ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
МÉМOIRES
DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG.
VIIIᵉ SÉRIE.

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ. | CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.
Томъ XVII. № 3. | Volume XVII. № 3.

SUR
UN PROBLÈME DE TCHEBYCHEF.

PAR

A. Liapounoff.

(Lu le 4 mai 1905.)

С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1905. ST.-PÉTERSBOURG.

Продается у коммиссіонеровъ Императорской Академіи Наукъ:
И. И. Глазунова и **К. Л. Риккера** въ С.-Петербургѣ,
Н. П. Карбасникова въ С.-Петерб., Москвѣ, Варшавѣ и Вильнѣ,
Н. Я. Оглоблина въ С.-Петербургѣ и Кіевѣ,
М. В. Клюкина въ Москвѣ,
Е. П. Распопова въ Одессѣ,
Н. Киммеля въ Ригѣ,
Фоссъ (Г. В. Зоргенфрей) въ Лейпцигѣ,
Люзакъ и Комп. въ Лондонѣ.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des Sciences:
J. Glasounof et C. Ricker à St.-Pétersbourg,
N. Karbasnikof à St.-Pétersbourg, Moscou, Varsovie et Vilna,
N. Oglobline à St.-Pétersbourg et Kief,
M. Klukine à Moscou,
E. Raspopoff à Odessa,
N. Kymmel à Riga,
Voss' Sortiment (G. W. Sorgenfrey) à Leipsic,
Luzac & Cie. à Londres.

Цѣна: 50 коп. — Prix: 1 Mark 25 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des Sciences.
Août 1905. *S. d'Oldenburg*, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences.
Vass. Ostr., 9 ligne, № 12.

Le problème dont il s'agit ici est celui de certaines figures d'équilibre d'une masse fluide homogène dont les éléments s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton et qui tourne uniformément autour d'un axe.

On sait que, si la vitesse angulaire ne dépasse pas une certaine limite, la figure d'équilibre peut être ellipsoïdale.

En entendant par ω la vitesse angulaire, désignons cette limite par ω''.

Tant que $\omega < \omega''$, on a deux figures d'équilibre sous forme des ellipsoïdes de révolution qui sont connues sous le nom des ellipsoïdes de Maclaurin. Si d'ailleurs ω est inférieur à une certaine autre limite, $\omega' < \omega''$, on a encore une figure d'équilibre sous forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, figure découverte par Jacobi.

Ces figures varient continûment avec ω. Quand ω croît de zéro à ω', l'ellipsoïde de Jacobi et celui des ellipsoïdes de Maclaurin qui est moins aplati se rapprochent de plus en plus l'un de l'autre et se confondent pour $\omega = \omega'$. Si ω continue de croître, on n'a que deux figures ellipsoïdales d'équilibre, celles de révolution, qui se rapprochent constamment l'une de l'autre et se confondent pour $\omega = \omega''$. Quant aux vitesses angulaires supérieures, il n'existe point de figures d'équilibre sous forme des ellipsoïdes.

L'ensemble des ellipsoïdes de Maclaurin constitue ainsi deux séries de figures d'équilibre variant continûment avec la vitesse angulaire. L'ensemble des ellipsoïdes de Jacobi en constitue une troisième*). Pour les valeurs ω' et ω'' de ω on peut passer de l'une de ces trois séries à l'une des deux autres.

La question se pose naturellement s'il existe d'autres pareilles séries de figures d'équilibre auxquelles on pourrait passer des séries ellipsoïdales pour certaines valeurs de la vitesse angulaire. Surtout il serait intéressant de le reconnaître pour la valeur ω'' de ω, au-delà de laquelle les figures ellipsoïdales d'équilibre cessent d'exister.

C'est la question dont je me suis occupé autrefois sur l'invitation de l'illustre Tchebychef, qui l'avait proposée aussi à d'autres savants russes.

D'une manière générale, la question peut être posée ainsi:

On considère une quelconque des figures ellipsoïdales d'équilibre. Designons cette figure par E et la vitesse angulaire qui lui correspond, par ω. On donne à cette vitesse un

*) A un certain point de vue, l'ensemble des ellipsoïdes de Jacobi peut être considéré comme constituant *deux* séries de figures d'équilibre. Mais il est inutile de nous placer ici à ce point de vue.

accroissement assez petit ε, et l'on demande si, pour la vitesse angulaire $\omega + \varepsilon$, il existe des figures d'équilibre, autres que les ellipsoïdes, qui, en variant continûment avec ε, se confondent, pour $\varepsilon = 0$, avec l'ellipsoïde E.

Tchebychef avait surtout en vue le cas de $\omega = \omega''$. Mais la question peut également être posée pour toute autre valeur de ω qui ne surpasse pas ω''.

En me proposant cette question, Tchebychef a exprimé l'opinion que c'est la méthode des approximations successives qui doit conduire à la solution, mais que la difficulté consiste dans la formation des équations d'où dépend l'évaluation de ces approximations.

Dès que je me suis mis à l'étude de cette question, j'ai reconnu que la formation de l'équation qui doit donner la première approximation ne présente aucune difficulté, et en l'étudiant je suis parvenu à pouvoir définir toutes les figures ellipsoïdales, ou toutes les valeurs de ω, pour lesquelles cette équation peut être vérifiée. Quant aux approximations ultérieures, je me suis heurté à des difficultés que je n'ai pu surmonter à l'époque dont il s'agit (1882—1883).

J'ai été donc arrêté dès le début de mes recherches, et en espérant y revenir plus tard, je me suis borné à publier le résultat relatif à la première approximation, ce que j'ai fait dans le Mémoire *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation**), en énonçant ce résultat comme il suit:

Étant donné un entier n quelconque, surpassant 2, on peut trouver $E\frac{n}{2} + 2$ surfaces algébriques d'ordre n infiniment voisines de celles des figures ellipsoïdales d'équilibre et vérifiant, à une première approximation, la condition d'équilibre. Parmi les figures délimitées par ces surfaces, une est infiniment voisine d'un ellipsoïde de Jacobi, et les $E\frac{n}{2} + 1$ autres sont infiniment voisines des ellipsoïdes de Maclaurin.

Si de nouvelles figures d'équilibre, voisines de celles ellipsoïdales, existent, elles seront représentées, dans la première approximation, par les figures à surfaces algébriques dont il s'agit ici. Et c'est tout ce qu'on pouvait dire a priori; car, d'une part, en passant aux approximations ultérieures, on pourrait être arrêté par l'impossibilité de satisfaire à certaines équations, et, d'autre part, si même on pouvait pousser les calculs aussi loin qu'on veut, on ne pourrait rien conclure sans l'examen de la convergence des approximations successives.

Une année après, M. Poincaré publia, dans les *Comptes rendus*, les résultats de ses recherches sur la même question, en annonçant qu'il a découvert une infinité de nouvelles figures d'équilibre. Ces recherches ont été ensuite publiées dans le Mémoire connu *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*, qui parut en 1886 dans les *Acta Mathematica* (t. 7, 1885).

---

*) Ce Mémoire, qui parut en 1884 en russe, est maintenant traduit en français, grâce à M. Davaux. Cette traduction a paru l'année dernière dans les *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse* (t. VI, 1904).

Dans ce Mémoire, ayant trouvé la première approximation, M. Poincaré, non plus que moi, ne cherche à pousser les approximations plus loin. Mais il croit possible d'en conclure l'existence réelle de nouvelles figures d'équilibre, en se basant sur certaines considérations relatives au cas d'un système matériel dont la position est définie par un nombre limité de variables et en cherchant ensuite à étendre ces considérations au cas d'un liquide. Or on ne peut le faire que par des raisonnements peu rigoureux. Ce n'est donc pas une démonstration; c'est plutôt une extension par analogie, et M. Poincaré lui-même semble l'avouer lorsqu'il dit: «il y aurait bien des objections à faire, mais on ne saurait exiger en mécanique la même rigueur qu'en analyse pure pour ce qui concerne l'infini».

Moi je ne suis pas de cet avis. Je crois que, s'il est permis parfois de se servir des considérations vagues, lorsqu'on veut établir un nouveau principe, qui ne résulte pas logiquement de ce qu'on a déjà admis, et qui, par sa nature, ne peut être en contradiction avec d'autres principes de la Science, il n'est plus permis de le faire, dès qu'on a à résoudre un problème déterminé (qu'il soit de la Mécanique ou de la Physique), qui est posé d'une manière entièrement précise au point de vue mathématique. Ce devient alors un problème de l'Analyse pure, et l'on doit le traiter comme un tel.

Aussi je ne puis regarder les recherches de M. Poincaré, toutes ingénieuses qu'elles sont, comme apportant la solution du problème. Et en effet, les difficultés inhérentes au problème, et qui proviennent de ce qu'on a affaire à un liquide et à la loi de l'attraction de Newton, ne s'y trouvent point touchées.

Pendant les vingt années qui se sont écoulées depuis l'époque dont il s'agit, je n'ai pas eu l'occasion de m'occuper de cette question, et c'est seulement en 1903 que j'y suis revenu. Mais avant d'aborder cette question elle-même, j'ai cru utile de m'arrêter d'abord à une autre question analogue, qui me paraissait plus facile à résoudre. Je parle du problème de Legendre sur la figure d'équilibre peu différente d'une sphère pour une masse fluide hétérogène tournant très lentement autour d'un axe.

Bien que ce problème fût l'objet d'un très grand nombre de recherches, il n'était pas encore résolu complètement, car, d'une part, pour établir les équations qui servent à calculer les approximations successives, on employait des considérations peu rigoureuses et, d'autre part, il n'était point établi que la suite des approximations successives converge, même pour des valeurs très petites de la vitesse angulaire.

J'ai réussi à combler ces lacunes dans un travail dont j'ai publié une partie dans le Mémoire *Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes (Mémoires de l'Académie des Sciences de St.-Pétersbourg,* VIII^e série, vol. XIV, № 7).

Ce qui assura le succès, c'est surtout l'idée de considérer, outre la fonction inconnue qui figure dans l'équation du problème, encore ses dérivées partielles dont l'une ne figure point dans cette équation.

Dès que je suis ainsi arrivé au but dans le problème de Legendre, la voie fut ouverte, et j'ai pu aborder le problème de Tchebychef que l'on pouvait traiter par la même

1*

méthode. Et en effet, en suivant la même voie, je suis parvenu, ici encore, à pouvoir présenter l'équation fondamentale du problème sous une forme permettant de chercher la fonction inconnue soit par des approximations successives, soit par des séries. Je présente cette fonction sous forme d'une série procédant suivant certaines puissances de l'accroissement de la vitesse angulaire, et je me suis persuadé que l'évaluation des termes de cette série conduit à des calculs toujours exécutables. On pourra ainsi pousser l'approximation aussi loin qu'on veut. Mais il fallait encore examiner la question de la convergence. Je l'ai fait aussi, en me servant de la même méthode que j'ai employée dans le problème de Legendre. Ainsi je suis parvenu à établir en toute rigueur l'existence de ces figures d'équilibre qui n'étaient connues si longtemps que par une première approximation.

C'est ici le lieu de citer le Mémoire intéressant *Sur la stabilité des figures pyriformes affectées par une masse fluide en rotation*, que M. Poincaré a publié il y a trois années dans les *Phil. Transactions* (A, vol. 198).

Si l'on admet avec M. Poincaré que la première approximation connue, dans le problème des figures d'équilibre voisines des ellipsoïdes, est réellement une approximation à certaines nouvelles figures d'équilibre, on aura, parmi les séries de ces figures, une à laquelle on peut passer des ellipsoïdes de Jacobi en donnant à la vitesse angulaire la plus petite parmi les valeurs qu'elle peut recevoir pour les ellipsoïdes de Jacobi *stables*. C'est les figures de cette série que M. Poincaré appelle *pyriformes*, et dans le Mémoire dont il s'agit il cherche à reconnaître si ces figures, tant qu'elles sont suffisamment voisines des ellipsoïdes, sont stables. A cet effet, il a dû calculer *la deuxième approximation*, et il y a réussi à l'aide d'une méthode très ingénieuse qui est fondée sur la considération du potentiel d'une double couche. Toutefois cette méthode ne semble pas permettre d'aller au-delà de la deuxième approximation, du moins, sans le secours des considérations qui font l'essence de ma méthode, et qui rendent inutile l'introduction de la double couche de M. Poincaré.

En ce qui concerne la question de stabilité, M. Poincaré se borne à la formation d'une certaine inégalité*), mais il ne cherche pas à l'examiner. Un examen de la condition de stabilité a été fait ensuite par M. Darwin, qui a publié, dans le même Recueil, un Mémoire sur le même sujet**), en le traitant par une méthode toute semblable à celle de M. Poincaré.

---

*) M. Poincaré exprime la condition nécessaire et *suffisante* de la stabilité par l'inégalité

$$X < 0. \tag{α}$$

Ce n'est pas exact. D'après ce que dit M. Poincaré lui-même, cette condition doit être exprimée ainsi:

$$T - \frac{XY}{T} > 0. \tag{β}$$

Comme T et Y sont des nombres négatifs, il est évident que l'inégalité (α) peut être satisfaite sans que l'inégalité (β) le soit.

J'ajouterai que, dans l'expression de X (*voir* la page 372), on doit changer le signe du terme $2H'$, ce qui aura une certaine influence sur la conclusion à laquelle M. Poincaré arrive à la fin de son Mémoire.

**) *The Stability of the Pear-Shaped Figure of Equilibrium of a Rotating Mass of Liquid* (*Phil. Trans.*, A, vol. 200, 1903).

Mes recherches conduisent aussi à la solution de cette question. Dans ce qui suit, je signalerai la conclusion à laquelle je suis arrivé à cet égard.

Mon travail est trop étendu pour que je puisse le publier sur-le-champ et en un seul Mémoire. D'ailleurs je dois encore chercher à combler certaines lacunes que j'y ai laissé subsister. C'est pourquoi j'ai résolu de publier mes recherches par parties, en plusieurs Mémoires.

Le premier de ces Mémoires, que j'espère pouvoir publier prochainement, contiendra le développement de la méthode dont je me suis servi pour former les équations d'où dépend l'évaluation des approximations successives.

Les Mémoires qui en suivront seront consacrés à l'examen des calculs qu'exige la recherche des figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes de Maclaurin, ainsi que de celles dérivées des ellipsoïdes de Jacobi.

Enfin, un Mémoire à part sera consacré à la démonstration de la convergence des séries représentant la solution du problème. C'est donc seulement là que la question sera résolue complètement.

En attendant, je vais signaler les résultats que j'ai obtenus jusqu'à présent. En même temps, je donnerai des indications succinctes sur la voie que j'ai suivie.

---

1. Je prendrai, pour axe des z des coordonnées rectangulaires x, y, z, l'axe de rotation du liquide, et, en entendant par k la densité du liquide (supposé homogène) et par f la constante de la gravitation universelle, je désignerai par $\pi f k U$ le potentiel de la masse fluide au point (x, y, z).

Alors la condition d'équilibre se réduira à ce que la fonction

$$\pi f k U + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

doit conserver une valeur constante sur la surface du liquide.

Donc, en introduisant, au lieu de la vitesse angulaire ω, la quantité

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi f k},$$

on pourra présenter cette condition ainsi

$$U + \Omega\,(x^2 + y^2) = \text{const.,} \tag{1}$$

en supposant que les coordonnées x, y, z, qui y figurent, appartiennent à un point de la surface du liquide.

Comme les dimensions absolues de la figure d'équilibre ne peuvent jouer ici aucun rôle, je prendrai l'équation de l'ellipsoïde, en partant duquel on veut chercher de nouvelles figures d'équilibre, sous la forme

$$\frac{x^2}{\rho+1}+\frac{y^2}{\rho+q}+\frac{z^2}{\rho}=1,$$

ρ et q étant des nombres positifs. Je supposerai d'ailleurs

$$q \leqq 1.$$

Pour $q=1$, on aura ainsi un ellipsoïde de révolution, et alors, quel que soit ρ, ce sera une figure d'équilibre correspondant à une certaine valeur de Ω.

Pour $q<1$, l'équation ci-dessus ne représentera une figure d'équilibre que si ρ et q sont liés par une certaine équation transcendante, et cette équation sera toujours sous-entendue.

En introduisant deux angles variables θ et ψ, on pourra aussi représenter notre ellipsoïde par ces trois équations:

$$x=\sqrt{\rho+1}\sin\theta\cos\psi,$$

$$y=\sqrt{\rho+q}\sin\theta\sin\psi,$$

$$z=\sqrt{\rho}\cos\theta.$$

Soit Ω_0 la valeur de Ω qui lui correspond.

En cherchant s'il existe de nouvelles figures d'équilibre voisines de cet ellipsoïde pour

$$\Omega=\Omega_0+\eta,$$

η étant assez petit en valeur absolue, je représenterai la surface d'une pareille figure par les équations

$$x=\sqrt{\rho+\zeta+1}\sin\theta\cos\psi,$$

$$y=\sqrt{\rho+\zeta+q}\sin\theta\sin\psi,$$

$$z=\sqrt{\rho+\zeta}\cos\theta,$$

en entendant par ζ une fonction de θ et ψ dont toutes les valeurs peuvent être rendues aussi petites qu'on veut en faisant $|\eta|$ suffisamment petit. C'est cette fonction que l'on devra chercher en partant de l'équation (1), que l'on peut maintenant écrire ainsi:

$$U+(\Omega_0+\eta)(\rho+\cos^2\psi+q\sin^2\psi+\zeta)\sin^2\theta=\text{const.} \tag{2}$$

Cette équation, à elle seule, ne suffit pas pour déterminer complètement la fonction ζ, et si on veut le faire, on doit introduire encore certaines conditions complémentaires.

Parmi les conditions de cette espèce que l'on peut admettre sans restreindre la généralité, je signalerai celles-ci:

1°. Le volume de la nouvelle figure est égal à celui de l'ellipsoïde considéré;

2°. Le centre de gravité de ce volume se trouve à l'origine des coordonnées;

3°. Les axes des x et des y sont des axes principaux d'inertie de ce volume (l'axe des z, qui est celui de rotation, le sera, comme on sait, toujours en vertu de l'équation elle-même).

Si l'ellipsoïde considéré a ses trois axes inégaux, ces conditions suffiront. Mais dans le cas d'un ellipsoïde de révolution, la troisième condition sera, en général, remplie d'elle-même, et l'on devra introduire une autre qui sera signalée plus loin.

2. Pour pouvoir aborder le problème, on doit commencer par développer U suivant les termes de divers ordres par rapport à ζ, ce que l'on pourra faire, dans des suppositions assez générales, par une méthode analogue à celle que j'ai employée dans le Mémoire *Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes.*

Je supposerai que ζ soit une fonction continue de θ et ψ admettant les dérivées

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial\psi},$$

et que, pour les valeurs absolues des fonctions

$$\zeta, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial\theta}, \qquad \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\psi},$$

on puisse assigner des limites supérieures ne dépendant que de η et tendant vers zéro pour $\eta = 0$.

Cela posé, dans l'expression de U, remplaçons ζ par $\varepsilon\zeta$, ε étant un paramètre arbitraire, et le résultat, considéré comme fonction de ε, désignons par $U(\varepsilon)$.

J'ai reconnu que, dans les suppositions ci-dessus, la fonction $U(\varepsilon)$ est développable suivant les puissances entières et positives de ε en une série absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs de θ et ψ, tant que $|\varepsilon|$ reste au-dessous d'une certaine limite E dépendant de η.

Soit

$$U(\varepsilon) = U_0 + U_1\varepsilon + U_2\varepsilon^2 + U_3\varepsilon^3 + \dots$$

ce développement.

Comme la limite E peut être rendue aussi grande qu'on veut, en faisant $|\eta|$ suffisamment petit, on peut supposer $E > 1$. Alors, en posant $\varepsilon = 1$, on aura le développement requis

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots$$

qui sera ainsi absolument et uniformément convergent, tant que $|\eta|$ est assez petit.

Si l'on regarde ζ comme une petite quantité du premier ordre, le terme U_n dans ce développement sera du $n^{\text{ème}}$ ordre.

On peut donner, pour les U_n, des expressions explicites. Mais il serait inutile de les reproduire ici. Signalons seulement l'expression que l'on obtient pour U_1, en tenant compte des équations qui expriment les conditions d'équilibre pour l'ellipsoïde considéré.

Nous introduirons les notations suivantes:

$$\rho(\rho+q)\sin^2\theta\cos^2\psi+\rho(\rho+1)\sin^2\theta\sin^2\psi+(\rho+1)(\rho+q)\cos^2\theta=H,$$

$$\sqrt{\rho(\rho+1)(\rho+q)}=\Delta,$$

$$\frac{1}{2}\rho\int_\rho^\infty\frac{d\rho}{\rho\Delta}=R,$$

et nous désignerons par D la distance entre deux points de la surface de l'ellipsoïde considéré ayant pour coordonnées respectivement

$$\sqrt{\rho+1}\sin\theta\cos\psi,\qquad\sqrt{\rho+q}\sin\theta\sin\psi,\qquad\sqrt{\rho}\cos\theta,$$

$$\sqrt{\rho+1}\sin\theta'\cos\psi',\qquad\sqrt{\rho+q}\sin\theta'\sin\psi',\qquad\sqrt{\rho}\cos\theta'.$$

Puis, en considérant θ et ψ comme coordonnées polaires sur la surface de la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine des coordonnées, nous désignerons un élément superficiel de cette sphère soit par $d\sigma$, soit par $d\sigma'$, suivant qu'il se rapporte au point (θ,ψ), ou au point (θ',ψ').

Avec ces notations, en entendant par ζ', H' ce que deviennent ζ, H, lorsqu'on y remplace θ, ψ par θ', ψ', nous aurons

$$U_1=\frac{1}{2\pi\Delta}\int\frac{H'\zeta'd\sigma'}{D}-\left(\frac{2}{\Delta}RH+\Omega_0\sin^2\theta\right)\zeta,$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface de la sphère.

Cela posé, reportons-nous à l'équation (2).

Comme, par la condition d'équilibre de notre ellipsoïde, on aura

$$U_0+\Omega_0(\rho+\cos^2\psi+q\sin^2\psi)\sin^2\theta=\text{const.},$$

cette équation se réduira à

$$RH\zeta-\frac{1}{4\pi}\int\frac{H'\zeta'd\sigma'}{D}=\frac{\Delta}{2}W+\text{const.},\tag{3}$$

où

$$W=\eta(\rho+\cos^2\psi+q\sin^2\psi+\zeta)\sin^2\theta+U_2+U_3+\dots\,.$$

Telle est la forme définitive de l'équation fondamentale qui doit donner la solution du problème.

3. En partant de l'équation (3), on pourra chercher la fonction ζ par des approximations successives, ou par des séries.

J'ai cherché cette fonction sous forme de la série

$$\zeta = \zeta_1 x + \zeta_2 x^2 + \zeta_3 x^3 + \ldots \tag{4}$$

procédant suivant les puissances entières d'un paramètre x dépendant de η.

A l'égard de x je me suis arrêté à la supposition que c'est une certaine puissance de η et, pour ne pas introduire des quantités imaginaires, j'ai posé

$$x^\lambda = |\eta|, \tag{5}$$

λ étant un nombre positif fixe.

Après qu'on aura trouvé toutes les solutions sous la forme précédente, on pourra chercher s'il existe des solutions ne se développant pas en de pareilles séries. Je n'ai pas encore examiné cette question, dont je me propose de m'occuper dans un des Mémoires ultérieurs. Quant à présent, je me bornerai à la considération des solutions de la forme indiquée. Si donc je dirai que, dans un tel ou tel cas, le problème n'a pas de solution, cette assertion signifiera seulement qu'il n'y a pas de solutions qui puissent être représentées par des séries de la forme (4), quelle que soit la valeur qu'on veut attribuer à λ dans l'égalité (5), qui sera toujours sous-entendue. Il va sans dire que je ne parlerai que des solutions réelles.

En ce qui concerne le nombre λ, on voit facilement, par l'expression de W dans l'équation (3), que ce ne peut être qu'un nombre entier. On aura donc à considérer successivement les hypothèses:

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 2, \qquad \lambda = 3, \qquad \ldots .$$

Il est évident qu'à toute solution, obtenue dans l'hypothèse $\lambda = n$, correspondra une solution dans l'hypothèse $\lambda = Nn$, N étant un entier quelconque, *qui représentera la même figure d'équilibre*. De pareilles solutions seront considérées comme identiques. Avec cette convention, on pourra dire que, pour toute solution, le nombre λ admettra une certaine limite inférieure.

Dans tous les cas que j'ai discutés complètement, et ce sont les cas de *tous* les ellipsoïdes de Maclaurin et *d'une infinité* des ellipsoïdes de Jacobi, cette limite inférieure est égale soit à 1, soit à 2. Donc, dans tous ces cas, la fonction ζ se présentera sous forme d'une série procédant suivant les puissances entières, dans les uns cas, de η, dans les autres, de $\sqrt{\eta}$.

En admettant pour ζ l'expression (4), je suppose que les fonctions $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots$ admettent les dérivées partielles par rapport à θ et ψ, et que d'ailleurs on peut trouver les trois suites indéfinies de nombres positifs

$$\begin{array}{llll} l_1, & l_2, & l_3, & \dots, \\ g_1, & g_2, & g_3, & \dots, \\ h_1, & h_2, & h_3, & \dots, \end{array}$$

telles que l'on ait, quels que soient θ et ψ,

$$|\zeta_i| < l_i, \qquad \left|\frac{\partial\zeta_i}{\partial\theta}\right| < g_i, \qquad \left|\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\zeta_i}{\partial\psi}\right| < h_i,$$

pour toutes les valeurs de i, et que les séries

$$l_1\varkappa + l_2\varkappa^2 + l_3\varkappa^3 + \dots,$$

$$g_1\varkappa + g_2\varkappa^2 + g_3\varkappa^3 + \dots,$$

$$h_1\varkappa + h_2\varkappa^2 + h_3\varkappa^3 + \dots$$

soient convergentes pour des valeurs assez petites de $\varkappa$.

Dans ces suppositions, on peut établir que, $\varkappa$ étant assez petit, la fonction W dans l'équation (3) sera développable suivant les puissances entières de $\varkappa$.

Soit donc

$$W = W_1\varkappa + W_2\varkappa^2 + W_3\varkappa^3 + \dots$$

ce développement, qui n'aura pas évidemment de terme indépendant de $\varkappa$.

D'après cela, l'équation (3), qui doit être vérifiée pour toutes les valeurs assez petites de $\varkappa$, conduira à une suite indéfinie des équations de la forme

$$RH\zeta_n - \frac{1}{4\pi}\int\frac{H'\zeta'_n d\sigma'}{D} = \frac{\Delta}{2}W_n + \text{const.} \tag{6}$$

Dans la première de ces équations, celle qui correspond à $n = 1$, on aura:

$$\text{pour } \lambda > 1, \qquad W_1 = 0,$$

$$\text{pour } \lambda = 1, \qquad W_1 = \pm(\rho + \cos^2\psi + q\sin^2\psi)\sin^2\theta,$$

où l'on doit prendre le signe supérieur dans le cas de $\eta > 0$ et le signe inférieur dans le cas de $\eta < 0$.

Ainsi W_1 sera une fonction connue de θ et ψ.

Quant aux autres W_i, on voit facilement que, pour toute valeur donnée de n, W_n ne dépendra que des fonctions

(7) $$\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \zeta_3, \quad \ldots, \quad \zeta_{n-1}.$$

Par suite, les équations (6) permettent de calculer successivement

$$\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \zeta_3, \quad \ldots.$$

En ce qui concerne les trois conditions dont nous avons parlé à la fin du n° 1, elles donneront, pour les intégrales

$$\int H\zeta_n d\sigma, \qquad \int H\zeta_n \cos\theta\, d\sigma, \qquad \int H\zeta_n \sin^2\theta \cos\psi \sin\psi\, d\sigma$$

(où l'intégration s'étend à toute la surface de la sphère), des expressions qui ne dépendront encore que des fonctions (7). Pour $n = 1$, ces intégrales seront égales à zéro.

4. Dans le cas de $q < 1$, nous nous servirons, outre les variables θ et ψ, encore des variables μ, ν définies par les formules

$$\sqrt{1-\mu^2}\,\sqrt{1-\nu^2} = \sqrt{1-q}\,\sin\theta\cos\psi,$$

$$\sqrt{q-\mu^2}\,\sqrt{\nu^2-q} = \sqrt{q(1-q)}\,\sin\theta\sin\psi,$$

$$\mu\nu = \sqrt{q}\cos\theta,$$

et représentant ainsi les coordonnées elliptiques sur la surface de notre ellipsoïde.

Nous nous servirons aussi des fonctions de Lamé des arguments μ, ν, en rattachant ces fonctions à l'équation différentielle

$$\sqrt{(x^2-1)(x^2-q)}\,\frac{d}{dx}\left[\sqrt{(x^2-1)(x^2-q)}\,\frac{dy}{dx}\right] + \left[\beta - m(m+1)x^2\right]y = 0,$$

où m est un entier positif et β une constante que l'on devra déterminer de telle manière que cette équation admette une solution sous forme d'une fonction entière de degré m des quantités

(8) $$x, \qquad \sqrt{x^2-1}, \qquad \sqrt{x^2-q}.$$

On sait que, pour toute valeur donnée de m, il y a $2m+1$ valeurs de β satisfaisant à cette condition, et que ces valeurs, toujours réelles, sont toutes inégales, tant que q n'est égal à aucune de ses limites, 0 et 1.

Soient ces valeurs, *rangées dans l'ordre décroissant*,

$$\beta_{m,0}, \quad \beta_{m,1}, \quad \ldots, \quad \beta_{m,2m},$$

de sorte que

$$\beta_{m,0} > \beta_{m,1} > \beta_{m,2} > \ldots > \beta_{m,2m}.$$

Les fonctions entières correspondantes des quantités (8) seront désignées par

$$E_{m,0}(x), \quad E_{m,1}(x), \quad \ldots, \quad E_{m,2m}(x).$$

Ce sont, au fond, les notations dont je me suis servi dans le Mémoire *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales* *). Avec ces notations, en entendant par i un entier positif (ou zéro) et par P une fonction entière de x, on aura

$$\begin{array}{lll} \text{pour} & s = 4i, & E_{m,s}(x) = P, \\ \text{pour} & s = 4i + 1, & E_{m,s}(x) = \sqrt{x^2 - q}\; P, \\ \text{pour} & s = 4i + 2, & E_{m,s}(x) = \sqrt{x^2 - 1}\; P, \\ \text{pour} & s = 4i + 3, & E_{m,s}(x) = \sqrt{x^2 - 1}\,\sqrt{x^2 - q}\; P. \end{array}$$

Chacune des fonctions $E_{m,s}(x)$ renferme un facteur constant dont on peut disposer à volonté. On peut d'ailleurs, pour une seule et même fonction, choisir ce facteur d'une manière différente, suivant que x se trouve entre $-\sqrt{q}$ et $+\sqrt{q}$, ce qui est le cas de μ, ou entre $\sqrt{q}$ et 1, ce qui est le cas de ν. Nous choisirons ces facteurs de telle manière que les fonctions $E_{m,s}(\mu)$ et $E_{m,s}(\nu)$ soient réelles.

Outre ces fonctions, nous aurons aussi à considérer la fonction $E_{m,s}(\sqrt{-\rho})$ dont l'argument est purement imaginaire. Nous la désignerons par $\mathsf{E}_{m,s}$.

Considérée comme fonction de ρ, elle sera une solution de l'équation différentielle

$$4\Delta \frac{d}{d\rho}\left(\Delta \frac{dy}{d\rho}\right) - [\beta + m(m+1)\rho]\, y = 0$$

pour $\beta = \beta_{m,s}$.

Une autre solution indépendante de cette équation, que nous désignerons par $\mathsf{F}_{m,s}$, sera définie par la formule

$$\mathsf{F}_{m,s} = \frac{2m+1}{2}\, \mathsf{E}_{m,s} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\rho}{(\mathsf{E}_{m,s})^2 \Delta}.$$

*) Ce que je désigne ici par $E_{m,s}(x)$ était désigné dans ce Mémoire par $E^{m}_{s+1}(x)$.

On voit par là que le produit $\mathsf{E}_{m,s}\,\mathsf{F}_{m,s}$ ne dépendra point du facteur constant arbitraire qui peut figurer dans la fonction $\mathsf{E}_{m,s}$; ce sera une fonction de ρ parfaitement déterminée et toujours positive.

Avec ces notations, la quantité R qui figure dans l'équation (6) pourra être exprimée ainsi:

$$R = \frac{1}{3}\,\mathsf{E}_{1,0}\,\mathsf{F}_{1,0}.$$

Dans ce qui suit, on aura à considérer assez fréquemment les expressions

$$T_{m,s} = \frac{1}{3}\,\mathsf{E}_{1,0}\,\mathsf{F}_{1,0} - \frac{1}{2m+1}\,\mathsf{E}_{m,s}\,\mathsf{F}_{m,s}$$

que j'ai étudiées dans le Mémoire *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales.* M. Poincaré, qui les a aussi étudiées dans son Mémoire des *Acta mathematica,* les a appelées *coefficients de stabilité* *).

Supposons que q tende vers 1. Alors il viendra

$$\lim \mu = \cos\theta, \qquad \lim \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{\sqrt{1-q}} = \cos\psi.$$

En même temps, si l'on choisit convenablement les facteurs constants dans les fonctions $E_{m,s}(\mu)$, $E_{m,s}(\nu)$, on aura, en entendant par $P_m(x)$ le polynome de Legendre d'ordre m,

$$\lim E_{m,0}(\mu)\,E_{m,0}(\nu) = P_m(\cos\theta)$$

et, pour $k = 1, 2, 3, \ldots, m$,

$$\lim E_{m,2k-1}(\mu)\,E_{m,2k-1}(\nu) = \left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^k \frac{d^k P_m(\mu)}{d\mu^k}\sin k\psi,$$

$$\lim E_{m,2k}(\mu)\,E_{m,2k}(\nu) = \left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^k \frac{d^k P_m(\mu)}{d\mu^k}\cos k\psi,$$

où l'on doit entendre par μ, au second membre, $\cos\theta$.

Nous poserons, pour abréger,

$$\left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^k \frac{d^k P_m(\mu)}{d\mu^k} = \frac{\left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^k}{2\cdot4\cdots2m}\,\frac{d^{m+k}(\mu^2-1)^m}{d\mu^{m+k}} = P_{m,k}(\mu).$$

Posons encore

$$\frac{\left(\sqrt{\rho+1}\right)^k}{2\cdot4\cdots2m}\left\{\frac{d^{m+k}(x^2+1)^m}{dx^{m+k}}\right\}_{x=\sqrt{\rho}} = \mathsf{P}_{m,k},$$

$$\frac{2m+1}{2}\,\mathsf{P}_{m,k}\int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\{\mathsf{P}_{m,k}\}^2(\rho+1)\sqrt{\rho}} = \mathsf{Q}_{m,k}.$$

---

*) Les coefficients de stabilité de M. Poincaré ne diffèrent que par le signe des quantités $T_{m,s}$.

Alors nous aurons

$$\lim \mathsf{E}_{m,0}\,\mathsf{F}_{m,0} = \mathsf{P}_{m,0}\,\mathsf{Q}_{m,0}$$

et, pour $k = 1, 2, 3, \ldots, m$,

$$\lim \mathsf{E}_{m,2k-1}\,\mathsf{F}_{m,2k-1} = \lim \mathsf{E}_{m,2k}\,\mathsf{F}_{m,2k} = \mathsf{P}_{m,k}\,\mathsf{Q}_{m,k}.$$

D'après cela, si nous posons

$$\frac{1}{3}\mathsf{P}_{1,0}\,\mathsf{Q}_{1,0} - \frac{1}{2m+1}\mathsf{P}_{m,k}\,\mathsf{Q}_{m,k} = T'_{m,k},$$

il viendra

$$\lim T_{m,0} = T'_{m,0}$$

et, pour $k = 1, 2, 3, \ldots, m$,

$$\lim T_{m,2k-1} = \lim T_{m,2k} = T'_{m,k}.$$

5. Reportons-nous maintenant à l'équation (6) et considérons d'abord les cas de $q = 1$ et de $q < 1$ simultanément, en entendant, si l'on a affaire au premier de ces cas, par les produits de Lamé les fonctions sphériques, auxquelles ces produits se réduisent pour $q = 1$, et par les quantités $T_{l,s}$, les quantités $T'_{l,k}$.

Supposons que, en s'arrêtant à une certaine hypothèse à l'égard de λ, on ait déjà calculé

$$\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \ldots, \quad \zeta_{n-1}.$$

Alors W_n sera une fonction connue de θ et ψ, ou de μ et ν.

Cela posé, multiplions les deux membres de l'équation (6) par

$$E_{l,s}(\mu)\, E_{l,s}(\nu)\, d\sigma,$$

en supposant que *l soit différent de zéro*, et intégrons sur toute la surface de la sphère. Alors, d'après les propriétés connues des fonctions de Lamé, il viendra

$$T_{l,s}\int H\zeta_n E_{l,s}(\mu) E_{l,s}(\nu)\, d\sigma = \frac{\Delta}{2}\int W_n E_{l,s}(\mu) E_{l,s}(\nu)\, d\sigma.$$

On obtiendra donc, pour l'intégrale

$$\int H\zeta_n E_{l,s}(\mu) E_{l,s}(\nu)\, d\sigma, \tag{9}$$

une valeur parfaitement déterminée, toutes les fois que la quantité $T_{l,s}$ n'est pas égale à zéro.

Or, parmi ces quantités, il y a une qui est toujours identiquement nulle: c'est $T_{1,0}$. D'ailleurs, si $q < 1$, on a encore

$$T_{2,3} = 0,$$

ce qui est l'équation transcendante, par laquelle sont liés ρ et q dans le cas des ellipsoïdes de Jacobi.

En ce qui concerne les autres $T_{l,s}$, ils ne seront pas nuls en général. Mais ils peuvent s'annuler pour certaines valeurs de ρ.

Supposons d'abord que ρ n'a aucune de ces valeurs spéciales.

Alors l'intégrale (9) sera connue et aura une valeur parfaitement déterminée pour toutes les combinaisons des valeurs de l et de s, qui ne se réduisent pas, dans le cas de $q = 1$, à l'une de ces deux

$$1)\quad l = 0,\quad s = 0, \qquad 2)\quad l = 1,\quad s = 0$$

et, dans le cas de $q < 1$, à l'une de ces trois

$$1)\quad l = 0,\quad s = 0, \qquad 2)\quad l = 1,\quad s = 0, \qquad 3)\quad l = 2,\quad s = 3.$$

Quant à ces combinaisons, on pourra déterminer l'intégrale (9), en admettant les trois conditions complémentaires du n° 1. Mais, pour que le problème soit possible, on doit avoir

$$\int W_n E_{1,0}(\mu) E_{1,0}(\nu)\, d\sigma = 0$$

et, en outre, si $q < 1$,

$$\int W_n E_{2,3}(\mu) E_{2,3}(\nu)\, d\sigma = 0.$$

On peut montrer que ces égalités, qui peuvent être écrites ainsi

$$\int W_n \cos\theta\, d\sigma = 0, \qquad \int W_n \sin^2\theta \cos\psi \sin\psi\, d\sigma = 0,$$

seront toujours remplies d'elles-mêmes.

Ainsi l'on voit que l'équation (6) avec les trois conditions du n° 1 permettent de déterminer toutes les intégrales de la forme (9), et cela suffit pour définir complètement la fonction ζ_n, qui est supposée continue *).

Donc, si l'on admet les conditions du n° 1, on aura, pour tous les ζ_n, des valeurs parfaitement déterminées.

On en conclut que, si tous les $T_{l,s}$, autres que $T_{1,0}$ et, dans le cas de $q < 1$, autres que $T_{2,3}$, sont différents de zéro, on ne pourra obtenir aucune figure d'équilibre, outre la figure ellipsoïdale qui correspond à $\Omega = \Omega_0 + \eta$.

---

*) *Voir* le Mémoire *Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes*, page 21 (*Mem. de l'Acad. des Sciences de St.-Pétersbourg*, vol. XIV, № 7).

6. Considérons l'ensemble des $T_{l,s}$, en excluant $T_{0,0}$, $T_{1,0}$ et encore, si $q < 1$, $T_{2,3}$.

D'après ce que nous venons de voir, on ne pourra arriver à de nouvelles figures d'équilibre que si au moins une de ces quantités est égale à zéro. Voyons donc lesquelles de ces quantités peuvent s'annuler.

Dans le Mémoire *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales*, j'ai montré que, dans le cas de $q < 1$, ce sont seulement celles, pour lesquelles $s = 2l$ et $l > 2$, qui peuvent s'annuler, et que d'ailleurs, si une quelconque des quantités $T_{l,2l}$ s'annule, toutes les autres sont différentes de zéro, car on a

$$T_{l,2l} < T_{l+1,\,2l+2}.$$

D'autre part, j'ai montré que chacune des quantités $T_{l,2l}$ pour lesquelles $l > 2$ s'annule effectivement pour une certaine couple de valeurs de ρ et q satisfaisant à l'équation

$$T_{2,3} = 0.$$

En ce qui concerne le nombre des couples (ρ, q) annulant $T_{l,2l}$, je n'ai examiné la question que dans les cas de $l = 3$ et de l suffisamment grand. Dans ces cas, il n'y a qu'*une seule* pareille couple et, par suite, il n'y a qu'un seul ellipsoïde de Jacobi pour lequel $T_{l,2l}$ s'annule.

Dans le même Mémoire j'ai montré que, parmi les quantités $T'_{l,s}$, que l'on a à considérer dans le cas de $q = 1$, outre $T'_{1,0}$ qui est toujours nulle, seulement celles peuvent s'annuler, pour lesquelles $l - s$ est un nombre pair (y compris zéro), l étant supérieur à 1. D'ailleurs, l et s satisfaisant à cette condition, $T'_{l,s}$ s'annule toujours pour une certaine valeur de ρ, et *pour une seule*.

J'ai reconnu que deux des $T'_{l,s}$ pour lesquels $l > 1$ ne peuvent s'annuler simultanément. Pour le prouver, j'ai parti d'un théorème de Lindemann, d'après lequel $\operatorname{tang} x$ et x, sauf le cas de $x = 0$, ne peuvent être simultanément des nombres algébriques.

D'après cela, dans le cas des ellipsoïdes de Maclaurin, toutes les suppositions que l'on aura à considérer se réduisent à ce que, pour des valeurs données m, k de l, s, telles que

$$m > 1, \qquad m - k = \text{nombre pair},$$

on a

$$T'_{m,k} = 0,$$

tous les autres $T'_{l,s}$, sauf $T'_{1,0}$, étant différents de zéro.

Dans le cas des ellipsoïdes de Jacobi, on devra seulement examiner la supposition que, m étant un nombre donné supérieur à 2, on a

$$T_{m,2m} = 0,$$

tous les autres $T_{l,s}$, sauf $T_{1,0}$ et $T_{2,3}$, étant différents de zéro.

Arrêtons-nous d'abord au cas des ellipsoïdes de Maclaurin.

7. Les plus simples cas qu'on a à considérer sont ceux où

$$T'_{2,2} = 0, \text{ ou } T'_{2,0} = 0.$$

Le premier de ces cas est celui de l'ellipsoïde de Maclaurin par lequel on peut passer à la série des ellipsoïdes de Jacobi.

En l'examinant, j'ai reconnu que, outre les figures ellipsoïdales, on n'obtient dans ce cas aucune autre figure d'équilibre, et cela quelle que soit l'hypothèse que l'on ait faite à l'égard de λ.

En passant ensuite au second cas, je suis, ici encore, arrivé à la conclusion que, quel que soit λ, on n'obtient rien de nouveau: si $\eta < 0$, on n'a que deux ellipsoïdes de Maclaurin et, si $\eta > 0$, on n'a aucune figure d'équilibre.

Ce second cas est celui, où la vitesse angulaire devient égale à sa limite supérieure ω'' pour les ellipsoïdes de Maclaurin. C'est donc le cas dont Tchebychef s'intéressait le plus.

On voit que je suis arrivé à un résultat négatif. Mais on ne doit pas oublier que ce résultat est obtenu dans certaines suppositions à l'égard de ζ, et rien ne prouve qu'en dehors de ces suppositions le problème soit impossible.

Je me propose d'y revenir ailleurs et je crois que je pourrai établir ce résultat dans des conditions beaucoup plus générales.

En passant enfin aux autres cas possibles de l'égalité

$$T'_{m,k} = 0,$$

j'ai rencontré, outre les ellipsoïdes, de nouvelles figures d'équilibre.

Je vais entrer à ce sujet en quelques détails, et tout d'abord je remarquerai que l'on devra considérer dans cette recherche séparément les cas où $k = 0$ et ceux où $k > 0$, car dans ces deux catégories des cas le problème présente des particularités différentes.

Je commencerai par les cas où $k = 0$.

8. Supposons que, pour l'ellipsoïde considéré, on a

$$T'_{m,0} = 0,$$

m étant un nombre pair supérieur à 2.

Alors, comme on le voit immédiatement, le problème ne sera possible que si l'on peut satisfaire à toutes les conditions de la forme

$$\int W_n P_m(\cos\theta)\, d\sigma = 0 \tag{10}$$

que l'on obtient en donnant à n toutes les valeurs à partir de $n = 1$. C'est donc à l'examen de ces conditions que le problème se réduit principalement.

Pour rendre le problème déterminé, nous admettrons les deux premières conditions du n° 1.

Alors, en s'arrêtant à la plus simple hypothèse à l'égard de λ, celle de $\lambda = 1$, et en posant pour abréger

$$\frac{P_m(\cos\theta)}{\rho+\cos^2\theta} = (\rho+1)\frac{P_m(\cos\theta)}{H} = \tau,$$

on aura tout d'abord

$$\zeta_1 = \alpha_1\tau + \varphi_1,$$

α_1 étant une constante inconnue et φ_1 une fonction parfaitement déterminée, qui représente la valeur de ζ_1 dans le passage à la figure ellipsoïdale correspondant à $\Omega = \Omega_0 + \eta$.

De même, lorsqu'on aura déjà calculé

$$\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \ldots, \quad \zeta_{i-1},$$

on obtiendra

$$\zeta_i = \alpha_i\tau + \varphi_i,$$

où α_i est une constante inconnue et φ_i une fonction dépendant de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ et ne renfermant, outre ces constantes, rien d'inconnu.

C'est par le choix des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ que l'on devra chercher à satisfaire aux conditions (10).

En se reportant à ces conditions, on verra tout d'abord que celle qui répond à $n = 1$ sera vérifiée d'elle-même.

En passant ensuite au cas de $n = 2$, on aura

$$\int W_2 P_m(\cos\theta)\, d\sigma = (A\alpha_1 \pm B)\,\alpha_1,$$

où A et B sont des constantes parfaitement déterminées, et où les signes correspondent: le supérieur, au cas de $\eta > 0$, l'inférieur, au cas de $\eta < 0$.

Pour B, on obtient cette expression

$$B = -\frac{8\pi}{2m+1}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{dT'_{m,k}}{d\Omega},$$

où ρ est considéré comme fonction de Ω d'après l'équation qui exprime la condition d'équilibre des ellipsoïdes de Maclaurin.

Par cette formule, on voit que *B ne sera jamais nul*; car, de ce qui a été montré dans le Mémoire *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales*, il résulte que la dérivée

$$\frac{dT'_{m,k}}{d\Omega}$$

ne s'annule jamais pour la valeur de ρ qui annule la fonction $T'_{m,k}$.

Quant à A, je ne reproduirai pas ici son expression, et je dirai seulement qu'en l'étudiant j'ai reconnu que cette constante est aussi *toujours différente de zéro.* J'ajouterai que, pour le prouver, j'ai dû encore me servir du théorème de Lindemann que j'ai cité plus haut.

Ainsi l'on voit que, pour satisfaire à la condition

$$\int W_2 P_m(\cos\theta)\, d\sigma = 0,$$

on peut poser

$$(11) \qquad A\alpha_1 \pm B = 0,$$

ce qui donne pour α_1 une valeur déterminée et différente de zéro.

Quant à la supposition $\alpha_1 = 0$, par laquelle on satisfera toujours à cette condition, j'ai reconnu qu'elle ne donne rien que des figures ellipsoïdales.

Ayant déterminé α_1, on calculera α_2, α_3, ..., en considérant la condition (10) dans les suppositions $n = 3$, $n = 4$, ...

En général, lorsqu'on aura déjà calculé

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{i-1},$$

on calculera α_i par l'équation que donnera la condition (10) dans la supposition $n = i + 1$, et cette équation sera de la forme

$$(2A\alpha_1 \pm B)\,\alpha_i = \text{quantité connue.}$$

Comme le coefficient de α_i se réduit, en vertu de (11), à la quantité $\mp B$ différente de zéro, on pourra ainsi déterminer α_i.

De cette manière on calculera tous les α_i, et l'on obtiendra, pour ces constantes, des valeurs parfaitement déterminées.

Donc les ζ_i ne renfermeront rien d'inconnu, et l'on voit facilement que ce seront des fonctions uniformes de $\cos^2\theta$ *ne dépendant point de* ψ. En ce qui concerne le calcul de ces fonctions, nous en parlerons plus loin (n° 13).

On voit que *le problème est possible, quel que soit le signe de* η.

L'analyse précédente était fondée sur l'hypothèse de $\lambda = 1$. Mais, en examinant les autres hypothèses à l'égard de λ, on verra qu'elles ne donnent rien de nouveau: on aura toujours deux solutions, dont l'une correspondra à la figure ellipsoïdale, l'autre, à la figure d'équilibre que nous venons de définir dans l'hypothèse $\lambda = 1$.

9. En passant aux cas où $k > 0$, supposons que, pour l'ellipsoïde considéré, on a

$$T'_{m,k} = 0,$$

m étant supérieur à 2 et $m - k$ étant un nombre pair.

3*

On devra alors avoir

$$\int W_n P_{m,k}(\cos\theta)\cos k\psi\, d\sigma = 0, \tag{12}$$

$$\int W_n P_{m,k}(\cos\theta)\sin k\psi\, d\sigma = 0, \tag{13}$$

quel que soit n, et c'est à l'examen de ces conditions que le problème se réduira principalement.

Comme dans le cas précédent, nous admettrons les deux premières conditions du n° 1. Mais à présent elles ne suffiront plus, et, pour rendre le problème déterminé, nous admettrons encore celle-ci

$$\int H\zeta P_{m,k}(\cos\theta)\sin k\psi\, d\sigma = 0,$$

qui ne servira qu'à fixer la position de la figure cherchée par rapport aux axes des x et des y.

Pour que cette égalité ait lieu, quel que soit $\varkappa$, on doit avoir

$$\int H\zeta_i P_{m,k}(\cos\theta)\sin k\psi\, d\sigma = 0$$

pour toutes les valeurs de i.

Dans le cas actuel, l'hypothèse de $\lambda = 1$ ne donne rien que des figures ellipsoïdales. On passera donc à l'hypothèse $\lambda = 2$.

Dans cette hypothèse, en posant

$$\frac{P_{m,k}(\cos\theta)\cos k\psi}{\rho + \cos^2\theta} = \tau$$

et tenant compte des conditions admises, on aura

$$\zeta_1 = \alpha_1\tau,$$

α_1 étant une constante inconnue.

Puis, on aura

$$\zeta_2 = \alpha_2\tau + \varphi_2,$$

où α_2 est une nouvelle constante inconnue et φ_2 une fonction de θ et ψ, dépendant de α_1 et ne contenant, outre cela, rien d'inconnu.

En général, en entendant par α_i une constante inconnue, on obtiendra

$$\zeta_i = \alpha_i\tau + \varphi_i,$$

où la fonction φ_i dépendra de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ et ne renfermera, outre cela, rien d'inconnu.

Pour déterminer les constantes α_1, α_2, α_3, ..., on se reportera aux conditions (12) et (13).

On verra que la condition (13) sera toujours remplie d'elle-même, quel que soit n.

Quant à la condition (12), elle sera remplie d'elle-même pour $n = 1$ et pour $n = 2$. Mais pour les autres valeurs de n ce ne sera plus le cas.

En calculant l'intégrale qui figure au premier membre dans le cas de $n = 3$, on obtiendra un résultat de la forme

$$\int W_3 P_{m,k}(\cos\theta) \cos k\psi \, d\sigma = (A\alpha_1^2 \pm B)\,\alpha_1,$$

où A et B sont des constantes parfaitement déterminées, et où, comme précédemment, on doit prendre le signe supérieur, si $\eta > 0$, et le signe inférieur, si $\eta < 0$.

Pour B, on aura une expression analogue à celle que nous avons rencontrée dans le cas de $k = 0$, savoir

$$B = -\frac{4\pi}{2m+1}\,\frac{(m+k)!}{(m-k)!}\,\frac{1}{\sqrt{\rho}}\,\frac{dT'_{m,k}}{d\Omega}.$$

Donc B *ne sera jamais nul.*

Pour A, on aura une expression beaucoup plus compliquée que celle qu'on avait dans le cas de $k = 0$. Mais, en partant du théorème de Lindemann, j'ai reussi à établir, ici encore, que A *n'est jamais nul.*

Ainsi, la condition

$$\int W_3 P_{m,k}(\cos\theta) \cos k\psi = 0$$

donne, pour déterminer α_1, une équation du troisième degré, dont une racine est égale à zéro et les deux autres sont données par l'équation

$$A\alpha_1^2 \pm B = 0, \tag{14}$$

et sont, par suite, différentes de zéro.

En examinant la supposition $\alpha_1 = 0$, on ne trouve qu'une figure ellipsoïdale.

Quant à l'équation (14), elle conduira à une nouvelle figure d'équilibre, si on la prend avec un signe convenable, qui doit être opposé à celui du rapport $\frac{B}{A}$.

Arrêtons-nous à une quelconque des deux valeurs de α_1 données par cette équation, qui sont égales et de signes contraires.

Pour déterminer α_2, on considérera la condition (12) dans la supposition $n = 4$, et l'on verra que cette condition donnera une équation de la forme

$$(3A\alpha_1^2 \pm B)\,\alpha_2 = \text{quantité connue.}$$

D'une manière générale, si l'on a déjà calculé

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{i-1},$$

on calculera α_i par l'équation que donnera la condition (12) dans le cas de $n = i + 2$, et cette équation sera de la forme

$$(3A\alpha_1^2 \pm B)\,\alpha_i = \text{quantité connue.}$$

Comme la quantité $3A\alpha_1^2 \pm B$ se réduit, en vertu de (14), à un nombre différent de zéro, savoir $\mp 2B$, on pourra ainsi calculer successivement tous les α_i, et l'on obtiendra, pour ces constantes, des valeurs parfaitement déterminées pour chacune des deux valeurs de α_1.

Dès lors, les ζ_i ne contiendront rien d'inconnu, et l'on verra que ce seront des suites *finies* de la forme

$$\zeta_i = \Theta_0 \sin^{ik}\theta \cos ik\psi + \Theta_1 \sin^{(i-2)k}\theta \cos(i-2)k\psi + \ldots,$$

où Θ_0, Θ_1, ... seront des fonctions uniformes de $\cos^2\theta$. Comment on les calculera, nous dirons plus loin (n° 13).

Ainsi, pour chacune des deux valeurs de α_1, on aura une suite déterminée des ζ_i. Mais ces deux suites ne définiront qu'une seule et même figure dans deux positions différentes, dont l'une se déduit de l'autre par une rotation autour de l'axe des z de l'angle $\frac{\pi}{k}$.

On voit que *le problème n'est possible que pour des valeurs de η de signe déterminé.* Ce signe doit être opposé à celui du rapport $\frac{B}{A}$.

Ces résultats ont été obtenus dans l'hypothèse $\lambda = 2$. Mais, en examinant ce qui arrive pour $\lambda > 2$, on ne trouvera rien de nouveau.

10. Passons au cas des ellipsoïdes de Jacobi.

Supposons que, pour l'ellipsoïde considéré, on a

$$T_{m,2m} = 0,$$

m étant un nombre supérieur à 2.

On devra alors avoir

$$\int W_n E_{m,2m}(\mu) E_{m,2m}(\nu)\, d\sigma = 0, \tag{15}$$

quel que soit n, et tout se réduira à l'examen de ces conditions.

Pour rendre le problème déterminé, nous admettrons les trois conditions du n° 1. Mais, pour aller plus loin, nous devrons considérer séparément le cas de m pair et celui de m impair.

Supposons d'abord que m soit un nombre pair.

En s'arrêtant à l'hypothèse de $\lambda = 1$ et en posant pour abréger

$$\text{(16)} \qquad \frac{E_{m,2m}(\mu)\,E_{m,2m}(\nu)}{(\rho+\mu^2)(\rho+\nu^2)} = \frac{E_{m,2m}(\mu)\,E_{m,2m}(\nu)}{H} = \tau,$$

on aura alors

$$\zeta_1 = \alpha_1\tau + \varphi_1,$$

où α_1 est une constante inconnue et φ_1 une fonction connue représentant la valeur de ζ_1 dans le passage à l'ellipsoïde de Jacobi pour lequel $\Omega = \Omega_0 + \eta$.

Pour tous les autres ζ_i, on aura des expressions de la forme

$$\zeta_i = \alpha_i\tau + \varphi_i,$$

α_i étant une constante inconnue et φ_i une fonction de μ et ν dépendant de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ et ne renfermant, outre ces constantes, rien d'inconnu.

Pour déterminer ces constantes, on se reportera aux conditions de la forme (15).

Celle de ces conditions, qui correspond à $n = 1$, sera remplie d'elle-même.

Quant au cas de $n = 2$, on aura

$$\int W_2 E_{m,2m}(\mu) E_{m,2m}(\nu)\, d\sigma = (A\alpha_1 \pm B)\,\alpha_1,$$

A et B étant des constantes parfaitement déterminées, et les signes correspondant toujours, le supérieur au cas de $\eta > 0$, l'inférieur, au cas de $\eta < 0$. En ce qui concerne B, on aura une expression semblable à celles qui se présentaient dans le cas des ellipsoïdes de Maclaurin, savoir

$$\text{(17)} \qquad B = -\frac{2\gamma}{\Delta}\frac{dT_{m,2m}}{d\Omega},$$

où

$$\gamma = \int \left[E_{m,2m}(\mu)\,E_{m,2m}(\nu)\right]^2 d\sigma$$

et où, dans la formation de la dérivée, on considère ρ et q comme fonctions de Ω, d'après les équations qui définissent les ellipsoïdes de Jacobi.

Dans le cas actuel, je n'ai pas démontré que A et B sont *toujours* différents de zéro. Mais j'ai établi que cela a lieu *dans une infinité de cas*, qui seront indiqués plus loin.

Supposons donc que, pour la valeur considérée de m, ni A, ni B ne sont nuls.

Alors on se trouvera dans des conditions toutes semblables à celles qui se présentaient dans le cas des ellipsoïdes de révolution pour lesquels

$$T'_{m,0} = 0.$$

Si, pour satisfaire à la condition (15) dans le cas de $n=2$, on s'arrête à la supposition $\alpha_1=0$, on ne trouvera rien que des figures ellipsoïdales.

Si, au contraire, on pose

$$A\alpha_1 \pm B = 0,$$

on aura, pour tous les autres α_i, des valeurs encore parfaitement déterminées, et l'on obtiendra ainsi une suite déterminée des ζ_i, qui définira une nouvelle figure d'équilibre.

En examinant ensuite les hypothèses où $\lambda > 1$, on ne trouvera rien de nouveau.

On voit que, dans le cas considéré, *le problème est possible, quel que soit le signe de* η.

Pour ce qui concerne le calcul des ζ_i et leur forme, je renverrai au n° 13.

11. Supposons maintenant que m soit un nombre impair.

Dans ce cas, l'hypothèse $\lambda=1$ ne conduira qu'à des figures ellipsoïdales. On commencera donc par l'hypothèse $\lambda=2$.

Alors on aura

$$\zeta_1 = \alpha_1\tau$$

et, pour les autres ζ_i,

$$\zeta_i = \alpha_i\tau + \varphi_i.$$

Dans ces formules, τ est donné, comme précédemment, par la formule (16), $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sont des constantes inconnues et φ_i est une fonction de μ et ν qui dépend de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ et ne contient, outre cela, rien d'inconnu.

Pour déterminer les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, on se reportera à la condition (15).

Pour $n=1$ et pour $n=2$, cette condition sera remplie d'elle-même.

En passant ensuite au cas de $n=3$, on aura

$$\int W_3 E_{m,2m}(\mu)\, E_{m,2m}(\nu)\, d\sigma = (A\alpha_1^2 \pm B)\,\alpha_1,$$

A, B étant des constantes parfaitement déterminées, et les signes correspondant, le supérieur, au cas de $\eta>0$, l'inférieur, au cas de $\eta<0$.

Pour B, on a, ici encore, l'expression (17). Quant à A, on obtient une expression beaucoup plus compliquée que dans le cas de m pair. Je n'ai discuté cette expression que dans le cas le plus simple, celui de $m=3$, et j'ai reconnu que A est alors différent de zéro. Dans le même cas, B est aussi différent de zéro, comme cela résulte de ce que j'ai montré dans le Mémoire *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales*.

Supposons que, pour la valeur considérée de m, ni A, ni B ne sont nuls.

Alors on se trouvera dans des conditions analogues à celles qu'on avait dans le cas des ellipsoïdes de révolution pour lesquels

$$T'_{m,k} = 0, \qquad k > 0.$$

En s'arrêtant à la supposition $\alpha_1 = 0$, on ne trouvera rien que des ellipsoïdes. Quant à une autre supposition possible, savoir

$$A\alpha_1^2 \pm B = 0,$$

où l'on devra prendre un signe convenable, on aura deux valeurs de α_1, ne différant que par le signe, et, pour chacune de ces valeurs, on trouvera des valeurs parfaitement déterminées pour tous les autres α_i. On aura ainsi deux suites déterminées des ζ_i qui conduiront à une seule et même figure d'équilibre placée dans deux positions différentes: pour passer de l'une de ces positions à l'autre, on n'aura qu'à tourner cette figure autour de l'axe des z de l'angle $\frac{\pi}{2}$.

En passant ensuite aux hypothèses où $\lambda > 2$, on n'obtiendra rien de nouveau.

Dans le cas considéré, *le problème ne sera possible que si* η *a un signe convenable.* Ce signe doit être opposé à celui du rapport $\frac{B}{A}$.

Pour ce qui concerne la forme des ζ_i et leur calcul, nous renverrons au n° 13.

12. Par ce qui vient d'être dit, on voit que la question se réduit principalement à l'étude de certaines constantes, pour reconnaître si elles sont ou ne sont pas nulles. Dans tous les cas où l'on parvient à établir que ces constantes ne sont pas nulles, on pourra faire les conclusions qui viennent d'être indiquées. Dans d'autres cas, on ne pourra rien dire.

Pour ce qui concerne les ellipsoïdes de Maclaurin, j'ai établi que les constantes dont il s'agit ne sont jamais nulles. Mais j'ai dû, à cet effet, me servir du théorème de Lindemann.

Dans le cas des ellipsoïdes de Jacobi, ce théorème n'est plus applicable, et l'on ne sait aucun autre théorème analogue qui puisse jouer ici le même rôle. Cependant les expressions de ces constantes, et surtout celle de A pour m impair, sont très compliquées et, bien que je les aie obtenues, dans tous les cas, *sous une forme finie et même algébrique* par rapport à ρ et q, elles ne conduisent à aucune conclusion immédiate. J'ai dû donc me borner à la considération de certains cas particuliers.

J'ai déjà dit que la constante B dans le cas de $m = 3$ est différente de zéro. J'ai établi que la même chose a aussi lieu, dès que m dépasse une certaine limite. Dans tous ces cas, B est un nombre *négatif.*

En ce qui concerne A, on doit distinguer les deux expressions, très différentes, qu'on trouve pour cette constante dans le cas de m pair et dans le cas de m impair. Celle qui se rapporte au cas de m pair n'a été examinée que pour de grandes valeurs de m, et j'ai reconnu qu'elle ne peut être nulle, dès que m dépasse une certaine limite. Quant à l'expression qui se rapporte au cas de m impair, et qui est extrêmement compliquée, je ne l'ai examinée, comme il a été déjà dit, que pour $m = 3$. Dans ce cas, c'est un nombre *positif.*

Ainsi l'on voit que les conclusions relatives au cas des ellipsoïdes de Jacobi sont beaucoup moins complètes que celles que j'ai obtenues pour les ellipsoïdes de Maclaurin.

J'y reviendrai encore dans un des Mémoires ultérieurs, et j'espère que je pourrai obtenir jusqu'alors des résultats plus complets.

Par analogie avec ce qui a lieu pour les ellipsoïdes de Maclaurin, on peut présumer que, pour les ellipsoïdes de Jacobi, les constantes A et B ne seront encore jamais nulles. Toutefois, comme je n'en suis pas sûr, j'ai examiné ce qui aurait lieu, si une de ces constantes, ou toutes les deux, pouvaient s'annuler pour certaines valeurs de m. Il va sans dire que l'analyse de pareils cas est plus compliquée; mais elle se réduit toujours à l'examen des conditions (15) qui donnent certaines équations algébriques pour déterminer les constantes α_i. Quant aux conclusions, on pourra alors rencontrer des cas où il n'y a aucune nouvelle figure d'équilibre, ainsi que des cas où il y en a plusieurs.

13. Pour calculer les fonctions ζ_n, on se servira des séries procédant suivant les fonctions sphériques des angles θ et ψ, en prenant ces fonctions sphériques, dans le cas de $q < 1$, sous forme des produits de Lamé. Si la fonction W_n dans l'équation (6) est donnée par une pareille série, on en déduira immédiatement, sous la même forme, la fonction $H\zeta_n$, et de là on pourra déduire le développement de ζ_n.

Ces développements ne seront pas seulement formels, car, en examinant successivement

$$W_1,\quad H\zeta_1,\quad \zeta_1;\qquad W_2,\quad H\zeta_2,\quad \zeta_2;\qquad \ldots,$$

on peut établir que toutes ces fonctions sont réellement développables en des séries de ladite forme, et que ces séries sont absolument et uniformément convergentes pour toutes les valeurs de θ et ψ. On peut, en effet, établir que, si

$$Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots$$

est le développement d'une quelconque de ces fonctions, Y_n étant une fonction sphérique d'ordre n, on aura des inégalités de la forme

$$|Y_n| < Lr^n,$$

où r est une fraction fixe que l'on peut choisir arbitrairement sous l'inégalité

$$r > \frac{1}{\rho + 1}$$

$\left(\text{sans toutefois pouvoir prendre } r = \frac{1}{\rho+1}\right)$ et L un nombre fixe suffisamment grand.

J'ajouterai que tous ces développements peuvent être différentiés par rapport à θ et ψ autant de fois que l'on veut, de sorte que les séries des dérivées de leurs termes donneront les dérivées des fonctions.

En ce qui concerne la forme des fonctions ζ_n, ce seront, sous les conditions complémentaires admises, des fonctions uniformes des deux arguments

$$\cos\theta \quad \text{et} \quad \sin\theta\cos\psi,$$

toujours paires par rapport au premier et paires ou impaires, suivant les cas, par rapport au second.

Dans le cas des ellipsoïdes de Jacobi lorsqu'on a

$$T_{m,2m} = 0,$$

(les constantes A et B n'étant pas nulles), ce seront des fonctions paires ou impaires par rapport à $\sin\theta\cos\psi$, suivant que nm est pair ou impair. Donc, si m est un nombre pair, tous les ζ_n seront des fonctions paires de $\cos\theta$ et $\sin\theta\cos\psi$.

Dans le cas des ellipsoïdes de Maclaurin, lorsqu'on a

$$T'_{m,k} = 0,$$

les ζ_n seront des fonctions *entières* de degré n de

$$\sin^k\theta\cos k\psi,$$

paires ou impaires, suivant que n est pair ou impair, et ayant pour coefficients des fonctions paires de $\cos\theta$.

Mais ce qui est surtout à observer, c'est que les fonctions ζ_n sont, à ce qu'il paraît, susceptibles d'être présentées, dans tous les cas, *sous une forme finie*, c.-à d. sans l'emploi des séries infinies.

En ce qui concerne ζ_1, cela est évident: cette fonction s'obtient immédiatement sous une forme finie.

En passant ensuite au calcul de ζ_2, on obtient d'abord, pour le produit $H\zeta_2$, une expression sous forme d'une série infinie. Mais l'examen de cette série permet de remarquer *qu'elle peut être sommée*, ce qui donne pour $H\zeta_2$ et, par suite, pour ζ_2 une expression sous une forme finie.

J'ai calculé encore ζ_3, et je suis parvenu à la même conclusion.

Les expressions que l'on obtient de cette manière pour ζ_1, ζ_2, ζ_3 sont renfermées dans cette formule

$$\zeta_n = \frac{\Phi_n}{H^n},$$

où Φ_n, dans tous les cas, est une fonction *entière* de $\cos\theta$ et $\sin\theta\cos\psi$, paire par rapport à $\cos\theta$ et paire ou impaire par rapport à $\sin\theta\cos\psi$, suivant les cas. Quant au degré de cette fonction, il est toujours égal à nm, en supposant que l'ellipsoïde considéré (à deux ou à trois axes inégaux) est caractérisé par l'équation

$$T_{m,s} = 0.$$

J'ajouterai que *les coefficients de la fonction* Φ_n *sont exprimables algébriquement par* ρ *et* q.

Je n'ai discuté que les cas de $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$. Mais la manière même dont j'ai obtenu les expressions précédentes pour les ζ_n dans les cas de $n = 2$ et de $n = 3$, ne me laisse aucun doute sur ce que la même chose aura lieu pour toutes les autres valeurs de n.

Si cela est généralement vrai, le calcul de ζ_n en fonction de

$$\cos\theta, \qquad \sin\theta\cos\psi, \qquad \rho, \qquad q,$$

quelque grand que soit n, n'exigera que des opérations algébriques.

14. Pour achever l'étude de la question, il faut encore justifier les suppositions qui ont été introduites dès le début pour pouvoir aborder le problème. Il faut donc montrer que, pour les fonctions ζ_n qui viennent d'être définies, on peut réellement trouver les trois suites de nombres l_n, g_n, h_n dont il a été parlé au n° 3.

En examinant cette question, je l'ai résolue aussi, dans tous les cas où les constantes A et B ne sont pas nulles. J'ai reconnu, en effet, que l'on peut former trois équations algébriques en l, g, h, $\varkappa$ qui soient satisfaites en posant

$$l = g = h = \varkappa = 0,$$

et qui soient telles que les valeurs de l, g, h, définies par ces équations comme fonctions de $\varkappa$ s'annulant pour $\varkappa = 0$, soient susceptibles, pour des valeurs assez petites de $\varkappa$, d'être développées en des séries de puissances

$$l = l_1\varkappa + l_2\varkappa^2 + l_3\varkappa^3 + \dots,$$

$$g = g_1\varkappa + g_2\varkappa^2 + g_3\varkappa^3 + \dots,$$

$$h = h_1\varkappa + h_2\varkappa^2 + h_3\varkappa^3 + \dots,$$

dont les coefficients, représentant des nombres positifs, vérifient les inégalités

$$|\zeta_n| < l_n, \qquad \left|\frac{\partial\zeta_n}{\partial\theta}\right| < g_n, \qquad \left|\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\zeta_n}{\partial\psi}\right| < h_n,$$

quels que soient θ et ψ.

De cette manière j'ai établi, en toute rigueur, l'existence de nouvelles figures d'équilibre pour des valeurs assez petites de $|\eta|$, dans tous les cas où certaines constantes A et B ne sont pas nulles.

Je vais à présent caractériser ces figures d'équilibre.

Tout d'abord, pour toute valeur du nombre *pair* m supérieur à 2, on trouve une et une seule valeur de ρ satisfaisant à l'équation

$$T'_{m,0} = 0,$$

qui donne un ellipsoïde de Maclaurin par lequel on peut passer à une nouvelle série de figures d'équilibre, *qui sont de révolution.* Toutes ces figures admettent un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe de révolution qui est celui de rotation du liquide.

A cette série on peut passer tant en augmentant la vitesse angulaire qu'en diminuant.

Puis, pour toute couple de valeurs de m et k qui satisfont aux conditions

$$m - k = \text{nombre pair}, \qquad m > 2, \qquad k > 0,$$

on trouve une et une seule valeur de ρ vérifiant l'équation

$$T'_{m,k} = 0,$$

qui définit un ellipsoïde de Maclaurin par lequel on peut passer à une nouvelle série de figures d'équilibre. Ces figures admettent k plans de symétrie passant par l'axe de rotation et un plan de symétrie perpendiculaire à cet axe. Elles sont d'ailleurs telles que, après qu'on les tourne autour de cet axe, de l'angle $\frac{2\pi}{k}$, elles se superposent en tous les points.

A cette série on ne peut passer qu'en donnant à la vitesse angulaire un accroissement de signe convenable. Par exemple, à la série qu'on trouve dans le cas de $m = k = 3$ on ne peut passer qu'*en diminuant la vitesse angulaire.*

Enfin, pour toute valeur de m supérieure à 2, on trouve, au moins, une couple de valeurs de ρ et q satisfaisant aux équations

$$T_{2,2} = 0, \qquad T_{m,2m} = 0,$$

qui définissent un ellipsoïde de Jacobi par lequel on peut passer à une nouvelle série de figures d'équilibre, si certaines constantes A et B ne sont pas nulles. Tels sont les cas de $m = 3$ et de m pair et suffisamment grand. Dans ces cas, il n'y a d'ailleurs qu'une seule couple de nombres ρ et q vérifiant les équations ci-dessus.

Si m est un nombre pair, les nouvelles figures d'équilibre admettent trois plans de symétrie, dont deux passent par l'axe de rotation et le troisième lui est perpendiculaire.

A cette série de figures on peut passer tant en augmentant la vitesse angulaire, qu'en diminuant.

Si au contraire m est un nombre impair, les nouvelles figures n'admettent que deux plans de symétrie, dont l'un passe par l'axe de rotation, l'autre lui est perpendiculaire*).

A la série de ces figures d'équilibre on ne peut passer qu'en donnant à la vitesse angulaire un accroissement de signe convenable. Par exemple, à la série qu'on obtient dans le cas de $m = 3$ on ne peut passer qu'*en augmentant la vitesse angulaire.*

15. Les figures de la série qui vient d'être indiquée, et à laquelle on peut passer par l'ellipsoïde de Jacobi défini par l'équation

$$T_{3,6} = 0, \tag{18}$$

sont précisément celles que M. Poincaré et M. Darwin appellent les figures *pyriformes.*

M. Darwin, dans le Mémoire *The stability of the pear-shaped figure of equilibrium* (*Phil. Trans.,* A, vol. 200), arrive à la conclusion que ces figures, pour des valeurs assez petites de $|\eta|$, sont stables. Mes calculs conduisent à une conclusion différente.

Je vais entrer à ce sujet en quelques détails.

J'ai déjà dit que pour l'ellipsoïde de Jacobi défini par l'équation (18) on a

$$A > 0, \qquad B < 0.$$

La dernière inégalité résulte immédiatement de ce qui a été montré dans mon Mémoire *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales.* Quant à la première, j'y suis arrivé au moyen des calculs numériques très compliqués.

A cet effet, j'ai parti des nombres que j'ai trouvés dans le Mémoire cité, où j'ai calculé les rapports des carrés des axes pour l'ellipsoïde considéré.

Avec les notations actuelles, le résultat que j'y ai trouvé s'exprime ainsi:

$$0,637 < \frac{\rho}{\rho + q} < 0,638,$$

$$0,119 < \frac{\rho}{\rho + 1} < 0,120.$$

En partant de ces inégalités, j'ai cherché une limite supérieure et une limite inférieure pour A, et après d'assez longs calculs j'ai obtenu, pour les deux limites, des nombres positifs.

C'est ainsi que je suis arrivé à l'inégalité $A > 0$ d'où j'ai conclu que, pour passer aux figures pyriformes, on doit prendre $\eta > 0$ (*voir* le n° 11).

---

*) Il est à remarquer que toutes ces propriétés de symétrie ont été prévues par M. Poincaré, qui les a déduites, dans le Mémoire des *Acta Mathematica,* de la considération de la première approximation.

Contrairement à cela, M. Darwin arrive à l'inégalité $A < 0$, d'où il a dû conclure que, pour passer aux figures pyriformes, il faut prendre $\eta < 0$ *).

Ayant ainsi obtenu un résultat opposé à celui de M. Darwin, je me suis mis à vérifier mes calculs, et je l'ai fait très soigneusement, en refaisant tous les calculs à plusieurs reprises, mais je n'y ai trouvé aucune erreur sensible. Je dois donc conclure que c'est mon résultat qui est exact.

Quant à la discordance avec M. Darwin, elle est facile à expliquer. Elle provient, sans doute, de ce que nous avons calculé des formules toutes différentes. Moi, j'ai obtenu pour A une expression finie, que j'ai présentée ensuite, en tenant compte des équations

$$T_{2,3} = 0, \qquad T_{3,6} = 0,$$

sous une forme algébrique par rapport à ρ et q, et *c'est cette fonction algébrique que j'ai calculée;* tandis que M. Darwin *avait affaire à une série infinie renfermant une infinité d'intégrales elliptiques.* Il a dû donc négliger une infinité de termes, et en le faisant il a remplacé, dans les termes retenus, les intégrales elliptiques par certaines expressions approchées. De tout cela proviennent des erreurs; mais M. Darwin n'a pas cherché à les apprécier d'une manière complète. Du reste, d'après ce qu'il dit lui-même, il ne regarde pas son résultat comme tout à fait certain.

Pour résoudre la question de la stabilité qu'il s'est proposé, M. Darwin cherche à déterminer le signe de l'accroissement qu'on doit donner au moment des quantités du mouvement pour passer de l'ellipsoïde aux figures pyriformes assez voisines; car, d'aprés M. Poincaré, si le liquide considéré est visqueux, il y aura stabilité ou instabilité de ces figures, suivant que cet accroissement est positif ou négatif.

Or, en développant l'accroissement dont il s'agit suivant les puissances ascendantes de $\varkappa$, on trouve, pour son premier terme, cette expression

$$\left\{\frac{\omega}{4\Delta}B - \frac{A}{B}\frac{dJ}{d\Omega}\right\}\alpha_1^2\varkappa^2,$$

où J désigne le moment des quantités du mouvement pour les ellipsoïdes de Jacobi.

C'est donc le signe de la quantité

$$\frac{\omega}{4\Delta}B - \frac{A}{B}\frac{dJ}{d\Omega}$$

que l'on doit déterminer.

M. Darwin, en la calculant, trouve un nombre positif, et il en conclut la stabilité des figures pyriformes.

---

*) La constante A ne diffère que par un facteur positif de ce que M. Darwin désigne par

$$A_0 + \sum \frac{(B_i^s)^2}{C_i^s}.$$

Or, par la théorie des ellipsoïdes de Jacobi, on sait que

$$\frac{dJ}{d\Omega} < 0.$$

Par suite, comme j'ai trouvé $A > 0$, $B < 0$, je parviens à l'inégalité

$$\frac{\omega}{4\Delta} B - \frac{A}{B} \frac{dJ}{d\Omega} < 0.$$

J'arrive donc, ici encore, à un résultat différent, et je dois conclure que les figures pyriformes assez voisines des ellipsoïdes, dans le cas d'un liquide visqueux, sont instables.

Je n'insiste pas toutefois sur cette conclusion, car les considérations qui lui servent de base ne peuvent être regardées comme bien fondées.