_2' + (F_{x_1 x_3'} - F_{x_1' x_3}) x_3' = \\ - f_1 \{ (x_1' x_2'' - x_1'' x_2') x_2' + (x_1' x_3'' - x_1'' x_3') x_3' \} \end{array} \tag{13}$$

e le analoghe circolando sugli indici; quadrando e sommando le (13) otteniamo

$$\left\{\begin{array}{c} \{ (F_{x_1 x_2'} - F_{x_1' x_2})^2 + (F_{x_3 x_2'} - F_{x_3' x_2})^2 \} x_2'^2 + \{ (F_{x_1 x_3'} - F_{x_1' x_3})^2 + \\ + (F_{x_2 x_3'} - F_{x_2' x_3})^2 \} x_3'^2 + \{ (F_{x_2 x_1'} - F_{x_2' x_1})^2 + (F_{x_3 x_1'} - F_{x_3' x_1})^2 \} x_1'^2 + \\ + 2(F_{x_1 x_2'} - F_{x_1' x_2})(F_{x_1 x_3'} - F_{x_1' x_3}) x_2' x_3' - 2(F_{x_1 x_2'} - F_{x_1' x_2})(F_{x_2 x_3'} - F_{x_2' x_3}) x_1' x_2' + \\ + 2(F_{x_3 x_1'} - F_{x_3' x_1})(F_{x_3 x_2'} - F_{x_3' x_2}) x_1' x_2' = \\ = f_1^2 \{ (x_1' x_2'' - x_1'' x_2')^2 (x_1'^2 + x_2'^2) + (x_1' x_3'' - x_1'' x_3')^2 (x_1'^2 + x_3'^2) + \\ + (x_2' x_3'' - x_2'' x_3')^2 (x_2'^2 + x_3'^2) + 2(x_1' x_2'' - x_1'' x_2')(x_1' x_3'' - x_1'' x_3') x_2' x_3' - \\ - 2(x_1' x_3'' - x_1'' x_2')(x_2' x_3'' - x_2'' x_3') x_1' x_3' + 2(x_1' x_3'' - x_1'' x_3')(x_2' x_3'' - x_2'' x_3') x_1' x_2' \} . \end{array}\right. \tag{14}$$

Cominciamo ora a trasformare il secondo membro della (14); per questo sostituiamo al posto di

$$x_1'^2 + x_2'^2, \quad x_2'^2 + x_3'^2, \quad x_3'^2 + x_1'^2 \tag{a}$$

rispettivamente

$$1 - x_3'^2, \quad 1 - x_1'^2, \quad 1 - x_2'^2 \tag{b}$$

ed avremo

$$f_1^2 \{ (x_1' x_2'' - x_1'' x_2')^2 + (x_2' x_3'' - x_1'' x_3')^2 + (x_3' x_1'' - x_3'' x_1')^2 - \Delta^2 \}, \tag{15}$$

dove abbiamo, per semplicità, posto

$$\Delta = (x_2'x_3'' - x_2''x_3')x_1' - (x_1'x_3'' - x_1''x_3')x_2' + (x_1'x_2'' - x_1''x_2')x_3'.$$

Ma si ha senz'altro

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = 0$$

e quindi la (15) diviene

$$(16) \qquad f_1^2 \{ (x_1'x_2'' - x_1''x_2')^2 + (x_2'x_3'' - x_2''x_3')^2 + (x_3'x_1'' - x_3''x_1')^2 \}.$$

D' altra parte, indicando con ρ il raggio di prima curvatura della nostra estremale α, si ha la nota formula

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left\| \begin{matrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{matrix} \right\|^2}$$

e perciò l'espressione (16) risulta semplicemente

$$(17) \qquad \frac{f_1^2}{\rho^2}.$$

13. Consideriamo ora il primo membro della (14) e trasformiamolo in modo analogo a come si è fatto per il secondo, cioè sostituiamo alle espressioni (a) le (b); avremo questa volta

$$(18) \qquad \begin{aligned} &(F_{x_1x_2'} - F_{x_1'x_2})^2 + (F_{x_2x_3'} - F_{x_2'x_3})^2 + (F_{x_3x_1'} - F_{x_3'x_1})^2 - \\ &- \{ (F_{x_1x_2'} - F_{x_1'x_2})x_3' + (F_{x_2x_3'} - F_{x_2'x_3})x_1' + (F_{x_3x_1'} - F_{x_3'x_1})x_2' \}^2 \end{aligned}$$

uguagliando i valori (17) e (18), troviamo finalmente

$$(19) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{(F_{x_1x_2'} - F_{x_1'x_2})^2 + (F_{x_2x_3'} - F_{x_2'x_3})^2 + (F_{x_3x_1'} - F_{x_3'x_1})^2 -}}{f_1} \; \frac{-\overline{\{ (F_{x_1x_2'} - F_{x_1'x_2})x_3' + (F_{x_2x_3'} - F_{x_2'x_3})x_1' + (F_{x_3x_1'} - F_{x_3'x_1})x_2' \}^2}}{f_1}$$

che è la formula cercata [10], la quale estende allo spazio, nel caso dell'ipotesi (I), la nota formula del caso piano

$$\frac{1}{\rho} = \frac{F_{x'y} - F_{xy'}}{F_1}.$$

[10] Questa formula (19) va letta come se nel secondo membro tutto comparisse sotto un unico radicale (necessità di spazio hanno obbligato a scriverla come nel testo).

14. ESEMPII. — (Vedi numero 5 in fine):

a) Sia $F \equiv \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}$; avremo senz'altro

$$\frac{1}{\rho} = 0.$$

b) Sia $F \equiv (x_1 + x_2 + x_3) \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}$; avremo

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (x_3' - x_2')^2 + (x_1' - x_3')^2}.$$

The analogue of Weyl's conformal curvature tensor in a Michal functional geometry.

by T. S. PETERSON (*) (Princeton, N. J; U. S. A.).

The purpose of this note is to obtain a set of functionals conformally invariant in a Michal functional geometry.

INTRODUCTION

In a series of papers (1) A. D. MICHAL has investigated the properties and invariants of various types of functional geometries. The particular MICHAL functional geometry considered in this paper is based on the defining metric

$$(0.1) \qquad ds^2 = \int_a^b \int_a^b g[y(s);\ \alpha, \beta]\delta y(\alpha)\delta y(\beta)d\alpha d\beta + \int_a^b g[y(s);\ \alpha]\delta^2 y(\alpha)d\alpha$$

where the functionals $g[y(s);\ \alpha, \beta]$ and $g[y(s);\ \alpha]$ are continuous in their functional argument $y(s)$ and also continuous as a function of α and β. The first functional is assumed symmetric in α and β and the second is assumed non-vanishing for $a \leqq \alpha \leqq b$. For the above metric a functional tensorial analysis has been developed which extends in a somewhat analogous manner the fundamental concepts of current n-dimensional differential geometries.

We will as usual adhere to the following notation throughout the paper; (1) *to represent the variables of functionals as indices,* (2) *to signify by the repetition of an index, once as a subscript and once as a superscript, an integration on that variable throughout the fundameutal interval* (a, b). *A parenthesis around a variable will denote an exception to this integration convention.*

(*) The author is indebted to prof. A. D. MICHAL for calling his attention to this problem and for helpful suggestions and criticisms in the preparation of this paper.

(1) Cf. « Amer. Jour. of Math. », Vol. 50 (1928); « Proc. of the Nat. Acad. of Sc. », Vol. 16 (1930), pp. 88, 162, 165, Vol. 17 (1931), p. 217. Unpublished papers cf. abstracts in « Bull. of A. M. S. », 1927-1931.

A functional space having as the defining metric

$$ds^2 = \lambda[y(s)] \{ g_{\alpha\beta}[y(s)]\delta y^\alpha \delta y^\beta + g_\alpha[y(s)](\delta y^\alpha)^2 \}, \tag{0.2}$$

where $\lambda[y(s)]$ is an arbitrary continuous functional, will by definition constitute one of a class of functional spaces conformal to the functional space defined by (0.1). It is the object of this paper to derive certain functional invariants of (0.2) under transformations of the form

$$\bar{g}_{\alpha\beta}[y(s)] = \lambda[y(s)] g_{\alpha\beta}[y(s)], \quad \bar{g}_\alpha[y(s)] = \lambda[y(s)] g_\alpha[y(s)].$$

This class of invariants will by analogy be called the functional conformal invariants of the differential geometry based on the metric (0.1).

1. **Definitions and fundamental notions.** — Throughout the paper we shall be concerned with biunique functional transformations

$$y^\alpha = y^\alpha[\bar{y}^s] \tag{1.1}$$

which transform a continuous function $\bar{y}^s$ into a continuous function y^α and which have differentials of the normal form

$$\delta y^\alpha = {}_{\alpha,} y^\alpha \delta \bar{y}^{(\alpha)} + y^\alpha_{,t} \delta \bar{y}^t, \quad ({}_{\alpha,} y^{(\alpha)} \neq 0 \text{ for } a \leqq \alpha \leqq b) \tag{1.2}$$

with non-vanishing FREDHOLM determinants

$$D[y^\alpha_{,t}/_t, y^t] \neq 0.$$

A functional $u_\alpha[y^s]$ which under (1.1) transforms in accordance with the law

$$\bar{u}_\alpha[\bar{y}^s] = u_\alpha[y^s]_{\alpha,} y^{(\alpha)} + u_\sigma[y^s] y^\sigma_{,\alpha} \tag{1.3}$$

will be called a *covariant vector*, while a functional $\xi^\alpha[y^s]$ which under (1.1) transforms in accordance with the law

$$\bar{\xi}^\alpha[\bar{y}^s] = \xi^\alpha[y^s]_{\alpha,} \bar{y}^{(\alpha)} + \xi^\sigma[y^s] \bar{y}^\alpha_{,\sigma} \tag{1.4}$$

will be called a *contravariant vector*. The kernels of (1.4) are the kernels of the inverse transformation to (1.2). *A sequence of functionals of* y^s *which are the coefficients of an absolute multilinear functional form* $Q[\xi_1, \dots, \xi_n; u^1, \dots, u^m]$ *in* n *contravariant vectors* $\xi_1{}^s, \dots, \xi_n{}^s$ *and* m *covariant vectors* $u_s{}^1, \dots, u_s{}^m$ *will be said to constitute an absolute functional tensor of rank* $n + m$, *covariant of rank* n *and contravariant of rank* m.

With a view to defining *inner multiplication* of functional tensors, let us consider two absolute functional forms

$$P[\xi_1, \dots, \xi_n; u^1, \dots, u^m], \quad Q[\eta_1, \dots, \eta_r; v^1, \dots, v^t]$$

with the respective orders as indicated. Taking the variation of P with respect to a contravariant vector and the variation of Q with respect to a covariant vector, or vice versa, we obtain

$$\delta P = p_\alpha \delta \xi_i^\alpha, \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$
$$\delta Q = q^\alpha \delta v_\alpha^j, \qquad (j = 1, 2, \dots, t).$$

Since the variations δP and δQ are in themselves absolute invariants, it is evident that the derived forms p_α and q^α may be considered as a covariant and a contravariant vector respectively. It follows then that the integrated product $p_\alpha q^\alpha$ is an absolute invariant functional form of $n + r - 1$ contravariant vectors and $m + t - 1$ covariant vectors. *We define* $p_\alpha q^\alpha$ *as the inner product of the two functional forms* P *and* Q *with respect to the vectors* ξ_i^α *and* v_α^j.

In order to define *contraction* of functional tensors, let us consider the second variations of the above functional forms each with respect to a covariant and a contravariant vector. We obtain

$$\delta^2 P = p^\alpha \delta u_\alpha^i \delta \xi_k^\alpha + p_\beta^\alpha \delta u_\alpha^i \delta \xi_k^\beta, \qquad (i = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, n)$$
$$\delta^2 Q = q_\alpha \delta v_\alpha^j \delta \eta_l^\alpha + q_\beta^\alpha \delta v_\alpha^j \delta \eta_l^\beta, \qquad (j = 1, \dots, t;\ l = 1, \dots, r).$$

Similarly, as before, an absolute functional form in $n + r - 2$ contravariant vectors and $m + t - 2$ covariant vectors is given by

$$M = p^\alpha q_\alpha + p^\alpha q_\alpha^\alpha + p_\alpha^\alpha q^\alpha + p_\beta^\alpha q_\alpha^\beta. \tag{1.5}$$

This form, M, is by the above definition the inner product of the two functional forms P and Q with respect to two vectors. If we assume now the functional form Q to have the particular coefficients

$$Q[\eta^\alpha;\ v_\alpha] = \delta_\beta^\alpha v_\alpha \eta^\beta + \delta^\alpha v_\alpha \eta^\alpha$$

where the functionals δ_β^α and δ^α are such that $\delta_\beta^\alpha = 0$ and $\delta^\alpha = 1$, we see that the inner product (1.5) reduces to

$$C = \int_a^b p^\alpha d\alpha + p_\alpha^\alpha.$$

We define the absolute functional form C *as the contracted form of* P *with respect to the vectors* u_α^i *and* ξ_k^α.

We assume throughout the paper that all of the functionals considered have normal linear variations; as, for exemple, the coefficients of the metric (0.1)

$$\left\{ \begin{aligned} \delta g_{\alpha\beta} &= {}_{\alpha,}'g_{\alpha\beta}\delta y^{(\alpha)} + {}_{\beta,}'g_{\alpha\beta}\delta y^{(\beta)} + 'g_{\alpha\beta,\sigma}\delta y^\sigma \\ \delta g_\alpha &= {}_{\alpha,}'g_\alpha \delta y^{(\alpha)} + 'g_{\alpha,\sigma}\delta y^\sigma. \end{aligned} \right. \tag{1.6}$$

For the metric (0.1) it may be shown [1] that our space is endowed with a functional symmetric affine connection defined in terms of (0.1) in the following manner [2]

$$(1.7)\quad \begin{cases} \Gamma^i_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{(i)}({}'g_{i\alpha,\beta} + {}'g_{i\beta,\alpha} - {}'g_{\alpha\beta,i}) + \frac{1}{2} g^{i(\alpha)'} g_{\alpha,\beta} + \frac{1}{2} g^{i(\beta)'} g_{\beta,\alpha} \\ \qquad + \frac{1}{2} g^{i\sigma}({}'g_{\sigma\alpha,\beta} + {}'g_{\sigma\beta,\alpha} - {}'g_{\alpha\beta,\sigma}) \\ M^i_\alpha = g^{(i)}\left({}_{\alpha,}{}'g_{i\alpha} - \frac{1}{2}{}'g_{\alpha,i}\right) + \frac{1}{2} g^{i(\alpha)}{}_{\alpha,}{}'g_\alpha + g^{i\sigma}\left({}_{\alpha,}{}'g_{\sigma\alpha} - \frac{1}{2}{}'g_{\alpha,\sigma}\right) \\ N^i_\alpha = \frac{1}{2} g^{(i)'} g_{i,\alpha} \\ P^i = \frac{1}{2} g^{(i)}{}_{i,}{}'g_i \end{cases}$$

where the functionals $(g^{\alpha\beta},\, g^\alpha)$ signify the resolvent of $(g_{\alpha\beta},\, g_\alpha)$ and satisfy, in consequence, the relations

$$(1.8)\quad \begin{cases} g^\alpha g_{(\alpha)} = 1 \\ g_{(\alpha)} g^{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} g^{(\beta)} + g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\beta} = 0 \\ g^{(\alpha)} g_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} g_{(\beta)} + g^{\alpha\sigma} g_{\sigma\beta} = 0. \end{cases}$$

With the four functionals (1.7) defining the affine connection of our space, the components of the functional curvature tensor are given by

$$(1.9)\quad \begin{cases} B^i_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma^i_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^i_{\alpha\gamma,\beta} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\Gamma^i_{\sigma\gamma} - \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}\Gamma^i_{\sigma\beta} + \Gamma^i_{\alpha\beta}N^i_\gamma - \Gamma^i_{\alpha\gamma}N^i_\beta \\ \qquad + N^{(\alpha)}_\beta \Gamma^i_{\alpha\gamma} - N^{(\alpha)}_\gamma \Gamma^i_{\alpha\beta} + N^{(\beta)}_\alpha \Gamma^i_{\beta\gamma} - N^{(\gamma)}_\alpha \Gamma^i_{\gamma\beta} + \Gamma^{(\gamma)}_{\alpha\beta} M^i_\gamma - \Gamma^{(\beta)}_{\alpha\gamma} M^i_\beta \\ C^i_{\alpha\beta} = {}_{\alpha,}\Gamma^i_{\alpha\beta} - M^i_{\alpha,\beta} - M^\sigma_\alpha \Gamma^i_{\sigma\beta} - M^i_\alpha N^i_\beta + N^{(\alpha)}_\beta M^i_\alpha - P^{(\alpha)}\Gamma^i_{\alpha\beta} - M^{(\beta)}_\alpha M^i_\beta \\ D^i_{\alpha\beta} = {}^i\Gamma^i_{\alpha\beta} - N^i_{\alpha,\beta} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} N^i_\sigma + \Gamma^i_{\alpha\beta} P^i - N^i_\alpha N^i_\beta + N^{(\alpha)}_\beta N^i_\alpha + N^{(\beta)}_\alpha N^i_\beta \\ E^i_\alpha = {}^iM^i_\alpha - {}_{\alpha,}N^i_\alpha + M^\sigma_\alpha N^i_\sigma + M^i_\alpha P^i + P^{(\alpha)} N^i_\alpha. \end{cases}$$

For a general affine connection, there exist five functionals [3] characterizing the functional curvature tensor. However, we have

THEOREM. — *The affine connection* (1.7) *being defined by the metric* (0.1), *the fifth component of the functional curvature tensor*

$$F^i_\alpha = {}^iN^i_\alpha - P^i_{,\alpha}$$

vanishes identically.

---

(1) Cf. MICHAL, loc. cit.

(2) Indicated also by MOISIL iu his thesis appearing in 1930.

(3) Cf. MICHAL, loc. cit.

This theorem is readily verified in substituting from (1.7) and using the variation of the first relation of (1.8).

The four functionals defining the functional curvature tensor may be considered as the coefficients of an absolute quadrilinear form $Q[\xi^\alpha, \eta^\alpha, \zeta^\alpha, u_\alpha]$ with the symmetry conditions

$$(1.10) \qquad \begin{cases} Q[\xi^\alpha, \eta^\alpha, \zeta^\alpha, u_\alpha] = - Q[\xi^\alpha, \zeta^\alpha, \eta^\alpha, u_\alpha] \\ Q[\xi^\alpha, \eta^\alpha, \zeta^\alpha, u_\alpha] + Q[\zeta^\alpha, \xi^\alpha, \eta^\alpha, u_\alpha] + Q[\eta^\alpha, \zeta^\alpha, \xi^\alpha, u_\alpha] = 0. \end{cases}$$

The explicit nature of this form is

$$(1.11) \qquad \begin{aligned} Q[\xi^\alpha, \eta^\alpha, \zeta^\alpha, u_\alpha] = {} & B^i_{\alpha\beta\gamma}\xi^\alpha\eta^\beta\zeta^\gamma u_i + C^i_{\alpha\beta}\xi^\alpha\eta^\alpha\zeta^\beta u_i - C^i_{\alpha\beta}\xi^\alpha\eta^\beta\zeta^\alpha u_i \\ & + D^i_{\alpha\beta}\xi^\alpha\eta^i\zeta^\beta u_i - D^i_{\alpha\beta}\xi^\alpha\eta^\beta\zeta^i u_i + (D^i_{\alpha\beta} - D^i_{\beta\alpha})\xi^i\eta^\alpha\zeta^\beta u_i \\ & + E^i_\alpha\xi^\alpha\eta^i\zeta^\alpha u_i - E^i_\alpha\xi^\alpha\eta^\alpha\zeta^i u_i . \end{aligned}$$

Contracting (1.11) with respect to ζ^α and u_α, we obtain a functional form of two contravariant vectors, whose two coefficients $B_{\alpha\beta}$ and B_α we call the functional Ricci tensor. This tensor is given by

$$(1.12) \qquad \begin{cases} B_{\alpha\beta} = B^\sigma_{\alpha\sigma\beta} - \int_a^b D^\sigma_{\alpha\beta} d\sigma + D^{(\beta)}_{\alpha\beta} + D^{(\alpha)}_{\beta\alpha} - D^{(\alpha)}_{\alpha\beta} - C^{(\alpha)}_{\alpha\beta} \\ B_\alpha = C^\sigma_{\alpha\sigma} + E^{(\alpha)}_\alpha - \int_a^b E^\sigma_\alpha d\sigma. \end{cases}$$

If we now intermultiply the functional tensor defined by (1.12) with

$$G[u_\alpha, v_\alpha] = g^{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta + g^\alpha u_\alpha v_\alpha$$

on both vectors, we obtain the scalar,

$$(1.13) \qquad B = B_\alpha g^\alpha + B_\alpha g^{\alpha\alpha} + B_{\alpha\alpha} g^\alpha + B_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$$

which we shall call the scalar curvature of the space.

2. **Conformal invariants.** — Let us assume the functional $\lambda[y^s]$ of (0.2) to be of the form $e^{2f[y^s]}$. We have at once

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \bar{g}_{\alpha\beta} = e^{2f} g_{\alpha\beta}, & \bar{g}_\alpha = e^{2f} g_\alpha \\ \bar{g}^{\alpha\beta} = e^{-2f} g^{\alpha\beta}, & \bar{g}^\alpha = e^{-2f} g^\alpha \end{cases}$$

where the barred functionals indicate the coefficients of a metric (0.2) conformally equivalent to the metric (0.1). Taking the variation of (2.1) with respect to y^s, it follows that the functional derivatives of (2.1) have the form

$$
(2.2)\qquad \begin{cases}
{}_{\alpha,}{}'\bar{g}_{\alpha\beta} = e^{2f'}_{\alpha,}g_{\alpha\beta}, & {}_{(\alpha)}{}'\bar{g}^{\alpha\beta} = e^{-2f'}_{(\alpha)}g^{\alpha\beta} \\
{}'\bar{g}_{\alpha\beta,\sigma} = e^{2f}({}'g_{\alpha\beta,\sigma} + 2g_{\alpha\beta}{}'f_\sigma), & {}'\bar{g}^{\alpha\beta}_{,\sigma} = e^{-2f}({}'g^{\alpha\beta}_{,\sigma} - 2g^{\alpha\beta}{}'f_\sigma) \\
{}_{\alpha,}{}'\bar{g}_{\alpha} = e^{2f'}_{\alpha,}g_{\alpha}, & {}_{(\alpha)}{}'\bar{g}^{\alpha} = e^{-2f'}_{(\alpha)}g^{\alpha} \\
{}'\bar{g}_{\alpha,\sigma} = e^{2f}({}'g_{\alpha,\sigma} + 2g_{\alpha}{}'f_\sigma), & {}'\bar{g}^{\alpha}_{,\sigma} = e^{-2f}({}'g^{\alpha}_{,\sigma} - 2g^{\alpha}{}'f_\sigma).
\end{cases}
$$

Substituting (2.2) in (1.7) we obtain as the functional affine connection of (0,2)

$$
(2.3)\qquad \begin{cases}
\bar{\Gamma}^i_{\alpha\beta} = \Gamma^i_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}g^{(i)'}f_i - g_{\alpha\beta}g^{i\sigma'}f_\sigma \\
\bar{M}^i_\alpha = M^i_\alpha - g_\alpha g^{(i)'}f_i - g_\alpha g^{i\sigma'}f_\sigma \\
\bar{N}^i_\alpha = N^i_\alpha + {}'f_\alpha \\
\bar{P}^i = P^i.
\end{cases}
$$

In taking the variation of each of the functionals defined in (2.3), we obtain their functional derivatives as follows

$$
(2.4)\qquad \begin{cases}
{}^i\bar{\Gamma}^i_{\alpha\beta} = {}^i\Gamma^i_{\alpha\beta} - {}_{(i)}{}'g^i g_{\alpha\beta}{}'f_i - g^{(i)}g_{\alpha\beta i,}{}''f_i - {}_{(i)}{}'g^{i\sigma}g_{\alpha\beta}{}'f_\sigma \\
{}_\alpha\bar{\Gamma}^i_{\alpha\beta} = {}_\alpha\Gamma^i_{\alpha\beta} - g^{(i)'}_{\alpha,}g_{\alpha\beta}{}'f_i - g^{i\sigma'}_{\alpha,}g_{\alpha\beta}{}'f_\sigma \\
\bar{\Gamma}^i_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma^i_{\alpha\beta,\gamma} - {}'g^{(i)}_{,\gamma}g_{\alpha\beta}{}'f_i - g^{(i)'}g_{\alpha\beta,\gamma}{}'f_i - g^{(i)}g_{\alpha\beta}{}''f_{i,\gamma} - {}_{(\gamma)}g^{i\gamma}g_{\alpha\beta}{}'f_\gamma \\
\qquad - {}'g^{i\sigma}_{,\gamma}g_{\alpha\beta}{}'f_\sigma - g^{i\sigma'}g_{\alpha\beta,\gamma}{}'f_\sigma - g^{i(\gamma)}g_{\alpha\beta\gamma,}{}''f_\gamma - g^{i\sigma}g_{\alpha\beta}{}''f_{\sigma,\gamma} \\
{}^iM^i_\alpha = {}^iM^i_\alpha - {}_{(i)}{}'g^i g_\alpha{}'f_i - g^{(i)}g_{\alpha i}{}''f_i - {}_{(i)}{}'g^{i\sigma}g_\alpha{}'f_\sigma \\
{}_\alpha\bar{M}^i_\alpha = {}_\alpha M^i_\alpha - g^{(i)'}_{\alpha,}g_\alpha{}'f_i - g^{i\sigma'}_{\alpha,}g_\alpha{}'f_\sigma \\
\bar{M}^i_{\alpha,\beta} = M^i_{\alpha,\beta} - {}'g^{(i)}_{,\beta}g_\alpha{}'f_i - g^{(i)'}g_{\alpha,\beta}{}'f_i - g^{(i)}g_\alpha{}''f_{i,\beta} - {}_{(\beta)}{}'g^{i\beta}g_\alpha{}'f_\beta \\
\qquad - {}'g^{i\sigma}_{,\beta}g_\alpha{}'f_\sigma - g^{i\sigma'}g_{\alpha,\beta}{}'f_\sigma - g^{i(\beta)}g_{\alpha\beta}{}''f_\beta - g^{i\sigma}g_\alpha{}''f_{\sigma,\beta} \\
{}^i\bar{N}^i_\alpha = {}^iN^i_\alpha \\
{}_\alpha\bar{N}^i_\alpha = {}_\alpha N^i_\alpha + {}_{\alpha,}{}''f_\alpha \\
\bar{N}^i_{\alpha,\beta} = N^i_{\alpha,\beta} + {}''f_{\alpha,\beta} \\
{}_{(i)}\bar{P}^i = {}_{(i)}P^i \\
\bar{P}^i_{,\alpha} = P^i_{,\alpha}.
\end{cases}
$$

Let us now solve the equations (1.7) for the functional derivatives of the coefficients of the metric; we obtain

$$
(2.5)\qquad \begin{cases}
{}_{i,}{}'g_i = 2g_i P^{(i)} \\
{}'g_{i,\alpha} = 2g_i N^{(i)}_\alpha \\
{}_{\alpha,}{}'g_{i\alpha} = g_i M^{(i)}_\alpha + g_{i\sigma}M^\sigma_\alpha + g_\alpha N^{(\alpha)}_i + g_{i\sigma}P^{(\alpha)} \\
{}'g_{\alpha\beta,i} = g_\alpha\Gamma^{(\alpha)}_{\beta i} + g_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta i} + g_\beta\Gamma^{(\beta)}_{\alpha i} + g_{\beta\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha i} + g_{\alpha\beta}N^{(\alpha)}_i \\
\qquad + g_{\alpha\beta}N^{(\beta)}_i + g_{\alpha i}N^{(i)}_\beta + g_{\beta i}N^{(i)}_\alpha.
\end{cases}
$$

By taking the variation of the functional equations (1.8) and eliminating with the relations (2.5), we obtain the functional derivatives of the resolvents of the metric

$$(2.6)\qquad \left\{\begin{aligned} {}_{(i)}'g^{i} &= -2g^{i}P^{i}\\ 'g^{\alpha}_{,\beta} &= -2g^{\alpha}N^{\alpha}_{\beta}\\ {}_{(\alpha)}'g^{\alpha\beta} &= -\{g^{(\alpha)}M^{\beta}_{\alpha}+g^{(\beta)}N^{\alpha}_{\beta}+g^{\beta\sigma}N^{\alpha}_{\sigma}+g^{\alpha\beta}P^{\alpha}\}\\ 'g^{\alpha\beta}_{,\gamma} &= -\{g^{(\alpha)}\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}+g^{(\beta)}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}+g^{\alpha\sigma}\Gamma^{\beta}_{\sigma\gamma}+g^{\beta\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma}+g^{\beta\gamma}M^{\alpha}_{(\gamma)}\\ &\qquad +g^{\alpha\gamma}M^{\beta}_{(\gamma)}+g^{\alpha\beta}N^{\alpha}_{\gamma}+g^{\alpha\beta}N^{\beta}_{\gamma}\}. \end{aligned}\right.$$

Eliminating the functional derivatives of the metric in (2.4) by means of (2.5) and (2.6), we may then substitute (2.4) in (1.9) to obtain the functional curvature tensor in the space (0.2). Making these substitutions, we have

$$(2.7)\qquad \left\{\begin{aligned} \overline{B}^{i}_{\alpha\beta\gamma} &= B^{i}_{\alpha\beta\gamma}+g^{(i)}(g_{\alpha\gamma}f_{i\beta}-g_{\alpha\beta}f_{i\gamma})+g^{i\sigma}(g_{\alpha\gamma}f_{\sigma\beta}-g_{\alpha\beta}f_{\sigma\gamma})\\ &\qquad +g^{i(\beta)}g_{\alpha\gamma}f_{\beta}-g^{i(\gamma)}g_{\alpha\beta}f_{\gamma}+g^{\,i)}(g_{\alpha\beta}'f_{i}'f_{\gamma}-g_{\alpha\gamma}'f_{i}'f_{\beta})\\ &\qquad +g^{i\sigma}(g_{\alpha\beta}'f_{\sigma}'f_{\gamma}-g_{\alpha\gamma}'f_{\sigma}'f_{\beta})\\ \overline{C}^{i}_{\alpha\beta} &= C^{i}_{\alpha\beta}+g_{\alpha}g^{(i)}f_{i\beta}+g_{\alpha}g^{i\sigma}f_{\sigma\beta}+g_{\alpha}g^{i\beta}f_{i\beta}\\ &\qquad -g_{\alpha}g^{(i)\prime}f_{i}'f_{\beta}-g_{\alpha}g^{i\sigma\prime}f_{\sigma}'f_{\beta}\\ \overline{D}^{i}_{\alpha\beta} &= D^{i}_{\alpha\beta}-f_{\alpha\beta}-g^{(i)}g_{\alpha\beta}f_{i}+'f_{\alpha}'f_{\beta}-g_{\alpha\beta}g^{\sigma\prime}f_{\sigma}'f_{\sigma}-g_{\alpha\beta}g^{\sigma\tau\prime}f_{\sigma}'f_{\tau}\\ \overline{E}^{i}_{\alpha} &= E^{i}_{\alpha}-g^{(i)}g_{\alpha}f_{i}-f_{\alpha}-g_{\alpha}g^{\sigma\prime}f_{\sigma}'f_{\sigma}-g_{\alpha}g^{\sigma\tau\prime}f_{\sigma}'f_{\tau} \end{aligned}\right.$$

where the functional tensor $(f_{\alpha\beta},\ f_{\alpha})$ represents the functional covariant derivative of $'f_{\alpha}$, that is,

$$(2.8)\qquad \left\{\begin{aligned} f_{\alpha} &= {}_{\alpha}''f_{\alpha}-M^{\sigma}_{\alpha}{}'f_{\sigma}-P^{(\alpha)\prime}f_{\alpha}\\ f_{\alpha\beta} &= ''f_{\alpha,\beta}-N^{(\beta)\prime}_{\alpha}f_{\beta}-N^{(\alpha)\prime}_{\beta}f_{\alpha}-\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}{}'f_{\sigma}. \end{aligned}\right.$$

Contracting the functional tensor defined by the four functionals (2.7) in the sense (1.12), we obtain the functional Ricci tensor for the space (0.2)

$$(2.9)\qquad \left\{\begin{aligned} \overline{B}_{\alpha\beta} &= B_{\alpha\beta}+(g-2)\{f_{\alpha\beta}-'f_{\alpha}'f_{\beta}\}+g_{\alpha\beta}\{\Delta_{2}f+(g-2)\Delta_{1}f\}\\ \overline{B}_{\alpha} &= B_{\alpha}+(g-2)\ f_{\alpha}\qquad\qquad +g_{\alpha}\ \{\Delta_{2}f+(g-2)\Delta_{1}f\} \end{aligned}\right.$$

where

$$\Delta_{1}f=g^{\sigma\prime}f_{\sigma}'f_{\sigma}+g^{\sigma\tau}{}'f_{\sigma}'f_{\tau}$$
$$\Delta_{2}f=g^{\sigma}f_{\sigma}+g^{\sigma}f_{\sigma\sigma}+g^{\sigma\sigma}f_{\sigma}+g^{\sigma\tau}f_{\sigma\tau}$$

$g=(b-a)$, (the length of the interval of integration).

From (2.9) and (1.13), we have the scalar curvature

$$(2.10)\qquad B=e^{-2f}\{B+2(g-1)\Delta_{2}f+(g-1)(g-2)\Delta_{1}f\}.$$

Assuming the length of the interval of integration to be neither 1 nor 2 [1], we may eliminate the functional $\Lambda_2 f$ between (2.9) and (2.10) obtaining

$$(2.11)\quad \begin{cases} f_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{(g-2)}\{\bar{B}_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}\} - \dfrac{1}{2(g-1)(g-2)}\{\bar{g}_{\alpha\beta}\bar{B} - g_{\alpha\beta}B\} \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}\Delta_1 f + {}'f_\alpha{}'f_\beta \\ f_\alpha = \dfrac{1}{(g-2)}\{\bar{B}_\alpha - B_\alpha\} - \dfrac{1}{2(g-1)(g-2)}\{\bar{g}_\alpha\bar{B} - g_\alpha B\} - \dfrac{1}{2}g_\alpha\Delta_1 f. \end{cases}$$

Then in substituting these values of f_α and $f_{\alpha\beta}$ into (2.7), we obtain four functionals independent of the functional under a transformation of the form (2.1)

$$(2.12)\quad \begin{cases} \mathfrak{B}^i_{\alpha\beta\gamma} = B^i_{\alpha\beta\gamma} + \dfrac{g_{\alpha\beta}}{(g-2)}\{g^{(i)}B_{i\gamma} + g^{i\sigma}B_{\sigma\gamma} + g^{i\gamma}B_{(\gamma)}\} - \\ \qquad\qquad - \dfrac{g_{\alpha\gamma}}{(g-2)}\{g^{(i)}B_{i\beta} + g^{i\sigma}B_{\sigma\beta} + g^{i\beta}B_{(\beta)}\} \\ \mathfrak{C}^i_{\alpha\beta} = C^i_{\alpha\beta} - \dfrac{g_\alpha}{(g-2)}\{g^{(i)}B_{i\beta} + g^{i\sigma}B_{\sigma\beta} + g^{i\beta}B_{(\beta)}\} \\ \mathfrak{D}^i_{\alpha\beta} = D^i_{\alpha\beta} + \dfrac{g^{(i)}}{(g-2)}\{g_i B_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}B_i\} - \dfrac{1}{(g-1)(g-2)}g_{\alpha\beta}B \\ \mathfrak{E}^i_\alpha = E^i_\alpha + \dfrac{g_\alpha}{(g-2)}\{g^{(i)}B_i + g^{(\alpha)}B_\alpha\} - \dfrac{1}{(g-1)(g-2)}g_\alpha B. \end{cases}$$

It is evident, since only invariantive eliminations have been made, that the four functionals (2.12) are the components of a tensor.

By a procedure, due to A. D. MICHAL, which follows in consequence of a paper by DELSARTE [2], one may very simply show that a flat functional space, i. e., one in which the functionals $g_{\alpha\beta}[y]$ and $g_\alpha[y]$ are independent of the function y^s, may be reduced to a Euclidean function space. This is a space for which $g_{\alpha\beta}=0$, $g_\alpha = 1$. With respect to this type of space we observe here that the components of the conformal curvature tensor are necessarily zero and hence also zero for any space conformal to a flat space. The converse of this fact however cannot be handled so simply. A direct proof necessitates the solution of the rather cumbersome integro-differential equations (2.12); which has not as yet been accomplished.

---

[1] The significance of these singularities has not at present been determined.

[2] Cf. DELSARTE, *Sur certains sous-groupes du groupe de Fredholm*, « Ann. de la Soc. Pol. de Math. », Tome 8 (1929).

Una generalizzazione, per le serie, del metodo di sommazione di Nikola Obrechkoff nella teoria del prolungamento analitico.

Memoria di CARLO BIRINDELLI (a Udine).

Sunto. - *In questa Memoria viene posto un nuovo procedimento di sommazione, per ogni* $f(z) \backsim \sum_0^\infty a_n z^n$ *a raggio di convergenza* $\neq 0$, *della serie* $\sum a_n z^n$ *determinando il campo (includente il cerchio di convergenza) in cui è, essendo* λ *intero l'ordine di sommazione e* $A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}$, *uniformemente*

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\left| A_{\lambda n}^n \right|^2} \left[\sum_{\mu,\,\nu=q_1,\,q_2 \ldots q_{r_n}} A_{\lambda n}^{n-\mu} \cdot A_{\lambda n}^{n-\nu} \cdot (1+\lambda)^{\mu+\nu} \cdot a_{\frac{\mu+\nu}{2}} \cdot z^{\frac{\mu+\nu}{2}} - \right.$$
$$\left. - \sum_{\mu,\,\nu=p_1,\,p_2,\ldots p_{s_n}} A_{\lambda n}^{n-\mu} \cdot A_{\lambda n}^{n-\nu} \cdot (1+\lambda)^{\mu+\nu} \cdot a_{\frac{\mu+\nu}{2}} \cdot z^{\frac{\mu+\nu}{2}} \right] = f(z)$$

($p_1, p_2, \ldots p_{s_n}$ *sono tutti i numeri dispari positivi* $\leq n$; $q_1, q_2, \ldots q_{r_n}$ *i numeri positivi pari* $\leq n$, *con* $q_1 = 0$). *Questo campo di sommabilità tende per* $\lambda \to \infty$, *ampliandosi, ad un campo limite che abbraccia completamente il campo limite a cui ampliandosi tende il campo di sommabilità, quando* $\lambda \to \infty$, *relativo al metodo semplice di N. Obrechkoff; con questo ultimo si somma la* $f(z) \backsim \sum_0^\infty a_n z^n$ *ogni qualvolta è*

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{A_{\lambda n}^n} \sum_{p=0}^{n} A_{\lambda n}^{n-p} \cdot (1+\lambda)^p \cdot a_p \cdot z^p = f(z).$$

Come é noto, una serie

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

è sommabile col metodo di CESÀRO e per l'ordine α di sommazione, o sommabile (C, α) con la somma S, se, posto

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}; \quad S_n^\alpha = \sum_{\mu=0}^{n} A_{n-\mu}^\alpha a_\mu; \quad \alpha \neq -1, -2, -3, \ldots,$$

la successione $s_n^\alpha = \dfrac{S_n^\alpha}{A_n^\alpha}$ tende al limite S.

Nikola Obrechkoff ([1]) pose la seguente estensione del metodo di Cesàro, permettente di prolungare la serie di Taylor di una funzione analitica fuori del cerchio di convergenza.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è sommabile secondo il metodo di N. O. con la somma S se la succesione $T_n^\lambda = \frac{1}{A_{\lambda n}^n} \sum_{p=0}^{n} A_{\lambda n}^{n-p}(1+\lambda)^p a_p$, ove λ è intero positivo, tende al limite S quando $n \to \infty$. Se dimostra facilmente che se una serie è convergente, essa è sommabile con questo procedimento e verso la stessa somma.

Lo stesso autore dimostra nella sua Memoria il Teorema. Se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è una serie di Taylor il cui raggio di convergenza è $\neq 0$ e G_λ indica il campo interno al ramo esterno della curva $|z|^{1+\lambda} = \left|\frac{(1+\lambda)z - 1}{\lambda}\right|^\lambda$, allora indicando con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ i punti singolari della funzione $f(z)$ e con G il campo comune di $\alpha_1 G_\lambda, \alpha_2 G_\lambda, \ldots$ la serie $\sum a_n z^n$ è uniformemente sommabile con questo procedimento, internamente a G, con la somma $f(z)$.

Prima di introdurre la definizione di un nuovo metodo, scopo della presente Memoria, generalizzazione di quello or ora ricordato converrà riassumere il procedimento seguito da Nikola Obrechkoff per dimostrare la validità del teorema enunciato oltre qualche altro risultato stabilito nella stessa Memoria.

Servendosi del teorema di Toeplitz, l'Obrechkoff mostra in primo luogo come per la serie geometrica valga il metodo introdotto quando z appartiene al campo interno al ramo esterno della curva

$$(2) \qquad |z|^{1+\lambda} = \left|\frac{(1+\lambda)z - 1}{\lambda}\right|^\lambda \quad \text{e} \quad T_n^\lambda = \frac{1}{A_{\lambda n}^n} \sum_{\mu=0}^{n} A_{\lambda n}^{n-\mu}(1+\lambda)^\mu \cdot z^\mu$$

tende (per $n \to \infty$) a $\frac{1}{1-z}$. Al contorno di questo campo ed esternamente $|T_n^\lambda|$ tende a $+\infty$. Teniamo presente che, per i campi posti internamente a quello racchiuso dalla curva (2), la convergenza di T_n^λ ad $\frac{1}{1-z}$ è uniforme. Prendendo in considerazione la curva (2), l'Obrechkoff mostra elementarmente come (per ogni valore di λ intero positivo) essa possegga, esternamente al cerchio $|z| \leq 1$, un solo ramo. Codesto ramo è poi simmetrico rispetto

([1]) *Sur la sommation des séries divergentes* par Nikola Obrechkoff. Extrait de l'« Annuaire de l'Université de Sofia », faculté physico-mathèmatique, t. XXIV, 1927-1928, liv. 8.

all'asse reale; ciò risulta subito scrivendo in forma polare l'equazione della curva (2)

$$z = \rho e^{i\varphi}; \quad \lambda^{\lambda} | z |^{1+\lambda} = | (1 + \lambda) z - 1 |^{\lambda};$$

$$\lambda^{2\lambda} \cdot \rho^{2+2\lambda} = \{ [(1 + \lambda)\rho \cos \varphi - 1]^2 + (1 + \lambda)^2 \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \}^{\lambda};$$

$$(2') \quad \lambda^{2\lambda} \cdot \rho^{2+2\lambda} = \{ (1 + \lambda)^2 \rho^2 - 2(1 + \lambda)\rho \cos \varphi + 1 \}^{\lambda}; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \quad \rho \geq 1;$$

(è, lungo questo ramo, $\rho = 1$ per il solo punto $z = 1$). Questo ramo della curva (2) sarà nel seguito sempre indicato con Γ_λ. Essendo G_λ il campo racchiuso da Γ_λ, possiamo riassumere quanto precede dicendo che la serie $\sum\limits_0^\infty z^n$ è sommabile, secondo il metodo di OBRECHKOFF, nel campo G_λ e con la somma $\frac{1}{1 - z}$.

Sia ora

$$(3) \qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

l'elemento, relativo al punto $z = 0$, di una funzione analitica $f(x)$ e indichiamo con C una curva semplice rettificabile, racchiudente internamente il punto $z = 0$, posta entro la stella di MITTAG-LEFFLER di questo elemento analitico. L'OBRECHKOFF ottiene come segue la sommazione della serie (3); precisamente dalla sommazione della serie geometrica ed applicando, in modo opportuno, il classico metodo dimostrativo di E. BOREL. Sia

$$b_n = T_n^\lambda = \frac{1}{A_{\lambda n}^n} \sum_{\mu=0}^n A_{\lambda n}^{n-\mu} \cdot (1 + \lambda)^\mu \cdot a_\mu z^\mu,$$

servendoci della

$$a_\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{\mu+1}} d\zeta$$

otterremo

$$b_n = \frac{1}{A_{\lambda n}^n} \sum_{\mu=0}^n A_{\lambda n}^{n-\mu} (1 + \lambda)^\mu \cdot z^\mu \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{\mu+1}} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{A_{\lambda n}^n} \sum_{\mu=0}^n A_{\lambda n}^{n-\mu} \cdot (1 + \lambda)^\mu \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^\mu d\zeta;$$

cioè

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} \cdot \left\{ \frac{1}{A_{\lambda n}^n} \sum_{\mu=0}^n A_{\lambda n}^{n-\mu} (1 + \gamma)^\mu \left(\frac{z}{\zeta}\right)^\mu \right\} d\zeta$$

e quindi

$$b_n = T_n^\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} b_n(z, \zeta) d\zeta$$

avendo posto

$$b_n(z, \zeta) = \frac{1}{A_{\lambda n}^n} \sum_{\mu=0}^n A_{\lambda n}^{n-\mu} (1 + \lambda)^\mu \cdot \left(\frac{z}{\zeta}\right)^\mu.$$

Se il punto $y = \frac{z}{\zeta}$ è nel campo G_λ', appartenente al campo G_λ, allora $b_n(z, \zeta)$ converge uniformemente alla espressione $\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}$; cioè b_n tende a $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{d\zeta}{1 - \frac{z}{\zeta}} = f(z)$.

Sia D la regione del piano immaginario comune ai campi $\alpha_1 \cdot G_\lambda$, $\alpha_2 \cdot G_\lambda, \ldots, \alpha_n \cdot G_\lambda, \ldots$, ove $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ sono i punti singolari di $f(z)$, mentre con D_1 indichiamo un campo interno a D.

Sia D' la regione del piano immaginario comune ai campi $\zeta \cdot G_\lambda'$, quando ζ percorre la curva C (ricordiamo che G_λ è il campo racchiuso da Γ_λ mentre G_λ' è un campo interno a G_λ). È facile dimostrare che, fissato il campo D_1, la curva C e il campo G_λ' si possono scegliere in modo che D' contenga internamente D_1. Ad esempio tracciamo la curva C così:

Con centro nel punto $z = 0$ descriviamo la circonferenza di raggio R. Nel circolo così ottenuti cadranno alcuni dei punti singolari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Descriviamo, con centro in questi punti, le circonferenze di raggio $\frac{1}{R}$. Dal punto $z = 0$ mandiamo le coppie di tangenti a queste ultime circonferenze tracciando però di queste rette solo il segmento avente per estremi il punto di tangenza e la intersezione della retta stessa con la circonferenza di raggio R (e centro $z = 0$); s'intende che è da prendersi in considerazione solo l'intersezione appartenente alla semiretta di origine $z = 0$ contenente il punto di tangenza ([1]). Eliminando gli archi delle circonferenze compresi nella striscia definita da ogni coppia di tangenti (alla stessa circonferenza) otteniamo un campo semplicemente connesso non avente nè internamente nè al contorno punti singolari; indichiamone con C_R il contorno.

Allora è chiaro che, se $R \to \infty$ e G_λ' tende al campo G_λ, D' tende al campo D; cioè possiamo fissare un valore di R e un campo opportuno G_λ' di G_λ tali che D' contenga D_1. Ma allora z di D_1 è pure in D', cioè $\frac{z}{\zeta}$ è in G_λ' quando ζ descrive la curva C_R, e quindi b_n converge uniformemente verso $f(z)$. Si ha così il sopra definito teorema dell'OBRECHKOFF.

([1]) Quanto precede è applicabile se il punto di tangenza appartiene al cerchio $|z| \leq R$; se il punto di tangenza è esterno al cerchio $|z| \leq R$ allora si elimina semplicemente la parte della circonferenza $\left(\alpha, \frac{1}{R}\right)$ esterna al cerchio $|z| \leq R$ e raccordandone l'altra parte (non esterna) con la circonferenza $|z| = R$.

Studieremo ora il comportamento di G_λ per $\lambda \to \infty$. Potremo attraverso le seguenti considerazioni dedurre, con l'OBRECHKOFF, un nuovo notevole teorema: stabiliremo anzitutto che ogni campo G_{λ_1} contiene il campo G_λ se $\lambda_1 > \lambda$ e λ è sufficientemente grande. In particolare mostreremo che ρ, per λ abbastanza grande, è funzione crescente di λ (preso $\varphi \neq 0$). Abbiamo, posto $a = 1 + \frac{1}{\rho^2} - \frac{2\cos\varphi}{\rho}$; $b = 2\left(1 - \frac{\cos\varphi}{\rho}\right)$, che la (2') può esprimersi con la $\rho^2 = \left(1 + \frac{a + b\lambda}{\lambda^2}\right)^\lambda$ essendo $\rho > 1$; $0 < a < 4$; $0 < b < 4$. La funzione $\left(1 + \frac{a + b\lambda}{\lambda^2}\right)^\lambda$ per $\lambda > L$, ove L è un numero fissato, è crescente. Sia infatti $\Psi(\rho) = \rho^2 - \left(1 + \frac{a + b\lambda_1}{\lambda_1^2}\right)^{\lambda_1}$ mentre ρ_1 e ρ_2 indicano le due radici corrispondenti rispettivamente a λ_1 e a λ_2 $(\lambda_2 > \lambda_1)$; allora

$$\Psi(\rho_2) = \rho_2^2 - \left(1 + \frac{a_2 + b_2\lambda_1}{\lambda_1^2}\right)^{\lambda_1} = \left(1 + \frac{a_2 + b_2\lambda_2}{\lambda_2^2}\right)^{\lambda_2} - \left(1 + \frac{a_2 + b_2\lambda_1}{\lambda_1^2}\right)^{\lambda_1} > 0$$

che mostra essere $\rho_2 > \rho_1$ poichè $\Psi(1) < 0$. D'altra parte i numeri ρ sono limitati dato che $\rho^2 < \left(1 + \frac{a + b}{\lambda}\right)^\lambda \swarrow \left(1 + \frac{8}{\lambda}\right)^\lambda < e^8$; in conseguenza ρ tende verso un limite finito (che varia al variare di φ) quando $\lambda \to \infty$. Dalla equazione di Γ_λ si vede che, se $\lim\limits_{\lambda\ \infty} \rho = r$, allora

$$\log r = 1 - \frac{\cos\varphi}{r}, \quad r > 1. \tag{4}$$

Cioè, la curva Γ_λ tende ampliandosi alla curva Γ', data dalla equazione (4). Abbiamo così il secondo teorema di OBRECHKOFF.

Sia $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ funzione analitica, monodroma per $z = 0$, coi punti singolari $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n, \ldots$. Se G è il campo racchiuso dalla curva $\log r = 1 - \frac{\cos\varphi}{r}$, $r > 1$, $z = re^{i\varphi}$ e D è la regione comune ai campi $\alpha_1 \cdot G$, $\alpha_2 \cdot G, \ldots \alpha_m \cdot G, \ldots$ allora la serie $\sum\limits_{n-0}^{\infty} a_n z^n$ si può sommare secondo il metodo di OBRECHKOFF, se è z interno a D (per λ preso sufficientemente grande), e verso la somma $s = f(z)$.

Per passare ora alla trattazione del nuovo metodo, generalizzazione del metodo semplice dell'OBRECHKOFF, prendiamo i due polinomi dell'OBRECHKOFF relativi alla serie geometrica

$$b_n(x) = T_n^\lambda(x) = \frac{1}{A_{\lambda n}^n} \sum_{\mu=0}^{n} A_{\lambda n}^{n-\mu} \cdot (1+\lambda)^\mu \cdot x^\mu;$$

$$b_n(-x) = T_n^\lambda(-x) = \frac{1}{A_{\lambda n}^n} \sum_{\nu=0}^{n} A_{\lambda n}^{n-\nu} (1+\lambda)^\nu \cdot (-1)^\nu \cdot x^\nu$$

e moltiplichiamoli

$$b_n(x) \cdot b_n(-x) = \frac{1}{\left(A_{\lambda n}^n\right)^2} \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{n} A_{\lambda n}^{n-\mu} \cdot A_{\lambda n}^{n-\nu} \cdot (1+\lambda)^{\mu+\nu} \cdot x^\mu \cdot (-1)^\nu \cdot x^\nu .$$

Ciò fatto osserviamo che, se μ è pari e ν è dispari (indicati rispettivamente con $2\mu_1$ e $2\nu_1 + 1$), nel polinomio compaiono i due termini

$$A_{\lambda n}^{n-2\mu_1} \cdot A_{\lambda n}^{n-2\nu_1-1} \cdot (1+\lambda)^{2\mu_1+2\nu_1+1} \cdot x^{2\mu_1} \cdot (-1)^{2\nu_1+1} \cdot x^{2\nu_1+1};$$

$$A_{\lambda n}^{n-2\nu_1-1} \cdot A_{\lambda n}^{n-2\mu_1} \cdot (1+\lambda)^{2\nu_1+1+2\mu_1} \cdot x^{2\nu_1+1} \cdot (-1)^{2\mu_1} \cdot x^{2\mu_1};$$

e la loro somma è nulla. Identica osservazione per i valori di μ dispari e ν pari. Restano così dunque solo i termini relativi alle coppie di numeri μ e ν entrambi dispari od entrambi pari. Considerando allora la serie naturale dei numeri dispari positivi $p_1, p_2, p_3, \ldots$ e la serie dei numeri naturali pari $q_1, q_2, q_3, \ldots$ $(q_1 = 0)$ il nostro polinomio può scriversi

$$(5) \qquad b_n(x) \cdot b_n(-x) = \frac{1}{\left\{A_{\lambda n}^n\right\}^2} \sum_{\mu, \nu = q_1, q_2, \ldots q_{r_n}} A_{\lambda n}^{n-\mu} \cdot A_{\lambda n}^{n-\nu} \cdot (1+\lambda)^{\mu+\nu} \cdot (x^2)^{\frac{\mu+\lambda}{2}} -$$

$$- \frac{1}{\left\{A_{\lambda n}^n\right\}^2} \sum_{\mu, \nu = p_1, p_2, \ldots p_{s_n}} A_{\lambda n}^{n-\mu} \cdot A_{\lambda n}^{n-\nu} \cdot (1+\lambda)^{\mu+\nu} \cdot (x^2)^{\frac{\mu+\nu}{2}}$$

ove p_{s_n} è il massimo numero dispari contenuto in n $(p_{s_n} \leq n)$ mentre q_{r_n} indica il massimo numero pari contenuto in n. È poi sempre $\frac{\mu+\nu}{2}$ intero positivo in entrambe le sommatorie. Da quanto sappiamo risulta ora chiaramente che nei campi in cui è simultaneamente $\lim_{n=\infty} b_n(x) = \frac{1}{1-x}$, $\lim_{n=\infty} b_n(-x) = \frac{1}{1+x}$ (convergenza uniforme) è anche $\lim_{n=\infty} \{ b_n(x) \cdot b_n(-x) \} = \frac{1}{1-x^2}$ (convergenza uniforme). Posto allora $y = x^2$, il polinomio (5) nelle potenze intere positive di y esprime (per $n = \infty$) un nuovo polinomio di approssimazione della funzione analitica $\frac{1}{1-y}$ in un campo di sommabilità che preciseremo adesso. Riassumendo: il nuovo procedimento di sommazione della serie geometrica è espresso dal seguente sviluppo (ricercandone il limite per $n \to \infty$)

$$(5') \qquad b_n'(y) = \frac{1}{\left| A^n_{\lambda n} \right|^2} \sum_{\mu, \nu = q_1, q_2, \dots q_{r_n}} A^{n-\mu}_{\lambda n} \cdot A^{n-\nu}_{\lambda n} \cdot (1+\lambda)^{\mu+\nu} \cdot y^{\frac{\mu+\nu}{2}} -$$

$$- \frac{1}{\left| A^n_{\lambda n} \right|^2} \sum_{\mu, \nu = p_1, p_2, \dots p_{s_n}} A^{n-\mu}_{\lambda n} \cdot A^{n-\nu}_{\lambda n} \cdot (1+\lambda)^{\mu+\nu} \cdot y^{\frac{\mu+\nu}{2}}$$

che al tendere di n ad ∞ tende verso $\frac{1}{1-y}$. Esternamente e al contorno dei due campi di sommabilità dei polinomi $b_n(x)$ e $b_n(-x)$ questi divergono. Ne segue che se x appartiene al campo di sommabilità di $b_n(x)$ (o $b_n(\;x)$) ma è esterno o al contorno di quello di $b_n(-x)$ (o $b_n(x)$) allora $b_n'(y)$ diverge ($y = x^2$).

Il nuovo polinomio $b_n'(y)$ relativo alla funzione $\frac{1}{1-y}$ tende uniformemente ad $\frac{1}{1-y}$ nei campi di punti y tali che i campi corrispondenti di punti x ($x^2 = y$) restino interni alla regione comune A_0 ai campi racchiusi dai rami esterni delle due curve del tipo della (2)

$$|x|^{1+\lambda} = \left| \frac{(1+\lambda)x - 1}{\lambda} \right|^\lambda; \quad |-x|^{1+\lambda} = \left| \frac{(1+\lambda)(-x) \quad 1}{\lambda} \right|^\lambda$$

cioè

$$|x|^{1+\lambda} = \left| \frac{(1+\lambda)x - 1}{\lambda} \right|^\lambda; \quad |x|^{1+\lambda} = \left| \frac{(1+\lambda)x + 1}{\lambda} \right|^\lambda.$$

Prenderemo allora l'equazione della curva (2) sotto la forma espressa dalla (2')

$$\lambda^{2\lambda} \cdot \rho^{2+2\lambda} = \{ (1+\lambda)^2 \rho^2 - 2(1+\lambda)\rho \cos\varphi + 1 \}^\lambda; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \quad \rho \geq 1.$$

Questo ramo è quello indicato con Γ_λ nella trattazione, che precede, dell'Obrechkoff; come è noto questo ramo è incontrato da ogni semiretta, uscente dall'origine, in un solo punto. Facciamo dei punti x del ramo Γ_λ la seguente trasformazione $y = x^2$, per i valori dell'argomento di x compresi fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$.

Essendo $x = \rho e^{i\varphi}$, avremo $y = \rho^2 \cdot e^{2i\varphi} = re^{i\alpha}$. Il modulo di y risulta quindi $r \geq 1$ ($r = 1$ per $\alpha = 0$) mentre l'argomento varia fra $-\pi$ e $+\pi$. Mettiamo a riscontro il ramo Γ_λ con la curva continua di punti y, trasformazione del tratto di Γ_λ corrispondente ai valori dell'argomento φ compresi fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$. Siccome questo tratto di Γ_λ è simmetrico rispetto all'asse reale ne segue che la curva di punti y è pura simmetrica rispetto all'asse reale ed è una curva chiusa ed esterna sempre al cerchio di centro $x=0$ e raggio 1 mentre ha in comune con questa circonferenza il solo punto $y=1$. Questa curva è poi incontrata evidentemente in un solo punto da ogni semiretta per l'origine; indichiamola con Γ_λ'. Dalla relazione che intercede fra y ed x risulta $r=\rho^2$, $\alpha=2\varphi$ cioè $\rho=r^{\frac{1}{2}}$, $\varphi=\frac{\alpha}{2}$. Sostituendo questi valori di ρ e φ nella equazione (2') di Γ_λ otterremo l'equazione della curva Γ_λ' di punti $y=re^{i\alpha}$

$$(6) \qquad \lambda^{2\lambda}\cdot r^{1+\lambda}=\left\{(1+\lambda)^2 r-2(1+\lambda)r^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\alpha}{2}+1\right\}^\lambda; \quad -\pi\leq\alpha\leq+\pi; \quad r\geq 1.$$

Il campo A_0 di punti x è simmetrico rispetto all'asse reale come pure rispetto all'asse immaginario. Nella trasformazione $x^2=y$ il campo G_λ'' (trasformato di A_0 di punti x) è il campo, di punti y, avente per contorno la curva Γ_λ' espressa dalla (6). Possiamo riassumere quanto vedemmo dicendo che il polinomio $b_n'(y)$ espresso da (5') converge uniformemente (per $n\to\infty$) alla funzione $\frac{1}{1-y}$ per i punti y di qualunque campo interno al campo G_λ'' racchiuso da Γ_λ'. Possiamo aggiungere fin d'ora che il nuovo procedimento di sommazione, della serie geometrica, definito dal polinomio (5') è valido per un campo di sommabilità più esteso di quello corrispondente alla convergenza ordinaria della serie geometrica poichè il cerchio $|y|\leq 1$ è interno alla curva Γ_λ'. Stabiliremo in ultimo come il nuovo campo di sommabilità G_λ'' del procedimento, ora stabilito, generalizzazione del metodo semplice dell'Obrechkoff risulti tale da avere una parte esterna al campo di sommabilità G_λ del metodo semplice (almeno per λ abbastanza grande). Basterà, per ora, osservare come il punto $x=\rho e^{i\varphi}$ di Γ_λ e il punto $y=re^{i\alpha}$ di Γ_λ', corrispondenti al valore $\alpha=\varphi=+\pi$ dell'argomento, abbiano i moduli compresi rispettivamente fra

$$2,4<\rho<2,5, \quad 4,2<r<4,3 \quad \text{per} \quad \lambda=1;$$
$$2,8<\rho<2,9, \quad 5,2<r<5,3 \quad \text{per} \quad \lambda=2.$$

È ora evidente come, applicando al nuovo polinomio $b_n'(y)$, relativo alla serie geometrica, la stessa trattazione fatta dall'Obrechkoff, al suo metodo di sommazione, del classico procedimento dimostrativo di E. Borel, si debba pervenire al seguente

1.° Teorema. — Sia $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ l'elemento di una funzione analitica regolare monodroma in un intorno del punto $z=0$. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ i punti singolari al contorno della stella rettilinea; indicando con $b_n'(z)$ il polinomio (λ è un qualunque numero intero > 0)

$$b_n'(z) = \frac{1}{\left| A_{\lambda n}^n \right|^2} \sum_{\mu,\nu=q_1,q_2,\ldots q_{r_n}} A_{\lambda n}^{n-\mu} \cdot A_{\lambda n}^{n-\nu} \cdot (1+\lambda)^{\mu+\nu} \cdot a_{\frac{\mu+\nu}{2}} \cdot z^{\frac{\mu+\nu}{2}} -$$

$$- \frac{1}{\left| A_{\lambda n}^n \right|^2} \sum_{\mu,\nu=p_1,p_2,\ldots p_{s_n}} A_{\lambda n}^{n-\mu} \cdot A_{\lambda n}^{n-\nu} \cdot (1+\lambda)^{\mu+\nu} \cdot a_{\frac{\mu+\nu}{2}} \cdot z^{\frac{\mu+\nu}{2}}$$

e con Ω il campo comune ai campi $\alpha_1 \cdot G_\lambda''$, $\alpha_2 \cdot G_\lambda''$,... $\alpha_n \cdot G_\lambda''$...., la serie $\sum_0^\infty a_n z^n$ è uniformemente sommabile col nuovo procedimento $s = \lim_{n\, \infty} b_n'(z)$ (e verso la funzione $f(z)$) in ogni campo interno ad Ω.

Il campo di sommabilità Ω del nuovo metodo di sommazione, per la serie $f(z) \backsim \sum_0^\infty a_n z^n$, sorpassa la circonferenza di convergenza in ogni punto non singolare.

Tornando ora, per un momento, al metodo semplice di OBRECHKOFF ricordiamo che Γ_λ contorno di G_λ tende, ampliandosi, alla curva Γ' di equazione $\log r = 1 - \frac{\cos\varphi}{r}$, $r > 1$ quando $\lambda \to +\infty$ appunto perchè il modulo ρ dei punti di Γ_λ è funzione crescente di λ per $\lambda \to +\infty$. Per il modo stesso con cui Γ_λ' di punti y è stata ottenuta da Γ_λ di punti x ($y = x^2$) si deduce subito come la curva Γ_λ', al tendere di $\lambda \to +\infty$, tenda ampliandosi ad una curva limite (porta tutta a distanza finita) Γ''. Ciò perchè il moduto r dei punti di Γ_λ' è funzione crescente di λ per $\lambda \to +\infty$. La curva Γ'' si otterrà, evidentemente, mediante la trasformazione $y = x^2$ dei punti x dei tratto di Γ' corrispondente ai valori dell'argomento di x compresi fra $\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$. Essendo $x = \rho e^{i\varphi}$; $y = re^{i\alpha}$; $\rho^2 \cdot e^{2i\varphi} = re^{i\alpha}$; $\rho^2 = r$; $2\varphi = \alpha$; (per essere $x^2 = y$), basterà sostituire i valori di ρ e φ (modulo ed argomento di x appartenente alla curva Γ') nella equazione di Γ' onde ottenere l'equazione della curva Γ'' di punti y. Avremo così che l'equazione di Γ'', curva limite di Γ_λ' (per $\lambda \to +\infty$) e contenente Γ_λ' sempre internamente (per ogni valore di λ), è data da

$$(4') \qquad \log r^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{r^{\frac{1}{2}}}; \quad -\pi \leq \alpha \leq +\pi; \quad r > 1,$$

essendo r ed α il modulo e l'argomento del punto generico y della curva Γ''. Indichiamo allora con $\overline{G}$ il campo racchiuso da Γ'' (campo contenente internamente tutti i campi G_λ'') e con Ω il campo comune ai campi $\alpha_1 \cdot \overline{G}$, $\alpha_2 \cdot \overline{G}, \ldots\ \alpha_n \cdot \overline{G}, \ldots$. Avremo il seguente

2.° TEOREMA. — La funzione analitica $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ si può sommare, secondo il nuovo metodo $s = \lim_{n=\infty} b_n'(z)$ e verso la funzione $f(z)$, se è z interno ad $\overline{\Omega}$ (per λ preso sufficientemente grande).

Mostreremo ora l'ultimo importante risultato da cui dedurremo essere il nuovo campo di sommabilità più notevole, come estensione, di quello del metodo semplice di OBRECHKOFF. Precisamente cominceremo col verificare la proprietà della curva Γ'': la curva Γ'' (limite delle Γ_λ') abbraccia completamente la Γ' (limite della Γ_λ). Come vedemmo le due curve Γ' e Γ'' hanno, rispettivamente le equazioni

a) $\log \rho = 1 - \dfrac{\cos \varphi}{\rho}$; $\rho \geq 1$; $-\pi \leq \varphi \leq +\pi$; simmetrica rispetto all'asse reale ed avente in comune con la circonferenza $|z| = 1$ il solo punto $z = 1$.

b) $\dfrac{1}{2} \log r = 1 - \dfrac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{r^{\frac{1}{2}}}$; $r \geq 1$; $-\pi \leq \alpha \leq +\pi$; simmetrica pure rispetto all'asse reale ed avente in comune con la circonferenza $|z| = 1$ il solo punto $z = 1$.

Cominciamo intanto con l'osservare che la curva Γ'' si estende, almeno in parte, esternamente alla curva Γ' poichè Γ'' sorpassa Γ' lungo il semiasse reale negativo; infatti, dal confronto di ρ ed r per $\alpha = \varphi = \pi$, risulta

$$\log \rho = 1 + \frac{1}{\rho} < 2 \ \text{(essendo } \rho > 1\text{)}; \quad \frac{1}{2} \log r = 1, \ \log r = 2$$

e quindi

$$\log \rho < \log r \quad (\text{con } r > 1,\ \rho > 1)$$

da cui

$$\rho < r; \quad r = e^2; \quad \rho < e^2.$$

Già da questo risultato preliminare possiamo dedurre (dato che r è il limite del modulo del punto di Γ_λ', situato lungo il semiasse reale negativo, al tendere di $\lambda \to +\infty$ mentre ρ è il limite analogo per il punto di Γ_λ) che esiste parte di G_λ'' esterna a G_λ per λ abbastanza grande (G_λ'' campo racchiuso da Γ_λ' mentre G_λ è racchiuso da Γ_λ). Il metodo $b_n'(z)$ varrà quindi nella corrispondente parte di Ω esterna a G mentre ivi non è detto che sia valido il procedimento semplice b_n. Del resto questo risultato sarà in certo qual modo di molto generalizzato dal teorema che segue.

Venendo alle equazioni *a)* e *b)* di Γ' e Γ'' calcoliamo per le stesso valore dell'argomento ($\varphi = \alpha$) le espressioni di $\frac{d\rho}{d\varphi}$ e $\frac{dr}{d\alpha}$. Posto

$$F(\rho,\ \varphi) = \rho \log \rho - \rho + \cos \varphi = 0; \quad \Phi(r,\ \alpha) = r^{\frac{1}{2}} \log r^{\frac{1}{2}} - r^{\frac{1}{2}} + \cos \frac{1}{2}\alpha = 0$$

notiamo che le espressioni delle derivate parziali danno

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \log \rho; \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = -\operatorname{sen} \varphi; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \log r^{\frac{1}{2}} = \frac{\log r^{\frac{1}{2}}}{2r^{\frac{1}{2}}}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

e quindi

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\log \rho}; \quad \frac{dr}{d\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha}{\log r^{\frac{1}{2}}} \cdot 2 \cdot r^{\frac{1}{2}}; \quad \frac{dr}{d\alpha} = r^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha}{\log r^{\frac{1}{2}}}$$

espressioni delle derivate dei due moduli ρ ed r rispetto all'argomento. Per $\alpha \neq 0$ abbiamo inoltre la disuguaglianza (per essere $r > 1$), se $0 < \alpha < \pi$,

$$\frac{dr}{d\alpha} > \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha}{\log r} > \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha}{\log r} \quad \text{cioè} \quad \frac{dr}{d\alpha} > \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\log r}.$$

Se ora per qualche valore dell'argomento compreso fra 0 e $+\pi$ (estremi esclusi), le due curve Γ' e Γ'' si intersecassero, per questi punti avremmo $r_i = \rho_i$, $\alpha_i = \varphi_i$ (essendo $0 < \alpha < \pi$) assieme alla

$$(*) \qquad \frac{dr_i}{d\alpha_i} > \frac{d\rho_i}{d\varphi_i}.$$

Partendo dal punto di Γ'' situato sul semiasse reale negativo (punto esterno, come sappiamo, alla curva Γ') dovremmo in queste condizioni pervenire (per i valori decrescenti dell'argomento) ad un primo punto di intersezione $re^{i\alpha_1}$ con la curva Γ'. A questo punto la Γ'', per i valori decrescenti dell'argomento, sarebbe interna rispetto alla Γ' e non potrebbe certo più intersecare la Γ' stessa, per un valore dell'argomento $\alpha_2 = \varphi_2 > 0$, appunto perchè sarebbe al solito $\frac{dr_2}{d\alpha_2} > \frac{d\rho_2}{d\varphi_2}$, $r_2 = \rho_2$.

D'altra parte, dato che le due curve Γ'' e Γ' hanno in comune il punto $z = 1$, per $\alpha_2 = \varphi_2 = 0$ il detto punto mobile su Γ'' riincontrerebbe Γ' nel punto $r_2 = \rho_2 = 1$, per $\alpha_2 = \varphi_2 = 0$. Nell'intervallo $\alpha_1 \dots \alpha_2 = 0$, dell'argomento, la curva Γ'' dovrebbe dunque rimanere interna alla curva Γ'. È facile verificare che questa eventualità è da scartarsi a priori. Infatti, per α interno all'intervallo $(\alpha_1, 0)$ dell'argomento, risulterebbe $r(\alpha) < \rho(\alpha)$ e quindi (essendo $r(\alpha) > 1$; $\rho(\alpha) > 1$), $0 < \log r(\alpha) < \log \rho(\alpha)$, da cui $\frac{1}{\log r(\alpha)} > \frac{1}{\log \rho(\alpha)}$, $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\log r(\alpha)} > \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\log \rho(\alpha)}$ e cioè $\frac{dr}{d\alpha} > \frac{d\rho}{d\varphi}$ per lo stesso valore dell'argomento. Integrando da $\alpha = 0$ ad $\alpha = \alpha_1$ avremmo $\int_0^{\alpha_1} \frac{dr}{d\alpha}\, d\alpha > \int_0^{\alpha_1} \frac{d\rho}{d\varphi}\, d\varphi$ da cui (per essere $r(0) = \rho(0) = 1$), $r(\alpha_1) > \rho(\alpha_1)$, il che è assurdo dato che è $r(\alpha_1) = \rho(\alpha_1)$ per ipotesi. Concludendo, possiamo affermare essere la curva Γ' completamente interna a Γ''; basta rammentare che Γ' e Γ'' sono curve aventi l'asse reale come asse di simmetria. Abbiamo così il teorema

3.° TEOREMA. — Sia la funzione analitica $f(z) \backsim \sum_0^\infty a_n z^n$ a raggio di convergenza $\neq 0$; indichiamo con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ i punti singolari di $f(z)$. Sia G il campo racchiuso dal ramo esterno della curva $\log \rho = 1 - \frac{\cos \varphi}{\rho}$, $\rho > 1$, $z = \rho e^{i\varphi}$ e D la regione comune ai campi $\alpha_1 \cdot G, \alpha_2 \cdot G, \ldots \alpha_n \cdot G, \ldots$. Sia $\bar{G}$ il campo racchiuso dal ramo esterno della curva $\log r^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{r^{\frac{1}{2}}}$; $-\pi \leq \alpha \leq +\pi$; $r > 1$; $z = re^{i\alpha}$ e $\bar{\Omega}$ la regione comune ai campi $\alpha_1 \bar{G}, \alpha_2 \bar{G}, \ldots \alpha_n \bar{G}, \ldots$. Allora se z è interno a D è applicabile il metodo semplice dell'OBRECHKOFF (per ogni λ intero positivo sufficientemente grande) $\lim_{n=\infty} b_n(z) = f(z)$. Se è z interno ad $\bar{\Omega}$ è applicabile il nuovo metodo generalizzato $\lim_{n=\infty} b_n'(z) = f(z)$ (per ogni λ intero positivo sufficientemente grande). Il campo D di sommabilità semplice è completamente interno al campo $\bar{\Omega}$ di sommazione relativo al nuovo metodo generalizzato; sicchè, mentre per tutti i punti z appartenenti a D sono validi entrambi i metodi $b_n(z)$ e $b_n'(z)$, per i punti z appartenenti ad Ω, ma esterni od al contorno di D, è certo valido il nuovo procedimento $b_n'(z)$ (per ogni λ intero positivo sufficientemente grande) mentre non è affatto detto che debba ivi valere anche il metodo semplice $b_n(z)$.

Basta pensare al caso della serie geometrica per la quale, da quanto si può dedurre dalla trattazione fatta indietro a quel proposito, il polinomio $b_n(z)$ diverge, al tendere di $n \to +\infty$, per ogni λ in corrispondenza di z esterno od al contorno di D.

Sur les fonctions méromorphes limites de fractions rationnelles.

par NIKOLA OBRECHKOFF (Sofia-Bulgaria).

MM. PÓLYA, SCHUR, LINDWART ont démontré des théorèmes sur les fonctions entières qui sont limites de polynomes sur les zéros desquels on fait certaines suppositions. M. SAXER (1) a obtenu des résultats analogues pour des fonctions méromorphes qui sont limites de fonctions rationnelles en faisant des hypothéses sur les zéros et les pôles de ces fonctions.

Récemment, M. MONTEL (2) a démontré des théorèmes pour les fractions rationnelles à termes entrelacés sur l'axe réel et pour les fonctions méromorphes, qui sont limites de telles fractions.

Dans ce travail, dont j'ai donné (3) un résumé dans une note publiée dans les « Comptes Rendus » de l'Académie des Sciences de Paris, je considère des fonctions méromorphes qui sont limites de fractions rationnelles, sur les pôles desquelles seulement on fait des hypothèses convenables. Les résultats que j'obtiens contiennent les résultats des auteurs cités.

Nous avons le théorème suivant:

I. *Supposons que la suite de fractions rationnelles*

$$R_n(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{z - \alpha_{n\nu}} \tag{1}$$

tende uniformément vers une fonction méromorphe R(z), *dont le point* $z = 0$ *est un point régulier. Supposons encore que l'on ait uniformément pour* n

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^{k+1}} \right| < M, \tag{2}$$

(1) W. SAXER, *Ueber die Verteilung der Nullstellen und Pole von rationalen Funktionen konvergente Folgen*, « Mathematische Zeitschrift », 27, 1928, pp. 518-535.

(2) P. MONTEL, *Sur une classe de fonctions méromorphes,* Comptes Rendus , 195, 1932, p. 643.

(3) N. OBRECHKOFF, *Sur des fonctions méromorphes qui sont limites de fractions rationnelles,* « Comptes Rendus », 196, 1933, p. 746.

où k $>$ 0, M *est un nombre fini. La fonction* R(z) *a la forme*

$$R(z) = P(z) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(\frac{1}{z-\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} + \frac{z}{\alpha_n{}^2} + \dots + \frac{z^{m-1}}{\alpha_n{}^m}\right), \tag{3}$$

où la série $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{A_n}{\alpha_n^{k+1}}\right|$ *est convergente.* P(z) *est un polynome de degré* p *qui est égal à* [k] *si* k *n'est pas un nombre entier, et égal à* k *si ce nombre est entier;* m = [k] + 1 *dans le premier cas et* m = k *dans le second cas. Cette condition est aussi suffisante.*

Nous faisons la remarque suivante: dans l'énoncé des théorèmes on peut supposer que la convergence est seulement uniforme dans le plan ouvert en enlevant les points des cercles décrits autour des pôles α_n avec des rayons arbitrairement petits.

Puisque les fonctions $R_n(z)$ tendent vers $R(z)$, si nous décrivons autour de chaque pôle α_q de la fonction $R(z)$ une circonférence C_q de rayon arbitrairement petit $\delta > 0$, tous les pôles $\alpha_{n\nu}$, $\nu = \lambda_q + 1, \lambda_q + 2, \dots, \lambda_{q+1}$ qui tendent vers α_q se trouveront pour $n > N(\delta)$ dans C_q. De la formule

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C_q} R_n(z)dz = \int_{C_q} R(z)dz$$

on conclut que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=\lambda_q+1}^{\lambda_{q+1}} A_{n\nu} = A_q. \tag{4}$$

On voit facilement que pour chaque $g \geqq 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=\lambda_q+1}^{\lambda_{q+1}} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^g} = \frac{A_q}{\alpha_q^g}. \tag{5}$$

En effet, nous avons pour $|\alpha_q| < T$, $|\alpha_{n\mu}| < T$

$$\frac{1}{T^{k+1}}\sum_{\nu=\lambda_q+1}^{\lambda_{q+1}} |A_{n\nu}| < \sum_{\nu=\lambda_q+1}^{\lambda_{q+1}}\left|\frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^{k+1}}\right| < M, \quad \sum_{\nu=\lambda_q+1}^{\lambda_{q+1}} |A_{n\nu}| < MT^{k+1} = M_1.$$

En écrivant la différence

$$\sum_{\nu=\lambda_q+1}^{\lambda_{q+1}} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^g} - \frac{A_q}{\alpha_q^g}$$

sous la forme

$$\sum_{\nu=\lambda_q+1}^{\lambda_{q+1}} A_{n\nu}\left(\frac{1}{\alpha_{n\nu}^g} - \frac{1}{\alpha_q^g}\right) + \frac{1}{\alpha_q^g}\left(\sum_{\nu=\lambda_q+1}^{\lambda_{q+1}} A_{n\nu} - A_q\right)$$

on démontre facilement la relation (5).

Les pôles α_q de la fonction $R(z)$ sont simples. En effet, considérons l'intégrale $(n > N = N(\delta))$

$$j_n = \int_{C_q} (z-\alpha_q)^r R_n(z) dz = \sum_{\nu=\lambda_q+1}^{\lambda_{q+1}} A_{n\nu} \int_{C_q} \frac{(z-\alpha_q)^r}{z-\alpha_{n\nu}},$$

r étant un nombre entier $\geqq 1$. En écrivant $(z-\alpha_q)^r$ sous la forme

$$(z-\alpha_q)^r = (z-\alpha_{n\nu})^r + \binom{r}{1}(z-\alpha_{n\nu})^{r-1}(\alpha_{n\nu}-\alpha_q) + \dots + (\alpha_{n\nu} \quad \alpha_q)^r$$

on obtient

$$j_n = \sum_{\nu=\lambda_q+1}^{\lambda_{q+1}} A_{n\nu} \int_{C_q} \frac{(\alpha_{n\nu}-\alpha_q)^r}{z-\alpha_{n\nu}} dz$$

et nous avons $\lim\limits_{n\to\infty} j_n = 0$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} j_n = \int_{C_q} (z-\alpha_q)^r R(z) dz = 0, \quad r \geq 1,$$

ce qui montre que les pôles α_q sont simples.

Nous démontrons maintenant que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{A_n}{\alpha_n^{k+1}} \right| \tag{6}$$

est convergente. Pour chaque nombre m fixe nous avons

$$\sum_{q=1}^{m} \left| \sum_{\nu=\lambda_q+1}^{\lambda_{q+1}} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^{k+1}} \right| < M,$$

d'où en posant $n \to \infty$ et de (4) on obtient

$$\sum_{q=1}^{m} \left| \frac{A_q}{\alpha_q^{k+1}} \right| \leqq M,$$

pour chaque m, ce qui démontre la convergence de la série (6).

Maintenant on voit facilement que pour chaque $g > k+1$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^{g}} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{\alpha_p^{g}}. \tag{7}$$

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit et soit le nombre m choisi de façon que pour $p > m$ on ait

$$\left| \frac{1}{\alpha_p^{g-k-1}} \right| < \frac{\varepsilon}{M}, \quad \left| \frac{1}{\alpha_{n\nu}^{g-k-1}} \right| < \frac{\varepsilon}{M}, \quad \nu > \lambda_{m+1}.$$

Nous avons

$$\left|\sum_{p=m+1}^{\infty} \frac{A_p}{\alpha_p^g}\right| < \frac{\varepsilon}{M} \sum_{p=m+1}^{\infty} \left|\frac{A_p}{\alpha_p^{k+1}}\right| < \varepsilon, \qquad \left|\sum_{p=\lambda_{m+1}}^{\infty} \frac{A_{np}}{\alpha_{np}^g}\right| < \frac{\varepsilon}{M} \sum_{\nu=1}^{n} \left|\frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^{k+1}}\right| < \varepsilon,$$

et de (5) on conclut que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^g} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{\alpha_p^g} \right| < 2\varepsilon,$$

ce qui démontre la formule (7).

Soit k un nombre non entier et écrivons [4]

$$R_n(z) = -\sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}} - z\sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^2} - \dots - z^{m-1}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^m} +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{n} A_{n\nu}\left(\frac{1}{z-\alpha_{n\nu}} + \frac{1}{\alpha_{n\nu}} + \frac{z}{\alpha_{n\nu}^2} + \dots + \frac{z^{m-1}}{\alpha_{n\nu}^m}\right).$$

La suite $R_n(z)$ étant convergente pour $z=0$, du développement

$$R_n(z) = -\sum_{p=1}^{\infty} z^p \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^{p+1}}$$

il suit que $-\sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^{p+1}}$ tend vers une limite c_p. Considérons alors la fonction

$$U(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{m-1} z^{m-1} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{1}{z-\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} + \frac{z}{\alpha_n^2} + \dots + \frac{z^{m-1}}{\alpha_n^m}\right).$$

Nous démontrerons que $\lim_{n\to\infty} R_n(z) = U(z)$ et le théorème I sera démontré.

Pour cela nous démontrerons que la fonction

$$V_n(z) = \sum_{\nu=1}^{n} A_{n\nu}\left(\frac{1}{z-\alpha_{n\nu}} + \frac{1}{\alpha_{n\nu}} + \frac{z}{\alpha_{n\nu}^2} + \dots + \frac{z^{m-1}}{\alpha_{n\nu}^m}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu} z^m}{\alpha_{n\nu}^m (z-\alpha_{n\nu})}$$

tend vers la fonction

$$V(z) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p\left(\frac{1}{z-\alpha_p} + \frac{1}{\alpha_p} + \frac{z}{\alpha_p^2} + \dots + \frac{z^{m-1}}{\alpha_p^m}\right) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p z^m}{\alpha_p^m (z-\alpha_p)},$$

dans chaque cercle $|z| \leq R$, en enlevant naturellement les points des petits cercles décrits autour des pôles α_p. En effet, soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire et soit $\lambda > 2$ choisi de façon que l'on ait

$$\frac{4MR^m}{\lambda^\delta R^\delta} < \varepsilon. \quad \delta = m - k > 0.$$

[4] Voir aussi P. MONTEL, *Sur les familles normales de fonctions analytiques*, « Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure », t. 33 (1916), pp. 222-302.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_g$ les pôles de la fonction $V(z)$ qui se trouvent dans le cercle $|z| \leqq \lambda R$ et soient $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \ldots, \alpha_{n, n_g}$ les pôles de la fonction $V_n(z)$ qui tendent vers les premiers pour $n \to \infty$. Alors, d'après (7), on démontre facilement que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n_g} \frac{A_{n\nu} z^m}{\alpha_{n\nu}^m (z - \alpha_{n\nu})} = \sum_{\nu=1}^{g} \frac{A_\nu z^m}{\alpha_\nu{}^m (z - \alpha_\nu)}.$$

Pour les pôles qui sont en dehors du cercle $|z| = \lambda R$, on aura, $(n > N)$

$$|z - \alpha_{n\nu}| \geqq \frac{\lambda - 1}{\lambda} |\alpha_{n\nu}| > \frac{1}{2} |\alpha_{n\nu}|, \quad |z - \alpha_\nu| > \frac{1}{2} |\alpha_\nu|,$$

donc

$$\left| \sum_{\nu=n_g+1}^{n} \frac{A_{n\nu} z^m}{\alpha_{n\nu}^m (z - \alpha_{n\nu})} \right| < 2R^m \sum_{\nu=n_g+1}^{n} \left| \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^{m+1}} \right| < \frac{2R^m}{\lambda^\delta R^\delta} \sum_{\nu=n_g+1}^{n} \left| \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^{k+1}} \right| < \frac{2R^m M}{\lambda^\delta R^\delta} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left| \sum_{\nu=g+1}^{\infty} \frac{A_\nu z^m}{\alpha_\nu{}^m (z - \alpha_\nu)} \right| < 2R^m \sum_{\nu=g+1}^{\infty} \left| \frac{A_\nu}{\alpha_\nu{}^{m+1}} \right| < \frac{2R^m M}{\lambda^\delta R^\delta} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Les inégalités obtenues nous montre que $\overline{\lim_{n \to \infty}} |V_n(z) - V(z)| \leq \varepsilon$, ε arbitraire, c'est-à-dire que $\lim_{n \to \infty} V_n(z) = V(z)$.

Soit maintenant k un nombre entier. Nous écrivons la fonction $R_n(z)$ sous la forme

$$R_n(z) = -\sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}} - z \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^2} - \ldots - z^m \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^{m+1}} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} A_{n\nu} \left(\frac{1}{z - \alpha_{n\nu}} + \frac{1}{\alpha_{n\nu}} + \ldots + \frac{z^m}{\alpha_{n\nu}^{m+1}} \right),$$

et nous considérons la fonction

$$U(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_m z^m + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \left(\frac{1}{z - \alpha_\nu} + \frac{1}{\alpha_\nu} + \frac{z}{\alpha_\nu{}^2} + \ldots + \frac{z^m}{\alpha_\nu{}^{m+1}} \right).$$

Comme ci-dessus, on démontre que $\lim_{n \to \infty} R_n(z) = U(z)$. Puisque la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{\alpha_p{}^{m+1}}$$

est convergente, cette fonction peut s'écrire

$$U(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c'_m z^m + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \left(\frac{1}{z - \alpha_p} + \frac{1}{\alpha_p} + \frac{z}{\alpha_p{}^2} + \ldots + \frac{z^{m-1}}{\alpha_p{}^m} \right)$$

et le théorème est démontré.

Maintenant nous allons démontrer la partie inverse du théorème I. Soit donc $R(z)$ une fonction méromorphe de la forme

$$(8)\qquad R(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{m-1} z^{m-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \left(\frac{1}{z - \alpha_\nu} + \frac{1}{\alpha_\nu} + \frac{z}{\alpha_\nu^2} + \ldots + \frac{z^{m-1}}{\alpha_\nu^m} \right)$$

où la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{A_\nu}{\alpha_\nu^{k+1}} \right|$ est convergente, $k+1 \geqq m$. Considérons la fonction rationnelle

$$(9)\qquad R_n(z) = \sum_{p=1}^{m} \frac{c_p z^{p-1}}{1 + \frac{c_p z^p}{n}} + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \left(\frac{1}{z - \alpha_\nu} + \frac{\frac{1}{\alpha_\nu}}{1 + \frac{z}{\alpha_\nu N}} + \ldots + \frac{\frac{z^{m-1}}{\alpha_\nu^m}}{1 + \frac{z^m}{m \alpha_\nu^m N}} \right).$$

On peut facilement voir qu'on peut choisir la croissance de N vers l'infini avec n de façon que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} R_n(z) = R(z),$$

uniformément. En effet, le premier membre de la partie droite de $R_n(z)$ tend vers le membre respectif de $R(z)$. La différence entre

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \left(\frac{1}{z - \alpha_\nu} + \frac{1}{\alpha_\nu} + \frac{z}{\alpha_\nu^2} + \ldots + \frac{z^{m-1}}{\alpha_\nu^m} \right)$$

et le second membre de $R_n(z)$ est en valeur absolue égal au plus à

$$\frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{n} |A_\nu| \cdot \left| \sum_{p=1}^{m} \frac{\frac{z^{2p-1}}{p \alpha_\nu^{2p}}}{1 + \frac{z^p}{p \alpha_\nu^p N}} \right|$$

et pour chaque R, $|z| \leq R$ on peut choisir évidemment N de façon que cette expression tende vers zéro, lorsque n, $N \to \infty$. Mais on a

$$\frac{c_q z^{q-1}}{1 + \frac{c_q z^q}{n}} = \sum_{\nu=1}^{q} \frac{n}{z - \omega_\nu^{(q)} \delta_q},$$

où $\omega_\nu^{(q)}$ sont les racines de l'équation $z^q = -1$ et $\delta_q = \left| \frac{n}{c_q} \right|^{\frac{1}{q}}$. Donc le premier membre de la partie droite a la forme

$$\sum_{p=1}^{m} \frac{c_p z^{p-1}}{1 + \frac{c_p z^p}{n}} = \sum_{p=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{p} \frac{n}{z - \omega_\nu^{(p)} \delta_p}$$

et la somme $\sum\limits_{p=1}^{m}\sum\limits_{\nu=1}^{p}\frac{n}{|\omega_\nu^{(p)}\delta_p|^{k+1}}$ est évidemment bornée. Analoguement nous avons

$$\frac{\frac{z^{p-1}}{\alpha_\nu^p}}{1+\frac{z^p}{p\alpha_\nu^p N}}=\sum_{h=1}^{p}\frac{N}{z-\omega_h^{(p)}\alpha_p'},\quad p\leq m,$$

où $\omega_h^{(p)}$ sont les racines de l'équation $z^p=-1$, et $\alpha_p'=p^{\frac{1}{p}}\;\alpha_\nu\;N^{\frac{1}{p}}$. La somme correspondante pour les pôles dans le second membre de (9) est égale à la somme

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{N|A_\nu|}{p^{\frac{k+1}{p}}\;|\alpha_\nu|^{k+1}N^{\frac{k+1}{p}}},\quad p\leq m,$$

et puisque $k+1\geq m$, il est évident qu'elle est bornée. Donc le théorème est complètement démontré.

En suivant la même marche de démonstration, on obtient le théorème plus général:

II. *Soit*

$$R_n(z)=P_n(z)+\sum_{\mu=1}^{n}\frac{A_{n\mu}}{z-\alpha_{n\mu}}$$

une suite de fonctions rationnelles, où $P_n(z)$ *sont des polynomes de degré égal au plus à* q, *et supposons qu'il existe un nombre* $k\geq 0$, *tel que*

$$\sum_{\mu=1}^{n}\left|\frac{A_{n\mu}}{\alpha_{n\mu}^{k+1}}\right|<M.$$

Si la suite $R_n(z)$ *converge uniformément vers une fonction méromorphe* $R(z)$, *dont le point* $z=0$ *est régulier, elle aura la forme suivante*

$$R(z)=P(z)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\frac{1}{z\quad\alpha_n}+\frac{1}{\alpha_n}+\frac{z}{\alpha_n^2}+\dots+\frac{z^{m-1}}{\alpha_n^m}\right),$$

où la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{A_n}{\alpha_n^{k+1}}\right|$$

est convergente. $P(z)$ *est un polynome de degré* g *égal à max.* (q, [k]) *si* k *est un nombre non entier, et* $g=max.$ (q, k) *si* k *est entier,* $m=[k]+1$ *dans le premier cas et* $m=k$ *dans le second cas.*

Nous considérons maintenant une classe spéciale de fonctions méromorphes, limites de fractions rationnelles dont les résidus $A_{n\mu}$ sont des nombres positifs, en faisant pour les pôles des simples hypothèses.

III. *Soit*

$$R_n(z)=\sum_{\mu=1}^{n}\frac{A_{n\mu}}{z-\alpha_{n\mu}}$$

une suite de fonctions rationnelles, $A_{n\mu}>0$, $\mu=1, 2, \ldots, n$, *les pôles* $\alpha_{n\mu}$ *se trouvent dans un secteur* A *dont le sommet est le point* $z=0$ *et d'ouverture* $<\pi$. *Désignons par* $\bar{A}$ *le secteur symétrique de* A *par rapport à l'axe réel. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction méromorphe* R(z) *soit la limite uniforme de fonctions rationnelles de cette forme consiste en ce qu'elle doit avoir la forme suivante*

$$R(z)=-\delta+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{z-\alpha_n},\quad A_n>0, \tag{10}$$

où la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{|\alpha_n|}$ *est convergente,* α_n *se trouvent dans* A *et* δ *est un point de* $\bar{A}$.

D'après les conditions du théorème on peut choisir un nombre θ de façon que les arguments des nombres $e^{i\theta}\alpha_{n\mu}$ se trouvent entre $-\alpha$ et α, $\alpha<\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire

$$\left|e^{-i\theta}\frac{1}{\alpha_{n\mu}}\right|\leqq\frac{1}{\cos\alpha}\,R\left(e^{-i\theta}\frac{1}{\alpha_{n\mu}}\right). \tag{11}$$

Nous avons démontré que la somme

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{A_{n\mu}}{\alpha_{n\mu}}$$

tend vers une limite déterminée lorsque $n\to\infty$. Donc de (11) on conclut que la somme $\sum_{\mu=1}^{n}\frac{A_{n\mu}}{|\alpha_{n\mu}|}$ est uniformément bornée. Nous avons aussi démontré que la fonction

$$R_n(z)=-\sum_{\mu=1}^{n}\frac{A_{n\mu}}{\alpha_{n\mu}}+\sum_{\mu=1}^{n}A_{n\mu}\left(\frac{1}{z-\alpha_{n\mu}}+\frac{1}{\alpha_{n\mu}}\right).$$

tend vers la fonction

$$V(z)=c_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}A_\nu\left(\frac{1}{z-\alpha_\nu}+\frac{1}{\alpha_\nu}\right)=-\lim_{n\to\infty}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{A_{n\mu}}{\alpha_{n\mu}}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu}{\alpha_\nu}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu}{z-\alpha_\nu}.$$

Soit $\varepsilon>0$ un nombre arbitrairement petit et soit N choisi de façon que l'on ait

$$\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{A_\nu}{|\alpha_\nu|}<\varepsilon,$$

ce qui est possible à cause de la convergence de la série $\Sigma \frac{A_\nu}{|\alpha_\nu|}$. Nous avons vu qu'il existe des nombres λ_n, tels que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\lambda_n} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{A_\nu}{\alpha_\nu}.$$

Donc le nombre δ dans le théorème est égal à

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=\lambda_n+1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}} + \eta = g + \eta$$

où $|\eta| < \varepsilon$. Puisque le nombre g est un nombre de $\bar{A}$ et ε est arbitrairement petit $\delta = g$, le théorème est démontré.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, considérons les fonctions rationnelles

$$R_n(z) = \frac{n}{z - \frac{n}{\delta}} + \sum_{\nu-1}^{n} \frac{A_\nu}{z - \alpha_\nu},$$

qui ont la forme demandée. Nous avons $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(z) = R(z)$, $R(z)$ étant la fonction (10), et la démonstration est finie.

De la même manière on démontre le théorème suivant:

III'. *Supposons que la suite des fractions*

$$R_n(z) = -g_n + \sum_{\nu-1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{z - \alpha_{n\nu}}, \quad A_{n\nu} > 0,$$

où $\bar{g}_n$, $\alpha_{n\nu}$ *sont des nombres d'un secteur* A *d'ouverture* $< \pi$, *tende vers une fonction méromorphe* R(z). *La fonction* R(z) *a la forme* (10) *où* δ *et* α_n *sont des nombres de* $\bar{A}$ *et la série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{|\alpha_n|}$ *est convergente,* $A_n > 0$.

Considérons maintenant une classe de fonctions rationnelles dont les pôles se trouvent dans un demi-plan, qu'on peut évidemment supposer le plan $j(z) \geq 0$ [5]. Nous démontrons le théorème suivant:

IV. *Supposons que la suite de fonctions rationnelles*

$$R_n(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{z - \alpha_{n\nu}},$$

où $A_{n\nu} > 0$, $j(\alpha_{n\nu}) \geq 0$, *tende vers la fonction méromorphe* R(z). *La fonction* R(z)

[5] Par $j(z)$ nous désignons la partie imaginaire de z.

a la forme suivante:

$$R(z) = -\gamma z + \delta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{1}{z-\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n}\right), \quad A_n > 0, \tag{12}$$

la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{|\alpha_n|^2}$ *est convergente,* $j(\alpha_n) \geqq 0$, γ *est un nombre réel* $\geqq 0$, *la série* $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} j\left(\frac{A_n}{\alpha_n}\right)$ *est convergente et sa somme est égale au plus à* $j(\delta)$. *Cette condition pour* $R(z)$ *est aussi suffisante.*

Soit $a > 0$ un nombre arbitraire tel que $R(z)$ soit régulière pour $|z| \leqq a$, ce qui est possible parce que $z = 0$ est un point régulier. La suite des fonctions rationnelles

$$R_n(z-a) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{z-(\alpha_{n\nu}+a)}$$

tend uniformément vers la fonction

$$R(z-a) = c_0' + c_1'z + c_2'z^2 + \dots, \quad |z| \leqq \rho,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}+a} = -c_0'.$$

Parce que

$$-j\left(\frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}+a}\right) = A_{n\nu}\frac{j(\alpha_{n\nu}+a)}{|\alpha_{n\nu}+a|^2} \geqq a\,\frac{A_{n\nu}}{|\alpha_{n\nu}+a|^2},$$

on a uniformément

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{|\alpha_{n\nu}+a|^2} < M_1.$$

Alors comme ci-dessus on démontre que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{|\alpha_\nu + a|^2}$$

est convergente, d'où il s'ensuit que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{|\alpha_\nu|^2}$$

est convergente. Alors, en se basant sur le théorème I, on conclut que la suite des fonctions

$$R_n(z) = -\sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}} - z\sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^2} + \sum_{\nu=1}^{n} A_{n\nu}\left(\frac{1}{z-\alpha_{n\nu}} + \frac{1}{\alpha_{n\nu}} + \frac{z}{\alpha_{n\nu}^2}\right)$$

tend vers la fonction

$$R(z) = c_0 + c_1 z + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{1}{z - \alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} + \frac{z}{\alpha_n^2} \right).$$

Donc nous avons

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^2} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\alpha_\nu^2}, \quad \delta = - \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}}.$$

En appliquant le théorème I, on a utilisé le fait que les sommes

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{|\alpha_{n\nu}|^2}$$

sont uniformément bornées, ce qu'on peut démontrer facilement.

En effet, parce que $z = 0$ est un point régulier pour la fonction $R(z)$ il existe un nombre $b > 0$, tel que $|\alpha_{n\nu}| > b$, $n > N$. Soit $a < \frac{b}{2}$, alors on a

$$\frac{A_{n\nu}}{|\alpha_{n\nu} + a|^2} = \frac{A_{n\nu}}{|\alpha_{n\nu}|^2} \cdot \frac{|\alpha_{n\nu}|^2}{|\alpha_{n\nu} + a|^2} \geqq g \frac{A_{n\nu}}{|\alpha_{n\nu}|^2}.$$

Posons

$$\frac{1}{\alpha_{n\nu}} = \beta_{n\nu} - i\gamma_{n\nu}, \quad \frac{1}{\alpha_\nu} = \beta_\nu - i\gamma_\nu, \quad \gamma_{n\nu} \geqq 0, \quad \gamma_\nu \geqq 0,$$

$$j(\delta) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n\nu} \gamma_{n\nu},$$

alors en suivant une marche déjà employée, on démontre que la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \gamma_\nu$ est convergente. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit et le nombre m choisi de façon tel que l'on ait

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} A_\nu \gamma_\nu < \varepsilon.$$

Soit λ_m tel que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{\lambda_m} A_{n\nu} \gamma_{n\nu} = \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu \gamma_\nu.$$

Pour m fixe on a

$$j(\delta) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{\lambda_m} A_{n\nu} \gamma_{n\nu} + \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=\lambda_m+1}^{n} A_{n\nu} \gamma_{n\nu} = \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu \gamma_\nu + g,$$

où

$$g = \lim \sum_{\nu=\lambda_m+1}^{n} A_{n\nu} \gamma_{n\nu} \geqq 0,$$

donc

$$j(\delta) \geqq \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \gamma_\nu - \varepsilon$$

pour chaque $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire

$$j(\delta) \geqq -\sum_{\nu=1}^{\infty} j\left(\frac{A_\nu}{\alpha_\nu}\right),$$

ce qu'il fallait démontrer.

On peut facilement démontrer que γ est réel et non négatif. Nous avons

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n\nu}(\beta_{n\nu}^2 - \gamma_{n\nu}^2 - 2i\beta_{n\nu}\gamma_{n\nu}) - \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu(\beta_\nu^2 - \gamma_\nu^2 - 2i\beta_\nu\gamma_\nu)$$

d'où

$$-\frac{1}{2} j(\gamma) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n\nu}\beta_{n\nu}\gamma_{n\nu} - \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \beta_\nu \gamma_\nu .$$

Nous avons démontré que la somme $\sum_{\nu=1}^{n} A_{n\nu}\gamma_{n\nu}$ est bornée et la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\gamma_\nu$ est convergente. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit et soit m choisi de façon que l'on ait $|\beta_\nu| < \varepsilon$, pour $\nu > m$ ce qui est possible parce que $\alpha_\nu \to \infty$. Soit $\sum_{\nu=1}^{\lambda_m} A_{n\nu}\beta_{n\nu}\gamma_{n\nu}$ la somme qui tend vers $\sum_{\nu=1}^{m} A_\nu\beta_\nu\gamma_\nu$. Pour n assez grand nous aurons aussi $|\beta_{n\nu}| < \varepsilon$, $\nu > m$. Alors nous avons

$$-\frac{1}{2} j(\gamma) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{\lambda_m} A_{n\nu}\beta_{n\nu}\gamma_{n\nu} - \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu\beta_\nu\gamma_\nu + \lim_{n \to \infty} g_n = \lim_{n \to \infty} g_n$$

$$|g_n| = \lim_{n \to \infty} \left| \sum_{\nu=\lambda_m+1}^{n} A_{n\nu}\beta_{n\nu}\gamma_{n\nu} - \sum_{\nu=m+1}^{\infty} A_\nu\beta_\nu\gamma_\nu \right| \leqq 2\varepsilon k,$$

où

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_{n\nu}\gamma_{n\nu} < k, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\gamma_\nu < k,$$

k est un nombre fini. Donc nous avons $j(\gamma) = 0$. Par conséquent on a

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n\nu}(\beta_{n\nu}^2 - \gamma_{n\nu}^2) - \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu(\beta_\nu^2 - \gamma_\nu^2).$$

En suivant une marche déjà employée, on démontre que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n\nu}\gamma_{n\nu}^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\gamma_\nu^2,$$

en vertu du fait que la somme $\sum_{\nu=1}^{n} A_{n\nu}\gamma_{n\nu}$ est uniformément bornée et que

$\gamma_\nu \to \infty$. La série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \beta_\nu^2$$

est convergente, puisque

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \beta_\nu^2 \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{|\alpha_\nu|^2}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit et choisi de façon que l'on ait

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} A_\nu \beta_\nu^2 < \varepsilon.$$

Nous avons démontré qu'il existe des nombres λ_m tels que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\lambda_m} A_{n\nu} \beta_{n\nu}^2 = \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu \beta_\nu^2.$$

Nous avons alors

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n\nu}\beta_{n\nu}^2 - \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \beta_\nu^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=\lambda_m+1}^{n} A_{n\nu}\beta_{n\nu}^2 - \sum_{\nu=m+1}^{\infty} A_\nu\beta_\nu^2 \geqq -\varepsilon,$$

pour chaque nombre $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire $\gamma \geqq 0$ et la première partie du théorème est démontrée.

Maintenant nous démontrerons la partie inverse du théorème. Supposons donc que la fonction $R(z)$ ait la forme (12), où γ est un nombre réel non négatif, $j(\alpha_\nu) \geqq 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} j\left(\frac{A_\nu}{\alpha_\nu}\right)$ est convergente, et

$$j\left(\delta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n}\right) \geqq 0, \quad A_n > 0,$$

la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{|\alpha_n|^2}$ étant convergente. Désignons par

$$B_p = \delta + \sum_{\nu=1}^{p} \frac{A_\nu}{\alpha_\nu}.$$

Soit m_p un nombre qui tend vers l'infini avec p, tel que l'on ait

(13) $$\lim_{p\to\infty} \left(\frac{m_p}{z + \frac{m_p}{B_p}} + \sum_{\nu=1}^{p} \frac{A_\nu}{z-\alpha_\nu} \right) = \delta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{1}{z-\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} \right).$$

On peut facilement voir que ceci est toujours possible. En effet (13) est équivalente à

(14) $$\lim_{p\to\infty} \left(\frac{m_p}{z + \frac{m_p}{B_p}} - B_p \right) = 0,$$

puisque

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{n=p+1}^{\infty} A_n\left(\frac{1}{z-\alpha_n}+\frac{1}{\alpha_n}\right)=0.$$

Or (14) est équivalente à

$$\lim_{p\to\infty} \frac{B_p z}{z+\dfrac{m_p}{B_p}}=0,$$

ce qui est vrai par exemple si $m_p \to \infty$, $m_p > |B_p|^3$. Posons alors, si $\gamma \neq 0$,

$$R_p(z)=\frac{p}{z-\sqrt{\dfrac{2p}{\gamma}}}+\frac{p}{z+\sqrt{\dfrac{2p}{\gamma}}}+\frac{m_p}{z+\dfrac{m_p}{B_p}}+\sum_{n=1}^{p}\frac{A_n}{z-\alpha_n},$$

et si $\gamma=0$

$$R_p(z)=\frac{m_p}{z+\dfrac{m_p}{B_p}}+\sum_{n=1}^{p}\frac{A_n}{z-\alpha_n}.$$

La suite $R_p(z)$ tend uniformément vers la fonction $R(z)$. Parce que

$$j(B_p)=j(\delta)+\sum_{n=1}^{p} j\left(\frac{A_n}{\alpha_n}\right)=j(\delta)+\sum_{n=1}^{\infty} j\left(\frac{A_n}{\alpha_n}\right)-\sum_{n=p+1}^{\infty} j\left(\frac{A_n}{\alpha_n}\right)\geqq 0,$$

tous les pôles de $R_p(z)$

$$\pm\sqrt{\frac{2p}{\gamma}},\quad -\frac{m_p}{B_p},\quad \alpha_n (n=1, 2, \dots, p),$$

ont leur partie imaginaire non négative et le théorème est démontré.

En suivant la même marche de démonstration, on peut obtenir le théorème suivant:

IV'. *Soit la suite de fractions*

$$R_n(z)=-g_n+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{A_{n\nu}}{z-\alpha_{n\nu}},\quad A_{n\nu}>0,\quad j(-g_n)\geqq 0,\quad j(\alpha_{n\nu})\geqq 0,$$

qui tend vers la fonction méromorphe R(z). *Alors* R(z) *a la forme* (12). *Cette condition est aussi suffisante.*

On peut aussi démontrer des théorèmes analogues pour la limite de fractions de la forme

$$R_n(z)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{A_{n\nu}}{z-\alpha_{n\nu}},$$

$\alpha \leqq \arg A_{n\nu} \leqq \beta$, $\beta-\alpha<\pi$, en faisant des hypothèses convenables pour les pôles $\alpha_{n\nu}$.

Nous démontrerons maintenant, comme application, quelques théorèmes connus. Dans la note citée, M. MONTEL considère des fonctions méromorphes qui sont des limites uniformes des fractions rationnelles avec des zéros et des pôles entrelacés sur l'axe réel. Soit

$$R_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}, \quad \lim_{n \to \infty} R_n(z) = R(z),$$

une telle suite, où $P_n(z)$, $Q_n(z)$ sont de degré n, et supposons par exemple que les zéros suivent les pôles. On aura

$$R_n(z) = A_n + \frac{A_{n1}}{z - \alpha_{n1}} + \frac{A_{n2}}{z - \alpha_{n2}} + \dots + \frac{A_{nn}}{z - \alpha_{nn}}, \quad \alpha_{n\nu} < \alpha_{n,\nu+1},$$

En posant

$$z = -\infty, \; \alpha_{n1} - \varepsilon, \; \alpha_{n1} + \varepsilon, \; \alpha_{n2} - \varepsilon, \; \alpha_{n2} + \varepsilon, \dots, \; \alpha_{nn} + \varepsilon, \; \infty,$$

où $\varepsilon > 0$ est un nombre assez petit, on voit facilement que les nombres

$$-A_n, \; A_{n1}, \; A_{n2}, \dots, \; A_{nn}$$

doivent avoir le même signe. Si $\alpha_{n\nu} > 0$ en appliquant le théorème III' où A coïncide avec l'axe réel positif, on obtient que $R(z)$ a la forme

$$R(z) = -A + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{z - \alpha_i}$$

où $\alpha_i > 0$, A et A_i sont de même signe et la série $\sum_{i-1}^{\infty} \frac{A_i}{\alpha_i}$ est convergente, ce qui est le premier théorème de M. MONTEL. Si nous supposons maintenant que les pôles $\alpha_{n\nu}$ sont seulement réels, en applicant le théorème IV' pour les deux cas $j(\alpha_{n\nu}) \geqq 0$, $j(\alpha_{n\nu}) \leqq 0$ (puisque $j(\alpha_{n\nu}) = 0$) on obtient que $R(z)$ a la forme suivante

$$R(z) = A - Bz + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{1}{z - \alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} \right),$$

A_n, B sont de même signe, α_n réels, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n^2}$ étant convergente, ce qui est l'autre théorème de M. MONTEL.

Soit

$$P_n(z) = \left(1 - \frac{z}{\alpha_{n1}}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_{n2}}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{\alpha_{nn}}\right)$$

un suite de polynomes qui tend uniformément vers une fonction entière $F(z)$. Alors la suite des fractions

$$R_n(z) = \frac{P_n'(z)}{P_n(z)} = \sum_{\nu \; 1}^{n} \frac{1}{z - \alpha_{n\nu}}$$

tend uniformément (dans notre sens) vers la fonction méromorphe

$$R(z) = \frac{F'(z)}{F(z)}.$$

En applicant alors le théorème III′ et IV′ on obtient les théorèmes de MM. PÓLYA, SCHUR (6) pour les fonctions entières qui sont limites de polynomes avec des zéros réels.

Supposons que les zéros des polynomes $P_n(z)$ se trouvent dans un secteur A de sommet $z = 0$ et d'ouverture $< \pi$. D'après le théorème III, on obtient que la fonction entière $F(z)$ a la forme suivante

$$F(z) = e^{-\delta z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right),$$

où α_n sont des points de A, δ est un point de $\overline{A}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_n|}$ est convergente, ce qui est un théorème de M. PÓLYA (7).

Supposons maintenant que les zéros des $P_n(z)$ se trouvent au dessus de l'axe réel. Alors d'après le théorème III la fonction $F(z)$ aura la forme suivante

$$F(z) = e^{-\gamma z^2 + \delta z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) e^{\frac{z}{\alpha_n}},$$

où $j(\alpha_n) \geq 0$, γ réel et non négatif, la série $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} j\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$ est convergente et sa somme est $\leqq j(\delta)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_n|^2}$ est aussi convergente, ce qui est un autre théorème de M. PÓLYA (8), enoncé par lui sans démonstration.

(6) G. PÓLYA und I. SCHUR, *Ueber zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen,* « Journal für die reine and angew. Math. », 144 (1914), pp. 89-113. E. LINDWART und G. PÓLYA, *Ueber einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Polynomenfolgen und der Verteilung ihrer Wurzeln,* « Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo », 37 (1914), pp. 1-8.

(7) G. PÓLYA, *Ueber Annäherung durch Polynomen, deren sämtliche Wurzeln in einem Winkelraum fallen,* « Gött. Nachrichten », (1913), pp. 326-330.

(8) G. PÓLYA, *Sur les opérations fonctionnelles linéaires échangeables avec la dérivation et sur les zéros des polynomes,* « Comptes Rendus », 183 (1926), p. 413.

Sopra una classe particolare di integrali doppi del Calcolo delle Variazioni [1].

Memoria di BASILIO MANIÀ (a Pisa).

Sunto. - *Si danno dei teoremi di esistenza dell'estremo assoluto per gli integrali doppi della forma* $\iint\limits_D F(x, y, z, p)dxdy$.

In una Sua recente Memoria degli « Annali della Scuola Normale [2] » il TONELLI ha dato vari teoremi di esistenza dell'estremo assoluto per gli integrali doppi in forma ordinaria del Calcolo delle Variazioni. In questi teoremi si ammette che la funzione integranda $F(x, y, z, p, q)$ sia definita per (x, y) appartenente a un campo piano limitato aperto D e per z, p, q numeri finiti qualunque, e che, oltre a certe condizioni di derivabilità, soddisfi sempre ad una disuguaglianza del tipo

$$F(x, y, z, p, q) > \mu \{ |p|^{1+\alpha} + |q|^{1+\alpha} \} + N, \tag{1}$$

essendo $\mu > 0$, mentre α in alcuni teoremi è $= 1$, in altri deve essere > 1, ed in altri ancora > 0.

Un caso che sfugge ai teoremi indicati si presenta quando la funzione integranda è indipendente da una delle due variabili p, q, cioè quando è, per esempio, della forma $F(x, y, z, p)$. Infatti allora la (1) non può essere soddisfatta.

Ci proponiamo perciò di dare delle condizioni sufficienti per l'esistenza dell'estremo assoluto nel caso indicato e in qualche altro che si può ricondurre ad esso.

Per questo, dobbiamo premettere un teorema sulla derivabilità della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine rispetto a un parametro contenuto nell'equazione e alle coordinate dei punti terminali della curva integrale che rappresenta quella soluzione.

---

[1] Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

[2] L. TONELLI, *L'estremo assoluto degli integrali doppi*, « Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa », Serie II, Vol. II (1933), pp. 89-130.

1. Un teorema del genere or ora indicato è stato ottenuto da L. LICHTENSTEIN (1), sfruttando la seguente proposizione di E. PICARD (2):

« Sia data un' equazione differenziale del secondo ordine

$$y'' = f(x, y, y', \mu), \tag{2}$$

con $f(x, y, y', \mu)$ finita e continua nell' insieme definito dalle disuguaglianze

$$0 \leq x \leq b, \quad |y| \leq L, \quad |y'| \leq L', \quad |\mu - \mu_0| \leq c. \tag{3}$$

In questo insieme la funzione $f(x, y, y', \mu)$ sia lipschitziana rispetto a y e y', cioè si abbia

$$|f(x, y, y', \mu) - f(x, y_1, y_1', \mu)| \leq \alpha |y - y_1| + \beta |y' - y_1'|, \tag{4}$$

e, posto $M = \operatorname{Max} |f(x, y, y', \mu)|$, nell' insieme (3), sieno b e B, con $b > 0$, due numeri tali che risulti

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{Mb^2}{8} + |B| \leq L, \\ &\frac{Mb}{2} + \left|\frac{B}{b}\right| \leq L', \\ &\frac{\alpha b^2}{8} + \frac{\beta b}{2} < 1. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Allora nell' intervallo $(0, b)$ esiste sempre una soluzione dell' equazione (2), finita e continua insieme con le sue derivate dei primi due ordini rispetto a x, la quale per $x = 0$ assuma il valore 0, per $x = b$ assuma il valore B e in $(0, b)$ soddisfi alle disuguaglianze $|y(x)| \leq L$, $|y'(x)| \leq L'$. Questa soluzione e le sue derivate sono date dalle serie uniformemente convergenti

$$\left\{\begin{aligned} &y = y_1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots, \\ &\frac{dy}{dx} = y_1' + (y_2' - y_1') + (y_3' - y_2') + \dots, \\ &\frac{d^2y}{dx^2} = y_1'' + (y_2'' - y_1'') + (y_3'' - y_2'') + \dots, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

dove

$$y_1, y_2, y_3, \dots$$

(1) L. LICHTENSTEIN, *Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen..*, « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », 38, 1909, Cap. I, § 3.

(2) E. PICARD, *Traité d'Analyse*, Vol. III (1896), pp. 94-100; cfr. anche loc. cit. (1), p. 280.

sono gli integrali delle equazioni differenziali

$$
(7) \qquad \begin{cases} y_1'' = f(x, y_0, & y_0', & \mu), \\ y_2'' = f(x, y_1, & y_1', & \mu), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n'' = f(x, y_{n-1}, & y'_{n-1}, & \mu), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}
$$

che per $x = 0$ assumono il valore 0 e per $x = b$ assumono il valore B, mentre y_0 è una qualunque funzione, finita e continua insieme con la sua derivata prima in $(0, b)$, e soddisfacente ivi alle disuguaglianze

$$|y_0| \leq L, \quad |y_0'| \leq L' \text{»}.$$

Il Lichtenstein dimostra che se, oltre alle condizioni ammesse, sono finite e continue nell'insieme (3) le derivate $f_y(x, y, y', \mu)$, $f_{y'}(x, y, y', \mu)$, $f_\mu(y, y, y', \mu)$, le serie (6) sono derivabili termine a termine rispetto ai valori, per $x = 0$ e per $x = b$, della soluzione da esse rappresentata e rispetto al parametro μ.

Noi ci proponiamo di dimostrare un teorema analogo nel quale non compaiano più le condizioni (5).

Teorema. — *Se* $f(x, y, y', \mu)$ *è una funzione finita e continua insieme con le sue derivate parziali del primo ordine rispetto a* y, y', μ, *per* (x, y) *appartenente a un campo* A, y' *qualunque e* $|\mu - \mu_0| \leq c$;

se

$$y = \bar{y}(x), \qquad (a \leq x \leq b),$$

è una soluzione dell'equazione differenziale del secondo ordine

$$(2) \qquad y'' = f(x, y, y', \mu)$$

per un certo valore $\bar{\mu}$ *del parametro, tale che* $|\bar{\mu} - \mu_0| < c$, *la cui curva rappresentatrice* $\bar{\mathfrak{C}}$ *sia tutta interna al campo* A;

se è

$$a < \bar{\xi}_0 < \bar{\xi}_1 < b, \quad \bar{y}(\bar{\xi}_0) = \bar{\eta}_0, \quad \bar{y}(\bar{\xi}_1) = \bar{\eta}_1;$$

se, per tutto l'arco di $\bar{\mathfrak{C}}$ *a destra di* $(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0)$ *si può determinare un numero,* $\sigma > 0$, *tale che non esista un'altra curva integrale della* (2), *per* $\mu = \bar{\mu}$, *uscente da* $(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0)$, *appartenente all'intorno* $(\sigma)^2$ *di questo arco* (1) *e avente in comune con esso degli ulteriori punti*;

(1) Si dice che una curva

$$\mathfrak{C}: \quad y = y(x), \qquad (\alpha, \beta),$$

appartiene all'intorno $(\sigma)^2$ di $\bar{\mathfrak{C}}$ se in tutto l'intervallo comune ad (a, b) e ad (α, β) è *allora, si può definire una funzione*

$$Y(x;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \mu)$$

per

$$a \leq x \leq b,$$

e $(\xi_0,\ \eta_0,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \mu)$ *appartenente a un intorno sufficientemente piccolo di* $(\xi_0,\ \bar{\eta}_0,\ \bar{\xi}_1,\ \bar{\eta}_1,\ \bar{\mu})$, *la quale dia per ogni quintupla* $(\xi_0,\ \eta_0,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \mu)$ *detta, un integrale della* (2), *tale che*

(8) $$Y(\xi_0;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \mu) = \eta_0, \quad Y(\xi_1;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \mu) = \eta_1 .$$

Le funzioni

(9) $$Y(x;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \mu),$$
$$\frac{\partial Y(x;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \mu)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 Y(x;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \mu)}{\partial x^2},$$

sono finite e continue insieme con le loro derivate parziali del primo ordine rispetto a $\xi_0,\ \eta_0,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \mu$ *nell'insieme di punti* $(x,\ \xi_0,\ \eta_0,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \mu)$ *indicato.*

Preso un qualunque punto $(\xi_0,\ \eta_0)$ interno al campo A e fissato un numero finito η_0' e un valore di μ in $(\mu_0 - c,\ \mu_0 + c)$, esiste una e una sola curva integrale $\mathfrak{C}$ della (2), interna ad A, e passante per $(\xi_0,\ \eta_0)$ con coefficiente angolare η_0'. Indichiamo con

(10) $$y = y(x;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \eta_0',\ \mu)$$

la funzione rappresentata da $\mathfrak{C}$.

Fissiamo poi un sistema di valori $(\xi_0,\ \bar{\eta}_0,\ \bar{\eta}_0',\ \bar{\mu})$ e sia $\bar{\mathfrak{C}}$ la curva integrale della (2) corrispondente a questo sistema. La funzione

(10') $$y = y(x;\ \bar{\xi}_0,\ \bar{\eta}_0,\ \bar{\eta}_0',\ \bar{\mu})$$

sia definita per $a \leq x \leq b$, con $a < \bar{\xi}_0 < b$, e la curva $\bar{\mathfrak{C}}$ sia tutta interna al campo A.

Allora, assegnato un numero $\rho > 0$ arbitrario, si può determinare un numero $\rho_0 > 0$, tale che, per ogni quaterna $(\xi_0,\ \eta_0,\ \eta_0',\ \mu)$ soddisfacente alle disuguaglianze

$$|\xi_0 - \bar{\xi}_0| \leq \rho_0, \quad |\eta_0 \quad \bar{\eta}_0| \leq \rho_0, \quad |\eta_0' \quad \bar{\eta}_0'| \leq \rho_0, \quad |\mu - \bar{\mu}| \leq \rho_0$$

$y(x) - \bar{y}(x) \ \leq \sigma$, $\ y'(x) - \bar{y}'(x) \ \leq \sigma$, se $|a - \alpha| \leq \sigma$, $|b - \beta| \leq \sigma$, e, nella parte di $(\alpha,\ \beta)$ che precede a, $\ y(x) - \bar{y}(a)| \leq \sigma$ e $\ y'(x) - \bar{y}'(a)| \leq \sigma$, e, in tutta la parte di $(\alpha,\ \beta)$ che segue b, $\ y(x) - \bar{y}(b) \ \leq \sigma$ e $\ y'(x) - \bar{y}'(b) \ \leq \sigma$. Vedi L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, II, p. 357.

la soluzione corrispondente della (2) risulti definita in (a, b) e in tale intervallo appartenga all'intorno $(\rho)^2$ di $\overline{\mathfrak{C}}$, cioè sia tale che in tutto (a, b) si abbia

$$|y(x;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \eta_0',\ \mu) - y(x;\ \xi_0,\ \overline{\eta}_0,\ \overline{\eta}_0',\ \mu)| \leq \rho,$$
$$|y'(x;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \eta_0',\ \mu) - y'(x;\ \overline{\xi}_0,\ \overline{\eta}_0,\ \overline{\eta}_0',\ \overline{\mu})| \leq \rho;$$

inoltre, ρ_0 si può scegliere in modo che valgano anche le disuguaglianze

$$\begin{aligned}(11)\qquad & e^{(H+1)(x-\overline{\xi}_0)}[\,|y(\xi_0;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \eta_0',\ \mu) - y(\xi_0;\ \overline{\xi},\ \overline{\eta}_0,\ \overline{\eta}_0',\ \overline{\mu}) + \\ & \quad + |y'(\xi_0:\ \xi_0,\ldots) - y'(\xi_0;\ \xi_0,\ldots)| + |\mu - \mu|\,] \leq \\ & \leq |y(x;\ \xi_0,\ldots) - y(x;\ \overline{\xi}_0,\ldots)| + |y'(x;\ \xi_0,\ldots) - y'(x;\ \overline{\xi}_0,\ldots)| + \mu - \overline{\mu} \leq \\ & \leq e^{(H+1)(x-\overline{\xi}_0)}[\,|y(\xi_0;\ \xi_0,\ldots) - y(\xi_0;\ \overline{\xi}_0,\ldots)| + |y'(\xi_0;\ \xi_0,\ldots) - y'(\xi_0,\ \overline{\xi}_0,\ldots) + |\mu - \overline{\mu}\,],\end{aligned}$$

per $x \geq \overline{\xi}_0$, e le stesse col segno $\leq$ sostituito dal segno $\geq$, per $x < \xi_0$, essendo H un numero maggiore del massimo modulo di $f_y(x, y, y', \mu)$, $f_y(x, y, y', \mu)$, $f_\mu(x, y, y', \mu)$, per x appartenente ad (a, b), $|y\ \ y(x;\ \overline{\xi}_0,\ldots)| \leq \rho$, $y' - y'(x;\ \xi_0,\ldots) \leq \rho$, $|\mu - \mu_0| \leq c$ (1).

Sappiamo di più che esistono finite e continue, in un intorno di $(\overline{\xi}_0,\ \overline{\eta}_0,\ \overline{\eta}_0',\ \overline{\mu})$ e per x appartenente ad (a, b), le funzioni $y(x;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \eta_0',\ \mu)$, $y'(x;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \eta_0',\ \mu)$, $y''(x;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \eta_0',\ \mu)$ e le loro derivate parziali del primo ordine rispetto a $\xi_0,\ \eta_0,\ \eta_0',\ \mu$ (2).

Poniamo ora nelle (11)

$$\xi_0 = \overline{\xi}_0, \quad \eta_0 = \overline{\eta}_0, \quad \mu = \mu, \quad \eta_0' \neq \overline{\eta}_0'.$$

Otteniamo con ciò

$$\begin{aligned}&|y(x;\ \overline{\xi}_0,\ \overline{\eta}_0,\ \eta_0',\ \overline{\mu}) - y(x;\ \overline{\xi}_0,\ \eta_0,\ \eta_0',\ \overline{\mu})| + |y'(x;\ \xi_0,\ \overline{\eta}_0,\ \eta_0',\ \mu) \\ &\qquad - y'(x;\ \overline{\xi}_0,\ \overline{\eta}_0,\ \overline{\eta}_0',\ \overline{\mu})| \geq e^{-(H+1)(b-a)}|\eta_0' - \overline{\eta}_0'|,\end{aligned}$$

da cui

$$(12)\qquad \left|\left(\frac{\partial y(x;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \eta_0',\ \mu)}{\partial \eta_0'}\right)_{\substack{\xi_0 = \overline{\xi}_0 \\ \eta_0 = \overline{\eta}_0 \\ \eta_0' = \overline{\eta}_0' \\ \mu = \overline{\mu}}}\right| + \left|\left(\frac{\partial y'(x;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \eta_0',\ \mu)}{\partial \eta_0'}\right)_{\substack{\xi_0 = \xi_0 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots}}\right| \geq e^{-(H+1)(b-a)}.$$

Se ammettiamo adesso la condizione di unicità indicata nell'enunciato, cioè che si possa determinare un numero $\sigma > 0$ abbastanza piccolo affinchè non esistano delle curve integrali della (2), per $\mu = \overline{\mu}$, le quali passino per

(1) La doppia disuguaglianza (11) data dal TONELLI nei suoi *Fondamenti*, (Vol. II, p. 166 e segg. e p. 357 e segg.) è una generalizzazione di una disuguaglianza del PEANO.

(2) Vedi L. TONELLI, loc. cit., e NICOLETTI, PEANO, PICARD, BENDIXSON, ecc.

$(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0)$, incontrino $\bar{\mathfrak{C}}$ a destra di questo punto, e appartengano all'intorno $(\sigma)^2$ di $\bar{\mathfrak{C}}$; allora, se è $\eta_0' > \bar{\eta}_0'$ e $|\eta_0' - \bar{\eta}_0'|$ abbastanza piccolo, è, per $x > \xi_0$,

$$y(x;\ \bar{\xi}_0,\ \bar{\eta}_0,\ \eta_0',\ \bar{\mu}) > y(x;\ \bar{\xi}_0,\ \bar{\eta}_0,\ \bar{\eta}_0',\ \bar{\mu}),$$

e quindi

$$\left(\frac{\partial y(x;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \eta_0',\ \mu)}{\partial \eta_0'}\right)_{\xi_0=\bar{\xi}_0,\dots} \geq 0, \tag{13}$$

per $x \geq \bar{\xi}_0$.

Essendo $\dfrac{\partial y'(\xi_0;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \eta_0',\ \mu)}{\partial \eta_0'} = 1$, in tutto un intorno a destra di $\bar{\xi}_0$ è

$$\left(\frac{\partial y(x;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \eta_0',\ \mu)}{\partial \eta_0'}\right)_{\xi_0=\bar{\xi}_0,\dots} > 0.$$

Consideriamo, se esiste, il primo punto di (ξ_0, b), diverso da ξ_0, nel quale la (13) valga col segno $=$. In tutto un intorno di tale punto, $\left(\dfrac{\partial y'(x;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \eta_0',\ \mu)}{\partial \eta_0'}\right)_{\xi_0=\bar{\xi}_0,\dots}$ è per la (12) in valore assoluto maggiore di un numero positivo abbastanza piccolo, e inoltre deve essere < 0. Ma, allora, a destra del punto indicato, se esso precede b, si avrebbe $\left(\dfrac{\partial y(x;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \eta_0',\ \mu)}{\partial \eta_0'}\right)_{\xi_0=\bar{\xi}_0,\dots} < 0$, contro la (13). Dunque, nelle ipotesi fatte, per $\xi_0 < x < b$, la (13) vale col segno $>$.

Preso ora un punto $(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1)$ su $\bar{\mathfrak{C}}$, con $\bar{\xi}_0 < \bar{\xi}_1 < b$, e considerata l'equazione

$$y(\xi_1;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \eta_0',\ \mu) - \eta_1 = 0,$$

questa definisce una funzione implicita

$$\eta_0'(\xi_1,\ \xi_0,\ \eta_0,\ \mu,\ \eta_1)$$

finita e continua in un intorno di $(\bar{\xi}_1,\ \bar{\xi}_0,\ \bar{\eta}_0,\ \bar{\mu},\ \bar{\eta}_1)$ insieme con le sue derivate parziali del primo ordine rispetto ai suoi cinque argomenti. Sostituendo questa funzione al posto di η_0' nella (10), otteniamo una funzione

$$Y(x;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \mu),$$

la quale, per ogni quintupla $(\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1, \mu)$, in un intorno di $(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\mu})$, ci dà una curva integrale della (2), definita in tutto (a, b) e passante per i punti (ξ_0, η_0) e (ξ_1, η_1).

Ciò dimostra il teorema enunciato.

OSSERVAZIONE I. — *Nel teorema precedente basta anche supporre che* f, f_y, $f_{y'}$, f_μ *sieno finite e continue nell'insieme dei punti* (x, y, y', μ) *con* x

appartenente ad (a, b), $|y - \bar{y}(x)| \leq \rho$, $|y' - \bar{y}'(x)| \leq \rho$, $|\mu - \bar{\mu}| \leq c'$, *essendo* c' *il più piccolo dei due numeri* $\bar{\mu} - \mu_0 + c$, $\mu_0 + c - \bar{\mu}$.

Ciò segue dal fatto che i risultati ai quali ci siamo riferiti nella dimostrazione sono validi anche in queste ipotesi (¹).

OSSERVAZIONE II. — *Se, oltre ad esistere finite e continue le derivate parziali del primo ordine di* f, *esistono finite e continue anche le derivate parziali del secondo ordine, le funzioni* (9) *del teorema precedente sono finite e continue nell'insieme ivi indicato, con le loro derivate parziali dei primi due ordini rispetto a* ξ_0, η_0, ξ_1, η_1, μ.

Infatti, nelle nuove ipotesi, le funzioni

$$y(x;\,\xi_0,\,\eta_0,\,\eta_0',\,\mu),\quad y'(x;\,\xi_0,\,\eta_0,\,\eta_0',\,\mu),\quad y''(x;\,\xi_0,\,\eta_0,\,\eta_0',\,\mu)$$

sono finite e continue insieme con le loro derivate parziali dei primi due ordini rispetto a ξ_0, η_0, η_0', μ (²), e quindi anche la funzione

$$\eta_0'(\xi_1,\,\xi_0,\,\eta_0,\,\mu,\,\eta_1)$$

definita sopra è finita e continua insieme con le sue derivate parziali dei primi due ordini.

2. La proposizione dimostrata ci servirà ora a dedurre il seguente teorema di esistenza dell'estremo assoluto per la classe particolare di integrali doppi a cui abbiamo accennato in principio.

TEOREMA. — *Sia* $\bar{D}$ *un campo del piano* (x, y) *racchiuso da una curva* γ *formata da due cerchi* γ_1 *e* γ_2 *di equazioni*

$$x = x_1(y), \quad x = x_2(y), \quad (a \leq y \leq b),$$

con $x_1(y)$, $x_2(y)$ *finite e continue in* (a, b), $x_1'(y)$, $x_2'(y)$ *finite e continue nell'interno di* (a, b), *e*

$$x_1(y) < x_2(y), \qquad (a < y < b);$$

lungo γ *sieno distribuiti dei valori dati da due funzioni*

$$z = z_1(y), \quad z = z_2(y), \quad (a \leq y \leq b),$$

con $z_1(y)$, $z_2(y)$ *finite e continue in* (a, b), $z_1'(y)$, $z_2'(y)$ *finite e continue nell'interno di* (a, b), *e tali che*

$$z_1(a) = z_2(a), \quad z_1(b) = z_2(b),$$

(¹) Vedi, per esempio, L. TONELLI, loc. cit.

(²) Vedi L. TONELLI, loc. cit.

e che

$$\frac{z_2(y) - z_1(y)}{x_2(y) - x_1(y)}$$

sia una funzione finita e continua in (a, b);

sia

$$F(x, y, z, p)$$

una funzione finita e continua insieme con le sue derivate parziali dei primi due ordini e insieme anche con le derivate parziali dei primi due ordini di F_p, *per* (x, y) *appartenente a un campo aperto* D′ *contenente* $\overline{D}$, *e* z *e* p *numeri finiti qualunque;*

per (x, y) *appartenente a* D′ *e* z *e* p *numeri finiti qualunque sia* $F_{pp} > 0$ *e l'integrale*

$$I(y) = \int_{\mathcal{C}} F(x, y, z, p)dx \ (^1)$$

ammetta, per ogni y *di* (a. b) *il minimo assoluto nella classe di tutte le curve ordinarie* (²) $\mathcal{C}$ *della forma* z = z(x), *congiungenti i due punti*

$$(x_1(y), z_1(y)), \quad (x_2(y), z_2(y)),$$

e questo sia dato da un' estremale

$$\Gamma(y): \quad z = z_0(x, y), \quad (x_1(y) \leq x \leq x_2(y));$$

per ogni coppia di punti $(x_1(y), y, z_1(y))$, (x, y, z), *con* $a < y < b$, $x > x_1(y)$, *e* (x, y) *appartenente a* D′, *esista al più una estremale di* I(y) *avente in essi i punti terminali.*

In queste ipotesi, nella classe di tutte le funzioni z(x, y) *continue in* $\overline{D}$, *assumenti su* γ *i valori assegnati, e tali che, su quasi-tutte le parallele all'asse delle* x, z(x, y) *sia una funzione assolutamente continua di* x, *e su quasi-tutte le parallele all' asse delle* y, z(x, y) *sia una funzione assolutamente continua di* y, *e inoltre tali che esista finito*

$$I[z] = \iint_{\overline{D}} F(x, y, z, p)dxdy,$$

esiste il minimo assoluto di I[z].

(¹) Qui è da porre $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, mentre y viene ad essere una costante.

(²) Cioè rappresentabili mediante un'equazione

$$z = z(x) \qquad (\alpha \leq x \leq \beta)$$

con $z(x)$ assolutamente continua.

Per ogni y interno all'intervallo (a, b), l'estremale $\Gamma(y)$ soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2 z_0(x, y)}{\partial x^2} = \frac{F_z - F_{px} - pF_{pz}}{F_{pp}}. \tag{14}$$

Per quanto abbiamo dimostrato al n.º 1, e per le ipotesi fatte su F, e sulle funzioni $x_1(y)$, $x_2(y)$, $z_1(y)$, $z_2(y)$,

$$z_0(x, y), \quad \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 z_0(x, y)}{\partial x^2},$$

risultano funzioni finite e continue insieme con le loro derivate parziali del primo ordine rispetto ad y, per ogni y interno ad (a, b).

Per vederne il comportamento nei punti $(x_1(a), a)$, $(x_1(b), b)$, ci serviamo del teorema di PICARD già ricordato, e cominciamo col dimostrare che $z\,(x, y)$ è continua anche in questi punti.

Consideriamo un rettangolo R di lati

$$\begin{cases} x = x_1(a) - \delta_1, & x = x_1(a) + \delta_1, \\ y = a - \delta_2, & y = a + \delta_2, \end{cases}$$

il quale sia tutto di punti interni al campo aperto D' contenente D e indichiamo con K il massimo modulo di

$$\frac{z_2(y) - z_1(y)}{x_2(y) - x_1(y)} \tag{15}$$

in (a, b) e con M il massimo modulo del secondo membro della (14) per (x, y) appartenente ad R, $|z| \leq \text{Max}\,|z_1(y)| + 1$, $|p| \leq 2K + 1$.

Assegnato un numero positivo $\varepsilon < 1$, arbitrario, diminuiamo eventualmente δ_2 in modo che sia, per $a \leq y \leq a + \delta_2$,

$$\begin{cases} \dfrac{M(x_2(y) - x_1(y))^2}{8} + |z_2(y) - z_1(y)| \leq \varepsilon, \\ \dfrac{M(x_2(y) - x_1(y))}{2} + K \leq 2K + 1, \\ \dfrac{h(x_2(y) - x_1(y))^2}{8} + \dfrac{k(x_2(y) - x_1(y))}{2} < 1, \end{cases}$$

essendo h e k i massimi moduli delle derivate parziali del primo ordine rispetto a z e a p del secondo membro della (14) nell'insieme dei punti (x, y, z, p) poco sopra indicato.

Allora, per ogni y tale che $a < y \leq a + \delta_2$, l'estremale $\Gamma(y)$ è quella data dal teorema di PICARD applicato alla (14), e per essa si ha

$$|z_0(x, y) - z_1(y)| \leq \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial z_0(x, y)}{\partial x}\right| \leq 2K + 1,$$

in tutto l'intervallo $(x_1(y), x_2(y))$.

Di qui segue la continuità di $z_0(x, y)$ nel punto $(x_1(a), a)$, Analogamente si ragiona per il puuto $(x_1(b), b)$, e quindi risulta la continuità di $z_0(x, y)$ in tutto $\bar{D}$.

Dal fatto poi che $\frac{\partial z_0(x, y)}{\partial x}$ resta limitata segue che tale resta anche $\frac{\partial^2 z_0(x, y)}{\partial x^2}$; perciò, dalla continuità del rapporto (15), si deduce che anche $\frac{\partial z_0(x, y)}{\partial x}$ è una funzione continua nei due punti indicati sopra e quindi in tutto $\bar{D}$.

Della derivata $\frac{\partial z_0(x, y)}{\partial y}$ i nostri ragionamenti ci permettono di dire, invece, soltanto che è continua nei punti di $\bar{D}$ diversi dai punti terminali dei due archi γ_1 e γ_2.

Ad ogni modo dalla continuità di $\frac{\partial z_0(x, y)}{\partial x}$ segue che la funzione $z_0(x, y)$ appartiene alla classe considerata nell'enunciato, e poichè

$$I[z_0] = \iint_D F(x, y, z, p)dxdy = \int_a^b dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} F(x, y, z, p)dx,$$

dal modo nel quale è stata definita la $z_0(x, y)$ segue che questa funzione fornisce il minimo assoluto dell'enunciato.

OSSERVAZIONE I. — La superficie minimizzante $z = z_0(x, y)$ determinata nel teorema precedente soddisfa in $\bar{D}$ all'equazione di LAGRANGE

$$F_{pp}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2F_{pq}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + F_{qq}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + F_{pz}\frac{\partial z}{\partial x} + F_{qz}\frac{\partial z}{\partial y} + F_{px} + F_{qy} - F_z = 0,$$

la quale nel caso considerato si riduce alla (14).

OSSERVAZIONE II. — Se in un intorno sufficientemente piccolo di $y = a$ la funzione $x_1(y)$ è decrescente e la funzione $x_2(y)$ è crescente, mentre accade l'opposto in un intorno sufficientemente piccolo di $y = b$; se lungo γ è $z = mx + n$ (in particolare, se z è costante); se $F(x, y, z, p) = \varphi(y)\psi(x, z, p) + h(y)$; e se il secondo membro della (14) è diverso da zero nei punt $(x_1(a), a,$

$z_0(x_1(a), a), m)$ e $(x_1(b), b, z_0(x_1(b), b), m)$; allora, la derivata $\frac{\partial z_0}{\partial y}$ è integrabile in $\overline{D}$ e quindi la funzione $z_0(x, y)$ è assolutamente continua in $\overline{D}$ nel senso del TONELLI [1].

Infatti, nelle ipotesi poste, le estremali Γ sui piani $y = \text{cost.}$ sono sempre le stesse e, nella vicinanza di $y = a$, sempre concave verso l'alto o sempre verso il basso. Di più, per y_1 e y_2 abbastanza vicini ad a e $y_1 > y_2$ l'intervallo $(x_1(y_1), x_2(y_1))$ contiene l'intervallo $(x_1(y_2), x_2(y_2))$. Di qua segue che in un intorno di $(x_1(a), a)$ la funzione $z_0(x, y)$ è monotona rispetto a y. Analogamente si ragiona per il punto $(x_1(b), b)$.

Allora, se si stacca da $\overline{D}$ un intorno di $(x_1(a), a)$ in cui $z_0(x, y)$ sia monotona rispetto a y, si ha, in questo intorno

$$\int dx \int \left| \frac{\partial z_0}{\partial y} \right| dy = \left| \int dx \int \frac{\partial z_0}{\partial y} dy \right|$$

e l'integrale al secondo membro esiste certamente finito.

Ne segue subito l'esistenza di $\iint\limits_D \frac{\partial z_0}{\partial y} dxdy$.

OSSERVAZIONE III. — Per la classe di integrali di cui ci stiamo occupando non si possono dare dei teoremi di esistenza del minimo relativi a campi e condizioni al contorno così generali come nei teoremi del TONELLI, potendo venire a mancare il minimo anche in casi molto semplici.

Così, per esempio, se consideriamo il quadrato Q coi lati paralleli agli assi e vertici opposti $(0, 0)$, $(1, 1)$, e sui lati paralleli all'asse delle y poniamo $z = 0$, e su quelli paralleli all'asse delle x, $z = x$ per $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, e $z = 1 - x$ per $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, nella classe K di tutte le funzioni continue in Q, assolutamente continue su quasi-tutte le parallele all'asse delle x e su quasi-tutte le parallele all'asse delle y, assumenti sul contorno i valori fissati e per le quali esiste finito l'integrale

$$I[z] = \iint\limits_Q p^2 dxdy,$$

non esiste il minimo assoluto di $I[z]$.

Infatti, per ogni funzione $z(x, y)$ di K è

$$I[z] > 0,$$

[1] Vedi L. TONELLI, loc. cit.

mentre il limite inferiore di $I[z]$ in K è uguale a zero, poichè se poniamo $z(x, y) = 0$ nel rettangolo coi lati paralleli agli assi e di vertici opposti $(0, \varepsilon)$, $(1, 1-\varepsilon)$, e nei rettangoli coi lati paralleli agli assi e aventi per vertici opposti rispettivamente $(0, 0)$, $(1, \varepsilon)$ e $(0, 1-\varepsilon)$, $(1, 1)$, definiamo $z(x, y)$ come funzione lineare di y risulta $I[z] < 2\varepsilon$.

3. *a)* I teoremi di esistenza per gli integrali semplici forniscono subito dei corollari del teorema dimostrato al n.° 2. Così ad esempio possiamo enunciare la proposizione seguente.

Se sono soddisfatte le prime tre condizioni del teorema del n.° 2;
se è sempre

$$F_{pp} > 0, \quad F_{pp}F_{zz} - F_{zp}^2 \geq 0;$$

se, per ogni parte limitata dell'insieme dei punti (x, y, z) *considerato, si possono determinare le costanti* m, m_1, M, M_1, α, *in modo che sia*

$$m > 0, \quad M > 0, \quad \alpha > 1,$$

e in tutta la parte indicata si abbia

$$\begin{aligned} m\,|p|^\alpha + m_1 \leq F(x, y, z, p) &\leq M\,|p|^\alpha + M_1, \\ |F_z(x, y, z, p)| &\leq M\,|p|^\alpha + M_1, \\ |F_p(x, y, z, p)| &\leq M\,|p|^\alpha + M_1; \end{aligned}$$

se, infine, l'integrale

$$I(y) = \int F(x, y, z, p)dx$$

calcolato sopra una curva $z = z(x)$ *congiungente due punti appartenenti a un insieme limitato di punti tende a* $+\infty$ *al tendere a* $+\infty$ *del massimo modulo di* $z(x)$;

allora, nella classe delle funzioni $z(x, y)$, *indicata nel teorema del n.° 2 esiste il minimo assoluto di* $I[z]$.

Infatti, per ogni y fissato, esiste l'estremante di $I(y)$ nella classe delle curve ordinarie aventi i punti terminali

$$(x_1(y), z_1(y)), \quad (x_2(y), z_2(y));$$

inoltre, tale estremante è un'estremale, ed è l'unica estremale congiungente quei due punti (1). Perciò sono soddisfatte tutte le condizioni del teorema del n.° precedente.

(1) Vedi L. Tonelli, loc. cit. n.i 90, 97, 128.

ESEMPIO. — Le condizioni del corollario ora enunciato sono soddisfatte se è

$$F(x, y, z, p) = (1 + x^2 + y^2)p^2 + \sqrt{1 + p^2}.$$

b) Dal teorema dimostrato nel n.° 2 e dal teorema di PICARD già ricordato si può dedurre la seguente condizione sufficiente per l'esistenza del minimo assoluto « in piccolo ».

Se F(x, y, z, p) *è definita per* (x, y) *appartenente a un campo aperto* D *e* z *e* p *numeri finiti qualunque, e in questo insieme di punti soddisfa le condizioni di continuità e di derivabilità indicate nel teorema del n.° 2;*

se è

(13) $$F_{pp} > 0, \quad F_{pp}F_{zz} - F_{pz} \geq 0;$$

allora, ad ogni insieme limitato S *di punti* (x, y, z) *per i quali* F *è definita e ad ogni coppia di numeri positivi* M, ρ, *si può far corrispondere un numero* $\delta > 0$, *tale che, preso in* D *un qualunque contorno* γ *di diametro* $\leq \delta$, *soddisfacente alle condizioni del teorema del n.° 2, e distribuiti lungo* γ *dei valori* z *pure soddisfacenti alle condizioni ivi indicate e tali che sia sempre*

$$\left| \frac{z_2(y) - z_1(y)}{x_2(y) - x_1(y)} \right| \leq M,$$

se la curva dello spazio (x, y, z) *che rappresenta i valori distribuiti lungo* γ *è tutta di punti distanti da* S *per non più di* ρ*; nella classe delle funzioni* z(x, y) *indicata nel teorema del n.° 2, esiste il minimo assoluto di*

$$I[z] = \iint F(x, y, z, p)dxdy.$$

Infatti, per il teorema di PICARD, si può scegliere $\delta > 0$ in modo che esistano le estremali $\Gamma(y)$ indicate nel teorema del n.° 2; e, per le (13), può esistere al più una estremale dell'integrale $\Gamma(y)$ la quale congiunga due punti fissati e questa estremale è anche un'estremante [1]. Quindi non resta che da applicare il teorema del n.° 2.

4. Alla classe particolare di integrali che abbiamo considerato ci si può ricondurre qualche volta con un cambiamento di coordinate nel piano (x, y). Così per esempio, se è dato l'integrale

$$I[z] = \iint F(x, y, z, ap + bq)dxdy$$

[1] Vedi L. TONELLI, loc. cit. n.° 128, *b*).

con a e b costanti non entrambe nulle, facendo la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} x = a\bar{x} - b\bar{y} \\ y = b\bar{x} + a\bar{y} \\ z = \bar{z} \end{cases}$$

si ha

$$I[z] = (a^2 + b^2)\iint \bar{F}\left(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z},\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}}\right) d\bar{x}\, d\bar{y},$$

avendo posto

$$\bar{F}\left(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z},\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}}\right) = F\left(a\bar{x} - b\bar{y},\ bx + a\bar{y},\ \bar{z},\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}}\right).$$

On the Linear Conservative Dynamical Systems.

By AUREL WINTNER (Baltimore).

Let n be the number of degrees of freedom of a linear dynamical system. In the present note capital letters will denote real matrices with $2n$ rows and $2n$ columns and greek letters real matrices with n rows and n columns so that, for instance,

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon & \omega \\ \omega & \varepsilon \end{pmatrix}$$

where E and ε are the unit matrices and ω is the n-rowed zero matrix. The letter G will be used for the matrix of the bilinear covariant [1] which is a skew-symmetric and orthogonal matrix:

$$G = \begin{pmatrix} \omega & -\varepsilon \\ \varepsilon & \omega \end{pmatrix}, \quad G' = -G, \quad G' = G^{-1}. \tag{1}$$

The prime denotes the operation of the transposition whereas differentiations with respect to the time t will be marked by a dot. The point $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ of the phase-space will be denoted by $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n})$ or simply by x. Finally, $y = Ax$ designates the vector into which the vector x is transformed by the matrix A. This linear transformation and its matrix are termed non-singular if $\det A \neq 0$.

A system of $2n$ ordinary differential equations of the first order which are homogeneous, linear and do not contain t explicitly clearly is a canonical dynamical system if and only if there exists a *symmetric* matrix H such that the differential equations may be written in the form $G\dot{x} = Hx$. In fact, H is up to the factor 2 simply the matrix of the $2n$-ary quadratic form which represents the Hamiltonian function. Since $G^{-1} = -G$, one may write

$$\dot{x} = -GHx \quad \text{where} \quad H = H'. \tag{2}$$

A non-singular matrix C which is independent of t will be termed a *Hamiltonian matrix* if the transformation $x = Cy$ sends *every* differential

(1) Cf. T. LEVI-CIVITA and U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, Vol. 2, Part II (1927), pp. 308-311.

system of the form (2) into a differential system of the same form. It may be shown without difficulty that these substitutions $x = Cy$ constitute a subgroup of the group of all contact transformations ([2]), viz. the subgroup consisting of those contact transformations in which all transformation formulae contain but linear forms which are independent of t. The dynamical importance of this subgroup seems to warrant the presentation of an « elementary », i. e. purely algebraic, theory of these transformations, which is the object of the present note. The results thus obtained are correspondingly more explicit than if formulated in terms of the general analytical theory of JACOBI and LIE. Incidentally, there proves to be a formal analogy with the transformation theory of the parameters of multiple theta series or of the periods of Abelian integrals ([3]).

One may start with the remark that two fixed non-singular matrices, A and B, satisfy the symmetry relation $(AHB)' = AHB$ for *every* symmetric matrix $H = H'$ if and *only* if there exists a number $s \neq 0$ such that $A' = sB$. For on placing $M' = A'B^{-1}$, the condition $(AHB)' = AHB$ is equivalent to $MH = HM'$ where $H = H'$ is arbitrary and may therefore be chosen $= E$. Hence $M = M'$. Now $MH = HM$ holds for every $H = H'$ if and *only* if M is of the form sE. This is easily seen by direct substitution if M is a diagonal matrix. If it is not presupposed that M is a diagonal matrix then $M = M'$ may be transformed by means of an orthogonal matrix R into a diagonal matrix RMR^{-1} whereas R transforms the set of all matrices $H = H'$ into itself. Hence the matrix RMR^{-1} which is a diagonal matrix is by the previous remark $= sE$ so that $M = sE$ although it is not presupposed that M is a diagonal matrix. Finally, $s \neq 0$ inasmuch as $sE = M = M' = A'B^{-1}$ is the product of two non-singular matrices. Thus $A' = sB$, $s \neq 0$, q. e. d.

On substituting $x = Cy$ into (2) one obtains $\dot{y} = -GKy$ where $K = -GC^{-1}GHC$ inasmuch as $G = -G^{-1}$. Hence C is a Hamiltonian matrix if and only if K in $\dot{y} = -GKy$ always is the matrix of a $2n$-ary quadratic form, i. e. if and only if $K = K'$ whenever $H = H'$. Now $K = K'$ may be written in virtue of $H = H'$ and $G' = -G = G^{-1}$ in the form $(AHB)' = AHB$ by placing $A = C^{-1}G$ and $B = CG$ so that ([4]) det $A \neq 0$, det $B \neq 0$. This is,

([2]) Cf. T. LEVI-CIVITA and U. AMALDI, loc. cit., pp. 310-316 and 324-327.

([3]) Cf. G. FROBENIUS, *Ueber die principale Transformation der Thetafunktionen mehrerer Variablen*, « Journal für reine und angewandte Mathematik », Vol. 95 (1883), pp. 264-296, § 1, etc. or C. JORDAN, *Traité des substitutions*, 1870, Chap. II, § 8.

([4]) On the other hand, det H may or may not vanish.

as we saw, equivalent to $A' = sB$ or, since $A = C^{-1}G$, $B = CG$, simply to

$$C'GC = sG; \quad |\det\ C| = |s|^n > 0 \tag{3}$$

if one writes s instead of $-s^{-1}$. The matrix $K = -GC^{-1}GHC$ belonging to the transformed Hamiltonian function takes in virtue of (3) and (1) the form

$$K = s^{-1}C'HC. \tag{3-a}$$

The necessary and sufficient condition (3) for a Hamiltonian matrix C states that *the bilinear form in cogredient variables which belongs to* (1) *is a « relative invariant » of a non-singular linear substitution if and only if the matrix of this substitution is a Hamiltonian matrix.* The group of the Hamiltonian matrices, in contrast with the rotation and reflexion group of the euclidian or of a pseudo-euclidian space, cannot be characterized by the *absolute* invariance of a bilinear form. This is clear from (2) where the unit of the time is undetermined. In a more precise manner, $C'GC = G$ need not hold even if $|\det\ C| = 1$. This is illustrated by the Hamiltonian matrix

$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon & \omega \\ \omega & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

for which $C'GC = -G \neq G$ although $|\det\ C| = |(-1)^n| = 1$.

On choosing in this example $n \equiv 0 \pmod 2$, it follows that $\det\ C > 0$ *is compatible with* $s < 0$. On the other hand, $s > 0$ *is not compatible with* $\det\ C < 0$. In fact, since $\det\ (rG - G') = \det[(r+1)G] = (r+1)^{2n}$ does not vanish at $r = 1$, it follows from a theorem of FROBENIUS ([5]) that if J is any matrix for which $J'GJ = G$ then $\det\ J > 0$. Hence $s = 1$ implies $\det\ C > 0$. Now the case $s > 0$ may be reduced to the case $s = 1$ so that $s > 0$ implies $\det\ C > 0$, q. e. d.

A dynamical system (2) with n degrees of freedom will be termed *reducible* if it may be sent by a non-singular transformation $x = Ty$ into $m > 1$ systems of the form (2) each of which having a degree of freedom $< n$. In the limiting case $m = n$ one may speak of *complete* reducibility. Since the frequencies of (2) need not be ([6]) real or purely imaginary if $n > 2$ but are always either real or purely imaginary if $n = 1$, the completely reducible case cannot be considered as the general case. A sufficient condition for

---

([5]) G. FROBENIUS, *Ueber die schiefe Invariante einer bilinearen oder quadratischen Form*, « Journal für reine und angewandte Mathematik », Vol. 86 (1876), pp. 44-71, more particularly p. 48.

([6]) Cf. Sir W. THOMSON and P. G. TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*. Vol. 1. Part I (1879), pp. 389-396.

the complete reducibility of (2) is that of WEIERSTRASS (7) requiring that the Hamiltonian function be separated into purely potential and purely kinetic energies (8),

$$H = \begin{pmatrix} \mu & \omega \\ \omega & \nu \end{pmatrix} = H' \qquad (\omega = \text{zero matrix}) \tag{4}$$

and that $\nu = \nu'$ be a positive definite matrix (9). It may be noted that the completely reduced form of (2) may then be obtained with the use of a *Hamiltonian* matrix $T = C$ in $x = Ty$. At the end of the present note there will be given for the existence of this $T = C$ a direct proof which does not presuppose the considerations of WEIERSTRASS.

The question regarding the reducibility of (2) is clearly related to the existence of $m > 1$ conservative and homogeneous quadratic integrals which may degenerate into the square of linear ones. To the bracket criterion of POISSON (1) there corresponds the following rule: *A real quadratic 2n-ary form having the matrix $F = F'$ which is independent of t represents a first integral of* (2) *if and only if $HGF = FGH$* where G is defined by (1) and $H = H'$ belongs to the energy integral of the unseparated system (2). In particular, there exist precisely as many (≥ 0) real conservative linear integrals as linearly independent vectors x for which GHx is the zero vector. Hence there exists no real linear integral independent of t if and only if GH is non-singular, i. e. det $H \neq 0$. The verification of all these statements requires but the substitution of (2) into the time-derivative of a quadratic or linear form.

According to a result of AUTONNE (11), there exists for every non-singular matrix A exactly one positive definite and therefore symmetric matrix $P = P'$

---

(7) K. WEIERSTRASS, *Mathematische Werke*, Vol. 1 (1894), pp. 233-256.

(8) This restriction excludes conservative « frictional » terms of the type of Coriolis forces in the plane.

(9) This further restriction excludes not only the case det $\nu = 0$ of a singular metric but the indefinite case of a pseudo-euclidian non-singular metric as well.

(10) Cf. T. LEVI-CIVITA and U. AMALDI, loc. cit., p. 333.

(11) L. AUTONNE, *Sur l'Hermitien*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », Vol. 16 (1902), pp. 104-128, more particularly pp. 123-125. The considerations of AUTONNE concern the complex domain but are valid in the real domain also. The uniqueness of the polar factorization is not pointed out by AUTONNE. He proves, however, (loc. cit., pp. 120-121) that there exists but one positive definite matrix $P = P'$ such that $AA' = P^2$. Now $AA' = P^2$ is a consequence of $A = PR$. Hence P is completely determined by A. Consequently $R = P^{-1}A$ also is unique. This situation has been pointed out by the present author, *On Non-Singular Bounded Matrices*, « American Journal of Mathematics », Vol. 54 (1932), pp. 145-149.

and exactly one orthogonal matrix $R = R'^{-1}$ such that ([12]) $A = PR$. The possibility of this unique factorization into « polar » factors is clearly the multidimensional generalization of a well-known fact in the kinematics of continua. We shall prove that *both polar factors P, R of any Hamiltonian matrix C are Hamiltonian matrices.* First, on substituting $C = PR$ where $P = P'$, $R' = R^{-1}$ into (3) one obtains $R^{-1}PGPR = sG$. Hence $P_1R_1 = P_2R_2$ where

$$(5) \qquad R_1 = G,\ R_2 = \pm RGR^{-1};\quad P_1 = P,\ P_2 = \pm sR_2P^{-1}R_2^{-1}$$

and ([13]) $\pm s = |s|$. Now the orthogonal matrices form a group which contains R by supposition and $\pm G$ in virtue of (1) so that R_1 and R_2 are orthogonal matrices. On the other hand, P_1 and P_2 are positive definite matrices inasmuch as the reciprocal matrix of a positive definite matrix P is positive definite and remains so on an orthogonal transformation and on multiplication by a positive number $\pm s = |s|$. Consequently $R_1 = R_2$ and $P_1 = P_2$ in virtue of the uniqueness of the polar factorization of the non-singular matrix $P_1R_1 = P_2R_2$. Hence from (5)

$$G = \pm RGR^{-1},\ P = \pm sGP^{-1}G^{-1}$$

where $R^{-1} = R'$ and $P' = P$ by definition. Accordingly (3) is satisfied by $C = R$ and by $C = P$ if one chooses in (3) the multiplier equal to ± 1, $\pm s$, resp. Thus R and P are Hamiltonian matrices, q. e. d.

Since the product of two Hamiltonian matrices always is a Hamiltonian matrix, it follows that it is sufficient to know those Hamiltonian matrices which are positive definite or orthogonal, i. e. which represent dilatations and rotations or reflections in a euclidian space the dimension of which is, however, not n but $2n$. The projection of an orthogonal transformation of the $2n$-dimensional phase-space on the n-dimensional space of the coordinates need not be an orthogonal transformation of this n-dimensional space. On writing a Hamiltonian matrix C in the form

$$(6) \qquad C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

so that α, β, γ, δ are n-rowed matrices and on substituting (1) and (6) into (3) under the assumption $C' = C^{-1}$ of $2n$-ary orthogonality, one obtains

---

([12]) Since det $P > 0$, the determinant of A is of the same sign as det $R = \pm 1$.

([13]) In other words, we intend to use in (5) the upper or the lower sign according as s is > 0 or < 0.

$\gamma = -\beta$, $\delta = \alpha$ if $s > 0$ and $\gamma = \beta$, $\delta = -\alpha$ if $s < 0$. Hence if (6) is a Hamiltonian matrix then it is a $2n$–ary orthogonal matrix if and only if it has either of the particular forms

$$\text{(7-a)} \qquad C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \; s = 1; \qquad\qquad \text{(7-b)} \qquad C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}, \; s = -1.$$

The type (7-b) differs from the type (7-a) only regarding the constant factor (1) which is of the type (7-a). Not so easy is the characterization of those Hamiltonian matrices which are positive definite. These Hamiltonian matrices which represent $2n$–ary dilatations do not form a group.

The above considerations may easily be extended from the Hamiltonian to the Pfaffian dynamical systems. The latter have in our linear conservative case the form [14] $\dot{y} = S^{-1}Fy$ where $F = F'$ and S is non–singular and $= -S'$ but not necessarily $= G$ so that $\dot{y} = S^{-1}Fy$ is more general than (2). It is, however, known that these Pfaffian systems may be reduced to the Hamiltonian case (2). This may be proven in a simple way as follows. If $y = Tx$ where T is any non–singular matrix then $\dot{y} = S^{-1}Fy$ clearly is equivalent to $\dot{x} = (T'ST)^{-1}(T'FT)x$. Now on placing $H = T'FT$ one has $H = H'$ in virtue of $F = F'$. Furthermore, if $S = -S'$ and $\det S \neq 0$ then there exists [15] a non–singular matrix T such that $T'ST = G = -G^{-1}$. Hence on using this T in $y = Tx$, one obtains precisely (2).

We shall now consider the integration of (2) from a point of view of LIE.

From (1) one obtains for every $H = H'$ and for every integer $m \geqq 0$

$$G[-GH]^m G^{-1} = -GG(-HG)^{m-1}HG^{-1} = (\quad 1)^m (HG)^m$$

and

$$[(GH)^m]' = (H'G')^m = (-1)^m (HG)^m.$$

Hence

$$G[\quad GH]^m G^{-1} = [(GH)^m]'.$$

Consequently

$$G[\exp(-GH)]G^{-1} = [\exp(GH)]' \tag{8}$$

where $\exp A$ is defined for every A by means of the exponential series. Since $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$, it is clear from (8) that (3) is satisfied by $C = \exp(GH)$, $s = 1$. Hence $\exp(GH)$ *is for every* $H = H'$ *a Hamiltonian matrix of determinant* $+1$.

---

(14) G. D. BIRKHOFF, *Dynamical Systems*, 1927, Chap. III, p. 89.

(15) Cf., e. g., H. WEYL, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* (1931), Appendix.

On the other hand, any solution $x = x(t)$ of $\dot{x} = Bx$ where B is independent of t is related to the vector $x(0)$ of the initial constants by the linear transformation $x(t) = L(t)x(0)$ where $L(t)$ denotes the matrix $\exp(Bt)$. On applying this to (2) where $B = -GH$, the result of the previous paragraph is applicable inasmuch as $-tH$ is, like H, real and symmetric if $-\infty < t < +\infty$. Hence *the cyclic transformation group $L(t)$ generated by the infinitesimal transformation* (2) *consists of Hamiltonian matrices and* $\det L(t) = +1$ *for every t* $(-\infty < t < +\infty)$. This is, of course, but an algebraic paradigma of LIE's so-called Fundamental Theorems [16].

The group of all Hamiltonian matrices C contains an interesting subgroup consisting of those C which either send coordinates into coordinates and impulses into impulses only or coordinates into impulses and impulses into coordinates only. These C have either of the particular forms

$$\text{(8-a)} \qquad C = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ \omega & \delta \end{pmatrix}; \qquad\qquad \text{(8-b)} \qquad C = \begin{pmatrix} \omega & \beta \\ \gamma & \omega \end{pmatrix}.$$

The matrices (8-a) also form a group inasmuch as ω is the zero matrix. The type (8-b) may be obtained from the type (8-a) by multiplying (8-a) with the fundamental matrix (1) which is of the type (8-b). On substituting (8-a), (8-b) and (1) into (3) one obtains the usual condition of *contragradiency*

$$\text{(9-a)} \qquad \alpha' = s\delta^{-1},\ s \neq 0; \qquad\qquad \text{(9-b)} \qquad \beta' = -s\gamma^{-1},\ s \neq 0$$

as necessary and sufficient for the Hamiltonian character of the « decomposed » matrices (8-a), (8-b). In the still more special case $\alpha = \delta$ or $\beta = \gamma$ where the transformation of the impulses is identical with the transformation of the coordinates one has simply

$$\text{(10-a)} \qquad \alpha\alpha' = s\varepsilon \neq \omega; \qquad\qquad \text{(10-b)} \qquad \beta\beta' = -s\varepsilon \neq \omega.$$

Since the quadratic form belonging to a symmetric matrix π of the type $\pi = \tau\tau'$ clearly is nowhere negative, s is > 0 in (10-a) and < 0 in (10-b) so that both matrices α, β represent in the euclidian space of the n coordinates $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ but a rotation or reflection followed by a central stretch. Hence these C have no dynamical significance.

On the other hand, the contragradiency test (9-a) for the more general but still « decomposed » Hamiltonian matrix (8-a) contains a proof of the fact that if in (4) at least one of the matrices $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$, say ν, is po-

[16] Cf., e. g., L. P. EISENHART, *Continuous Groups of Transformations* (1933). Chap. I.

sitive definite [17] then there exists a Hamiltonian matrix C transforming H into a *diagonal* matrix (3-a), hence (2) into a system of n dynamical systems each of which is of one degree of freedom. First, since $\nu = \nu'$ is positive definite, there exists [18] a non-singular matrix $\sigma = \sigma'$ such that $\sigma^2 = \nu$. Now $\sigma\mu\sigma$ is a symmetric matrix inasmuch as $\sigma = \sigma'$ and $\mu = \mu'$. Hence there exists an orthogonal matrix $\rho' = \rho^{-1}$ such that $\rho^{-1}\sigma\mu\sigma\rho$ is a diagonal matrix. Consequently

$$K = \begin{pmatrix} \rho^{-1}\sigma\mu\sigma\rho & \omega \\ \omega & \rho^{-1}\sigma^{-1}\nu\sigma^{-1}\rho \end{pmatrix}$$

is a diagonal matrix. In fact, $\sigma^{-1}\nu\sigma^{-1} = \varepsilon$ in virtue of $\nu = \sigma^2$ so that $\rho^{-1}\sigma^{-1}\nu\sigma^{-1}\rho$ is $= \rho^{-1}\varepsilon\rho = \varepsilon$ which is a diagonal matrix. On placing

$$\alpha = \sigma\rho, \quad \delta = \sigma^{-1}\rho, \tag{11}$$

the diagonal matrix K may be written in the form

$$K = \begin{pmatrix} \alpha'\mu\alpha & \omega \\ \omega & \delta'\nu\delta \end{pmatrix} \tag{12}$$

inasmuch as $\rho^{-1} = \rho'$ and $\sigma = \sigma'$, hence $\sigma^{-1} = \sigma'^{-1}$. It is clear from $\sigma' = \sigma$ and $\rho' = \rho^{-1}$ that (9-a) is satisfied by (11) and by $s = 1$. Hence (8-a) is a Hamiltonian matrix transforming H into the matrix $s^{-1}C'HC = C'HC$ which is according to (8-a) and (4) identical with the matrix (12) and is therefore a diagonal matrix.

---

[17] If both μ, ν are positive definite then so is H so that one has stability in the sense of DIRICHLET.

[18] Cf. L. AUTONNE, loc. cit., pp. 120-121. The symmetric matrix σ having a square $= \nu$ may be chosen as a positive definite matrix. This is, however, not needed in the above proof.

Sulla deformazione pura nel caso di spostamenti finiti e sulla relazione di essa colla tensione nei corpi anisotropi.

Memoria di DANTE BONVICINI (a Pisa).

Sunto. - *Si ricerca la dipendenza dell'omografia della tensione dalle omografie che rappresentano la deformazione pura rispetto ad un sistema fisso, e rispetto all'elemento del corpo elastico.*

Siano rispettivamente $\overline{P}$ e P le posizioni del punto generico di un corpo deformabile nello stato attuale e nello stato iniziale, cioè prima della deformazione, riferite ad un sistema che diremo fisso; per modo che lo spostamento attuale $\mathbf{s}$ rispetto al sistema medesimo sia dato da $\mathbf{s} = P - \overline{P}$. È noto che l'omografia $\alpha = \dfrac{d\mathbf{s}}{d\overline{P}}$ rappresenta la deformazione (riferita allo stato iniziale), avendosi

$$\alpha dP = dP - dP. \tag{1}$$

È noto altresì che come ogni omografia, la $1 + \alpha$ può decomporsi nel prodotto di un'isomeria per una dilatazione:

$$1 + \alpha = \gamma\alpha_0 = \alpha_0\gamma'; \tag{2}$$

e poichè l'isomeria α_0 rappresenta una semplice rotazione, resta la dilatazione γ o la γ' a caratterizzare la deformazione pura.

Per chiarire meglio questo concetto, definiamo come deformazione pura in un dato punto la deformazione corrispondente non già allo spostamento assoluto $\mathbf{s}$, ma allo spostamento relativo ad un sistema, che dall'istante iniziale a quello attuale abbia subito rispetto al sistema fisso la rotazione rappresentata dall'isomeria α_0 corrispondente al punto medesimo. Osservando che dalla (2) e dalla (1) si ha

$$(\gamma - 1)\alpha_0 d\overline{P} = dP - \alpha_0 d\overline{P},$$
$$(\gamma' - 1)d\overline{P} = \alpha_0^{-1} dP - d\overline{P},$$

e confrontando queste colla (1) medesima, risulta che come l'omografia α rappresenta la deformazione assoluta, così tanto la dilatazione $\gamma - 1$ quanto la $\gamma' - 1$ rappresentano la deformazione pura così definita: la $\gamma - 1$ per un osservatore del sistema fisso (al quale infatti l'elemento lineare del corpo deformabile apparisce attualmente dP, mentre apparirebbe $\alpha_0 d\bar{P}$ se non avesse subito che il moto di trascinamento col sistema rotante); la $\gamma' - 1$ per un osservatore dello stesso sistema rotante (al quale l'elemento medesimo apparisce attualmente $\alpha_0^{-1}dP$, ed apparisce nullo il moto di trascinamento suddetto). Dalla relazione $\gamma' = \alpha_0^{-1}\gamma\alpha_0$, che si ricava immediatamente dalle (2), risulta, com'è noto, che la γ e la γ' hanno gli stessi coefficienti principali di dilatazione, e le direzioni principali della seconda si ottengono da quelle della prima mediante l'isomeria α_0.

Le considerazioni precedenti spiegano perchè nella nota « *Sulla variazione seconda del potenziale elastico nei solidi isotropi* » [1] si è trovato che per tali solidi le direzioni principali dell'omografia β della tensione coincidono con quelle della dilatazione γ, e non con quelle della γ'. Si è ottenuto questo risultato partendo dalla definizione del potenziale elastico unitario in un punto, come funzione della deformazione dell'elemento infinitesimo nell'intorno del punto stesso, la cui variazione per un incremento δs dello spostamento uguagli, a meno di infinitesimi d'ordine superiore rispetto a δs, il lavoro compiuto per questo incremento dalle forze agenti sull'elemento medesimo. Detto φ tale potenziale elastico riferito all'unità di volume in uno stato fisso, e posto $\varepsilon = \frac{d\delta s}{dP}$, dovrà dunque aversi per il teorema dei lavori virtuali

$$\delta\varphi = \frac{dV}{dV_1} I_1(\beta\varepsilon), \tag{3}$$

ove s'intenda per dV il volume dell'elemento considerato nello stato attuale, per dV_1 il volume dell'elemento medesimo nello stato fisso suddetto. La (3) può scriversi anche

$$\delta\varphi = \frac{dV}{dV_1} I_1(\beta D\varepsilon). \tag{3'}$$

Indicando con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ tre vettori unitari secondo le direzioni principali della dilatazione γ, e ponendo $e_{11} = \varepsilon\mathbf{i} \times \mathbf{i}$, $e_{12} = \varepsilon\mathbf{i} \times \mathbf{j}, \ldots$, essa diventa

$$\begin{aligned}\delta\varphi = \frac{dV}{dV_1} \{ & e_{11}\beta\mathbf{i} \times \mathbf{i} + e_{22}\beta\mathbf{j} \times \mathbf{j} + e_{33}\beta\mathbf{k} \times \mathbf{k} + \\ & + (e_{12} + e_{21})\beta\mathbf{i} \times \mathbf{j} + (e_{23} + e_{32})\beta\mathbf{j} \times \mathbf{k} + (e_{31} + e_{13})\beta\mathbf{k} \times \mathbf{i} \}.\end{aligned} \tag{4}$$

D'altra parte nel caso dei corpi isotropi è chiaro che per funzione della deformazione non può intendersi che funzione dei coefficienti principali della

[1] « Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XVII, serie 6ª, fasc. 1 (1933).

dilatazione γ, che sono anche come si è detto quelli della γ', e si indicheranno con l_1, l_2, l_3. Ricordando le espressioni della variazione prima di questi coefficienti per l'incremento δs, trovate in una nota precedente « *Sulle deformazioni non infinitesime* » (1),

$$\delta l_1 = l_1 e_{11}, \quad \delta l_2 = l_2 e_{22}, \quad \delta l_3 = l_3 e_{33},$$

potrà dunque anche scriversi

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial l_1} l_1 e_{11} + \frac{\partial\varphi}{\partial l_2} l_2 e_{22} + \frac{\partial\varphi}{\partial l_3} l_3 e_{33};$$

e dal confronto di questa colla (4) si ha senz'altro

$$\beta\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \beta\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \beta\mathbf{k} \times \mathbf{i} = 0;$$

la quale significa appunto che **i**, **j**, **k**, direzioni principali della dilatazione γ, e quindi della $\gamma - 1$, sono tali anche per la β. Questo risultato, estensione di una nota proprietà del caso degli spostamenti infinitesimi, apparisce molto naturale dopo posto in chiaro che la $\gamma - 1$ rappresenta la deformazione pura per un osservatore del sistema che abbiamo detto fisso, al quale si riferisce lo spostamento **s**, e pertanto la sua variazione $\delta\mathbf{s}$, ove si rifletta che al sistema medesimo s'intende pure riferita l'omografia β della tensione: vale a dire che qualunque sia **s**, cioè in qualsiasi istante, essa β deve intendersi che dia una corrispondenza fra vettori definiti in tale sistema fisso. Sicchè la proprietà in discorso può esprimersi indipendentemente da qualsiasi sistema di riferimento, dicendo che le direzioni delle tensioni principali coincidono con quelle direzioni che rimangono immutate nella deformazione pura.

Le medesime considerazioni fanno prevedere invece che nel caso dei corpi anisotropi, in cui il potenziale elastico non dipende più soltanto dai coefficienti l_1, l_2, l_3, esso debba dipendere dalle direzioni principali della γ', e non da quelle della γ. Basta infatti osservare che le diverse proprietà dell'elemento di un corpo anisotropo si manifestano secondo le diverse direzioni definite rispetto all'elemento materiale medesimo, e non rispetto ad un sistema considerato come fisso; per modo che rimanendo costanti le dilatazioni principali $l_1 - 1$, $l_2 - 1$, $l_3 - 1$, il potenziale elastico varierà col variare delle direzioni secondo cui tali dilatazioni si manifestano ad un osservatore, che subisca la medesima rotazione α_0 di esso elemento. Analiticamente si vede subito la contraddizione in cui si verrebbe postulando la dipendenza del potenziale elastico dalle direzioni principali della γ: mentre per la (3'), o

(1) « Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XVI, serie 6ª, fasc. 12 (1932).

la (4), deve essere $\delta\varphi$ funzione soltanto della dilatazione $D\varepsilon$, e cioè, oltre che di e_{11}, e_{22}, e_{33}, soltanto delle somme $e_{12}+e_{21}$, $e_{23}+e_{32}$, $e_{31}+e_{13}$, l'espressione della rotazione $\boldsymbol{\omega}$ di tali direzioni principali per l'incremento δs dello spostamento, quale fu trovata nella già ricordata nota « *Sulle deformazioni non infinitesime* », contiene invece queste ultime sei componenti dell'omografia ε in diverso aggruppamento. Tale espressione è infatti

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{l_2^2 e_{23} + l_3^2 e_{32}}{l_2^2 - l_3^2}\,\mathbf{i} + \frac{l_3^2 e_{31} + l_1^2 e_{13}}{l_3^2 - l_1^2}\,\mathbf{j} + \frac{l_1^2 e_{12} + l_2^2 e_{21}}{l_1^2 \quad l_2^2}\,\mathbf{k};$$

e pertanto la relazione

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial l_1}\delta l_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial l_2}\delta l_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial l_3}\delta l_3 + \chi_1\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i} + \chi_2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j} + \chi_3\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k},$$

che dovrebbe valere nell'ipotesi anzidetta, indicando con χ_1, χ_2, χ_3 rispettivamente gl'incrementi di φ per una rotazione unitaria degli assi **i**, **j**, **k** intorno ad **i**, a **j** e a **k** (vale a dire gl'incrementi che subisce φ — s'intende a parità di l_1, l_2, l_3 — quando restando fermo uno di tali assi, gli altri due ruotino di un angolo unitario, supposti dipendere unicamente dallo stato attuale), diventa

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial l_1} l_1 e_{11} + \frac{\partial\varphi}{\partial l_2} l_2 e_{22} + \frac{\partial\varphi}{\partial l_3} l_3 e_{33} +$$
$$+ \chi_1\frac{l_2^2 e_{23} + l_3^2 e_{32}}{l_2^2 - l_3^2} + \chi_2\frac{l_3^2 e_{31} + l_1^2 e_{13}}{l_3^2 - l_1^2} + \chi_3\frac{l_1^2 e_{12} + l_2^2 e_{12}}{l_1^2 - l_2^2};$$

la quale, per essere l'omografia ε del tutto arbitraria, si dimostra chiaramente incompatibile colla (4).

Ove si ponga invece che il potenziale elastico dipenda dalla dilatazione γ', bisognerà trovare l'espressione della variazione di questa per l'incremento δs. Si ricordi a tal uopo che la γ' resta definita dalla relazione

$$\gamma'^2 = (1 + K\alpha)(1 + \alpha),$$

e che

$$\delta\alpha = \frac{d\delta s}{dP} = \varepsilon(1 + \alpha):$$

si ha pertanto

$$(5)\qquad \delta\gamma'^2 = (1 + K\alpha)\varepsilon(1 + \alpha) + (1 + K\alpha)K\varepsilon(1 + \alpha) = 2(1 + K\alpha)D\varepsilon(1 + \alpha);$$

e quindi si vede che la variazione della γ' dipende soltanto — oltrechè, naturalmente, dallo stato attuale — dalla dilatazione $D\varepsilon$. Sarà dunque funzione di $D\varepsilon$ anche la rotazione degli assi principali di essa, che diremo $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$; e sparisce così con questa nuova ipotesi l'incompatibilità sopra accusata. Se si indica con $\boldsymbol{\Omega}'$ la rotazione suddetta, e con artificio uguale a quello usato per la ricerca di $\boldsymbol{\omega}$, si definisce per $\delta^*\gamma'^2$ quella parte della variazione consistente solo nel mutare dei coefficienti principali l_1, l_2, l_3, si ha

$$\gamma'^2 + \delta\gamma'^2 = (1 + \Omega'\wedge)(\gamma'^2 + \delta^*\gamma'^2)(1 - \Omega'\wedge);$$

onde per la (5)

$$\delta^*\gamma'^2 + \Omega'\wedge\gamma'^2 - \gamma'^2(\Omega'\wedge) = 2(1 + K\alpha)D\varepsilon(1 + \alpha);$$

da cui

$$\Omega'\wedge\gamma'^2\mathbf{i}'\times\mathbf{j}' + \Omega'\wedge\gamma'^2\mathbf{j}'\times\mathbf{i}' = 2(1 + K\alpha)D\varepsilon(1 + \alpha)\mathbf{i}'\times\mathbf{j}';$$

ossia

$$(l_1^2 - l_2^2)\Omega'\times\mathbf{k}' = 2D\varepsilon(1 + \alpha)\mathbf{i}'\times(1 + \alpha)\mathbf{j}'.$$

Ma

$$(1 + \alpha)\mathbf{i}' = \gamma\alpha_0\mathbf{i}' = \gamma\mathbf{i} = l_1\mathbf{i},$$

ed analogamente

$$(1 + \alpha)\mathbf{j}' = l_2\mathbf{j}:$$

la relazione precedente può scriversi dunque

$$(l_1^2 - l_2^2)\Omega'\times\mathbf{k}' = l_1 l_2(e_{12} + e_{21}).$$

Quindi

$$\Omega' = \frac{l_2 l_3}{l_2^2 - l_3^2}(e_{23} + e_{32})\mathbf{i}' + \frac{l_3 l_1}{l_3^2 - l_1^2}(e_{31} + e_{13})\mathbf{j}' + \frac{l_1 l_2}{l_1^2 - l_2^2}(e_{12} + e_{21})\mathbf{k}'.$$

Detti allora rispettivamente χ_1', χ_2', χ_3' gl'incrementi del potenziale elastico φ per una rotazione unitaria degli assi $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ intorno ad $\mathbf{i}'$, a $\mathbf{j}'$ e a $\mathbf{k}'$, risulta

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial l_1} l_1 e_{11} + \frac{\partial\varphi}{\partial l_2} l_2 e_{22} + \frac{\partial\varphi}{\partial l_3} l_3 e_{33} + \tag{7}$$

$$+ \chi_1' \frac{l_2 l_3}{l_2^2 - l_3^2}(e_{32} + e_{23}) + \chi_2' \frac{l_3 l_1}{l_3^2 - l_1^2}(e_{13} + e_{31}) + \chi_3' \frac{l_1 l_2}{l_1^2 - l_2^2}(e_{12} + e_{21});$$

e dal confronto di questa colla (4) si trae infine:

$$\tag{8} \left\{ \begin{aligned} \beta\mathbf{i}\times\mathbf{i} &= \frac{dV}{dV_1} l_1 \frac{\partial\varphi}{\partial l_1} \\ \beta\mathbf{j}\times\mathbf{j} &= \frac{dV}{dV_1} l_3 \frac{\partial\varphi}{\partial l_2} \\ \beta\mathbf{k}\times\mathbf{k} &= \frac{dV}{dV_1} l_3 \frac{\partial\varphi}{\partial l_3} \\ \beta\mathbf{i}\times\mathbf{j} &= \frac{dV}{dV_1}\frac{l_1 l_2}{l_1^2 - l_2^2}\chi_3' \\ \beta\mathbf{j}\times\mathbf{k} &= \frac{dV}{dV_1}\frac{l_2 l_3}{l_2^2 - l_3^2}\chi_1' \\ \beta\mathbf{k}\times\mathbf{i} &= \frac{dV}{dV_1}\frac{l_3 l_1}{l_3^2 - l_1^2}\chi_2'. \end{aligned} \right.$$

Sur l'ordre de planéité des espaces plongés.

Par M. St. GOLAB (Cracovie).

La géométrie euclidienne occupe, parmi les autres géométries, une place tellement spéciale que beaucoup de définitions et de théoremes élémentaires propres à la géométrie euclidienne ou bien ne peuvent être généralisés du tout aux autres géométries ou bien, si c'est possible, alors pas toujours dans une voie directe. Voici l'exemple. Soit X_m un espace à m dimensions plongé dans l'espace euclidien à n dimensions E_n. En « hérissant » X_m on obtient un espace à connexion affine A_m. La connexion forcée (*) dans A_m dépend, en général, du hérissement (1). Elle n'en dépend cependant pas si X_m présente, par hasard, une variété totalement géodésique dans E_n; X_m est alors euclidien. On sait bien qu'en attachant à un point quelconque de E_n un système de m vecteurs indépendants, on obtient un seul E_m qui passe par le point donné et contient tous ces vecteurs. On sait aussi qu'il existe toujours des systèmes des coordonnées (x^i) dans E_n relativement auxquels les équations paramétriques de chaque E_m revêtent la forme

$$x^i = \sum_{k-1}^{m} \alpha^i_k t^k + \alpha^i_0 \qquad (i=1,\dots,n) \tag{1}$$

où les α sont des constantes et t^k des paramètres indépendants.

On dit que l'espace X_n, plongé dans E_n, possède *l'ordre de planéité* r si 1°) X_m se laisse plonger dans un E_r qui à son tour est plongé dans E_n et si 2°) r est le plus petit nombre naturel jouissant de cette propriété $(m \leq r \leq n)$.

Il se pose le problème de savoir si et comment on peut généraliser cette notion aux espaces plongés dans l'espace non-euclidien L_n (2) qui est doué

(*) « Induzierte Uebertragung » d'après M. SCHOUTEN.

(1) Cette notion a été introduite par M. H. WEYL, *Zur Infinitesimalgeometrie: p-dimensionale Fläche im n-dimensionalen Raum*, « Mathem. Zeitschr. », 12 (1922), 154-160, et appelée « Einspannung ». Le terme « hérissement » proposé par M. A. HOBORSKI correspond mieux, à mon avis, au sens de cette notion.

(2) Nous désignons, d'après M. SCHOUTEN, par L_n l'espace à n dimensions dans lequel on a défini la connexion linéaire non nécessairement symétrique (affine).

exclusivement d'une connexion linéaire générale. Or ce problème est moins simple qu'il ne paraît, bien que l'on ait généralisé la notion des variétés totalement géodésiques aux espaces de ce genre. On dit notamment qu'un X_m plongé dans L_n est géodésique au point (x), si toutes les géodésiques de l'espace L_n qui passent par (x) et sont tangentes à une direction arbitraire de l'espace X_m issue du point (x) appartiennent à X_m [3]. L'espace X_m est appelé totalement géodésique s'il est géodésique en chaque point. La définition suivante: « L'espace X_m plongé dans L_n est dit posséder l'ordre de planéité r s'il existe un X_r qui est plongé dans L_n, est totalement géodésique et contient X_m etc. » ne serait pas pratiquement applicable dejà pour cette raison que, comme on le sait bien, l'hypothèse de l'existence des espaces X_m $(m < n)$ qui sont totalement géodésiques représente, en général, une restriction très avancée en ce qui concerne la nature de l'espace L_n [4]. En postulant même beaucoup moins et notamment que X_r soit géodésique exclusivement aux points de l'espace X_m nous serions aussi amenés à une définition généralisée inutile. Aussi inutile serait la définition postulant l'existence d'un système de coordonnées dans lequel les équations paramétriques de l'espace X_m pourraient être écrites sous la forme paramétrique linéaire (1).

Nous nous proposons d'établir, dans la note présente, une définition généralisant la notion en question et de donner des conditions nécessaires et suffisantes afin que un X_i ait l'ordre de planéité égale à r.

Définition. — *Nous dirons qu'un espace* $\mathrm{X_m}$ *plongé dans un* $\mathrm{L_n}$ *possède l'ordre de planéité* r, *s'il existe un espace* $\mathrm{X_r}$ *possédant les propriétés suivantes*:

(2)
1°) $\mathrm{X_m} \subset \mathrm{X_r} \subset \mathrm{L_n}$ [5].
2°) *Tout vecteur contravariant de l'espace* $\mathrm{X_r}$ *dont l'origine se trouve dans* $\mathrm{X_m}$ *ne quitte pas* $\mathrm{X_r}$ *lorsqu'on le déplace parallèlement le long d'une courbe quelconque située dans* $\mathrm{X_m}$.
3°) r *est le plus petit nombre naturel jouissant de cette propriété.*

---

[3] Notion introduite par M. Hadamard, *Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions*, « Bull. des Sc. Math. », 2-me serie, 25 (1901), 37-40.

[4] Pour $L_n = V_n$ (espace de Riemann) cf. le théorème de M. Schouten. *Ueber die konforme Abbildung* n*-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Massbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Massbestimmung*, « Math. Zeitschr. », 11 (1921), p. 87. Voir aussi le travail de M. Bompiani, *Spazi Riemanniani luoghi di varietà totalmente geodetiche*, « Rend. di Palermo », 48 (1924), 121-134.

[5] $\alpha \subset \beta$ signifie que l'espace α est situé dans l'espace β.

On observe facilement que le nombre r ainsi défini existe toujours et est parfaitement déterminé (dans le cas le plus général on aura $r = n$). Le cas $r = m$ revient à ce que X_m soit totalement géodésique dans L_n [6].

THÉORÈME. — *Soit* $X_1 = C$ *une courbe régulière située dans un* L_n. *Désignons par* $\underset{1}{k}, \underset{2}{k}, \ldots, \underset{p}{k}$ $(p \leq n-1)$ *ses courbures affines au sens de* HLAVATY [7]. *Nous affirmons que l'ordre* r *de planéité de cette courbe est égale à* $p+1$ *où* p *est le nombre ordinal de la dernière courbure c.-à.-d.*

$$r = p + 1. \tag{3}$$

DÉMONSTRATION. — Remarquons d'abord que $r = 1$ exprime que notre courbe est géodésique, ce qui revient dans la suite à ce que $p = 0$. Nous pouvons donc, dans la suite, exclure de nos considérations le cas $p = 0$.

Supposons maintenant que s soit l'arc affine de la curbe C [8] et que

$$\left\{\begin{array}{l} \text{les courbures } \underset{j}{k} \text{ pour } j = 1, \ldots, p \text{ sont bien déterminées;} \\ \text{la courbure } \underset{p+1}{k} \text{ n'existe pas.} \end{array}\right. \tag{4}$$

Si

$$x^i = x^i(s) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

sont des équations paramétriques de la courbe C, nous posons (d'après HLAVATY)

$$\left\{\begin{array}{ll} \underset{1}{l}{}^i = \dfrac{dx^i}{ds} & (i = 1, \ldots, n) \\ \underset{j}{l}{}^i = D\,\underset{j-1}{l}{}^i & (j = 2, \ldots, p+1), \end{array}\right. \tag{6}$$

où D est le symbole de la dérivation covariante par rapport au paramètre s, c.-à.-d. on a

$$Dv^i = \frac{dv^i}{ds} + \Gamma^i_{kj} v^k \frac{dx^j}{ds} \tag{7}$$

où les Γ^i_{kj} sont des paramètres de la connexion linéaire. En vertu de (4) les vecteurs

$$\underset{1}{\mathbf{l}}, \underset{2}{\mathbf{l}}, \ldots, \underset{p}{\mathbf{l}}, \underset{p+1}{\mathbf{l}} \tag{8}$$

---

[6] Pour $L_n = V_n$ cf. E. BOMPIANI, l. c., [4], § 3. Voir aussi H. A. HAYDEN, *Sub-Spaces of a space with torsion*, « Proc. Lond. Math. Soc. », 34, Ser. 2 (1932), 27-50. Cf. en particulier 4, 1 (Definition of hyperplane), property B.

[7] V. HLAVATY, *Proprietà differenziali delle curve in un spazio a connessione lineare generale*, « Rend. di Palermo », 53 (1929), 365-388, § 11.

[8] V. HLAVATY, l. c., [7], § 10.

présentent en chaque point de la courbe C un système de vecteurs linéairement indépendants. Soit P un point arbitraire de C. Nous définirons d'une manière parfaitement déterminée un espace $X_p{}^*$ contenant le point P. Nous considérons à cet effet la totalité des vecteurs issus de P qui sont des combinaisons linéaires des vecteurs

(9) $$\underset{2}{\mathbf{l}}, \ldots, \underset{p+1}{\mathbf{l}}$$

et nous envisageons en plus l'ensemble-somme de toutes les géodésiques issues du point P et tangentes à un de ces vecteurs. Nous obtiendrons ainsi un espace que nous désignerons par $X_p{}^*$. En subordonnant à chaque point P de la courbe C l'espace ainsi défini $X_p{}^*$ nous obtiendrons $\infty^1 X_p{}^*$ qui forment un espace X_{p+1}. Cet espace X_{p+1} contiendera la courbe C. Soit donné, dans l'espace X_{p+1}, un vecteur arbitraire $\mathbf{v}$ dont l'origine se trouve dans C. Déplaçons-le parallèlement le long de C. Nous affirmons qu'au bout de ce déplacement il continuera à appartenir à X_{p+1}. Nous devons à cet effet établir l'existence de $p+1$ fonctions

(10) $$\overset{j}{a}(s) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p+1)$$

pour lesquelles on ait

(11) $$v^i(s) = \sum_{j=1}^{p+1} \overset{j}{a}(s) \underset{j}{l}{}^i(s) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Il suffit de prouver l'existence des fonctions $\overset{j}{a}(s)$ vérifiant la relation

(12) $$Dv^i = \sum_{j=1}^{p+1} D(\overset{j}{a}\underset{j}{l}{}^i) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

quelles que soient les valeurs initiales $\overset{j}{a}(s_0)$. Mais on a d'après la définition

(13) $$Dv^i(s) \equiv 0;$$

l'équation (12) prend donc la forme

(14) $$\sum_{j=1}^{p+1}\left(\frac{d\overset{j}{a}}{ds}\underset{j}{\mathbf{l}} + \overset{j}{a} D\underset{j}{\mathbf{l}}\right) = 0 \text{ [9]}.$$

Mais en vertu des relations

(15) $$\begin{cases} D\underset{j}{\mathbf{l}} = \underset{j+1}{\mathbf{l}} & (j = 1, \ldots, p) \\ D\underset{p+1}{\mathbf{l}} = \sum_{j=1}^{p} \underset{p+1-j}{k}\,\underset{j}{\mathbf{l}} \text{ [10]} & \end{cases}$$

---

[9] A cause de la simplicité, on a supprimé l'indice contravariant i.

[10] V. Hlavaty, l. c., [7], les formules (45).

l'équation (14) obtient la forme

$$(16)\qquad \sum_{j=1}^{p+1}\left\{\frac{d\overset{j}{a}}{ds}+\overset{j-1}{a}+\overset{p+1}{a}\underset{p+1-j}{k}\right\}\underset{j}{\mathbf{l}}=0 \qquad (\overset{0}{a}=0,\ \underset{0}{k}=0).$$

Les vecteurs (8) étant linéairement indépendants, l'équation (16) donne le système d'équations

$$(17)\qquad \frac{d\overset{j}{a}}{ds}+\overset{j-1}{a}+\underset{p+1-j}{k}\overset{p+1}{a}=0 \qquad (j=1,2,\dots,p+1).$$

C'est un système de $p+1$ équations différentielles linéaires et homogènes du premier ordre à $p+1$ fonction inconnues (10). Il admet une solution unique quelque soient les valeurs initiales, ce qui prouve la relation (11). Ainsi nous avons démontré que l'ordre r de planéité de la courbe C satisfait à l'inégalité

$$(18)\qquad r\leq p+1.$$

Avant de démontrer que $r=p+1$, nous démontrerons le suivant

LEMME. — Supposons qu'il existe un espace X_r vérifiant, par rapport à la courbe C ($C=X_1$, $m=1$) les conditions désignées par 1°) et 2°) dans (2). Nous affirmons qu'il existe alors un $q(\leq r)$ pour lequel on a

$$(19)\qquad \underset{q}{k}\ \text{n'existe pas}\ \text{[11]}.$$

DÉMONSTRATION. — Observons d'abord que le vecteur tangent $\frac{dx^i}{ds}$ appartient à l'espace X_r. Construisons dans l'espace X_r, le long de la courbe C, un système local de réference composé de r vecteurs indépendants

$$(20)\qquad \underset{1}{\mathbf{e}},\dots,\underset{r}{\mathbf{e}}$$

en posant

$$(21)\qquad \underset{1}{e}^i=\frac{dx^i}{ds}$$

et en choisissant arbitrairement les autres vecteurs $\underset{2}{\mathbf{e}},\dots,\underset{r}{\mathbf{e}}$ dans X_r. Il découle de nos hypothèses que le système d'équations

$$(22)\qquad \sum_{j=1}^{r}\left\{\frac{d\overset{j}{b}}{ds}\underset{j}{\mathbf{e}}+\overset{j}{b}D\underset{j}{\mathbf{e}}\right\}=0$$

[11] Dans le cas particulier où $L_n=V_n$ et la courbe C est située dans un espace totalement géodésique V_r, le résultat de ce théorème a été énoncé par M. CARTAN, *La géométrie des espaces de Riemann*, « Mém. des Sc. Math. », fasc. 9, Paris (1925), p. 40. Il n'est pas cependant clair à quoi se rapporte la phrase que l'on y trouve « La réciproque de ce théorème est vraie ».

possède une solution quelles que soient les valeurs initiales $\overset{j}{b}(s_0)$. En choisissant, en chaque point de la courbe C, un système de vecteurs

$$\underset{r+1}{\mathbf{e}}, \dots, \underset{n}{\mathbf{e}} \tag{23}$$

qui complété par le système (20) forme un système de vecteurs indépendants dans L_n, nous pouvons écrire

$$D\underset{j}{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^{n} \overset{i}{\underset{j}{c}}\, \underset{i}{\mathbf{e}} \qquad (j = 1, \dots, r). \tag{24}$$

Les équations (22) prennent donc la forme

$$\sum_{j=1}^{r} \left\{ \frac{d\overset{j}{b}}{ds} + \sum_{k=1}^{r} \overset{k}{b}\, \overset{j}{\underset{k}{c}} \right\} \underset{j}{\mathbf{e}} + \sum_{j=r+1}^{n} \left\{ \sum_{k=1}^{r} \overset{k}{b}\, \overset{j}{\underset{k}{c}} \right\} \underset{j}{\mathbf{e}} = 0. \tag{25}$$

En vertu de l'indépendance linéaire des vecteurs du système (20)+(23) nous avons en particulier

$$\sum_{k=1}^{r} \overset{k}{b}\, \overset{j}{\underset{k}{c}} = 0 \quad \text{pour} \quad j = r+1, \dots, n. \tag{26}$$

Les relations (26) étant vérifiées quelles que soient les valeurs initiales $\overset{j}{b}(s_0)$ nous obtenons

$$\overset{j}{\underset{k}{c}} = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, \dots, r;\ j = r+1, \dots, n, \tag{27}$$

ce qui donne au lieu de (24) une relation plus précise

$$D\underset{j}{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^{r} \overset{i}{\underset{j}{c}}\, \underset{i}{\mathbf{e}} \qquad (j = 1, \dots, r). \tag{28}$$

De là, par les dérivations covariantes succesives, nous parvenons aux équations

$$D^t\underset{j}{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^{r} \overset{ti}{\underset{j}{\omega}}\, \underset{i}{\mathbf{e}} \qquad [D^{t+1} = D(D^t)] \qquad \begin{bmatrix} t = 1, 2, \dots \\ j = 1, \dots, r \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Examinons en particulier ce que deviendront les équations (29) lorsqu'on posera $j = 1,\ t = 1, \dots, r$. Comme $\underset{1}{\mathbf{e}} = \underset{1}{\mathbf{l}}$ on a donc

$$D^t\underset{1}{\mathbf{e}} = \underset{t+1}{\mathbf{l}} \qquad (t = 1, \dots, r-1). \tag{30}$$

Envisageons le système d'équations vectorielles

$$\begin{cases} \underset{1}{\mathbf{l}} = \underset{1}{\mathbf{e}} \\ \underset{t+1}{\mathbf{l}} = \sum_{i=1}^{r} \overset{ti}{\underset{1}{\omega}}\, \underset{i}{\mathbf{e}} \end{cases} \qquad (t = 1, \dots, r-1). \tag{31}$$

Un des deux cas suivants se presente: ou bien les vecteurs figurant dans les premiers, membres de ce systeme sont linéairement dépendants et alors $\underset{q}{k}$ n'existe pas pour un $q < r$ [12], ou bien ils sont indépendants et dans ce cas le système (31) peut être résolu en $\underset{i}{\mathbf{e}}$:

$$\underset{i}{\mathbf{e}} = \sum_{j=1}^{r} \overset{j}{\underset{i}{\Omega}} \underset{j}{\mathbf{l}} \qquad (i = 1, \dots, r). \tag{32}$$

Cela étant, il s'ensuit des relations (28), (30) et (32) que

$$D\underset{r}{\mathbf{l}} = \sum_{j=1}^{r} \overset{j}{\alpha} \underset{j}{\mathbf{l}}. \tag{33}$$

Le vecteur $D\underset{r}{\mathbf{l}}$ est donc égal à une combinaison linéaire des vecteurs $\underset{1}{\mathbf{l}}, \dots, \underset{r}{\mathbf{l}}$ d'où il résulte (19). Notre lemme est ainsi démontré.

Revenons maintenant à l'inégalité (18). Si l'on avait $r < p + 1$, alors le lemme précedent nous donnerait une incompatibilité avec les relations (4). La relation (3) a donc lieu c. q. f. d.

Nous envisagerons le cas $m > 1$ dans une note ultérieure.

---

(12) V. HLAVATY, l. c., (7).

Nuovo teorema dei $2n$ momenti e sua espressione sintetica.

Memoria di Luigi Sobrero [1] (a Roma).

Sunto. - *La determinazione degli sforzi in una travatura reticolare iperstatica con aste mutuamente incastrate agli estremi, viene di solito affrontata ricorrendo al* « teorema dei quattro momenti »*: il quale, com'è ben noto, collega fra loro i* momenti *di estremità di due aste consecutive e gli* spostamenti *dei nodi di quelle aste. Momenti e spostamenti non interessano in egual misura, poichè soltanto i primi intervengono nella verifica di stabilità della travatura. Atteso dunque che gli spostamenti figurano nel problema come incognite ausiliarie, ci siam proposti di eliminarli addirittura nello studio della travatura, sostituendo al teorema dei quattro momenti, una nuova relazione la quale interessi* i soli momenti di estremità. *Di questa nuova relazione abbiamo dato una facile interpretazione geometrica, atta a semplificarne l'uso. Al testo fa seguito un esempio di applicazione ad un problema concreto.*

§ 1. **Scopo della trattazione.** Si consideri un generico sistema reticolare, a vincoli esterni staticamente determinabili o meno, formato con aste rettilinee mutuamente incastrate nei punti nodali e caricato nel modo più generico (e cioè tanto ai nodi come alle aste). Per lo studio di un sistema reticolare di questo tipo occorre, in via generica:

introdurre come incognite *gli spostamenti* (sia orizzontali che verticali) dei singoli nodi ed *i momenti* di estremità delle singole aste;

applicare ad ogni coppia di aste concorrenti ad un medesimo nodo il teorema dei quattro momenti (nella sua espressione più completa che tien conto degli spostamenti nodali), così da ottenere una serie di equazioni le quali colleghino gli spostamenti nodali coi momenti di estremità;

ed infine eliminare fra queste equazioni gli spostamenti, così da ottenere un secondo gruppo di equazioni fra i soli momenti di estremità.

Dette equazioni, unitamente a quelle che risultano dalle condizioni statiche di equilibrio dei nodi e delle aste, consentono di ricavare i momenti terminali delle aste e quindi tutte le altre sollecitazioni interne del sistema.

Il procedimento indicato, al quale salvo poche varianti si attengono i

[1] La presente ricerca fu presentata nella mia tesi di laurea alla R. Scuola d'Ingegneria di Roma, nel Novembre 1931.

trattatisti (1), si semplifica notevolmente quando le particolari condizioni del carico (simmetria od antisimmetria) e la particolare forma della struttura (simmetria rispetto ad uno o più assi) forniscano « a priori » relazioni di eguaglianza fra alcuni dei momenti terminali. Resta però indiscutibile che il procedimento è di solito assai laborioso; ed ancor più lo diventa quando vengano a mancare le suindicate ipotesi semplificative.

In considerazione di ciò appare utile un metodo il quale, senza imporre limitazione alcuna alla forma delle maglie costituenti la travatura, al numero di lati delle maglie, ed alle condizioni di carico, direttamente permetta di scrivere quelle equazioni *fra i soli momenti terminali* che nel procedimento generale dianzi esposto vengono ottenute con la eliminazione degli spostamenti. A ciò tendono appunto le considerazioni dei seguenti paragrafi.

Vogliamo anche osservare che, mentre nello studio delle travature reticolari, si tien conto, in genere, delle sole deformazioni dovute ai momenti flettenti, il nostro metodo tien conto anche delle deformazioni dovute agli sforzi di taglio. Che tali deformazioni abbiano qualche influenza sui risultati apparirà dall'esempio esposto a fine della Memoria.

§ 2. **Richiamo ad alcune formule di deformazione.** — Principalmente allo scopo di introdurre le notazioni ci si consentirà di richiamare alcune formule, di cui dovremo in seguito far uso, relative alle deformazioni indotte, da carichi direttamente applicati, in una trave appoggiata agli estremi. Nello studio di tale deformazione terremo conto non solo dell'azione dei momenti flettenti ma anche di quella (solitamente trascurata) degli sforzi taglianti e longitudinali.

Una trave A_1A_2, appoggiata agli estremi (v. fig. 1) si trovi sottoposta:

a due momenti di estremità μ_1 e μ_2 (che assumeremo positivi se capaci di indurre *trazione* nelle fibre *superiori* della trave);

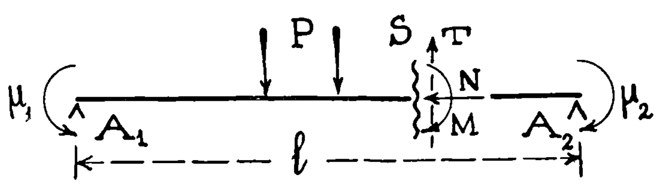


Fig. 1

ad un gruppo di carichi P, direttamente applicati con arbitraria intensità e direzione.

(1) Vedere ad es. le trattazioni svolte intorno alla « trave Vierendeel » dai sigg. Ciappi, Giannelli e Reich (Vierendeelträger mit parallelen Gurtungen).

Si vogliono determinare le rotazioni γ_1 e γ_2 delle sezioni estreme della trave nelle condizioni di carico ora stabilite. Tali rotazioni si intenderanno positive se concordi col senso già stabilito come positivo pei momenti μ_1 e μ_2.

Osserviamo allo scopo che il principio di sovrapposizione degli effetti ci autorizza a considerare la deformazione della trave, nelle condizioni di carico proposte, come somma di due deformazioni parziali: quella indetta dai soli momenti μ_1 e μ_2 di estremità, e quella indetta dai carichi P. Se pertanto indichiamo con γ_1' e γ_2' le rotazioni che si avrebbero nelle sezioni estreme quando agissero i soli momenti μ_1 e μ_2, e con γ_1'' e γ_2'' le rotazioni che si avrebbero quando agissero i soli carichi P, risulterà

$$(1) \qquad \begin{cases} \gamma_1 = \gamma_1' + \gamma_1'' \\ \gamma_2 = \gamma_2' + \gamma_2''. \end{cases}$$

Cominciamo col valutare le rotazioni γ_1' e γ_2'. Allo scopo è conveniente l'applicazione del teorema di CASTIGLIANO, il quale consente, com'è ben noto, di tener conto, in modo completo, delle deformazioni indotte dagli sforzi di flessione, pressione e taglio sollecitanti la trave. Indichiamo:

con M il momento flettente della trave in una sezione generica S di ascissa x rispetto all'estremo A_1: (momento che si assumerà, al solito, positivo se di tal verso da produrre *trazione* nelle fibre superiori della trave);

con N lo sforzo longitudinale agente sulla sezione S: (sforzo che si assumerà positivo se di *compressione*);

con T lo sforzo tagliante che agisce sulla sezione S: (sforzo che si assumerà come positivo se tenderà a sollevare la sezione S rispetto alle sezioni di ascissa immediatamente inferiore);

con l la distanza fra gli appoggi;

con Ω l'area e

con I il momento d'inerzia della sezione della trave;

con E e G i moduli di elasticità per la compressione e per il taglio;

con $\varkappa$ il coefficente di forma per il taglio.

È allora ben noto che il lavoro interno di deformazione L della trave si esprime mediante la formula:

$$(2) \qquad L = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{E\Omega} + \frac{\varkappa T^2}{G\Omega}\right) dx.$$

Nell'ipotesi che nella trave agiscano i soli momenti terminali, il momento M varia con legge lineare fra i valori estremi μ_1 e μ_2, lo sforzo longitudinale N

è dovunque nullo e lo sforzo tagliante T è costante ed eguale alla reazione dell'appoggio A_2. Si ha cioè

$$M = \frac{(l-x)\mu_1 + x\mu_2}{l} \qquad N = 0 \qquad T = \frac{\mu_2 - \mu_1}{l}$$

le quali consentono, insieme con la (2), di ricavare il lavoro interno di deformazione in funzione dei momenti μ_1 e μ_2.

Derivando questa espressione di L rispetto a μ_1 si ottiene (teorema di CASTIGLIANO) la rotazione γ_1':

$$\gamma_1' = \frac{\partial L}{\partial \mu_1} = \int_0^l \left(\frac{1}{EI} M \frac{\partial M}{\partial \mu_1} + \frac{\varkappa}{G\Omega} T \frac{\partial T}{\partial \mu_1}\right) dx.$$

Posto per semplicità $\frac{l}{EI} = \Phi$ (peso elastico della trave) ed $\frac{EI}{G\Omega}\varkappa = \rho^2$ (dove ρ ha le dimensioni di una lunghezza) si ricava, a calcoli eseguiti:

$$\gamma_1' = \frac{\Phi}{6}\left(2\mu_1 + \mu_2 + 6\left[\frac{\rho}{l}\right]^2 [\mu_1 - \mu_2]\right)$$

e analogamente

$$\gamma_2' = \frac{\Phi}{6}\left(2\mu_2 + \mu_1 + 6\left[\frac{\rho}{l}\right]^2 [\mu_2 - \mu_1]\right)$$

le quali possono anche scriversi:

$$\begin{cases} \gamma_1' = \frac{\Phi}{2}(a\mu_1 + b\mu_2) \\ \gamma_2' = \frac{\Phi}{2}(a\mu_2 + b\mu_1) \end{cases} \qquad \left(a = \frac{2}{3} + 2\left[\frac{\rho}{l}\right]^2;\ b = \frac{1}{3} - 2\left[\frac{\rho}{l}\right]^2\right).$$

Queste formule mettono in evidenza che le rotazioni γ_1' e γ_2', a parte il fattore $\frac{\Phi}{2}$, possono intendersi come medie ponderate (con pesi a e b dipendenti esclusivamente dalle dimensioni e dal materiale di cui è formata la trave) dei due momenti terminali. Se si prescinde dalle forze di taglio (e cioè si pone $\rho/l = 0$) i pesi a e b valgono rispettivamente $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$.

Quando la trave è sottoposta, oltrechè ai momenti terminali μ_1 e μ_2 anche ai carichi P, le rotazioni γ_1 e γ_2 delle sezioni estreme risulteranno espresse, per le formule (1), da:

$$
(3) \qquad \begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{\Phi}{2}(a\mu_1 + b\mu_2) + \gamma_1'' \\ \gamma_2 = \dfrac{\Phi}{2}(a\mu_2 + b\mu_1) + \gamma_2'' \end{cases}
$$

dove γ_1'' e γ_2'', ricordiamo, sono le rotazioni che si produrrebbero nelle sezioni estreme quando agissero sulla trave i soli carichi P. A noi non interessa esplicitare le espressioni di γ_1'' a γ_2'' in funzione dell'entità e della posizione dei carichi P. Solo vogliamo mettere in evidenza (col WINKLER) una notevole interpretazione meccanica di γ_1'' e γ_2''. Supponiamo che la trave sia sottoposta, oltrechè ai carichi P, a due momenti di estremità $\bar{\mu}_1$ e $\bar{\mu}_2$ scelti in maniera che risultino nulle le rotazioni γ_1 e γ_2 delle sezioni estreme (cosicchè la trave, agli effetti statici possa ritenersi come incastrata agli estremi). Risulterà allora dalle formule ultime scritte

$$
\begin{cases} \dfrac{\Phi}{2}(a\bar{\mu}_1 + b\bar{\mu}_2) + \gamma_1'' = 0 \\ \dfrac{\Phi}{2}(a\bar{\mu}_2 + b\bar{\mu}_1) + \gamma_2'' = 0 \end{cases}
$$

ossia

$$
(4) \qquad \begin{cases} \gamma_1'' = -\dfrac{\Phi}{2}(a\bar{\mu}_1 + b\bar{\mu}_2) \\ \gamma_2'' = -\dfrac{\Phi}{2}(a\bar{\mu}_2 + b\bar{\mu}_1) \end{cases}
$$

la quale stabilisce una relazione semplice fra le rotazioni indotte dai carichi P sopra una trave *semplicemente* appoggiata agli estremi ed i momenti virtuali *(d'incastro)* $\bar{\mu}_1$ e $\bar{\mu}_2$ che i medesimi carichi P produrrebbero sulla trave supposta incastrata agli estremi. Introducendo le espressioni (4) nelle formule (3):

$$
(5) \qquad \begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{\Phi}{2}(a\mu_1 + b\mu_2) - \dfrac{\Phi}{2}(a\bar{\mu}_1 + b\bar{\mu}_2) \\ \gamma_2 = \dfrac{\Phi}{2}(a\mu_2 + b\mu_1) - \dfrac{\Phi}{2}(a\bar{\mu}_2 + b\mu_1) \end{cases}
$$

le quali rispondono al problema propostoci al principio del paragrafo.

§ 3. **Teorema dei quattro momenti (con riguardo alle deformazioni di flessione e taglio).** — Di una travatura reticolare scarica, di forma qualunque, si prendano in considerazione due aste rettilinee A_1A_2 e A_2A_3 mutuamente incastrate all'estremità comune A_2 (v. fig. 2). Caricata la travatura, le aste considerate si deformeranno ed i punti nodali si trasferiranno rispettivamente in A_1', A_2' ed A_3'. Il teorema dei quattro momenti (che noi dedurremo nella

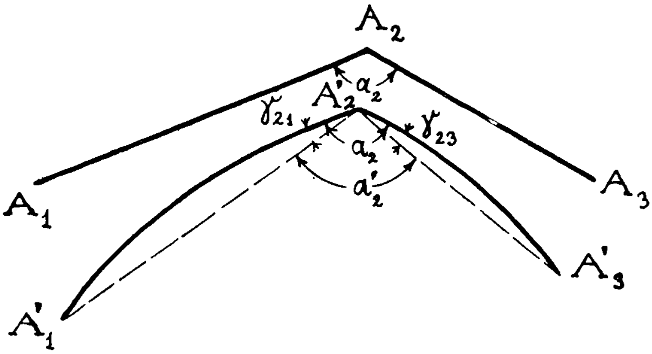


Fig. 2

sua forma più completa che tien conto sia delle deformazioni indotte dai momenti flettenti come di quelle indotte dagli sforzi taglianti) stabilisce una relazione semplice fra gli spostamenti dei nodi A_1, A_2, A_3 ed i momenti di estremità delle due aste A_1A_2 e A_2A_3.

Indichiamo:

con Φ_{12} e Φ_{23} (ovvero, quando lo richieda la simmetria delle formule, con Φ_{21} e Φ_{32}) i pesi elastici delle aste A_1A_2 e A_2A_3;

con a_{12} e a_{23}, b_{12} e b_{23} i coefficienti a e b (v. § precedente) relativi alle due aste;

con α_2 l'angolo in A_2 formato fra le due aste a travatura scarica;

con α_2' l'angolo fra le congiungenti (rettilinee) $A_1'A_2'$ ed $A_2'A_3'$ a deformazione avvenuta;

con $\Delta\alpha_2$ l'angolo $\alpha_2' - \alpha_2$, e cioè l'aumento (in radianti) dell'angolo formato fra la congiungente i punti A_1 e A_2 e la congiungente i punti A_2 e A_3 per effetto della deformazione della travatura.

Diciamo ancora:

μ_{12}, μ_{21}; μ_{23}, μ_{32} i momenti generati dal carico nelle sezioni terminali delle aste A_{12} e A_{23}. Detti momenti verranno assunti come positivi quando produrranno *trazione* nelle fibre delle aste A_1A_2 e A_2A_3 *esterne* all'angolo α_2;

$\overline{\mu}_{12}$, $\overline{\mu}_{21}$; $\overline{\mu}_{23}$, μ_{32} i momenti d'incastro relativi alle aste A_{12}, A_{23} ed ai carichi rispettivamente applicati a tali aste;

γ_{12} e γ_{21} le rotazioni estreme dell'asta A_1A_2 *rispetto alla congiungente* *le sezioni estreme* (tali rotazioni verranno assunte come positive se concordi coi sensi positivi di μ_{12} e μ_{21});

γ_{23} e γ_{32} le rotazioni analoghe relative all'asta A_2A_3.

Supponendo che le aste A_1A_2 e A_2A_3 siano perfettamente incastrate fra loro nel punto nodale comune, risulta facilmente (v. fig. 2):

$$\alpha_2 = \alpha_2' + \gamma_{21} + \gamma_{23}$$

da cui

$$\alpha_2' - \alpha_2 = -(\gamma_{21} + \gamma_{23})$$

ossia

$$\Delta\alpha_2 = -(\gamma_{21} + \gamma_{23}).$$

Sostituendo a γ_{21} e γ_{23} le espressioni determinate per tali grandezze nel precedente paragrafo si perviene alla relazione:

$$\Delta\alpha_2 = -\frac{\Phi_{12}}{2}(a_{21}\mu_{21} + b_{12}\mu_{12}) + \frac{\Phi_{12}}{2}(a_{21}\bar{\mu}_{21} + b_{12}\bar{\mu}_{12}) + \tag{6}$$
$$-\frac{\Phi_{23}}{2}(a_{23}\mu_{23} + b_{32}\mu_{32}) + \frac{\Phi_{23}}{2}(a_{23}\bar{\mu}_{23} + b_{32}\bar{\mu}_{32}).$$

La relazione scritta costituisce l'espressione richiesta del teorema dei quattro momenti.

§ 4. **Una relazione di geometria differenziale.** — Nel piano cartesiano xy si abbia un poligono di n lati. Assegnato un certo senso positivo di percorrenza al contorno del poligono e numerati i vertici del medesimo a partire da uno qualunque, diciamo:

$y_1, y_2, \dots, y_n$ le ordinate dei vertici successivi;

$l_{12}, l_{23}, \dots, l_{n, n+1}$ le lunghezze dei lati rispettivamente compresi fra i vertici 1 e 2, 2 e 3,..., n ed 1;

$\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{n, n+1}$ gli angoli compresi fra la direzione positiva dell'asse delle x e le direzioni positive dei lati $l_{12}, l_{23}, \dots, l_{n, n+1}$.

Poichè la somma delle proiezioni (prese col debito segno) dei singoli lati del poligono sull'asse x vale zero, potremo scrivere:

$$\sum_{i=1}^{n} l_{i, i+1} \cos \alpha_{i, i+1} = 0.$$

Immaginiamo ora che il poligono subisca una deformazione infinitesima, la quale non alteri la lunghezza dei lati, ma incrementi gli angoli $\alpha_{12}, \dots, \alpha_{n, n+1}$ prima definiti di certe quantità infinitesime $d\alpha_{12}, \dots, d\alpha_{n, n+1}$. Poichè la somma delle proiezioni dei lati del poligono sull'asse x continua, anche a deformazione avvenuta, a mantenersi eguale a zero, dovrà risultare:

$$d\sum_{i=1}^{n} l_{i,\,i+1}\cos\alpha_{i,\,i+1}=0$$

ossia

$$\sum_{i=1}^{n} l_{i,\,i+1}\operatorname{sen}\alpha_{i,\,i+1}\cdot d\alpha_{i,\,i+1}=0$$

relazione alla quale devono necessariamente soddisfare, nelle ipotesi suindicate, gli incrementi angolari $d\alpha_{i,\,i+1}$.

Osserviamo che il generico prodotto $l_{i,\,i+1}\operatorname{sen}\alpha_{i,\,i+1}$ rappresenta la proiezione sull'asse y del lato $l_{i,\,i+1}$ del poligono, o, se si vuole, la differenza $y_{i+1}-y_i$ fra le ordinate estreme del medesimo lato. Cosicchè la relazione differenziale soprascritta può anche mettersi nella forma:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_{i+1}-y_i)d\alpha_{i,\,i+1}=0$$

o, se si vuole,

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i+1}d\alpha_{i,\,i+1}-\sum_{i=1}^{n} y_i d\alpha_{i,\,i+1}=0.$$

Delle due sommatorie la prima può anche scriversi, mediante una formale sostituzione di indici: $\sum_{i=2}^{n+1} y_i d\alpha_{i-1,\,i}$, o, se si vuole, $\sum_{i=1}^{n} y_i d\alpha_{i-1,\,i}$ purchè si convenga di porre $d\alpha_{01}=d\alpha_{n,\,n+1}$. Con ciò risulta

$$\sum_{i=1}^{n} y_i d\alpha_{i-1,\,i}-\sum_{i=1}^{n} y_i d\alpha_{i,\,i+1}=0$$

ossia

$$\sum_{i=1}^{n} y_i(d\alpha_{i-1,\,i}-d\alpha_{i,\,i+1})=0$$

o anche

$$\sum_{i=1}^{n} y_i d(\alpha_{i-1,\,i}-\alpha_{i,\,i+1})=0.$$

La differenza $d(\alpha_{i-1,\,i}-\alpha_{i,\,i+1})$ rappresenta (a parte il segno) l'incremento che subisce, per effetto della deformazione del poligono, l'angolo compreso fra i due lati (orientati) $l_{i-1,\,i}$ ed $l_{i,\,i+1}$. Indicato pertanto questo incremento con $d\alpha_i$:

$$d\alpha_i=d(\alpha_{i,\,i+1}-\alpha_{i-1,\,i})$$

la formula precedente si scriverà

$$\Sigma\, y_i d\alpha_i=0$$

la quale potrà ritenersi valida anche per deformazioni finite purchè sufficentemente piccole (p. es. per le deformazioni elastiche). In considerazione di ciò la scriveremo nella forma:

$$\Sigma\, y\, \Delta\alpha_i = 0. \tag{7}$$

È appena necessario osservare che la (7) sussiste qualunque sia, nel piano del poligono la scelta degli assi coordinati. Se, in particolare, si fa tendere l'asse x verso la retta all'infinito la (7) diventa equivalente a

$$\Sigma\, \Delta\alpha_i = 0$$

di ovvia interpretazione geometrica.

§ 5. **Espressione generale del teorema dei 2*n* momenti.** — Si abbia una generica travatura reticolare, formata con tante aste rettilinee mutuamente incastrate nei punti nodali; e si consideri di questa travatura, una generica maglia, (e cioè un qualunque poligono chiuso, formato con aste della tra-

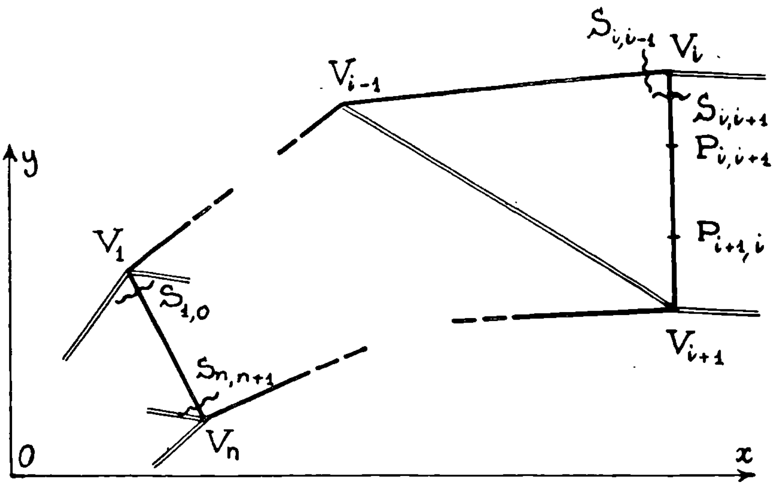


Fig. 3

vatura [1]). Assegnati ai lati della maglia un certo senso di percorrenza, e numerati ordinatamente i vertici, si dicano (v. fig. 3):

$V_1, \ldots, V_n$ i punti nodali;

$y_1, \ldots, y_n$ le ordinate dei punti nodali rispetto ad un qualunque sistema di assi coordinati di riferimento;

$S_{i,i-1}$ ed $S_{i,i+1}$ due sezioni praticate in immediata prossimità del vertice V_i sulle due aste $V_{i-1}V_i$ e V_iV_{i+1} concorrenti nel nodo. Si converrà

[1] Da notare che detto poligono potrebbe esser fornito di aste diagonali. ciò che tuttavia non invaliderebbe le nostre considerazioni.

inoltre di intendere con $S_{n,n+1}$ ed $S_{1,0}$ le sezioni dell'asta $V_{n,1}$ praticata in immediata prossimità dei vertici V_n e V_1.

Seguendo le notazioni già indicate nel § 3 diciamo ancora:

$\Phi_{12},\ldots,\Phi_{n,n+1}$ i pesi elastici delle singole aste della maglia (colla solita convenzione di poter scrivere Φ_{21}, in luogo di Φ_{12} quando lo richieda la simmetria delle formule);

$a_{12},\ldots,a_{n,n+1}$; $b_{12},\ldots,b_{n,n+1}$; le costanti a e b relative alle singole aste;

$\mu_{i,i-1}$ e $\mu_{i,i+1}$ i momenti flettenti delle aste della travatura nelle sezioni S di indici corrispondenti;

$\bar{\mu}_{i,i-1}$ e $\bar{\mu}_{i,i+1}$ i momenti d'incastro delle singole aste nelle condizioni di carico alle quali esse si trovano sottoposte.

I momenti μ e $\bar{\mu}$ verranno assunti positivi se capaci di generare trazione nelle fibre *esterne* di ogni singola asta della maglia.

Per azione del carico la travatura si deforma e si modifica l'angolo formato fra la congiungente i punti nodali V_{i-1} e V_i e la congiungente i punti nodali V_i e V_{i+1}.

L'incremento $\Delta\alpha_i$ subito da un generico di tali angoli (quello corrispondente al vertice V_i) potrà esprimersi in funzione dei momenti μ e $\bar{\mu}$ relativi alle aste concorrenti in V_i mediante applicazione del teorema dei quattro momenti. Si ricava difatti dalla formula (6):

$$\begin{aligned}(8)\qquad \Delta\alpha_i = &-\frac{\Phi_{i-1,i}}{2}(a_{i,i-1}\mu_{i,i-1}+b_{i-1,i}\mu_{i-1,i})+\frac{\Phi_{i-1,i}}{2}(a_{i,i-1}\bar{\mu}_{i,i-1}+b_{i-1,i}\bar{\mu}_{i-1,i})+\\ &-\frac{\Phi_{i,i+1}}{2}(a_{i,i+1}\mu_{i,i+1}+b_{i+1,i}\mu_{i+1,i})+\frac{\Phi_{i,i+1}}{2}(a_{i,i+1}\bar{\mu}_{i,i+1}+b_{i+1,i}\bar{\mu}_{i+1,i}).\end{aligned}$$

Ammesso che nella deformazione della travatura le distanze fra i punti nodali non subiscano variazione apprezzabile di lunghezza *(e che cioè siano trascurabili le deformazioni dovute agli sforzi longitudinali rispetto a quelle complessivamente dovute ai momenti flettenti ed agli sforzi taglianti)* le deformazioni angolari $\Delta\alpha_i$ dovranno soddisfare alla relazione

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\Delta\alpha_i = 0.$$

Tenendo conto della (8) si ottiene $\left(\text{dopo aver eliminato in tutta l'equazione il fattore } -\frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}(9)\qquad \sum_{i=1}^{n} y_i\,\{\,&\Phi_{i-1,i}(a_{i,i-1}\mu_{i,i-1}+b_{i-1,i}\mu_{i-1,i})-\Phi_{i-1,i}(a_{i,i-1}\bar{\mu}_{i,i-1}+b_{i-1,i}\bar{\mu}_{i-1,i})+\\ &+\Phi_{i,i+1}(a_{i,i+1}\mu_{i,i+1}+b_{i+1,i}\mu_{i+1,i})-\Phi_{i,i+1}(a_{i,i+1}\bar{\mu}_{i,i+1}+b_{i+1,i}\bar{\mu}_{i+1,i})\,\}=0\end{aligned}$$

la quale collega i momenti di estremità delle aste della maglia con la forma geometrica della medesima.

La relazione scritta costituisce l'espressione più generale del teorema dei $2n$ momenti. In essa non compare più traccia degli spostamenti nodali.

§ 6. **Interpretazione meccanica del teorema.** — Attesa la complessità della formula (9) ci siamo preoccupati di semplificarne, almeno formalmente, l'espressione.

Allo scopo abbiamo presi in considerazione, nella formula detta, i termini contenenti un generico momento terminale, del tipo $\mu_{i,\,i+1}$. La somma di questi termini vale:

$$\mu_{i,\,i+1}(\Phi_{i,\,i+1}a_{i,\,i+1}y_i + \Phi_{i,\,i+1}b_{i,\,i+1}y_{i+1})$$

ovvero

(10) $$\mu_{i,\,i+1}\Phi_{i,\,i+1}(a_{i,\,i+1}y_i + b_{i,\,i+1}y_{i+1}).$$

L'espressione fra parentesi è la media ponderale delle due ordinate y_i ed y_{i+1}, prese rispettivamente coi pesi $a_{i,\,i+1}$ e $b_{i,\,i+1}$, e rappresenta l'ordinata $y_{i,\,i+1}$ di un punto $P_{i,\,i+1}$ (v. fig. 3) che divide l'asta V_iV_{i+1} in due parti che danno fra loro come i numeri $b_{i,\,i+1}$ ed $a_{i,\,i+1}$. Note che siano le dimensioni longitudinali e trasversali delle singole aste (e quindi le grandezze $a_{i,\,i+1}$ e $b_{i,\,i+1}$) si possono subito determinare su di esse i punti $P_{i,\,i+1}$ e quindi le ordinate $y_{i,\,i+1}$. Introducendo le quali nell'espressione (9) si ottiene

$$\mu_{i,\,i+1}\Phi_{i,\,i+1}y_{i,\,i+1}\,.$$

Seguendo procedimento analogo si possono isolare dall'equazione (9) i termini contenenti un generico momento terminale del tipo $\mu_{i+1,\,i}$. La somma di questi termini vale

$$\mu_{i+1,\,i}\Phi_{i+1,\,i}y_{i+1,\,i}$$

dove $y_{i+1,\,i}$ è l'ordinata del punto $P_{i+1,\,i}$ (v. fig. 3) che divide l'asta V_iV_{i+1} in due parti proporzionali ai numeri $a_{i,\,i+1}$ e $b_{i,\,i+1}$. Allo stesso modo si procederà infine sui termini dell'equazione (9) contenenti momenti di incastro del tipo $\overline{\mu}_{i,\,i+1}$ o del tipo $\overline{\mu}_{i+1,\,i}$. Con ciò l'equazione (9) assume in definitiva l'aspetto:

$$\sum_{i=1}^{n}(\mu_{i,\,i+1}\Phi_{i,\,i+1}y_{i,\,i+1} + \mu_{i+1,\,i}\Phi_{i+1,\,i}y_{i+1,\,i} - \overline{\mu}_{i,\,i+1}\Phi_{i,\,i+1}y_{i,\,i+1} - \overline{\mu}_{i+1,\,i}\Phi_{i+1,\,i}y_{i+1,\,i}) = 0.$$

Indicati brevemente: con $q_{i,\,i+1}$ il prodotto fra il generico momento $\mu_{i,\,i+1}$ ed il peso elastico $\Phi_{i,\,i+1}$ dell'asta cui è applicato tale momento; con $q_{i+1,\,i}$, $\overline{q}_{i,\,i+1}$, $\overline{q}_{i+1,\,i}$ i prodotti analoghi di evidente significato, l'ultima relazione può ancora mettersi nella forma

$$\sum_{i=1}^{n}(q_{i,i+1}y_{i,i+1} + q_{i+1,i}y_{i+1,i} - \bar{q}_{i,i+1}y_{i,i+1} - \bar{q}_{i+1,i}y_{i+1,i}) = 0$$

ovvero nell'altra equivalente

$$\sum_{i=1}^{n}(q_{i,i+1}y_{i,i+1} + q_{i+1,i}y_{i+1,i} = \sum_{i=1}^{n}(\bar{q}_{i,i+1}y_{i,i+1} + \bar{q}_{i+1,i}y_{i+1,i}).$$

La somma che compare a primo membro rappresenta il momento statico S, rispetto all'asse x, delle *masse fittizie* $q_{i,i+1}$ e $q_{i+1,i}$, supposte rispettivamente concentrate nei punti $P_{i,i+1}$ e $P_{i+1,i}$ (che denomineremo *punti fittizi*). La somma a secondo membro rappresenta il momento statico $\bar{S}$ delle masse $\bar{q}_{i,i+1}$ e $\bar{q}_{i+1,i}$ applicate nei medesimi punti fittizi. Talchè si potrà scrivere brevemente:

$$S = \bar{S}.$$

Relazione cui si può dare l'enunciato seguente:

Il momento statico, rispetto ad un asse qualunque, delle masse fittizie dei momenti di estremità, concentrate nei relativi punti fittizi, risulta eguale al momento statico, rispetto al medesimo asse, delle masse fittizie dei momenti d'incastro concentrate anch'esse nei rispettivi punti fittizi.

Tenuto poi conto che la scelta dell'asse di riferimento è assolutamente arbitraria potremo addirittura affermare che:

le masse fittizie dei momenti di estremità (concentrate nei rispettivi punti fittizi) costituiscono un insieme equivalente a quello delle masse fittizie dei momenti d'incastro (anch'esse concentrate nei rispettivi punti fittizi).

Dove due sistemi di masse si diranno equivalenti quando avranno momento statico eguale rispetto ad una qualsiasi retta del piano.

Se la travatura è caricata solamente ai nodi si annulla i momenti d'incastro $\bar{\mu}$ ed il momento $\bar{S}$. Risulta allora:

$$S = 0$$

e cioè *il sistema delle masse fittizie dei momenti di estremità risulta equivalente a zero* (e cioè ha momento nullo rispetto a una qualsiasi retta del piano). Osserviamo ancora che il teorema generale può mettersi nella forma: *le masse fittizie dei momenti di estremità e le masse fittizie dei momenti d'incastro devono avere eguale somma ed eguale baricentro.*

OSSERVAZIONE. — Da notare che per l'equivalenza (nel senso prima stabilito) di due sistemi di masse, basta che questi abbiano egual momento statico rispetto a *tre* rette del piano non concorrenti in un punto. Per ogni maglia della travatura si possono pertanto ricavare *tre* (e non più di tante) relazioni indipendenti fra le masse fittizie q e $\overline{q}$, e cioè fra i momenti μ e $\overline{\mu}$.

§ 7. **Come si applichi il teorema alla risoluzione dei telai iperstatici.** — Ci chiediamo anzitutto: è sufficente l'applicazione del teorema dei $2n$ momenti (insieme con quella delle equazioni dell'equilibrio) per la risoluzione di una travatura reticolare? Se la travatura è isostatica nei riguardi dei vincoli esterni, la risposta è certo affermativa. Osserviamo difatti che un telaio generico presenta tre incognite iperstatiche (interne) per ogni maglia. E poichè per ogni maglia noi possiamo scrivere, in applicazione al nostro teorema, appunto tre equazioni indipendenti, le incognite iperstatiche eguagliano, in numero, le equazioni di elasticità e risultano perfettamente determinabili.

Non è più così se il sistema presenta anche qualche incognita iperstatica vincolare; ma si osserverà che se i vincoli esterni sono costituiti da incastri, si possono ancora usare, per la ricerca delle sollecitazioni, i teoremi dei $2n$ momenti. Basterà allo scopo liberare il sistema dagli incastri, riunendo fra di loro tutte le estremità delle aste prima vincolate mediante una trave ausiliaria *rigida*, a forma di poligonale aperta e fissata al suolo ad una sua estremità. Con ciò, mentre non vengono alterate le condizioni statiche del sistema, si riesce a rendere isostatici i vincoli esterni senza complicare minimamente il problema. Osserviamo difatti che a tali aste ausiliarie rigide, e cioè di peso elastico nullo, competono in ogni caso masse fittizie nulle. Le loro sollecitazioni non compaiono affatto nell'espressione del teorema dei $2n$ momenti.

§ 8. **Precisazione circa la posizione delle masse fittizie.** Le masse fittizie $q = \Phi\mu$ e $\overline{q} = \Phi\overline{\mu}$ si devono supporre concentrate in punti $P_{i,i+1}$ e $P_{i+1,i}$ i quali dividano l'asta generica $V_i V_{i+1}$ in due parti che stiano fra loro come i numeri

$$b_{i,i+1} \quad \text{ed} \quad a_{i,i+1}$$

ovvero come

$$a_{i,i+1} \quad \text{e} \quad b_{i,i+1}.$$

La distanza d dei punti $P_{i,i+1}$ e $P_{i+1,i}$ dei rispettivi estremi dell'asta starà alla lunghezza $l_{i,i+1}$ dell'asta medesima nel rapporto

$$b_{i,i+1} : 1.$$

Risulterà dunque, tenendo conto dell'espressione del coefficente $b_{i,i+1}$ (v. § 2)

$$d = \frac{l_{i,i+1}}{3} - 2\left(\frac{\rho_{i,i+1}}{l_{i,i+1}}\right)^2 l_{i,i+1}$$

o anche

$$d = \frac{l_{i,i+1}}{3} - 2\frac{\rho_{i,i+1}}{l_{i,i+1}}\rho_{i,i+1}.$$

I punti $P_{i,i+1}$ e $P_{i+1,i}$ si trovano dunque compresi nei terzi estremi dell'asta, ad una distanza Δ dalle estremità del terzo medio che vale:

$$\Delta = 2\frac{\rho_{i,i+1}}{l_{i,i+1}}\rho_{i,i+1}.$$

Se le forze di taglio risultassero di effetto trascurabile (e cioè ρ fosse molto piccolo riguardo ad l) si potrebbe porre

$$d = \frac{l_{i,i+1}}{3}.$$

Nel qual caso i punti fittizi cadrebbero nelle estremità del terzo medio dell'asta.

§ 9. **Esempio di applicazione del teorema.** — Unicamente allo scopo di mostrare l'applicazione del nostro teorema ad un esempio concreto, ci proponiamo di studiare il portale iperstatico schematizzato nella fig. 4.

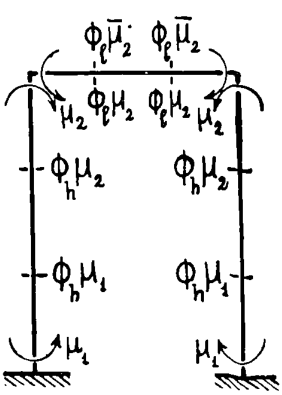


Fig. 4

Supposto il carico verticale e simmetrico risulteranno eguali e dello stesso segno (e cioè inducenti ambedue trazione od ambedue compressione nelle fibre esterne del portale) i momenti che agiscono sopra sezioni simmetriche rispetto alla verticale di messeria. Diciamo pertanto:

μ_1 il momento di base dei montanti;

μ_2 il momento di sommità dei medesimi.

I momenti di estremità della traversa valgono naturalmente anch'essi μ_2. Diciamo ancora:

h l'altezza del portale;

Φ_h e Φ_l i pesi elastici dei montanti e della traversa;

Δ_h il valore di Δ (v. § prec.) relativo al montante.

Determinati i punti fittizi e concentrate in essi le masse fittizie, si esprima che le masse fittizie dei momenti di estremità devono aver momento nullo rispetto alla traversa superiore. Si otterrà:

$$\Phi_h\mu_2\left(\frac{h}{3} - \Delta_h\right) + \Phi_h\mu_2\left(\frac{2}{3}h + \Delta_h\right) = 0$$

da cui

(11)
$$\mu_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{1-\dfrac{3\Delta_h}{h}}{1+\dfrac{3}{2}\dfrac{\Delta_h}{h}}\,\mu_2 .$$

Esprimendo poi che la somma delle masse fittizie q deve essere eguale alla somma delle masse fittizie $\bar{q}$ si avrà:

(12)
$$\Phi_h(\mu_1+\mu_2)+\Phi_l\mu_2=\Phi_l\bar{\mu}_2 .$$

Dalla (11) e dalla (12):

$$\mu_2\left[1+\frac{\Phi_h}{\Phi_l}\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{1-\dfrac{3\Delta_h}{h}}{1+\dfrac{3}{2}\dfrac{\Delta_h}{h}}\right)\right]=\bar{\mu}_2 .$$

Attesa la piccolezza del rapporto $\frac{\Delta_h}{h}$ si potrà, nella formula precedente, sostituire alla frazione $\frac{1-3\Delta_h/\Delta}{1+3\Delta_h/2\Delta}$ i primi due termini del suo sviluppo in serie. Con che, posto $\frac{\Phi_h}{\Phi_l}=\varphi$ si ottiene:

$$\mu_2=\frac{\bar{\mu}_2}{1+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{9}{4}\dfrac{\Delta_h}{h}\right)\varphi} .$$

Se si trascura la deformazione dovuta al taglio (e cioè si pone $\Delta_h=0$) si cade nella formula (ben nota):

$$\mu_2=\frac{\bar{\mu}_1}{1+\dfrac{1}{2}\varphi} .$$

Correlazioni reali proiettivamente identiche nel campo complesso e proiettivamente distinte nel campo reale.

Memoria di TULLIO TURRI (a Cagliari).

Sunto. - *Data una correlazione reale γ, si trovano le correlazioni reali che sono proiettivamente identiche a γ nel campo complesso e sono proiettivamente distinte da γ nel campo reale, e se ne calcola il numero.*

Riassumo i risultati ottenuti:

« Sia γ una correlazione reale, $F = 0$ la sua equazione. A meno di una sostituzione lineare reale, si ha $F \equiv A_1 + A_2 + \ldots + A_p$, dove $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sono forme bilineari, reali, a variabili cogredienti, irriducibili nel campo reale. Le correlazioni reali proiettivamente identiche a γ nel campo complesso sono date dalle $\varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2 + \ldots + \varepsilon_p A_p = 0$, dove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ hanno uno dei due valori $1, -1$.

« Siano gli interi $q_1, q_2, \ldots, q_v$ i numeri: *a)* dei divisori elementari di egual grado dispari del fascio $F - \rho F'$ corrispondenti alla radice 1; *b)* dei divisori elementari di egual grado pari (del fascio suddetto) corrispondenti alla radice -1; *c)* delle coppie dei divisori elementari di egual grado corrispondenti a due radici reciproche ed imaginarie coniugate. Se $q_1 + q_2 + \ldots + q_v < 2$, ogni correlazione reale proiettivamente identica a γ nel campo complesso lo è anche nel campo reale. In caso diverso il numero delle correlazioni reali che sono proiettivamente identiche a γ nel campo complesso e che sono inoltre due a due proiettivamente distinte nel campo reale, è il massimo intero contenuto in

$$\frac{1}{2}\{(q_1+1)(q_2+1)\ldots(q_v+1)+1\} \text{ ».}$$

Nella trattazione mi sono servito esclusivamente della geometria proiettiva e della teoria delle forme bilineari.

§ I. Sulle condizioni per la identità proiettiva delle correlazioni.

1. Faccio in questo numero alcune avvertenze e richiami.

Per non allungare la trattazione non prenderemo in considerazione le correlazioni a determinante nullo; al termine di questo lavoro dirò come si completino i risultati allorchè si vogliono comprendere anche le correlazioni a determinante nullo.

Ricordo che: « Condizione necessaria e sufficiente affinchè due forme bilineari A e B a variabili cogredienti e a determinante non nullo siano congruenti, è che i fasci $A - \rho A'$, $B - \rho B'$ abbiano gli stessi divisori elementari ».

Ricordo ancora che: « Ogni forma bilineare, a variabili cogredienti e a determinante non nullo è congruente ad una somma di forme irriducibili che sono dei cinque tipi che seguono.

$F_1 \equiv \{ cx_{2n}y_1 - (cx_{2n-1} + x_{2n})y_2 + \dots + (-1)^{n-1}(cx_{n+1} + x_{n+2})y_n \} + + (-1)^{n-1} \{ x_n y_{n+1} - (x_{n-1} + x_n)y_{n+2} + \dots + (-1)^{n-1}(x_1 + x_2)y_{2n} \}$, dove $c \neq 1, -1, 0$ (per $c = 0$ si avrebbe $|F_1| = 0$); il fascio $F_1 - \rho F_1'$ ha i divisori elementari $(c - \rho)^n$, $(1 - c\rho)^n$.

$F_2 \equiv x_{2n+1}y_1 - (x_{2n} + x_{2n+1})y_2 + \dots + (x_1 + x_2)y_{2n+1}$; il fascio $F_2 - \rho F_2'$ ha il divisore elementare $(1 - \rho)^{2n+1}$.

$F_3 \equiv x_{2n}y_1 - (x_{2n-1} + x_{2n})y_2 + \dots - (x_1 + x_2)y_{2n}$; il fascio $F_3 - \rho F_3'$ ha il divisore elementare $(1 + \rho)^{2n}$.

$F_4 \equiv \{ x_{4n}y_1 - (x_{4n-1} + x_{4n})y_2 + \dots - (x_{2n+1} + x_{2n+2})y_{2n} \} - \{ x_{2n}y_{2n+1} - - (x_{2n-1} + x_{2n})y_{2n+2} + \dots - (x_1 + x_2)y_{4n} \}$; il fascio $F_4 - \rho F_4'$ ha i divisori elementari $(1 - \rho)^{2n}$, $(1 - \rho)^{2n}$.

$F_5 \equiv \{ x_{4n+2}y_1 - (x_{4n+1} + x_{4n+2})y_2 + \dots + (x_{2n+2} + x_{2n+3})y_{2n+1} \} - - \{ x_{2n+1}y_{2n+2} - (x_{2n} + x_{2n+1})y_{2n+3} + \dots + (x_1 + x_2)y_{4n+2} \}$; il fascio $F_5 - \rho F_5'$ ha i divisori elementari $(1 + \rho)^{2n+1}$, $(1 + \rho)^{2n+1}$ ».

Una correlazione $F = 0$ si dirà riducibile ovvero irriducibile, secondochè la forma F è riducibile ovvero irriducibile [1].

2. Dimostro la PROPOSIZIONE I. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè due correlazioni* α *e* β *date rispettivamente dalle* $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} = 0$ *siano proiettivamente identiche, è che i fasci* $\mathrm{A} - \rho\mathrm{A}'$, $\mathrm{B} - \rho\mathrm{B}'$ *abbiano gli stessi divisori elementari.*

Siano le correlazioni α e β proiettivamente identiche: si ha una proiettività τ che trasforma la α nella β. Le sostituzioni lineari che rappresentano la τ sono una semplice infinità, i coefficienti di una differenziandosi dai coefficienti di un'altra per un comune fattore di proporzionalità. Sia T una di queste sostituzioni: avremo nel calcolo simbolico delle forme bilineari $T'AT = rB$, dove r è una costante, giacchè $B = 0$, $rB = 0$ rappresentano

[1] Per la teoria delle forme bilineari si può consultare il trattato di P. MUTH: *Elementartheiler* (Teubner, Leipzig, 1899).

ambedue la correlazione β. Ma τ è pure rappresentata dalla $\frac{1}{\sqrt{r}}T$, per la quale si ha $\frac{1}{\sqrt{r}}T'A\frac{1}{\sqrt{r}}T=B$: si conclude che A e B sono congruenti e, per la Proposizione ricordata al terzo capoverso del numero precedente, che i fasci $A-\rho A'$, $B-\rho B'$ hanno gli stessi divisori elementari.

Abbiano i fasci $A-\rho A'$, $B-\rho B'$ gli stessi divisori elementari: A e B sono congruenti, cioè si ha una sostituzione lineare T per cui $T'AT=B$: la proiettività rappresentata dalla T trasforma la α nella β.

3. Ricordo che si dice reale una correlazione che opera in uno spazio reale (coincidente col suo coniugato) e che a punti reali fa corrispondere iperpiani reali. Preso allora reale il riferimento (reali i vertici della piramide fondamentale e il punto unità), la equazione della correlazione ha i coefficienti reali.

Dimostro il seguente Lemma. *Siano α e β due correlazioni reali e siano* $\mathrm{A}=0$, $\mathrm{B}=0$ *le rispettive equazioni: condizione necessaria e sufficiente perchè α e β siano proiettivamente identiche nel campo reale, è che esista una sostituzione lineare reale che muti la* A *nella* B, *ovvero nella* $-\mathrm{B}$.

Siano α e β proiettivamente identiche nel campo reale: esiste una proiettività reale τ che muta α in β. Sia T una delle sostituzioni lineari reali che rappresentano la τ: abbiamo $T'AT=rB$. Se r è positivo, è reale la sostituzione $\frac{1}{\sqrt{r}}T$, e si ha $\frac{1}{\sqrt{r}}T'A\frac{1}{\sqrt{r}}T=B$; se r è negativo, è reale la sostituzione $\frac{1}{\sqrt{-r}}$, e si ha $\frac{1}{\sqrt{-r}}T'A\frac{1}{\sqrt{-r}}T=-B$; la necessità della condizione è dimostrata.

Esista invece una sostituzione lineare reale T che muti A in B, ovvero in $-B$: la proiettività reale τ rappresentata dalla T trasforma α in β.

Per esclusione si ha la Proposizione II. *Siano γ e δ due correlazioni reali e siano* $\mathrm{G}=0$, $\mathrm{D}=0$ *le rispettive equazioni: condizione necessaria e sufficiente perchè γ e δ non siano proiettivamente identiche nel campo reale, è che non esista nè una sostituzione lineare reale che muti* G *in* D, *nè una sostituzione lineare reale che muti* G *in* $-\mathrm{D}$.

§ II. I divisori elementari del fascio $F-\rho F'$ con F reale.

4. Dimostro la Proposizione III. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una forma bilineare* G *a variabili cogredienti (e a determinante non* *nullo) sia congruente ad una forma reale, è che le radici non reali della* $|\mathrm{G} - \rho\mathrm{G}'| = 0$ *siano a coppie imaginarie coniugate ed inoltre i divisori elementari del fascio* $\mathrm{G} - \rho\mathrm{G}'$ *corrispondenti a due radici imaginarie coniugate siano a coppie di egual grado.*

Sia G una forma bilineare a variabili cogredienti congruente ad una forma reale F: il fascio $G - \rho G'$ ha gli stessi divisori elementari del fascio $F - \rho F'$ e quindi la $|G - \rho G'| = 0$ ha le stesse radici della $|F - \rho F'| = 0$. Ora essendo F reale, le radici non reali della $|F - \rho F'| = 0$ sono a coppie imaginarie coniugate e i divisori elementari del fascio $F - \rho F'$ corrispondènti a due radici imaginarie coniugate sono a coppie di egual grado; la necessità della condizione è dimostrata.

Passiamo a dimostrare la sufficienza della condizione. Siano dunque a coppie imaginarie coniugate le radici non reali della $|G - \rho G'| = 0$ e i divisori elementari del fascio $G - \rho G'$ corrispondenti a due radici imaginarie coniugate siano a coppie di egual grado.

Il fascio $G - \rho G'$, essendo G una forma bilineare a variabili *cogredienti*, ha (come è noto dalla teoria delle forme bilineari) a coppie di egual grado i divisori elementari di grado pari corrispondenti alla radice 1, quelli di grado dispari corrispondenti alla radice -1, e infine quelli corrispondenti a due radici reciproche (distinte). Nelle ipotesi fatte possiamo quindi ripartire i divisori elementari del fascio $G - \rho G'$ come segue: *a)* divisori elementari di grado dispari corrispondenti alla radice 1; *b)* divisori elementari di grado pari corrispondenti alla radice -1; *c)* coppie di divisori elementari di egual grado pari corrispondenti alla radice 1; *d)* coppie di divisori elementari di egual grado dispari corrispondenti alla radice -1; *e)* coppie di divisori elementari di egual grado corrispondenti a due radici reciproche, reali distinte; *f)* coppie di divisori elementari di egual grado corrispondenti a due radici reciproche, imaginarie coniugate e perciò di modulo 1; *g)* quaterne di divisori elementari di egual grado corrispondenti alle radici $r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, $r(\cos\varphi - i \operatorname{sen}\varphi)$, $\frac{1}{r}(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, $\frac{1}{r}(\cos\varphi - i \operatorname{sen}\varphi)$, dove r è reale, positivo e diverso da 1. Mostrerò che in corrispondenza ai divisori elementari di ciascuna delle lettere *a)*, *b)*, *c)*, *d)*, *e)*, *f)*, *g)* si può costruire una forma reale Φ, tale che il fascio $\Phi - \rho\Phi'$ ha i divisori elementari indicati alla lettera stessa.

In corrispondenza ai divisori elementari di cui alle lettere *a)*, *b)*, *c)*, *d)* possiamo prendere forme reali rispettivamente dei tipi F_2, F_3, F_4. F_5 del n° 1.

In corrispondenza alle coppie di divisori elementari della lettera *e)* possiamo prendere le forme del tipo F_1 del n° 1, che hanno la costante c che vi figura, reale; siffatte forme saranno nel seguito richiamate col simbolo H, porremo cioè

$$\begin{aligned}H \equiv &\{ rx_{2n}y_1 - (rx_{2n-1} + x_{2n})y_2 + \dots + (-1)^{n-1}(rx_{n+1} + x_{n+2})y_n \} + \\ &+ (-1)^{n-1} \{ x_n y_{n+1} - (x_{n-1} + x_n)y_{n+2} + \dots + (-1)^{n-1}(x_1 + x_2)y_{2n} \},\end{aligned}$$

dove r è reale e diverso da 1, -1, 0.

In corrispondenza alle coppie di divisori elementari della lettera *f)* possiamo prendere forme reali del tipo seguente

$$\begin{aligned}K \equiv &\{ (x_{2n-1}\cos\varphi - x_{2n}\operatorname{sen}\varphi)y_1 + (x_{2n-1}\operatorname{sen}\varphi + x_{2n}\cos\varphi)y_2 \} \\ - &\{ (x_{2n-3}\cos\varphi - x_{2n-2}\operatorname{sen}\varphi + x_{2n-1}\cos\varphi - x_{2n}\operatorname{sen}\varphi)y_3 \\ &+ (x_{2n-3}\operatorname{sen}\varphi + x_{2n-2}\cos\varphi + x_{2n-1}\operatorname{sen}\varphi + x_{2n}\cos\varphi)y_4 \} \\ + &\{ (x_{2n-5}\cos\varphi - x_{2n-4}\operatorname{sen}\varphi + x_{2n-3}\cos\varphi - x_{2n-2}\operatorname{sen}\varphi)y_5 \\ &+ (x_{2n-5}\operatorname{sen}\varphi + x_{2n-4}\cos\varphi + x_{2n-3}\operatorname{sen}\varphi + x_{2n-2}\cos\varphi)y_6 \} \\ - &\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + &(-1)^{n-1}\{ (x_1\cos\varphi - x_2\operatorname{sen}\varphi + x_3\cos\varphi - x_4\operatorname{sen}\varphi)y_{2n-1} \\ &+ (x_1\operatorname{sen}\varphi + x_2\cos\varphi + x_3\operatorname{sen}\varphi + x_4\cos\varphi)y_{2n} \},\end{aligned}$$

dove $\varphi \neq h\dfrac{\pi}{2}$.

Per mettere in evidenza i divisori elementari del fascio $K - \rho K'$ calcoleremo la $\|(K')^{-1}K\|$, la quale del resto ci servirà negli sviluppi successivi. Posto

$$A \equiv \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}, \quad (-1)^r A \equiv \begin{Vmatrix} (-1)^r\cos\varphi & -(-1)^r\operatorname{sen}\varphi \\ (-1)^r\operatorname{sen}\varphi & (-1)^r\cos\varphi \end{Vmatrix},$$

abbiamo

$$\|K\| \equiv \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -A & -A \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A & A & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & (-1)^{n-2}A & (-1)^{n-2}A & \dots & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^{n-1}A & (-1)^{n-1}A & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Posto

$$B \equiv \left\| \begin{matrix} \cos 2\varphi & -\operatorname{sen} 2\varphi \\ \operatorname{sen} 2\varphi & \cos 2\varphi \end{matrix} \right\|,$$

abbiamo

$$\| (K')^{-1} K \| \equiv \left\| \begin{matrix} B & 2B & 2B & \dots & 2B \\ 0 & B & 2B & \dots & 2B \\ 0 & 0 & B & \dots & 2B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B \end{matrix} \right\| \cdot (-1)^{n-1}.$$

Posto infine $E \equiv x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{2n} y_{2n}$, si riscontra immediatamente che il fascio $(K')^{-1}K - \rho E$ ha i divisori elementari $\{ \cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi - (-1)^{n-1}\rho \}^n$; $\{ \cos 2\varphi - i \operatorname{sen} 2\varphi - (-1)^{n-1}\rho \}^n$; questi sono pure i divisori elementari del fascio $K - \rho K'$ equivalente al fascio $(K')^{-1}K - \rho E$. Perchè le radici dei divisori elementari siano imaginarie, è necessario e sufficiente che $\operatorname{sen} 2\varphi \neq 0$, e perciò che $\varphi \neq h \frac{\pi}{2}$, come si è supposto.

In corrispondenza alle quaterne di divisori elementari della lettera g) possiamo prendere le forme reali del tipo seguente

$$\begin{aligned} L \equiv\ & \{ (ax_{4n-1} - bx_{4n})y_1 + (bx_{4n-1} + ax_{4n})y_2 \} \\ + \ & \{ (ax_{4n-3} - bx_{4n-2} + ax_{4n-1} - bx_{4n})y_3 \\ & + (bx_{4n-3} + ax_{4n-2} + bx_{4n-1} + ax_{4n})y_4 \} \\ + \ & \{ (ax_{4n-5} - bx_{4n-4} + ax_{4n-3} - bx_{4n-2})y_5 \\ & + (bx_{4n-5} + ax_{4n-4} + bx_{4n-3} + ax_{4n-2})y_6 \} \\ + \ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + \ & \{ (ax_{2n+1} - bx_{2n+2} + ax_{2n+3} - bx_{2n+4})y_{2n-1} \\ & + (bx_{2n+1} + ax_{2n+2} + bx_{2n+3} + ax_{2n+4})y_{2n} \} \\ + \ & \{ x_{2n-1}y_{2n+1} + x_{2n}y_{2n+2} \} + \{ x_{2n-3}y_{2n+3} + x_{2n-2}y_{2n+4} \} \\ & + \dots + \{ x_1 y_{4n-1} + x_2 y_{4n} \}, \quad \text{dove} \quad a^2 + b^2 \neq 1. \end{aligned}$$

Posto

$$C \equiv \left\| \begin{matrix} a & -b \\ b & a \end{matrix} \right\|, \quad D = \left\| \begin{matrix} & 1 \\ 1 & \end{matrix} \right\|,$$

abbiamo

$$\|L\| \equiv \left\| \begin{array}{cccccccccc} 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & C \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & C & C \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & C & C & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & C & C & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & D & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & D & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ D & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| .$$

Passando dalla $\| L \|$ alla $\| (L')^{-1} L \|$, si trova che il fascio $(L')^{-1}L \quad \rho E$, equivalente al fascio $L - \rho L'$, ha i divisori elementari $(a + ib - \rho)^n$, $(a - ib - \rho)^n$, $\left(\frac{a + ib}{a^2 + b^2} - \rho\right)^n$, $\left(\frac{a - ib}{a^2 + b^2} - \rho\right)^n$.

Siano R_1, $R_2, \ldots, R_p$ le forme reali costruite in relazione ai divisori elementari di cui alle lettere *a), b), c), d), e), f), g)*; posto $F \equiv R_1 + R_2 + \ldots + R_p$, il fascio $F - \rho F'$ ha gli stessi divisori elementari del fascio $G - \rho G'$, e quindi G è congruente alla forma reale F.

Osservazione. « Dalle considerazioni sviluppate segue in particolare che se la G è reale ed è irriducibile nel campo reale, essa è nel *campo complesso* congruente ad una delle forme F_2, F_3, F_4, F_5, H, K, L ».

§ III. Correlazioni reali irriducibili.

5. Faccio alcune premesse di cui mi gioverò nel numero successivo.

Dimostro il seguente Lemma. *Sia τ un' omografia con un solo spazio caratteristico, ovvero con due soli spazi caratteristici e questi imaginari coniugati, e sia τ^2 reale: la τ è reale.*

Abbia dapprima la τ un solo spazio caratteristico. La matrice ridotta della τ^2 è in un riferimento reale

$$M \equiv \left\| \begin{array}{cccc} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & A_d \end{array} \right\| ,$$

dove $A_1, A_2, \ldots, A_d$ sono matrici del tipo

$$W \equiv \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 \end{Vmatrix};$$

diremo che M si compone delle matrici $A_1, A_2, \ldots, A_d$. Le radici quadrate della W sono due (ommetto i calcoli del tutto elementari), opposte tra loro e ad elementi reali. Ne segue che una radice quadrata della M è pure ad elementi reali e che le omografie rappresentate da queste radici sono reali; in particolare è reale la τ, la quale avendo un solo spazio caratteristico ha nella sua matrice gli elementi lungo la diagonale principale tutti eguali ad 1 ovvero a -1.

Veniamo al caso che la τ abbia due soli spazi caratteristici e questi imaginari coniugati. La matrice ridotta della τ^2 è in un riferimento reale ancora la M di dianzi, qualora con $A_1, A_2, \ldots, A_d$ intendiamo matrici del tipo (²)

$$Z \equiv \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & \ldots 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}.$$

Le matrici radici quadrate della Z sono quattro: due C, $-C$ ad elementi reali ed opposte; due D, $-D$ ad elementi imaginari *puri* ed opposte. Le quattro matrici sono in corrispondenza alle quattro matrici radici quadrate della

$$\begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix},$$

(²) Si può in proposito consultare la mia Memoria: *Omografie reali proiettivamente identiche nel campo complesso e proiettivamente distinte nel campo reale* (« Rend. Circolo Mat. di Palermo », 1933, t. LVII, p. 273-298).

che sono

$$\pm\left\|\begin{matrix}\cos\frac{\varphi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\\ \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2}\end{matrix}\right\|,\quad \pm\left|\begin{matrix}i\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} & i\cos\frac{\varphi}{2}\\ -i\cos\frac{\varphi}{2} & i\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\end{matrix}\right|.$$

Le radici delle equazioni caratteristiche relative a C, $-C$, D, $-D$ sono rispettivamente: $\cos\frac{\varphi}{2}\pm i\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}$, $-\cos\frac{\varphi}{2}\pm i\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}$, $i\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\pm\cos\frac{\varphi}{2}$, $i\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\pm\cos\frac{\varphi}{2}$. Avendo per ipotesi la τ due soli spazi caratteristici e questi imaginari coniugati, la matrice radice quadrata della M, che la rappresenta, si compone di matrici di uno solo dei tipi C, $-C$, D, $-D$, e ha quindi o gli elementi tutti reali, ovvero gli elementi tutti imaginari puri: nell'un caso e nell'altro la τ è reale.

Resta così dimostrato il Lemma.

Ricordo una notevole Proposizione della teoria delle forme bilineari: « Siano G e D due forme bilineari a variabili cogredienti e siano P e Q due sostituzioni lineari tali che $PGQ=D$: posto $T\equiv\sqrt{P'Q^{-1}}\cdot Q$, abbiamo $T'GT=D$, cioè G e D sono congruenti ».

6. Dimostriamo ora la Proposizione IV. *Ogni correlazione reale, non degenere, irriducibile nel campo reale è proiettivamente identica nel campo reale ad una delle correlazioni reali ed irriducibili nel campo reale* $\mathrm{F}_2=0$, $\mathrm{F}_3=0$, $\mathrm{F}_4=0$, $\mathrm{F}_5=0$, $\mathrm{H}=0$, $\mathrm{K}=0$, $\mathrm{L}=0$.

Sia γ una correlazione reale, irriducibile nel campo reale, $G=0$ la sua equazione (in un riferimento reale): G essendo irriducibile nel campo reale, è (Osservazione alla fine del n° 4) congruente nel campo *complesso* ad una delle forme F_2, F_3, F_4, F_5, H, K, L; diciamo D tale forma e δ la correlazione reale di equazione $D=0$.

Nelle ipotesi fatte i fasci $G-\rho G'$, $D-\rho D'$ hanno gli stessi divisori elementari. Ora $\|G-\rho G'\|$, $\|D-\rho D'\|$ sono le matrici caratteristiche delle omografie reali γ^2 e δ^2; tenuto conto della eguaglianza dei detti divisori elementari, abbiamo che γ^2 e δ^2 sono proiettivamente identiche nel campo reale. Dalla identità proiettiva nel campo reale di γ^2 e δ^2, congiunta alla eguaglianza dei divisori elementari, scende a sua volta che sono equivalenti nel campo reale i fasci $G-\rho G'$, $D-\rho D'$; esistono cioè due sostituzioni lineari reali P e Q tali che $P(G-\rho G')Q=D-\rho D'$. Si ha quindi anche $PGQ=D$. e posto $T=\sqrt{P'Q^{-1}}\cdot Q$ (penultimo capoverso del numero precedente), $T'GT=D$; si tenga presente pel seguito che T^2 è reale.

Essendo γ^2 e δ^2 proiettivamente identiche nel campo reale, per semplificare, d'ora innanzi le supporremo addirittura identiche: in tale ipotesi, indicata con τ la omografia rappresentata dalla T e tenuto conto che $\tau^{-1}\gamma\tau = \delta$, si ha $\tau^{-1}\gamma^2\tau (= \delta^2) = \gamma^2$, cioè τ e γ^2 sono permutabili. Giunti a questo punto della dimostrazione, ci conviene distinguere sei casi: I.) la δ è una $F_2 = 0$, ovvero una $F_3 = 0$; II.) la δ è una $K = 0$; III.) la δ è una $H = 0$; IV.) la δ è una $F_4 = 0$; V.) la δ è una $F_5 = 0$; VI.) la δ è una $L = 0$.

I.) Sia δ una $F_2 = 0$, ovvero una $F_3 = 0$. La γ^2 ha un solo punto unito; d'altra parte γ^2 lascia fissi gli spazi caratteristici di τ e in ognuno di essi lascia fisso (almeno) un punto: si deduce che τ ha un solo spazio caratteristico. Poichè τ ha *un solo* spazio caratteristico e τ^2 è reale (essendolo $\| T \|^2$), la τ è reale e γ e δ sono proiettivamente identiche nel campo reale.

II.) Sia δ una $K = 0$. La γ^2 ha due soli punti uniti, uno in ognuno dei due spazi caratteristici; γ^2 e τ lasciano fissi l'una gli spazi caratteristici dell'altra (giacchè le radici della $| K - \rho K' | = 0$ non sono le potenze di una radice primitiva dell'unità): segue che la τ non può avere più di due spazi caratteristici. Se τ ha un solo spazio caratteristico, si conclude come nel caso I). Se τ ha due spazi caratteristici. questi coincidono con gli spazi caratteristici di γ^2, che sono imaginari coniugati: la τ è reale e γ e δ sono proiettivamente identiche nel campo reale.

III.) Sia δ una $H = 0$. La γ^2 ha due soli punti uniti, ripetendo il ragionamento svolto al principio del caso II) si ha che τ non può avere più di due spazi caratteristici. Se τ ha un solo spazio caratteristico, essa è reale e γ e δ sono proiettivamente identiche nel campo reale.

Abbia la τ due spazi caratteristici: questi coincidono con gli spazi caratteristici reali $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ di γ^2, nei quali la τ^2 (reale) subordina omografie reali; segue (ancora per il Lemma del numero precedente) che le omografie da τ subordinate in $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ sono reali e abbiano

$$T'' \equiv \begin{Vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{Vmatrix},$$

dove A_1, A_2 sono matrici quadrate di ordine n. La $\| T \|^2$ essendo ad elementi reali, sono a priori pensabili tre casi: A_1 e A_2 ambedue ad elementi reali, ambedue ad elementi imaginari *puri*, l'una ad elementi reali e l'altra ad elementi imaginari puri.

Ora si ha

$$\| H | \equiv \begin{Vmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{Vmatrix},$$

dove B_1, B_2 sono matrici quadrate di ordine n; dalla $T'GT = D$ segue poi

$$\| D \| = \left\| \begin{matrix} A_1' & 0 \\ 0 & A_2' \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & A_1'B_1A_2 \\ A_2'B_2A_1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Essendo reali gli elementi di $\|D\|$, gli elementi di A_1 e A_2 sono o gli uni e gli altri reali, ovvero gli uni e gli altri imaginari puri: la τ è quindi reale e γ e δ sono proiettivamente identiche nel campo reale.

IV.) Sia δ una $F_4 = 0$. Indichiamo con $A_1, A_2, \dots, A_{4n}$ i vertici della piramide di riferimento; lo spazio (reale) $S_{2n-1} \equiv (A_1A_2 \dots A_nA_{2n+1}A_{2n+2} \dots A_{3n})$ congiunge le prime n rette di punti uniti infinitamente vicine che si hanno in $\delta^2 \equiv \gamma^2$. Nello spazio in cui si opera, non si ha alcun altro spazio in cui venga subordinata da γ^2 un'omografia proiettivamente identica a quella subordinata in S_{2n-1}; per questo fatto lo S_{2n-1}, che sta sulla quadrica luogo d'incideuza di δ, sta pure sulla quadrica luogo d'incidenza di γ. Queste due quadriche, contenendo l'S_{2n-1}, contengono spazi lineari reali di dimensione massima, e sono quindi proiettivamente identiche nel campo reale: supponiamole addirittura coincidenti. In tale ipotesi, osservato che gli spazi $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ congiungenti i primi $2n$ vertici della piramide di riferimento e gli ultimi $2n$ vertici stanno sulla quadrica luogo d'incidenza, si prosegue il ragionamento in modo analogo a quello tenuto al caso III), e anche qui si conclude che γ e δ sono proiettivamente identiche nel campo reale.

V.) Sia δ una $F_5 = 0$. Indichiamo con $A_1, A_2, \dots, A_{4n+2}$ i vertici della piramide di riferimento; lo spazio (reale) $S_{2n+1} \equiv (A_1A_2 \dots A_{n+1}A_{2n+2}A_{2n+3} \dots A_{3n+2})$ congiunge le prime $n+1$ rette di punti uniti infinitamente vicine che si hanno in $\delta^2 \equiv \gamma^2$. Nello spazio in cui si opera, non si ha alcun altro spazio in cui venga subordinata da γ^2 un'omografia proiettivamente identica a quella subordinata in S_{2n+1}; per questo fatto lo S_{2n+1} che sta sulla quadrica luogo d'incidenza di δ. sta pure sulla quadrica luogo d'incidenza di γ. La prima di queste due quadriche è due volte specializzata, conseguentemente anche l'altra; contenendo le due quadriche l'S_{2n+1}, contengono spazi lineari reali di dimensione massima, e sono quindi proiettivamente identiche nel campo reale: identifichiamole. In tale ipotesi, osservato che gli spazi $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ congiungenti rispettivamente i primi $2n+1$ vertici della piramide di riferimento e gli ultimi $2n+1$ vertici stanno sulla quadrica luogo d'incidenza, si prosegue il ragionamento in modo analogo a quello tenuto al caso III). Anche ora γ e δ sono proiettivamente identiche nel campo reale.

VI.) Sia δ una $L = 0$. La γ^2 ha uniti due *soli* spazi reali $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ congiungenti rispettivamente i primi $2n$ vertici della piramide di riferimento e gli ultimi $2n$ vertici. Osservato questo, si prosegue il ragionamento in modo analogo a quello tenuto al caso III). Anche ora γ e δ sono proiettivamente identiche nel campo reale.

La Proposizione IV è così completamente dimostrata.

§ IV. **Forme bilineari, reali, a variabili cogredienti, irriducibili.**

7. Dimostro la PROPOSIZIONE V. *Ogni forma bilineare, reale, a variabili cogredienti, a determinante non nullo, irriducibile nel campo reale è congruente nel campo reale ad una forma dei dieci tipi seguenti:* F_2, $-F_2$, F_3, $-F_3$, F_4, F_5, H, K, $-$K, L.

Tenendo presente la Prop. IV ed insieme la Prop. II si ha che ogni forma bilineare, reale, a variabili cogredienti, a determinante non nullo, irriducibile nel campo reale è congruente nel campo reale ad una delle forme F_2, F_3, F_4, F_5, H, K, L, ovvero ad una delle opposte di queste: avremo dimostrato la Prop. V dimostrando che F_4, F_5, H, L sono congruenti nel campo reale alle rispettive opposte, e che F_2, F_3, K non sono congruenti nel campo reale a $-F_2$, $-F_3$, $-K$.

Consideriamo le forme F_4, F_5, H, L. Ciascuna di esse contiene un numero pari di coppie di variabili; tale numero diciamo 2μ: la sostituzione reale definita dalle

$$x_k' = \varepsilon_k x_k \qquad \qquad \varepsilon_k = \begin{cases} 1 \text{ per } k = 1, 2, \ldots, \mu \\ -1 \text{ per } k = \mu+1, \mu+2, \ldots, 2\mu \end{cases}$$
$$y_k' = \varepsilon_k y_k$$

muta le forme F_4, F_5, H, L nelle rispettive opposte.

Consideriamo la F_2. Facciamo in essa $y_k = x_k$; abbiamo la forma quadratica $Q_2 \equiv (-1)^n x^2_{n+1} + \sum_g^{1\ldots n} (-1)^{g-1} 2 x_g x_{2n+2-g}$; avendo la Q_2 dispari il numero delle variabili e non nullo il determinante, la sua segnatura è diversa da 0 (si verifica che è precisamente $(-1)^n$), onde la Q_2 non è congruente nel campo reale a $-Q_2$: a maggior ragione non è F_2 congruente nel campo reale a $-F_2$.

Consideriamo la F_3. Facciamo in essa $y_k = x_k$; abbiamo la forma quadratica $Q_3 \equiv (-1)^n x^2_{n+1} + \sum_g^{2\ldots n} (-1)^{g-1} 2 x_g x_{2n+2-g}$. Nella Q_3 compaiono le variabili x cogli indici da 2 a $2n$, e *rispetto a queste* $2n-1$ *variabili* la Q_3 è a determinante non nullo: la Q_3, essendo in un numero dispari di variabili, non è congruente nel campo reale a $-Q_3$; a maggior ragione F_3 non è congruente nel campo reale a $-F_3$.

Per la forma K occorrono alcune premesse. Sia U una sostituzione che trasforma K in $-K$, sia cioè $U'KU = -K$; abbiamo pure $U'K'U = -K'$; da queste due relazioni si trae $(K')^{-1}KU = U(K')^{-1}K$, cioè la U è permutabile colla $(K')^{-1}K$.

Al n° 4 abbiamo data la matrice $\|(K')^{-1}K\|$; effettuando il calcolo si trova che le matrici permutabili colla $\|(K')^{-1}K\|$ sono date dalla matrice

$$A \equiv \left\| \begin{array}{cccccccc} a_{11} & -a_{21} & a_{13} & -a_{23} & a_{15} & -a_{25} & \dots\, a_{1\,2n-1} & -a_{2\,2n-1} \\ a_{21} & a_{11} & a_{23} & a_{13} & a_{25} & a_{15} & \dots\, a_{2\,2n-1} & a_{1\,2n-1} \\ 0 & 0 & a_{11} & -a_{21} & a_{13} & -a_{23} & \dots\, a_{1\,2n-3} & -a_{2\,2n-3} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{11} & a_{23} & a_{13} & \dots\, a_{2\,2n-3} & a_{1\,2n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & -a_{21} & \dots\, a_{1\,2n-5} & -a_{2\,2n-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{11} & \dots\, a_{2\,2n-5} & a_{1\,2n-5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\, a_{11} & -a_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\, a_{21} & a_{11} \end{array} \right\|$$

al variare dei parametri a_{ik} che in essa compaiono. Pel capoverso precedente la matrice $\|U\|$ *rientra* tra le matrici date dalla A; indichiamo con $\overline{a}_{ik}$ i valori che bisogna dare alle a_{ik} per avere la $\|U\|$, e teniamo poi presente che nella K l'angolo φ è tale che sen $2\varphi \neq 0$, onde $\cos\varphi \neq 0$.

Se il numero delle coppie di variabili che figurano in K è 2, la U non è reale. Infatti facendo $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ abbiamo la forma quadratica $Q \equiv (x_1^2 + x_2^2)\cos\varphi$, la cui segnatura è diversa da 0 (± 2 secondochè $\cos\varphi$ è positivo ovvero negativo); la Q non è congruente nel campo reale a $-Q$, quindi a maggior ragione K non è congruente nel campo reale a $-K$.

Se il numero delle coppie di variabili è > 2, ci si riconduce al caso precedente. La U sostituisce ad x_{2n-1}, x_{2n} le

$$x'_{2n-1} = \overline{a}_{11}x_{2n-1} - \overline{a}_{21}x_{2n}, \quad x'_{2n} = \overline{a}_{21}x_{2n-1} + \overline{a}_{11}x_{2n}.$$

Facciamo la ipotesi che siano nulle $y_3, y_4, \dots, y_{2n}$; in tale ipotesi la U applicata alle y_k ci dà

$$y_1' = \overline{a}_{11}y_1 - \overline{a}_{21}y_2, \quad y_2' = \overline{a}_{21}y_1 + \overline{a}_{11}y_2,$$

mentre y_3', y_4',..., y_{2n}' (che si esprimono a mezzo di y_3, y_4..., y_{2n}) sono tutte nulle; segue che, nella ipotesi fatta, y_1, y_2 sono rispettivamente congruenti ad x_{2n-1}, x_{2n}. Facendo nella K (che, sempre nelle ipotesi fatte, si riduce alla $(x_{2n-1}\cos\varphi - x_{2n}\,\mathrm{sen}\,\varphi)y_1 + (x_{2n-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi + x_{2n}\cos\varphi)y_2)$ $y_1 = x_{2n-1}$, $y_2 = x_{2n}$, abbiamo la forma quadratica $Q^* \equiv (x^2_{2n-1} + x^2_{2n})\cos\varphi$: poichè Q^* non è congruente a $-Q^*$ nel campo reale, a maggior ragione K non è congruente nel campo reale a $-K$.

§ V. Sul riferimento reale di una correlazione reale.

8. Premetto alcuni richiami. Sia γ una correlazione, S_n lo spazio in cui opera: se un S_d è unito per γ^2, ai punti di S_d la γ fa corrispondere gli iperpiani di una stella di centro S_{n-d-1}, e a questi iperpiani i punti di S_d; lo spazio S_{n-d-1} è pure unito per γ^2. Nel caso che S_d e S_{n-d-1} non si intersechino, presi $d+1$ vertici della piramide di riferimento in S_d e i rimanenti in S_{n-d-1}, la equazione di γ è del tipo $M + N = 0$, dove $M = 0$, $N = 0$ rappresentano rispettivamente le correlazioni subordinate in S_d e in S_{n-d-1}. Nel caso che S_d e S_{n-d-1} si intersechino secondo un S_j, quest'ultimo è pure unito per γ^2 e lo spazio S_d è tangente alla quadrica luogo d'incidenza Q della correlazione γ nell' S_j stesso; viceversa se S_d è tangente alla quadrica Q in un S_j, quest'ultimo è unito per γ^2 e costituisce la intersezione di S_d e S_{n-d-1}.

Dimostro la PROPOSIZIONE VI. *Sia γ una correlazione reale non degenere: si può scegliere il riferimento reale per modo che la equazione della γ sia* $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_p = 0$, *dove* A_1, A_2,..., A_p *sono forme dei tipi* F_2, $-\mathrm{F}_2$, F_3, $-\mathrm{F}_3$, F_4, F_5, H, K, $-$K, L.

Sia $G = 0$ la equazione di γ in un riferimento reale e del resto qualsiasi: per la Prop. III avremo un riferimento (non è detto che possa essere reale) in cui la γ ha la equazione $\Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_p = 0$, dove Φ_1, Φ_2,..., Φ_p sono forme dei tipi F_2, F_3, F_4, F_5, K, H, L. Indichiamo con $S^{(1)}$ lo spazio in cui opera la correlazione $\Phi_1 = 0$, con $C^{(1)}$ lo spazio in cui opera la correlazione $\Phi_2 + \Phi_3 + \ldots + \Phi_p = 0$; gli spazi $S^{(1)}$ e $C^{(1)}$ non si segano e sono l'uno il centro della stella degli iperpiani corrispondenti ai punti dell'altro.

Se $S^{(1)}$ è reale, anche $C^{(1)}$ è reale; si può allora fissare il riferimento reale per modo che una parte dei vertici della piramide fondamentale sia in $S^{(1)}$ e i rimanenti in $C^{(1)}$; la equazione di γ è in questo riferimento reale $A_1 + G_1 = 0$, dove $A_1 = 0$, $G_1 = 0$ rappresentano rispettivamente le correlazioni subordinate in $S^{(1)}$ e in $C^{(1)}$.

Qualora $S^{(1)}$ sia imaginario, distingueremo due casi: 1°) la Φ_1 è di uno dei tipi F_2, F_3, H, K, L; 2°) la Φ_1 è di uno dei tipi F_4 od F_5.

Caso 1°). La Φ_1 è di uno dei tipi F_2, F_3, H, K, L; la omografia subordinata da γ^2 in $S^{(1)}$ lascia fissi uno, due, quattro punti secondochè Φ_1 è dei tipi F_2 o F_3, dei tipi K od H, del tipo L; corrispondentemente $S^{(1)}$ interseca uno, due, quattro spazi caratteristici di γ^2. Consideriamo lo spazio $\bar{S}^{(1)}$ imaginario coniugato di $S^{(1)}$; prendiamo in $S^{(1)}$ un punto generico P e in $S^{(1)}$ il punto $\bar{P}$ imaginario coniugato di P: dimostro che per ogni punto della $P\bar{P}$ passa uno e un solo spazio unito (contenuto nell' $S^{(1)} + \bar{S}^{(1)}$) nel quale la γ^2 subordina una omografia proiettivamente identica a quella subordinata in $S^{(1)}$.

Se $S^{(1)}$ è contenuto in uno spazio caratteristico, la proprietà risulta dalla costruzione delle coppie caratteristiche di punti al modo di Predella, a partire da ogni punto della $P\bar{P}$. Se $S^{(1)}$ interseca due spazi caratteristici, pure $\bar{S}^{(1)}$ interseca gli stessi due spazi caratteristici; diciamo E_1, E_2 le intersezioni di questi spazi caratteristici con $S^{(1)} + S^{(1)}$: preso un punto R della PP, si dicano R_1, R_2 le proiezioni di R da E_2. E_1 rispettivamente su E_1, E_2; per R_1 passa un solo spazio unito con un solo punto unito e così per R_2; il loro spazio congiungente passa per R ed è l'unico spazio unito passante per R in cui venga subordinata un'omografia proiettivamente identica a quella subordinata in $S^{(1)}$. Analoghe considerazioni si fanno quando $S^{(1)}$ interseca quattro spazi caratteristici.

Diciamo genericamente ε gli spazi che passano per un punto della retta $P\bar{P}$ e in cui vengono subordinate omografie proiettivamente identiche a quella che si ha in $S^{(1)}$; gli ε passanti per i punti reali della PP sono reali. Dimostro che non tutti gli ε reali sono tangenti alla quadrica Q.

Siano tutti gli ε reali tangenti alla Q: allora esiste (almeno) uno spazio caratteristico S_g di γ^2 tale che gli spazi ε reali hanno in S_g un punto unito di contatto colla Q (1° capoverso di questo numero). Ricorrendo ancora alle coppie caratteristiche di punti del Predella si ha che tali punti uniti, o si riducono ad un sol punto T, ovvero stanno su di una punteggiata r (la punteggiata determinata dai due punti uniti che $S^{(1)}$ ed $\bar{S}^{(1)}$ hanno in S_g).

Si riducano i suddetti punti uniti ad un unico punto T. Il punto T è coniugato, sia come punto x che come punto y (cioè come punto dell'uno o dell'altro dei due spazi sovrapposti in cui opera la γ), di tutti i punti reali della PP, quindi di tutti i punti della $P\bar{P}$, in particolare di P. Si prenda in $S^{(1)}$ un altro punto generico M e si dica $\bar{M}$ l'imaginario coniugato di M; i punti reali della MM sono coniugati di T e quindi di T sono coniugati tutti i punti della $M\bar{M}$. Poichè M è un punto generico di $S^{(1)}$, si giunge alla conclusione che T è coniugato di tutti i punti di $S^{(1)}$, il quale risulta così tangente a Q, contrariamente a quanto si è notato (al 3° capoverso di questo numero).

Qualora gli spazi ε reali tocchino la Q in punti uniti di S_g che stanno su di una punteggiata r, associamo i due punti in cui uno spazio ε incontra la PP e la r; si ha tra le due punteggiate una proiettività; le coppie di punti corrispondenti in questa proiettività, che sono determinate dagli ε reali, ci danno coppie di punti coniugati (sia come punti x che come punti y) in γ; di conseguenza sono coniugati in γ due punti qualunque corrispondenti nella stessa proiettività, in particolare il punto P è coniugato del punto A in cui $S^{(1)}$ incontra r. Si prenda in $S^{(1)}$ un punto generico M e si dica $\bar{M}$ l'imaginario coniugato di M; sviluppando per la MM considerazioni analoghe a quelle fatte a partire dalla PP, si trova che M è coniugato del punto A in γ. Poichè M è un punto generico di $S^{(1)}$, si conclude che tutti i punti di $S^{(1)}$ sono coniugati del punto A e che $S^{(1)}$ è tangente in A alla Q, contrariamente a quanto si è notato.

Caso 2°). La Φ_1 è del tipo F_4 ovvero del tipo F_5, perciò $S^{(1)}$ ha dimensione dispari $2q+1$ e in esso si ha una retta di punti uniti. Diciamo $S^{(1)}$ lo spazio imaginario coniugato di $S^{(1)}$; per ogni punto generico di $S^{(1)}+S^{(1)}$ passa uno e un solo spazio unito per γ^2 con un solo punto unito; diciamo tali spazi genericamente η. Prendiamo in $S^{(1)}$ una retta generica d e in $\bar{S}^{(1)}$ la retta imaginaria coniugata $\bar{d}$; la γ^2 subordina nello spazio che congiunge i due spazi η passanti rispettivamente per due punti imaginari coniugati A e $\bar{A}$ l'uno in d, l'altro in d, un'omografia proiettivamente identica a quella che resta subordinata in $S^{(1)}$. Al variare di A sulla d si viene a determinare una semplice infinità di spazi, che nomineremo spazi ε. Considerazioni analoghe a quelle fatte al caso 1°) (per gli spazi là indicati colla stessa lettera ε) e che non credo necessario sviluppare, ci conducono ad affermare che non tutti gli spazi ε reali sono tangenti alla quadrica Q.

Prendiamo ora uno spazio reale ε (del caso 1°) ovvero del caso 2°)) non tangente alla Q; diciamolo $R^{(1)}$ e diciamo $C_*^{(1)}$ il centro della stella degli iperpiani che la γ fa corrispondere ai punti di $R^{(1)}$; si può scegliere il riferimento reale per modo che la equazione di γ sia $A_1 + G_1 = 0$, dove $A_1 = 0$ rappresenta la correlazione subordinata in $R^{(1)}$, e $G_1 = 0$ rappresenta la correlazione subordinata in $C_*^{(1)}$. La A_1 è una forma congruente nel campo reale a Φ_1 ovvero a Φ_1: tuttavia potendo cambiare il segno del primo membro della equazione, ci è lecito suppore che A_1 sia congruente nel campo reale a Φ_1.

Sopra la correlazione $G_1 = 0$ si sviluppino considerazioni analoghe a quelle svolte fin qui a partire dalla $G = 0$, esclusion fatta del periodo ultimo del capoverso precedente. Si ha che si può scegliere il riferimento reale per modo che la correlazione subordinata in $C_*^{(1)}$ sia data da $A_2 + G_2 = 0$ e la correlazione γ da $A_1 + A_2 + G_2 = 0$, dove A_2 è congruente nel campo reale a Φ_2 ovvero a $-\Phi_2$, mentre G_2 è congruente nel campo complesso a $\Phi_3 + \Phi_4 + \ldots + \Phi_p$. Non ci è permesso di supporre sempre A_2 congruente nel campo reale a Φ_2, giacchè le correlazioni reali $A_1 + A_2 = 0$, $A_1 - A_2 = 0$ non sono sempre proiettivamente identiche nel campo reale.

Sopra la correlazione $G_2 = 0$ si sviluppino considerazioni analoghe a quelle fatte sulla $G = 0$ e sulla $G_1 = 0$; e così via si proceda. Resta alfine dimostrata la Prop. VI.

§ VI. **Risoluzione della questione proposta.**

9\. Dimostro la Proposizione VII. *Sia una forma bilineare reale* $\mathrm{F} \equiv (\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2 + \ldots + \mathrm{B}_g) + (\mathrm{r}_{11}\mathrm{C}_{11} + \mathrm{r}_{12}\mathrm{C}_{12} + \ldots + \mathrm{r}_{1q_1}\mathrm{C}_{1q_1}) + (\mathrm{r}_{21}\mathrm{C}_{21} + \mathrm{r}_{22}\mathrm{C}_{22} + \ldots + \mathrm{r}_{2q_2}\mathrm{C}_{2q_2}) + \ldots + (\mathrm{r}_{q_v1}\mathrm{C}_{q_v1} + \mathrm{r}_{q_v2}\mathrm{C}_{q_v2} + \ldots + \mathrm{r}_{q_vq_v}\mathrm{C}_{q_vq_v})$; *in essa siano* B_1, $\mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_g$ *forme (reali) dei tipi* F_4, F_5, H, L; *ciascuna delle* r_{jk} *abbia il valore* 1 *o* -1; *le* $\mathrm{C}_{d1}, \mathrm{C}_{d2}, \ldots, \mathrm{C}_{dq_d}$ $(\mathrm{d} = 1, 2, \ldots, \mathrm{q}_v)$ *siano forme congruenti nel campo reale a una stessa forma di uno dei tipi* F_2, F_3, K *e non sia mai per* $\mathrm{f} \neq \mathrm{h}$ *la* C_{f1} *congruente nel campo reale a* C_{h1}. *Il numero delle forme reali che sono congruenti alla* F *nel campo complesso e sono due a due non congruenti nel campo reale, è* $(\mathrm{q}_1 + 1)(\mathrm{q}_2 + 1) \ldots (\mathrm{q}_v + 1)$.

Per semplificare la dimostrazione possiamo alla F sostituire la $F_* = (B_1 + B_2 + \ldots + B_g) + (C_{11} + C_{12} + \ldots + C_{1q_1}) + (C_{21} + C_{22} + \ldots C_{2q_2}) + \ldots + (C_{q_v1} + C_{q_v2} + \ldots + C_{q_vq_v})$, giacchè F ed F_* sono congruenti nel campo complesso.

Ogni forma reale congruente alla B_j $(j = 1, 2, \ldots, g)$ nel campo complesso lo è anche nel campo reale. Ogni forma reale congruente alla $C_{11} + C_{12} + \ldots + C_{1q_1}$ nel campo complesso è congruente nel campo reale ad una delle $q_1 + 1$ forme $C_{11} + C_{12} + \ldots + C_{1q_1}$, $-C_{11} + C_{12} + \ldots + C_{1q_1}$, $-C_{11} - C_{12} + \ldots + C_{1q_1}, \ldots$, $-C_{11} - C_{12} - \ldots - C_{1q_1}$. Analoga osservazione per la forma $C_{21} + C_{22} + \ldots + C_{2q_2}; \ldots$; per la forma $C_{q_v1} + C_{q_v2} + \ldots + C_{q_vq_v}$.

Una forma reale congruente alla F_* nel campo complesso è, a meno di una sostituzione lineare reale, la somma: delle forme $B_1, B_2, \ldots, B_g$: di una delle $q_1 + 1$ forme che si ricavano dalla $C_{11} + C_{12} + \ldots + C_{1q_1}$ nel modo che s'è visto or ora; di una delle $q_2 + 1$ forme che si ricavano dalla $C_{21} + C_{22} + \ldots + C_{2q_2}; \ldots$; di una delle forme $q_v + 1$ forme che si ricavano dalla $C_{q_v 1} + C_{q_v 2} + \dots + C_{q_v q_v}$. Il numero delle forme reali che sono nel campo complesso congruenti alla F_* e perciò alla F, e che sono due a due non congruenti nel campo reale, è dunque $(q_1 + 1)(q_2 + 1) \dots (q_v + 1)$.

10. Dimostro la PROPOSIZIONE VIII. *Sia γ una correlazione reale,* $F = 0$ *la sua equazione, dove* F *è la forma reale dell'enunciato della Prop. VII. Non esistono correlazioni reali proiettivamente identiche a γ nel campo complesso e proiettivamente distinte da γ nel campo reale quando* $q_1 + q_2 + \dots + q_v < 2$; *in caso diverso il numero delle correlazioni reali che sono proiettivamente identiche a γ nel campo complesso ma sono due a due proiettivamente distiute nel campo reale, è il massimo intero contenuto in*

$$\frac{1}{2} \{ (q_1 + 1)(q_2 + 1) \dots (q_v + 1) + 1 \}.$$

Se $q_1 + q_2 + \dots + q_v < 2$, o abbiamo $v = 0$ ovvero $v = 1$. Quando $v = 0$, ogni forma reale congruente ad F nel campo complesso lo è anche nel campo reale. Quando $v = 1$ e perciò $q_1 = 1$, ogni forma reale congruente ad F nel campo complesso, è congruente nel campo reale ad F ovvero a $-F$. Tenendo presente la Prop. II, si conclude che con $q_1 + q_2 + \dots + q_v < 2$ non esiste una correlazione reale proiettivamente identica a γ nel campo complesso e proiettivamente distinta da γ nel campo reale.

Veniamo ora a discutere il caso $q_1 + q_2 + \dots + q_v \geq 2$. Consideriamo le forme $C_{11} + C_{12} + \dots + C_{1q_1}$, $-C_{11} + C_{12} + \dots + C_{1q_1}$, $-C_{11} - C_{12} + \dots + C_{1q_1}$, ..., $-C_{11} - C_{12} - \dots - C_{1q_1}$, e indichiamole rispettivamente con D_1, D_2, $D_3, \dots, D_{q_1+1}$: la D_{q_1+1} è la opposta della D_1, e due forme ad eguale distanza da queste estreme sono l'una congruente nel campo reale alla opposta dell'altra; perciò se q_1 è pari, la $D_{\frac{q_1+2}{2}}$ è congruente nel campo reale alla sua opposta. Analoghe osservazioni a partire dalle forme $C_{s1} + C_{s2} + \dots + C_{sq_s}$, $-C_{s1} + C_{s2} + \dots + C_{sq_s}$, $C_{s1} - C_{s2} + \dots + C_{sq_s}, \dots$, $-C_{s1} - C_{s2} - \dots - C_{sq_s}$ $(s = 2, 3, \dots, v)$.

Segue che tra le $(q_1 + 1)(q_2 + 1) \dots (q_v + 1)$ forme reali congruenti ad F nel campo complesso e a due a due non congruenti nel campo reale insieme ad una forma Φ vi è anche una e una sola forma congruente nel campo reale alla opposta della Φ; se i numeri $q_1, q_2, \dots, q_v$ non sono tutti pari, una forma Φ non viene mai a essere congruente nel campo reale alla sua opposta; se $q_1, q_2, \dots, q_v$ sono tutti pari, si ha una sola forma congruente nel campo reale alla sua opposta.

Tenendo presente la Prop. II. abbiamo che nel caso $q_1 + q_2 + \dots + q_v \geq 2$

il numero delle correlazioni reali proiettivamente identiche a γ nel campo complesso e a due a due proiettivamente distinte nel campo reale è il massimo intero contenuto in

$$\frac{1}{2}\{(q_1+1)(q_2+1)\dots(q_v+1)+1\}.$$

Osservazione. « Gli interi $q_1, q_2, \dots, q_v$ definiti nell' enunciato della Prop. VII in rapporto alle forme dei tipi F_2, F_3, K che entrano nella composizione della forma F, sono perciò i numeri: *a)* dei divisori elementari di egual grado dispari del fascio $F - \rho F'$ corrispondenti alla radice 1; *b)* dei divisori elementari di egual grado pari (del fascio suddetto) corrispondenti alla radice -1; *c)* delle coppie dei divisori elementari di egual grado corrispondenti a due radici reciproche ed imaginarie coniugate. Perciò il risultato da noi ottenuto può enunciarsi nella maniera seguita nella introduzione ».

11. Dico senza dimostrazione quali aggiunte e quali modifiche ai risultati ottenuti debbano farsi, qualora si vogliano comprendere anche le correlazioni reali a determinante nullo.

« Ai tipi di forme irriducibili bisogna aggiungere il seguente (dato esso pure da Kronecker):

$$F_6 \equiv x_1 y_{m+2} + x_{m+2} y_2 + x_2 y_{m+3} + \dots + x_{2m+1} y_{m+1}.$$

Il tipo F_6 è caratterizzato dal numero $2m+1$, non avendo il fascio $F_6 - \rho F_6'$ divisori elementari; ogni correlazione reale proiettivamente identica a $F_6 = 0$ nel campo complesso lo è pure nel campo reale; la F_6 è congruente nel campo reale alla sua opposta.

Nel tipo H bisogna togliere la restrizione $r \neq 0$.

Nell' enunciato della Prop. VI bisogna aggiungere dopo la forma finale L la forma F_6. Gli enunciati delle Prop. VII e VIII valgono ancora quando si intenda che le forme $B_1, B_2, \dots, B_g$ sono oltrechè dei tipi F_4, F_5, H, L anche del tipo F_6 ».

Sur la régularité des fonctions à croissance très rapide ou très lente

par N. PODTIAGUINE (Prague - Tchécoslovaquie).

1. **La régularité des fonctions à croissance très rapide.** — La notion de l'ordre de régularité de la croissance [1] permet de donner une définition nouvelle de la régularité des fonctions à croissance très rapide ou très lente. Cette définition nous conduira à un théorème qui caractérisera bien la régularité de la croissance de ces fonctions.

Nous dirons que la fonction $y(x)$ est *à croissance très rapide* et *régulière,* si toutes les fonctions en nombre infini

$$y(x), \quad \nu(x) = \frac{xy'}{y}, \quad \nu_1 = \frac{x\nu'}{\nu}, \dots, \quad \nu_n = \frac{x\nu'_{n-1}}{\nu_{n-1}}, \dots$$

tendent vers $+\infty$ avec x et si, en outre, toutes les expressions

$$\frac{yy''}{y'^2}, \quad \frac{\nu\nu''}{\nu_1'^2}, \quad \frac{\nu_1\nu_1''}{\nu_1'^2}, \dots, \quad \frac{\nu_n\nu_n''}{\nu_n'^2}, \dots$$

tendent en même temps vers des limites déterminées et finies. J'ai déjà montré [2] que ces limites ne peuvent être égales qu'à l'unité.

Montrons tout d'abord que les fonctions

$$(1) \qquad y(x), \quad \nu(x), \quad \nu_1(x), \quad \nu_2(x), \dots, \quad \nu_n(x), \dots$$

possédent presque toutes les propriétés des fonctions

$$y(x), \quad \nu(x), \quad \nu_1(x), \quad \nu_2(x), \dots \quad \nu_n(x)$$

formées pour une fonction régulière $y(x)$ dont l'ordre de la croissance est égal à $\omega^n x$ [3].

---

[1] Voir mon Mémoire, *Sur l'ordre de régularité de la croissance.* (« Annali di Matematica », Serie IV, T. IX, 1931).

[2] Ibid., (n. 2).

[3] *Sur une classe de fonctions croissantes.* (« Annali di Matematica », Serie IV, T V, 1927-1928, pp. 208-214).

Propriété 1. — *Le rapport de chacune des fonctions* (1) *à la puissance quelconque de la fonction précédente tend vers zéro quand* x *tend vers l'infini.*

Considérons le rapport

$$\frac{\nu_{n-1}^{\varepsilon}}{\nu_n},$$

ε étant un nombre positif si petit que l'on veut. En le mettant sous la forme

$$\frac{\nu_{n-1}^{\varepsilon}}{\nu_n} = \frac{\nu_{n-1}^{1+\varepsilon}}{x\nu'_{n-1}} = \frac{\dfrac{\nu_{n-1}^{1+\varepsilon}}{\nu'_{n-1}}}{x}$$

et en lui appliquant le théorème de Stolz [1], nous aurons

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu_{n-1}^{\varepsilon}}{\nu_n} = \lim_{x=\infty} \left[(1+\varepsilon)\nu_{n-1}^{\varepsilon} - \frac{\nu_{n-1}^{1+\varepsilon}\nu''_{n-1}}{\nu'^2_{n-1}} \right] =$$

$$= \lim_{x=\infty} \nu_{n-1}^{\varepsilon} \cdot \lim_{x=\infty} \left[1 + \varepsilon - \frac{\nu_{n-1}\nu''_{n-1}}{\nu'^2_{n-1}} \right] = +\infty,$$

car la fonction $y(x)$ est régulière et nous avons donc

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu_{n-1}\nu''_{n-1}}{\nu'^2_{n-1}} = 1.$$

On a, par conséquent,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu_n}{\nu_{n-1}^{\varepsilon}} = 0,$$

pour toutes les valeurs de l'indice n.

Propriété 2. — *Le rapport de chacune des fonctions* (1) *au logarithme de la fonction précédente croît indéfiniment avec* x.

On a, en effet, pour toutes les valeurs de l'indice n

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu_n}{\log \nu_{n-1}} = \lim_{x=\infty} \frac{\nu'_n}{\dfrac{\nu'_{n-1}}{\nu_{n-1}}} = \lim_{x=\infty} \frac{x\nu'_n}{\nu_n} = \lim_{x=\infty} \nu_{n+1} = +\infty.$$

Propriété 3. — *Chacun des rapports*

$$\frac{y^a}{\log y}, \quad \frac{\nu_1{}^a}{\log \nu}, \quad \frac{\nu_2{}^a}{\log \nu_1}, \ldots, \quad \frac{\nu_n{}^a}{\log \nu_{n-1}}, \ldots$$

où a *est un nombre quelconque moindre que un, tend vers zéro quand* x *tend vers l'infini.*

---

[1] *Grundzüge der Differential-und Integralrechnung.* Erster Theil, Leipzig, 1893, p. 77.

En effet, nous avons en vertu de la propriété 1

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu_n^a}{\log \nu_{n-1}} = \lim_{x=\infty} \frac{a\nu_n^{a-1}\nu'_n}{\dfrac{\nu'_{n-1}}{\nu_{n-1}}} = a \lim_{x=\infty} \frac{\nu_n^{a-1} x\nu'_n}{\nu_n} = a \lim_{x=\infty} \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n^{1-a}} = 0.$$

PROPRIÉTÉ 4. — *Chacune des expressions*

$$\frac{\nu}{\nu_1 \log y}, \quad \frac{\nu_1}{\nu_2 \log \nu}, \quad \frac{\nu_2}{\nu_3 \log \nu_1}, \ldots, \quad \frac{\nu_n}{\nu_{n+1} \log \nu_{n-1}}, \ldots$$

tend vers l'unité quand x *tend vers* $+\infty$.

Nous avons, en effet,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu_n}{\nu_{n+1} \log \nu_{n-1}} = \lim_{x=\infty} \frac{\dfrac{\nu_n}{\nu_{n+1}}}{\log \nu_{n-1}} = \lim_{x=\infty} \frac{\dfrac{\nu'_n}{\nu_{n+1}} - \dfrac{\nu_n \nu'_{n+1}}{\nu^2_{n+1}}}{\dfrac{\nu'_{n-1}}{\nu_{n-1}}} =$$

$$= \lim_{x=\infty} \left[\frac{\nu_n}{\nu_{n+1}} \cdot \frac{\dfrac{x\nu'_n}{\nu_n} - \dfrac{x\nu'_{n+1}}{\nu_{n+1}}}{\dfrac{x\nu'_{n-1}}{\nu_{n-1}}} \right] = \lim_{x-\infty} \left[\frac{\nu_n}{\nu_{n+1}} \cdot \frac{\nu_{n+1} - \nu_{n+2}}{\nu_n} \right] = \lim_{x=\infty} \left[1 - \frac{\nu_{n+2}}{\nu_{n+1}} \right] = 1.$$

PROPRIÉTÉ 5. — *Chacun des rapports*

$$\begin{array}{llllllll}
\dfrac{\log \nu}{\log_2 y}, & \dfrac{\log \nu_1}{\log_2 \nu}, & \dfrac{\log \nu_2}{\log_2 \nu_1}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & & \dfrac{\log \nu_{n-1}}{\log_2 \nu_{n-2}}, & \dfrac{\log \nu_n}{\log_2 \nu_{n-1}}, \ldots \\
 & \dfrac{\log \nu_1}{\log_3 y}, & \dfrac{\log \nu_2}{\log_3 \nu}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & & \dfrac{\log \nu_{n-1}}{\log_3 \nu_{n-3}}, & \dfrac{\log \nu_n}{\log_3 \nu_{n-2}}, \ldots \\
 & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & & \dfrac{\log \nu_{n-2}}{\log_n y}, & \dfrac{\log \nu_{n-1}}{\log_n \nu}, & \dfrac{\log \nu_n}{\log_n \nu_1}, \ldots \\
 & & & & & \dfrac{\log \nu_{n-1}}{\log_{n+1} y}, & \dfrac{\log \nu_n}{\log_{n+1} \nu}, \ldots \\
 & & & & & & \dfrac{\log \nu_n}{\log_{n+2} y}, \ldots \\
 & & & & & & \ldots\ldots
\end{array}$$

tend vers l'unité quand x *tend vers* $+\infty$.

PROPRIÉTÉ 6. — *L'expression*

$$\frac{\nu_n \log y \log_2 y \ldots \log_n y}{\nu}$$

tend pour toutes les valeurs de n *vers l'unité quand* x *tend vers l'infini.*

PROPRIÉTÉ 7. — *Quel que soit le nombre entier positif* n *et quelque petit que soit le nombre positif* ε, *l'expression*

$$\frac{\nu}{\log y \log_2 y \log_3 y \ldots \log_{n-1} y (\log_n y)^{1+\varepsilon}}$$

tend vers zéro quand x *tend vers l'infini.*

PROPRIÉTÉ 8. — *L'ordre de grandeur du logarithme de chacune des fonctions* (1) *par rapport à la fonction suivante est égal à l'unité.*

PROPRIÉTÉ 9. — *L'ordre de la croissance de la fonction* $\log_n y(x)$, *où* n *est un entier positif quelconque, par rapport à la fonction* ν_{n-1} *est égal à l'unité.*

La démonstration des propriétés 5, 6, 7, 8 et 9 est la même que celle des propriétés 7, 8, 10, 11 et 12 indiquées par moi dans mon Mémoire : *Sur une classe de fonctions croissantes* [1].

2. Quelques propriétés des fonctions régulières à croissance très rapide.

THÉORÈME 1. — *Toute fonction régulière* y(x) *à croissance très rapide vérifie l'égalité*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y\left\{x + \dfrac{1}{[y(x)]^{\eta}}\right\}}{y(x)} = 1,$$

quelque petit que soit le nombre positif η.

Ce théorème est une conséquence du théoreme 9 du n.° 7 de mon Mémoire : *Sur l'ordre de régularité de la croissance* [2].

THÉORÈME 2. — *Toute fonction régulière* y(x) *à croissance très rapide vérifie l'égalité*

$$\lim_{x-\infty} \frac{y\left\{x + \dfrac{y_1(x)}{\log y \log_2 y \log_3 y \ldots \log_{n-1} y (\log_n y)^{1+\varepsilon}}\right\}}{y(x)} = 1,$$

quelque petit que soit le nombre positif ε *donné à l'avance,* n *étant un nombre entier et positif quelconque et* $y_1(x)$ *une fonction positive quelconque dont la croissance n'est pas très rapide.*

En posant

$$\nu(x) = \frac{xy'(x)}{y(x)}, \quad \frac{y_1(x)}{\log y \log_2 y \log_3 y \ldots \log_{n-1} y (\log_n y)^{1+\varepsilon}} = z(x),$$

$$\frac{y[x + z(x)]}{y(x)} = \varphi(x),$$

[1] « Annali di Matematica », Serie IV, T. V, pp. 211-214.
[2] « Annali di Matematica », Serie IV, T. IX, pp. 114-115.

nous pouvons écrire

$$\varphi(x) - 1 = \frac{y[x + z(x)] - y(x)}{y(x)} = \frac{z(x)}{y(x)} \cdot y'[x + \theta z(x)] = \frac{z(x)}{x + \theta z(x)} \cdot$$

$$\cdot \frac{y[x + \theta z(x)]}{y(x)} \cdot \nu[x + \theta z(x)],$$

où $0 < \theta < 1$.

Mais la fonction $y(x)$ croît toujours. Donc

$$\frac{y[x + \theta z(x)]}{y(x)} < \varphi(x)$$

et l'égalité ci-dessus nous donne

$$\varphi(x) \left\{ 1 - \frac{1}{x + \theta z(x)} \cdot \frac{\nu[x + \theta z(x) \cdot y_1(x)}{\log y \log_2 y \log_3 y \ldots \log_{n-1} (\log_n y)^{1+\varepsilon}} \right\} < 1. \tag{2}$$

Or,

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x + \theta z(x)} = 0.$$

D'autre part, la fonction $\nu(x)$ étant toujours croissante, on aura l'inégalité

$$\frac{\nu[x + \theta z(x) \cdot y_1(x)}{\log y \log_2 y \log_3 y \ldots \log_{n-1} y (\log_n y)^{1+\varepsilon}} < \frac{\nu[x + z(x)]}{\nu(x)} \cdot \tag{3}$$

$$\cdot \frac{\nu(x) \cdot y_1(x)}{\log y(x) \log_2 y \log_3 y \ldots \log_{n-1} y (\log_n y)^{1+\varepsilon}}.$$

Mais quelque petit que soit le nombre positif ε_1 nous avons (n.° 1. Propriété 7)

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu(x)}{\log y \log_2 y \log_3 y \ldots \log_{n-1} y (\log_n y)^{1+\varepsilon_1}} = 0.$$

Il en résulte l'égalité

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu(x) y_1(x)}{\log y \log_2 y \log_3 y \ldots \log_{n-1} y (\log_n y)^{1+\varepsilon}} = 0. \tag{4}$$

En effet, la fonction $\log_n y$ étant une fonction à croissance très rapide, nous avons évidemment

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_1(x)}{(\log_n y)^{\varepsilon - \varepsilon_1}} = 0,$$

si nous prenons ε_1 assez petit pour que la différence $\varepsilon - \varepsilon_1$ soit positive.

Cherchons maintenant la limite de l'expression

$$\frac{\nu[x + z(x)]}{\nu(x)}$$

pour $x = +\infty$. L'égalité (4) nous montre qu'il existe toujours une valeur de x à partir de laquelle on a

$$z(x) = \frac{y_1(x)}{\log y \log_2 y \log_3 \ldots \log_{n-1} y (\log_n y)^{1+\varepsilon}} < \frac{1}{\nu(x)}.$$

Nous avons donc, à partir de cette valeur de x, les inégalités

$$1 < \frac{\nu[x + z(x)]}{\nu(x)} < \frac{\nu\left[x + \frac{1}{\nu(x)}\right]}{\nu(x)},$$

car la fonction $\nu(x)$ croît toujours. Mais le théorème précédent nous donne

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu\left[x + \frac{1}{\nu(x)}\right]}{\nu(x)} = 1.$$

Les inégalités ci-dessus nous donnent alors

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu[x + z(x)]}{\nu(x)} = 1.$$

Il résulte donc de l'inégalité (3) que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu[x + \theta z(x)] y_1(x)}{\log y \log_2 y \log_3 y \ldots \log_{n-1} y (\log_n y)^{1+\varepsilon}} = 0.$$

L'inégalité (2) nous donne alors

$$\lim_{x=\infty} \varphi(x) = 1,$$

car on a toujours

$$\varphi(x) > 1.$$

THÉORÈME 3. — *Si la fonction* y(x) *à croissance très rapide est telle que son logarithme est une fonction régulière, on a, à partir d'une certaine valeur de* x,

$$y\left\{x + \frac{y_1(x)}{\log_2 y \log_3 y \ldots \log_{n-1} y (\log_n y)^{1+\varepsilon}}\right\} < [y(x)]^{1+\eta},$$

quelque petits que soient les nombres positifs ε *et* η, n *étant un nombre entier et positif quelconque et* $y_1(x)$ *une fonction positive quelconque dont la croissance n'est pas très rapide.*

En posant

$$\log y = z(x)$$

et en appliquant à cette fonction $z(x)$ le théorème précédent, nous aurons

$$\lim_{x=\infty} \cdot \frac{z\left\{x + \frac{y_1(x)}{\log z \log_2 z \log_3 z \ldots \log_{n-2} z (\log_{n-1} z)^{1+\varepsilon}}\right\}}{z(x)} = 1,$$

où

$$\lim_{x=\infty} \cdot \frac{\log y \left\{ x + \dfrac{y_1(x)}{\log_2 y \log_3 y \log_4 y \dots \log_{n-1} y (\log_n y)^{1+\varepsilon}} \right\}}{\log y(x)} = 1,$$

d'où résulte l'inégalité cherchée.

3. La régularité des fonctions à croissance très lente. — Nous dirons que la fonction $y = y(x)$ est une *fonction régulière à croissance très lente*, si sa fonction inverse $x = x(y)$ est une fonction régulière à croissance très rapide.

Supposons donc que toutes les fonctions en nombre infini

$$x(y), \quad \nu(y) = \frac{yx'(y)}{x(y)}, \quad \nu_1(y) = \frac{y\nu'(y)}{\nu(y)}, \quad \nu_2(y) = \frac{y\nu_1'(y)}{\nu_1(y)}, \dots, \quad \nu_n(y) = \frac{y\nu'_{n-1}(y)}{\nu_{n-1}(y)}, \dots$$

tendent vers $+\infty$ avec y et qu'on ait les égalités

$$\lim_{y=\infty} \frac{x(y)x''(y)}{[x'(y)]^2} = 1, \quad \lim_{y=\infty} \frac{\nu(y)\nu''(y)}{[\nu'(y)]^2} = 1, \dots, \quad \lim_{y=\infty} \frac{\nu_n(y)\nu''_n(y)}{[\nu'_n(y)]^2} = 1, \dots.$$

Formons maintenant des fonctions

$$\mu(x) = \frac{1}{x} : \frac{y'(x)}{y(x)}, \quad \mu_1(x) = \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} : \frac{y'(x)}{y(x)}, \dots, \quad \mu_n(x) = \frac{\mu'_{n-1}(x)}{\mu_{n-1}(x)} : \frac{y'(x)}{y(x)}, \dots.$$

En changeant ici la valeur x par son expression $x(y)$, on trouve facilement

$$\mu(x) = \nu(y), \quad \mu_1(x) = \nu_1(y), \quad \mu_2(x) = \nu_2(y), \dots, \quad \mu_n(x) = \nu_n(y), \dots.$$

Puisque le changement simple des variables transforme la suite des fonctions

$$x, \quad \mu(x), \quad \mu_1(x), \quad \mu_2(x), \dots, \quad \mu_n(x), \dots \tag{5}$$

dans la suite des fonctions

$$x(y), \quad \nu(y), \quad \nu_1(y), \quad \nu_2(y), \dots, \quad \nu_n(y), \dots,$$

les fonctions de la première suite doivent posséder toutes les propriétés des fonctions de la seconde indiquées dans le n.° 1.

THÉORÈME. — *Toute fonction régulière à croissance très lente vérifie l'égalité*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y[x + ax \log x \log_2 x \dots \log_n x]}{y(x)} = 1,$$

a *étant un nombre positif quelconque et* n *un entier positif quelconque.*

En posant

$$z(x) = \log x \log_2 x \dots \log_n x, \quad \varphi(x) = \frac{y[x + axz(x)]}{y(x)},$$

on trouve comme plus haut (n.° 2. Théorème 2)

$$(6) \qquad 1 < \varphi(x) < 1 : \left\{ 1 - \frac{a}{1 + \theta a z(x)} \cdot \frac{z(x)}{\mu[x + \theta a x z(x)]} \right\}, \qquad (0 < \theta < 1),$$

si

$$\frac{a}{1 + \theta a z(x)} \cdot \frac{z(x)}{\mu[x + \theta a x z(x)]} < 1.$$

Or, à partir d'une certaine valeur de x, on a

$$\frac{a}{1 + \theta a z(x)} < a.$$

D'autre part, la fonction $\mu(x)$ étant toujours croissante, nous avons

$$\frac{z(x)}{\mu[x + \theta a x z(x)]} < \frac{z(x)}{\mu(x)}.$$

Mais la propriété 6 du n.° 1, qui est applicable aussi, comme nous venons de le voir, à la suite des fonctions (5), nous donne

$$\lim_{x=\infty} \frac{\mu_n(x) \log x \log_2 x \ldots \log_n x}{\mu(x)} = 1.$$

Donc

$$\lim_{x=\infty} \frac{z(x)}{\mu(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{\mu_n(x) \log x \log_2 x \ldots \log_n x}{\mu(x)} \cdot \lim_{x=\infty} \frac{1}{\mu_n(x)} = 0,$$

et, par conséquent

$$\lim_{x=\infty} \frac{z(x)}{\mu[x + \theta a x z(x)]} = 0.$$

Les inégalités (6) nous donnent alors

$$\lim_{x=\infty} \varphi(x) = 1.$$

Sulla curvatura delle varietà degli spazî riemanniani.

Memoria di MARIO CALONGHI (a Genova).

Sunto. - *L'A. tratta della curvatura media e relativa di una varietà in ambienti riemanniani: poste in luce notevoli disuguaglianze e una nuova definizione della curvatura media, introduce una* varietà centrale *ed una* quadrica di curvatura *associate ad ogni punto della varietà e ne dà proprietà notevoli.*

INTRODUZIONE

Della curvatura totale e della curvatura media, invarianti fondamentali nella teoria delle superficie dello spazio euclideo a tre dimensioni, sono state date numerose generalizzazioni delle quali alcune sono ormai di uso comune, altre meno note nè frequentemente applicate.

Le relative ricerche si debbono principalmente a B. RIEMANN, A. VOSS, G. RICCI e in epoca più recente a T. LEVI-CIVITA, F. SEVERI, J. PERÈS, E. BOMPIANI, H. VERMEIL ed E. CARTAN.

Da opere dei suddetti Autori emerge una multiforme teoria della curvatura e non solo degli invarianti accennati, ma anche delle configurazioni geometriche associate all'intorno del secondo ordine del punto di una varietà.

Nella presente ricerca mi sono proposto di aggiungere alle proprietà già conosciute dei suddetti invarianti e delle indicate configurazioni alcune proprietà che credo non ancora conosciute. Naturalmente a introduzione e completamento delle proprietà stesse ho dovuto richiamare proprietà già note, talora con dimostrazioni nuove almeno in parte. In tutto lo svolgimento della ricerca ho cercato di esporre proprietà di immediato significato geometrico.

Nel primo capitolo ho introdotto le note curvature di una varietà secondo una normale in un ambiente valendomi delle ipersuperficie ottenute mediante proiezione ortogonale della varietà su spazî euclidei opportunamente scelti; tale metodo già era stato applicato dal KILLING e dal BERZOLARI [1].

---

[1] V. le opere indicate con i numeri 1 e 2 nell'elenco delle opere citate, al termine della presente Memoria. Nel seguito le citazioni verranno sempre eseguite indicando il nome dell'autore e il numero d'ordine dell'opera citata, nell'elenco stesso.

Introdotte le curvature secondo le direzioni normali nel modo suddetto, ne risulta immediatamente che esse e la curvatura relativa all'ambiente, che se ne deduce in modo ben noto, rimangono invariate per proiezioni ortogonali della varietà su di una varietà tangente, proposizione che credo sia stata prima d'ora dimostrata solamente nel caso particolare nel quale la varietà è una curva, benchè da tale caso particolare si possa dedurre il teorema generale.

In un secondo capitolo ho data una nuova definizione della curvatura media che consiste in sostanza in una estensione di una mia proposizione sulla curvatura media delle superficie. Ho poi definita, mediante i centri principali di curvatura su d'una normale, una varietà algebrica associata a ciascun punto d'una varietà; essa era stata introdotta in modi apparentemente differenti da diversi autori tra i quali citerò H. KÜHNE e G. VITALI; ho mostrato la coincidenza delle varie definizioni e ho dato una nuova proprietà della varietà suddetta. In seguito ho ricavato dalla suddetta varietà l'esistenza, nello spazio normale alla varietà, di una quadrica che ho detto « *di curvatura* » che ha proprietà notevoli. Tra l'altro si esprime mediante tale quadrica, e con una sola condizione geometrica, che una varietà è minima in un ambiente estendendo così il caso più generale nna proprietà della « conica del KOMMERELL » associata ad una superficie d'uno spazio euclideo a quattro dimensioni.

I. Curvature secondo una normale. Proiezioni di una varietà su di un'altra. Relazioni tra curvature. Nuova definizione della curvatura media.

1. Si consideri uno spazio curvo ad m dimensioni e la sua metrica (definita) sia determinata dall'elemento lineare $\sum\limits_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta} dy_\alpha dy_\beta$ (¹); in S_m sia immersa una varietà V_n ad n dimensioni (si suppone, naturalmente, $n < m$ e $n \geq 2$ salvo avviso in contrario) e siano:

$$y_\alpha = y_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

le espressioni delle coordinate dei punti di V_n in S_m in funzione delle coor-

(¹) Qui e nel seguito, salvo indicazione in contrario si intenderà che gli indici rappresentati con lettere greche varino da 1 ad m, e quelli rappresentati con lettere latine da 1 ad n.

dinate curvilinee x_i. È noto che, ponendo:

$$a_{ij} = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial y_\beta}{\partial x_j} \tag{2}$$

la metrica di V_n riesce determinata dall'elemento lineare $\sum_{i,j} a_{ij} dx_i dx_j$.

Fissato un punto P di V_n indicheremo con σ_m lo spazio euclideo tangente ad S_m in P e con τ_n lo spazio euclideo tangente a V_n nello stesso punto. Indicheremo poi con η^α i parametri, in S_m, di una direzione (η) tangente in P ad S_m e ivi normale a V_n.

Fissata una linea Γ per P su V_n e detti dx_i gli accrescimenti delle x_i lungo Γ, ad essi corrispondono determinati accresciment dy_α delle y_α e tali accrescimenti individuano un vettore tangente a Γ. È noto [1] che il differenziale assoluto $\overline{d}(dy_\alpha)$ di codesto vettore lungo la linea Γ ha in S_m e normalmente a V_n le componenti $\sum_{i,j} \Omega^\alpha_{ij} dx_i dx_j$ ove s'intende:

$$\Omega^\alpha_{ij} = y_{\alpha|ij} + \sum_{\gamma,\delta} \Gamma^\alpha_{\gamma\delta} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_i} \frac{\partial y_\delta}{\partial x_j} \tag{3}$$

rappresentando con $y_{\alpha|ij}$ la derivata seconda covariante di y_α con riferimento alla forma differenziale quadratica $\sum_{i,j} a_{ij} dx_i dx_j$. Il sistema Ω^α_{ij} è il *tensore di curvatura euleriana* di V_n in S_m.

Sia R_N uno spazio euclideo ad N dimensioni nel quale può sempre pensarsi immerso lo spazio S_m; dette z_A $(A = 1, 2, \dots, N)$ coordinate cartesiane ortogonali in R_N e Ω^A_{ij}, $\Omega^A_{\alpha\beta}$ i tensori di curvatura euleriana di V_n ed S_m in R_N, della relazione:

$$\frac{\partial z_A}{\partial x_i} = \sum_\alpha \frac{\partial z_A}{\partial y_\alpha} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_j} \tag{4}$$

con l'uso dell'operatore D di *derivazione covariante per tensori a più serie di indici* [2] si ricava:

$$D_j \frac{\partial z_A}{\partial x_i} = \sum_{\alpha,\beta} D_\beta \frac{\partial z_A}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial y_\beta}{\partial x_j} + \sum_\alpha \frac{\partial z_A}{\partial y_\alpha} \cdot D_j \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} \tag{5}$$

donde risulta [3]:

$$\Omega^A_{ij} = \sum_{\alpha,\beta} \Omega^A_{\alpha\beta} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial y_\beta}{\partial x_j} + \sum_\alpha \Omega^\alpha_{ij} \frac{\partial z_A}{\partial y_\alpha}. \tag{6}$$

---

(1) V. p. e. D. J. STRUIK (6), pag. 92.

(2) V. E. BORTOLOTTI (10); ed anche (18), pag. 445 e segg.

(3) V. E. BORTOLOTTI (10), pag. 135.

Stabilito quanto sopra si ponga [1]:

$$\omega_{\underset{\eta}{ij}} = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha}_{ij}\eta^{\beta} \tag{7}$$

e si riconoscerà immediatamente che la forma quadratica $\sum_{i,j} \omega_{\underset{\eta}{ij}} dx_i dx_j$ rappresenta la componente scalare del vettore $\sum_{i,j} \Omega^{\alpha}_{ij} dx_i dx_j$ secondo la normale (η) della varietà V_n. Se nella (6) osserviamo che, riguardando gli indici α, β come indici ordinali, le $\Omega^{A}_{\alpha\beta}$ sono vettori di R_N normali ad S_m, risulta che i componenti di Ω^{A}_{ij} e di Ω^{α}_{ij} secondo (η) coincidono; in conseguenza le $\omega_{\underset{\eta}{ij}}$ non mutano quando si assume come ambiente R_N in luogo di S_m; e ciò vale anche quando si sostituisca all'ambiente S_m un altro ambiente riemanniano qualunque che contenga S_m.

In definitiva: *la forma quadratica* $\sum_{i,j} \omega_{\underset{\eta}{ij}} dx_i dx_j$ *che denomineremo,* con E. BOMPIANI [1], « *seconda forma fondamentale di* V_n *secondo la normale* (η) » *è pienamente determinata la* V_n *e da codesta normale* [2].

2. Fissata che sia la direzione (η) tangente ad S_m e normale a V_n rimane individuato lo spazio euclideo $\pi(\eta)$ ad $n+1$ dimensioni che contiene τ_n ed (η); lo indicheremo col nome di *spazio euclideo normale a* V_n *secondo la normale* (η).

Pensando S_m immerso in uno spazio euclideo qualunque potremo proiettare i punti dell'intorno del 2° ordine di P in V_n su $\pi(\eta)$. Dimostreremo che l'insieme di punti così ottenuto costituisce una varietà — determinata solamente nell'intorno del 2° ordine del punto P — ad n dimensioni su $\pi(\eta)$ cioè una ipersuperficie in tale spazio euclideo; la indicheremo con W_n e le daremo il nome di *ipersuperficie associata a* V_n *secondo la normale* (η).

Per l'accennata dimostrazione opereremo in un ambiente euclideo R_N nel quale penseremo immerso S_m, ma per le osservazioni fatte al paragrafo precedente il risultato si riferirà inalterato all'ambiente S_m.

Sia Q un punto dell'intorno del 2° ordine di P su V_n; si può scrivere:

$$Q = P + \sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i} dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j .$$

---

(1) V. E. BOMPIANI (5), pag. 1132.
(2) Cfr. anche D. J. STRUIK (6), pag. 112.

Detta H la proiezione di Q su $\pi(\eta)$, si avrà:

$$(Q-H)\times\frac{\partial P}{\partial x_k}=0,\quad (Q-H)\times\eta=0 \qquad (k=1,2,\dots,n) \tag{8}$$

ove si indica con η il vettore unitario normale a V_n in P secondo la direzione (η). D'altra parte deve essere:

$$H=P+\sum_i \alpha_i\frac{\partial P}{\partial x_i}+\beta\eta \tag{9}$$

onde, sostituendo nella (8) e ricordando che è $a_{ik}=\frac{\partial P}{\partial x_i}\times\frac{\partial P}{\partial x_k}$, $\begin{bmatrix} ij \\ k\end{bmatrix}=\frac{\partial^2 P}{\partial x_i\partial x_h}\times$ $\times\frac{\partial P}{\partial x_h}$, risulta agevolmente:

$$\begin{cases} a_{ik}(dx_i-\alpha_i)+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\begin{bmatrix} ij \\ k\end{bmatrix}dx_i\,dx_k=0 \\ \frac{1}{2}\eta\times\sum_{i,j}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i\partial x_j}dx_i\,dx_j=\beta. \end{cases} \tag{10}$$

Dalle relazioni precedenti si trae senza difficoltà:

$$H=P+\sum_i\left(dx_i+\frac{1}{2}\sum_{j,l}\Gamma^i_{jl}dx_j dx_l\right)\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\eta\sum_{i,j}\underset{\eta}{\omega_{ij}}dx_i\,dx_j. \tag{11}$$

Dalla (11) segue immediatamente che la metrica di W_n è *tangente* [1] in P alla metrica di V_n, perciò W_n è effettivamente una ipersuperficie di $\pi(\eta)$. La sua seconda forma differenziale è il componente scalare secondo la direzione (η) del vettore $\sum_{i,j}\Omega^\alpha_{ij}dx_i\,dx_j$ per le osservazioni fatte al paragrafo precedente, cioè ancora $\sum_{i,j}\underset{\eta}{\omega_{ij}}dx_i\,dx_j$.

3. L'equazione in ρ, di tipo secolare:

$$|\underset{\eta}{\omega_{ij}}-\rho a_{ij}|=0 \qquad (i,j=1,2,\dots,n) \tag{12}$$

determina le curvature principali della ipersuperficie W_n in P; tali cur-

[1] V. E. CARTAN (11), pag. 90. Si osservi anzi che dalla (11) risulta

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial x_j}=\eta\underset{\eta}{\omega_{ij}}+\sum_l\Gamma^l_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_l}\quad\text{donde segue:}\quad\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial x_j}\times\frac{\partial H}{\partial x_k}=\sum_l\Gamma^l_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_l}\times\frac{\partial P}{\partial x_k}$$

perciò i simboli di CHRISTOFFEL relativi a V_n e W_n in P sono ordinatamente uguali; in conseguenza sono uguali le derivate dei coefficienti corrispondenti delle metriche di codeste varietà e perciò le metriche stesse risultano *osculatrici* secondo E. CARTAN (Op. cit. ibid.).

vature si possono riferire a V_n col tramite della normale (η) e si riconosce che esse rappresentano le note [1] curvature principali di V_n in S_m secondo la normale (η).

Ricordiamo che la somma delle suddette curvature si chiama *curvatura media* di V_n secondo la normale (η) e la somma dei loro prodotti due a due si dice *curvatura relativa* di V_n rispetto all'ambiente S_m, secondo la normale (η).

Per $n = 1$, la V_n è una curva di uno spazio riemanniano e si riconosce che la curvatura media secondo una sua normale è la componente secondo la normale stessa della curvatura geodetica (vettoriale) della curva.

Indicando con $\underset{\eta}{M}$ la curvatura media secondo la normale (η), se ne ritrova l'espressione mediante la (12) e risulta:

$$\underset{\eta}{M} = \sum_{i,j} a^{ij} \underset{\eta}{\omega}_{ij}. \tag{13}$$

Analogamente si ottiene l'espressione della curvatura relativa secondo (η):

$$\underset{\eta}{K} = \frac{1}{a} \sum_{(ij),(hk)} A_{ij,hk} (\underset{\eta}{\omega}_{ih} \underset{\eta}{\omega}_{jk} - \underset{\eta}{\omega}_{jh} \underset{\eta}{\omega}_{ik}) \tag{13'}$$

ove la sommatoria si intende estesa alle combinazioni degli indici di ciascuna coppia e $A_{ij,hk}$ rappresenta il minore del discriminante di V_n che si ottiene sopprimendo le righe e le colonne indicate dagli indici.

Tenuto conto della (7), si ottiene facilmente la nota espressione della curvatura relativa di V_n secondo (η) [2]:

$$\underset{\eta}{K} = \frac{1}{a} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \sum_{(ij),(hk)} A_{ij,hk} b_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta} (\Omega^{\alpha}_{ih} \Omega^{\beta}_{jk} - \Omega^{\alpha}_{jh} \Omega^{\beta}_{ik}) \eta^{\gamma} \eta^{\delta}. \tag{14}$$

4. Sia V'_{μ} $(m > \mu \geqq n)$ una varietà immersa in S_m e tangente a V_n in P; se, proiettando i punti di V_n, nell'intorno del secondo ordine di P, su V'_{μ} si ottiene una varietà V''_n è chiaro che le varietà associate a V_n secondo le direzioni normali in P coincideranno con le analoghe varietà associate a V''_n secondo le medesime normali.

---

[1] V. p. e. D. J. Struik (6), pag. 128 e segg.

[2] Le formule (13), (13'), (14) sono ben note [v. p. e. D. J. Struik (6), pag. 68 e pag. 114], ma le abbiamo richiamate per precisare le notazioni e i coefficienti numerici, che talora vengono diversamente fissati.

Da ciò risulta che una varietà e la sua proiezione ortogonale su di una varietà tangente hanno, nel punto di contatto, i medesimi raggi di curvatura secondo ciascuna normale e perciò la medesima curvatura media e la medesima curvatura relativa.

In conseguenza saranno uguali per le due varietà le somme dei quadrati delle curvature medie secondo $m-n$ normali due a due ortogonali, cioè i quadrati delle curvature medie nel punto di contatto (1) e le normali di curvatura media coincideranno (2).

Anche le somme delle curvature relative secondo $m - n$ normali due a due ortogonali saranno uguali, e aggiungendo a ciascuna delle dette somme la curvatura associata dello spazio ambiente secondo la giacitura tangente comune si otterranno somme uguali.

Si conclude: *una varietà e la sua proiezione ortogonale su d'una varietà ad essa tangente in un punto hanno ivi curvature medie relative ed assolute uguali e normali di curvatura media coincidenti.*

5. Considerato un sistema di direzioni (η_p) $(p=1, 2,\dots, m-n)$ tangenti ad S_m, normali a V_n e due a due ortogonali indicheremo con $\rho_{r,p}$ l'r-esimo raggio principale sulla p-esima normale. Dette K ed M le curvature relativa e media di V_n in P avremo:

$$M^2=\sum_{1}^{m-n}{}_p\left(\sum_{1}^{n}{}_r\frac{1}{\rho_{r,p}}\right)^2,\quad K=\sum_{1}^{m-n}{}_p\sum_{(rs)}\frac{1}{\rho_{r,p}\rho_{s,p}}. \tag{15}$$

Dalle (15) si ricava:

$$M^2-2K=\sum_{1}^{m-n}{}_p\sum_{r}\frac{1}{\rho_{r,p}^2}\geq 0. \tag{16}$$

Tenuta presente l'equazione (12) risulta che il segno di uguaglianza nella (16) non può sussistere se non quando sia:

$$\sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta}\Omega_{hk}^{\alpha}\eta_p^{\beta}=0. \qquad \begin{pmatrix} h,k=1,2,\dots n \\ p=1,2,\dots,m-n \end{pmatrix} \tag{17}$$

(1) Cfr. E. BOMPIANI (5), pag. 1132 e segg.

(2) In particolare si può scegliere per V_n una curva, per V_μ' uno spazio euclideo tangente alla curva V_1 nel punto P e contenuto nello spazio euclideo tangente ad S_m in P e infine come normale comune la normale di curvatura geodetica (alla quale si riduce, per $n=1$, la normale di curvatura media) ed otterremo una proposizione dimostrata da E. GUGINO (20), cfr. T. BOGGIO (21). Si può ancora osservare che dalla proprietà così particolarizzata risulta la proprietà più generale che si è esposta poichè la proiezione ortogonale considerata risulta una *applicabilità di seconda specie* (secondo E. BOMPIANI) e perciò conserva tutti gli invarianti che dipendono dall'intorno del secondo ordine del punto sulla varietà.

Dalla (17) si trae:

$$\sum_{\alpha} b_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha}_{hk} = 0. \tag{18}$$

Infatti alle (17) si possono aggiungere altre n condizioni analoghe corrispondenti ad n direzioni tangenti a V_n e tra di loro indipendenti; per esse le espressioni analoghe ai primi membri delle (17) sono sempre nulle; si conclude che i primi membri delle (18), dovendo soddisfare ad m equazioni lineari omogenee e indipendenti sono nulli.

Dalle (18) risulta evidentemente che le Ω^{α}_{hk} di V_n in S_m sono tutte nulle, cioè che la varietà V_n è totalmente geodetica in S_m (1). Adunque: *data una varietà in un ambiente curvo, il quadrato della sua curvatura media non è minore del doppio della curvatura relativa della varietà.*

In un ambiente euclideo la curvatura relativa coincide con la curvatura assoluta, perciò: *data una varietà non euclidea in un ambiente euclideo, il doppio della sua curvatura assoluta è minore del quadrato della curvatura media della varietà.*

Si ha ancora: *condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà sia totalmente geodetica nell'ambiente è che la sua curvatura relativa sia la metà del quadrato della curvatura media in ogni punto della varietà stessa.*

Riguardo all'ultima proprietà enunciata è bene notare che non appena essa sia soddisfatta le due curvature, media e relativa, risultano nulle.

Ricordando che le varietà minime in un ambiente hanno in ogni punto curvatura media nulla (2) risulta ancora: *la curvatura assoluta di una varietà minima non è mai maggiore della curvatura dell'ambiente secondo la giacitura tangente comune ad esso ed alla varietà.*

Infatti, detta R_τ la curvatura assoluta dell'ambiente secondo τ_n ed R la curvatura assoluta di V_n si ha $K = R - R_\tau$ perciò, facendo $M = 0$ nella (16) risulta di necessità $R \leq R_\tau$ e il segno di uguaglianza vale solamente per le varietà totalmente geodetiche (e le caratterizza).

In particolare: *le varietà minime non euclidee di uno spazio euclideo hanno curvatura assoluta negativa.*

6. La curvatura media di una varietà secondo una normale si può definire altrimenti, estendendo alle varietà d'uno spazio riemanniano una proprietà delle superficie dello spazio ordinario (3).

---

(1) V. E. BOMPIANI (5), pag. 1120.

(2) Ibid., pag. 1138 e segg.

(3) V. M. CALONGHI (12), e per altre dimostrazioni L. PELOSI (13), M. MANARINI (14): per l'estensione alle ipersuperficie degli spazî euclidei v. P. BURGATTI (15).

Sia ω una varietà ad $n-1$ dimensioni contenuta in V_n e priva di singolarità in un intorno del punto P; scomposta ω in parti infinitesime $(n-1)$-dimensionali e scelto con legge qualsiasi un punto in ciascuna parte potremo condurre per il punto stesso un vettore tangente a V_n ed ivi normale ad ω e di grandezza uguale all'estensione della parte nella quale il punto è stato scelto.

Fissato che sia il verso da attribuirsi al vettore in un punto tale verso rimane determinato per continuità in tutti i punti di ω.

In tali condizioni la somma (integrale) di tutte le componenti dei suddetti vettori su di una normale (η) a V_n è un ben determinato funzionale delle coordinate x_i su ω o in altre parole una *funzione della varietà* ω ([1]).

Ciò posto si ha: *la derivata funzionale, nel punto* P, *della suddetta funzione della varietà* ω *è ta curvatura media di* V_n *secondo la normale* (η).

Per la dimostrazione considereremo una elemento n-dimensionale di V_n e indicheremo con $\Delta\omega$ l'ipervolume che vi è racchiuso, mentre indicheremo con $\Delta\omega$ il suo contorno $(n-1)$-dimensionale (ed anche la sua estensione); supporremo naturalmente che $\Delta\Omega$ sia privo di punti singolari.

Dette x_i le coordinate di P in V_n le coordinate di un punto P' corrente su $\Delta\omega$ avranno espressioni della forma $x_i+\xi_i$ ove la ξ_i risulteranno infinitesimi dei quali, nel corso dei calcoli, trascureremo sempre i quadrati.

Al variare di P' su $\Delta\Omega$ le ξ_i si potranno considerare come funzioni di $n-1$ coordinate t_r $(r=1, 2, \dots, n-1)$ onde, indicato con $\sum_{r,s}^{n-1} c_{rs} dt_r dt_s$ l'elemento lineare di $\Delta\omega$, si avrà:

$$c_{rs}=\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial\xi_i}{\partial t_r}\frac{\partial\xi_j}{\partial t_s}. \tag{1}$$

Detto c il discriminante della forma quadratica $\sum_{r,s}^{n-1} c_{rs} dt_r dt_s$ si ricava ([2]):

$$c=a\sum_{h,k} a^{hk}X_h X_k \tag{2}$$

ove a rappresenta il discriminante di V_n in P e X_h è il minore della matrice $\left\|\frac{\partial\xi_i}{\partial t_r}\right\|$ che si ricava sopprimendo la colonna h-esima e disponendo le rimanenti per indici crescenti (ciclicamente) a partire da h. Precisamente:

$$X_h=\frac{\partial(\xi_{h+1},\dots,\xi_n,\dots,\xi_{h-1})}{\partial(t_1,t_2,\dots,t_{n-1})}. \qquad (h=1, 2, \dots, n) \tag{3}$$

È noto, e risulta ancora dalla (2) che le X_p non possono essere tutte nulle.

([1]) V. V. VOLTERRA (4).
([2]) V. W. FELLER (16), pag. 635.

Fisseremo il verso della tangente di V_n in P' che è normale a $\Delta\omega$ convenendo che essa insieme con le linee coordinate di $\Delta\omega$ formi un n-edro diverso uguale a quello dell'n-edro delle linee coordinate di V_n in P, e indicheremo i parametri della suddetta tangente nella varietà V_n e nel punto P' con u'^i.

Le u'^i debbono soddisfare le condizioni:

(4) $$\sum_{i,j} a'_{ij} \frac{\partial \xi_j}{\partial t_s} u'^i = 0 \qquad (s = 1, 2, ..., n-1)$$

ove si rappresentano con a'_{ij} i valori $a_{ij} + da_{ij}$ dei coefficienti della metrica di V_n in P'. Le (4) sono equazioni lineari omogenee nelle u'^i e sono indipendenti; infatti un minore qualunque di ordine $n-1$ della matrice dei coefficienti del sistema (4) si può ottenere sopprimendo una colonna nella matrice stessa; detto h l'indice della colonna soppressa e disposte in ordine ciclico le colonne rimanenti il minore assume l'espressione

$$\left| \sum_j a'_{ij} \frac{\partial \xi_j}{\partial t_s} \right|. \qquad \begin{pmatrix} i = h+1, ..., n, ..., h-1 \\ s = 1, 2, ..., n-1 \end{pmatrix}$$

Tale minore è il prodotto delle matrici:

$$\| a'_{ij} \|, \quad \left\| \frac{\partial \xi_j}{\partial t_s} \right\| \qquad \begin{pmatrix} j = 1, 2, ..., n \\ s = 1, 2, ..., n-1 \\ i = h+1, ..., n, ..., h-1 \end{pmatrix}$$

onde esso vale:

(5) $$a' \sum_i a'^{ih} X_i. \qquad (h = 1, 2, ..., n)$$

Se tutti i minori di ordine $n-1$ della matrice del sistema (4) fossero nulli, si avrebbe:

$$\sum_i a'^{ih} X_i = 0. \qquad (h = 1, 2, ..., n)$$

Poichè le X_i non sono tutte nulle risulterebbe $| a'^{ih} | = 0$ e ciò è assurdo.

Detto R un fattore indipendente da h si ricava dalle (4) e (5):

(6) $$u'^h = R \sum_i a'^{ih} X_i$$

Donde segue:

$$1 = \sum_{h,k} a'_{hk} u'^h u'^k = R^2 \sum_{i,j,h,k} a'_{hk} a'^{ih} a'^{jk} X_i X_j = R^2 \sum_{i,h} a'^{ih} X_i X_h .$$

Da quest'ultima relazione, tenuto conto della (2), risulta in prima approssimazione rispetto alle ξ_i:

$$R = \pm\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} - \frac{1}{2\sqrt{c}} \sum_{i,h} X_i X_h da^{ih}\right). \tag{7}$$

Per le ipotesi fatte circa il verso da attribuirsi alla direzione (u') risulta che nella (7) vale il segno $+$, cosicchè, indicando con A_k quantità indipendenti dalle ξ_i risulta:

$$u'^h = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} \sum_i a^{ih} X_i + \sum_k A_k \xi_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

Detti ξ'^α i parametri della direzione (u') in S_m si ha:

$$\xi'^\alpha = \sum_h \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_h}[x_h + \xi_h] u'^h \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{9}$$

ove $\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_h}[x_h + \xi_h]$ sta ad indicare il valore della $\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_h}$ in P'. Sempre in prima approssimazione rispetto alle ξ risulta:

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_h}[x_h + \xi_h] = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_h} + \sum_i \frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x_h \partial x_i} \xi_i = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_h} + \sum_i y_{\alpha\, hi} \xi_i + \sum_{i,k} \Gamma^k_{hi} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_k} \xi_i .$$

Sostituendo i valori ottenuti nelle (9) e tenendo conto delle (8) risulta:

$$\zeta'^\alpha = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} \sum_{j,h} a^{jh} \left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_h} + \sum_{i,k} \Gamma^k_{hi} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_k} \xi_i + \sum_i y_{\alpha|hi} \xi_i\right) X_j + \sum_{j,h} A_j \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_h} \xi_j .$$

Per eseguire la proiezione del vettore unitario (ζ') sulla direzione (η) trasporteremo tale vettore per parallelismo, vincolato alla metrica di S_m, da P' in P ed otterremo per le componenti ζ^α del vettore così trasportato le espressioni:

$$\zeta^\alpha = \zeta'^\alpha + \sum_s \sum_{\gamma,\delta} \Gamma^\alpha_{\gamma\delta} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_s} \zeta'^\alpha \xi_s = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} \sum_{j,h,s} a^{jh} \Omega^\alpha_{sh} \xi_s X_j + \sum_h P_h \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_h}$$

ove le P_h sono fattori che non importa conoscere poichè i vettori tangenti a V_n si annullano per proiezione su (η).

Mediante le espressioni ottenute si ricava la componente cercata:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} \sum_{i,j,h} \Omega^\alpha_{jh} a^{ih} b_{\gamma\beta} \eta^\beta \xi_j X_i . \tag{10}$$

L'accrescimento del funzionale studiato sull'elemento $\Delta\omega$ è dunque dato da:

$$(11)\qquad \int_{\Delta\omega} \sqrt{a} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{i,j,h} b_{\alpha\beta} a^{ih} \Omega^{\alpha}_{jh} \eta^{\beta} \xi_j \frac{\partial(\xi_{i+1}, \ldots, \xi_n, \ldots, \xi_{i-1})}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})} dt_1 dt_2 \ldots dt_{n-1} =$$

$$= \sum_i \int_{\Delta\omega} \sqrt{a} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{h,j} b_{\alpha\beta} a^{ih} \Omega^{\alpha}_{jh} \eta^{\beta} \xi_j d\xi_{i+1} \ldots d\xi_n \ldots d\xi_{i-1}.$$

L'integrale ottenuto si può trasformare [1] in un integrale esteso al campo interno $\Delta\Omega$ dell'elemento $\Delta\omega$; facendo poi tendere a zero in tutte le dimensioni l'elemento stesso risulta:

$$\lim \frac{1}{\Delta\Omega} \int_{\Delta\Omega} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{i,h} a^{ih} b_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha}_{ih} \eta^{\beta} \sqrt{a}\, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n = M_{\eta}$$

conformemente al teorema enunciato.

II. Varietà centrale. Quadrica di curvatura. Indicatrice delle curvature secondo una normale.

1. Sia Σ uno spazio euclideo a μ dimensioni e in esso sia stabilito un sistema di coordinate cartesiane ortogonali X_p $(p = 1, 2, \ldots, \mu)$. Detta g una curva di Σ e P un suo punto, considereremo una ipersfera di Σ che passi per P e indicheremo con a_p le coordinate del suo centro, con R il suo raggio, con α_p i coseni direttori del raggio che proietta P dal centro dell'ipersfera, volto verso l'interno di questa, infine con ρ il raggio di curvatura di g in P e con β_p i suoi coseni direttori.

L'equazione dell'ipersfera rispetto al considerato sistema cartesiano sarà:

$$(1)\qquad \sum_1^{\mu}{}_p (X_p - a_p)^2 = R^2.$$

Vogliamo determinare le condizioni necessarie e sufficienti perchè la curva g sia osculatrice all'ipersfera in P; a tal fine, pensate X_p come funzioni dell'arco s di g esprimeremo che in P oltre alla (1) sono soddisfatte le equazioni che risultano dalla (1) stessa derivandone due volte i due membri rispetto ad s.

Tenuto conto delle notazioni prestabilite risultano le condizioni:

$$(2)\qquad \sum_1^{\mu}{}_p \alpha_p \frac{dX_p}{ds} = 0, \quad \rho = R \sum_1^{\mu}{}_p \alpha_p \beta_p.$$

---

[1] V. E. CARTAN (7), pag. 66 e segg.

La prima equazione esprime la nota condizione di ortogonalità del raggio dell'ipersfera con la tangente alla curva e la seconda indica che il centro di curvatura della curva deve coincidere con la proiezione del centro dell'ipersfera sulla normale principale alla curva.

2. Definiremo: *varietà centrale associata ad una varietà in un ambiente ed in un punto è il luogo geometrico dei centri principali situati sulle normali uscenti da quel punto.*

Consideriamo le geodetiche della varietà passanti per il punto; riconosceremo che su ciascuna normale (η) esiste un punto che è centro di una ipersfera, dello spazio 2-osculatore a V_n, osculatrice ad una determinata geodetica g; al variare di g varia il centro corrispondente. Si ha: *i valori estremi del raggio dell'ipersfera sono i raggi principali di curvatura sulla data normale e i centri corrispondenti sono i centri principali cioè i punti comuni alla varietà centrale e alla normale data.*

Infatti, detti R il raggio dell'ipersfera, ρ il raggio di curvatura di g ed s il suo arco, applicheremo la condizione indicata al paragrafo precedente indicando con ζ^β i parametri della normale principale di g nell'ambiente S_m. Si ha intanto:

$$\zeta^\beta = \rho\left(\frac{d^2y_\beta}{ds^2} + \sum_{\gamma,\delta} \Gamma^\beta_{\gamma\delta}\frac{dy_\gamma}{ds}\frac{dy_\delta}{ds}\right) = \rho\left(\sum_{i,j}\frac{\partial^2 y_\beta}{\partial x_i \partial x_j}u^i u^j + \right. \tag{3}$$

$$\left. + \sum_h \frac{\partial y_\beta}{\partial x_h}\frac{d^2x_h}{ds^2} + \sum_{\gamma,\delta}\Gamma^\beta_{\gamma\delta}\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_i}\frac{\partial y_\delta}{\partial x_j}u^i u^j\right)$$

ove si indicano con u^i i parametri della tangente a g in P.

Tenuto conto delle equazioni caratteristiche delle geodetiche, le (3) divengono:

$$\zeta^\beta = \rho \sum_{i,j} \Omega^\beta_{ij} u^i u^j. \tag{4}$$

La condizione di ortogonalità è soddisfatta per ipotesi e rimane la sola condizione:

$$R\rho \sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j} b_{\alpha\beta}\Omega^\beta_{ij}\eta^\alpha u^i u^j = \rho$$

donde risulta:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i,j} \underset{\eta}{\omega_{ij}} dx_i dx_j. \tag{5}$$

I valori estremi, o almeno stazionarî, di R sono le radici dell'equazione:

$$|\, a_{ij} - R\underset{\eta}{\omega_{ij}} \,| = 0 \tag{6}$$

e perciò coincidono con i raggi principali.

La formula (6) permette di riconoscere che la varietà centrale sopra definita non differisce sostanzialmente dalla varietà E_p associata al punto generico di una varietà dello spazio hilbertiano nel modo già indicato da G. VITALI (1); d'altronde dalla dimostrazione esposta risulta che gli iperpiani dello spazio normale a V_n che sono perpendicolari alle normali principali delle geodetiche uscenti da P segano le singole normali per P in punti che appartengono alla varietà centrale quando la loro distanza da P è un estremo ed è appunto questa una proprietà caratteristica della varietà indicata con E_p nella memoria citata (1).

Per le curve dello spazio ordinario la varietà centrale è lo spigolo di regresso della sviluppabile polare.

Infine, se la varietà è immersa in uno spazio euclideo la varietà centrale, al variare del punto P, descrive una varietà dello spazio ambiente la quale si riduce all'ordinaria evoluta se V_n è una ipersuperficie.

Per le varietà immerse in uno spazio euclideo si deve al KÜHNE (2) la definizione di una varietà *(Krümmungspur)* che non è se non la varietà centrale associata ad un punto, nel caso considerato.

Se si cercano i punti comuni alla varietà euclidea normale a V_n in P con la varietà normale in un punto P' infinitamente prossimo a P si trova, in generale un punto od un intero spazio euclideo quando $m \geqq 2n$, in tal caso la varietà definita dal KÜHNE e il luogo geometrico dei suddetti spazî (o punti) di intersezione.

Nel caso più generale si cerchino i punti dei due spazî la cui distanza è minima; se esiste intersezione tutti i suoi punti, e quelli soltanto, soddisfano a tale condizione; se l'intersezione non esiste si trova, in generale, un punto in ciascuno spazio che risponde al problema.

Si riconosce che tali punti sono congiunti da segmenti normali ai due spazî, e, inversamente, le normali comuni ai due spazî segano questi in punti la cui distanza è un minimo (relativo, proprio o improprio) della distanza dei punti dei due spazî.

La varietà definita dal KÜHNE è appunto il luogo geometrico di codesti punti d'uno spazio normale che sono « *i più prossimi* » agli spazî normali infinitamente vicini.

Supponiamo dunque che l'ambiente S_n sia *euclideo*.

---

(1) V. G. VITALI (17), pag. 161 e 162.

(2) V. H. KUHNE (3), per indicazioni bibliografiche sull'argomento v. J. A. SCHOUTEN (9), pag. 185 e anche D. J. STRUIK (6), pag. 106.

3. Nel punto P di V_n fissiamo un sistema di normali due a due ortogonali e siano η_p $(p=1, 2, \ldots, m-n)$ i vettori unitarî che hanno tali normali come direzioni; nel punto P' di coordinate $x_i + dx_i$ considereremo un sistema di normali due a due ortogonali η_p' tali che le differenze $\eta_p' - \eta_p$ siano infinitesime del primo ordine rispetto alle dx_i.

Indicato con ν lo spazio normale a V_n in P e con ν' l'analogo spazio in P', siano Q e Q' due punti di ν, ν' tali che la loro congiungente sia normale comune dei due spazî. Dette ξ_p, ξ_p' le coordinate cartesiane di Q, Q' rispetto ai sistemi (η_p), (η_p') avremo in prima approssimazione:

$$(7)\qquad \begin{cases} Q = P + \sum\limits_{1}^{m\ n}{}_p\, \xi_p \eta_p \\ Q' = P + \sum\limits_i \dfrac{\partial P}{\partial x_i} dx_i + \sum\limits_{1}^{m-n}{}_p\, \xi_p' \eta_p'. \end{cases}$$

Esprimendo che $Q' - Q$ è normale a ν ed a ν' risultano le condizioni seguenti:

$$(8)\qquad \begin{cases} \left[\sum\limits_i \dfrac{\partial P}{\partial x_i} dx_i + \sum\limits_{1}^{m-n}{}_p (\xi_p' \eta_p' - \xi_p \eta_p)\right] \times \eta_q = 0 \\ \left[\sum\limits_i \dfrac{\partial P}{\partial x_i} dx_i + \sum\limits_{1}^{m-n}{}_p\, \xi_y' \eta_p' - \xi_p \eta_p\right] \times \eta_q' = 0. \end{cases} \qquad (q = 1, 2, \ldots, m-n)$$

Trascurando infinitesimi del secondo ordine risulta:

$$(9)\qquad \begin{cases} \xi_q' - \xi_q + \sum\limits_{1}^{m-n}{}_p\, \xi_q' \cdot \eta_q \times d\eta_q = 0 \\ \sum\limits_i \dfrac{\partial P}{\partial x_i} \times d\eta_q \cdot dx_i + \xi_q' - \xi_q - \sum\limits_{1}^{m-n}{}_p\, \xi_p \cdot \eta_p \times d\eta_q = 0. \end{cases}$$

Poichè la (η_p) sono due a due ortogonali si ha:

$$\eta_p \times d\eta_q + \eta_q \times d\eta_p = 0$$

e risulta:

$$(10)\qquad \sum\limits_{1}^{m-n}{}_p (\xi_p' - \xi_p) \cdot \eta_q \times d\eta_p = \sum\limits_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \times d\eta_q \cdot dx_i.$$

Se le espressioni $\eta_q \times d\eta_p$ non sono tutte nulle si ricava dalle (10) che le $\xi_p' - \xi_p$ sono nulle in prima approssimazione; se le suddette espressioni sono tutte nulle delle (9) emerge $\xi_q' - \xi_q = 0$ e si perviene alla medesima conclusione.

Potremo dunque, in prima approssimazione, sostituire il punto Q al punto Q' ed essendo $Q - P' = Q - P + P - P'$ esprimeremo che Q' P' è normale a V_n in P' mediante le condizioni:

(11) $$\left(\sum_1^{m-n}{}_p\, \xi_p \eta_p - \sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i} dx_i\right) \times \left(\frac{\partial P}{\partial x_j} + \sum_h \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_h} dx_h\right) = 0. \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

dalle quali risulta agevolmente:

(12) $$\left(\sum_1^{m-n}{}_p\, \underset{\eta_p}{\omega_{ij}}\, \xi_p - a_{ij}\right) dx_i = 0$$

e dalle (12) si trae:

(13) $$\left|\sum_1^{m-n}{}_p\, \underset{\eta_p}{\omega_{ij}}\, \xi_p - a_{ij}\right| = 0. \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

Sia R il modulo del vettore $Q - P$ e X_p i suoi coseni direttori rispetto al sistema (η_p); se si pone:

(14) $$\eta = \sum_1^{m-n}{}_p\, X_p \eta_p$$

risulta subito $\underset{\eta}{\omega_{ij}} = \sum_1^{m-n}{}_p\, X_p \underset{\eta_p}{\omega_{ij}}$ e la (13) si muta nella (6), donde si conclude che la « Krümmungspur » del Kühne è la varietà centrale.

Si osservi ancora che se si cerca il punto della normale (η) che è il più prossimo allo spazio v' si trova ancora l'equazione (6).

Si conclude: *la varietà centrale per una* V_n *in ambiente euclideo è il luogo geometrico dei punti dello spazio normale che sono i più prossimi agli spazî normali infinitamente vicini.*

I centri principali su di una normale ad una varietà sono i punti di essa i più prossimi agli spazî normali infinitamente vicini.

4. Daremo il nome di *quadrica di curvatura* alla polare di ordine $n - 2$ della varietà centrale rispetto al polo P. Essa è il luogo geometrico dei punti $P + r\eta$ che su ciascuna normale η per P soddisfano all'equazione:

(15) $$\sum_{(ij)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho_i}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho_j}\right) = 0$$

ove s'intende che ρ_i siano i raggi principali sulla normale indicata. L'equazione (15) si può scrivere:

(16) $$2\underset{\eta}{K} r^2 - 2(n-1)\underset{\eta}{M} \cdot r + n(n-1) = 0.$$

Il discriminante di codesta equazione di 2° grado si pone agevolmente sotto la forma:

$$(n-1) \sum_{i,j} \left(\frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho_j}\right)^2 \geq 0$$

donde risulta: *la quadrica di curvatura è una quadrica reale.*

Per le superficie la quadrica di curvatura coincide con la varietà centrale e per $m = 4$, $n = 2$ essa è una conica che in ambiente euclideo è nota sotto il nome di *conica del Kommerell* (¹).

Dalla (16) risulta che se $\underset{\eta}{K} = 0$ è $r = \infty$ e viceversa, perciò si ha: *condizione necessaria e sufficiente perchè la curvatura relativa di una varietà secondo una normale sia nulla è che il punto all'infinito di quella normale appartenga alla quadrica di curvatura.*

Se è $\underset{\eta}{M} = 0$ i valori di r ricavati dalla (16) sono opposti e si ricava: *condizione necessaria e sufficiente perchè la curvatura media secondo una normale sia nulla è che la corda determinata dalla quadrica di curvatura su quella normale sia bisecata dal punto della varietà.*

In conseguenza: *condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà sia minima è che per ogni suo punto la quadrica di curvatura abbia il centro nel punto stesso.*

5. L'equazione della quadrica di curvatura nello spazio ν si ricava facilmente dall'equazione (13) e precisamente si trova:

$$\sum_{(ij),(hk)} A_{ij,hk} \begin{vmatrix} \sum_1^{m-n}{}_p\, \underset{\eta_p}{\omega_{ih}}\xi_p - a_{ih} & \sum_1^{m-n}{}_p\, \underset{\eta_p}{\omega_{ik}}\xi_p - a_{ik} \\ \sum_1^{m-n}{}_p\, \underset{\eta_p}{\omega_{jh}}\xi_p - a_{jh} & \sum_1^{m-n}{}_p\, \underset{\eta_p}{\omega_{jk}}\xi_p - a_{jk} \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

ove s'intende che la sommatoria sia estesa alle combinazioni (ij), (hk) e che $A_{ij,hk}$ indichi il minore del determinante $|a_{ij}|$ che risulta sopprimendo le colonne e le righe corrispondenti agli indici.

Tenuto presente un noto teorema sui determinanti reciproci (²) ed eseguiti semplici calcoli la (17) si pone sotto la forma:

$$\sum_1^{m-n}{}_{p,q} \sum_{(ij),(hk)} (a^{ih}a^{jk} - a^{jh}a^{ik})(\underset{\eta_p}{\omega_{ih}}\underset{\eta_p}{\omega_{jk}} - \underset{\eta_p}{\omega_{jh}}\underset{\eta_p}{\omega_{ik}})\xi_p\xi_q - \\ - 2n \sum_1^{m-n}{}_p\, \underset{\eta_p}{M}\xi_p + 1 = 0. \tag{18}$$

Dalla (18) risulta nuovamente la proposizione riguardante le varietà minime.

(¹) Cfr. p. e. B. SEGRE (19), pag. 71 e segg.
(²) V. E. PASCAL (8), pag. 52.

6. Indicando con X_p i coseni direttori di una normale (η) rispetto al sistema delle normali due a due ortogonali (η_p) e ricordando l'espressione della curvatura relativa $\underset{\eta}{K}$ di V_n secondo (η) che abbiamo indicata al paragrafo 3 del capitolo precedente risulta:

$$(19) \qquad \underset{\eta}{K} = \sum_{p,q\,1}^{m-n} \sum_{(ij),(hk)} (a^{ih}a^{jk} - a^{jh}a^{ik})(\underset{\eta_p}{\omega_{ih}}\underset{\eta_p}{\omega_{jk}} - \underset{\eta_p}{\omega_{jk}}\underset{\eta_p}{\omega_{ih}})X_pX_q .$$

Mediante l'espressione (19) si può costruire, nello spazio ν, *l'indicatrice delle curvature relative* secondo le diverse normali dello spazio stesso e se ne trova l'equazione:

$$(20) \qquad \sum_{p,q\,1}^{m-n} \sum_{(ij),(hk)} (a^{ih}a^{jk} - a^{jh}a^{ik})(\underset{\eta_p}{\omega_{ih}}\underset{\eta_p}{\omega_{jk}} - \underset{\eta_p}{\omega_{jh}}\underset{\eta_p}{\omega_{ik}})\xi_p\xi_q = 1.$$

Dal confronto delle equazioni (18) e (20) risulta: *la quadrica di curvatura corrispondente ad un punto della varietà* V_n *è simile, e similmente disposta, all'indicatrice delle curvature relative in quel punto secondo le normali a* V_n; *il centro di similitudine è il punto considerato di* V_n *quando la varietà è minima nell'ambiente e solamente in tal caso.*

Il cono asintotico dell'indicatrice ha, in conseguenza, le generatrici parallele alle generatrici del cono asintotico della quadrica di curvatura. Supponiamo che il primo cono assintotico contenga $m-n$ rette due a due ortogonali (e reali); la quadrica di curvatura conterrà in conseguenza $m-n$ punti all'infinito e le curvature relative secondo le normali che li proiettano dal punto P saranno tutte nulle. Sommando tali curvature risulterà nulla la curvatura relativa nel punto P. Si conclude: *se il cono di equazione*:

$$\sum_{p,q\,1}^{m-n} \sum_{(ij),(hk)} (a^{ih}a^{jk} - a^{jh}a^{ik})(\underset{\eta_p}{\omega_{ih}}\underset{\eta_p}{\omega_{jk}} - \underset{\eta_p}{\omega_{jh}}\underset{\eta_p}{\omega_{ik}})\xi_p\xi_q = 0$$

è circoscritto ad un (m − n)*-edro ortogonale la curvatura relativa della varietà è nulla.*

Per le V_2 in ambiente riemanniano la proposizione ora dimostrata si riduce ad una delle condizioni determinate da E. BOMPIANI [1] perchè la V_2 sia a curvatura relativa nulla nell'ambiente.

---

[1] V. E. BOMPIANI (5). pag. 1130.

ELENCO DELLE OPERE CITATE

1 - W. KILLING, *Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*, Leipzig, 1885.

2 - L. BERZOLARI, *Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque*. Note 1ª e 2ª. « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », anno 1897-98, pagg. 692-700 e 759-778.

3 - H. KÜHNE, *Ueber die Krümmung einer beliebigen Mannigfaltigkeit*, « Arch. d. Math. und Physik », Bd. 6, 1904, pagg. 251-260.

4 - V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, 1913.

5 - E. BOMPIANI, *Studi sugli spazi curvi: La seconda forma fondamentale di una* V_m in V_n, « Atti del Reale Istituto Veneto », anno 1920-21, Tomo LXXX, pagg. 1113-1145·

6 - D. J. STRUIK, *Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung*, Berlin, 1922.

7 - E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris, 1922.

8 - E. PASCAL, *I determinanti*, 2ª ed., Milano, 1923.

9 - J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, Berlin, 1924.

10 - E. BORTOLOTTI, *Spazî subordinati: equazioni di Gauss e Codazzi*, « Bollettino dell'Unione Mat. It. », VI, 1927, pagg. 134-137.

11 - E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, 1928.

12 - M. CALONGHI, *Sulla curvatura media delle superficie*, « Rend. Acc. dei Lincei , 1° sem., 1930, pagg. 554-558.

13 - L. PELOSI, *Sulla curvatura media delle superficie*, Ibid., 2° sem. stesso anno, pagg. 283-285.

14 - M. MANARINI, *Sulla curvatura media di una superficie e sugli operatori lungo una linea*, Ibid., 2° sem. stesso anno, pagg. 639-644,

15 - P. BURGATTI, *A proposito della Nota del dott. Manarini: Sulla curvatura media ecc.*. Ibid., 2° sem. stesso anno, pagg. 625-631.

16 - W. FELLER, *Ueber die Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, « Math. Ann. », 102 Bd., 1930, pagg. 633-649.

17 - G. VITALI, *Evoluta (?) di una qualsiasi varietà dello spazio hilbertiano*, « Annali di Mat. », serie IV, Tomo VIII (1930-31) pagg. 161-172.

18 - E. BORTOLOTTI, *Sulle varietà subordinate*, « Rendiconti del Reale Istituto Lombardo », 1931, pagg. 441-463.

19 - B. SEGRE, *Questioni geometriche legate colla teoria delle funzioni di due variabili complesse*, « Rend. del Sem. Mat. della Facoltà di Scienze della R. U. di Roma », anno accad. 1930-31, Roma, 1932.

20 - E. GUGINO, *Sulla curvatura geodetica delle linee di uno spazio riemanniano ad* n *dimensioni*, « Rend. R. Acc. dei Lincei », serie 6ª, vol. 15°, 1932, pagg. 610-614.

21 - T. BOGGIO, *Sulla curvatura delle linee delle varietà*, Ibid., vol. 16°, 1932, pagg. 87-91.

Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre du type elliptique non linéaires.

par M. A. ROSENBLATT (à Kraków).

1. Dans ses célèbres travaux sur les équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles [1], M. ÉMILE PICARD a étudié l'équation aux dérivées partielles du type elliptique

$$\Delta u = F(x, y, p, q) \tag{1}$$

en envisageant les solutions qui prennent des valeurs données sur la frontière C d'un domaine borné G du plan x, y. La recherche de ces solutions peut être réduite à la recherche des solutions *nulles* sur la frontière. M. PICARD suppose la fonction F *continue* par rapport à toutes les cinq variables indépendantes x, y, u, p, q dans le domaine D, formé par les valeurs de x, y des point P du domaine G et de sa frontière C et par les valeurs de u, p, q satisfaisant aux inégalités

$$|u| \leq L, \quad |p|, \ |q| \leqq L',$$

L, L' étant des nombres positifs.

M. PICARD part d'une fonction $u_0(x, y)$ arbitraire continue dans $G + C$ ainsi que ses dérivées $\dfrac{\partial u_0}{\partial x}, \dfrac{\partial u_0}{\partial y}$ et satisfaisant aux inégalités

$$|u_0| \leqq L, \quad |p_0|, \ |q_0| \leqq L'.$$

Il forme la suite des *approximations successives*

$$\Delta u_n = F(x, y, u_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

---

[1] *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives.* « Journal de Math. », S. 4, T. 6, 1890; *Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles.* Ibid., S. 4, T. 9, 1893; *Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre par leurs valeurs le long d'un contour fermé.* « Journ. Éc. Pol. », 60 Cahier, 1890; *Sur la détermination des intégrales de certaines équations linéaires du second ordre par leurs valeurs le long d'un contour fermé.* « Journ. de Math. », S. 5, T. 6, 1900; *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la généralisation du problème de Dirichlet.* « Acta Mathematica », T. 25, 1902.

les fonctions u_n s'annullant sur C. Soit μ le maximum du module de $F(x, y, u, p, q)$ dans le domaine D. Soient M, N les maxima des modules des intégrales

$$(3) \quad I = \frac{1}{2\pi}\int G(x, y;\ \xi, \eta)d\xi d\eta, \quad I_x = \frac{1}{2\pi}\int |\, G_x \,|\, d\xi d\eta, \quad I_y = \frac{1}{2\pi}\int |\, G_y \,|\, d\xi d\eta.$$

G étant la fonction ordinaire de GREEN du domaine G,

$$I \leqq M; \quad I_x,\ I_y \leqq N.$$

Supposons que l'on ait les inégalités

$$(4) \qquad \mu M \leqq L, \quad \mu N \leqq L',$$

alors les fonctions u_n, $n = 1, 2,...$ existent. On a les formules

$$(5) \qquad u_n = -\frac{1}{2\pi}\int GF[\xi, \eta, u_{n-1}(\xi, \eta), p_{n-1}(\xi, \eta), q_{n-1}(\xi, \eta)]d\xi d\eta, \qquad n = 1, 2, ...$$

Pour démontrer la convergence de la suite u_1, u_2,... M. PICARD introduit les fonctions

$$v_n = u_n - u_{n-1}, \qquad n = 1, 2, ...$$

On a

$$(6) \quad \Delta v_n = F(x, y, u_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) - F(x, y, u_{n-2}, p_{n-2}, q_{n-2}), \quad n = 2, 3, ...$$

M. PICARD suppose que F satisfait à la *condition de Lipschitz*

$$(7) \qquad \begin{aligned} &|\, F(x, y, u_2, v_2, w_2) - F(x, y, u_1, v_1, w_1) \,| \leqq \\ &\leqq A \,|\, u_2 - u_1 \,| + B \,|\, v_2 - v_1 \,| + C \,|\, w_2 - w_1 \,|, \end{aligned}$$

$A > 0$, $B > 0$, $C > 0$. Désignons par μ' le module maximum dans (D) de la fonction

$$F(x, y, u_1, p_1, q_1) - F(x, y, u_0, p_0, q_0),$$

alors il suit de la formule

$$(8) \qquad v_2 = -\frac{1}{2\pi}\int G[F(\xi, \eta, u_1, p_1 . q_1) - F(\xi, \eta, u_0, p_0, q_0)]d\xi d\eta$$

que l'on a les inégalités

$$(9) \qquad |\, v_2 \,| \leqq \mu' M, \quad |\, p_2 \,|,\ |\, q_2 \,| \leqq \mu' N.$$

Il s'ensuit que l'on a

$$(10) \qquad |\, F(x, y, u_2, p_2, q_2) - F(x, y, u_1, p_1, q_1) \,| \leqq \mu'(AM + BN + CN);$$

donc on a

$$|\, v_3 \,| \leq \mu' M(AM + BN + CN); \quad |\, p_3 \,|,\ |\, q_3 \,| \leqq \mu' N(AM + BN + CN),$$

et en général on a

$$|v_n| \leqq \mu' M(AM + BN + CN)^{n-2}; \tag{11}$$
$$|p_n|,\ |q_n| \leqq \mu' N(AM + BN + CN)^{n-2}, \qquad (n = 2, 3, \ldots.$$

La convergence absolue et uniforme est donc assurée si l'on a la condition

$$AM + BN + CN < 1 \tag{12}$$

de M. Picard. Les séries

$$u_1 + v_2 + v_3 + \ldots,\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial x} + \ldots,\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial y} + \ldots \tag{13}$$

convergent absolument et uniformément.

La convergence des séries (13) étant uniforme, on obtient à la limite

$$u = -\frac{1}{2\pi}\int GF(\xi, \eta, u, p, q)d\xi d\eta. \tag{14}$$

2. Il s'agit maintenant de déduire de cette équation intégrale l'équation différentielle (1). M. Picard suppose que F possède des dérivées continues de premier ordre par rapport à toutes les 5 variables. Lichtenstein [1] suppose que F satisfait par rapport à *toutes* les 5 variables à une condition de Lipschitz

$$|F(x_1, y_1, u_1, p_1, q_1) - F(x_2, y_2, u_2, p_2, q_2)| \leqq \tag{15}$$
$$\leqq A|u_2 - u_1| + B|p_2 - p_1| + C|q_2 - q_1| + D|x_2 - x_1| + E|y_2 - y_1|.$$

En effet, on a d'après Dini [2], pour les points intérieurs de G, les inégalités

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\right| \leq h\delta_{12}\log\frac{1}{\delta_{12}}, \tag{16}$$
$$\left|\frac{\partial u}{\partial y_1} - \frac{\partial u}{\partial y_2}\right| \leqq h\delta_{12}\log\frac{1}{\delta_{12}},$$

δ_{12} étant la distance de deux points P_1, P_2 contenus dans un cercle intérieur à G avec sa circonférence, h étant un nombre positif fixe indépendants des points P_1, P_2. Donc la fonction F envisagée comme fonction de ξ, η satisfait également pour toutes les paires de points $P(\xi, \eta)$, $P'(\xi', \eta')$

---

[1] *Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.* « Rendiconti di Palermo », T. 28, 1909.

[2] *Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre.* « Acta Math. », T. 25, 1902.

d'un cercle intérieur à G à une condition de HÖLDER. En effet, en posant

$$F(\xi,\ \eta,\ u(\xi,\eta),\ p(\xi,\eta),\ q(\xi,\eta)) = \bar{F}(\xi,\ \eta),$$

on a

$$\begin{aligned}(17)\qquad |\bar{F}(\xi,\eta) - F(\xi,\eta)| &\leqq A\,|u(\xi,\eta) - u(\xi',\eta')| + B\,|p(\xi,\eta) - p(\xi',\eta')| + \\ &+ C\,|q(\xi,\eta) - q(\xi',\eta')| + D\,|\xi - \xi'| + E\,|\eta - \eta'| \leqq \\ &\leqq A\left[|\xi - \xi'|\,\mathrm{Max}\left|\frac{\partial u}{\partial \xi}\right| + |\eta - \eta'|\,\mathrm{Max}\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|\right] + Bh\delta_{12}\log\frac{1}{\delta_{12}} + \\ &+ Ch\delta_{12}\log\frac{1}{\delta_{12}} + D\,|\xi - \xi'| + E\,|\eta - \eta'| \leqq h'\,|\delta_{12}|^{\alpha},\end{aligned}$$

$0 < \alpha < 1$, $h' > 0$, h' étant un nombre fixe pour toutes les paires de points P, P' du cercle k intérieur à G.

D'après un théorème connu, u possède des dérivées secondes dans G satisfaisant à l'équation (1).

3. Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'étudier l'équation de M. PICARD (1) en remplaçant la condition de LIPSCHITZ (7) par la condition suivante

$$(18)\qquad |F(x, y, u_1, p_1, q_1) - F(x, y, u_2, p_2, q_2)| \leqq \frac{A}{\delta^{1+m}}\,|u_1 - u_2| + \frac{B}{\delta^m}\,|p_1 - p_2| + \frac{C}{\delta^m}\,|q_1 - q_2|.$$

$\delta > 0$ est ici la plus petite distance du point $P(x, y)$ de la frontière C de G, m est un nombre positif qui satisfait aux inégalités $0 < m < 1$.

Quant à la dépendance de x, y nous supposerons que F satisfait à la condition de LIPSCHITZ

$$(19)\qquad |F(x, y, u, p, q) - F(x', y', u, p, q)| \leqq D\,|x - x'| + E\,|y - y'|.$$

On a alors

$$\begin{aligned}|F(x, y, u, p, q) - F(x', y', u', p', q')| &\leqq |F(x, y, u, p, q) - F(x, y, u', p', q')| + \\ &+ |F(x, y, u', p', q') - F(x', y', u', p', q')| \leqq D\,|x - x'| + E\,|y - y'| + \\ &+ \frac{A}{\delta_P^{1+m}}\,|u - u'| + \frac{B}{\delta_P^m}\,|p - p'| + \frac{C}{\delta_P^m}\,|q - q'|.\end{aligned}$$

Donc la condition de LIPSCHITZ (15) est remplie pour toute paire de points P, P' de G, et avec les mêmes coëfficients A, B, C, D, E pour toutes les paires d'un cercle k intérieur à G.

Supposons alors que nous ayons démontré le théorème suivant:

« La fonction $f(\xi, \eta)$ du point $P(\xi, \eta)$ de G étant continue dans $G+C$ et satisfaisant dans G à l'inégalité

$$(20) \qquad |f(\xi, \eta)| \leq \frac{\mathfrak{A}}{\delta^m}, \quad 0 \leq m < 1,$$

où δ est la plus petite distance du point P de la frontière C, l'intégrale

$$(21) \qquad u = -\frac{1}{2\pi}\int_G G(x, y;\ \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

et ses dérivées

$$(22) \qquad u_x = -\frac{1}{2\pi}\int_G G_x(x, y;\ \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$u_y = -\frac{1}{2\pi}\int_G G_y(x, y;\ \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

satisfont dans G aux inégalités

$$(23) \qquad |u| \leq \mathfrak{A}\delta K, \quad |u_x|,\ |u_y| \leq \mathfrak{A}K' \text{ ».}$$

K et K' sont ici deux nombres positifs qui ne dépendent que de la nature du domaine borné G et du nombre m. Alors pourvu que l'on ait les inégalités

$$(24) \qquad \mathfrak{A}\delta K < L, \quad \mathfrak{A}K' \leq L'$$

toutes les fonctions u_n, p_n, q_n existent et sont continues dans G, les u_n étant continues dans $G+C$ et nulles sur C. Elles satisfont aux inégalités (les premières dans G, les secondes et troisièmes dans $G+C$)

$$(25) \qquad |u_n| \leq L, \quad |p_n|,\ |q_n| \leq L'.$$

On peut toujours poser

$$(26) \qquad |F(u_1, p_1, q_1) - F(u_0, p_0, q_0)| \leq \frac{\mathfrak{A}}{\delta^m},$$

$\mathfrak{A}$ étant un nombre positif convenable. Donc on aura les inégalités

$$(27) \qquad |v_2| \leq \mathfrak{A}\delta K, \quad |p_2|,\ |q_2| \leq \mathfrak{A}\cdot K'.$$

Il s'en suit que l'on a les inégalités

$$(28) \qquad |F(x, y, u_2, p_2, q_2) - F(x, y, u_1, p_1, q_1)| \leq \frac{\mathfrak{A}}{\delta^m}(AK + BK' + CK')$$

$$(29) \qquad |v_3| < \mathfrak{A}\delta(AK + BK' + CK')K,$$

$$|p_3|,\ |q_3| \leq \mathfrak{A}(AK + BK' + CK')K',$$

et en général

(30) $$|v_n| \leq \mathfrak{A}\delta(AK + BK' + CK')^{n-2}K,$$
$$|p_n|, \ |q_n| \leq \mathfrak{A}(AK + BK' + CK')^{n-2}K', \qquad n = 3, 4, \ldots.$$

Donc, pourvu que l'on ait l'inégalité

(31) $$AK + BK' + CK' < 1$$

les séries (13) convergeront absolument et uniformément dans G.

Donc on obtient l'équation intégrale (14). Il s'en suit l'équation différentielle (1) pour tout point $P(x, y)$ intérieur à G.

4. Nous supposerons d'abord que notre domaine G soit un *cercle* de rayon R et d'origine O comme centre. L'intégrale

(32) $$I = \int G f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

est en valeur absolue plus petite que l'intégrale

(33) $$\bar{I} = \mathfrak{A} \int G \frac{1}{(R-\rho)^m} d\xi d\eta,$$

ρ étant la distance du point $Q(\xi, \eta)$ du centre O du cercle. On a donc

(34) $$\Delta \bar{I} = -2\pi\mathfrak{A} \frac{1}{(R-\rho)^m},$$

et en coordonnées polaires, puisque $\bar{I}$ ne dépend pas de φ [1]

(35) $$\frac{d^2\bar{I}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\bar{I}}{d\rho} = -2\pi\mathfrak{A} \frac{1}{(R-\rho)^m}.$$

On a donc

$$r\bar{I}' = -2\pi\mathfrak{A} \int_0^r \frac{\rho d\rho}{(R-\rho)^m},$$

car $\rho I'$ s'annulle pour $\rho = 0$. Donc on a

$$I = -2\pi\mathfrak{A} \int_0^r \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^m} d\rho + C,$$

---

[1] Cf. MAX MÜLLER, *Ueber die Green'sche Funktion des Laplace'schen Differentialausdrucke.* Heidelberg, Akademieberichte, 1929.

et la constante C a la valeur

$$C = \bar{I}(0) = 2\pi\mathfrak{A}\int_0^R \log\frac{R}{\sigma}\frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^m}.$$

Or on a

$$\int_0^r \frac{1}{\rho}\int_0^\rho \frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^m}\,d\rho = \log\rho\int_0^\rho \frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^m}\Big|_0^r - \int_0^r \log\sigma\cdot\frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^m},$$

donc

$$\bar{I} = 2\pi\mathfrak{A}\left\{\int_0^R \log\frac{R}{\sigma}\frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^m} - \int_0^r \log\frac{r}{\sigma}\frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^m}\right\}.$$

Envisageons la fonction

$$f(x) = \int_0^x \log\frac{x}{\sigma}\frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^m};$$

sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^m} \leq \int_0^x \frac{d\sigma}{(R-\sigma)^m} = \frac{(R-\sigma)^{1-m}}{1-m}\Big|_x^0 \leq \frac{R^{1-m}}{1-m}.$$

Donc on a

$$\bar{I} = 2\pi\mathfrak{A}(R-r)f'(x)\,|_{x=r+\Theta(R-r)} \leqq 2\pi\mathfrak{A}\delta\cdot\frac{R^{1-m}}{1-m}.$$

Nous avons donc obtenu le théorème suivant:

THÉORÈME 1: « L'intégrale (32) étendue au cercle K de rayon R satisfait à l'inégalité

$$I \leqq 2\pi\mathfrak{A}\delta\cdot\frac{R^{1-m}}{1-m}, \tag{36}$$

δ étant la distance du pôle $P(x, y)$ de la circonférence C du cercle ».

Dans le cas particulier de $f(x, y) \equiv 1$ M. MAX MÜLLER [1] (l. c.) a obtenu l'*égalité*

$$I = \frac{\pi}{2}(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{2}(R+r)\delta.$$

5. Nous envisagerons maintenant un domaine G arbitraire que nous supposerons *borné*. Soit C la frontière de ce domaine. Soit $z_1 = \omega(z)$ la fonction analytique qui représente conformément l'intérieur de G sur l'intérieur du

[1] Cf. aussi W. KRAUS, *Ueber den Zusammenhang einiger Carakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereiches mit der Kreisabbildung.* « Dissertation de l'Université de Giessen », 1932.

cercle K_1 de rayon R et de circonférence C_1, de telle manière qu'au point O intérieur à G corresponde le point O_1 milieu du cercle K_1. On a donc la série

$$\omega(z) = \sum_1^\infty a_\nu z^\nu, \tag{37}$$

la fonction $z = \omega_1(z_1)$ inverse étant donnée par le développement

$$z = \sum_1^\infty b_\nu z_1^{\ \nu}. \tag{38}$$

Soit $G_1(x_1, y_1; \xi_1, \eta_1)$ la fonction de GREEN du cercle K_1 de pôle $P_1(x_1, y_1)$. On a donc

$$G_1 = \log \frac{1}{|\zeta_1 - z_1|} - u_1(\xi_1, \eta_1),$$

$u_1(\xi_1, \eta_1)$ étant la fonction harmonique qui prend les valeurs $\log \frac{1}{|\zeta_1 - z_1|}$ sur la circonférence C_1. Soit $W_1(\zeta_1) = u_1 + iv_1$ la fonction analytique correspondante. Alors on a la fonction analytique

$$K_1(\zeta_1) = \log \frac{1}{\zeta_1 - z_1} - W_1(\zeta_1).$$

Cette fonction est transformée par la fonction $\omega(z)$ en une fonction $K(\zeta)$

$$K(\zeta) = K_1(\omega_1(\zeta)) = \log \frac{1}{\omega(\zeta) - \omega(z)} - W_1(\omega(\zeta)).$$

On a

$$\omega(\zeta) - \omega(z) = (\zeta - z)\omega'(z) + (\zeta - z)_2,$$

donc la partie réelle de $K(\zeta)$ a la partie singulière $\log \frac{1}{|\zeta - z|}$.

D'autre part, lorsque le point $Q(\zeta)$ du domaine G tend vers la frontière C de ce domaine, le point correspondant $Q_1(\zeta_1)$ de K_1 tend vers la circonférence C_1, donc $K_1(\zeta_1)$ et par suite $K(\zeta)$ tendent vers zéro. Donc on a

$$G(x, y; \xi, \eta) = G_1(x_1, y_1, \xi_1, \eta_1). \tag{39}$$

6. Envisageons maintenant l'intégrale

$$I = \int G d\xi d\eta \tag{40}$$

étendue au domaine G. M. MÜLLER a montré que l'on a l'inégalité

$$I \leqq \frac{F}{2}, \tag{41}$$

F étant l'*aire intérieure* du domaine G. L'égalité n'a lieu que dans le cas où G est un cercle et le pôle P son centre.

Nous supposerons le domaine G tel que les fonctions $\omega'(z)$, $\omega_1'(z_1)$ soient *bornées* en valeur absolue. Donc si α, β désignent les bornes inférieure et supérieure de $\omega_1'(z_1)$, on a dans G

$$\alpha < |\,\omega_1'(z_1)\,| < \beta, \quad \frac{1}{\beta} < |\,\omega'(z)\,| < \frac{1}{\alpha}, \tag{42}$$

$\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Envisageons un arc de Jordan PM rectifiable et aboutissant en un point M de C, arc intérieur à G excepté le point M. À cet arc correspond dans K_1 un arc partant du point P_1, pôle de K_1. À un point M' de l'arc PM intérieur à G correspond dans K_1 un point M_1' et on a

$$\widetilde{P_1M_1'} = \int_P^{M'} \left|\frac{dz_1}{dz}\right| |\,dz\,|.$$

Il s'en suit que la *limite* de $\widetilde{P_1M_1'}$ *existe*, lorsque M' tend vers M, donc la limite (unique) du point M_1' existe.

De même lorsque l'on envisage un arc de Jordan $\widetilde{P_1M_1}$ abontissant en un point M_1 de la circonférence C_1 du cercle K_1 et rectifiable, à cet arc correspond un arc rectifiable de Jordan PM abontissant en un point M de C et on a

$$\widetilde{PM} = \int_{P_1}^{M_1} \left|\frac{dz}{dz_1}\right| |\,dz_1\,|.$$

Désignons par δ et par δ_1 les distances des pôles P, P_1 des frontières correspondantes C, C_1. On a évidemment

$$\delta_1 \leq \widetilde{P_1M_1}, \quad \delta \leq \widetilde{PM}.$$

Donc si PM, P_1M_1 sont les segments de droites joignant P et P_1 aux points M et M_1 les plus proches, on a les inégalités

$$\delta_1 < \frac{\delta}{\alpha}, \quad \delta \leqq \beta\delta_1. \tag{43}$$

Nous transformons l'intégrale I en intégrant dans le cercle K_1. On a

$$I = \int_{K_1} G_1 \left|\frac{dz}{dz_1}\right|^2 d\xi_1 d\eta_1. \tag{44}$$

On a

$$I \leqq \beta^2 \int G_1 d\xi_1 d\eta_1 = \beta^2 \cdot \frac{\pi}{2} (R + r_1)\delta_1 ,$$

$r_1 = O_1 P_1$. De même on a

$$I \geqq \alpha^2 \cdot \frac{\pi}{2} (R + r_1) \cdot \delta_1 .$$

Nous avons donc le

THÉORÈME 2: « Le domaine G étant borné et tel que la fonction $\omega(z_1)$ qui représente G sur l'intérieur du cercle K_1 de rayon R soit bornée en valeur absolue inférieurement et supérieurement, l'intégrale I satisfait à la double inégalité

(45) $$\frac{\pi}{2} \frac{\alpha^2}{\beta} R\delta \leqq I \leqq \pi \frac{\beta^2}{\alpha} R\delta \text{ ».}$$

7. Soit maintenant donnée l'intégrale

(46) $$I = \int_G G f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

On a

$$\frac{1}{\delta^m} \leqq \frac{1}{\delta_1^m \alpha^m},$$

donc on a

$$I \leq \mathfrak{A} \frac{\beta^2}{\alpha^m} \int_{K_1} G_1 \frac{1}{(R - r_1)^m} d\xi_1 d\eta_1 .$$

Posons

(47) $$I = \mathfrak{A} \int_{K_1} G_1 \frac{1}{(R - r_1)^m} d\xi_1 d\eta_1 ,$$

I satisfait pour tout point intérieur de K_1 à l'équation différentielle (31) et nous avons ainsi obtenu la formule (34). Donc on a le

THÉORÈME 3: « L'intégrale (46) étendue au domaine G satisfait à l'inégalité

(48) $$|I| \leqq 2\pi \mathfrak{A} \delta \frac{\beta^2}{\alpha^{1+m}} \frac{R^{1-m}}{1 - m} \text{ ».}$$

Quant au domaine G, on sait [1] qu'il suffit que la courbe C posséde partout une *courbure constante* pour que $\omega'(z)$ soit continue et $\neq 0$ dans

---

[1] LICHTENSTEIN, *Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen des elliptischen Typus.* « Math. Ann. », T. 67, 1909.

$G+C$. Plus généralement, KELLOGG [1] a montré que si les dérivées $x^{(n)}(s)$, $y^{(n)}(s)$ d'ordre n des coordonnées cartésiennes des points de C comme fonctions de l'arc s existent et satisfont à une condition de HÖLDER

$$|z^{(n)}(s)-z^{(n)}(s+h)| \leqq k\,|h|^{\alpha}, \qquad 0<\alpha<1,\ k<0, \tag{49}$$

alors $\omega_1^{(n)}(z_1)$ existe dans K_1+C_1 et on a $\omega_1'(z_1)$, $\neq 0$ dans K_1+C_1.

8. Études maintenant les intégrales

$$I_x=\int G_x f(\xi,\eta)d\xi d\eta, \quad I_y=\int G_y f(\xi,\eta)d\xi d\eta. \tag{50}$$

M. MÜLLER a calculé les intégrales

$$\bar I_x=\int |G_x|\,|f(\xi,\eta)\ d\xi d\eta, \quad \bar I_y=\int |G_y|\,|f(\xi,\eta)|\,d\xi d\eta \tag{51}$$

dans le cas particulier $f(\xi,\eta)\equiv 1$ et il a trouvé les inégalités

$$|\bar I_x|,\ |\bar I_y| \leqq \frac{8}{3}|f'(z)|\,I(x,y). \tag{52}$$

Ici $I(x, y)$ est l'intégrale (40), et $f(z)$ est la valeur au pôle $P(z)$ de la fonction $f(\zeta)$ qui représente conformément l'intérieur de G sur l'intérieur du cercle K_2 de telle manière qu'au pôle $\zeta=z$ de G corresponde l'*origine* O_2 du cercle K_2. On a l'inégalité

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{\delta}, \tag{53}$$

donc

$$|\bar I_x|,\ |\bar I_y| \leqq \frac{8}{3\delta} I(x,y). \tag{54}$$

L'application au cercle de rayon R donne

$$|\bar I_x|,\ |\bar I_y| \leq \frac{8}{3}\pi R=\frac{8}{3}\frac{F}{R}. \tag{55}$$

L'application au domaine G et à la formule (5) donne

$$|\bar I_x|,\ |\bar I_y| \leqq \frac{8}{3}\pi\frac{\beta^2}{\alpha}R. \tag{56}$$

---

[1] *Harmonic functions and Green's integral.* « Trans. Amer. Math. Soc. », T. 13, 1912; ST. WARSCHAWSKI, *Ueber einen Satz von O. Kellogg.* « Göttinger Nachrichten , 1932; W. SEIDEL, *Ueber die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung.* « Math. Annalen », T. 104.

Nous avons donc le théorème:

THÉORÈME 4: « Les intégrales $\bar{I}_x$, $\bar{I}_y$ satisfont aux inégalités (56) dans le cas de $f(\xi, \eta) \equiv 1$ ».

9. Dans le cas général, nous pouvons procéder de la manière suivante. Soit d'abord G le cercle K_1 de rayon R de centre origine O. Soit $P_1(z_1)$ le pôle du cercle. On a

$$G_1 = R\left(\log \frac{\zeta_1 - z_1'}{\zeta_1 - z_1} \cdot \frac{z_1}{R}\right) = \log\left(\left|\frac{\zeta_1 - z_1'}{\zeta_1 - z_1}\right| \cdot \frac{r_1}{R}\right)$$

z_1' est le point conjugué du pôle z_1 par rapport au cercle K_1, et $r_1 = |z_1|$.

Or on a

$$\frac{\partial G_1}{\partial x_1} = R\frac{\partial}{\partial x_1} \log\left(\frac{\zeta_1 - z_1'}{\zeta_1 - z_1} \cdot \frac{z_1}{R}\right) = R\left[\frac{1}{z_1} + \frac{1}{\zeta_1 - z_1} - \frac{1}{\zeta_1 - z_1'}\frac{\partial z_1'}{\partial z_1}\right],$$

mais on a

$$z_1' = \frac{R^2}{\bar{z}_1}, \quad \frac{\partial z_1'}{\partial z_1} = -\frac{R^2}{\bar{z}_1^2},$$

donc

$$\frac{\partial G_1}{\partial x_1} = R\left[\frac{1}{z_1} + \frac{1}{\zeta_1 - z_1} + \frac{R^2}{(\zeta_1 - z_1')\bar{z}_1^2}\right].$$

On trouve de même

$$\frac{\partial G_1}{\partial y_1} = R\left[\frac{i}{z_1} + \frac{i}{\zeta_1 - z_1} + i\frac{R^2}{(\zeta_1 - z_1')\bar{z}_1^2}\right] = -I\left[\frac{1}{z_1} + \frac{1}{\zeta_1 - z_1} - \frac{R^2}{(\zeta_1 - z_1')\bar{z}_1^2}\right],$$

R, I sont les parties réelle et imaginaire.

Transformons maintenant le cercle K_1 en le cercle K_2 de manière que le pôte P_1 se transforme en l'origine O_2, R étant aussi le rayon de K_2. On a les formules

$$(57) \qquad \zeta_2 = R^2\frac{\zeta_1 - z_1}{R^2 - \bar{z}_1\zeta_1}, \qquad (57a) \qquad \zeta_1 = R^2\frac{\zeta_2 + z_1}{R^2 + \bar{z}_1\zeta_2},$$

en désignant par ζ_2 la variable complexe du cercle K_2. On a

$$\zeta_1 - z_1 = \frac{\zeta_2(R^2 - r_1^2)}{R^2 + \bar{z}_1\zeta_2}, \quad \zeta_1 - z_1' = \frac{R^2(\zeta_2 + z_1)}{R^2 + \zeta_2\bar{z}_1} - \frac{R^2}{\bar{z}_1} = \frac{R^2(r_1^2 - R^2)}{\bar{z}_1(R^2 + \bar{z}_1\zeta_2)},$$

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{\zeta_1 \quad z_1} + \frac{R^2}{(\zeta_1 - z_1')\bar{z}_1^2} = \frac{\bar{z}_1\zeta_2(R^2 - r_1^2) + r_1^2(R^2 + \bar{z}_1\zeta_2) - \zeta_2 z_1(R^2 + \bar{z}_1\zeta_2)}{r_1^2\zeta_2(R^2 - r_1^2)} =$$

$$= \frac{R^2(\bar{z}_1\zeta_2 + r_1^2 - z_1\zeta_2) - r_1^2\zeta_2^2}{r_1^2\zeta_2(R^2 - r_1^2)} = \frac{R^2[r_2^2(\bar{z}_1 - z_1) + \bar{\zeta}_2 r_1^2] - r_1^2 r_2^2\zeta_2}{r_1^2 r_2^2(R^2 - r_1^2)},$$

où l'on a $r_2^2 = \zeta_2\bar{\zeta}_2$.

La partie réelle est

$$\frac{\xi_2(R^2 - r_2^2)}{r_2^2(R^2 - r_1^2)}.$$

On trouve de même

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{\zeta_1 - z_1} - \frac{R^2}{(\zeta_1 - z_1')\bar{z}_1^2} = \frac{R^2(\bar{z}_1\zeta_2 + r_1^2 + z_1\zeta_2) + r_1^2\zeta_2^2}{r_1^2\zeta_2(R^2 - r_1^2)} =$$

$$= \frac{R^2(2x_1 r_2^2 + \bar{\zeta}_2 r_1^2) + r_1^2 r_2^2 \zeta_2}{r_1^2 r_2^2(R^2 - r_1^2)}.$$

La partie imaginaire prise avec le signe moins, est

$$\frac{\eta_2(R^2 - r_2^2)}{r_2^2(R^2 - r_1^2)}.$$

Nous avons donc les formules

(58) $$G^1{}_{x_1} = \frac{\xi_2}{r_2^2}\frac{R^2 - r_2^2}{R^2 - r_1^2}, \quad G^1{}_{y_1} = \frac{\eta_2}{r_2^2}\frac{R^2 - r_2^2}{R^2 - r_1^2}.$$

Nous obtenons donc les deux intégrales

(59) $$I_{x_1} = \int G^1{}_{x_1}\left|\frac{d\zeta_1}{d\zeta_2}\right|^2 f_1(\xi_1, \eta_1)d\xi_2 d\eta_2,$$

$$I_{y_1} = \int G^1{}_{y_1}\left|\frac{d\zeta_1}{d\zeta_2}\right|^2 f_1(\xi_1, \eta_1)d\xi_2 d\eta_2.$$

10. Or on a

(60) $$\frac{d\zeta_1}{d\zeta_2} = R^2\frac{R^2 - r_1^2}{(R^2 + \bar{z}_1\zeta_2)^2}.$$

On a donc

$$I_{x_1} = \int \frac{\xi_2}{\rho_2} d\rho_2 d\varphi_2 \frac{R^2 - \rho_2^2}{R^2 - r_1^2} f_1(\xi_1, \eta_1)\cdot R^4 \frac{(R^2 - r_1^2)^2}{|R^2 + \bar{z}_1\zeta_2|^4},$$

$$I_{y_1} = \int \frac{\eta_2}{\rho_2} d\rho_2 d\varphi_2 \frac{R^2 - \rho_2^2}{R^2 - r_1^2} f_1(\xi_1, \eta_1)\cdot R^4 \frac{(R^2 - r_1^2)^2}{|R^2 + \bar{z}_1\zeta_2|^4}.$$

La fonction $f_1(\xi_1, \eta_1)$ devient une fonction $f_2(\xi_2, \eta_2)$ du point $Q_2(\xi_2, \eta_2)$, et la distance δ_1 de Q_1 du bord C_1 du cercle K_1 est

$$\delta_1 = R - |\zeta_1| = R - R^2\frac{|\zeta_1 + z_1|}{|R^2 + \bar{z}_1\zeta_2|} = R\frac{R^2 + \bar{z}_1\zeta_2| - R\ \zeta_2 + z_1|}{|R^2 + \bar{z}_1\zeta_2|} =$$

$$= R\frac{(R^2 + z_1\zeta_2)(R^2 + z_1\bar{\zeta}_2) - R^2(\zeta_2 + z_1)(\zeta_2 + \bar{z}_1)}{|R^2 + z_1\zeta_2|(|R^2 + \bar{z}_1\zeta_2| + R|\zeta_2 + z_1|)}.$$

Or on a

$$|R^2 + \bar{z}_1\zeta_2|^2 \geqq R^2 |\zeta_2 + z_1|^2,$$

car

$$R^4 + \rho_2^2 r_1^2 \geqq R^2(r_1^2 + \rho_2^2),$$

donc il vient

(61) $$\delta_1 \geqq \frac{R(R^2 - \rho_2^2)(R^2 - r_1^2)}{2\,|R^2 + \bar{z}_1\zeta_2|^2}$$

Nous avons donc les deux intégrales

(52) $$|I_{x_1}|,\ |I_{y_1}| \leqq \mathfrak{A}\int d\rho_2 d\varphi_2 \frac{(R^2 - \rho_2^2)R^4(R^2 - r_1^2)}{|R^2 + \bar{z}_1\zeta_2|^4} \frac{2^m\,|R^2 + \bar{z}_1\zeta_2|^{2m}}{R^m(R^2 - \rho_2^2)^m}\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{(R^2 - r_1^2)^m} = \mathfrak{A}\cdot 2^m\cdot R^{4-m}(R^2 - r_1^2)^{1-m}\int d\rho_2 d\varphi_2 \frac{(R^2 - \rho_2^2)^{1-m}}{|R^2 + \bar{z}_1\zeta_2|^{4-2m}}.$$

Il s'agit d'abord de majorer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_2}{|R^2 + \bar{z}_1\zeta_2|^{4-2m}}.$$

On a donc, en introduisant la nouvelle variable indépendante $\operatorname{tg}\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = u$, où φ_1 est l'argument de z_1

$$|R^2 + \bar{z}_1\zeta_2| = \sqrt{R^4 + R^2(\bar{z}_1\zeta_2 + z_1\bar{\zeta}_2) + r_1^2\rho_2^2} =$$
$$= \sqrt{R^4 + 2R^2 r_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + r_1^2\rho_2^2} = \sqrt{(R^2 - r_1\rho_2)^2 + 4R^2 r_1\rho_2\cdot\frac{1}{1+u^2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{B(1+u^2) + A}{1+u^2}},$$
$$A = 4R^2 r_1\rho_2, \quad B = (R^2 - r_1\rho_2)^2.$$

Donc on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_2}{|R^2 + \bar{z}_1\zeta_2|^{4-2m}} = 4\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} \frac{(1+u^2)^{2-m}}{(A + B + Bu^2)^{2-m}}.$$

En posant

$$k^2 = \frac{B}{A+B} = \left(\frac{R^2 - r_1\rho_2}{R^2 + r_1\rho_2}\right)^2$$

on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_2}{|R^2 + z_1\zeta_2|^{4-2m}} = \frac{4}{(R^2 + r_1\rho_2)^{4-2m}}\int_0^{\infty} \frac{du\cdot(1+u^2)^{1-m}}{(1+k^2u^2)^{2-m}} \leqq$$

$$\leqq \frac{4}{(R^2 + r_1\rho_2)^{4-2m}}\int_0^{\infty} \frac{dv\cdot(1+u^2)^{1-m}}{k(1+v^2)^{2-m}}, \qquad (ku = v)$$

donc on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_2}{|R^2 + z_1\zeta_2|^{4-2m}} = \frac{4}{(R^2 + r_1\rho_2)^{4-2m}} \cdot \frac{1}{k^{3-2m}} \int_0^{\infty} \frac{dv \cdot (k^2 + v^2)^{1-m}}{(1+v^2)^{2-m}} \leqq$$

$$\leqq \frac{4}{(R^2 + r_1\rho_2)^{4-2m}} \left(\frac{R^2 + r_1\rho_2}{R^2 - r_1\rho_2}\right)^{3-2m} \int_0^{\infty} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{2\pi}{(R^2 + r_1\rho_2)(R^2 - r_1\rho_2)^{3-2m}}.$$

On a ainsi comme majoration des intégrales I_{x_1}, I_{y_1} l'expression

$$\mathcal{A} \cdot 2^{m+1} \cdot \pi \cdot R^{1-m}(R^2 - r_1^2)^{1-m} \int_0^R d\rho_2 \frac{(R^2 - \rho_2^2)^{1-m}}{(R^2 - r_1\rho_2)^{3-2m}} \cdot \tag{63}$$

$$\cdot \frac{1}{R^2 + r_1\rho_2} \leqq \mathcal{A} \cdot 2^{m+1} \cdot \pi \cdot R^{2-m}(R^2 - r_1^2)^{1-m} \int_0^R d\rho_2 \frac{(R^2 - \rho_2^2)^{1-m}}{(R^2 - r_1\rho_2)^{3-2m}} \leqq$$

$$\leqq \mathcal{A} \cdot 2^2 \cdot \pi \cdot R^{3-2m} \cdot (R^2 - r_1^2)^{1-m} \int_0^R d\rho_2 \frac{(R - \rho_2)^{1-m}}{(R^2 - r_1\rho_2)^{3-2m}}.$$

Or on a

$$\int_0^R d\rho_2 \frac{(R - \rho_2)^{1-m}}{(R^2 - r_1\rho_2)^{3-2m}} = \int_0^{r_1} + \int_{r_1}^R.$$

$$\cdot \int_0^{r_1} \leqq \int_0^{r_1} d\rho_2 \frac{(R - \rho_2)^{1-m}}{(R^2 - R\rho_2)^{3-2m}} = \frac{1}{R^{3-2m}} \int_0^{r_1} d\rho_2 \frac{1}{(R - \rho_2)^{2-m}} =$$

$$= \frac{1}{R^{3-2m}} \cdot \frac{1}{1-m} \left[\frac{1}{(R - r_1)^{1-m}} - \frac{1}{R^{1-m}}\right] \leqq \frac{1}{R^{3-2m}} \cdot \frac{1}{(1-m)(R - r_1)^{1-m}}.$$

$$\cdot \int_{r_1}^R \leqq \int_{r_1}^R d\rho_2 \frac{(R - \rho_2)^{1-m}}{(R^2 - r_1 R)^{3-2m}} = \frac{1}{(R - r_1)^{3-2m} \cdot R^{3-2m}} \cdot \frac{1}{2-m} \cdot (R - r_1)^{2-m}.$$

Nous avons donc

$$\int_0^R d\rho_2 \frac{(R - \rho_2)^{1-m}}{(R^2 - r_1\rho_2)^{3-2m}} \leqq \frac{1}{R^{3-2m} \cdot (R - r_1)^{1-m}} \left(\frac{1}{1-m} + \frac{1}{2-m}\right).$$

On a donc l'inégalité

$$|I_{x_1}|, \ |I_{y_1}| \leqq \mathcal{A} \cdot 2^2 \cdot \pi (R + r_1)^{1-m} \left(\frac{1}{1-m} + \frac{1}{2-m}\right) \leqq \mathcal{A} \cdot 2^{3-m} \pi R^{1-m}.$$

Nous avons ainsi le

Théorème 5: « Les intégrales I_{x_1}, I_{y_1} satisfont dans le cas du cercle aux inégalités

(64)
$$|I_{x_1}|,\ |I_{y_1}| \leqq \mathcal{A}\pi R^{1-m}\cdot\frac{12}{1-m}.$$

Il est évident que l'on pourrait améliorer de beaucoup cette inégalité.

11. Envisageons maintenant le domaine *général* G. On a

$$G_x = G^1_{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} + G^1_{y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x},\quad G_y = G^1_{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y} + G^1_{y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y},$$

donc

$$|G_x|^2 \leqq (G^{1_2}_{x_1} + G^{1_2}_{y_1})\left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2\right],$$

$$|G_y|^2 \leqq (G^{1_2}_{x_1} + G^{1_2}_{y_1})\left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)^2\right],$$

Nous avons donc

$$|G_x| \leqq \frac{R^2 - r_2^2}{(R^2 - r_1^2)r_2}\left|\frac{dz_1}{dz}\right|,\quad |G_y| \leqq \frac{R^2 - r_2^2}{(R^2 - r_1^2)r_2}\left|\frac{dz_1}{dz}\right|.$$

Mais $\left|\frac{dz_1}{dz}\right|$ est plus petit que $\frac{1}{\alpha}$, on a donc

$$|I_x|,\ |I_y| \leq \frac{1}{\alpha}\int\limits_G \frac{R^2 - r_2^2}{(R^2 - r_1^2)r_2}|f(\xi, \eta)|\,d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int\limits_G \frac{R^2 - r_2^2}{(R^2 - r_1^2)r_2}|f_1(\xi_1, \eta_1)|\left|\frac{dz}{dz_1}\right|^2 d\xi_1 d\eta_1 \leqq$$

$$\leqq \frac{\beta^2}{\alpha}\int\limits_{K_1} \frac{R^2 - r_2^2}{(R^2 - r_1^2)r_2}|f_1(\xi_1, \eta_1)|\,d\xi_1 d\eta_1.$$

Or on a

$$|f_1(\xi_1, \eta_1)| \leqq \frac{\mathcal{A}}{\delta^m} \leqq \frac{\mathcal{B}}{\delta_1{}^m\alpha^m},$$

donc

$$|I_x|,\ |I_y| \leqq \mathcal{A}\,\frac{\beta^2}{\alpha^{1+m}}\int\limits_{K_2}\frac{R^2 - \rho_2^2}{R^2 - r_1^2}\left|\frac{d\zeta_1}{d\zeta_2}\right|\frac{1}{\delta_1{}^m}\,d\rho_2 d\varphi_2.$$

Or nous avons déjà calculé cette intégrale et nous obtenons

(65)
$$|I_x|,\ |I_y| \leqq \mathcal{A}\pi\cdot R^{1-m}\cdot\frac{12}{1-m}\,\frac{\beta^2}{\alpha^{1+m}}.$$

Nous avons donc le théorème:

THÉORÈME 6: « Les intégrales I_x, I_y étendues au domaine G satisfont aux inégalités (65), α, β étant les bornes inférieure et supérieure de $\left|\frac{dz}{dz_1}\right|$ dans K_1 ».

12. Revenons maintenant à l'équation différentielle (1). On peut maintenant indiquer des valeurs numériques des nombres K, K' du n.º 3. D'après le théorème 3, on peut poser

$$K = \frac{\beta^2}{\alpha^{1+m}} \cdot \frac{R^{1-m}}{1-m}, \tag{66}$$

et d'après le théorème 6, on peut poser également

$$K' = 6\,\frac{\beta^2}{\alpha^{1+m}} \cdot \frac{R^{1-m}}{1-m}. \tag{67}$$

L'intégrale en question existe donc, si l'on a les inégalités

$$\mathfrak{A}\delta\,\frac{\beta^2}{\alpha^{1+m}} \cdot \frac{R^{1-m}}{1-m} < L, \tag{68}$$

$$6\mathfrak{A}\,\frac{\beta^2}{\alpha^{1+m}} \cdot \frac{R^{1-m}}{1-m} < L', \tag{69}$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha^{1+m}} \cdot \frac{R^{1-m}}{1-m}(A + 6B + 6C) < 1. \tag{70}$$

Cela aura lieu certainement si l'on transforme le domaine G *homothétiquement*, le rapport d'homothétie c étant suffisamment petit. En effet, si l'on remplace z par $cz = Z$ $\frac{\beta^2}{\alpha^{1+m}}$ est multiplié par c^{1-m}.

Nous avons donc le théorème suivant:

THÉORÈME 7: « Envisageons un domaine G et supposons que la fonction $z_1 = \omega(z)$ transforme ce domaine conformément en l'intérieur du cercle K_1 de rayon R. Supposons que la dérivée $\omega_1'(z_1)$ de la fonction $\omega_1(z_1)$ inverse de la fonction $\omega(z)$ soit bornée en module supérieurement et inférieurement, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ étant les bornes inférieure et supérieure. Cela arrivera certainement lorsque le contour C est formé d'une courbe de JORDAN rectifiable et telle que $z(s) = x(s) + iy(s)$ satisfasse à la condition de HÖLDER

$$|z'(s) - z'(s+h)| \leq k\,|h|^{\alpha}, \tag{71}$$

$k > 0$, $0 < \alpha < 1$, car alors $\omega'(z)$ est continu et $\neq 0$ dans $G + C$.

D étant le diamètre du domaine G, il existe une intégrale u continue dans $G+C$ et nulle sur C, possédant des dérivées premières continues dans G et de même des dérivées secondes dans G; u et ses dérivées premières sont donnés par des séries infinies

$$u = u_1 + v_2 + v_3 + \dots \tag{72}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial x} + \dots \tag{73}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial y} + \dots . \tag{74}$$

Ces séries convergent uniformément et absolument dans G, la première dans $G + C$. Les trois conditions suivantes sont des conditions *suffisantes*:

I. $$\mathfrak{A} D \frac{\beta^2}{\alpha^{1+m}} \cdot \frac{R^{1-m}}{1-m} \leqq L,$$

II. $$6\mathfrak{A} \frac{\beta^2}{\alpha^{1+m}} \cdot \frac{R^{1+m}}{1-m} \leqq L',$$

III. $$\frac{\beta^2}{\alpha^{1+m}} \cdot \frac{R^{1-m}}{1-m} (A + 6B + 6C) < 1 \text{ ».}$$

Si le domaine G est le cercle K de rayon R, on a les trois conditions suffisantes

I. $$\mathfrak{A} D \cdot \frac{R^{1-m}}{1-m} \leqq L,$$

II. $$6\mathfrak{A} \cdot \frac{R^{1-m}}{1-m} \leqq L',$$

III. $$\frac{R^{1-m}}{1-m} (A + 6B + 6C) < 1.$$

Su una speciale classe di serie di funzioni analitiche.

Memoria 2ª di LUIGI ONOFRI (a Bologna).

Sunto. - *L'A. studia le funzioni analitiche definite da serie della forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n f_n[\varphi^{p_n}(z)],$$

essendo $f_n(u)$, $\varphi(z)$ *funzioni intere assegnate.*

In un lavoro recentemente pubblicato in questi « Annali » (¹), ho esposto un metodo generale per determinare i campi di convergenza uniforme delle serie del tipo

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n f_n[\varphi^{p_n}(z)],$$

essendo:

i coefficienti a_n delle costanti;

gli esponenti p_n dei numeri interi, positivi tendenti all'infinito;

le funzioni $f_n(u)$, $\varphi(z)$ analitiche, intere e la $\varphi(z)$ non costante.

Nella presente Memoria mi occupo della rappresentazione di una funzione analitica assegnata $F(z)$ mediante serie del tipo (1) e della ricerca dei punti singolari di $F(z)$.

Prima di riassumere brevemente il contenuto di questo lavoro, credo opportuno di ricordare al lettore quei risultati esposti nella prima Memoria ai quali dovrò ricorrere frequentemente nel seguito.

Indicati con $M_n(r^{p_n})$ il massimo di $|f_n(u)|$ sulla circonferenza $(0, r^{p_n})$ e con R, $R(r)$ i raggi di convergenza delle serie di potenze

$$\sum_{n}^{\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n}^{\infty} a_n M_n(r^{p_n}) z^n,$$

ho dimostrato che il campo C formato con i punti z del piano nei quali è

$$R(|\varphi(z)| + 0) - |z| > 0,$$

(¹) L. ONOFRI, *Su una speciale classe di serie di funzioni analitiche.* « Annali di Matematica pura ed applicata », Tomo XII, nn. 1-2, 1933-34.

gode delle seguenti proprietà:

a) In ogni campo limitato e completamente interno a C la serie (1) converge uniformemente.

b) La (1) non può convergere uniformemente nell'intorno di un punto esterno a C.

Se poi si suppone $f_n(0)=1$ e la successione delle $f_n(u)$ egualmente limitata in un intorno della origine, si prova facilmente che il campo C è contenuto nel cerchio $(0, R)$.

Nella prima parte di questa Memoria, considero una serie di potenze di z, avente raggio di convergenza $\delta > 0$, e mi propongo di determinare una serie del tipo (1) che abbia la proprietà di convergere uniformemente in un intorno della origine e di rappresentare nel medesimo intorno la funzione analitica $F(z)$ definita dalla serie di potenze considerata.

Supposto $\varphi(0)=0$, $f_n(0)=1$ ed indicato con r' il limite superiore dei valori di r pei quali la successione

$$M_0(r^{p_0}),\ M_1(r^{p_1}), \dots,\ M_n(r^{p_n}), \dots$$

è limitata superiormente e con $(0, \rho')$ la circonferenza su cui il massimo di $|\varphi(z)$ è eguale a r', è sempre possibile determinare i coefficienti a_n in modo che la corrispondente serie (1) rappresenti la $F(z)$ almeno nel minore dei due cerchi $(0, \delta)$, $(0, \rho')$.

Se risulta $\rho' \geq \delta$, il campo C contiene tutto il cerchio $(0, \delta)$ e, talvolta, anche punti esterni a questo cerchio. Beneinteso, se ciò accade, il contorno di C deve passare pei punti singolari della $F(z)$ posti sulla circonferenza $(0, \delta)$.

La seconda parte della Memoria è dedicata appunto allo studio dei casi in cui C è più ampio di $(0, \delta)$ ed alla ricerca dei punti singolari della $F(z)$ posti sulla periferia di questo cerchio. In particolare, si trova che se $\rho' = \delta$, $R \neq \delta$ e se la $\varphi(z)$ non è della forma kz^m (k costante, m intero, positivo), i punti singolari di $F(z)$, aventi modulo δ, sono in numero finito e soddisfano l'equazione $|\varphi(z)| = r'$.

È noto che sulla circonferenza di convergenza di una serie di potenze esiste almeno un punto singolare della funzione analitica definita dalla serie stessa. Un fatto analogo non sempre si riscontra nelle serie da me considerate in quanto può avvenire che le funzioni $F(z)$, definite da esse, siano regolari nell'interno e sul contorno di C.

Nella terza parte di questo lavoro ho esaminata la questione stabilendo un gruppo di proposizioni che, in numerosi casi, sono sufficienti a rivelare il comportamento di $F(z)$ sul contorno di C.

Una di queste proposizioni può riguardarsi come l'estensione alle serie (1) di un noto teorema sulle serie di potenze dovuto al VIVANTI.

I.

1. Consideriamo una successione di numeri interi positivi

$$p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$$

tendenti all'infinito ed una successione di funzioni analitiche intere

$$f_0(u), f_1(u), \dots, f_n(u), \dots$$

eguali all'unità nella origine.

Posto, per comodità di scrittura,

$$f_n(u) = 1 + ug_n(u), \tag{2}$$

indichiamo con $G_n(r^{p_n})$ il massimo della funzione $g_n(u)|$ sulla circonferenza $(0, r^{p_n})$ e con r' il limite superiore dei valori di r pei quali la successione

$$r^{p_n} G_n(r^{p_n}) \qquad (n = 0, 1, \dots)$$

è limitata superiormente.

È facile dimostrare che per ogni $r < r'$ è:

$$\lim_{n \to \infty} r^{p_n} G_n(r^{p_n}) = 0. \tag{3}$$

Difatti, preso un numero r_1 soddisfacente alle disuguaglianze

$$r < r_1 < r' \tag{4}$$

e determinato un numero positivo A in modo che si abbia:

$$r_1^{p_n} G_n(r_1^{p_n}) < A \qquad (n = 0, 1, \dots), \tag{5}$$

si può scrivere, in forza delle (4) e (5),

$$r^{p_n} G_n(r^{p_n}) \leq \left(\frac{r}{r_1}\right)^{p_n} r_1^{p_n} G_n(r_1^{p_n}) < \left(\frac{r}{r_1}\right)^{p_n} A.$$

2. Nelle questioni che tratteremo più avanti, il numero r', dianzi definito, verrà, di norma, supposto positivo. In generale, tale numero non può superare l'unità richiedendo l'ipotesi opposta un particolarissimo comportamento delle funzioni $f_n(u)$. Ed invero, si ha che:

Se $r' > 1$, *le funzioni* $f_n(u)$ *tendono uniformemente all'unità in ogni regione finita del piano.*

Evidentemente, basterà provare la tendenza uniforme allo zero delle funzioni $ug_n(u)$ in un cerchio $(0, S)$ di raggio S scelto comunque.

All'uopo, si fissino ad arbitrio un $r > 1$, ma inferiore ad r', ed un $\varepsilon > 0$. In virtù della (3) e della tendenza all'infinito degli esponenti p_n, sarà possibile determinare un indice $\bar{n}$ in modo che per $n > \bar{n}$ si abbia, ad un tempo,

$$r^{p_n} > S, \quad r^{p_n} G_n(r^{p_n}) < \varepsilon.$$

Ciò vuol dire che, per $n > \bar{n}$ e $|u| \leq S$, è:

$$|u g_n(u)| < \varepsilon.$$

3. Sia $F(z)$ una funzione analitica definita da una serie di potenze

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \tag{6}$$

avente il raggio di convergenza δ maggiore di zero.

Vogliamo vedere se si può determinare una serie del tipo (1), ma differente dalla (6), la quale sia atta a rappresentare, in un conveniente intorno della origine, la funzione data $F(z)$.

Per precisare maggiormente i dati della questione, ammetteremo che le funzioni $f_n(u)$ siano del tipo (2) e che la $\varphi(z)$ sia nulla per $z = 0$.

Cominciamo intanto con l'osservare che:

Una serie del tipo (1), *convergente uniformemente in un intorno della origine, rappresenta la* F(z) *nel medesimo intorno, se e soltanto se i coefficienti* a_n *soddisfano alle relazioni*

$$A_0 = F(0) = a_0.$$

$$A_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{a_\nu}{(n-\nu)!} D^{n-\nu} \varphi^{p_\nu}(0) g_\nu[\varphi^{p_\nu}(0)] + a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Posto:

$$F_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu f_\nu[\varphi^{p_\nu}(z)],$$

si dividano ambo i membri di questa eguaglianza per z^{n+1} ($n = 0, 1, \ldots$) e si integrino poi, così divisi, lungo una circonferenza $(0, \rho)$ contenuta nell'intorno in cui l'eguaglianza stessa è valida. Eseguendo, al 2° membro, l'integrazione termine a termine ed approfittando del teorema integrale di Cauchy, si perviene ad una eguaglianza del tipo (7), salvo il cambiamento di $F^{(n)}(0)$ in $F_1^{(n)}(0)$.

Quindi, se $F(z) = F_1(z)$, valgono le (7), e viceversa se queste relazioni sono soddisfatte, si ha, per ogni n, $F^{(n)}(0) = F_1^{(n)}(0)$ e cioè $F(z) = F_1(z)$.

È utile notare come le (7) ci assicurino l'unicità della soluzione del problema, in corrispondenza di un prefissato sistema di funzioni $f_n(u)$, $\varphi(z)$ e di numeri p_n.

4. La proposizione precedente ci permette, in sostanza, di ricondurre la questione enunciata al n.º 3 alla ricerca del campo C di convergenza uniforme di una serie del tipo (1) i cui coefficienti a_n soddisfano alle (7). E per giungere alla conoscenza di C ci serviremo dei metodi e dei risultati che trovansi esposti nella citata Memoria 1ª.

Prendiamo una circonferenza con centro l'origine e di raggio ρ qualsivoglia ed indichiamo con r il massimo che la funzione $|\varphi(z)|$ assume sulla predetta circonferenza. Applicando una nota formula di CAUCHY, abbiamo:

$$\frac{1}{(n-\nu)!} D^{n-\nu}\varphi^{p_\nu}(0) g_\nu[\varphi^{p_\nu}(0)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} \frac{\varphi^{p_\nu}(z) g_\nu[\varphi^{p_\nu}(z)]}{z^{n+1-\nu}}\, dz,$$

da cui:

$$\left|\frac{1}{(n-\nu)!} D^{n-\nu}\varphi^{p_\nu}(0) g_\nu[\varphi^{p_\nu}(0)]\right| \leq \frac{r^{p_\nu} G_\nu(r^{p_\nu})}{\rho^{n-\nu}} \qquad \begin{pmatrix}\nu=0,1,\ldots\\ n\geq\nu\end{pmatrix}. \tag{8}$$

E poichè:

$$|a_n| \leq |A_n| + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{|a_\nu|}{(n-\nu)!} \left| D^{n-\nu}\varphi^{p_\nu}(0) g_\nu[\varphi^{p_\nu}(0)]\right| ,$$

sarà anche, in forza delle (8),

$$|a_n| \leq |A_n| + \frac{1}{\rho^n} \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu| \rho^\nu r^{p_\nu} G_\nu(r^{p_\nu}) \qquad (n=1,2,\ldots). \tag{9}$$

Da questa disuguaglianza discende la seguente

$$|a_n| \leq \frac{1}{\rho^n} \prod_{\nu=0}^{n-1} [1 + r^{p_\nu} G_\nu(r^{p_\nu})] \cdot \sum_{\mu=0}^{n} |A_\mu| \rho^\mu \qquad (n=1,2,\ldots), \tag{10}$$

come ora mostreremo applicando il principio d'induzione.

Ritenendo valida la (10) sino all'indice $n-1$ (per $n=1$ si può verificare direttamente), si ha, per la (9),

$$\begin{aligned}
|a_n| \leq \frac{1}{\rho^n} \Bigg\{ & \sum_{\nu=1}^{n-1} \left[r^{p_\nu} G_\nu(r^{p_\nu}) \cdot \prod_{m=0}^{\nu-1} (1 + r^{p_m} G_m(r^{p_m})) \cdot \sum_{\mu=0}^{\nu} |A_\mu| \rho^\mu \right] + \\
& + |A_0| r^{p_0} G_0(r^{p_0}) + |A_n| \rho^n \Bigg\} \leq \\
\leq \frac{1}{\rho^n} \Bigg\{ & \sum_{\nu=1}^{n-1} \left[r^{p_\nu} G_\nu(r^{p_\nu}) \cdot \prod_{m=0}^{\nu-1} (1 + r^{p_m} G_m(r^{p_m})) \right] + \\
& + r^{p_0} G_0(r^{p_0}) + 1 \Bigg\} \sum_{\mu=0}^{n} |A_\mu| \rho^\mu = \\
= \frac{1}{\rho^n} & \prod_{\nu=0}^{n-1} [1 + r^{p_\nu} G_\nu(r^{p_\nu})] \cdot \sum_{\mu=0}^{n} |A_\mu| \rho^\mu .
\end{aligned}$$

Supponiamo ora che il numero ρ sia, ad un tempo, inferiore a δ ed al raggio ρ' di quella circonferenza sulla quale la funzione $|\varphi(z)|$ assume come massimo assoluto il valore r' definito al n.° 1. Allora, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si potrà determinare, in forza della (3), un indice $\bar{\nu}$ in guisa che per $\nu > \bar{\nu}$ sia:

$$r^{p_\nu} G_\nu(r^{p_\nu}) < \varepsilon.$$

Tenendo conto di ciò, dalla (10) si ricava:

$$|a_n| < \frac{1}{\rho^n} \prod_{\nu=0}^{\bar{\nu}} [1 + r^{p_\nu} G_\nu(r^{p_\nu})] \cdot (1+\varepsilon)^{n-\bar{\nu}-1} \cdot \sum_{\mu=0}^{n} |A_\mu| \rho^\mu,$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε e per essere $\rho < \delta$,

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\rho}. \tag{11}$$

Questa disuguaglianza serve ad assicurarci che il raggio di convergenza R della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

non può essere inferiore ad entrambi i numeri δ e ρ'.

Passiamo, infine, ad esaminare la funzione $R(r)$ (¹). Poichè:

$$|a_n| M_n(r^{p_n}) \geq |a_n|,$$

si avrà: $R(r) \leq R$, e poichè, per $r < r'$ e per n sufficientemente elevato, è:

$$|a_n| M_n(r^{p_n}) \leq |a_n| [1 + r^{p_n} G_n(r^{p_n})] \leq |a_n| (1+\varepsilon),$$

si avrà anche: $R(r) \geq R$.

Onde:

$$R(r) = R \quad \text{per} \quad r < r'.$$

Da tutto ciò consegue il seguente

TEOREMA. — *Se:*

a) *la serie di potenze*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$$

ha il raggio di convergenza δ maggiore di zero;

(¹) Per il significato delle notazioni qui usate, vedi il n° 2 della Memoria 1ª e l'intro. duzione del presente lavoro.

b) *le funzioni* $f_n(u)$ *sono del tipo* (2) *e la* $\varphi(z)$ *è nulla nell'origine;*

c) *il numero* r' *è positivo;*

d) *i coefficienti* a_n *soddisfano alle* (7);

allora:

il numero R *non è inferiore ad entrambi i numeri* ρ' *e* δ;

il campo C *di convergenza uniforme della* (1) *è contenuto nel cerchio* (0, R) *e contiene tutti i punti* z *di questo cerchio nei quali è* $|\varphi(z)| < r'$;

in ogni regione connessa contenente l'origine ed appartenente a C *la serie* (1) *rappresenta la funzione data* F(z); *in particolare, tale rappresentazione è valida nel cerchio comune a* (0, ρ') *e* (0, δ).

5. ESEMPIO. — Proponiamoci di rappresentare la funzione $F(z)$, individuata dalla (6), mediante una serie del tipo

$$F(z) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \left(1 + \frac{z^n}{k_n}\right), \tag{12}$$

essendo i numeri k_n tutti differenti dallo zero e tali che la successione $\sqrt[n]{|k_n|}$ abbia limite positivo per n tendente all'infinito.

Si ha, evidentemente, $\rho' = r' = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|k_n|}$.

Applicando le (7) otteniamo le relazioni

$$A_{2n+1} = a_{2n+1}, \quad A_{2n} = a_{2n} + \frac{a_n}{k_n}, \tag{13}$$

le quali ci forniscono i valori dei coefficienti a_n d'indice dispari e ci permettono di determinare facilmente i coefficienti restanti. Invero, indicato con d un numero dispari qualsivoglia, si scrivano le seconde delle (13) per i valori $d, 2d, \dots, 2^{\mu-1}d$ dell'indice n e si risolva il sistema di equazioni, così ottenuto, rispetto alle incognite $a_{2d}, a_{4d}, \dots, a_{2^\mu d}$. Operando in tal guisa, si perviene alla formola

$$(-1)^\mu a_{2^\mu d} = \frac{1}{k_{2^{\mu-1}d} \cdot k_{2^{\mu-2}d} \cdots k_d} \sum_{m=0}^{\mu} (-1)^m k_{2^{m-1}d} \cdots k_d A_{2^m d}, \tag{14}$$

atta al calcolo dei coefficienti a_n d'indice pari.

Premesso ciò, è facile determinare il campo C di convergenza uniforme della serie (12) [1].

---

[1] Alla conoscenza di C si può giungere, in modo assai rapido, determinando i cerchi di convergenza delle serie $\Sigma a_n z^n$, $\Sigma \frac{a_n z^{2n}}{k_n}$ nelle quali può immaginarsi decomposta la (12). Qui però, dato il carattere illustrativo dell'esempio, abbiamo preferito applicare i procedimenti generali esposti al n° 4.

Si osservi, intanto, che, per essere $\varphi(z) = z$, questo campo è un cerchio col centro nell'origine ed il cui raggio S non può, per ragioni ovvie, superare il raggio di convergenza δ della (6).

Se $\rho' \geq \delta$, la serie (12) converge uniformemente in tutto $(0, \delta)$, onde è $S = \delta$.

Se invece $\rho' < \delta$, il raggio S assume il valore δ oppure il valore ρ' secondo che R è maggiore od eguale a ρ'. Difatti, per essere:

$$R(r) = \frac{R\rho'}{r} \qquad (r > \rho'),$$

il contorno del campo C è costituito dai punti z nei quali è:

$$\frac{R\rho'}{|z|} = |z|$$

e cioè $S = \sqrt{R\rho'}$. Se poi si avesse, ad un tempo, $R > \rho'$, $S < \delta$, le due serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n - a_n) z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^{2n}}{k_n},$$

(identiche in forza della (12)) avrebbero per raggi di convergenza i due numeri distinti δ ed S.

Il calcolo del numero R può effettuarsi agevolmente mediante le (13) e (14) che servono ad esprimere le a_n in funzione delle quantità note A_n; è però interessante osservare come in generale, e cioè salvo casi assai particolari, si trovi essere $R = \rho'$.

Si ha, invero,

$$\overline{\lim} \sqrt[2^\mu d]{|a_{2^\mu d}|} = \frac{\overline{\lim} \sqrt[2^\mu d]{\left| \sum_{m=0}^{\mu} (-1)^m k_{2^{m-1}d} \ldots k_d A_{2^m d} \right|}}{\lim\limits_{\mu \to \infty} \sqrt[2^\mu d]{|k_{2^{\mu-1}d} \ldots k_d|}},$$

$$\lim_{\mu \to \infty} \sqrt[2^\mu d]{|k_{2^{\mu-1}d} \ldots k_d|} = \rho',$$

$$\overline{\lim} \sqrt[2^\mu d]{|a_{2^\mu d}|} = \frac{\overline{\lim} \sqrt[2^\mu d]{\left| \sum_{m=0}^{\mu} (-1)^m k_{2^{m-1}d} \ldots k_d A_{2^m d} \right|}}{\rho'},$$

e quindi, se R è maggiore di ρ', il limite massimo che figura al 2° membro deve essere inferiore all'unità.

Manifestamente, ciò richiede che sia:

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m k_{2^{m-1}d} \dots k_d A_{2^m d} = 0,$$

comunque si scelga il numero dispari d.

In generale, è dunque $R = \rho'$ e, conseguentemente, $S = \rho'$.

II.

6. Questo paragrafo è dedicato allo studio delle principali proprietà del campo C di convergenza uniforme di una serie del tipo (1) rappresentante la funzione data $F(z)$ ed alla ricerca di criteri che servano ad assicurarci la convergenza della (1) in una regione più ampia di $(0, \delta)$ o, almeno, in tutto questo cerchio.

Ammettiamo, dapprima, che sia $\rho' > \delta$.

In base alla (11) deve essere $R \geq \delta$; d'altra parte, se fosse $R > \delta$, la serie (1) convergerebbe uniformemente in un cerchio di raggio maggiore di δ, la qualcosa è assurda possedendo la $F(z)$ almeno un punto singolare di modulo δ. Quindi:

Se $\rho' > \delta$, il campo C *coincide con il cerchio* $(0, \delta)$.

7. Passiamo a studiare il caso in cui è $\rho' = \delta$.

Sempre dalla (11) risulta $R \geq \delta$. Se $R = \delta$, il campo C coincide con il cerchio $(0, \delta)$. Se $R > \delta$, deve essere $R(r' + 0) \leq \delta$. Invero, nel caso opposto, il campo C conterrebbe tutti i punti della circonferenza $(0, \delta)$; e ciò non è possibile essendovi su tale circonferenza qualche punto singolare della $F(z)$. Pertanto:

Il campo C *è formato da tutti e soli i punti* z *del piano nei quali è:*

$$|z| < R, \quad |\varphi(z)| < r'.$$

In particolare, se $\varphi(z) = kz^m$ (m intero, positivo), sulla circonferenza $(0, \delta)$ si ha sempre $|\varphi(z)| = r'$, onde C coincide con il cerchio $(0, \delta)$.

Se invece $\varphi(z)$ non è del tipo suddetto, il campo C è sicuramente più ampio del cerchio $(0, \delta)$. In tal caso, la serie (1) rappresenta la $F(z)$ in una regione più estesa di quella fornita dalla ordinaria serie di TAYLOR, appartenendo alla suddetta regione tutti quei punti z della circonferenza $(0, \delta)$ nei quali è $|\varphi(z)| < r'$.

Osserviamo, infine, che la funzione $F(z)$ deve possedere, sulla circonferenza $(0, \delta)$, un numero finito di punti singolari poichè, se ciò non avvenisse, la funzione $|\varphi(z)|$, assumendo il valore r' in infiniti punti di $(0, \delta)$, sarebbe necessariamente della forma kz^m.

Riassumendo quanto è stato esposto nel presente numero, possiamo enunciare la seguente proposizione:

Se $\rho' = \delta$, *il campo* C *coincide con il cerchio* $(0, \delta)$ *qualora sia* $\mathrm{R} = \delta$ *oppure* $\varphi(\mathrm{z}) = \mathrm{kz^m}$. *In ogni altro caso, il campo* C *è più ampio di* $(0, \delta)$ *e la funzione* F(z), *rappresentata dalla* (1), *possiede, sulla circonferenza* $(0, \delta)$, *un numero finito di punti singolari. Questi punti* z *si trovano fra le soluzioni dell' equazione*

$$|\varphi(z)| = r'.$$

8. ESEMPIO. — Supponiamo che la funzione $F(z)$ sia rappresentata da una serie del tipo

$$F(z) = \sum_{n\;0}^{\infty} a_n z^n \left[1 + b_n z^{p_n} \left(\frac{z+c}{1+c}\right)^{p_n}\right],$$

essendo a_n, b_n, c numeri positivi e:

$$R > 1, \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n b_n} > 1, \quad \overline{\lim} \sqrt[p_n]{b_n} = 1.$$

Si ha, manifestamente,

$$\varphi(z) = \frac{z(z+c)}{1+c}, \quad f_n(u) = 1 + b_n u, \quad r' = 1, \quad \rho' = 1,$$

onde $\delta \geq 1$. D'altra parte, il numero δ non può superare l'unità inquantochè la serie data è divergente per $z = 1$. Avendosi, pertanto, $\delta = \rho'$, $R > \delta$, possiamo asserire, applicando la proposizione del nº 7, che il campo C è formato con i punti z nei quali è:

$$|z| < R, \quad |z(z+c)| < 1 + c,$$

e che la funzione $F(z)$ possiede, sulla circonferenza $(0, 1)$, l'unico punto singolare $z = 1$.

9 *Se* $\rho' = \delta$ *e se, per* $\mathrm{r} > \mathrm{r}'$, *si può porre:*

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{M_n(r^{p_n})} \leq V(r),$$

essendo $\mathrm{V}(\mathrm{r}' + 0) = 1$, *allora il campo* C *coincide con il cerchio* $(0, \delta)$.

Si ha:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n \; M_n(r^{p_n})} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \; V(r),$$

cioè:

$$R(r) \geq \frac{R}{V(r)} \qquad (r > r'),$$

$$R(r' + 0) \geq R.$$

Ma, per quanto è stato osservato al n° 7, deve essere:

$$R(r' + 0) \leq \delta, \quad R \geq \delta,$$

onde:

$$R = \delta.$$

10. Il precedente criterio è di facile e frequente applicazione. Ad esempio: *Se:*

$\rho' = \delta$;

il limite massimo μ *del rapporto* $\frac{p_n}{n}$ *è finito*;

le funzioni $f_n(u)$ *sono del tipo*

$$f_n(u) = 1 + b_{1n}u + b_{2n}u^2 + \dots + b_{mn}u^m,$$

con m *indipendente da* n;

allora:

il campo C *coincide con il cerchio* $(0, \delta)$.

Poichè per $r < r'$ la successione $M_n(r^{p_n})$ è limitat periormente, i numeri

$$\overline{\lim} \sqrt[sp_n]{|b_{sn}|} \qquad (s = 1, 2, \dots, m)$$

non potranno superare $\frac{1}{r'}$. Di conseguenza, preso un numero $k > \frac{1}{r'}$ ed un $r > r'$, si potrà determinare un indice $\bar{n}$ in modo che per $n > \bar{n}$ sia:

$$M_n(r^{p_n}) \leq 1 + k^{p_n}r^{p_n} + k^{2p_n}r^{2p_n} + \dots + k^{mp_n}r^{mp_n} <$$
$$< \frac{(kr)^{mp_n+1} - 1}{kr - 1},$$

da cui:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{M_n(r^{p_n})} \leq (kr)^{m\mu},$$

ossia, per l'arbitrarietà di k,

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{M_n(r^{p_n})} \leq \left(\frac{r}{r'}\right)^{m\mu}.$$

11. Esaminiamo, ora, il caso in cui si ha $\rho' < \delta$ essendo δ un numero finito. Per ragioni di semplicità, ammetteremo che la successione $\sqrt[n]{M_n(r^{p_n})}$

abbia limite finito per ogni valore di r e porremo:

$$V(r) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{M_n(r^{p_n})}.$$

In base a tale ipotesi, si ha:

$$R(r) = \frac{R}{V(r)}. \tag{15}$$

Indicati con m ed M il minimo ed il massimo di $|\varphi(z)|$ sulla circonferenza $(0, \delta)$, osserviamo che il limite $R(M+0)$ non può superare δ, esistendo sulla predetta circonferenza qualche punto singolare della $F(z)$. Ciò richiede, per la (15), che sia:

$$R \leq \delta V(M+0).$$

Se $R < \delta V(M-0)$, si ha:

$$R(r) < \delta \frac{V(M-0)}{V(r)}$$

e quindi per valori di r minori di M ma abbastanza prossimi ad M:

$$R(r) < \delta.$$

Ciò significa che il campo C non può contenere tutti i punti del cerchio $(0, \delta)$.

Supponiamo, invece, che sia $R = \delta V(M-0)$. Dalla (15) abbiamo:

$$R(r) = \delta \frac{V(M-0)}{V(r)}, \quad R(r+0) = \delta \frac{V(M-0)}{V(r+0)},$$

ed anche:

$$R(r+0) > \delta,$$

purchè r sia inferiore alla più piccola radice ρ della equazione

$$V(r+0) = V(M-0) \text{ (}^1\text{)}.$$

Quindi, se il minimo m di $|\varphi(z)|$ è inferiore a ρ, il campo C è più ampio di $(0, \delta)$, se, altrimenti, $m \geq \rho$, tutti i punti della circonferenza $(0, \delta)$ appartengono al contorno di C.

Infine, se $R > \delta V(M-0)$, dalla (15) risulta:

$$R(r+0) > \delta \frac{V(M-0)}{V(r+0)},$$

(1) Se non esistono radici, al numero ρ va attribuito il valore M.

e, conseguentemente,

$$R(r+0) > \delta$$

per ogni $r < M$. Onde, il campo C contiene tutti i punti della circonferenza $(0, \delta)$ nei quali è $|\varphi(z)| < M$.

Siamo così giunti al risultato seguente:

a) *Se* $R < \delta V(M-0)$, C *non contiene tutti i punti di* $(0, \delta)$.

b) *Se* $R = \delta V(M-0)$, $m \geq \rho$, *il cerchio* $(0, \delta)$ *appartiene a* C *e la periferia di* $(0, \delta)$ *al contorno di* C.

c) *Se* $R = \delta V(M-0)$, $m < \rho$, C *è più ampio di* $(0, \delta)$ *ed i punti singolari della* $F(z)$, *aventi modulo* δ, *soddisfano alla disuguaglianza*

$$|\varphi(z)| \geq \rho.$$

d) *Se* $R > \delta V(M-0)$, $\varphi(z) = kz^{\mu}$, C *coincide con* $(0, \delta)$; *in ogni altro caso*, C *è più ampio di* $(0, \delta)$ *ed i punti singolari della* $F(z)$, *aventi modulo* δ, *soddisfano alla equazione*

$$|\varphi(z)| = M.$$

12. ESEMPIO I. — Consideriamo la serie

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n [1 + b_n \varphi^{p_n}(z)],$$

essendo:

a_n, b_n numeri positivi;

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ divergente;

$\varphi^{(n)}(0)$ positiva o nulla, comunque sia n, e $\varphi(1) = 1$;

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{n} = \mu > 0, \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[p_n]{b_n} = k > 1, \quad R = k^{\mu}.$$

Mediante facili calcoli, si trova essere:

$$r' = \frac{1}{k}, \quad \rho' < 1, \quad V(r) = (kr)^{\mu}, \quad R(r) = \frac{1}{r^{\mu}} \quad \left(r > \frac{1}{k}\right).$$

Determiniamo, anzitutto, il numero δ; poichè $R(1) = 1$, il campo C contiene tutti i punti del cerchio $(0, 1)$, onde $\delta \geq 1$; ma non può essere $\delta > 1$ inquantochè la serie data diverge per $z = 1$. È dunque $\delta = 1$.

Avendosi poi $M = 1$, $V(M-0) = k^{\mu} = R$, $\rho = 1$, possiamo affermare, applicando le proposizioni b) e c) del n° 11, che il campo C è generalmente più ampio del cerchio $(0, 1)$, coincidendo con questo cerchio soltanto se $\varphi(z) = z^{\nu}$.

In ogni caso, i punti singolari della $F(z)$, posti sulla circonferenza (0, 1), soddisfano alla equazione

$$|\varphi(z)| = 1.$$

ESEMPIO II. — Se $V(r) = 1$, comunque sia r, si ha $R(r) = R$, $R \leq \delta$. In conseguenza di ciò, il campo C viene a coincidere con il cerchio $(0, R)$.

Questa osservazione può applicarsi nel caso in cui le $f_n(u)$ siano del tipo

$$f_n(u) = 1 + b_{1n}u + b_{2n}u^2 + \dots + b_{mn}u^m,$$

con m indipendente da n, ed il rapporto $\frac{p_n}{n}$ tenda allo zero per n tendente all' infinito.

Invero, dalla disuguaglianza

$$M_n(r^{p_n}) < \frac{(kr)^{mp_n+1} - 1}{kr - 1} \qquad \left(k > \frac{1}{r'},\ r > r'\right),$$

che abbiamo dimostrata al n° 10, si deduce:

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{M_n(r^{p_n})} \leq 1,$$

e, per essere $M_n(r^{p_n}) \geq 1$,

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{M_n(r^{p_n})} = 1.$$

13. Vogliamo, infine, indicare un criterio di scelta per le funzioni $f_n(u)$, $\varphi(z)$ e per i numeri p_n che ci assicuri la convergenza uniforme della (1) in tutto il cerchio $(0, \delta)$. In base al Teorema generale del n° 4, basterà fare in modo che risulti $\rho' \geq \delta$.

Distinguiamo due casi:

a) δ *è un numero finito.* Le funzioni $f_n(u)$ siano del tipo (2), ma del resto comunque. Scelto un numero positivo $r_1 < 1$, si determinino gli esponenti p_n in guisa che la successione $M_n(r_1^{p_n})$ sia limitata superiormente. E ciò è possibile avendosi $f_n(0) = 1$.

Poi, presa una funzione intera $\psi(z)$ nulla nell' origine, si ponga $\varphi(z) = k\psi(z)$, avendo l' avvertenza di assumere il numero k in modo che il massimo di $|\varphi(z)|$ sulla circonferenza $(0, \delta)$ non superi r_1.

Con una siffatta scelta, risulta certamente $\rho' \geq \delta$.

b) δ *è infinito, cioè* F(z) *è funzione intera.* Converrà che sia $r' = \infty$ e quindi occorrerà che le funzioni $f_n(u)$ tendano uniformemente ad 1 in ogni regione finita del piano (vedi n° 2).

Ciò ammesso, si fissino, ad arbitrio, due numeri r_1, A maggiori di 1 ed una successione di numeri positivi k_ν tali che:

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{k_\nu}{\nu} = \infty.$$

Si determini poi un'altra successione di numeri interi

$$N_1 < N_2 < \dots < N_\nu < \dots$$

in guisa che per $n \geq N_\nu$ si abbia:

$$M_n(r_1^{k_\nu}) < A.$$

Questa determinazione è possibile in virtù della supposta convergenza uniforme delle $f_n(u)$ in ogni regione finita del piano.

Infine, si ponga:

$$p_n = \nu \quad \text{per} \quad N_\nu \leq n < N_{\nu+1},$$

lasciando arbitraria la scelta degli esponenti p_n i cui indici n risultino inferiori a N_1.

Preso allora un r qualsivoglia, si ha, per ogni ν non inferiore ad un conveniente $\bar{\nu}$,

$$r^\nu < r_1^{k_\nu},$$

e, per $n \geq N_{\bar{\nu}}$,

$$r^{p_n} < r_1^{k_\nu}, \quad M_n(r^{p_n}) \leq M_n(r_1^{k_\nu}) < A.$$

È dunque $r' = \infty$.

OSSERVAZIONE. — Questo procedimento si può applicare anche se δ è finito; anzi, esso presenta, rispetto al metodo indicato per il caso a), il vantaggio di non richiedere la conoscenza del numero δ.

III.

14. A differenza di quanto avviene per le ordinarie serie di potenze, le funzioni analitiche definite da serie del tipo (1) non sempre possiedono punti singolari sul contorno γ del campo C di convergenza uniforme. In altre parole, esistono dei casi nei quali si riscontra la regolarità delle suddette funzioni nell'interno e sul contorno di C. Per persuadersi di ciò, basta pensare che se R è inferiore a δ, il campo C è completamente interno al cerchio $(0, \delta)$.

Dalle considerazioni svolte ai n[i] 6, 7, 11, è agevole dedurre dei criteri che ci permettano di affermare l'esistenza su γ di punti singolari della $F(z)$.

Così, se $\rho' \geq \delta$ oppure se $\rho' < \delta$, $R \geq \delta V(M - 0)$, il contorno γ contiene tutti i punti singolari della $F(z)$ che hanno modulo eguale a δ.

15. Passiamo ora ad esporre un altro criterio che richiede soltanto un esame diretto dei coefficienti a_n e delle funzioni $f_n(u)$ e $\varphi(z)$.

Poniamo:

$$a_n f_n(u) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{mn} u^m,$$

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$$

ed ammettiamo che i coefficienti c_m siano reali non negativi e che esista un punto proprio δ, distinto dalla origine, comune al contorno di C ed al semiasse reale, positivo.

Sotto queste ipotesi è facile provare che: *tutti i punti interni al cerchio* $(0, \delta)$ *appartengono a* C.

Invero, fissato z internamente a $(0, \delta)$, determiniamo un intorno (δ, ρ) di δ in modo che nei punti z_1, appartenenti, ad un tempo, al detto intorno ed a C, siano verificate le disuguaglianze

$$|z_1| > |z|, \quad |\varphi(z_1)| > |\varphi(z)|.$$

In ciascuno di questi punti sarà inoltre:

$$R(|\varphi(z_1)| + 0) - |z_1| > 0,$$

onde:

$$R(|\varphi(z)| + 0) - |z| > R(|\varphi(z_1)| + 0) - |z_1| > 0.$$

Pertanto, il punto z appartiene a C.

È poi manifesto che il contorno di C non può avere più di un punto proprio in comune con il semiasse reale. positivo.

Premesso ciò, dimostriamo il seguente

TEOREMA. — *Se:*

a) *i coefficienti* c_m, b_{mn} *soddisfano alle disuguaglianze*

$$c_m \geq 0, \quad |\arg b_{mn}| < h\,\frac{\pi}{2} \qquad (h < 1);$$

b) *il contorno di* C *ed il semiasse reale, positivo hanno in comune un punto proprio* δ, *distinto dalla origine;*

allora:

la funzione F(z), *definita dalla* (1) *nel cerchio* $(0, \delta)$, *è singolare per* $z = \delta$.

Ammessa la regolarità della funzione $F(z)$ nel punto δ, prendiamo un numero positivo α minore di δ ed un numero $k > \delta - \alpha$ in modo che la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k^\nu}{\nu !} F^{(\nu)}(\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k^\nu}{\nu !} \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^\nu \alpha^n f_n[\varphi^{p_n}(\alpha)] \tag{16}$$

risulti convergente.

Posto:

$$A_{n\nu} + iB_{n\nu} = a_n D^\nu \alpha^n f_n[\varphi^{p_n}(\alpha)],$$

ed osservato che, in forza delle condizioni enunciate, è:

$$A_{n\nu} \geq | a_n D^\nu \alpha^n f_n[\varphi^{p_n}(\alpha)] | \, \eta \qquad (\eta \nearrow 0),$$

separiamo, nella (16), la parte immaginaria dalla reale. Quest' ultima è rappresentata dalla serie assolutamente convergente

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^\nu}{\nu !} A_{n\nu}.$$

Tenendo conto di ciò e della disuguaglianza

$$| a_n z^n f_n[\varphi^{p_n}(z)] | \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{| z - \alpha |^\nu}{\nu !} | a_n D^\nu \alpha^n f_n[\varphi^{p_n}(\alpha)] | \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k^\nu}{\nu !} \frac{A_{n\nu}}{\eta},$$

valida per $| z - \alpha | \leq k$, possiamo asserire che la serie (1) converge uniformemente in un intorno del punto δ. Ma questa conclusione è assurda appartenendo δ al contorno di C.

Dunque, la $F(z)$ non può essere regolare per $z = \delta$.

On the variation of curvature in Riemann spaces of constant mean curvature.

By TRACY YERKES THOMAS (Princeton-University).

1. Let S be an n-dimensional RIEMANN space with metric defined by a positive definite quadratic differential form

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta. \tag{1.1}$$

The curvature K of a section of space determined by two vectors λ_1 and λ_2 at a point P is then given by the formula

$$[(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})K + B_{\alpha\beta\gamma\delta}]\lambda_1^\alpha\lambda_2^\beta\lambda_1^\gamma\lambda_2^\delta = 0, \tag{1.2}$$

where the B's are the components of the curvature tensor (1). Use of this formula of course implies that the g's possess first and second derivatives; for all later requirements it will be sufficient to assume that the g's are continuous and have continuous derivatives of orders one to four inclusive.

The RIEMANN space S has been called by RICCI a space of constant mean curvature λ if the following conditions are satisfied. Let ξ^α be the components of any unit vector at an arbitrary point P of S; also let ζ_i^α where $i = 1, \ldots, n-1$ be the components of $n-1$ unit vectors forming an orthogonal ennuple with the vector ξ. Denoting by K_i the curvature of the section determined by the two vectors ξ and ζ_i the space S is of constant mean curvature λ if the condition

$$\sum_{i=1}^{n-1} K_i = \lambda$$

is satisfied for any point P and any selection of the vectors ξ and ζ_i at P. Equivalent conditions for S to be of constant mean curvature are given by the system of differential equations

$$B_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}, \tag{1.3}$$

(1) In case of any question as to the notation or terminology employed in this paper the reader may be referred to my book, *The Differential Invariants of Generalized Spaces*, « Cambridge University Press ». 1934.

where the $B_{\alpha\beta}$ are the components of the contracted curvature tensor defined by

$$B_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} B_{\mu\alpha\beta\nu} = B^{\nu}_{\alpha\beta\nu}.$$

If $n = 2$ or 3 the equations (1.3) imply that S is a space of constant curvature. Hence variations of the curvature in a space of constant mean curvature are possible only for $n \geqq 4$.

In this paper we consider for RIEMANN spaces ($n \geq 4$) of constant mean curvature λ the variations of the sectional curvature K both with respect to changes of section and changes of the point P at which the section is taken. The methods employed involve but little more than the process of differentiation. We have obtained at least one interesting result in the form of inequality conditions which must be satisfied by the maximum or minimum values of the sectional curvature K in a closed RIEMANN space. While these inequalities can very likely be strengthened they exhibit in any case a phenomenon of which the nature can roughly be described by saying that a closed RIEMANN space S_1 of constant mean curvature, but not of constant curvature, can not differ infinitely little in its metric relationships from a closed space of constant curvature S_2 when the two spaces S_1 and S_2 are considered in their entirety; in other words the transition from S_2 to S_1 corresponds to a *jump* or discontinuous process.

2. Suppose the equations (1.2) to be referred to a system of normal coordinates y^α with origin at an arbitrary point P of S. Differentiate twice with respect to y^μ and y^ν and then evaluate at the origin of the normal coordinate system. There results the set of equations

$$\begin{aligned}(2.1)\qquad &[(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})K_{,\mu\nu} + B_{\alpha\beta\gamma\delta,\mu\nu}\\ &+ (g_{\alpha\gamma,\mu\nu}g_{\beta\delta} + g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta,\mu\nu} - g_{\alpha\delta,\mu\nu}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma,\mu\nu})K]\lambda^\alpha_1\lambda^\beta_2\lambda^\gamma_1\lambda^\delta_2 = 0,\end{aligned}$$

taken with reference to the x^α coordinates. Here $g_{\alpha\beta,\mu\nu}$ are the components of the second extension of the fundamental metric tensor and the $B_{\alpha\beta\gamma\delta,\mu\nu}$ are the components of the second extension of the curvature tensor. Also $K_{,\mu\nu}$ are the components of a covariant tensor, the formula for which can easily be derived. In fact, if we denote for the moment the expression for the sectional curvature by k when referred to the y^α coordinates, we have merely to differentiate the equation $k = K$ with respect to y^μ and y^ν after which the y's are to be set equal to zero. In doing this we use the relations

$$\lambda^\alpha_i = \mu^\tau_i \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\tau}, \qquad (i = 1, 2),$$

where the components λ_1^α and λ_2^α are denoted by μ_1^α and μ_2^α with respect to the **y** system, these latter components being held fixed throughout the process of differentiation. There results the formula

$$K_{,\mu\nu} = \frac{\partial^2 K}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial K}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial K}{\partial \lambda_i^\sigma}\lambda_i^\tau \Gamma^\sigma_{\tau\mu\nu} - \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 K}{\partial x^\mu \partial \lambda_i^\sigma}\lambda_i^\tau \Gamma^\sigma_{\tau\nu}$$
$$- \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 K}{\partial x^\nu \partial \lambda_i^\sigma}\lambda_i^\tau \Gamma^\sigma_{\tau\mu} + \sum_{i,k=1}^{2}\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_i^\sigma \partial \lambda_k^\tau}\lambda_i^\alpha \lambda_k^\beta \Gamma^\sigma_{\alpha\mu}\Gamma^\tau_{\beta\nu},$$

where the $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ are the CHRISTOFFEL symbols and the $\Gamma^\sigma_{\mu\nu\xi}$ are the components of a generalized connection. These remarks concerning the derivation of the above formula (2.1) will doubtless suffice as the process by which it is deduced is well established in the literature.

Denoting the contravariant components of the fundamental metric tensor by $g^{\alpha\beta}$, we have the identities

$$g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta,\mu\nu} = -\frac{2}{3} B_{\alpha\beta}.$$

Hence if we multiply both members of (2.1) by $g^{\mu\nu}$, sum on the indices μ and ν, and then make use of the equations (1.3), we obtain

$$g^{\mu\nu} K_{,\mu\nu} - \frac{4}{3}\lambda K + g^{\mu\nu} B_{\alpha\beta\gamma\delta.\mu\nu}\lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta \lambda_1^\gamma \lambda_2^\delta = 0, \tag{2.2}$$

where it has been assumed that the vectors λ_1 and λ_2 are unit orthogonal vectors; in the following work this condition will always be imposed after the differentiations used in the derivation of any formula have been completed.

It is possible to replace the last set of terms in (2.2) by expressions involving the components of the curvature tensor, the vectors λ_i and the derivatives of the curvature K with respect to the components λ_i^α taken for stationary values of K at a point P of the RIEMANN space. For this purpose we must derive certain identities in the components of the curvature tensor and its extensions which we shall do in the following section.

3. Let us first write the identities satisfied by the components of the curvature tensor, namely

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta} + B_{\alpha\gamma\delta\beta} + B_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0, \quad B_{\alpha\beta\gamma\delta} = - B_{\beta\alpha\gamma\delta} = - B_{\alpha\beta\delta\gamma} = B_{\gamma\delta\alpha\beta}.$$

The last set of these identities is deducible as a consequence of the preceeding but its direct application is frequently useful. In addition there are the corresponding identities satisfied by the components $B^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ defined in terms of the above components by

$$B^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = g^{\alpha\nu} B_{\nu\beta\gamma\delta}.$$

These identities will be used repeatedly throughout the following work and this fact is accordingly to be understood without further explicit mention.

Now consider BIANCHI'S identily, namely

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\varepsilon} + B_{\alpha\beta\delta\varepsilon,\,\gamma} + B_{\alpha\beta\varepsilon\gamma,\,\delta} = 0,$$

differentiate covariantly with respect to x^{ζ} and then multiply by $g^{\varepsilon\zeta}$ summing on repeated indices. This gives

$$g^{\varepsilon\zeta}[B_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\varepsilon,\,\zeta} + B_{\alpha\beta\delta\varepsilon,\,\gamma,\,\zeta} + B_{\alpha\beta\varepsilon\gamma,\,\delta,\,\zeta}] = 0. \tag{3.1}$$

If we transform the expressions for the components of the covariant derivative of the curvature tensor, i. e.

$$B_{\alpha\beta\delta\varepsilon,\,\gamma} = \frac{\partial B_{\alpha\beta\delta\varepsilon}}{\partial x^{\gamma}} - B_{i\beta\delta\varepsilon}\Gamma^{i}_{\alpha\gamma} - \dots - B_{\alpha\beta\delta i}\Gamma^{i}_{\varepsilon\gamma},$$

into a system of normal coordinates, differentiate and evaluate at the origin, we obtain

$$B_{\alpha\beta\delta\varepsilon,\,\gamma,\,\zeta} = B_{\alpha\beta\delta\varepsilon.\,\gamma,\,\zeta} - B_{i\beta\delta\varepsilon}A^{i}_{\alpha\gamma\zeta} - \dots - B_{\alpha\beta\delta i}A^{i}_{\varepsilon\gamma\zeta}, \tag{3.2}$$

where the A's are the components of a normal tensor. Since

$$B^{i}_{\alpha\beta\gamma} = A^{i}_{\alpha\beta\gamma} - A^{i}_{\alpha\gamma\beta}, \quad A^{i}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{3}(B^{i}_{\alpha\beta\gamma} + B^{i}_{\beta\alpha\gamma})$$

we have, on interchanging the indices γ and ζ in (3.2) and subtracting, that

$$B_{\alpha\beta\delta\varepsilon,\,\gamma,\,\zeta} = B_{\alpha\beta\delta\varepsilon,\,\zeta,\,\gamma} - B_{i\beta\delta\varepsilon}B^{i}_{\alpha\gamma\zeta} - \dots - B_{\alpha\beta\delta i}B^{i}_{\varepsilon\gamma\zeta}. \tag{3.3}$$

Now by use of BIANCHI'S identity we have

$$\begin{aligned} g^{\varepsilon\zeta}B_{\alpha\beta\delta\varepsilon,\,\zeta,\,\gamma} &= g^{\varepsilon\zeta}[-B_{\varepsilon\beta\alpha\delta,\,\zeta,\,\gamma} + B_{\varepsilon\alpha\beta\delta,\,\zeta,\,\gamma}], \\ &= g^{\varepsilon\zeta}[B_{\varepsilon\beta\delta\zeta,\,\alpha\gamma} + B_{\varepsilon\beta\zeta\alpha,\,\delta,\,\gamma} - B_{\varepsilon\alpha\delta\zeta,\,\beta,\,\gamma} - B_{\varepsilon\alpha\zeta\beta,\,\delta,\,\gamma}], \\ &= B_{\beta\delta,\,\alpha,\,\gamma} - B_{\alpha\delta,\,\beta,\,\gamma}, \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

when account is taken of (1.3). Similarly we have

$$B_{\alpha\beta\varepsilon\gamma,\,\delta,\,\zeta} = B_{\alpha\beta\varepsilon\gamma,\,\zeta,\,\delta} - B_{i\beta\varepsilon\gamma}B^{i}_{\alpha\delta\zeta} - \dots - B_{\alpha\beta\varepsilon i}B^{i}_{\gamma\delta\zeta}, \tag{3.5}$$

$$g^{\varepsilon\zeta}B_{\alpha\beta\varepsilon\gamma,\,\zeta,\,\delta} = 0. \tag{3.6}$$

Hence if we eliminate the first set of terms in the bracket in (3 1) by a substitution of the type (3.2), namely

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\zeta,\,\varepsilon} = B_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\varepsilon,\,\zeta} - B_{i\beta\gamma\delta}A^{i}_{\alpha\varepsilon\zeta} - \dots - B_{\alpha\beta\gamma i}A^{i}_{\delta\varepsilon\zeta},$$

the second and third sets of these terms by (3.3) and (3.5), account being taken of (3.4) and (3.6) we obtain some reduction

$$(3.7) \qquad g^{\varepsilon\zeta}B_{\alpha\beta\gamma\delta,\varepsilon\zeta}=\frac{2}{3}\lambda B_{\alpha\beta\gamma\delta}+g^{\varepsilon\zeta}[B_{i\varepsilon\alpha\beta}B^{i}_{\zeta\gamma\delta}+2B_{i\beta\delta\varepsilon}B^{i}_{\alpha\gamma\zeta}+2B_{i\alpha\varepsilon\delta}B^{i}_{\beta\gamma\zeta}].$$

We can give the bracket expression in these last equations a more symmetric form. Thus if we multiply (3.3) by $g^{\alpha\varepsilon}$ and sum, we find

$$(3.8) \qquad g^{\alpha\varepsilon}[B_{i\beta\delta\varepsilon}+B_{i\delta\beta\varepsilon}]B^{i}_{\alpha\gamma\zeta}=0.$$

Hence

$$\begin{aligned} g^{\varepsilon\zeta}B_{i\varepsilon\alpha\beta}B^{i}_{\zeta\gamma\delta} &= g^{\varepsilon\zeta}[-B_{i\alpha\beta\varepsilon}+B_{i\beta\alpha\varepsilon}]B^{i}_{\zeta\gamma\delta}, \\ &= 2g^{\varepsilon\zeta}B_{i\beta\alpha\varepsilon}B^{i}_{\zeta\gamma\delta} \end{aligned}$$

by (3.8). When this substitution is made in (3.7) we obtain

$$(3.9) \qquad g^{\varepsilon\zeta}B_{\alpha\beta\gamma\delta,\varepsilon\zeta}=\frac{2}{3}\lambda B_{\alpha\beta\gamma\delta}+2g^{\varepsilon\zeta}[B_{i\beta\alpha\varepsilon}B^{i}_{\zeta\gamma\delta}+B_{i\beta\delta\varepsilon}B^{i}_{\alpha\gamma\zeta}+B_{i\alpha\varepsilon\delta}B^{i}_{\beta\gamma\zeta}].$$

Use of (3.9) enables us to eliminate the components of the second extension of the curvature tensor from (2.2) and it remains to eliminate the components of the curvature tensor which are thereby introduced.

4. We shall now find the second derivatives of the sectional curvature K with respect to the vector components λ^{α}_{i} at an arbitrary point P of the Riemann space S, these derivatives being taken for stationary values of K which implies

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \lambda^{\alpha}_{1}}\right)_{P}=\left(\frac{\partial K}{\partial \lambda^{\alpha}_{2}}\right)_{P}=0.$$

We obtain in fact by differentiation of (1.2) the following four sets of formulae

$$(4.1) \qquad \left(\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda^{\sigma}_{1}\partial\lambda^{\tau}_{1}}\right)_{P}=2[g_{\sigma\delta}g_{\beta\tau}-g_{\sigma\tau}g_{\beta\delta})K+B_{\sigma\beta\delta\tau}]_{P}\lambda^{\beta}_{2}\lambda^{\delta}_{2},$$

$$(4.2) \qquad \left(\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda^{\sigma}_{2}\partial\lambda^{\tau}_{2}}\right)_{P}=2[(g_{\alpha\tau}g_{\sigma\gamma}-g_{\alpha\gamma}g_{\sigma\tau})K+B_{\sigma\alpha\gamma\tau}]_{P}\lambda^{\alpha}_{1}\lambda^{\gamma}_{1},$$

$$(4.3) \qquad \left(\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda^{\sigma}_{1}\partial\lambda^{\tau}_{2}}\right)_{P}=2[(g_{\sigma\delta}g_{\tau\gamma}+g_{\sigma\tau}g_{\gamma\delta}-2g_{\sigma\gamma}g_{\tau\delta})K+B_{\tau\sigma\gamma\delta}+B_{\delta\sigma\gamma\tau}]_{P}\lambda^{\gamma}_{1}\lambda^{\delta}_{2},$$

$$(4.4) \qquad \left(\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda^{\sigma}_{2}\partial\lambda^{\tau}_{1}}\right)_{P}=2[(g_{\tau\beta}g_{\sigma\alpha}+g_{\sigma\tau}g_{\alpha\beta}-2g_{\tau\alpha}g_{\sigma\beta})K+B_{\sigma\tau\alpha\beta}+B_{\beta\tau\alpha\sigma}]_{P}\lambda^{\alpha}_{1}\lambda^{\beta}_{2},$$

in which it is to be understood that the vectors λ_1 and λ_2 are orthogonal unit vectors at the point P. Now consider the expression

$$D = \frac{1}{6}\left\{ g^{\sigma\tau} g^{\mu\nu} \left[3 \frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\sigma \partial\lambda_1^\mu} \frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_2^\tau \partial\lambda_2^\nu} - \frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\sigma \partial\lambda_2^\mu} \left(\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\tau \partial\lambda_2^\nu} + 2 \frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_2^\tau \partial\lambda_1^\nu} \right) \right] \right\}_P .$$

When we make the substitutions (4.1),..., (4.4) in this expression, we find on reduction that

$$D = 2K[(n-1)K - \lambda] - \frac{4}{3}\lambda K$$

$$+ \left\{ \frac{2}{3}\lambda B_{\alpha\beta\gamma\delta} + 2g^{\varepsilon\zeta}[B_{i\beta\alpha\varepsilon}B^i_{\zeta\gamma\delta} + B_{i\beta\delta\varepsilon}B^i_{\alpha\gamma\zeta} + B_{i\alpha\varepsilon\delta}B^i_{\beta\gamma\zeta}] \right\}_P \lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta \lambda_1^\gamma \lambda_2^\delta .$$

On account of (3.7) the equation (2.2) therefore becomes

$$(4.5) \qquad \boxed{g^{\mu\nu}K_{,\mu\nu} + D = 2K[(n-1)K - \lambda]} \, .$$

This equation is valid for any stationary value of the sectional curvature K at an arbitrary point P of the RIEMANN space S, it being understood that the vectors λ_1 and λ_2 whose components enter implicitly in the left member are orthogonal unit vectors [1].

Under certain circumstances the relation (4.5) will contribute directly to our knowledge of the space S. For example suppose S is closed, $\lambda > 0$, and that it can be assertained that $D \leqq 0$ at the point P of S for which the sectional curvature K has its greatest possible value in S. Then $K > 0$ at P and, under the hypothesis that S is not a space of constant curvature, we have the inequality

$$[(n-1)K - \lambda)]_P > 0.$$

Since the first term in (4.5) is invariant under coordinate transformations we may imagine it referred to a system of normal coordinates y^α at the origin of which the $g_{\alpha\beta}$ have the values δ^α_β. In consequence of the assumption that K has its maximum value at P it therefore follows that

$$\left(\frac{\partial^2 K}{\partial y^1 \partial y^1}\right) \leqq 0, \ldots, \left(\frac{\partial^2 K}{\partial y^n \partial y^n}\right) \leqq 0$$

at P; hence the first term in (4.5) is $\leqq 0$ at P. But then the left member of (4.5) is $\leqq 0$ while the right member is definitely positive. This contra-

(1) The straightforward way of deducing (4.5) would be to solve the equations (4.1),..., (4.4) for suitable expressions in the components of the curvature tensor and then to substitute these expressions into (2.2) in which the last set of terms was replaced by its value as given by (3.7). By arbitrarily assuming the above expression D we have eliminated these details of calculation from our exposition.

diction results in the fact that S is a space of constant curvature. Similar conclusions can be reached under various modifications of the above conditions.

5. The expression D remains invariant when we replace the vectors λ_1 and λ_2 by two orthogonal unit vectors ξ_1 and ξ_2 which determine the same section of the space S. We can show this in the following manner. The condition that the vectors of each of these sets be orthogonal is

$$g_{\alpha\beta}\lambda_i^\alpha\lambda_k^\beta = \delta_k^i, \quad g_{\alpha\beta}\xi_i^\alpha\xi_k^\beta = \delta_k^i, \tag{5.1}$$

where the quantities $g_{\alpha\beta}$ are taken for the point P under consideration. Also the condition that the vectors ξ_i determine the same section as the vectors λ_i is given by

$$\xi_i^\alpha = \sum_{k=1}^{2} a_i^k \lambda_k^\alpha, \qquad (i = 1, 2), \tag{5.2}$$

where the a's are constants such that the determinant $|a_k^i|$ is different from zero. As in § 2, we have indicated the summation on the index k since its range differs from the usual range $1, \ldots, n$; a similar procedure will be employed in the following. The required conditions on these constants a_k^i are found by substituting (5.2) into the second set of equations (5.1) and then making use of the first set of these equations. This gives

$$\sum_{k=1}^{2} a_i^k a_j^k = \delta_j^i, \qquad (i, j = 1, 2), \tag{5.3}$$

which in fact implies that $|a_k^i|$ does not vanish. Now by differentiation of (5.2) we have

$$\frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial \lambda_j^\beta} = \sum_{k}^{1} a_i^k \delta_\beta^\alpha \delta_k^i = a_i^j \delta_\beta^\alpha.$$

Hence

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda_i^\sigma} = \sum_{p=1}^{2} \frac{\partial K}{\partial \xi_p^\alpha}\frac{\partial \xi_p^\alpha}{\partial \lambda_i^\sigma} = \sum_{p-1}^{2} \frac{\partial K}{\partial \xi_p^\sigma} a_p^i,$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_i^\sigma \partial \lambda_p^\mu} = \sum_{p,q=1}^{2} \frac{\partial^2 K}{\partial \xi_p^\sigma \partial \xi_q^\mu} a_p^i a_q^k.$$

By use of this last set of equations and (5.3) we obtain the invariance of the following expressions

$$U = \sum_{i,k-1}^{2} \left[g^{\sigma\tau} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_i^\sigma \partial \lambda_i^\mu} \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_k^\tau \partial \lambda_k^\nu} \right]_P,$$

$$V = \sum_{i,k-1}^{2} \left[g^{\sigma\tau} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_i^\sigma \partial \lambda_k^\mu} \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_i^\tau \partial \lambda_k^\nu} \right]_P,$$

$$W = \sum_{i,k-1}^{2} \left[g^{\sigma\tau} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_i^\sigma \partial \lambda_k^\mu} \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_k^\tau \partial \lambda_i^\nu} \right]_P,$$

i. e. these expressions are equal to the corresponding expressions obtained by replacing the components λ_i^α by the components ξ_i^α in the above derivatives.

Now observe that

$$D = \frac{1}{6}\left[(U - W) + \frac{1}{2}(U - V)\right],$$

which proves the required invariance of the expression D. Since K is invariant under the above change of vectors λ_1 and λ_2 it follows that the first term is (4.5) is likewise invariant.

6. To obtain information of a more positive type from the equation (4.5) we shall now deduce certain inequalities between the expression D and the corresponding sectional curvature K. We have

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_i^\sigma \partial \lambda_j^\tau} \zeta_i^\sigma \zeta_j^\tau \leqq 0, \quad \text{for maximum } K \text{ at } P, \tag{6.1}$$

$$\sum_{i,j\,1}^{2} \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_i^\sigma \partial \lambda_j^\tau} \zeta_i^\sigma \zeta_j^\tau \geqq 0, \quad \text{for minimum } K \text{ at } P, \tag{6.2}$$

these inequalities being valid for arbitrary (real) values of the quantities ζ. In particular these inequalities yield

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_i^\sigma \partial \lambda_i^\sigma} \leqq 0, \quad \text{for maximum } K \text{ at } P, \tag{6.3}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_i^\sigma \partial \lambda_i^\sigma} \geqq 0, \quad \text{for minimum } K \text{ at } P, \tag{6.4}$$

in which no summation on the indices σ or i is made. Now suppose that the quantities ζ_i^σ and ζ_j^τ are arbitrary for a definite set of values of the indices σ, τ, i, j and that all the remaining ζ's are zero. Under these conditions expansion of the left member of (6.1) or (6.2) gives

$$\begin{aligned}\Bigg[\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_i^\sigma \partial \lambda_i^\sigma} \zeta_i^\sigma \zeta_i^\sigma + 2\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_i^\sigma \partial \lambda_j^\sigma} \zeta_i^\sigma \zeta_j^\sigma + 2\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_i^\sigma \partial \lambda_i^\tau} \zeta_i^\sigma \zeta_i^\tau + 2\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_i^\sigma \partial \lambda_j^\tau} \zeta_i^\sigma \zeta_j^\tau \\ + \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_j^\sigma \partial \lambda_j^\sigma} \zeta_j^\sigma \zeta_j^\sigma + 2\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_j^\sigma \partial \lambda_i^\tau} \zeta_j^\sigma \zeta_i^\tau + 2\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_j^\sigma \partial \lambda_j^\tau} \zeta_j^\sigma \zeta_j^\tau \\ + \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_i^\tau \partial \lambda_i^\tau} \zeta_i^\tau \zeta_i^\tau + 2\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_i^\tau \partial \lambda_j^\tau} \zeta_i^\tau \zeta_j^\tau \\ + \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda_j^\tau \partial \lambda_j^\tau} \zeta_j^\tau \zeta_j^\tau\Bigg]_P,\end{aligned}$$

in which the indices are of course not summed. Now put $\zeta_i^\sigma = t^1$, $\zeta_j^\sigma = t^2$,

$\zeta_i^\tau = t^3$ and $\zeta_j^\tau = t^4$. The inequalities (6.1) and (6.2) can then be written

$$(6.5)\qquad \sum_{\mu,\nu=1}^{4} A_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \leqq 0, \quad \text{for maximum } K \text{ at } P,$$

$$(6.6)\qquad \sum_{\mu,\nu=1}^{4} A_{\nu\mu} t^\mu t^\nu \geqq 0, \quad \text{for minimum } K \text{ at } P,$$

in the symmetric quantities $A_{\mu\nu}$ which are determined as the values of the corresponding derivatives in the above expression. In consequence of (6.5) or (6.6) we have at P that

$$A_{\mu\mu} A_{\nu\nu} - A_{\mu\nu} A_{\mu\nu} > 0, \qquad (\mu, \nu = 1, \dots, 4);$$

hence we obtain

$$(6.7)\qquad \frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\alpha \partial\lambda_1^\alpha}\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_2^\beta \partial\lambda_2^\beta} > \frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\alpha \partial\lambda_2^\beta}\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\alpha \partial\lambda_2^\beta}, \quad \text{(not summed)}$$

at P. Now consider the inequality

$$\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\alpha \partial\lambda_2^\beta} \pm \frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_2^\alpha \partial\lambda_1^\beta}\right)^2 \geqq 0;$$

expanding, and summing on repeated indices, gives

$$(6.8)\qquad \pm \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\alpha \partial\lambda_2^\beta}\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_2^\alpha \partial\lambda_1^\beta} \leqq \sum_{\alpha,\beta\ 1}^{n} \frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\alpha \partial\lambda_2^\beta}\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\alpha \partial\lambda_2^\beta}.$$

Multiplying (4.1) and (4.2) by $g^{\sigma\tau}$ and summing on repeated indices, we find

$$(6.9)\qquad g^{\sigma\tau}\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\sigma \partial\lambda_1^\tau} = g^{\sigma\tau}\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_2^\sigma \partial\lambda_2^\tau} = -2[(n-1)K - \lambda],$$

use being made of (1.3). Since the expression D is invariant under coordinate transformations, we can suppose in deducing inequalities between D and the curvature K that a system of coordinates is employed in which $g_{\alpha\beta}$ has the value δ_β^α at the point P under consideration. In fact it follows by a theorem in algebra that we can make a linear coordinate transformation which will change the $g_{\alpha\beta}$ into the values δ_β^α at P and, at the same time, reduce the quadratic form

$$\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\alpha \partial\lambda_1^\beta}\right)_P \zeta^\alpha\zeta^\beta$$

to a sum of squares. Assuming such a selection of coordinates we have

$$\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\alpha \partial\lambda_1^\beta}\right)_P = 0, \text{ if } \alpha \neq \beta; \quad \left(\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\alpha \partial\lambda_1^\alpha}\right)_P = A_\alpha,$$

where the constants A are $\leqq 0$ or $\geqq 0$ according as K has a maximum or minimum value. Then (6.9) becomes

$$(6.10)\qquad \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\alpha\partial\lambda_1^\alpha}\right)_P = \sum_{\beta=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_2^\beta\partial\lambda_2^\beta}\right)_P = -2[(n-1)K-\lambda]_P,$$

at P and it follows from these equations and (6.7), when summed on the indices α and β, that

$$(6.11)\qquad \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\alpha\partial\lambda_2^\beta}\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\alpha\partial\lambda_2^\beta}\right)_P \leq 4[(n-1)K-\lambda]_P^2.$$

Also

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\alpha\partial\lambda_1^\beta}\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_2^\alpha\partial\lambda_2^\beta}\right)_P = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\alpha\partial\lambda_1^\alpha}\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_2^\alpha\partial\lambda_2^\alpha}\right)_P,$$

and this expression is thus seen to have a value $\geqq 0$ for a maximum or minimum value of K on account of (6.3) and (6.4). If A denotes the greatest absolute value of the above quantities A_α we have

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\alpha\partial\lambda_1^\alpha}\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_2^\alpha\partial\lambda_2^\alpha}\right)_P \leqq \pm A\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_2^\alpha\partial\lambda_2^\alpha}\right)_P,$$

where the algebraic sign is selected which will make the right member of this inequality be $\geqq 0$. But

$$A \leqq \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\alpha\partial\lambda_1^\alpha}$$

at P and hence by (6.10) we have

$$(6.12)\qquad \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\alpha\partial\lambda_1^\beta}\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_2^\alpha\partial\lambda_2^\beta}\right)_P \leqq \left(\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\alpha\partial\lambda_1^\alpha}\right)_P\left(\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_2^\beta\partial\lambda_2^\beta}\right)_P = 4[(n-1)K-\lambda]_P^2.$$

With reference to the above coordinate system in which the $g_{\alpha\beta}$ have the values δ_β^α at P, the expression D becomes

$$D = \frac{1}{6}\sum_{\sigma,\mu=1}^{n}\left[3\,\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\sigma\partial\lambda_1^\mu}\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_2^\sigma\partial\lambda_2^\mu} - \frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\sigma\partial\lambda_2^\mu}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\sigma\partial\lambda_2^\mu} + 2\,\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_2^\sigma\partial\lambda_1^\mu}\right)\right]_P.$$

Hence by (6.8) we have

$$D \leqq \frac{1}{6}\sum_{\sigma,\mu=1}^{n}\left[3\,\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\sigma\partial\lambda_1^\mu}\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_2^\sigma\partial\lambda_2^\mu} + \frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\sigma\partial\lambda_2^\mu}\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\sigma\partial\lambda_2^\mu}\right]_P;$$

and then by (6.11) and (6.12) we find

$$(6,13)\qquad D \leqq \frac{8}{3}[(n-1)K-\lambda]_P^2.$$

Replacing D in (4.5) by the upper bound given by (6.13) this equation gives

$$\boxed{g^{\mu\nu}K_{,\mu\nu} \geq \frac{2}{3}[(n-1)K-\lambda][(7-4n)K+4\lambda]} \tag{6.14}$$

at P. Similarly we have

$$\begin{aligned} D &\geqq -\frac{1}{6}\sum_{\sigma,\mu=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\sigma\partial\lambda_2^\mu}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\sigma\partial\lambda_2^\mu}+2\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_2^\sigma\partial\lambda_1^\mu}\right)\right]_P, \\ &\geqq -\frac{1}{2}\sum_{\sigma,\mu=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\sigma\partial\lambda_2^\mu}\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_1^\sigma\partial\lambda_2^\mu}\right]_P, \\ &\geqq -2[(n-1)K-\lambda]_P^2. \end{aligned}$$

Hence (4.5) gives

$$\boxed{g^{\mu\nu}K_{,\mu\nu} \leqq 2[(n-1)K-\lambda](nK-\lambda)}, \tag{6.15}$$

at P. The inequalities (6.14) and (6.15) hold for maximum as well as minimum values of the sectional curvature K at an arbitrary point P of the RIEMANN space S.

7. Suppose now that the space S is closed and not a space of constant curvature. Then there will be a point P at which K will have its maximum walue K_M in S. At this point P the left member of (6.14) will be ≤ 0 and the first bracket expression in the right member will be > 0 as observed in § 4. Hence from (6.14) we must have

$$(7-4n)K_M+4\lambda \leqq 0.$$

Since the coefficient of K_M in this inequality is necessarily negative we obtain

$$\boxed{K_M > \frac{4\lambda}{4n-7}}. \tag{7.1}$$

In the case of a space of constant curvature satisfying (1.3) the curvature of any section is $\lambda/(n-1)$. For the space S the value of K_M must of course exceed $\lambda/(n-1)$ and hence if $\lambda \leqq 0$ the inequality (7.1) gives us no additional information. But if $\lambda > 0$ we see from (7.1) that the increase ΔK in the curvature of a closed space S, not of constant curvature, over that of the space of constant curvature $\lambda/(n-1)$ must satisfy the inequality

$$\Delta K \geqq \frac{3\lambda}{(n-1)(4n-7)} > 0,$$

which thus gives a positive lower bound to the increment ΔK.

At a point P where K has its minimum value K_m in the closed space S the left member of (6.15) will be $\geqq 0$; since the first bracket expression is ≤ 0 at P the inequality (6.15) gives

$$\boxed{K_m \leqq \frac{\lambda}{n}}. \tag{7.2}$$

Since the value of K in S must be less than $\lambda/(n-1)$ the inequality (7.2) gives us no further information if $\lambda \leqq 0$, but if $\lambda > 0$ we have a condition of the type given by (7.1). We state these results in the following

THEOREM. — *If* S *is a closed Riemann space, not of constant curvature, defined by the system* (1.3) *with* $\lambda > 0$, *the maximum value* K_M *and minimum value* K_m *of the sectional curvature in* S *satisfy the inequalities* (7.1) *and* (7.2) *respectively.*

Suppose that S is a closed RIEMANN space in which the equations (1.3) with $\lambda > 0$ are satisfied. Then if (a) the maximum velue K_M of the curvature in S is less than the right member of (7.1) or (b) the minimum value K_M of the curvature in S is greater than the right member of (7.2) it follows that S is a space of constant curvature as a consequence of the above theorem.

Funzionali analitici ipergeometrici.

Memoria di GIUSEPPE BELARDINELLI (a Milano).

Sunto. - *In questa Memoria l'A. introduce il concetto di* funzionale analitico ipergeometrico *confluente e completo e ne studia le proprietà essenziali. Il lavoro è diviso in tre parti. Nella prima parte dà le definizioni fondamentali di questi operatori e studia un funzionale ipergeometrico che chiama di* GAUSS. *Nella seconda parte pone in relazione questi funzionali ipergeometrici con alcune classiche trasformazioni della Analisi Funzionale: operatore di* LAPLACE. *integrazione, derivazione, logaritmo funzionale di* PINCHERLE, *ecc. Nella terza parte dà delle relazioni caratteristiche di questi funzionali e li applica in fine alla rappresentazione di un integrale regolare nell'intorno della origine della equazione differenziale di* LAMÉ.

L'analisi delle trasformazioni funzionali ha avuto dal PINCHERLE una sistemazione felicissima con le omografie negli spazi ad infinite dimensioni; l'indirizzo da lui seguito si può dire che è l'analogo, e in qualche modo la continuazione di quello di WEIERSTRASS per le funzioni analitiche: in questo ordine di idee gli operatori normali (1), le serie ordinate per il simbolo D (2), la trasformazione di LAPLACE (3), ecc. sono altrettanti capitoli dell'analisi nei quali il PINCHERLE ha dato fondamentali risultati.

I lavori del FANTAPPIÈ (4) sui funzionali si ricollegano invece all'indirizzo del CAUCHY per le funzioni analitiche e costituiscono una fondamentale elaborazione del Calcolo funzionale in cui sta alla base il concetto di *funzionale analitico* da lui introdotto; ricerche frammentarie della teoria delle funzioni acquistano, con la teoria dei funzionali analitici, oltre ad una

(1) S. PINCHERLE in collaborazione con U. AMALDI, *Le operazioni distributive*. Cap. VIII (Bologna, ed. Zanichelli, 1901): « Annali di Matematica », T. IV, S. III, pag. 219; « Rendiconti R. Accad. di Bologna », 1932-1933.

(2) S. PINCHERLE in collaborazione con U. AMALDI, *Le operazioni distributive*, Cap. VI, §§ 126-139.

(3) S. PINCHERLE, in collaborazione con U. AMALDI, *Le operazioni distributive*, Cap. XIII, §§ 383-393; *Gli elementi della Teoria delle funzioni analitiche*, Ed. Zanichelli, Cap. XVI, pag. 312; « Ann. de l'Éc. Normale Sup. », S. III, T. 22, 1905.

(4) L. FANTAPPIÈ, *I funzionali analitici*. « Memorie R. Accad. Lincei », S. VI, vol. III, fasc. XI; Idem, « Rendiconti Accad. Lincei », vol. XV, 1932.

nuova luce, un ordinamento atto a nuove ricerche ed alla scoperta di proprietà essenziali, come dimostrano, in modo evidente i lavori del FANTAPPIÈ (5).

Ed è precisamente con questo indirizzo che tratterò di una classe estesissima di funzionali analitici, che raccoglie funzionali classici dell'analisi.

La teoria dei funzionali analitici poggia sulla nozione di funzione indicatrice, cioè se con

$$F[y(t);\ x]$$

indichiamo il funzionale, la funzione indicatrice è espressa, rispetto alla variabile α, da

$$v(x, \alpha) = F\left[\frac{1}{t-\alpha};\ x\right].$$

FANTAPPIÈ ha dimostrato che ad ogni funzionale analitico lineare corrisponde una funzione $v(x, \alpha)$, funzione indicatrice ed inversamente ad ogni funzione analitica corrisponde un funzionale analitico lineare che ha quella funzione per indicatrice.

La classe dei funzionali analitici che considero in questa Memoria è quella dei funzionali normali che hanno per funzione indicatrice funzioni ipergeometriche del tipo così detto di GOURSAT; funzionali che chiamo *funzionali ipergeometrici* e che indico con H. I funzionali normali sono stati così chiamati dal PINCHERLE, che ha dato importanti applicazioni di queste particolari trasformazioni funzionali.

In un recente lavoro ho raccolto le proprietà essenziali delle funzioni ipergeometriche e, in particolar modo, ho mostrato (6) che queste funzioni possono rappresentare le funzioni più usuali dell'analisi: funzioni binomiali, logaritmica, esponenziale, trigonometriche, di KUMMER, di CLAUSEN, ecc., ed anche funzioni algebriche.

Da ciò l'importanza di considerare i funzionali normali che hanno per indicatrici tali funzioni ipergeometriche cioè funzioni rappresentate da serie della forma:

$$\sum_{n\ 0}^{\infty} a_n x^n$$

ove:

$$a_{n+1} : a_n = P(n) : Q(n),$$

essendo $P(n)$ e $Q(n)$ polinomi *fissi* in n.

(5) L. FANTAPPIÈ, *La giustificazione del Calcolo simbolico e le sue applicazioni alla integrazione delle equazioni a derivate parziali*, « Memorie R. Accad. d'Italia », vol. 1, n. 2; Idem, « Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo », T. 57, 1933, ecc.

(6) G. BELARDINELLI, *Le funzioni ipergeometriche*, « Rendiconti Seminario Matematico e Fisico di Milano », 1933.

Il lavoro è diviso in tre parti.

Nella prima parte espongo le proprietà generali dei funzionali ipergeometrici.

Nella seconda dimostro che questi funzionali possono esprimere classici funzionali quali, ad esempio, l'integrazione, la derivazione, l'operatore $(xD)^n$, l'operatore $x^n D^n$, il logaritmo funzionale, ecc..

Nella terza parte dò delle relazioni funzionali che caratterizzano questi funzionali lineari normali ed alcune osservazioni sulle applicazioni di questi funzionali H alla risoluzione di equazioni integrali ed in particolar modo mostro la possibilità di esprimere, con questi funzionali ipergeometrici, un integrale di una equazione differenziale (che si può ricollegare alla equazione differenziale di LAMÉ) regolare nell'intorno dell'origine, metodo che potrebbe essere esteso ad altre equazioni differenziali del secondo ordine della fisica matematica.

Desidero aggiungere che in questo lavoro mi sono occupato principalmente della ricerca delle proprietà generali di questi funzionali H. Lo studio particolare delle varie applicazioni accennate nei vari capitoli sarà fatto in successive ricerche.

PARTE PRIMA

Proprietà generali dei funzionali ipergeometrici.

1. Definizione dei funzionali ipergeometrici. — Sia:

$$F[y(t)\,;\,x] = f(x) \tag{1}$$

un funzionale lineare misto tale che ad ogni funzione analitica $y(t)$ di un certo campo C faccia corrispondere un'altra funzione $f(x)$, pure analitica regolare in una opportuna regione C'.

Applicando il funzionale lineare alle funzioni del campo C che appartengono alla linea $\dfrac{1}{t-\alpha}$, si ottiene la funzione *indicatrice emisimmetrica* del funzionale, che è una funzione $v(x, \alpha)$ del parametro x e dell'indice α; applicando invece il funzionale alle funzioni della linea $\dfrac{1}{1-t\alpha}$ si ottiene la *indicatrice simmetrica* $w(x, \alpha)$.

Queste indicatrici si esprimono mediante le formule:

$$\begin{aligned} v(x, \alpha) &= F_t\left[\frac{1}{t-\alpha}\,;\, x\right], \quad & w(x, \alpha) &= F_t\left[\frac{1}{1-t\alpha}\,;\, x\right], \\ v(x, \alpha) &= -\frac{1}{\alpha}\, w\left(x, \frac{1}{\alpha}\right), \quad & w(x, \alpha) &= -\frac{1}{\alpha}\, v\left(x, \frac{1}{\alpha}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Queste funzioni indicatrici del funzionale analitico regolare F sono individuate dal funzionale stesso e lo individuano alla loro volta.

Il valore del funzionale può essere dato sotto forma di integrale curvilineo, ad esempio:

$$F[y(t);\, x] = v(x, t) \underset{*}{} \overset{*}{y}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C v(x, t) y(t) dt, \tag{3}$$

dove C è una curva chiusa che racchiude tutti i punti non regolari della $y(t)$, lasciando all' esterno i punti dell'insieme in cui la indicatrice non è definita.

Tra i funzionali lineari misti sono stati chiamati *normali* (7) quelli caratterizzati dall'aver per indicatrice emisimmetrica una funzione del rapporto $\dfrac{x}{\alpha}$

$$v(x, \alpha) = -\frac{1}{\alpha}\, k\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

e quindi:

$$w(x, \alpha) = k(x\alpha)$$

essendo $k(z)$ una funzione analitica che è stata chiamata *funzione caratteristica* del funzionale normale.

Abbiamo detto che un funzionale normale è individuato dalla sua funzione caratteristica, che è una funzione analitica qualunque.

Tra le funzioni più semplici che si presentano nell'analisi abbiamo le funzioni razionali. Se la funzione caratteristica è una funzione razionale, è stato dimostrato (8) che i funzionali che hanno tali funzioni caratteristiche possono esprimersi mediante un numero finito di operazioni di derivazione, sostituzione di funzioni assegnate, moltiplicazioni di funzioni assegnate.

Precisamente condizione necessaria e sufficiente perchè un funzionale lineare misto $F[y(t); x]$ sia esprimibile con un numero finito di operazioni elementari di derivazione, sostituzione di una funzione nota al posto della variabile indipendente, moltiplicazione per una funzione nota, è che l'indicatrice sia una funzione razionale dell'indice.

Lo studio di questi funzionali è stato fatto nel modo più esauriente.

Lo studio dei funzionali normali che hanno per caratteristica la funzione esponenziale è stato fatto recentemente (9); ora è naturale chiedersi, in base alle classiche proprietà delle funzioni ipergeometriche ed in special modo alla

---

(7) Per lo studio dei funzionali normali vedasi la Memoria del PINCHERLE. « Annali di Matematica », T. IV, S. III, pag. 219.

(8) Vedasi PINCHERLE, *Le operazioni distributive*, Cap. V, §§ 104-123; FANTAPPIÈ, *Funzionali analitici*, pag. 85.

(9) S. MARTIS in BIDDAU, « Rendiconti Circolo Mat. di Palermo », T. 57 (1933).

proprietà che esse hanne di rappresentare quasi tutte le funzioni più usuali dell'analisi, tra cui naturalmente anche la funzione esponenziale, le proprietà dei funzionali normali che hanno per caratteristica le funzioni ipergeometriche.

Chiameremo questi funzionali, *funzionali ipergeometrici normali*, o semplicemente, quando non vi sarà ambiguità, *funzionali ipergeometrici*, e li indicheremo con H.

2. Generalità sulle funzioni ipergeometriche. — La classica serie di GAUSS:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} x + \frac{(\alpha, 2)(\beta, 2)}{(\gamma, 2)(1, 2)} x^2 + \dots + \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} x^n + \dots, \tag{4}$$

ove $(\alpha, n) = \alpha(\alpha + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha + n - 1)$, è stata generalizzata dal GOURSAT, PINCHERLE, MELLIN, ecc., con la serie

$$F\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, \dots, & \alpha_h \\ \gamma_1, & \gamma_2, \dots, & \gamma_k \end{pmatrix} x = 1 + \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \dots \alpha_h}{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \dots \gamma_k} x + \dots + \frac{(\alpha_1, n)(\alpha_2, n) \dots (\alpha_h, n)}{(\gamma_1, n)(\gamma_2, n) \dots (\gamma_k, n)(1, n)} x^n + \dots, \tag{5}$$

ove $\alpha_1, \dots, \alpha_h, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ sono chiamati parametri ed x l'argomento.

Nella serie di GAUSS il rapporto di due coefficienti consecutivi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(\gamma + n)(1 + n)},$$

è una funzione razionale *fissa* dell'indice n (il numeratore ed il denominatore sono di secondo grado), la generalizzazione di queste serie è stata ottenuta considerando la serie (5), ove:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\alpha_1 + n)(\alpha_2 + n) \dots (\alpha_h + n)}{(\gamma_1 + n)(\gamma_2 + n) \dots (\gamma_k + n)(1 + n)},$$

e $P(n)$ e $Q(n)$ sono polinomi in n. Il grado del polinomio $P(n)$ dovrà essere minore od uguale a quello di $Q(n)$, cioè $k + 1 \geq h$, affinchè la serie abbia raggio di convergenza differente da zero, ed inoltre nessuna radice di $Q(n)$ dovrà essere uguale a zero o ad un intero negativo.

La conoscenza di questi polinomi permette di formare una equazione differenziale lineare alla quale soddisfa la serie ipergeometrica, che ne è un integrale regolare nell'intorno dell'origine.

L'equazione differenziale alla quale soddisfa la (5) è di ordine $k + 1$, con tre punti singolari 0, 1 e $+\infty$, $k + 1$ essendo il grado del polinomio $Q(n)$.

Se $Q(n) = (\gamma_1 + n) \dots (\gamma_k + n)(\gamma_{k+1} + n)$, la serie sarà:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1, n) \dots (\alpha_h, n)}{(\gamma_1, n) \dots (\gamma_k, n)(\gamma_{k+1}, n)} x^n$$

potendosi sempre fare in modo che una delle radici γ del denominatore sia uguale ad uno, ([10]) e supponiamo sia uguale ad uno quella indicata con γ_{k+1}, avremo che la serie si indica con:

$$F\begin{pmatrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h & \\ \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k & x\end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1+n)\ldots(\alpha_h+n)}{(\gamma_1+n)\ldots(\gamma_k+n)(1+n)} x^n.$$

Noi invece indicheremo queste serie con

$$F\begin{pmatrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}, \alpha_h & \\ \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k, 1 & x\end{pmatrix},$$

facendo comparire nei parametri inferiori anche il numero 1, e quando non c'è ambiguità anche semplicemente con F.

Il numero k chiamasi *ordine* della funzione ipergeometrica ed il numero

$$\theta = k + 1 - h$$

classe. Così le funzioni ipergeometriche si classificano secondo l'ordine e la classe.

Si chiamano *complete* le funzioni ipergeometriche di classe zero, cioè quelle in cui

$$k + 1 = h,$$

cioè il grado di $Q(n)$ uguale a quello di $P(n)$.

Si chiamano *confluenti* quelli che hanno classe diversa da zero, cioè

$$k + 1 > h.$$

Una funzione ipergeometrica confluente è una funzione intera, mentre la serie ipergeometrica che dà mediante continuazione analitica una funzione completa ha per raggio di convergenza l'unità.

La funzione ipergeometrica completa di ordine zero è la funzione binomiale

$$F\begin{pmatrix}\alpha & \\ 1 & x\end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)}{(1, n)} x^n = (1-x)^{-\alpha},$$

la funzione ipergeometrica confluente di ordine zero e di classe uno è la funzione esponenziale

$$F\begin{pmatrix}* & \\ 1 & x\end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1, n)} x^n = e^x,$$

la funzione ipergeometrica completa di ordine uno è la funzione ipergeometrica di GAUSS

$$F\begin{pmatrix}\alpha, \beta & \\ \gamma, 1 & x\end{pmatrix} = F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

([10]) Perchè se nessuna delle radici γ è uguale all'unità, potremo considerare $Q(n)(n+1)$, $P(n)(n+1)$, senza togliere nulla alla generalità.

la funzione ipergeometrica di ordine uno e di classe uno è la funzione di KUMMER

$$F\begin{pmatrix}\alpha & & \\ \gamma, & 1 & x\end{pmatrix} = G(\alpha, \gamma, x),$$

e la funzione ipergeometrica di ordine uno e di classe due è la funzione di BESSEL

$$F\begin{pmatrix}* & * & \\ \gamma, & 1 & x\end{pmatrix} = J(\gamma, x), \text{ ecc.}$$

Per il nostro studio saranno fondamentali la funzione ipergeometrica di GAUSS

$$F\begin{pmatrix}\alpha, & 1 & \\ \gamma, & 1 & x\end{pmatrix} = F(\alpha, 1, \gamma, x),$$

e la funzione ipergeometrica di KUMMER

$$F\begin{pmatrix}1 & & \\ \gamma, & 1 & x\end{pmatrix} = G(1, \gamma, x),$$

funzioni che risulteranno, come vedremo, essenziali per la rappresentazione di un funzionale ipergeometrico generale.

3. **Funzionale ipergeometrico di Gauss.** — Studiamo prima di tutto il funzionale lineare misto, normale, che ha per indicatrice emisimmetrica la funzione ipergeometrica di GAUSS

$$-\frac{1}{t}k\left(\frac{x}{t}\right) = -\frac{1}{t}F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{t}\right),$$

pensata quale funzione di t.

Indicheremo questo funzionale od operatore di GAUSS col simbolo

$$H[y(t);\ \alpha, \beta, \gamma, x] \quad \text{o con} \quad H^{\alpha,\beta}_{\gamma,1}[y(t);\ x],$$

o più semplicemente con

$$H[y(t):\ x]$$

od anche quando non vi sarà ambiguità con

$$Hy(t) \text{ o semplicemente con } H.$$

La sua indicatrice simmetrica $w(x, t)$ sarà

$$w(x, t) = F(\alpha, \beta, \gamma, xt).$$

Quindi il valore di H si ottiene mediante l'integrale:

(6) $$Hy = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{t} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{t}\right) y(t)dt = f(x).$$

Quanto alla curva chiusa C c'è da osservare che, essendo $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ singolare per $x = 1$ ed $x = \infty$, la funzione

$$\frac{1}{t} F\left(\alpha, \beta, \gamma \frac{x}{t}\right)$$

sarà singolare per $t = 0$ e $t = x$, quindi la curva chiusa C dovrà racchiudere, per il cambiamento di segno della funzione caratteristica nell'integrale (6), questi due punti singolari e lasciare fuori i punti singolari della $y(t)$.

Dunque Hy sarà definito per ogni y regolare nell'origine $t = 0$. Per ogni tale funzione $y(t)$ fissiamo una x tale che y sia regolare per $t = x$; allora, se $y(t)$ è funzione analitica nel senso di Weierstrass, dovrà esistere un cammino L congiungente $t = 0$ con $t = x$ lungo il quale la $y(t)$ sarà ancora regolare.

Dunque la funzione $f(x) = Hy$ che corrisponde ad y, per l'operatore ipergeometrico, è definita come funzione di x nello stesso campo in cui è definita la y e la curva C sarà una curva nel cui interno la y è analitica regolare.

Però se $t = t_0$ è, per esempio, un punto singolare isolato di $y(t)$ nel cui intorno la $y(t)$ è monodroma, la $f(x)$ corrispondente avrà in generale per $x = t_0$ un punto singolare, ma di diramazione, dipendendo il valore di Hy dal cammino che congiunge zero con x.

Il cammino L si può pensare come taglio di Hermite congiungente i due punti singolari 0 ed x di $\frac{1}{t} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{t}\right)$ che corrispondono, rispettivamente, ai punti infinito ed uno della funzione $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

4. Polidromia del funzionale ipergeometrico di Gauss. — Come sappiamo la funzione $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ si può rappresentare mediante l'integrale definito

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-ux)^{-\alpha} du,$$

ove $R(\beta)$ e $R(\gamma - \beta)$ (11) sono positive, e

$$F\left(\alpha, \beta, \gamma. \frac{x}{t}\right) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\left(1 - u\frac{x}{t}\right)^{-\alpha} du.$$

Questa espressione dà una rappresentazione analitica della funzione di Gauss in tutta la stella di Mittag-Leffler. Nelle ipotesi ammesse per β e $\gamma - \beta$, conserva un senso quando t non cade sulla curva L congiungente 0 ad x; all'esterno del cerchio $|t| > |x|$ è sviluppabile in serie di potenze di $\frac{1}{t}$.

(11) Con $R(\beta)$, $R(\gamma - \beta)$ indichiamo rispettivamente le parti reali di β e $\gamma - \beta$.

Per il seguito occorrerà lo studio del funzionale $H_{\gamma,1}^{\alpha,1}$ che dipende dalla funzione $F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{x}{t}\right)$, questa funzione si può rappresentare, col cambiamento di variabile $ux = v$, con:

$$F(\alpha, 1, \gamma, x) = x^{1-\gamma} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1)\Gamma(\gamma-1)} t^{\alpha} \int_0^x (x-v)^{\gamma-2}(t-v)^{-\alpha} dv.$$

Quando t descrive nel senso positivo una curva chiusa racchiudente zero ed x la funzione sotto il segno di integrale verrà moltiplicato per $e^{-2\pi i\alpha}$ e la variazione di t^{α} essendo $e^{2\pi i\alpha}$ l'espressione riprende il valore di partenza.

Però se t attraversa il taglio $0x$ e descrive nel senso positivo un contorno chiuso attorno ad x, vediamo, dalla rappresentazione della $F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{x}{t}\right)$ mediante integrale e dalla classica ricerca del gruppo della equazione differenziale ipergeometrica di Gauss ([12]) che la funzione $F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{x}{t}\right)$, per detta rotazione, risulterà cambiata di valore.

Si avrà dunque che se la curva C gira, nel senso positivo, attorno al punto x, il funzionale $H_{\gamma,1}^{\alpha,1}$ sarà polidromo.

Nel seguito considereremo soltanto funzionali ipergeometrici monodromi, cioè tali che la curva C non attraversi il taglio $0x$.

5. **Funzionali ipergeometrici generali.** — Consideriamo la classe dei funzionali lineari misti, normali, che indicheremo con H, cioè

$$H[y(t);\, x] = f(x),$$

la cui funzione caratteristica emisimmetrica è una funzione ipergeometrica generale

$$v(x, \alpha) = -\frac{1}{\alpha} k\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} = -\frac{1}{\alpha} F\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h & \frac{x}{\alpha} \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k & \end{pmatrix}$$

e per caratteristica simmetrica

$$w(x, \alpha) = -\frac{1}{\alpha} v\left(x, \frac{1}{\alpha}\right) = F\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h & x\alpha \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k & \end{pmatrix}.$$

Chiameremo questi operatori *funzionali ipergeometrici generali* completi e confluenti in relazione alla funzione indicatrice.

([12]) Vedasi Picard, *Traite d'Analyse*, T. II, pag. 242 e seguenti.

Indicheremo, compendiosamente, questi funzionali con

$$H\left[y(t);\ \begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\end{matrix}\ x\right] \quad \text{o con} \quad H^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h}_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k}\, y(t)$$

o semplicemente con H, e chiameremo funzionale ipergeometrico di ordine h e di classe $\theta = k + 1 - h$ in rapporto all'ordine ed alla classe della funzione indicatrice.

Notiamo subito che un funzionale H confluente trasforma una funzione analitica regolare nell'intorno dell'origine in una funzione intera.

Per questi funzionali H generali si può ripetere quanto è stato detto per il funzionale ipergeometrico di Gauss, sia a riguardo della validità, sia a riguardo della polidromia in quanto la funzione ipergeometrica indicatrice di questi operatori è, analogamente alla funzione di Gauss, uniforme in tutto il piano della variabile complessa quando si sia tracciato il taglio $0x$.

6. Espressione dei funzionali ipergeometrici mediante serie di potenze. — Sia il funzionale

$$H[y(t);\ \alpha, \beta, \gamma, x];$$

calcoliamo il valore del funzionale per le potenze t^n $(n = 0, 1, \dots)$, certamente funzioni regolari nell'origine.

Avremo che questo valore sarà dato dal residuo integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{t} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{t}\right) t^n dt$$

nel punto zero.

Avremo dunque

$$H[t^n;\ \alpha, \beta, \gamma, x] = \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1. n)} x^n$$

cioè il funzionale ipergeometrico di Gauss fa corrispondere alle potenze le potenze stesse alterate per un fattore di proporzionalità che è

$$\frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)}.$$

In generale avremo

$$H\left[t^n;\ \begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\end{matrix}\ x\right] = \frac{(\alpha_1, n) \dots (\alpha_h, n)}{(\gamma_1, n) \dots (\gamma_k, n)}\, x^n. \tag{7}$$

Sia ora data una funzione analitica regolare nell'intorno dell'origine

$$y(t) = \sum_{n\ 0}^{\infty} c_n t^n,$$

essendo $y(t)$ assolutamente ed uniformemente convergente sulla curva d'integrazione C, avremo:

$$H_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k}^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h} y(t) = \sum_0^\infty \frac{(\alpha_1, n) \ldots (\alpha_h, n)}{(\gamma_1, n) \ldots (\gamma_k, n)} c_n x^n.$$

Otteniamo così il valore del funzionale espresso mediante serie di potenze.

7. **Funzionali ipergeometrici elementari.** Consideriamo la funzione ipergeometrica

$$F(\alpha, 1, \gamma, x) = \sum_0^\infty \frac{(\alpha, n)}{(\gamma, n)} x^n$$

e la funzione ipergeometrica

$$F(1, 1, \gamma, x) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{(\gamma, n)}.$$

Alla prima funzione corrisponderà il funzionale

$$H[y(t); \alpha, 1, \gamma, x],$$

che indicheremo anche con

$$H_\gamma^\alpha y(t) = \sum_0^\infty \frac{(\alpha, n)}{(\gamma, n)} c_n x^n.$$

Alla seconda funzione corrisponderà il funzionale

$$H[y(t); 1, 1, \gamma, x],$$

che indicheremo con

$$H_\gamma y(t) = \sum_0^\infty \frac{1}{(\gamma, n)} c_n x^n.$$

Questi due funzionali si chiameranno *funzionali ipergeometrici elementari*, perchè con questi si possono formare tutti i funzionali H generali.

Vediamo intanto che l'operatore H_γ^α ha per funzione indicatrice la funzione ipergeometrica di GAUSS $\frac{1}{t} F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{x}{t}\right)$, mentre l'operatore $H_\gamma y$ ha per funzione indicatrice la funzione di KUMMER $\frac{1}{t} G\left(1, \gamma, \frac{x}{t}\right)$.

Il primo è un operatore H completo, mentre il secondo è un operatore H confluente.

Ora è facile vedere come la funzione di KUMMER si possa ottenere mediante passaggio al limite dalla funzione di GAUSS, e da ciò la relazione fra i due funzionali elementari H_γ^α ed H_γ.

Questa dimostrazione si estende facilmente agli operatori ipergeometrici confluenti generali per modo che questi, con passaggio al limite, si ottengono dagli operatori completi.

Vogliamo dimostrare che:

$$\lim_{\rho \to \infty} F\left(1, \rho, \gamma, \frac{x}{\rho}\right) = G(1, \gamma, x),$$

essendo ρ un numero reale.

Infatti scindiamo $F\left(1, \rho, \gamma, \frac{x}{\rho}\right)$ in due parti:

$$F\left(1, \rho, \gamma, \frac{x}{\rho}\right) = \sum_0^p \frac{(\rho, n)}{(\gamma, n)} \frac{x^n}{\rho^n} + R_{p,\rho}.$$

La prima parte del secondo membro, per $\rho \to \infty$, tende a

$$\sum_0^p \frac{x^n}{(\gamma, n)}$$

perchè:

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{(\rho, n)}{\rho^n} = 1.$$

Per determinare il limite della seconda parte osserviamo prima di tutto che, per $\rho_1 < \rho_2$,

$$\left(1 + \frac{1}{\rho_1}\right)\left(1 + \frac{2}{\rho_1}\right) \dots \left(1 + \frac{n-1}{\rho_1}\right) > \left(1 + \frac{1}{\rho_2}\right) \dots \left(1 + \frac{n-1}{\rho_2}\right),$$

quindi avremo per $\rho_1 < \rho_2$

$$|R_{p,\rho_1}| > |R_{p,\rho_2}|.$$

Fissato ora un ρ grande quanto si vuole, per $|x| < \rho$, la serie $F\left(1, \rho, \gamma, \frac{x}{\rho}\right)$ sarà assolutamente ed uniformemente convergente; preso quindi ε positivo piccolo ad arbitrio si potrà fissare un p tale che

$$|R_{p,\rho}| < \varepsilon$$

ed essendo data una successione qualunque

$$\rho < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \dots \to \infty$$

avremo in corrispondenza

$$\varepsilon > |R_{p,\rho}| > |R_{p,\rho_1}| > \dots$$

e perciò

$$\left|\lim_{\rho \to \infty} R_{p,\rho}\right| < \varepsilon.$$

Avremo così che l'operatore H_γ si ottiene mediante passaggio al limite da H_γ^α, cioè si ha:

$$H_\gamma y = \lim_{\rho \to \infty} H\left[y(t);\ 1, \rho, \gamma, \frac{x}{\rho}\right] = \lim_{\rho \to \infty} H_\gamma^\rho y\left(\frac{t}{\rho}\right).$$

Mediante questi operatori elementari si possono costruire tutti gli operatori ipergeometrici generali.

Intanto si vede subito che

$$H[y(t);\ \alpha, \beta, \gamma, x] = H_\gamma^\alpha \cdot H_1^\beta y.$$

Ed in generale

$$H\left[y(t);\ \begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\end{matrix}\ x\right] = H_{\gamma_1}^{\alpha_1} \cdot H_{\gamma_2}^{\alpha_2} \dots H_{\gamma_h}^{\alpha_h} \cdot H_{\gamma_{h+1}} \dots H_{\gamma_k} y,$$

ove i parametri superiori e quelli inferiori si possono permutare fra loro in qualunque modo senza alterare il valore del funzionale.

Poichè un funzionale ipergeometrico confluente si ottiene mediante passaggio al limite da un funzionale completo, vediamo dunque che risulta fondamentale per lo studio dei funzionali in discorso il funzionale:

$$H_\gamma^\alpha y.$$

Ed abbiamo che un funzionale ipergeometrico confluente si otterrà mediante successive applicazioni di operatori H_γ^α e di passaggi al limite.

Precisamente un operatore ipergeometrico confluente di ordine k e di classe θ si otterrà mediante successive applicazioni di h funzionali completi e $k+1-h$ passaggi al limite od applicazioni successive di $k+1-h$ funzionali H_γ.

Un funzionale completo essendo di classe zero si otterrà mediante applicazioni successive di tanti funzionali H_γ^α quanto è l'ordine del funzionale aumentato di uno, cioè $k+1=h$.

Così il funzionale ipergeometrico di GAUSS che è di ordine uno e di classe zero si otterrà mediante applicazione successiva di due operatori elementari completi, cioè:

$$H_{\gamma;\ 1}^{\alpha;\ \beta} y = H_\gamma^\alpha H_1^\beta y.$$

8. **Calcolo del funzionale H per le funzioni razionali.** — Prima di tutto ricordiamo che essendo i funzionali H funzionali normali, si ha la proprietà

$$H[y(ct);\ x] = H[y(t);\ cx],$$

cioè se un funzionale H fa corrispondere ad una funzione $y(t)$ la funzione $f(x)$ alla funzione $y(ct)$. ove c è una costante, corrisponde $f(cx)$.

Calcoliamo ora il funzionale H per le funzioni razionali.

Una funzione razionale regolare nell'origine avrà l'espressione generale:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

ove

(8) $$y_1(t) = \sum_0^n c_r t^r \quad \text{e} \quad y_2(t) = \sum_h^m \sum_{1\,k-1}^{m_h} \frac{a_{h,k}}{(t-v_h)^k},$$

e

$$v_h \neq 0, \qquad (h = 1, 2, \dots, m).$$

Per la proprietà del funzionale H_γ^α di essere lineare, avremo

$$H_\gamma^\alpha[y(t) : x] = H_\gamma^\alpha[y_1(t) : x] + H_\gamma^\alpha[y_2(t) ; x].$$

Inoltre per quanto abbiamo richiamato si ottiene:

(9) $$H_\gamma^\alpha[y_1(t) ; x] = \sum_0^n \frac{(\alpha, n)}{(\gamma, n)} c_r t^r.$$

Cioè *ad ogni polinomio* $y(t)$ *di grado* n *il funzionale* H_γ^α *fa corrispondere un polinomio di grado* n, *ove i coefficienti*, c_r, *sono moltiplicati per* $\frac{(\alpha, r)}{(\gamma, r)}$, $r = 0, 1, \dots, n$.

In particolare per il funzionale H_γ si ha:

$$H_\gamma[y(t) ; x] = \sum_{r=0}^n \frac{1}{(\gamma, r)} c_r t^r$$

e per $\gamma = 1$ si ha il risultato del funzionale H_1 su un polinomio, cioè: a $c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_0$ il funzionale H_γ fa corrispondere

$$\frac{c_n}{n!} t^n + \frac{c_{n-1}}{n-1!} t^{n-1} + \dots + c_0.$$

Determiniamo ora il risultato del funzionale H_γ^α su una frazione razionale semplice. Considerando l'applicazione alla frazione

$$y(t) = \frac{1}{(t-v)^k}, \quad v \neq 0,$$

per $k = 1$ avremo:

$$H_\gamma^\alpha\left[\frac{1}{(t-v)} ; x\right] = -\frac{1}{v} F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{x}{v}\right),$$

per k intero > 1, avremo:

$$H_\gamma^\alpha\left[\frac{1}{(t-v)^k} ; x\right] = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{t} F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{x}{t}\right) \frac{1}{(t-v)^k} dt,$$

cioè:

(10) $$H_\gamma^\alpha\left[\frac{1}{(t-v)^k} ; x\right] = \frac{(-1)^k}{v^k} F\left(\alpha, k, \gamma, \frac{x}{v}\right).$$

Abbiamo così ottenuto:

$$(11)\qquad H_\gamma^\alpha[y(t);x]=\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{(\gamma,r)}c^r t_r+\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{m_h}\frac{(-1)^k a_{h,k}}{v_h^{\,k}}F\left(\alpha,k,\gamma,\frac{x}{v_h}\right).$$

Possiamo dunque concludere che un funzionale ipergeometrico H_γ^α applicato a funzioni razionali:

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)$$

(ove $y_1(t)$ è un polinomio ed $y_2(t)$ è la somma di frazioni razionali semplici) è esprimibile mediante un polinomio dello stesso grado di y e formato come alla formula (9), più la somma di funzioni ipergeometriche di GAUSS della forma (10).

Potremo anche indicare il risultato dell'operatore H_γ^α su $\dfrac{1}{(t-v)^k}$ in questo modo

$$H_\gamma^\alpha\left[\frac{1}{(t-v)^k};x\right]=\frac{1}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial v^{k-1}}\left[-\frac{1}{v}F\left(\alpha,1,\gamma,\frac{x}{v}\right)\right]$$

ed infatti

$$\frac{(-1)^k}{v^k}F\left(\alpha,k,\gamma,\frac{x}{v}\right)=\frac{1}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial v^{k-1}}\left[-\frac{1}{v}F\left(\alpha,1,\gamma,\frac{x}{v}\right)\right]$$

come facilmente si può verificare sviluppando in serie $F\left(\alpha,1,\gamma,\dfrac{x}{v}\right)$ e derivando.

Per calcolare $H_{\gamma,1}^{\alpha,\beta}=H_\gamma^\alpha H_1^\beta$, applicato ad una funzione razionale, basterà conoscere il valore del funzionale H_1^β quando la $y(t)$ è una funzione ipergeometrica di GAUSS della forma (10).

E così in generale per un funzionale $H_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_k}^{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k}\,y$.

9. **Calcolo del funzionale *H* per le funzioni ipergeometriche.** — Sia da calcolare prima di tutto

$$H_1^\beta\left[\frac{(-1)^k}{v^k}F\left(\alpha,k,\gamma,\frac{t}{v}\right);x\right]=\frac{(-1)^k}{2\pi i v^k}\int_C\frac{1}{t}F\left(1,\beta,1,\frac{x}{t}\right)F\left(\alpha,k,\gamma,\frac{t}{v}\right)dt$$

si avrà

$$H_1^\beta\left[\frac{(-1)^k}{v^k}F\left(\alpha,k,\gamma,\frac{t}{v}\right);x\right]=\frac{(-1)^k}{v^k}F\begin{pmatrix}\alpha,&k,&\beta&\dfrac{x}{v}\\ \gamma,&1,&1&\end{pmatrix}.$$

In generale per k qualunque si avrà:

$$H_1^{\beta_1}\left[F\left(\alpha,\beta,\gamma,\frac{t}{v}\right):x\right]=F\begin{pmatrix}\alpha,&\beta_1,&\beta&\dfrac{x}{v}\\ \gamma,&1,&1&\end{pmatrix}.$$

Possiamo concludere che applicando il funzionale $H_{\gamma,1}^{\alpha,\beta}$ ad una funzione razionale della forma (7) si otterranno funzioni razionali intere di grado n

più funzioni ipergeometriche d'ordine 3 complete, avente i parametri α, β e k (numero intero positivo) per indici superiori e γ. 1 ed 1 per indici inferiori.

In generale avremo poi:

$$H^{\alpha_1,\,\alpha_2,\dots,\,\alpha_h}_{\gamma_1,\,\gamma_2,\dots,\,\gamma_k}\frac{1}{(t-v)^r}=H^{\alpha_1}_{\gamma_1}H^{\alpha_2}_{\gamma_2}\dots H_{\gamma_k}\frac{1}{(t-v)^r},$$

ove

$$H^{\alpha_n}_{\gamma_m}\frac{1}{(t-v)^r}=\frac{(-1)^r}{v^r}F\left(\alpha_n,\,r,\,\gamma_m,\,\frac{x}{v}\right)=\frac{(-1)^r}{v^r}F\begin{pmatrix}\alpha_n, & r & x\\ \gamma_m, & 1 & v\end{pmatrix},$$

$$H^{\alpha_t}_{\gamma_u}\frac{(-1)^r}{v^r}F\left(\alpha,\,r,\,\gamma,\,\frac{x}{v}\right)=\frac{(-1)^r}{v^r}F\begin{pmatrix}\alpha_t,\,\alpha, & r & x\\ \gamma,\,\gamma_u, & 1 & v\end{pmatrix}.$$

Ed in generale

$$H^{\alpha_1,\,\alpha_2,\dots,\,\alpha_h}_{\gamma_1,\,\gamma_2,\dots,\,\gamma_k}\frac{1}{(t-v)^r}=\frac{(-1)^r}{v_r}F\begin{pmatrix}\alpha_1,\,\alpha_2,\dots,\,\alpha_h, & r & x\\ \gamma_1,\,\gamma_2,\dots,\,\gamma_k, & 1 & v\end{pmatrix}.$$

Possiamo quindi concludere che applicando il funzionale H

$$H^{\alpha_1,\,\alpha_2,\dots,\,\alpha_h}_{\gamma_1,\,\gamma_2,\dots,\,\gamma_k}$$

di ordine k, $h\leq k$ a $\frac{1}{(t\quad v)^r}$ otteniamo una funzione

$$\frac{(-1)^r}{v^r}F\begin{pmatrix}\alpha_1,\,\alpha_2,\dots,\,\alpha_h, & r & x\\ \gamma_1,\,\gamma_2,\dots,\,\gamma_k, & 1 & v\end{pmatrix},$$

cioè una funzione ipergeometrica di un ordine aumentato di una unità e della stessa classe di quella del funzionale.

Se il funzionale è confluente otterremo una funzione confluente, cioè una funzione intera, come ad esempio nell'operatore H_1.

Se il funzionale è completo otterremo invece una funzione ipergeometrica completa che converge in un cerchio di centro nell'origine e raggio uno, e dalla quale si può ottenere l'espressione in tutto il piano, col taglio dell'asse reale da 1 a ∞, mediante, ad esempio, integrali definiti.

È stato dimostrato che operando col funzionale H_1 su funzioni razionali si ottengono le funzioni seno, coseno, ecc.. Desideriamo qui studiare la generazione di funzioni mediante il funzionale ipergeometrico generale.

Dalla

$$H^{\alpha}_{\gamma}\left[\frac{1}{1-t};\;x\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha,\,n)}{(\gamma,\,n)}x^n=F(\alpha,\,1,\,\gamma,\,x)$$

si ha, per $\gamma=1$, la funzione

$$y=\frac{1}{(1-x)^{\alpha}}$$

cioè:

$$H_1^\alpha\left[\frac{1}{1-t};\ x\right]=\frac{1}{(1-x)^\alpha}.$$

Inoltre per quanto abbiamo dimostrato

$$\lim_{\rho\to\infty} H_\gamma^\rho\left[\frac{1}{1-t};\ \frac{x}{\rho}\right]=H_\gamma\left[\frac{1}{1-t};\ x\right]=G(1,\gamma,x)$$

e per $\gamma=1$, si ha:

$$\lim_{\rho\to\infty} H_1^\rho\left[\frac{1}{1-t};\ x\right]=H_1\left[\frac{1}{1-t};\ x\right]=e^x.$$

Vediamo dunque che la funzione $\frac{1}{(1-x)^\alpha}$ e la funzione e^x si ottengono rispettivamente mediante i funzionali H_1^α ed H_1 dalla serie geometrica.

Nello stesso modo si potrebbero generare mediante funzionali H le funzioni trascendenti elementari: seno, coseno, seno iperbolico, coseno iperbolico, ecc..

In generale abbiamo:

$$H^{\alpha_1',\,\alpha_2',\dots,\,\alpha_r'}_{\gamma_1',\,\gamma_2',\dots,\,\gamma_{s+1}'}\left[F\begin{pmatrix}\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\ \alpha_h & \\ \gamma_1,\ \gamma_2,\dots,\ \gamma_{k+1} & t\end{pmatrix};\ x\right]=F\begin{pmatrix}\alpha_1',\ \alpha_2',\dots,\ \alpha_r',\ \alpha_1,\dots,\ \alpha_h & \\ \gamma_1',\ \gamma_2',\dots,\ \gamma_{s+1}',\ \gamma_1,\dots,\ \gamma_{k+1} & x\end{pmatrix}$$

cioè: « *Data una funzione* F *di ordine* k *e di classe* θ *mediante un funzionale* H *di ordine* s *e di classe* θ′ *otteniamo una funzione* F *di ordine* k + s *e di classe* θ + θ′ ».

In particolare da una funzione ipergeometrica completa con una funzionale H completo si avrà una funzione ipergeometrica completa, mentre con un funzionale H confluente la stessa funzione darà una funzione confluente.

Così dalla funzione, completa di ordine zero, $\frac{1}{1-x}$, abbiamo ottenuto col funzionale H_1^α di ordine 0 la funzione completa di ordine zero $\frac{1}{(1-x)^\alpha}$.

Così dalla funzione $\frac{1}{1-x}$ mediante il funzionale H_1 confluente abbiamo ottenuto la funzione e^x di ordine zero e di classe uno.

In generale abbiamo che una funzione F completa di ordine k si ottiene con un funzionale H di ordine k dalla funzione $\frac{1}{1-t}$.

Mentre una funzione F confluente di classe θ si può ottenere dalla funzione $\frac{1}{1-x}$, col prodotto di un funzionale H completo e di θ funzionali confluenti di ordine zero.

Così la funzione di Bessel, di classe due,

$$F\begin{pmatrix} * & * & \\ \gamma, & 1 & x \end{pmatrix} = J(\gamma, x)$$

si può ottenere dalla funzione $\frac{1}{1-x}$ con l'applicazione successiva dei funzionali H_γ ed H_1.

PARTE SECONDA

Relazione fra i funzionali H ed alcuni funzionali classici.

1. **Richiamo di alcune nozioni.** — Prima di tutto ricordiamo che i funzionali H sono stati classificati nella prima parte in relazione alla funzione ipergeometrica caratteristica in due classi: funzionali ipergeometrici completi e confluenti. Questa ultima classe, mediante passaggio al limite, si può ricondurre alla prima. Poi abbiamo veduto che base fondamentale per lo studio dei funzionali H è il funzionale che abbiamo indicato con H_γ^α.

Inoltre abbiamo ottenuto l'espressione di questo funzionale H_γ^α mediante serie di potenze.

Ricordiamo che data la y funzione regolare nell'intorno dell'origine:

$$y = \sum_{n}^{\infty} {}_0 \, c_n t^n$$

abbiamo

$$f(x) = H_\gamma^\alpha y = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{t} F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{x}{t}\right) y(t) dt,$$

ove la curva C racchiude i due punti 0 ed x e lascia all'esterno i punti singolari della $y(t)$.

Si ha:

$$H_\gamma^\alpha y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)}{(\gamma, n)} c_n t^n$$

e in particolare

$$H_1 t^n = \frac{1}{n!} x^n.$$

Inoltre abbiamo veduto come si esprime il risultato di questi funzionali di qualunque ordine e classe su funzioni razionali e ipergeometriche.

Ora vediamo i legami che intercedono fra questi funzionali H ed alcuni funzionali classici.

2. Trasformazione di Laplace-Abel. — Prima di collegare i funzionali H con noti e classici funzionali desideriamo fare, in questo paragrafo, alcune osservazioni riguardanti i rapporti di questo funzionale H con la classica trasformazione di LAPLACE-ABEL.

L'integrale generalizzato

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}\varphi(t)dt, \tag{1}$$

ove $\varphi(t)$ è una funzione di variabile reale o complessa della variabile t, data univocamente nell'intervallo $c \dots +\infty$, limitata ed integrabile su ogni tratto finito, x è una variabile complessa, definisce, se convergente, una funzione $f(x)$ che viene detta funzione *determinante* di $\varphi(t)$, mentre $\varphi(t)$ si dice funzione *generatrice*.

La trasformazione si chiama di LAPLACE-ABEL e numerosissimi studi si sono fatti intorno a questa trasformazione ([13]).

La funzione inversa è stata data, sotto opportune ipotesi, nella forma

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} f(u)e^{tu}du, \tag{2}$$

che esprime inversamente la generatrice mediante la funzione determinante. I funzionali H si ricollegano a questa trasformazione inversa.

Sia ad esempio $H_{\gamma,\,1}^{\alpha,\,\beta}$ cioè:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{t} F\left(\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \frac{x}{t}\right)\varphi(t)dt,$$

ove C è una curva che racchiude i punti singolari 0 ed x della funzione indicatrice, e lascia all'esterno quelli della funzione $\varphi(t)$.

([13]) Il LANDAU in un classico lavoro (« Sitzungber. Akad. Bayer. der Wissenschaften », T. 36) ha posto in relazione mediante questa trasformazione i campi di convergenza delle serie di DIRICHLET con quelli delle serie di fattoriali. Il PINCHERLE ne ha fatto uno studio profondo (« Annales École Normale Sup. », S. III, T. 22) per le ricerche delle relazioni intercedenti fra le singolarità di una funzione analitica ed i coefficienti del suo sviluppo in serie, introducendo una funzione *coefficiente* legata semplicemente alla trasformazione di LAPLACE. Recentemente il DOETSCHE (« Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung », Band 36, (1927)) ne ha fatto uno studio per la giustificazione del calcolo simbolico di HEAVISIDE e la Sig.ª MARTIS in BIDDAU (« Rendiconti Circolo Mat. di Palermo », (1933)) ha ricollegato questa trasformazione ai funzionali analitici di FANTAPPIÈ.

Poniamo

$$\frac{1}{t} = u, \quad dt = -\frac{1}{u^2}du, \quad \varphi_1(u) = \frac{1}{u}\varphi\left(\frac{1}{u}\right)$$

si ha

$$f(x) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{C_1} F(\alpha, \beta, \gamma, ux)\varphi_1(u)du,$$

e cambiando segno alla funzione integranda ed il verso di percorso alla curva C_1, e sia $C' = -C_1$, si avrà:

(3) $$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} F(\alpha, \beta, \gamma, ux)\varphi_1(u)du,$$

cioè la curva C' lascia all'esterno i punti singolari $\frac{1}{x}$ ed ∞ della $F(\alpha, \beta, \gamma, ux)$, e racchiude quelli della funzione $\varphi_1(u)$ che è regolare all'infinito essendo la φ regolare nell'origine. La $F(\alpha, \beta, \gamma, ux)$ è l'indicatrice simmetrica del funzionale H.

La trasformazione ora ottenuta per la funzione indicatrice e^{ux} sarà:

(4) $$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} e^{ux}\varphi(u)du,$$

che differisce dalla inversa della trasformazione di LAPLACE soltanto per il cammino C', come ha fatto notare la MARTIS, perchè nella (2) il cammino passa proprio per il punto singolare dell'esponenziale mentre nella (4) la funzione integranda si mantiene sempre regolare lungo il cammino d'integrazione.

Lo studio dell'inverso del funzionale H, che nel caso della funzione indicatrice $\frac{1}{t}e^{\frac{x}{t}}$ corrisponde alla trasformazione di LAPLACE-ABEL, sarà fatto, in un altro lavoro.

Quanto abbiamo esposto è sufficiente a dare i rapporti che intercedono tra i funzionali H di qualunque ordine e classe e la teoria delle funzioni determinanti e generatrici.

3. **Relazione tra i funzionali H ed il funzionale I^n.** — Desideriamo qui subito mostrare il legame che esiste fra il funzionale H e l'operazione di integrazione.

Indichiamo con I il funzionale che trasforma una funzione $f(x)$ nella primitiva e con I^n l'iterazione ennesima di questa operazione.

Sia la serie

$$f(x) = a_0 + a_1(x) + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

sarà, a meno di una costante arbitraria,

$$If(x) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots .$$

Consideriamo il funzionale H_2^1; si avrà immediatamente:

$$If(x) = xH_2^1 f(x) = \frac{x}{2\pi i}\int_C \frac{1}{t} F\left(1, 1, 2, \frac{x}{t}\right) f(t)dt$$

ed in generale, a meno di costanti arbitrarie,

$$I^n f(x) = \frac{x^n}{n!} H_{n+1}^1 f(x) = \frac{x^n}{n!\, 2\pi i}\int_C \frac{1}{t} F\left(1, 1, n+1, \frac{x}{t}\right) f(t)dt,$$

ove la curva C lascia all'esterno le singolarità di $f(t)$ e racchiude il punto 0 ed x.

4. **Relazione fra i funzionali H ed xD.** — Gli operatori H rientrano nella classe degli operatori U di PINCHERLE, cioè degli operatori normali. come abbiamo detto nella introduzione, e sono precisamente operatori normali di rango zero. Questi operatori U hanno la proprietà di essere commutabili con l'operatore xD, cioè, per l'operatore H si ha:

$$xDH_\gamma^\alpha = H_\gamma^\alpha (tD),$$

valevole anche per tutti gli operatori U.

Questa relazione assume una forma interessante per gli operatori H_γ^α.

Infatti si ha:

$$xF_x'(\alpha, 1, \gamma, x) = \alpha \{ F(\alpha+1) - F(\alpha) \} = \alpha \Delta_\alpha F(\alpha),$$

ove abbiamo indicato con $F(\alpha)$ la funzione $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ e $F(\alpha+1)$ la stessa $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ nella quale si è incrementato solo il parametro α di una unità, e con Δ_α la differenza $F(\alpha+1) - F(\alpha)$, da cui

$$xDH_\gamma^\alpha y = \frac{x}{2\pi i}\int_C \frac{1}{t} F_x'\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{x}{t}\right) y(t)dt = \alpha(H_\gamma^{\alpha+1} - H_\gamma^\alpha) y. \tag{5}$$

Ed indicando con $\Delta_\alpha H_\gamma^\alpha$ la differenza

$$H_\gamma^{\alpha+1} - H_\gamma^\alpha$$

possiamo scrivere la (5) così:

$$xDH_\gamma^\alpha y = \alpha(\Delta_\alpha H_\gamma^\alpha) y.$$

Da cui avremo, come caso particolare,

$$Df(x) = \frac{1}{x}(H_1^2 - H_1^1) y = \frac{1}{x}(\Delta_1 H_1^1) y.$$

Così la derivazione, oltre alla integrazione, è esprimibile mediante gli operatori H.

In generale avremo, essendo

$$x^n F_x^{(n)}\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{x}{t}\right) = (\alpha, n)\Delta_\alpha^n F,$$

indicando con $\Delta_\alpha^n F$ la differenza ennesima della F rispetto ad α, cioè

$$\Delta_\alpha^n = F(\alpha+n) - nF(\alpha+n-1) + \binom{n}{2}F(\alpha+n-2) + \ldots + (-1)^n F(\alpha),$$

che

$$x^n D^n H_\gamma^\alpha y = (\alpha, n)(\Delta_\alpha^n H_\gamma^\alpha)y$$

ed in particolare

$$D^n y = \frac{n!}{x^n}(\Delta_1^n H_1^1)y.$$

Ora è noto che tra l'operatore $x^n D^n$ e gli operatori $(xD)^n$ passa la relazione della forma:

$$x^n D^n = \sum_{r=1}^{n} a_r (xD)^r,$$

ove i coefficienti a_r possono facilmente determinarsi. Viceversa è possibile determinare $(xD)^n$ mediante gli operatori del tipo xD, $x^2D^2, \ldots, x^nD^n$.

Conviene qui fare un'osservazione sugli operatori del tipo

$$g(xD)y,$$

ove

$$g(\lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r \lambda^r$$

sia, ad esempio, una funzione intera di λ.

Si avrà se è

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

funzione analitica di x, con raggio ρ di convergenza, che

$$g(xD)f = \sum_{r=0}^{\infty} b_r (xD)^r \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\}. \tag{6}$$

Ora supponiamo precisamente che sia $g(\lambda) = e^\lambda$, (il caso generale, che a noi interessa, sarà esposto in seguito) avremo, in questa ipotesi, che la serie doppia:

$$g(xD)f = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_r a_n (xD)^r x^n$$

sarà convergente incondizionatamente per $|x| < \rho$ e si avrà che la (6) sarà

$$g(xD)f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{r=0}^{\infty} b_r n^r = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) a_n x^n.$$

Se $g(\lambda)$ è un polinomio in λ, cioè sia

$$g(\lambda) = \sum_{r=0}^{p} b_r \lambda^r = P(\lambda),$$

può ripetersi quanto abbiamo detto per $g(\lambda) = c^\lambda$, e gli operatori

$$g(xD)y$$

saranno particolari operatori H, cioè operatori che hanno per funzíone indicatrice serie ipergeometriche della forma

$$-\frac{1}{t}\sum_{0}^{\infty} g(n)\frac{x^n}{t^n} = -\frac{1}{t}\sum_{0}^{\infty} P(n)\frac{x^n}{t^n},$$

ed in particolare si ha:

$$g(xD)\frac{1}{1-x} = \sum_{n\ 0}^{\infty} g(n)x^n = \sum_{n\ 0}^{\infty} P(n)x^n.$$

Se consideriamo l'equazione alle differenze finite

$$g(\lambda+1) = \frac{P(\lambda)}{R(\lambda)} g(\lambda), \tag{7}$$

ove

$$\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} = c\,\frac{(\lambda-\alpha_1)^{r_1}(\lambda-\alpha_2)^{r_2}\dots(\lambda-\alpha_m)^{r_m}}{(\lambda-\gamma_1)^{s_1}(\lambda-\gamma_2)^{s_2}\dots(\lambda-\gamma_n)^{s_n}},$$

supponendo $r_1 + r_2 + \dots + r_m \leq s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n$, ed $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, e $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ diversi da zero e da interi positivi e c costante, avremo, prima di tutto, che una soluzione della (7) sarà data da

$$g(\lambda) = c^\lambda \frac{\Gamma^{r_1}(\lambda-\alpha_1)\Gamma^{r_2}(\lambda-\alpha_2)\dots\Gamma^{r_m}(\lambda-\alpha_m)}{\Gamma^{s_1}(\lambda-\gamma_1)\Gamma^{s_2}(\lambda\quad\gamma_2)\dots\Gamma^{s_n}(\lambda-\gamma_n)}, \tag{8}$$

l'integrale generale essendo dato da $g(\lambda)\omega(x)$, con $\omega(x)$ funzione periodica di periodo uno.

Per le ipotesi fatte sulle α e sulle γ avremo che la $g(\lambda)$ sarà una funzione meromorfa regolare in una regione del piano complesso che comprende lo zero e la parte positiva dell'asse reale, sarà perciò in questa regione sviluppabile in serie di polinomi, (ad esempio sviluppo di MITTAG-LEFFLER, serie di interpolazione, ecc.) e si potrà quindi ripetere la dimostrazione esposta precedentemente nel caso che $g(\lambda)$ si era supposta uguale a c^λ.

Potrà quindi un operatore H qualunque rappresentarsi con l'operatore:

$$g(xD)f = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) a_n x^n,$$

ove $g(\lambda)$ è una soluzione della equazione alla differenze finite (7).

5. **Logaritmo funzionale.** — PINCHERLE ha studiato un operatore che ha chiamato logaritmo funzionale, rappresentato dall'integrale:

$$\Lambda\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_C \log \frac{t}{t-x} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt, \tag{9}$$

ove $\varphi(t)$ è regolare nell'origine e la curva C è una linea chiusa circondante l'origine e tutta contenuta nel campo di regolarità della $\varphi(t)$; si ha anche la rappresentazione in serie:

$$\Lambda\varphi = x\varphi'(x) - \frac{x^2}{2\cdot 2!}\varphi''(x) + \frac{x^3}{3\cdot 3!}\varphi'''(x) + \ldots = \sum_{n \; 1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n1}{n\cdot n!}\varphi^{(n)}(x).$$

Consideriamo l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{t} F\left(\alpha, \beta. \gamma, \frac{x}{t-x}\right)\psi(t) dt, \tag{10}$$

ove $\psi(t)$ sia una funzione analitica regolare nella origine e che ha ivi uno zero del primo ordine, cioè:

$$\psi(t) = a_0 t + a_1 t^2 + \ldots = t\varphi(t),$$

la linea C includa i punti zero ed $2x$ singolari per la funzione indicatrice

$$\frac{1}{t} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{\frac{x}{t}}{1-\frac{x}{t}}\right)$$

del funzionale normale (10), e sia tutta contenuta nel campo di regolarità della $\psi(t)$.

Dalla teoria dei residui si ha che l'integrale (10) è sviluppabile nella serie

$$A[(\psi)x] = \frac{\alpha\beta}{\gamma} x\varphi(x) + \frac{(\alpha, 2)(\beta, 2)}{(\gamma, 2)(1, 2)}\frac{x^2}{2!}\varphi'(x) + \ldots + \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)}\frac{x^n}{n!}\varphi^{(n)}(x) + \ldots.$$

E così per i funzionali che abbiano per funzione indicatrice funzioni F di qualunque classe ed ordine.

Al funzionale (10) si ricollegano dunque i funzionali

$$A(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n x^n}{n!} \varphi^{(n)}(x)$$

che sono stati studiati dal PINCHERLE ed in particolare il logaritmo funzionale. Essendo

$$\log(1+\lambda) = \lambda F(1, 1, 2, -\lambda),$$

si avrà:

$$\log\frac{t}{t-x} = \log\left(1+\frac{x}{t-x}\right) = \frac{x}{t-x} F\left(1, 1, 2, \frac{-x}{t-x}\right)$$

e perciò

$$\Lambda\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{x}{(t-x)^2} F\left(1, 1, 2, \frac{-x}{t-x}\right)\varphi(t)dt.$$

Il derivato funzionale secondo $\Lambda''\varphi$ sarà:

$$\Lambda''\varphi = \frac{x}{2\pi i}\int_C \frac{1}{t} F\left(1, 1, 2, \frac{-x}{t-x}\right) t\varphi(t)dt.$$

Se indichiamo il funzionale (10) con

$$H\left[\psi(t);\ \alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{1-x}\right],$$

possiamo scrivere:

$$\Lambda''\varphi = xH\left[t\varphi(t);\ 1, 1, 2, \frac{-x}{1-x}\right].$$

Mediante dunque il funzionale (10) legato ai funzionali ipergeometrici H possiamo esprimere il logaritmo funzionale di PINCHERLE e naturalmente altri funzionali facilmente deducibili da (10) e che non hanno minore importanza del logaritmo funzionale.

PARTE TERZA

Proprietà fondamentali dei funzionali H ed applicazioni.

1. Teorema di Hadamard. — Prima di tutto desideriamo fare una osservazione sulle singolarità della:

$$f(x) = H_\gamma^\alpha y.$$

Il classico teorema di HADAMARD si può enunciare come segue:

« Date le serie

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n x^r \quad \text{e} \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$$

la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n k_n x^n$$

rappresenta una funzione analitica che ha per punti singolari quelli soli della forma

$$x = u_h u_k ,$$

essendo u_h i punti singolari della funzione analitica definita da $\varphi(x)$ e u_k quelli della funzione definita dalla $\psi(x)$ ».

Ora supponiamo che sia $\psi(x)$ la funzione $F(\alpha, 1, \gamma, x)$, che ha per stella di Mittag-Leffler il piano complesso col taglio da 1 a $+\infty$.

Gli operatori normali H che hanno funzioni indicatrici con il detto campo di regolarità, possono chiamarsi col Pincherle *operatori semplici.*

Mentre la funzione $\varphi(t)$ ha in un punto u_h un punto singolare isolato nel cui intorno la φ è monodroma, la $f(x)$ corrispondente avrà in generale per $x = u_h$ un punto singolare di diramazione, e il valore di $f(x)$ dipenderà dal cammino che congiunge 0 ad x e che deve essere racchiuso dal contorno C di integrazione. Avremo allora che questo punto di diramazione sarà tale che ad ogni giro della variabile attorno ad esso la funzione sarà cambiata di valore ([14]). Lo studio dei funzionali H polidromi sarà fatto in altre ricerche.

Naturalmente la questione può generalizzarsi facilmente per i funzionali H di qualunque ordine e classe.

In generale dunque da funzioni monodrome aventi punti singolari isolati otterremo con i funzionali H_γ^α ed in generale con funzionali completi, funzioni che potranno avere questi punti come punti di diramazione; mentre con un funzionale H confluente, ad esempio H_γ, la $f(x)$ sarà una funzione intera: i punti singolari isolati della $\varphi(t)$ sono, da questo funzionale H_γ, mandati all' ∞. Ora abbiamo veduto che:

$$H_\gamma = \lim_{\rho \to \infty} H_\gamma^\rho \left[y\binom{t}{\rho} \right],$$

da ciò abbiamo che se consideriamo una rotazione positiva attorno al punto $x = \rho$, prima di passare al limite la funzione sarà polidroma, ed al limite

([14]) Vedasi prima parte § 4.

avremo:

$$e^x = H_1\left[\frac{1}{1-t}\right] = \lim_{\rho\to\infty} H_1^\rho\left[\frac{1}{1-\frac{t}{\rho}}\right].$$

2. **Relazione col funzionale xD ed I.** — Poichè un funzionale analitico normale è perfettamente individuato dalla funzione indicatrice, ogni proprietà di un tale funzionale deve potersi dedurre da corrispondenti proprietà della funzione indicatrice: così ad esempio dalla polidromia di essa abbiamo ottenuto quella della $f(x)$.

Così dalla relazione a cui soddisfa la funzione $F(\alpha, 1, \gamma, x)$:

$$xF'(\alpha, 1, \gamma, x) = \alpha\,\{\,F(\alpha+1) - F(\alpha)\,\},$$

indicando con $F(\alpha)$ la $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ e con $F(\alpha+1)$ la F in cui la α è stata aumentata di una unità, abbiamo ottenuto

$$xDH_\gamma^\alpha y = H_\gamma^\alpha(tDy) = \alpha\Delta_\alpha(H_\gamma^\alpha)y,$$

ove con $\Delta_\alpha(H_\gamma^\alpha)$ indichiamo

$$\Delta_\alpha H_\gamma^\alpha = H_\gamma^{\alpha+1} - H_\gamma^\alpha.$$

Da questa relazione si ha l'espressione di D mediante gli operatori H, e ciò mette in evidenza l'importanza di questi operatori ipergeometrici.

In generale poi abbiamo ottenuto

$$x^n D^n H_\gamma^\alpha = (\alpha, n)\Delta_\alpha^n(H_\gamma^\alpha)$$

ed indicando con Δ_α^n la differenza ennesima di H_γ^α, rispetto ad α, si ha:

$$D^n = \frac{n!}{x^n}\,\Delta_1{}^n(H_1{}')y.$$

Analoghe relazioni per i parametri β, γ così

$$x\frac{d}{dx}H_\gamma^\alpha\varphi = \alpha\Delta_\alpha(H_\gamma^\alpha)\varphi,$$

$$x\frac{d}{dx}H_\gamma^\alpha\varphi = \beta\Delta_\beta(H_\gamma^\alpha)\varphi,$$

$$x\frac{d}{dx}H_\gamma^\alpha\varphi = \quad\frac{1}{\gamma}\Delta_\gamma(H_\gamma^\alpha)\varphi.$$

Ed in generale

$$x^n \frac{d^n}{dx^n} H_\gamma^\alpha \varphi = (\alpha, n) \Delta_\alpha^{(n)} (H_\gamma^\alpha) \varphi$$

$$x^n \frac{d^n}{dx^n} H_\gamma^\alpha \varphi = (\alpha, n) \Delta_\alpha^{(n)} (H_\gamma^\alpha) \varphi$$

$$x^n \frac{d^n}{dx^n} H_\gamma^\alpha \varphi = \frac{(-1)^n}{(\gamma, n)} \Delta_\alpha^{(n)} (H_\gamma^\alpha) \varphi.$$

Se consideriamo ora la relazione

$$(1) \qquad \int_0^x F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{t}\right) dx = \frac{(\gamma - 1)t}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} \left(F\left(\alpha - 1, \beta - 1, \gamma - 1, \frac{x}{t}\right) - 1\right),$$

valida per α, β, γ, diversi dall' unità, da questa ne avremo un altra valida per i funzionali H.

Sia

$$\int_0^x f(x) dx = \int_0^x H_{\gamma, 1}^{\alpha, \beta} [\varphi(t); x] dx,$$

da cui

$$\int_0^x f(x) dx = \int_0^x dx \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{t} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{t}\right) \varphi(t) dt;$$

scambiando l' ordine di integrazione

$$\int_0^x f(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{t} \varphi(t) \int_0^x F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{t}\right) dx.$$

Per la (1) si ha; essendo

$$\int_0^x F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{t}\right) dx = t \frac{\gamma - 1}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} \left\{ F\left(\alpha - 1, \beta - 1, \gamma - 1, \frac{x}{t}\right) - 1 \right\},$$

che

$$\int_0^x H_{\gamma, 1}^{\alpha, \beta} [y(t); x] = \frac{\gamma - 1}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} H_{\gamma - 1, 1}^{\alpha - 1, \beta - 1} [t\varphi(t); x].$$

D' altra parte abbiamo veduto

$$\int_0^x f(x) dx = x H_2^1 f(x)$$

e si ha anche allora

$$\int_0^x H_{\gamma,\,1}^{\alpha,\,\beta}[\varphi(t);\; x] = xH_2^1 H_\gamma^\alpha H_1^\beta y(t) = xH_\gamma^\alpha H_1^\beta H_2^1 y(t),$$

perciò:

$$\frac{\gamma - 1}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} H_{\gamma-1,\,1}^{\alpha-1,\,\beta-1}[ty(t);\; x] = xH_\gamma^\alpha H_1^\beta H_2^1[y(t);\; x]$$

valida per α, β, γ, diversi dall'unità.

3. **Relazione funzionale fondamentale.** — Tra la proprietà fondamentali della funzione F di GAUSS è classica quella di essere questa funzione l'integrale regolare nell'intorno dell'origine della equazione differenziale ipergeometrica:

(2) $$x(x-1)F''(\alpha, \beta, \gamma, x) - \{(\alpha + \beta + 1)x - \gamma\} F'(\alpha, \beta, \gamma, x) - \alpha\beta F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 0,$$

Ora avendo scelto per funzione indicatrice del funzionale la funzione di t,

(3) $$\frac{1}{t} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{t}\right),$$

vediamo quale sia la relazione differenziale alla quale $F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{t}\right)$ soddisfa. Ponendo $\frac{x}{t} = z$, si ha:

$$F_x'(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{t} F_z'(\alpha, \beta, \gamma, z).$$

Analogamente

$$F_x'' = \frac{1}{t^2} F_z''\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{t}\right).$$

Dalla equazione differenziale

$$z(z-1)F_z''(\alpha, \beta, \gamma, z) - \{(\alpha + \beta + 1)z - \gamma\} F_z'(\alpha, \beta, \gamma, z) - \alpha\beta F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 0,$$

si avrà:

$$\frac{x}{t}\left(\frac{x}{t} - 1\right) t^2 F_x''\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{t}\right) -$$
$$- \left\{(\alpha + \beta + 1)\frac{x}{t} - \gamma\right\} tF_x'\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{t}\right) - \alpha\beta F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{t}\right) = 0,$$

e quindi

$$x^2 F_x'' - (\alpha + \beta + 1) xF_x' - \alpha\beta F = xtF_x'' - \gamma tF_x'.$$

Dato ora il funzionale $H\,[y(t);\, \alpha, \beta, \gamma, x]$

(4) $$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{t} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{t}\right) \varphi(t)\, dt,$$

avremo derivando rispetto ad x, ecc., e sostituendo nella (3) l'equazione seguente che potremo scrivere così:

$$\left\{ x^2 \frac{d^2}{dx^2} H - (\alpha + \beta + 1) x \frac{d}{dx} H - \alpha\beta H \right\} \varphi = \left\{ x \frac{d^2}{dx^2} H - \gamma \frac{d}{dx} \right\} t\varphi.$$

Dalla quale potremo dedurre delle equazioni particolari per H_γ^α ed H_γ.

Per ottenere la equazione relativa ad H_γ^α dobbiamo considerare che la funzione indicatrice è, in questo caso, dedotta da

$$F\begin{pmatrix}\alpha & \\ \gamma & x\end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)}{(\gamma, n)} x^n,$$

ove il rapporto fra un coefficiente ed il precedente è

$$\frac{\alpha + n}{\gamma + n},$$

si avrà che la

$$y = F\begin{pmatrix}\alpha & \\ \gamma & x\end{pmatrix},$$

soddisfa alla equazione differenziale

$$(1 - x) x y' + (\gamma - 1 - \alpha x) y = \gamma - 1,$$

cioè per la F_x', si ha:

$$\frac{x}{t}\left(1 - \frac{x}{t}\right) t F_x' + \left(\gamma - 1 - \frac{\alpha x}{t}\right) F = \gamma - 1,$$

da cui

$$\left\{ x^2 \frac{d}{dx} H + \alpha x H \right\} \varphi = \left\{ x \frac{d}{dx} H + (\gamma - 1) H \right\} t\varphi - (\gamma - 1). \tag{5}$$

Per ottenere l'equazione alla quale soddisfa H_γ, avremo che la funzione

$$y = F\begin{pmatrix}1 & \\ \gamma, 1 & x\end{pmatrix} = \Sigma \frac{1}{(\gamma, n)} x^n,$$

è integrale della equazione differenziale

$$x y' + (\gamma - 1 - x) y = \gamma - 1,$$

come si deduce dal fatto che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\gamma + n},$$

e quindi

$$\left\{ x \frac{d}{dx} H \quad (\gamma - 1) H \right\} t\varphi = x H \varphi + \gamma - 1, \tag{6}$$

per $\gamma = 1$, si ha:

$$x \frac{d}{dx} H_1 t\varphi = x H_1 \varphi,$$

cioè:

$$\frac{d}{dx} H_1(t\varphi) = H_1 \varphi,$$

alla quale soddisfa H_1, cioè:

$$H_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{t} e^{\frac{x}{t}} \varphi(t) dt.$$

Le due relazioni funzionali (5), (6) sono fondamentali per i funzionali H potendosi qualunque sia l'ordine e la classe di H, scindere sempre nel prodotto di funzionali della forma H_γ^α ed H_γ.

La equazione (6) si può ottenere dalla (5) mediante confluenza.

Infatti abbiamo dimostrato

$$H_\gamma = \lim_{\rho \to \infty} H_\gamma^\rho \left[y(t); \rho, 1, \gamma, \frac{x}{\rho} \right],$$

e ponendo $\rho = 1 : \varepsilon$, si ha:

$$H_\gamma^{\frac{1}{\varepsilon}} \left[y(t); \frac{1}{\varepsilon}, 1, \gamma, \varepsilon x \right],$$

e poichè

$$y = F\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon x\right),$$

soddisfa all'equazione

$$(1 - x\varepsilon) x y' + (\gamma - 1 - x) y = \gamma - 1,$$

e $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} y(x, \varepsilon)$, alla

$$xy' + \{ \gamma - 1 - x \} y = \gamma - 1,$$

si ha che $H_\gamma^{\frac{1}{\varepsilon}} [y(t); \rho, 1, \gamma, \varepsilon x]$ soddisferà alla

$$\left\{ \varepsilon x^2 \frac{d}{dx} H + xH \right\} \varphi = \left\{ x \frac{d}{dx} H - (\gamma - 1) H \right\} t\varphi - (\gamma - 1),$$

e passando ai limiti per $\varepsilon \to 0$ si avrà la (6).

Così in generale potremo ottenere dalle relazioni funzionali per funzionali completi, quelle relative ai funzionali confluenti.

Fondamentale per quanto abbiamo stabilito su questi funzionali è dunque la relazione

$$\left\{ x^2 \frac{d}{dx} H_\gamma^\alpha + \alpha x H \right\} \varphi = \left\{ x \frac{d}{dx} H_\gamma^\alpha + (\gamma - 1) H_\gamma^\alpha \right\} t\varphi - (\gamma - 1),$$

alla quale soddisfa il funzionale H_γ^α.

Questa relazione funzionale è stata ottenuta dalla equazione differenziale

$$(1-x)xy' + ((\gamma-1)-\alpha x)y = \gamma - 1,$$

relativa alla funzione

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)}{(\gamma, n)} x^n,$$

per ottenere una equazione differenziale omogenea consideriamo che è anche

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)\ (1, n)}{(\gamma, n)\ (1, n)} x^n,$$

ed avremo allora l'equazione differenziale omogenea del secondo ordine relativa alla funzione $F(\alpha, 1, \gamma, x)$. cioè

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha+2)x)y' - \alpha y = 0,$$

e la y ne sarà un integrale regolare nell'intorno dell'origine. A questa equazione differenziale omogenea corrisponderà una relazione omogenea per H cioè la relazione, che chiameremo relazione R:

$$\text{(R)} \qquad \left[x^2 \frac{d^2}{dx^2} H - (\alpha+2)x\frac{d}{dx}H - \alpha H\right]\varphi = \left[x\frac{d^2}{dx^2}H - \frac{d}{dx}H\right]t\varphi,$$

e per confluenza l'equazione omogenea per l'operatore confluente H_γ.

Viceversa supponiamo di avere un funzionale che soddisfi a queste condizioni:

1°) Sia lineare normale e la funzione indicatrice emisimmetrica sia

$$-\frac{1}{t}k\left(\frac{x}{t}\right),$$

ove $k(z)$ sia analitica regolare nell'origine.

2°) Che soddisfi alla relazione fondamentale R.

3°) Che verifichi la relazione $xDH_\gamma^\alpha = \alpha\Delta_\alpha H_\gamma^\alpha$.

Ne verrà che il funzionale ha per indicatrice la funzione

$$-\frac{1}{t}K\left(\frac{x}{t}\right) = -\frac{1}{t}F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{x}{t}\right),$$

e sarà il funzionale H_γ^α.

Infatti, prima di tutto, per la prima condizione

$$H = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{t}k\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)dt,$$

poi la funzione $k\left(\frac{x}{t}\right) = k(z)$ sarà integrale regolare nell'intorno della origine della equazione differenziale per la seconda condizione, come facilmente può aversi dalla R, cioè:

$$z(z-1)k''(z)+(\gamma-(\alpha+2)z)k'(z)-\alpha k(z)=0\,, \tag{7}$$

poi dalla terza condizione

$$xDH^{\alpha}_{\gamma}y(t)=\alpha\Delta_{\alpha}H^{\alpha}_{\gamma}y(t),$$

risulta che tra i due integrali regolari della (7), nell'intorno dell'origine,

$$F(\alpha,1,\gamma,z) \quad \text{e} \quad z^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma\,,2-\gamma\,,2-\gamma\,,z)\,,$$

viene fissata per H^{α}_{γ} la funzione indicatrice

$$-\frac{1}{t}\,F\left(\alpha,\beta,\gamma,\frac{x}{t}\right).$$

Anzichè la regolarità della $k(z)$ attorno all'origine si poteva scegliere la $k(z)$ regolare attorno all'unità od attorno al punto infinito; di conseguenza ne sarebbero venuti i campi di validità per la funzione su cui H opera.

Accanto dunque ai funzionali H legati alla funzione $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, ne abbiamo altri cinque, in tutto sei, che possono farsi dipendere dalla relazione R.

Mediante poi le tre trasformazioni di EULERO delle funzioni ipergeometriche potremo considerare dunque 24 funzionali ipergeometrici dipendenti dalla R ([15]).

4. **Osservazioni sulla risoluzione di alcune equazioni integrali.** — Sia l'equazione integrale di prima specie

$$f(x)=\int_0^x K(x-t)\,y(t)\,dt,$$

appartenente al così detto ciclo chiuso. Vediamo come si possa rappresentare la soluzione sotto forma esplicita mediante applicazione dei funzionali H quando la f, K, ed y appartengono a classi particolari.

Sia

$$K(x-t)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{v}\,F\begin{pmatrix}\alpha & \\ \gamma, & 1\end{pmatrix}\frac{x-t}{v}\Big)\,h(v)dt,$$

cioè

$$K(x-t)=H^{\alpha}_{\gamma,1}[h(v)\,;\,x-t],$$

ove $h(v)$ sia regolare nella origine:

$$h(v)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n v^n$$

([15]) Un esame particolare di questi funzionali sarà fatto in altri lavori.

avremo:

$$K(x\quad t) = a_0 + a_1 \frac{\alpha}{\gamma}(x-t) + a_2 \frac{(\alpha, 2)}{(\gamma, 2)(1, 2)}(x-t)^2 + \dots + a_n \frac{(\alpha, n)}{(\gamma, n)(1, n)}(x-t)^n + \dots .$$

Analogamente, sia

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{v} F\begin{pmatrix}\alpha_1 & t \\ \gamma_1, 1 & v\end{pmatrix} g(v)\, dv,$$

essendo pure $g(v)$ analitica regolare nell'origine

$$g(v) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n v^n:$$

sarà

$$y(t) = b_0 + b_1 \frac{\alpha_1}{\gamma_1} t + \dots + b_n \frac{(\alpha_1, n)}{(\alpha_1, n)\,(1, n)} t^n + \dots,$$

e

$$K(x - t)\, y(t) = \sum_{n\ 0}^{\infty} \gamma_n(t, x - t),$$

ove

$$\gamma_n(t, x-t) = \frac{(\alpha, n)}{(\gamma, n)}(x - t)^n a_n b^0 + \dots$$

$$+ \frac{(\alpha, n - r)(\alpha_1, r)}{(\gamma, n - r)(\gamma_1, r)(1, n - r)(1, r)} a_{n-r} b_r (x - t)^{n-r} t^r + \frac{(\alpha_1, n)}{(\gamma_1, n)} a_0 b_n t^n .$$

Ora

$$\int_0^x (x - t)^{n-r} t^r dt = \frac{(n - r)!\ r!}{(n + 1)!} x^{n+1},$$

avremo dunque che

$$\int_0^x K(x - t)\, y(t)\, dt = \sum_{n\ 0}^{\infty} \int_0^x \gamma_n(t; x - t) dt = \sum_{n\ 0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

ove

$$c_n = \frac{(\alpha, n)}{(\gamma, n)} a_n b_0 + \dots + \frac{(\alpha, n - r)(\alpha_1, r)}{(\gamma, n - r)(\gamma_1, r)} a_{n-r} b_r + \dots + \frac{(\alpha_1, n)}{(\gamma_1, n)} a_0 b_n,$$

da cui

$$\int_0^x K(x - t) y(t) dt = H_1[z H_\gamma^\alpha h(t); z] \cdot H_{\gamma_1}^{\alpha_1}[g(t); z];$$

cioè

$$f(x) = H_1[\varphi(z); x],$$

ove

$$\varphi(z) = z H_\gamma^\alpha[h(t); z] \cdot H_{\gamma_1}^{\alpha_1}[g(t); z].$$

Da questa otteniamo

$$H^{\alpha_1}_{\gamma_1} g(t) = \frac{\varphi(z)}{z H^{\alpha}_{\gamma} h(t)},$$

funzione analitica regolare nella origine, e la funzione intera:

$$y(t) = H_1 \frac{\varphi(z)}{z H^{\alpha}_{\gamma} h(t)};$$

per $\alpha = \gamma = 1$, si ha:

$$g(t) = \frac{\varphi(t)}{t h(t)} \quad \text{e} \quad y(t) = H_1 \frac{\varphi(t)}{t h(t)}.$$

Sia ad esempio l'equazione integrale

$$J(\gamma, x) - 1 = \int_0^x G(\alpha, \gamma, x - t) g(t) \, dt,$$

ove G è la funzione di KUMMER, ed J la funzione di BESSEL.

Ora con le notazioni precedenti si ha:

$$J(\gamma, x) - 1 = H_1 [H_\gamma \left[\frac{1}{1 - t}; x\right] - 1],$$

$$K(x - t) = H^{\alpha}_{\gamma, 1} \left[\frac{1}{1 - z}; x - t\right],$$

$$y(t) = H_1 \frac{H_\gamma \left[\frac{1}{1 - z}; t\right] - 1}{H^{\alpha}_{\gamma} \left[\frac{z}{1 - z}; t\right]}.$$ [16]

5. **Applicazione alla risoluzione di alcune equazioni differenziali.** — Supponiamo ora che la funzione $y(t)$, nel funzionale $Hy(t)$, sia

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n$$

e tale che i coefficienti γ_n soddisfino alla relazione ricorrente:

$$a(n) \gamma_{n+2} + b(n) \gamma_{n+1} + c(n) \gamma_n = 0,$$

[16] Quanto è esposto in questo paragrafo mostra la possibilità di costruire con questi funzionali H la soluzione di alcune equazioni integrali di prima specie del ciclo chiuso: la MARTIS nel lavoro citato ha costruito la soluzione della equazione integrale in esame per $\alpha = \gamma = 1$.

ove $a(n)$. $b(n)$, $c(n)$ sono polinomi di grado m in n; il sistema dei coefficienti è cioè un integrale dell'equazione ricorrente:

$$a(n) f_{n+2} + b(n) f_{n+1} + c(n) f_n = 0\,,$$

con opportune condizioni iniziali. La y è allora un integrale regolare nell'intorno dell'origine di una equazione differenziale di ordine m della forma:

$$\begin{aligned}(8)\qquad &(a_m + b_m t + c_m t^2) t^m y^{(m)} + (a_{m-1} + b_{m-1} t + c_{m-1} t^2) t^{m-1} y^{m-1} + \\ &+ \dots + (a_0 + b_0 t + c_0 t^2) y = a_0 \gamma_0 + \{ (a_0 + a_1)\gamma_1 + b_0 \gamma_0 \} t\end{aligned}$$

facilmente costruibile mediante le funzioni $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$ e le condizioni iniziali imposte.

Si domanda prima di tutto se H_γ^α e H_γ saranno pure integrali, regolari nell'intorno dell'origine di una equazione differenziale.

È facile dare risposta affermativa a questa domanda e costruire l'equazione differenziale alla quale soddisfa

$$f(x) = H_\gamma^\alpha y = \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n.$$

Avremo prima di tutto che il coefficiente v_n di $f(x)$ risulterà uguale a γ_n moltiplicato per $\dfrac{(\alpha, n)}{(\gamma, n)}$, ed indicando con δ_n i coefficienti di

$$F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{x}{t}\right),$$

si ha che

$$v_n = \delta_n \cdot \gamma_n\,,$$

ove δ_n è tale che

$$\delta_{n+1} = \frac{\alpha + n}{\gamma + n} \delta_n\,.$$

Dalla relazione

$$a(n) \gamma_{n+2} + b(n) \gamma_{n+1} + c(n) \gamma_n = 0,$$

moltiplicando per δ_{n+2} si ha,

$$a(n) \gamma_{n+2} \delta_{n+2} + b(n) \gamma_{n+1} \delta_{n+2} + c(n) \gamma_n \delta_{n+2} = 0\,,$$

ed essendo

$$\delta_{n+2} = \frac{\alpha + n + 1}{\gamma + n + 1} \delta_{n+1} \quad \text{e} \quad \delta_{n+2} = \frac{(\alpha + n + 1)(\alpha + n)}{(\gamma + n + 1)(\gamma + n)} \delta_n\,,$$

si avrà

$$a(n) v_{n+2} + b(n) \frac{\alpha + n + 1}{\gamma + n + 1} v_{n+1} + c(n) \frac{(\alpha + n + 1)(\alpha + n)}{(\gamma + n + 1)(\gamma + n)} v_n = 0,$$

cioè:

$$(\gamma+n+1)(\gamma+n)\,a(n)\,v_{n+2}+b(n)(\alpha+n+1)(\gamma+n)\,v_{n+1}+$$
$$+c(n)(\alpha+n+1)(\alpha+n)v_n=0.$$

E possiamo concludere:

« *Se la* y *soddisfa ad un' equazione differenziale dell' ordine* m *della forma* (8), *la* $f=H_\gamma^\alpha y$ *soddisfa ad una equazione differenziale dell' ordine* m + 2 *di forma analoga alla* (8) ».

Ad esempio consideriamo l'equazione differenziale del primo ordine

(9) $$(a_1+b_1t+c_1t^2)ty'+(a_0+b_0t+c_0t^2)y=m+nt,$$

e ne sia

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n t^n$$

un integrale regolare nell' intorno della origine.

Operiamo su y mediante il funzionale H_γ^α e perchè i coefficienti γ_n di y soddisfano alla relazione della forma

$$a(n)\gamma_{n+2}+b(n)\gamma_{n+1}+c(n)\gamma_n=0,$$

ove

(10) $$\begin{aligned} a(n)&=a_1(n+2)+a_0=p_0n+p_1,\\ b(n)&=b_1(n+1)+b_0=q_0n+q_1,\\ c(n)&=c_1a+c_0=r_0n+r_1, \end{aligned}$$

mediante la detta trasformazione si ha, ponendo

$$F\left(\alpha,1,\gamma,\frac{x}{t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\frac{x^n}{t^n},$$

$$a(n)\gamma_{n+2}\delta_{n+2}+b(n)\gamma_{n+1}\delta_{n+2}+c(n)\gamma_n\delta_{n+2}=0,$$

con

$$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}=\frac{\alpha+n}{\gamma+n},\quad \frac{\delta_{n+2}}{\delta_{n+1}}=\frac{\alpha+n+1}{\gamma+n+1},$$

cioè:

$$\delta_{n+2}=\frac{\alpha+n+1}{\gamma+n+1}\delta_{n+1},\quad \delta_{n+2}=\frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n)}{(\gamma+n+1)(\gamma+n)}\delta_n.$$

Quindi, se $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}v_nx^n=H_\gamma^\alpha y$, si ha:

$$a(n)v_{n+2}+b(n)\frac{\alpha+n+1}{\gamma+n+1}v_{n+1}+c(n)\frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n)}{(\gamma+n+1)(\gamma+n)}v_n=0,$$

e

$$a(n)(\gamma+n+1)(\gamma+n)v_{n+2}+b(n)(\alpha+n+1)(\gamma+n)v_{n+1}+ \\ +c(n)(\alpha+n+1)(\alpha+n)v_n=0\,. \tag{11}$$

La f soddisferà ad una equazione differenziale del terzo ordine.
Avremo ponendo

$$\left\{\begin{aligned} &a(n)(\gamma+n+1)(\gamma+n)=a_3'(n+2)(n+1)n+a'_2(n+2)(n+1)+a_1'(n+2)+a_0' \\ &b(n)(\alpha+n+1)(\gamma+n)=b_3'(n+1)(n-1)n+b_2'(n+1)n+b_1'(n+1)+b_0' \\ &c(n)(\alpha+n+1)(\alpha+n)=c_3'(n\quad 1)(n-2)n+c_2'n(n-1)+c_1'n+c_0', \end{aligned}\right. \tag{12}$$

che l'equazione differenziale $\Delta^3 f=0$, sarà:

$$(a_3'+b_3't+c_3't^2)tf'''+(a_2'+b_2'+c_2't^2)t^2f''+ \\ +(a_1'+b_1't+c_1't^2)tf'+(a_0'+b_0't_0+c_0't^2)f=a_0'v_0+\{(a_1'+a_1')v_1+b_0'v_0\}\,t, \tag{13}$$

le a_k', b_k', c_k', $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$, sono le funzioni interpolari delle funzioni

$$a(n)(\gamma+n+1)(\gamma+n)\,,\quad b(n)(\alpha+n+1)(\gamma+n)\,,\quad c(n)(\alpha+n+1)(\gamma+n)\,.$$

Desideriamo ora fare una applicazione di quanto abbiamo ottenuto per determinare sotto forma di integrale definito un integrale regolare nell'intorno dell'origine della equazione differenziale di LAMÉ; prendiamo in considerazione questa equazione differenziale, ma facilmente si potrebbero estendere le considerazioni seguenti a varie altre equazioni differenziali della fisica matematica ([17]).

Sia dunque l'equazione differenziale:

$$(a^2b^2-(a^2+b^2)t+t^2)ty''+\left(\frac{a^2b^2}{2}\quad(a^2+b^2)t+\frac{3}{2}t^2\right)y'-\frac{1}{4}(h+h't)y=0, \tag{14}$$

ove supponiamo h ed h' da determinarsi. Si vede che la (14) è una equazione differenziale lineare con 4 punti singolari la quale potrà ricollegarsi alla equazione differenziale di LAMÉ che è della stessa forma, nella quale h ed h' assumono valori speciali.

Prendiamo in considerazione l'esempio precedentemente trattato e consideriamo l'equazione (14), ove supponiamo sia:

$$a(n)=p_1n+p_0\,,\quad b(n)=q_1n+q_0\,,\quad c(n)=r_1n+r_0\,.$$

La relazione (11):

$$A(n)v_{n+2}+B(n)v_{n+1}+C(n)v_n=0\,,$$

([17]) Vedasi P. HUMBERT, *Fonctions de Lamé et fonctions de Mathieu*, «Mémorial», fasc. X.

sarà dunque tale che:

$$
(15)\qquad \left\{\begin{aligned}
A(n) &= (p_1 n + p_0)(\gamma + n + 1)(\gamma + n)\\
B(n) &= (q_1 n + q_0)(\alpha + n + 1)(\gamma + n)\\
C(n) &= (r_1 n + r_0)(\alpha + n + 1)(\alpha + n),
\end{aligned}\right.
$$

che ordiniamo così:

$$
(16)\qquad \left\{\begin{aligned}
A(n) &= a_3'(n+2)(n+1)n + a_2'(n+2)(n+1) + a_1'(n+2) + a_0'\\
B(n) &= b_3'(n+1)n(n-1) + b_2'(n+1)n + b_1'(n+1) + b_0'\\
C(n) &= c_3'n(n-1)(n-2) + c_2'n(n-1) + c_1'n + c_0'.
\end{aligned}\right.
$$

Allora la $f = H_\gamma^\alpha y$, ove la y soddisfa alla (9), soddisferà alla equazione differenziale del terzo ordine:

$$
(17)\qquad (a_3' + b_3't + c_3't^2)t^3 f''' + (a_2' + b_2't + c_2't^2)t^2 f'' +
$$

$$
+ (a_1' + b_1't + c_1't^2)tf' + (a_0' + b_0't + c_0't^2)f = a_0'\gamma_0 + \left\{ (a_0' + a_1')\gamma_1 \frac{\alpha}{\gamma} + b_0'\gamma_0 \right\} t.
$$

Affinchè la f soddisfi alla equazione differenziale (14) dovremo determinare i parametri del funzionale H_γ^α, cioè α ed γ e p_0, p_1, q_0, q_1, r_0, r_1, in modo che la (17) si riduca alla (14).

Mostriamo che ciò è possibile.

Affinchè ciò avvenga occorre che sia:

$$
(18)\qquad \left\{\begin{array}{lll}
1)\ a_0' = 0, & b_0' = 0, & c_0' = 0,\\
2)\ a_1' = 0, & b_1' = -\frac{1}{4}h, & c_1' = -\frac{1}{4}h',\\
3)\ a_2' = \frac{a^2b^2}{2}, & b_2' = -(a^2 + b^2), & c_2' = \frac{3}{2},\\
4)\ a_3' = a^2b^2, & b_3' = -(a^2 + b^2), & c_3' = 1,
\end{array}\right.
$$

e rispettivamente:

$$
(19)\qquad \left\{\begin{array}{lll}
1)\ A(-2) = 0, & B(-1) = 0, & C(0) = 0,\\
2)\ A(-1) = 0, & B(0) = -\frac{1}{4}h, & C(1) = -\frac{1}{4}h',\\
3)\ A(0) = a^2b^2, & B(1) = -2(a^2+b^2)\ \frac{1}{2}h, & C(2) = 3 - \frac{1}{2}h',\\
4)\ A(1) = 9a^2b^2, & B(2) = -12(a^2+b^2) - \frac{3}{4}h, & C(3) = 15 - \frac{3}{4}h'.
\end{array}\right.
$$

Dalle (19) otteniamo rispettivamente

$$(20)\left\{\begin{array}{l} 1)\ (-2p_1+p_0)(\gamma-1)(\gamma-2)=0,\quad (-q_1+q_0)\alpha(\gamma-1)=0, \\ \qquad r_0(\alpha+1)\alpha=0, \\ 2)\ (-p_1+p_0)\gamma(\gamma-1)=0,\quad q_0(\alpha+1)\gamma=-\frac{1}{4}h, \\ \qquad (r_1+r_0)(\alpha+2)(\alpha+1)=-\frac{1}{4}h', \\ 3)\ p_0(\gamma+1)\gamma=a^2b^2,\quad (q_1+q_0)(\alpha+2)(\gamma+1)=-2(a^2+b^2)-\frac{1}{2}h, \\ \qquad (2r_1+r_0)(\alpha+3)(\alpha+2)=3-\frac{1}{2}h', \\ 4)\ (p_1+p_0)(\gamma+2)(\gamma+1)=9a^2b^2,\quad (2q_1+q_0)(\alpha+3)(\gamma+2)=12(a^2+b^2)-\frac{3}{4}h, \\ \qquad (3r_1+r_0)(\alpha+4)(\alpha+3)=15-\frac{3}{4}h'. \end{array}\right.$$

Per determinare valori di α, γ, h, h', p_0, p_1, q_0, q_1, r_0, r_1, che soddisfino a queste 12 equazioni, si può procedere, ad esempio, nel modo seguente. Si può fissare per γ il valore uno cosicchè la prima e la seconda delle 1) e la prima delle 2) sono soddisfatte, e le equazioni si riducono a dieci tante quanti sono i parametri da determinare. Poi si può fissare $r_0=0$ cosicchè anche la terza delle 1) è soddisfatta.

Poi dalle prime equazioni delle 3) e 4) si può determinare p_1 e p_0, dalle seconde equazioni delle 2), 3) e 4) si può determinare q_0, q_1 ed h, e dalle terze equazioni delle 2), 3) e 4) si può determinare r_1, α ed h'. La risoluzione della equazione differenziale di LAMÉ per altri valori di h ed h' si può ricollegare alla risoluzione trattata mediante la trasformazione $t=\frac{r}{s}t'$ con r ed s opportunamente scelti.

A noi, più che un'analisi del problema matematico-fisico importa quì, come abbiamo detto nella introduzione, fissare la possibilità di esprimere un integrale regolare nell'intorno della origine, di una equazione differenziale che si può ricollegare a quella di LAMÉ, mediante un funzionale H_γ^α che opera su y soluzione di una equazione differenziale del primo ordine.

Infatti dalle condizioni imposte $a_0'=b_0'-c_0'=a_1'=0$ l'equazione (17) si può abbassare ad una equazione del secondo ordine, ponendo $f'=f_1$, la soluzione cercata dalla equazione differenziale di LAMÉ, cioè f_1, sarà data da $DH_\gamma^\alpha y$, ove y soddisfa ad una equazione differenziale del primo ordine della forma (9).

La derivazione essendo esprimibile mediante i funzionali H, si può concludere che è possibile mediante operatori ipergeometrici su una soluzione di una equazione differenziale della forma (9), ottenere un integrale regolare nell'intorno della origine della equazione differenziale che si ricollega a quella di LAMÉ, per la quale occorrerà fissare le condizioni iniziali dell'integrale cercato.

Naturalmente ora qui si dovrebbero esporre le applicazioni alle varie classi delle equazioni di LAMÉ, ed alle numerose generalizzazioni, di queste, come quella del KLEIN, di HEINE. ecc. Ritorneremo, se dal caso, su questo argomento; qui abbiamo desiderato mettere in evidenza che mediante una trasformazione ipergeometrica H sulla soluzione di una particolare equazione differenziale del primo ordine è possibile determinare un integrale regolare nell'intorno dell'origine dell'equazione differenziale del secondo ordine di LAMÉ.

L'importanza di questi funzionali, che risulta dalle osservazioni esposte sulle equazioni integrali e sulle applicazioni alle equazioni differenziali, è vieppiù messa in evidenza dal fatto che questi funzionali ipergeometrici permettono di raccogliere e *classificare* non pochi fra i funzionali classici dell'Analisi.

Graphische Rechentafeln (Nomogramme) für die Berechnung der ganzen rationalen Funktion.

Von ALEXANDER FISCHER (in Prag).

Uebersicht. — *Es wird, unter Heranziehung der einfachsten Hilfsmittel der Nomographie, die Bildung der ganzen rationalen Funktion sowohl im reellen als auch im komplexen Bereich auf nomographisch-graphischem Weg gezeigt.*

In den bekannteren Lehrbüchern der praktischen Analysis werden zur zeichnerischen Bildung der ganzen rationalen Funktion die Verfahren von I. A. v. SEGNER und E. LILL, allenfalls die Verallgemeinerung und Ausdehnung des letzteren auf des komplexe Gebiet durch C. RUNGE behandelt. In einer vor einiger Zeit erschienenen Arbeit gibt ferner H. BEHMANN (1) (*) eine Vereinfachung des v. SEGNERschen Verfahrens. Ich möchte nun im folgenden eine wohl noch einfachere, auf nomographischer Grundlage beruhende Behandlungsweise der ganzen rationalen Funktion

$$y_n = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \tag{I'}$$

mitteilen, die den Vorzug hat, auch auf die komplexe Funktion

$$w_n = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \tag{I''}$$

(mit komplexem Argument und komplexen Koeffizienten) ausgedehnt werden zu können. Sie geht von der, sowohl dem v. SEGNER — bzw. BEHMANN —, als auch dem LILLschen Verfahren gemeinsamen Zerlegung der Gleichung (I') in die Gleichungskette

$$y_{\nu+1} = y_\nu x + a_{\nu+1} \tag{II'}$$

($\nu = 0, 1, \dots, n-1$, $y_0 \equiv a_0$) aus.

α) *Reelles Gebiet*: Hier wird die einfache Gestalt von (II') benutzt, um durch abwechselnde Anwendung der übereinandergelagerten Tafeln für die beiden, schon in jedem einführenden Lehrbuch der Nomographie ausführlich

(*) Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf den Schriftennachweis am Ende der Arbeit.

behandelten, einfachsten « kanonischen Formen »

(a) $$f_1(x_1) + f_2(x_2) = f_3(x_3)$$
(b) $$f_1(x_1) = f_2(x_2) f_3(x_3)$$

die Gleichung (I′) in Form eines einzigen ununterbrochenen Linienzuges zu bilden. Abb. 1 zeigt die zu beachtende Vorzeichenwahl bei der Verquickung

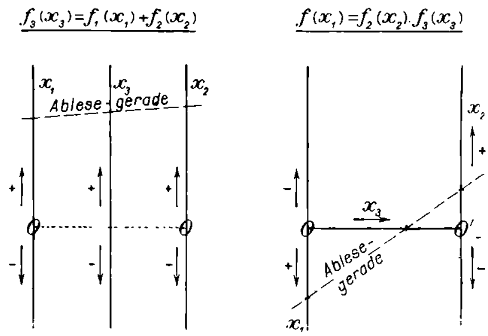


Abb. 1

beider Formen. Die Abb. 2, die das BEISPIEL

$$y_2 = x^2 + 2x - 3$$

für $x = 2$ zeigt, dürfte durch Angabe der Schritte wohl sofort verständlich werden.

SCHRITT 1: Bildung von a ($\equiv y_0$) auf der rechten Leiter.

SCHRITT 2: Bildung von $-a_0x$ auf der linken Leiter (Verwendung von (b)).

SCHRITT 3: Bildung von y_1 auf der rechten Leiter gemäss $-a_0x + y_1 = a_1$ (Verwendung von (a)).

SCHRITT 4: Bildung von $-y_1x$ auf der linken Leiter (Verwendung von (b)).

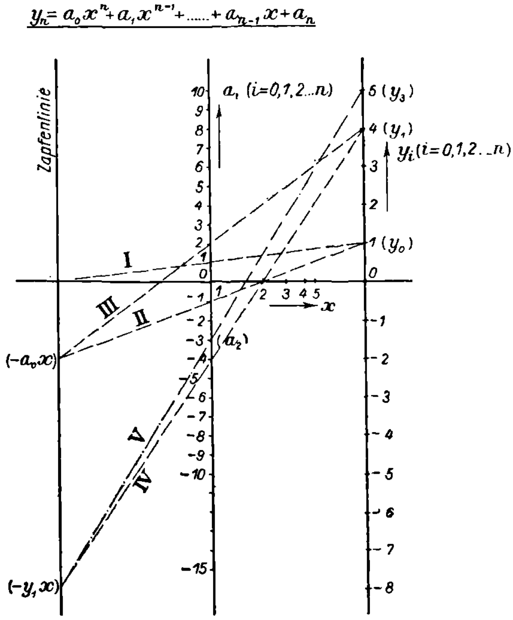
SCHRITT 5: Bildung von y_2 auf der rechten Leiter gemäss $-y_1x + y_2 = a_2$ (Verwendung von (a)).

Die linke Leiter dient also bloss als « Zapfenlinie », trägt daher keine Leiter. Führt man das in Abb. 2 dargestellte Nomogramm auf durchsichtigem Papier oder Zellhorn aus und bringt für verschiedene Werte von x die entsprechenden y-Werte über die zugehörigen x-Werte (Millimeterpapier als Grundblatt!), so kann die so entstehende verzerrte y-Kurve ohneweiteres z. B. zur zeichnerischen Lösung der Gleichung $y_n = 0$ verwendet werden.

β) *Komplexes Gebiet*: Da die Bildung von (I′) aus (II′) rein formaler Natur ist, gilt sie insbesondere auch für komplexes Argument und ebensolche

Koeffizienten. Es sei

$$\left.\begin{aligned} w_{\nu+1} &= u_{\nu+1} + i v_{\nu+1} \\ z &= \xi + i\eta \\ a_{\nu+1} &= \alpha_{\nu+1} + i\beta_{\nu+1} \end{aligned}\right\} \quad \nu = 0, 1, \dots n-1, \; \begin{aligned} u_0 &\equiv \alpha_0, \\ v_0 &\equiv \beta_0 . \end{aligned}$$



Beispiel: $y_2 = x^2 + 2x - 3$ für $x = 2$: $y_2 = 5$

Abb. 2

Dann ergibt die zu (II') analoge Gleichungskette

$$\text{(II'')} \qquad w_{\nu+1} = u_{\nu+1} + i v_{\nu+1} = (u_\nu + i v_\nu)(\xi + i\eta) + \alpha_{\nu+1} + i\beta_{\nu+1}$$

das Gleichungskettenpaar

$$\text{(u)} \qquad u_{\nu+1} = u_\nu \xi - v_\nu \eta + \alpha_{\nu+1}$$

$$\text{(v)} \qquad v_{\nu+1} = v_\nu \xi + u_\nu \eta + \beta_{\nu+1} .$$

Dies ist behufs nomographischer Verwertung folgendermassen zu schreiben:

$$\begin{aligned} -u_\nu \xi + u_{\nu+1} &= \zeta_1 = -v_\nu \eta + \alpha_{\nu+1} , \\ -v_\nu \xi + v_{\nu+1} &= \zeta_2 = u_\nu \eta + \beta_{\nu+1} . \end{aligned}$$

Hierin sind ζ_1 und ζ_2 Zapfenwerte auf den bezüglichen Zapfenlinien.

Bei der *Bildung von* $u_{\nu+1}$ ist so vorzugehen: (s. Abb. 3a)

Schritt 1: Bildung von $-v_\nu\eta$ auf der linken Leiter (Verwendung von (b)).

Schritt 2: Bildung von ζ_1 gemäss: $\zeta_1 = -v_\nu\eta + \alpha_{\nu+1}$ auf der Zapfenlinie ζ_1 (Verwendung von (a)).

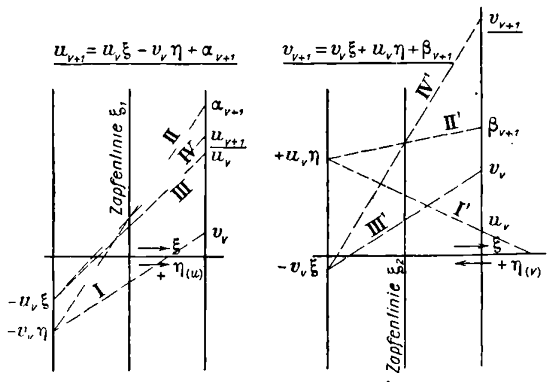


Abb. 3

Schritt 3: Bildung von $-u_\nu\xi$ auf der linken Leiter (Verwendung von (b)).

Schritt 4: Bildung von $u_{\nu+1}$ unter Benutzung von ζ_1 auf der rechten Leiter (Verwendung von (a)).

Ganz analog ist $v_{\nu+1}$ zu bilden (Abb. 3b). Hierbei ist jedoch die zu benutzende η–Leiter zu « verziffern », d. h., um die Grösse $u_\nu\eta$ sinnentsprechend zu bilden, sind positive und negative Werte der früheren η–Leiter zu vertauschen. Zu diesem Behufe sind die beiden η–Leitern mit den Zeigern (u) bzw. (v), also $\eta_{(u)}$ und $\eta_{(v)}$ versehen worden.

Wie leicht ersichtlich, kann die Bildung von $u_{\nu+1}$ und $v_{\nu+1}$, also schliesslich von w_n, in *einer* Tafel erfolgen, da die ξ und $\eta_{(u)}$–Leitern zusammenfallen, daher auf dem einen Ufer der waagrechten Mittelleiter Platz finden, während deren zweites die $\eta_{(v)}$–Leiter trägt. Wie ersichtlich, ist auch hier die linke Leiter bloss Zapfenlinie.

Abb. 4 zeigt das *Beispiel*:

$$w_1 = (2 + i)z + 3 + 2i$$

für $z = 1 + 2i$. Es ergibt sich: $w_1 = 3 + 7i$.

Anmerkungen: 1) Der Gedanke, die Nomographie mit dem gewöhnlichen « Graphischen Rechnen » zu koppeln, ist im vorliegenden Fall nicht neu. Vgl. hierzu (5), S. 254 und 286 (Verfahren von Farid Boulad). Wie ich in einigen Arbeiten (2), (3), (4) zeigen konnte, ist diese auf nomographischer

Grundlage beruhende Weiterbildung des gewöhnlichen « Graphischen Rechnens », die ich mit dem Namen « Nomographisch-graphisches Rechnen » belegt habe und für die sich übrigens insbesondere in den technischen Wissenschaften verschiedene Sonderfälle vorfinden, eine sehr wesentliche Erwei-

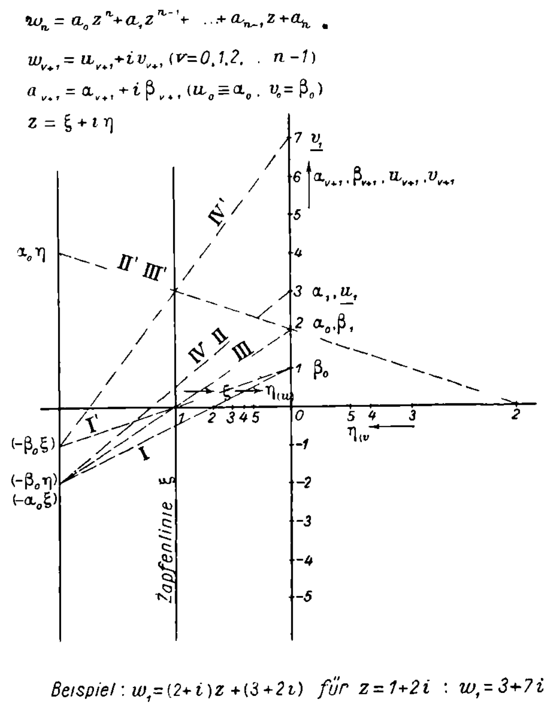


Abb. 4

terung der Nomographie. Es ist daher in diesem Sinne die von M. D'OCAGNE (6) vorgeschlagene Einteilung der geometrischen und mechanischen Rechenverfahren durch einen, zwischen Punkt 4 (Calcul nomographique) und 5 (Calcul nomomécanique) einzuschaltenden weiteren Punkt « Calcul nomographographique » zu vervollständigen.

2) Wie nur kurz erwähnt sei, kann das Vorstehende ohne wesentliche Schwierigkeiten auch für kompliziertere derartige Fälle, ferner z. B. zur Summenbildung unendlicher Reihen auf nomographisch-graphischem Wege herangezogen werden, worauf aber nicht weiter eingegangen sei.

SCHRIFTTUM

1 - H. BEHMANN, *Zur graphischen Behandlung der ganzen rationalen Funktion.* « Z. f. angewandte Math. u. Mechanik », 11 (1931), H. 6, S. 463.

2 - A. FISCHER, *Ueber eine Anwendung des nomographisch-graphischen Rechnens auf eine Aufgabe aus der technischen Schwingungslehre.* « HDI-Mitteilungen des Hauptvereines deutscher Ingenieure in der Tschechoslowakischen Rep. », 1932, H. 14.

3 - A. FISCHER, *Graphische Ermittlung der Scheinleistungsdauerlinie.* (Zuschrift zur gleichnamigen Arbeit von H. KUNZE). « Elektrotechnik u. Maschinenbau », 1932, H. 45.

4 - A. FISCHER, *Ueber das allgemeine « Integralrelief » zur nomographisch-graphischen Lösung von Randwertaufgaben gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung-das reelle Gegenstück zum « Sinus-und Tangensrelief in der Elektrotechnik »*, von FRITZ EMDE, « HDI-Mitt. », 1933, H. 1/2.

5 - M. D'OCAGNE, *Calcul graphique et Nomographie*, 3e éd., Paris, 1924.

6 - M. D'OCAGNE, *Le Calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques*, 3e éd., Paris. 1928.

Sui teoremi Tauberiani.

Memoria 1ª di GIOVANNI RICCI (a Pisa).

Sunto. - *Riprendendo noti procedimenti che studiano le condizioni da aggiungere alla relazione limite* $s\int_0^{+\infty} e^{-su}A(u)du \to 0$, *per* $s \to +0$, *perchè ne segua* $A(x) \to 0$, *per* $x \to +\infty$, *si introducono le semplici nozioni di scarto Tauberiano superiore e scarto Tauberiano inferiore relativi a un insieme illimitato* E *del semiasse reale* $x \geq 0$. *Tali nozioni ci permettono di formulare un teorema generale che dà notizia sull'andamento di* $A(x)$ *per* $x \to +\infty$ *su* E*; tale teorema ha una forma adatta per l'applicazione alle serie aventi struttura lacunare.*

1. Sia $A(x)$ una funzione definita per $x \geqq 0$ e *limitata in ogni intervallo finito* (1). Supponiamo che esista convergente per ogni $s > 0$ l'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-su}A(u)du$. Un classico risultato di ABEL ci assicura che da ciascuna delle due ipotesi

$$(1.1)\qquad A(x) \to 0, \quad A(x) \to +\infty \qquad \text{per } x \to +\infty$$

segue rispettivamente (2)

$$(1.2)\qquad s\int_0^{+\infty} e^{-su}A(u)du \to 0, \quad s\int_0^{+\infty} e^{-su}A(u)du \to +\infty \qquad \text{per } s \to +0.$$

(1) Questa ipotesi sarà conservata in tutto ciò che segue.

(2) Infatti, posto
$$M(t) = \operatorname*{Max}_{x \geqq t}\,(\,|A(x)|\,), \quad m(t) = \operatorname*{Min}_{x > t}\,(A(x)),$$
(con la scrittura $\operatorname*{Max}_{x \subset E}(F(x))$ si intende l'*estremo superiore* dell'insieme numerico descritto da $F(x)$ quando x descrive E; analogamente l'*estremo inferiore* per Min) se $A(x) \to 0$ allora $M(0)$ è finito e $M(t) \to 0$ per $t \to +\infty$; d'altronde per ogni $t \geqq 0$ è

$$\left| s\int_0^{+\infty} e^{-su}A(u)du \right| \leqq s\left|\int_0^t\right| + s\left|\int_t^{+\infty}\right| \leqq M(0)s\int_0^t e^{-su}du + M(t)s\int_t^{+\infty} e^{-su}du$$
$$= M(0)(1 - e^{-st}) + M(t)e^{-st} = M(0)o(1) + M(t)(1 + o(1)) \qquad \text{per } s \to +0,$$

Il problema dell'inversione risale a A. Tauber ([3]), il quale per primo stabilì alcune condizioni da richiedere alla funzione $A(x)$ perchè da

$$\text{(A)} \qquad s\int_0^{+\infty} e^{-su}A(u)du \to 0 \qquad \text{per } s \to +0$$

segua

$$\text{(L)} \qquad A(x) \to 0 \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Le condizioni da aggiungere ad (A) per ottenere (L) hanno costituito l'oggetto di numerose ricerche, le quali hanno condotto alla formulazione di teoremi via via più ampî, detti, insieme ad altri analoghi, *teoremi Tauberiani.*

Per potere giudicare se vale (L) quando si presupponga (A) occorre investigare con certi criterî l'andamento della differenza $A(x) - A(y)$ nelle vicinanze della retta $y = x$ del piano (x, y), e si potrebbe dire, usando come primo orientamento una frase non nuova (non precisa ma espressiva), che da (A) segue (L) quando $A(x)$ *oscilla con sufficiente lentezza* o (meglio ancora quando si tenga conto di condizioni cosiddette *unilaterali*) quando $A(x)$, nei tratti in cui è decrescente, *decresce con sufficiente lentezza.* In questa sufficiente lentezza si traducono le ipotesi che si usano fare sulla funzione $A(x)$ nei teoremi Tauberiani di questa particolare categoria. Esaminandone il procedimento dimostrativo ci si accorge che l'investigazione sull'andamento di $A(x) - A(y)$ potrebbe venire suddivisa in due tempi: il primo che tende ad assicurare che $A(x)$ è limitata per $x \geqq 0$, e il secondo che tende ad assicurare che $A(x) \to 0$ per $x \to +\infty$. E le condizioni che portano ad un risultato positivo per l'ispezione del primo tempo sono della stessa natura (a parte l'intensità) di quelle che portano a un risultato positivo nel secondo tempo: in altre parole, c'è una sufficiente lentezza che ci assicura essere $A(x)$ limitata per $x \leqq 0$, mentre non ci assicura $A(x) \to 0$ per $x \to +\infty$.

Supponiamo che $A(x)$ risulti limitata per $x \geq 0$ e che le ipotesi fatte su $A(x)$ non siano sufficienti ad assicurare che $A(x) \to 0$ per $x \to +\infty$; allora sorgono spontanee alcune domande come le seguenti: Sotto quali condizioni

---

da cui segue la prima delle (1.2). Se $A(x) \to +\infty$, $m(0)$ è finito e $m(t) \to +\infty$ per $t \to +\infty$; d'altronde per ogni $t \geq 0$ è

$$s\int_0^{+\infty} e^{-su}A(u)du = s\int_0^t + s\int_t^{+\infty} > m(0)s\int_0^t e^{-su}du + m(t)s\int_t^{+\infty} e^{-su}du =$$
$$= m(0)(1 - e^{-st}) + m(t)e^{-st} \quad m(0)o(1) + m(t)(1 + o(1)) \qquad \text{per } s \to +0,$$

da cui segue la seconda delle (1.2).

([3]) Vedere la *Nota* storica al n. 4.

è possibile scegliere una successione x_1, x_2, x_3,... divergente a $+\infty$ in guisa da avere $A(x_n)\to 0$ per $n\to+\infty$? E, più in generale, quale sarà l'intervallo di indeterminazione di una successione $A(x_1)$, $A(x_2)$, $A(x_3)$,...?

Il Teorema A) (n° 3), che generalizza i teoremi noti e che dimostreremo seguendo il classico metodo di J. E. LITTLEWOOD [13], T. VIJAYARAGHAVAN [21] ([1]) e appoggiandoci all'esposizione di E. LANDAU [12], risponde in un certo senso alle domande precedenti e può trovare applicazioni alle serie aventi struttura lacunare (vedi n° 6); la dimostrazione verrà svolta per intero (nⁱ 7–14). Al n° 4 riassumeremo i risultati noti che rientrano nel teorema in questione. Dobbiamo prima di tutto introdurre una definizione (n° 2), che verrà giustificata dal Teorema A) e da esempi al n° 5.

2. Scarto Tauberiano. — Sia $A(x)$ una funzione definita per $x>0$ e sia E un insieme non limitato del semiasse reale positivo.

Diciamo *scarto Tauberiano superiore* [*scarto Tauberiano inferiore*] di $A(x)$ relativo all'insieme E l'estremo inferiore (non negativo) $T^+(E)$ dei numeri reali e positivi τ [l'estremo superiore (non positivo) $T^-(E)$ dei numeri reali e negativi $-\tau$] ai quali possono essere coordinati due numeri positivi $x_0(\tau)$, $\omega(\tau)$ in guisa che *per ogni* $x \geqq x_0(\tau)$ *appartenente a* E *si abbia*

$$\text{(2.1)}\qquad \operatorname{Min}\left\{\max_{x<y\leq x(1+\omega)}(A(x)-A(y)),\ \max_{x(1-\omega)<y<x}(A(x)-A(y))\right\}<\tau$$

$$\text{(2.2)}\qquad \left[\operatorname{Max}\left\{\min_{x\leq y\leq x(1+\omega)}(A(x)-A(y)),\ \min_{x(1-\omega)<y<x}(A(x)-A(y))\right\}>-\tau\right].$$

Quando per nessun numero positivo τ esistano i corrispondenti $x_0(\tau)$, $\omega(\tau)$ tali da soddisfare la (2.1) [la (2.2)] si converrà di porre $T^+(E)=+\infty$ [$T^-(E)=-\infty$].

OSSERVAZIONI. — 1°) Se $A(x)$ è limitata per $x>0$ i numeri $T^+(E)$ e $T^-(E)$ sono ambedue finiti.

2°) Essendo per qualunque x e ω positivi

$$\max_{x<y\leq x(1+\omega)}(A(x)-A(y))=-\min_{\frac{y}{1+\omega}\leqq x<y}(A(y)-A(x)),$$

ci si accorge, scambiando le parti di x e y in (2.2), che quando l'insieme E sia il semiasse reale positivo risulta $T^+(E)=-T^-(E)$.

([1]) I numeri entro [ ] si riferiscono alla bibliografia riportata alla fine.

3. Teorema A). — 1°) *L'integrale* $\int_0^{+\infty} e^{-su}A(u)du$ *sia convergente per ogni* s > 0 *e si abbia*

$$s\int_0^{+\infty} e^{-su}A(u)du = o(1), \qquad \text{per } s \to +0. \tag{A}$$

2°) *Esistano due numeri reali e positivi* K, H *tali che per ogni*

$$0 \leqq x \leqq y \leqq x(1+H)$$

risulti

$$A(y) - A(x) > -K. \tag{S}$$

Allora è

$$A(x) = O(1), \qquad \text{per } x \to +\infty$$

e detti $T^-(E)$, $T^+(E)$ *gli scarti Tauberiani inferiore e superiore di* A(x) *relativi a un qualunque insieme non limitato* E *risulta* [5]

$$\text{(T)} \quad \begin{cases} \underline{\lim}_{x\to+\infty,\, \text{su } E} A(x) - \overline{\lim}_{x\to+\infty} A(x) \leqq T^-(E) \leqq \underline{\lim}_{x\to+\infty,\, \text{su } E} A(x) \leqq \\ \leqq \overline{\lim}_{x\to+\infty,\, \text{su } E} A(x) \leqq T^+(E) \leqq \overline{\lim}_{x\to+\infty,\, \text{su } E} A(x) - \underline{\lim}_{x\to+\infty} A(x). \end{cases}$$

---

[5] Notiamo subito che valgono le limitazioni

$$\underline{\lim}_{x\to+\infty} A(x) < 0 \leqq \overline{\lim}_{x\to+\infty} A(x)$$

$$\underline{\lim}_{x\to+\infty,\, \text{su } E} A(x) - \overline{\lim}_{x\to+\infty} A(x) \leqq T^-(E) \leqq T^+(E) \leqq \overline{\lim}_{x\to+\infty,\, \text{su } E} A(x) - \underline{\lim}_{x\to+\infty} A(x).$$

Infatti: se fosse $\underline{\lim}_{x\to+\infty} A(x) > \gamma > 0$, allora per $x \geq x_0$ (x_0 conveniente) sarebbe $A(x) > \gamma$ e anche

$$s\int_0^{+\infty} e^{-su}A(u)du = s\int_0^{x_0} + s\int_{x_0}^{+\infty} > s\int_0^{x_0} + s\gamma\int_{x_0}^{+\infty} e^{-su}du = s\cdot O(1) + \gamma e^{-sx_0} = \gamma + o(1)$$

contro la (A). Se fosse $\overline{\lim}_{x\to+\infty,\, \text{su } E} A(x) - \underline{\lim}_{x\to+\infty} A(x) = T^+(E) - 3\gamma$ (con $\gamma > 0$) allora per $y \geqq x_0$, con x_0 conveniente, si avrebbe

$$\overline{\lim}_{x\to+\infty,\, \text{su } E} A(x) - A(y) < T^+(E) - 2\gamma$$

e per x di E e $x \geq x_1$ (x_1 conveniente) avremmo anche $A(x) - A(y) < T^+(E) - \gamma$, e questo contraddice la definizione di $T^+(E)$. Resta dunque a dimostrare la parte essenziale del Teorema A), cioè:

$$T^-(E) \leqq \underline{\lim}_{x\to+\infty,\, \text{su } E} A(x) \leqq \overline{\lim}_{x\to+\infty,\, \text{su } E} A(x) \leqq T^+(E).$$

Osservazione. — Seguendo l'uso ormai corrente tratteremo degl'integrali; ma possiamo osservare ovviamente che se la serie di Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots, \ \lambda_n \to +\infty \text{ per } n \to +\infty) \tag{3.1}$$

converge per $s > 0$, risulta com'è noto $A_n = a_1 + \dots + a_n = o(e^{\delta\lambda_n})$, per $\delta > 0$ fisso e $n \to +\infty$; e posto $A(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} a_n$ per $x \geq 0$ (le somme vuote di termini sono da considerarsi nulle) abbiamo $(A_0 = 0)$:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \lim_{m \to +\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{m-1} A_n (e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}) + A_m e^{-\lambda_m s} \right\} =$$

$$= \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{m-1} A_n s \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-su} du = s \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-su} du = s \int_0^{+\infty} e^{-su} A(u) du.$$

Dunque il teorema enunciato ha una chiara interpretazione nella teoria delle serie di Dirichlet generali.

4. Nota. — Supponiamo che le due serie (a_0, a_1, a_2, ... numeri complessi)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \ \lambda_n \to +\infty \text{ per } n \to +\infty)$$

convergano rispettivamente per $|x| < 1$ e $\mathfrak{R}(s) > 0$, e poniamo

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n, \quad P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}.$$

Consideriamo le relazioni di limite (dove $x \to 1-0$, $s \to +0$ sull'asse reale)

$$(L)\ S_n \to L; \qquad (A_1)\ P(x) \to L; \qquad (A_2)\ f(x) \to L.$$

1) A. Tauber [2] (1897) dimostrò che $(A_1) \to (L)$ [6] se e soltanto se $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = o(n)$ e quindi in particolare $(A_1) \to (L)$ se $na_n = o(1)$. Questo primo studio diede origine a moltissime ricerche alcune delle quali, restando nell'ambito del nostro lavoro, si possono tratteggiare come segue [7]:

2) $(A_2) \to (L)$ se $\lambda_n a_n = o(\lambda_n - \lambda_{n-1})$ (Landau [9], 1907).

3) $(A_2) \to (L)$ se e soltanto se $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = o(\lambda_n)$ (Schnee [16], 1909).

4) $(A_1) \to (L)$ se $na_n = O(1)$ (Littlewood [13], 1911).

5) $(A_2) \to (L)$ se $\lambda_n - \lambda_{n-1} = o(\lambda_n)$, $\lambda_n a_n = O(\lambda_n - \lambda_{n-1})$ (Ibid.).

---

[6] Con la scrittura $(A_1) \to (L)$ intendiamo « da (A_1) segue (L) ».

[7] Una parte di queste notizie si possono anche ricavare da E. Kogbetliantz [8].

6) $(A_1) \rightarrow (L)$ se $S_n = O(1)$ e $\lim\limits_{\delta \rightarrow +0} \left\{ \operatorname*{Max}\limits_{n(1-\delta) \leq m \leq n(1+\delta)} | S_m - S_n | \right\} = 0$ (Landau [11], 1913).

7) $(A_2) \rightarrow (L)$ se $S_n = O(1)$, $\lambda_n - \lambda_{n-1} = o(\lambda_n)$, $\lim\limits_{\delta \rightarrow +0} \left\{ \operatorname*{Max}\limits_{\lambda_n(1-\delta) < \lambda_m \leq \lambda_n(1+\delta)} | S_m - S_n | \right\} = 0$ (Ibid.).

8) $(A_1) \rightarrow (L)$ se a_n reale $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $na_n > -K$ (Hardy-Littlewood [3], 1914) (⁸).

9) $(A_2) \rightarrow (L)$ se a_n reale $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $\lambda_n - \lambda_{n-1} = o(\lambda_n)$, $\lambda_n a_n > -K(\lambda_n - \lambda_{n-1})$ (Hardy-Littlewood [4], 1914) (⁹).

10) $(A_1) \rightarrow (L)$ se la serie $\Sigma\, n\, |a_n|^2$ converge (Fejér [2], 1914).

11) $(A_1) \rightarrow (L)$ se per un $\rho > 0$ la serie $\Sigma\, n^\rho\, |a_n|^{1+\rho}$ converge (Hardy-Littlewood [4], 1914).

12) $(A_2) \rightarrow (L)$ se per un $\rho > 0$ la serie $\Sigma\, \lambda_n^\rho (\lambda_n - \lambda_{n-1})^{-\rho} |a_n|^{1+\rho}$ converge (Ibid.).

13) $(A_2) \rightarrow (L)$ se $\lambda_n - \lambda_{n-1} = o(\lambda_n)$ ed esiste una funzione $\eta(\delta)$ con

$$\overline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \sum_{x \leq \lambda_n < (1+\delta)x} | a_n | < \eta(\delta), \quad \eta(\delta) \rightarrow 0 \text{ per } \delta \rightarrow 0 \text{ (Neder (14], 1924).}$$

14) $(A_1) \rightarrow (L)$ se ad ogni $\tau > 0$ si possono fare corrispondere due numeri positivi $n_0(\tau)$, $\omega(\tau)$ tali che, per $n_0 < n < m \leq n(1 + \omega)$, si abbia $S_m - S_n > -\tau$ (R. Schmidt [15], 1925; T. Vijayaraghavan [21], 1926).

15) $(A_2) \rightarrow (L)$ se $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1$ (Hardy-Littlewood [5], 1926).

16) $(A_2) \rightarrow (L)$ se $\lambda_n a_n = O(\lambda_n - \lambda_{n-1})$ (Ananda Rau [1], 1928).

17) $(A_1) \rightarrow (L)$ se per un $\rho > 0$ è $\sum\limits_{r=1}^{n} (r \,| a_r |)^{1+\rho} = O(n)$ (Szàsz [17], 1928).

18) $(A_2) \rightarrow (L)$ se per un $\rho > 0$ è $\sum\limits_{r=1}^{n} \lambda_r^{1+\rho} (\lambda_r - \lambda_{r-1})^{-\rho} | a_r |^{1+\rho} = O(\lambda_n)$ (Szàsz [18], 1928).

19) Riprendendo a considerare le posizioni più generali del n° 1: $(A) \rightarrow (L)$ se ad ogni $\tau > 0$ si possono coordinare due numeri positivi $x_0(\tau)$, $\omega(\tau)$ in guisa che, per ogni coppia (x, y) per cui $x_0 \leq x \leq y \leq x(1 + \omega)$, si abbia $A(y) - A(x) > -\tau$ (Szàsz [19], 1929).

Osserviamo che 19) riprende 14) ed è la forma più raffinata.

La condizione (S) del n° 3 viene a risultare una condizione del tipo Landau-R. Schmidt e la definizione di scarto Tauberiano, introdotta al n° 2, si basa sulla struttura di tale condizione.

Un nuovo indirizzo nello studio dei teoremi Tauberiani è stato recentemente inaugurato da N. Wiener e perseguito da altri autori (J. Karamata, S. Bochner, O. Szasz, ecc.).

Per una bibliografia completa si rimanda a N. Wiener [22].

5. Diamo una giustificazione della definizione introdotta (n° 2) di *scarto Tauberiano*; i due esempi che seguono pongono in evidenza che, almeno su questa via, le limitazioni (T) non possono essere rinforzate.

(⁸) Questa condizione di tipo unilaterale è quella stabilita per la prima volta da E. Landau [10] per dedurre (L) dalla convergenza secondo le medie di Cesàro.

(⁹) Per l'estensione al campo complesso vedere L. Neder [14].

1°) Poniamo

$$\left.\begin{array}{l} A(x)=0 \text{ per } 0\leq x<1 \text{ e per } 2^r+1\leq x\leq 2^{r+1}-1 \\ A(x)=(-1)^r(1-|2^r-x|) \text{ per } 2^r-1<x<2^r+1 \end{array}\right\} \quad (r=1,2,3,\ldots)\ (^{1})\text{.}$$

L'integrale in questione esiste e converge per ogni $s>0$ essendo $A(x)$ limitata su tutto l'asse reale e a variazione limitata in ogni intervallo finito; inoltre vale la (A) poichè per $s<1\ 2$, $t\geq 1+[-\log s \log 2]$, $v=\exp(s2^u)$ (quindi $\log v\geq 1$ per $u\geq t$) abbiamo:

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-su}A(u)du\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-su}\,|A(u)|\,du < \sum_{r\ 1}^{\infty}\exp(-s(2^r-1))\int_{2^r-1}^{2^r+1}|A(u)|\,du=$$

$$=\sum_{r\ 1}^{\infty}\exp(-s(2^r-1)) < t+2+\sum_{r=t+1}^{\infty}\exp(-s2^r) < t+2+\int_t^{+\infty}\exp(-s2^u)du=$$

$$=t+2+\frac{1}{\log 2}\int_{\exp(s2^t)}^{+\infty}\frac{dv}{v^2\log v} < t+2+\frac{1}{\log 2}\int_{\exp(s2^t)}^{+\infty}\frac{dv}{v^2}=t+2+\frac{\exp(-s2^t)}{\log 2}\leq$$

$$\leq 3+\frac{1}{\log 2}\left\{\log\frac{1}{s}+\exp\left(\frac{s\log s}{\log 2}\right)\right\}=o\left(\frac{}{s}\right) \qquad \text{per } s\to+0.$$

Se per insieme E si assume rispettivamente ciascuno dei tre insiemi

$$2^{2r}\pm\alpha,\quad 2^{2r+1}\pm\alpha,\quad 2^r\pm\alpha \qquad (r=1,2,3,\ldots;\ \alpha>0)$$

gli scarti Tauberiani inferiore e superiore risultano rispettivamente $(0,\mu)$, $(-\mu, 0)$, $(-\mu,\mu)$ con $\mu=\operatorname{Max}(0, 1-\alpha)$; i limiti minimo e massimo di $A(x)$, per $x\to+\infty$ su E, risultano rispettivamente (μ,μ), $(-\mu,-\mu)$, $(-\mu,\mu)$.

Si vedrebbe facilmente che per questa funzione $A(x)$, qualunque sia l'insieme illimitato E, se è $\overline{\lim}_{x\to+\infty,\,\mathrm{su}\,E} A(x)\geq 0$ è anche $\overline{\lim}_{x\to+\infty,\,\mathrm{su}\,E} A(x)=T'(E)$. Lo stesso si dica per $\underline{\lim}$.

2°) Poniamo

$A(x)=0$ per $0\leq x<1$ e $A(x)=(-1)^n(1-|2n-x\ )$ per $2n-1<x<2n+1$,

(¹⁰) I punti del diagramma della funzione $A(x)$ che non appartengono all'asse delle x sono tutti e soli quelli dei cateti dei triangoli rettangoli isosceli aventi l'ipotenusa sull'asse delle x e i vertici rispettivi nei punti $(2^r, (-1)^r)$, $(r-1, 2, 3,\ldots)$.

$(n=1, 2, 3,...)$. Risulta analogamente a quanto abbiamo veduto prima

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-su}A(u)du\right| \leqq \sum_{r=1}^{\infty} \{ e^{-s(2r-1)} - e^{-s(2r+3)} \} =$$

$$= e^{-s}(1-e^{-4s})\left\{ 1+\sum_{r=2}^{\infty} e^{-2rs} \right\} \leqq e^{-s}(1-e^{-4s})\left\{ 1+\int_1^{+\infty} e^{-2us}du \right\} =$$

$$= e^{-s}(1-e^{-4s})\left(1+\frac{1}{2se^{2s}}\right) = o\left(\frac{1}{s}\right) \qquad \text{per } s \to +0,$$

e vale la (A). Se per insieme E assumiamo $2n \pm \alpha$, $(n=1, 2, 3,...;\ 0 \leqq \alpha < 1)$, essendo evidentemente

$$-\underline{\lim}_{x \to +\infty, \text{su} E} A(x) = \overline{\lim}_{x \to +\infty, \text{su} E} A(x) = 1-\alpha, \quad -T^-(E) = T^+(E) = 2-\alpha$$

risulta

$$\underline{\lim}_{x \to +\infty, \text{su} E} A(x) - \overline{\lim}_{x \to +\infty} A(x) = T^-(E), \quad \overline{\lim}_{x \to +\infty, \text{su} E} A(x) - \underline{\lim}_{x \to +\infty} A(x) = T^+(E).$$

6. Conseguenze del Teorema A). — Il Teorema A) può avere applicazione alle serie aventi struttura lacunare, cioè a quelle serie nelle quali esistono gruppi abbastanza estesi di coefficienti a_n pei quali la differenza $|a_n| - a_n$ è abbastanza piccola, tali gruppi potendo contenere alcuni (pochi però!) coefficienti a_n pei quali la differenza $|a_n| - a_n$ è meno piccola. Vale precisamente il seguente

Teorema. — *La serie di* Dirichlet $\mathrm{f(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$, $(0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ...,$ $\lambda_n \to +\infty$ *per* $n \to +\infty)$, *sia convergente per* $s > 0$ *e siano soddisfatte le ipotesi seguenti*:

a) $$f(s) \to 0 \qquad \text{per } s \to +0,$$

b) *esistano due numeri positivi* H *e* K *pei quali*

$$\sum_{x<\lambda_n \leqq y} a_n > -K \quad \textit{quando} \quad x < y \leqq x(1+H),$$

c) *esistano tre numeri reali* K_1, ω, τ $(K_1 \geqq 0,\ \omega > 0,\ \tau \geqq 0)$ *ed una successione di coppie di interi* (h_1, k_1), (h_2, k_2), (h_3, k_3),... (con $h_i \to +\infty$) *tali che per ogni coppia* (h_i', k_i') *con* $h_i \leqq h_i' \leqq k_i' < k_i$ *si abbia*

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{k_i} > \lambda_{h_i}(1+\omega) \\ \displaystyle\sum_{h_i' < n \leqq k_i'} \left\{ |a_n| - a_n - K_1 \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right\} < 2\tau \end{array}\right\} \qquad (i=1, 2, 3,...).$$

Allora, posto $A(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} a_n$ (per la successione di somme all'ingresso) *vale la limitazione*

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}}\, A(\lambda_{h_r}) \leq \tau.$$

Se è soddisfatta l'ipotesi ulteriore

d) $\underline{\lim}\, a_n \geqq 0$ per $h_i < n \leqq k_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, $n \to +\infty$

allora (per le due successioni di somme all'uscita e mediane) *valgono le limitazioni*

$$\underline{\lim_{r \to +\infty}}\, A(\lambda_{k_r}) \geq -\tau$$

$$-\tau \leq \underline{\lim_{r \to +\infty}}\, A\left(\frac{\lambda_{h_r} + \lambda_{k_r}}{2}\right) \leq \overline{\lim_{r \to +\infty}}\, A\left(\frac{\lambda_{h_r} + \lambda_{k_r}}{2}\right) \leq \tau.$$

Se consideriamo come insiemi E_1, E_2, E_3 rispettivamente le tre successioni

$$\{\lambda_{h_1}, \lambda_{h_2}, \lambda_{h_3}, \ldots\},\ \{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \lambda_{k_3}, \ldots\},\ \left\{\frac{1}{2}(\lambda_{h_1} + \lambda_{k_1}),\ \frac{1}{2}(\lambda_{h_2} + \lambda_{k_2}),\ \frac{1}{2}(\lambda_{h_3} + \lambda_{k_3}), \ldots\right\},$$

in base alla disuguaglianza $\left(\text{dove } 0 < \eta < \frac{1}{2}\omega\right)$

$$A(\lambda_{h_r}) - A(\lambda_{h_r}(1 + \eta)) = -\sum_{\lambda_{h_r} < \lambda_n < (1+\eta)\lambda_{h_r}} a_n < \frac{1}{2} \sum_{\ldots} (|a_n| - a_n) \leq$$

$$\leq \tau + \frac{1}{2} \sum_{\ldots} K_1 \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} \leqq \tau + \frac{K_1}{2\lambda_{h_r}} \sum_{\ldots} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \leq \tau + \frac{K_1 \eta}{2}$$

e ad altre analoghe facilmente costruibili, per le quali si fa uso anche dell'ipotesi d) con lo spezzare la somma

$$\sum_{\lambda_{k_r}(1-\eta) < \lambda_n \leq \lambda_{k_r}} a_n = a_{l_r} + \Sigma' a_n + a_{k_r}$$

(Σ' è la somma precedente privata dei termini estremi), si riscontra subito che

$$T^+(E_1) \leqq \tau, \quad T^-(E_2) \geqq -\tau, \quad T^+(E_3) \leqq \tau, \quad T^-(E_3) \geqq -\tau.$$

Dunque dalle (T) segue l'asserto.

Il caso semplice $\tau = 0$ (mancano allora i coefficienti a_n con la differenza $|a_n| - a_n$ troppo grande da inquinare le lacune!) ci mostra che se nel precedente teorema si sostituisce all'ipotesi c) la seguente

c') *esistano due numeri positivi* K_1, ω *e una successione di coppie di interi* (h_1, k_1), (h_2, k_2), (h_3, k_3), ... (con $h_i \to +\infty$) *tali che*

$$\lambda_{k_i} > \lambda_{h_i}(1 + \omega); \quad a_n > -K_1 \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} \quad \textit{per} \quad h_i < n \leqq k_i; \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

allora, conservando le ipotesi a), b) *e* d), *si ha*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} A(\lambda_{h_r}) \leqq 0 \leqq \varliminf_{r\to+\infty} A(\lambda_{k_r})$$

$$\lim_{r\to+\infty} A\left(\frac{\lambda_{h_r}+\lambda_{k_r}}{2}\right) = 0.$$

Anzi, la limitazione

$$\varlimsup_{r\to+\infty} A(\lambda_{h_r}) \leqq 0$$

sussiste anche indipendentemente dall'ipotesi d).

Infatti, in base all'ipotesi

$$A(\lambda_{h_r}) - A(\lambda_{h_r}(1+\eta)) = - \sum_{\lambda_{h_r}<\lambda_n\leq\lambda_{h_r}(1+\eta)} a_n \leqq K_1 \sum_{\cdots} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} \leqq$$

$$\leqq \frac{K_1}{\lambda_{h_r}} \sum_{\cdots} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \leqq K_1\eta.$$

Per questa disuguaglianza e per altre analoghe si ricava subito

$$T^+(E_1) = 0, \quad T^-(E_2) = 0, \quad T^+(E_3) = T^-(E_3) = 0.$$

Quindi anche questo teorema segue dal Teorema A).

OSSERVAZIONE. — Tralasciamo il carattere unilaterale nelle ipotesi dei teoremi di questo n° 6 e poniamoci nelle condizioni che generalizzano quelle di LITTLEWOOD-ANANDA RAU, cioè quelle della proposizione 16) (ved. n° 4), acuta « messa a fuoco » del passo decisivo 4), 5). Allora alla ipotesi c) dobbiamo sostituire quella analoga (più restrittiva) bilaterale esprimibile con

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{k_i} > \lambda_{h_i}(1+\omega) \\ \displaystyle\sum_{h_i'<n\leq k_i'} \left\{ |a_n| + a_n - K_1\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right\} < 2\tau_1 \\ \displaystyle\sum_{h_i'<n\leq k_i'} \left\{ |a_n| - a_n - K_1\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right\} < 2\tau_2 \end{array}\right\} \quad (i=1,2,3,\ldots;\ \tau_1\geqq 0,\ \tau_2\geqq 0)$$

e, procedendo in modo analogo, si perviene a concludere (senza fare uso dell'ipotesi d))

$$-\tau_1 \leqq \varliminf_{r\to+\infty} A(\lambda_{h_r}) \leqq \varlimsup_{r\to+\infty} A(\lambda_{h_r}) \leqq \tau_2 \ (^{11}).$$

(11) In A. ZYGMUND [23] si trova la seguente proposizione, contenuta in questa: Se la serie Σa_n è sommabile $(C, 1)$ con somma s, e possiede infinite lacune (cioè gruppi di termini nulli) (h_i, k_i) con $k_i\,h_i > 1+\varepsilon$, allora la successione delle somme S_{h_i} della serie converge allo stesso limite s.

Nelle ipotesi della proposizione 16) (n° 4) si può qui assumere $\tau_1 = \tau_2 = 0$ e la successione $h_1, h_2, h_3, \ldots$ arbitrariamente; dunque la proposizione 16) è contenuta in questa.

Più in particolare possiamo concludere: Se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, convergente per $|x| < 1$, ha le somme $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ limitate e $n\,|a_n| < K$ per $h_r < n \leqq k_r$, con $k_r > h_r(1+\eta)$, ($r = 1, 2, 3, \ldots$; $h_r \to +\infty$; $K > 0$, $\eta > 0$ fissi), perchè esista finito il limite $\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = L$ è necessario che si abbia

$$L = \varliminf_{r \to +\infty} S_{h_r} = \varlimsup_{r \to +\infty} S_{h_r} = \varliminf_{r \to +\infty} S_{k_r} = \varlimsup_{r \to +\infty} S_{k_r}.$$

7. *Lemma* (T. VIJAYARAGHAVAN) ([12]). — *L'integrale* $\int_0^{+\infty} e^{-su} A(u)\,du$ *sia convergente per ogni* $s > 0$. *Se esistono due numeri positivi* H, K *tali che per ogni coppia* (x, y) *con*

$$0 \leq x \leq y < x(1+H)$$

risulti

$$\text{(S)} \qquad A(y) - A(x) > -K,$$

allora da

$$\text{(O)} \qquad s\int_0^{+\infty} e^{-su} A(u)\,du = O(1) \qquad \text{per } s \to +0,$$

segue

$$\text{(V)} \qquad A(x) = O(1) \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Poniamo

$$\text{(7.1)} \qquad A_1(x) = \operatorname*{Max}_{u<x} (A(u)), \quad A_2(x) = \operatorname*{Max}_{u<x} (-A(u)).$$

Le funzioni $A_1(x)$ e $A_2(x)$ risultano non decrescenti, e dove sono discontinue risultano continue a sinistra. Infatti detto x_0 un punto (certamente esistente) dell'intervallo chiuso $(0, x)$ in ogni intorno Δ del quale è $\operatorname*{Max}_{u \subset \Delta,\, u<x} A(u) = A_1(x)$ si distinguono due casi:

1°) $x_0 < x$ e allora per $0 < h < x - x_0$ è $A_1(x-h) = A_1(x)$;

2°) $x_0 = x$ e allora per $h \to +0$ è $A_1(x-h) \to A_1(x)$.

([12]) Questo lemma è stato rilevato e dimostrato con procedimento diverso da J. KARAMATA [7]; qui adatteremo agl'integrali il procedimento di T. VIJAYARAGHAVAN [21] evitando, come ha fatto O. SZÀSZ nei suoi studi, l'introduzione dell'integrale di STIELTJES.

Osserviamo anche ovviamente che esistono due numeri positivi H_1, K_1 tali che per ogni coppia (x, y) con $x \leqq y$ risulta

$$(7.2) \qquad A(y) - A(x) > -\left(H_1 \log \frac{y}{x} + K_1\right), \quad A_2(y) - A_2(x) < H_1 \log \frac{y}{x} + K_1$$

Infatti se poniamo $y = x(1 + H)^\theta$, per l'ipotesi (S) abbiamo

$$A(y) - A(x) > - K(1 + [\theta]) \geqq - K(1 + \theta) = - K \left\{ 1 + \frac{\log \frac{y}{x}}{\log(1 + H)} \right\} \geqq$$
$$\geqq - \left\{ \frac{K}{\log(1 + H)} \log \frac{y}{x} + K \right\},$$

e ne segue la prima delle (7.2).

Per dimostrare la seconda delle (7.2) basta provare che, per

$$0 \leqq x \leqq y \leqq x(1 + H') \quad (\text{con } 0 < H' < H),$$

si ha sempre

$$(7.3) \qquad 0 \leqq A_2(y) - A_2(x) < A_2(x(1 + H')) - A_2(x) \leqq K;$$

essendo $A_2(x) \leqq A_2(y) \leqq A_2(x(1 + H'))$ basta provare l'ultima di queste limitazioni che è senz'altro vera quando $A_2(x) = A_2(x(1 + H'))$. Se è $A_2(x) < A_2(x(1 + H'))$ abbiamo evidentemente per (7.1)

$$A_2(x(1 + H')) = \operatorname*{Max}_{u < x(1+H')} (-A(u)) = \operatorname*{Max}_{x \leqq u < x(1+H')} (-A(u))$$

e quindi per la (S):

$$A_2(x(1 + H')) - A_2(x) = \operatorname*{Max}_{x<u<x(1+H')} (-A(u)) - \operatorname*{Max}_{u<x} (-A(u)) \leqq$$
$$\leqq \operatorname*{Max}_{x \leqq u < x(1+H')} (-A(u)) + A\left(x \frac{1 + H'}{1 + H}\right) < K.$$

Dalla (7.3) segue la seconda delle (7.2) proprio come da (S) abbiamo ricavato la prima delle (7.2).

8. Procediamo ad opportune limitazioni dell'integrale oggetto del lemma, col suddividere il semiasse positivo in tre parti

$$I(s) = s\int_0^{+\infty} e^{-su} A(u) du = s\int_0^{\xi} + s\int_{\xi}^{\eta} + s\int_{\eta}^{+\infty} = I_1 + I_2 + I_3, \qquad (0 \leqq \xi \leqq \eta).$$

Abbiamo evidentemente

$$- A_2(\xi) s \int_0^{\xi} e^{-su} du \leq I_1 \leq A_1(\xi) s \int_0^{\xi} e^{-su} du$$

da cui

$$-A_2(\xi)(1-e^{-s\xi}) \leqq I_1 \leqq A_1(\xi)(1-e^{-s\xi}),$$

e analogamente

$$\operatorname*{Min}_{\xi<u<\eta}(A(u))(e^{-s\xi}-e^{-s\eta}) \leqq I_2 \leqq \operatorname*{Max}_{\xi<u<\eta}(A(u))(e^{-s\xi}-e^{-s\eta}).$$

Evidentemente abbiamo

$$I_3 \leqq s\int_\eta^{+\infty} e^{-su}A_1(u)du$$

e tenendo conto della prima delle (7.2) abbiamo

$$I_3 = s\int_\eta^{+\infty} e^{-su}\{A(\eta)+A(u)-A(\eta)\}du = A(\eta)e^{-s\eta}+s\int_\eta^{+\infty} e^{-su}\{A(u)-A(\eta)\}du$$

$$> -A_2(\eta)e^{-s\eta} - s\int_\eta^{+\infty} e^{-su}\left\{H_1\log\frac{u}{\eta}+K_1\right\}du =$$

$$= -(A_2(\eta)+K_1)e^{-s\eta} - H_1 s\eta\int_1^{+\infty} e^{-s\eta v}\log v\,dv$$

e quando è $s\eta \geqq 2$ risulta $e^{\frac{1}{2}s\eta v} \geqq e^v > 1+v > \log v$, dunque

$$I_3 > -(A_2(\eta)+K_1)e^{-s\eta} - H_1 s\eta\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s\eta v}dv = -(A_2(\eta)+K_1)e^{-s\eta} - 2H_1 e^{-\frac{1}{2}s\eta}.$$

Si conclude che: *Posto*

(8.1) $$\Phi_1(s;\ \xi,\eta) = \operatorname*{Min}_{\xi<u<\eta}(A(u))(e^{-s\xi}-e^{-s\eta}) - A_2(\xi)(1-e^{-s\xi}) - $$
$$-(A_2(\eta)+K_1)e^{-s\eta} - 2H_1e^{-\frac{1}{2}s\eta}$$

(8.2) $$\Phi_2(s;\ \xi,\eta) = \operatorname*{Max}_{\xi<u<\eta}(A(u))(e^{-s\xi}-e^{-s\eta}) + A_1(\xi)(1-e^{-s\xi}) + s\int_\eta^{+\infty} e^{-su}A_1(u)du$$

per ogni terna di numeri positivi (s; ξ, η) *tali che*

(8.3) $$\xi \leqq \eta, \quad s\eta \geqq 2,$$

risulta

(8.4) $$\Phi_1(s;\ \xi,\eta) < I(s) < \Phi_2(s;\ \xi,\eta).$$

9. Preparati così gli elementi andiamo a dimostrare la (V) che si può scrivere per le (7.1)

(9.1) $$A_1(x)+A_2(x) = O(1) \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Procederemo per assurdo dimostrando che la relazione

$$(9.2)\qquad A_1(x)+A_2(x)\to+\infty \qquad \text{per } x\to+\infty,$$

contraddice l'ipotesi (O). L'idea di T. VIJAYARAGHAVAN consiste appunto nel pervenire all'assurdo partendo dalla (9.2) e costruendo una successione $(s_n;\ \xi_n,\ \eta_n)$ $(n=1, 2, 3,\dots)$ di terne $(s;\ \xi,\ \eta)$ soddisfacenti alle (8.3) in guisa da avere

$$\Phi_1(s_n;\ \xi_n,\ \eta_n)\to+\infty, \quad \text{oppure} \quad \Phi_2(s_n;\ \xi_n,\ \eta_n)\to-\infty \quad \text{per } n\to+\infty.$$

A tale scopo distinguiamo due casi (i soli possibili)

$$\text{a)}\ \overline{\lim_{x\to+\infty}}\ \{A_1(x)-A_2(x)\}\geqq 0, \quad \text{b)}\ \overline{\lim_{x\to+\infty}}\ \{A_1(x)-A_2(x)\}<0.$$

Studiamo il caso a). Evidentemente per (9.2) è $A_1(x)\to+\infty$; consideriamo l'insieme X dei punti ξ pei quali sono verificate simultaneamente le disuguaglianze

$$(9.3)\qquad A(\xi)>0,\quad A_1(\xi)>0,\quad A(\xi)>A_1(\xi)-1>A_2(\xi)-2;$$

tale insieme è evidentemente illimitato. Per quello che abbiamo ricordato al n° 1 non può essere $A(x)\to+\infty$, quindi per $\xi\geqq\xi_0$ (ξ_0 conveniente) esistono dei numeri y pei quali si verificano le due condizioni

$$(9.4)\qquad y\geqq\xi,\quad A(y)\leqq\frac{1}{2}A(\xi);$$

ebbene: ad ogni puuto $\xi\geqq\xi_0$ associamo l'estremo inferiore $\eta=\eta(\xi)$ di tali numeri y.

Per (7.2) abbiamo

$$A(y)-A(\xi)>-\left(H_1\log\frac{y}{\xi}+K_1\right),$$

e per (9.4)

$$\frac{1}{2}A(\xi)>H_1\log\frac{y}{\xi}+K_1;$$

e per (9.3)

$$\frac{1}{2}(A_1(\xi)-1)<H_1\log\frac{y}{\xi}+K_1,$$

da cui si ricava

$$\frac{y}{\xi}>\exp\left(\frac{A_1(\xi)-1-2K_1}{2H_1}\right)$$

e quindi

$$\frac{\eta}{\xi}\geqq\exp\left(\frac{A_1(\xi)-1-2K_1}{2H_1}\right).$$

Si conclude $\frac{\eta}{\xi} \to +\infty$ per $\xi \to +\infty$. Poniamo

$$s = (\xi\eta)^{-\frac{1}{2}} \tag{9.5}$$

in guisa che risulta

$$\frac{\eta}{\xi} \to +\infty, \quad s \to +0, \quad s\xi \to +0, \quad s\eta \to +\infty \qquad \text{per } \xi \to +\infty \text{ su } X, \tag{9.6}$$

e studiamo l'espressione $\Phi_1(s;\ \xi,\ \eta)$ data dalla (8.1).

Per il modo come sono definiti ξ e η, e per (9.6) abbiamo

$$A_2(\xi) < A_1(\xi) + 1, \quad \underset{\xi<u<\eta}{\mathrm{Min}}\,(A(u)) \geqq \frac{1}{2}A(\xi) \geqq \frac{1}{2}(A_1(\xi) - 1), \quad e^{-s\xi} \to 1, \ e^{-s\eta} \to 0$$

e, poichè per $\xi \leqq u < \eta$ è $A(u) > \frac{1}{2}A(\xi) > 0$, abbiamo ancora

$$A_2(\eta) \leq \mathrm{Max}\,(A_2(\xi),\ 0) \leqq \mathrm{Max}\,(A_1(\xi) + 1,\ 0) = A_1(\xi) + 1.$$

Dalla (8.1) ricaviamo, per $\xi \to +\infty$ su X:

$$\Phi_1(s;\ \xi,\ \eta) \geqq \frac{1}{2}(A_1(\xi) - 1)(1 + o(1)) - (A_1(\xi) + 1)o(1) -$$
$$- (A_1(\xi) + 1 + K_1)o(1) - 2H_1 o(1)$$

e poichè $A_1(\xi) \to +\infty$, anche $\Phi_1(s;\ \xi,\ \eta) \to +\infty$. Dalla (8.4) ricaviamo

$$\overline{\lim_{s \to +0}}\, I(s) = +\infty,$$

contro l'ipotesi (O).

Studiamo il caso b). La (9.2) e la b) ci dicono che necessariamente è $A_2(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Consideriamo l'insieme Y dei punti η pei quali sono verificate le condizioni seguenti:

$$\begin{cases} A_1(u) < A_2(u) \quad \text{per ogni} \quad u \geqq \eta \\ A(\eta) < 0, \quad A_2(\eta) > 0, \quad -A(\eta) \nearrow A_2(\eta) - 1 > A_1(\eta) - 1 \end{cases} \tag{9.7}$$

e pei quali esistono punti x con

$$x \leqq \eta, \quad A(x) \geqq \frac{1}{2}A(\eta). \tag{9.8}$$

L'insieme Y è non vuoto e illimitato; infatti $A_2(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, definitivamente vale $A_1(x) < A_2(x)$, e inoltre non può essere $A(x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$.

Ad ogni tale punto η coordiniamo il punto $\xi = \xi(\eta)$ estremo superiore dei punti x; per l'osservazione precedente risulta $\xi(\eta) \to +\infty$ per $\eta \to +\infty$ su Y.

Per (7.2) abbiamo $A(\eta) - A(x) > -\left(H_1 \log\frac{\eta}{x} + K_1\right)$, e, operando come pel caso a), da questa ricaviamo

$$\frac{\eta}{x} > \exp\left(\frac{A_2(\eta) - 1 - 2K_1}{2H_1}\right),$$

e quindi

$$\frac{\eta}{\xi} \geqq \exp\left(\frac{A_2(\eta) - 1 - 2K_1}{2H_1}\right).$$

Si conclude che, posta come prima la (9.5), risulta

$$\frac{\eta}{\xi} \to +\infty, \quad s \to +0, \quad s\xi \to +0, \quad s\eta \to +\infty \qquad \text{per } \eta \to +\infty \text{ su } Y.$$

Studiando l'espressione $\Phi_2(s;\ \xi,\ \eta)$ data dalla (8.2), coll'osservare che

$$A_1(\xi) \leqq A_1(\eta) < A_2(\eta), \quad \underset{\xi<u<\eta}{\mathrm{Max}}\,(A(u)) \leqq \frac{1}{2} A(\eta) < -\frac{1}{2}(A_2(\eta) - 1)$$

$$s\int_\eta^{+\infty} e^{-su} A_1(u)du < s\int_\eta^{+\infty} e^{-su} A_2(u)du = s\int_\eta^{+\infty} e^{-su}\,\{A_2(\eta) + A_2(u) - A_2(\eta)\}\,du =$$

$$= A_2(\eta)e^{-s\eta} + s\int_\eta^{+\infty} e^{-su}\left(H_1 \log\frac{u}{\eta} + K_1\right)du <$$

$$< (A_2(\eta) + K_1)e^{-s\eta} + 2H_1 e^{-\frac{1}{2}s\eta}, \qquad (\text{per } s\eta \geqq 2)$$

dalla (8.2) ricaviamo per $\eta \to +\infty$ su Y:

$$\Phi_2(s;\ \xi,\ \eta) \leqq -\frac{1}{2}(A_2(\eta) - 1)(1 + o(1)) + A_2(\eta)o(1) +$$
$$+ (A_2(\eta) + K_1)o(1) + 2H_1 o(1)$$

e poichè $A_2(\eta) \to +\infty$, anche $\Phi_2(s;\ \xi,\ \eta) \to -\infty$. Dalla (8.4) ricaviamo

$$\varlimsup_{s\to+0} I(s) = -\infty,$$

contro l'ipotesi (O).

Il lemma di T. VIJAYARAGHAVAN risulta così dimostrato.

10. *Lemma* (J. E. LITTLEWOOD) (13). — *Sia* f(t) *funzione di* $\mathrm{t} \geqq 0$ *due volte derivabile e* $\alpha \geqq 0$. *Se per* $\mathrm{t} \to +0$ *è* $\mathrm{f(t)} = o(\mathrm{t}^{-\alpha})$, $\mathrm{f''(t)} < O(\mathrm{t}^{-\alpha-2})$, *allora risulta* $\mathrm{f'(t)} = o(\mathrm{t}^{-\alpha-1})$.

(13) Vedere J. E. LITTLEWOOD [13]. Per i n.i 10-13 vedere E. LANDAU [12], pp. 58, 59 e 61. Le brevissime dimostrazioni si riportano per comodità del lettore.

Per le ipotesi, prefissato ε, con $0<\varepsilon<\frac{1}{4}$, esistono due numeri K e $\tau=\tau(\varepsilon)$ pei quali è

$$f''(t)<Kt^{-\alpha-2}, \quad |f(t)|<\varepsilon t^{-\alpha} \qquad (\text{per } 0<t<\tau)$$

e anche

$$\frac{t}{2}<t\pm t\sqrt{\varepsilon}<\frac{3}{2}t<\tau \qquad \left(\text{per } 0<t<\frac{2}{3}\tau\right).$$

Applicando la formula di TAYLOR $(0<\theta<1)$ otteniamo

$$-2\varepsilon\left(\frac{t}{2}\right)^{-\alpha}<f(t\pm\sqrt{\varepsilon}t)-f(t)=\pm\sqrt{\varepsilon}tf'(t)+$$

$$+\frac{\varepsilon t^2}{2}f''(t\pm\theta\sqrt{\varepsilon}t)<\pm\sqrt{\varepsilon}tf'(t)+\frac{\varepsilon t^2}{2}K\left(\frac{t}{2}\right)^{-\alpha-2}$$

da cui

$$\mp f'(t)<K_1\sqrt{\varepsilon}t^{-\alpha-1}, \quad \text{cioè} \quad |f'(t)|<K_1\sqrt{\varepsilon}t^{-\alpha-1}$$

d'onde l'asserto.

11. *Lemma* (J. E. LITTLEWOOD). — *Sia* $\varphi(t)$ *funzione di* $t\geqq 0$ *con derivata di qualunque ordine. Se per* $t\to+0$ *è* $\varphi(t)=o(t^{-1})$ *e* $\varphi^{(\nu)}(t)=O(t^{-1-\nu})$ $(\nu=0, 1, 2, 3,...)$, *allora risulta* $\varphi^{(\nu)}(t)=o(t^{-1-\nu})$.

Si procede per induzione basandoci sul lemma precedente. L'ipotesi ci dice che l'affermazione è vera per $\nu=0$; posto $f(t)=\varphi^{(\nu)}(t)$, $\alpha=1+\nu$ e applicando il n° 10 si ottiene $\varphi^{(\nu+1)}(t)=o(t^{-2-\nu})$.

12. *Lemma* (J. E. LITTLEWOOD). — *L'integrale* $\int_0^{+\infty}e^{-su}A(u)du$ *sia convergente per ogni* $s>0$; *dalle due relazioni*

$$A(x)=O(1) \text{ per } x\to+\infty, \quad \varphi(s)=\int_0^{+\infty}e^{-su}A(u)du=o(s^{-1}) \text{ per } s\to+0$$

segue [14]

$$\varphi^{(\nu)}(s)=(-1)^{\nu}\int_0^{+\infty}u^{\nu}e^{-su}A(u)du=o(s^{-1-\nu}), \qquad (\nu=0, 1, 2,...).$$

---

[14] Notiamo esplicitamente: *a)* Fissati $s>0$ e α qualunque, la funzione $u^{\alpha}e^{-\frac{1}{2}su}$ è funzione di u decrescente per $u\geq v_0$, con v_0 conveniente; si conclude che converge anche l'integrale $\psi(s)=\int_0^{+\infty}u^{\alpha}e^{-su}A(u)du$. *b)* Risulta $\psi'(s)=-\int_0^{+\infty}u^{\alpha+1}e^{-su}A(u)du$; infatti per la for-

Infatti

$$\varphi^{(\nu)}(s) = (-1)^\nu \int_0^{+\infty} u^\nu e^{-su} A(u)du = (-1)^\nu s^{-1-\nu} \int_0^{+\infty} v^\nu e^{-v} A\left(\frac{v}{s}\right) dv =$$

$$= (-1)^\nu s^{-1-\nu} O(1) \int_0^{+\infty} v^\nu e^{-v} dv = O(s^{-1-\nu})$$

e dal lemma del n° 11 segue l'asserto. Dunque risulta

$$\int_0^{+\infty} v^\nu e^{-v} A\left(\frac{v}{s}\right) dv \to 0 \qquad \text{per } s \to +0.$$

13. *Lemma. — Per* $\nu \geqq 1$ *intero,* $\rho > 0$, $\tau > 0$, $\varepsilon = \nu^{-\frac{1}{3}}$ *poniamo*

$$P(\nu) = \int_0^{+\infty} y^\nu e^{-y} dy, \quad Q(\nu, \tau) = \rho \int_0^{\nu(1-\varepsilon)} y^\nu e^{-y} dy + \tau \int_{\nu(1-\varepsilon)}^{\nu(1+\varepsilon)} \ldots + \rho \int_{\nu(1+\varepsilon)}^{+\infty} \ldots .$$

Allora è

$$Q(\nu, \tau) < (\tau + o(1)) P(\nu) \qquad \text{per } \nu \to +\infty.$$

---

mula di TAYLOR $(0 < \theta < 1)$ abbiamo

$$\Delta(s, h) = \frac{\psi(s+h) - \psi(s)}{h} + \int_0^{+\infty} u^{\alpha+1} e^{-su} A(u) du = -\int_0^{v} u^{\alpha+1} \{ e^{-(s+\theta h)u} - e^{-su} \} A(u) du - \int_v^{+\infty} \ldots .$$

Applicando il secondo teorema della media per $|t| \leq \frac{s}{2}$ abbiamo $(V > v)$

$$\left| \int_v^{+\infty} u^{\alpha+1} e^{-(s+t)u} A(u) du \right| = \left| e^{-\left(\frac{s}{2}+t\right)v} \int_v^{V} u^{\alpha+1} e^{-\frac{s}{2}u} A(u) du \right| \leqq \left| \int_v^{V} u^{\alpha+1} e^{-\frac{s}{2}u} A(u) du \right| ;$$

per l'osservazione *a)* prefissato $\varepsilon > 0$ arbitrariamente si può determinare v_0 tale che per $V > v \geq v_0$ il modulo di questo ultimo integrale sia $< \frac{\varepsilon}{3}$, e allora per qualunque $|t| \leqq \frac{s}{2}$ risulta

$$\left| \int_v^{+\infty} u^{\alpha+1} e^{-(s+t)u} A(u) du \right| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$$

e fissato v, si può determinare un numero $h_v \leq \frac{s}{2}$ tale che per ogni $h \leq h_v$ e ogni $0 < \theta < 1$ si abbia

$$\left| \int_0^{v} u^{\alpha+1} \{ e^{-(s+\theta h)u} - e^{-su} \} A(u) du \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si conclude $\Delta(s, h) < \varepsilon$ per h sufficientemente piccolo, d'onde l'asserto.

Infatti

$$\tau \int_{\nu(1-\varepsilon)}^{\nu(1+\varepsilon)} y^\nu e^{-y} dy < \tau P(\nu)$$

$$\int_0^{\nu(1-\varepsilon)} y^\nu e^{-y} dy = (1-\varepsilon)^{1+\nu} \int_0^\nu z^\nu e^{-z(1-\varepsilon)} dz \leqq \{ (1-\varepsilon) e^{\varepsilon} \}^\nu P(\nu)$$

$$\int_{\nu(1+\varepsilon)}^{+\infty} y^\nu e^{-y} dy = (1+\varepsilon)^{1+\nu} \int_\nu^{+\infty} z^\nu e^{-z(1+\varepsilon)} dz \leqq 2 \{ (1+\varepsilon) e^{-\varepsilon} \}^\nu P(\nu)$$

$$\{ (1 \mp \varepsilon) e^{\pm \varepsilon} \}^\nu = \exp \left\{ \left(-\frac{\varepsilon^2}{2} + O(\varepsilon^3) \right) \varepsilon^{-3} \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon} + O(1) \right\} = o(1).$$

D' onde l' asserto.

14. Dimostrazione del Teorema A). — Procediamo per assurdo: Sia x_1, x_2, $x_3, \ldots$ una successione crescente e divergente a $+\infty$, contenuta in E, tale che si abbia

$$A(x_n) > T^+(E) + 3h \qquad (h > 0). \tag{14.1}$$

Per la definizione dello scarto Tauberiano superiore $T^+(E)$ è possibile determinare due numeri n_0 e ω positivi in guisa che per ogni $n \geqq n_0$ si abbia

$$\operatorname{Min} \{ \max_{x_n \leqq y \leqq x_n(1+\omega)} (A(x_n) - A(y)), \max_{x_n(1-\omega) < y < x_n} (A(x_n) \quad A(y)) \} < T^+(E) + h.$$

Dei due Max chiusi entro parentesi $\{ \}$ uno almeno, per esempio il primo, soddisfa per infiniti valori di n a questa disuguaglianza; si può dunque estrarre dalla successione x_1, x_2, $x_3, \ldots$ una successione parziale, che per semplicità seguitiamo a denotare x_1, x_2, $x_3, \ldots$, in guisa da avere

$$\max_{x_n \leqq y \leqq x_n(1+\omega)} (A(x_n) - A(y)) < T^+(E) + h, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{14.2}$$

Per il lemma di T. VIJAYARAGHAVAN si può fissare $\rho > 0$ abbastanza grande in guisa da avere $2 | A(x) | < \rho$ per $x \geqq 0$; fissato ρ andiamo a scegliere, in base al lemma del n° 13, ν_0 ($\geqq 2$) abbastanza grande in guisa da avere per ogni intero $\nu \geqq \nu_0$

$$Q(\nu, T^+(E) + h) < (T^+(E) + 2h) P(\nu) \tag{14.3}$$

e in ogni caso assumiamo

$$\nu > \left(\frac{2+\omega}{\omega} \right)^3, \quad \varepsilon = \nu^{-\frac{1}{3}}, \quad s \leqq \frac{\nu(1-\varepsilon)}{x_1}$$

in guisa da avere

$$x_1 \leqq \frac{\nu(1-\varepsilon)}{s} < \frac{\nu(1+\varepsilon)}{s} < \frac{\nu(1-\varepsilon)}{s}(1+\omega).$$

Scegliamo adesso s_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ al modo seguente $s_n x_n = \nu(1-\varepsilon)$, in guisa che abbiamo

$$x_1 \leqq x_n = \frac{\nu(1-\varepsilon)}{s_n} < \frac{\nu(1+\varepsilon)}{s_n} < \frac{\nu(1-\varepsilon)}{s_n}(1+\omega) = x_n(1+\omega).$$

Quando $x_n \leqq \dfrac{t}{s_n} \leqq x_n(1+\omega)$ risulta, per (14.2)

$$A(x_n) - A\left(\frac{t}{s_n}\right) < T^+(E) + h,$$

e quindi pel lemma del n° 13, essendo $2\,|A(x)| < \rho$, e per (14.3), abbiamo

$$\int_0^{+\infty} t^\nu e^{-t}\left\{A(x_n) - A\left(\frac{t}{s_n}\right)\right\} dt < Q(\nu,\ T^+(E)+h) < (T^+(E)+2h)P(\nu).$$

D'altronde è

$$\int_0^{+\infty} t^\nu e^{-t}\left\{A(x_n) - A\left(\frac{t}{s_n}\right)\right\} dt = A(x_n)P(\nu) - \int_0^{+\infty} t^\nu e^{-t} A\left(\frac{t}{s_n}\right) dt$$

e si ricava

$$A(x_n) < T^+(E) + 2h + \frac{1}{P(\nu)}\int_0^{+\infty} t^\nu e^{-t} A\left(\frac{t}{s_n}\right) dt.$$

Per $n \to +\infty$ è $s_n \to +0$, quindi per il lemma del n° 12

$$\int_0^{+\infty} t^\nu e^{-t} A\left(\frac{t}{s_n}\right) dt \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty$$

e questo porta

$$A(x_n) < T^+(E) + 2h + o(1) \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Contro l'ipotesi (14.1).

In modo analogo si procederebbe se fosse necessario usare una successione $x_1, x_2, x_3, \ldots$ per cui $\displaystyle\operatorname*{Max}_{x_n(1-\omega)\leq y \leq x_n} (A(x_n) - A(y)) < T^+(E) + h$.

Si conclude $\displaystyle\overline{\lim_{x\to+\infty,\,\text{su}\,E}} A(x) \leqq T^+(E)$.

Analogamente si procede per dimostrare che per ogni successione $x_1, x_2, x_3, \ldots$ contenuta in E, con $x_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$, risulta $A(x_n) \geqq T^-(E) + o(1)$.

Il Teorema A) risulta così dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

1 - K. ANANDA RAU, *On the converse of Abel's theorem*, « Journal London Math. Soc. », vol. 3 (1928), pp. 200-205.

2 - L. FEJÉR, *Ueber die Konvergenz der Potenzreihe an der Konvergenzgrenze...*, « Festschrift für H. A. Schwarz » (1914), pp. 42-53.

3 - G. H. HARDY - J. E. LITTLEWOOD, *Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive*, « Proceedings London Math. Soc. », s. 2, vol. 13 (1914), pp. 174-191: vedi p. 188.

4 - —— *Some theorems concerning Dirichlet's series*, « Messenger of Math. », s. 2, vol. 43 (1914), pp. 134-147: vedi pp. 136-137.

5 - —— *A further note on the converse of Abel's theorem*, « Proceedings London Math. Soc. », s. 2, vol. 25 (1926), pp. 219-236.

6 - —— *Notes on the theory of series (IV): On the strong summability of Fourier series*, « Proceedings London Math. Soc. », s. 2, vol. 26 (1927), pp. 273-286.

7 - J. KARAMATA, *Ueber die O-Inversionssätze der Limitierungsverfahren*. « Mathematische Zeitschrift », Bd. 37 (1933), pp. 582-588.

8 - E. KOGBETLIANTZ, *Sommation des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques*, « Mémorial des Sciences Mathématiques », fasc.° 51, Paris 1931; vedi pp. 36-45 e pp. 54-55.

9 - E. LANDAU, *Ueber die Konvergenz einiger Klassen von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes*, « Monatshefte für Mathematik u. Physik », Bd. 18 (1907), pp. 8-28.

10 - —— *Ueber die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer*, « Prace matematyczno-fizyczne », t. 21 (1910), pp. 97-177.

11 - —— *Ueber einen Satz des Herrn Littlewood*, « Rendiconti Circolo Mat. Palermo », t. 35 (1913), pp. 265-276.

12 - —— *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, Berlin, 1929, 2 Auflage; vedi pp. 57-62.

13 - J. E. LITTLEWOOD, *The converse of Abel's theorem on power series*, « Proceedings London Math. Soc. », s. 2. vol. 9 (1911), pp. 434-448.

14 - L. NEDER, *Ueber Taubersche Bedingungen*, « Proceedings London Math. Soc. », s. 2, vol. 25 (1926), pp. 219-236.

15 - R. SCHMIDT, *Ueber divergente Folgen und lineare Mittelbindungen*, « Mathematische Zeitschrift », Bd. 22 (1925), pp. 89-152.

16 - W. SCHNEE, *Ueber Dirichlet'sche Reihen*, « Rendiconti Circolo Mat. Palermo », t. 27 (1909), pp. 87-116; vedi pp. 100-105.

17 - O. SZÀSZ, *Verallgemeinerung eines Littlewoodschen Satzes über Potenzreihen*, « Journal London Math. Soc. », vol. 3 (1928), pp. 254-262.

18 - —— *Ueber Dirichletsche Reihen an der Konvergenzgrenze*, « Atti Congresso internazionale Matematici Bologna 1928 », vol. 3, pp. 269-276.

19 - —— *Verallgemeinerung und neuer Beweis einiger Sätze Tauberscher Art,* « Sitzungsberichte Bayerischen Akad. Wiss. München », 1929, pp. 325-340.

20 - A. Tauber, *Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen,* « Monatshefte für Mathematik u. Physik ». Bd. 8 (1897), pp. 273-277.

21 - T. Vijayaraghavan, *A Tauberian theorem,* « Journal London Math. Soc. », vol. 1 (1926), pp. 113-120.

22 - N. Wiener, *Tauberian theorems,* « Annals of Mathematics », s. 2, vol. 33 (1932), pp. 1-100: per la bibliografia vedi pp. 95-100.

23 - A. Zygmund, *On lacunary trigonometric series,* « Transactions American Math. Soc. », vol. 34 (1932), pp. 435-446; vedi p. 440.

Nota. - Per una bibliografia completa fino al 1932 sui teoremi Tauberiani vedi N. Wiener [22].

Sur les équations aux différences finies

par M. GHERMANESCO (à Bucarest).

INTRODUCTION

L'objet de ce petit Mémoire est la recherche de la solution *principale*, au sens de M. NÖRLUND, de l'équation aux différences finies

$$\text{(A)} \qquad \overset{x}{\underset{p}{E}} F = \sum_{0}^{p} A_i F(x + \omega_i) = g(x),$$

dans laquelle $g(x)$ est une fonction entière d'un type bien déterminé et que nous préciserons dans la suite, tandis que les A_i, ω_i sont des constantes, pouvant d'ailleurs satisfaire à certaines conditions qui seront précisées aussi.

A notre connaissance, c'est M. PINCHERLE qui, le premier (1), s'est occupé de cette équation, en rattachant ce problème à un autre, plus général, concernant l'inversion des intégrales définies.

Dans les derniers temps, M. S. BOCHNER a repris (2) l'équation fonctionnelle (A), avec des hypothèses plus générales, en lui applicant les méthodes de M. NÖRLUND.

Plus récemment, M. R. D. CARMICHAEL a rencontré (3) l'équation fonctionnelle (A) à l'occasion de la résolution de certains systèmes linéaires d'équations aux différences, à coefficients constants.

Je me suis occupé moi-même de l'équation (A), en examinant par des méthodes variées (4) les diverses hypothèses faites sur la fonction donnée $g(x)$.

Le présent Mémoire a pour point de départ celui de M. PINCHERLE, dont je fais un précieux usage et que je ne connaissais pas lors de la publication de mon Mémoire déjà cité.

---

(1) S. PINCHERLE, « Memorie della R. Accad. delle Sc. dell'Istituto di Bologna », 1888, S. IV, t. IX, pp. 45-71; ce Mémoire a été reproduit dans les « Acta mathematica », 1926 t. 48, pp. 279-304.

(2) S. BOCHNER, « Acta mathematica », 1928, t. 51, pp. 1-20.

(3) R. D. CARMICHAEL, « Transactions of the American Mathematical Society », 1933 vol. 35, n.° 1, pp. 1-28.

(4) M. GHERMANESCO, « Acta mathematica », 1933, t. 62. pp. 239-287.

Il est divisé en deux parties: la première traite des fonctions entières, desquelles j'extrais quelques classes particulières remarquables et j'y résous en partie le problème du développement de telles fonctions en série d'exponentielles ou d'autres fonctions entières, convenablement choisies [1]. J'ajoute aussi quelques mots sur les recherches étendues faites sur des questions analogues par M. P. FLAMANT, dont j'ai pris connaissances dans les derniers moments.

Les résultats obtenus dans cette première partie de mon travail ne sont par complets: j'en ai esquissé un commencement, qui m'est nécessaire pour le but même de mes recherches; on peut néanmoius les étendre et en former une étude indépendante de toute question se rattachant à la théorie des équations aux différences finies.

La deuxième partie de ce travail est consacrée à la résolution de l'équation fonctionnelle (A). dans les cas précis qui ont fait l'objet de l'étude de la première partie.

J'y rappelle les solutions données à l'aide des polynomes $G_n^h(x)$ et des fonctions $\mathcal{G}_n^k(x)$ dans mon précédent mémoire, mais je donne aussi une méthode *nouvelle* de résolution, déduite des considérations faites dans la première partie de mon travail.

Il est vrai que mon procédé s'applique à une classe restreinte de fonctions entières, mais, comme je n'ai pas la prétention d'y épuiser la question, il est à espérer que mon travail aura le don d'en inspirer d'autres, tendant à étendre mes résultats aux cas dont je ne m'occupe pas dans le présent travail.

Pour éviter des répétitions inutiles, je désignerais dans ce qui suit par [*P*] le Mémoire cité de M. PINCHERLE, par [*C*] celui de M. R. D. CARMICHAEL, par]*B*] celui de M. BOCHNER et par [*G*] le mien.

I. Classification et développement des fonctions entières du type exponentiel.

1. Fonctions du type exponentiel $g(p)$. — D'après M. G. PÒLYA [2], une fonction entière $g(x)$ est dite du *type exponentiel* lorsque on a

$$(1) \qquad |g(x)| < Ae^{a|x|},$$

[1] Un premier essai sur cette question a été résumé dans une Note des « Comptes rendus », Paris, 1934, t. 198, pp. 1293-95.

[2] G. PÒLYA, « Math. Annalen », Bd. 89, 1923, p. 179 et suiv.

dans laquelle A, a sont des constantes positives. Cette notion, un peu large, se rencontre aussi dans quelques travaux de M. E. HILB [1], qui s'occupe des fonctions satisfaisant à l'égalité

$$\lim_{n=\infty} |g^{(n)}(x)|^{\frac{1}{n}} = q > 0, \tag{2}$$

quel que soit x.

C'est M. PINCHERLE qui, le premier, a rencontré de telles fonctions [*P*], dont il a fait usage pour la résolution de l'équation fonctionnelle (A).

Je fais la remarque que les relations (1) et (2) définissent, séparément, la fonction $g(x)$ d'une manière assez large, sans y avoir d'ailleurs identité parfaite dans les deux définitions, mais, tout au plus, des parties communes, rentrant l'une dans l'autre. En effet, remarquons d'abord qu'il suffit d'avoir

$$\lim_{n=\infty} |g^{(n)}(0)|^{\frac{1}{n}} = q \tag{3}$$

pour pouvoir affirmer l'existence de (2), quel que soit x car, en désignant par $M(r, g)$ le maximum du module $|g(x)|$ pour $|x| = r$, (3) représente la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r, g)}{r} = q;$$

comme cela entraine

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M[r, g(x_0 + x)]}{r} = q,$$

(3) entraine (2), quel que soit x. Cela étant, on déduit de (3) d'une façon générale

$$|g(x)| < e^{Q|x|} \tag{4}$$

avec $Q > q$, à partir d'une certaine valeur de $|x| > X_0$; comme pour $|x| \leq X_0$ on a $|g(x)| < A$, $A > 1$, on a partout

$$|g(x)| < Ae^{Q|x|},$$

ce qui ne dit pas grande chose. On doit alors préciser le nombre Q, ainsi que a, qui figure dans la définition de M. PÒLYA, par rapport au nombre q, figurant dans la relation (2) ou (3).

J'ai été amené ainsi à une définition plus restreinte, obtenue en combinant les relations (3) et (4).

---

[1] E. HILB, Id., Bd. 82, 1920, pp. 1-39; Bd. 85, 1922, pp. 89-98.

Je dirai qu'une fonction entière $g(x)$ est du *type exponentiel* q lorsqu'on a la relation (3) et la suivante

$$(5) \qquad |g(x)| < Ae^{q|x|} .$$

Plus généralement, je dirai que la fonction entière $g(x)$ est du type exponentiel $q(p)$ [1], lorsque, à côté de (3), on aura

$$(6) \qquad |g(x)| < [P_p(|x|)]e^{q|x|}$$

avec

$$|P_p|x|] = A_0|x|^p + A_1|x|^{p-1} + \dots + A_p \qquad A_i > 0$$

la relation (6) pouvant même être remplacée par la suivante, d'une expression plus simple

$$(7) \qquad |g(x)| < A[|x|^p + 1]e^{q|x|},$$

p étant le plus petit entier positif, susceptible de fournir de telles inégalités lorsque la fonction $g(x)$ est donnée.

Il est évident que, comme (6) ou (7) sont plus particulières que (4), elles ne peuvent pas être des conséquences nécessaires de (3), de sorte que (3) et (6) ou (7) donnent une classe bien déterminée de fonctions entières [2].

Pour finir, je dois citer une autre définition des fonctions du type exponentiel, due à M. R. D. CARMICHAEL [*C*], qui est de beaucoup plus large que celle donnée plus haut.

2. **Fonctions du type exponentiel $q(p, \rho)$.** — Pour les fonctions $g(x)$, définies précédemment, on a supposé essentiellement $q > 0$. Qu'arrive-t-il lorsque $q = 0$? Il est évident qu'on a alors affaire à une autre classe de fonctions, que je définirai dans ce qui suit. Si $q = 0$, il s'ensuit qu'il peut y avoir un nombre positif $\rho > 1$, tel que

$$(8) \qquad \lim \sqrt[n]{(n!)^{\rho-1}|g^{(n)}(0)|} = q > 0.$$

Tel est le cas des fonctions entières

$$(9) \qquad J_\rho(x) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{(n!)^\rho}; \qquad \rho > 1$$

on a ici $q = 1$. Étant donnée l'expression de ces fonctions, nous les prendrons comme type de comparaison, à la place de l'exponentielle, en définis-

[1] Dans una Note citée des « C. R. », j'avais désigné ce type par $q(r^p)$.

[2] Je dois à l'amabilité de M. G. VALIRON de précieuses suggestions, destinées à simplifier la rédaction de ce paragraphe, tout en le rendant plus rigoureux.

sant comme fonction du *type exponentiel* $q(p, \rho)$, ces fonctions qui satisfont à (8) et à l'inégalité suivante

(10) $$|g(x)| < [P_p|x|]J_\rho(q|x|),$$

$[P_p|x|]$ ayant la même signification que dans (6), inégalité qu'on pourra aussi remplacer par

(11) $$|g(x)| < A[|x|^p + 1]J_\rho(q|x|)$$

analogue à (7).

Pour de telles fonctions, il sera préférable de leur atribuer le développement en série suivant

(12) $$g(x) = \sum_0^\infty g_n \frac{x^n}{(n!)^\rho},$$

que nous utiliserons exclusivement dans la suite.

Un cas qui pourrait faire l'objet d'une étude à part et qui, joint aux précédents, embrasserait toutes les fonctions entières, serait celui aù $q = \infty$.

Après la publication de ma Note citée dans les «C. R.», j'ai eu l'occasion de prendre connaissance, grâce à l'obligeance de leur auteur, des travaux (¹) de M. P. FLAMANT, dont je veux signaler, en quelques mots, la portée et le lien avec le nôtre.

M. P. FLAMANT construit une théorie des fonctions entières, ou plutôt il étudie la croissance des fonctions entières, en prenant pour type de croissance une fonction entière, toujours croissante, bien déterminée $t(r)$, avec $r = |x|$. Les applications que M. FLAMANT fait aux transmutations linéaires des fonctions et surtout à une certaine opération simple (la différence d'une fonction) sont d'un grand intérét pour la théorie des équations aux différences finies qui pourra en tirer beaucoup d'avantages.

Les points de départ sont communs dans nos travaux parceque, il est évident qu'en fait nous étudions aussi la fonction entière $g(x)$ par rapport à la fonction de croissance e^{ax}, respectivement $J_\rho(ax)$. Bien entendu, nous envisageons seulement ces deux types particuliers de fonctions de croissance et ce qui va suivre diffère en tout des recherches de M. FLAMANT.

M. FLAMANT étudie en particulier le type $t(r) = e^{ar^b}$, visiblement lié au notre, d'où il en déduit deux types de fonctions entières: le type exponentiel ($b > 1$) et le type subexponentiel ($b \leq 1$). Les conditions imposées à ce dernier sont les suivantes:

1°) $$t(0) \geq 1$$

(¹) P. FLAMANT, *a*) « Bull. des Sc. Math. », t. LII, 128; *b*) « Rendiconti Palermo », t. LIV, 1930.

et

$$2^{\circ}) \qquad t(r_1 + r_2) \leq t(r_1)t(r_2), \qquad r_1 \geq 0,\ r_2 \geq 0$$

qui exige que $t'(r):t(r)$ soit non-croissante, exemple fourni par $t(r) = e^{ar^b}$ avec $b \leq 1$.

Il est facile de voir que les fonctions $J_\rho(x)$, considérées précédémment, jouissent de ces propriétés et peuvent servir comme types de croissance pour les fonctions que M. FLAMANT appelle du type *subexponentiel* et qui ont, de cette manière, une parenté assez étroite avec celles que nous avons englobé dans le type $q(p, \rho)$, sans toutefois y avoir identité entre elles.

De plus, dans le cas particulier $t(r) = e^{ar}$, on peut compléter certains résultats de M. FLAMANT en ce qui concerne le type *minimum* de croissance, En effet, on a d'après M. FLAMANT

$$\frac{r^n}{e^{ar}} < \left(\frac{n}{ea}\right)^n.$$

Supposons donc que l'on ait

$$g(r) = \sum_0^{\infty} g_n \frac{r^n}{n!};$$

on en déduit

$$\frac{g(r)}{e^{ar}} < \sum_0^{\infty} \frac{|g_n|}{n!} \left(\frac{r^n}{e^{ar}}\right) < \sum_0^{\infty} \frac{|g_n|}{n!} \left(\frac{n}{ea}\right)^n.$$

Mais, vu la formule de STIRLING

$$n! \backsim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

on peut écrire

$$\frac{g(r)}{e^{ar}} < \sum_0^{\infty} \frac{|g_n|}{a^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

La série du second membre converge lorsque

$$\lim |g_n|^{\frac{1}{n}} < a$$

et, d'après (3), on a $q < a$, ce qui montre que *parmi les fonctions* $t(r) = e^{ar}$ *qu'on peut prendre pour type de croissance lorsqu'on veut étudier une fonction entière* $g(r)$, *la fonction* $t_0(r) = e^{qr}$ *en fournit le type minimum.*

3. La fonction adjointe de M. Pincherle. — Etant donnée une fonction entière $g(x)$ par son développement en série

$$g(x) = \sum_0^{\infty} g_n \frac{x^n}{n!}, \tag{13}$$

formons la fonction

$$\mathfrak{F}(g) = \sum_0^\infty \frac{g_n}{z^{n+1}}. \tag{14}$$

On rencontre des fonctions de cette forme dans la théorie des séries assymptotiques de POINCARÉ et STIELTJES ou dans celle des séries divergentes de M. BOREL. C'est à tort que M. G. PÒLYA la désigne (loc. cit., 1, p. 184) sous le nom de *transformée de Borel* de la fonction entière $g(x)$, vu que les travaux de M. BOREL sur les séries divergentes sont postérieurs au mémoire [P] cité de M. PINCHERLE. Et c'est en effet M. PINCHERLE qui, le premier, a introduit cette fonction en lui donnant quelques propriétés, entre autres la relation très remarquable

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{zx}\mathfrak{F}(g)dz,$$

C étant un cercle avec l'origine comme centre et contenant les points singuliers de $\mathfrak{F}(g)$. C'est donc avec plus de raison que je désignerai cette fonction sous le nom de *fonction adjointe de Pincherle* d'une fonction entière, en la notant avec $\mathfrak{F}(g)$.

L'importance de cette fonction a été mise en évidence par M. BOREL dans la théorie des séries divergentes, quoique en l'écrivant un peu autrement et en ignorant le mémoire de M. PINCHERLE; récemment elle a été employée par M. PÒLYA (loc. cit., 1) et surtout par M. CARMICHAEL [C]. Elle va aussi jouer un rôle important dans le présent travail et j'aurai l'occasion de montrer l'étroite liaison entre la nature des singularités de $\mathfrak{F}(g)$ et certaines propriétés de la fonction entière génératrice $g(x)$.

4. **Fonctions entières (m) ou (s).** — Lorsque la fonction entière $g(x)$ est du type exponentiel $q(p)$, on a la relation (3)

$$\lim_{n=\infty} |g_n|^{\frac{1}{n}} = q$$

ce qui montre que le développement (14) de la fonction $\mathfrak{F}(g)$ correspondante existe pour $|z| > q$ ou, en d'autres termes, les singularités de la fonction $\mathfrak{F}(g)$ se trouvent à l'intérieur du cerle $|z| = q$. On voit d'ailleurs que la fonction $\mathfrak{F}(g)$ n'existe que pour les fonctions du type exponentiel, c'est à dire, pour celles qui satisfont à l'une des relations (3) ou (8).

Suivant la nature de la fonction entière $g(x)$, on trouve que les singularités de $\mathfrak{F}(g)$ sont aussi d'une nature bien déterminée. Ainsi, par exemple, pour les fonctions du type exponentiel $q(p, \rho)$ avec $\rho > 1$, on a

$$\mathcal{S}(g) = \sum_0^\infty \frac{g_n}{(n\,!)^{\rho-1} z^{n+1}},$$

qui montre que $\mathcal{S}(g)$ est entière, du type $(\rho - 1)$ en $\frac{1}{z}$, dont l'origine est un point singulier essentiel, l'unique singularité d'ailleurs.

Lorsque $g(x)$ est de la forme

$$g(x) = A_1 e^{\xi_1 x} + A_2 e^{\xi_2 x} + \dots + A_n e^{\xi_n x}$$

on a

$$\mathcal{S}(g) = \sum_1^\infty \frac{A_i}{z - \xi_i},$$

c'est à dire, une fraction rationnelle. Ce cas a été d'ailleurs étudié par M. PINCHERLE [*P*].

Un exemple de singularité logarithmique est fourni par la fonction entière

$$g(x) = \int_1^x \frac{e^x - 1}{x}\, dx;$$

on a ici

$$\mathcal{S}(g) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots = -\operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$

Nous allons distinguer les fonctions entières $g(x)$ suivant la nature des singularités de l'adjointe $\mathcal{S}(g)$. Nous dirons que $g(x)$ est entière (m) lorsque $\mathcal{S}(g)$ est méromorphe ou se réduit à une fraction rationnelle, et entière (s) lorsque $\mathcal{S}(g)$ possède d'autres singularités que des pôles. Il est évident que lorsque $\mathcal{S}(g)$ est méromorphe, elle admet l'origine pour point singulier essentiel, qui est limite de pôles, vu qu'ils sont, d'après (3), à l'intérieur du cercle $|z| = q$. Dans la même hypothèse, $\mathcal{S}(g)$ pourra s'exprimer par le quotient de deux fonctions entières en $\frac{1}{z}$ ou *quasi-entières*, d'après la terminologie de ED. MAILLET [1].

5. **Développement en série d'exponentielles.** — Après avoir défini les fonctions du type exponentiel, nous abordons le problème de leur développement en série d'exponentielles. Nous verrons que la résolution de ce problème est étroitement liée à la nature des singularités de $\mathcal{S}(g)$ et que le

(1) ED. MAILLET, « Journal de Jordan », 1902, fasc. IV.

nombre p qui figure dans (6) joue aussi un rôle important. Nous allons commencer par l'étude de quelques développements de forme particulière pour arriver ensuite au développement plus général possible.

6. **Développement en série de $e^{\xi x}$.** — Considérons une fonction entière $g(x)$, ayant le développement (13) et cherchons les conditions dans lesquelles elle admet aussi le suivant

$$g(x) = \sum_1^\infty a_n e^{\xi_n x} \tag{15}$$

a_n, ξ_n étant des constantes à déterminer. Remarquons, puisqu'il s'agit de fonctions du type exponentiel, que les ξ_n sont bornés, $\xi_n < q$, car l'hypothèse contraire est incompatible avec (6) ou (7), ce qui fait que (15) ne constitue en aucune façon une série de DIRICHLET. Comme on a

$$e^{\xi x} = 1 + \frac{\xi x}{1!} + \frac{\xi^2 x^2}{2!} + \dots,$$

l'identification des coefficients des mêmes puissances de x dans (13) et (15) nous conduit, pour la détermination des inconnues a_n, ξ_n, au système suivant d'équations en nombre infini

$$\begin{array}{l} a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = g_0, \\ a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_n\xi_n + \dots = g_1, \\ a_1\xi_1^2 + a_2\xi_2^2 + \dots + a_n\xi_n^2 + \dots = g_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1\xi_1^k + a_2\xi_2^k + \dots + a_n\xi_n^k + \dots = g_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \tag{16}$$

Appelons *solution régulière* du système (16), tout système de nombres bornés ξ_n, réels ou complexes, rendant absolument convergentes les séries des premiers membres et satisfaisant à ce système d'équations en nombre infini. Il est évident qu'un tel système ne saurait avoir toujours une solution mais, lorsqu'il en a, elle est unique.

En effet, soit C_R un cercle de rayon R, avec l'origine comme centre, qui contient tous les ξ_n. Multiplions la k^e équation du système (16) par z^{-k-1} et ajoutons les équations ainsi obtenues, en donnant à k les valeurs successives 0, 1, 2,...; il vient, pour $|z| > R$;

$$a_k \sum_0^\infty \frac{\xi_k^n}{z^{n+1}} = \frac{a_k}{z} \frac{1}{1 - \frac{\xi_k}{z}} = \frac{a_k}{z - \xi_k}$$

donc

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{z - \xi_n} = \mathcal{S}(g), \tag{17}$$

$\mathcal{S}(g)$ étant justement la fonction adjointe de PINCHERLE, correspondant à la fonction entière $g(x)$, donnée par le développement (14).

Nous avons là deux fonctions analytiques, égales pour $|z| > R$. Elles seront donc égales pour toutes les valeurs de z, rendant uniformément convergentes les séries des deux membres de (17).

En effet, supposons qu'elle admette les singularités ξ_n', autres que les ξ_n, ce qui revient d'ailleurs à supposer que le système (16) admet deux solutions; prenons un cercle C_r, avec l'origine comme centre et de rayon $r < R$, tel qu'il ne passe par aucun des points ξ_n ou ξ_n' et soient $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_k$, $\xi'_1, \xi'_2, \dots \xi'_{k'}$ tous les ξ_n et ξ_n' de module $> r$. Retranchons du domaine $|z| > r$ tous les cercles de rayon ε, ayant pour centres les points $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_k$, $\xi'_1, \xi'_2, \dots \xi'_{k'}$; dans le domaine restant, les deux membres de (12) convergent uniformément car $|z - \xi_\mu|$ et $|z - \xi'_{\mu'}|$ sont $> \varepsilon$.

Comme ε est arbitrairement petit, il en résulte que, pour que l'égalité (17) ait lieu, il faut que les ξ_k, $\xi'_{k'}$ coincident deux à deux. En faisant varier $r < R$, on arrive à la même conclusion pour tous les points ξ, ξ' des deux membres de l'égalité (17).

Ce raisonnement prouve à la fois l'unicité de la solution du système (16), lorsqu'elle existe.

La fonction $g(x)$ étant donnée, on connait aussi $\mathcal{S}(g)$ et, par suite, ses singularités [1], qui sont les valeurs des inconnues ξ_n; lorsque les ξ_n sont des pôles, le développement de $\mathcal{S}(g)$, d'après le théorème de MITTAG-LEFFLER, nous fait connaître ensuite les valeurs des constantes a_n. Il est évident que, pour que le développement (15) existe, il faut que les pôles de $\mathcal{S}(g)$ soient simples.

Lorsque $\mathcal{S}(g)$ se réduit à une fraction rationnelle, le développement (15) contient un nombre fini de termes et on retrouve les fonction $g(x)$ qui ont été considérées en particulier par M. PINCHERLE [*P*].

Voici quelques exemples simples relativement à ces considérations:

1.° $\mathcal{S}(g) = \dfrac{1}{z - 1}$ donne $g(x) = e^x$.

2.° $\mathcal{S}(g) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$ donne $g(x) = \sin x$.

---

(1) Cela dans les cas simples, du moins: dans le cas général il faut employer les méthodes de J. HADAMARD.

3.° $\mathfrak{G}(g) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ donne $g(x) = e^{2x} - e^{x}$.

4.° $\mathfrak{G}(g) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{(z^2-1)z^2} + \dfrac{1}{(z^3-1)z^3} + \dots$.

Cette fonction admet les pôles simples en nombre infini $\xi_n = 2^{-n}$, ayant $z = 0$ pour point limite, qui est ainsi un point singulier essentiel; la fonction $g(x)$ correspondante est

$$g(x) = 1 + \frac{x}{1!\,(2^2-1)} + \frac{x^2}{2!\,(2^3-1)} + \dots$$

ou encore

$$g(x) = \Sigma\, 2^{-n} e^{2^{-n}x}.$$

Nous pouvons exprimer les résultats obtenus sous la forme suivante:

THÉORÈME 1. — *Etant donnée une fonction entière* g(x), *du type exponentiel, elle admet un développement unique. absolument el uniformément convergent, de la forme*

$$g(x) = \sum_{1}^{\infty} a_n e^{\xi_n x},$$

lorsque l'adjointe de Pincherle correspondante est méromorphe à distance finie, n'ayant que des pôles simples ou se réduisant à une fraction rationelle.

Il est évident que ce théorème n'exprime qu'une condition suffisante pour la possibilité d'un tel développement, vu que la fonction $\mathfrak{G}(g)$ peut avoir un développement de la forme (17) sans être nécessairement méromorphe, les ξ_n pouvant être d'ailleurs tous les points d'une ligne singulière, comme l'a montré POINCARÉ dans ses remarquables travaux (« Acta Soc. Sc. Faennicae », t. XIII).

De la marche à suivre pour arriver au théorème précédent, on en déduit un autre, concernant le système (16):

THÉORÈME 2. — *Le système d'équations en nombre infini*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n^k = g_k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

admet une solution régulière unique lorsque la fonction

$$\mathfrak{G}(g) = \sum_{0}^{\infty} \frac{g_k}{z^{k+1}}, \qquad g_k \backsim q^k > 0,$$

est méromorphe dans le cercle $|z| = q$, *ayant des pôles simples seulement ou, plus généralement, lorsqu'elle admet un développement de la forme*

$$\mathfrak{G}(g) = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{z - \xi_n}.$$

Le système d'équations (16) peut admettre une solution *irrégulière*, c'est à dire, des valeurs non bornées pour les ξ_n. lorsque $g(x)$ n'est pas du type exponentiel. En voici un exemple que je dois à M. J. HADAMARD. Prenons $g(x) = e^{e^x}$, on a

$$e^{e^x} = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} e^{nx} = \sum_k \sum_n \frac{n^k x^k}{n!\,k!} = \sum_k \frac{g_k}{k!} x^k$$

avec

$$g_n = \sum_n \frac{n^k}{n!}$$

et le système (16) admet la solution évidente $\xi_n = n$, $c_n = \frac{1}{n!}$.

7. **Cas particulier.** — Un cas particulier du système (16) a été rencontré par M. G. CALUGARÉANO (¹), à l'occasion des recherches sur les valeurs exceptionnelles des fonctions.

Le système rencontré est le suivant

$$\begin{aligned} &\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n + \dots = A_1, \\ &\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 + \dots = A_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\xi_1^k + \xi_2^k + \dots + \xi_n^k + \dots = A_k, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et M. CALUGARÉANO montre que, lorsqu'elle existe, ce système admet une solution régulière unique.

Notre théorème 2 contient une réponse à la question de *l'existence* de cette solution. Comme exemple, nous allons prendre $A_k = \frac{1}{2^k - 1}$ (voir l'exemple 4° de plus haut) et nous trouverons $\xi_n = 2^{-n}$.

8. **Développement en série de $(a_n + b_n x)e^{\xi_n x}$.** — Proposons-nous de déterminer pour la fonction entière $g(x)$ un développement de la forme

$$g(x) = \sum_1^\infty (a_n + b_n x) e^{\xi_n x}, \tag{18}$$

$g(x)$ étant du type exponentiel, a_n, b_n, ξ_n des constantes à déterminer. En procédant comme tout à l'heure, nous trouvons, à cette fin, le système à

(¹) G. CALUGARÉANO, « Bull. des Sc. Math. », t. LIV, 1930, p. 17 et suiv.

une infinité d'inconnues

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
&\sum_1^\infty a_n &&= g_0,\\
&\sum_1^\infty a_n\xi_n + \sum_1^\infty b_n &&= g_1,\\
&\sum_1^\infty a_n\xi_n^2 + 2\sum_1^\infty b_n\xi_n &&= g_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_1^\infty a_n\xi_n^k + k\sum_1^\infty b_n\xi_n^{k-1} &&= g_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

dont on doit déterminer la solution *régulière,* telle qu'elle a été définie précédemment. Multiplions la k^e équation du système (19) par z^{-k-1} et ajoutons les résultats obtenus en faisant $k = 0, 1, 2, \ldots$; on a d'abord

$$a_n \sum_0^\infty \frac{\xi_n^k}{z^{k+1}} = \frac{a_n}{z - \varepsilon_n}, \quad b_n \sum_0^\infty \frac{k\xi_n^{k-1}}{z^{k+1}} = \frac{b_n}{(z-\xi_n)^2}$$

de sorte qu'on obtient

$$(20)\qquad \mathfrak{F}(g) = \sum_1^\infty \frac{a_n}{z-\xi_n} + \sum_1^\infty \frac{b_n}{(z-\xi_n)^2},$$

$\mathfrak{F}(g)$ étant toujours l'adjointe de PINCHERLE de $g(x)$.

On en déduit donc que le problème posé est possible lorsque l'adjointe $\mathfrak{F}(g)$ admet le développement (20), ce qui arrive en particulier lorsque $\mathfrak{F}(g)$ est méromorphe dans le cercle $|z| = q$, n'ayant que des pôles *doubles* au plus, pouvant d'ailleurs se réduire à une fraction rationnelle. En voici quelques exemples:

1° Prenons $g(x) = xe^x$, on a

$$\mathfrak{F}(g) = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{3}{z^4} + \ldots = \frac{1}{(z-1)^2},$$

donc

$$a_n = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_n = 0, \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_n = 0, \quad (n > 1).$$

2° Prenons $g(x) = (x+1)e^x$, on a

$$\mathfrak{F}(g) = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \ldots = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2},$$

donc

$$a_1 = b_1 = 1, \quad a_n = b_n = 0, \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_n = 0, \quad (n > 1).$$

Du développement (18) on déduit

$$|g(x)| < [\Sigma | a_n | + | x | \Sigma | b_n |] e^{q|x|},$$

mais on ne doit pas en concluse que $g(x)$ est du type exponentiel $q(1)$, avec $p=1$, mais qu'elle est *au plus* de ce type, comme nous le verrons dans le cas général.

9. **Cas général.** — Il n'y a maintenant aucune difficulté pour considérer le cas du développement général

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n0} + c_{n1}x + c_{n2}x^2 + \dots + c_{np}x^p) e^{\xi_n x}, \tag{21}$$

$g(x)$ étant du type exponentiel et ayant toujours le développement (13). On est conduit cette fois au système trés général

$$\begin{array}{l}
\sum_1^\infty c_{n0} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = g_0, \\
\sum_1^\infty c_{n0}\xi_n + \sum_1^\infty c_{n1} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = g_1, \\
\sum_1^\infty c_{n0}\xi_n^2 + 2\sum_1^\infty c_{n1}\xi_n + 2\cdot 1 \sum_1^\infty c_{n2} + \dots\dots\dots\dots = g_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_1^\infty c_{n0}\xi_n^k + k\sum_1^\infty c_{n1}\xi_n^{k-1} + k(k-1)\sum_1^\infty c_{n2}\xi_n^{k-2} + \dots + \dfrac{k!}{(k-p)!}\sum_1^\infty c_{nk}\xi_n^{k-p} = g_k, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array} \tag{20}$$

dont on doit déterminer la solution régulière, si elle existe, ainsi que les valeurs des constantes c_{nk}.

Multiplions la k^e équation de ce système par z^{-k-1} et ajoutons les résultats obtenus en donnant à k les valeurs succesives $k=0, 1, 2, \dots$; on a d'abord, si $|z| > q$,

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} k(k-1)\dots(k-s)\frac{\xi_n^{k-s-1}}{z^{k+1}} = \frac{(s+1)!}{(z-\xi_n)^{s+2}}, \qquad s=0, 1, 2, \dots,$$

de sorte qu'on obtient la relation

$$\mathfrak{G}(g) = \sum_1^\infty \frac{c_{n0}}{z-\xi_n} + 1!\sum_1^\infty \frac{c_{n1}}{(z-\xi_n)^2} + \dots + p!\sum_1^\infty \frac{c_{np}}{(z-\xi_n)^{p+1}}. \tag{23}$$

Il est inutile de répéter les raisonnements antérieurs pour arriver aux résultats que nous allons énoncer; remarquons seulement que, lorsque la solution régulière du système (22) existe, les séries $\sum_1^\infty c_{nk}$ sont absolument convergentes; en désignant les sommes de leur modules respectivement c_k, on a, avec $|\xi_n| < q$

$$|g(x)| < e^{q|x|}\sum_1^\infty [|c_{n0}| + |c_{n1}||x| + \ldots c_{np}||x^p] =$$
$$= [c_0 + c_1|x| + \ldots + c_p|x|^p]e^{q|x|},$$

mais on ne doit pas conclure que $g(x)$ est du type exponentiel $q(p)$, parce qu'il est possible que le polynome du second membre de cette inégalité soit inférieur à une exponentielle convenablement choisie. Prenons par exemple

$$g(x) = e^x + \frac{x^m}{2^m m!}e^{\frac{x}{2}}$$

cette fonction est *apparemment* du type $q(m)$, avec $q = 1$, mais il est facile de voir que

$$|g(x)| < e^{|x|} + e^{\frac{|x|}{2}} \cdot e^{\frac{|x|}{2}} = 2e^{|x|}$$

ce qui montre que $g(x)$ est du type simple q.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 3. - *Etant donnée une fonction entière* g(x), *du type exponentiel, elle admet un développement unique, absolument et uniformément convergent, de la forme*

$$g(x) = \sum_1^\infty (c_{n0} + c_{n1}x + \ldots + c_{np}x^p)e^{\xi_n x},$$

lorsque l'adjointe de Pincherle correspondante est méromorphe à distance finie (1), *ayant des pôles de l'ordre de multiplicité* (p + 1) *au plus* (2), *ou en général lorsqu'elle admet un développement de la forme* (23).

La fonction g(x) *est, dans ces conditions, du type exponentiel* q(p) *au plus.*

On peut aussi énoncer un théorème concernant l'existence de la solution régulière du système d'équations en nombre infini (22).

THÉORÈME 4. — *Le système d'équations en nombre infini*

$$\sum_1^\infty c_{n0}\xi_n^k + k\sum_1^\infty c_{n1}\xi_n^{k-1} + k(k-1)\sum_1^\infty c_{n2}\xi_n^{k-2} + \ldots + \frac{k!}{(k-p)!}\sum c_{np}\xi_n^{k-p} = g_k,$$
$$k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

(1) pouvant, évidemment, se réduire aussi à une fraction rationnelle.
(2) au moins un pôle de cet ordre.

admet une solution régulière unique lorsque la fonction

$$\mathcal{S}(g) = \sum_0^\infty \frac{g_k}{z^{k+1}}, \qquad g_k \backsim q^k > 0,$$

est méromorphe dans le cercle $|z| = q$, *ayant des pôles jusqu'à l'ordre de multiplicité* $p+1$ *ou, plus généralement, lorsqu'elle admet un développement de la forme* (23).

10. **Développement en série de fonctions $J_\rho(x)$.** — Le problème du développement d'une fonction entière du type $q(p, \rho)$ en série d'exponentielles $e^{\xi x}$ ne se pose plus si $\rho > 1$. On peut alors chercher des développements en série de fonctions $J_\rho(\xi x)$. Quoiqu'ils ne nous intéressent pas pour la résolution de l'équation fonctionnelle (A), nous allons cependant en dire quelques mots, afin que l'étude faite jusqu'à ici ne soit pas trop incomplète.

Admettant pour la fonction $g(x)$ le développement (12), nous définissons d'abord *l'adjointe de Pincherle*

$$\mathcal{S}_\rho(g) = \sum_0^\infty \frac{g_n}{z^{n+1}} \tag{24}$$

holomorphe à l'extérieur du cercle $|z| = q$. Pour que $g(x)$ admette aussi un développement absolument et uniformément convergent de la forme

$$g(x) = \sum_1^\infty a_n J_\rho(\xi_n x), \tag{25}$$

on trouve que l'adjointe $\mathcal{S}_\rho(g)$ doit avoir le développement

$$\mathcal{S}_\rho(g) = \sum \frac{a_n}{z - \xi_n} \tag{26}$$

ce qui est possible, par exemple, lorsque $P_\rho(g)$ est méromorphe, n'ayant que des pôles simples.

Plus généralement, si l'on cherche pour $g(x)$ un développement de la forme

$$g(x) = \sum_1^\infty (c_{n0} + c_{n1}x + \dots + c_{np}x^p) J_\rho(\xi_n x), \tag{27}$$

on est conduit, pour déterminer les inconnues c_{nk}, ξ_n au système à une infinité d'inconnues

$$\sum_1^\infty c_{n0}\xi_n{}^k + k^\rho \sum_1^\infty c_{n1}\xi_n{}^{k-1} + k^\rho(k-1)^\rho \sum_1^\infty c_{n2}\xi_n{}^{k-2} + \dots + \left[\frac{k!}{(k-p)!}\right]^\rho \sum_1^\infty c_{np}\xi_n{}^{k-p} = g_k, \tag{28}$$
$$k = 0, 1, 2, \dots$$

dont la résolution exige que $\mathcal{S}_\rho(g)$ ait là forme

$$(29)\quad \mathcal{S}_\rho(g) = A_0 \Sigma \frac{c_{n0}}{(z-\xi_n)^{\rho+1}} + A_1 \Sigma \frac{c_{n1}}{(z-\xi_n)^{2\rho+1}} + \ldots + A_p \Sigma \frac{c_{np}}{(z-\xi_n)^{p\rho+1}}.$$

C'est parmi les fonctions méromorphes qu'on peut, par exemple, trouver de tels développements.

Lorsque ces conditions sont remplies, la fonction $g(x)$ est du type exponentiel $q(p, \rho)$ ou plus, par rapport à p.

Il est inutile d'énoncer les résultats obtenus, ce qui d'ailleurs nous conduirait à des théorèmes analogues aux précédents, à la différence près qu'on devrait remplacer les exponentielles $e^{\xi_n x}$ respectivement par $J_\rho(\xi_n x)$. D'ailleurs, nous n'aurons pas à nous en servir.

II. Equation $\overset{x}{\underset{p}{E}} F = g(x)$.

11. Enoncé du problème. — Cette deuxième partie de notre travail est consacrée à l'étude de l'équation aux différences finies

$$(\mathrm{A})\qquad \overset{x}{\underset{p}{E}} F = \sum_0^p A_i F(x + \omega_i) = g(x).$$

Nous pouvons supposer les constantes ω_i comme étant positives, ou à partie réelle positive, ce à quoi on arrive toujours par un simple changement de variable; les constantes A_i peuvent satisfaire à un nombre de relations de la forme

$$(30)\qquad B_j = \sum_{i=0}^{i=p} A_i \omega_i^j = 0, \quad \omega_0 = 0, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, k-1,$$

k étant ainsi le plus petit entier positif, tel que

$$(31)\qquad B_k = \Sigma A_i \omega_i^k \neq 0.$$

Enfin, $g(x)$ est une fonction entière, d'un type exponentiel que nous préciserons dans chaque cas.

Il s'agit de résoudre l'équation fonctionnelle (A).

Comme la solution la plus générale de cette équation dépend d'une fonction arbitraire, solution de l'équation homogène

$$(\mathrm{B})\qquad \overset{x}{\underset{p}{E}} F = 0$$

et qui est assez indéterminée, nous nous contenterons de la solution, dite *principale*, selon la terminologie de NÖRLUND, obtenue d'une solution quelconque de (A) en y éliminant toute partie qui est solution de (B). C'est la solution principale, ainsi définie, qui jouit des propriétés caractérisant le fait d'être solution de l'équation (A), l'addition d'une solution de (B) pouvant quelquefois altérer complétement le caractère spécial de la solution principale.

12. **La fonction $h(t)$.** — Dans la plupart des recherches sur l'équation fonctionnelle (A) s'introduit la fonction

$$h(t) = A_0 + A_1 e^{t\omega_1} + A_2 e^{t\omega_2} + \dots + A_p{}^{t\omega_p}. \tag{32}$$

Cette fonction a été étudiée par MM. PINCHERLE [P], CARMICHAEL [C] et même G. PÓLYA (loc. cit.). Des recherches des auteurs cités on déduit quelques propriétés principales de la fonction $h(t)$:

a) $h(t)$ est une fonction entière, admettant une infinité de zéros, ayant l'infini comme point limite, [P].

b) Il y a un nombre fini de demi-droites, issues de l'origine, sur lesquelles le module des racines est inférieur à un nombre donné, [P].

c) On peut déterminer des secteurs assez larges dans le plan, dans lequels on ait

$$h(t)| > m,$$

m étant une quantité positive, déterminée, [C].

13. **Les polynômes $G_n^k(x)$.** — Pour la résolution de l'équation fonctionnelle (A) on emploie quelquefois une classe de polynômes définis d'une manière bien déterminée. J'ai défini (1), [G], la classe de polynômes $G_n^k(x)$ comme solutions de l'équation fonctionnelle

$$\overset{x}{\underset{p}{E}}\, G_n^k(x) = \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}, \qquad n \geq k. \tag{33}$$

On a, pour ces polynômes (loc. cit.)

$$| G_n^k(x) | < aM^n e^{\lambda x} \tag{34}$$

a, λ, M, étant des constantes positives, bien déterminées.

On peut quelquefois exprimer la solution de l'équation fonctionnelle (A) à l'aide des polynômes $G_n^k(x)$, $g(x)$ ayant le développement (13)

$$g(x) = \sum_0^\infty g_n \frac{x^n}{n!};$$

(1) « Bulletin de l'Académie Royale de Belgique », 1933, n.° 4, p. 387.

on voit facilement que l'équation (A) admet la solution formelle principale

$$F(x) = \sum_0^\infty g_n G_{n+k}^k(x). \tag{35}$$

Pour que cette solution soit effective, il faut que la série du deuxième membre converge uniformément. Or, on a, d'après (34),

$$|F(x)| < \sum_0^\infty |g_n| \, |G_{n+k}^k(x)| < aM^k e^{\lambda |x|} \sum_0^\infty |g_n| M^n$$

et il suffit que la série $\Sigma |g_n| M^n$ converge, pour en dire autant de (35). M. S. BOCHNER avait déterminé, [B], les polynômes $P_n^k(x)$, par l'équation

$$\overset{x}{\underset{p}{E}} P_n^k(x) = x^{n-k}$$

et les avait employé pour résoudre l'équation (A) par les procédés de M. NÖRLUND, ce que nous avons aussi fait, [G], avec les polinômes $G_n^k(x)$; M. CARMICHAEL considère, [C], le cas particulier $k = 0$ et définit les polinômes $G_n(x)$ par l'équation

$$\overset{x}{\underset{p}{E}} G_n(x) = x^n.$$

Ces polinômes rentrent dans ceux de M. BOCHNER, mais M. CARMICHAEL les définit à l'aide de l'intégrale de CAUCHY en s'inspirant des procédés de HURWITZ (1).

Il y a une étroite parenté entre les polynômes de M. BOCHNER $P_n^k(x)$ et les nôtres, $G_n^k(x)$: la différence

$$P_n^k(x) - (n-k)! \, G_n^k(x)$$

satisfait à l'équation fonctionnelle (B) et est égale à un polynôme du $(k \quad 1)^e$ degré au plus.

14. **Fonctions du type exponentiel** $q(\rho)$. — Les polynômes $G_n^k(x)$ se prêtent assez bien à la résolution de l'équation fonctionnelle (A), lorsque $g(x)$ est du type subexponentiel $q(\rho)$, avec $\rho < 1$. On a, en effet, d'après (9)

$$\sum_0^\infty |g_n| M^n < \sum_0^\infty \frac{M^n (q+\varepsilon)^n}{(n!)^\rho} = J_\rho[M(q+\varepsilon)], \qquad \varepsilon > 0,$$

ce qui prouve que le développement (35) converge uniformément pour toute valeur de x, donc il représente une fonction entière. De plus, cette fonction

(1) « Acta Mathematica », t. 20.

est du type exponentiel $q(\rho - 1)$. Nous pouvons énoncer ainsi le résultat remarquable suivant,

Théorème 5. — *La solution principale de l'équation fonctionnelle*

$$\overset{x}{\underset{p}{E}} F = g(x)$$

où g(x) *est du type exponentiel* q(ρ), *avec* $\rho > 1$, *est une fonction entière du type exponentiel* q($\rho - 1$), *pouvant s'exprimer en série uniformément convergente de polynômes* $\mathrm{G}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(\mathrm{x})$.

15. **Fonctions du type exponentiel q.** — Lorsque $\rho = 1$, l'emploi des polynômes $G_n^k(x)$ n'est pas toujours heureux, comme on l'a vu (§ 1), parce qu'il faut que la série

$$(36) \qquad \sum_0^\infty |g_n| M^n \backsim \sum_0^\infty q^n M^n$$

converge, ce qui a lieu si

$$qM < 1.$$

Tel est, par exemple, le cas de la série

$$g(x) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{m}\right)^n = e^{\frac{x}{m}}, \qquad m > M.$$

Lorsque la série (36) est divergente, il faut recourir à d'autres procédés pour résoudre l'équation fonctionnelle (A).

C'est dans ce but que nous avons d'ailleurs entrepris l'étude précédente des fonctions entières, qui va nous permettre de trouver la solution de l'équation (A) par un procédé nouveau et assez remarquable, lorsque $g(x)$ est du type exponentiel $q(p)$.

Mais, avant d'exposer ce procédé, nous allons dire aussi quelques mots sur un autre, considéré antérieurement par M. Carmichael, [C], et par nous même ([1]), [G].

16. **Les fonctions entières $\mathcal{G}_n^k(x)$.** — L'équation fonctionnelle (33) n'admet pas les polynômes $G_n^k(x)$ comme unique solution; il y a, entre autres, une infinité de fonction entières qui la vérifient. On en obtient une classe remarquable, d'après la remarque que l'identité ([2])

$$(37) \qquad \frac{t^k e^{tx}}{h(t)} = \sum_0^\infty t^n G_n^k(x)$$

([1]) « Rendiconti Accad. Lincei », marzo 1933, p. 381.
([2]) [G], p. 252, form. (37).

permet d'exprimer le polynôme $G_n^k(x)$ à l'aide de l'intègrale de CAUCHY

$$G_n^k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{zx}}{h(z)}\frac{dz}{z^{n-k+1}}, \tag{38}$$

l'intégrale étant étendue à un contour renfermant à son intérieur le pôle $z = 0$ seulement. Dès lors, il est facile de définir les fonctions entières $\mathcal{G}_n^k(x)$ par la relation

$$\mathcal{G}_n^k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{zx}}{h(z)}\frac{dz}{z^{n-k+1}} \tag{39}$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour enveloppant cette fois un nombre bien déterminé de zéros de $h(z)$, mais ne passant par aucun d'eux.

Quelque temps avant nous, M. CARMICHAEL avait défini, [C], les fonctions $G_{n,r}(x)$ de la même manière et dans le cas particulier $k = 0$, de sorte que $G_{n,r}(x)$ correspondent à nos fonctions particulières $\mathcal{G}_n^0(x)$. Soit qu'on emploie le contour défini par M. CARMICHAEL, soit qu'on en emploie le nôtre, on démontre toujours que les fonctions $\mathcal{G}_n^k(x)$ sont bornées pour n très grand, de manière à rendre uniformément convergente la série,

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_0^\infty g_n \mathcal{G}_{n+k}^k(x), \tag{40}$$

qui s'introduit comme solution formelle de l'équation fonctionnelle (A) et qui est, par suite, aussi effective, sans en être la principale, mais la contenant. Si l'on prend le même contour pour toutes les fonctions $\mathcal{G}_n^k(x)$, la formule de résolution (40) devient, compte tenu de (39),

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{zx}}{h(z)}\mathcal{S}(g)dz \tag{41}$$

et on retrouve ainsi la formule obtenue par M. PINCHERLE, ([P], p. 285, form. 18'). Le contour, le long duquel on prend l'intégrale qui figure dans (41), peut être choisi de manière à entourer les points singuliers de $\mathcal{S}(g)$, sans passer par quelque zéro de $h(z)$.

La différence qu'il y a entre le cas $k = 0$ et k quelconque n'apparaît pas sur la formule (41), qui est valable pour tous les cas ; néanmoins, elle existe et se fait sentir lorsqu'on effectue l'intégrale qui y figure.

17. Equation $\overset{x}{\underset{p}{E}} F = e^{ax}$. — On voit facilement que, lorsque $h(a) \neq 0$, la solution principale de l'équation fonctionnelle

$$\overset{x}{\underset{p}{E}} F = e^{ax} \tag{42}$$

est donnée par

$$F(x) = \frac{e^{ax}}{h(a)}. \tag{43}$$

Si a est un zéro simple de $h(z)$, $h'(a) \neq 0$, la solution principale de l'équation (42) est aisée à déterminer ; on en trouve

$$F(x) = \frac{xe^{ax}}{h'(a)}. \tag{44}$$

Plus généralement, lorsque a est un zéro d'ordre m de $h(z)$, $h^{(m)}a \neq 0$, on trouve comme solution principale de l'équation (42)

$$F(x) = \frac{x^m e^{ax}}{h^{(m)}(a)}. \tag{45}$$

Signalons aussi que, dans cette hypothèse, une solution de l'équation homogène (B) est

$$F(x) = P(x)e^{ax} \tag{46}$$

$P(x)$ étant un polynôme *quelconque* du $(m-1)^e$ degré en x.

18. **Fonctions entières (m), du type exponentiel q.** — Lorsque $g(x)$ est une fonction entière (m), du type exponentiel, $\mathfrak{F}(g)$ est une fonction méromorphe, n'ayant que des pôles simples, $g(x)$ est alors développable en série d'exponentielles, de la forme (15)

$$g(x) = \sum_1^\infty a_n e^{\xi_n x}.$$

Si aucun des ξ_n ne figure parmi les zéros de $h(z)$, la solution principale de l'équation fonctionnelle (A) sera donnée par la formule

$$F(x) = \sum_1^\infty a_n \frac{e^{\xi_n x}}{h(\xi_n)}. \tag{47}$$

Pour que cette solution soit effective, il faut que le développement du second membre soit uniformément convergent ; or, on a

$$F(x)| < \sum_1^\infty \frac{a_n|}{|h(\xi_n)} e^{|\xi_n x|}.$$

Mais, puisque $h(\xi_n) \neq 0$, en désignant par h le plus petit des modules des $h(\xi_n)$, on aura

$$|F(x)| < \frac{1}{h} \sum_1^\infty |a_n| e^{\xi_n x}$$

et le développement du second membre est absolument et uniformément convergent pour toute valeur de x, d'après ce qu'on a établi antérieurement.

Si quelques uns des ξ_n se trouvent parmi les zéros de $h(z)$, avec des ordres quelconques de multiplicité, m_n, on aura, pour la solution principale de l'équation (A),

$$F(x) = \sum_1^\infty a_n \frac{x^{m_n} e^{\xi_n x}}{h^{(m_n)}(\xi_n)} \tag{48}$$

dont l'uniforme convergence s'établit de la même manière.

Les deux résultats que nous venons d'obtenir peuvent s'exprimer comme il suit

THÉORÈME 6. — *La solution principale de l'équation fonctionnelle*

$$\overset{x}{\underset{p}{E}} F = g(x)$$

dans laquelle g(x) *est une fonction entière* (m), *du type exponentiel* q, *est une fonction entière du même type exponentiel, pouvant s'exprimer en série uniformément convergente d'exponentielles, lorsque aucun des pôles de la fonction adjointe* $\mathfrak{G}$(g) *ne se trouve parmi les zéros de la fonction* h(z).

Lorsque h(z) *admet comme zéros quelques uns des pôles de la fonction adjointe* $\mathfrak{G}$(g), *la solution principale est une fonction entière du type exponentiel* q(x^m) *au plus*, m *étant le plus grand des ordres de multiplicité des* ξ_n, *figurant comme des zéros de* h(z).

19. **Equation** $\overset{x}{\underset{p}{E}} F = x^m e^{ax}$. — Pour déterminer la solution principale de l'équation fonctionnelle

$$\overset{x}{\underset{p}{E}} F = x^m e^{ax}, \tag{49}$$

m étant un entier positif, nous allons essayer une fonction de la forme

$$F(x) = (\alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_0) e^{ax}. \tag{50}$$

En l'introduisant dans (49), on trouve dans le premier membre un polynôme du m^e degré en x, dont le coefficient de x^{m-k} a pour expression

$$C_m^k \alpha_m h^{(k)}(a) + C_{m-1}^{k-1} \alpha_{m-1} h^{(k-1)}(a) + \dots + C_{m-k}^0 \alpha_{m-k} h(a),$$

qui doit être égal à *un* pour $k = 0$ et nul pour $k > 0$. On détermine ainsi les inconnues α, de sorte que. si $h(a) \neq 0$, la solution principale de l'équation fonctionnelle (49) est donné par (50). En général, si, au lieu de x^m, on a, dans le deuxième membre de (49), un polynôme du m^e degré en x, la solution principale correspondante sera encore de la forme (50), si $h(a) \neq 0$ seulement.

Lorsque a est un zéro d'ordre k de $h(z)$, la solution principale de l'équation fonctionnelle (49) sera de la même forme, à la différence près, que e^{ax} est maintenant multipliée par un polynôme du $(m+k)^e$ degré en x.

20. **Fonctions entières (m), du type exponentiel $q(p)$.** — Nous pouvons déterminer maintenant la solution principale de l'équation fonctionnelle (A), lorsque $g(x)$ est une fonction entière (m), du type exponentiel $q(p)$, avec $p > 0$. En effet, nous avons vu qu'une telle fonction peut être développée en général en série uniformément convergente de fonctions élémentaires du même type, c'est-à-dire,

$$g(x) = \sum_1^{\infty} (c_{n0} + c_{n1}x + \dots + c_{np}x^p)e^{\xi_n x}.$$

Si aucun des ξ_n ne se trouve pas parmi les zéros de $h(z)$, $h(\xi_n) \neq 0$, la solution principale de l'équation fonctionnelle (A) sera donnée par l'expression

$$F(x) = \sum_1^{\infty} P_{np}(x)e^{\xi_n x}, \tag{51}$$

$P_{np}(x)$ étant des polynômes du p^e degré au plus, déterminés comme tout à l'heure, (§ 9). Comme les ξ_n sont bornés, et comme on peut déterminer un polynôme $P_p(x)$, supérieur en module à tous les polynômes $P_{np}(x)$, on aura

$$|F(x)| < |P_p(x)\, e^{\xi x}|,$$

de sorte que le développement (51) converge uniformément pour toute valeur de x et représente, par suite, une série entière, du même type expnentiel que la fonction donnée $g(x)$.

Lorsque $h(z)$ admet comme zéros quelques uns des ξ_n, la solution principale de l'équation fonctionnelle (A) est donnée par une expression analogue à (51), dans laquelle les polynômes $P_{np}(x)$ sont remplacés par des polynômes du $(p+k)^e$ degré en x, k étant le plus grand ordre de multiplicité des ξ_n qui sont aussi des zéros de $h(z)$. La fonction ainsi obtenue est aussi entière, mais du type exponentiel $q(p+k)$. Nous pouvons exprimer les résultats obtenus sous la forme suivante.

Théorème 7. — *La solution principale de l'équation aux différences finies*

$$\overset{x}{\underset{p}{E}} F = g(x),$$

dans laquelle g(x) *est une fonction entière* (m), *du type exponentiel* q(p), *est* *une fonction entière du même type exponentiel, pouvant s'exprimer en série uniformément convergente de fonctions élémentaires, de la forme*

$$F(x) = \sum_{1}^{\infty} P_{np}(x) e^{\xi_n x},$$

dans laquelle les $P_{np}(x)$ *sont des polynômes bien déterminés du* p^e *degré en* x, *lorsque aucun des pôles* ξ_n, *de la fonction adjointe* $\mathfrak{F}(g)$, *ne se trouve parmi les zéros de la fonction* h(z).

Lorsque h(z) *admet comme zéros quelques uns des pôles* $\mathfrak{F}(g)$, *la solution principale est une fonction entière, du type exponentiel* q(p + m), m *étant le plus grand des ordres de multiplicité des* ξ_n *qui figurent comme des zéros de* h(z).

Il se pose naturellement maintenant la question de savoir si l'on peut obtenir des développements analogues en séries de fonctions $J_\rho(\xi_n x)$ pour la solution principale de l'équation fonctionnelle (A), lorsque $g(x)$ est du type exponentiel $q(\rho)$: il n'en est rien, parceque la solution de l'équation fonctionnelle particulière

$$\overset{x}{\underset{p}{E}} F = J_\rho(ax)$$

n'est pas de la forme $AJ_\rho(ax)$, ce qui fait penser que la solution principale de l'équation fonctionnelle (A), avec $g(x)$ du type exponentiel $q(\rho)$, n'est pas une fonction du même type, résultat qu'on doit préalablement vérifier.

Sul fondamento matematico della teoria degli invarianti adiabatici.

Memoria di GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (a Roma).

Sunto. - *L'A. intende giustificare l'interpretazione dell'ergodicità sulla quale* LEVI-CIVITA *basa (circostanza, questa, che spiega il titolo della Memoria presente) una sua recente esposizione della teoria degli invarianti adiabatici.*

All' argomento attuale — giustificare una presunzione avanzata da LEVI-CIVITA [1] in quell' ordine di idee che culminano nel teorema ergodico di BIRKHOFF [2] — ho già dedicato una Nota [3].

Secondo il teorema di BIRKHOFF, se $f(P)$ è una funzione misurabile e limitata del punto P di una varietà analitica V [4] e G è un gruppo analitico a un parametro di trasformazioni, $T(t)$, di V in sè, analitiche e soddisfacenti a certe condizioni [5], allora per quasi tutti i punti P di V esiste il limite

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(P(t))dt, \tag{1}$$

dove $P(t)$ è il trasformato di P nella $T(t)$; questo limite riducendosi quasi

---

(1) T. LEVI-CIVITA, *A general survey of the theory of adiabatic invariants* [« Journal of Mathematics and Physics », vol. XIII (1934), pagg. 18-40], pagg. 26-27.

(2) G. D. BIRKHOFF, *Proof of the ergodic theorem* [« Proceedings of the National Academy of Sciences of U. S. A. », vol. 17 (1931), pagg. 656-660]; E. HOPF, *On the time average theorem in dynamics* [ibidem, vol. 18 (1932), pagg. 93-100], pag. 100.

(3) G. SCORZA DRAGONI, *Sul teorema ergodico* [« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », tomo LVIII (1934), pagg. 311-325].

(4) Priva di singolarità e di misura finita.

(5) Il parametro varia da $-\infty$ a $+\infty$; le trasformazioni del gruppo sono biunivoche, lasciano invariata la misura (secondo LEBESGUE) delle porzioni misurabili di V e verificano la $T(t_1) \cdot T(t_2) = T(t_1 + t_2)$.

ovunque alla costante

$$\alpha = \frac{1}{mV}\int_V f(P)\,dV \text{ [6]}$$

se il gruppo G è metricamente transitivo [7].

Il Levi-Civita, ritenendo fisicamente più opportuno evitare le peculiarità inerenti alle singole traiettorie descritte dai diversi punti di V, ha proposto di sostituire la media temporale [8]

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(P(t))\,dt$$

con la media spaziale

$$I(\tau) = \frac{1}{m\Gamma_\tau}\int_{\Gamma_\tau} f(P)\,d\Gamma$$

— dove Γ_τ è il tubetto descritto, per t variabile da 0 a τ, dalle successive trasformate nelle $T(t)$ di una opportuna sottovarietà γ di V, $(r-1)$ — dimensionale, se r è la dimensione di V —; purchè naturalmente per il limite

$$\lim_{\tau \to +\infty} I(\tau)$$

valgano proprietà analoghe a quelle note per il limite (1).

Nella mia Nota io ho appunto dimostrato un teorema che legittima completamente l'idea di Levi-Civita, dal Levi-Civita posta, nel suo lavoro citato, a base della teoria matematica degli invarianti adiabatici [9].

E trattandosi allora di vedere se e in qual misura la presunzione di Levi-Civita fosse suscettibile di una giustificazione rigorosa, io ho creduto lecito seguire la via che mi è apparsa come la più agevole, anche se questa

---

(6) mV è la misura di V (secondo la notazione consueta), dV l'elemento di volume su V: entrambi sono calcolati nella metrica che vige su V. Gli integrali sono integrali di Lebesgue.

(7) Se cioè la misura di ogni porzione misurabile di V, invariante di fronte a tutte le trasformazioni del gruppo, o è nulla, o è uguale a quella di V.

(8) Temporale, una volta interpretato il parametro t come un tempo, il che noi faremo sempre nel seguito.

(9) A dire la verità, Levi Civita indicava con Γ_τ il tubo descritto dalle trasformate di γ per t variabile da $-\tau$ a τ; la presunzione avanzata dal Levi-Civita è meno precisa di quella indicata nel testo (si vegga la nota (8) del mio lavoro citato in (3)). Anche nel teorema dimostrato nella mia Nota ricordata, Γ_τ ha il significato or ora espresso; ma il teorema più preciso, in cui a Γ_τ si attribuisca il significato detto nel testo, si dimostra con dei ragionamenti del tutto analoghi a quelli là svolti.

consisteva nel ricondurre (mediante riduzioni di integrali multipli) il teorema in discorso proprio a quello di BIRKHOFF.

Ma se questo è legittimo in una prima fase di orientamento della ricerca, è anche desiderabile, per evidenti ragioni sistematiche, giustificare l'interpretazione che dell'ergodicità vien data da LEVI-CIVITA seguendo una via diretta e indipendente dal risultato di BIRKHOFF.

È quanto mi è riuscito, come mi propongo di mostrare in questa Memoria, nel caso che il gruppo G sia completamente transitivo, secondo HOPF; cioè, che ogni trasformazione del gruppo, diversa dalla $T(0)$ che si suppone esser l'identità, sia metricamente transitiva ([10]).

Della dimostrazione che segue, ecco le linee direttive.

Secondo HOPF ([11]) il gruppo G è detto rappresentare un *mixing mechanism*, se per due qualsiasi porzioni misurabili A e B di V riesce

$$\lim_{t \to +\infty} mA \cdot B(t) = \frac{mA \cdot mB}{mV}, \tag{2}$$

dove $B(t)$ è l'immagine di B nella $T(t)$ e $A \cdot B(t)$ l'intersezione di A e $B(t)$, cioè l'insieme dei punti comuni ad A e $B(t)$.

Se la (2) è soddisfatta, il gruppo G è completamente transitivo; la inversa non mi risulta sia dimostrata ([12]).

Ma la formulazione stessa del teorema ergodico di HOPF ([13]) — e forse ancora meglio quella del teorema di BIRKHOFF — induce a credere che per

---

([10]) E. HOPF, *Complete transitivity and the ergodic principle* [« Proceedings of the National Academy of Sciences of U. S. A. », vol. 18 (1932), pagg. 204-209], n. 2. Per la nozione di transitività metrica di una trasformazione vedi anche: G. D. BIRKHOFF e P. A. SMITH, *Structure analysis of surface transformations* [« Journal de Mathématiques pures et appliquées », serie IX, vol. VII (1928), pagg. 345-379], pag. 365.

([11]) E. HOPF, *On causality, statistics and probability* [« Journal of Mathematics and Physics », vol. XIII (1934), pagg. 51-102], pag. 70.

([12]) Cfr. HOPF loc. cit. nota ([10]). Di qui appare, anzi, che la semplice transitività metrica non è certo sufficiente per la validità della (2).

([13]) Data una varietà V e una trasformazione T di V in sè, entrambe soddisfacenti a certe condizioni (che qui non importa di precisare), ed una funzione $g(P)$ sommabile su V, la successione $g(P)$, $g(P^1)$,... — dove P^i è l'immagine di P nella potenza i-esima della T — pur non riuscendo (generalmente) convergente, ammette però il limite secondo CESARO

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{1}{i+1} \{ g(P) + g(P^1) + \dots + g(P^i) \}$$

per quasi tutte le posizioni di P (loc. cit. nota ([11]), pag. 83).

Di qui segue (ibidem, pag. 83) che nel teorema di BIRKHOFF la $f(P)$ si può supporre sommabile, invece che misurabile e limitata; il che era stato già osservato da A. KHINTCHINE nella sua Nota: *Zu* BIRKHOFF'S *Lösung des Ergodenproblem* [« Mathematische Annalen », vol. 107 (1932), pagg. 485-488].

un gruppo completamente o anche solo metricamente transitivo il limite

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau mA \cdot B(t) dt$$

sia sempre esistente, riuscendo

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau mA \cdot B(t) dt = \frac{mA \cdot mB}{mV} \tag{3}$$

anche quando non sussiste la (2).

E più generalmente si è indotti a considerare il limite di

$$F(B, \tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F_1(B, t) dt,$$

dove

$$F_1(B, t) = \int_{B(t)} f(P) dV$$

con $f(P)$ sommabile su V (14); ed a porre

$$\lim_{\tau \to +\infty} F(B, \tau) = \frac{mB}{mV} \int_V f(P) dV = \alpha \cdot mB, \tag{4}$$

la (4) riducendosi alla (3), se $f(P)$ è la funzione caratteristica di A, la funzione cioè uguale ad uno su A ed a zero altrove.

Ammessa la (4), è facile dedurne, come vedremo,

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{m\Gamma_\tau} \int_{\Gamma_\tau} f(P) dV = \alpha;$$

i nostri tentativi mireranno quindi a stabilire la (4).

A questo risultato perverremo con una dimostrazione diretta e svolgentesi nell'ambito della teoria delle funzioni additive e assolutamente continue d'insieme nell'ipotesi, però, che G sia completamente e non soltanto metricamente transitivo (15).

---

(14) Vedremo a suo luogo che in queste ipotesi $F_1(B, t)$ è continua rispetto a t, di guisa che ha senso considerarne l'integrale rispetto a t.

(15) La (3) — o meglio, una formula dalla quale la (3) si può dedurre — è dimostrata da Carleman, sfruttando la teoria delle equazioni integrali lineari, in ipotesi che, per quel che ha tratto alla transitività, si avvicinano di molto a quella della transitività metrica.

Si vegga T. Carleman, *Application de la théorie des équations intégrales linéaires aux systèmes d'équations différentielles non linéaires* [« Acta Mathematica », vol. 59 (1932), Nel linguaggio della quale teoria ecco come si potrebbe forse esporre la nostra dimostrazione.

Posto

$$\Phi(B) = \overline{\lim_{\tau \to +\infty}} F(B, \tau), \quad \varphi(B) = \underline{\lim_{\tau \to +\infty}} F(B, \tau),$$

si dovrebbe in primo luogo dimostrare l'additività delle due funzioni d'insieme $\Phi(B)$ e $\varphi(B)$; la loro assoluta continuità essendo pressochè evidente, esse allora sarebbero dotate quasi ovunque di derivata; si dovrebbe poi dimostrare che l'insieme dei punti di V in cui queste derivate assumono un valore assegnato è invariante di fronte a G; di qui seguirebbe, in base a considerazioni di tipo noto ([16]), che queste derivate sono quasi ovunque costanti su V e (quindi) quasi ovunque uguali al numero α. Ma allora sarebbe

$$\varphi(B) = \Phi(B) = \alpha \cdot mB, \tag{5}$$

uguaglianza che equivale alla (4).

La dimostrazione che noi esporremo in dettaglio non è che il riflesso in un altro piano di quella or ora delineata.

L'invarianza delle misure nelle $T(t)$ e la transitività completa di G ci permettono di particolarizzare direttamente e in maniera notevole la natura di $\varphi(B)$ e, quindi, di $\Phi(B)$ ([17]).

Dimostreremo infatti che, se B è aperto su V ed $f(P)$ continua, allora $\varphi(B)$ è una funzione della sola misura di B,

$$\varphi(B) = \psi(mB), \tag{6}$$

dove $\psi(\eta)$ è una funzione (evidentemente) continua in tutto l'intervallo $0 \leq \eta \leq mV$, se poniamo $\psi(0) = 0$.

La dimostrazione stessa della (6) ci permetterà anche di asserire, se opportunamente interpretata e completata, che è soddisfatta l'equazione funzionale

$$\psi(\eta_1 + \eta_2) = \psi(\eta_1) + \psi(\eta_2) \quad (\eta_1 \geq 0;\ \eta_2 \geq 0;\ \eta_1 + \eta_2 \leq mV);$$

---

pagg. 63-87]. pagg. 78-80 e più precisamente la formula (21) e quanto è detto alla fine della pag. 79.

Confido di poter dimostrare la (4) in un prossimo lavoro, supponendo G metricamente e non completamente transitivo (e senza avvalermi naturalmente del teorema di BIRKHOFF).

Osservo fin d'ora che per la validità dei ragionamenti svolti in questa Memoria l'ipotesi della transitività completa è già sovrabbondante. Basta che sia metricamente transitiva una almeno delle trasformazioni del gruppo G; cfr. le osservazioni fatte alla fine del n. 6.

([16]) Cfr. KHINTCHINE, loc. cit. nota ([13]), n. 5.

([17]) Basta infatti cambiare $f(P)$ in $-f(P)$ perchè $-\Phi(B)$ assuma il ruolo di $\varphi(B)$.

vale a dire, che è

$$\psi(\eta) = k\eta ,$$

con

$$k = \alpha ,$$

come si riconosce calcolando direttamente — il che è immediatamente fatto — il valore di $\varphi(B)$ per $B = V$.

Secondo quanto abbiamo già osservato nella nota ([17]), considerazioni del tutto analoghe valgono allora per la $\Phi(B)$.

E la (5) è così ritrovata, se B è aperto su V; mediante dei passaggi al limite si dimostra che la (5) vale anche se B è misurabile ed $f(P)$ sommabile.

Si presenterebbe ora un' altra questione:

Si potrà interpretare come un integrale $(r+1)$-plo ([18]) l' integrale che compare nell' espressione di $F(B, \tau)$?

Si tratterebbe in sostanza di vedere se e in qual senso il teorema di riduzione di un integrale multiplo è suscettibile nel caso nostro di un' inversione.

Io non approfondirò la questione altro che in un caso particolare. L' unico che abbia un vero interesse, conferitogli dal fatto che in questo caso lo scrivere la (4) equivale ad affermare che per l' integrale r-plo

$$\int_{\Gamma_\tau} f(P) d\Gamma ,$$

considerato da Levi-Civita, è

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{m\Gamma_\tau} \int_{\Gamma_\tau} f(P) d\Gamma = \alpha .$$

Nel § 1 di questa Memoria sarà dimostrata la (4), una volta precisate le ipotesi in cui intendiamo stabilirla.

Come nella mia Nota precedente, il criterio che mi ha guidato nella scelta di queste ipotesi è stato quello di delimitare un risultato contemplante solo i casi che più da vicino interessano la meccanica. Il risultato raggiunto è quindi un po' meno ampio di quanto la prefazione presente induce forse a credere. Esso però si generalizza facilmente e ad ogni sua generalizzazione ne corrisponde di certo una del teorema, che da esso discende come sarà dimostrato nel § 2, espresso dall' ultima uguaglianza scritta.

Prima di chiudere queste righe introduttive, voglio ricordare una estensione del teorema ergodico di Birkhoff, indicata da Hopf ([19]), che consiste

([18]) Si rammenti che r era la dimensione di V.

([19]) Loc. cit. nota ([11]), pag. 84.

nel sostituire la $f(P)$, che compare nella (1). con una funzione del tipo

$$e^{i\lambda t}f(P),$$

λ essendo una costante reale, i l'unità immaginaria ed $f(P)$ una funzione sommabile [20].

Si comprende facilmente che mediante sviluppi simili a quelli contenuti nella mia Nota citata (cioè mediante riduzioni di integrali multipli) debba trovarsi che il teorema di HOPF consente estensioni analoghe per i risultati contenuti nella Memoria presente.

Resta a vedere se anche queste estensioni (ammesso che sussistano effettivamente) si possono raggiungere per una via diretta, modificando eventualmente ed ove ciò sia possibile i ragionamenti svolti in questa mia Memoria [21].

§ 1.

1. Ipotesi. — Sia V una varietà immersa nell'S_n euclideo $(x) \equiv (x_1, \dots, x_n)$ ed ottenuta uguagliando a costante un integrale primo,

$$H(x) = H(x_1, \dots, x_n) = \text{cost.},$$

indipendente da t [22], del sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(x_1, \dots, x_n) = g_i(x) \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{7}$$

Supponiamo:

I) *le* $g_i(x)$ *funzioni analitiche* (e monodrome o rami monodromi di funzioni analitiche);

([20]) Si può anche vedere di sostituire $f(P)$ con una funzione del tipo $\mu(t) \cdot f(P)$, $\mu(t)$ essendo una funzione reale e periodica della variabile reale t.

Colgo l'occasione per avvertire che nel campo reale si svolgono tutte le considerazioni di questa mia Memoria.

([21]) Come è noto nella teoria delle funzioni misurabili è sfruttato il postulato di ZERMELO. Attraverso l'uso dei teoremi fondamentali di questa teoria il postulato di ZERMELO è quindi applicato anche in questa mia Memoria. Esso può essere evitato solo se si particolarizza in maniera conveniente la natura delle funzioni e degli insiemi che si prendono in considerazione; se cioè le funzioni misurabili e gli insiemi misurabili si sostituiscono rispettivamente con le equivalenti, nel caso nostro, di quelle funzioni che TONELLI chiama quasi-continue e con gli equivalenti di quegli insiemi che egli chiama pseudointervalli.

Si veda L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* [Zanichelli, Bologna, 1922], cap. III e in particolare le pagg. 122 e 131.

([22]) Integrale primo la cui esistenza è naturalmente un'ipotesi.

II) *la varietà integrale* V *analitica, semplice e chiusa* [23]; *le derivate parziali di* H(x) *mai simultaneamente nulle su* V, la quale è perciò priva di singolarità;

III) *le funzioni* $g_i(x)$ *olomorfe in ogni punto di* V — di guisa che, se le funzioni

$$x_i = X_i(x^0 \mid t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

dànno l'integrale del sistema (7) che per $t = 0$ soddisfa alle

$$x_i^0 = X_i(x_i^0 \mid t),$$

il punto (x^0) appartenendo a V, le $X_i(x^0 \mid t)$ si possono definire per ogni valore di t, riuscendo funzioni olomorfe di $(x^0\ t)$.

Indichiamo con $T(t)$ la trasformazione biunivoca di V in sè che al punto (x^0) fa corrispondere il punto dato dalle (8).

Allora $T(0)$ è l'identità, mentre riesce

$$T(t_1) \cdot T(t_2) = T(t_1 + t_2). \tag{9}$$

Supponiamo inoltre che:

IV) *la misura* (secondo Lebesgue) *nella metrica subordinata su* V *dalla metrica euclidea che vige nello spazio ambiente sia per ogni porzione misurabile di* V *un invariante rispetto al gruppo* G *delle* T(t) [24];

e che:

V) *ogni porzione misurabile di* V, *invariante rispetto a* T(t), $t \neq 0$, *abbia misura o nulla o uguale a quella di* V; *vale a dire, supponiamo che* G *sia completamente transitivo.*

2. **Teorema I.** — Io dico che:

Nelle ipotesi I), ..., V), *se* f(P) *è una funzione del punto* P *di* V, *sommabile su* V; *se* U *è una porzione misurabile di* V *e* U(t) *ne è l'immagine nella* T(t) [25], *allora la funzione*

$$F_1(t) = \int_{U(t)} f(P)\, dV$$

è funzione continua di t *e riesce*

$$\lim_{\tau \to +\infty} F(\tau) = \frac{mU}{mV} \int_V f(P)\, dV = \alpha \cdot mU, \tag{10}$$

---

[23] Una varietà $(n-1)$-dimensionale è semplice e chiusa, se si può porre in corrispondenza biunivoca e continua con un'ipersuperficie sferica a $n-1$ dimensioni.

[24] È questa un'ipotesi non essenzialmente più restrittiva che quella dell'invarianza dell'integrale di una conveniente funzione positiva.

Cfr. il mio lavoro citato, nota [16] e n. 12.

[25] Nel seguito, se A è una porzione di V, $A(t)$ sarà sempre l'immagine di A nella $T(t)$.

se

$$F(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau F_1(t)dt.$$

Nella dimostrazione di questo teorema procederemo per gradi.

Lo riconosceremo vero prima nell'ipotesi che U e quindi — data la biunivocità e la continuità, anzi l'analiticità, delle $T(t)$ — $U(t)$ siano aperti ([26]) e che $f(P)$ sia continua. Lo stabiliremo poi in generale mediante dei passaggi al limite.

Alla sua dimostrazione sarà opportuno premettere quella di qualche lemma.

3. **Lemma I.** — *Se* E *è una porzione misurabile di* V, *l'insieme* (*misurabile*)

$$E^* = E \dot{+} E(t') \dot{+} E(2t') \dot{+} \dots \qquad (t' \neq 0)$$

ha misura uguale ad mV, *non appena sia* mE > 0 ([27]).

In altri termini, dico che, se $mE > 0$, di guisa che è anche

$$mE^* \geq mE > 0, \tag{11}$$

allora è $mE^* = mV$.

Ed infatti, supponiamo che sia

$$mE^* < mV. \tag{12}$$

Poniamo

$$I_p = E \dot{+} E(t') \dot{+} \dots \dot{+} E(2pt') \qquad (p = 0, 1, 2, \dots)$$

e

$$\bar{I}_p = I_p(-pt'),$$

di guisa che per la IV) riesce

$$m\bar{I}_p = mI_p. \tag{13}$$

Gli insiemi misurabili

$$\bar{I}_0,\ \bar{I}_1,\ \dots$$

([26]) Nel seguito una porzione di V sarà detta aperta, se è aperta rispetto a V e non all'S_n in cui V è immersa (rispetto al quale S_n anzi una porzione di V non è mai aperta). Anche l'intorno di un punto di V sarà sempre inteso rispetto a V.

Per gli insiemi serrati (nel senso di Severi, cioè chiusi nel senso di Cantor) una convenzione simile è fuori di luogo, perchè, V essendo essa stessa un insieme serrato, ogni porzione di V, serrata rispetto a V, lo è anche rispetto all'S_n ambiente.

([27]) Naturalmente nell'enunciato di questo come dei lemmi che seguono è sempre sottinteso che debbono essere verificate le I), ..., V).

Avverto poi che se A_1, A_2,... sono degli insiemi di punti, la totalità dei punti che appartengono a uno almeno degli A_1, A_2,... sarà indicata con $A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \dots$; se A_1, A_2,... sono a due a due privi di punti in comune, l'insieme $A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \dots$ sarà indicato anche col simbolo $A_1 + A_2 + \dots$; cfr. C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen* [Teubner, Lipsia, 1918], pagg. 22-24.

formano evidentemente una successione crescente che tende verso l'insieme (misurabile)

$$\bar{E}^* = E \dotplus E(t') \dotplus E(-t') \dotplus E(2t') \dotplus E(-2t') \dotplus \dots,$$

invariante rispetto a $T(t')$.

In virtù della (13) è poi

$$m\bar{E}^* = \lim_{p \to +\infty} mI_p = \lim_{p \to +\infty} mI_p = mE^*.$$

Indi, se si tien conto della (11) e della (12), si trova

$$0 < m\bar{E}^* < mV;$$

il che, data l'invarianza di $\bar{E}^*$ rispetto a $T(t')$, è incompatibile con la V). Ed il lemma è dimostrato [28].

4. **Lemma II.** — *Se* f(P) *è una funzione continua del punto* P *di* V; *se* E *è una porzione aperta di* V; *e se poniamo*

$$F_1^*(t) = \int_{E(t)} f(P)dV \qquad (-\infty < t < +\infty).$$

allora $F_1^*(t)$ *è una funzione continua.*

Infatti sia t_0 un qualunque numero reale e sia

$$E_i(t_0) \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

la porzione di $E(t_0)$ che ha dalla frontiera di $E(t_0)$ — presa rispetto a V; cfr. nota [26] — una distanza — calcolata rispetto all'S_n ambiente — maggiore di $\frac{1}{i}$.

Allora $E_i(t_0)$ è evidentemente aperto, se non è vuoto; e non è certo vuoto, se i è sufficientemente grande; anzi la successione $E_1(t_0)$, $E_2(t_0)$, ... invade $E(t_0)$, di guisa che riesce

$$\lim_{i \to +\infty} mE_i(t_0) = mE(t_0). \tag{14}$$

Inoltre, fissato i, se h è sufficientemente piccolo in modulo, $E_i(t_0 + h)$ è evidentemente contenuto in $E(t_0)$, perchè il trasformato nella $T(h)$ di un punto P di V ha da P una distanza infinitesima, ed uniformemente infinitesima rispetto a P, con h.

---

[28] Le applicazioni del postulato di ZERMELO implicite nel testo si possono evitare, se si fanno delle ipotesi opportune sulla natura di E; se si suppone cioè che E e quindi $E(t')$, $E(-t')$, ... appartengano a quella classe di insiemi, cui si è alluso nella nota [24], equivalenti agli pseudointervalli secondo TONELLI.

Indi, qualunque sia il valore di i purchè prefissato, se h è sufficientemente piccolo, $E(t_0)$ ed $E(t_0+h)$ hanno in comune $E_i(t_0+h)$.

Ma è per la IV)

$$mE(t_0) - mE_i(t_0) = mE(t_0) - mE_i(t_0+h) = mE(t_0+h) - mE_i(t_0+h);$$

e di qui e dalla (14) segue che, per $h \to 0$, la porzione di $E(t_0)$ che non appartiene ad $E(t_0+h)$ e quella di $E(t_0+h)$ che non appartiene a $E(t_0)$ sono entrambe infinitesime.

Ma allora, $f(P)$ essendo limitata, anche la differenza $F_1^*(t_0) - F_1^*(t_0+h)$ è, come volevamo, infinitesima con h

5. **Lemma III.** — *Se* f(P) *è una funzione continua del punto* P *di* V; *se* U *è una porzione misurabile di* V *e se*

$$F_1^*(t) = \int_{U(t)} f(P)dV,$$

allora $F_1^*(t)$ *è, anche in questo caso, funzione continua di* t.

Sia infatti U_1, U_2, ... una successione decrescente di porzioni aperte di V, tutte contenenti U e tali da essere

$$mU_i \leq mU + \frac{1}{i} \text{ (29)} \qquad (i = 1, 2, ...).$$

Sarà allora

$$\int_{U_i(t)} f(P)dV = \int_{U(t)} f(P)dV + \int_{U_i(t)-U(t)} f(P)dV;$$

ma è, per la IV),

$$mU_i(t) - mU(t) = mU_i - mU \leq \frac{1}{i}$$

ed $f(P)$ è limitata, indi è

$$\lim_{i \to +\infty} \int_{U_i(t)} f(P)dV = \int_{U(t)} f(P)dV,$$

la relazione di limite essendo uniforme rispetto a t.

Indi $F_1^*(t)$ è continua, perchè tali sono per il lemma II le funzioni

$$\int_{U_1(t)} f(P)dV, \int_{U_2(t)} f(P)dV, \dots.$$

(29) Anche questa applicazione del postulato di ZERMELO non si può evitare, se non si fanno delle ipotesi opportune sulla natura di U.

6. **Lemma IV.** — *Se* f(P) *è una funzione continua del punto* P *di* V; *e se per ogni porzione aperta* E *di* V *poniamo*

$$\varphi(E) = \varliminf_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \int_{E(t)} f(P)dV$$

— il che ha senso perchè

$$\int_{E(t)} f(P)dV$$

è funzione continua e quindi integrabile di t —, *allora la funzione d'insieme* φ(E) *è funzione della sola misura di* E.

Infatti siano E_0 ed E_1 due porzioni aperte di V aventi misure uguali.

Sia τ_0 un numero positivo. E poniamo

$$e_1{}^0 = E_1 \cdot E_0,$$
$$e_1{}^1 = [E_1 - e_1{}^0]\cdot[E_0(\tau_0) - e_1{}^0(\tau_0)],$$
$$e_1{}^2 = [E_1 - e_1{}^0 - e_1{}^1]\cdot[E_0(2\tau_0) - e_1{}^0(2\tau_0) - e_1{}^1(\tau_0)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_1{}^p = [E_1 - e_1{}^0 - e_1{}^1 - \ldots - e_1{}^{p-1}]\cdot[E_0(p\tau_0) - e_1{}^0(p\tau_0) - e_1{}^1(p\tau_0 - \tau_0) - \ldots - e_1{}^{p-1}(\tau_0)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

gli insiemi $e_1{}^0$, $e_1{}^1$, $e_1{}^2$, ... sono evidentemente misurabili e privi a due a due di punti in comune, di guisa che, se $\bar{E}_1$ è la porzione di E_1 definita dalla

$$\bar{E}_1 = e_1{}^0 + e_1{}^1 + e_1{}^2 + \ldots,$$

è

$$m\bar{E}_1 = me_1{}^0 + me_1{}^1 + me_1{}^2 + \ldots \text{ [30]}.$$

Poniamo ancora

$$e_0{}^0 = E_0 \cdot E_1 = e_1{}^0,$$
$$e_0{}^1 = [E_0 - e_0{}^0]\cdot[E_1(-\tau_0) - e_0{}^0(-\tau_0)] = e_1{}^1(-\tau_0),$$
$$e_0{}^2 = [E_0 - e_0{}^0 - e_0{}^1]\cdot[E_1(-2\tau_0) - e_0{}^0(-2\tau_0) - e_0{}^1(-\tau_0)] = e_1{}^2(-2\tau_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_0{}^p = [E_0 - e_0{}^0 - e_0{}^1 - \ldots - e_0{}^{p-1}]\cdot$$
$$\cdot[E_1(-p\tau_0) - e_0{}^0(-p\tau_0) - e_0{}^1(-p\tau_0 + \tau_0) - \ldots - e_0{}^{p-1}(-\tau_0)] = e_1{}^p(-p\tau_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

[30] La particolare natura degli insiemi $e_1{}^0$, $e_1{}^1$, ... — che rientrano appunto in quella categoria di cui abbiamo fatto cenno alla fine della nota [24] — permette, volendo, di stabilire questa uguaglianza senza ricorrere al postulato di ZERMELO.

di guisa che anche gli insiemi e_0^0, e_0^1, e_0^2, ... sono misurabili e privi a due a due di punti in comune, riuscendo

$$m\bar{E}_0 = me_0^0 + me_0^1 + \dots \text{ [31]},$$

se $\bar{E}_0$ è la porzione di E_0 definita mediante la

$$\bar{E}_0 = e_0^0 + e_0^1 + \dots .$$

Si ha evidentemente, per la (9),

(15) $$e_0^i(t) = e_1^i(t - i\tau_0) \quad (i = 0, 1, 2, \dots; -\infty < t < +\infty);$$

e, per la IV),

$$me_0^i = me_1^i;$$

e quindi

$$m\bar{E}_0 = m\bar{E}_1 .$$

Premesso questo, dico che è

(16) $$mE_1 = mE_1 ,$$

e quindi

(17) $$m\bar{E}_0 = mE_0 .$$

Supponiamo infatti che la (16) non sia verificata. Non lo sarà, allora, nemmeno la (17) e riuscirà

(18) $$m(E_0 - \bar{E}_0) = m(E_1 - \bar{E}_1) > 0 .$$

Sia P un punto di $E_1 - E_1$.

Indichiamo con

$$p_1 , p_2 , \dots$$

la successione di tutti i valori interi e non negativi del numero i, tali che P appartenga all'insieme

$$E_0(i\tau_0);$$

con q_1, q_2, ... i numeri interi e non negativi rimanenti, di guisa che i punti

$$P(-q_1\tau_0), \ P(-q_2\tau_0), \ \dots$$

non appartengono ad E_0 e quindi nemmeno ad $E_0 - \bar{E}_0$.

Dico che P appartiene, se $p = p_1$, p_2, ..., all'insieme

$$e_1^0(p\tau_0) + e_1^1(p\tau_0 - \tau_0) + \dots + e_1^{p-1}(\tau_0) .$$

---

[31] Anche qui vale un'osservazione analoga a quella della nota precedente.

Infatti, se così non fosse, P — che appartiene a

$$E_1 - e_1^0 - \ldots - e_1^{p-1},$$

perchè non appartiene ad E_1, e ad $E_0(p\tau_0)$, per ipotesi — sarebbe anche un punto di e_1^p.

Il che è assurdo, perchè P non appartiene ad E_1.

Ne segue che, per $p = p_1, p_2, \ldots$, il punto

$$P(-p\tau_0)$$

appartiene ad $e_0^0 + e_0^1 + \ldots + e_0^{p-1}$ e quindi ad $\bar{E}_0$.

Indi, tenuto conto di quanto si è già detto per

$$P(-q_1\tau_0),\ P(-q_2\tau_0),\ \ldots,$$

si ha facilmente che i punti

$$P,\ P(-\tau_0),\ P(-2\tau_0),\ \ldots$$

non appartengono mai ad $E_0 - \bar{E}_0$.

Val quanto dire: l'insieme $E_0 - E_0$ non appartiene all'insieme

$$[E_1 - E_1] \dot{+} [E_1(-\tau_0) - \bar{E}_1(-\tau_0)] \dot{+} \ldots .$$

Il che, per la (18), è incompatibile col risultato espresso nel lemma I.

L'assurdo a cui siam pervenuti dimostra che le (16) e (17) sono verificate.

Indi, in virtù della IV), $E_1(t)$, che appartiene ad $E_1(t)$, coincide con $E_1(t)$ a meno di un insieme di misura nulla. E questo per ogni valor di t. Ne segue

$$\int\limits_{\bar{E}_1(t)} f(P)dV = \int\limits_{E_1(t)} f(P)dV \tag{19}$$

e

$$\varphi(\bar{E}_1) = \varphi(E_1). \tag{20}$$

L'insieme $\bar{E}_0$ coincidendo con E_0 a meno di un insieme di misura nulla, avremo del pari

$$\int\limits_{\bar{E}_0(t)} f(P)dV = \int\limits_{E_0(t)} f(P)dV \tag{21}$$

e

$$\varphi(E_0) = \varphi(E_0). \tag{22}$$

Ora è identicamente, per ogni intero $p > 0$ prefissato e per $\tau \geq p\tau_0$,

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \int_{\bar{E}_0(t)} f(P)dV = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \sum_0^{+\infty}{}_i \int_{e_0^i(t)} f(P)dV \text{ [32]} =$$

$$= \frac{1}{\tau}\sum_0^{p-1}{}_i \int_0^\tau dt \int_{e_0^i(t)} f(P)dV + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \sum_p^{+\infty}{}_i \int_{e_0^i(t)} f(P)dV \text{ [33]} =$$

$$= \frac{1}{\tau}\sum_0^{p-1}{}_i \int_{i\tau_0}^\tau dt \int_{e_0^i(t)} f(P)dV + \frac{1}{\tau}\sum_0^{p-1}{}_i \int_0^{i\tau_0} dt \int_{e_0^i(t)} f(P)dV + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \sum_p^{+\infty}{}_i \int_{e_0^i(t)} f(P)dV =$$

$$= \frac{1}{\tau}\sum_0^{p-1}{}_i \int_0^{\tau - i\tau_0} dt \int_{e_1^i(t)} f(P)dV + \frac{1}{\tau}\sum_0^{p-1}{}_i \int_0^{i\tau_0} dt \int_{e_0^i(t)} f(P)dV + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \sum_p^{+\infty}{}_i \int_{e_0^i(t)} f(P)dV \text{ [34]} =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \sum_0^{+\infty}{}_i \int_{e_1^i(t)} f(P)dV - \frac{1}{\tau}\sum_0^{p-1}{}_i \int_{\tau - i\tau_0}^\tau dt \int_{e_1^i(t)} f(P)dV - \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \sum_p^{+\infty}{}_i \int_{e_1^i(t)} f(P)dV +$$

$$+ \frac{1}{\tau}\sum_0^{p-1}{}_i \int_0^{i\tau_0} dt \int_{e_0^i(t)} f(P)dV + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \sum_p^{+\infty}{}_i \int_{e_0^i(t)} f(P)dV;$$

cioè

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \int_{\bar{E}_0(t)} f(P)dV - \frac{1}{\tau}\sum_0^{p-1}{}_i \int_0^{i\tau_0} dt \int_{e_0^i(t)} f(P)dV - \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \sum_p^{+\infty}{}_i \int_{e_0^i(t)} f(P)dV =$$
$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \int_{\bar{E}_1(t)} f(P)dV - \frac{1}{\tau}\sum_0^{p-1}{}_i \int_{\tau - i\tau_0}^\tau dt \int_{e_1^i(t)} f(P)dV - \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \sum_p^{+\infty}{}_i \int_{e_1^i(t)} f(P)dV. \tag{23}$$

([32]) La continuità della $f(P)$ e la particolare natura degli $e_s^i(t)$ permettono di stabilire le

$$\int_{E_s} f(P)dV = \sum_0^{+\infty}{}_i \int_{e_s^i(t)} f(P)dV \qquad (s = 0, 1)$$

senza ricorrere al postulato di Zermelo.

([33]) Le funzioni

$$\int_{e_s^i(t)} f(P)dt \qquad (s = 0, 1)$$

sono integrabili, perchè (lemma III) continue.

Si noti che anche qui nei riguardi della applicazione, implicita attraverso l'uso del lemma III, del postulato di Zermelo vale un'osservazione analoga a quella della nota ([30]).

([34]) Si tengano presenti le (15).

Se p è sufficientemente grande, gli insiemi $e_0^p + e_0^{p+1} + \dots;\ e_1^p + e_1^{p+1} + \dots,$ e quindi anche i loro trasformati nelle $T(t)$, hanno una misura che possiamo supporre convenientemente piccola.

Indi, fissato il numero positivo ε, possiamo supporre

$$(24)\qquad \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \sum_p^{+\infty}{}_i \int_{e_0{}^i(t)} f(P)dV \Big| < \varepsilon, \quad \Big|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \sum_p^{+\infty}{}_i \int_{e_1{}^i(t)} f(P)dV \Big| < \varepsilon,$$

pur di scegliere p convenientemente.

Una volta p fissato, possiamo supporre τ così grande da essere

$$(25)\qquad \Big|\frac{1}{\tau}\sum_0^{p-1}{}_i \int_0^{i\tau_0} dt \int_{e_0{}^i(t)} f(P)dV \Big| < \varepsilon, \quad \Big|\frac{1}{\tau}\sum_0^{p-1}{}_i \int_{\tau - i\tau_0}^{\tau} dt \int_{e_1{}^i(t)} f(P)dV \Big| < \varepsilon.$$

Il confronto delle (23), (24) e (25) dà senz'altro

$$|\,\varphi(\bar{E}_0) - \varphi(E_1)\,| \leq 4\,\varepsilon\,;$$

indi, per l'arbitrarietà di ε,

$$\varphi(\bar{E}_0) = \varphi(\bar{E}_1);$$

cioè, per la (20) e la (22),

$$\varphi(E_0) = \varphi(E_1).$$

Uguaglianza questa che equivale appunto al lemma che volevamo stabilire.

Osservazioni. — Si noti che il ragionamento precedente si può applicare anche a insiemi misurabili qualunque e non soltanto a insiemi aperti.

Io ho preferito considerare solo insiemi aperti, e per aver modo di indicare chiaramente fino a che punto le considerazioni svolte in questa Memoria si possono liberare dal postulato di Zermelo, e per trovarmi agevolata la via nelle mie eventuali ricerche ulteriori sull'argomento.

Si noti infine che se $T(t')$ è una trasformazione di G che sia metricamente transitiva, tale è anche la $T(-t')$ ed è naturalmente $t' \neq 0$. Posto allora τ_0 uguale a quello dei due numeri t' e $-t'$ che è positivo, il ragionamento svolto conserva inalterata la sua validità.

E ciò conferma quanto si è detto alla fine della nota ([15]).

7. Lemma V. — Siano

$$U_0,\ U_1,\ \dots,\ U_s \qquad (s = 1,\ 2,\ \dots)$$

$s+1$ porzioni aperte di V verificanti le

$$mU_q = mU_0 \qquad (q = 1, \dots, s)$$

e $U_1, \dots, U_s$ siano prive a due a due di punti in comune.

Fissato il numero positivo τ_0, indichiamo con

$$U_q^0,\ U_q^1,\ \ldots \qquad (q=1, \ldots, s)$$

gli equivalenti per U_0 ed U_q degli insiemi

$$e_1^0,\ e_1^1,\ \ldots$$

associati nel numero precedente a E_0 ed E_1; e poniamo

$$u_q^p = U_q^p(-p\tau_0) \qquad (p=0, 1, \ldots).$$

Valgono allora (35), se p è un intero positivo e $\tau \geq p\tau_0$, le

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \int_{U_0(t)} f(P)dV - \frac{1}{\tau}\sum_0^{p-1}{}_i \int_0^{i\tau_0} dt \int_{u_q^i(t)} f(P)dV - \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \sum_p^{+\infty}{}_i \int_{u_q^i(t)} f(P)dV =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \int_{U_q(t)} f(P)dV - \frac{1}{\tau}\sum_0^{p-1}{}_i \int_{\tau-i\tau_0}^{\tau} dt \int_{U_q^i(t)} f(P)dV - \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \sum_p^{+\infty}{}_i \int_{U_q^i(t)} f(P)dV \quad (q=1, \ldots, s),$$

che, sommate membro a membro, dànno facilmente

$$\varphi(U_1 + U_2 + \ldots + U_s) = n\varphi(U_0) = \varphi(U_1) + \ldots + \varphi(U_s), \tag{26}$$

ove si tenga conto delle

$$\left|\frac{1}{\tau}\sum_0^{p-1}{}_i \int_0^{i\tau_0} dt \int_{u_q^i(t)} f(P)dV\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \sum_p^{+\infty}{}_i \int_{u_q^i(t)} f(P)dV\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{1}{\tau}\sum_0^{p}{}_i^1 \int_{\tau-i\tau_0}^{\tau} dt \int_{U_q^i(t)} f(P)dV\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \sum_p^{+\infty}{}_i \int_{U_q^i(t)} f(P)dV\right| < \varepsilon \quad (q=1, \ldots, s).$$

che — cfr. n. 6 — si possono ritenere soddisfatte, ε essendo un numero positivo prefissato ad arbitrio, non appena p sia scelto in maniera opportuna e τ sia sufficientemente grande.

Se indichiamo con

$$\psi(\eta)$$

la funzione — evidentemente continua in tutto l'intervallo $0 \leq \eta \leq mV$ (36)

(35) Si tengano presenti la (23) e le (19) e (21).

(36) Che dalle posizioni indicate nel testo $\psi(\eta)$ sia effettivamente definita in tutto l'intervallo $0 \leq \eta \leq mV$ si riconosce facilmente. Basta infatti osservare che la porzione di V definita dalla $x_n < h$ è aperta ed ha una misura che varia con continuità da zero a mV, e quindi assume tutti i valori intermedi, quando h varia da $-\infty$ a $+\infty$.

La continuità poi di $\psi(\eta)$ è stata già implicitamente riconosciuta nel ragionamento che ci ha condotti a stabilire le (24).

— nulla, se $\eta = 0$, e, se $\eta > 0$, uguale all'unico valore assunto dalla $\varphi(E)$ su tutte le porzioni aperte di V aventi per misura η, la (26) si traduce nella

(27) $$\psi(s\eta) = s\psi(\eta) \text{ [37]} \qquad (s = 0, 1, ...; \, 0 \leq s\eta \leq mV).$$

Se η_1 e η_2 sono due numeri per i quali riesce $\eta_1 + \eta_2 \leq mV$, possiamo evidentemente determinare — data la continuità di $\psi(\eta)$ — un numero η_0 e due numeri interi e non negativi s_1 e s_2 tali da essere simultaneamente

$$s_1\eta_0 + s_2\eta_0 \leq mV$$

e, ε essendo un numero positivo arbitrariamente prefissato,

$$|\psi(\eta_i) - \psi(s_i\eta_0)| \leq \varepsilon, \quad |\psi(\eta_1 + \eta_2) - \psi(s_1\eta_0 + s_2\eta_0)| \leq \varepsilon \qquad (i = 1, 2).$$

Di qui e dalla

$$\psi(s_1\eta_0 + s_2\eta_0) = s_1\psi(\eta_0) + s_2\psi(\eta_0) = \psi(s_1\eta_0) + \psi(s_2\eta_0).$$

segue facilmente che:

La funzione continua $\psi(\eta)$ verifica l'equazione

(28) $$\psi(\eta_1) + \psi(\eta_2) = \psi(\eta_1 + \eta_2) \quad (\eta_1 \geq 0, \, \eta_2 \geq 0; \, \eta_1 + \eta_2 \leq mV).$$

e quindi è della forma

(29) $$\psi(\eta) = k \cdot \eta,$$

con k = cost.

La (28) equivale già di per sè all'additività in senso stretto della $\varphi(E)$. La (29) ci permette di asserirne l'additività in senso lato.

Per stabilire la (29) era già sufficiente, come del resto è noto, la (27). Da questa segue infatti, se $s_1 \geq 0$ e $s_2 > 0$ sono due interi, con $s_1 \leq s_2$,

$$\psi\left(\frac{s_1 mV}{s_2}\right) = s_1\psi\left(\frac{mV}{s_2}\right) = \frac{s_1}{s_2}\,\psi(mV);$$

la (29) è quindi vera se $\frac{1}{mV}\,\eta$ è un numero razionale; ma $\psi(\eta)$ è continua, quindi ...

Osservazione. — A proposito del numero positivo τ_0 valgono naturalmente delle considerazioni analoghe a quelle fatte alla fine del numero precedente.

---

[37] A stretto rigore, per $\eta = 0$, la (27) — allora banale — non segue dalla (26), almeno nelle ipotesi in cui quest'ultima è stata dimostrata; e, per $\eta > 0$, sarà riconosciuta conseguenza della (26) solo dopo di aver rilevato che, se è $\eta < \frac{mV}{s}$, allora esistono — come si riconosce con un'osservazione analoga a quella della nota precedente — s porzioni di V, aperte, prive a due a due di punti comuni ed aventi tutte misura uguale a η.

8. **Dimostrazione del teorema I.** — Il risultato del numero precedente ci autorizza a scrivere $\varphi(U)=k\cdot mU$, se U è una porzione aperta (su V) di V.

Posto $U=V$, si ha evidentemente $U(t)\equiv V$, e quindi

$$\varphi(V)=\int\limits_{V} f(P)dV;$$

ma è anche $\varphi(V)=k\cdot mV$, indi si trova

$$k=\frac{1}{mV}\int\limits_{V} f(P)dV,$$

e

$$\varphi(U)=\frac{mU}{mV}\int\limits_{V} f(P)dV.$$

Cambiando $f(P)$ in $-f(P)$, si trova agevolmente che è del pari

$$\varlimsup_{\tau\to+\infty}\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau dt\int\limits_{U(t)} f(P)dV=\frac{mU}{mV}\int\limits_{V} f(P)dV.$$

E la (10) del teorema I è quindi vera, almeno sinchè $f(P)$ è continua ed U è una porzione aperta di V ([38]).

9. **Compimento della dimostrazione.** — Supponiamo ora che $f(P)$ sia misurabile e limitata e che U sia una porzione misurabile di V.

Siano

$$f_1(P),\quad f_2(P),\ldots$$

le funzioni — continue ed equilimitate su V di una successione convergente verso $f(P)$ in quasi tutti i punti di V; di guisa che la relazione di limite

$$\lim_{i\to+\infty} f_i(P)=f(P)$$

vale quasi-uniformemente nell'insieme in cui la successione $f_1(P)$, $f_2(P),\ldots$ converge ([39]).

Dico che allora è, uniformemente rispetto a t,

$$\lim_{i\to+\infty}\int\limits_{U(t)} f_i(P)dV=\int\limits_{U(t)} f(P)dV. \tag{30}$$

([38]) Si sarà notato che per stabilire questo teorema non si è mai fatto un uso essenziale del postulato di ZERMELO.

([39]) Cfr. CARATHÉODORY, loc. cit., nota ([27]), pag. 382, n. 354.

Infatti, sia $\bar{V}$ una porzione misurabile di V con $m\bar{V} < \varepsilon$, dove $\varepsilon > 0$ è un numero prefissato, tale che nell'insieme $V - \bar{V}$ la successione $f_1(P), f_2(P), \ldots$ converga uniformemente. Fissato $\delta > 0$, in ogni punto di $V - \bar{V}$ sarà

$$|f(P) - f_i(P)| < \delta,$$

se $i \geq i_0$, con i_0 scelto in maniera conveniente.

Allora, se si pone

$$\bar{U}(t) = \bar{V} \cdot U(t), \quad \bar{U}^*(t) = U(t) - \bar{U}(t),$$

si avrà

$$\left| \int_{U(t)} \{ f(P) - f_i(P) \} dV \right| \leq \int_{\bar{U}(t)} | f(P) - f_i(P) | dV +$$

$$+ \int_{\bar{U}^*(t)} | f(P) - f_i(P) | dV \leq 2M \cdot \varepsilon + \delta \cdot mV \qquad (i \geq i_0),$$

se M è un numero tale che riesca $|f(P)| \leq M$, $|f_i(P)| \leq M$.

L'uniformità della relazione di limite espressa dalla (30) è quindi dimostrata.

Dalla (30) segue allora, in virtù del lemma III, che

$$\int_{U(t)} f(P) dV$$

è funzione continua di t.

Sia ora $U_1, U_2, \ldots$ una successione decrescente di porzioni aperte di V, contenenti U e tali che sia $mU_i \leq mU + \frac{1}{i}$.

Si avrà allora (cfr. n. 5)

$$\left| \int_{U_i(t)} f_i(P) dV - \int_{U(t)} f_i(P) dV \right| \leq 2M \cdot \frac{1}{i},$$

e quindi, insieme con la (30), sarà, del pari uniformemente rispetto a t,

$$\lim_{i \to +\infty} \int_{U_i(t)} f_i(P) dV = \int_{U(t)} f(P) dV \text{ [40]};$$

e quindi, uniformemente rispetto a τ,

$$(31) \qquad \lim_{i \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \int_{U_i(t)} f_i(P) dV = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \int_{U(t)} f(P) dV.$$

---

[40] La relazione di limite scritta si poteva riconoscere valida uniformemente con lo stesso ragionamento svolto al n. 5 senza passare per il tramite della validità uniforme della (30).

E di qui e dal risultato del n. 8 segue facilmente che la (10) è valida anche se $f(P)$ è misurabile e limitata ed U è una porzione misurabile di V.

Se $f(P)$ è soltanto (misurabile e) sommabile su V, di guisa che ha misura nulla la porzione di V in cui è $f(P) = \pm \infty$, poniamo

$$f_i(P) = f(P), \quad \text{se} \quad |f(P)| \leq i;$$
$$f_i(P) = 0, \quad \text{se} \quad |f(P)| > i;$$

la successione di funzioni limitate e misurabili

$$f_1(P),\ f_2(P), \ldots$$

converge allora verso $f(P)$ in quasi tutti i punti di V, la convergenza riuscendo quasi uniforme.

Se $\overline{V}$, $U(t)$, $\overline{U}^*(t)$, ε, δ, i_0 hanno allora un significato analogo a quello precedente, si trova

$$\left| \int_{U(t)} \{ f(P) - f_i(P) \} \, dV \right| \leq \int_{U(t)} | f(P) - f_i(P) | \, dV +$$
$$+ \int_{U^*(t)} | f(P) - f_i(P) | \, dV \leq 2 \int_{\overline{V}} | f(P) | \, dV + \delta \cdot m V \qquad (i \geq i_0);$$

ma per l'assoluta continuità dell'integrale di LEBESGUE l'ultimo integrale scritto è infinitesimo con ε, quindi la (30) è soddisfatta, in maniera uniforme, anche nel nuovo significato dei simboli [41].

Lo stesso si può dire allora per la (31); e di qui e dal fatto che la (10) è valida per le funzioni $f_1(P)$, $f_2(P), \ldots$ si deduce il teorema I in tutta la sua generalità.

§ 2.

10. **Ipotesi e notazioni.** — Indichiamo con $r = n - 1$ la dimensione di V e

VI) *sia* γ *un pezzo di varietà analitica, contenuto in* V, $(\mathrm{r}-1)$*-dimensionale, di equazioni parametriche*

$$x_i = \xi_i(y) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{32}$$

— il punto $(y) = (y_1, \ldots, y_{r-1})$ variando nell'intervallo

$$\sigma : a_l \leq y_l \leq b_l \qquad (l = 1, \ldots, r-1;\ a_l < b_l),$$

[41] In particolare si ha allora che, anche in queste ipotesi, la funzione $\int_{U(t)} f(P) dV$ è continua.

le $\xi_i(y)$ essendo olomorfe in

$$\bar{\sigma}: \bar{a}_l < y_l < \bar{b}_l \qquad (\bar{a}_l < a_l;\ b_l < \bar{b}_l),$$

le (32) ponendo una corrispondenza biunivoca fra σ e γ, di guisa che γ era anche semplice — *e indichiamo con* $\bar{\gamma}$ *l'insieme descritto dal punto dato dalle* (32), *per* (y) *variabile in* $\bar{\sigma}$ — insieme che, per l'analiticità di V e di γ, apparterrà anche esso a V; e che supporremo in corrispondenza biunivoca con $\bar{\sigma}$.

E supponiamo che:

VII) *la caratteristica della matrice*

$$\frac{\partial(\xi_1, \dots, \xi_{r+1})}{\partial(y_1, \dots, y_{r-1})}$$

sia r − 1 *in ogni punto* $\bar{\sigma}$ — di guisa che $\bar{\gamma}$ è dotato di S_{r-1} tangente in ogni suo punto —;

che:

VIII) *in ogni punto* P $\equiv$ (x) *di* $\bar{\gamma}$ *sia*

$$g_1^2(x) + \dots + g_n^2(x) > 0; \tag{33}$$

e che:

IX) *la tangente in* P, P *essendo un punto di* $\bar{\gamma}$, *alla traiettoria da* P *descritta* — tangente che, appunto per la (33), esiste di certo, univocamente determinata — *non appartenga mai allo* S_{r-1} *tangente a* $\bar{\gamma}$ *in* P; vale a dire, $\bar{\gamma}$ *non tocchi mai nessuna delle traiettorie descritte dai suoi punti.*

11. **Notazioni e richiamo dei risultati.** — Sia Γ_τ l'insieme descritto da $\gamma(t)$ per t variabile da 0 a $\tau(> 0)$, ogni punto di Γ_τ essendo calcolato con la debita molteplicità — che dipende dal numero di volte che $\gamma(t)$ passa per di esso e della quale terremo automaticamente conto attraverso una rappresentazione parametrica di Γ_τ —; sia poi Γ l'insieme invaso da Γ_τ per $\tau \to +\infty$.

In maniera analoga si definiscano, a partire da $\bar{\gamma}$, $\bar{\Gamma}_\tau$ e quindi $\bar{\Gamma}$.

Pensiamo σ e $\bar{\sigma}$ immersi nell'S_r descritto dal punto $(y \mid t) \equiv (y_1, \dots, y_{r-1} \mid t)$ e indichiamo rispettivamente con Σ_τ e $\bar{\Sigma}_\tau$ gli insiemi dei punti di questo S_r che soddisfanno alle disuguaglianze

$$a_l \leq y_l \leq b_l,\ 0 \leq t \leq \tau;$$
$$\bar{a}_l < y_l < \bar{b}_l,\ 0 \leq t \leq \tau \qquad (l = 1, \dots, r-1);$$

con $\sigma(t')$, per $0 \leq t' \leq \tau$, la sezione di Σ_τ con l'iperpiano $t = t'$; e Σ e $\bar{\Sigma}$ si definiscano a partire da Σ_τ e $\overline{\Sigma}_\tau$, così come Γ e $\overline{\Gamma}$ lo sono stati a partire da Γ_τ e $\overline{\Gamma}_\tau$.

Allora, le $X_i(x\,|\,t)$ avendo il significato chiarito nel n. 1, le funzioni

$$G_i(y\,|\,t) = X_i(\xi(y)\,|\,t) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

sono olomorfe in $\overline{\Sigma}$, e le equazioni

$$x_i = G_i(y\,|\,t) \tag{34}$$

definiscono, per $(y\,|\,t)$ variabile in $\overline{\Sigma}$, una trasformazione $\overline{\Theta}$ di Σ in $\overline{\Gamma}$.

La trasformazione Θ, che la $\overline{\Theta}$ subordina fra Σ e Γ, si ottiene dalle (34) supponendo $(y\,|\,t)$ variabile in Σ.

Essa muta evidentemente Σ_τ in Γ_τ; le semirette del tipo

$$y_l = \text{cost.}, \ t \geq 0 \qquad (l = 1, \dots, r-1)$$

contenute in Σ nelle semitraiettorie descritte dai punti di γ negli istanti non negativi; $\sigma(t)$ in $\gamma(t)$, quest' ultima trasformazione riuscendo biunivoca.

Con un ragionamento analogo a quello svolto nel n. 4 della mia Nota citata si riconosce che

La trasformazione $\overline{\Theta}$ è localmente invertibile nei punti di $\overline{\Sigma}$,
cioè subordina una corrispondenza biunivoca fra gli intorni di due punti omologhi, uno di $\overline{\Sigma}$ e l'altro di Γ, l'intorno di quest' ultimo punto andando inteso rispetto a V.

Per le ragioni addotte al n. 5 della stessa Nota, si ha che

Per τ sufficientemente piccolo — per esempio per $\tau \leq \tau_0$, con $\tau_0 > 0$ — *è biunivoca anche la trasformazione, subordinata dalla Θ, di Σ_τ in Γ_τ.*

Di qui e dalla (9) segue facilmente che Θ muta con biunivocità la porzione di Σ compresa fra i due iperpiani $t' = t_0$, $t' = t_0 + \tau_0$, dove $t_0 \geq 0$, nella porzione di Γ descritta da $\gamma(t')$ al variare di t' nell'intervallo $t_0 \leq t' \leq t_0 + \tau_0$.

Ne segue anche che la molteplicità di ogni punto di Γ_τ è sempre finita, tendendo eventualmente verso infinito per $\tau \to +\infty$.

12. **Lemmi.** — Col ragionamento del n. 6 della mia Nota citata si riconosce che

Esiste in $\overline{\sigma}$ una funzione

$$v(y)$$

di $(y) = (y_1, \ldots, y_{r-1})$, *olomorfa e sempre positiva, tale che, posto in* $\bar{\Sigma}$

$$w(y \mid t) = v(y),$$

l' espressione

$$w(y \mid t) d\sigma dt \qquad (d\sigma = dy_1 \ldots dy_{r-1})$$

rappresenta l' elemento di volume, calcolato, in conformità della metrica fissata su V, *nel punto* (di $\bar{\Gamma}$ e quindi) *di* V *omologo nella* $\bar{\Theta}$ *del punto* $(y \mid t)$ *di* $\bar{\Sigma}$.

Indi, se E è una porzione aperta e limitata di Σ, il trasformato E^1 di E nella Θ — che, per la invertibilità locale della $\bar{\Theta}$, è una porzione aperta e quindi misurabile di V — ha una misura che non supera il valore dell'integrale (di Lebesgue)

$$\int_E w(y \mid t) d\sigma dt, \tag{35}$$

l' uguaglianza avendo luogo, se, e solo se, Θ pone una corrispondenza biunivoca fra E ed E^1.

Se E è trasformato in E^1 senza biunivocità, l' integrale (35) darà la misura dell' insieme ponderato ottenuto da E^1 calcolandone ogni suo punto con la debita molteplicità ([42]).

Risultati perfettamente analoghi sussistono, se E è un insieme limitato e serrato ([43]), contenuto in Σ.

Se $f(P)$ è una funzione continua del punto P di V e $f_1(y \mid t)$ la funzione continua del punto $R \equiv (y \mid t)$ di Σ, ottenuta ponendola uguale a $f(P)$ nei punti R omologhi, nella Θ^{-1}, del punto P di Γ, sarà

$$\int_{E^1} f(P) dV = \int_E f_1(y \mid t) w(y \mid t) d\sigma dt,$$

se E ed E^1 hanno il significato precedente, ogni punto di E^1 essendo calcolato con la debita molteplicità.

In particolare riesce

$$\int_{\Gamma_\tau} f(P) d\Gamma = \int_\sigma v(y) d\sigma \int_0^\tau f_1(y \mid t) dt; \quad m\Gamma_\tau = \tau \int_\sigma v(y) d\sigma.$$

([42]) Che sarà data dal numero (evidentemente finito per la limitatezza di E e per quanto è detto alla fine del n. 12) dei suoi omologhi nella Θ^{-1}.

([43]) Lo stesso vale anche se E è un insieme misurabile.

13. **Teorema II.** — Dico che:

Nelle ipotesi I), ..., IX), *riesce*

(36) $$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{1}{m\Gamma_\tau}\int_{\Gamma_\tau} f(P)d\Gamma=\frac{1}{mV}\int_V f(P)dV=\alpha,$$

se f(P) *è una funzione del punto* P *di* V, *sommabile su* V [44].

Supponiamo $f(P)$ continua.

Indichiamo (vedi n. 11) con τ_0 un numero positivo tale che tutti i punti di Γ_{τ_0} siano semplici e con $\Sigma_{\tau_0}(t_0)$, per $t_0\geq 0$, la porzione di Σ definita dalle

$$a_l\leq y_l\leq b_l,\quad t_0\leq t\leq t_0+\tau_0 \qquad (l=1,\dots,r-1),$$

di guisa che $\Gamma_{\tau_0}(t_0)$, cioè il trasformato di Γ_{τ_0} nella $T(t_0)$, è anche l'omologo di $\Sigma_{\tau_0}(t_0)$ nella Θ.

Poichè i punti di Γ_{τ_0} sono tutti semplici, a Γ_{τ_0} possiamo applicare il teorema I. Con il che si ottiene

$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt\int_{\Gamma_{\tau_0}(t)} f(P)dV=\alpha\cdot m\Gamma_{\tau_0}\ \text{[45]};$$

cioè, tenuto conto anche di quanto è detto alla fine del numero precedente.

$$\alpha=\lim_{\tau\to+\infty}\frac{1}{\tau\cdot m\Gamma_{\tau_0}}\int_0^\tau dt\int_{\Gamma_{\tau_0}(t)} f(P)dV=\lim_{\tau\to+\infty}\frac{1}{\tau\cdot\tau_0\cdot\int_\sigma v(y)d\sigma}\int_0^\tau dt\int_{\Gamma_{\tau_0}(t)} f(P)dV:$$

---

[44] Si potrebbe forse obiettare che il simbolo

$$\int_{\Gamma_\tau} f(P)dV$$

è stato definito solo nell'ipotesi della continuità della $f(P)$.

Ma si comprende subito che, se p è un qualsiasi intero positivo sufficientemente grande perchè Γ_{τ_0}, con $\tau_0=\frac{\tau}{p}$, sia a punti tutti semplici, è da porre

$$\int_{\Gamma_\tau} f(P)dV=\sum_0^{p-1}{}_i\int_{\Gamma_{\tau_0}(i\tau_0)} f(P)dV.$$

[45] Si riconosce immediatamente che, posto

$$\bar f_1(y\,|\,t,\beta)=f_1(y\,|\,t+\beta)v(y)$$

nell'insieme

$$a_l\leq y_l\leq b_l,\quad 0\leq t,\quad t\leq\beta\leq t+\tau_0 \qquad (l-1,\dots,r-1),$$

la funzione $\bar f_1(y\ \ t,\beta)$ vi è continua e che l'integrale scritto nel testo è uguale all'integrale di $\bar f_1(y\ \ t,\beta)$ esteso all'insieme

$$a_l\leq y_l\leq b_l,\quad 0\leq t\leq\tau,\quad t\leq\beta\leq t+\tau_0 \qquad (l=1,\dots,r-1).$$

e quindi

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau_0 \cdot m\Gamma_\tau} \int_0^\tau dt \int_{\Gamma_{\tau_0}(t)} f(P) dV = \alpha. \tag{37}$$

Ma è

$$\int_0^\tau dt \int_{\Gamma_{\tau_0}(t)} f(P) dV =$$

$$= \int_0^\tau dt \int_t^{t+\tau_0} d\beta \int_\sigma f_1(y \mid \beta) v(y) d\sigma = \int_0^\tau dt \int_0^{\tau_0} d\beta \int_\sigma f_1(y \mid \beta + t) v(y) d\sigma =$$

$$= \int_0^{\tau_0} d\beta \int_0^\tau dt \int_\sigma f_1(y \mid \beta + t) v(y) d\sigma = \int_0^{\tau_0} d\beta \int_\beta^{\tau+\beta} dt \int_\sigma f_1(y \mid t) v(y) d\sigma =$$

$$= \int_0^{\tau_0} d\beta \int_0^\tau dt \int_\sigma f_1(y \mid t) v(y) d\sigma - \int_0^{\tau_0} d\beta \int_0^\beta dt \int_\sigma f_1(y \mid t) v(y) d\sigma +$$

$$+ \int_0^{\tau_0} d\beta \int_\tau^{\tau+\beta} dt \int_\sigma f_1(y \mid t) v(y) d\sigma = \tau_0 \int_{\Gamma_\tau} f(P) dV +$$

$$+ \int_0^{\tau_0} d\beta \int_\tau^{\tau+\beta} dt \int_\sigma f_1(y \mid t) v(y) d\sigma - \int_0^{\tau_0} d\beta \int_0^\beta dt \int_\sigma f_1(y \mid t) v(y) d\sigma.$$

Gli ultimi due integrali scritti si mantengono evidentemente sempre minori di

$$M \cdot \tau_0^2 \cdot \int_\sigma v(y) d\sigma,$$

se M è il massimo di $|f(P)|$ su V.

E la (37) si riconosce quindi immediatamente equivalere alla

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{m\Gamma_\tau} \int_{\Gamma_\tau} f(P) d\Gamma = \alpha.$$

La (36) è così verificata, se $f(P)$ è continua ([46]).

([46]) Vale un'osservazione analoga a quella della nota ([38]).

14. Compimento della dimostrazione. — Supponiamo $f(P)$ misurabile e limitata.

Noi potremo costruire una successione di funzioni continue ed equilimitate

$$f_1(P),\ f_2(P),\ f_3(P), \ldots$$

convergente (quasi uniformemente) verso $f(P)$ in quasi tutti i punti di V.

Avremo quindi, uniformemente rispetto a p,

$$\lim_{i \to +\infty} \int_{\Gamma_{\tau_0}(p\tau_0)} f_i(P)\,dV = \int_{\Gamma_{\tau_0}(p\tau_0)} f(P)\,dV \qquad (p = 0, 1, \ldots),$$

se Γ_{τ_0} ha lo stesso significato che nel numero precedente; e, tenuto conto della nota [44],

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{1}{m\Gamma_{p\tau_0}} \int_{\Gamma_{p\tau_0}} f_i(P)\,dV = \frac{1}{m\Gamma_{p\tau_0}} \int_{\Gamma_{p\tau_0}} f(P)\,dV,$$

sempre in maniera uniforme rispetto a p.

Di qui segue — cfr. n. 9 — la

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{m\Gamma_{p\tau_0}} \int_{\Gamma_{p\tau_0}} f(P)\,dV = \alpha.$$

che equivale senz'altro alla (36), come si riconosce facilmente osservando che è

$$\frac{1}{m\Gamma_\tau} \int_{\Gamma_\tau} f(P)\,dV = \frac{1}{m\Gamma_\tau} \frac{m\Gamma_{\bar\tau}}{m\Gamma_{\bar\tau}} \int_{\Gamma_{\bar\tau}} f(P)\,dV + \frac{1}{m\Gamma_\tau} \int_{\Gamma_\tau - \Gamma_{\bar\tau}} f(P)\,dV$$

— dove $\bar\tau = p\tau_0$, con p intero non negativo e tale da essere $p\tau_0 \leq \tau \leq (p+1)\tau_0$; che

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{m\Gamma_{\bar\tau}}{m\Gamma_\tau} = 1, \qquad \lim_{\tau \to +\infty} m\Gamma_\tau = +\infty$$

e che la quantità

$$\left| \int_{\Gamma_\tau - \Gamma_{\bar\tau}} f(P)\,dV \right|$$

si mantiene limitata, e precisamente non superiore a

$$\int_V |f(P)|\, dV \text{ (47)}.$$

A partire dalla (36), vera se $f(P)$ è misurabile e limitata, si riconosce che essa è vera anche se $f(P)$ è soltanto sommabile su V.

E questo si ottiene mediante un ulteriore passaggio al limite; ponendo, per esempio, nel punto P di V

$$\begin{aligned} f_i(P) &= f(P), \quad \text{se} \quad |f(P)| \leq i; \\ f_i(P) &= 0, \quad \text{se} \quad |f(P)| > i \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

e — cfr. n. 9 — ragionando in maniera analoga a quella tenuta nel caso precedente.

(47) Per bene intendere le affermazioni del testo, si dovrà tenere presente che $\Gamma_\tau - \Gamma_{\bar\tau}$ indica naturalmente l'insieme descritto da $\gamma(t)$ per $\bar\tau < t \leq \tau$.

Di qui e da $0 < \tau - \bar\tau < \tau_0$, segue che $\Gamma_\tau - \Gamma_{\bar\tau}$ è evidentemente a punti tutti semplici. In caso contrario, l'affermazione contenuta nella

$$\left| \int_{\Gamma_\tau - \Gamma_{\bar\tau}} f(P) dV \right| \leq \int_V f(P) \; dV$$

potrebbe essere fallace.

BANDO DI CONCORSO A PREMIO

Il Comitato per l'Astronomia, la Matematica Applicata e la Fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche bandisce un concorso a premio sul tema seguente:

Applicazione concreta dei metodi matematici ai fenomeni fisici ed alle attuazioni tecniche in cui entrano in gioco fenomeni di ereditarietà e di isteresi.

Possono concorrere a detto premio cittadini italiani (d'ambo i sessi) con un lavoro stampato o dattilografo in lingua italiana da inviarsi entro il 30 marzo 1935-XIII alla Segreteria Generale del Consiglio Nazionale delle Ricerche (Ministero Educazione Nazionale - Viale del Re - Roma).

L'ammontare del premio è di L. 5.000.

Aggiunta alla Memoria di L. Chamard: « *Sur quelques types de conditions imposées à la structure d'un ensemble ponchiel* », T. XII, p. 349 e seg.

La forme donnée, page 351, aux définitions I et II, résulte d'un échange de vues avec M. EUGÈNE BLANC qui m'asignalé en outre qu'une figure de la classe ρ peut ne pas admettre de dernière enveloppante-ρ. Ainsi, le rôle de la dernière enveloppante-ρ diffère encore de celui de l'enveloppante convexe qui existe pour tout ensemble borné. De même, tandis qu'une figure convexe est caractérisée par le fait de coïncider avec son enveloppante convexe, on ne saurait dire qu'une figure de la classe ρ coïncide avec son enveloppante-ρ, quand celle-ci existe. Je reprendrai ces questions dans un autre travail.

INDICE DEL TOMO XIII DELLA SERIE 4ª