ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa | **Giuseppe Jung** in Milano
Ulisse Dini in Pisa | **Corrado Segre** in Torino

SERIE III. * TOMO XX.

MILANO
TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.
OFFICINA CARTE VALORI

1913.

ALLA MEMORIA

DI

LAGRANGE

NEL CENTENARIO

DELLA SUA MORTE

Il 10 aprile 1913 compie un secolo dalla morte di **LAGRANGE.** La R. Accademia delle scienze di Torino, volendo anche in questa occasione render onore alla memoria del grande Scienziato, che fu uno dei fondatori dell'Accademia stessa, ha deliberato nella sua adunanza plenaria del 21 gennaio 1912 di prendere sotto i suoi auspici la pubblicazione di una raccolta di memorie di Matematica, scritte in onore di **LAGRANGE** da scienziati di varie nazioni; ed ha affidato l'incarico di tale pubblicazione alla Direzione degli *Annali di Matematica.*

Così si son composti due volumi, che figureranno nella collezione degli *Annali di Matematica* come vol.ⁱ XX e XXI.

Noi ringraziamo cordialmente, anche a nome dell'Accademia di Torino, tutti gli egregi scienziati che hanno collaborato in quest'opera di commemorazione del sommo Matematico italiano.

LA DIREZIONE degli "ANNALI DI MATEMATICA„

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE IN QUESTO XX TOMO (SERIE III)

	Prefazione della Direzione	pag.	V
G. LORIA	G. L. Lagrange nella vita e nelle opere	»	IX
E. LANDAU	Über die Zerlegung der Zahlen in zwei Quadrate	»	1
M. ABRAHAM	Le equazioni di Lagrange nella nuova meccanica	»	29
P. APPELL	Les équations du mouvement d'un fluide parfait déduites de la considération de l'énergie d'accélération	»	37
E. PASCAL	Sopra una classe di equazioni differenziali di grado n e di ordine $n-1$ da considerarsi come estensioni delle equazioni di Riccati	»	43
G. VIVANTI	Sul calcolo delle variazioni degli integrali multipli	»	49
A. V. BÄCKLUND	Einiges über Kugelkomplexe	»	65
F. ENRIQUES	Intorno alla risoluzione razionale di una classe di equazioni algebriche fra quattro variabili	»	109
A. HURWITZ	Über die Trägheitsformen eines algebraischen Moduls	»	113
T. LEVI-CIVITA	Nuovo sistema canonico di elementi ellittici	»	153
O. HÖLDER	Neues Verfahren zur Herleitung der Differentialgleichung für das relative Extremum eines Integrals	»	171
H. A. LORENTZ	Sur un théorème général de l'optique	»	185
P. STÄCKEL	Über die Rektifikation algebraischer Kurven	»	193
F. SEVERI	Relazioni tra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di 1.ª specie di una varietà algebrica	»	201
G. FUBINI	Alcuni nuovi problemi di calcolo delle variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali	»	217
O. BOLZA	Über zwei Euler'sche Aufgaben aus der Variationsrechnung	»	245

In Ottobre p. v. si pubblicherà il Vol. XXI (il secondo in memoria di Lagrange) e conterrà pregevoli monografie di:

BOREL — BORTOLOTTI - CARATHÉODORE — E. E. LEVI — FORSYTH
HADAMARD — HAHN — KOEBE — LAMB — LAURICELLA — PINCHERLE — SCHUR
STEKLOFF — STÉPHANOS — WILCZYNSKI.

G. L. LAGRANGE
nella vita e nelle opere.

(*Di* Gino Loria, *a Genova*.)

> « Va d'un air simple à la vérité qu'il aime; la vérité lui sourit et quitte volontiers sa retraite pour se laisser produire au grand jour par un homme aussi modeste ».
>
> Poinsot.

Simpatie od avversioni personali, devozione di discepoli o gelosie di scuole, riconoscenza per beneficî ricevuti o rancore per ripulse subìte, tutto congiura per ottenebrare le opinioni sopra grandi o piccoli uomini dei contemporanei o dei posteri immediati. Ma il giudizio pronunziato sopra i personaggi veramente rappresentativi, dopo un secolo dal giorno in cui scesero nella pace del sepolcro, dopo che si spensero quietamente persino gli ultimi echi delle passioni che si agitarono attorno ad essi, dopo che l'umanità nel suo incessante moto progressivo seppe distinguere e separare le scorie dal nobile metallo, si può considerare per definitivo. Tale deve, dunque, ritenersi quello che oggi viene pronunciato sopra il sommo Scienziato di cui ora l'universalità dei matematici, addolorati e plaudenti, commemorano il primo centenario della deplorata dipartita.

Al coro di voci, concordemente laudative, che in impressionante armonia si sprigiona da questi volumi dei venerabili *Annali di Matematica*, parve opportuno dovesse aggiungersene una, per quanto modestissima, che compendiasse in rapidissima sintesi i mirabili frutti da lui raccolti negli svariati campi ai quali consacrò le solerti e geniali sue cure. Ma poichè l'esame dell'opera mal si scompagna dalla contemplazione dell'artefice, così si ritenne necessario di segnare anche le date dei pochi momenti in cui la trajettoria generalmente tanto regolare dell'esistenza del nostro grande compatriota presentò improvvisi mutamenti di direzione; il che parve tanto più consigliabile dal momento che le tre epoche, nelle quali la sua vita naturalmente si ripartisce, hanno un perfetto riscontro nella sua attività scientifica: periodo di intensa e fervida preparazione a Torino, periodo di massima produzione originale a Berlino, periodo di grande attività ufficiale e didattica a Parigi.

I. - A TORINO.

1. La famiglia Lagrange è oriunda dalla Turenna; ma verso la metà del secolo XVII si trapiantò in Italia, ove non tardò a porre salde radici. Il bisnonno del grande matematico, dopo avere raggiunto il grado di capitano nell'esercito francese, abbandonò il servizio di Luigi XIV per venire alla corte di Savoja, ove ben presto seppe acquistare la piena fiducia del Duca Carlo Emanuele II, il quale gli affidò missioni delicate e volle dare una solenne attestazione della stima che per lui professava dandogli in moglie una parente di Michelangelo Conti, colui che, sotto il nome d'Innocenzo XIII, doveva occupare la cattedra di S. Pietro dal 1721 al 1724. Il favore di cui godeva il bisavolo continuò al nonno del sommo geometra (la cui moglie fu la contessa Bormiolo di Vercelli); sta a provarlo il fatto che per lui venne creata la carica di Tesoriere della R. Intendenza delle Fabbriche e Fortificazioni, la quale rimase nella famiglia Lagrange sino al momento (1800) in cui fu abolita. Tale ufficio fu occupato anche dal padre del nostro scienziato, il quale ebbe per moglie Teresa Gros, unica figlia di un medico di Cambiano. Da questo matrimonio nacquero ben undici figli, di cui sopravvissero soltanto due: l'ultimo ed il primo, Giuseppe Luigi, il quale vide la luce a Torino nel Quartiere di S. Agnese vicino alla Chiesa della Madonna degli Angioli [1] addì 25 gennajo 1736 [2].

Alcune mal riuscite speculazioni finanziarie avendo distrutta la fortuna della famiglia Lagrange, il padre pensò di avviare il suo primogenito alla lucrosa professione di avvocato, progetto al quale questi si dichiarò favorevole in massima; se non che, avendo intrapreso lo studio della fisica e della geometria sotto la guida del P. Beccaria e del Revelli, ebbe ben presto la chiara visione della propria naturale vocazione e relegò in soffitta codici e pandette. Innamorato da principio della geometria, l'abbandonò ben presto per consacrarsi all'analisi, nella quale ravvisava maggior forza e più vasto campo d'applicabilità [3]; e, senz'alcun ajuto, si pose in grado di intendere (a soli diciassette anni!) le opere di Newton, di Leibniz, dei Bernoulli e di Eulero, che con piena ragione erano allora considerate come le basi di qualsiasi istruzione matematica superiore. Siffatta lettura suscitò in lui tal folla di pensieri originali e straordinariamente fecondi che, contemplando nel suo insieme la sua produzione scientifica, vien fatto di ripetere con Alfredo de Vigny: « Qu'est-ce qu'une grande vie? Une pensée de jeunesse réalisée par l'âge mûr ».

2. La cronologia dei lavori di Lagrange è in massima parte mal sicura; chè, come è noto, gli atti accademici in cui essi vennero inseriti non rispecchiano fedelmente lo svolgersi degli avvenimenti; onde, mancando quei lavori, di regola, di una data indicante il giorno in cui ne venne completata la stesura, quando, come succede in generale, non si conosca la seduta accademica in cui ne fu data lettura, per determinarne il posto, fa mestieri ricorrere ad indizi indiretti od anche a semplici congetture. Gli uni e le altre trovano spesso solida base nel carteggio scientifico che il Nostro tenne con gli scienziati del suo tempo, carteggio che, pur troppo, non ci venne integralmente conservato [4], ma del quale però fortunatamente possediamo elementi estesi ed oltre ogni dire preziosi.

Gli è appunto con tale mezzo, e precisamente servendosi delle lettere che egli scrisse al Fagnano e ad Eulero, che si arriva a projettare qualche raggio di luce sopra gli inizî della sua vita scientifica. Si apprende così che in principio dell'estate dell'anno 1754 il diciottenne geometra era intento ad investigare le relazioni fra potenze e differenziali che dovevano dar materia alla sua prima pubblicazione scientifica [5], condurlo alla sua prima scoperta e procurargli, poco dopo, una delusione amarissima, quando, cioè, egli si accorse di essere stato prevenuto in tale scoperta da Leibniz [6]. Ammesso per vero che questa dolorosa constatazione di fatto abbia prodotta in lui un'impressione talmente angosciosa da farlo cadere in deliquio ed indurlo a chiedersi melanconicamente se non fosse meglio abbandonare per sempre un campo di ricerche, ove gli sembrava non rimanesse che spigolare, in campi mietuti da sommi predecessori [7], questo stato di scoraggiamento dovette essere di corta durata. Il giovane Anteo, dal suo contatto con la terra, trasse potenti stimoli e nuove forze ad operare; sta a dimostrarlo il fatto che sino dal 30 ottobre 1754 era in grado di partecipare al Fagnano qualche nuovo risultato conseguito nella Teoria delle curve tautocrone [8], tèma che, come vedremo, egli continuò a coltivare, raccogliendone frutti di tale valore da destare l'ammirazione di alcuni e l'invidia di altri. Poco dopo egli si incamminò per la via che doveva condurlo al Calcolo delle variazioni (quello fra i suoi trovati che egli sopra ogni altro prediligeva) ([9]); stanno a provarlo due lettere entrambe dirette ad Eulero, una delle quali (datata 12 agosto 1755) contiene l'applicazione della nuova procedura analitica ad una questione proposta dal grande geometra di Basilea ([10]), mentre l'altra (del 20 novembre 1755) contiene una soluzione del problema della Brachistocrona informata ai medesimi principî ([11]).

3. Ora se quella lettera a stampa diretta al Conte di Fagnano appare oggi ben piccola cosa in paragone alle opere che assicurarono poi a Lagrange una fama imperitura, al biografo essa si presenta come un avvenimento di notevole importanza per l'influenza che essa esercitò sullo svolgimento della carriera del nostro matematico: chè indubbiamente essa non fu estranea al conseguimento dell'unico pubblico ufficio che egli ricoprì in patria. Conferitogli con R. Decreto del 26 settembre 1755 ([12]), con lo stipendio annuo di scudi 250, venne annunciato da Lagrange a Fagnano il 24 dicembre dello stesso anno con le seguenti parole: « Del resto non dèbbo tacerle l'impiego di fresco da S. M. conferitomi di Maestro nelle R. Scuole Matematiche d'Artiglieria, il che certamente, per essere io giovane di non ancora 20 anni, è stato da tutti reputata per una cosa particolare e meravigliosa » ([13]). L'istituto ove fu chiamato il nostro geometra è quello che, dopo parecchie radicali trasformazioni, divenne l'attuale R. Accademia Militare di Torino; che ivi, assai più facilmente che nella Università, Egli potesse esplicare le straordinarie sue doti di analista, emerge tenendo presenti le condizioni in cui questa allora versava ([14]); che l'aspettazione del governo sardo non sia andata delusa è provato dal riassunto di un corso sopra i *Principî di Analisi sublime* tenuto dal giovane professore, di cui una copia esiste a Torino nella Biblioteca del Duca di Genova; su di esso ci sentiamo esonerati dall'estenderci essendone di pubblica ragione almeno il piano generale ([15]).

Tuttavia sembra che il posto ottenuto da Lagrange non lo appagasse che mediocremente, giacchè, pochi mesi dopo di averlo occupato, egli invocava l'aiuto di Eulero per conseguirne uno migliore in Germania ([16]); ed il grande analista svizzero, nell'attesa di poter giovare al suo giovane amico, lo faceva nominare (2 settembre 1756) socio corrispondente dell'Accademia di Berlino ([17]), secondo taluni ([18]) in ricompensa di una memoria sopra il tanto controverso *principio della minima azione*, da lui presentata a quel sodalizio in appoggio alle vedute manifestate dal presidente Maupertuis, mentre ferveva vivissima la famosa sua disputa con S. König ([19]).

Altro avvenimento di capitale importanza nella vita del Nostro fu la fondazione in Torino nel 1757 di una Società scientifica privata, dovuta all'iniziativa del Conte Giuseppe Angelo Saluzzo di Menusiglio, assiduo cultore degli studi chimici, validamente coadiuvato da Lagrange e dal medico Giovanni Cigna, Società che doveva più tardi trasformarsi nell'attuale R. Accademia delle Scienze di Torino, la quale, riunendo in un fascio tutti coloro che in Piemonte dedicavansi alle scienze positive, esercitò un'influenza oltre ogni dire benefica e che tuttora continua ([20]).

A far conoscere favorevolmente nel mondo matematico il novello corpo scientifico valsero in particolar modo le memorie che Lagrange inserì nei cinque volumi designati ordinariamente col nome di *Miscellanea Taurinensia;* memorie delle quali ci corre l'obbligo di indicare, sia pur succintamente, gli argomenti, le conclusioni, il valore ([21]), perchè complessivamente rappresentano, con sufficiente approssimazione, la produzione del primo periodo di vita scientifica del personaggio che ci occupa.

4. Un gruppo di lavori giovanili di Lagrange concerne la teoria dei massimi e minimi. Il Maclaurin nel suo celebre *Treatise on fluctions* (§§ 238 e 857) aveva esposte le condizioni di massimo o di minimo per le funzioni ad *una* variabile; all'estensione di tali criterî a funzioni con *parecchie* variabili il Nostro dedicò il suo primo contributo ai *Miscellanea Taurinensia* ([22]), il quale (come egli stesso dichiara) è un preludio allo scritto ([23]) mediante cui egli, per soddisfare ad un voto formulato da Eulero ([24]), gettò le basi del Calcolo delle variazioni. In tale nuovo lavoro egli, per dimostrare la fecondità dei nuovi principî, oltre a confermare risultati anteriormente ottenuti sopra il problema delle brachistocrone, oltre al dimostrare per via analitica il teorema di Cramer sul massimo dell'area dei poligoni piani rettilinei aventi lati assegnati, stabilì per primo l'equazione differenziale delle superficie d'area minima:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0, \text{ ove } p=\frac{\partial z}{\partial n},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Volgendosi poi alla dinamica diede un'ampia estensione ad un principio dovuto ad Eulero e ne fece applicazione a quei problemi concernenti il moto dei solidi e dei fluidi che allora destavano il più vivo e generale interesse.

I nuovi procedimenti analitici escogitati da Lagrange riscossero subito la più entusiastica approvazione da parte di Eulero, che ne fece ulteriori applicazioni e propose di costituire con essi una nuova branca dell'analisi sublime, da designarsi appunto col nome di « Calcolo delle variazioni » (25); per converso vennero aspramente, ma altrettanto infelicemente, combattuti dal Fontaine (26) e furono, con palese mala fede, attribuiti a torto ad Eulero dai PP. Le Seur e Jaquier nei loro ben noti *Éléments du Calcul intégral* (Parma, 1768). Ciò costrinse Lagrange a scrivere un secondo lavoro (27) per rivendicare a sè stesso la paternità del nuovo algoritmo, per invitare i competenti a paragonare questo ai procedimenti usati dal Fontaine e per rispondere ad alcune obbiezioni mossegli dal Borda (28); aggiungendo poi nuovi sviluppi dottrinali, egli assicurò importanza permanente ad un lavoro che, altrimenti, sarebbe stato annoverato, piuttosto che fra le memorie scientifiche, fra i documenti umani.

5. Il calcolo delle variazioni rappresenta il più celebre e forse il più importante contributo, ma non l'unico, dato dal giovane Lagrange al calcolo integrale. Infatti nel Volume I dei *Miscellanea* si trova anzitutto una memoria (29) destinata ad estendere alle equazioni lineari a differenze finite i metodi in uso per le analoghe equazioni differenziali; cosa importante in sè e per le applicazioni a bellissime questioni della teoria delle probabilità. Notiamo che tale argomento egli abbandonò subito perchè Laplace lo scelse come soggetto di importanti ricerche (v. i Volumi VI e VII dei *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie de Paris*), ma vi ritornò poi verso il 1775 con una memoria (30) che Poisson non esitò a proclamare « un des plus beaux ouvrages de Lagrange » (31) e nella quale la teoria delle serie ricorrenti e quella delle equazioni a differenze finite vengono ulteriormente perfezionate sì da renderle atte alla risoluzione di nuovi importanti problemi della teoria delle probabilità (32). In un punto, però, tali ricerche esigevano un complemento, come ebbe a rilevare G. F. Malfatti (33), ed era di contemplare il caso che avesse radici eguali l'equazione $A_0 + A_1 \alpha + \cdots + A_n \alpha^n = 0$, dalla quale Lagrange fa dipendere lo studio della serie ricorrente determinata dalla relazione $A_0 y_x + A_1 y_{x+1} + \cdots + A_n y_{x+n} = 0$; ora anche ciò venne fatto dal Nostro, anzi in parecchi modi, tutti soddisfacentissimi (34).

6. Nello stesso Volume I dei *Miscellanea* si legge ancora una memoria (35) contenente metodi nuovi per integrare alcune classi di equazioni differenziali suggerite dall'investigazione del movimento dei fluidi e sagaci osservazioni intorno alla famosa controversia sulla generalità della soluzione del Problema delle corde vibranti espressa dalla nota formola

$$y = \alpha \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + \beta \operatorname{sen} \frac{\pi x}{b} + \cdots$$

Maggiore notorietà (e con pieno diritto) conseguì una terza memoria dedicata all'equazione differenziale ellittica [36], nella quale Lagrange, partendo dall'analoga equazione relativa a funzioni circolari, arriva per una via piana e luminosissima al notissimo risultato ottenuto da Eulero « potius divinando ». Le considerazioni svolte dal nostro matematico non tardarono a divenir classiche e furono riprodotte nelle migliori trattazioni delle funzioni ellittiche, onde non è il caso di arrestarsi su di esse; meno note sono quelle in cui il grande geometra applica lo stesso metodo ad altre classi di equazioni differenziali e che meriterebbero ulteriore studio, per trarne tutte le conseguenze di cui sono tuttora gravide.

7. Di questioni analitiche collegate a ricerche fisico-matematiche trattano tre memorie di acustica teorica [37]; esse contengono contributi importanti alla teoria delle corde vibranti, giacchè ivi « in mezzo ad una dovizia infinita di nuovi artifizi analitici sono gettate le basi di quei metodi che, ampliati poi e fecondati dal genio di Fourier, divennero uno dei più efficaci stromenti della moderna fisica matematica » [38].

Apprezzatissimo dai competenti in materia fu pure un lavoro sopra il moto di un punto attratto da due centri fissi [39], ove Lagrange volle e seppe emanciparsi dall'ipotesi restrittiva, fatta dai predecessori, che il moto accadesse sempre in un piano passante per la retta congiungente i punti dati. Benchè egli abbia dovuto constatare poi con dolore che Eulero aveva avuta prima la medesima idea, pure egli seppe trattare la questione con tanta generalità ed eleganza che un secolo dopo, un altro scienziato di primo ordine, giudicò non indegno di lui l'esporne la soluzione a vantaggio dei propri conterranei [40].

Sorvolando sopra una memoria [41] intesa a dare qualche fondamento dottrinale al procedimento empirico della « rastremazione delle colonne », perchè alcuni errori materiali di calcolo infirmano i risultati stabiliti, nel chiudere questa rapida rassegna dei contributi dati dal Nostro alla prima serie delle Memorie accademiche torinesi [42], faremo cenno delle sue ricerche sull'uso della media aritmetica fra i risultati di parecchie osservazioni [43]; se anche recenti indagini storiche accuratissime hanno posto in luce che sopra tale strada egli ebbe quale precursore T. Simpson [44], pure il suo scritto è sempre giudicato come semplice, chiaro, decisivo in una questione oscura, spinosa, delicata [45], onde occupa una posizione cospicua nella preistoria della teoria dei minimi quadrati.

8. L'invio a d'Alembert del primo volume degli Atti della Società scien-

tifica torinese servì a Lagrange a stabilire una nuova relazione che, trasformandosi rapidamente in salda amicizia, fu feconda di risultati della più vasta portata. Esaminati gli scritti contenuti in quel volume, il celebre enciclopedista francese, in data 27 settembre 1759, scriveva a Lagrange: « vous êtes destiné, si je ne me trompe, à jouer un grand rôle dans les Sciences et j'applaudis d'avance à vos succès » [46] e quattro anni dopo (1.° ottobre 1763) confermava tale suo giudizio col parere di Eulero, scrivendo: « J'ai eu occasion de voir dans un voyage à Berlin M. Euler, qui fait de vous tout le cas que vous méritez, et qui vous regarde avec raison comme destiné à reculer loin les limites de la haute Géométrie » [47]. Queste lusinghiere espressioni fecero sorgere in Lagrange il desiderio di conoscere di persona il suo illustre corrispondente, nonchè gli altri matematici di Parigi; l'occasione di soddisfarlo gli fu offerta dal trasferimento da Torino a Londra del marchese Domenico Caraccioli, ambasciatore del Re di Napoli. In sua compagnia egli lasciò nel novembre 1763 la capitale del Regno di Sardegna, per recarsi a Parigi, ed ivi rimase sino al mese di maggio del seguente anno. Benchè tale soggiorno sia stato funestato da una non lieve malattia [48], esso lasciò nel Nostro i più lieti ricordi, per le festose accoglienze e le manifestazioni di stima di cui gli furono larghi — oltre che d'Alembert — Clairaut, Condorcet, Fontaine, Nollet, Marie ed altri scienziati.

Appunto in quest'epoca Gli venne conferita dall'Accademia delle Scienze di Parigi la prima delle numerose distinzioni che ne doveva ottenere nel corso della Sua vita; alludiamo al premio concesso allo scritto sulla librazione della luna [49], presentato per rispondere alla seguente questione: « Si l'on peut expliquer par quelque raison physique pourquoi la Lune nous présente toujours à peu près la même face; et comment on peut déterminer par les observations et par la théorie si l'axe de cette Planète est sujet à quelque mouvement propre, semblable à celui qu'on connait dans l'axe de la Terre et qui produit la précession des equinoxes et la nutation ». Il lavoro, con cui egli tentò rispondere e che fu ritenuto meritevole di premio, non risolve, a dir vero, completamente la questione, ma rappresenta un primo passo in una direzione, muovendosi nella quale il grande matematico doveva, sedici anni più tardi, giungere alla completa spiegazione del curioso fenomeno; esso poi possiede grande importanza storica, come quello che contiene la prima applicazione del Principio delle velocità virtuali.

Il successo conseguito da Lagrange in un arringo, a cui la più celebre Accademia d' Europa aveva invitati tutti i dotti del mondo, produsse una grande, generale e ben giustificata impressione. Non soltanto Luigi Dutens nel preparare la sua ben nota edizione delle *Opere di Leibniz* volle accaparrarsi la collaborazione di Lagrange per quanto concerneva gli scritti matematici di quel grande ([50]), ma Carlo Emanuele I cominciò ad accorgersi che la sua corona conteneva una gemma preziosissima che egli dianzi non sospettava esistesse; onde egli ed i suoi ministri non risparmiarono lodi, incoraggiamenti, promesse al giovane geometra, senza però riuscire a concretare nulla che valesse a migliorarne le condizioni economiche e sociali ([51]).

9. Una totale metamorfosi nell'esistenza del nostro eroe doveva accadere poco appresso per effetto di un avvenimento congenere succeduto ad Eulero. Questi era sino dal 1741 Direttore della Classe di matematica di quell'Accademia ([52]) che, fondata a Berlino l'11 luglio 1700 dall'Elettore di Brandeburgo, per ispirazione e sotto la direzione di Leibniz, dopo quarant'anni di torpido languore, era stata richiamata a vita novella nel 1740, dopo l'avvento al trono del sovrano illuminato, che va nella storia sotto il nome di Federico il Grande. Questi, dopo avere riconosciuto che l'Accademia prussiana non poteva disimpegnare l'alto ufficio affidatole di promotrice del progresso nel campo scientifico e letterario, ove si giovasse esclusivamente delle forze intellettuali offerte dal nuovo Regno, decise di farle assumere un carattere internazionale, chiamando nel suo seno tutti i pensatori che fossero disposti a portarvi il contributo del proprio sapere e della propria esperienza. L'invito da lui rivolto fu tosto accettato dall'Algarotti e dal Maupertuis. Questi finchè visse fu presidente dell'Accademia; dopo la sua morte (27 luglio 1759) tale carica rimase apparentemente vacante, ma di fatto chi dirigeva i lavori accademici e suggeriva la scelta del personale era il d'Alembert, la recondita ninfa Egeria del Grande sovrano. Ed è appunto per avere con amarezza riconosciuto che occupava nell'Accademia di Berlino una posizione subalterna, rispetto a quella di cui godeva un matematico a lui indiscutibilmente inferiore ([53]), che Eulero cedette alle reiterate sollecitazioni che gli venivano di continuo dalla corte di Russia e decise di ritornare a Pietroburgo ad infondere nuova vita a quell'Accademia, divenuta anemica e clorotica dopo che egli l'aveva abbandonata.

Non appena d'Alembert ebbe sentore di siffatta decisione chiese a Lagrange se fosse disposto a succedere al grande analista svizzero ([54]); ed avutane risposta affermativa ([55]), si affrettò a presentare la relativa proposta a Federico II.

Nel frattempo l'Accademia di Parigi conferiva a Lagrange il premio per l'anno 1766, in seguito alla presentazione di una memoria sopra i movimenti dei satelliti di Giove ([56]). Tale fatto produceva una nuova profonda impressione ed un'agitazione vivissima nella corte di Sardegna; nuove promesse generiche vennero fatte da parte dei ministri del tempo ([57]); ma poichè esse non traducevansi in alcun progetto concreto ([58]), Lagrange decise di accogliere l'invito di essere trasferito a Berlino, non appena d'Alembert glielo fece in nome del Re di Prussia ([59]) (la posizione che gli veniva offerta era quella di Membro ordinario di quell'Accademia e di Direttore della Classe di matematica, con lo stipendio annuo di scudi 1500) ([60]). In conformità di tale suo intendimento il nostro matematico presentò al proprio Re una domanda di congedo. Ogni sorta di mezzi fu posta in azione per fargliela ritirare ([61]), ma indarno; e quando il Re italiano ricevette dal Sovrano tedesco una pressante sollecitazione a non ostacolare più oltre l'esaudimento di quella domanda, Lagrange potè finalmente (5 luglio 1766) annunziare al suo protettore ed amico che ormai nulla si opponeva alla propria partenza da Torino ([62]). Ed infatti il 21 agosto seguente egli abbandonò la sua città natale, ove non doveva più ritornare; dopo un soggiorno di due settimane a Parigi, lo troviamo (20 settembre) a Londra, ospite del marchese Caraccioli; di là s'imbarcò per Amburgo diretto a Berlino, ove arrivò il 27 ottobre 1766 ([63]).

II. - A BERLINO.

10. Giunto alla sua destinazione Lagrange entrò subito in carica, tanto che addì 6 novembre 1766 pronunciò alcune parole inaugurali, che vennero religiosamente conservate ([64]). Cordialmente accolto dal suo nuovo sovrano, che ne ammirava l'instancabile fecondità ([65]), e felicitato da Eulero, che soltanto dolevasi di non averlo seco a Pietroburgo ([66]), egli non incontrò qualche difficoltà che nei suoi rapporti con Castillon, il quale vantava diritti di precedenza sul posto al quale era stato chiamato Lagrange ([67]). Ma ciò non valse a turbarne la serenità nè ad impedirgli di palesarsi, per assiduità e fertilità, degno successore di Eulero; giacchè nel ventennio che passò a Berlino potè, oltre che adempiere a tutte le gravi incombenze annesse agli uffici che occupava, leggere una memoria ogni mese, il che è tanto più degno di ammirazione quando si tenga conto della loro importanza e del fatto che lo stile di perfetta eleganza in cui sono scritte è il risultato di un lavoro di

lima, nel quale egli era instancabile ([68]). Poco dopo il suo arrivo a Berlino, cioè nel 1767, si unì in matrimonio con una sua cugina, Vittoria Conti, da lui all'uopo chiamata a Berlino ([69]); tale unione, da cui non nacque alcun figlio, durò sedici anni, essendo la moglie morta nel 1783 ([70]), dopo lunga e penosa malattia, durante la quale il sommo geometra si palesò medico intelligente ed infermiere infaticabile ed affettuosissimo.

11. Forse a cagione dell'intenso ed indefesso lavoro Lagrange fu sempre di salute delicata, tanto che più volte gli fu tolto di partecipare ad importanti concorsi, da cui sentivasi attratto ([71]). Tuttavia in parecchie occasioni gli fu dato di scendere in lizza ed ottenere la vittoria. Così nel 1772 divideva con Eulero il premio (doppio) posto a concorso dall'Accademia di Parigi sopra la Teoria del movimento della Luna ([72]), mentre nel 1774 un altro ne otteneva sopra l'equazione secolare dello stesso pianeta ([73]): nell'intervallo di tempo interposto fra questi due trionfi l'Accademia delle Scienze di Parigi lo eleggeva (20 maggio 1773) « associé étranger » con 16 voti sopra 17 votanti ([74]).

Più tardi fu eletto uno dei Quaranta della Società Italiana delle Scienze ([75]) e membro dell'Accademia Lucchese ([76]), fatti questi sufficienti a provare come l'Italia non abbia mai dimenticato il suo grande Figlio lontano; fatti a cui si possono, per analogia, avvicinare il progetto di aggregare Lagrange all'Accademia di Napoli ([77]) e quello per trasferirlo in Toscana ([78]). Egli, dal canto suo, non lasciò sfuggire occasione alcuna per affermare la propria nazionalità e giovare ai propri connazionali. Così, avuta notizia che Gian Domenico Cassini stava conquistando una posizione onorevole fra gli astronomi del proprio tempo, scriveva a d'Alembert in data 15 ottobre 1772: « Je suis bien charmé de voir que M. Cassini soutienne déjà si dignement le beau nom qu'il porte; je prend d'autant plus de part à ses succès, que je le regarde en quelque façon comme mon compatriote, sa famille étant originaire des États du roi de Sardaigne, et je vous prie de lui faire, à ce titre, mes plus tendres compliments » ([79]). Così, quando il celebre violinista piemontese Viotti si recò da Berlino a Parigi, non mancò di raccomandare a d'Alembert questo « compatriote et très-habile musicien » ([80]); e salutò con viva soddisfazione l'arrivo a Berlino dell'abate Denina suo « compatriote et ami » ([81]). Ed il carteggio, improntato a tanta cortesia, che egli tenne dal 1756 al 1782 con due matematici a lui di molto inferiori ([82]), non si può spiegare che con i legami d'affetto che lo avvincevan sempre alla diletta patria lontana.

La vita uniforme e tranquilla che menò Lagrange a Berlino non è contrassegnata da altri avvenimenti clamorosi che non siano le sue numerose scoperte; e noi ora ci volgiamo a riassumere, con la massima concisione conciliabile con la chiarezza, i più cospicui risultati da lui ottenuti, attenendoci all'ordine per materie, meglio che all'ordine cronologico, il quale è sempre poco significante e, nel caso attuale (v. p. XI), per di più, mal sicuro.

12. **Teoria dei numeri.** In data 15 agosto 1768 il nostro matematico scriveva a d'Alembert: « Je me suis occupé, ces jours passés, pour diversifier un peu mes études, de quelques problèmes d'Arithmétique, et je vous assure que j'y ai trouvé beaucoup plus de difficultés que je ne croyais. En voici un, par exemple, dont je ne suis venu à bout qu'avec beaucoup de peine: *Un nombre quelconque entier, positif et non carré étant donné, trouver un entier et carré* x^2 *tel que* $n\,x^2+1$, *soit un carré.* Ce problème est d'une grande importance dans la théorie des quantités quarrées qui font le principal objet de l'analyse de Diophante» [83]. Le ricerche a cui si fa qui allusione si trovano esposte in un'estesa memoria datata da Berlino 20 settembre 1768 ed inserita nel T. IV dei *Miscellanea Taurinensia* [84], scopo precipuo della quale è lo studio dell'equazione (impropriamente chiamata « equazione di Pell ») $a\,x^2+1=y^2$. Lagrange dimostra che essa ammette infinite soluzioni ed insegna un procedimento per dedurre da una soluzione infinite altre; in particolare si occupa della soluzione minima $x=T$, $y=U$ e fa la fondamentale osservazione che la frazione $\frac{T}{U}$ si trova fra le ridotte della frazione continua in cui si sviluppa $\sqrt{a}$, osservazione che servì a lui di punto di partenza per molte ricerche aventi per nocciolo le frazioni continue. Più tardi Lagrange notò che il metodo di risoluzione da lui suggerito per l'equazione di Pell è suscettibile di notevoli migliorie [85] e ritornò, con maggiore ampiezza, sopra lo stesso argomento in altra voluminosa memoria [86], letta all'Accademia di Berlino il 24 novembre 1768, nella quale egli affrontò il problema generale dell'analisi indeterminata di 2.° grado, mettendo in luce il legame di essa con l'equazione di Pell e l'intervento delle frazioni continue nella ricerca delle sue soluzioni: fra i risultati speciali ivi conseguiti va rilevata la dimostrazione (che il Wallis aveva cercata indarno) della risolubilità dell'equazione $a\,x^2+1=y^2$, nel caso in cui l'intero a non sia un quadrato. Questo lavoro è tuttodì ritenuto uno dei più importanti di Lagrange, sicchè ancor oggi si deve ratificare il giudizio da lui stesso pronunciato scrivendo a d'Alembert il 23 dicembre 1768 che riteneva di « n'avoir laissé presque rien à desirer sur le sujet des équations du second dégré à deux inconnues » [87]. Ciò non ostante, indotto a ri-

pensare nuovamente sopra lo stesso tema in occasione di un preteso teorema ottenuto per induzione da Eulero, non solo [88] ampliò il campo di applicabilità delle frazioni continue all'Analisi indeterminata di secondo grado, ma stabilì anche una proposizione concernente un limite per il numero delle radici di una congruenza numerica, la quale viene sempre considerata come fondamentale nella teoria delle congruenze di un grado superiore al secondo.

L'impronta di ammirabile generalità che possiedono questi scritti si ritrova in altre posteriori ricerche aritmetiche del Nostro [89]; nelle quali egli parte dall'osservazione che, mentre l'equazione $A = Bt + Cu$ è sempre risolubile in numeri interi, purchè B e C siano primi relativi, altrettanto non può ripetersi riguardo all'analoga equazione $A = Bt^2 + Ctu + Du^2$; da tale diversità di comportamento egli dedusse una spiegazione plausibile di certi teoremi sopra la rappresentabilità di un numero col mezzo di una forma quadratica scoperti da Fermat ed Eulero e fu indotto ad aggiungerne innumerevoli altri congeneri. Tali considerazioni costituiscono il primo capitolo della Teoria dell'equivalenza delle forme quadratiche, giacchè esse guidano a criterî di equivalenza ed a metodi di riduzione, onde Lagrange merita a buon diritto il grado di fondatore dell'odierna Teoria (aritmetica) delle forme binarie quadratiche; i metodi da lui inventati, esposti sotto forma più completa e metodica nelle celebri *Additions* alla versione francese (Lyon, 1774) dell'*Algebra* di Eulero [90] e più tardi dal Legendre nella sua *Théorie des nombres,* si diffusero rapidamente in tutto il mondo e così raggiunsero una notorietà ed esercitarono un'influenza a cui l'Aritmetica superiore è debitrice di molti decisivi progressi.

A Lagrange la Teoria dei numeri deve ancora le prime dimostrazioni di due importantissime proposizioni. Una è quella, che Fermat enunciò e che Eulero tentò indarno di stabilire, secondo cui « qualunque numero intero non quadrato può decomporsi in due, tre e quattro quadrati » [91]. L'altra [92] è di data più recente essendo stata resa di pubblica ragione nel 1770; è il teorema di Wilson, secondo il quale « se n è un numero primo, $(n-1)!+1$ è divisibile per n ». Chiunque conosce la parte importante che rappresentano queste due proposizioni nella Teoria dei numeri e tiene presente quanto (pur troppo!) sia facile in tale disciplina il lasciarsi trascinare ad affermare l'incondizionata validità di proposizioni che sussistono invece soltanto in alcuni casi, riconoscerà senza stento che l'avere suggerite dimostrazioni conclusive per quei due teoremi costituisce per Lagrange una benemerenza aritmetica non inferiore a quelle che già gli attribuimmo.

Questo riassunto delle investigazioni aritmetiche del grande matematico torinese sarebbe incompleto ove non racchiudesse anche un cenno degli studi ([93]) da lui intrapresi sopra alcune equazioni indeterminate di un grado superiore al secondo (per esempio sull'equazione $x^4 + y^4 = z^2$), i quali toccano una regione matematica che ancor oggi si deve ritenere essere in massima parte una « terra incognita »; onde anche sul valore dei risultati raggiunti e sopra la potenza dei metodi usati da Lagrange il giudizio non può essere sino ad ora definitivo, epperò deve essere improntato a grande circospezione.

13. **Algebra.** Non meno importanti dei lavori aritmetici di Lagrange sono quelli di cui ci apprestiamo a render conto, non senza rilevare anticipatamente che le risultanze di essi raggiunsero rapidamente e tuttora fruiscono d'una immensa e ben meritata notorietà.

Nel più antico di tali lavori ([94]) il Nostro ha offerto il primo esempio di sforzi intesi ad emanciparsi da considerazioni geometriche nello stabilire proposizioni puramente algebriche; il teorema (di Rolle) da lui dimostrato, appunto senza ricorrere (come si era sempre fatto prima) al sussidio di curve, è quello che dice: « se due numeri, sostituiti nel primo membro d'un'equazione, dànno risultati di segni opposti, essi comprendono una radice dell'equazione proposta ». Mentre questo contributo alla Teoria delle equazioni possiede unicamente un valore metodologico, l'applicazione alla separazione delle radici d'un'equazione algebrica dell'« equazione ai quadrati delle differenze » (già incidentalmente incontrata poco prima da E. Waring) e l'uso delle frazioni continue (ordinarie) all'approssimazione delle radici stesse rappresentano due progressi veramente decisivi che il Nostro fece compiere alla risoluzione numerica delle equazioni ([95]); tanto più che ciò lo indusse a tracciare con mano sicura le prime linee della Teoria delle frazioni continue, prezioso strumento analitico di cui egli per primo pose in evidenza tutta la forza e la grande malleabilità. Continuando poi ([96]) in tal genere di investigazioni, egli tentò di applicare l'equazione ai quadrati delle differenze alla ricerca delle condizioni di realità delle radici delle equazioni di 3.° e 4.° grado ([97]) e stabilì la periodicità delle frazioni continue in cui si sviluppano le radici di tutte le equazioni quadratiche.

Da ciò egli fu portato a stabilire criterî per riconoscere se un'equazione algebrica a coefficienti razionali abbia o non fattori lineari o quadratici a coefficienti razionali ed anche ad estendere il concetto di frazione continua sì da abbracciare anche gli enti aritmetici del tipo $p \pm \cfrac{1}{q \pm \cfrac{1}{r \pm \cdots}}$, dei quali egli mostrò l'utilità facendone qualche applicazione. A Lagrange si deve altresì ([98]) il notissimo metodo per eliminare un'incognita fra due equazioni algebriche basato sull'uso delle funzioni simmetriche delle radici; è un metodo repulsivo per l'enorme complicazione dei calcoli a cui conduce (è un inconveniente che Lagrange ha ben visto ed al quale ha tentato di rimediare), ma che, sopra i precedenti procedimenti congeneri suggeriti da Eulero, Cramer e Bézout, offre il vantaggio di porgere il risultante esente da fattori estranei.

Mentre tutte queste ricerche trovano applicazione esclusivamente ad equazioni algebriche, ad equazioni di specie qualunque mirano gli sforzi fatti da Lagrange per risolvere, mediante serie, tutte le equazioni numeriche ([99]). L'idea madre di tali indagini non è del tutto nuova, perchè si ritrova in un lavoro anteriore del Lambert (*Acta Helvetica*, Vol. III, 1758), di cui il Lagrange non ebbe conoscenza (chè, altrimenti, non avrebbe mancato di ricordarlo, con la scrupolosa cura che egli ha sempre usata nell'assegnare a tutti il suo). Non va taciuto che gli sviluppi da lui stabiliti sono esclusivamente formali, mancando qualsiasi considerazione relativa alla convergenza delle serie ottenute; malgrado ciò egli ha saputo conseguire, movendosi in una regione cosparsa di pericoli ed insidie, un risultato di suprema eleganza e di indiscutibile valore: alludiamo alla serie, che reca appunto il nome di Lagrange, la quale serve a svolgere in serie una funzione qualsivoglia di un'equazione scritta sotto la forma $\alpha - x + \varphi(x) = 0$.

Non è il caso di esporre gli sviluppi poco conclusivi che ricamarono attorno alla serie di Lagrange i « combinatorici » tedeschi, nè i dubbi che vennero sollevati intorno al significato ed al valore di essa, nè finalmente gli studî, intrapresi da F. Chiò e portati a buon termine da E. Rouché, per conferirvi la precisione che si esige in qualunque proposizione matematica. Ciò che va invece rilevato è che Lagrange si è affrettato ([100]) ad illustrare l'algoritmo da lui inventato facendone applicazione ad un'importante equazione incontrata da Keplero nel corso di ricerche sul moto dei pianeti (cioè alla celebre equazione $t = x - u \operatorname{sen} x$); in tal modo egli dimostrò come la serie da lui scoperta, purchè usata con le debite cautele, costituisca un prezioso e possente strumento analitico.

Influenza ancor più decisiva sull'evoluzione della matematica esercitò Lagrange con le famosissime *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* ([101]). È noto che egli ha ivi fatto uno studio comparativo profondo dei varî metodi sino allora proposti per risolvere le equazioni dei primi quattro gradi, nell'intento di scoprire le ragioni del loro successo e dell'insuccesso che li colpisce quando si tenti di applicarli ad equazioni di un grado più elevato; tali ragioni, com'è risaputo, risiedono nella possibilità di ridurre la risoluzione di un'equazione di 3.° o 4.° (ma non di una di 5.°) alla risoluzione di altra di grado inferiore (è l'equazione che Lagrange chiama *ridotta* e che oggi si chiama *risolvente*). A tali conseguenze il sommo geometra arriva con uno studio delle funzioni algebriche razionali intere che si possono comporre col mezzo delle radici di una data equazione; così facendo egli schiuse ai posteri un campo sconfinato ed ubertosissimo ove Abel e Galois raccolsero una straordinaria messe di bellissimi risultati. Lagrange ha preparati tutti i materiali che furono poco dopo elaborati dal Ruffini, il vero fondatore della Teoria delle sostituzioni; fra l'altro egli ha reso possibile di concepire e dimostrare il teorema dell'irresolubilità algebrica delle equazioni di un grado superiore al quarto. E tutto egli fece con tale semplicità di mezzi e lucidità di argomentazioni che le sue *Réflexions* a ragione vengono annoverate tra le produzioni classiche, costituenti la gloria dello spirito umano.

14. Applicazioni dell'algebra alla geometria ed alla meccanica. Il quadro della produzione algebrica di Lagrange riuscirebbe incompleto ove non abbracciasse anche un gruppo di lavori, nei quali il calcolo letterale viene applicato a svariate notevolissime questioni, uscendone così di gran lunga raffinato: giova quindi farne qui cenno.

Fra tali scritti merita il posto d'onore quello ([102]) in cui, sopra un esempio semplicissimo (quello offerto dal tetraedro e dalle figure collegate ad esso), egli insegna quale indirizzo fosse da darsi all'applicazione dell'analisi alla geometria: mentre prima di lui tutta la trattazione era indissolubilmente connessa all'incessante considerazione della figura, partiva dal presupposto di una scelta particolare degli assi di riferimento ed esigeva penose considerazioni di triangoli simili e di triangoli rettangoli (è in sostanza il metodo usato da Apollonio Pergeo rivestito di forma algebrica), Lagrange ha fatto vedere come maggiore uniformità e sicurezza nel procedere si raggiungesse stabilendo formole generali da applicarsi in ogni caso, senza alcun bisogno di previamente fissare la posizione degli assi coordinati rispetto alla figura da studiare. È facile vedere che da tale geniale concetto trae origine tutta l'odierna Geometria analitica. Per raggiungere lo scopo che si era prefisso il Nostro ha premesso un buon numero di lemmi algebrici, i quali colpiscono anche oggi il lettore per la loro eleganza, ma la cui importanza si percepisce pienamente quando si osservi che esprimono, per determinanti del terz'ordine, alcune proposizioni fondamentali nella teoria di queste notevoli espressioni algebriche ([103]).

Un concetto analogo informa un'altra breve nota [104] contenente un metodo semplice ed elegante per risolvere il problema di « inscrivere in una circonferenza un triangolo i cui lati, prolungati se necessario, passino per tre punti dati », sul quale il Castillon aveva intrattenuta l'Accademia di Berlino [105] e che Lagrange ridusse alla risoluzione di un'equazione di 2.° grado.

Lo scopo che, in fondo, il nostro matematico volle raggiungere con questo modesto scritto è quello di mostrare che, anche in una questione di assoluta pertinenza della geometria, l'analisi era in grado di competere con la sua eterna rivale. È il medesimo intento che egli si è proposto anche ne' suoi lavori sull'Attrazione degli ellissoidi [106]; è questo un tèma di cui il Maclaurin aveva data una trattazione [107] prettamente sintetica, che, come ebbe a dichiarare Lagrange, « peut se comparer à tout ce qu'Archimède nous a laissé de plus beau et de plus ingénieux »; tuttavia egli volle e seppe dimostrare che lo stesso problema « peut être résolu par ce moyen (l'Analyse) d'une manière, si non plus simple, du moins plus directe et plus générale que par la voie de la Synthèse; ce qui servira à détruire un des principaux arguments que les détracteurs de l'Analyse puissent apporter pour la rabaisser et pour prouver la supériorité de la méthode synthétique des Anciens ». Superfluo constatare che il fine propostosi è pienamente raggiunto, chè tutte le proposizioni di Maclaurin vengono dedotte da Lagrange, con sorprendente spontaneità, da formole generali di perfetta simmetria; ma non è fuor di luogo rilevare come nel lavoro in questione si incontri un risultato analitico di importanza generale, cioè la formola che serve al cambiamento delle variabili negli integrali tripli. Più tardi [108] egli ritornò sullo stesso soggetto, attenendosi alle medesime idee direttive, sospinto da nuove ricerche compiute da Laplace e Legendre.

Nello stesso stile dei precedenti è scritta una memoria [109] ove il Nostro insegna parecchi metodi per stabilire il noto « teorema di Lambert » relativo alle sezioni coniche: non a torto il Bertrand ebbe ad osservare argutamente che tali metodi sono elegantissimi e naturalissimi, *purchè* sia già nota la proposizione da dimostrare!

Pure ispirata da sentimenti che oggi direbbersi di « imperialismo analitico » è una memoria ov'è esposta una nuova soluzione del problema (già risoluto da Eulero e d'Alembert) del moto di rotazione di un solido qualsia [110]. Il nuovo procedimento riposa sopra alcune interessantissime trasformazioni algebriche, nelle quali si ravvisano, sia pure sotto forma embrionale, alcuni teoremi essenziali della Teoria dei determinanti [111]; nel corso delle considerazioni esposte da Lagrange lo storico dell'algebra rileva poi la prima dimostrazione della realità delle radici dell'equazione (secolare)

$$\begin{vmatrix} x-a & C & B \\ C & x-b & A \\ B & A & x-c \end{vmatrix} = 0.$$

Ben a ragione, dunque, il Nostro osserva nell'esordio della memoria in questione « que c'est toujours contribuer à l'avancement des Mathématiques que de montrer comment on peut résoudre les mêmes questions et parvenir aux mêmes résultats par des voies différentes ».

Sempre il medesimo concetto, di conferire generalità e snellezza alle applicazioni del calcolo, ha ispirato a Lagrange un altro lavoro di squisita fattura ([112]), ove è trattata da un punto di vista elevato la determinazione delle evolute delle curve piane e delle trocoidi (« roulettes »); inoltre è per la prima volta insegnata quella trattazione generale dei contatti fra curve piane che, dopo esser stata introdotta in opere didattiche del Nostro, non tardò a divenire classica; finalmente alcune geniali considerazioni di pertinenza della geometria differenziale dello spazio schiudono una regione novella, in cui Monge doveva poco dopo raccogliere tanti e così meritati allori.

15. **Analisi infinitesimale.** Il prezioso intervento delle frazioni continue in questioni di Teoria dei numeri e di Algebra, che rilevammo in parecchi lavori di Lagrange, fece sorgere in questo grande geometra l'idea che esse potessero prestare utili servigi anche in questioni di Analisi e prendere posto fra i più comuni processi infiniti (serie e prodotti). Che tale previsione sia conforme alla verità emerge da un lavoro ([113]) nel quale egli ha, in generale, fatto vedere come si potesse esprimere in frazione continua algebrica l'integrale di qualunque equazione differenziale ordinaria di 1.° ordine; in particolare, ha insegnati elegantissimi sviluppi del detto tipo per parecchie funzioni particolari notevoli, quali $(1+x)^m$, $\log(1+x)$, e^x, $\operatorname{tang} x$, $\int \frac{dx}{(1+x^n)}$, ecc. I matematici posteriori non hanno giudicato opportuno di introdurre nei trattati di Analisi tali risultati, onde questi raggiunsero notorietà assai limitata e non ebbero seguito: con quanta ragione altri giudichi.

Altrettanto *non* può ripetersi riguardo ad una memoria ([114]) che costituisce tuttora un eccellente preliminare alla Teoria degli integrali ellittici, dal momento che insegna in primo luogo la riduzione a forma normale di qualunque integrale del tipo $\int f(x, \sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4})_{dx}$ (f essendo simbolo di funzione razionale) ed in secondo luogo un procedimento per svolgere in serie un tale integrale. Inoltre ivi fa il proprio ingresso la « media aritmetico-geometrica », ivi s'incontrano notevoli sviluppi in serie per l'arco d'una conica a centro, ivi da ultimo viene mostrata l'utilità del seguente nuovo teorema di Calcolo integrale: « Se V e X sono funzioni della variabile x, mentre A, A', A'',..., sono costanti e si pone $V = \int \frac{X \, . \, dx}{1 - \alpha \xi}$ sarà:

$$\int (A + A'\xi + A''\xi^2 + \cdots)\, dx = A\,(V)_{\alpha=0} + A'\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} + \frac{A''}{2\,!}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=0} + \cdots \quad (1)$$

In altro scritto ([115]) Lagrange ritornò, con spirito più maturo, sopra l'analogia fra le potenze e le derivate (o gli integrali), da lui avvertita esordendo nella sua carriera scientifica, cioè sul concetto centrale della lettera a stampa da lui diretta al Conte di Fagnano (v. p. XI). Ma è curioso il fatto che egli, mentre cita i lavori congeneri anteriori di Leibniz e di Giovanni Bernoulli, non fa menzione alcuna di quel suo saggio giovanile, quasi volesse sconfessarlo. Tale scritto è importante specialmente perchè contiene un lucidissimo cenno dell'idea di fondare tutta l'Analisi infinitesimale sopra la serie di Taylor, da usarsi per definire le funzioni e le loro derivate successive, ed anche perchè vi si trova per la prima volta l'estensione di quella serie a funzioni con quantesivogliano variabili.

Benchè l'odierno lettore si sentirà mediocremente soddisfatto di sviluppi che, nell'assenza di qualunque considerazione intorno alla loro validità, debbono ritenersi puramente « formali », pure prima di condannarli, dichiarandoli privi di valore, gioverà tener presente che ivi Laplace trovò il fondamento e lo stimolo per le sue famose ricerche sopra le « funzioni generatrici », che tanto contribuirono alla sua fama e tanto giovarono al progresso della nostra scienza. Si aggiunga che l'analogia fra le potenze e derivate venne più tardi sfruttata da Lagrange ([116]) per assicurare un solido fondamento ad un metodo d'interpolazione imaginato nel 1670 dall'astronomo G. Mouton, il quale si arricchì in conseguenza di tali doti che oggi ancora è usato con profitto ([117]).

Influenza di gran lunga maggiore sull'evoluzione dell'Analisi esercitarono le profonde ricerche del Nostro sopra le equazioni a derivate parziali ([118]), chè dai risultati che esse diedero presero le mosse Monge e Jacobi e, malgrado i perfezionamenti di sostanza e di forma che ricevettero nel corso del secolo passato, conservano tuttora un posto cospicuo in qualunque esposizione della materia. Rimandando a tali trattazioni metodiche il lettore desideroso di conoscere la dimostrazione di tale asserto, aggiungeremo che anche la teoria degli integrali singolari delle equazioni differenziali ordinarie di 1.° ordine è debitrice a Lagrange del proprio assetto sino ad oggi riguardato come definitivo ([119]); inoltre egli ha scoperta l'interpretazione geometrica come inviluppo dell'integrale singolare, ha introdotta la considerazione della derivata dell'integrale generale rispetto la costante d'integrazione ed ha mosso il primo passo verso l'estensione di siffatte indagini ad equazioni di ordine superiore al 1.° o contenenti parecchie variabili.

Facendo semplice menzione di uno scritto destinato a risolvere una questione relativa alle Annualità ([120]) — perchè questa era stata trattata prima, circa nello stesso modo, da A. de Moivre ([121]) all'insaputa di Lagrange — chiuderemo questa sezione della nostra rassegna segnalando due scritti ove questioni di Astronomia e Geografia matematica vengono risolute col sussidio della pura Analisi.

Per costruire le tavole planetarie servendosi delle osservazioni, Lagrange ([122]) considera una serie il cui termine m-esimo è un polinomio della forma A sen $(a + m\alpha) + B$ sen $(b + m\beta) + \ldots$ e dimostra che è una serie ricorrente la cui « scala di relazione » non dipende che dagli angoli $\alpha, \beta, \ldots$; da ciò è indotto a risolvere parecchi problemi di grande importanza per chi voglia applicare le serie ricorrenti allo studio di successioni di numeri, i quali siano legati fra loro da una legge ignota, ed a usare come ausiliari frazioni continue i cui termini sono funzioni di una variabile.

Indirizzo non meno elevato hanno le ricerche di Lagrange sopra la costruzione delle carte geografiche ([123]). È noto che la qualità, che possiede la projezione stereografica di una sfera, di far corrispondere circoli a circoli era nota sin dai tempi di Claudio Tolomeo, mentre la scoperta della prerogativa che essa possiede di conservare gli angoli è di data ben più recente ([124]); Lambert ed Eulero dimostrarono poi che la proprietà di essere isogonale è condivisa da tutte le rappresentazioni usate dai geografi. Ora Lagrange si è proposto il bel problema di determinare tutte le rappresentazioni conformi della superficie terrestre, tanto nel caso in cui la s'immagini sferica, quanto ove la si supponga un'ellissoide di rotazione. La soluzione che egli ne diede nulla lascia a desiderare per semplicità, generalità ed eleganza; è notevole per l'intervento in essa di funzioni di una variabile complessa e per avere schiusa a Gauss la via che lo condusse alla rappresentazione conforme di una superficie qualunque. Nè va taciuto ivi il primo presentarsi della funzione $\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$.

che tanta parte rappresentò in posteriori lavori specialmente di H. A. Schwarz ([125]) e l'enunciato di un grazioso problema di geometria elementare, che porse il destro a G. Bellavitis di fare una brillante applicazione del Calcolo delle equipollenze da lui inventato ([126]).

16. **Meccanica e fisica matematica.** La prima comunicazione che Lagrange fece all'Accademia di Berlino (4 marzo 1767) ([127]) contiene un'ampia ed importante generalizzazione del Problema delle tautocrone, che Huygens aveva risoluto nell' ipotesi che il movimento accadesse nel vuoto, mentre Giovanni Bernoulli ed Eulero avevano contemplato il caso più difficile in cui il moto succedesse in un mezzo che presentasse una resistenza proporzionale al quadrato della velocità. Il Nostro invece si propose e riuscì a determinare in generale quale è la forza necessaria a produrre il tautocronismo, solo supponendo che sia una funzione dello spazio e della velocità. Il Fontaine, che erasi già prima occupato della stessa questione con discutibile successo, attaccò ingiustamente le ricerche di Lagrange; ciò costrinse il grande matematico ad una replica ([128]), sul cui tono pacato e cortese dovrebbero modellarsi tutti gli scritti di polemica scientifica; ma ciò porse a lui anche l'occasione per esporre nuovi sviluppi dottrinali di grande importanza, perchè toccano questioni interessanti in egual grado l'Analisi e la Meccanica ([129]).

Mentre questi scritti fecero compiere un *sostanziale* progresso ad un bel capitolo della Teoria dei moti e delle forze, ve n'è un altro posteriore ([130]) (letto a Berlino il 2 ottobre 1717) il cui merito è piuttosto *formale:* esso concerne il « problema degli n corpi » ed ha come precipuo scopo di mostrare come le relative equazioni differenziali assumano, mediante la metodica introduzione della funzione

$$\Omega = \Sigma \frac{MM'}{\sqrt{\overline{x-x'}^2 + \overline{y-y'}^2 + \overline{z-z'}^2}}$$

(ove M è la massa del punto di coordinate x, y, z, ecc.), una forma estremamente comoda, che permette di giungere con meravigliosa speditezza, non soltanto ai tre noti principî che governano sempre il moto del sistema, ma anche ad altre proposizioni più speciali, segnalate da d'Alembert, valide soltanto in ipotesi più ristrette.

In altra memoria ([131]) Lagrange si è occupato pure di un sistema di punti di masse M, M',..., e coordinate (x, y, z), (x', y', z'),..., coll'intento di stabilire le proprietà del suo centro di gravità; dette x_0, y_0, z_0 le coordinate di questo e a, b, c quelle di un punto arbitrario dello spazio, le due proposizioni da lui stabilite si possono esprimere col mezzo delle due seguenti equazioni:

$$\frac{\Sigma MM'[\overline{x-x'}^2+\overline{y-y'}^2+\overline{z-z'}^2]}{\Sigma M}=\Sigma M[\overline{x-x_0}^2+\overline{y-y_0}^2+\overline{z-z_0}^2]$$

$$\Sigma M[\overline{x-a}^2+\overline{y-b}^2+\overline{z-c}^2]=[\overline{x_0-a}^2+\overline{y_0-b}^2+\overline{z_0-c}^2]\Sigma M$$

$$+\frac{\Sigma MM'[\overline{x-x'}^2+\overline{y-y'}^2+\overline{z-z'}^2]}{\Sigma M}.$$

« Cette manière de déterminer le centre de gravité par les seules distances des corps entre eux (osserva con pieno fondamento il sommo geometra) est, je crois, nouvelle, et peut être utile dans quelque occasion »; ed infatti se ne trova menzione in tutti i migliori trattati della materia.

All'Idrodinamica il Nostro dedicò due lavori: uno ([132]) inteso a confermare, contro il sentimento di d'Alembert, un risultato teorico conseguito da D. Bernoulli e che sembrava smentito da certe esperienze del Kraft; l'altro (letto a Berlino il 22 novembre 1781) ([133]) di molto maggior lena, avente lo scopo di far conoscere un metodo nuovo per gettare le basi dell'Idrodinamica teorica, con applicazioni al movimento dei fluidi omogenei pesanti in vasi o canali di forma qualunque; è superfluo far conoscere per esteso l'essenza di questo metodo, chè esso conseguì grande notorietà dopochè entrò a far parte della *Mécanique analytique.*

Altre due memorie toccano l'Ottica; una ([134]) si riferisce alle lenti, teoria di cui si erano già occupati ottimamente Côtes ed Eulero e sulla quale il Nostro sa fare nuove acute osservazioni; nell'altra ([135]) è esposta una legge generale giudicata dall'autore (ignoriamo con quanta ragione) utile in Ottica quanto è in Meccanica il principio delle velocità virtuali.

All'elasticità si riferisce una memoria ([136]) nella quale Lagrange investiga le condizioni di equilibrio di una verga elastica omogenea di cui un estremo è fisso; mentre all'Acustica ed alla propagazione delle onde in generale appartengono alcune rettifiche da lui suggerite per i *Principia* di Newton ([137]).

Da ultimo, dalla teoria degli orologi gli fu ispirato un elegante lavoro ([138]) il quale prova quanto profondi siano stati gli studi da lui fatti anche sopra questa specialissima materia e come a lui fosse dato di far scaturire delle scintille percuotendo qualunque pietra.

17. Astronomia. Di alcuni lavori astronomici di Lagrange già si tenne parola in via incidentale; nel mentre ci accingiamo a dare concisa notizia degli altri, giova premettere che essi abbracciano si può dire tutte le questioni teoriche e pratiche che s'incontrano nello studio del moto degli astri e che tali questioni sono sempre trattate da Lagrange con grande elevatezza e generalità, sicchè l'esame accurato di tali lavori va caldamente raccomandato anche agli analisti puri, i quali vi incontreranno ad ogni pagina vedute originali, teoremi nuovi, algoritmi di suprema eleganza. Alcuni risultati ivi esposti godono di valore permanente, mentre altri appaiono oggi come tappe intermedie che l'Astronomia doveva incontrare per arrivare ai metodi di calcolo più sicuri e perfetti, che vennero elaborati nel corso del secolo scorso, a cominciare da Laplace e Gauss fino a giungere a Gildén e Poincaré.

Scendendo a qualche più minuto particolare osserviamo che Lagrange ha dimostrato ([139]), che la non-sfericità dei corpi celesti non può produrre sensibili alterazioni nei loro movimenti; in altri termini, egli diede della stabilità del sistema del mondo una dimostrazione più soddisfacente di quella immaginata da Laplace (1773) e che permise poi (1809) a Poisson di congegnarne altra al coperto da ogni obbiezione.

Al fondamentale problema della determinazione dell'orbita di una cometa col mezzo di opportune osservazioni egli ha consacrato non meno di quattro memorie ([140]), dalle quali emerge che in generale essa non si può far dipendere da un'equazione algebrica di un grado inferiore a sette; mentre lo studio delle perturbazioni che possono subire quei capricciosi corpi celesti per l'influenza di altri pianeti, fu da lui compiuto in una memoria che l'Accademia di Parigi premiò nel 1778 ([141]). Sopra la teoria della Librazione della luna — tèma di uno dei suoi primi lavori — egli è ritornato con notevole ampiezza ([142]), applicandovi un metodo generale ed analitico da lui proposto per risolvere tutti i problemi di dinamica, cioè il principio di d'Alembert espresso in formole col mezzo della legge delle velocità virtuali.

Altre assidue e non sterili ricerche il Nostro consacrò alle variazioni secolari ([143]) e periodiche ([144]) dei movimenti dei pianeti — in particolare all'equazione secolare della luna ([145]) — ed altre ancora ([146]) alla determinazione del movimento dei nodi delle orbite planetarie, questione di grande utilità per chi voglia investigare la struttura presente e futura del mondo.

Meno vasto è il soggetto di uno scritto ove Lagrange mostra come, mediante successive approssimazioni, si possano ottenere integrali sempre più esatti delle equazioni dei movimenti planetari ([147]). Notevole è anche un complemento [148] da lui indicato per un passo dei *Principia*, notevole, non fosse altro, perchè dimostra come egli, benchè infaticabile campione dei metodi puramente analitici, era in grado di maneggiare con grande disinvoltura le considerazioni geometriche preferite da Newton.

In previsione del passaggio di Venere, annunziato per il 6 giugno 1769, egli lesse il 12 novembre 1767 all'Accademia di Berlino un'elaboratissima memoria [149] per mostrare come tale fenomeno si potesse utilizzare onde determinare la parallasse del Sole, per insegnare come si dovesse condurre il calcolo relativo, finalmente per determinare qual fosse la località della Prussia dove il fenomeno potevasi osservare nelle condizioni più favorevoli.

Altri soggetti da lui studiati sono le rifrazioni astronomiche [150], l'applicazione del metodo delle proiezioni al calcolo delle eclissi [151], la determinazione di queste [152], la trasformazione di certe tavole astronomiche a doppia entrata in altre a semplice entrata [153] e le variazioni annue degli elementi orbitali dei pianeti [154]. Dovremmo segnalare eziandio un metodo ideato da Lagrange per risolvere mediante serie alcuni problemi di Astronomia sferica [155]; ma è forza riconoscere che questo lavoro, malgrado il titolo datogli da Lagrange, è di pretta trigonometria, dal momento che insegna a valutare certi elementi di un triangolo sferico rettangolo quando altri ne siano noti, osservazione che noi facciamo, non per togliere pregio allo scritto in questione, ma per assegnargli il posto che gli compete nella letteratura matematica.

Giunti al termine di questa vertiginosa rassegna dei lavori del Nostro, affrettiamoci a riconoscerne noi pei primi le manchevolezze, dovute in parte alla loro mole imponente ed in parte alla mancanza in chi scrive di una competenza speciale sull'argomento.

A nostra parziale giustificazione milita il fatto che, neppure gli astronomi che si accinsero a narrare la storia della loro scienza, osarono di pronunciare uno schietto giudizio sul valore del contributo dato da Lagrange alle nostre cognizioni sopra l' « essere » ed il « divenire » del creato; persino il Delambre non dedicò a lui uno speciale capitolo della sua *Histoire de l'Astronomie au XIX siècle*, ma si limitò a fare qualche cenno (e non sempre favorevole) su alcune ricerche da lui compiute. Onde la determinazione del posto che spetta a Lagrange nella storia dell'Astronomia è un problema tuttora irresoluto, che auguriamo tenti qualche specialista in materia.

18. La somma di lavoro compiuto e l'entità dei risultati conseguiti da Lagrange a Berlino è sorprendente [156]; onde altrettanto sorprendente è che

egli, mentre alla sua mente si affollavano tanti grandi pensieri originali, potesse scrivere (in data 21 settembre 1781) queste scoraggiate parole: « D'ailleurs, je commence à sentir que ma force d'inertie augmente peu à peu, et je ne réponds pas que je fasse encore de la Géométrie dans dix ans d'ici. Il me semble aussi que la mine est presque déjà trop profonde, et qu'au moins qu'on ne découvre de nouveaux filons il faudra tôt ou tard l'abandonner. La Physique et la Chimie offrent maintenant des richesses plus brillantes et d'une exploitation plus facile; aussi le goût du siècle parait-il entièrement tourné de ce côté-là, et il n'est pas impossible que les places de Géométrie dans les Académies ne deviennent un jour ce que sont actuellement les chaires d'arabe dans les Universités » ([157]).

In tali linee si trova la prima manifestazione a noi nota di uno stato d'animo, che in Lagrange andò col tempo sempre più accentuandosi ([158]) e finì per fargli prendere in uggia la piccola e grigia Berlino e desiderare una scena più vasta e movimentata, ove rappresentare una parte importante. La perdita della compagna della sua vita e la morte (17 agosto 1786) del sovrano che lo aveva chiamato al proprio fianco allentarono a poco a poco i legami che sino allora lo avevano avvinto al Regno di Prussia; tanto che Mirabeau, sino dal 26 novembre 1786, spronava il Governo francese a tentare d'ottenerne il trasloco a Parigi, al quale egli attribuiva tale importanza da equipararlo ad una rivincita della sua patria sulle umiliazioni subìte in parecchi campi di battaglia ([159]). A tale passo il grande oratore si decise probabilmente previo consenso del principale interessato, propenso a stabilirsi in una città ove stava per iniziarsi la stampa della *Mécanique analytique*, opera di cui l'Accademia di Parigi aveva accettato il patronato ([160]). Malgrado gli sforzi del Re di Prussia ([161]), le pratiche relative non tardarono a condurre al risultato voluto ([162]), giacchè sino dal 20 febbrajo 1787 Lagrange veniva nuovamente iscritto fra i soci corrispondenti dell'Accademia di Berlino e declinava un'offerta vantaggiosa ed onorevole fattagli da suo padre in nome del Governo sardo, giustificando tale attitudine con gl'impegni precedentemente assunti con Luigi XVI ([163]). Mentre questi gli conferiva il titolo di « pensionnaire vétéran » dell'Accademia delle Scienze con l'annua pensione di 6000 franchi e lo alloggiava al Louvre ([164]), il re di Prussia, per assicurare la continuità della sua collaborazione alle *Memorie dell'Accademia di Berlino*, s'impegnava di sborsargli annualmente 300 talleri: sicchè egli riuscì a risolvere anche l'arduo problema di mantenere ad un tempo ottimi rapporti con due corti tradizionalmente nemiche ([165]).

III. - A PARIGI.

19. Accoglienze oneste e liete vennero fatte a Lagrange quando giunse a Parigi, non soltanto da parte di Luigi XVI e di Maria Antonietta, ma anche da tutti gli scienziati colà residenti.

Primo avvenimento degno di nota che lo concerne, succeduto nella capitale della Francia, è la pubblicazione (1788) della prima edizione della *Mécanique analytique* ([166]), una delle opere più eminenti della letteratura matematica, la più eccelsa, a giudizio di taluno, fra quelle che recano la firma del grande geometra. I concetti a cui egli s'inspirò nello scriverla sono gli stessi che segnalammo in gran numero di suoi lavori anteriori: tali concetti egli espose con la consueta chiarezza nella Prefazione, di cui giova qui riferire i passi più salienti:

« On a déjà plusieurs Traités de Mécanique, mais le plan de celui-ci est entièrement neuf. Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science, et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème... Cet Ouvrage aura d'ailleurs une autre utilité: il réunira et présentera sous un même point de vue les différents principes trouvés jusqu'ici pour faciliter la solution des questions de Mécanique, en montrant la liaison et la dépendance mutuelle, et mettra à portée de juger de leur justesse et de leur étendue... On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques assujetties à une marche régulière et uniforme ».

Emerge da queste frasi che l'opera di Lagrange è essenzialmente e rigorosamente metodica; essa ha per cardini il Principio delle velocità virtuali ([167]) ed il Principio di d'Alembert ed insegna come, applicandoli quasi automaticamente, si possano risolvere tutti i problemi concernenti l'equilibrio ed il moto di punti, di solidi e di fluidi. Essa possiede, a somiglianza degli scritti di Archimede, il carattere proprio e distintivo della filosofia naturale di Platone, che è quello di astrarre, per quanto sia possibile, dalle proprietà fisiche dei corpi, per trattenersi a contemplarne i caratteri matematici. È la fisonomia che la Meccanica ha conservato durante tutto il corso del secolo XIX e di cui soltanto ora accenna a spogliarsi. Ma sino a che non sia instaurato il regno della Meccanica fisica, l'opera di Lagrange, come fece cadere nell'oblio tutte quelle anteriori, servirà sempre di guida agli studiosi di Meccanica, presa questa parola nel suo significato più ampio e comprensivo.

Quando, un ventennio più tardi, si manifestò la necessità di una nuova edizione della sua grande opera, il grande Geometra, pur mantenendone intatti il piano ed i concetti direttivi, moltiplicò le applicazioni della procedura di cui è l'inventore; sicchè, ove gli fosse stato concesso di darvi l'ultima mano, avrebbe offerto ai matematici un compendio ben coordinato di tutti i suoi lavori di Meccanica (non esclusi quelli relativi alla Meccanica celeste).

Ma poichè il vol. II uscì dopo la sua morte ([168]) (il vol. I porta la data 1811), presenta indiscutibili imperfezioni e deplorevoli lacune, che G. Bertrand e G. Darboux riuscirono a togliere, riducendolo così ad essere un libro che si può porre nelle mani di qualunque principiante, senza tema che questo sia traviato. La *Mécanique analytique* porta il n. 1 nel Catalogo delle opere costituenti oggi la biblioteca di qualunque investigatore dell'indicata materia; e, grazie alle esaurienti considerazioni storiche e dottrinali che contiene sopra i lavori congeneri di più antica data, può fungere da ottima guida anche per coloro che intendono seguire l'evoluzione storica delle idee di moto e forza o che almeno s'interessano a conoscerne le varie fasi di sviluppo.

Aggiungiamo che gli è nel rielaborare il materiale dell'opera testè discorsa che l'immortale scienziato fu condotto all'ultima grande scoperta a cui è legato il suo nome, cioè alla Teoria della variazione delle costanti arbitrarie ([169]) ed alla sua applicazione alla meccanica celeste ([170]).

20. Fu forse l'esaurimento prodotto dall'immane sforzo che costò il comporre la *Mécanique analytique*, oppure il brusco passaggio dall'imperturbabile tranquillità berlinese alla baraonda parigina ([171]) che produssero in Lagrange quel lungo periodo di inerzia, durante il quale egli provava un'invincibile avversione per formole e calcoli? Altri risponda; a noi basti notare che tale condizione fu talmente acuta che, a quanto si narra, egli lasciò per molti mesi il suo immortale volume chiuso ed intonso sopra il proprio tavolo, ed invece si interessò alle esperienze con cui Lavoisier stava allora creando una nuova scienza naturale, la Chimica.

Nè va taciuto che la violenta instaurazione del nuovo regime politico in Francia destava in lui non a torto assai gravi apprensioni economiche, che mantennero desta e viva ne' suoi amici prussiani la speranza di riaverlo a Berlino. Ma la Francia repubblicana, ben comprendendo tutto il disdoro che sarebbe ad essa ridondato dal comportarsi diversamente, gli confermò la pensione assegnatagli dal « ci-devant roi » [172]; inoltre [173], dietro proposta di Lavoisier fece a suo favore un'eccezione al decreto del 16 ottobre 1793, con cui venivano espulsi dalla Francia tutti gli stranieri ivi residenti [174], incaricandolo di eseguire calcoli ed esperienze sopra il moto dei projettili [175].

Soppressa l'Accademia delle Scienze, fu creato per lui il posto di Amministratore della « Monnaie » (zecca) [176]. Egli poi fu nominato membro del Magistrato incaricato di proporre le ricompense per le invenzioni di pubblica utilità. In qualità di membro o di presidente partecipò attivamente ai lavori di tutte le commissioni che, nel decennio 1790-1799, lavorarono a preparare il nuovo sistema di pesi e misure [177], atteggiandosi in ogni occasione a strenuo fautore del numero 10. Il Bureau des Longitudes lo volle nel proprio seno ed egli si mostrò degno di tale nuova distinzione intervenendo alle sue adunanze e contribuendo alla *Connaissance des temps* con due lavori, uno dei quali ha il modesto scopo di esporre i fondamenti teorici di uno strumento utile agli astronomi [178], mentre l'altro insegna un'ipotesi cosmologica atta a completare quella che porta il nome di Laplace [179].

Tutto questo sta a provare come anche a Parigi egli abbia finito per procurarsi le condizioni di vita necessarie ad un pensatore; ciò è confermato dalle seguenti frasi che si leggono in una lettera da lui scritta il 24 ottobre 1791:

« Pour n'avoir été que simple spectateur des événements qui sont arrivés, je n'en ai été moins affecté. Maintenant que la tranquillité et l'ordre sont rétablis, je ne regrette pas d'avoir assisté à un spectacle, le plus intéressant pour les philosophes mêmes, celui d'une grande nation qui se crée un nouveau gouvernement, non par la force des armes, mais par celle de la parole et de l'opinion publique » [180].

21. Istituita (Decreto 11 marzo e Legge 28 settembre 1794) l'« École centrale des travaux publiques » (destinata a mutarsi poco dopo nella celebre « École polytechnique ») Lagrange vi ebbe (insieme a Prony) la cattedra di Analisi e Meccanica ed il Consiglio dei professori nella sua prima adunanza (4 dicembre 1794) lo elesse a proprio presidente. I corsi ordinari vennero inaugurati il 24 maggio 1795 con una seduta solenne, in cui egli tenne la sua prima lezione in presenza degli altri professori e della scolaresca; poco dopo però egli, per ragioni di età, cedeva la cattedra al Lacroix [181].

Fondato l'Istituto di Francia, in luogo dell'antica Accademia delle Scienze, Lagrange fu subito eletto a farne parte come membro della nuova Accademia delle Scienze, della quale fu il primo presidente ed ai cui lavori prese parte attivissima ([182]).

E quando la Convenzione Nazionale, con Decreto del 9 brumajo anno III (30 ottobre 1794), fondò a Parigi la Scuola Normale, egli, assieme a Laplace, fu chiamato a professarvi matematica. Diremo fra un momento l'influenza che tale carica esercitò sopra l'ultima fase della vita scientifica di Lagrange; ma prima reputiamo non privo d'interesse il riferire un giudizio (a dir vero un po' superficiale) pronunciato su di lui come insegnante da uno (Fourrier) di coloro che ne seguirono le lezioni:

« Lagrange, le premier des savants d'Europe, paraît avoir de cinquante à soixante ans; il est cependant plus jeune ([183]); il a dans les traits de la dignité, et de la finesse dans la physionomie; il paraît un peu grêle ou pâle; sa voix est très-faible, à moins qu'il ne s'échauffe; il a l'accent italien très-marqué; il prononce les S comme des Z; il est très-modestement vêtu en noir ou en brun; il parle très-familièrement et avec quelque peine; il a dans la parole l'embarras et la simplicité de l'enfant. Tout le monde sait bien que c'est un homme extraordinaire, mais il faut l'avoir vu pour reconnaître un grand homme. Il ne parle que dans les conférences, et il y a telles de ses phrases qui exciteraient la risée. Il disait l'autre jour: « *Il y a encore sur cette matière beaucoup de choses importantes à dire, mais je ne les dirai pas* ». Les élèves, dont la plus part sont incapables de l'apprécier, lui font assez peu d'accueuil, mais les professeurs le dédommagent » ([184]).

22. Quali fossero gli argomenti scelti da Lagrange agli inizî del proprio insegnamento e con quali intendimenti li svolgesse emerge dalle ammirabili *Leçons élémentaires sur les Mathématiques données à l'École Normale en 1795* ([185]), che la riproduzione stenografica fattane dagli allievi e le molte edizioni e traduzioni resero popolari in tutto il mondo; esse, a parer nostro, dovrebbero servire di modello a tutti coloro che si accingono a salire sopra una cattedra di scuola media, chè provano non esservi soggetto per quanto umile e vieto che non si presti ad essere ringiovanito e rallegrato con sviluppi originali e brillanti. Sono ivi trattate le questioni fondamentali dell'Aritmetica e dell'Algebra (teoria delle equazioni) e, fra l'altro, è segnalata ai matematici puri la così detta « formola d'interpolazione di Lagrange » che fino allora giaceva sepolta in una memoria destinata agli astronomi. Va notato che la parte aritmetica di queste *Leçons* ricevette un importante complemento da un breve scritto posteriore ([186]), destinato allo studio del problema di tras-

formare una frazione in altre più semplici, del quale è messo in luce il sommo interesse teorico e pratico.

È probabilmente per porre a disposizione dei propri discepoli le memorie da lui scritte sopra la Teoria delle equazioni che Lagrange decise (1798) di raccoglierle in un volume, con l'aggiunta di una magistrale introduzione storica e di buon numero di Note. Così ebbe origine il celebre *Traité de la résolution des équations numériques de tous les dégrés*, che (è forza riconoscerlo) di trattato non ha che il nome, essendo una semplice successione di materiali preziosi ma staccati ([187]). Tuttavia fu coronato da tale successo che dieci anni appresso si manifestò la necessità di una nuova edizione e nel 1826 di una terza. Ciò non deve stupire perchè, come ebbe a notare il Poinsot ([188]), « comme il n'y a dans toute l'Analyse aucun point remarquable où ce géomètre (Lagrange) n'ait porté son esprit et qu'il n'ait, pour ainsi dire, regardé de très près, on est sûr de trouver dans ses ouvrages, en même temps que ses propres découvertes, tout ce qui a été pensé de plus profond et de plus ingénieux par ses prédecésseurs; et, ce qui est bien digne de remarque, tout y parait suivre uniformement des mêmes principes, comme si l'auteur en développait des simples corollaires ».

23. Mentre questo volume, al pari della *Mécanique analytique*, riscosse lodi generali ed incondizionate, gravi e non ingiustificate obbiezioni vennero mosse contro la *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'Analyse algébrique des quantités finies*, pubblicata la prima volta nel 1797 e nuovamente l'anno stesso della morte dell'autore (1813). Ivi il grande geometra si è proposto di dimostrare completamente (come aveva enunciato in una memoria che risale al 1772 e poi in un corso tenuto alla Scuola Politecnica ([189])) che gli sviluppi in serie di potenze abilitano a fondare solidamente il Calcolo differenziale senza far appello al tanto controverso concetto d'infinito ([190]); è notorio che tale geniale concetto, assai più tardi, nelle mani di Weierstrass e Méray, si è mostrato capace di disimpegnare l'ufficio di colonna vertebrale di tutta l'Analisi; ma sotto la forma embrionale sotto cui è presentata dal Nostro, presta il fianco a critiche gravi, le quali vennero coraggiosamente esposte da H. Wronski ([191]) e che ebbero per conseguenza l'abbandono, poco dopo la morte del sommo analista, dei concetti da lui caldeggiati. Ma se vita effimera ebbe la parte che diremmo filosofica della *Théorie des fonctions analytiques*, la parte algoritmica di essa (completata nelle notissime *Leçons sur le Calcul des*

fonctions) ha un valore grande e permanente, tanto che certi capitoli di essa (ad es. quanto concerne i contatti di curve e superficie) passarono integralmente nelle opere didattiche posteriori, tutti avendo riconosciuto che la generalità e l'eleganza ivi raggiunte ben difficilmente possono venire superate.

Sono queste le doti che riscontrammo in tutti gli scritti di Lagrange che sin qui analizzammo e che non mancano nemmeno in quello notevolissimo di cui ci resta ancora da parlare. È una memoria ([192]) con cui egli si propose di porre in sodo la possibilità di dedurre tutte le formole della trigonometria sferica da un solo teorema, tratto dall'investigazione diretta della figura. È una tesi già intravveduta (1783) dal de Gua, ma che questi aveva tentato stabilire mediante calcoli talmente farragginosi, che si sarebbero detti congegnati con lo scopo di mettere in luce, non i vantaggi, ma gli inconvenienti dello svolgere quell'idea. Lagrange, invece, dimostra direttamente il « teorema del coseno » $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A$, ne deduce $\operatorname{sen} A$ e dalla simmetria della risultante espressione di $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}$ trae il « teorema dei seni ». Similmente ottiene le formole

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C \cdot \cos a,$$
$$\cot a \operatorname{sen} b = \cot A \operatorname{sen} C + \cos b \cos C;$$

fa vedere che dalle relazioni stabilite scaturiscono, come casi speciali, tutte quelle che sussistono per triangoli sferici rettangoli; nè manca di dimostrare, in modo estremamente semplice, il « teorema di Legendre » che insegna una relazione metrica approssimata fra un triangolo sferico qualunque ed un triangolo piano opportunamente scelto, teorema del quale è nota la straordinaria importanza pratica. Risulta da ciò come ben a ragione un giudice competentissimo dichiarasse: « Es besteht kein Zweifel, dass dieses von Lagrange aufgestellte System der sphärischen Trigonometrie an Uebersichtlichkeit, Einfachheit und Eleganz alle die bis dahin erschienen übertrifft und so in würdiger Weise die Bestrebungen des 18. Jahrhunderts auf dem Gebiete unserer Wissenschaft abschliesst » ([193]).

Gli è presumibilmente nel corso di tali studi che Lagrange ebbe a notare che le formole della Trigonometria sferica sono indipendenti dal postulato di Euclide, e fu indotto a pensare che, facendo tendere ad infinito il raggio della sfera su cui si opera, si sarebbe giunti a sormontare quelle difficoltà della Geometria del piano che i non sterili conati di Legendre avevano posto all'ordine del giorno al tramonto del secolo XVIII. Tale convinzione egli ebbe a manifestare conversando col Biot [194] e forse costituiva il nocciolo di una memoria di cui — a quanto narra A. de Morgan [195] — egli avrebbe cominciata la lettura all'Accademia delle Scienze di Parigi, lettura che interruppe improvvisamente esclamando « Il faut que j'y songe encore! ».

24. Tutto quanto esponemmo nel presente Capitolo basta a provare che, durante il soggiorno a Parigi, il genio di Lagrange si mostrò di forza, se non di originalità, comparabile a quella dimostrata nelle precedenti fasi di sviluppo. Nè a lui mancarono le più espressive manifestazioni di alta considerazione da parte di discepoli, di privati, del Governo: infatti ebbe la dignità di Grand'Ufficiale della Legion d'Onore, a lui venne assegnato il primo de' premi decennali istituiti da Napoleone I [196], a lui fu assegnato un posto nel Senato, a lui infine fu conferito l'ambito titolo di Conte dell'Impero. Circondato da un culto universale egli continuava a lavorare senza dar segno di alcun deperimento intellettuale; ma le frequenti sincopi — che tanto allarmavano parenti ed amici — erano sintomi indubbi di un morboso indebolimento fisico. Però gli è soltanto verso il cadere di marzo del 1813 che a tale diminuzione di forze, lenta ma incessante, si accompagnarono fenomeni allarmanti. Tuttavia il giorno 8 del seguente aprile egli potè ricevere i colleghi Monge, Lacepède e Chaptal — incaricati di recargli, in nome dell'Imperatore, il Gran cordone dell'Ordine imperiale della Riunione —, intrattenendosi famigliarmente con essi. Ma fu l'ultimo raggio di luce proveniente da una fiamma che andava spegnendosi: chè due giorni dopo (10 aprile 1813) alle 9 $^3/_4$ egli esalava la sua grande anima [197].

25. L'Istituto di Francia ed il Senato conservatore assistettero in pompa magna alle sue esequie [198]; e, dopo che il presidente del più eccelso corpo politico della Francia ebbe dato all'illustre estinto il supremo addio, Laplace, con parola commossa, delineava rapidamente le immense benemerenze scientifiche del sommo matematico, osservando, fra l'altro, che « parmi les inventeurs qui ont le plus reculé les bornes de nos connaissances Newton et lui... paraissent avoir possedé au plus haut point ce tact heureux qui, faisant discerner dans les objets les principes généraux qu'ils récèlent, constitue le véritable génie des sciences dont le but est la découverte de ces principes. Ce tact, joint à une rare élégance dans l'exposition des théories les plus abstraites, caractérise M. de Lagrange ».

Riuscirebbe impossibile delineare con maggiore chiarezza e sobrietà di parole l'opera scientifica del Grande da un secolo scomparso, chè sostanza e forma erano di pari perfezione in tutte le sue scritture! L'eleganza dei calcoli e la lucidità dello stile fanno ancor oggi dei suoi scritti altrettanti insuperabili modelli; d'altra parte l'originalità e profondità delle sue vedute sono tali che a lui fu dato, in tutti i vari campi che ha coltivati, di inaugurare un'èra novella o di chiuderne un'altra.

Così, nella Teoria dei Numeri pose termine all'epoca cominciata con Fermat e preparò quella a cui compete il nome di Gauss, mentre nella Teoria delle Equazioni schiuse il grande periodo nel quale — per precipuo merito di Ruffini, Cauchy, Abel, Galois — questa disciplina ha trovata una nuova anima nel concetto di sostituzione. Similmente, mentre corona degnamente l'opera trigonometrica del secolo XVIII, scrive le prime pagine della Geometria analitica, nel senso che a tale vocabolo venne dato da tutti coloro che se ne occuparono durante il secolo passato. Nell' Analisi in generale egli appare come ultimo rappresentante di quello che può dirsi indirizzo algoritmico, il quale, per opera di Cauchy e Abel, doveva, all'alba del secolo XIX, cedere il posto al regno del rigore: ma per certe speciali teorie (ad esempio le Equazioni differenziali ed il Calcolo delle variazioni) egli è tuttora venerato come pioniere e fondatore. E se le sue assidue ricerche sul Calcolo delle probabilità e la Meccanica celeste ebbero la sfortuna di precedere di poco quelle più decisive di Laplace e Gauss, l'apparizione della *Mécanique analytique* può ben compararsi al sorger del sole, chè lo splendore da essa emanante fece cadere in dimenticanza tutti gli scritti congeneri anteriori. Calcolatore geniale si mostrò insuperabile nell'immaginare nuove procedure aritmetiche ed analitiche, onde tutti coloro che serban fede nell'avvenire del simbolismo algebrico considerano le *Opere di Lagrange* come inesauribile fonte di preziosi ammaestramenti.

Dopo un secolo intero dacchè la stanca mano di Lagrange cadde sulle eterne pagine da lui vergate, dopo un secolo che per attività e fecondità matematica supera di gran lunga tutti i precedenti, noi troviamo il nome di Lagrange ancora collegato a tutte le varie branche della scienza matematica: onde per tutti coloro che le coltivano è dovere e vanto di proclamarsi discepoli dell'immortale Scienziato a cui l' Italia diede i natali, a cui la Germania assicurò la pace e la tranquillità indispensabili ad un fecondo lavoro scientifico, a cui la Francia largì, con insuperabile generosità, i supremi onori a cui può aspirare un pensatore.

Genova, 31 dicembre 1912.

NOTE

(1) *Opere del Marchese* G. C. DE' TOSCHI DI FAGNANO *pubblicate da* V. VOLTERRA, G. LORIA *e* D. GAMBIOLI, Vol. III (Roma, 1912), p. 181. È la casa attualmente contrassegnata col n. 29 in Via Lagrange.

(2) Cfr. una dichiarazione ufficiale fatta da Lagrange il 30 marzo 1795 e riprodotta a p. 286 del T. XIV delle *Oeuvres complètes de Lagrange publiées par les soins de* J. A. SERRET *et* G. DARBOUX (Paris, 1867-1892). D'altronde nel Registro degli Atti di nascita e battesimo della Parrocchia di S. Eusebio (detta di S. Filippo) a Torino si trova il seguente documento:

ATTO DI NASCITA E BATTESIMO.

« LAGRANGIA GIUSEPPE LODOVICO, figlio del signor Giuseppe Francesco Ludovico et Teresa Grosso, giugali Lagrangia, nato li venticinque gennajo dell'anno millesettecentotrentasei, fu battezzato il 30 gennajo seguente. Padrino fu il sig. Carlo Lagrangia, e Madrina l'Ill.ma Sig.a Contessa Anna Caterina Rebuffi di Traves. — Firm. Padre Carlo Boscallis della Congregazione dell'Oratorio e Rettore della Parrocchia di S. Eusebio ».

Notiamo per incidenza che questo documento porge in certo modo una sanzione legale al costume, invalso in passato ed ora abbandonato, di scrivere LAGRANGIA invece di LAGRANGE.

(3) Un fatto congenere è offerto dalla biografia di C. MÉRAY, il quale (come egli ebbe a scrivermi il 15 febbrajo 1899) cessò di occuparsi di geometria, tema de' suoi primi lavori, quando constatò l'impossibilità di determinare, per via puramente geometrica, il numero dei punti comuni a due sezioni coniche.

(4) Che la collezione di lettere di cui disponiamo non sia completa emerge, fra l'altro, da ciò che il carteggio con FAGNANO s'inizia con una risposta di questo (*Opere di Fagnano*, T. III, p. 179) e quello con EULERO con una lettera di Lagrange che evidentemente non inaugura il relativo epistolario (Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 135).

(5) *Lettera di Luigi de la Grange Tournier, torinese, all'illustrissimo signor Conte Giulio Carlo da Fagnano, contenente una nuova serie per i differenziali ed integrali di qualsivoglia grado, corrispondente alla newtoniana per le podestà e le radici.* Torino, 1754 (Oeuvres de Lagrange, T. VII, p. 583-588; Opere di C. G. di Fagnano, T. III, p. 181-185).

(6) V. lettera al Fagnano del 14 agosto 1754 (Opere di C. G. di Fagnano, T. III, p. 189).

(7) Tale aneddoto è raccontato dall'Arago nella sua biografia di Fresnel (*Oeuvres de F. Arago*, T. I. Paris, 1854, p. 119).

(8) Opere di C. G. di Fagnano, T. III, p. 202.

(9) In una lettera scritta a D'ALEMBERT il 20 novembre 1769 LAGRANGE, a proposito del calcolo delle variazioni, scriveva: «... la méthode dont je parle a été le premier fruit de mes études (n'ayant que dix-neuf ans lorsque je l'imaginai) et ... je le regarde toujours comme ce que j'ai fait de mieux en Géométrie » (Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 154).

(10) Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 138; cfr. la risposta di EULERO in data 6 settembre 1755, ivi p. 144. Secondo un biografo del sommo matematico (VASSALLI-EANDI, *Notice abrégée de la vie et des écrits de Louis Lagrange*, nel T. XII delle Miscellanee di Storia Italiana), la scoperta sarebbe stata fatta da lui nella Chiesa di S. Francesco di Paola, ascoltando un concerto musicale.

(11) Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 146.

(12) Questo atto di governo venne pubblicato da G. VACCA nell'articolo *Sui primi anni di Giuseppe Lagrange* (Bollettino di bibl. e storia delle sc. matem., T. IV, 1901, p. 2).

(13) Opere di C. G. di Fagnano, T. III, p. 207. In senso somigliante LAGRANGE si esprimeva scrivendo ad Eulero il 20 novembre 1755 (Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 147).

(14) L'Università di Torino non fu sede di fiorenti studi fisico-matematici prima del secolo XIX. Nota il VALLAURI (*Storia delle Università degli studi del Piemonte*, II ed., Torino, 1875, p. 413), parlando delle solerti cure date da re Carlo Emanuele III a quell'istituto, che « sugli studi fisici e matematici sembra che non scendesse egual favore », forse perchè (stando almeno a quanto risulta dagli scarsi documenti sino ad ora pubblicati) non avevano alcun ben definito scopo pratico o sociale, come possedevano le discipline mediche, giuridiche e letterarie facenti parte del programma degli studi universitari. In principio del secolo XVIII si era fatto venire da Bologna, ove le matematiche erano in fiore, il CORAZZI; ma egli si dimostrò professore mediocre; alla sua morte (1726) una delle due cattedre di matematica rimase per parecchio tempo vacante, talchè quella disciplina restò tutta affidata ad un certo CARLO TOMMASO BOCCA, individuo totalmente oscuro. Finalmente nel gennajo 1730 fu nominato professore di matematica il P. GIULIO ACCETTA, che, come dice il VALLAURI (op. cit., p. 413) fu « il primo che cominciasse a rialzare alquanto gli studi matematici in Piemonte »; la determinazione della posizione astronomica di Torino da lui compiuta gli fece ottenere una certa notorietà ed il grado di corrispondente dell'Accademia di Parigi, mentre il volume intitolato *Gli Elementi di Euclide a migliore e più chiara maniera ridotti* (Torino, 1753), pubblicati dopo la sua morte dal suo discepolo e successore FILIPPO REVELLI, gli assicurarono un posto, sia pur modesto, nella storia della matematica. Nell'anno 1755 le due cattedre matematiche (che, in base agli statuti del 1737, erano stabilite nell'Università di Torino, con gli stipendii annui di L. 1200 l'una, di L. 2400 l'altra) erano occupate, quella di geometria dal REVELLI e quella di matematica da F. D. MICHELETTI, persona di cui si serbò memoria solo perchè fu membro dell'Accademia delle Scienze di Torino.

(15) V. l'articolo del VACCA citato nella nota (12).

(16) Lettera del 19 maggio 1756 (Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 155).

(17) Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 156. Cfr. anche una lettera scritta da LAGRANGE a FAGNANO il 4 ottobre 1756 (Opere di C. G. di Fagnano, T. III, p. 208).

(18) A. HARNACK, *Geschichte der k. Preuss. Akad. der Wissenschaften*, T. I (Berlin, 1900), p. 338.

(19) « Der jugendliche Lagrange gestaltete 1760, noch in Turin, das Princip so, dass es nach Jacobi's Ausspruch in seiner Händen die Mutter unser ganzen analytischen Mechanik ward ». E. DU BOIS REYMOND, *Maupertuis* (Reden, II. Aufl., II. Bd., Leipzig, 1912, p. 462).

(20) Per più minuti particolari al riguardo si ricorra a T. VALLAURI, *Delle società letterarie del Piemonte* (Torino, 1844, p. 156-215) ed al documentatissimo volume commemorativo *Il primo secolo della R. Accademia delle Scienze di Torino. Notizie storiche e bibliografiche 1783-1883* (Torino, 1883).

(21) Escluderemo soltanto un lavoro sopra l'Analisi indeterminata di secondo grado, perchè è assodato che appartiene al periodo « berlinese » della vita di Lagrange; per converso faremo qui cenno anche delle posteriori continuazioni che ebbero le ricerche iniziate durante l'epoca « torinese ».

(22) *Recherches sur la méthode de maximis et minimis.* Oeuvres, T. I, p. 1-20.

(23) *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies.* Oeuvres, T. I, p. 335-362.

(24) « Desideratur... methodus a resolutione geometrica et lineari libera ». Così sta scritto nell'art. 39 del Cap. II della fondamentale memoria *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (Lausannae et Genevae, 1744).

(25) *Elementa calculi variationum.* Novi Comment. Acad. Sc. Petrop., T. X, 1764.

(26) V. la memoria intitolata *Addition à la méthode pour la solution des problèmes de maximis et minimis* (Mém. de l'Acad. des Sciences. Paris, 1767).

(27) *Sur la méthode des variations.* Oeuvres, T. II, p. 37-63.

(28) *Sur la méthode de trouver les courbes qui jouissent de quelque propriété de maximum ou de minimum* (Mém. de l'Acad. des Sciences. Paris, 1767).

(29) *Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la théorie des suites récurrentes.* Oeuvres, T. I, p. 23-36.

(30) *Recherches sur les suites récurrentes dont les termes varient de plusieurs manières différentes, ou sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles; et sur l'usage de ces équatious dans la théorie des hasards.* Oeuvres, T. IV, p. 151-251.

(31) *Comptes-rendus*, T. II, p. 396.

(32) Questa memoria si trova riassunta da Todhunter, *A history of the theory of probabilities* (Cambridge and Dublin, 1865), p. 313-320.

(33) Memorie della Società Italiana delle Scienze, T. III, 1786, p. 313-320.

(34) *Mémoire sur l'expression du terme général des séries récurrentes, lorsque l'équation génératrice a des racines égales.* Oeuvres, T. V, p. 627-641.

(35) *Solutions de divers problèmes de calcul intégral.* Oeuvres, T. I, p. 471-668.

(36) *Sur l'intégration de quelques équations différentielles dont les indéterminées sont séparées, mais dont chaque membre en particulier n'est point intégrable.* Oeuvres, T. II, p. 5-33.

(37) *Recherches sur la nature et la propagation du son.* Oeuvres, T. I, p. 39-148. Il lettore desideroso di più minuti particolari sopra quanto è ivi esposto ricorra ai §§ 10-12 della II Parte del grande Rapporto di H. Burckhardt sopra le *Entwickelungen nach oscillirenden Funktionen* inserito nel T. X del Jahresbericht der Deutschen Mathem. Vereinigung.

(38) Parole di E. Beltrami: v. Opere, T. II, Milano, 1904, p. 464.

(39) *Recherches sur le mouvement d'un corps qui est attiré vers deux centres fixes.* Oeuvres, T. II, p. 67-121.

(40) A. Cayley, *On Lagrange solution of the problem of the two fixed centres* (Quart. Journ. of mathem., T. 2, 1858, oppure Collected Papers, T. III, p. 114 e segg.).

(41) *Sur la figure des colonnes.* Oeuvres, T. II, p. 125-170.

(42) Per brevità non ci arrestiamo sopra la *Note sur un paradoxe qu'on rencontre dans les formules de l'attraction d'un point vers une surface sphérique quelconque* (Oeuvres, T. VII, p. 591-594) e la *Note sur la métaphysique du calcul infinitésimal* (Ivi, p. 597-599), non essendo che brevi commenti a lavori altrui.

(43) *Mémoire sur l'utilité de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités, et où l'on résout différents problèmes relatifs à cette matière.* Oeuvres, T. II, p. 173-234.

(44) Si veggano i *Miscellaneous tracts* pubblicati nel 1757.

(45) Cfr. Todhunter, op. cit. nella nota (32), p. 428.

(46) Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 4.

(47) Ivi, p. 9.

(48) V. una lettera di d'Alembert pubblicata da Ch. Henry nel T. XIX (1886) del *Bullettino di bibliografia e storia delle scienze matem. et fis.*, p. 131.

(49) *Recherches sur la libration de la lune, dans lesquelles on tache de resoudre la question proposée par l'Académie royale des sciences pour le prix de l'année 1764.* Oeuvres, T. VI, p. 5-61.

(50) V. la Prefazione generale posta in testa al T. I di J. G. H. LEIBNIZ, *Opera Omnia* (Genevae, 1768); cfr. la lettera di LAGRANGE a d'ALEMBERT del 26 gennajo 1765 (Oeuvres, T. XIII, p. 31).

(51) Si veggano le lettere di LAGRANGE a d'ALEMBERT del 30 maggio e del 6 settembre 1765 (Oeuvres, T. XIII, p. 31 e 43).

(52) Per tutto quanto concerne questo istituto si vegga l'opera dell'HARNACK citata nella nota (18).

(53) V. la lettera di EULERO a LAGRANGE del 2 ottobre 1759 (Oeuvres, T. XIV, p. 162).

54 Lettera del 4 febbrajo 1766 (Oeuvres, T. XIII, p. 53).

(55) Lettera del (?) marzo 1766 (ivi, p. 55. Cfr. la lettera di LAGRANGE ad EULERO del 19 aprile 1766 (Id., T. XIV, p. 208). Un suggerimento congenere fu dato da EULERO: v. la lettera di questo a LAGRANGE del 3 maggio 1766 (Oeuvres, T. XIV, p. 208).

(56) *Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter causées par leur attraction mutuelle.* Oeuvres, T. VI, p. 67-225. Cfr. la lettera di d'ALEMBERT a LAGRANGE del 25 marzo 1766 (Oeuvres, T. XIII, p. 57).

(57) Lettera di LAGRANGE a d'ALEMBERT del 5 aprile 1766 (id. p. 58).

(58) Per giudicare conformemente a giustizia il contegno del governo sardo di fronte a LAGRANGE, bisogna tener presente che il periodo di giovinezza di questo coincide con quello che tenne dietro alla guerra per la successione d'Austria (1735-1749), nella quale il Piemonte ebbe una parte attiva e gloriosa; è un periodo di riordinamento e di riforme pacifiche, nel quale il governo, per impellenti ragioni finanziarie, credette di restringere la propria azione a conservare piuttosto che a promuovere la cultura; tuttavia la fondazione delle Università di Cagliari e di Sassari (1764-1765) sta a provare che, nei limiti del possibile, esso agiva in conformità alle esigenze dei tempi.

(59) Lettera di d'ALEMBERT a LAGRANGE del 26 aprile 1766 (Oeuvres, T. XIII, p. 61).

(60) HARNACK, *Geschichte*, T. I, p. 601. Si riferiscono al trasloco di Lagrange le lettere di Federico II datate 29 marzo, 26 luglio e 12 agosto 1766 pubblicate nel T. XXIV (p. 312, 407 e 409) delle *Oeuvres de Frédéric*. Va eziandio rilevato a titolo di onore di LAGRANGE che egli avrebbe potuto occupare anche il posto di Presidente dell'Accademia, che d'ALEMBERT gli offerse due volte (v. le lettere del 23 maggio e del 16 giugno 1769 stampate in Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 71 e 135); ma lo rifiutò sempre per modestia (lettere a d'Alembert del 4 giugno e del 15 luglio 1769, pubblicate ivi p. 72 e 142).

(61) Lettera di LAGRANGE a d'ALEMBERT del 10 maggio 1766 (Oeuvres, T. XIII, p. 62).

62) Ivi, p. 73.

(63) A Berlino LAGRANGE abitò sempre Unter den Linden in casa del presidente GÖRNE (HARNACK, l. c., T. I, p. 481).

(64) Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 316.

(65) Il calcule, calcule des courbes tant que vous en voudrez »: così scriveva Federico II a d'Alembert il 13 (23) gennajo 1782 (Oeuvres de Frédéric, T. XXIV, p. 212).

(66) Cfr. una lettera di EULERO a LAGRANGE del 9 gennajo 1767 (Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 212). Più tardi (23 maggio 1775) egli scrivevagli: Il est bien glorieux pour moi d'avoir pour successeur à Berlin le plus sublime géomètre de ce siècle, et il est certain que je n'aurais pu rendre à l'Académie un plus grand service qu'en prenant mon congé, et, à cet égard, je puis me vanter d'une grande supériorité sur vous, vu que vous ne lui saurez jamais rendre un tel service › (Ivi, p. 241).

([67]) V. una lettera di d'ALEMBERT a LAGRANGE del 14 giugno 1771 e la risposta in data 12 luglio (Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 202 e 205); inoltre due lettere del CASTILLON a d'Alembert del 27 aprile 1768 e del 18 ottobre 1771 pubblicate da CH. HENRY (*Bull. di bibl. e storia delle sc. mat. e fis.*, T. XVIII, p. 549 e 552).

([68]) Infatti in data 6 giugno 1769 egli scriveva a d'ALEMBERT: «... j'ai une mauvaise habitude, dont il m'est impossible de me défaire: c'est que je refais souvent mes Mémoires, même plusieurs fois, jusqu'à ce que j'en sois passablement content» (Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 132). Altre notizie interessantissime relative al metodo di studio tenuto da Lagrange si trovano in un articolo di F. G. MAURICE (che ebbe col grande geometra lunga dimestichezza) dal titolo *Directions pour l'étude approfondie des mathématiques recueillies des entretiens de Lagrange* », inserito nel *Moniteur* del 26 febbrajo 1814. Tale articolo venne sostanzialmente riprodotto da C. A. BJERKNESS a pag. 174 del suo noto volume sopra *N. H. Abel* (Paris, 1885), come tolto dal Giornale di Lindenau e Bohnenberg, mentre nel T. I della *Zeitschrift für Astronomie und verwandten Wissenschaften* non si trova che un Elenco delle pubblicazioni del grande geometra; tale rettifica mi è possibile grazie al cortese aiuto di G. ENESTRÖM (Stockholm) e V. MORTET (Parigi).

([69]) Ricerche accuratissime fatte, dietro mia preghiera, dal dott. G. VALENTIN a Berlino per rintracciare l'atto di matrimonio di LAGRANGE non condussero ad alcun risultato. Altrettanto dicasi per quelle praticate allo stesso scopo negli archivi della R. Ambasciata d'Italia presso la Corte tedesca e nel R. Archivio di Stato di Torino; il che non deve stupire, perchè già il BIANCHI ha rilevato (nella sua pubblicazione sopra *Le materie politiche relative all'Estero negli Archivi di Stato del Piemonte*) che ivi mancano gli atti dell'ambasciata presso il re di Prussia dal 1731 al 1775.

([70]) L'ultima delle lettere scritte da d'ALEMBERT a LAGRANGE, pochi giorni prima di morire (27 settembre 1783), è appunto per condolersi con l'amico per la perdita che egli aveva fatta (Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 377).

([71]) Ciò è attestato da parecchi passi del carteggio con d'ALEMBERT (Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 131, 173, 300).

([72]) La memoria premiata è l'*Essai sur le problème des trois corps* (Oeuvres, T. VI, p. 229-324).

([73]) Cfr. una lettera di d'ALEMBERT a MELANDERHJELM del 25 aprile 1774 pubblicata dall'HENRY (Bull. di bibl. e storia, ecc., T. XVIII, 1885, p. 615); la memoria premiata è intitolata *Sur l'équation séculaire de la lune* (Oeuvres, T. VI, p. 335-399); ivi si trova la più antica menzione del concetto di «potenziale».

([74]) Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 238 e T. XIV, p. 268.

([75]) Ivi, T. XIV, p. 267.

([76]) Ivi, p. 305.

([77]) Autore di tale progetto fu il marchese CARACCIOLI, divenuto da ambasciatore vicerè di Sicilia; le ragioni per le quali LAGRANGE non fu favorevole a questo disegno si desumono da una sua lettera al CARACCIOLI in data 13 ottobre 1781 (Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 281) comunicata da F. SCLOPIS alla R. Acc. di Torino il 28 gennajo 1872.

([78]) Id., p. 284.

([79]) Ivi, T. XIII, p. 250.

([80]) Ivi, p. 371.

([81]) Ivi, p. 375.

([82]) Vedi *Dieci lettere inedite di G. L. Lagrange scritte al matematico veronese A. M. Lorgna* (Bullettino di bibliografia e storia, ecc., T. VI, 1873, p. 131-141); *Sette lettere inedite di G. L. Lagrange al P. Paolo Frisi tratte dagli autografi nella Biblioteca Ambrosiana di Milano e pubblicate per cura di* A. FAVARO (Atti della R. Acc. di Torino, T. XXXI, 1895).

(83) Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 118. A proposito delle ricerche aritmetiche del matematico di cui ci occupiamo, è interessante la seguente notizia data da E. Lucas e cortesemente segnalatami da H. Brocard: Lagrange avait l'intention de publier une nouvelle édition de l'arithmétique du géomètre d'Alexandrie (Diophante) dans laquelle il se proposait surtout d'éclaircir les courtes remarques de Fermat et de restituer la plus grande partie des beaux théorèmes qui y sont répandus; mais cet ouvrage n'a point été terminé et l'analyse manuscrite des quatre premiers livres seulement est conservée à la bibliothèque de l'Institut » (*Recherches sur l'analyse indéterminée et l'arithmétique de Diophante*).

(84) *Solution d'un problème d'arithmétique* (Oeuvres, T. I, p. 671-731).

(85) Cfr. le *Additions à l'Algèbre de M. Euler* (Oeuvres, T. VII, p. 158).

(86) *Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré* (Oeuvres, T. I, p. 378-535).

(87) Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 127.

(88) *Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombre entiers* (Oeuvres, T. II, p. 655-726).

(89) *Recherches d'arithmétique* (Oeuvres, T. III, p. 695-795).

(90) È questa la prima pubblicazione di carattere didattico che abbia fatta Lagrange.

(91) *Démonstration d'un théorème d'arithmétique* (Oeuvres, T. III, p. 189-201).

(92) *Démonstration d'un théorème nouveau concernant les nombres premiers* (Id., p. 425-438); ivi è anche posto in chiaro il legame che passa fra il teorema di Wilson ed il « piccolo » teorema di Fermat e sono stabilite alcune nuove proposizioni congeneri.

(93) *Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante* (Oeuvres, T. IV, p. 367-398).

(94) *Sur la résolution des équations numériques* (Oeuvres, T. II, p. 359-378).

(95) Per più minuti particolari rimandiamo a *A History of the Arithmetical Methods of Approximation to the Roots of Numerical Equations of one Unknow Quantity* di F. Cajori (Colorado College Publications, Science Series, Vol. XII, 1910).

(96) *Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques* (Oeuvres, T. II, p. 581-652).

(97) Cfr. anche le posteriori *Recherches sur la détermination du nombre des racines imaginaires dans les équations littérales* (Oeuvres, T. IV, p. 343-374).

(98) *Sur l'élimination des inconnues dans les équations* (Oeuvres, T. III, p. 141-154).

(99) *Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries* (Oeuvres, T. III, p. 5-73).

(100) *Sur le problème de Képler* (Oeuvres, T. III, p. 113-138).

(101) Oeuvres, T. III, p. 205-241; cfr. J. Pierpont, *Early History of Galois'Theory of Equations* (Bull. of the Amer. mathem. Society, T. IV, 1898, p. 332-340). Dalle considerazioni esposte nella memoria in discorso Lagrange tentò più tardi (v. la memoria *Sur la forme des racines imaginaires des équations;* Oeuvres, T. III, p. 479-516) di dedurre una dimostrazione del teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche; ma lasciò a Gauss la gloria di dire l'ultima parola sopra questa essenziale questione di principio.

(102) *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires* (Oeuvres, T. III, p. 661-692).

(103) Cfr. Th. Muir, *The Theory of Determinants in its historical order of developement*, T. I, 2ª ed., London, 1906, p. 37-40.

(104) *Solution algébrique d'un problème de géométrie* (Oeuvres, T. IV, p. 335-339).

(105) V. la memoria *Sur une nouvelle propriété des sections coniques* (Mém. de l'Acad. de Berlin, 1776).

(106) *Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques* (Oeuvres, T. III, p. 619-649). *Addition au Mémoire précédent* (Id., p. 651-658).

(107) V. la memoria *De causa physica fluxus et refluxus maris*, premiata nel 1740 dall'Accademia di Parigi.

(108) *Mémoire sur les sphéroïdes elliptiques* (Oeuvres, T. V, p. 645-660).

(109) *Sur une manière particulière d'exprimer le temps dans les sections coniques, décrites par des forces tendentes au foyer et réciproquement proportionnelles aux carrés des distances* (Oeuvres, T. IV, p. 559-582).

(110) *Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice* (Id., T. III, p. 579-616).

(111) Cfr. Muir, op. cit. nella nota (103), p. 33-37.

(112) *Sur différentes questions d'analyse rélatives à la théorie des intégrales particulières* (Oeuvres, T. IV, p. 586-634).

(113) *Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral* (Oeuvres, T. IV, p. 301-332).

(114) *Sur une nouvelle méthode de calcul intégral pour les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le quatrième dégré* (Oeuvres, T. II, p. 253-312).

(115) *Sur une nouvelle espèce de calcul rélatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables* (Oeuvres, T. III, p. 441-476).

(116) *Mémoire sur la méthode d'interpolation* (Oeuvres, T. V, p. 633-684). Notiamo che nell'anteriore scritto *Sur une méthode particulière d'approximation et d'interpolation* (Id., p. 517-532) il Nostro aveva esposta una notevole generalizzazione dell'algoritmo usato dal Briggs nella sua *Arithmetica logarithmica*; si veggano anche le osservazioni *Sur les interpolations* (Oeuvres, T. VII, p. 534-553) di cui Lagrange intendeva fare applicazione a questioni astronomiche.

(117) Cfr. A. Von Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, T. II (Leipzig, 1905), p. 28 e *Encyklopädie der mathem. Wissenschaften*, I, D. 3, n. 9.

(118) V. la memoria *Sur l'intégration des équations à différences partielles du premier ordre* (Oeuvres, T. III, p. 549-575), l'ultimo § dell'altra *Sur différentes questions d'analyse rélatives à la théorie des intégrales particulières* (Id., T. IV, p. 586-634) e finalmente la *Méthode générale pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre, lorsque ces différences ne sont que linéaires* (Id., T. V, p. 543-562), ove giova rilevare lo studio e l'estensione allo spazio del problema delle traiettorie oblique di un sistema di curve piane.

(119) *Sur les intégrales particulières des équations différentielles* (Oeuvres, T. IV, p. 5-108).

(120) *Mémoire sur une question concernant les annuités* (Oeuvres, T. V, p. 613-624).

(121) V. la 3.a ediz. (1750) del *Treatise of annuities of lines.*

(122) *Recherches sur la manière de former des tables de planètes d'après les seules observations* (Oeuvres, T. VI, p. 506-627).

(123) *Sur la construction de cartes géographiques* (Oeuvres, T. IV, p. 637-692).

(124) Però è ignoto chi per primo l'ha avvertita; il Delambre (*Histoire de l'Astronomie au XVIII Siècle*, Paris, 1827, p. 88) ne trovò cenno, con una dimostrazione non perfetta, in *A complete system of astronomy* (London, 1728) di C. Leadbetter.

(125) Donde il nome di «Schwarzian derivative» usato dal Cayley.

(126) *Sposizione del metodo delle equipollenze*, n. 84 (Memorie della Soc. Ital. delle Scienze, T. XXV, Parte II, 1855).

(127) *Sur les courbes tautochrones* (Oeuvres, T. II, p. 318-331).

(128) *Nouvelles réflexions sur les tautochrones* (Oeuvres, T. III, p. 157-188).

(129) Per informazioni meno incomplete sulla storia di tale questione si ricorra alla monografia di C. Ohrtmann, *Das Problem der Tautochronen* (Berlin, 1872).

(130) *Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances* (Oeuvres, T. IV, p. 401-418).

(131) *Sur une nouvelle propriété du centre de gravité* (Oeuvres, T. V, p. 535-540).

([132]) *Sur la percussion des fluides* (Oeuvres, T. II, p. 237-249).

([133]) *Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides* (Oeuvres, T. IV, p. 695-748).

([134]) *Sur la théorie des lunettes* (Oeuvres, T. IV, p. 535-555).

([135]) *Mémoire sur une loi générale d'optique* (Oeuvres, T. V, p. 701-710).

([136]) *Sur la force des ressorts pliés* (Oeuvres, T. III, p. 77-110).

([137]) *Sur la manière de rectifier deux endroits des Principes de Newton relatifs à la propagation du son et au mouvement des ondes* (Oeuvres, T. V, p. 591-609).

([138]) *Réflexions sur l'échappement* (Oeuvres, T. IV, p. 421-436).

([139]) *Sur l'altération des moyens mouvements des planètes* (Oeuvres, T. IV, p. 255-271).

([140]) *Sur le problème de la détermination des orbites des comètes d'après trois observations* (Oeuvres, T. IV, p. 439-496 e 496-532) e *Nouvelle méthode pour déterminer l'orbite des comètes d'après les observations* (Id., T. VII, p. 471-486). Cfr. anche la nota intitolata *Equations pour la détermination des éléments de l'orbite d'une planète ou d'une comète au moyen de trois observations peu éloignées* (Ivi, p. 563-567).

([141]) *Recherches sur les perturbations que les comètes peuvent éprouver par l'action des planètes* (Oeuvres, T. VI, p. 403-503).

([142]) *Théorie de la libration de la lune et des autres phénomènes qui dépendent de la figure non sphérique de cette planète* (Oeuvres, T. V, p. 122).

([143]) *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes* (Oeuvres, T. V, p. 125-207, 211-344), *Sur les variations séculaires des mouvements moyens des planètes* (Ivi, p. 382-414) e *Lettre de Lagrange à Laplace relative à la théorie des inégalites séculaires des planètes* (Id., T. VI, p. 631-632).

([144]) *Théorie des variations périodiques des mouvements des planètes* (Oeuvres, T. V, p. 347-377, 417-422).

([145]) *Mémoire sur l'équation séculaire de la lune* (Oeuvres, T. V, p. 687-698); ivi s'incontra per la prima volta la nota «formola d'interpolazione di Lagrange».

([146]) *Sur le mouvement des noeuds des orbites planétaires* (Oeuvres, T. IV, p. 111-147) e *Recherches sur les équations séculaires des mouvements des noeuds et des inclinations des orbites des planètes* (Id., T. VI, p. 635-709). Cfr. la nota *Sur la diminution de l'obliquité de l'écliptique* (Id., T. VII, p. 517-532).

([147]) *Sur la manière de rectifier les méthodes ordinaires d'approximation pour l'intégration des équations du mouvement des planètes* (Oeuvres, T. V, p. 493-514).

([148]) *Théorie géométrique du mouvement des aphélies des planètes, pour servir d'Addition aux principes de Newton* (Oeuvres, T. V, p. 565-587).

([149]) *Mémoire sur le passage de Vénus du 3 juin 1769* (Oeuvres, T. II, p. 335-376).

([150]) *Sur les réfractions astronomiques* (Oeuvres, T. III, p. 519-545).

([151]) *Remarques sur la méthode des projections pour le calcul des éclipses de soleil ou d'étoiles* (Oeuvres, T. VII, p. 324-412).

([152]) *Sur le calcul des éclipses sujettes aux parallaxes* (Oeuvres, T. VII, p. 416-465, 513-514).

([153]) *Nouveau moyen de déterminer les longitudes de Jupiter et de Saturne au moyen d'une table à simple entrée* (Ivi, p. 487-510).

([154]) *Valeurs des variations annuelles des éléments des orbites des planètes* (Ivi, p. 557-560).

([155]) *Solutions de quelques problèmes d'astronomie sphérique par le moyen des séries* (Oeuvres, T. IV, p. 275-298).

([156]) Ai dilettanti di statistica potrà forse interessare l'osservazione seguente: Le memorie di LAGRANGE occupano in totale 4678 pagine in 4°, della edizione delle sue *Oeuvres complètes*. Una classificazione (necessariamente grossolana) di queste pagine dà il seguente risultato: **Analisi 714; Fisica matematica 553; Aritmetica 734; Meccanica 200; Probabilità 174;**

Astronomia 1650; Algebra 472; Geometria 93; Trigonometria 52. Non deve stupire se all'Astronomia spetti la parte del leone quando si tenga presente che il Direttore della Classe di Matematica dell' Accademia di Berlino doveva dirigere la compilazione delle Effemeridi astronomiche da essa pubblicate; d'altronde di questioni di Meccanica celeste il Nostro (come vedemmo) cominciò ad occuparsi sino da giovane e (come vedremo) s'interessò sino al termine della sua vita. Si noti anche che fra gli obblighi del Direttore della Classe matematica dell'Accademia di Berlino vi era pur quello di esaminare e dar parere intorno agli scritti presentati da estranei; ora nelle *Oeuvres complètes de Lagrange* si trovano (T. V, p. 713-718) due relazioni, una delle quali concerne la sterile fatica di un quadratore del cerchio, la quale deve considerarsi come un vero modello del genere.

([157]) Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 368. D'ALEMBERT rispose con ragione e cortesia il 14 dicembre 1781: « Je ne sais pas si le nombre des géomètres diminuera bientôt, comme vous le croyez, mais il suffira pour l'avancement des sciences, qu'il y en ait un seul qui vous ressemble » (Ivi, p. 371).

([158]) Infatti il 3 luglio 1784 scriveva all' ab. CALUSO: « Je deviens de jour en jour plus difficile sur les miens (travaux), et au lieu d'augmenter le nombre de mes mémoires imprimés, je desirerois fort de pouvoir en supprimer une partie, ou du moins la réduire en peu de pages » (G. PITTARELLI, *Due lettere inedite di Lagrange all'abate Caluso esistenti nell'Archivio storico municipale di Asti*; Atti del IV Congresso intern. dei Matematici, T. III, p. 556).

([159]) HARNACK, *Geschichte*, citata nella nota ([18]), T. I, p. 505.

([160]) La cura della stampa era stata assunta dal Legendre e dal Marie che si erano anche fatti mallevadori presso l'editore riguardo alle spese relative.

([161]) Cfr. un brano di lettera scritta dal LANDRIANI e riferita a p. 130 del T. VI (1873) del *Bullettino di bibl. e storia, ecc.*

([162]) Tutti i documenti relativi al passaggio di Lagrange da Berlino a Parigi furono pubblicati dall'HARNACK, *Geschichte*, citata, T. II, p. 314-321.

([163]) Cfr. A. GENOCCHI a pag. 93 del già citato — nota ([20]) — volume *Il primo secolo della R. Accademia delle scienze di Torino.*

([164]) A partire dal 1788 la sua abitazione fu in Rue Fromentan n. 4, Section du Museum (Oeuvres, T. XIV, p. 286).

([165]) Il fatto che nell'Accademia di Berlino non venne mai pronunciato alcun elogio di LAGRANGE, farebbe credere che non gli sia mai stato perdonato di avere varcato il Reno.

([166]) Copie di essa furono spedite all'abate CALUSO il 28 aprile 1788.

([167]) Però la prima dimostrazione completa di questo principio si trova nella *Théorie des fonctions analytiques*; cfr. anche la nota (che risale al 1798) *Sur le principe des vitesses virtuelles* (Oeuvres, T. VII, p. 371-321).

([168]) Per cura di PRONY, GARNIER e BINET.

([169]) « Lagrange's theory of the variation of the arbitrary constants, a theory perfectly complete in itself. » A. CAYLEY, *The collected Papers*, T. III, p. 200.

([170]) *Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites* (Oeuvres, T. VI, p. 713-768); *Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique* (Ivi, p. 771-805); *Second Mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique, dans lequel on simplifie l'application des formules générales à ces problèmes* (Ivi, p. 809-815).

([171]) In data 19 maggio 1789 il MÉRIAN scriveva al ministro HERTZENBERGER che LAGRANGE, non soltanto non aveva potuto occuparsi di nulla dacchè era a Parigi, ma che aveva corso rischio di perdere la vita in un tumulto, ove erasi casualmente trovato (A. HARNACK, l. c.,

T. II, p. 319; v. anche p. 321 una lettera di Lagrange in data 14 aprile 1791). Inoltre in una lettera scritta da Lagrange all'abate Caluso il 28 aprile 1788 e pubblicata dal Pittarelli — v. nota ([158]) — si legge ciò che segue: « J'ai presque pris congé de la Géométrie en quittant Berlin et le cercle des distractions au milieu duquel je vis ici est peu propre à ranimer mon ancienne passion pour cette science »,

([172]) Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 284.

([173]) Ivi, p. 314-315.

([174]) A tale deliberazione fu probabilmente non estraneo il fatto che un nuovo vincolo avvinceva LAGRANGE alla Francia, avendo egli sposata (31 maggio 1792) una delle figlie dell'astronomo LEMONNIER. Ricerche fatte per mio incarico negli Archivi della Prefettura della Senna hanno portato alla conclusione che l'Atto di tale matrimonio non esiste più: la data surriferita venne desunta dal prezioso opuscolo di VIREY et POTEL, *Précis historique sur la vie et la mort de Joseph-Louis Lagrange* (Paris, 1813) che mi fu dato di esaminare grazie ai buoni uffici del Decano della Sorbona, P. APPELL, al quale è per me un grato dovere l'esprimere qui la mia riconoscenza.

([175]) Frutto di tali studî è la postuma nota: *Formules relatives au mouvement du boulet dans l'intérieur du canon, extraites des manuscrits de Lagrange* par M. POISSON (Oeuvres, T. VII, p. 603-615).

([176]) Da questa funzione puramente amministrativa il Nostro ebbe lo stimolo a scrivere quell'*Essai d'arithmétique politique sur les premiers besoins de la République* (Oeuvres, T. VII, p. 571-579) che gli accorda un posto anche nella storia dell'Economia politica.

([177]) Cfr. G. BIGOURDAN, *Le système métrique de poids et mesures* (Paris, 1901).

([178]) *Compas de réduction pour la distance de la lune aux étoiles* (Oeuvres, T. VII, p. 377-378).

([179]) *Sur l'origine des comètes* (Id., p. 381-389). Chi desidera conoscere come sia stata giudicata l'ipotesi di LAGRANGE ricorra alla dotta memoria di O. ZANOTTI-BIANCO, *Le idee di Lagrange, Laplace, Gauss e Schiaparelli sull'origine delle comete* (Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino, Serie II, T. LXIII, 1912).

([180]) Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 283.

([181]) *École polytechnique. Le livre du Centenaire*, T. I (Paris, 1895), p. 5, 19, 20, 25.

([182]) Cfr. *Institut de France. Académie des Sciences. Procès-verbaux des Séances de l'Académie tenues depuis la fondation de l'Institut jusqu'au mois de Août 1835. Publiés conformément à une décision de l'Académie par MM. les secrétaires perpétuels.* T. I, Ans IV-VII (1795-1799), 1910.

([183]) Affermazione erronea; nel 1796 Lagrange compì sessant'anni.

([184]) *Le centenaire de l'École Normale 1795-1895* (Paris, 1895), p. 140.

([185]) Oeuvres de Lagrange, T. VII, p. 183-288.

([186]) *Essai d'analyse numérique sur la transformation des fractions* (Oeuvres, T. VII, p. 291-313).

([187]) Ciò è reso manifesto considerando che l'opera in questione consta di **sei** Capitoli (97 pagine) e **tredici** Note (215 pagine).

([188]) V. una limpidissima analisi della 2.ª ediz. inserita nel *Magasin encyclopédique 1808* e riprodotta in testa alla 3.ª ediz.

([189]) Cfr. R. PRONY, *Notice sur un Cours élémentaire d'Analyse fait par Lagrange* (Journ. de l'École polyth., II Cah., p. 206-208).

([190]) Cfr. anche il *Discours sur l'objet de la Théorie des fonctions analytiques*, tenuto nel 1798 (Oeuvres, T. VII, p. 325-328).

([191]) *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange* (Paris, 1812).

(192) *Solutions de quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques, avec une analyse complète de ces triangles* (Oeuvres, T. VII, p. 331-399). Giova rilevare che dalla memoria di Lagrange emerge che egli percepì chiaramente l'importanza della funzione denominata più tardi «seno di un angolo triedro».

(193) A. von Braunmühl, *Vorlesungen* citate nella nota (117), p. 167.

(194) Cfr. J. Houël, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire* (Paris, 1867), p. 76.

(195) Cfr. F. Engel und P. Stäckel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (Leipzig, 1895), p. 212.

(196) G. Darboux, *Eloges académiques et Discours* (Paris, 1912), p. 274.

(197) Per particolari minuti intorno a quanto concerne la vita fisica di Lagrange ed alla sua morte si ricorra al *Précis* di Virey et Potel citato nella nota (174). L'Atto originale di morte del Nostro fu distrutto nel 1871 durante gli incendi della Comune. Grazie ai buoni uffici del sig. Ch. Henry fu possibile rintracciarne la copia ricostituita in omaggio alle disposizioni generali contenute nella Legge 12 febbrajo 1872. Eccone il tenore:

«Du onze avril mil huit cent treize à dix heures du matin.

«Acte de decès de Monsieur Joseph Louis Lagrange, sénateur, grand officier de la Légion d'honneur, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, décédé hier à dix heures du matin, rue du Faubourg Saint-Honoré n. 128, en son hôtel, quartier du Roule, époux de Ma.me Rénée Francoise Adélaide Lemonnier, mondit sieur Lagrange, né à Turin, âgé de près de soixante-dix-sept ans, originaire d'une famille française. Constaté par nous Antoine Charles Roze, adjoint au maire du premier arrondissement de Paris, faisant les fonctions d'officier de l'État-Civil sur la déclaration à nous faite par les sieurs Charles François Jacques de Parfouru, propriétaire; âgé de quarant cinq ans, demeurant à Evy, département du Calvados, de présent à Paris, à domicile susdit, beau-frère du defunt, et Jean Baptiste Etienne François Maire, lieutenant-colonel, attaché au Ministère de la Guerre, âgé de trentequatre ans, même rue n. 100, et sont signés avec nous après déclaration faite».

(198) Più tardi la Francia tributò a Lagrange la più significante onoranza postuma prendendo l'iniziativa ed assumendo il patronato della prima edizione completa delle sue Opere. In base ad un Rapporto fatto da Legendre, Prony, Poisson e Lacroix, il 3 novembre 1817 (v. Oeuvres, T. XIV, p. IX-XII) venne escluso quanto di ancora inedito si trova nei manoscritti conservati nella Biblioteca dell'Istituto di Francia; ora le proposizioni che G. Peano ricavò da un rapido esame di quei manoscritti (v. *Formulaire mathématique, Éd. de l'an 1902-03*, p. 321-324) fanno ritenere che da essi non siasi ancora spremuto tutto ciò che d'importante sarebbero in grado di porgere, onde sarebbe desiderabile che l'Accademia delle Scienze di Parigi incoraggiasse e dirigesse nuove ricerche intorno ad essi.

Inoltre da varie pubblicazioni posteriori all'anno 1892 (e che vennero da noi scrupolosamente ricordate) sarebbe agevole trarre gli elementi per un nuovo volume di Corrispondenza.

Über die Zerlegung der Zahlen in zwei Quadrate.

(*Von* Edmund Landau *in Göttingen.*)

EINLEITUNG.

Zu den bedeutendsten Leistungen Lagranges gehört der Beweis des Satzes, dass jede positive ganze Zahl als Summe von vier Quadraten dargestellt werden kann, also als Summe von höchstens vier positiven Quadraten. War doch vordem noch nicht einmal die Existenz irgend einer festen Anzahl (sei sie selbst 100 oder mehr) an Stelle der Anzahl 4 bekannt.

Dieser Lagrangesche Satz war der Ausgangspunkt einer grösseren Reihe von Arbeiten, welche die genannte Eigenschaft der Quadrate (« eine beschränkte Anzahl positiver Quadrate reicht zur additiven Darstellung jeder positiven ganzen Zahl aus ») auf dritte, vierte, ..., $n$te Potenzen übertrugen. Herrn Hilbert gelang es bekanntlich 1909, das Hauptziel zu erreichen, nämlich diese Waringsche Vermutung für jedes n zu beweisen.

Aber im Titel meiner vorliegenden Arbeit spreche ich nur von dem einfachsten, Lagrangeschen Fall der Quadrate und sogar nur von den Zahlen, die in zwei Quadrate zerlegt werden können. Welches neue und wertvolle Resultat ist da noch zu erwarten? Man weiss doch seit langer Zeit, welche Zahlen das sind: Diejenigen, welche keinen Primfaktor $4m+3$ in ungerader Vielfachheit enthalten. Und man weiss längst, wieviele Lösungen die Gleichung

$$u^2 + v^2 = n \tag{1}$$

in ganzen u, v $\left(\gtreqless 0\right)$ für jedes $n > 0$ besitzt: Den vierfachen Überschuss der Anzahl der positiven Teiler $4m+1$ von n über die Anzahl der positiven Teiler $4m+3$ von n. Man weiss auch seit lange, dass die Anzahl $A(x)$ der

Lösungen von

$$u^2 + v^2 \leqq x, \tag{2}$$

d. h. der Zerlegungen aller ganzen n von 0 bis $[x]$ in zwei Quadrate, (anders ausgedrückt) dass die Anzahl der Gitterpunkte im Kreise mit dem Radius $\sqrt{x}$ um den Nullpunkt der Relation

$$A(x) = \pi x + O(\sqrt{x}) \tag{3}$$

genügt. Mit anderen Worten: Der Quotient

$$\frac{|A(x) - \pi x|}{\sqrt{x}} \tag{4}$$

liegt für alle $x \geqq 1$ unterhalb einer festen Schranke. Andererseits habe ich 1908 sogar folgendes viel tiefer liegende Problem mit den Mitteln der modernen Primzahltheorie gelöst: Die Anzahl $B(x)$ derjenigen Zahlen $\leqq x$, welche in zwei Quadrate zerlegbar sind, in asymptotische Beziehung zu einer elementaren Funktion von x zu bringen. Bei $B(x)$ ist also jedes in zwei Quadrate zerlegbare n nur einmal zu zählen, nicht (wie bei $A(x)$) so oft, als die Lösungszahl von (1) angiebt; mein Ergebnis war übrigens

$$\lim_{x=\infty} \frac{B(x)}{\frac{x}{\sqrt{\log x}}} = b,$$

wo b eine bestimmte positive Konstante bedeutet.

Was bleibt also in dieser Theorie zu thun übrig? Die Hauptfragestellung bezog sich natürlich auf die klassische Funktion $A(x)$, d. h. die Lösungszahl von (2), und ging zunächst dahin: Kann die Relation (3) verschärft werden? D. h. strebt der Quotient (4) gegen 0 oder nicht? In dieser Richtung hat Herr Sierpiński (*) 1906 die Grenzen des Wissens sehr erweitert; er bewies nämlich nicht nur

$$\lim_{x=\infty} \frac{A(x) - \pi x}{\sqrt{x}} = 0, \tag{5}$$

sondern sogar die Relation

$$A(x) = \pi x + O(\sqrt[3]{x}). \tag{6}$$

(*) *O pewnem zagadnieniu z rachunku funkcyj asymptotycznych* [Prace matematyczno-fizyczne, Bd. XVII, S. 77-118].

Ich stelle mir nun in meiner vorliegenden Arbeit die Aufgabe, für den Sierpińskischen Satz (6), der gewiss nicht vielen Mathematikern dem Wortlaut nach bekannt ist, und dessen polnisch geschriebenen 40 Seiten langen Beweis gewiss nur sehr wenige Mathematiker gelesen haben, einen neuen, ganz anderen Beweis zu geben.

Herr Sierpiński verwendet eine Methode von Voronoï, die dieser zuerst bei einem anderen Gitterpunktproblem erprobt hatte. Ich benutze eine Methode, welche Herr Pfeiffer (*) 1886 für zwei andere Gitterpunktprobleme erfunden hat. Allerdings hat Herr Pfeiffer durch Verwechselung der Begriffe « Limes » und « gleichmässiger Limes in Bezug auf einen Parameter » seine beiden Ziele nicht erreicht, und man muss, damit seine Methode anwendbar ist, sie von Anfang an umarbeiten, d. h. in die Hilfssätze Gleichmässigkeit in Bezug auf einen Parameter hineinbringen, was mir durch Benutzung neuerer Gedanken aus der Theorie der Fourierschen Reihen gelungen ist. Ich kann also (was ich in einer anderwärts (**) erscheinenden Abhandlung auseinandersetze) mit dem Pfeifferschen Ansatz dessen beide Behauptungen (und sogar in beiden Richtungen mehr) beweisen, sowie bestimmte andere neue Gitterpunktsätze beweisen. Z. B. finde ich bei jeder Ellipsenschar

$$\alpha u^2 + \beta u v + \gamma v^2 \leqq x,$$

wo α, β, γ ganz sind, $-\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, $\alpha > 0$ ist, für die Anzahl der Gitterpunkte

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} x + O(\sqrt[3]{x}).$$

Dies enthält den Sierpińskischen Satz (6) als Spezialfall, und ich will heute (für einen ganz ohne Vorkenntnisse aus der analytischen Zahlentheorie gedachten Leser) aus jener in ihrer Allgemeinheit (***) recht komplizierten

(*) *Über die Periodicität in der Teilbarkeit der Zahlen und über die Verteilung der Klassen positiver quadratischer Formen auf ihre Determinanten* [Jahresbericht der Pfeiffer'schen Lehr- und Erziehungs-Anstalt zu Jena über das Schuljahr von Ostern 1885 bis Ostern 1886, S. 1-21].

(**) *Die Bedeutung der Pfeiffer'schen Methode für die analytische Zahlentheorie* [Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse].

(***) Z. B. kommt in meiner grösseren Arbeit auch das obengenannte Gitterpunktproblem bei der Ellipse gar nicht explizit vor, sondern nur ein noch allgemeineres, bei welchem u und v Nebenbedingungen $u \equiv u_0 \pmod{M}$, $v \equiv v_0 \pmod{N}$ unterworfen sind und das Ergebnis $\frac{2\pi}{MN\sqrt{\Delta}} x + O(\sqrt{x})$ lautet.

Untersuchung den Beweis des Sierpinskischen Satzes herauspräparieren.

Nur eine Eigenschaft des Kreises habe ich in dieser Abhandlung zu beweisen; sie liegt aber so tief, dass — zumal ich wie Herr Sierpiński im Bereich der reellen (*) Analysis verbleibe — der Leser keinen kurzen Beweis erwarten darf.

Von den Hilfssätzen des ersten Paragraphen sind manche bekannt; wegen genauerer Angaben hierüber verweise ich auf meine grössere Arbeit.

§ 1.

Hilfssätze über $\varphi_m(u)$.

Es werde für jedes ganze $m \geqq 1$ die Funktion des reellen u

$$\varphi_m(u) = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{m} \cos 2\nu\pi u$$

betrachtet. Sie ist stetig, gerade und hat die Periode 1. Für ganzes g ist also bei beliebigem u

$$\varphi_m(g+u) = \varphi_m(g-u) = \varphi_m(u).$$

Für nicht ganzes u ist

$$\varphi_m(u) = \frac{\sin(2m+1)\pi u}{\sin \pi u}.$$

(*) Übrigens habe ich kürzlich in meiner Arbeit *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen* [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1912, S. 687-771] u. a. für den Satz

$$A(x) \quad \pi x + O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$$

mit jedem $\varepsilon > 0$ einen verhältnismässig kurzen Beweis durch Anwendung der Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln gegeben. Dieser Satz geht nicht ganz so weit wie der Sierpińskische Satz (6), enthält aber die Relation (5) reichlich. Der genannte Satz wird dort nicht direkt bewiesen, sondern als Spezialfall eines viel allgemeineren hergeleitet. Den direkten Beweis setze ich in einer gleichzeitig erscheinenden Arbeit auseinander: *Über einen Satz des Herrn Sierpiński* [Giornale di Matematiche].

Ferner ist offenbar

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\,du = \frac{1}{2}, \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{1} \varphi_m(u)\,du = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Für jedes u ist

$$|\varphi_m(u)| \leqq 1 + 2m \leqq 3m. \tag{8}$$

Für $0 < u \leqq \frac{1}{2}$ ist $\left(\text{weil } \frac{\sin \pi u}{\pi u} \text{ für } 0 < u \leqq \frac{1}{2} \text{ beständig abnimmt, also } \geqq \frac{2}{\pi} \text{ ist}\right)$

$$|\varphi_m(u)| \leqq \frac{1}{\sin \pi u} \leqq \frac{1}{2u}. \tag{9}$$

Hilfssatz 1: *Für* $0 < \vartheta \leqq \frac{1}{2}$ *ist*

$$\left|\int_\vartheta^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\,du\right| < \frac{1}{6m\vartheta}; \tag{10}$$

für $\frac{1}{2} \leqq \vartheta < 1$ *ist*

$$\left|\int_\vartheta^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\,du\right| < \frac{1}{6m(1-\vartheta)}.$$

Beweis: Aus Symmetriegründen braucht nur (10) bewiesen zu werden. Es sei also, da für $\vartheta = \frac{1}{2}$ die Behauptung trivial ist, $0 < \vartheta < \frac{1}{2}$. Alsdann nimmt $\frac{1}{\sin \pi u}$ im Intervall $\vartheta \leqq u \leqq \frac{1}{2}$ beständig ab; wegen

$$\varphi_m(u) = (2m+1)\pi \sin (2m+1)\pi u \frac{1}{(2m+1)\pi \sin \pi u}$$

ist also nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$\int_\vartheta^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\,du = \frac{1}{(2m+1)\pi \sin \pi \vartheta} \int_\vartheta^{\xi} (2m+1)\pi \sin (2m+1)\pi u\,du \qquad \left(\vartheta \leqq \xi \leqq \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{(2m+1)\pi \sin \pi\vartheta}\left(-\cos (2m+1)\pi\xi + \cos (2m+1)\pi\vartheta\right),$$

$$\left|\int_\vartheta^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\,du\right| < \frac{1}{2m\pi \sin \pi\vartheta} \cdot 2 < \frac{1}{m\pi \cdot 2\vartheta} < \frac{1}{6m\vartheta}.$$

Hilfssatz 2: *Für* $0 \leqq \vartheta_1 \leqq 1,\ 0 \leqq \vartheta_2 \leqq 1$ *ist*

$$\left| \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \varphi_m(u)\, du \right| \leqq 4.$$

Beweis: Es ist hinreichend, für $0 \leqq \vartheta \leqq 1$

$$\left| \int_0^{\vartheta} \varphi_m(u)\, du \right| \leqq 2$$

zu beweisen; denn alsdann folgt aus

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = \int_0^{\vartheta_2} - \int_0^{\vartheta_1}$$

sofort die Behauptung.

1) Es sei $0 \leqq \vartheta \leqq \frac{1}{3m}$. Dann ist nach (8)

$$\left| \int_0^{\vartheta} \varphi_m(u)\, du \right| \leqq \frac{1}{3m} \cdot 3m = 1. \tag{11}$$

2) Es sei $\frac{1}{3m} < \vartheta \leqq \frac{1}{2}$. Dann ist nach (7) und (10)

$$\left| \int_0^{\vartheta} \varphi_m(u)\, du \right| = \left| \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, du - \int_{\vartheta}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, du \right| < \frac{1}{2} + \frac{1}{6m\frac{1}{3m}} = 1. \tag{12}$$

3) Es sei $\frac{1}{2} < \vartheta \leqq 1$. Dann ist nach (7), (11) und (12)

$$\left| \int_0^{\vartheta} \varphi_m(u)\, du \right| = \left| \int_0^{1} \varphi_m(u)\, du - \int_{\vartheta}^{1} \varphi_m(u)\, du \right| \leqq 1 + \left| \int_0^{1-\vartheta} \varphi_m(u)\, du \right| \leqq 2.$$

Hilfssatz 3: *Es ist*

$$\int_0^1 |\varphi_m(u)|\, du \leqq 3 + \log m.$$

Beweis: Es ist nach (8) und (9)

$$\int_0^1 |\varphi_m(u)|\, du = 2\int_0^{\frac{1}{2}} |\varphi_m(u)|\, du \leqq 2\int_0^{\frac{1}{2m}} 3\, m\, du + 2\int_{\frac{1}{2m}}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{2u} = 3 + \log m.$$

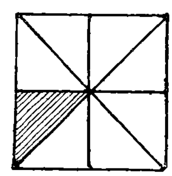
Hilfssatz 4: *Es seien* λ *und* μ *ganze Zahlen* $\gtreqless 0$; *es sei* $0 \leqq x_1 < x_2$. *Der Kreisring* $x_1 \leqq u^2 + v^2 \leqq x_2$ *möge mit dem Quadrat* $\lambda \leqq u \leqq \lambda + 1$, $\mu \leqq v \leqq \mu + 1$ *das Gebiet* G *gemeinsam haben. Dann ist*

$$\left| \iint_G \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv \right| \leqq 24. \tag{13}$$

Beweis: Wenn G gar nicht vorhanden ist, ist nichts zu beweisen. Wenn G das ganze Quadrat ist, ist

$$\iint_G \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv = \int_\lambda^{\lambda+1} \varphi_m(u)\, du \,.\, \int_\mu^{\mu+1} \varphi_m(v)\, dv = 1,$$

also (13) richtig. Eines Beweises bedarf also nur der Fall, dass G vorhanden ist, ohne das ganze Quadrat zu umfassen. Ich zerlege dann das Quadrat durch die Mittellinien $u = \lambda + \frac{1}{2}$, $v = \mu + \frac{1}{2}$ und die Diagonalen $v - \mu = u - \lambda$ und $v - \mu = 1 - u + \lambda$ in acht rechtwinklige Dreiecke. G zerfällt dadurch in ein bis acht Teilgebiete, deren jedes nach eventueller Hinzufügung von geraden Strecken (was ja den Wert des Doppelintegrals nicht ändert) sowohl die Gestalt



$$u_0 \leqq u \leqq u_1, \quad g_1(u) \leqq v \leqq g_2(u)$$

als auch die Gestalt

$$v_0 \leqq v \leqq v_1, \quad f_1(v) \leqq u \leqq f_2(v)$$

hat, wo $g_1(u)$, $g_2(u)$, $f_1(v)$, $f_2(v)$ stetig sind. Der Hilfssatz 4 wird aus Symmetriegründen bewiesen sein, wenn es gelingt zu beweisen, dass für ein dem schraffierten Dreieck angehöriges Gebiet H, welches obige beiden Gestalten hat,

$$\iint \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv \,| \leqq 3 \tag{14}$$

ist. Es ist

$$\iint_H \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,du\,dv = \int_{u_0}^{u_1} \varphi_m(u)\,du \int_{g_1(u)}^{g_2(u)} \varphi_m(v)\,dv, \tag{15}$$

wo

$$\lambda \leqq u_0 \leqq u_1 \leqq \lambda + \frac{1}{2}, \quad u - \lambda \leqq g_1(u) - \mu \leqq g_2(u) - \mu \leqq \frac{1}{2}$$

ist. Nach Hilfssatz 1 ist für $u_0 < u \leqq u_1$

$$\left|\int_{g_1(u)}^{g_2(u)} \varphi_m(v)\,dv\right| = \left|\int_{g_1(u)-\mu}^{g_2(u)-\mu} \varphi_m(v)\,dv\right| < \left|\int_{g_1(u)-\mu}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(v)\,dv\right| + \left|\int_{g_2(u)-\mu}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(v)\,dv\right|$$

$$< \frac{1}{6m(g_1(u)-\mu)} + \frac{1}{6m(g_2(u)-\mu)} \leqq \frac{1}{6m(u-\lambda)} + \frac{1}{6m(u-\lambda)}$$

$$= \frac{1}{3m(u-\lambda)}; \tag{16}$$

nach dem Hilfssatz 2 ist für $u_0 \leqq u \leqq u_1$

$$\left|\int_{g_1(u)}^{g_2(u)} \varphi_m(v)\,dv\right| = \left|\int_{g_1(u)-\mu}^{g_2(u)-\mu} \varphi_m(v)\,dv\right| \leqq 4. \tag{17}$$

Aus (8), (9), (15), (16) und (17) ergiebt sich nun

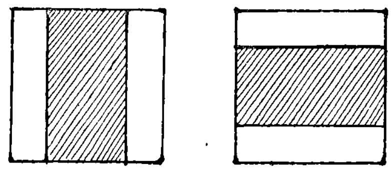
$$\left|\iint_H \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,du\,dv\right| \leqq \int_{u_0}^{u_1} \left|\varphi_m(u)\right| \operatorname{Min.}\left(\frac{1}{3m(u-\lambda)}, 4\right) du$$

$$\leqq \int_{\lambda}^{\lambda+\frac{1}{2}} \left|\varphi_m(u)\right| \operatorname{Min.}\left(\frac{1}{3m(u-\lambda)}, 4\right) du \leqq \int_{\lambda}^{\lambda+\frac{1}{6m}} 3m \,.\, 4\,du + \int_{\lambda+\frac{1}{6m}}^{\lambda+\frac{1}{2}} \frac{1}{2(u-\lambda)} \frac{du}{3m(u-\lambda)}$$

$$< 12m \,.\, \frac{1}{6m} + \frac{1}{6m} \int_{\lambda+\frac{1}{6m}}^{\infty} \frac{du}{(u-\lambda)^2} = 2 + \frac{1}{6m} \frac{1}{\frac{1}{6m}} = 3;$$

damit ist (14), also der Hilfssatz 4 bewiesen.

Hilfssatz 5: *Es seien* λ *und* μ *ganze Zahlen* $\gtrless 0$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. *In dem Quadrat* $\lambda \leqq \mu \leqq \lambda + 1$, $\mu \leqq v \leqq \mu + 1$ *liege ein Flächenstück* G, *das sich durch einen geradlinigen Schnitt in zwei Teile* G_1 *und* G_2 *mit folgenden Eigenschaften zerschneiden lasse.* G_1 *habe mindestens eine der beiden Gestalten: Erstens*



$$v_0 \leqq v \leqq v_1, \quad f_1(v) \leqq u \leqq f_2(v),$$

wo $f_1(v)$ *und* $f_2(v)$ *für* $v_0 \leqq v \leqq v_1$ *stetig sind und*

$$\lambda + \varepsilon \leqq f_1(v) \leqq f_2(v) \leqq \lambda + 1 - \varepsilon$$

ist; zweitens

$$u_0 \leqq u \leqq u_1, \quad g_1(u) \leqq v \leqq g_2(u),$$

wo $g_1(u)$ *und* $g_2(u)$ *für* $u_0 \leqq u \leqq u_1$ *stetig sind und*

$$\mu + \varepsilon \leqq g_1(u) \leqq g_2(u) \leqq \mu + 1 - \varepsilon$$

ist. Über G_2 *werden dieselben Annahmen gemacht. Jedes der beiden Gebiete* G_1 *und* G_2 *gehört infolgedessen mindestens einem der beiden schraffierten Rechtecke an. Dann ist*

$$\left| \iint_G \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, d\,u\, d\,v \right| \leqq \frac{6 + 2 \log m}{3\,m} \cdot \frac{1}{\varepsilon}. \tag{18}$$

Beweis: Es habe G_1 z. B. die zweite Gestalt; es genügt aus Symmetriegründen, diesen Fall zu betrachten. Dann ist

$$\iint_{G_1} \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, d\,u\, d\,v = \int_{u_0}^{u_1} \varphi_m(u)\, d\,u \int_{g_1(u)}^{g_2(u)} \varphi_m(v)\, d\,v;$$

nach Hilfssatz 1 ist für jedes u der Strecke $u_0 \leqq u \leqq u_1$

$$\left| \int_{g_1(u)}^{g_2(u)} \varphi_m(v)\, d\,v \right| = \left| \int_{g_1(u)-\mu}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(v)\, d\,v - \int_{g_2(u)-\mu}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(v)\, d\,v \right|$$

$$< \frac{1}{6\,m\,\varepsilon} + \frac{1}{6\,m\,\varepsilon} = \frac{1}{3\,m\,\varepsilon};$$

hieraus in Verbindung mit Hilfssatz 3 folgt

$$\left|\iint\limits_{G_1} \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,d\,u\,d\,v\right| \leqq \int\limits_{u_0}^{u_1} \left|\varphi_m(u)\right| \left|\int\limits_{g_1(u)}^{g_2(u)} \varphi_m(v)\,d\,v\right| d\,u$$

$$\leqq \int\limits_{u_0}^{u_1} \varphi_m(u) \left| \frac{d\,u}{3\,m\,\varepsilon} \leqq \frac{1}{3\,m\,\varepsilon} \int\limits_0^1 \varphi_m(u)\,d\,u \leqq \frac{3+\log m}{3\,m\,\varepsilon}. \right.$$

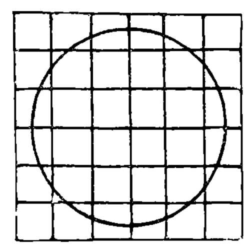
Dasselbe ergiebt sich für G_2, und der Hilfssatz 5 ist bewiesen.

Es bezeichne jetzt dauernd $A(x)$ (wie in der Einleitung) für jedes $x > 0$ die Anzahl der Gitterpunkte des Kreises $u^2 + v^2 \leqq x$, den ich kurz den Kreis K nennen will.

Hilfssatz 6: *Es sei $x > 0$, aber nicht ganz. Dann ist*

$$\lim_{m=\infty} \iint\limits_{K} \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,d\,u\,d\,v = A(x).$$

Beweis: Für jedes dem Kreise K voll angehörige Gitterquadrat Q ist

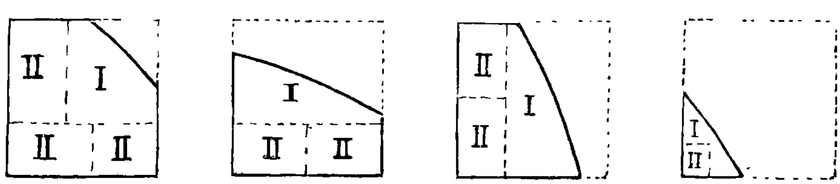


$$\iint\limits_{Q} \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,d\,u\,d\,v = \int\limits_0^1 \varphi_m(u)\,d\,u \int\limits_0^1 \varphi_m(v)\,d\,v = 1,$$

also

$$\lim_{m=\infty} \iint\limits_{Q} \varphi_n(u)\,\varphi_m(v)\,d\,u\,d\,v = 1.$$

Der Beitrag jedes nicht voll, sondern nur teilweise dem Kreise K angehörigen Gitterquadrats kann, weil auf dem Rande des Kreises nach Voraussetzung kein Gitterpunkt liegt, nur eine der folgenden vier Gestalten haben:



Diese vier Figuren beziehen sich auf den Fall, dass das Quadrat der Viertelebene $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ angehört; in den anderen drei Viertelebenen ist die Gestalt dieselbe; nur sind die Figuren zu drehen. Ich zeichne nun die in den Figuren markierten Hilfslinien und wende dann jedesmal auf das Gebiet I (zu dem es natürlich ein passendes ε giebt) den Hilfssatz 5 an (der viel schärfer ist, als für den gegenwärtigen Zweck erforderlich ist); dann ist jedesmal (weil die rechte Seite von (18) für $m = \infty$ gegen 0 strebt)

$$\lim_{m=\infty} \int\int_I \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv = 0.$$

Für jedes der Gebiete II, welche Rechtecke mit genau einem Gittereckpunkt sind, ist wegen

$$\int\int_{II} \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv - \int_0^{\vartheta} \varphi_m(u)\, du \,.\int_0^{\vartheta'} \varphi_m(v) dv \qquad (0 < \vartheta < 1, \quad 0 < \vartheta' < 1)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \quad \int_{\vartheta}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, du\right) \left(\frac{1}{2} - \int_{\vartheta'}^{\frac{1}{2}} \varphi_m(v)\, dv\right)$$

nach Hilfssatz 1

$$\lim_{m=\infty} \int\int_{II} \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Daher liefert das zerschnittene Gitterquadrat bezw. in den vier Fällen $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, also stets den vierten Teil der Anzahl der Gittereckpunkte, die es zum Gebiet K beiträgt. Insgesamt ist also

$$\lim_{m=\infty} \int\int_K \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv$$

vorhanden und genau $A(x)$, da jeder innere Gitterpunkt genau viermal den Beitrag $\frac{1}{4}$ geliefert hat.

Hilfssatz 7: *Es giebt eine absolute Konstante c_1, so dass die Anzahl $U(n)$ der Lösungen von*

$$u^2 + v^2 = n \tag{1}$$

für jedes $n \geqq 1$ kleiner als $c_1 n^{\frac{1}{3}}$ ist.

Beweis: Es sei $T(n)$ die Anzahl der positiven ganzen Teiler von n. Bekanntlich ist, wenn die Zerlegung von $n \geqq 2$ in Potenzen verschiedener

Primzahlen

$$n = \prod_{p \mid n} p^{\nu}$$

lautet,

$$T(n) = \prod_{p \mid n} (\nu + 1),$$

also

$$\frac{T(n)}{n^{\frac{1}{3}}} = \prod_{p \mid n} \frac{\nu + 1}{p^{\frac{\nu}{3}}}.$$

Für $p > 8$ ist nun

$$\frac{\nu + 1}{p^{\frac{\nu}{3}}} < \frac{\nu + 1}{2^{\nu}} \leqq 1;$$

daher ist für alle $n \geqq 2$

$$\frac{T(n)}{n^{\frac{1}{3}}} \leqq \prod_{\substack{p \mid n \\ p \leqq 7}} \frac{\nu + 1}{p^{\frac{\nu}{3}}};$$

bei festem $p = 2, 3, 5, 7$ liegt der Quotient $\frac{\nu + 1}{p^{\frac{\nu}{3}}}$ offenbar unterhalb einer von $\nu \geqq 0$ unabhängigen Schranke; daher ist für $n \geqq 1$ bei passender Wahl einer absoluten (*) Konstanten c_2

$$T(n) \leqq c_2 \, n^{\frac{1}{3}}.$$

Andererseits ist bekanntlich

$U(n) = 4 \times$ (Anzahl der Teiler $4m + 1$ von n minus Anzahl der Teiler

$$4m + 3 \text{ von } n) \leqq 4\, T(n);$$

daher ist für alle $n \geqq 1$

$$U(n) \leqq 4 c_2 \, n^{\frac{1}{3}} < c_1 \, n^{\frac{1}{3}}.$$

Hilfssatz 8: *Es giebt ein c_3 mit folgender Eigenschaft. Zu jedem ganzen $y \geqq 1$ giebt es ein $m_0 = m_0(y)$ derart, dass für alle $m \geqq m_0$ und $y < x \leqq y + 1$, wenn R den Kreisring $y \leqq u^2 + v^2 \leqq x$ bezeichnet,*

$$\left| \iint_R \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv \right| < c_3 \, y^{\frac{1}{3}}$$

ist.

(*) Ich werde in der Folge stillschweigend mit $c_3, c_4, \ldots$ absolute Konstanten bezeichnen.

Der springende Punkt ist, dass m_0 von x unabhängig ist.

Beweis: Ich nenne R' den (von x unabhängigen, aber R enthaltenden) Kreisring $y \leqq u^2 + v^2 \leqq y + 1$. R' hat mit einer endlichen Anzahl von Gitterquadraten der Ebene Gebiet (*) gemeinsam. Jedes Gitterquadrat, das ein Gebiet mit R' gemeinsam hat, ist entweder so beschaffen, dass R' mindestens einen seiner Eckpunkte enthält oder nicht (**). Die Anzahl der Gitterquadrate erster Art, von denen R' also mindestens einen Eckpunkt enthält, ist offenbar

$$\leqq 4\, U(y) + 4\, U(y+1),$$

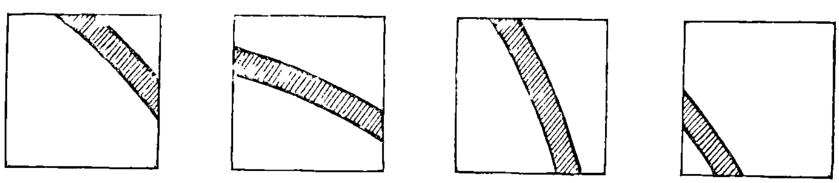
da das Gebiet R' genau $U(y) + U(y+1)$ Gitterpunkte enthält und jeder zu genau vier Gitterquadraten der Ebene gehört. Jene Anzahl der Gitterquadrate erster Art ist also nach Hilfssatz 7

$$< 4\, c_1\, y^{\frac{1}{3}} + 4\, c_1\, (y+1)^{\frac{1}{3}} \leqq 4\, c_1\, y^{\frac{1}{3}} + 4\, c_1\, (2\, y)^{\frac{1}{3}} = c_4\, y^{\frac{1}{3}}.$$

Das Doppelintegral über das gemeinsame Gebiet von R mit einem dieser Gitterquadrate ist nach Hilfssatz 4 absolut genommen $\leqq 24$. Das Doppelintegral über das gemeinsame Gebiet von R mit den Quadraten erster Art ist also

$$< 24\, c_4\, y^{\frac{1}{3}} = c_5\, y^{\frac{1}{3}}.$$

Nun betrachte ich ein beliebiges derjenigen Quadrate, die mit R' Gebiet gemeinsam haben, aber ihre vier Eckpunkte von R' frei haben. Das gemeinsame Gebiet von R' mit einem solchen Quadrat hat, wenn es etwa im positiven Quadranten $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ liegt (sonst sind die Figuren nur zu drehen) eine der vier Gestalten



Da das gemeinsame Gebiet von R mit einem solchen Quadrat im schraffierten Teil liegt, existiert im Sinne des Hilfssatzes 5 ein von x unabhän-

(*) « Gebiet » bedeutet einfach: mindestens einen Punkt.

(**) Man beachte, dass diese Klassifikation von x unabhängig ist.

giges ε; der Beitrag zum Doppelintegral strebt also gleichmässig in x bei unendlich wachsendem m gegen Null.

Für $m \geqq m_0 = m_0(y)$ und $y < x \leqq y+1$ ist daher

$$\left| \iint\limits_R \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, d\,u\, d\,v \right| < c_5\, y^{\frac{1}{3}} + 1 \leqq (c_5+1)\, y^{\frac{1}{3}} = c_3\, y^{\frac{1}{3}}.$$

Hilfssatz 9: *Es giebt ein c_6 mit folgender Eigenschaft. Wenn $Z > 1$ fest ist, so ist für alle hinreichend grossen m, d. h. für $m \geqq m_0 = m_0(Z)$ und alle x der Strecke $1 \leqq x \leqq Z$*

$$\left| \iint\limits_K \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, d\,u\, d\,v - A(x) \right| < c_6\, x^{\frac{1}{3}}. \tag{19}$$

Der springende Punkt ist, dass m_0 von x unabhängig ist.

Beweis: Es ist hinreichend, die Existenz einer solchen absoluten Konstanten c_6 zu zeigen, dass (19) bei festem ganzen $y \geqq 1$ für $m \geqq m_0(y)$ und $y \leqq x < y+1$ richtig ist.

Nach Hilfssatz 6, wenn er auf $y + \frac{1}{2}$ statt des damaligen x angewendet wird, ist für $m \geqq m_1(y)$

$$\left| \iint\limits_{u^2+v^2 \leqq y+\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, d\,u\, d\,v - A\left(y+\frac{1}{2}\right) \right| < 1;$$

übrigens ist wegen $y \leqq x < y+1$

$$A\left(y+\frac{1}{2}\right) = A(y) = A(x).$$

Nach Hilfssatz 8 ist für $m \geqq m_2(y)$

$$\left| \iint\limits_{u^2+v^2 \leqq y+\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, d\,u\, d\,v - \iint\limits_{u^2+v^2 \leqq y} \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, d\,u\, d\,v \right| < c_3\, y^{\frac{1}{3}}$$

und für $m \geqq m_3(y)$ gleichmässig in x

$$\left| \iint\limits_K \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, d\,u\, d\,v - \iint\limits_{u^2+v^2 \leqq y} \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, d\,u\, d\,v \right| < c_3\, y^{\frac{1}{3}},$$

Daher ist für $m \geqq$ Max. $(m_1, m_2, m_3) = m_0(y)$

$$\left| \iint\limits_K \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,du\,dv - A(x) \right| < 2c_3\,y^{\frac{1}{3}} + 1 \leqq (2c_3+1)\,x^{\frac{1}{3}} = c_6\,x^{\frac{1}{3}}.$$

Hilfssatz 10: *Es giebt ein c_7 mit folgender Eigenschaft. Wenn $Z > 1$ fest ist, so ist für alle hinreichend grossen m, d. h. für $m \geqq m_0(Z)$ und $1 \leqq x \leqq Z$*

$$\left| \iint\limits_K \varphi_m(u)\,du\,dv - \pi x \right| < c_7\,x^{\frac{1}{4}}. \tag{20}$$

Beweis: Es ist

$$\iint\limits_K \varphi_m(u)\,du\,dv = \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \varphi_m(u)\,2\sqrt{x-u^2}\,du = 4\int\limits_0^{\sqrt{x}} \varphi_m(u)\sqrt{x-u^2}\,du. \tag{21}$$

Ich behaupte zunächst, dass für $x \geqq 1$

$$\lim_{m=\infty} \int\limits_0^{[\sqrt{x}]} \varphi_m(u)\sqrt{x-u^2}\,du = \sum_{n=0}^{[\sqrt{x}]} \sqrt{x-n^2} - \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x-[\sqrt{x}]^2} \tag{22}$$

ist, und dass (22) bei festem $Z > 1$ für $1 \leqq x \leqq Z$ gleichmässig gilt. Hierfür ist natürlich hinreichend, bei festen g, Z, wo $g \geqq 0$ ganz und $(g+1)^2 \leqq Z$ ist, für $(g+1)^2 \leqq x \leqq Z$ gleichmässig in x

$$\lim_{m=\infty} \int\limits_g^{g+1} \varphi_m(u)\sqrt{x-u^2}\,du = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x-g^2} + \sqrt{x-(g+1)^2}\right) \tag{23}$$

zu beweisen. Nun ist nach (7)

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_g^{g+1} \varphi_m(u)\sqrt{x-u^2}\,du - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x-g^2} + \sqrt{x-(g+1)^2}\right) \\ &= -\int\limits_g^{g+\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\left(\sqrt{x-g^2} - \sqrt{x-u^2}\right)du + \int\limits_{g+\frac{1}{2}}^{g+1} \varphi_m(u)\left(\sqrt{x-u^2} - \sqrt{x-(g+1)^2}\right)du. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Es sei $m \geqq 3$, und es werde $\delta = \delta(m) = m^{-\frac{3}{4}}$ gesetzt, was zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt. Dann ergiebt sich einzeln das folgende. Erstens ist wegen (8)

$$\left| \int_g^{g+\delta} \varphi_m(u) \left(\sqrt{x-g^2} - \sqrt{x-u^2}\right) du \right| \leqq \delta \,.\, 3m \left(\sqrt{x-g^2} - \sqrt{x-(g+\delta)^2}\right)$$

$$= \delta \,.\, 3m \frac{(g+\delta)^2 - g^2}{\sqrt{x-g^2} + \sqrt{x-(g+\delta)^2}} < 3\,\delta\, m \frac{2\,g\,\delta + \delta^2}{\sqrt{(g+1)^2 - g^2} + 0} < 3\,\delta\, m \frac{2\,g\,\delta + \delta}{\sqrt{2\,g+1}}$$

$$= 3\sqrt{2\,g+1} \,.\, \delta^2\, m = 3\sqrt{2\,g+1} \,.\, m^{-\frac{1}{2}},$$

was von x unabhängig ist und für $m = \infty$ gegen 0 strebt. Zweitens ist nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$\int_{g+\delta}^{g+\frac{1}{2}} \varphi_m(u) \left(\sqrt{x-g^2} - \sqrt{x-u^2}\right) du$$

$$= \left(\sqrt{x-g^2} - \sqrt{x - \left(g+\frac{1}{2}\right)^2}\right) \int_{g+\xi}^{g+\frac{1}{2}} \varphi_m(u)\, du \qquad \left(\delta \leqq \xi \leqq \frac{1}{2}\right),$$

also nach Hilfssatz 1

$$\left| \int_{g+\delta}^{g+\frac{1}{2}} \varphi_m(u) \left(\sqrt{x-g^2} - \sqrt{x-u^2}\right) du \right| < \sqrt{Z} \frac{1}{6\,m\,\xi} \leqq \sqrt{Z} \frac{1}{6\,m\,\delta} = \frac{\sqrt{Z}}{6\,m^{\frac{1}{4}}},$$

was von x unabhängig ist und für $m = \infty$ gegen 0 strebt. Drittens ist analog hierzu

$$\left| \int_{g+\frac{1}{2}}^{g+1-\delta} \varphi_m(u) \left(\sqrt{x-u^2} - \sqrt{x-(g+1)^2}\right) du \right| < \sqrt{Z} \frac{1}{6\,m\,\delta} = \frac{\sqrt{Z}}{6\,m^{\frac{1}{4}}}.$$

Viertens ist analog zur obigen Behandlung der Strecke g bis $g+\delta$

$$\left| \int\limits_{g+1-\delta}^{g+1} \varphi_m(u) \left(\sqrt{x-u^2} - \sqrt{x-(g+1)^2}\right) du \right|$$

$$\leqq \delta \,.\, 3m \left(\sqrt{x-(g+1-\delta)^2} - \sqrt{x-(g+1)^2}\right)$$

$$\leqq 3\,\delta\, m \frac{(g+1)^2-(g+1-\delta)^2}{\sqrt{(g+1)^2-(g+1-\delta)^2}+0} = 3\,\delta\, m \sqrt{(g+1)^2-(g+1-\delta)^2}$$

$$< 3\,\delta\, m \sqrt{2(g+1)\delta} = 3\sqrt{2(g+1)} \,.\, m\,\delta^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{2(g+1)}\,.\, m^{-\frac{1}{8}},$$

was von x frei ist und für $m=\infty$ gegen 0 strebt.

Aus der Identität (24) und diesen vier Hilfsbetrachtungen ergiebt sich, dass (23) gleichmässig in dem oben angegebenen Sinne, also (22) bei festem $Z>1$ gleichmässig für $1 \leqq x \leqq Z$ gilt.

Ferner ist nach Hilfssatz 2 und dem zweiten Mittelwertsatz

$$\left| \int\limits_{[\sqrt{x}]}^{\sqrt{x}} \varphi_m(u) \sqrt{x-u^2}\, du \right| \leqq 4\sqrt{x-[\sqrt{x}]^2}. \tag{25}$$

Für $m \geqq m_1(Z)$ ist also nach (22) und (25) gleichmässig in x (wo $1 \leqq x \leqq Z$ ist)

$$\left| \int\limits_0^{\sqrt{x}} \varphi_m(u) \sqrt{x-u^2}\, du - \left(\sum_{n=0}^{[\sqrt{x}]} \sqrt{x-n^2} - \frac{1}{2}\sqrt{x} \right) \right| < \frac{9}{2}\sqrt{x-[\sqrt{x}]^2}+1$$

$$< \frac{9}{2}\sqrt{x-(\sqrt{x}-1)^2}+1 = \frac{9}{2}\sqrt{2\sqrt{x}-1}+1$$

$$< \frac{9}{\sqrt{2}} x^{\frac{1}{4}} + 1 \leqq \left(\frac{9}{\sqrt{2}}+1\right) x^{\frac{1}{4}} < 8\, x^{\frac{1}{4}},$$

also nach (21)

$$\left| \iint\limits_K \varphi_m(u)\, du\, dv - 4\left(\sum_{n=0}^{[\sqrt{x}]} \sqrt{x-n^2} - \frac{1}{2}\sqrt{x} \right) \right| < 32\, x^{\frac{1}{4}}. \tag{26}$$

Nun lautet ein bekannter Satz (*), der viel weniger besagt als die Eulersche Summenformel: Es sei $y \geqq 2$ und ganz, $f(u)$ für $0 \leqq u \leqq y$ zweimal differentiierbar und $f''(u)$ dort negativ und beständig abnehmend. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{y-1} f(n) - \int_0^{y-1} f(u)\, du - \frac{1}{2} f(0) - \frac{1}{2} f(y-1) < f'(0) - f'(y). \qquad (27)$$

(27) wende ich an auf

$$f(u) = \sqrt{x - u^2}, \quad y = [\sqrt{x}] - 1, \quad x \geqq 9.$$

Wegen der für $0 \leqq u < \sqrt{x}$ giltigen Relationen

$$f'(u) = -\frac{u}{\sqrt{x-u^2}}, \quad f''(u) = -\frac{x}{(x \quad u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(*) Direkter Beweis: Für jedes ganze n der Strecke $0 < n \leq y - 2$ ist im Intervall $n < u < n+1$

$$f(u) - \frac{1}{2} f'(u) = f(n) + (u-n) f'(n) + \frac{(u-n)^2}{2} f''(\xi) - \frac{1}{2} f'(n) - \frac{u-n}{2} f''(\xi_1)$$

$$(n \leqq \xi < u, \quad n \leqq \xi_1 < u),$$

also wegen $|f''(\xi)| \leq -f''(n+1)$ und $|f''(\xi_1)| \leq -f''(n+1)$

$$\int_n^{n+1} \left(f(u) - \frac{1}{2} f'(u)\right) du = f(n) + \frac{1}{2} f'(n) + \frac{\Theta}{6} f''(n+1) - \frac{1}{2} f'(n) - \frac{\Theta_1}{4} f''(n+1)$$

$$(0 < \Theta \leq 1, \quad 0 < \Theta_1 \leq 1)$$

$$= f(n) + \frac{\eta}{4} f''(n+1) \qquad (|\eta| < 1),$$

$$\int_0^{y-1} f(u)\, du - \frac{1}{2} f(y-1) + \frac{1}{2} f(0) = \sum_{n=0}^{y-2} \int_n^{n+1} \left(f(u) - \frac{1}{2} f'(u)\right) du$$

$$= \sum_{n=0}^{y-2} f(n) + \frac{\eta_1}{4} \sum_{n=0}^{y-2} f''(n+1) \qquad (|\eta_1| \leq 1).$$

Wegen

$$0 < -\sum_{n=0}^{y-2} f''(n+1) < -\int_0^{y-1} f''(u+1)\, du = f'(1) - f'(y) < f'(0) - f'(y)$$

ist also (27) bewiesen. Auf den rechts noch zulässigen Faktor $\frac{1}{4}$ und andere Verschärfungen kommt es für meinen Zweck gar nicht an.

ist (27) anwendbar und ergiebt

$$\left|\sum_{n=0}^{[\sqrt{x}]-2}\sqrt{x-n^2}-\int_0^{[\sqrt{x}]-2}\sqrt{x-u^2}\,du-\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x-([\sqrt{x}]-2)^2}\right|$$

$$<\frac{[\sqrt{x}]-1}{\sqrt{x-([\sqrt{x}]-1)^2}}=O(\sqrt[4]{x}),$$

$$\sum_{n=0}^{[\sqrt{x}]}\sqrt{x-n^2}+O(\sqrt[4]{x})-\int_0^{\sqrt{x}}\sqrt{x-u^2}\,du+O(\sqrt[4]{x})-\frac{1}{2}\sqrt{x}+O(\sqrt[4]{x})=O(\sqrt[4]{x}),$$

$$\sum_{n=0}^{[\sqrt{x}]}\sqrt{x-n^2}-\frac{1}{2}\sqrt{x}=\int_0^{\sqrt{x}}\sqrt{x-u^2}\,du+O(\sqrt[4]{x})=\frac{\pi}{4}x+O(\sqrt[4]{x}). \tag{28}$$

Mit (26) und (28) ist aber der Hilfssatz 10 bewiesen.

§ 2.

Approximation von $A(x)$ durch eine Summe von Doppelintegralen.

Es ist für jedes $m>0$

$$\varphi_m(u)\,\varphi_m(v)=-1+\varphi_m(u)+\varphi_m(v)+(\varphi_m(u)-1)(\varphi_m(v)-1)$$

$$=-1+\varphi_m(u)+\varphi_m(v)+4\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}\cos 2a\pi u\,\cos 2b\pi v,$$

also mit jedem $x>0$

$$\iint_K\varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,du\,dv=-\iint_K du\,dv+\iint_K\varphi_m(u)\,du\,dv+\iint_K\varphi_m(v)\,du\,dv$$

$$+4\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}\iint_K\cos 2a\pi u\,\cos 2b\pi v\,du\,dv$$

$$=-\pi x+2\iint_K\varphi_m(u)\,du\,dv+4\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}P(x,a,b),$$

wo

$$P(x,a,b)=\iint_K\cos 2a\pi u\cos 2b\pi v\,du\,dv$$

gesetzt ist.

Nach (19), d. h. Hilfssatz 9, und (20), d. h. Hilfssatz 10, ist also bei festem $Z > 1$ für $m \geqq m_0(Z)$ und $1 \leqq x \leqq Z$ gleichmässig in x

$$\left| A(x) - \pi x - 4 \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{m} P(x, a, b) \right| < c_6 x^{\frac{1}{3}} + 2 c_7 x^{\frac{1}{4}} \leqq (c_6 + 2 c_7) x^{\frac{1}{3}} = c_8 x^{\frac{1}{3}}. \tag{29}$$

§ 3.

Hilfssätze über $P(x)$ und $\int P(\xi)\, d\xi$.

Für $x > 0$, $a > 0$, $b > 0$ ist nach Definition

$$P(x, a, b) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \cos 2 a \pi u \, du \int_{-\sqrt{x-u^2}}^{\sqrt{x-u^2}} \cos 2 b \pi v \, dv$$

$$= \frac{1}{b\pi} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \cos 2 a \pi u \sin \left(2 b \pi \sqrt{x - u^2}\right) du \tag{30}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{b\pi} \int_{-1}^{1} \cos \left(2 a \pi \sqrt{x}\, t\right) \sin \left(2 b \pi \sqrt{x} \sqrt{1 - t^2}\right) dt$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{x}}{2 b \pi} \left(\int_{-1}^{1} \sin \left(2 \pi \sqrt{x} \left(a t + b \sqrt{1 - t^2}\right)\right) dt \right. \\ &\qquad \left. - \int_{-1}^{1} \sin \left(2 \pi \sqrt{x} \left(a t - b \sqrt{1 - t^2}\right)\right) dt \right). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Hilfssatz 11: *Für* $\omega > 0$, $0 < \rho \leqq 1$ *ist*

$$\left| \int_{-1}^{1} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \left(\omega \left(\rho t \pm \sqrt{1 - t^2}\right)\right) dt \right| < \frac{8}{\sqrt{\omega}}, \tag{32}$$

$$\left| \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \left(\omega \left(\rho t \pm \sqrt{1 - t^2}\right)\right) dt \right| < \frac{8}{\sqrt{\omega}}. \tag{33}$$

Jede dieser zwei Relationen (32) und (33) stellt vier Behauptungen dar, indem unabhängig cos oder sin, + oder — stehen kann. Auf die Grösse der absoluten Konstanten rechts kommt es gar nicht an; ich habe statt der üblichen c hier numerische Konstanten eingeführt, da die Beweismethode sonst weniger durchsichtig wäre.

Beweis: Für $0 < \omega < 16$ sind die Behauptungen trivial, da der Integrand absolut genommen $\leqq 1$ ist und der Integrationsweg die Länge 2 hat. Es sei also $\omega \geqq 16$.

Es ist nur nötig, (32) und (33) mit dem Pluszeichen zu beweisen; denn, wenn $-t$ statt t geschrieben wird, geht der Ausdruck mit $-\sqrt{1-t^2}$ genau in den Ausdruck mit $+\sqrt{1-t^2}$ über.

1) Ich beginne mit der Herleitung der Relation (32). Die Funktion

$$g(t) = \frac{d}{d\,t}\left(\rho\, t + \sqrt{1-t^2}\right) = \rho - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

nimmt für $-1 < t < 1$ beständig von $+\infty$ zu $-\infty$ ab; ihre Ableitung ist

$$g'(t) = -\frac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und absolut genommen $\geqq 1$. Die Wurzel von $g(t) = 0$ ist

$$\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} = \tau;$$

wegen $0 < \rho \leqq 1$ ist $0 < \tau \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{3}{4}$. Ich setze $\Delta = \frac{1}{\sqrt{\omega}}$; wegen $\omega \geqq 16$ ist $0 < \Delta \leqq \frac{1}{4}$, also $-1 < \tau - \Delta < \tau + \Delta < 1$,

$$\int_{-1}^{1} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \left(\omega\left(\rho\, t + \sqrt{1-t^2}\right)\right) d\,t = \int_{-1}^{\tau-\Delta} + \int_{\tau-\Delta}^{\tau+\Delta} + \int_{\tau+\Delta}^{1} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Hierin ist zunächst

$$|I_2| \leqq \int_{\tau-\Delta}^{\tau+\Delta} d\,t = 2\Delta = \frac{2}{\sqrt{\omega}}.$$

Ferner ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$g(\tau-\Delta)=-\Delta\, g'(\tau-\vartheta\,\Delta)\geqq\Delta \qquad (0<\vartheta<1),$$

also mit Rücksicht auf die im Intervall $-1\leqq t\leqq 1$ exkl. $t=\tau$ giltige Identität

$$\frac{\cos}{\sin}\left(\omega\left(\rho\, t+\sqrt{1-t^2}\right)\right)=\frac{1}{\omega\, g(t)}\,\frac{d}{d\,t}\,\frac{\sin}{-\cos}\left(\omega\left(\rho\, t+\sqrt{1-t^2}\right)\right)$$

nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$|I_1|\leqq\frac{1}{\omega\, g(\tau-\Delta)}\cdot 2\leqq\frac{2}{\omega\Delta}=\frac{2}{\sqrt{\omega}}.$$

Endlich ist analog

$$-g(\tau+\Delta)=-\Delta\, g'(\tau+\Theta\,\Delta)\geqq\Delta \qquad (0<\Theta<1),$$

also

$$|I_3|\leqq\frac{1}{-\omega\, g(\tau+\Delta)}\cdot 2<\frac{2}{\omega\,\Delta}=\frac{2}{\sqrt{\omega}}.$$

Es kommt also heraus:

$$I_1+I_2+I_3\leqq\frac{2}{\sqrt{\omega}}+\frac{2}{\sqrt{\omega}}+\frac{2}{\sqrt{\omega}}=\frac{6}{\sqrt{\omega}}<\frac{8}{\sqrt{\omega}},$$

und (32) ist bewiesen.

2) Die Funktion

$$h(t)=\frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\rho}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{t}{1-t^2}$$

nimmt für $-1<t<1$ beständig von $+\infty$ zu $-\infty$ ab, da ihre Ableitung

$$h'(t)=\frac{\rho\, t\sqrt{1-t^2}-(1+t^2)}{(1-t^2)^2}<0$$

ist; ferner ist

$$\left|h'(t)\right|\geqq\frac{1+t^2-t}{1}\geqq\frac{3}{4}.$$

$h(t)$ verschwindet wie $g(t)$ für $t=\tau$. Wenn Δ die obige Bedeutung hat, ist daher

$$h(\tau-\Delta) \geqq \frac{3}{4}\Delta, \qquad -h(\tau+\Delta) \geqq \frac{3}{4}\Delta.$$

Mit Rücksicht auf die Identität

$$\sqrt{1-t^2}\,{\cos \atop \sin}\left(\omega\left(\rho t+\sqrt{1-t^2}\right)\right) = \frac{1}{\omega\, h(t)}\,\frac{d}{d\,t}{\sin \atop -\cos}\left(\omega\left(\rho t+\sqrt{1-t^2}\right)\right)$$

ist daher nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$\left|\int_{-1}^{\tau-\Delta}\sqrt{1-t^2}\,{\cos \atop \sin}\left(\omega\left(\rho t+\sqrt{1-t^2}\right)\right)dt\right| \leqq \frac{2}{\omega\, h(\tau-\Delta)} \leqq \frac{8}{3\,\omega\,\Delta} = \frac{8}{3\sqrt{\omega}}$$

und

$$\left|\int_{\tau+\Delta}^{1}\right| \leqq \frac{2}{-\omega\, h(\tau+\Delta)} \leqq \frac{8}{3\sqrt{\omega}};$$

ferner ist

$$\left|\int_{\tau-\Delta}^{\tau+\Delta}\right| \leqq 2\Delta = \frac{2}{\sqrt{\omega}};$$

also kommt heraus:

$$\left|\int_{-1}^{1}\right| \leqq \left(\frac{16}{3}+2\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} < \frac{8}{\sqrt{\omega}},$$

womit (33) bewiesen ist.

Hilfssatz 12: *Für* $x>0$, $b \geqq a > 0$ *ist*

$$\left|P(x,a,b)\right| < \frac{3}{2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{3}{2}}}.$$

Beweis: Nach (31) ist, wenn in beiden Integralen $2\pi b\sqrt{x} = \omega$, $\frac{a}{b} = \rho$

gesetzt und (was wegen $\omega > 0$, $0 < \rho \leqq 1$ geht) der erste Teil des Hilfssatzes 11 angewendet wird,

$$\left|P(x, a, b)\right| < \frac{\sqrt{x}}{2b\pi} \cdot 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{2\pi b\sqrt{x}}} = \frac{8}{\pi\sqrt{2\pi}} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{3}{2}}} < \frac{3}{2} \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{3}{2}}}.$$

Hilfssatz 13: *Für* $1 \leqq x < x_1 \leqq 2x$, $b \geqq a \geqq 1$ *ist*

$$\left|\int_x^{x_1} P(\xi, a, b)\, d\xi\right| < 2(x_1 - x) \frac{x^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{3}{2}}} \tag{34}$$

und

$$\left|\int_x^{x_1} P(\xi, a, b)\, d\xi\right| < 2 \frac{x^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{5}{2}}}. \tag{35}$$

Beweis: 1) Nach Hilfssatz 12 ist für $x \leqq \xi \leqq x_1$

$$|P(\xi, a, b)| < \frac{3}{2} \frac{\xi^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{3}{2}}} \leqq \frac{3}{2} \frac{(2x)^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{3}{2}}} < 2 \frac{x^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{3}{2}}};$$

die Weglänge ist $x_1 - x$; also ist (34) bewiesen.

2) Nach (30) ist für $\xi > 0$

$$P(\xi, a, b) = \frac{1}{b\pi} \int_{-\sqrt{\xi}}^{\sqrt{\xi}} \cos 2a\pi u \sin\left(2b\pi\sqrt{\xi - u^2}\right) du,$$

also

$$\int_x^{x_1} P(\xi, a, b)\, d\xi = \frac{1}{b\pi} \int_x^{x_1} d\xi \int_{-\sqrt{\xi}}^{\sqrt{\xi}} \cos 2a\pi u \sin\left(2b\pi\sqrt{\xi - u^2}\right) du$$

$$= \frac{1}{b\pi} \int_{-\sqrt{x_1}}^{\sqrt{x_1}} \cos 2a\pi u\, du \int_{\mathrm{Max.}(x, u^2)}^{x_1} \sin\left(2b\pi\sqrt{\xi - u^2}\right) d\xi$$

$$= \frac{1}{b^2 \pi^2} \int\limits_{-\sqrt{x_1}}^{\sqrt{x_1}} \cos 2\,a\,\pi\,u\,d\,u \Big\{ - \sqrt{\xi - u^2} \cos\left(2\,b\,\pi \sqrt{\xi - u^2}\right)$$

$$+ \frac{\sin\left(2\,b\,\pi\sqrt{\xi - u^2}\right)}{2\,b\,\pi} \Big|_{\xi = \operatorname{Max.}(x, u^2)}^{\xi = x_1}$$

$$= \frac{1}{b^2 \pi^2} \Big(- \int\limits_{-\sqrt{x_1}}^{\sqrt{x_1}} \sqrt{x_1 - u^2} \cos 2\,a\,\pi\,u \cos\left(2\,b\,\pi\sqrt{x_1 - u^2}\right) d\,u$$

$$+ \frac{1}{2\,b\,\pi} \int\limits_{-\sqrt{x_1}}^{\sqrt{x_1}} \cos 2\,a\,\pi\,u \sin\left(2\,b\,\pi\sqrt{x_1 - u^2}\right) d\,u$$

$$+ \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \sqrt{x - u^2} \cos 2\,a\,\pi\,u \cos\left(2\,b\,\pi\sqrt{x - u^2}\right) d\,u$$

$$- \frac{1}{2\,b\,\pi} \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \cos 2\,a\,\pi\,u \sin\left(2\,b\,\pi\sqrt{x - u^2}\right) d\,u \Big).$$

Das zweite und vierte Integral kann ganz primitiv durch $\int\limits_{-\sqrt{x_1}}^{\sqrt{x_1}} d\,u = 2\sqrt{x_1}$ bezw. $\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} d\,u = 2\sqrt{x}$ abgeschätzt werden. Im ersten und dritten Integral werde $u = \sqrt{x_1}\,t$ bezw. $u = \sqrt{x}\,t$ gesetzt, das Produkt $\cos\alpha\ \cos\beta$ durch

$$\frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta)$$

ersetzt und Hilfssatz 11 mit

$$\omega = 2\,\pi\,b\sqrt{x_1} \quad \text{bezw.} \quad 2\,\pi\,b\sqrt{x}, \quad \rho = \frac{a}{b}$$

angewendet. Das giebt

$$\left| \int\limits_{x}^{x_1} P(\xi,\ a,\ b)\,d\,\xi \right| < \frac{1}{b^2\pi^2} \Big(x_1 \frac{8}{\sqrt{2\,\pi\,b\sqrt{x_1}}} + \frac{1}{2\,b\,\pi}\,2\sqrt{x_1}$$

$$+ x \frac{8}{\sqrt{2\,\pi\,b\sqrt{x}}} + \frac{1}{2\,b\,\pi}\,2\sqrt{x} \Big)$$

$$= \frac{1}{b^2\,\pi^2}\left(\left((x_1^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{3}{4}}\right)\frac{8}{\sqrt{2\,\pi}\,\sqrt{b}} + \frac{1}{\pi}\left(x_1^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{b}\right)$$

$$\leqq \frac{1}{b^2\,\pi^2}\left(\left(2^{\frac{3}{4}}\,x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{3}{4}}\right)\frac{8}{\sqrt{2\,\pi}\,\sqrt{b}} + \frac{1}{\pi}\left(2^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{b}\,x^{\frac{1}{4}}\,b^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$< \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{3\,.\,8}{\sqrt{2\,\pi}} + \frac{3}{\pi}\right)\frac{x^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{5}{2}}} < 2\,\frac{x^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{5}{2}}},$$

und (35) ist bewiesen.

§ 4.

Beweis des Sierpińskischen Satzes.

Es sei $x \geqq 1$ und fest; x_1 bezeichne die Funktion $x_1 = x + x^{\frac{1}{3}}$. Dann ist nach (29) für $m \geqq m_0(x)$ und $x \leqq \xi \leqq x_1$ gleichmässig in ξ

$$\left|A(\xi) - \pi\,\xi - 4\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m} P(\xi, a, b)\right| < c_8\,\xi^{\frac{1}{3}} \leqq c_8\,x_1^{\frac{1}{3}} \leqq c_8\,(2\,x)^{\frac{1}{3}} = c_9\,x^{\frac{1}{3}};$$

folglich ist für $m \geqq m_0(x)$

$$\left|\int_x^{x_1} A(\xi)\,d\,\xi - \pi\int_x^{x_1}\xi\,d\,\xi - 4\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}\int_x^{x_1} P(\xi, a, b)\,d\,\xi\right| \leqq c_9\,(x_1 - x)\,x^{\frac{1}{3}} = c_9\,x^{\frac{2}{3}}.$$

Hierin ist

$$\pi\int_x^{x_1}\xi\,d\,\xi = \frac{\pi}{2}(x_1^2 - x^2) = \frac{\pi}{2}\left((x + x^{\frac{1}{3}})^2 - x^2\right) = \pi\,x^{\frac{4}{3}} + \frac{\pi}{2}\,x^{\frac{2}{3}};$$

für $m \geqq m_0(x)$ ist also

$$\left|\int_x^{x_1} A(\xi)\,d\,\xi - \pi\,x^{\frac{4}{3}} - 4\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}\int_x^{x_1} P(\xi, a, b)\,d\,\xi\right| \leqq \left(c_9 + \frac{\pi}{2}\right)x^{\frac{2}{3}} = c_{10}\,x^{\frac{2}{3}}. \quad (36)$$

Nun ist wegen der Symmetrie von $P(\xi, a, b)$ in a und b für jedes $m \geqq 1$

$$\sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{m} \int_{x}^{x_1} P(\xi, a, b)\, d\xi = 2 \sum_{b=1}^{m} \sum_{a=1}^{b-1} \int_{x}^{x_1} P(\xi, a, b)\, d\xi + \sum_{b=1}^{m} \int_{x}^{x_1} P(\xi, b, b)\, d\xi,$$

also nach Hilfssatz 13

$$\left| \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{m} \int_{x}^{x_1} P(\xi, a, b)\, d\xi \right| \leqq 4 \sum_{b=1}^{m} \sum_{a=1}^{b-1} \operatorname{Min.}\left(\frac{x^{\frac{7}{12}}}{b^{\frac{3}{2}}}, \frac{x^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{5}{2}}} \right)$$

$$+ 2 \sum_{b=1}^{m} \operatorname{Min.}\left(\frac{x^{\frac{7}{12}}}{b^{\frac{3}{2}}}, \frac{x^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{5}{2}}} \right)$$

$$= \sum_{b=1}^{m} (4b-2) \operatorname{Min.}\left(\frac{x^{\frac{7}{12}}}{b^{\frac{3}{2}}}, \frac{x^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{5}{2}}} \right) < 4 \sum_{b=1}^{m} \operatorname{Min.}\left(\frac{x^{\frac{7}{12}}}{b^{\frac{1}{2}}}, \frac{x^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$< 4 x^{\frac{7}{12}} \sum_{b=1}^{\left[x^{\frac{1}{6}}\right]+1} \frac{1}{b^{\frac{1}{2}}} + 4 x^{\frac{3}{4}} \sum_{b=\left[x^{\frac{1}{6}}\right]+2}^{\infty} \frac{1}{b^{\frac{3}{2}}}$$

$$< 4 x^{\frac{7}{12}} \int_{0}^{\left[x^{\frac{1}{6}}\right]+1} \frac{db}{b^{\frac{1}{2}}} + 4 x^{\frac{3}{4}} \int_{\left[x^{\frac{1}{6}}\right]+1}^{\infty} \frac{db}{b^{\frac{3}{2}}}$$

$$< 4 x^{\frac{7}{12}} \int_{0}^{x^{\frac{1}{6}}+1} \frac{db}{b^{\frac{1}{2}}} + 4 x^{\frac{3}{4}} \int_{x^{\frac{1}{6}}}^{\infty} \frac{db}{b^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 8 x^{\frac{7}{12}} \left(x^{\frac{1}{6}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 8 x^{\frac{3}{4}} . x^{-\frac{1}{12}} \leqq 8 x^{\frac{7}{12}} \left(2 x^{\frac{1}{6}} \right)^{\frac{1}{2}} + 8 x^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(8 . 2^{\frac{1}{2}} + 8 \right) x^{\frac{2}{3}} < 20 x^{\frac{2}{3}}.$$

Daher ist nach (36) für jedes $x \geqq 1$

$$\left| \int_x^{x_1} A(\xi)\, d\xi - \pi x^{\frac{4}{3}} \right| < (c_{10} + 80)\, x^{\frac{2}{3}}.$$

Es ist also

$$\int_x^{x_1} A(\xi)\, d\xi = \pi x^{\frac{4}{3}} + O\left(x^{\frac{2}{3}}\right). \tag{37}$$

Wegen

$$x^{\frac{1}{3}} A(x) = (x_1 - x) A(x) \leqq \int_x^{x_1} A(\xi)\, d\xi \leqq (x_1 - x) A(x_1) = x^{\frac{1}{3}} A\left(x + x^{\frac{1}{3}}\right)$$

ist mit Rücksicht auf (37) erstens

$$x^{\frac{1}{3}} A(x) \leqq \pi x^{\frac{4}{3}} + O\left(x^{\frac{2}{3}}\right),$$

$$A(x) \leqq \pi x + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right), \tag{38}$$

zweitens

$$x^{\frac{1}{3}} A\left(x + x^{\frac{1}{3}}\right) \geqq \pi x^{\frac{4}{3}} + O\left(x^{\frac{2}{3}}\right),$$

$$A\left(x + x^{\frac{1}{3}}\right) \geqq \pi x + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right). \tag{39}$$

Wenn $x + x^{\frac{1}{3}} = z$ als neue stetige Variable eingeführt wird, wobei $x = z - x^{\frac{1}{3}} \geqq z - z^{\frac{1}{3}}$ ist, so ergiebt sich aus (39)

$$A(z) \geqq \pi\left(z - z^{\frac{1}{3}}\right) + O\left(z^{\frac{1}{3}}\right) = \pi z + O\left(z^{\frac{1}{3}}\right). \tag{40}$$

Aus (38) und (40) folgt der Sierpińskische Satz

$$A(x) = \pi x + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right).$$

Uccle, den 15. August 1912.

Le equazioni di Lagrange nella nuova meccanica.

(*Di* Max Abraham, *a Milano.*)

La fisica moderna pone la meccanica di fronte a nuovi problemi relativi alla pressione della luce, alla dinamica degli elettroni, alla relazione tra massa ed energia, ecc.; in questi, alcuni principi della meccanica newtoniana (per esempio il principio di azione e reazione, la costanza della massa) cadono in difetto. Per accordare la meccanica colle nuove vedute della fisica, è necessario modificarla in modo radicale; occorre, come disse il Poincaré, una « nuova meccanica ». Mentre che la meccanica newtoniana si basa sul concetto dell'azione a distanza, la nuova meccanica ispirandosi dalle idee di Faraday e di Maxwell si propone di ridurre tutte le forze ad azioni immediate. In questo senso si fece recentemente un passo notevole; prendendo le mosse da una ipotesi dell'Einstein (*), che ammette una relazione tra la velocità della luce ed il potenziale gravitazionale, è stata svolta una teoria della gravitazione (**) fondata sul concetto dell'azione immediata. In seguito svilupperemo questa nuova teoria, in quanto essa si riferisce alle equazioni del moto di un punto materiale nel campo gravitazionale.

Le equazioni del moto di Lagrange abbracciano la dinamica degli elettroni (***); l'elettrone si comporta come un punto materiale, la cui funzione di Lagrange dipende soltanto dalla velocità (v); perchè la velocità della luce (c) in quella teoria venne considerata come costante. Nella recente teoria del campo gravitazionale invece la funzione di Lagrange di un punto o di

(*) A. Einstein, *Annalen der Physik*, 35, p. 898, 1911.

(**) M. Abraham, *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, XX^2, p. 678, 1911; XXI^1, p. 27 e 437, 1912. — A. Einstein, *Annalen der Physik*, 38, p. 355 e 445, 1912. — M. Abraham, *Physikalische Zeitschrift*, 1912, p. 793, 1912.

(***) M. Abraham, *Annalen der Physik*, 10, p. 105, 1903. *Theorie der Elektrizität*, II, 2. Aufl., 1908, p. 177.

un elettrone

$$L = L(v,\ c) \tag{1}$$

dipende oltre che dalla velocità, anche dal luogo e dal tempo, essendo

$$c = c(x,\ y,\ z,\ t). \tag{1a}$$

Le equazioni di LAGRANGE sono

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial L}{\partial x} + F_x = 0, \\ -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) + \frac{\partial L}{\partial y} + F_y = 0, \\ -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) + \frac{\partial L}{\partial z} + F_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

In esse

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial v} \cdot \frac{\dot{x}}{v} = G_x, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial v} \cdot \frac{\dot{y}}{v} = G_y, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial v} \cdot \frac{\dot{z}}{v} = G_z \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

determinano le componenti del vettore impulso, di valore

$$G = \frac{\partial L}{\partial v}, \tag{3a}$$

il quale è sempre parallelo al vettore velocità.

D'altronde

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial x}, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial y}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial L}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial z} \tag{4}$$

sono le componenti di una forza proporzionale al gradiente di c, e quindi al gradiente del potenziale gravitazionale; questa forza è la gravità.

Scrivendo le equazioni del moto (2) in virtù delle (3) e (4), nella forma

$$\left.\begin{aligned} -\frac{dG_x}{dt} + \frac{\partial L}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} + F_x = 0, \\ -\frac{dG_y}{dt} + \frac{\partial L}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} + F_y = 0, \\ -\frac{dG_z}{dt} + \frac{\partial L}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial z} + F_z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

risalta, che *dalla funzione di Lagrange si deduce tanto la forza d'inerzia, quanto la forza gravitazionale;* le derivate parziali della funzione di LAGRANGE rispetto alle coordinate, nulle nella teoria primitiva del c costante, rappresentano nella nuova teoria le componenti della gravità.

Moltiplicando le (2) con $\dot{x}\,\dot{y}\,\dot{z}$ e sommando otteniamo

$$\left.\begin{aligned} -\left\{\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)+\dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)+\dot{z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)\right\}+\frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}+ \\ +\frac{\partial L}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial L}{\partial z}\dot{z}+\dot{x}F_x+\dot{y}F_y+\dot{z}F_z=0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Essendo

$$\dot{x}F_x+\dot{y}F_y+\dot{z}F_z=P \qquad (6^a)$$

l'effetto della forza esterna, dalla (6) si deduce l'equazione di energia. Abbiamo

$$\left.\begin{aligned} -\left\{\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)+\dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)+\dot{z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)\right\}= \\ -\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}+\dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}+\dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ddot{x}+\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\ddot{y}+\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\ddot{z} \end{aligned}\right\} \qquad (6^b)$$

ed inoltre

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ddot{x}+\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\ddot{y}+\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\ddot{z}+\frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial L}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial L}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial L}{\partial t}\cdot \qquad (6^c)$$

Quindi la (6) diventa

$$-\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}+\dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}+\dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)+\frac{dL}{dt}-\frac{\partial L}{\partial t}+P=0. \qquad (6^d)$$

Dalla (3) segue

$$\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}+\dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}+\dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=v\frac{\partial L}{\partial v};$$

ponendo

$$E=v\frac{\partial L}{\partial v}-L \qquad (7)$$

e tenendo conto di

$$\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial c}\cdot\frac{\partial c}{\partial t}$$

la (6^d) si scrive

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial c}\cdot\frac{\partial c}{\partial t}+P. \qquad (8)$$

Ne risulta il significato di E come l'energia del punto materiale, poichè per un campo gravitazionale statico l'incremento, che l'energia del punto subisce col tempo, è eguale all'effetto P della forza esterna. Però ogni volta, quando il c, e quindi il potenziale gravitazionale, varia col tempo, viene trasmessa energia dal campo al punto materiale.

In modo analogo secondo il teorema dell'impulso contenuto nelle (5):

$$\frac{d\,G_x}{d\,t} = \frac{\partial L}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} + F_x, \qquad \text{ecc.,} \tag{8a}$$

il variare del c con $x\,y\,z$ produce un cambiamento della componente corrispondente dell'impulso del punto materiale.

Finora la dipendenza della funzione di Lagrange dagli argomenti v e c era rimasta arbitraria. Occorre però specializzarla (*), di modo che essa diventa una funzione lineare omogenea di questi argomenti; essa può essere scritta

$$L\,(v,\ c) = -\,M\,c\,.\,f\,(\beta)\,; \tag{9}$$

M è una costante caratteristica del punto, $f(\beta)$ una funzione universale dell'argomento

$$\beta = v/c\,. \tag{9a}$$

Secondo il teorema di Euler relativo alle funzioni omogenee si ha

$$L = v\,\frac{\partial L}{\partial v} + c\,\frac{\partial L}{\partial c}\,. \tag{9b}$$

Perciò la (7) dà per l'energia del punto materiale

$$E = -\,c\,\frac{\partial L}{\partial c}\,. \tag{9c}$$

Introducendo questo valore nei secondi membri delle (8) e (8a) risulta

$$\frac{d\,E}{d\,t} = \frac{E}{c}\,\frac{\partial c}{\partial t} + P; \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,G_x}{d\,t} &= -\,\frac{E}{c} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} + F_x, \\ \frac{d\,G_y}{d\,t} &= -\,\frac{E}{c} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} + F_y, \\ \frac{d\,G_z}{d\,t} &= -\,\frac{E}{c} \cdot \frac{\partial c}{\partial z} + F_z. \end{aligned}\right\} \tag{10a}$$

(*) Abraham, *Una nuova teoria della gravitazione.* Nuovo Cimento, 1912², p. 459.

Si vede che la forza agente nel campo gravitazionale su di un punto è proporzionale alla sua energia. Per un dato posto del campo il *peso del punto è proporzionale alla sua energia.* Questo risultato, il quale può essere esteso ad un sistema qualsiasi abbastanza piccolo per essere eguagliato ad un punto materiale, è forse il più importante della nuova teoria.

Lo sviluppo della funzione $f(\beta)$ secondo potenze di β deve cominciare con

$$f(\beta) = 1 - \zeta \cdot \frac{\beta^2}{2} + \dots, \tag{11}$$

affinchè le masse trasversale e longitudinale (*)

$$m_r = \frac{G}{v} = \frac{1}{v} \frac{\partial L}{\partial v},$$

$$m_s = \frac{d G}{d v} = \frac{d^2 L}{d v^2},$$

abbiano, per $v = 0$, il valore limite comune

$$m_0 = \zeta \frac{M}{c}. \tag{11a}$$

Quindi la « *massa inerte di riposo* » *varia inversamente proporzionale a* c, quando il punto materiale si sposta nel campo gravitazionale.

Lo sviluppo della funzione $f(\beta)$, e quindi il fattore numerico ζ, il quale entra pure nell'espressione (11ª) di m_0, è differente nelle diverse teorie. Ammettendo che per c costante valga la teoria di relatività, si ha (**):

$$f(\beta) = \sqrt{1 - \beta^2} = 1 - \frac{1}{2} \beta^2 + \cdots \tag{12}$$

e quindi

$$\zeta = 1, \tag{12a}$$

$$L = -M \,.\, \sqrt{c^2 - v^2} \tag{13}$$

Allora si trova per l'impulso

$$G = \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{M v}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \tag{13a}$$

(*) M. Abraham, *Annalen der Physik*, 10, p. 105, 1903. *Theorie der Elektrizität*, II, 2. Aufl., p. 174, 1908.

(**) M. Planck, *Verhandlungen d. deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 4, p. 136, 1906.

e per l'energia

$$E = -c\frac{\partial L}{\partial c} = \frac{Mc^2}{\sqrt{c^2 - \mathfrak{v}^2}}, \tag{13^b}$$

di modo che l'equazione dell'energia (10) assume la forma

$$M\frac{d}{dt}\left(\frac{c^2}{\sqrt{c^2 - \mathfrak{v}^2}}\right) = M \cdot \frac{c}{\sqrt{c^2 - \mathfrak{v}^2}} \cdot \frac{\partial c}{\partial t} + P, \tag{14}$$

mentre che quelle dell'impulso diventano identiche colle equazioni del moto indicate dall'EINSTEIN (*):

$$\left.\begin{aligned} M \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot x}{\sqrt{c^2 - \mathfrak{v}^2}}\right) &= -M \cdot \frac{c}{\sqrt{c^2 - \mathfrak{v}^2}} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} + F_x, \\ M \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot y}{\sqrt{c^2 - \mathfrak{v}^2}}\right) &= -M \cdot \frac{c}{\sqrt{c^2 - \mathfrak{v}^2}} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} + F_y, \\ M \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot z}{\sqrt{c^2 - \mathfrak{v}^2}}\right) &= -M \cdot \frac{c}{\sqrt{c^2 - \mathfrak{v}^2}} \cdot \frac{\partial c}{\partial z} + F_z, \end{aligned}\right\} \tag{14^a}$$

Per un punto materiale moventesi in un campo gravitazionale statico e non soggetto a forze esterne dalla (14) segue il teorema della conservazione dell'energia nella forma

$$\frac{c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \text{costante}, \tag{15}$$

enunciata nella mia prima nota (**); non considero però più le equazioni del moto, dalle quali la dedussi, come soddisfacenti, perchè esse non si accordano collo schema lagrangiano.

Dal teorema della conservazione dell'energia segue, in linee generali, la teoria della *caduta libera* (***).

Ammettiamo che il punto materiale cominci il suo moto colla velocità $\mathfrak{v}_0$

(*) A. EINSTEIN, loc. cit., *Ann. d. Physik*, 38, p. 355, 1912.

(**) M. ABRAHAM, l. c., *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, XX², p. 678, 1911.

(***) Nella Nota pubblicata nei *Rendiconti del R. Ist. Lombardo*, Serie II, vol. XLV, p. 290, 1912, ho considerato c^2 come funzione lineare dell'altezza, mentre che si giunse poi ad ammettere, che per un campo omogeneo privo di masse attiranti sia invece $\sqrt{c}$ una funzione lineare della coordinata corrispondente. Ciò però non cambia i tratti essenziali della caduta libera esposti di sopra.

in un punto, nel quale c ha il valore c_0. Allora si ha

$$\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}, \tag{15a}$$

$$c^2\left(1-\frac{v_0^2}{c_0^2}\right) = c_0^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right). \tag{15b}$$

Troviamo quindi

$$v^2 = (c_0^2 - c^2)\frac{c^2}{c_0^2} + v_0^2 \cdot \frac{c^4}{c_0^4}. \tag{15c}$$

Se nel caso speciale la velocità iniziale v_0 è nulla, si ha

$$v^2 = (c_0^2 - c^2)\frac{c^2}{c_0^2}. \tag{16}$$

Consideriamo quest'ultimo caso, ed ammettiamo che c partendo dal valore iniziale c_0 decresca sempre lungo il cammino percorso nella caduta fino al valore limite zero. Dalla (16) si vede, che allora la velocità nell'inizio del moto cresce, ma che alla fine essa decresce verso zero, approssimandosi asintoticamente a c. La velocità della caduta assume suo valore massimo v_m per

$$0 = \frac{d}{dc^2}\left\{c^2(c_0^2 - c^2)\right\} = c_0^2 - 2c^2,$$

cioè per

$$c = c_0/\sqrt{2}.$$

Questo valore massimo è

$$v_m = \frac{1}{2}c_0.$$

Vediamo che le equazioni di Lagrange abbracciano anche la nuova meccanica. Anzi possiamo dire che in questo campo la meccanica analitica trova la sua applicazione più feconda. Difatti in essa diventa impossibile di scindere l'energia in una parte potenziale dipendente dal posto ed in una parte cinetica dipendente dalla velocità; perciò l'impulso (v. 14a), come pure la forza d'inerzia, dipendono anche dal posto, e d'altra parte nell'espressione della forza gravitazionale entra la velocità. Di fronte a simili problemi i metodi elementari della meccanica si mostrano insufficienti, e soltanto la meccanica analitica fornisce uno strumento abbastanza potente per risolverli. Perciò anche i rivoluzionari della meccanica portano al fondatore della meccanica analitica il loro omaggio riverente.

Les équations du mouvement d'un fluide parfait déduites de la considération de l'énergie d'accélération.

(*Par* PAUL APPELL, *à Paris.*)

I. J. L. LAGRANGE, dans sa Mécanique analytique (3ième édition, I, p. 173/206; Oeuvres, 11, p. 197-236), déduit les équations de l'hydrostatique du principe des travaux virtuels. Quant aux équations de l'hydrodynamique, BASSET, dans l'ouvrage intitulé: *A Treatise on hydrodynamics*, Cambridge, 1888, s'exprime ainsi à la page 32: *les équations du mouvement peuvent être déduites, comme l'a montré M.r Larmor, de l'emploi du principe de la moindre action combiné avec la méthode de Lagrange.*

Je me propose de déduire ces équations du principe suivant.

Dans un système matériel à liaisons quelconques, sans frottements, holonomes ou non, soumis à des forces X, Y, Z dépendant du temps, des positions et des vitesses, les composantes x'', y'', z'' des accélérations des divers points ont, à un instant quelconque, les valeurs qui rendent minimum la fonction

$$R = \Sigma \left[\frac{m}{2} (x''^2 + y''^2 + z''^2) - (X x'' + Y y'' + Z z'') \right].$$

On trouvera la démonstration de ce principe dans une Note intitulée: *Sur les mouvements de roulement; équations du mouvement analogues à celles de Lagrange* (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 129, 7 août 1899, p. 317-320).

La quantité

$$S = \Sigma \frac{m}{2} (x''^2 + y''^2 + z''^2)$$

analogue à la fonction de LAGRANGE

$$T = \Sigma \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

a reçu le nom d'*énergie d'accélération.*

II. Cela posé, imaginons un fluide parfait en mouvement; appelons ρ la densité d'une particule de coordonnées x, y, z à l'instant t, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ les composantes de la force rapportée à l'unité de masse. Employons les variables dites *de Lagrange* et désignons par a, b, c les coordonnées initiales de la particule x, y, z à l'instant $t = t_0$, par ρ_0 la densité initiale de cette particule. Les coordonnées x, y, z et la densité ρ sont des fonctions de a, b, c, t.

L'équation de continuité est

$$\rho D = \rho_0, \tag{1}$$

D désignant le déterminant fonctionnel

$$D = \frac{d(x,\ y,\ z)}{d(a,\ b,\ c)}$$

dont nous désignerons les mineurs tels que $\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c}$ par $\frac{d\,y\,z}{d\,b\,c}$. Enfin les dérivées de x, y, z par rapport à t seront désignées par des accents, suivant la notation de Lagrange. La fonction analogue à R est actuellement exprimée par une integrale triple, étendue au volume V du fluide à l'instant t,

$$R = \iiint \left[\frac{1}{2}\rho\,(x''^2 + y''^2 + z''^2) - \rho\,(X x'' + Y y'' + Z z'')\right] d\,x\,d\,y\,d\,z,$$

ou, en prenant comme variables d'intégration a, b, c,

$$R = \iiint \left[\frac{1}{2}\rho_0\,(x''^2 + y''^2 + z''^2) - \rho_0\,(X x'' + Y y'' + Z z'')\right] d\,a\,d\,b\,d\,c, \tag{2}$$

car il faut remplacer $d\,x\,d\,y\,d\,z$ par $D\,d\,a\,d\,b\,d\,c$, ou $\frac{\rho_0}{\rho}\,d\,a\,d\,b\,d\,c$. Cette intégrale (2) est étendue au volume initial V_0. Dans cette intégrale x'', y'', z'' sont, à l'instant t, des fonctions de a, b, c assujetties à la relation suivante déduite de l'équation (1) de continuité. Dérivons cette équation deux fois par rapport à t: elle devient

$$D'' + 2\,\frac{\rho'}{\rho}\,D' + \frac{\rho''}{\rho}\,D = 0. \tag{3}$$

Dans cette équation, les termes en x'', y'', z'' proviennent uniquement de D''. Or on a

$$\left.\begin{aligned} D'' = & \frac{\partial x''}{\partial a}\frac{d\,y\,z}{d\,b\,c} + \frac{\partial y''}{\partial a}\frac{d\,z\,x}{d\,b\,c} + \frac{\partial z''}{\partial a}\frac{d\,x\,y}{d\,b\,c} \\ & + \frac{\partial x''}{\partial b}\frac{d\,y\,z}{d\,c\,a} + \frac{\partial y''}{\partial b}\frac{d\,z\,x}{d\,c\,a} + \frac{\partial z''}{\partial b}\frac{d\,x\,y}{d\,c\,a} \\ & + \frac{\partial x''}{\partial c}\frac{d\,y\,z}{d\,a\,b} + \frac{\partial y''}{\partial c}\frac{d\,z\,x}{d\,a\,b} + \frac{\partial z''}{\partial c}\frac{d\,x\,y}{d\,a\,b} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

les termes non écrits ne contenant pas x'', y'', z''.

Cela posé, d'après la méthode de Lagrange pour le calcul des variations, on devra, en désignant par λ une fonction arbitraire de a, b, c, t, déterminer x'', y'', z'' de façon que la variation de l'intégrale

$$I = \iiint \left[\frac{1}{2}\rho_0 (x''^2 + y''^2 + z''^2) - \rho_0 (X x'' + Y y'' + Z z'') + \lambda D''\right] d\,a\,d\,b\,d\,c$$

soit nulle, quand x'', y'', z'' subissent des variations arbitraires infiniment petites, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$. Or

$$\delta I = \iiint \left[\rho_0 (x'' - X)\,\delta x'' + \cdots + \lambda\,\delta D''\right] d\,a\,d\,b\,d\,c$$

avec, d'après (4),

$$\begin{aligned} \delta D'' = & \frac{\partial\,\delta x''}{\partial a}\frac{d\,y\,z}{d\,b\,c} + \frac{\partial\,\delta y''}{\partial a}\frac{d\,z\,x}{d\,b\,c} + \frac{\partial\,\delta z''}{\partial a}\frac{d\,x\,y}{d\,b\,c} \\ & + \cdots + \cdots \end{aligned}$$

où nous n'écrivons que la première ligne. Appliquons maintenant aux termes tels que

$$\iiint \lambda \frac{d\,y\,z}{d\,b\,c}\,\frac{\partial\,\delta x''}{\delta a}\,d\,a\,d\,b\,d\,c \qquad (5)$$

la formule d'intégration par parties, telle qu'elle résulte du théorème de Green (Voyez, par exemple, mon Traité de mécanique, t. III, chap. XXVIII).

En appelant $d\sigma_0$ un élément de la surface limite S_0 du fluide et α_0, β_0, γ_0 les cosinus directeurs de la normale extérieure, on a, pour deux fonctions P et Q,

$$\iiint \frac{\partial (P\,Q)}{\partial a}\,d\,a\,d\,b\,d\,c = \iint_{S_0} P\,Q\,\alpha_0\,d\sigma_0,$$

d'où

$$\iiint P\frac{\partial Q}{\partial a}\,d a\,d b\,d c=\iint_{S_0} P\,Q\,\alpha_0\,d\sigma_0-\iiint Q\frac{\partial P}{\partial a}\,d a\,d b\,d c.$$

Le terme (5) peut donc être remplacé par

$$\iint_{S_0}\lambda\,\frac{d\,y\,z}{d\,b\,c}\,\delta\,x''\,\alpha_0\,d\,\sigma_0-\iiint\frac{\partial}{\partial a}\left(\lambda\,\frac{d\,y\,z}{d\,b\,c}\right)\delta\,x''\,d\,a\,d\,b\,d\,c.$$

Traitons de même chacun des neuf termes qui proviennent de $\delta\,D''$, et remarquons que

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial a}\left(\lambda\,\frac{d\,y\,z}{d\,b\,c}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\lambda\,\frac{d\,y\,z}{d\,c\,a}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\lambda\,\frac{d\,y\,z}{d\,a\,b}\right)\\&=\frac{\partial\lambda}{\partial a}\,\frac{d\,y\,z}{d\,b\,c}+\frac{\partial\lambda}{\partial b}\,\frac{d\,y\,z}{d\,c\,a}+\frac{\partial\lambda}{\partial c}\,\frac{d\,y\,z}{d\,a\,b}\\&=D\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{\partial\lambda}{\partial x},\end{aligned}$$

comme on le voit en écrivant

$$\frac{\partial\lambda}{\partial a}=\frac{\partial\lambda}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial a},$$

. . . .

Nous avons finalement

$$\left.\begin{aligned}\delta\,I=&\iint_{S_0}\left(\alpha_0\,\frac{d\,y\,z}{d\,b\,c}+\beta_0\,\frac{d\,y\,z}{d\,c\,a}+\gamma_0\,\frac{d\,y\,z}{d\,a\,b}\right)\lambda\,\delta\,x''\,d\,\sigma_0\\&\qquad+\cdots+\cdots\\+&\iiint\left(x''-X-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)\delta\,x''\,\rho_0\,d\,a\,d\,b\,d\,c+\cdots+\cdots\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

où nous n'avons écrit, dans la partie intégrée (intégrale double) et dans l'intégrale triple, que les termes en $\delta\,x''$. Nous verrons plus loin que la partie intégrée est *nulle*. Dans l'intégrale triple, nous devons égaler à zéro les coefficients de $\delta\,x''$, $\delta\,y''$, $\delta\,z''$: nous obtenons ainsi les équations classiques

$$x''-X-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\lambda}{\partial x}=0,\quad y''-Y-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\lambda}{\partial y}=0,$$

$$z''-Z-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\lambda}{\partial z}=0,$$

où la pression est égale à $-\lambda$.

III. Il nous reste à voir, que dans la formule (6), la partie intégrée (intégrale double) est *nulle*, d'après les valeurs de $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ sur la surface limite.

On sait que les particules fluides qui sont, à l'instant initial, sur la surface limite S_0, restent sur la surface limite S à l'instant t. L'élément $d\sigma_0$ de S_0 devient un élément $d\sigma$ de S; nous appellerons α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à $d\sigma$. On a alors

$$\left(\alpha_0 \frac{d\,y\,z}{d\,b\,c} + \beta_0 \frac{d\,y\,z}{d\,c\,a} + \gamma_0 \frac{d\,y\,z}{d\,a\,b}\right) d\,\sigma_0 = \alpha\, d\,\sigma. \tag{7}$$

En effet, sur S_0, a, b, c sont des fonctions de deux paramètres p et q, et en posant

$$d\,\sigma_0 = k\,d\,p\,d\,q,$$

on a

$$\alpha_0 = \frac{1}{k}\frac{d\,b\,c}{d\,p\,q}, \quad \beta_0 = \frac{1}{k}\frac{d\,c\,a}{d\,p\,q}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{k}\frac{d\,a\,b}{d\,p\,q}.$$

Comme x, y, z sont fonctions de p et q par l'intermédiaire de a, b, c, on a

$$d\,\sigma = h\,d\,p\,d\,q,$$

$$\alpha = \frac{1}{h}\frac{d\,y\,z}{d\,p\,q} = \frac{1}{h}\left[\frac{d\,y\,z}{d\,b\,c}\frac{d\,b\,c}{d\,p\,q} + \frac{d\,y\,z}{d\,c\,a}\frac{d\,c\,a}{d\,p\,q} + \frac{d\,y\,z}{d\,a\,b}\frac{d\,a\,b}{d\,p\,q}\right],$$

ce qui est précisément la formule (7). L'intégrale double qui figure dans δI peut alors s'écrire

$$\iint_S (\alpha\,\delta x'' + \beta\,\delta y'' + \gamma\,\delta z'')\,\lambda\,d\,\sigma,$$

l'intégration étant étendue à la surface S du fluide à l'instant t. Mais alors l'élément différentiel est *nul*. En effet soit

$$f(x,\ y,\ z,\ t) = 0,$$

l'équation de la surface limite S; on a, en différentiant par rapport à t et suivant la particule x, y, z dans son mouvement

$$\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

puis

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'' + \frac{\partial f}{\partial y}y'' + \frac{\partial f}{\partial z}z'' + \cdots = 0 \tag{8}$$

où les termes non écrits ne contiennent pas x'', y'', z''. Cette relation (8) montre que les variations $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, à la surface, vérifient la condition

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x'' + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y'' + \frac{\partial f}{\partial z}\,\delta z'' = 0$$

ou, en appelant α, β, γ les cosinus directeurs de la normale

$$\alpha\,\delta x'' + \beta\,\delta y'' + \gamma\,\delta z'' = 0.$$

Paris, 14 février 1912.

Sopra una classe di equazioni differenziali di grado n e di ordine $n-1$ da considerarsi come estensioni delle equazioni di Riccati.

(*Di* Ernesto Pascal, *a Napoli.*)

§ 1. Un'equazione differenziale lineare omogenea di 2.° ordine

$$X_0 y'' + X_1 y' + X_2 y = 0 \tag{1}$$

colla trasformazione

$$y = e^{\int z dx} \tag{2}$$

si riduce ad un'equazione di Riccati

$$X_0 (z' + z^2) + X_1 z + X_2 = 0, \tag{3}$$

avente perciò la proprietà (scoperta nel 1875 da Ed. Weyr, e indi ritrovata da Ém. Picard nel 1877) del rapporto anarmonico costante fra quattro sue soluzioni particolari, donde si deduce l'altra proprietà importante che l'integrale generale si esprime sempre mediante tre integrali particolari.

Ora questa proprietà può estendersi in un modo molto semplice non ancora finora notato, per una importante classe di equazioni di ordine qualunque, e propriamente per quelle equazioni che derivano con una nota trasformazione elementare dalle equazioni differenziali lineari omogenee.

Esamineremo prima la forma generale di siffatte equazioni, e poi faremo vedere che cosa diventa per tali equazioni la proprietà del rapporto anarmonico e la sua interessante conseguenza.

§ 2. Ricordiamo prima di tutto qualche risultato ottenuto da me nello studio dei preliminari della teoria delle forme differenziali (*).

(*) Pascal, *La teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualunque* (Memorie della R. Accademia dei Lincei, (5) vol. VIII, 1910).

Nella suddetta teoria abbiamo studiato certe formazioni differenziali che abbiamo indicato con $\delta^{(r)}_{j_1 \dots j_m}$, e che sono definite come i polinomii differenziali che moltiplicano la derivata $\dfrac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \delta x_{j_m}}$ nello sviluppo del differenziale r^{mo} di $d^r f$.

L'espressione esplicita di $\delta^{(r)}_{j_1 \dots j_m}$ è

$$\delta^{(r)}_{j_1 \dots j_m} = S_j \sum_{i_1 \dots i_m} \frac{r\,!}{m\,!\, i_1\,! \dots i_m\,!\, \rho_1\,! \dots \rho_s\,!} d^{i_1} x_{j_1} \dots d^{i_m} x_{j_m} \tag{4}$$

dove le $i_1 \dots i_m$ sono m numeri interi positivi la cui somma sia r, il $\sum\limits_{i_1 \dots i_m}$ si estende a tutte le siffatte partizioni senza ripetizioni di r in m addendi, $\rho_1 \dots \rho_s$ rappresentano le molteplicità della partizione $i_1 \dots i_m$ (*), e S_j rappresenta la somma dei risultati ottenuti scambiando fra loro in tutti gli $m\,!$ modi possibili le $x_{j_1} \dots x_{j_m}$.

Supponiamo ora che le variabili x si riducano ad una, che sia indicata con t; cioè tutti gl'indici j sieno tra loro eguali; allora basterà porre in vista nel simbolo dei δ il numero m degl'indici inferiori, e otteniamo per esse la espressione ridotta

$$\delta^{(r)}_{(m)} = \sum_{i_1 \dots i_m} \frac{r\,!}{i_1\,! \dots i_m\,!\, \rho_1\,! \dots \rho_s\,!} d^{i_1} t \dots d^{i_m} t. \tag{5}$$

Così è

$$\begin{array}{llll}
\delta^{(2)}_{(1)} = d^2 t, & \delta^{(2)}_{(2)} = d t^2, & & \\
\delta^{(3)}_{(1)} = d^3 t, & \delta^{(3)}_{(2)} = 3\, d^2 t\, d t, & \delta^{(3)}_{(3)} = d t^3, & \\
\delta^{(4)}_{(1)} = d^4 t, & \delta^{(4)}_{(2)} = 4\, d^3 t\, d t + 3\, (d^2 t)^2, & \delta^{(4)}_{(3)} = 6\, d^2 t\, d t^2, & \delta^{(4)}_{(4)} = d t^4, \\
\delta^{(5)}_{(1)} = d^5 t, & \delta^{(5)}_{(2)} = 5\, d^4 t\, d t + 10\, d^3 t\, d^2 t, & \delta^{(5)}_{(3)} = 10\, d^3 t\, d t^2 + 15\, (d^2 t)^2\, d t, & \\
 & & \delta^{(5)}_{(4)} = 30\, d^2 t\, d t^3, & \delta^{(5)}_{(5)} = d t^5,
\end{array}$$

. . . .

Si riconosce molto facilmente, e lo abbiamo notato al § 6 della succitata Memoria, che la somma di tutte le δ del medesimo indice superiore non è altro che il differenziale r^{mo} dell'esponenziale e^t diviso per l'esponenziale

(*) Se nella partizione $i_1 \dots i_m$, il numero i_1 è contenuto ρ volte, cioè se fra i numeri $i_1 \dots i_m$ ve ne sono ρ uguali a i_1, noi diremo che i_1 è di moltiplicità ρ.

stesso:

$$\frac{d^r e^t}{e^t} = \sum_{m=1}^{r} \delta_{(m)}^{(r)} . \tag{6}$$

§ 3. Dalle formole precedenti possiamo dedurre facilmente quelle per la derivata r^{ma} di

$$y = e^{\int z dx} . \tag{7}$$

Se sostituiamo dappertutto i differenziali di t colle corrispondenti derivate di $\int z\,dx$, e propriamente sostituiamo $d^k t$ con la derivata $(k-1)^{ma}$ di z, cioè con $z^{(k-1)}$, otteniamo da (6)

$$y^{(r)} = y \sum_{m=1}^{r} \delta'^{(r)}_{(m)} \tag{8}$$

dove con $\delta'^{(r)}_{(m)}$ bisogna ora intendere la espressione

$$\delta'^{(r)}_{(m)} = \sum_{i_1 \dots i_m} \frac{r!}{i_1! \dots i_m! \rho_1! \dots \rho_s!} z^{(i_1-1)} \dots z^{(i_m-1)}, \qquad \left(\sum_{h=1}^{m} i_k = r\right). \tag{9}$$

Onde è

$$\begin{array}{llll}
\delta'^{(1)}_{(1)} = z, & & & \\
\delta'^{(2)}_{(1)} = z', & \delta'^{(2)}_{(2)} = z^2, & & \\
\delta'^{(3)}_{(1)} = z'', & \delta'^{(3)}_{(2)} = 3\,z\,z', & \delta'^{(3)}_{(3)} = z^3, & \\
\delta'^{(4)}_{(1)} = z''', & \delta'^{(4)}_{(2)} = 4\,z\,z'' + 3\,z'^2, & \delta'^{(4)}_{(3)} = 6\,z^2\,z', & \delta'^{(4)}_{(4)} = z^4, \\
\delta'^{(5)}_{(1)} = z^{\mathrm{IV}}, & \delta'^{(5)}_{(2)} = 5\,z\,z''' + 10\,z'\,z'', & \delta'^{(5)}_{(3)} = 10\,z^2\,z'' + 15\,z\,z'^2, & \\
 & & \delta'^{(5)}_{(4)} = 30\,z^3\,z', & \delta'^{(5)}_{(5)} = z^5, \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

§ 6. Sia data ora un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n,

$$X_0\, y^{(n)} + X_1\, y^{(n-1)} + \dots + X_{n-1}\, y' + X_n\, y = 0. \tag{10}$$

Colla trasformazione (7), la (10) diventa un'equazione di ordine $n-1$ in z, e propriamente la equazione della forma

$$X_n + \sum_{r=1}^{n} X_{n-r} \sum_{m=1}^{r} \delta'^{(r)}_{(m)} = 0 \tag{11}$$

che può ordinarsi secondo il grado dei varî termini nella z e nelle sue derivate, coll'osservare che

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{m=1}^{r} = \sum_{m=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}.$$

Si ha così l'equazione differenziale

$$X_n + \sum_{m=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} X_{n-r}\,\delta'^{(r)}_{(m)} = 0 \tag{12}$$

razionale intera di n^{mo} grado nella funzione z e nelle sue derivate, e di $(n-1)^{mo}$ ordine.

§ 5. Questa equazione, come quella da essa ottenuta con una qualunque trasformazione fratta della funzione z, gode di una notevole proprietà in rapporto ai suoi integrali particolari.

Sia $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistema di integrali fondamentali dell'equazione (10); ogni altro integrale y sarà dato da

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n, \qquad (c_1, \ldots, c_n = \text{cost.}) \tag{13}$$

donde, indicando con $z_1, z_2, \ldots, z_n$, z le corrispondenti funzioni z determinate da (7), ovvero da

$$z = \frac{y'}{y} \tag{14}$$

si ha

$$z = \frac{c_1 y'_1 + \cdots + c_n y'_n}{c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n}$$

e

$$\begin{aligned} z - z_i &= \frac{c_1 (y_i y'_1 - y_1 y'_i) + \cdots + c_n (y_i y'_n - y_n y'_i)}{y_i (c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n)} \\ &= \frac{c_1 y_1 (z_1 - z_i) + \cdots + c_n y_n (z_n - z_i)}{c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n} \end{aligned}$$

da cui, riducendo a forma intera, e raccogliendo i termini in $c_1 y_1, \ldots, c_n y_n$, si ha la relazione

$$c_1 y_1 (z - z_1) + c_2 y_2 (z - z_2) + \cdots + c_n y_n (z - z_n) = 0. \tag{15}$$

Ponendo ora in questa, z eguale consecutivamente ad n altri integrali particolari $z_{n+1} \dots z_{2n}$, e indicando con a_{ij} i valori che volta per volta acquistano le costanti c_i, si hanno le equazioni

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, y_1\,(z_{n+1} - z_1) + \cdots + a_{1n}\, y_n\,(z_{n+1} - z_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\, y_1\,(z_{2n} \;\; - z_1) + \cdots + a_{nn}\, y_n\,(z_{2n} \;\; - z_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{16}$$

da cui, eliminando le $y_1 \dots y_n$, otteniamo

$$\begin{vmatrix} a_{11}\,(z_{n+1} - z_1) & \dots & a_{1n}\,(z_{n+1} - z_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\,(z_{2n} \;\; - z_1) & \dots & a_{nn}\,(z_{2n} \;\; - z_n) \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

in cui le a_{ij} sono costanti; *questa rappresenta una relazione fra* $2\,n$ *integrali particolari dell'equazione* (12).

Questa relazione può facilmente trasformarsi in una fra i rapporti anarmonici delle soluzioni particolari.

Basterà dividere la 1ª, 2ª,..., n^{ma} linea del determinante rispettivamente per $(z_{n+1} - z_n), \dots, (z_{2n} - z_n)$, e indi la 1ª, 2ª,..., $(n-1)^{ma}$ colonna rispettivamente per $\dfrac{z_{2n} - z_1}{z_{2n} - z_n}, \dots, \dfrac{z_{2n} - z_{n-1}}{z_{2n} - z_n}$.

Ponendo allora

$$\frac{z_{n+h} - z_k}{z_{n+h} - z_n} : \frac{z_{2n} - z_k}{z_{2n} - z_n} \equiv (2\,n,\; n+h,\; n,\; k)$$

la (17) diventa

$$\begin{vmatrix} a_{11}\,(2\,n,\; n+1,\; n,\; 1) & \dots & a_{1,n-1}\,(2\,n,\; n+1,\; n,\; n-1), & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1}\,(2\,n,\; 2\,n-1,\; n,\; 1) & \dots & a_{n-1,n-1}\,(2\,n,\; 2\,n-1,\; n,\; n-1), & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

Le quantità a_{ij} sono delle costanti dipendenti dagli integrali particolari che si considerano; se poniamo che z_{2n} sia l'integrale generale z della (12), e se sostituiamo quindi $a_{n1}, \dots, a_{n-1,n}$, con costanti arbitrarie $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$, e il rapporto anarmonico di z, z_{n+h}, z_n, z_k lo indichiamo con $(z,\; n+h,\; n,\; k)$, e indi con opportune divisioni togliamo la omogeneità delle a nel determinante (18), si vede che l'integrale generale della equazione (12) sarà dato dalla equazione

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}(z,\ n+1,\ n,\ 1) & \ldots & \alpha_{1,n-1}(z,\ n+1,\ n,\ n-1), & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1,1}(z,\ 2n-1,\ n,\ 1) & \ldots & \alpha_{n-1,n-1}(z,\ 2n-1,\ n,\ n-1), & 1 \\ c_1\,, & \ldots & c_{n-1}\,, & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (19)$$

dove $c_1, \ldots, c_{n-1}$ sono le $n-1$ costanti arbitrarie, e le α sono delle quantità costanti dipendenti dagli integrali particolari considerati. Abbiamo dunque il risultato: *l'integrale generale di* (12) *è conosciuto quando sono noti* $2n-1$ *integrali particolari dell'equazione medesima; l'equazione da cui dipende l'integrale generale è lineare nelle costanti arbitrarie, ed è formata di rapporti anarmonici.*

Per $n=2$ la (18) diventa

$$\begin{vmatrix} a_{11}(4,\ 3,\ 2,\ 1), & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0\,,$$

e questa dà la nota proprietà del rapporto anarmonico di quattro integrali particolari dell'equazione di Riccati. .

Se invece della (12) *consideriamo una sua trasformata con una sostituzione lineare*

$$z = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta} \qquad (20)$$

operata sulla funzione incognita z, è evidente che le (18), (19), formate come sono di rapporti anarmonici, restano le medesime, e quindi *l'equazione differenziale risultante godrà delle stesse proprietà della* (12). Anche questa è un'estensione della proprietà dell'equazione di Riccati che, come si sa, conserva la sua forma e quindi la proprietà caratteristica del rapporto anarmonico, con una trasformazione lineare operata sulla funzione incognita.

Napoli, 30 giugno 1912.

Sul calcolo delle variazioni degli integrali multipli.

(*Di* G. VIVANTI, *a Pavia.*)

1. Il metodo esposto in una Nota recente (*) per la determinazione della forma che deve avere una espressione Φ contenente $n+1$ funzioni di n parametri e le loro derivate prime, affinchè il suo integrale n-plo abbia valore indipendente dalla scelta dei parametri, può estendersi senza molta difficoltà al caso in cui Φ contiene anche le derivate seconde delle $n+1$ funzioni.

Indichiamo anche qui con $v_1, \ldots, v_n$ gli n parametri, con $x_1, \ldots, x_{n+1}$ le $n+1$ funzioni, e poniamo:

$$\frac{\partial x_i}{\partial v_h} = x_{ih}, \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial v_h \partial v_k} = x_{ihk}, \quad \frac{\partial^3 x_i}{\partial v_h \partial v_k \partial v_l} = x_{ihkl}, \quad \text{etc.},$$

inoltre:

$$\xi_i = (-1)^{n+1-i} \frac{d(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})}{d(v_1, \ldots, v_n)},$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i x_{irs} = \Omega_{rs}.$$

L'integrale da considerarsi è:

$$I = \int^{(n)} \Phi(x_i, x_{ih}, x_{ihk}) \, d v_1 \ldots d v_n.$$

In esso introduciamo in luogo dei parametri v_i i parametri:

$$w_i = v_i + \varepsilon \sigma_i,$$

dove ε è una costante arbitrariamente piccola (**); se:

$$x_i = f_i(v) = g_i(w)$$

(*) *Sull'equazione di Eulero per gli integrali multipli*, Rend. Circ. mat. Palermo, t. 33 (1912), pp. 268-274; v. anche: J. RADON, *Ueber einige Fragen betreffend die Maxima und Minima mehrfacher Integrale,* Monatshefte für Math. u. Ph., t. 22 (1911), pp. 53-63.

(**) Cfr. i lavori di G. KOBB e A. KNESER citati in Rend. Circ. mat. Palermo.

è la rappresentazione delle x_i mediante i vecchi ed i nuovi parametri, dovrà essere:

$$I = \int^{(n)} \Phi\left(f_i(v),\ \frac{\partial f_i(v)}{\partial v_h},\ \frac{\partial^2 f_i(v)}{\partial v_h \partial v_k}\right) d v_1 \ldots d v_n =$$

$$= \int^{(n)} \Phi\left(g_i(w),\ \frac{\partial g_i(w)}{\partial w_h},\ \frac{\partial^2 g_i(w)}{\partial w_h \partial w_k}\right) d w_1 \ldots d w_n =$$

$$= \int^{(n)} \Phi\left(g_i(w),\ \frac{\partial g_i(w)}{\partial w_h},\ \frac{\partial^2 g_i(w)}{\partial w_h \partial w_k}\right) \frac{d(w_1, \ldots, w_n)}{d(v_1, \ldots, v_n)} d v_1 \ldots d v_n ,$$

e quindi:

$$\Phi\left(f_i(v),\ \frac{\partial f_i(v)}{\partial v_h},\ \frac{\partial^2 f_i(v)}{\partial v_h \partial v_k}\right) = \Phi\left(g_i(w),\ \frac{\partial g_i(w)}{\partial w_h},\ \frac{\partial^2 g_i(w)}{\partial w_h \partial w_k}\right) \frac{d(w_1, \ldots, w_n)}{d(v_1, \ldots, v_n)} . \quad (1)$$

Ora si ha, trascurando le potenze di ε superiori alla prima:

$$x_i = g_i(v + \varepsilon \sigma) = g_i(v) + \varepsilon \sum_{r=1}^{n} \sigma_r \frac{\partial g_i}{\partial v_r} = g_i(v) + \varepsilon \gamma_i ,$$

$$x_{ih} = \frac{\partial g_i(v)}{\partial v_h} + \varepsilon \frac{\partial \gamma_i}{\partial v_h} ,$$

$$x_{ihk} = \frac{\partial^2 g_i(v)}{\partial v_h \partial v_k} + \varepsilon \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial v_h \partial v_k} ,$$

quindi:

$$\Phi\left(f_i(v),\ \frac{\partial f_i(v)}{\partial v_h},\ \frac{\partial^2 f_i(v)}{\partial v_h \partial v_k}\right) =$$

$$= \Phi\left(g_i(v) + \varepsilon \gamma_i,\ \frac{\partial g_i(v)}{\partial v_h} + \varepsilon \frac{\partial \gamma_i}{\partial v_h},\ \frac{\partial^2 g_i(v)}{\partial v_h \partial v_k} + \varepsilon \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial v_h \partial v_k}\right) =$$

$$= \Phi\left(g_i(v),\ \frac{\partial g_i(v)}{\partial v_h},\ \frac{\partial^2 g_i(v)}{\partial v_h \partial v_k}\right) + \varepsilon \sum_{\substack{ihk \\ h \leq k}} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \gamma_i + \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ih}} \frac{\partial \gamma_i}{\partial v_h} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihk}} \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial v_h \partial v_k}\right] ,$$

$$\Phi\left(g_i(w),\ \frac{\partial g_i(w)}{\partial w_h},\ \frac{\partial^2 g_i(w)}{\partial w_h \partial w_k}\right) = \Psi(w) = \Psi(v + \varepsilon \sigma) = \Psi(v) + \varepsilon \sum_r \sigma_r \frac{\partial \Psi}{\partial v_r} ,$$

$$\frac{d(w_1, \ldots, w_n)}{d(v_1, \ldots, v_n)} = 1 + \varepsilon \sum_r \frac{\partial \sigma_r}{\partial v_r} .$$

Segue pertanto dalla formola (1), scrivendo x_i in luogo di $g_i(v)$ e Φ in luogo di $\Phi(x_i, x_{ih}, x_{ihk})$:

$$\Phi + \varepsilon \sum_{\substack{ihk \\ h \leq k}} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \gamma_i + \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ih}} \frac{\partial \gamma_i}{\partial v_h} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihk}} \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial v_h \partial v_k} \right] = \left[\Phi + \varepsilon \sum_r \sigma_r \frac{\partial \Psi}{\partial v_r} \right] \left[1 + \varepsilon \sum_r \frac{\partial \sigma_r}{\partial v_r} \right].$$

Poniamo ora nel primo membro in luogo delle γ_i le loro espressioni; sopprimendo nei due membri il termine comune Φ e dividendo per ε, risulta:

$$\sum_{\substack{rihk \\ h \leq k}} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \sigma_r x_{ir} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ih}} \left(\sigma_r x_{irh} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial v_h} x_{ir} \right) \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihk}} \left(\sigma_r x_{irhk} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial v_h} x_{irk} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial v_k} x_{irh} + \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial v_h \partial v_k} x_{ir} \right) \right] = \Phi \sum_r \frac{\partial \sigma_r}{\partial v_r} + \sum_r \sigma_r \frac{\partial \Psi}{\partial v_r}.$$

Poichè questa relazione deve sussistere qualunque siano le σ_r, saranno eguali nei due membri i coefficienti corrispondenti delle σ_r, $\frac{\partial \sigma_r}{\partial v_h}$, $\frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial v_h \partial v_k}$; ne risultano le seguenti relazioni:

$$\sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} x_{ir} + \sum_{ih} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ih}} x_{ihr} + \sum_{ihk} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihk}} x_{ihkr} = \frac{\partial \Psi}{\partial v_r}, \tag{2}$$

$$\sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ir}} x_{ir} + 2 \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_{irr}} x_{irr} + \sum_{\substack{it \\ t \neq r}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{irt}} x_{irt} = \Phi, \tag{3}$$

$$\sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_{is}} x_{ir} + 2 \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_{iss}} x_{irs} + \sum_{\substack{it \\ t \neq s}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ist}} x_{irt} = 0 \qquad (r \neq s), \tag{4}$$

$$\sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ist}} x_{ir} = 0, \tag{5}$$

dove:

$$i = 1, \ldots, n+1; \quad h, k, r, s, t = 1, \ldots, n.$$

Le (2) sono identità; scriveremo le (3), (4), (5) brevemente così:

$$X_{rr} \Phi = \Phi \qquad (r = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

$$X_{rs} \Phi = 0 \qquad (r, s = 1, \ldots, n;\ r \neq s), \tag{7}$$

$$U_{rst} \Phi \equiv U_{rts} \Phi = 0 \quad (r, s, t = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

La forma generale della funzione Φ è l'integrale generale del sistema d'equazioni lineari a derivate parziali (6), (7), (8), composto di:

$$\alpha = n + n(n-1) + \frac{n^2(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+3)}{2}$$

equazioni con:

$$\beta = (n+1) + n(n+1) + \frac{n(n+1)^2}{2} = \frac{(n+1)^2(n+2)}{2}$$

variabili indipendenti.

2. Consideriamo anzitutto le n equazioni (8) aventi comune la coppia di indici s, t, cioè le:

$$U_{1st}\Phi = 0, \ldots, U_{nst}\Phi = 0. \tag{9}$$

Queste equazioni ammettono evidentemente come integrali tutte le x_i e le x_{ih}, ed inoltre tutte le x_{ihk} in cui la coppia $h\,k$ è diversa dalla coppia $s\,t$; questi integrali sono complessivamente $\beta - (n+1)$, mentre il numero massimo di integrali indipendenti del sistema (9) è $\beta - n$. Per trovare l'ultimo integrale, se esiste, osserviamo che dalle (9) segue:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{1st}} : \xi_1 = \cdots = \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n+1,st}} : \xi_{n+1}, \tag{10}$$

e che, nell'integrazione da eseguirsi, le ξ_i, che sono funzioni di integrali già trovati, debbono considerarsi come costanti. Dopo ciò le (10) dànno l'integrale:

$$\Phi = \xi_1 x_{1st} + \cdots + \xi_{n+1} x_{n+1,st} = \Omega_{st}.$$

È da notarsi che anche ogni altra Ω_{hk}, dove la coppia $h\,k$ sia diversa dalla $s\,t$, è un integrale del sistema (9), essendo una funzione di integrali di esso. Può dunque concludersi che il sistema (8) ammette gli integrali:

$$x_i,\ x_{ih},\ \Omega_{hk}\ (i = 1, \ldots, n+1;\ h, k = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

Il numero di questi integrali è $\frac{(n+1)\,(3\,n+2)}{2}$, cioè è eguale alla differenza tra β e il numero delle equazioni (8); essi poi sono indipendenti, perchè ciascuno contiene variabili che non figurano in nessun altro. Quindi (11) è il sistema integrale completo del sistema d'equazioni (8), e l'integrale generale di quest'ultimo sistema è:

$$\Phi = F(x_i,\ x_{ih},\ \Omega_{hk})\quad (i = 1, \ldots, n+1;\ h, k = 1, \ldots, n;\ h \leq k),$$

dove F denota una funzione arbitraria.

Di qui segue:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{ih}} = \frac{\partial F}{\partial x_{ih}} + \sum_{\substack{kl\\k \leq l}} \frac{\partial F}{\partial \Omega_{kl}} \frac{\partial \Omega_{kl}}{\partial x_{ih}} = \frac{\partial F}{\partial x_{ih}} + \sum_{\substack{jkl\\k \leq l}} \frac{\partial F}{\partial \Omega_{kl}} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_{ih}} x_{jkl},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihk}} = \frac{\partial F}{\partial \Omega_{hk}} \xi_i,$$

quindi:

$$X_{rr} \Phi = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_{ir}} x_{ir} + \sum_{\substack{ijkl\\k \leq l}} \frac{\partial F}{\partial \Omega_{kl}} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_{ir}} x_{jkl} x_{ir} + 2 \sum_i \frac{\partial F}{\partial \Omega_{rr}} \xi_i x_{irr} + \sum_{\substack{it\\t \neq r}} \frac{\partial F}{\partial \Omega_{rt}} \xi_i x_{irt},$$

$$X_{rs} \Phi = \sum \frac{\partial F}{\partial x_{is}} x_{ir} + \sum_{\substack{ijkl\\k \leq l}} \frac{\partial F}{\partial \Omega_{kl}} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_{is}} x_{jkl} x_{ir} + 2 \sum_i \frac{\partial F}{\partial \Omega_{ss}} \xi_i x_{irs} + \sum_{\substack{it\\t \neq s}} \frac{\partial F}{\partial \Omega_{st}} \xi_i x_{irt}.$$

Pertanto, tenendo conto che:

$$\sum_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_{is}} x_{ir} = \begin{cases} \xi_j \\ 0 \end{cases} \text{per } r \begin{matrix} = \\ \neq \end{matrix} s,$$

si ha dalle (6), (7):

$$Y_{rr} F \equiv \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_{ir}} x_{ir} + \sum_{\substack{kl\\k \leq l}} \frac{\partial F}{\partial \Omega_{kl}} \Omega_{kl} + 2 \frac{\partial F}{\partial \Omega_{rr}} \Omega_{rr} + \sum_{t \neq r} \frac{\partial F}{\partial \Omega_{rt}} \Omega_{rt} = F,$$

$$Y_{rs} F \equiv \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_{is}} x_{ir} + 2 \frac{\partial F}{\partial \Omega_{ss}} \Omega_{rs} + \sum_{t \neq s} \frac{\partial F}{\partial \Omega_{st}} \Omega_{rt} = 0 \quad (r \neq s), \tag{12}$$

la prima delle quali può scriversi più semplicemente:

$$Y_{rr} F \equiv \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_{ir}} x_{ir} + 3 \frac{\partial F}{\partial \Omega_{rr}} \Omega_{rr} + 2 \sum_{t \neq r} \frac{\partial F}{\partial \Omega_{rt}} \Omega_{rt} + \sum_{\substack{h,k \neq r\\h \leq k}} \frac{\partial F}{\partial \Omega_{hk}} \Omega_{hk} = F. \tag{13}$$

3. Consideriamo dapprima la:

$$\left.\begin{aligned} Y_{11} F - Y_{22} F \equiv \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_{i1}} x_{i1} - \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_{i2}} x_{i2} + 2 \frac{\partial F}{\partial \Omega_{11}} \Omega_{11} - 2 \frac{\partial F}{\partial \Omega_{22}} \Omega_{22} \\ + \sum_{t\,3}^{n} \frac{\partial F}{\partial \Omega_{1t}} \Omega_{1t} - \sum_{t=3}^{n} \frac{\partial F}{\partial \Omega_{2t}} \Omega_{2t} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

che è una conseguenza delle (13). Essa ammette anzitutto gli integrali:

$$x_i \quad (i = 1, \ldots, n+1), \tag{15}$$

$$x_{ih} \ (i = 1, \ldots, n+1;\ h = 3, \ldots, n), \tag{16}$$

$$\Omega_{12}, \tag{17}$$

$$\Omega_{hk} \ (h,\ k = 3, \ldots, n;\ h \leq k); \tag{18}$$

inoltre dal suo sistema ausiliario:

$$\frac{d\,x_{i1}}{x_{i1}} = \frac{d\,x_{j2}}{-x_{j2}} = \frac{d\,\Omega_{11}}{2\,\Omega_{11}} = \frac{d\,\Omega_{22}}{-2\,\Omega_{22}} = \frac{d\,\Omega_{1h}}{\Omega_{1h}} = \frac{d\,\Omega_{2k}}{-\Omega_{2k}}$$
$$(i,\ j = 1, \ldots, n+1;\ h,\ k = 3, \ldots, n)$$

risultano gli ulteriori integrali:

$$x_{i1}\, x_{j2} \qquad (i,\ j = 1, \ldots, n+1), \tag{19}$$

$$\Omega_{1h}\, x_{j2} \qquad (j = 1, \ldots, n+1;\ h = 3, \ldots, n), \tag{20}$$

$$\Omega_{11}\, x_{j2}\, x_{l2} \ (j,\ l = 1, \ldots, n+1). \tag{21}$$

Ognuno dei determinanti $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ è una somma di termini di cui un fattore è del tipo (19) e gli altri sono del tipo (16); quindi $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ sono integrali della (14). Poniamo ora:

$$P_h = x_{i_1 1} \ldots x_{i_{h-1} h-1}\, x_{i_{h+1} h+1} \ldots x_{i_n n}, \quad Q_k = x_{j_1 1} \ldots x_{j_{k-1} k-1}\, x_{j_{k+1} k+1} \ldots x_{j_n n},$$

e:

$$N_{hk} = \Omega_{hk}\, P_h\, Q_k,$$

dove gli indici i, j sono qualunque; è facile dimostrare che, qualunque sieno h, k, N_{hk} è un integrale della (14). Vi sono 6 casi possibili, cioè:

a) $h = k = 1$; b) $h = k = 2$; c) $h = 1$, $k = 2$; d) $h = 1$, $k > 2$;
e) $h = 2$, $k > 2$; f) $h > 2$, $k > 2$;

però i casi a), b) sono essenzialmente identici tra loro, e così i casi d), e). Esaminiamo partitamente i casi a), c), d), f).

a) $$N_{11} = (\Omega_{11}\, x_{i_2 2}\, x_{j_2 2})\, x_{i_3 3} \ldots x_{i_n n}\, x_{j_3 3} \ldots x_{j_n n};$$

il primo fattore è del tipo (21), e gli altri sono del tipo (16).

c) $$N_{12} = \Omega_{12}\, (x_{i_2 2}\, x_{j_1 1})\, x_{i_3 3} \ldots x_{i_n n}\, x_{j_3 3} \ldots x_{j_n n};$$

il primo fattore coincide con (17), il secondo è del tipo (19), gli altri sono del tipo (16).

d) $\quad N_{1k} = (\Omega_{1k}\, x_{i_2 2})\,(x_{j_1 1}\, x_{j_2 2})\, x_{i_3 3} \ldots x_{i_n n}\, x_{j_3 3} \ldots x_{j_{k-1} k-1}\, x_{j_{k+1} k+1} \ldots x_{j_n n} \quad (k > 2);$

il primo fattore è del tipo (20), il secondo del tipo (19), gli altri sono del tipo (16).

f) $\quad N_{hk} = \Omega_{hk}(x_{i_1 1}\, x_{i_2 2})\,(x_{j_1 1}\, x_{j_2 2})\, x_{i_3 3} \ldots x_{i_{h-1} h-1}\, x_{i_{h+1} h+1} \ldots x_{i_n n}\, x_{j_3 3} \ldots x_{j_{k-1} k-1}\, x_{j_{k+1} k+1} \ldots x_{j_n n}$

$$(h > 2, \quad k > 2);$$

il primo fattore è del tipo (18), il secondo ed il terzo sono del tipo (19), gli altri del tipo (16).

Scriviamo:

$$M_{ijh} = (-1)^{i+j-1} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_{jh}} = (-1)^{i+j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_{ih}};$$

l'espressione:

$$S_{ij} = \sum_{h=1}^{n} \Omega_{hh}\, M_{ijh}^2 + \sum_{\substack{h,k=1 \\ h \neq k}}^{n} \Omega_{hk}\, M_{ijh}\, M_{ijk}$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \Omega_{hh}\, M_{ijh}^2 + 2 \sum_{\substack{h,k=1 \\ h<k}}^{n} \Omega_{hk}\, M_{ijh}\, M_{ijk} \qquad (i,\ j = 1, \ldots,\ n+1;\ i<j)$$

è una somma di termini della forma N_{hk}, e quindi è un integrale della (14).

Per ragioni di simmetria può concludersi che:

$$x_i,\ \xi_i,\ S_{ij} \qquad (i,\ j = 1, \ldots,\ n+1;\ i<j) \tag{22}$$

sono integrali di tutte le equazioni:

$$Y_{11} F - Y_{rr} F = 0 \qquad (r = 2, \ldots,\ n). \tag{23}$$

Vogliamo dimostrare che queste:

$$2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$$

funzioni rendono soddisfatte anche le (12).

Si ha anzitutto:

$$Y_{rs}\, x_i = 0,$$

$$Y_{rs}\, \xi_i = \sum_h \frac{\partial \xi_i}{\partial x_{hs}}\, x_{hr} = 0.$$

Inoltre:

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_{ts}} = 2 \sum_h \Omega_{hh} M_{ijh} \frac{\partial M_{ijh}}{\partial x_{ts}} + \sum_{\substack{hk \\ h \neq k}} \Omega_{hk} \left(M_{ijh} \frac{\partial M_{ijk}}{\partial x_{ts}} + M_{ijk} \frac{\partial M_{ijh}}{\partial x_{ts}} \right)$$

$$= 2 \sum_h \Omega_{hh} M_{ijh} \frac{\partial M_{ijh}}{\partial x_{ts}} + 2 \sum_{\substack{hk \\ h \neq k}} \Omega_{hk} M_{ijh} \frac{\partial M_{ijk}}{\partial x_{ts}},$$

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial \Omega_{ss}} = M^2_{ijs}, \quad \frac{\partial S_{ij}}{\partial \Omega_{st}} = 2 M_{ijs} M_{ijt},$$

quindi:

$$\left.\begin{aligned} Y_{rs} S_{ij} = 2 \sum_h \Omega_{hh} M_{ijh} \sum_t \frac{\partial M_{ijh}}{\partial x_{ts}} x_{tr} + 2 \sum_{\substack{hk \\ h \neq k}} \Omega_{hk} M_{ijh} \sum_t \frac{\partial M_{ijk}}{\partial x_{ts}} x_{tr} \\ + 2 M^2_{ijs} \Omega_{rs} + 2 \sum_{t \neq s} M_{ijs} M_{ijt} \Omega_{rt}. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Consideriamo la somma:

$$\sum_t \frac{\partial M_{ijh}}{\partial x_{ts}} x_{tr};$$

se $h = s$, essa è nulla, perchè M_{ijs} non contiene x_{ts}; se h è diverso da r e da s, essa è ancora nulla, perchè rappresenta lo sviluppo d'un determinante con due linee eguali. Invece per $h = r \neq s$ si ha:

$$\sum_t \frac{\partial M_{ijr}}{\partial x_{ts}} x_{tr} = - M_{ijs};$$

infatti il primo membro può scriversi:

$$(-1)^{i+j-1} \sum_t \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_{jr} \, \partial x_{ts}} x_{tr},$$

ed il secondo:

$$-(-1)^{i+j-1} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_{js}} = -(-1)^{i+j-1} \sum_t \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_{js} \, \partial x_{tr}} x_{tr},$$

e si ha notoriamente:

$$\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_{jr} \, \partial x_{ts}} = - \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_{js} \, \partial x_{tr}}.$$

La (24) diviene quindi:

$$Y_{rs} S_{ij} = -2 \Omega_{rr} M_{ijr} M_{ijs} - 2 \sum_{h \neq r} \Omega_{hr} M_{ijh} M_{ijs} + 2 \Omega_{rs} M^2_{ijs} + 2 \sum_{t \neq s} \Omega_{rt} M_{ijs} M_{ijt}$$

$$= 2 M_{ijs} \left[- \sum_h \Omega_{hr} M_{ijh} + \sum_t \Omega_{rt} M_{ijt} \right] = 0.$$

Ora le x_i, ξ_i sono indipendenti tra loro; le S_{ij} sono indipendenti da queste, e sono pure indipendenti tra loro come funzioni delle Ω_{hk}, perchè il determinante d'ordine $\frac{n(n+1)}{2}$, le cui linee sono:

$$M_{ij1}^2, \ldots, M_{ijn}^2, \; M_{ij1} M_{ij2}, \ldots, \; M_{ijn-1} M_{ijn}$$
$$(i, j = 1, \ldots, n+1;\; i < j),$$

è diverso da zero (*). Inoltre il numero degli integrali (22), cioè $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$, è eguale alla differenza tra il numero $\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$ delle variabili x_i, x_{ih}, Ω_{hk} contenute nelle equazioni considerate e il numero:

$$n(n-1) + (n-1) = n^2 - 1$$

delle equazioni (12), (23). Quindi l'integrale generale di questo sistema d'equazioni lineari omogenee è:

$$F = G(x_i, \xi_i, S_{ij}) \qquad (i, j = 1, \ldots, n+1;\; i < j),$$

dove G denota una funzione arbitraria.

Per ottenere finalmente l'integrale generale del sistema proposto da principio, non resta che da vedere a quali condizioni debba esser soggetta la funzione G per soddisfare l'equazione:

$$Y_{11} F = F; \tag{25}$$

giacchè questa equazione, insieme alle (23), è equivalente al sistema (13).

Si ha:

$$Y_{11} F = \sum_{\alpha i} \frac{\partial G}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_{i1}} x_{i1} + \sum_{\alpha\beta i} \frac{\partial G}{\partial S_{\sigma\beta}} \frac{\partial S_{\cdot\beta}}{\partial x_{i1}} x_{i1} + 3 \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial G}{\partial S_{\sigma\beta}} \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial \Omega_{11}} \Omega_{11}$$
$$+ 2 \sum_{\substack{\alpha\beta t \\ t>1}} \frac{\partial G}{\partial S_{\alpha\beta}} \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial \Omega_{1t}} \Omega_{1t} + \sum_{\substack{\alpha\beta hk \\ h,k>1, h\leq k}} \frac{\partial G}{\partial S_{\alpha\beta}} \frac{\partial S_{\sigma\beta}}{\partial \Omega_{hk}} \Omega_{hk}$$
$$= \sum_{\alpha i} \frac{\partial G}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_{i1}} x_{i1} + \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial G}{\partial S_{\alpha\beta}} \left[2 \sum_\gamma \Omega_{\gamma\gamma} M_{\sigma\beta\gamma} \sum_i \frac{\partial M_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_{i1}} x_{i1} + 2 \sum_{\substack{\gamma\delta \\ \gamma \neq \delta}} \Omega_{\gamma\delta} M_{\alpha\beta\gamma} \sum_i \frac{\partial M_{\alpha\beta\delta}}{\partial x_{i1}} x_{i1} \right]$$

(*) V. la Nota: *Un teorema sui determinanti*, Rend. Ist. Lomb., S. II, t. 45 (1912), pp. 556-559.

$$+3\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial G}{\partial S_{\alpha\beta}}M^2_{\alpha\beta 1}\,\Omega_{11}+4\sum_{\substack{\alpha\beta t\\ t>1}}\frac{\partial G}{\partial S_{\alpha\beta}}M_{\alpha\beta 1}\,M_{\alpha\beta t}\,\Omega_{1t}$$

$$+\sum_{\substack{\alpha\beta h\\ h>1}}\frac{\partial G}{\partial S_{\alpha\beta}}M^2_{\alpha\beta h}\,\Omega_{hh}+2\sum_{\substack{\alpha\beta hk\\ h,k\neq 1;\,h<k}}\frac{\partial G}{\partial S_{\alpha\beta}}M_{\alpha\beta h}\,M_{\alpha\beta k}\,\Omega_{hk}.$$

Ora:

$$\sum_i \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_{i1}}\,x_{i1}=\xi_\alpha,$$

$$\sum_i \frac{\partial M_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_{i1}}\,x_{i1}=\begin{cases}0\\ M_{\alpha\beta\gamma}\end{cases}\quad \text{per } \gamma \begin{matrix}=\\ >\end{matrix} 1,$$

quindi:

$$Y_{11}\,F=\sum_\alpha\frac{\partial G}{\partial \xi_\alpha}\xi_\alpha+\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial G}{\partial S_{\alpha\beta}}\Big[2\sum_{\gamma>1}\Omega_{\gamma\gamma}\,M^2_{\alpha\beta}+2\sum_{\delta>1,\gamma\neq\delta}\Omega_{\gamma\delta}\,M_{\alpha\beta\gamma}\,M_{\alpha\beta\delta}$$

$$+3\,\Omega_{11}\,M^2_{\alpha\beta 1}+4\sum_{t>1}\Omega_{1t}\,M_{\alpha\beta 1}\,M_{\alpha\beta t}+\sum_{h>1}\Omega_{hh}\,M_{\alpha\beta h}$$

$$+2\sum_{h,k>1;\,h<k}\Omega_{hk}\,M_{\alpha\beta h}\,M_{\alpha\beta k}\Big]$$

$$=\sum_\alpha\frac{\partial G}{\partial \xi_\alpha}\,\xi_\alpha+\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial G}{\partial S_{\alpha\beta}}\Big\{3\sum_h\Omega_{hh}\,M^2_{\alpha\beta h}+6\sum_{\substack{hk\\ h<k}}\Omega_{hk}\,M_{\alpha\beta k}\,M_{\alpha\beta k}\Big\},$$

ossia:

$$Y_{11}\,F=\sum_\alpha\frac{\partial G}{\partial \xi_\alpha}\,\xi_\alpha+3\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial G}{\partial S_{\alpha\beta}}\,S_{\alpha\beta},$$

sicchè la (25) diviene:

$$\sum_\alpha\frac{\partial G}{\partial \xi_\alpha}\,\xi_\alpha+3\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial G}{\partial S_{\alpha\beta}}\,S_{\alpha\beta}=G.$$

Affinchè questa relazione sussista, è necessario e sufficiente che la funzione G sia omogenea di primo grado rispetto alle ξ_α ed alle $\sqrt[3]{S_{\alpha\beta}}$.

4. Reciprocamente, se Φ è una funzione delle x_i, ξ_i, S_{ij}, omogenea positiva di primo grado rispetto alle ξ_i, $\sqrt[3]{S_{ij}}$, il valore dell'integrale I è indipendente dalla scelta dei parametri.

Sia $v_1,\ldots,\overline{v_n}$ un nuovo sistema di parametri tale che:

$$\frac{d\,(\overline{v_1},\ldots,\overline{v_n})}{d\,(v_1,\ldots,v_n)}=\Delta$$

sia positivo in tutto il campo considerato; soprassegniamo tutti gli elementi relativi al nuovo sistema di parametri, poniamo:

$$\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial v_h} = u_{rh},$$

e indichiamo con U_{rh} il complemento algebrico di u_{rh} nel determinante Δ delle u. Sarà:

$$x_{ih} = \sum_r \bar{x}_{ir} u_{rh},$$

quindi:

$$\xi_i = \Delta \bar{\xi}_i,$$

$$M_{ijh} = \sum_r \bar{M}_{ijr} U_{rh};$$

inoltre:

$$x_{ihk} = \sum_r \bar{x}_{ir} \frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial v_h \partial v_k} + \sum_{rs} \bar{x}_{irs} u_{rh} u_{sk}.$$

Di qui segue:

$$\Omega_{hk} = \sum_i \xi_i x_{ihk} = \Delta \sum_r \frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial v_h \partial v_k} \sum_i \bar{\xi}_i \bar{x}_{ir} + \Delta \sum_{rj} u_{rh} u_{sk} \sum_i \bar{\xi}_i \bar{x}_{irs},$$

ossia:

$$\Omega_{hk} = \Delta \sum_{rs} \bar{\Omega}_{rs} u_{rh} u_{sk},$$

essendo:

$$\sum_i \bar{\xi}_i \bar{x}_{ir} = 0;$$

e poscia:

$$S_{ij} = \sum_{hk} \Omega_{hk} M_{ijh} M_{ijk} = \Delta \sum_{hkrs\alpha\beta} \bar{\Omega}_{rs} u_{rh} u_{sk} \bar{M}_{ij\alpha} \bar{M}_{ij\beta} U_{\alpha h} U_{\beta k}$$

$$= \Delta \sum_{rs} \bar{\Omega}_{rs} \sum_{\alpha\beta} \bar{M}_{ij\alpha} \bar{M}_{ij\beta} \sum_h u_{rh} U_{\alpha h} \sum_k u_{sk} U_{\beta k}.$$

Ora:

$$\sum_h u_{rh} U_{\alpha h} = \begin{cases} \Delta \\ 0 \end{cases} \text{per } \alpha \begin{matrix} = \\ \neq \end{matrix} r, \quad \sum_k u_{sk} U_{\beta k} = \begin{cases} \Delta \\ 0 \end{cases} \text{per } \beta \begin{matrix} = \\ \neq \end{matrix} s,$$

quindi:

$$S_{ij} = \Delta^3 \sum_{rs} \bar{\Omega}_{rs} \bar{M}_{ijr} \bar{M}_{ijs},$$

ossia:

$$S_{ij} = \Delta^3 \overline{S}_{ij}.$$

Ne risulta, per le ipotesi fatte:

$$\Phi = G(x_i, \xi_i, S_{ij}) = G(x_i, \Delta \overline{\xi}_i, \Delta^3 \overline{S_{ij}}) = \Delta G(x_i, \overline{\xi}_i, S_{ij}),$$

donde segue immediatamente che il valore di I non cambia.

Concludendo: *Affinchè l'integrale considerato abbia valore indipendente dalla scelta dei parametri, è necessario e sufficiente che Φ sia una funzione delle x_i, ξ_i, S_{ij}, omogenea-positiva di primo grado rispetto alle ξ_i, $\sqrt[3]{S_{ij}}$.*

5. Una funzione che soddisfa alle condizioni del teorema è $\Theta^{\frac{1}{n+2}}$, dove Θ denota il determinante delle Ω_{hk}.

Anzitutto, per essere $\Theta^{\frac{1}{n+2}}$ funzione delle sole Ω_{hk}, soddisfa alle (8). Inoltre si ha, considerando che il determinante Θ è simmetrico:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \Omega_{rr}} \Omega_{rr} + \frac{1}{2} \sum_{t \neq r} \frac{\partial \Theta}{\partial \Omega_{rt}} \Omega_{rt} = \Theta \quad (r = 1, \ldots, n),$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \Omega_{rr}} \Omega_{sr} + \frac{1}{2} \sum_{t \neq r} \frac{\partial \Theta}{\partial \Omega_{rt}} \Omega_{st} = 0 \quad (r, s = 1, \ldots, n;\ r \neq s),$$

e dalla prima di queste:

$$\sum_r \frac{\partial \Theta}{\partial \Omega_{rr}} \Omega_{rr} + \sum_{\substack{rt \\ r<t}} \frac{\partial \Theta}{\partial \Omega_{rt}} \Omega_{rt} = n \Theta.$$

Ne segue:

$$Y_{rs} \Theta = 0 \quad (r \neq s),$$

$$Y_{11} \Theta = 3 \frac{\partial \Theta}{\partial \Omega_{11}} \Omega_{11} + 2 \sum_{t=2}^{n} \frac{\partial \Theta}{\partial \Omega_{1t}} \Omega_{1t} + \sum_{\substack{h,k=2 \\ h \leq k}}^{n} \frac{\partial \Theta}{\partial \Omega_{hk}} \Omega_{hk}$$

$$= 3 \frac{\partial \Theta}{\partial \Omega_{11}} \Omega_{11} + 2 \sum_{t=2}^{n} \frac{\partial \Theta}{\partial \Omega_{1t}} \Omega_{1t} + \sum_{h=2}^{n} \frac{\partial \Theta}{\partial \Omega_{hh}} \Omega_{hh} + \sum_{\substack{h,k=2 \\ h<k}}^{n} \frac{\partial \Theta}{\partial \Omega_{hk}} \Omega_{hk}$$

$$= 2 \frac{\partial \Theta}{\partial \Omega_{11}} \Omega_{11} + \sum_{t=2}^{n} \frac{\partial \Theta}{\partial \Omega_{1t}} \Omega_{1t} + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \Theta}{\partial \Omega_{hh}} \Omega_{hh} + \sum_{\substack{h,k=1 \\ h<k}}^{n} \frac{\partial \Theta}{\partial \Omega_{hk}} \Omega_{hk} = (n+2) \Theta,$$

ed analogamente:

$$Y_{rr'}\,\Theta = (n+2)\,\Theta,$$

e infine:

$$Y_{rs}\,\Theta^{\frac{1}{n+2}} = 0 \qquad (r \neq s),$$

$$Y_{rr}\,\Theta^{\frac{1}{n+2}} = \Theta,$$

relazioni che provano l' asserto.

Ne risulta che Θ è esprimibile come funzione delle x_i, ξ_i, S_{ij}, omogenea-positiva di grado $n+2$ rispetto alle ξ_i, $\sqrt[3]{S_{ij}}$.

6. L'equazione di Eulero-Lagrange (*) può scriversi:

$$Q_i \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial}{\partial v_h}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{ih}}\right) + \sum_{\substack{h,k=1\\ h\leq k}}^{n} \frac{\partial^2}{\partial v_h\, \partial v_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihk}}\right) = 0, \tag{26}$$

dove i è uno qualunque dei numeri $1,\ldots, n+1$.

È facile dimostrare che le $n+1$ equazioni (26) sono tra loro equivalenti.

Possiamo scrivere:

$$Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \sum_h \frac{\partial}{\partial v_h}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{ih}}\right) + \sum_h \frac{\partial^2}{\partial v_h^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihh}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{hk\\ h\neq k}} \frac{\partial^2}{\partial v_h\,\partial v_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihk}}\right).$$

Formiamo l'espressione:

$$V_r \equiv \sum_{i=1}^{n+1} Q_i\, x_{ir} = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\, x_{ir} - \sum_{ih} \frac{\partial}{\partial v_h}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{ih}}\right) x_{ir} + \sum_{ih} \frac{\partial^2}{\partial v_h^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihh}}\right) x_{ir}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{\substack{ihk\\ h\neq k}} \frac{\partial^2}{\partial v_h\,\partial v_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihk}}\right) x_{ir}.$$

Si ha in generale:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v_h}\,\beta = \frac{\partial}{\partial v_h}(\alpha\,\beta) - \alpha\,\frac{\partial \beta}{\partial v_h},$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial v_h\,\partial v_k}\,\beta = \frac{\partial^2}{\partial v_h\,\partial v_k}(\alpha\,\beta) - \frac{\partial}{\partial v_h}\left(\alpha\,\frac{\partial \beta}{\partial v_k}\right) - \frac{\partial}{\partial v_k}\left(\alpha\,\frac{\partial \beta}{\partial v_h}\right) + \alpha\,\frac{\partial^2 \beta}{\partial v_h\,\partial v_k}.$$

(*) L'equazione differenziale da cui dipende la risoluzione del problema fondamentale del Calcolo delle variazioni per gli integrali semplici fu stabilita per la prima volta da Eulero. L'equazione corrispondente per gli integrali doppi fu data da Lagrange per il problema delle superficie d'area minima. Sembra giusto pertanto designare col nome di *equazione di* Eulero-Lagrange quella che determina i massimi e i minimi degli integrali multipli.

Applicando queste formole, ed osservando che:

$$\sum_{ihk} \frac{\partial}{\partial v_h}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihk}} x_{irk}\right) = \sum_{ihk} \frac{\partial}{\partial v_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihk}} x_{irh}\right),$$

risulta:

$$V_r = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} x_{ir} + \sum_{ih} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ih}} x_{irh} + \sum_{ih} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihh}} x_{irhh} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{ihk \\ h \neq k}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihk}} x_{irhk}$$

$$- \sum_h \frac{\partial}{\partial v_h}\left[\sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ih}} x_{ir} + 2 \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihh}} x_{irh} + \sum_{\substack{ik \\ h \neq k}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihk}} x_{irk}\right]$$

$$+ \sum_h \frac{\partial^2}{\partial v_h^2}\left[\sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihh}} x_{ir}\right] + \frac{1}{2} \sum_{\substack{hk \\ h \neq k}} \frac{\partial^2}{\partial v_h \partial v_k}\left[\sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihk}} x_{ir}\right],$$

ossia:

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial v_r} - \sum_h \frac{\partial}{\partial v_h} (X_{rh} \Phi) + \sum_{hk} \frac{\partial^2}{\partial v_h \partial v_k} (U_{rhk} \Phi),$$

e quindi, per le (6), (7), (8):

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial v_r} - \frac{\partial \Phi}{\partial v_r} = 0.$$

Dalle n equazioni $V_r = 0$ segue:

$$\frac{Q_1}{\xi_1} = \cdots = \frac{Q_{n+1}}{\xi_{n+1}}.$$

7. Vediamo quali sono le condizioni perchè nell'equazione di Eulero-Lagrange manchino le derivate del 4.° ordine delle x_i.

Queste derivate compaiono soltanto nello sviluppo dei termini:

$$\frac{\partial^2}{\partial v_h \partial v_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihk}}\right).$$

Ora:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihk}} = \xi_i \frac{\partial F}{\partial \Omega_{hk}},$$

quindi:

$$\frac{\partial}{\partial v_h}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihk}}\right) = \xi_i \frac{\partial}{\partial v_h}\left(\frac{\partial F}{\partial \Omega_{hk}}\right) + \cdots = \xi_i \sum_{rs} \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega_{hk} \partial \Omega_{rs}} \frac{\partial \Omega_{rs}}{\partial v_h} + \cdots$$

$$= \xi_i \sum_{rs} \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega_{hk} \partial \Omega_{rs}} \sum_j \xi_j x_{jrsh} + \cdots,$$

dove i termini omessi non contengono derivate delle x_i d'ordine superiore al secondo; e di qui:

$$\frac{\partial^2}{\partial v_h \, \partial v_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{ihk}}\right) = \xi_i \sum_{rs} \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega_{hk} \, \partial \Omega_{rs}} \sum_j \xi_j x_{jrshk} + \cdots,$$

dove i termini omessi non contengono derivate delle x_i d'ordine superiore al terzo. L'insieme dei termini di 4.° ordine è dunque:

$$\xi_i \sum_{jhkrs} \xi_j \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega_{hk} \, \partial \Omega_{rs}} x_{jrshk}.$$

Tenendo conto che i 4 ultimi indici di x_{jrshk} sono tra loro permutabili, e che lo sono pure i due indici di Ω_{hk} e di Ω_{rs}, può concludersi che le condizioni affinchè manchino i termini di 4.° ordine sono:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \Omega_{hk} \, \partial \Omega_{rs}} + \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega_{hr} \, \partial \Omega_{ks}} + \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega_{hs} \, \partial \Omega_{kr}} = 0;$$

h, k, r, s sono numeri qualunque, distinti o no, della serie $1, \ldots, n$. Questo sistema coincide con quello considerato da J. Kürschàk (*); e però, in base ai risultati ottenuti da questo autore, si può concludere che F dev'essere una funzione lineare di Θ e dei suoi minori, e che l'equazione di Eulero-Lagrange si riduce al secondo ordine.

Evidentemente poi i coefficienti della F, i quali dipenderanno dalle x_i, x_{ih}, devono esser tali che F risulti funzione delle x_i, ξ_i, S_{ij}, e che sieno soddisfatte le condizioni d'omogeneità sopra stabilite. È facile vedere che il coefficiente d'un minore d'ordine m di Θ dev'essere omogeneo di grado $n - m(n+2)$ nelle x_{ih}. In particolare, poichè Θ è una funzione delle x_i, ξ_i, S_{ij}, il suo coefficiente sarà una funzione delle x_i, ξ_i, omogenea di grado $-(n+1)$ nelle ξ_i.

Pavia, 2 luglio 1912.

(*) *Ueber symmetrische Matrices*, Math. Ann., t. 58 (1904), pp. 380-384; *Ueber eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung*, Math. Ann., t. 60 (1905), pp. 157-165.

Einiges über Kugelkomplexe.

(*Von* A. V. Bäcklund, *in Lund*.)

EINLEITUNG.

Durch seine Arbeiten über die Theorie der Variation der Konstanten in den Problemen der Mechanik in *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France* für die Jahre 1808 und 1809 hat Lagrange sowohl die Berechnung der planetarischen Störungen sichergestellt als auch vielen weitergehenden Untersuchungen auf dem Gebiete der Mathematik einen Weg gebahnt. Dass sich die Lagrangesche und noch deutlicher die bald darauf erschienene Poissonsche Theorie der Variation der Konstanten wesentlich mit der Lieschen Teorie der Berührungstransformationen vom Jahre 1871 deckt, habe ich in meiner Abhandlung vom 1910 in *K. Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar*, Bd. 46 hervorzuheben Gelegenheit gehabt. Aber es gibt noch andere mathematische Theorien mit demselben allgemeinen Ziele, vom Einfacheren aus in das Verwickeltere einzudringen, die gleichfalls als in der Methode der Variation der Konstanten enthalten aufzufassen sind. Gehen wir z. B. von der allgemeinen Kugelgleichung in rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten x, y, z:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-d^2=0 \tag{A}$$

aus und bilden wir die Gleichungen der Flächenelemente der Kugel:

$$\left.\begin{aligned} x-a+p\,(z-c)=0\,, \\ y-b+q\,(z-c)=0\,; \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

deuten wir dann die Konstanten a, b, c als Cartesische Punktkoordinaten eines zweiten Raumes R' und variieren wir sowohl diese Konstanten als die Konstante d: so liegt es sehr nahe, in (B) die Formulierung einer bestimmten Beziehung der zwei dreidimensionalen Räume $R\,(x,\,y,\,z)$ und $R'\,(a,\,b,\,c)$ zu einander, oder anders ausgedrückt, eine Transformation dieser Räume in einander zu sehen. Dass wir nachträglich den Unterschiel zwischen diesen Räumen aufheben müssen, um den Zusammenhang der gegebenen und der transformierten, d. h. der einander entsprechenden Figuren in R und R' als einen Zusammenhang unter Figuren des gewöhnlichen Raumes zu erkennen, wird selbstverständlich keinen Schwierigkeiten begegnen. Bei der Transformation (B) kommt man nun von einem beliebigen Flächenelemente in R zu seinem Lote als der entsprechenden Figur in R', ferner von einer Fläche in R zu ihrer Evolutenfläche in R', dagegen von einer beliebigen Fläche des letzteren Raumes zu ihren Evolventenflächen als entsprechenden Figuren in R. Diese Flächen bilden aber die Gesamtheit aller Integralflächen einer von der angenommenen Fläche in R' völlig bestimmten partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Hieraus folgt sofort, dass wir in (B) keine Liesche Berührungstransformation vor uns haben, denn bei jeder solchen wird eine Fläche sowohl des einen wie des anderen Raumes nur in Punkt, Kurve oder Fläche, niemals in eine Schar von Flächen verwandelt. Die vorliegende Transformation gehört vielmehr einer Klasse von unendlichdeutigen Flächentransformationen an, die von mir in Bd. XI der *Math. Annalen* behandelt worden sind. Ihrem ganzen Inhalte nach muss sie jedoch ohnehin längst als bekannt angesehen werden. Ich knüpfe indessen an diese Transformation die folgenden Erörterungen, die in gewissem Sinne eine Erweiterung ihres Umfanges bedeuten.

§ 1.

Differentialgleichungen der Kugelkomplexe.

1. Aus den ∞^4 Kugeln:

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2-R^2=0, \tag{1}$$

wobei x, y, z die Mittelpunktskoordinaten und R den Radius darstellen, werden durch die Gleichung

$$F(x, y, z, R)=0 \tag{2}$$

ihrer dreifach unendlich viele ausgeschieden. Ihr Inbegriff wird von Lie als

Kugelkomplex bezeichnet und kann, wie er gezeigt hat, nach den für die PLÜCKERschen Linienkomplexe gegebenen Regeln untersucht werden. LIE hat nämlich eine völlig bestimmte Korrespondenz zwischen Kugeln und Geraden, zwischen Kugel- und Linienkomplexen aufgestellt. Auch auf die Korrespondenz zwischen den Flächen und den von ihren Hauptkugeln gebildeten Kugelkongruenzen hat er aufmerksam gemacht. *Dabei werden einem gegebenen Kugelkomplexe alle Flächen entsprechen, deren Hauptkugeln der einen Schar in diesem Komplexe enthalten sind.*

Jedes Flächenelement $(z'\,x'\,y'\,p'\,q')$ einer in dieser Weise dem Komplexe (2) angehörenden Fläche muss zugleich Berührungselement zweier unendlich benachbarter Komplexkugeln $(x\,y\,z\,R)$, $(x+d\,x,\ldots,\ R+d\,R)$ sein, und daher ist sowohl

$$\left.\begin{aligned} x'-x+p'(z'-z)&=0,\\ y'-y+q'(z'-z)&=0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

als auch

$$R\,d\,x=-(x'-x)\,d\,R,\quad R\,d\,y=-(y'-y)\,d\,R,\quad R\,d\,z=-(z'-z)\,d\,R, \tag{4}$$

womit

$$\left.\begin{aligned} R\,d\,x-p'(z'-z)\,d\,R&=0,\\ R\,d\,y-q'(z'-z)\,d\,R&=0,\\ R\,d\,z+\quad(z'-z)\,d\,R&=0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Weil nun bei Anwendung dieser Werte der Differentiale $d\,x,\ldots,\ d\,R$

$$\frac{\partial F}{\partial x}d\,x+\frac{\partial F}{\partial y}d\,y+\frac{\partial F}{\partial z}d\,z+\frac{\partial F}{\partial R}d\,R=0,$$

so muss sein

$$\frac{\partial F}{\partial x}p'+\frac{\partial F}{\partial y}q'-\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{R}{z'-z}\frac{\partial F}{\partial R}=0. \tag{6}$$

Die Elimination von x, y, z, R aus den fünf Gleichungen (1), (2), (3), (6) *ergibt dann eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung*

$$\Phi\,(z',\ x',\ y',\ p',\ q')=0 \tag{7}$$

als Bild von (2) *in R'_3, wenn diesem Kugelkomplexe nur die Bedeutung des Repräsentanten der oben angegebenen Flächenschar beigelegt wird.* Von LIE, der die Gleichung (7) zuerst aufgestellt und behandelt hat, wurde sie als partielle Differentialgleichung D_{12} des Komplexes bezeichnet (*).

2. Für die vom Elemente $(z' x' y' p' q')$ ausgehende charakteristische Richtung von (7) gilt es, dass

$$d x' = \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial p'}, \quad d y' = \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial q'}, \quad d z' = p' d x' + q' d y', \tag{8}$$

ε infinitesimal; aber

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p'} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p'} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p'} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p'} + \frac{\partial F}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial p'},$$

wobei nach (3)

$$\frac{\partial x}{\partial p'} = z' - z - p'\frac{\partial z}{\partial p'}, \quad \frac{\partial y}{\partial p'} = -q'\frac{\partial z}{\partial p'},$$

daher

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p'} = \frac{\partial F}{\partial x}(z' - z) - \left(\frac{\partial F}{\partial x}p' + \frac{\partial F}{\partial y}q' - \frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial p'} + \frac{\partial F}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial p'},$$

oder weil nach (1) und (3)

$$(z' - z)\sqrt{1 + p'^2 + q'^2} = R$$

und demnach

$$\frac{\partial R}{\partial p'} + \frac{R}{z' - z}\frac{\partial z}{\partial p'} + \frac{x' - x}{R}(z' - z) = 0,$$

schliesslich, unter Berücksichtigung von (6):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p'} = \frac{z' - z}{R}\left(R\frac{\partial F}{\partial x} - (x' - x)\frac{\partial F}{\partial R}\right). \tag{9}$$

In derselben Weise ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial q'} &= \frac{z' - z}{R}\left(R\frac{\partial F}{\partial y} - (y' - y)\frac{\partial F}{\partial R}\right), \\ p'\frac{\partial \Phi}{\partial q'} + q'\frac{\partial \Phi}{\partial q'} &= \frac{z' - z}{R}\left(R\frac{\partial F}{\partial z} - (z' - z)\frac{\partial F}{\partial R}\right). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

(*) Siehe die Abhandlung von Lie: *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen* (Math. Ann. Bd. V).

3. Die Berührungspunkte (x', y', z') der Kugel (x, y, z, R) mit unendlich benachbarten Kugeln desselben Komplexes (2) liegen auf dem Kreise (1), (6). Letztere Gleichung ist dann mittelst (3) in die Form

$$(x'-x)\frac{\partial F}{\partial x}+(y'-y)\frac{\partial F}{\partial y}+(z'-z)\frac{\partial F}{\partial z}-R\frac{\partial F}{\partial R}=0 \tag{11}$$

zu bringen, und für die Richtung jenes Kreises finden wir somit die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} d x'_1 : d y'_1 : d z'_1 &= (y'-y)\frac{\partial F}{\partial z}-(z'-z)\frac{\partial F}{\partial y} : \\ &: (z'-z)\frac{\partial F}{\partial x}-(x'-x)\frac{\partial F}{\partial z} : (x'-x)\frac{\partial F}{\partial y}-(y'-y)\frac{\partial F}{\partial x}\,. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

(Um Verwechselungen zu vermeiden, habe ich die hierauf bezüglichen Differentiale von x', y', z' unten mit dem Index 1 versehen).

Mit den Werten (8), (9), (10) und (12) von $d x'$, $d y'$, $d z'$, $d x'_1$, $d y'_1$, $d z'_1$ wird aber $d x' d x'_1 + d y' d y'_1 + d z' d z'_1$ proportional der Determinante:

$$\begin{vmatrix} R\frac{\partial F}{\partial x}-(x'-x)\frac{\partial F}{\partial R} & \frac{\partial F}{\partial x} & x'-x \\ R\frac{\partial F}{\partial y}-(y'-y)\frac{\partial F}{\partial R} & \frac{\partial F}{\partial y} & y'-y \\ R\frac{\partial F}{\partial z}-(z'-z)\frac{\partial F}{\partial R} & \frac{\partial F}{\partial z} & z'-z \end{vmatrix} \equiv 0,$$

also:

$$d x' d x'_1 + d y' d y'_1 + d z' d z'_1 = 0, \tag{13}$$

und hieraus können wir sofort einen wichtigen Schluss ziehen.

Denken wir uns eine Integralfläche von (7), die die Kugel (x, y, z, R) längs des Kreises (1), (11) oder (12) berührt. Es gibt eine und nur eine solche Integralfläche, denn nicht die Richtung (12), sondern die Richtung (8) ist die dem Elemente $(z' x' y' p' q')$ zugeordnete charakteristiche Richtung von $\Phi = 0$. Als nach (13) senkrecht zu (12) wird die Richtung (8) sowohl Richtung des Schnittes der zwei Elemente $(z' x' y' p' q')$, $(z' + d z'_1 \ldots q' + d q'_1)$ des betrachteten Berührungsstreifens (12) zwischen (1) und der gedachten Integralfläche von (7), als auch deshalb mit Bezug auf die Haupttangenten dieser Integralfläche im Punkte (x', y', z') der Richtung (12) konjugiert. Dann muss aber (8) Richtung einer Krümmungslinie derselben Fläche sein.

Noch mehr, jede Integralfläche, die das Element $(z' x' y' p' q')$ enthält, muss auch das nächstfolgende Element $(z' + d z' \ldots q' + d q')$:

$$d p' = -\varepsilon\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x'} + p' \frac{\partial \Phi}{\partial z'}\right), \quad d q' = -\varepsilon\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'} + q' \frac{\partial \Phi}{\partial z'}\right)$$

einer Charakteristik (8) von $\Phi = 0$ enthalten; also und infolge der erwähnten harmonischen Lage der Richtungen (8) und (12) muss $d p' d x'_1 + d q' d y'_1$ verschwinden, woraus zur Evidenz hervorgeht, dass diese auf einander senkrechten Richtungen (8) und (12) zu den Krümmungslinien aller Integralflächen durch $(z' x' y' p' q')$ von $\Phi = 0$ gehören. Wir sind hiermit auf einen der Lie-schen Hauptsätze aus der Theorie der Kugelkomplexe gekommen:

Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung (7) *des Kugelkomplexes* (2) *werden Krümmungslinien der Integralflächen.*

4. Die Involutionsbeziehung zweier partieller Differentialgleichungen erster Ordnung $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, nämlich die Beziehung $[\Phi \Psi] = 0$, durch die die Existenz einfach unendlich vieler den beiden Gleichungen gemeinsamer Integralflächen ausgedrückt ist, kann ganz allgemein unter der Form geschrieben werden:

$$d x' d p'' + d y' d q'' = d x'' d p' + d y'' d q', \tag{14}$$

wobei $d x'$, $d y'$, $d p'$, $d q'$ und $d x'', \ldots, d q''$ zu den vom Elemente $(z' x' y' p' q')$ ausgehenden Charakteristiken von $\Phi = 0$ bez. $\Psi = 0$ gehören (*). Wenn aber insbesonders $\Phi = 0$ die vorangehende Gleichung (7) des Kugelkomplexes (2) ist, und $\Psi = 0$ für einen zweiten Kugelkomplex

$$G(x, y, z, R) = 0 \tag{15}$$

die nämliche Bedeutung hat, so muss von jeder diesen Gleichungen gemein-

(*) Es muss nämlich sein:

$$d p' = r' d x' + s' d y' \equiv U'(d x'), \quad d q' = s' d x' + t' d y' \equiv U'(d y'), \quad d p'' = U'(d x''), \quad d q'' = U'(d y''),$$

wenn $U = \frac{1}{2}(r' d x'^2 + 2 s' d x' d y' + t' d y'^2)$; und identisch ist

$$d x' U'(d x'') + d y' U'(d y'') = d x'' U'(d x') + d y'' U'(d y'). \tag{a}$$

Die das Element $(z' x' y' p' q')$ enthaltende gemeinsame Integralfläche von $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ liefert die Grössen r', s', t', und umgekehrt liefern diese eine beiden Gleichungen gemeinsame Flächenkalotte $(z' x' y' p' q' r' s' t')$, falls (a), d. i. (14) erfüllt ist.

samen Integralfläche entweder gelten, dass die eine Schar ihrer Krümmungslinien gemeinsame Charakteristiken beider Gleichungen werden, oder dass je eine Schar der Krümmungslinien zu je einer Gleichung als Charakteristiken gehört. Im ersteren Falle wären für eine gemeinsame Integralfläche von $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ die Hauptkugeln der betreffenden Krümmungslinien in der von den Gleichungen $F = 0$, $G = 0$ bestimmten Kongruenz ihrer ∞^2 gemeinsamen Kugeln enthalten: *die an jenen Krümmungslinien haftenden ∞^1 Streifen der angenommenen Integralfläche wären als Scharen von je ∞^1 Büscheln von $(r' s' t')$ betrachtet selbst ∞^1 Integrale, und jene Fläche würde in der Tat nur ein singuläres Integral des Gleichungspaares $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ darstellen.* Wenn der Komplex $F = 0$, — ich sage bisweilen statt dessen Komplex $\Phi = 0$, — gegeben ist, wird sich ein Komplex $G = 0$ (oder $\Psi = 0$) der letzteren Art aus der Gleichung ergeben:

$$dx'\, dy'' - dy'\, dx'' = 0,$$

d. h. nach (8), (9) und (10):

$$R\frac{\partial F}{\partial x} - (x' - x)\frac{\partial F}{\partial R}, \quad R\frac{\partial F}{\partial y} - (y' - y)\frac{\partial F}{\partial R}$$

proportional zu

$$R\frac{\partial G}{\partial x} - (x' - x)\frac{\partial G}{\partial R}, \quad R\frac{\partial G}{\partial y} - (y' - y)\frac{\partial G}{\partial R},$$

woraus nach Elimination von x', y', z' vermittelst (1) und (11) und der ähnlichen Gleichung:

$$(x' - x)\frac{\partial G}{\partial x} + (y' - y)\frac{\partial G}{\partial y} + (z' - z)\frac{\partial G}{\partial z} - R\frac{\partial G}{\partial R} = 0$$

als Gleichung für G hervorgeht:

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial R}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial G}{\partial R}\right)^2\right] =$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial R}\frac{\partial G}{\partial R}\right)^2.$$

Dies ist die von Felix Klein in seiner Abhandlung *Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen* in Math. Ann. Bd. V, S. 291 zunächst für zwei Linienkomplexe einer derartigen gegenseitigen Beziehung aufgestellte Gleichung.

5. In dem Falle dagegen, dass $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ einfach unendlich viele nicht zu Streifen ausgeartete Integralflächen gemein haben, muss je eine Schar von Krümmungslinien dieser Flächen als Charakteristiken zu je einem Komplexe gehören, und demgemäss wird die eine Schar der Hauptkugeln der Integralflächen den einen Komplex und die andere den anderen ausfüllen. Die auf den gemeinsamen Integralflächen verlaufenden Charakteristiken der beiden Gleichungen müssen dann als Krümmungslinien dieser Flächen auf einander senkrecht stehen, was man durch die Gleichung ausdrücken kann:

$$d\,x'\,d\,x'' + d\,y'\,d\,y'' + d\,z'\,d\,z'' = 0, \tag{16}$$

wobei man selbstverständlich $d\,x'$, $d\,y'$, $d\,z'$; $d\,x''$, $d\,y''$, $d\,z''$ auf dasselbe den beiden Gleichungen $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ gemeinsame Element $(z'\,x'\,y'\,p'\,q)$ zu beziehen hat. Wenn dann (x, y, z, R), (x_1, y_1, z_1, R_1) die beiden das Element $(z'\,x'\,y'\,p'\,q')$ enthaltenden Kugeln der zwei Komplexe (2) und (15) sind, die nun auch Hauptkugeln einer *gemeinsamen* Integralfläche von $\Phi = 0$, $\Psi - 0$ im Punkte (x', y', z') werden, so ist zunächst nach (8)-(10)

$$d\,x' : d\,y' : d\,z' = R\frac{\partial F}{\partial x} - (x' - x)\frac{\partial F}{\partial R} :$$

$$: R\frac{\partial F}{\partial y} - (y' - y)\frac{\partial F}{\partial R} : R\frac{\partial F}{\partial z} - (z' - z)\frac{\partial F}{\partial R},$$

oder es ergeben sich, weil hier nach der angegebenen Bedeutung der Parameter $x, y, z, R, x_1, \ldots, R_1$:

$$\frac{x' - x}{R} = \frac{x' - x_1}{R_1} = -\frac{x - x_1}{R - R_1}, \quad \frac{y' - y}{R} = -\frac{y - y_1}{R - R_1}, \quad \frac{z' - z}{R} = -\frac{z - z_1}{R - R_1} \cdot \tag{17}$$

die von x', y', z' freien Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} d\,x' : d\,y' : d\,z' = (R - R_1)\frac{\partial F}{\partial x} + (x - x_1)\frac{\partial F}{\partial R} : \\ : (R - R_1)\frac{\partial F}{\partial y} + (y - y_1)\frac{\partial F}{\partial R} : (R - R_1)\frac{\partial F}{\partial z} + (z - z_1)\frac{\partial F}{\partial R}\,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Ebenso:

$$\left.\begin{aligned} d\,x'' : d\,y'' : d\,z'' = (R - R_1)\frac{\partial G}{\partial x_1} + (x - x_1)\frac{\partial G}{\partial R_1} : \\ : (R - R_1)\frac{\partial G}{\partial y_1} + (y - y_1)\frac{\partial G}{\partial R_1} : (R - R_1)\frac{\partial G}{\partial z_1} + (z - z_1)\frac{\partial G}{\partial R_1}\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Die Elimination von x', y', z' vermittelst (17) aus (1) und (11) ergibt:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2-(R-R_1)^2=0, \tag{20}$$

$$(x-x_1)\frac{\partial F}{\partial x}+(y-y_1)\frac{\partial F}{\partial y}+(z-z_1)\frac{\partial F}{\partial z}+(R-R_1)\frac{\partial F}{\partial R}=0; \tag{21}$$

und es gilt offenbar auch:

$$(x-x_1)\frac{\partial G}{\partial x_1}+(y-y_1)\frac{\partial G}{\partial y_1}+(z-z_1)\frac{\partial G}{\partial z_1}+(R-R_1)\frac{\partial G}{\partial R_1}=0. \tag{22}$$

Auf Grund dieser Gleichungen nimmt (16) die Form an:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y_1}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z_1}-\frac{\partial F}{\partial R}\frac{\partial G}{\partial R_1}=0. \tag{23}$$

Die geometrische Betrachtung, die oben zu (16) geführt hat, können wir jedoch ebensogut durch irgend eine der folgenden Gleichungen abschliessen, wie

$$d\,x'\,d\,y''_1-d\,y'\,d\,x''_1=0,$$

die mit

$$d\,x'\,d\,p''+d\,y'\,d\,q''=0 \tag{a}$$

identisch ausfällt, oder

$$d\,x''\,d\,y'_1-d\,y''\,d\,x'_1=0,$$

die gleichbedeutend ist mit,

$$d\,x''\,d\,p'+d\,y''\,d\,q'=0. \tag{b}$$

Jede führt zu (23). Wegen (a), (b) wird aber (14) erfüllt. *Die Gleichung* (23) *bildet daher die nötige und hinreichende Involutionsbedingung für* $\Phi=0$, $\Psi=0$.

6. In meiner Abhandlung vom Jahre 1873: *Ett bidrag till kulkomplexernas theori* in *Lunds universitets årsskrift Bd. IX*, habe ich vor langem diesen Satz abgeleitet und zugleich seinen Zusammenhang mit einem Satze von den Evolutenflächen hervorgehoben. Ich fasste dabei die Kugeln des R_3 als Punkte eines R_4 auf, betrachtete jedoch als Koordinaten der Punkte dieses R_4 nicht die früheren Kugelparameter x, y, z, R sondern folgende x_1, x_2, x_3, x_4:

$$x_1=x, \quad x_2=y, \quad x_3=z, \quad x_4=R\sqrt{-1}.$$

Die oben entwickelten Gleichungen (20)-(23) nehmen dann die mehr symmetrische Form an:

$$(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 + (x_4 - x'_4)^2 = 0, \tag{24}$$

$$(x_1 - x'_1)\frac{\partial F}{\partial x_1} + (x_2 - x'_2)\frac{\partial F}{\partial x_2} + (x_3 - x'_3)\frac{\partial F}{\partial x_3} + (x_4 - x'_4)\frac{\partial F}{\partial x_4} = 0, \tag{25}$$

$$(x_1 - x'_1)\frac{\partial G}{\partial x'_1} + (x_2 - x'_2)\frac{\partial G}{\partial x'_2} + (x_3 - x'_3)\frac{\partial G}{\partial x'_3} + (x_4 - x'_4)\frac{\partial G}{\partial x'_4} = 0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial G}{\partial x'_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial G}{\partial x'_2} + \frac{\partial F}{\partial x_3}\frac{\partial G}{\partial x'_3} + \frac{\partial F}{\partial x_4}\frac{\partial G}{\partial x'_4} = 0, \tag{27}$$

wobei die Kugelkomplexe (2) und (15) durch die Gleichungen:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad G(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = 0 \tag{28}$$

dargestellt sind. Es haben selbstverständlich $x'_1, \ldots, x'_4$ die Bedeutung der früheren $x_1, \ldots, R_1\sqrt{-1}$. Dann kann ich mich wie am angeführten Orte über diese Involution (*) zweier Kugelkomplexe (28) folgendermassen ausdrücken.

Wenn in einem R_4, der die Kugeln eines R_3 zu Punkten hat, zwei Flächen, Punktmannigfaltigkeiten dreier Dimensionen, zwei Kugelkomplexe des R_3 darstellen, deren partielle Differentialgleichungen ∞^1 Integralflächen gemein haben, so werden sich ihre Tangentenebenen in den zwei Berührungspunkten einer beliebigen ihnen gemeinsamen Tangente von der Länge null senkrecht schneiden; und wenn letzteres der Fall ist, so müssen umgekehrt die betreffenden Kugelkomplexe involutorisch sein. Oder kürzer: *zwei Flächen des R_4, die zwei involutorische Kugelkomplexe in R_3 vertreten, verhalten sich in Bezug auf ihre gemeinsamen Tangenten von der Länge null wie die beiden Mantelflächen einer Evolute des R_3 mit Bezug auf ihre sämtlichen gemeinsamen Tangenten.*

Die beiden Mantelflächen einer Evolute sind natürlich selbst als involutorische Kugelkomplexe besonderer Art aufzufassen. (Wenn x_4 und x'_4 nicht in F und G eingehen, liegt dieser Fall vor).

7. Wenn einer der Komplexe (28) gegeben ist, z. B. $F = 0$, erhält man den anderen, also jetzt $G = 0$, durch eine partielle Differentialgleichung erster

(*) Das Wort « Involution » bezieht sich hier nur auf die partiellen Differentialgleichungen der Komplexe und hat für sie die spezielle Bedeutung, dass sie einfach unendlich viele Integralflächen gemein haben.

Ordnung, nämlich durch diejenige, die aus $F=0$ und den Gleichungen (24)-(27) durch Elimination von x_1, x_2, x_3, x_4 entsteht. Aber wenn nicht $F=0$, sondern eine Gleichung der allgemeineren Form:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = 0 \tag{29}$$

vorliegt, bietet die Bestimmung von $G=0$ weit grössere Schwierigkeiten dar. Wir sehen dies daraus, dass die Elimination der Grössen x, wenn neben (29) auch $F=0$ gegeben wäre, zu nicht weniger als zwei partiellen Differentialgleichungen 1. O. für G führen würde, und dass diese Gleichungen nur ausnahmsweise ein solches Integral wie $G=0$ gemeinsam hätten. Es tritt uns deshalb hier die andere Frage entgegen, wie man F zu bestimmen hat, damit jene zwei partiellen Differentialgleichungen 1. O. in $R'_4\,(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ wenigstens eine Integral-M_3 gemeinsam besitzen.

Um diese Aufgabe zu lösen, deuten wir zunächst x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3 als unabhängige Variablen, schreiben z, z' statt x_4, x'_4 und betrachten sie als von x_1, x_2, x_3 bez. x'_1, x'_2, x'_3 abhängig; wir fassen ferner die Gleichungen (24)-(27), (29), d. h.

$$\left.\begin{aligned}
F_1 &\equiv (z-z')^2 + (x_1-x'_1)^2 + (x_2-x'_2)^2 + (x_3-x'_3)^2 = 0,\\
F_2 &\equiv z-z' - p_1(x_1-x'_1) - p_2(x_2-x'_2) - p_3(x_3-x'_3) = 0,\\
F_3 &\equiv z-z' - p'_1(x_1-x'_1) - p_2(x_2-x'_2) - p_3(x_3-x'_3) = 0,\\
F_4 &\equiv 1 + p_1p'_1 + p_2p'_2 + p_3p'_3 = 0,\\
F_5 &\equiv f(z, x_1, x_2, x_3, z', x'_1, x'_2, x'_3) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

als Transformationsgleichungen zweier Gebiete (z, x_1, x_2, x_3), (z', x'_1, x'_2, x'_3) oder zweier Räume R_4, R'_4 in einander. Ziehen wir dann in R_4 beliebig eine M_3: $z=\varphi(x_1, x_2, x_3)$, führen wir ferner in F_1, F_2, F_3 für z, p_1, p_2, p_3 die Werte φ, $\partial\varphi \,|\, \partial x_1$, $\partial\varphi\ \partial x_2$, $\partial\varphi \,|\, \partial x_3$ ein und verwenden wir nachher die Gleichungen $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ zur Bestimmung von x_1, x_2, x_3, so nehmen mit diesen Werten von $z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$ die beiden letzten Gleichungen von (30) die Form an:

$$\left.\begin{aligned}
F'_4(z', x'_1, x'_2, x'_3, p'_1, p'_2, p'_3) &= 0.\\
F'_5(z', x_1, x''_2, x'_3, p'_1, p'_2, p'_3) &= 0,
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

und durch die Elemente $(z'x'p')$ einer ihnen beiden möglicherweise genügenden M'_3 wird bekanntlich auch die Poissonsche Relation

$$[F'_4 F'_5] = 0 \tag{32}$$

befriedigt. Aber

$$[F'_4\,F'_5] = [F_4\,F'_5]_{R'} + \sum_{i=1}^{3} \frac{d\,F_4}{d\,x_i}\,[x_i\,F'_5\,]_{R'}$$

$$= [F_4\,F_5]_{R'} + \sum_{i=1}^{3} \frac{d\,F_4}{d\,x_i}\,[x_i\,F_5]_{R'} + \sum_{i=1}^{3} \frac{d\,F_5}{d\,x_i}\,[F_4\,x_i]_{R'} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \frac{d\,F_4}{d\,x_i}\,\frac{d\,F_5}{d\,x_k}\,[x_i\,x_k]_{R'}\,,$$

wobei

$$\frac{dF_m}{d\,x_i} = \frac{\partial\,F_m}{\partial\,x_i} + p_i\,\frac{\partial\,F_m}{\partial\,z} + p_{1i}\,\frac{\partial\,F_m}{\partial\,p_1} + p_{2i}\,\frac{\partial\,F_m}{\partial\,p_2} + p_{3i}\,\frac{\partial\,F_m}{\partial\,p_3}\,, \quad p_{ik} = \frac{\partial^2\,z}{\partial\,x_i\,\partial\,x_k}\,,$$

ferner:

$$[F_4\,F_5]_{R'} = -\sum p_i \left(\frac{\partial\,f}{\partial\,x'_i} + p'_i\,\frac{\partial\,f}{\partial\,z'}\right) = \frac{\partial\,f}{\partial\,z'} - p_1\,\frac{\partial\,f}{\partial\,x'_1} - p_2\,\frac{\partial\,f}{\partial\,x'_2} - p_3\,\frac{\partial\,f}{\partial\,x'_3} \tag{33}$$

und (*)

$$[F_4\,F'_1] \equiv 0 = [F_4\,F_1]_{R'} + \sum \frac{d\,F_1}{d\,x_i}\,[F_4\,x_i]_{R'} = \sum \frac{d\,F_1}{d\,x_i}\,[F_4\,x_i]_{R'}\,,$$

$$[F_4\,F'_2] \equiv 0 = [F_4\,F_2]_{R'} + \sum \frac{d\,F_2}{d\,x_i}\,[F_4\,x_i]_{R'} = -\,(1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) +$$

$$+ \sum \frac{d\,F_2}{d\,x_i}\,[F_4\,x_i]_{R'}\,,$$

$$[F_4\,F'_3] \equiv 0 = [F_4\,F_3] + \sum \frac{d\,F_3}{d\,x_i}\,[F_4\,x_i]_{R'} = \sum \frac{d\,F_3}{d\,x_i}\,[F_4\,x_i]_{R'}\,,$$

woraus die Werte von $[F_4\,x_1]_{R'}$, $[F_4\,x_2]_{R'}$, $[F_4\,x_3]_{R'}$ bestimmt werden und womit wird

$$\sum \frac{d\,F_5}{d\,x_i}\,[F_4\,x_i]_{R'} = -\,(1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \left|\frac{d\,F_1}{d\,x_1}\,\frac{d\,F_3}{d\,x_2}\,\frac{d\,F_5}{d\,x_3}\right| : \left|\frac{d\,F_1}{d\,x_1}\,\frac{d\,F_2}{d\,x_2}\,\frac{d\,F_3}{d\,x_3}\right|. \tag{34}$$

Wenn wir beachten, dass

$$[F_1\,F_5]_{R'} = 0, \quad [F_2\,F_5]_{R'} = 0, \quad [F_3\,F_5]_{R'} =$$

$$= (x_1 - x'_1)\,\frac{\partial\,f}{\partial\,x'_1} + (x_2 - x'_2)\,\frac{\partial\,f}{\partial\,x'_2} + (x_3 - x'_3)\,\frac{\partial\,f}{\partial\,x'_3} + (z - z')\,\frac{\partial\,f}{\partial\,z'}\,,$$

(*) F'_1, F'_2, F'_3 identisch null. F'_i ist nämlich der Wert, den F_i nach Einführung der obigen Werte von z, x_1, x_2, x_3 annimmt. Zur Bestimmung letzterer Werte wurden aber die Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ verwandt.

finden wir in derselben Weise, bei Anwendung der Gleichungen $[F'_1 F_5] \equiv 0$, $[F'_2 F_5] \equiv 0$, $[F'_3 F_5] \equiv 0$:

$$\left.\begin{aligned} & \Sigma \frac{d F_4}{d x_i} [x_i F_5]_{R'} = \\ & -\left((x_1 - x'_1)\frac{\partial f}{\partial x'_1} + (x_2 - x'_2)\frac{\partial f}{\partial x'_2} + (x_3 - x'_3)\frac{\partial f}{\partial x'_3} + (z - z')\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ & \times \left| \frac{d F_1}{d x_1}\, \frac{d F_2}{d x_2}\, \frac{d F_4}{d x_3} \right| : \left| \frac{d F_1}{d x_1}\, \frac{d F_2}{d x_2}\, \frac{d F_3}{d x_3} \right| . \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Weil $[F_1 F_2]_{R'} = 0$, $[F_2 F_3]_{R'} = 0$, $[F_3 F_1]_{R'} = 0$, folgt aus den Gleichungen $[F'_m F_i]_{R'} \equiv 0$; $m, i = 1, 2, 3$, dass $[F_m x_i]_{R'} = 0$ und sodann aus den Gleichungen $[F'_m x_i]_{R'} \equiv 0$, immer $m, i = 1, 2, 3$, dass

$$[x_i x_m]_{R'} = 0 ; \; i, m = 1, 2, 3. \tag{36}$$

Auf Grund dieser Relationen (33)-(36) kann also im gegenwärtigen Falle die Bedingung (32) wie folgt ausgedrückt werden:

$$\left.\begin{aligned} & \left| \frac{d F_1}{d x_1}\, \frac{d F_2}{d x_2}\, \frac{d F_3}{d x_3} \right| \left(\frac{\partial f}{\partial z'} - p_1 \frac{\partial f}{\partial x'_1} - p_2 \frac{\partial f}{\partial x'_2} - p_3 \frac{\partial f}{\partial x'_3}\right) - \\ & - \left| \frac{d F_1}{d x_1}\, \frac{d F_2}{d x_2}\, \frac{d F_4}{d x_3} \right| \left((z - z')\frac{\partial f}{\partial z'} + (x_1 - x'_1)\frac{\partial f}{\partial x'_1} + \right. \\ & \qquad\qquad \left. + (x_2 - x'_2)\frac{\partial f}{\partial x'_2} + (x_3 - x'_3)\frac{\partial f}{\partial x'_3}\right) - \\ & - \left| \frac{d F_1}{d x_1}\, \frac{d F_3}{d x_2}\, \frac{d F_5}{d x_3} \right| (1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Wenn wie soeben zur Abkürzung p_{ik} statt $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_k}$ und weiter

$\psi(\xi, \eta, \zeta)$ statt $p_{11}\xi^2 + 2 p_{12} \xi \eta + 2 p_{13} \xi \zeta + p_{22} \eta^2 + 2 p_{23} \eta \zeta + p_{33} \zeta^2$

geschrieben wird, so können wir der Gleichung (37) die Form geben:

$$\left.\begin{aligned} & \psi(x_1 - x'_1,\, x_2 - x'_2,\, x_3 - x'_3)\, \Sigma\, p_i \frac{d f}{d x'_1} - \\ & - \frac{\psi(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3 - x'_3)\, \psi(p'_1, p'_2, p'_3) - \frac{1}{4}\left(\Sigma\, p'_i \psi'(x_i - x'_i)\right)^2}{1 + p'^2_1 - p'^2_2 + p'^2_3} \times \\ & \times \Sigma (x_i - x'_i) \frac{d f}{d x'_i} + (1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\, \Sigma (x_i - x'_i) \frac{d f}{d x_i} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Eine Anwendung hiervon werde ich später bei einer spezielleren Aufgabe aufzeigen.

Anmerkung. Im Falle einer durch fünf Gleichungen allgemeiner Art: $F_i(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, z', x'_1, x'_2, x'_3, p'_1, p'_2, p'_3) = 0$, $i = 1, 2, \ldots 5$, bestimmten Transformation finden wir für die Involutionsbedingung (32) die folgende zehngliedrige Form:

$$\Sigma \left| \frac{d F_a}{d x_1} \frac{d F_b}{d x_2} \frac{d F_c}{d x_3} \right| [F_d F_e]_{R'} = 0, \tag{39}$$

$a, b, c, d, e = 1, 2, \ldots, 5$, wobei jedes Glied aus einem beliebigen anderen durch von Zeichenwechsel begleitete Vertauschung je zweier der Buchstaben $a, b, \ldots, e$ hervorgeht. Aus dem Gliede

$$\left| \frac{d F_1}{d x_1} \frac{d F_2}{d x_2} \frac{d F_3}{d x_3} \right| [F_4 F_5]_{R'}$$

folgt auf diese Weise als zweites Glied der Summe (39)

$$\left| \frac{d F_1}{d x_1} \frac{d F_2}{d x_2} \frac{d F_5}{d x_3} \right| [F_3 F_4]_{R'}$$

und als drittes Glied

$$\left| \frac{d F_1}{d x_1} \frac{d F_4}{d x_2} \frac{d F_5}{d x_3} \right| [F_2 F_3]_{R'}$$

usw. — Aus der vorstehenden Beweisführung und bei genügender Berücksichtigung der Symmetrie ergibt sich ohne besondere Rechnung dieser Satz.

8. Wenn in dem in der unmittelbar vorangehenden Anmerkung betrachteten Falle die Elimination der akzentuierten Buchstaben z', x'_i, p'_i aus den sechs Gleichungen: (39) und $F_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, 5$, eine, und zwar nur *eine* von jenen Buchstaben freie Gleichung in z, x_i, p_i, p_{ik}, $i, k = 1, 2, 3$, ergibt, *so wird jeder Integral-M_3 dieser partiellen Differentialgleichung 2. O. eine ganze Schar von ∞^2 M_3 in R'_4 entsprechen.* Andernfalls haben wir noch die Integrabilitätsbedingungen:

$$\Big[F'_4\, [F'_4\, F'_5]\Big] = 0, \quad \Big[F'_5\, [F'_4\, F'_5]\Big] = 0 \tag{40}$$

aufzustellen. Wie jede in die Form (39) zu bringen ist, brauche ich nicht besonders zu erklären, da meine Ausführungen zum Falle (30) auch eine Anweisung zur Behandlung der allgemeineren Fälle geben dürften.

Der Kürze halber bezeichne ich die linke Seite von (38) mit U. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (36) erhalte ich die Gleichung

$$\left[F'_4\ [F'_4\ F'_5]\right] = 0$$

als der folgenden äquivalent:

$$[F_4\ U]_{R'} + \sum_{i=1}^{3} \frac{d\,F_4}{d\,x_i}[x_i\ U] + \sum_{i=1}^{3} \frac{d\,U}{d\,x_i}[F_4\ x_i] = 0,$$

wobei, wie oben gezeigt:

$$[F_4\ F_k]_{R'} + \sum_{i=1}^{3} \frac{d\,F_k}{d\,x_i}[F_4\ x_i] = 0,\ k = 1,\ 2,\ 3,$$

und

$$[F_k\ U]_{R'} + \sum_{i=1}^{3} \frac{d\,F_k}{d\,x_i}[x_i\ U] = 0,\ k = 1,\ 2,\ 3;$$

also kann der Bedingung $\left[F'_4\,[F'_4\ F'_5]\right] = 0$ die Fassung gegeben werden:

$$\left|\frac{d\,F_1}{d\,x_1}\,\frac{d\,F_2}{d\,x_2}\,\frac{d\,F_3}{d\,x_3}\right| [F_4\ U]_{R'} - \left|\frac{d\,F_1}{d\,x_1}\,\frac{d\,F_2}{d\,x_2}\,\frac{d\,F_4}{d\,x_3}\right| [F_3\ U]_{R'} + \left|\frac{d\,F_1}{d\,x_1}\,\frac{d\,F_3}{d\,x_2}\,\frac{d\,F_4}{d\,x_3}\right| [F_2\ U]_{R'} -$$

$$- \left|\frac{d\,F_2}{d\,x_1}\,\frac{d\,F_3}{d\,x_2}\,\frac{d\,F_4}{d\,x_3}\right| [F_1\ U]_{R'} - (1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\left|\frac{d\,F_1}{d\,x_1}\,\frac{d\,F_3}{d\,x_2}\,\frac{d\,U}{d\,x_3}\right| = 0.$$

Weil

$$[F_1\ U]_{R'} = 0\ (*),\ [F_2\ U]_{R'} = \Sigma\,(p_i - p'_i)\,\frac{\partial\,U}{\partial\,p'_i},$$

$$[F_3\ U]_{R'} = (z - z')\,\frac{\partial\,U}{\partial\,z'} + \Sigma\,(x_i - x'_i)\,\frac{\partial\,U}{\partial\,x'_i}, \qquad [F_4\ U]_{R'} = \frac{\partial\,U}{\partial\,z'} - \Sigma\,p_i\,\frac{\partial U}{\partial\,x'_i}$$

(*) Man findet nämlich:

$$\Sigma\,(x_i - x'_i)\,\frac{\partial\,U}{\partial\,p'_i} = 2\,\frac{\psi\,(x_1 - x'_1,\ x_2 - x'_2,\ x_3 - x'_3)\,\psi\,(p'_1,\ p'_2,\ p'_3) - \frac{1}{4}\left(\Sigma\,p'_i\psi'\,(x_i - x'_i)\right)^2}{(1 + p'^2_1 + p'^2_2 + p'^2_3{}^2}$$

$$\times\,\Sigma\,(x_i - x'_i)\,p'_i\,\Sigma\,(x_i - x'_i)\,\frac{d\,f}{d\,x'_i} = -\,(z - z')\,\Sigma\,p'_i\,\frac{\partial\,U}{\partial\,p'_i}\,.$$

und, $\Delta = | x_1 - x'_1, p_2, p'_3 | : (1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(1 + p'^2_1 + p'^2_2 + p'^2_3)(z - z')$ gesetzt,

$$\left|\frac{dF_1}{dx_1}\frac{dF_2}{dx_2}\frac{dF_3}{dx_3}\right| = -\frac{2\psi(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3 - x'_3)}{\Delta},$$

$$\left|\frac{dF_1}{dx_1}\frac{dF_2}{dx_2}\frac{dF_4}{dx_3}\right| = \frac{2}{\Delta}\,\frac{\psi(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3 - x'_3)\psi(p'_1, p'_2, p'_3) - \frac{1}{4}\left(\Sigma p'_i \psi'(x_i - x'_i)\right)^2}{1 + p'^2_1 + p'^2_2 + p'^2_3},$$

$$\left|\frac{dF_1}{dx_1}\frac{dF_3}{dx_2}\frac{dF_4}{dx_3}\right| = -\frac{1}{\Delta}\Sigma p'_i \psi'(x_i - x'_i),$$

$$\left|\frac{dF_1}{dx_1}\frac{dF_3}{dx_2}\frac{dU}{dx_3}\right| = -\frac{2}{\Delta}\Sigma(x_i - x'_i)\frac{dU}{dx_i},$$

ergibt sich schliesslich statt der ersten von (40) die folgende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}
&(1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\Sigma(x_i - x'_i)\frac{dU}{dx_i} - \frac{1}{2}\Sigma p'_i \psi'(x_i - x'_i)\Sigma(p_i - p'_i)\frac{dU}{dp'_i} - \\
&-\frac{\psi(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3 - x'_3)\psi(p'_1, p'_2, p'_3) - \frac{1}{4}\left(\Sigma p'_i \psi'(x_i - x'_i)\right)^2}{1 + p_1^2 + p'^2_2 + p_3^2} \times \\
&\quad\times \Sigma(x_i - x'_i)\frac{dU}{dx'_i} + \psi(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3 - x'_3)\Sigma p_i \frac{dU}{dx_i} = 0.
\end{aligned}\right\}\quad(41)$$

In derselben Weise bekommen wir für die zweite (40):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\psi(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3 - x'_3)\Sigma p'_i \frac{dU}{dx_i} - \frac{1}{2}\Sigma p'_i \psi'(x_i - x'_i)\Sigma(x_i - x'_i)\frac{dU}{dx_i}}{1 + p'^2_1 + p'^2_2 + p_3^2} \times \\
&\quad\times \Sigma(x_i - x'_i)\frac{df}{dx'_i} - \Sigma(x_i - x'_i)\frac{df}{dx_i}\Sigma(p_i - p'_i)\frac{\partial U}{\partial p'_i} - \\
&-\frac{\psi(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3 - x'_3)\Sigma p'_i \frac{df}{dx_i} - \frac{1}{2}\Sigma p'_i \psi'(x_i - x'_i)\Sigma(x_i - x'_i)\frac{df}{dx_i}}{1 + p'^2_1 + p'^2_2 + p'^2_3} \times \\
&\quad\times \Sigma x_i - x'_i)\frac{dU}{dx'_i} - \psi(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3 - x'_3)\Sigma \frac{df}{dx'_i}\frac{dU}{dp'_i} = 0.
\end{aligned}\right\}\quad(42)$$

(Es ist wohl zu beachten, dass hier

$$\frac{d\,U}{d\,x_i} = \frac{\partial\,U}{\partial\,x_i} + p_i \frac{\partial\,U}{\partial\,z} + \sum_{k=1}^{3} p_{ki} \frac{\partial\,U}{\partial\,p_k} + \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} p_{kli} \frac{\partial\,U}{\partial\,p_{kl}} \;(*),$$

$$\frac{d\,U}{d\,x'_i} = \frac{\partial\,U}{\partial x'_i} + p'_i \frac{\partial\,U}{\partial\,z'};$$

U die linke Seite der Gleichung (38), die eine Funktion von z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, p_{11}, $p_{12}, \ldots$, p_{33}, z', x'_1, x'_2, x'_3, p'_1, p'_2, p'_3 darstellt).

9. Falls bei Einsetzung der Werte von $x'_1, x'_2, x'_3, p'_1, p'_2, p'_3$, die sich aus den Gleichungen (30), (38) ergeben, in (41), (42) *zwei von z' freie Gleichungen herauskommen,* so ist erstens zu bemerken, dass, wie ich baldigst zeigen werde, diese Gleichungen, die jetzt als partielle Differentialgleichungen 3. O. für z auftreten, unendlichfach unendlich viele Integral-M_3 gemeinsam besitzen, und zweitens dass *jeder dieser M_3 eine ganze einfach unendliche Schar von M'_3: $z' = \varphi(x'_1, x'_2, x'_3)$ entspricht.* Letzteres folgt fast unmittelbar aus der Form (40) unserer beiden Gleichungen. Denn diese (40) machen gerade die Existenzbedingung einfach unendlich vieler gemeinsamer Integral-M'_3 der drei Gleichungen (31), (32) aus. Auch die erstere Behauptung wird durch die Form (40) der zwei Gleichungen für z begründet.

Es seien nämlich im allgemeinen V, W zwei Funktionen von z', x'_i, p'_i, z, x_i, p_i, p_{ik}, p_{ikl}; fassen wir nun z als eine bekannte Funktion von x_1, x_2, x_3, ferner p_i, p_{ik}, p_{ikl} als erste, zweite und dritte Derivierten derselben und schliesslich x_1, x_2, x_3 als durch

$$F_i(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, z', x'_1, x'_2, x'_3, p'_1, p'_2, p'_3) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (43)$$

zu bestimmende Funktionen von z', x'_i, p'_i: so formt die Einsetzung dieser Werte von z, x_i, p_i, p_{ik}, p_{ikl} in V und W diese in Funktionen V' und W' von z', x'_i, p'_i um. Wenn noch drei solche Gleichungen als $F_4(z, x, p, z', x', p') = 0$, $F_5(z, x, p, z', x', p') = 0$ und (39) oder (32) vorhanden wären, würden wir noch leichter dieselben V, W als Funktionen V'' und W'' von z' und z, x, p, p_{ik}, p_{ikl} allein darstellen können. *Gesetzt, dass hierbei z' aus V'', W'' wegfällt,* so erhalten wir

$$\frac{d\,V''}{d\,x_m} = \sum_{i=1}^{3} \frac{d\,V'}{d\,x'_i} \frac{d\,x'_i}{d\,x_m}, \quad \frac{dW''}{d\,x_m} = \sum_{i=1}^{3} \frac{d\,W'}{d\,x'_i} \frac{d\,x'_i}{d\,x_m}, \quad m = 1, 2, 3,$$

(*) Die Zusammenstellungen $k\,l$ und $l\,k$ hier gleichgesetzt und nur je einmal genommen.

frei von z'. Was $d x'_1 \mid d x_m$, $d x'_2 \mid d x_m$, $d x'_3 \mid d x_m$ betrifft, so werden sie offenbar durch die drei Gleichungen gegeben:

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_m} + p_m \frac{\partial F_k}{\partial z} + \sum_{i=1}^{3} p_{im} \frac{\partial F_k}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial F_k}{\partial x'_i} + p'_i \frac{\partial F_k}{\partial z'} + \sum_{n=1}^{3} p'_{in} \frac{\partial F_k}{\partial p'_n} \right) \frac{d x'_i}{d x_m} = 0,$$

$k = 1, 2, 3$, und sie können nur ausnahmsweise = null oder = unendlich werden.

Wenn daher eine der sechs Gleichungen:

$$\frac{d V'}{d x'_i} = 0, \quad \frac{d W'}{d x'_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{44}$$

eine algebraische Folge der anderen ist, so muss dasselbe mit den sechs Gleichungen:

$$\frac{d V''}{d x_i} = 0, \quad \frac{d W''}{d x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{45}$$

der Fall sein, indem nämlich diese dann mit fünf der Gleichungen (44) gleichbedeutend wären. Wenn nun

$$V' = \left[F'_4 \, [F'_4 \, F'_5] \right], \quad W' = \left[F'_5 \, [F'_4 \, F'_5] \right],$$

so gilt es zufolge der Jacobischen Identität:

$$\left[f [\varphi \, \psi] \right]_{R'} + \left[\varphi [\psi \, f] \right]_{R'} + \left[\psi [f \, \varphi] \right]_{R'} = - \frac{\partial f}{\partial z'} [\varphi \, \psi]_{R'} - \frac{\partial \varphi}{\partial z'} [\psi \, f]_{R'} - \frac{\partial \psi}{\partial z'} [f \, \varphi]_{R'},$$

wenn f, φ, ψ Funktionen von z', x'_i, p'_i bezeichnen, dass für die gemeinsamen Elemente der obigen

$$F'_4 = 0, \quad F'_5 = 0, \quad [F'_4 \, F'_5] = 0, \tag{46}$$

für die wir im betrachteten Falle $V' = 0$, $W' = 0$ haben, auch

$$\left[F'_5 \left[F'_4 \, [F'_4 \, F'_5] \right] \right] = \left[F'_4 \left[F'_5 \, [F'_4 \, F'_5] \right] \right],$$

d. h.

$$[F'_5 \, V'] = [F'_4 \, W'] \tag{47}$$

sein muss.

Infolge dessen muss für die gemeinsamen Elemente $(z' \, x'_i \, p'_i \, p'_{ik})$ der Gleichungen

$$\frac{d F'_4}{d x'_i} = 0, \quad \frac{d F'_5}{d x'_i} = 0, \quad \frac{d [F'_4 F'_5]}{d x'_i} = 0$$

eine in den ersten Derivierten von V' und W' homogene und lineare Gleichung statthaben, und es werden also fünf der Gleichungen (44) und damit, nach dem soeben Bemerkten, auch fünf der Gleichungen (45) die sechste dieser Gleichungen nach sich ziehen; — dies gilt jedoch nur hinsichtlich der Elemente $(z x_i p_i p_{ik} p_{ikl})$ der Gleichungen $V'' = 0$, $W'' = 0$.

10. Weil sich also die ersten Derivierten der Gleichungen $V'' = 0$, $W'' = 0$ auf fünf Gleichungen und demzufolge ihre zweiten Derivierten auf neun Gleichungen, usw., reduzieren, müssen diese $V'' = 0$, $W'' = 0$ jedem ihrer Elemente $(z x_i p_i p_{ik} p_{ikl})$ unendlichfach unendlich viele Wertsysteme der höheren Differentialquotienten von z zuordnen, woraus folgt, dass sie auch ∞^∞ Integral-M_3 gemeinsam besitzen. Ueber den Grad dieser Mannigfaltigkeit von M_3 gibt folgende Betrachtung Aufschluss.

Die Gleichungen

$$z = f(x_2, x_3), \quad x_1 = \varphi(x_2, x_3), \quad p_1 = \psi(x_2, x_3) \tag{a}$$

seien die einer beliebigen M_2; an diese M_2 schliessen sich verschiedene M'_2, worunter ich zweifach unendliche Reihen vereinigt liegender Elemente $(z x_i p_i p_{ik})$ verstehe, jede durch einen beliebigen Wert von p_{11}:

$$p_{11} = \chi(x_2, x_3),$$

bestimmt. Die Werte der übrigen p_{ik} sind dann durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} - p_{i1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - p_{ik} = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} - p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - p_k = 0\right), \quad i = 1, 2, 3, \quad k = 2, 3. \tag{b}$$

Hierzu gehören Werte von p_{ikl}, gegeben durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_l} - p_{ik1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} - p_{ikl} = 0, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad l = 2, 3, \tag{c}$$

und Werte von p_{iklm}, gegeben durch:

$$\frac{\partial p_{ikl}}{\partial x_m} - p_{ikl1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} - p_{iklm} = 0, \quad i, k, l = 1, 2, 3, \quad m = 2, 3, \tag{d}$$

usw. (*). Die Gleichungen (b) zählen nur für fünf, die Gleichungen (c) nur für neun, die (d) nur für vierzehn von einander unabhängige Gleichungen, usw.

Die Gleichungen $V''=0$, $W''=0$ sind linear in Bezug auf die dritten Differentialquotienten p_{ikl} von z. Fügen wir diese Gleichungen und ihre Derivierten zu den vorangehenden Gleichungen hinzu, so erhalten wir zuerst aus (a), (b), (c), $V''=0$ und $W''=0$ durch Elimination der zehn p_{ikl} und der zehn z, x_1, p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{23}, p_{33} eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für p_{11} in der Form:

$$A + B\frac{\partial p_{11}}{\partial x_2} + C\frac{\partial p_{11}}{\partial x_3} = 0, \tag{e}$$

A, B, C Funktionen von x_2, x_3, p_{11}. Ich nehme eine beliebige Lösung von (e): $p_{11} = \chi(x_2, x_3)$ heraus und setze mit diesem Werte von p_{11} die Rechnung fort. Jedem Elemente $(z\, x_i\, p_i)$ der M_2 (a) wird dadurch ein bestimmtes den Gleichungen $V''=0$, $W''=0$ angehörendes Element $(z\, x_i\, p_i\, p_{ik}\, p_{ikl})$ zugeordnet, und damit wird auf der M_2 (a) eine den zwei Gleichungen genügende M''_2 ausgeschieden. Jedem Elemente dieser M''_2 werden nachher durch die vierzehn Gleichungen (d) und die einzige Gleichung:

$$\frac{d V''}{d x_1} = 0 \tag{f}$$

Werte von p_{iklm} beigelegt, die den beiden Gleichungen $V''=0$, $W''=0$ und einer M'''_2 jener M''_2 zugleich angehören. Denn durch die vorigen p_{ikl}, $p_{ikl} + \frac{\partial p_{ikl}}{\partial x_2} d x_2 + \frac{\partial p_{ikl}}{\partial x_3} d x_3$, $d x_2$ $d x_3$ beliebig, werden die Gleichungen:

$$\frac{d V''}{d x_2} + \frac{d V''}{d x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{d V''}{d x_3} + \frac{d V''}{d x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{d W''}{d x_2} + \frac{d W''}{d x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{d W''}{d x_3} + \frac{d W''}{d x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0$$

:

befriedigt. Es gibt ferner, nach der vorangehenden N., eine identische Relation der Form:

$$\Sigma\left(\lambda_i \frac{d V''}{d x_i} + \mu_i \frac{d W''}{d x_i}\right) = 0,$$

(*) Vgl. hierzu meine Abhandlung: *Zur Theorie der Charakteristiken partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung.* Math. Ann. Bd. XIII, S. 413 ff.

weshalb hier sicherlich die einzige Gleichung (f) die übrigen Gleichungen $\frac{dV''}{dx_i} = 0$, $\frac{dW''}{dx_i} = 0$ nach sich zieht, und somit auch durch die oben abgeleiteten Werte von p_{iklm} eine der obigen M''_2 angehörende und den Gleichungen $V'' = 0$, $W'' = 0$ genügende M'''_2 gegeben ist.

In derselben Weise erkennen wir, dass die einzige Gleichung:

$$\frac{d^2 V''}{d x_1^2} = 0 \tag{g}$$

im Verein mit denen, die für die p_{iklmn} der letzteren M'''_2 gelten und den obigen (c) und (d) ähnlich sind, Werte dieser Differentialquotienten bestimmt, die eine M_2^{IV} ergeben, die sich der vorigen M'''_2 anschliesst und den Gleichungen $V'' = 0$, $W'' = 0$ genügt. Usw.

Sind also

$$z = f(x_2, x_3), \quad x_1 = \varphi(x_2, x_3), \quad p_1 = \psi(x_2, x_3) \tag{h}$$

die Gleichungen einer beliebigen M_2, d. h. sind f, φ, ψ beliebig, — ist ferner

$$p_{11} = \chi(x_2, x_3) \tag{i}$$

ein beliebigen Integral der von f, φ, ψ und von

$$V'' = 0, \quad W'' = 0 \tag{k}$$

abhängenden Gleichung (e), *so gehört zu einem jeden* $(z^0 x_i^0 p_i^0 p_{ik}^0)$ *der* M'_2 (h), (i) *ein völlig bestimmtes Wertsystem aller höheren Differentialquotienten von* (z), *welches die Taylorsche Reihe*

$$z - z^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1,\ 2 \ldots k} \left((x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1^0} + (x_2 - x_2^0) \frac{\partial}{\partial x_2^0} + (x_3 - x_3^0) \frac{\partial}{\partial x_3^0} \right)^k z^0 \tag{l}$$

in dem Gebiete, in dem sie konvergiert, zur Repräsentantin einer Integral-M_3 von (k) *macht, und zwar derjenigen einzigen Integral-M_3, welche zugleich die M'_2* (h), (i) *enthält.*

Es könnten die Werte der fraglichen p_{iklm}^0 unendlich gross ausfallen; geschieht dies bei jedem beliebigen $(z\, x_i\, p_i\, p_{ik})$ unserer M'_2, so geht keine Integral-M_3 durch sie. Wenn dagegen die oben geschilderte Rechnung die p_{iklm} unter der unbestimmten Form $0/0$ darstellte, so wäre es sogar möglich, dass sich durch die M''_2 von (k), die unserer M'_2 angehört, ∞^∞ Integral-M_3 von (k) hindurchlegen liessen: die M''_2 wäre dann eine *charakteristische* M''_2 unserer Gleichungen.

Hierüber habe ich in meiner Abhandlung *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung* in Bd. XV der Math. Ann. (1878), besonders in § 4 N. 30, 31 S. 75-78 ausführlicher gesprochen, worauf ich zum näheren Studium dieses Gegenstandes verweisen möchte.

11. Es war oben angenommen worden, dass sich bei Elimination der akzentuierten Buchstaben z', x', p' aus (30), (38), (41), (42) nicht weniger als zwei Gleichungen in z, x_i, p_i, p_{ik}, p_{ikl}, nämlich die Gleichungen $V''=0$, $W''=0$, ergeben. Ich will nunmehr den allgemeineren Fall erörtern, *wo nur eine von den akzentuierten Buchstaben freie Gleichung resultiert.*

Ziehen wir wieder die fünf Gleichungen:

$$F'_4=0,\quad F'_5=0,\quad [F'_4 F'_5]\equiv U'=0,\quad [F'_4\, U']=0,\quad [F'_5\, U']=0$$

in Betracht. Damit sie(*) eine Integral-M_3 (in R'_4) gemein haben, müssen die Elemente $(z'\,x'_i\,p'_i)$ von vier dieser Gleichungen, etwa von

$$F'_4=0,\quad F'_5=0,\quad U'=0,\quad [F_4\, U']=0 \tag{a}$$

nicht nur die fünfte Gleichung:

$$[F'_5\, U']=0, \tag{b}$$

sondern auch die drei Gleichungen:

$$\Big[F'_4\,[F'_4\, U']\Big]=0,\quad \Big[F'_5\,[F'_4\, U']\Big]=0,\quad \Big[U'\,[F'_4\, U']\Big]=0 \tag{c}$$

befriedigen. *Die in der oben beschriebenen Weise vorgenommene Elimination der akzentuierten Buchstaben verwandelt sie in vier Gleichungen in* R_4, *von denen die eine,* (b), *eine lineare partielle Differentialgleichung* 3. O., *die drei anderen,* (c), *lineare partielle Differentialgleichungen* 4. O. *für* z *werden. Wir werden unten erkennen, dass sie* ∞^∞ *Integral-*M_3: $z=\varphi(z_1, x_2, x_3)$ *gemeinsam besitzen: jeder derselben entspricht eine Integral-*M_3 *in* R'_4 *der Gleichungen* (a).

Aus N. 9 ersehen wir ohne weiteres, wie (b) und (c) einerseits als Funktionen von z', x'_i, p'_i, andrerseits als Funktionen von z, x_i, p_i, p_{ik}, p_{ikl}, p_{iklm}

(*) $z=\varphi(x_1, x_2, x_3)$ gedacht. (N. 7).

aufgefasst werden können, ebenso auch wie im letzteren Falle ihre Derivierten linear von denen des ersteren Falles abhängen. Die ersten Derivierten von (b) erweisen sich, wenn (b) ausschliesslich als eine Gleichung in z', x'_i, p'_i betrachtet wird, unter Berücksichtigung der Gleichungen:

$$\frac{d\,F'_4}{d\,x'_i}=0,\quad \frac{d\,F'_5}{d\,x'_i}=0,\quad \frac{d\,U'}{d\,x'_i}=0,$$

als äquivalent mit:

$$\Big[F'_4\,[F'_5\,U']\Big]=0,\qquad \Big[F'_5\,[F'_5\,U']\Big]=0,\qquad \Big[U'\,[F'_5\,U']\Big]=0, \tag{d}$$

und weil die erste dieser Gleichungen mit der zweiten der Gleichungen (c) gleich ausfällt, haben wir hieraus zu schliessen, dass (b) und (c), ausschliesslich in den unakzentuierten Buchstaben geschrieben, für die vierten Differentialquotienten von z nur fünf von einander unabhängige Gleichungen liefern. Die Anzahl der vierten Differentialquotienten beträgt fünfzehn.

Nachdem wir so gefunden haben, dass zwischen den drei Gleichungen (c) und den ersten Derivierten von (b), — diese sämtlichen Gleichungen in solche mit z, x_i und den Differentialquotienten von z als einzigen Variablen verwandelt und damit als Gleichungen in R_4 gefasst, — eine homogene und lineare Relation statthat, ergibt sich sogleich, dass zwischen den sechs zweiten Derivierten von (b) und den ersten Derivierten von (c) nicht weniger als drei lineare Relationen bestehen. Aus der Form der Gleichungen (c) (*) leuchtet ferner auch ein, dass sich ihre ersten Derivierten auf nur sechs von einander unabhängige Gleichungen reduzieren. Unsere Gleichungen (b) und (c) liefern deshalb nur neun Gleichungen zwischen den fünften Differentialquotienten von z.

Wir schliessen in derselben Weise, dass die Anzahl der Gleichungen, die notwendig von den sechsten Differentialquotienten von z erfüllt sein müssen, damit diese gemeinsamen Integralen von (b) und (c) angehören können, vierzehn beträgt; die Zahl der $p_{k_1k_2\ldots k_6}$ ist dagegen achtundzwanzig. Usw.

Die Differenz der Anzahl der vierten Differentialquotienten von z und der für ihre Zugehörigkeit zu den fraglichen Integralen notwendigen Gleichungen würde nach dem Obigen gleich zehn sein;

(*) Und « infolge der in N. 9 zitierten Jacobischen Identität », — wäre vielleicht hinzuzufügen.

die der Anzahl der fünften Differentialquotienten von z und der für diese vorgeschriebenen Gleichungen gleich zwölf;

die entsprechende Differenz für die sechsten Differentialquotienten von z gleich vierzehn, usw.;

der Zahlenwert der Differenz steigt mit dem Grade der Differentialquotienten. Hieraus können wir erkennen, dass es unendlichfach unendlich viele Reihen von der Form (l) der N. 10 geben muss, *die ebensoviele den Gleichungen* (b) *und* (c) *gemeinsame Integral-*M_3 *darstellen.*

Eine Frage verwandter Natur habe ich in der oben dargelegten Weise schon vor langer Zeit behandelt. Siehe meine Abhandlung (1880) in Bd. XVII der Math. Ann., S. 315 (N. 27).

Jetzt gibt es eine eindeutige Korrespondenz zwischen den Lösungen:

$$z = \varphi(x_1, x_2, x_3), \qquad z' = \psi(x'_1, x'_2, x'_3)$$

der Gleichungen (30), *d. h. zwischen denjenigen* M_3 *der beiden Räume* R_4, R'_4, *die bei der Transformation* (30) M_3 *bleiben.* Dies wurde schon oben betreffs der Integrabilität der Gleichungen (a) behauptet.

§ 2.

Eine Anwendung des Vorstehenden. Sätze von Weingarten.

12. Inwiefern man das oben von der Transformation (30) Gesagte auf den allgemeinsten Fall einer durch fünf beliebige Gleichungen

$$F_i(z, x_k, p_k, z', x'_k, p'_k) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 5, \quad k = 1, 2, 3,$$

begründeten Transformation übertragen kann, dürfte aus der Anmerkung am Ende der N. 7 erhellen. Ich möchte sogar behaupten, das aus den Erörterungen der N. 8-11 die allgemeine Theorie Wort für Wort abzulesen ist. Im Folgenden werde ich mich daher ausschliesslich bloss mit einem sehr speziellen Falle der Transformation (30) beschäftigen.

Ich nehme nämlich an, dass die fünfte der Gleichungen (30) einfach die Form hat:

$$F_5 \equiv f(x_3, x'_3) = 0 \tag{49}$$

und suche dann nach möglichen Lösungen:

$$z = \varphi(x_1, x_2), \qquad z' = \psi(x'_1, x'_2)$$

dieser Gleichungen. Ich stelle m. a. W. die Frage auf, ob es möglich ist, neben den Gleichungen (30) auch den Gleichungen:

$$p_3 = 0, \qquad p'_3 = 0 \tag{50}$$

zu genügen.

Statt $x_1, x_2, p_1, p_2; x'_1, x'_2, p'_1, p'_2$ schreibe ich x, y, p, q bez. x', y', p', q' und stelle demgemäss und unter Berücksichtigung der Annahmen (49) und (50) die Gleichungen (30) unserer Transformation in der folgenden Form dar:

$$\left.\begin{aligned}(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2+(x_3-x'_3)^2=0,\\ z-z'-p(x-x')-q(y-y')=0,\\ z-z'-p'(x-x')-q'(y-y')=0,\\ 1+pp'+qq'=0\\ f(x_3,\ x'_3)=0.\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Hierauf brauche ich nur $x, y, z; x', y', z'$ als Koordinaten der Punkte zweier Räume $R_3(x, y, z)$, $R'_3(x', y', z')$ aufzufassen und

$$x_3 = R_1\sqrt{-1}, \quad x'_3 = R_2\sqrt{-1}$$

zu setzen, ferner R_1 und R_2 als die zwei Hauptkrümmungsradien im Punkte (ξ, η, ζ) einer Fläche in einem Raume $R''_3(\xi, \eta, \zeta)$ zu deuten, um das Vorhandensein von Lösungen der gesuchten Art zu erkennen. Je zwei korrespondierende Lösungen von (51):

$$z = \varphi(x, y), \quad z' = \psi(x', y') \tag{52}$$

stellen nämlich die zwei Mäntel der Evolutenfläche eines Integrals $\zeta = F(\xi, \eta)$ der partiellen Differentialgleichung 2. O. in R''_3:

$$f(R_1\sqrt{-1}, \quad R_2\sqrt{-1}) = 0$$

dar, wobei mit R_1, R_2 die beiden Wurzeln der Gleichung in R''_3:

$$R^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}-\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\partial\eta}\right)^2\right)-R\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2}\left[\left(1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2\right)\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}-\right.$$
$$\left.-2\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\partial\eta}+\left(1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2\right)\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}\right]+\left(1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2\right)^2=0$$

bezeichnet werden.

13. Folgen wir aber den weiter oben gegebenen Vorschriften, um zu Lösungen (52) zu gelangen, so haben wir, selbstverständlich unter Berücksichtigung von (49), (50), zunächst die Gleichung (38) aufzustellen, und erhalten:

$$\begin{aligned}\Big\{ & (r(x-x')^2 + 2s(x-x')(y-y') + t(y-y')^2)(rp'^2 + 2sp'q' + tq'^2) - \\ & - (p'(r(x-x') + s(y-y')) + q'(s(x-x') + t(y-y')))^2 \Big\} (x_3 - x'_3) \frac{\partial f}{\partial x'_3} - \\ & \qquad - (1+p^2+q^2)(1+p'^2+q'^2)(x_3 - x'_3) \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,\end{aligned}$$

woraus unter Beachtung der folgenden aus (51) herzuleitenden Relationen:

$$y - y' = -\frac{p-p'}{q-q'}(x-x'),$$

$$\left(\frac{x-x'}{q-q'}\right)^2 (1+p^2+q^2)(1+p'^2+q'^2) + (x_3 - x'_3)^2 = 0,$$

hervorgeht, dass:

$$\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2} \frac{\partial f}{\partial x'_3} + \frac{1}{(x_3-x'_3)^2} \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

d. h. dass:

$$\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2} = \frac{1}{(R_1-R_2)^2} \frac{\frac{\partial f}{\partial R_1}}{\frac{\partial f}{\partial R_2}}, \tag{53}$$

eine seit der Abhandlung von Weingarten: *Ueber eine Classe auf einander abwickelbarer Flächen* in Crelles Journal Bd. 59 sehr bekannte Formel für das Krümmungsmass einer Evolutenfläche der gesuchten Art. Für die entsprechende Fläche in R'_3, also für die zweite der Flächen (52), gilt es offenbar, dass in den entsprechenden Punkten

$$\frac{r't'-s'^2}{(1+p'^2+q'^2)^2} = \frac{1}{(R_1-R_2)^2} \frac{\frac{\partial f}{\partial R_2}}{\frac{\partial f}{\partial R_1}}. \tag{53$'$}$$

(Das Produkt der Krümmungsmasse der beiden einander entsprechenden Flächen in entsprechenden Punkten wird also gleich $1:(R_1-R_2)^4$, wie es von HALPHEN längst angegeben wurde. Siehe etwa LUIGI BIANCHI: *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Zweite Auflage 1910, S. 250, Gl. (16), (17)).

Verstehen wir unter Φ den allgemeinen Ausdruck des Krümmungsmasses und unter $F(R_1)$ die rechte Seite von (53), diese jetzt mit Hülfe der letzten der Gleichungen (51) $f(x_3, x'_3) = 0$ in eine Funktion von R_1 verwandelt, so können wir die in den obigen Gleichungen (41), (42) mit U bezeichnete Funktion gleich $\Phi - F(R_1)$ setzen.

14. Mit diesem Werte von U (*):

$$U = \Phi - F(R_1)$$

reduziert sich die Gleichung (41) auf ihr erstes Glied und ergibt also:

$$(x - x')\frac{d\,\Phi}{d\,x} + (y - y')\frac{d\,\Phi}{d\,y} + (R_1 - R_2)\,F'(R_1) = 0. \tag{54}$$

Auch die Gleichung (42) reduziert sich auf ihr erstes Glied und weiter, infolge der soeben verzeichneten Relation: $\sum_{i=1}^{3}(x_i - x'_i)\frac{d\,U}{d\,x_i} = 0$, auf das erste Glied jenes Gliedes, woraus folgt:

$$p'\frac{d\,\Phi}{d\,x} + q'\frac{d\,\Phi}{d\,y} = 0, \tag{55}$$

wenn vom Falle

$$r(x - x')^2 + 2\,s\,(x - x')(y - y') + t\,(y - y')^2 = 0$$

abgesehen wird.

Wie ich unten näher erklären werde, besagen jene Gleichungen (54), (55) nur was übrigens von anders woher wohlbekannt ist, nämlich die Gleichung (55), dass auf jeder der gesuchten Flächen $z = \varphi(x, y)$ die Kurven, die die Geraden $(x - x', y - y', z - z')$ als Tangenten haben, die Kurven $\Phi = C$ als Orthogonalkurven besitzen, und die Gleichung (54), dass diese Kurven $\Phi = C$ unter sich parallel sind. Ersteres folgt wesentlich daraus, dass die Richtung der Tangente einer der letzteren Kurven im Punkte (x, y, z)

(*) Offenbar würde sich eine grössere Uebereinstimmung mit dem Vorangehenden ergeben, wenn man in U die Variable R_2 $(= - x'_3\sqrt{-1})$ statt R_1 aufnähme oder, wie in (53), zugleich beide R_1 und R_2 bewahrte. Wir kommen jedenfalls zu demselben Schlusse.

mit der einer Geraden (p', q', -1) zusammenfällt (*), letzteres daraus, dass der senkrechte Abstand zwischen zwei unendlich benachbarten jener Kurven Φ und $\Phi + d\Phi$ gleich $-d\Phi : F'(R_1)$ wird (**). Dieser Abstand wird dann wegen (53) (***) gleich $-dR_1$ und ist als nur von R_1 abhängig zu betrachten.

Jene Umhüllungen der Geraden ($x - x'$, $y - y'$, $z - z'$) müssen folglich geodätische Linien der Fläche $z = \varphi(x, y)$ sein, und wenn besonders $u(x, y, z) =$ Konst. die Schar dieser Umhüllungskurven darstellt, erhalten wir das Quadrat ds^2 des Linienelementes unserer Fläche in der Form:

$$ds^2 = dR_1^2 + G\,du^2. \tag{56}$$

Es gilt inzwischen von jeder unserer Kurven $\Phi =$ Konst., dass für sie nicht nur R_1, sondern auch $R_1 - R_2$ konstant ist. Aber der geodätische Radius solcher Kurve, als zu der Fläche $z = \varphi(x, y)$ gehörig betrachtet, ist gleich $\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ und demnach wegen der ersten der Gleichungen (51) gleich $R_1 - R_2$ (****). Nach einer für die geodätische Krüm-

---

(*) Betreffs der Richtung (dx, dy, dz) dieser Tangente folgt nämlich aus (55), mit der Gleichung $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ zusammengestellt, dass:

$$dx : dy : dz = p' : q' : pp' + qq',$$

also wegen der vierten Gleichung (51) $dx : dy : dz = p' : q' : -1$, wie oben behauptet wurde. Man beobachte auch die dritte Gleichung (51).

(**) Wenn nämlich mit ds_1 der fragliche Abstand bezeichnet wird, besagt (54), dass, weil jetzt $x - x' : R_1 - R_2$ gleich $\cos(ds_1\,x)$ ist, usw.:

$$d\Phi + F'(R_1)\,ds_1 = 0.$$

(***) Die Gleichung (53) lautet: $\Phi = F(R_1)$, womit

$$d\Phi = F'(R_1)\,dR_1$$

und also nach vorangehender Note:

$$ds_1 = -dR_1.$$

(****) Immer werden auf der Evolutenfläche einer Fläche, deren Hauptkrümmungsradien R_1, R_2 sind, — es sei $f(R_1\sqrt{-1},\ R_2\sqrt{-1})$ konst. oder nicht — die Kurven $R_1 =$ Konst. unter sich, sowie auch die Kurven $R_2 =$ Konst. unter sich geodätisch parallel und $R_1 - R_2$ geodätischer Krümmungsradius derselben. Siehe Bianchi, *Vorlesungen über Differentialgeometrie.* Zweite Auflage 1910, S. 246.

mung geltenden Formel muss dann aber sein:

$$\frac{1}{R_1 - R_2} = -\frac{\partial}{\partial R_1}(\log \sqrt{G}).$$

(BIANCHI, *Vorlesungen über Differentialgeometrie.* Zweite Auflage 1910, S. 194, 253).

Also: $\frac{\partial}{\partial R_1}(\log \sqrt{G})$ hängt nur von R_1 ab, und es ist somit

$$\sqrt{G} = \text{det. Funkt. } (R_1) \times \text{willkürl. } \varphi(u).$$

Führen wir dann in (56) u' statt u als Variable ein:

$$u' = \int \varphi(u)\, d\, u,$$

so sehen wir, dass

$$d\, s^2 = d\, R_1^2 + \left(\text{Funkt. } (R_1)\right)^2 d\, u'^2,$$

was von WEINGARTEN folgendermassen gedeutet wird: *jeder Evolutenmantel* $\left(z = \varphi(x, y)\right)$ *einer Fläche, zwischen deren Hauptkrümmungsradien eine Relation* $f\left(R_1\sqrt{-1},\ R_2\sqrt{-1}\right) = 0$ *Geltung hat, ist auf eine Rotationsfläche abwickelbar, deren Bestimmung von der Funktionsform* f *abhängt.* (BIANCHI, l. c. § 135).

15. Die Elimination der akzentuierten Buchstaben aus (54) und (55) wird ohne Mühe mit Hülfe der folgenden aus (51) abgeleiteten Gleichungen vollzogen:

$$\begin{aligned}
(x - x')\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\sqrt{1 + p'^2 + q'^2} &= \quad (q - q')(R_1 - R_2),\\
(y - y')\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\sqrt{1 + p'^2 + q'^2} &= -(p - p')(R_1 - R_2),\\
1 + p\,p' + q\,q' &= 0,
\end{aligned}$$

und ergibt:

$$\left(\frac{d\,\Phi}{d\,x}\right)^2 + \left(\frac{d\,\Phi}{d\,y}\right)^2 + \left(q\,\frac{d\,\Phi}{d\,x} - p\,\frac{d\,\Phi}{d\,y}\right)^2 = (1 + p^2 + q^2)\,\overline{F'(R_1)}^2.$$

Die Elimination von R_1 aus dieser Gleichung und der Gleichung:

$$\Phi = F(R_1)$$

führt dann zu einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung für z, da nämlich Φ nur der Abkürzung halber statt

$$\frac{r\,t - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$$

geschrieben worden ist. Hierzu treten aber nach dem Vorigen noch andere Gleichungen. Dass die Aufgabe durch eine partielle Differentialgleichung von nur zweiter Ordnung erledigt wird, folgt aus dem am Ende der N. 12 Erörterten.

§ 3.

Ueber Orthogonalsysteme.

16. Die Gleichungen (24)-(27), die später durch die vier ersten der Gleichungen (30) ersetzt wurden, gehören zwei Kugelkomplexen

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0, \qquad G(x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ x'_4) = 0$$

an (*), die aus je einer der beiden Scharen von Hauptkugeln einer einfach unendlichen Flächenschar des R_3 bestehen. Es seien (F), (F') zwei unendlich benachbarte Flächen dieser Schar, $(x',\ y',\ z')$ ein beliebig angenommener Punkt der ersten Fläche, $(x' + \delta x',\ y' + \delta y',\ z' + \delta z')$ derjenige unendlich nahe Punkt der zweiten, in dem sie von der im ersteren Punkte auf (F) errichteten Normalen getroffen wird. Nun wissen wir aus der Gleichung (18), dass diejenige der beiden von $(x',\ y',\ z')$ ausgehenden Krümmungskurven auf (F), die eine Charakteristik der vom Komplexe $F = 0$ begründeten partiellen Differentialgleichung 1. O. ist, die Richtung $(d\,x',\ d\,y',\ d\,z')$ hat, wobei:

$$\left.\begin{aligned} &d\,x' : d\,y' : d\,z' = \\ &= (x_4 - x'_4)\frac{\partial F}{\partial x_1} - (x_1 - x'_1)\frac{\partial F}{\partial x_4} : (x_4 - x'_4)\frac{\partial F}{\partial x_2} - (x_2 - x'_2)\frac{\partial F}{\partial x_4} : \\ &: (x_4 - x'_4)\frac{\partial F}{\partial x_3} - (x_3 - x'_3)\frac{\partial F}{\partial x_4}, \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

(*) Hier sind wieder x_1, x_2, x_3 Mittelpunktskoordinaten, R Radius einer Komplexkugel und $x_4 = R\sqrt{-1}$.

und dass die andere jener Krümmungskurven, die eine Charakteristik von $\Psi(x'', y'', z'', p'', q'') = 0$ ist, — wenn die vom Komplexe $G = 0$ begründete partielle Differentialgleichung 1. O. so wie in N. 5 bezeichnet wird, — die Richtung (dx'', dy'', dz'') hat, wobei:

$$\left.\begin{aligned} &dx'' : dy'' : dz'' = \\ &= (x_4 - x'_4)\frac{\partial G}{\partial x'_1} - (x_1 - x'_1)\frac{\partial G}{\partial x'_4} : (x_4 - x'_4)\frac{\partial G}{\partial x'_2} - (x_2 - x'_2)\frac{\partial G}{\partial x'_4} : \\ &: (x_4 - x'_4)\frac{\partial G}{\partial x'_3} - (x_3 - x'_3)\frac{\partial G}{\partial x'_4}. \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

Bezeichnen wir die erste dieser Krümmungskurven mit C und die unendlich nahe liegende, durch $(x' + \delta x', y' + \delta y', z' + \delta z')$ gehende Krümmungskurve auf (F') mit C', und stellen wir uns eine Fläche vor, die längs C und C' die beiden Flächen (F) und (F') senkrecht schneidet, was jedoch nur ausnahmsweise möglich ist, und bezeichnen wir mit Γ diese Fläche, so wissen wir, dass C und C' auch auf Γ Krümmungskurven werden und dass sich also die zwei Flächenelemente von Γ in den zwei Punkten (x', y', z'), $(x' + \delta x', y' + \delta y', z' + \delta z')$ in dem am letzteren Punkte haftenden Linienelemente $(dx' + \delta dx', dy' + \delta dy', dz' + \delta dz')$ von C' schneiden. Es wird dann das Linienelement (58) auf beiden Linienelementen (57) und $(dx' + \delta dx', \ldots)$ senkrecht stehen; es soll also im angenommenen Falle nicht nur sein:

$$F'(x_1)\,\Phi'(x'_1) + F'(x_2)\,\Phi'(x'_2) + F'(x_3)\,\Phi'(x'_3) + F'(x_4)\,\Phi'(x'_4) = 0, \quad (27)$$

sondern auch:

$$\left.\begin{aligned} &[(x_4 - x'_4)\,G'(x'_1) - (x_1 - x'_1)\,G'(x'_4)]\,\delta\,[(x_4 - x'_4)\,F'(x_1) - (x_1 - x'_1)\,F'(x_4)] + \\ &[(x_4 - x'_4)\,G'(x'_2) - (x_2 - x'_2)\,G'(x'_4)]\,\delta\,[(x_4 - x'_4)\,F'(x_2) - (x_2 - x'_2)\,F'(x_4)] + \\ &[(x_4 - x'_4)\,G'(x'_3) - (x_3 - x'_3)\,G'(x'_4)]\,\delta\,[(x_4 - x'_4)\,F'(x_3) - (x_3 - x'_3)\,F'(x_4)] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Um die Rechnung weiterzuführen, müssen wir uns noch von den Werten von δx_1, δx_2, δx_3, $\delta x'_1$, $\delta x'_2$, $\delta x'_3$ Rechenschaft geben. Ganz so wie $x_1, \ldots, x_4$, $x'_1, \ldots, x'_4$ Koordinaten zweier Kugeln der Kugelkomplexe $F = 0$, $G = 0$ sind, die im Punkte (x', y', z') die Fläche (F) berühren, werden $x_1 + \delta x_1, \ldots, x_4 + \delta x_4$; $x'_1 + \delta x'_1, \ldots, x'_4 + \delta x'_4$ Koordinaten zweier Kugeln derselben Komplexe, die im Punkte $(x' + \delta x', y' + \delta y', z' + \delta z')$ die unendlich benachbarte Fläche (F') berühren. Und deswegen erhalten wir erstens:

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i - x'_i)\,\delta\,(x_i - x'_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{4} F'(x_i)\,\delta x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{4} G'(x'_i)\,\delta x'_i = 0 \quad (a)$$

und zweitens, wie aus der Differentiation der Gleichungen (17):

$$x'_4 (x' - x_1) = x_4 (x' - x'_1),\ x'_4 (y' - x_2) = x_4 (y' - x'_2),\ x'_4 (z' - x_3) = x_4 (z' - x'_3)$$

unter Beachtung des Umstandes, dass

$$\delta x' = \delta s' \frac{x' - x_1}{x_4} \sqrt{-1} = - \delta s' \sqrt{-1} \frac{x_1 - x'_1}{x_4 - x'_4},\ \text{usw.},\ \delta s' = \sqrt{\delta x'^2 + \delta y'^2 + \delta z'^2},$$

erhellt:

$$\left.\begin{aligned} x'_4 \delta x_1 - x_4 \delta x'_1 &= \nu (x_1 - x'_1), \\ x'_4 \delta x_2 - x_4 \delta x'_2 &= \nu (x_2 - x'_2), \\ x'_4 \delta x_3 - x_4 \delta x'_3 &= \nu (x_3 - x'_3), \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

wobei zur Abkürzung ν statt

$$(x'_4 \delta x_4 - x_4 \delta x'_4) : (x_4 - x'_4) + \delta s' \sqrt{-1}$$

geschrieben ist.

Wir verbinden dann mit den Gleichungen (b) den Wert von ν unter der Form:

$$x'_4 \delta x_4 - x_4 \delta x'_4 = \nu (x_4 - x'_4) - \delta s' \sqrt{-1} (x_4 - x'_4) \tag{c}$$

und schliessen weiter aus der ersten der Gleichungen (a), dass:

$$\delta s' \sqrt{-1} (x_4 - x'_4) = \sum_{i=1}^{4} (x_i - x'_i) \delta x_i . \tag{d}$$

Es sind drittens die Differentiale der Gleichungen (25), (26), (27) hinzuzufügen. Was übrigens die Gleichung (27) betrifft, so ist sie oben (N. 5) aus der Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{3} \Big[(x_4 - x'_4) G'(x'_k) - (x_k - x'_k) G'(x'_4) \Big] \Big[(x_4 - x'_4) F'(x_k) - (x_k - x'_k) F'(x_4) \Big] = 0$$

gewonnen, und die linke Seite ihres Differentials ist demnach eine Summe von zwei Gliedern, deren eines die linke Seite von (59) und deren anderes die linke Seite von

$$\sum_{k=1}^{3} \Big[(x_4 - x'_4) F'(x_k) - (x_k - x'_k) F'(x_4) \Big] \delta \Big[(x_4 - x'_4) G'(x'_k) - (x_k - x'_k) G'(x'_4) \Big] = 0$$

ist.

Wenn daher (59) Geltung hat, so ist auch:

$$\sum_{k=1}^{3}\left[(x_4-x'_4)F'(x_k)-(x_k-x'_k)F'(x_4)\right]\delta\left[(x_4-x'_4)G'(x'_k)-(x_k-x'_k)G'(x'_4)\right]=0. \quad (60)$$

Nun ist oben gezeigt worden, dass in dem Falle, in dem die Integralflächen der Komplexe $F=0$, $G=0$ von ∞^1 anderen Flächen längs der Krümmungskurven der einen Schar senkrecht geschnitten werden, die Gleichung (59) unter der Voraussetzung statthat, dass die fragliche Schar der Krümmungskurven den Charakteristiken der Differentialgleichung des Komplexes $F=0$ angehört. Auf Grund der Beweisführung müssen aber auch umgekehrt, sobald (59) erfüllt ist, jene Integralflächen längs jener Krümmungskurven ∞^1 Flächen senkrecht schneiden. Aber dass mit (59) auch (60) erfüllt ist, bedeutet dann, *dass ∞^2 Flächen, die längs ihrer Krümmungskurven der einen Schar ∞^1 Flächen senkrecht schneiden, notwendig auch längs der Krümmungskurven der anderen Schar zu ∞^1 anderen Flächen dieselbe Beziehung haben: sie machen also jetzt den Bestandteil eines dreifachen Orthogonalsystemes aus*, wie Darboux zuerst angegeben hat (*).

Hierbei ist noch folgendes zu beachten. Wenn die Kugel (1) der N. 1 dem Komplexe $F=0$ angehört und wenn senkrecht zu ihr durch den Kreis (1), (11) eine neue Kugel gelegt wird und wenn man diese Konstruktion für sämtliche Kugeln von $F=0$ verfolgt, so bekommt man alle Kugeln des zu $F=0$ reziproken Kugelkomplexes. Dessen Gleichung werde ich mit $F'=0$ bezeichnen. Der dem Komplexe $G=0$ reziproke Kugelkomplex mag $G'=0$ sein. Während dann eine der drei Flächenscharen des von $F=0$, $G=0$ im Falle (59) begründeten Orthogonalsystemes diesen Kugelkomplexen als gemeinsame Integralschar angehört, gehört deren zweite dem Komplexe $F'=0$ und deren dritte dem Komplexe $G'=0$ an; und wenn $H=0$ der zweite Kugelkomplex ist, der mit $F'=0$ jene zweite Flächenschar als gemeinsame Integralschar besitzt, wird die erwähnte dritte Flächenschar von einer dem Komplexe $G'=0$ und dem zu $H=0$ reziproken Kugelkomplexe gemeinsamen Integralschar geliefert. (Was von mir schon 1873 S. 17 meiner Abhandlung *Ett bidrag till kulkomplexernas theori*, Lunds universitets årsskrift T. IX dargelegt worden ist).

Die Bedingungsgleichung (59) können wir leicht mit Hülfe der Gleichungen (24)-(27) und der Formeln (a)-(d) dieser N. in einer einfacheren Form

(*) Siehe Darboux, *Leçons sur la théorie générale des Surfaces*, 2.ème partie, p. 263.

darstellen. Zu dem Zwecke berücksichtigen wir zunächst was aus (25) und (b), (c) folgt, dass

$$\sum_{i=1}^{4} F'(x_i)\,\delta x'_i = \frac{\delta s' \sqrt{-1}\,(x_4 - x'_4)}{x_4} F'(x_4) \tag{e}$$

ist und ebenso nach (26):

$$\sum_{i=1}^{4} G'(x'_i)\,\delta x_i = -\frac{\delta s' \sqrt{-1}\,(x_4 - x'_4)}{x'_4} G'(x'_4). \tag{f}$$

Es folgt dann aus (25) auch:

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i - x'_i)\,\delta F'(x_i) = -\sum_{i=1}^{4} F'(x_i)\,\delta(x_i - x'_i) = \frac{\delta s' \sqrt{-1}\,(x_4 - x'_4)}{x_4} F'(x_4). \tag{g}$$

Durch Ausführung der in (59) gezeichneten Multiplikationen finden wir ferner für diese Bedingung den Ausdruck:

$$(x_4 - x'_4)^2 \sum_{i=1}^{4} G'(x'_i)\,\delta F'(x_i) + (x_4 - x'_4)\,\delta(x_4 - x'_4) \sum_{i=1}^{4} G'(x'_i)\,F'(x_i) -$$

$$- (x_4 - x'_4)\,F'(x_4) \sum_{i=1}^{4} G'(x'_i)\,\delta(x_i - x'_i) -$$

$$- (x_4 - x'_4)\,G'(x'_4) \sum_{i=1}^{4} (x_i - x'_i)\,\delta F'(x_i) = 0,$$

und schliessen hieraus und aus (27), (f) und (g), dass (59) der Gleichungsform

$$\sum_{i=1}^{4} G'(x'_i)\,\delta F'(x_i) = -\frac{\delta s' \sqrt{-1}}{x_4 x'_4}(x_4 - x'_4)\,F'(x_4)\,G'(x'_4)$$

oder nach (d):

$$\sum_{i=1}^{4} G'(x'_i)\,\delta F'(x_i) = -\frac{F'(x_4)\,G'(x'_4)}{x_4 x'_4} \sum_{i=1}^{4}(x_i - x'_i)\,\delta x_i \tag{61}$$

äquivalent wird.

Die Gleichung (60) lautet offenbar ähnlich:

$$\sum_{i=1}^{4} F'(x_i)\,\delta G'(x'_i) = \frac{F'(x_4)\,G'(x'_4)}{x_4 x'_4} \sum_{i=1}^{4}(x_i - x'_i)\,\delta x'_i\,. \tag{62}$$

17. Als Bedingung dafür dass eine Integralschar zweier involutorischer Kugelkomplexe $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, $G(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = 0$ in einem Orthogonalsysteme enthalten sei, ist demnach zu fordern, dass nicht nur die Gleichungen (24)-(28), sondern mit ihnen auch die folgenden vier Differentialgleichungen gültig sind, dass diese also durch geeignete Werte von $\delta x_1 \mid \delta x_4$, $\delta x_2 \mid \delta x_4$, $\delta x_3 \mid \delta x_4$ befriedigt werden:

$$\sum_{i=1}^{4} F'(x_i)\, \delta x_i = 0, \qquad [28, a]$$

$$\sum_{i=1}^{4} \left[G'(x'_i) + \frac{G'(x'_4)}{x'_4} (x_i - x'_i) \right] \delta x_i = 0, \qquad [f, d]$$

$$\sum_{i=1}^{4} \left[\sum_{k=1}^{4} (x_k - x'_k) \frac{\partial^2 F}{\partial x_k\, \partial x_i} - \frac{F'(x_4)}{x_4} (x_i - x'_i) \right] \delta x_i = 0, \qquad [g, d]$$

$$\sum_{i=1}^{4} \left[\sum_{k=1}^{4} G'(x'_k) \frac{\partial^2 F}{\partial x_k\, \partial x_i} + \frac{F'(x_4)\, G'(x'_4)}{x_4\, x'_4} (x_i - x'_i) \right] \delta x_i = 0. \qquad [61]$$

Wenn wir drei Funktionen U, V, W einführen:

$$\left.\begin{aligned} U &= \sum_{k=1}^{4} F'(x_k)(x_k - x'_k) - \frac{1}{2} \frac{F'(x_4)}{x_4} \sum_{k=1}^{4} (x_k - x'_k)^2, \\ V &= \sum_{k=1}^{4} G'(x'_k)(x_k - x'_k) + \frac{1}{2} \frac{G'(x'_4)}{x'_4} \sum_{k=1}^{4} (x_k - x'_k)^2, \\ W &= \sum_{k=1}^{4} G'(x'_k)\, F'(x_k) + \frac{1}{2} \frac{F'(x_4)\, G'(x'_4)}{x_4\, x'_4} \sum_{k=1}^{4} (x_k - x'_k)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

und demgemäss die vorangehenden Gleichungen in der Form schreiben:

$$\sum F'(x_i)\, \delta x_i = 0, \quad \sum U'(x_i)\, \delta x_i = 0, \quad \sum V'(x_i)\, \delta x_i = 0, \quad \sum W'(x_i)\, \delta x_i = 0,$$

können wir aber auch die fragliche Bedingung etwa so ausdrücken:

Damit die zwei Kugelkomplexe $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, $G(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = 0$ eine Integralschar gemeinsam besitzen, die in ein Orthogonalsystem eingeht, ist erforderlich, dass einerseits:

$$F(x) = 0,\ G(x') = 0,\ \sum_{i=1}^{4} (x_i - x'_i)^2 = 0,\ U = 0,\ V = 0,\ W = 0$$

und dass andrerseits die Determinante der vier Funktionen F, U, V, W (63) *für dieselben Werte von x, x' verschwindet, wenn die in ihnen steckenden x'*

als Konstanten, also nur x_1, x_2, x_3, x_4 als Variablen betrachtet werden, und umgekehrt.

Wenn F und G unter der Form:

$$z - f(x_1, x_2, x_3), \quad z' - \varphi(x'_1, x'_2, x'_3)$$

($z = x_4$, $z' = x'_4$) gedacht werden, bekommen wir also im gegenwärtigen Falle für z, z', x'_1, x'_2, x'_3 fünf Gleichungen, etwa die vier ersten der Gleichungen (30) und statt der fünften (30):

die genannte Funktionaldeterminante $= 0$.

Letztere Gleichung wird in Bezug auf z eine partielle Differentialgleichung zweiter, dagegen in Bezug auf z' nur erster Ordnung. Weil andrerseits die Flächenscharen der Orthogonalsysteme Lösungen einer partiellen Differentialgleichung 3. O. mit drei unabhängigen Variablen sind (*), genügt die Lösung dieser Gleichung 3. O. um alle Lösungspaare $z = f$, $z' = g$ jener fünf Gleichungen zu gewinnen.

Bei einer in § 1 behandelten Aufgabe wurde ihre Lösung auf ein System von vier partiellen Differentialgleichungen mit drei unabhängigen Variablen zurückgeführt. Die eine dieser Gleichungen war dritter, die drei übrigen waren vierter Ordnung. Siehe N. 11 S. 86. Damit wird in diesem Falle das nötige Integrationsgeschäft viel einfacher als das im vorliegenden § Erörterte zu betrachten sein.

Die obige Funktionaldeterminante bekommt in dem soeben besprochenen Falle: $F \equiv z - f(x_1, x_2, x_3)$, $G \equiv z' - \varphi(x'_1, x'_2, x'_3)$, die Form:

$$\frac{z - z'}{z}(1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(1 + p'^2_1 + p'^2_2 + p'^2_3)\left(\frac{\Phi}{z'} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} p'_i \frac{\partial \Phi}{\partial x'_i}\right) +$$

$$+ \frac{z}{z'}(1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\left(\Phi\Psi - \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} p'_i \frac{\partial \Phi}{\partial x'_i}\right)^2\right) +$$

$$+ \quad (1 + p'^2_1 + p'^2_2 + p'^2_3)\left(\frac{1}{2}\Phi \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{\partial \Psi}{\partial p'_i} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3} p_i \frac{\partial \Phi}{\partial x'_i} \sum_{i=1}^{3} p'_i \frac{\partial \Phi}{\partial x'_i}\right) = 0,$$

(*) Siehe z. B. meine Abhandlung: *Anwendung von Sätzen über partielle Differentialgleichungen etc.* in Math. Ann., Bd. 40 (1891), N. 38, S. 246.

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\Phi = p_{11}(x_1 - x'_1)^2 + p_{22}(x_2 - x'_2)^2 + p_{33}(x_3 - x'_3)^2 + 2p_{12}(x_1 - x'_1)(x_2 - x'_2) + \\ + 2p_{23}(x_2 - x'_2)(x_3 - x'_3) + 2p_{31}(x_3 - x'_3)(x_1 - x'_1),$$

$$\Psi = p_{11}p'^2_1 + p_{22}p'^2_2 + p_{33}p'^2_3 + 2p_{12}p'_1p'_2 + 2p_{23}p'_2p'_3 + 2p_{31}p'_3p'_1.$$

§ 4.

Eine Anwendung des Vorstehenden.

18. In älteren Abhandlungen über PLÜCKERsche Linienkomplexe bedient sich FELIX KLEIN sechs homogener Linienkoordinaten, zwischen denen eine quadratische Identität statthat. Nach LIE kann man sie auch als Kugelkoordinaten ansehen. Von den oben angewandten x_1, x_2, x_3, x_4 kommt man zu den neuen Koordinaten durch Betrachtung des Punktraumes $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ als stereographische Projektion einer im Raume $R_5\,(y_1 \mid y_6,\ y_2 \mid y_6,\ y_3 \mid y_6,\ y_4 \mid y_6,\ y_5 \mid y_6)$ gelegenen M_4^0:

$$\sum_{i=1}^{6} y_i^2 = 0. \tag{64}$$

(Vgl. F. KLEIN: *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie.* Math. Ann., Bd. 5, S. 264).

Die Gleichungen der stereographischen Projektion lauten zunächst:

$$u_i = h^2 x_i : \left(\sum_{k=1}^{4} x_k^2 + h^2\right), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad u_5 = h^3 : \left(\sum_{k=1}^{4} x_k^2 + h^2\right),$$

wobei h eine Konstante und $u_1, u_2, \ldots, u_5$ rechtwinklige Koordinaten der Punkte des R_5 bedeuten. Es wird dann

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5(u_5 - h) = 0$$

oder

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + \left(u_5 - \frac{1}{2}h\right)^2 = \frac{1}{4}h^2 \tag{65}$$

die Gleichung der fundamentalen M_4^0.

Führen wir dann $y_1, y_2, \ldots, y_6$ als homogene Koordinaten ein:

$$u_i = \frac{1}{2} h \frac{y_i}{y_6}\sqrt{-1}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad u_5 - \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} h \frac{y_5}{y_6}\sqrt{-1},$$

so liefert uns die allgemeine lineare, homogene und orthogonale Transformation dieser sechs y die KLEINschen Linienkoordinaten. In ihnen stellt sich (65) unter der Form (64) dar.

Bis auf weiteres lege ich den y die obige spezielle Bedeutung bei und setze demnach:

$$x_i = h\frac{u_i}{u_5} = h\frac{y_i}{y_5 - y_6\sqrt{-1}}, \quad i = 1, 2, 3, 4; \tag{66}$$

ebenso:

$$x'_i = h\frac{y'_i}{y'_5 - y'_6\sqrt{-1}}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{66'}$$

In den neuen Variablen wird, besonders wegen (64), $\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i - x'_i)^2$ gleich

$$\frac{h^2}{(y_5 - y_6\sqrt{-1})^2}\sum_{i=1}^{4} y_i^2 + \frac{h^2}{(y'_5 - y'_6\sqrt{-1})^2}\sum_{i=1}^{4} y'^2_i -$$

$$- \frac{2h^2}{(y_5 - y_6\sqrt{-1})(y'_5 - y'_6\sqrt{-1})}\sum_{i=1}^{4} y_i y'_i =$$

$$-h^2\frac{y_5 + y_6\sqrt{-1}}{y_5 - y_6\sqrt{-1}} - h^2\frac{y'_5 + y'_6\sqrt{-1}}{y'_5 - y'_6\sqrt{-1}} - 2h^2\frac{\sum\limits_{i=1}^{4} y_i y'_i}{(y_5 - y_6\sqrt{-1})(y'_5 - y'_6\sqrt{-1})} =$$

$$- \frac{2h^2}{(y_5 - y_6\sqrt{-1})(y'_5 - y'_6\sqrt{-1})}\sum_{k=1}^{6} y_k y'_k.$$

Ist ferner $\psi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ eine Funktion allgemeiner Art von x_i, so wird sie zunächst durch die Substitutionen (66) in eine Funktion von $y_1, y_2, \ldots, y_6$ verwandelt:

$$\psi = \psi\left(\frac{h y_1}{y_5 - y_6\sqrt{-1}}, \frac{h y_2}{y_5 - y_6\sqrt{-1}}, \frac{h y_3}{y_5 - y_6\sqrt{-1}}, \frac{h y_4}{y_5 - y_6\sqrt{-1}}\right).$$

Sie wird in den neuen Variablen homogen vom nullten Grade und es ergibt sich

$$\psi'(y_i) = \frac{h}{y_5 - y_6\sqrt{-1}}\,\psi'(x_i), \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

$$\psi'(y_5) = \sqrt{-1}\,\psi'(y_6) = \psi'\left(y_5 - y_6\sqrt{-1}\right),$$

also:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i\,\psi'(x_i) = \sum_{i=1}^{4} y_i\,\psi'(y) = -\left(y_5 - y_6\sqrt{-1}\right)\psi'\left(y_5 - y_6\sqrt{-1}\right).$$

Mit den Substitutionen (66′) wird:

$$\sum_{i=1}^{4} x'_i\,\psi'(x_i) = \frac{y_5 - y_6\sqrt{-1}}{y'_5 - y'_6\sqrt{-1}}\sum_{i=1}^{4} y'_i\,\psi'(y_i)$$

und daher:

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i - x'_i)\,\psi'(x_i) = -\frac{y_5 - y_6\sqrt{-1}}{y'_5 - y'_6\sqrt{-1}}\sum_{k=1}^{6} y'_k\,\psi'(y_k)\ (*).$$

Wenn $\chi(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ eine beliebige Funktion von x'_i bedeutet und wenn diese mittelst der Substitutionen (66′) in eine Funktion von $y'_1, \ldots, y'_6$ umgeformt wird, so sehen wir leicht ein, dass:

$$\sum_{i=1}^{4} \psi'(x_i)\,\chi'(x'_i) = \frac{\left(y_5 - y_6\sqrt{-1}\right)\left(y'_5 - y'_6\sqrt{-1}\right)}{h^2}\sum_{i=1}^{4} \psi'(y_i)\,\chi'(y'_i)$$

und dass:

$$\psi'(y_5)\,\chi'(y'_5) = \psi'\left(y_5 - y_6\sqrt{-1}\right)\chi'\left(y'_5 - y'_6\sqrt{-1}\right) = -\psi'(y_6)\,\chi'(y'_6),$$

also:

$$\sum_{i=1}^{4} \psi'(x_i)\,\chi'(x'_i) = \frac{\left(y_5 - y_6\sqrt{-1}\right)\left(y'_5 - y'_6\sqrt{-1}\right)}{h^2}\sum_{k=1}^{6} \psi'(y_k)\,\chi'(y'_k).$$

In den neuen Variablen nehmen damit die Gleichungen (24)-(27) die Form an:

$$\sum_{k=1}^{6} y_k\,y'_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{6} y'_k\,F'(y_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{6} y_k\,G'(y'_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{6} F'(y_k)\,G'(y'_k) = 0. \qquad (67)$$

(*) Nämlich:

$$\left(y'_5 - y'_6\sqrt{-1}\right)\psi'\left(y_5 - y_6\sqrt{-1}\right) = y'_5\,\psi'(y_5) + y'_6\,\psi'(y_6).$$

Die allgemeinste homogene und lineare Transformation der Variablen, die zugleich orthogonal ist, lässt eine jede dieser Gleichungen ungeändert. Im Vereim mit (64) stellen diese daher in den allgemeinen Kleinschen Koordinaten die Involutionsbedingung der von den Kugelkomplexen $F=0$, $G=0$ begründeten partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung des R_3 dar.

19. Gesetzt dass $F=0$, $G=0$ zwei konfokale Kugelkomplexe zweiten Grades darstellen, etwa:

$$\left.\begin{aligned} F &\equiv \frac{y_1^2}{a_1^2+\lambda_0}+\frac{y_2^2}{a_2^2+\lambda_0}+\frac{y_3^2}{a_3^2+\lambda_0}+\frac{y_4^2}{a_4^2+\lambda_0}+\frac{y_5^2}{a_5^2+\lambda_0}+\frac{y_6^2}{a_6^2+\lambda_0}=0,\\ G &\equiv \frac{y_1'^2}{a_1^2+\lambda_1}+\frac{y_2'^2}{a_2^2+\lambda_1}+\frac{y_3'^2}{a_3^2+\lambda_1}+\frac{y_4'^2}{a_4^2+\lambda_1}+\frac{y_5'^2}{a_5^2+\lambda_1}+\frac{y_6'^2}{a_6^2+\lambda_1}=0, \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

so finden wir die Differenz der linken Seiten der zweiten und dritten der Gleichungen (67) gleich $\lambda_1-\lambda_0$ mal

$$2\sum_{k=1}^{6}\frac{y\;y'_k}{(a_k^2+\lambda_0)\,(a_k^2+\lambda_1)}$$

und damit auch gleich dem Produkte von $\lambda_1-\lambda_0:2$ und der linken Seite der vierten jener Gleichungen (67). Diese Gleichung wird damit eine algebraische Folge der anderen (67), woraus hervorgeht, *dass zwei beliebige konfokale Kugelkomplexe* (68) *immer eine einfach unendliche Schar von gemeinsamen Integralflächen in R_3 besitzen*, wie Lie zuerst mehr indirekt bewiesen hat. Siehe S. 246 seiner Abhandlung: *Ueber Complexe* etc. in Math. Ann., Bd. V; siehe auch S. 13 meiner oben zitierten Abhandlung in Bd. IX von *Lunds universitets årsskrift.*

20. Gehen wir jetzt zur Formulierung der Bedingungen (f), (g), (61) der N. 16 über, die für die Integralschar von $F=0$, $G=0$ gelten müssen, wenn sie in einem Orthogonalsysteme enthalten sein soll, so sehen wir sogleich ein, dass in den speziellen y, die in (66), (66′) vorkommen, jene Gleichungen unter Voraussetzung der Gleichungen (67) die Form erhalten:

$$\sum_{k=1}^{6} G'(y'_k)\,d\,y_k-\frac{G'(y'_4)}{y'_4}\sum_{k=1}^{6} y'_k\,d\,y_k=0,$$

$$\sum_{k=1}^{6} y'_k\,d\,F'(y_k)-\frac{F'(y_4)}{y_4}\sum_{k=1}^{6} y'_k\,d\,y_k=0,$$

$$\sum_{k=1}^{6} G'(y'_k)\,d\,F'(y_k)-\frac{F'(y_4)\,G'(y'_4)}{y_4\,y'_4}\sum_{k=1}^{6} y'_k\,d\,y_k=0.$$

Eine lineare, homogene und orthogonale Transformation der fünf y_1, y_2, y_3, y_5, y_6, bei der y_4 unverändert bleibt, also:

$$z_i = a_i y_1 + b_i y_2 + c_i y_3 + e_i y_5 + f_i y_6, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6, \quad z_4 = y_4,$$
$$\sum a_i^2 = \sum b_i^2 = \ldots = 1, \quad \sum a_i b_i = 0, \text{ usw.},$$

ändert offenbar nichts an der Form der aufgezeichneten Gleichungen. Aber die z werden nun solche allgemeine KLEINsche Linienkoordinaten, *bei denen einer der zu Grunde gelegten linearen Komplexe aus allen Puntkugeln* ($x_4 = 0$) *des Raumes R_3 besteht* (*). *Das ist hier der Komplex*

$$z_4 = 0.$$

Wir bekommen daher die fragliche Bedingung, unter der die Integralschar zweier Komplexe $F = 0$, $\Phi = 0$, für die die Gleichungen (67) bestehen, Schar eines Orthogonalsystemes wird, durch blosses Nullsetzen der Determinante folgender sechs Funktionen:

$$\left.\begin{aligned} & F(z_1, z_2, \ldots, z_6),\ z_6,\ \sum_{k=1}^{6} z_k^2,\ \sum_{k=1}^{6} z'_k F'(z_k) - \frac{F'(z_4)}{z_4} \sum_{k=1}^{6} z_k z'_k, \\ & \sum_{k=1}^{6} z_k G'(z'_k) - \frac{G'(z'_4)}{z'_4} \sum_{k=1}^{6} z_k z'_k, \\ & \sum_{k=1}^{6} F'(z_k) G'_k(z'_k) - \frac{F'(z_4) G'(z'_4)}{z_4 z'_4} \sum_{k=1}^{6} z_k z'_k, \end{aligned}\right\} \quad (69)$$

wobei die akzentuierten z als Konstanten und nur die unakzentuierten z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 als variabel betrachtet werden.

21. Wenn

$$F \equiv \frac{z_1^2}{a_1^2 + \lambda_0} + \frac{z_2^2}{a_2^2 + \lambda_0} + \frac{z_3^2}{a_3^2 + \lambda_0} + \frac{z_4^2}{a_4^2 + \lambda_0} + \frac{z_5^2}{a_5^2 + \lambda_0} + \frac{z_6^2}{a_6^2 + \lambda_0},$$
$$G \equiv \frac{z'^2_1}{a_1^2 + \lambda_1} + \frac{z'^2_2}{a_2^2 + \lambda_1} + \frac{z'^2_3}{a_3^2 + \lambda_1} + \frac{z'^2_4}{a_4^2 + \lambda_1} + \frac{z'^2_5}{a_5^2 + \lambda_1} + \frac{z'^2_6}{a_6^2 + \lambda_1}$$

gesetzt wird, so erhält nach Unterdrückung des Faktors 2 die vierte der oben

(*) Die linearen Komplexe $z_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots 6$, werden als Fundamentalkomplexe bezeichnet.

stehenden Funktionen (69) die Form:

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{z_k z'_k}{a_k^2+\lambda_0} - \frac{1}{a_4^2+\lambda_0} \sum_{k=1}^{6} z_k z'_k, \tag{a}$$

die fünfte die Form:

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{z_k z'_k}{a_k^2+\lambda_1} - \frac{1}{a_4^2+\lambda_1} \sum_{k=1}^{6} z_k z'_k, \tag{b}$$

und die sechste nach Unterdrückung des Faktors 4 die Form:

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{z_k z'_k}{(a_k^2+\lambda_0)(a_k^2+\lambda_1)} - \frac{1}{(a_4^2+\lambda_0)(a_4^2+\lambda_1)} \sum_{k=1}^{6} z_k z'_k. \tag{c}$$

Letztere Differenz ist aber ein Produkt von 1 $(\lambda_1 - \lambda_0)$ und der Differenz (a) — (b), woraus ohne weiteres folgt, dass im gegenwärtigen Falle die am Ende der vorangehenden N. besprochene Determinante verschwinden muss. Also:

Zwei beliebige konfokale Kugelkomplexe zweiten Grades, für die die Punktkugeln des Raumes einen der Fundamentalkomplexe bilden, haben eine Integralschar gemein, die zugleich eine Schar eines dreifachen Orthogonalsystemes wird.

In meiner oben zitierten Abhandlung in Bd. IX von *Lunds universitets årsskrift* habe ich diesen Satz in wesentlich derselben Weise abgeleitet und hier nur die Rechnungen teilweise weiter ausgeführt und teilweise vereinfacht.

INHALT

Einleitung . . . . S. 65
§ 1. Differentialgleichungen der Kugelkomplexe . . . . » 66
§ 2. Eine Anwendung des Vorstehenden. Sätze von Weingarten . . . . » 88
§ 3. Ueber Orthogonalsysteme . . . . » 94
§ 4. Eine Anwendung des Vorstehenden . . . . » 101

Intorno alla risoluzione razionale di una classe di equazioni algebriche fra quattro variabili.

(Di Federigo Enriques, *a Bologna*.)

---

1. Scopo di questa Nota è d'indicare un criterio generale per la possibilità di risolvere razionalmente una classe di equazioni algebriche fra quattro variabili.

I. *Sia $f(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0$ un'equazione algebrica, irriducibile, di grado 2 complessivamente rispetto alle variabili $x_1\, x_2$, e di grado qualsiasi n rispetto ad $x_3\, x_4$: affinchè l'equazione $f = 0$ possa esser risoluta razionalmente, cioè ponendo $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ funzioni razionali (in generale non razionalmente invertibili) di tre parametri:*

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1\,(u_1\, u_2\, u_3) \\ x_2 &= \varphi_2\,(u_1\, u_2\, u_3) \\ x_3 &= \varphi_3\,(u_1\, u_2\, u_3) \\ x_4 &= \varphi_4\,(u_1\, u_2\, u_3), \end{aligned}$$

basta che si possano determinare quattro funzioni razionali di due variabili

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1\,(v_1\, v_1) \quad & x_2 &= x_2\,(v_1\, v_2) \\ x_3 &= x_3\,(v_1\, v_2) \quad & x_4 &= x_4\,(v_1\, v_2), \end{aligned}$$

per modo che $x_3\, x_4$ non siano legate fra loro da una relazione indipendente da $v_1\, v_2$ e che soddisfino all'equazione $f(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0$.

In linguaggio geometrico:

I'. *Una varietà di 3 dimensioni d'ordine $n > 2$, in S_4, dotata d'una retta $(n-2)$-pla, a, si può rappresentare sopra un'involuzione di S_3, se contiene una superficie razionale non composta di coniche giacenti in piani per a.*

Più generalmente:

II. *Una varietà algebrica di 3 (o di $r > 3$) dimensioni, possedente una congruenza del 1.° ordine di curve razionali, si può rappresentare sopra una involuzione dello spazio S_3 (o S_r), se contiene una superficie (o una varietà V_{r-1}) razionale, non composta di curve della congruenza.*

Un'applicazione particolare di questo teorema ci fornisce il seguente corollario:

Ogni congruenza del 1.° ordine di curve razionali nello spazio ordinario, (S_3), si può far nascere da una stella di rette per mezzo di una trasformazione razionale (generalmente non invertibile) dello spazio.

Nel caso di curve razionali d'ordine dispari la congruenza può ridursi ad una stella di rette già con una trasformazione birazionale (invertibile). Sappiamo (Montesano) che non è più così quando si tratti di coniche o di curve d'ordine pari. Ora il resultato innanzi enunciato permette di ridurre in generale la costruzione delle congruenze del 1.° ordine di curve razionali d'ordine pari, nello spazio, alla classificazione delle involuzioni di Jonquières dello spazio e quindi a quella delle involuzioni di gruppi di punti nel piano.

2. Dimostriamo il teorema I'.

Si abbia una varietà V_3^n, d'un certo ordine $n\,(>2)$, dotata di una retta $(n-2)$-pla, a, nello spazio S_4; i piani per a segano V_3^n secondo coniche C.

Supponiamo che alla V_3^n appartenga una superficie razionale F, secante le coniche C in $m\,(\geq 1)$ punti. Riferiamo la F ad una stella di raggi, di centro O, in S_3, per modo che ad ogni punto generico di F corrisponda un raggio per O e viceversa.

Consideriamo una conica C che sega F in m punti: $A_1, A_2, \ldots, A_m$. A questi punti rispondono m rette, $a_1, a_2, \ldots, a_m$, per O; e così alle coniche C di V_3 si possono associare gruppi di m raggi, generanti un'involuzione nella stella O. Ora si può porre *razionalmente in funzione del punto A_i*, una corrispondenza proiettiva fra la conica C e la retta a_i. Ne risulta definita razionalmente una corrispondenza (univoca) fra lo spazio S_3 e la varietà V_3^n, dove ad ogni punto di S_3 risponde *un* punto di V_3^n, e ad ogni punto di V_3^n rispondono m punti di S_3; per modo che mentre un punto di V_3^n si muove descrivendo una conica C, gli omologhi m punti in S_3 descrivono gli m raggi associati a C, della stella O. Così dunque la V_3^n viene rappresentata sopra una involuzione di gruppi di m punti in S_3, c. d. d.

3. Per giungere al teorema più generale II, basta quindi ricordare che, secondo Noether, ogni curva razionale si può trasformare birazionalmente

in una conica senza aggiungere irrazionalità numeriche al campo di razionalità definito dai coefficienti della sua equazione, e perciò, come già ebbi luogo di notare (Cfr. *Math. Annalen*, Bd. 49), ogni varietà V_r di dimensione r possedente una congruenza del 1^0 ordine di curve razionali, si può trasformare in una varietà V_r^n, d'un certo ordine n in S_{r+1}, possedente una retta $(n-2)$-pla.

Il corollario segue immediatamente osservando che se è data nello spazio S_3 una congruenza di curve razionali, un piano generico di S_3 porge appunto una superficie razionale non composta colle curve della congruenza.

Bologna, Settembre 1912.

Über die Trägheitsformen eines algebraischen Moduls.

(*Von* A. Hurwitz, *in Zürich.*)

Die Untersuchungen von Herrn F. Mertens über die Resultante (*) legen es nahe gewisse für einen algebraischen Modul charakteristische Formen zu betrachten, die man passend als « *Trägheitsformen* » des Moduls bezeichnen kann.

Es ist der Zweck der vorliegenden Arbeit, einige einfache Eigenschaften dieser Formen abzuleiten.

Der Definition der Trägheitsformen will ich zunächst einiges über die Bezeichnungen, deren ich mich bedienen werde, voraufschicken.

Bedeuten

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n \tag{1}$$

unabhängige Variable, ferner

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_n \tag{2}$$

nicht-negative ganze Zahlen, so versteht man bekanntlich unter dem « Grade » des Potenzproduktes

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \tag{3}$$

die nicht-negative ganze Zahl

$$\mu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n. \tag{4}$$

Die Potenzprodukte μ^{ten} Grades bezeichne ich, in eine beliebige, aber bestimmte Reihenfolge gebracht, mit

$$X_\mu^{(1)},\ X_\mu^{(2)}, \ldots,\ X_\mu^{(k)}, \tag{5}$$

(*) F. Mertens: 1) *Über die bestimmenden Eigenschaften der Resultante von n Formen mit n Veränderlichen,* Sitzungsberichte der Kais. Akad. d. Wissenschaften zu Wien, Bd. 93 (1886); 2) *Zur Theorie der Elimination,* ib. Bd. 108 (1899).

während ich unter X_μ irgend eines dieser Potenzprodukte verstehe. Die Anzahl k der X_μ beträgt

$$k=[\mu;\ n]=\frac{(\mu+n-1)!}{\mu!\,(n-1)!}. \tag{6}$$

Im Falle $\mu=0$ reducirt sich die Reihe (5) auf das eine Glied

$$X_0=1;$$

im Falle $\mu=1$ giebt es n Potenzprodukte X_1, nämlich

$$X_1^{(1)}=x_1,\quad X_1^{(2)}=x_2,\ldots,\ X_1^{(n)}=x_n.$$

Neben den Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ treten im Folgenden noch weitere von diesen und von einander unabhängige veränderliche Grössen auf, die ich als « *Unbestimmte* » bezeichne. Die ganzen rationalen Funktionen dieser Unbestimmten, deren Coefficienten Zahlen eines bestimmten Rationalitätsbereiches sind, bilden einen Bereich B; jede einzelne dieser ganzen rationalen Funktionen heisse ein « Element » des Bereiches B.

Diesen Bereich B denke ich mir ein für alle Mal festgelegt. Unter einer « *Form* » schlechthin verstehe ich nun stets eine homogene ganze rationale Funktion der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$, deren Coefficienten Elemente des Bereiches B sind.

Der allgemeine Ausdruck einer Form μ^{ten} Grades ist demnach

$$F=C_1X_\mu^{(1)}+C_2X_\mu^{(2)}+\cdots+C_kX_\mu^{(k)}=\Sigma\, C X_\mu, \tag{7}$$

unter $C_1, C_2, \ldots, C_k$ Elemente des Bereiches B verstanden.

Der Fall, in welchem der Bereich B ausschliesslich aus den Zahlen eines bestimmten Rationalitätsbereiches besteht, wird hier mit eingeschlossen. Er entspricht der Annahme, dass die Zahl der Unbestimmten sich auf Null reducirt.

Wählt man unter den Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und Unbestimmten irgendwelche aus — sie seien mit $v_1, v_2, \ldots, v_r$ bezeichnet — so ist eine Form F als ganze rationale Funktion von $v_1, v_2, \ldots, v_r$ in der Gestalt

$$F=\Sigma\, K_{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_r}\, v_1^{\rho_1}\, v_2^{\rho_2}, \ldots, v_r^{\rho_r} \tag{8}$$

darstellbar, wo die Coefficienten $K_{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_r}$ nur von den Variabeln und Unbestimmten abhängen, die von den ausgewählten $v_1, v_2, \ldots, v_r$ verschieden sind. Betrachtet man bei dieser Darstellung von F zwei Glieder mit nicht-verschwindenden Coefficienten:

$$K_{\rho'_1,\rho'_2,\ldots,\rho'_r}\, v_1^{\varrho'_1}\, v_2^{\varrho'_2} \ldots v_r^{\varrho'_r} \quad \text{und} \quad K_{\rho''_1,\rho''_2,\ldots,\rho''_r}\, v_1^{\varrho''_1}\, v_2^{\varrho''_2} \ldots v_r^{\varrho''_r}$$

so heisst, nach GAUSS (*), das erste Glied *höher* oder *niedriger* als das zweite, je nachdem die erste nicht verschwindende unter den Differenzen

$$\rho'_1 - \rho''_1, \quad \rho'_2 - \rho''_2, \ldots, \quad \rho'_r - \rho''_r$$

positiv oder negativ ist.

Hiernach ist klar, was unter dem « *höchsten* » Gliede von F zu verstehen ist, wenn noch die Festsetzung getroffen wird, dass in dem Falle, wo F nur *ein* nicht verschwindendes Glied hat, dieses selbst und in dem Falle, wo F identisch Null ist, die Null als höchstes Glied von F angesehen werden soll.

Für zwei Formen F und F_1, die beide in der Gestalt (8) dargestellt sind, gilt der Satz, dass das höchste Glied des Produktes $F.F_1$ durch Multiplication der höchsten Glieder von F und F_1 erhalten wird.

Wenn die Summe S der höchsten unter den höchsten Gliedern von mehreren Formen $F, F_1, F_2, \ldots, F_k$ nicht identisch Null ist, so wird diese Summe S zugleich das höchste Glied von $F + F_1 + F_2 + \cdots F_k$ sein und es folgt also:

Ist die Summe von mehreren Formen $F, F_1, F_2, \ldots, F_k$ identisch Null, so ist auch die Summe der höchsten unter den höchsten Gliedern dieser Formen identisch Null.

1. Trägheitsformen eines Moduls.

Bezeichnen $F, f_1, f_2, \ldots, f_r$ Formen, so bedeutet die Congruenz

$$F \equiv 0\,(f_1, f_2, \ldots, f_r), \tag{9}$$

dass sich die Form F in die Gestalt

$$F = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_r f_r \tag{10}$$

setzen lässt, unter $A_1, A_2, \ldots, A_r$ Formen verstanden. Sind die Formen $f_1, f_2, \ldots, f_r$ gegebene Formen, so bildet die Gesammtheit der Formen F,

(*) *Demonstratio nova altera, etc.* Werke, Bd. 3, pag. 36.

welche der Congruenz (9) genügen, den « Modul »

$$M = (f_1, f_2, \dots, f_r) \text{ (*)}. \tag{11}$$

Bedeutet T irgend eine Form, so wird jede Form F des Moduls M auch dem Modul

$$M' = (f_1, f_2, \dots, f_r, T)$$

angehören. Wenn nun auch umgekehrt jede Form des Moduls M', deren Grad eine gewisse Grenze übersteigt, dem Modul M angehört, so nenne ich die Form T eine « *Trägheitsform* » des Moduls M. Also:

Die Form T heisst Trägheitsform des Moduls

$$M = (f_1, f_2, \dots, f_r) \tag{12}$$

wenn dieser Modul und der Modul

$$M' = (f_1, f_2, \dots, f_r, T) \tag{13}$$

in allen Formen, deren Grade eine gewisse Grenze übersteigen, vollständig übereinstimmen (**).

Ist X_μ ein Potenzprodukt, dessen Grad μ eine gewisse Grenze überschreitet, so muss demnach

$$X_\mu T \equiv 0 \, (f_1, f_2, \dots, f_r) \tag{14}$$

sein, weil $X_\mu T$ eine Form des Moduls M' ist. Giebt es umgekehrt eine Zahl μ so, dass für jedes Potenzprodukt X_μ die Congruenz (14) erfüllt ist, so ist T eine Trägheitsform des Moduls M. Denn jede Form des Moduls M':

$$F = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_r f_r + B T$$

deren Grad $\mu + g - 1$ überschreitet (unter g den Grad von T verstanden),

(*) Vgl. L. Kronecker, *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*, Crelle's Journal, Bd. 92. — D. Hilbert, *Über die Theorie der algebraischen Formen*, Math. Annalen, Bd. 36, S. 479. — F. König, *Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen* (Leipzig, 1903).

(**) Enthält der zu Grunde liegende Bereich B keine Unbestimmte, sind also die Coefficienten aller in Betracht gezogenen Formen Zahlen eines bestimmten Rationalitätsbereiches, so besitzen die beiden Moduln M und M' dieselbe Hilbert'sche charakteristische Funktion (Hilbert, l. c., pag. 512).

so dass B mindestens vom μ^{ten} Grade ist, gehört dann auch dem Modul M an. Es gilt also der

Satz 1. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Form T eine Trägheitsform des Moduls M ist, besteht in dem Vorhandensein einer Zahl μ von der Art, dass für jedes Potenzprodukt X_μ die Congruenz*

$$X_\mu \, T \equiv 0 \, (M)$$

erfüllt ist.

Den kleinsten zulässigen Wert von μ nenne ich die « *Stufe* » der Trägheitsform T.

Die Trägheitsformen 0^{ter} Stufe sind hiernach mit den Formen des Moduls identisch; die Trägheitsformen erster Stufe sind durch die Congruenzen

$$x_1 T \equiv x_2 T \equiv \cdots \equiv x_n T \equiv 0 \, (f_1, f_2, \ldots, f_r)$$

charakterisirt, mit dem Zusatz, dass nicht

$$T \equiv 0 \, (f_1, f_2, \ldots, f_r)$$

sein soll.

Die Trägheitsformen 0^{ter} Stufe sollen *uneigentliche*, die übrigen Trägheitsformen aber *eigentliche* Trägheitsformen heissen.

Nach dem ersten Hilbert'schen Fundamentaltheorem (*) können alle Trägheitsformen in der Gestalt

$$T = \mathfrak{A}_1 T_1 + \mathfrak{A}_2 T_2 + \cdots + \mathfrak{A}_k T_k \tag{15}$$

dargestellt werden, unter $T_1, T_2, \ldots, T_k$ geeignet gewählte Trägheitsformen verstanden. Soll nun T eine eigentliche Trägheitsform sein, so dürfen die Grade der Formen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$ und folglich auch der Grad von T eine gewisse Grenze nicht überschreiten, weil sonst

$$\mathfrak{A}_1 T_1 \equiv \mathfrak{A}_2 T_2 \equiv \cdots \equiv \mathfrak{A}_k T_k \equiv 0 \, (f_1, f_2, \ldots, f_r)$$

und also auch

$$T \equiv 0 \, (f_1, f_2, \ldots, f_r)$$

wäre. Man hat also den

(*) Hilbert, l. c., pag. 474. Das Theorem ist in seiner Ausdehnung auf den Fall anzuwenden, wo die Coefficienten der Formen selbst ganze rationale Funktionen von Variabeln (den « Unbestimmten ») sind.

Satz 2. *Die Grade der eigentlichen Trägheitsformen eines gegebenen Moduls haben eine endliche obere Grenze.*

Aus der Gleichung (15) folgt weiter:

Satz 3. *Die Stufen der Trägheitsformen eines gegebenen Moduls haben eine endliche obere Grenze.*

Denn die Stufe von T kann nicht grösser sein als die Stufen von T_1, $T_2, \ldots T_k$.

Es besteht ferner folgender

Satz 4. *Es sei T eine eigentliche Trägheitsform μ^{ter} Stufe des Moduls M. Dann sind die Formen*

$$x_1 T, \quad x_2 T, \ldots, \quad x_n T \tag{16}$$

Trägheitsformen $(\mu - 1)^{\text{ster}}$ oder niedrigerer Stufe und mindestens eine unter ihnen ist genau von der $(\mu - 1)^{\text{sten}}$ Stufe.

Für jedes Potenzprodukt $X_{\mu-1}$ gilt nämlich

$$X_{\mu-1}(x_1 T) \equiv 0\ (M).$$

Daher ist $x_1 T$ eine Trägheitsform $(\mu - 1)^{\text{ster}}$ oder niedrigerer Stufe, und das Gleiche gilt von $x_2 T$, $x_3 T, \ldots, x_n T$. Wären nun die Formen (16) sämmtlich von niedrigerer als der $(\mu - 1)^{\text{sten}}$ Stufe, so würde für jedes Potenzprodukt $X_{\mu-2}$

$$X_{\mu-2}\, x_i\, T \equiv 0\ (M) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sein; daher auch

$$X_{\mu-1}\, T \equiv 0\ (M)$$

für jedes Potenzprodukt $X_{\mu-1}$. Dies widerstreitet aber der Voraussetzung, dass T von der μ^{ten} Stufe ist.

Durch wiederholte Anwendung des Satzes 4 ergiebt sich

Satz 5. *Es sei T eine eigentliche Trägheitsform von der Stufe $\mu \geqq r \geqq 0$. Durchläuft dann X_r alle Potenzprodukte r^{ten} Grades, so sind die Formen*

$$X_r\, T$$

sämmtlich Trägheitsformen von $(\mu - r)^{\text{ter}}$ oder niedrigerer Stufe und mindestens eine unter ihnen ist genau von der $(\mu - r)^{\text{ten}}$ Stufe.

Insbesondere wird sich also unter den Formen $X_{\mu-1}\, T$ mindestens eine Form erster Stufe befinden. Es gilt daher der

Satz 6. *Besitzt ein Modul M überhaupt eigentliche Trägheitsformen, so besitzt er auch eine solche von der ersten Stufe.*

Ein Modul ohne eigentliche Trägheitsformen heisse « *abgeschlossen* ». Nach dem vorstehenden Satze ist hierfür hinreichend, dass für den betreffenden Modul keine Trägheitsform erster Stufe existirt.

Beispielsweise ist der von Herrn Hilbert (l. c.) betrachtete Modul, der aus den Formen

$$f_1 = x_1 x_3 - x_2^2, \quad f_2 = x_2 x_3 - x_1 x_4, \quad f_3 = x_2 x_4 - x_3^2$$

gebildet wird, abgeschlossen. Denn aus der Congruenz

$$x_3 T = 0 \, (f_1, f_2, f_3)$$

folgt, wie eine leichte Rechnung zeigt, dass notwendig

$$T \equiv 0 \, (f_1, f_2, f_3)$$

ist. Eine Trägheitsform erster Stufe giebt es für diesen Modul also nicht.

Es seien schliesslich noch folgende, leicht zu beweisende Sätze erwähnt:

Satz 7. *Sind $T_1, T_2, \ldots, T_i$ Trägheitsformen des Moduls*

$$M = (f_1, f_2, \ldots, f_r)$$

so stimmt die Gesammtheit der Trägheitsformen des Moduls

$$M' = (f_1, f_2, \ldots, f_r, T_1, T_2, \ldots, T_i)$$

mit der des Moduls M überein.

Satz 8. *Lassen sich gemäss der Gleichung* (15) *sämmtliche Trägheitsformen des Moduls*

$$M = (f_1, f_2, \ldots, f_r)$$

durch die Trägheitsformen $T_1, T_2, \ldots, T_k$ ausdrücken, so ist der Modul

$$M' = (f_1, f_2, \ldots, f_r, T_1, T_2, \ldots, T_k)$$

abgeschlossen.

II. Aus allgemeinen Formen gebildete Moduln.

Wenn die einzelnen Coefficienten einer Form zu den Unbestimmten (mit denen der zu Grunde liegende Bereich B gebildet ist) gehören, so soll die Form « *allgemein* » heissen (*). Werden mehrere allgemeine Formen

$$f_1, f_2, \ldots, f_r \tag{17}$$

(*) Vgl. F. Mertens, l. c.

gleichzeitig betrachtet, so wird immer, falls nicht das Gegenteil ausdrücklich bemerkt wird, vorausgesetzt, dass die sämmtlichen Coefficienten dieser Formen von einander *unabhängige* Unbestimmte sind. Es sind dann also immer mindestens (vgl. Gleichung (6))

$$[m_1;\, n] + [m_2;\, n] + \ldots + [m_r;\, n]$$

Unbestimmte vorhanden, wobei

$$m_1,\ m_2, \ldots,\ m_r \tag{18}$$

die Grade der Formen (17) bedeuten.

Wie Herr Mertens werde ich, wenn die allgemeinen Formen (17) vorliegen, den Coefficienten von $x_k^{m_i}$ in der Form f_i mit a_{ik} bezeichnen und ferner

$$f_i = a_{ik}\, x_k^{m_i} - f_{ik} \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ r) \tag{19}$$

setzen, so dass $-f_{ik}$ die Gesammtheit der von $a_{ik}\, x_k^{m_i}$ verschiedenen Glieder der Form f_i bedeutet. Dabei bezeichnet k irgend einen der Indices $1, 2, \ldots, n$.

Der Index k sei jetzt beliebig, aber fest gewählt, ferner sei T irgend eine Form. Bezüglich aller Unbestimmten ist T eine ganze rationale Funktion, insbesondere kann sie auch als eine solche Funktion der Coefficienten

$$a_{1k},\ a_{2k}, \ldots,\ a_{rk} \tag{20}$$

betrachtet werden. Dementsprechend werde T mit

$$T(a_{1k},\ a_{2k}, \ldots,\ a_{rk})$$

bezeichnet. Ersetzt man nun in dem Ausdruck von T die Coefficienten (20) durch

$$\frac{f_{1k}}{x_k^{m_1}},\ \frac{f_{2k}}{x_k^{m_2}}, \ldots,\ \frac{f_{rk}}{x_k^{m_r}} \tag{21}$$

bezüglich, so geht T über in

$$[T]_k = T\left(\frac{f_{1k}}{x_k^{m_1}},\ \frac{f_{2k}}{x_k^{m_2}}, \ldots,\ \frac{f_{rk}}{x_k^{m_r}}\right) = \frac{1}{x_k^N}\, \overline{T}_k, \tag{22}$$

wo N eine nicht-negative ganze Zahl und $\overline{T}_k$ eine Form bezeichnet, die die Unbestimmten $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{rk}$ nicht mehr enthält.

Es gilt nun der

Satz 9. *Die Form T ist stets und nur dann Trägheitsform des Moduls*

$$M = (f_1, f_2, \ldots, f_r), \tag{23}$$

wenn für irgend einen Index k

$$[T]_k$$

identisch Null ist.

Ist zunächst T Trägheitsform μ^{ter} Stufe, so ist

$$X_\mu T = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_r f_r.$$

Substituirt man in dieser, in den Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und den Unbestimmten identischen Gleichung für die Unbestimmten (20) die Ausdrücke (21), so verschwinden nach (19) $f_1, f_2, \ldots, f_r$ identisch und folglich wird

$$X_\mu [T]_k \quad \text{und also auch} \quad [T]_k \equiv 0.$$

Sei jetzt umgekehrt für die Form T und irgend einen Index k

$$[T]_k \equiv 0$$

vorausgesetzt. Es ist dann für ein genügend gross gewähltes m

$$\left.\begin{aligned} x_k^m\, T(a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{rk}) &= G(a_{1k}\, x_k^{m_1}, a_{2k}\, x_k^{m_2}, \ldots, a_{rk}\, x_k^{m_r}), \\ &= G(f_1 + f_{1k}, f_2 + f_{2k}, \ldots, f_r + f_{rk}), \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

wo G eine ganze rationale Funktion bedeutet.

Da aber

$$G(f_{1k}, f_{2k}, \ldots, f_{rk}) = x_k^m [T]_k$$

identisch verschwindet, so lässt sich die rechte Seite der Gleichung (24) auf die Form

$$A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_r f_r$$

bringen. Aus der Identität

$$x_k^m T = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_r f_r$$

folgt, dass nicht nur $[T]_k$, sondern auch $[T]_i$ für jeden von k verschiedenen Index i identisch Null ist. Folglich lässt sich der Exponent p so wählen, dass

$$x_i^p T \equiv 0 (f_1, f_2, \ldots, f_r) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{25}$$

Jedes Potenzprodukt X_μ vom Grade $\mu = p\,n$ enthält nun mindestens eine der Potenzen $x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p$ als Faktor; also ist auch

$$X_\mu\, T \equiv 0 \;(f_1, f_2, \ldots, f_r),$$

d. h. T ist Trägheitsform von μ^{ter} oder niedrigerer Stufe, w. z. b. w.

Wenn für einen — und folglich für jeden — Index k die identische Gleichung

$$[T]_k = 0$$

besteht, so will ich in Uebereinstimmung mit einer von Herrn Mertens (l. c.) gebrauchten Terminologie sagen, die Form T besitze « *Grundeigenschaft* » bezüglich der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_r$. Nach dem vorstehenden Satze ist dies dann völlig gleichbedeutend mit der Aussage, dass T Trägheitsform des Moduls

$$M = (f_1, f_2, \ldots, f_r)$$

sei. Eine unmittelbare Folge dieses Satzes ist ferner

Satz 10. *Das Produkt $T\,T'$ zweier Formen ist stets und nur dann Trägheitsform eines aus allgemeinen Formen gebildeten Moduls, wenn wenigstens einer der Faktoren Trägheitsform des Moduls ist.*

Denn das identische Verschwinden von

$$[T\,T']_k = [T]_k \,.\, [T']_k$$

findet dann und nur dann statt, wenn $[T]_k$ oder $[T']_k$ identisch null ist.

Satz 11. *Bezeichnen $f_1, f_2, \ldots, f_r$ allgemeine Formen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und ist $r < n$, so ist der Modul*

$$M = (f_1, f_2, \ldots, f_r)$$

ein abgeschlossener Modul.

Der Satz besagt, dass der Modul M keine eigentlichen Trägheitsformen besitzt, oder, dass nur die Formen des Moduls Trägheitsformen desselben sind.

Zunächst will ich zeigen, dass, falls der Satz 11. für einen bestimmten Wert von n als richtig vorausgesetzt wird, für den nämlichen Wert von n auch der folgende Satz gilt:

Satz 12. *Bezeichnen $f_1, f_2, \ldots, f_r$ allgemeine Formen der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ist ferner $r \leqq n$ und befriedigen die Formen $A_1, A_2, \ldots, A_r$ die identische Gleichung*

$$A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_r f_r = 0, \tag{26}$$

so lassen sich die letzteren Formen in der Gestalt

$$A_i = L_{i1} f_1 + L_{i2} f_2 + \cdots + L_{ir} f_r \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{27}$$

darstellen, unter den L_{ik} Formen verstanden, welche den Gleichungen

$$L_{ik} = - L_{ki} \quad (\text{also } L_{ii} = 0) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, r) \tag{28}$$

genügen.

Im Falle $r = 1$ ist dieser Satz offenbar richtig. Sei also $r > 1$ und der Satz für weniger als r Formen schon als bewiesen vorausgesetzt.

Aus der Identität (26) folgt, dass A_1 bezüglich der Formen $f_2, \ldots, f_r$ Grundeigenschaft besitzt, also Trägheitsform des Moduls $(f_2, \ldots, f_r)$ ist. Da ferner $r - 1 < n$ ist, so ergiebt der als richtig angenommene Satz 11., dass

$$A_1 = L_{12} f_2 + \cdots + L_{1r} f_r \tag{29}$$

gesetzt werden kann. Dies mit (26) combinirt ergiebt weiter

$$(A_2 + L_{12} f_1) f_2 + \cdots + (A_r + L_{1r} f_1) f_r = 0 \tag{30}$$

und folglich (da der Satz 12. für $r - 1$ Formen als schon bewiesen vorausgesetzt wird)

$$A_i + L_{1i} f_1 = L_{i2} f_2 + \cdots + L_{ir} f_r \quad (i = 2, 3, \ldots, r), \tag{31}$$

wobei

$$L_{ik} = - L_{ki} \quad (i = 2, 3, \ldots, r)$$

ist. Setzt man nun

$$L_{11} = 0, \quad L_{21} = - L_{12}, \ldots, \quad L_{r1} = - L_{1r},$$

so gehen die Gleichungen (29) und (31) in die Gleichungen (27) über.

Um nun den Satz 11. zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass aus

$$x_1 T \equiv 0 \ (f_1, f_2, \ldots, f_r) \tag{32}$$

notwendig

$$T \equiv 0 \ (f_1, f_2, \ldots, f_r) \tag{33}$$

folgt. Denn hieraus geht dann hervor dass Trägheitsformen erster Stufe für den Modul M nicht existiren und dieser Modul nach Satz 6. also abgeschlossen ist.

Besteht aber die Congruenz (32), also eine Gleichung der Gestalt

$$x_1 T = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_r f_r, \tag{34}$$

so kommt, indem man die auftretenden Formen nach Potenzen von x_1 ordnet, etwa

$$\left.\begin{aligned} x_1 T = (A_{10} + A_{11} x_1 + \cdots)(f_{10} + f_{11} x_1 + \cdots) + \cdots \\ \cdots + (A_{r0} + A_{r1} x_1 + \cdots)(f_{r0} + f_{r1} x_1 + \cdots) \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

und hieraus für $x_1 = 0$:

$$0 = A_{10} f_{10} + \cdots + A_{r0} f_{r0}. \tag{36}$$

Die Formen $f_{10}, \ldots, f_{r0}$ sind allgemeine Formen der $n-1$ Variabeln $x_2, \ldots, x_n$.

Wird nun der Satz 11. für den Fall von $(n-1)$ Variabeln als schon bewiesen vorausgesetzt, so folgt nach Satz 12

$$A_{i0} = L_{i1} f_{10} + L_{i2} f_{20} + \cdots + L_{ir} f_{r0} \quad (L_{ik} = -L_{ki};\ i = 1, 2, \ldots, r). \tag{37}$$

Sei jetzt

$$B_i = L_{i1} f_1 + L_{i2} f_2 + \cdots + L_{ir} f_r \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{38}$$

Dann sind die Differenzen

$$\begin{aligned} A_i - B_i &= A_{i0} - B_i + x_1 A_{i1} + \cdots \\ &= L_{i1}(f_{10} - f_1) + \cdots + L_{ir}(f_{r0} - f_r) + x_1 A_{i1} + \cdots \end{aligned}$$

sämmtlich durch x_1 teilbar, also

$$A_i - B_i = x_1 C_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{39}$$

Subtrahirt man daher von der Gleichung (34) die identische Gleichung

$$0 = B_1 f_1 + B_2 f_2 + \cdots + B_r f_r,$$

so kommt nach Division durch x_1

$$T = C_1 f_1 + C_2 f_2 + \cdots + C_r f_r \equiv 0\,(f_1, f_2, \ldots, f_r).$$

Da der Satz 11. aber für den Fall $n = 2$ und also $r = 1$ offenbar richtig ist, so gilt er allgemein. Auf ganz ähnlichem Wege wie Satz 11. ergibt sich der

Satz 13. *Bezeichnen $f_1, f_2, \ldots, f_r$ allgemeine Formen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und sind die Gradzahlen $m_1, m_2, \ldots, m_r$ dieser Formen positiv, während die Anzahl r der Formen ganz beliebig ist, so besitzt der Modul*

$$M = (f_1, f_2, \ldots, f_r)$$

keine eigentliche Trägheitsform, deren Grad grösser als

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r - r$$

ist.

Zunächst läst sich wieder zeigen, dass, wenn dieser Satz für einen bestimmten Wert von n als richtig vorausgesetzt wird, für den nämlichen Wert von n auch der folgende Satz gilt:

Satz 14. *Bezeichnen $f_1, f_2, \ldots, f_r$ allgemeine Formen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von den positiven Graden $m_1, m_2, \ldots, m_r$ bez. und befriedigen die Formen $A_1, A_2, \ldots, A_r$ die identische Gleichung*

$$A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_r f_r = 0, \tag{40}$$

deren einzelne Glieder $A_1 f_1, A_2 f_2, \ldots, A_r f_r$, so weit sie nicht identisch Null sind, von einem Grade grösser als

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r - r + 1$$

sind, so lassen sich diese Formen in der Gestalt

$$A_i = L_{i1} f_1 + L_{i2} f_2 + \cdots + L_{ir} f_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{41}$$

darstellen, unter den L_{ik} Formen verstanden, welche den Gleichungen

$$L_{ik} = - L_{ki} \,(\text{also } L_{ii} = 0) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r) \tag{42}$$

genügen.

In der Tat: wenn $r > 1$ vorausgesetzt wird, so folgt aus der Identität (40), dass A_1 Grundeigenschaft bezüglich der Formen $f_2, \ldots, f_r$ besitzt. Da der Grad von A_1 grösser als

$$m_2 + \cdots + m_r - (r - 1)$$

ist, so wird nach dem als richtig angenommenen Satze 13.:

$$A_1 = L_{12} f_2 + \cdots + L_{1r} f_r \tag{43}$$

und folglich, nach (40),

$$(A_2 + L_{12} f_1) f_2 + \cdots + (A_r + L_{1r} f_1) f_r = 0.$$

Die Grade der einzelnen Glieder dieser Identität sind grösser als

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r - r + 1 \geqq m_2 + \cdots + m_r - (r - 1) + 1.$$

Wird also der Satz 14. für $r - 1$ Formen als richtig vorausgesetzt, so folgt

$$A_i + L_{1i} f_1 = L_{i2} f_2 + \cdots + L_{ir} f_r \qquad (i = 2, 3, \ldots, r), \tag{44}$$

wobei

$$L_{ik} = -L_{ik} \qquad (i, k = 2, 3, \ldots, r)$$

ist. Setzt man

$$L_{11} = 0, \quad L_{21} = -L_{12}, \ldots, \quad L_{r1} = -L_{1r},$$

so gehen die Gleichungen (43) und (44) in die zu beweisenden Gleichungen (41) über. Da nun der Satz 14. im Falle $r = 1$ offenbar richtig ist, so gilt er allgemein.

Um nun den Satz 13. zu beweisen, nehme ich seine Gültigkeit für den Fall von $n-1$ Variabeln als schon feststehend an und zeige unter dieser Annahme: Ist der Grad von T grösser als $m_1 + m_2 + \cdots + m_r - r$, so folgt aus

$$x_1 T \equiv 0 \, (f_1, f_2, \ldots, f_r) \tag{45}$$

notwendig

$$T \equiv 0 \, (f_1, f_2, \ldots, f_r). \tag{46}$$

Ordnet man nämlich in der Gleichung

$$x_1 T = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_r f_r \tag{47}$$

auf der rechten Seite nach Potenzen von x_1, so kommt etwa

$$\left. \begin{aligned} x_1 T = (A_{10} + A_{11} x_1 + \cdots)(f_{10} + f_{11} x_1 + \cdots) + \cdots \\ \cdots + (A_{r0} + A_{r1} x_1 + \cdots)(f_{r0} + f_{r1} x_1 + \cdots), \end{aligned} \right\} \tag{48}$$

woraus für $x_1 = 0$

$$0 = A_{10} f_{10} + \cdots + A_{r0} f_{r0} \tag{49}$$

hervorgeht. Hier sind $f_{10}, \ldots, f_{r0}$ allgemeine Formen der $n-1$ Variabeln x_2, $x_3, \ldots, x_n$ und die Grade der Formen $A_{i0} f_{i0}$ sind grösser als

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r - r + 1.$$

Nach Satz 14. ist daher

$$A_{i0} = L_{i1} f_{10} + \cdots + L_{ir} f_{r0} \quad (L_{ik} = -L_{ki}) \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{50}$$

Setzt man jetzt

$$B_i = L_{i1} f_1 + \cdots + L_{ir} f_r \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{51}$$

so sind die Differenzen $A_i - B_i$ sämmtlich durch x_1 teilbar, also

$$A_i - B_i = x_1 C_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{52}$$

Die Subtraction der Identität

$$0 = B_1 f_1 + B_2 f_2 + \cdots + B_r f_r$$

von der Gleichung (47) liefert dann

$$T = C_1 f_1 + C_2 f_2 + \cdots + C_r f_r \equiv 0 \ (f_1, f_2, \ldots, f_r).$$

Bedeutet nun T irgend eine Trägheitsform des Moduls $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$, deren Grad grösser als $m_1 + m_2 + \cdots + m_r - r$ ist, so ist für einen geeigneten Exponenten μ

$$x_1^\mu T \equiv 0 \ (f_1, f_2, \ldots, f_r).$$

Nach dem Vorhergehenden folgt hieraus successive

$$x_1^{\mu-1} T \equiv 0, \quad x_1^{\mu-2} T \equiv 0, \ldots, \quad x_1 T \equiv 0, \quad T \equiv 0 (f_1, f_2, \ldots, f_r).$$

D. h. die Form T ist notwendig eine uneigentliche Trägheitsform.

Um den Beweis des Satzes 13. zu vollenden, genügt es zu zeigen, dass dieser Satz im Falle $n = 1$ richtig ist. Es seien also

$$f_1 = a_{11} x_1^{m_1}, \quad f_2 = a_{21} x_1^{m_2}, \ldots, f_r = a_{r1} x_1^{m_r} \tag{53}$$

allgemeine Formen der Variabeln x_1 und

$$T = C x_1^\varrho \tag{54}$$

eine Trägheitsform des Moduls $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$, deren Grad

$$\varrho > m_1 + m_2 + \cdots + m_r - r \text{ ist.}$$

Für einen geeigneten Wert von μ ist dann

$$\left.\begin{aligned} x_1^\mu T = C x_1^{\varrho+\mu} &= A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_r f_r \\ &= C_1 x_1^{\mu_1+m_1} + C_2 x_1^{\mu_2+m_2} + \cdots + C_r x_1^{\mu_r+m_r}, \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

wenn

$$a_{i1} A_i = C_i x_1^{\mu_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{56}$$

gesetzt wird. Hier ist nun, wenn C_1 nicht Null ist,

$$\mu_1 + m_1 = \varrho + \mu > m_1 + (m_2 - 1) + \cdots + (m_r - 1) + \mu - 1,$$

also, da die Zahlen $m_2 - 1, \ldots, m_r - 1$ nicht negativ sind,

$$\mu_1 > \mu - 1 \quad \text{und} \quad \mu_1 \geqq \mu.$$

Der Faktor $A_1 = \frac{1}{a_{11}} C_1 x_1^{\mu_1}$ ist also durch x_1^{μ} teilbar und dasselbe gilt von $A_2, \ldots, A_r$.

Die Gleichung (55) liefert daher

$$T = (A_1 x_1^{-\mu}) f_1 + \cdots + (A_r x_1^{-\mu}) f_r,$$

d. h. T ist keine eigentliche Trägheitsform.

Satz 15. *Bezeichnen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ allgemeine Formen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und sind die Gradzahlen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ dieser Formen positiv, so ist jede Trägheitsform erster Stufe des Moduls*

$$M = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

vom Grade

$$\rho = m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n. \tag{57}$$

Nach dem Satze 13. ist jedenfalls $\rho \leqq m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$ und es genügt daher zu zeigen, dass die Annahme

$$\rho < m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n \tag{58}$$

unzulässig ist.

Für den Fall $n = 1$ leuchtet dies sofort ein. Denn ist

$$T = C x_1^{\rho}$$

Trägheitsform erster Stufe des aus der einen Form

$$f_1 = a_{11} x_1^{m_1}$$

gebildeten Moduls, so muss in der Gleichung

$$C x_1^{\rho+1} = x_1 T = A_1 f_1 = (C_1 x_1^{\mu}) f_1 = C_1 a_{11} x_1^{\mu+m_1}$$

$\mu = 0$ sein, weil sonst $T \equiv 0 (f_1)$ wäre. Folglich ist wirklich

$$\rho = m_1 - 1.$$

Sei nun $n > 1$ und der Satz 15. für weniger als n Variable schon als richtig erkannt.

Dann ergeben folgende Schlüsse, dass er auch für n Variable gilt.

Der Grad ρ der Trägheitsform erster Stufe T befriedige die Bedingung (58). Aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_1 T &= A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_n f_n, \\ x_2 T &= B_1 f_1 + B_2 f_2 + \cdots + B_n f_n \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

folgt zunächst

$$(x_2 A_1 - x_1 B_1) f_1 + (x_2 A_2 - x_1 B_2) f_2 + \cdots + (x_2 A_n - x_1 B_n) f_n = 0.$$

Nach Satz 12. ist daher

$$x_2 A_1 - x_1 B_1 = M_2 f_2 + \cdots + M_n f_n . \tag{60}$$

Es seien A_{i0}, M_{i0}, f_{i0} die Formen, die aus A_i, M_i, f_i durch Nullsetzen von x_1 entstehen.

Dann folgt aus (60)

$$x_2 A_{10} = M_{20} f_{20} + \cdots + M_{n0} f_{n0} ,$$

d. i.

$$x_2 A_{10} \equiv 0 \, (f_{20} , \ldots , f_{n0})$$

und dieselbe Congruenz gilt offenbar auch, wenn eine der Variabeln x_3, $x_4, \ldots, x_n$ an Stelle von x_2 tritt.

Demnach ist A_{10} Trägheitsform erster oder nullter Stufe für den Modul

$$(f_{20} , \ldots , f_{n0}),$$

der aus $(n-1)$ allgemeinen Formen der $(n-1)$ Variabeln x_2, $x_3, \ldots, x_n$ gebildet ist.

Der Grad von A_{10} ist derselbe wie der von A_1, also $\rho + 1 - m_1$ und es ist

$$\rho + 1 - m_1 < m_2 + \cdots + m_n - (n-1).$$

Da der zu beweisende Satz für $n-1$ Variable als gültig vorausgesetzt wird, kann A_{10} nur Trägheitsform nullter Stufe sein; d. h. es ist

$$A_{10} = L_{12} f_{20} + \cdots + L_{1n} f_{n0}, \tag{61}$$

wo $L_{12}, \ldots, L_{1n}$ gewisse Formen bezeichnen.

Aus (59) folgt weiter

$$0 = A_{10} f_{10} + A_{20} f_{20} + \cdots + A_{n0} f_{n0} \tag{62}$$

oder zufolge (61)

$$0 = (A_{20} + L_{12} f_{10}) f_{20} + \cdots + (A_{n0} + L_{1n} f_{10}) f_{n0} .$$

Nach Satz 12. ist daher

$$A_{i0} + L_{1i} f_{10} = L_{i2} f_{20} + \cdots + L_{in} f_{n0} \; (L_{ik} = - L_{ki}, \; i, \; k = 2, 3, \ldots, n). \tag{63}$$

Die Gleichungen (61) und (63) lassen sich zu den folgenden vereinigen:

$$A_{i0} = L_{i1} f_{10} + L_{i2} f_{20} + \cdots + L_{in} f_{n0} \, (L_{ik} = - L_{ki}, \; i, \; k = 1, \; 2, \ldots n). \qquad (64)$$

Setzt man nun

$$C_i = L_{i1} f_1 + L_{i2} f_2 + \cdots + L_{in} f_n \qquad (i = 1, \; 2, \ldots, \; n),$$

so sind die Differenzen

$$A_i - C_i \qquad (i = 1, \; 2, \ldots, \; n)$$

sämmtlich durch x_1 teilbar und die Combination der Gleichungen

$$x_1 \, T = A_1 f_1 + \cdots + A_n f_n,$$
$$0 = C_1 f_1 + \cdots + C_n f_n$$

ergiebt nach Division durch x_1

$$T \equiv 0 \, (f_1, \ldots, \; f_n).$$

Diese Congruenz widerspricht aber der Voraussetzung, dass T Trägheitsform erster Stufe ist.

Aus dem somit bewiesenen Satze 15. folgt leicht der

Satz 16. *Bezeichnen $f_1, \; f_2, \ldots, \; f_n$ allgemeine Formen der Variabeln $x_1, \; x_2, \ldots, \; x_n$, sind die Gradzahlen $m_1, \; m_2, \ldots, \; m_n$ dieser Formen positiv und ist T eine eigentliche Trägheitsform σ^{ter} Stufe und ρ^{ten} Grades des Moduls*

$$M = (f_1, \; f_2, \ldots, \; f_n),$$

so gilt die Gleichung

$$\rho + \sigma = m_1 + m_2 + \cdots m_n - n + 1. \qquad (65)$$

Nach Satz 5. kann das Potenzprodukt $X_{\sigma-1}$ so gewählt werden, dass $X_{\sigma-1} \, T$ eine Trägheitsform erster Stufe ist. Wendet man auf diese den Satz 15. an, so erhält man die zu beweisende Gleichung (65). Diese zeigt insbesondere, dass für die Grade der eigentlichen Trägheitsformen die Zahl

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n,$$

für ihre Stufen die Zahl $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n + 1$ eine obere Grenze bildet.

III. Die Trägheitsformen eines aus n allgemeinen Formen von n Variabeln gebildeten Moduls.

Die Betrachtungen dieser Nummer werden sich ausschliesslich auf den Modul

$$M = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \tag{66}$$

beziehen, der aus n allgemeinen Formen von n Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gebildet ist. Die Grade dieser Formen werden positiv vorausgesetzt und wie früher mit $m_1, m_2, \ldots, m_n$ bez. bezeichnet. Zur Abkürzung sei

$$r = m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n + 1 \tag{67}$$

gesetzt. Für die Funktionaldeterminante

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \tag{68}$$

gilt nun der

Satz 17. *Die Funktionaldeterminante J ist eine Trägheitsform erster Stufe des Moduls M.*

Zunächst folgt aus den Euler'schen Gleichungen

$$x_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} = m_i f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

durch Auflösung nach $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dass

$$x_k J \equiv 0 \, (f_1, f_2, \ldots, f_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Demnach wird J Trägheitsform erster oder nullter Stufe sein. Es erübrigt, zu zeigen, dass J nicht von der nullten Stufe, also eine Gleichung der

Gestalt

$$J = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_n f_n$$

unmöglich ist. Statt dessen beweise ich sogleich den allgemeineren

Satz 18. *Eine Identität der Gestalt*

$$A J + A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_n f_n = 0, \tag{69}$$

in welcher $A, A_1, \ldots, A_n$ Formen und zwar A eine Form vom Grade Null (also ein Element des Bereiches B, d. h. eine ganze rationale Funktion der Unbestimmten allein) ist, kann nicht anders bestehen, als wenn $A = 0$ ist.

Mit a_{ii} werde, wie früher, der Coefficient von $x_i^{m_i}$ in f_i bezeichnet und die sämmtlichen in der Identität (69) auftretenden Formen mögen als Funktionen der Unbestimmten

$$a_{11}, \; a_{22}, \ldots, \; a_{nn}$$

angesehen und ihre höchsten Glieder durch ein vorgesetztes H angedeutet werden, so dass speciell

$$H(f_1) = a_{11} x_1^{m_1}, \quad H(f_2) = a_{22} x_2^{m_2}, \ldots, \quad H(f_n) = a_{nn} x_n^{m_n}$$

und (wie aus (68) folgt)

$$H(J) = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} x_1^{m_1 - 1} x_2^{m_2 - 1} \ldots x_n^{m_n - 1} . m_1 . m_2 \ldots m_n$$

ist. Aus (69) folgt nun die Identität

$$\left.\begin{aligned} H(A) m_1 m_2 \ldots m_n a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} \ldots x_n^{m_n-1} + \\ + H(A_1) a_{11} x_1^{m_1} + \cdots + H(A_n) a_{nn} x_n^{m_n} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Das in dem ersten Gliede auftretende Potenzprodukt $x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-2} \ldots x_n^{m_n-1}$ steht hier aber isolirt, da alle anderen vorkommenden Potenzprodukte einen der Faktoren $x_1^{m_1}, \ldots, x_n^{m_n}$ aufweisen. Die Identität (70) verlangt daher, dass

$$H(A) = 0$$

und folglich auch $A = 0$ ist, w. z. b. w. (*).

(*) Dieser Beweis bedarf einer Ergänzung, die ich bei anderer Gelegenheit mitteilen werde. Der Übergang von (69) zu (70) ist nämlich nicht ohne weiteres statthaft, da die einzelnen Terme von (70) nicht sämmtlich von gleicher Höhe zu sein brauchen.

(Zusatz bei der Correktur.)

Bedeutet T irgend eine Trägheitsform erster Stufe des Moduls M, so wird

$$T' = A\,T + A_1 f_1 + \cdots + A_n f_n$$

eine Trägheitsform erster oder nullter Stufe sein, wenn $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Formen von den bez. Graden $r - m_1 - 1,\ r - m_2 - 1, \ldots, r - m_n - 1$ und A irgend eine Form vom Grade Null bezeichnen. Die Trägheitsform T' heisse aus T « *abgeleitet* ». Es besteht nun der folgende Satz, der die Theorie der Trägheitsformen erster Stufe des Moduls M zum Abschluss bringt.

Satz 19. *Jede Trägheitsform T erster Stufe des Moduls M lässt sich aus der Funktionaldeterminante J ableiten, d. h. es ist*

$$T = A\,J + A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_n f_n, \tag{71}$$

unter $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ passend gewählte Formen verstanden.

Da nach dem Satze 15. die Form T, ebenso wie J, vom Grade $r-1$ ist, so folgt, dass die Form A vom Grade Null, die Form A_i vom Grade $r - m_i - 1$ sein muss.

Um den Beweis des Satzes 19. vorzubereiten, zeige ich zunächst: wenn der Satz für einen bestimmten Wert von n gültig ist, so gilt für den nämlichen Wert von n auch der folgende Satz:

Satz 20. *Es seien $f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}$ allgemeine Formen der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von den positiven Gradzahlen $m_1, m_2, \ldots, m_n, m_{n+1}$ bez. Befriedigen dann die Formen $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ die identische Gleichung*

$$A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_n f_n + A_{n+1} f_{n+1} = 0, \tag{72}$$

deren einzelne Glieder $A_1 f_1, A_2 f_2, \ldots, A_{n+1} f_{n+1}$, soweit sie nicht identisch Null sind, den Grad

$$s = m_1 + m_2 + \cdots + m_n + m_{n+1} - n \tag{73}$$

besitzen, so lassen sich diese Formen in folgender Gestalt darstellen:

$$A_i = m_i L \,.\, J_i + L_{i1} f_1 + L_{i2} f_2 + \cdots + L_{i,n+1} f_{n+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{74}$$

Dabei bedeuten: L eine Form vom Grade 0, ferner die L_{ik} Formen, die den Gleichungen

$$L_{ik} = -L_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{75}$$

genügen, endlich $J_1, J_2, \ldots, J_{n+1}$ die aus den Formen $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ zu bildenden Funktionaldeterminanten, so dass für unbestimmte Werte von u_1,

$u_2, \ldots, u_{n+1}$

$$\begin{vmatrix} u_1, & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ u_2, & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n+1}, & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = u_1 J_1 + u_2 J_2 + \cdots + u_{n+1} J_{n+1} \qquad (76)$$

ist.

Aus der identischen Gleichung (72) folgt, dass A_1 Grundeigenschaft bezüglich der Formen $f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}$ hat; der Grad von A_1 ist $m_2 + \cdots + m_{n+1} - n$ und folglich ist A_1 Trägheitsform erster oder nullter Stufe für den Modul $(f_2, \ldots, f_n, f_{n+1})$. Nach dem als richtig angenommenen Satz 19. kann daher

$$A_1 = m_1 . L . J_1 + L_{11} f_1 + L_{12} f_2 + \cdots + L_{1n} f_n + L_{1,n+1} f_{n+1} \qquad (77)$$

gesetzt werden, wo $L_{11} = 0$ und $L, L_{12}, \ldots, L_{1,n+1}$ Formen bedeuten.

Die Gleichung (72) geht nun vermöge (77) über in

$$m_1 L J_1 f_1 + (A_2 + L_{12} f_1) f_2 + \cdots + (A_{n+1} + L_{1,n+1} f_1) f_{n+1} = 0.$$

Ersetzt man weiter in der Gleichung (76) die Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ durch

$$m_1 f_1, \quad m_2 f_2, \ldots, \quad m_{n+1} f_{n+1}$$

bezüglich, so verschwindet die Determinante, welche die linke Seite der Gleichung bildet, so dass also

$$m_1 J_1 f_1 + m_2 J_2 f_2 + \cdots + m_{n+1} J_{n+1} f_{n+1} = 0$$

ist. Dies mit der vorhergehenden Gleichung combinirt, liefert

$$(A_2 + L_{12} f_1 - m_2 L J_2) f_2 + \cdots + (A_{n+1} + L_{1,n+1} f_1 - m_{n+1} L J_{n+1}) f_{n+1} = 0.$$

Und hieraus folgt nun nach Satz 12.:

$$A_i = -L_{1i} f_1 + m_i L J_i + L_{i2} f_2 + L_{i3} f_3 + \cdots + L_{i,n+1} f_{n+1} \; (i = 2, 3, \ldots, n+1). \quad (78)$$

Setzt man endlich $L_{i1} = -L_{1i}$ $(i = 2, 3, \ldots, n+1)$, so gehen die Gleichungen (77) und (78) in die zu beweisenden Gleichungen (74) über.

Um jetzt den Satz 19. zu beweisen, bemerke ich zunächst, dass der Satz im Falle $n = 1$ richtig ist. Denn es wird dann etwa

$$f_1 = a_{11}\, x_1^{m_1}, \quad J = m_1\, a_{11}\, x_1^{m_1 - 1}, \quad T = C \,.\, x_1^{m_1-1},$$

wo C eine Form nullten Grades (also eine Funktion der Unbestimmten allein) bezeichnet. Da T als Trägheitsform erster Stufe des Moduls (f_1) vorausgesetzt wird, muss

$$x_1\, T = C \,.\, x_1^{m_1} = A_1 f_1 = A_1\, a_{11}\, x_1^{m_1-1}, \quad \text{d. i.} \quad C = A_1\, a_{11}$$

sein. Somit kommt

$$T = A_1\, a_{11}\, x_1^{m_1-1} = \frac{1}{m_1} \,.\, A_1 J,$$

eine Gleichung, welche die Gestalt der Gleichung (71) besitzt.

Sei nun $n > 1$ und vorausgesetzt, dass der Satz 19. für den Fall von $(n-1)$ Variabeln schon als richtig erkannt sei. Bezeichnet dann T irgend eine Trägheitsform erster Stufe des Moduls M, so ist

$$x_1\, T = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_n f_n, \tag{79}$$

unter $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Formen von den bez. Graden

$$r - m_1 + 1\,,\; r - m_2 + 1\,, \ldots,\; r - m_n + 1$$

verstanden. Für $x_1 = 0$ entsteht aus (79)

$$0 = A_{10} f_{10} + A_{20} f_{20} + \cdots + A_{n0} f_{n0}\,, \tag{80}$$

wo $f_{10}, f_{20}, \ldots, f_{n0}$ allgemeine Formen der $n-1$ Variabeln $x_2, \ldots, x_n$ sind. Auf die vorstehende Gleichung kann jetzt der Satz 20. angewendet werden. Sei also für unbestimmte $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$\begin{vmatrix} u_1, & \dfrac{\partial f_{10}}{\partial x_2}, & \dfrac{\partial f_{10}}{\partial x_3}, \ldots, & \dfrac{\partial f_{10}}{\partial x_n} \\ u_2, & \dfrac{\partial f_{20}}{\partial x_2}, & \dfrac{\partial f_{20}}{\partial x_3}, \ldots, & \dfrac{\partial f_{20}}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_n, & \dfrac{\partial f_{n0}}{\partial x_2}, & \dfrac{\partial f_{n0}}{\partial x_3}, \ldots, & \dfrac{\partial f_{n0}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = u_1 j_1 + u_2 j_2 + \cdots + u_n j_n \tag{81}$$

gesetzt. Dann wird

$$A_{i0} = m_i L j_i + L_{i1} f_{10} + L_{i2} f_{20} + \cdots + L_{in} f_{n0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{82}$$

wobei L und die L_{ik} Formen der Variabeln $x_2, \ldots, x_n$ bezeichnen, welche den Gleichungen

$$L_{ik} = - L_{ki}$$

genügen. Nunmehr führe ich die Formen

$$B_i = m_i L j_i + L_{i1} f_1 + L_{i2} f_2 + \cdots + L_{in} f_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{83}$$

ein.

Die Differenzen $A_{i0} - B_i$ und folglich auch die Differenzen $A_i - B_i = A_i - - A_{i0} + (A_{i0} - B_i)$ sind sämmtlich durch x_1 teilbar, also etwa

$$A_i - B_i = x_1 C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{84}$$

Ferner folgt aus (83)

$$B_1 f_1 + B_2 f_2 + \cdots + B_n f_n = L(m_1 j_1 f_1 + m_2 j_2 f_2 + \cdots + m_n j_n f_n). \tag{85}$$

Diese Gleichung mit (79) combinirt, ergiebt in Rücksicht auf (84):

$$x_1 T = L(m_1 j_1 f_1 + m_2 j_2 f_2 + \cdots + m_n j_n f_n) + x_1 (C_1 f_1 + C_2 f_2 + \cdots + C_n f_n). \tag{86}$$

Der Faktor von L hängt nur von den Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ ab und lässt sich nach (81) durch die Determinante

$$\Phi = \begin{vmatrix} m_1 f_1, & \frac{\partial f_{10}}{\partial x_2}, & \frac{\partial f_{10}}{\partial x_3}, & \frac{\partial f_{10}}{\partial x_n} \\ m_2 f_2, & \frac{\partial f_{10}}{\partial x_2}, & \frac{\partial f_{10}}{\partial x_3}, & \frac{\partial f_{10}}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_n f_n, & \frac{\partial f_{n0}}{\partial x_2}, & \frac{\partial f_{n0}}{\partial x_3}, & \frac{\partial f_{n0}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \tag{87}$$

darstellen. Die Form L selbst ist vom nullten Grade, also eine Funktion der Unbestimmten allein.

Die Gleichung (86) wende ich insbesondere auf den Fall an, wo die Trägheitsform T mit der Funktionaldeterminante J zusammenfällt. Es sei etwa

$$x_1 J = \overline{L} \cdot \Phi + x_1 (\overline{C}_1 f_1 + \overline{C}_2 f_2 + \cdots + \overline{C}_n f_n).$$

Durch Vergleich der höchsten Glieder bezüglich der Unbestimmten a_{11}, $a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ergiebt sich

$$\bar{L} = 1,$$

also

$$x_1 J = \Phi + x_1 (\bar{C}_1 f_1 + \bar{C}_2 f_2 + \cdots + \bar{C}_n f_n), \tag{88}$$

eine Gleichung, die übrigens auch direkt aus der Identität

$$x_1 J = \begin{vmatrix} m_1 f_1, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}, \ldots, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ m_2 f_2, & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}, \ldots, & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_n f_n, & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}, \ldots, & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

folgt.

Aus (86) und (88) ergiebt sich nun schliesslich

$$x_1 (T - L J) = x_1 [(C_1 - \bar{C}_1) f_1 + \cdots + (C_n - \bar{C}_n) f_n]$$

und hieraus

$$T = L J + (C_1 - \bar{C}_1) f_1 + \cdots + (C_n - \bar{C}_n) f_n,$$

womit die Darstellbarkeit von T in der Gestalt (71) bewiesen ist.

Die Aufgabe, sämmtliche Trägheitsformen des Moduls M zu bestimmen, scheint sehr erhebliche Schwierigkeiten zu bieten. Dagegen gelingt es durch eine Reihe von einfachen Schlüssen, alle diejenigen Trägheitsformen herzustellen, die in den Coefficienten jeder der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ linear sind, zu welchen Trägheitsformen insbesondere die Funktionaldeterminante J gehört.

In Bezug auf die Abhängigkeit der Trägheitsformen von den Coefficienten der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ beweist man leicht zunächst den folgenden

Satz 21. *Jede eigentliche Trägheitsform des Moduls*

$$M = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

ist in jedem beliebigen Coefficienten einer beliebigen der Formen $f_1, f_2 \ldots, f_n$ mindestens vom ersten Grade.

Es sei a irgend einer der Coefficienten der Form f_1 und X das Potenzprodukt welches mit a multiplicirt ist, so dass

$$f_1 = a\,X + f'_1$$

gesetzt werden kann, wo f'_1 den Inbegriff der von $a\,X$ verschiedenen Glieder der Form f_1 bedeutet. Wenn nun T eine Trägheitsform des Moduls M ist, die vom Coefficienten a nicht abhängt, so setze man in der Gleichung

$$X_\mu\,T = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_n f_n$$

an die Stelle von a überall $-\frac{f'_1}{X}\cdot$ Nach Multiplikaton mit einer geeigneten Potenz von X kommt dann

$$X^N . X_\mu\,T = \overline{A}_2 f_2 + \cdots + \overline{A}_n f_n,$$

unter $\overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$ wieder Formen verstanden. Aus dieser Gleichung folgt nun (mit Hülfe des Satzes 9.), dass T notwendig auch Trägheitsform des Moduls $(f_2, \ldots, f_n)$ ist. Nach Satz 11. ist folglich T eine uneigentliche Trägheitsform. Eigentliche Trägheitsformen sind hiernach bezüglich der Coefficienten jeder der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ mindestens vom ersten Grade. Es gilt aber weiter der

Satz 22. *Eine eigentliche Trägheitsform T des Moduls M, welche in den Coefficienten der Form f_i vom ersten Grade ist, besitzt eine Stufe, die den Grad m_i von f_i nicht übersteigt.*

Angenommen die Stufe von T sei

$$\sigma = m_i + 1 + p \qquad (p \geqq 0).$$

Dann kann nach Satz 5. das Potenzprodukt X_p so gewählt werden, dass

$$\overline{T} = X_p\,T \tag{89}$$

von der Stufe $m_i + 1$ ist. Sind nun

$$X^{(1)}_{m_i}, \quad X^{(2)}_{m_i}, \ldots, \quad X^{(k)}_{m_i}$$

die Potenzprodukte m_i^{ten} Grades, so ist jede der Formen $X_{m_i}\overline{T}$ von der Stufe 1 oder 0.

Also hat man nach Satz 19.

$$X^{(\alpha)}_{m_i}\overline{T} \equiv A^{(\alpha)} J \ (\text{mod. } M) \qquad (\alpha = 1,\ 2, \ldots, k). \tag{90}$$

Da die Funktionaldeterminante J, ebenso wie $\overline{T}$, vom ersten Grade in den Coefficienten $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}$ der Form

$$f_i = a^{(1)} X_{m_i}^{(1)} + a^{(2)} X_{m_i}^{(2)} + \cdots + a^{(k)} X_{m_i}^{(k)} \tag{91}$$

ist, so sind die Formen $A^{(\alpha)}$ von diesen Coefficienten unabhängig.

Multiplicirt man nun die Congruenz (90) mit $a^{(\alpha)}$ und summirt sodann über α, so kommt

$$0 \equiv f_i \overline{T} \equiv J \,.\, \sum_{\alpha} a^{(\alpha)} A^{(\alpha)} \pmod{M}.$$

Nach Satz 18. ist folglich

$$\sum_{\alpha} a^{(\alpha)} A^{(\alpha)} = 0,$$

und, weil die Formen $A^{(\alpha)}$ von den $a^{(\alpha)}$ unabhängig sind,

$$A^{(\alpha)} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, k).$$

Die Congruenzen (90) gehen nun über in

$$X_{m_i}^{(\alpha)} T \equiv 0 \pmod{M}.$$

Es wäre also $\overline{T}$ höchstens von der Stufe m_i. Demnach ist die Annahme, die Stufe σ von T sei grösser als m_i unzulässig.

Die Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ seien nun nach aufsteigenden Gradzahlen geordnet, also so, dass

$$m_1 \leqq m_2 \leqq m_3 \leqq \cdots \leqq m_n \tag{92}$$

ist. Eigentliche Trägheitsformen des Moduls M, die in den Coefficienten jeder einzelnen der Formen f_i *linear* sind, können dann nach dem vorhergehenden Satze nur bis zur Stufe m_1 existiren. Über diese Trägheitsformen giebt der folgende Satz näheren Aufschluss:

Satze 23. *Es sei σ eine positive ganze Zahl, welche nicht grösser als m_1 ist, also*

$$1 \leqq \sigma \leqq m_1\,. \tag{93}$$

Dann giebt es

$$s = [\sigma - 1;\ n] = \frac{(\sigma + n - 2)!}{(\sigma - 1)!\,(n - 1)!} \tag{94}$$

Trägheitsformen σ^{ter} *Stufe*

$$T_1,\ T_2, \ldots,\ T_s \tag{95}$$

des Moduls M, die in den Coefficienten jeder einzelnen der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *linear sind und überdies folgende Eigenschaften besitzen:*

Der Ausdruck

$$T = A^{(1)}\,T_1 + A^{(2)}\,T_2 + \cdots + A^{(s)}\,T_s + A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_n f_n, \tag{96}$$

in welchem $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(s)}$ *Formen nullten Grades,* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *irgend welche Formen bedeuten, kann nicht anders verschwinden, als wenn*

$$A^{(1)} = A^{(2)} = \cdots = A^{(s)} = 0 \tag{97}$$

ist und jede Trägheitsform σ^{ter} *Stufe des Moduls M lässt sich in der Form* (96) *darstellen.*

Es sei $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ irgend eine der s Lösungen der Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \sigma - 1 \tag{98}$$

in nicht-negativen ganzen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Ferner bezeichne F irgend eine Form, deren Grad $m \geqq \sigma$ ist. Jedes einzelne Glied der Form F ist dann mindestens durch *eine* der Potenzen

$$x_1^{\alpha_1+1},\ x_2^{\alpha_2+1}, \ldots,\ x_n^{\alpha_n+1} \tag{99}$$

teilbar. Würde nämlich das betreffende Glied, für jedes i, die Variable x_i höchstens zur Potenz α_i als Faktor enthalten, so würde der Grad des Gliedes höchstens $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \sigma - 1$ sein, während doch F nach Voraussetzung mindestens vom Grade σ ist. Demnach kann F in die Gestalt

$$F = x_1^{\alpha_1+1} F_1 + x_2^{\alpha_2+1} F_2 + \cdots + x_n^{\alpha_n+1} F_n \tag{100}$$

gesetzt werden und zwar in *eindeutiger* Weise, wenn festgesetzt wird, dass $x_1^{\alpha_1+1} F_1$ alle diejenigen Glieder von F umfassen soll, die den Faktor $x_1^{\alpha_1+1}$ haben, sodann $x_2^{\alpha_2+1} F_2$ von den übrigen Gliedern alle diejenigen, welche den Faktor $x_2^{\alpha_2+1}$ haben u. s. f.

Diese Darstellungsweise wende ich nun auf die Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ an, wodurch die, bezüglich der Potenzen (99) linearen Gleichungen

$$f_i = x_1^{\alpha_1+1} f_{i1} + x_2^{\alpha_2+1} f_{i2} + \cdots + x_n^{\alpha_n+1} f_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{101}$$

entstehen.

Behufs bequemerer Bezeichnungsweise mögen die s Lösungen der Gleichung (98) ebenso numerirt werden, wie die Potenzprodukte

$$X_{\sigma-1}^{(1)}, \quad X_{\sigma-1}^{(2)}, \dots, \quad X_{\sigma-1}^{(s)} \tag{102}$$

vom Grade $\sigma - 1$, derart also, dass die Lösung $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ die Nummer h bekommt, wenn

$$X_{\sigma-1}^{(h)} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \tag{103}$$

ist. Die Determinante der Gleichungen (101) werde entsprechend mit

$$T_h = \begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, \dots, & f_{1n} \\ f_{21}, & f_{22}, \dots, & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}, & f_{n2}, \dots, & f_{nn} \end{vmatrix} \tag{104}$$

bezeichnet. Ersichtlich ist T_h eine Form vom Grade

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n - (\alpha_1 + 1) - (\alpha_2 + 1) - \cdots - (\alpha_n + 1) = r - \sigma + 1$$

und da aus den Gleichungen (101) hervorgeht, dass

$$x_1^{\alpha_1+1} T_h \equiv 0 \quad (\text{mod. } M)$$

ist, so folgt aus den früheren Sätzen, das T_h eine Trägheitsform σ^{ter} oder nullter Stufe des Moduls M ist.

Sieht man T_h als Funktion der Unbestimmten $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ an, so lautet das höchste Glied von T_h

$$H(T_h) = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{nn} x_1^{m_1-\alpha_1-1} \cdot x_2^{m_2-\alpha_2-1} \dots x_n^{m_n-\alpha_n-1}, \tag{105}$$

denn a_{11} kommt nur im Element f_{11}, a_{22} nur im Element $f_{22}, \dots, a_{nn}$ nur im Element f_{nn} der Determinante (104) vor.

Bezeichnet nun $X_{\sigma-1}$ ein beliebig gewähltes unter den Potenzprodukten (102), so ist $X_{\sigma-1}\, T_h$ eine Trägheitsform erster oder nullter Stufe und daher nach Satz 19.

$$X_{\sigma-1}\, T_h \equiv c\, J \quad (\text{mod. } M), \tag{106}$$

wo c vom nullten Grade in den Variabeln und allen Unbestimmten, also eine reine Zahl, ist.

Um diese zu bestimmen, braucht man nur in der Gleichung

$$X_{\sigma-1}\, T_h = c\, J + A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_n f_n$$

die höchsten Glieder bezüglich der Unbestimmten $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ zu vergleichen. Es ergiebt sich, nach Unterdrückung des Produktes

$$a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}\, x_1^{m_1-1}\, x_2^{m_2-1} \ldots x_n^{m_n-1},$$

$$X_{\sigma-1}\, x_1^{-\alpha_1}\, x_2^{-\alpha_2} \ldots x_n^{-\alpha_n} = c\,.\,p, \tag{107}$$

wo zur Abkürzung

$$p = m_1\, m_2 \ldots m_n \tag{108}$$

gesetzt ist. Aus (107) folgt, dass $c = \frac{1}{p}$ ist, falls $X_{\sigma-1}$ mit $X_{\sigma-1}^{(h)} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ zusammenfällt, dagegen $c = 0$ in jedem andern Falle. Es gelten also die Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} X_{\sigma-1}^{(h)}\, T_h &\equiv \frac{1}{p}\, J \quad (\text{mod. } M), \\ X_{\sigma-1}^{(h')}\, T_h &\equiv 0 \qquad (\text{mod. } M), \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

wenn h und h' irgend zwei verschieden Indices der Reihe $1, 2, \ldots, s$ bezeichnen. Die erste der Congruenzen (109) zeigt, dass T_h wirklich eine Trägheitsform σ^{ter} Stufe ist. Denn wäre T_h von der nullten Stufe, so müsste $X_{\sigma-1}^{(h)}\, T_h \equiv 0$ (mod. M) sein. Betrachtet man nun irgend einen Ausdruck von der Form (96), so ergiebt sich nach (109)

$$X_{\sigma-1}^{(h)}\, T \equiv \frac{1}{p}\, A^{(h)}\, J \ (\text{mod. } M).$$

Soll also T identisch verschwinden, so muss zufolge Satz 18.

$$A^{(h)} = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, s)$$

sein. Bezeichnet ferner T eine beliebige Trägheitsform σ^{ter} Stufe des Moduls M, so ist $X_{\sigma-1}^{(h)}\, T$ eine Trägheitsform erster oder nullter Stufe. Man kann daher, nach Satz 19., setzen:

$$X_{\sigma-1}^{(h)}\, T \equiv \frac{1}{p}\, A^{(h)}\, J \ (\text{mod. } M) \quad (h = 1, 2, \ldots, s), \tag{110}$$

unter $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(s)}$ Formen vom Grade Null verstanden. Die Form

$$\overline{T} = T - A^{(1)}\, T_1 - A^{(2)}\, T_2 - \cdots - A^{(s)}\, T_s \tag{111}$$

befriedigt daher die Congruenzen

$$X_{\sigma-1}^{(h)}\, T \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ M).$$

Da aber T nur von der σ^{ten} Stufe oder von der Stufe Null sein kann, so muss nach den vorstehenden Congruenzen notwendig der letztere Fall vorliegen. Daher ist also $T \equiv 0$ (mod. M), oder

$$T = A^{(1)}\, T_1 + \cdots + A^{(s)}\, T_s + A_1\, f_1 + \cdots + A_n\, f_n.$$

Hiermit ist der Satz 23. in allen seinen Teilen bewiesen.

Von besonderem Interesse sind unter den Trägheitsformen des Moduls M diejenigen, welche vom Grade Null sind, die also nicht von den Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sondern nur von den Coefficienten der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ (und den weiteren etwa in dem zu Grunde liegenden Bereich B aufgenommenen Unbestimmten) abhängen.

Die Theorie dieser Trägheitsformen hat in sachlich erschöpfender Weise Herr *Mertens* in den schönen Abhandlungen entwickelt, die ich eingangs erwähnte. Bezeichnet, wie oben, p das Produkt $m_1 . m_2 \ldots m_n$ und setzt man

$$p_1 = \frac{m}{m_1}, \quad p_2 = \frac{m}{m_2}, \ldots, \quad p_n = \frac{m}{m_n}, \tag{112}$$

so giebt es eine ganze ganzzahlige Funktion R der Coefficienten der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$, die in den Coefficienten der Form f_i homogen vom Grade p_i ist, bezüglich der Coefficienten $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ das höchste Glied

$$a_{11}^{p_1}\ a_{22}^{p_2} \ldots a_{nn}^{p_n}$$

besitzt und Trägheitsform des Moduls M ist. Diese Funktion R heisst die « Resultante » der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Jede Trägheitsform vom Grade Null ist durch R teilbar, so dass also

$$T = A\, R$$

der allgemeine Ausdruck dieser Trägheitsformen ist, unter A eine beliebige Form vom Grade null verstanden.

Die Beweise für diese Tatsachen lassen sich im Anschluss an die obigen Sätze leicht erbringen, wie ich im Folgenden zeigen will.

IV. Die Resultante.

Da in dieser Nummer andere Trägheitsformen, als solche vom Grade Null, nicht in Betracht gezogen werden, so möge Kürze halber unter « Trägheitsform » ohne weiteren Zusatz hier stets eine solche vom Grade Null verstanden sein. Nach Satz 16. ist die Stufe einer solchen Form T

$$r = m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n + 1, \tag{113}$$

d. h. es gilt für jedes Potenzprodukt X_r die Congruenz

$$X_r\, T \equiv 0\,(f_1, f_1, \ldots, f_n), \tag{114}$$

während nicht für alle Pontenzprodukte X_{r-1} die Congruenz

$$X_{r-1}\, T \equiv 0\,(f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

besteht. Die für die Formen T charakteristischen Congruenzen (114) führen dazu auf dem folgenden Wege gewisse derartige Formen herzustellen.

Zunächst bemerke ich, dass jedes Potenzprodukt X_r durch mindestens eine der Potenzen

$$x_1^{m_1}, \quad x_2^{m_2}, \ldots, \quad x_n^{m_n}$$

teilbar ist. Denn jedes Potenzprodukt, welches für jeden Index i die Variable x_i höchstens zur Potenz $m_i - 1$ enthält, besitzt höchstens den Grad

$$(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \cdots + (m_n - 1) = r - 1.$$

Nun ordne ich die Potenzprodukte X_r in der Weise an, dass ich zunächst alle diejenigen nehme, welche den Faktor $x_1^{m_1}$ besitzen; es sind dies die Produkte

$$X_{r-m_1} x_1^{m_1},$$

wo X_{r-m_1} alle Potenzprodukte des Grades $r - m_1$ durchläuft. Von den noch übrigen Potenzprodukten X_r nehme ich weiter diejenigen, welche den Faktor $x_2^{m_2}$ besitzen; es sind dies die Produkte

$$X_{r-m_2} x_2^{m_2},$$

wo X_{r-m_2} alle diejengen Potenzprodukte des Grades $r - m_2$ durchläuft, die nicht durch $x_1^{m_1}$ teilbar sind. Von den nun noch übrigen X_r nehme ich alle diejenigen, welche den Faktor $x_3^{m_3}$ besitzen; es sind dies die Produkte

$$X_{r-m_3} x_3^{m_3},$$

wo X_{r-m_3} alle diejenigen Potenzprodukte des Grades $r-m_3$ durchläuft, die weder durch $x_1^{m_1}$ noch durch $x_2^{m_2}$ teilbar sind u. s. w. Auf diese Weise werden die Potenzprodukte X_r in die n Gruppen zerlegt:

$$X_{r-m_1} x_1^{m_1},\ X_{r-m_2} x_2^{m_2}, \ldots, X_{r-m_n} x_n^{m_n}. \tag{115}$$

Nachdem innerhalb der einzelnen Gruppe die Potenzprodukte noch in beliebiger Weise geordnet sind, erscheinen die Potenzprodukte X_r in einer bestimmten Anordnung

$$X_r^{(1)},\ X_r^{(2)}, \ldots, X_r^{(k)}, \tag{116}$$

wo k die Gesammtzahl $[r;\, n]$ aller X_r bedeutet.

Die Anzahl der in der letzten Gruppe (115) stehenden Potenzprodukte ist identisch mit der Anzahl derjenigen

$$X_{r-m_n} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

die durch keine der Potenzen $x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \ldots, x_{n-1}^{m_{n-1}}$ teilbar sind, d. h. mit der Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = r - m_n = (m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \cdots + (m_{n-1} - 1), \tag{117}$$

welche den Bedingungen

$$0 \leqq \alpha_1 \leqq m_1 - 1,\quad 0 \leqq \alpha_2 \leqq m_2 - 1, \ldots, 0 \leqq \alpha_{n-1} \leqq m_{n-1} - 1,\quad 0 \leqq \alpha_n \tag{118}$$

genügen. Nimmt man aber für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ irgend welche den Bedingungen (118) genügende Zahlen, so ist die Bedingung $\alpha_n \geqq 0$ nach (117) von selbst erfüllt. Da also jede der Zahlen α_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ unabhängig von den andern die m_i Zahlen $0, 1, 2, \ldots, m_i - 1$ annehmen kann, so folgt:

Die Anzahl der Potenzprodukte $X_{r-m_n} x_n^{m_n}$ beträgt $p_n = m_1 m_2 \ldots m_{n-1}$.

Dies vorausgeschickt, bilde ich nun mit den Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ die $k = [r;\, n]$ Formen r^{ten} Grades

$$X_{r-m_1} f_1,\ X_{r-m_2} f_2, \ldots, X_{r-m_n} f_n, \tag{119}$$

welche in die k Potenzprodukte X_r in der Anordnung (115) übergehen, wenn die Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ zu $x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \ldots, x_n^{m_n}$ bezüglich specialisirt werden.

Die Formen (119) in die entsprechende Reihenfolge wie die Potenzprodukte (115) gebracht, bezeichne ich mit

$$F_1, F_2, \dots, F_k, \tag{120}$$

so dass also bei der erwähnten Specialisation der Formen $f_1, f_2, \dots, f_n$ die Form F_i in das Potenzprodukt $X_r^{(i)}$ übergeht. Die Anzahl der Formen F_i, welche f_n als Faktor haben, beträgt nach dem vorhergehenden Satze

$$p_n = m_1 m_2 \dots m_{n-1}.$$

Sei nun

$$F_i = C_i^{(1)} X_r^{(1)} + C_i^{(2)} X_r^{(2)} + \dots + C_i^{(k)} X_r^{(k)} \quad (i = 1, 2, \dots, k), \tag{121}$$

so sind die Coefficienten $C_i^{(h)}$ ganzzahlige lineare homogene Funktionen der Coefficienten derjenigen Form, welche als Faktor in F_i auftritt. Jeder der Coefficienten $C_i^{(h)}$ ist nämlich entweder Null oder mit einem der Coefficienten der betreffenden Form f_α identisch.

Die aus den Coefficienten $C_i^{(h)}$ gebildete Determinante

$$T_n = \begin{vmatrix} C_1^{(1)}, & C_1^{(2)}, \dots, & C_1^{(k)} \\ C_2^{(1)}, & C_2^{(2)}, \dots, & C_2^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ C_k^{(1)}, & C_k^{(2)}, \dots, & C_k^{(k)} \end{vmatrix} \tag{122}$$

hat nun folgende Eigenschaften:

1) *Werden die Coefficienten der Formen $f_1, f_2, \dots, f_n$ so specialisirt, dass*

$$f_1 = x_1^{m_1}, \quad f_2 = x_2^{m_2}, \dots, \quad f_n = x_n^{m_n}$$

wird, so nimmt T_n den Wert 1 an.

Denn es wird dann $C_i^{(i)} = 1$ $(i = 1, 2, \dots, k)$, während alle übrigen Coefficienten $C_i^{(h)}$ verschwinden. Da somit T_n für ein specielles Wertsystem der Coefficienten der Formen $f_1, f_2, \dots, f_n$ nicht verschwindet, so ist T_n eine nicht identisch verschwindende Funktion jener Coefficienten.

2) *Die Determinante T_n ist eine ganze ganzzahlige Funktion der Coefficienten der Formen $f_1, f_2, \dots, f_n$, homogen in den Coefficienten jeder einzelnen*

dieser Formen und insbesondere vom Grade

$$p_n = m_1 m_2 \dots m_{n-1}$$

bezüglich der Coefficienten der Form f_n.

3) *Die Determinante* T_n *ist Trägheitsform des Moduls* $M = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Denn durch Auflösung der Gleichungen (121) nach einem beliebigen der Potenzprodukte X_r findet man, da die Formen $F_i \equiv 0$ (mod. M) sind,

$$X_r T_n \equiv 0 \; (f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Wiederholt man die vorstehende Betrachtung nachdem man die Reihenfolge der Formen $f_1, f_2, \dots, f_n$ in der Weise abgeändert hat, dass an die letzte Stelle statt f_n eine andere Form f_i tritt, so erhält man statt der Determinante T_n eine andere Determinante T_i, welche in den Coefficienten der Form f_i homogen vom Grade

$$p_i = \frac{1}{m_i} \cdot m_1 m_2 \dots m_n$$

ist, im übrigen aber dieselben oben erwähnten Eigenschaften besitzt, wie T_n.

Es sei jetzt T eine beliebige Trägheitsform des Moduls M. Zerlegt man T in seine irreducibeln Faktoren (*), so muss nach Satz 10. mindestens einer dieser Faktoren ebenfalls Trägheitsform sein. Es giebt daher auch *irreducibele* Trägheitsformen. Unter diesen sei R eine derjenigen, welche bezüglich eines beliebig gewählten Coefficienten a der Form f_1 den niedrigsten Grad besitzt und sei etwa

$$R = a^h S + \cdots \tag{123}$$

wo S von a unabhängig ist. Der Grad h von R bezüglich a ist nach Satz 21. mindestens 1.

Ist nun

$$T = a^{h'} U + \cdots$$

eine beliebige Trägheitsform, so ist T *durch* R *teilbar.*

(*) Der Begriff der Irreducibilität ist hier natürlich auf den zu Grunde gelegten Bereich B zu beziehen (Siehe oben pag. 114). Übrigens ist es zweckmässig, im Folgenden als Bereich B alle ganzen rationalen Funktionen einer beliebigen Anzahl von Unbestimmten, zu denen auch die Coefficienten der Formen $f_1, f_2, \dots, f_n$ gehören, mit *beliebigen* numerischen Coefficienten zu wählen. Der bei der Bildung des Bereiches B benutzte Rationalitätsbereich besteht dann also aus der Gesammtheit aller (reellen und complexen) Zahlen.

Dies leuchtet sofort ein, wenn $h' < h$ ist. Denn dann muss T identisch verschwinden, weil sonst ein irreducibler Faktor von T, dessen Grad bezüglich a kleiner als h ist, Trägheitsform wäre.

Sei also $h' \geqq h$ und die aufgestellte Behauptung für den Fall, dass T von niedrigerem als dem h^{ten} Grade bezüglich a ist, schon als richtig erkannt. Da nun

$$S\,T - a^{h'-h}\,U\,R = T$$

den Grad h' in a nicht erreicht, so ist T durch R teilbar und also auch $S\,T$. Folglich muss R als irreducible Funktion in S oder T aufgehen. Weil aber S von a unabhängig ist, kann S nicht durch R teilbar sein; folglich ist es T.

Die Trägheitsform R ist bis auf einen numerischen Faktor bestimmt. Denn wenn $\bar{R}$ dieselbe Eigenschaft hat wie R, so sind $\bar{R}$ und R gegenseitig durch einander teilbar. Um R völlig zu bestimmen, bemerke ich, dass R einen nicht verschwindenden Wert erhält, wenn man die Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ zu $x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \ldots, x_n^{m_n}$ specialisirt.

Dann nimmt nämlich die Determinante T_n, welche R als Faktor enthält, den Wert 1 an. Der in R noch enthaltene numerische Faktor kann daher so bestimmt werden, dass für die erwähnte Specialisation der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$

$$R = 1$$

wird.

Die auf diese Weise eindeutig bestimmte Trägheitsform R heisse die « Resultante » der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ und möge nach Herrn Mertens Vorgang mit

$$R = \begin{bmatrix} f_1, & f_2, & \ldots, & f_n \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{bmatrix} \tag{124}$$

bezeichnet werden.

Da $T_1, T_2, \ldots, T_n$ homogene Funktionen der Coefficienten der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sind, und jede dieser Funktionen den Faktor R besitzt, so ist auch R homogen in den Coefficienten jeder einzelnen Form f_i und zwar, als Teiler von T_i, höchstens vom Grade

$$p_i = \frac{1}{m_i}\, m_1\, m_2 \ldots m_n.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass R in den Coefficienten von f_i den Grad p_i erreicht. Dies gelingt leicht auf dem Wege der Induktion. Wenn nämlich zunächst

$$p = m_1 m_2 \ldots m_n$$

den kleinsten Wert 1 besitzt, so sind $f_1, f_2, \ldots, f_n$ lineare Formen, die Zahlen p_i werden sämmtlich 1 und da R nach Satz 21. in den Coefficienten der einzelnen Form f_i mindestens vom Grade 1 ist, so ist in diesem Falle R wirklich vom Grade p_i in den Coefficienten von f_i (R ist übrigens in diesem Falle identisch mit der Determinante der Linearformen $f_1, f_2, \ldots, f_n$, mit welcher die Determinanten $T_1, T_2, \ldots, T_n$ zusammenfallen).

Sei nun $p > 1$ und für alle Fälle, in welchen das Produkt der Grade kleiner als p ist, schon als bewiesen vorausgesetzt, dass der Grad von R in den Coefficienten einer jeden der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ gleich dem Produkte der Grade der übrigen ist. Da $p > 1$ sein soll, ist unter den Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$, deren Resultante R heisse, mindestens eine von höherem als dem ersten Grade. Es sei etwa $m_1 > 1$ und

$$m_1 = m'_1 + m''_1$$

gesetzt, wo m'_1 und m'_2 positive ganze Zahlen bezeichnen.

Unter f'_1 und f''_1 zwei allgemeine Formen von den Graden m'_1 bez. m''_1 verstanden, setze ich in die Identität

$$X_r R = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_n f_n$$

an die Stelle der Coefficienten von f_1 die Coefficienten der Form $f'_1 \cdot f''_1$, wodurch

$$X_r \bar{R} = A_1 f'_1 f''_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_n f_n$$

entsteht. Diese Gleichung zeigt, dass R Trägheitsform der beiden Moduln

$$(f'_1, f_2, \ldots, f_n) \quad \text{und} \quad (f''_1, f_2, \ldots, f_n)$$

und folglich durch die Resultanten

$$R' = \begin{bmatrix} f'_1, & f_2, \ldots, & f_n \\ x_1, & x_2, \ldots, & x_n \end{bmatrix}, \quad R'' = \begin{bmatrix} f''_1, & f_2, \ldots, & f_n \\ x_1, & x_2, \ldots, & x_n \end{bmatrix} \tag{125}$$

teilbar ist. Da R' und R'' zwei wesentlich verschiedene irreducibele Funktionen sind, weil R' die Coefficienten von f'_1, R'' aber die Coefficienten von f''_1 enthält, so ist $\bar{R}$ auch durch das Produkt $R' R''$ teilbar, also

$$R = R' R'' Q. \tag{126}$$

Die Form Q kann nicht identisch verschwinden. Denn specialisirt man $f'_1, f''_1, f_2, \ldots, f_n$ zu $x_1^{m'_1}, x_1^{m''_1}, x_2^{m_2}, \ldots, x_n^{m_n}$, so wird $f'_1 f''_1 = x_1^{m'_1 + m''_1} = x_1^{m_1}$ und folglich

$$\overline{R} = 1, \quad R' = 1, \quad R'' = 1, \quad \text{also auch} \quad Q = 1.$$

Da nun weiter

$$p' = m'_1 m_2 m_3 \ldots m_n < m_1 m_2 \ldots m_n, \qquad p'' = m''_1 m_2 m_3 \ldots m_n < m_1 m_2 \ldots m_n,$$

so sind die Grade von R' in den Coefficienten der Formen $f'_1, f_2, \ldots, f_n$ bez.

$$\frac{p'}{m'_1}, \quad \frac{p'}{m_2}, \ldots, \quad \frac{p'}{m_n}$$

und die Grade von R'' in den Coefficienten der Formen $f''_1, f_2, \ldots, f_n$ bez.

$$\frac{p''}{m''_1}, \quad \frac{p''}{m_2}, \ldots, \quad \frac{p''}{m_n}.$$

Die Grade von $\overline{R}$ in den Coefficienten der Formen $f'_1, f''_1, f_2, \ldots, f_n$ bez. sind daher mindestens

$$\frac{p'}{m'_1}, \quad \frac{p''}{m''_1}, \quad \frac{p' + p''}{m_2}, \ldots, \quad \frac{p' + p''}{m_n},$$

d. i.

$$p_1, \quad p_1, \quad p_2, \ldots, \quad p_n,$$

wo, wie oben,

$$p_i = \frac{1}{m_i} m_1 m_2 \ldots m_n$$

ist. Die Grade der Resultante R bez. der Coefficienten von $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sind nun die nämlichen, wie die Grade von $\overline{R}$ bez. der Coefficienten von $f'_1, f_2, \ldots, f_n$. Also sind die betreffenden Grade für die Resultante R *mindestens* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ resp. und da schon feststeht, dass diese Grade auch *höchstens* die angegebenen Werte haben, so stellen sie die richtigen Gradzahlen vor.

Zugleich ergiebt sich nun, dass in der Gleichung (126) $Q = 1$ sein muss, dass also die Resultante

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} f'_1 f''_1, & f_2, \ldots, & f_n \\ x_1, & x_2, \ldots, & x_n \end{bmatrix} \tag{127}$$

gleich dem Produkte der beiden Resultanten R' und R'' ist.

Die Determinanten $T_1, T_2, \ldots, T_n$ haben die Resultante R als *grössten* gemeinsamen Teiler.

Denn bezeichnet RQ diesen grössten gemeinsamen Teiler, so ist Q von den Coefficienten der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ unabhängig, weil R in den Coefficienten von f_i denselben Grad p_i besitzt, wie die Determinante T_i. Folglich ist Q ein numerischer Faktor.

Als grösster gemeinsamer Teiler der ganzzahligen Funktionen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ besitzt R jedenfalls Coefficienten, deren Verhältnisse rationale Zahlen sind. Der numerische Faktor x lässt sich daher so wählen, dass xR eine ganzzahlige primitive Funktion der Coefficienten der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ wird. Setzt man dann

$$T_n = (x\,R)\,H_n,$$

so ist H_n eine ganzzahlige Funktion. Specialisirt man $f_1, f_2, \ldots, f_n$ zu $x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \ldots, x_n^{m_n}$ resp., so kommt $T_n = 1$ und da xR und H_n ganze Zahlen werden, so erhält man, wegen $R = 1$,

$$x\,R = x = \pm 1.$$

Demnach ist R selbst eine ganzzahlige Funktion der Coefficienten der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Hiermit sind nun die sämmtlichen fundamentalen Eigenschaften der Resultante abgeleitet.

Nuovo sistema canonico di elementi ellittici.

(*Di* T. Levi-Civita, *a Padova.*)

INTRODUZIONE.

Il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, dovuto a Lagrange (*), trova notoriamente le sue più cospicue applicazioni in meccanica celeste. Per lo studio del moto perturbato — di un punto P soggetto all'attrazione preponderante di un centro O — appare quasi sempre vantaggioso, secondo la teoria svolta sistematicamente dallo stesso Lagrange (**), di sostituire ai sei elementi cartesiani, determinativi dello stato di moto di P riferito ad O (coordinate x, y, z della posizione, componenti p_x, p_y, p_z della quantità di moto), altrettante loro combinazioni che sarebbero (una al più eccettuata) costanti nel moto non perturbato. E precisamente sei parametri dell'ipotetica orbita ellittica, modernamente chiamata *intermediaria*, che sarebbe descritta da P, qualora, cessando ogni influenza perturbatrice, esso si muovesse, a partire dallo stato di moto $\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \\ x & y & z \end{pmatrix}$, sotto la esclusiva attrazione del corpo centrale.

Questi parametri (elementi ellittici) devono naturalmente individuare in modo diretto ed espressivo la forma e le dimensioni dell'orbita ellittica intermediaria, la sua posizione (rispetto agli assi di riferimento), la legge di percorrenza; ma la scelta comporta ancora molta arbitrarietà, sicchè conviene lasciarsi guidare da criteri di semplicità e di convenienza. I sei elementi tra-

(*) *Recherches sur les suites récurrentes dont les termes varient de plusieurs manières différentes, ou sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles...*, Oeuvres, T. IV, pp. 151-254. Cfr. le pagine 159-163.

(**) *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes* e *Théorie des variations périodiques...*, ibidem, T. V, pp. 125-344, 345-489; *Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes*, T. VI, pp. 713-768.

dizionali degli astronomi sono: a (semiasse maggiore), e (eccentricità), i (inclinazione), θ (longitudine del nodo ascendente), $\theta + g$ (longitudine del perielio), l (anomalia media).

Nelle ricerche teoriche interessa che le formule di passaggio dalle $\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \\ x & y & z \end{pmatrix}$ alle nuove variabili rientrino nel tipo canonico, donde l'introduzione, effettuata per la prima volta da Jacobi, di sestuple canoniche. Fissiamo l'attenzione sulla seguente, dovuta a Delaunay (*),

$$\left.\begin{matrix} L = \beta\sqrt{a}, & G = \beta\sqrt{a(1-e^2)}, & \Theta = \beta\sqrt{a}(1-e^2)\cos i \\ l, & g, & \theta, \end{matrix}\right\} \text{(}\beta \text{ costante che dipende dalle masse di } P \text{ e di } O\text{)} \qquad \text{(I)}$$

da cui, con passaggi elementari, se ne desumono altre, per certi rispetti preferibili, segnalate da Poincaré, e divenute ormai d'uso corrente col nome complessivo di variabili kepleriane (**).

In tutti questi sistemi, il parametro che fissa la posizione sull'orbita è: o proprio l'anomalia media l [come in (I)], ovvero l aumentata di angoli che nel moto ellittico sono costanti. Ne risulta una discreta complicazione nell'espressione della funzione perturbatrice; questa sarebbe notevolmente più semplice se, al posto dell'anomalia media l, si usasse l'anomalia eccentrica u. Si può anzi dire che gli sviluppi in serie trigonometrica di l si discutono teoricamente e si formano praticamente trasformando (con procedimenti più o meno laboriosi) gli analoghi sviluppi relativi alla u (***). Con tutto ciò non si adotta in definitiva la u ma ci si attiene alla l, perchè da un lato questo argomento è il più indicato in quasi tutti i calcoli di prima approssimazione (rispetto alle masse perturbatrici); e d'altro lato consente di conservare la forma canonica, il che giova sotto il duplice aspetto teorico e pratico, e non sarebbe raggiungibile (senza inconvenienti maggiori), effettuando un puro cambiamento di variabili sulla sestupla $\begin{pmatrix} L & G & \Theta \\ l & g & \theta \end{pmatrix}$.

(*) Cfr. L. Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, B. I, p. 252.

(**) H. Poincaré, *Leçons de mécanique céleste*, T. 1, pp. 4-13; ovvero Charlier, loco citato, pp. 292-294.

(***) Veggasi per es. il T. 2 (pp. 4-13 e Cap. XV) delle citate *Leçons*... di Poincaré; oppure i n.[i] 31, 32, 43, 44 del concettoso articolo del sig. H. v. Zeipel, *Entwickelung der Störungsfunktion* [Enc. der Math. Wiss., VI, 2, 13].

Ma *se si premette una lieve modificazione nella definizione dell'orbita ellittica intermediaria, si è senz'altro condotti* — come apparirà dal presente scritto — *ad un nuovo sistema canonico di elementi ellittici, che è sostanzialmente del tipo* (I), *salvo la sostituzione della anomalia eccentrica u in luogo dell'anomalia media l.*

La modificazione in parola non è più profonda (anzi ha proprio lo stesso ordine di grandezza) di quelle rispettivamente introdotte da Jacobi e da Poincaré nel problema dei tre corpi. Come si sa, Jacobi ha sostituito, per uno dei tre corpi, alla attrazione del corpo centrale O, quella di un fittizio baricentro (di O e del terzo corpo), inoltre alle masse reali masse fittizie (poco diverse); Poincaré ha invece mantenuto il vero corpo centrale, ma ha sostituito, per uno qualunque degli altri due, la quantità di moto relativa colla quantità di moto assoluta, modificando anch'egli le masse.

La nostra alterazione porterà esclusivamente sul coefficiente d'attrazione, cioè, possiamo dire, sulla massa del corpo centrale. Ecco in qual modo.

Consideriamo, per fissar le idee, il moto relativo di un punto P rispetto ad O, nell'ipotesi che P sia soggetto all'attrazione di O e a forze perturbatrici qualisivogliono derivanti da un potenziale (funzione delle forze cambiata di segno) $\mu F_1 : \mu$ è un parametro numerico che serve a fissare l'ordine di grandezza. Sia r la distanza $\overline{OP}$, m la massa di P, k_0 l'attrazione newtoniana di O su P, all'unità di distanza. Le equazioni del moto di P sono canoniche rispetto alla sestupla $\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \\ x & y & z \end{pmatrix}$ e ammettono per funzione caratteristica

$$F = T - \frac{k_0}{r} + \mu F_1, \tag{II}$$

T rappresentando la forza viva del mobile, ossia $\frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$.

Secondo la definizione abituale, l'orbita intermediaria relativa ad un generico istante t — nel caso attuale senz'altro *osculatrice* — è quella che sarebbe descritta da P, sotto l'attrazione $\frac{k_0}{r^2}$ di O, a partire dallo stato di moto $\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \\ x & y & z \end{pmatrix}$ realmente posseduto da P nel detto istante. Ciò presuppone naturalmente che si tratti di moto abbastanza poco diverso dall'ellittico perchè in particolare la differenza $T - \frac{k_0}{r} = h$ (energia del moto non perturbato) sia sempre negativa. Al variare di t, varia alquanto l'orbita osculatrice, e con essa la relativa energia h.

Noi procederemo invece come segue. Sia h_0 il valore di $T - \frac{k_0}{r}$ nell'istante iniziale $t = t_0$. Per un altro istante qualsiasi t, definiamo k mediante la posizione

$$T - \frac{k}{r} = h_0 . \tag{III}$$

Una tale k risulterà variabile coll'istante considerato, ma la sua differenza da k_0 sarà dell'ordine di μ. (Per $\mu = 0$ si ha infatti $h = h_0$, e quindi $k = k_0$, qualunque sia t).

Ciò premesso, nulla vieta di assumere come ellisse osculatrice, in un generico istante, quella che compete al reale stato di moto $\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \\ x & y & z \end{pmatrix}$ di questo istante, nell'ipotesi però che la costante di attrazione del corpo centrale sia k, anzichè k_0.

Come si vede, mentre di solito (quando si mantiene alla costante di attrazione del centro O il suo valore reale k_0) ci si lascia guidare da un'immagine che conserva esattamente la forza centrale (ma non l'energia h del movimento ellittico tangente), colla nostra definizione si attribuisce bensì al coefficiente k dell'attrazione newtoniana di O un valore che varia alquanto dall'una all'altra delle ellissi osculatrici, ma viceversa si tiene costante per tutte il valore di h_0: c'è quindi conservazione dell'energia (spettante ai vari moti tangenti). Per ciò queste orbite osculatrici e i relativi elementi ellittici possono opportunamente qualificarsi ***isoenergetici***, a differenza degli ordinari che sono ***isodinamici***.

Circa l'espressione trasformata che assumerà la funzione caratteristica F, quando vi si introducano i nuovi elementi, osserveremo che, seguendo identicamente dalla (III)

$$T - \frac{k_0}{r} = h_0 + \frac{k - k_0}{r},$$

la (II) porge

$$F = h_0 + \frac{k - k_0}{r} + \mu F_1 . \tag{IV}$$

Le cose vanno dunque come se alla funzione perturbatrice μF_1 si aggiungesse un termine complementare (che corrisponde a forza emanante dal centro) $\frac{k - k_0}{r}$: la k dipende (come si rileverà qui appresso) esclusivamente dall'asse maggiore dell'orbita osculatrice.

§ 1.

Richiami concernenti il moto non perturbato e la relativa equazione di Jacobi.

Le equazioni del moto di un punto P, attratto dall'origine O in ragione inversa del quadrato della distanza, sono, con manifesto significato dei simboli,

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} + \frac{kx}{r^3} &= 0, \\ m\ddot{y} + \frac{ky}{r^3} &= 0, \\ m\ddot{z} + \frac{kz}{r^3} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Introdotte le componenti

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z} \tag{2}$$

della quantità di moto di P, e la sua forza viva

$$T = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2), \tag{3}$$

e posto

$$H = T - \frac{k}{r}, \tag{4}$$

le (1), (2) equivalgono notoriamente al sistema canonico

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x}, & \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y}, & \dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z}, \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x}, & \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y}, & \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

avendosi in ogni caso l'integrale delle forze vive

$$H = h. \tag{6}$$

Riterremo negativa la costante h, con che classicamente si tratta di traiettorie ellittiche e moto kepleriano.

Se nella (6) si risguardano le p come simboli delle derivate di un'incognita funzione $W(x, y, z)$ a mezzo delle formule

$$p_x = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad p_z = \frac{\partial W}{\partial z}, \tag{7}$$

si ha la corrispondente equazione di JACOBI. Ciascun suo integrale completo dà luogo ad una rappresentazione dell'integrale generale del sistema (5), ossia (nel caso $h < 0$, cui esclusivamente ci riferiamo) degli ∞^6 moti ellittici, dovuti all'attrazione di O.

Prendiamo per es. l'integrale completo (con due costanti G e θ, oltre alla h) considerato da POINCARÉ nelle sue *Leçons de mécanique céleste* (*).

Esso è

$$W = \int_{r_0}^{r} R\, dr + G\zeta \tag{8}$$

col seguente significato di r_0, R, e ζ:

1.° r_0 vi rappresenta la minima distanza di P da O, ossia (dacchè si tratta di orbite ellittiche col fuoco in O) $a(1-e)$, essendo a il semiasse maggiore ed e l'eccentricità.

2.°

$$R^2 = m\left(2h + \frac{2k}{r} - \frac{G^2}{r^2}\right), \tag{9}$$

con che R contiene il solo argomento variabile r, dipendendo inoltre da h e k, costanti intrinseche della (6), e dalla costante di integrazione G. Le due radici della equazione $r^2 R^2 = 0$ (di secondo grado in r) corrispondono alla massima e minima distanza $a(1+e)$, $a(1-e)$ del mobile dall'origine, donde le relazioni (fra radici e coefficienti)

$$\left.\begin{aligned} 2a &= -\frac{k}{h}, \\ a^2(1-e^2) &= -\frac{G^2}{2h}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

3.° ζ designa l'angolo del raggio vettore OP colla linea dei nodi (intersezione, debitamente precisata quanto al verso, del piano dell'orbita col

(*) T. 1, pp. 66-69.

piano di riferimento Oxy). Come costanti di integrazione nell'espressione (8) di W si risguardano la già menzionata G e la longitudine θ (*a priori* qualunque) della linea dei nodi, che compare pel tramite di ζ. Si ha infatti, essendo $\cos\theta$, $\sin\theta$, 0 i coseni direttori di tale linea, e $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ quelli di OP,

$$\cos\zeta = \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{r}.$$

Del resto non ci interessa la forma esplicita della funzione $\zeta(x, y, z, \theta)$: basterà tener presente che essa dà luogo alla relazione

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\theta} = -\cos i, \tag{11}$$

i designando l'inclinazione (del piano dell'ellisse sul piano Oxy).

Le equazioni in termini finiti delle traiettorie si ottengono ponendo

$$\frac{\partial W}{\partial G} = g, \quad \frac{\partial W}{\partial\theta} = -\Theta, \tag{12}$$

con g e Θ nuove costanti arbitrarie.

Il loro significato risulta: per la seconda, dalla (11), che dà

$$\frac{\partial W}{\partial\theta} = \frac{\partial\zeta}{\partial\theta} = -\cos i,$$

e quindi

$$\Theta = G\cos i; \tag{13}$$

per la prima, riferendosi alla posizione perielia $r = r_0$, con che $R = 0$ e

$$\frac{\partial W}{\partial G} = \frac{\partial}{\partial G}\int_{r_0}^{r} R\,dr + \zeta$$

si riduce a ζ: g rappresenta pertanto il valore di ζ quando il mobile transita pel perielio, ossia è l'angolo nodo-perielio.

Tutto ciò è puro riassunto di indispensabili premesse. Solo ora comincierò a staccarmi dal procedimento consueto, nell'intento di associare alle (12) un'equazione diversa dalla

$$\frac{\partial W}{\partial h} = t - t_0,$$

che, da Jacobi in poi, si fa sempre intervenire per completare la definizione del moto.

§ 2.

La derivata di W rispetto al parametro k. Introduzione di un nuovo parametro U.

Dalle (8) e (9) segue ovviamente

$$\frac{\partial W}{\partial k} = m \int_{r_0}^{r} \frac{d r}{r R} . \tag{14}$$

L'integrale del secondo membro si calcola nel miglior modo sostituendo alla variabile di integrazione r (che non è monòtona, ove si segua il moto ellittico del punto P, ma oscilla continuamente fra la distanza perielia e l'afelia) la anomalia eccentrica u, che è sempre crescente e legata ad r dalla nota relazione

$$r = a (1 - e \cos u). \tag{15}$$

Si ha con ciò, portando nella espressione (9) di R^2 i valori di k e di G^2 definiti dalle (10),

$$r^2 R^2 = - 2 h m \left\{ - r^2 + 2 a r - a^2 (1 - e^2) \right\} = - 2 h m a^2 e^2 \operatorname{sen}^2 u;$$

dopo di che, ove si noti che u è multiplo intero di 2π per $r = r_0$ (e può quindi ritenersi nullo quando r parte per la prima volta dal valore r_0), la (14) si riduce semplicemente a

$$\frac{\partial W}{\partial k} = \sqrt{\frac{m}{-2h}}\, u, \tag{14'}$$

dovendosi attribuire al radicale il suo valore aritmetico.

Questa equazione, desunta per materiale derivazione dalla espressione (8) di W, sussiste identicamente in quanto, come abbiam fatto nel corso del calcolo, si tenga conto della (15). Qualora si conservi a W la sua originaria accezione di funzione di x, y, z (pel tramite di r e di ζ), e dei parametri h, k, G, θ, la (14') diviene di necessità equivalente alla (15) stessa; o meglio ne costituisce la risolvente rispetto ad u, a ed e dovendosi intendere combinazioni di h, k, G definite dalle (10).

È opportuna una ulteriore trasformazione moltiplicativa, che sostituisca al parametro k il nuovo parametro

$$U = k\sqrt{\frac{m}{-2h}}. \tag{16}$$

Si può in conformità risguardare W come funzione dei sei argomenti

$$x,\ y,\ z;\quad U,\ G,\ \theta:$$

a dir vero in W interviene altresì il parametro h, ma non lo metto in evidenza, perchè lo ho trattato finora, e lo tratterò anche in seguito, come una assoluta costante, a differenza di G, θ e k — diciamo ormai U — che mi riservo di considerare come variabili, che anzi ho già implicitamente fatto variare, introducendo le derivate parziali di W. Con tale avvertenza si ha dalle (14') e (16)

$$\frac{\partial W}{\partial U} = u. \tag{17}$$

§ 3.

Risoluzione del sistema (14), (17) rapporto ad x, y, z.

Il fatto che W è integrale completo assicura notoriamente la risolubilità, rapporto ad x, y, z, del sistema costituito dalle due equazioni (14) delle traiettorie e da una terza equazione, che (in quanto si abbia riguardo al moto ellittico) contenga effettivamente il tempo. Tale è per certo la (17), tostochè vi si riguardi l'anomalia eccentrica u come quella tal funzione di t, che caratterizza il moto ellittico a norma della equazione di Kepler. Così rimane provato che le (14), (17) sono atte a definire x, y, z in funzione, possiamo dire, della sestupla

$$\begin{pmatrix} U & G & \Theta \\ u & g & \theta \end{pmatrix}.$$

Quanto alle formule esplicite, sarebbe inutile ricavarle più o meno laboriosamente dalle (14), (17): esse devono di necessità coincidere colle espressioni integrali spettanti alle x, y, z nel moto ellittico, in funzione dei suddetti sei argomenti. Basta dunque nelle formule classiche, in cui intervengono abitualmente a, e, i, g, θ, u, ritenere a, e ed i sostituiti mediante U, G, Θ a norma delle (10), (16) e (13), che possono complessivamente scriversi (eliminando k)

$$\left.\begin{aligned} U &= \sqrt{-2hm}\,a, \\ G &= \sqrt{-2hm}\,a\sqrt{1-e^2} = U\sqrt{1-e^2}, \\ \Theta &= \sqrt{-2hm}\,a\sqrt{1-e^2}\cos i = G\cos i. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Come si vede, U è proporzionale all'asse maggiore, G all'asse minore, il fattore di proporzionalità $\sqrt{-2hm}$ dovendo trattarsi — ripetiamolo — come una costante assoluta.

Introducendo, per comodo di scrittura, le coordinate ausiliarie del mobile $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ e X, Y relative ad assi (sempre di origine O) situati nel piano dell'orbita e rispettivamente orientati: 1.° secondo la linea dei nodi e sua perpendicolare; 2.° secondo gli assi dell'ellisse, si hanno le note formule elementari:

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\theta\,\mathfrak{x} - \cos i\sin\theta\,\mathfrak{y} = \cos\theta\,\mathfrak{x} - \frac{\Theta}{G}\sin\theta\,\mathfrak{y}, \\ y &= \sin\theta\,\mathfrak{x} + \cos i\cos\theta\,\mathfrak{y} = \sin\theta\,\mathfrak{x} + \frac{\Theta}{G}\cos\theta\,\mathfrak{y}, \\ z &= \sin i\,\mathfrak{y} = \sqrt{1-\frac{\Theta^2}{G^2}}\,\mathfrak{y}; \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{x} = \cos g\,X - \sin g\,Y, \qquad \mathfrak{y} = \sin g\,X + \cos g\,Y; \\ &X = a(\cos u - e), \qquad Y = a\sqrt{1-e^2}\sin u, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

le ultime delle quali, attese le (18), assumono l'aspetto

$$X = \frac{1}{\sqrt{-2hm}}\left\{U\cos u - \sqrt{U^2-G^2}\right\}, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{-2hm}}\,G\sin u. \tag{21}$$

Ove si immagini di portare successivamente nelle (19) le (20) e (21), si ottengono le risolventi delle (14), (17) sotto la forma voluta

$$\left.\begin{aligned} x &= x(U,\ G,\ \Theta;\ u,\ g,\ \theta;\ h), \\ y &= y(U,\ G,\ \Theta;\ u,\ g,\ \theta;\ h), \\ z &= z(U,\ G,\ \Theta;\ u,\ g,\ \theta;\ h). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Se ne trae, per le componenti della quantità di moto (dei movimenti kepleriani definiti da queste equazioni),

$$p_x = m\dot{x} = m\frac{\partial x}{\partial u}\dot{u}, \quad p_y = m\frac{\partial y}{\partial u}\dot{u}, \quad p_z = m\frac{\partial z}{\partial u}\dot{u},$$

$\dot{u}$ dovendo desumersi dall'equazione di KEPLER

$$u - e\sin u = n\,t + \text{cost.},$$

in cui il moto medio n vale $\sqrt{\frac{k}{m\,a^3}}$, ossia, per la prima delle (10),

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{-2h}{m}}.$$

Si ha così, badando anche alla (15),

$$\dot{u} = \frac{n}{1 - e\cos u} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{-2h}{m}},$$

e in conformità

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \frac{\sqrt{-2hm}}{r}\frac{\partial x}{\partial u}, \\ p_y &= \frac{\sqrt{-2hm}}{r}\frac{\partial y}{\partial u}, \\ p_z &= \frac{\sqrt{-2hm}}{r}\frac{\partial z}{\partial u}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Queste costituiscono evidentemente anche le espressioni integrali di p_x, p_y, p_z, considerate come incognite ausiliarie delle equazioni del moto [sotto la forma canonica (5)], sempreché vi si risguardino: h, G, Θ, g, θ come cinque costanti arbitrarie di integrazione (la sesta essendo inclusa in u), k come fisso, ma *suscettibile di valore qualsiasi*, anzi sostituito da $U = k\sqrt{\frac{m}{-2h}}$ a norma della (16). Ora le stesse espressioni integrali di p_x, p_y, p_z devono trarsi dalle (7) (attesa la circostanza che W è integrale completo), in quanto vi si intendano per x, y, z le relative espressioni integrali (22) (colla accezione ora detta delle lettere h, G, Θ, g, θ, u, U). Le (7) equivalgono pertanto alle (23) (previa la sostituzione delle x, y, z), qualunque siano i valori dei *sette* argomenti U, G, Θ, u, g, θ, h.

Badando alla già rilevata circostanza che le (22) non sono altro che le risolventi delle (14), (17), si conclude che le (22), (23) equivalgono complessivamente alle (14), (17), (7).

§ 4.

Constatazione della canonicità.

Le (22), (23) definiscono sotto forma esplicita una trasformazione della sestupla

$$\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

nella

$$\begin{pmatrix} U & G & \Theta \\ u & g & \theta \end{pmatrix},$$

dipendente da un parametro h. Dico che (qualunque sia il valore attribuito ad h) la trasformazione è canonica, le nuove variabili coniugate essendo U, u; G, g; Θ, θ.

All'uopo basta sfruttare la circostanza che le (14), (17), (7), e con esse la relazione differenziale

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz + \frac{\partial W}{\partial U} dU + \frac{\partial W}{\partial G} dG + \frac{\partial W}{\partial \theta} d\theta =$$

$$p_x\, dx + p_y\, dy + p_z\, dz + u\, dU + g\, dG - \Theta\, d\theta,$$

sono necessaria conseguenza delle formule di trasformazione (22), (23). Ne consegue ulteriormente, togliendo da una parte e dall'altra $d(Uu + Gg)$,

$$d(W - Uu - Gg) = (p_x\, dx + p_y\, dy + p_z\, dz) - (U\, du + G\, dg + \Theta\, d\theta).$$

La differenza dei due trinomi

$$p_x\, dx + p_y\, dy + p_z\, dz \quad \text{e} \quad U\, du + G\, dg + \Theta\, d\theta$$

è dunque un differenziale esatto, c. d. d.

§ 5.

Confronto fra i nuovi elementi e quelli di Delaunay — Conseguente espressione del momento delle quantità di moto — Identità di comportamento di fronte alle trasformazioni di Poincaré.

La trasformazione canonica abitualmente adottata fa passare dalla sestupla cartesiana alla

$$\left.\begin{array}{lll} L=\sqrt{k\,m}\,\sqrt{a} & G=L\sqrt{1-e^2} & \Theta=G\cos i \\ l \text{ (anomalia media)} & g & \theta, \end{array}\right\} \qquad \text{(D)}$$

in cui k (attrazione di O all'unità di distanza) va trattata come un parametro costante. Per questo fatto, la sestupla di Delaunay può dirsi *isodinamica* (come già si accennò nell'Introduzione), e contrassegnarsi con (D). In modo analogo sarà a dirsi *isoenergetica*, e si indicherà con (E) la nostra sestupla

$$\left.\begin{array}{lll} U=\sqrt{-2\,h\,m}\;a & G=U\sqrt{1-e^2} & \Theta=G\cos i \\ u \text{ (anomalia eccentrica)} & g & \theta, \end{array}\right\} \qquad \text{(E)}$$

nella quale si tratta come costante l'energia h.

Gli elementi g e θ hanno identico significato in (D) ed in (E). Il divario essenziale consiste nell'intervento dell'anomalia media in (D), e della eccentrica in (E). Ma vi sono altre differenze secondarie. La variabile coniugata all'anomalia dipende bensì, in entrambi i casi, dal solo asse maggiore dell'orbita osculatrice: però, *mentre L è proporzionale a $\sqrt{a}$, U è addirittura proporzionale ad a.* La coniugata di g, designata in ambedue le sestuple con G, *è proporzionale al parametro dell'orbita in* (D), *al semiasse minore in* (E).

Importa notare che, se si tratta di una stessa orbita, la prima delle (10) dà fra le due quantità h e k la relazione

$$2\,a=-\frac{k}{h},$$

talchè

$$\sqrt{k\,m\,a}=\sqrt{-2\,h\,m}\;a.$$

Coincidono quindi [in base alle tabelle (D) ed (E)] i valori numerici di L e di U; per conseguenza anche G ha un medesimo valore nei due casi, e così Θ. ***Ne discende ulteriormente che*** G ***conserva la sua abituale interpretazione di momento risultante delle quantità di moto***; ***seguitano perciò a sussistere, anche per gli elementi*** (E), ***le note formule***

$$\left.\begin{aligned} y\,p_z - z\,p_y &= G\sin i\sin\theta,\\ z\,p_x - x\,p_z &= -G\sin i\cos\theta,\\ x\,p_y - y\,p_x &= G\cos i;\end{aligned}\right\}\qquad(24)$$

in cui i si deve intendere eliminato a mezzo della $\Theta = G\cos i$.

È appena necessario aggiungere che, applicando alla sestupla (E) le trasformazioni canoniche indicate da Poincaré per la (D), si raggiunge analogamente l'intento di introdurre variabili appropriate alle piccole eccentricità ed inclinazioni. Si hanno così successivamente le sestuple

$$\left.\begin{matrix} U & \rho_1 = U - G & \rho_2 = G - \Theta,\\ \omega = u + g + \theta & \omega_1 = -(g+\theta) & \omega_2 = -\theta,\end{matrix}\right\}\qquad(25)$$

$$\left.\begin{matrix} U & \xi_1 = \sqrt{2\rho_1}\cos\omega_1 & \xi_2 = \sqrt{2\rho_2}\cos\omega_2\\ \omega & \eta_1 = \sqrt{2\rho_1}\sin\omega_1 & \eta_2 = \sqrt{2\rho_2}\sin\omega_2,\end{matrix}\right\}\qquad(26)$$

con evidente significato degli angoli ω, ω_1, ω_2.

§ 6.

Introduzione dei nuovi elementi nel problema dei tre corpi.

Sieno O, P, P' i tre corpi (O corpo centrale di massa preponderante); m_0, m, m' le rispettive masse; x, y, z; x', y', z' le coordinate di P e di P', riferite ad assi di orientazione fissa coll'origine in O; f la costante di attrazione universale; $r = \overline{OP}$, $r' = \overline{OP'}$, $\Delta = \overline{PP'}$ le tre distanze; p_x, p_y, p_z le componenti della quantità di moto *assoluta* di P; p'_x, p'_z, p'_2 le componenti della analoga quantità di moto di P'.

Posto

$$\left.\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m_0}\right)(p_x^2+p_y^2+p_z^2) - f\frac{m_0\, m}{r}\,, \\ H'_0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m'}+\frac{1}{m_0}\right)(p'^2_x+p'^2_y+p'^2_z) - f\frac{m_0\, m'}{r'}\,, \\ F_0 &= H_0 + H'_0\,, \\ \mu\, F_1 &= \frac{1}{m_0}(p_x p'_x + p_y p'_y + p_z p'_z) - f\frac{m\, m'}{\Delta}\,, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

le equazioni del moto relativo, sotto la forma canonica di Poincaré, ammettono per funzione caratteristica

$$F = F_0 + \mu\, F_1\,, \tag{28}$$

essendo variabili coniugate le coordinate di ciascuno dei due corpi P e P' e le corrispondenti componenti delle loro quantità di moto; $\mu\, F_1$ costituisce la funzione perturbatrice, e più precisamente il termine $-f\frac{m\, m'}{\Delta}$ ne è la parte principale, il trinomio $\frac{1}{m_0}(p_x p'_x + p_y p'_y + p_z p'_z)$ il termine complementare.

A ciascuna delle due sestuple

$$\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$\begin{pmatrix} p'_x & p'_y & p'_z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix} \tag{30}$$

conviene sostituire degli elementi ellittici, definiti in base ad ipotetici moti non perturbati.

L'abituale criterio isodinamico porta a valersi di due sistemi canonici ausiliari aventi rispettivamente H_0 e H'_0 per funzioni caratteristiche.

Noi faremo invece corrispondere ad ogni istante due funzioni poco diverse dalle H_0, H'_0 relative allo stesso istante, cioè

$$\left.\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m_0}\right)(p_x^2+p_y^2+p_z^2) - \frac{k}{r}\,, \\ H' &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m'}+\frac{1}{m_0}\right)(p'^2_x+p'^2_y+p'^2_z) - \frac{k'}{r'}\,, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

modificando (lievemente) i coefficienti di $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r'}$ in confronto dei valori $f m_0 m$, $f m_0 m'$ che loro competono in H_0, H'_0. Questi coefficienti k e k' li intenderemo fissati in guisa che H e H' si conservino, nel moto reale di P, P', costantemente eguali ai loro valori iniziali h_0, h'_0.

Ciò posto, riportandoci ai precedenti paragrafi, potremo coordinare al sistema canonico di funzione caratteristica H una trasformazione canonica, che fa passare dalla sestupla (29) ad una sestupla

$$\begin{pmatrix} U & G & \Theta \\ u & g & \theta \end{pmatrix}$$

di elementi ellittici (E), corrispondenti all'orbita intermediaria che sarebbe descritta dal punto P, a partire dal suo reale stato di moto dell'istante t, qualora cessasse ogni perturbazione. In questo moto ipotetico [come risulta dal confronto dell'espressione (31) di H colle (3), (4)]:

1.° funge da massa di P

$\dfrac{1}{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m_0}} = \dfrac{m}{1+\dfrac{m}{m_0}}$ (poco diversa dalla massa reale m per essere piccolo il rapporto $\dfrac{m}{m_0}$);

2.° il vettore (p_x, p_y, p_z), che concorre a definirlo (e che è, nel moto reale di P, la quantità di moto assoluta dell'istante cui si riferiscono gli elementi) si interpreta come quantità di moto relativa, talchè l'orbita intermediaria non riesce esattamente osculatrice;

3.° (e qui risiede la differenza in confronto della definizione ordinaria) l'attrazione del centro O ha un coefficiente k (poco diverso da $f m_0 m$), scelto in guisa che risulti $H = h_0$.

Analogamente per P'.

Ove si badi alla (16) e si noti che [a norma delle (27) e (31)]

$$H_0 - H = \frac{k - f m_0 m}{r},$$

si vede che la sostituzione degli elementi ellittici isoenergetici in H_0 la riduce a

$$h_0 + \frac{\sqrt{\frac{-2 h_0}{m}}\, U - f m_0 m}{r}.$$

Del pari, designando gli elementi di P' con lettere accentate, H_0 si riduce a

$$h'_0 + \frac{\sqrt{\frac{-2h'_0}{m'}}\,U' - f\,m_0\,m'}{r}.$$

Insomma, designando con C, α, α', β, β' costanti positive, che dipendono soltanto dalle masse e dalle condizioni iniziali, si ha

$$F_0 = -C + \frac{\alpha\,U - \beta}{r} + \frac{\alpha'\,U' - \beta'}{r'},$$

coll'avvertenza che r ed r' si devono ritenere espresse per mezzo di U, G, u, o rispettivamente U', G', u', a norma delle (15) e (18).

Resta la funzione perturbatrice $\mu\,F_1$. È appunto nei suoi riguardi che si fa palese il vantaggio dei nuovi elementi, i quali comprendono l'anomalia eccentrica u, al posto della media, e consentono così sia di attribuire a $\mu\,F_1$ espressione esplicita (mentre di solito c'è di mezzo l'equazione di Kepler), sia più agevoli sviluppi in serie. Ciò è troppo noto perchè occorra illustrarlo. Terminerò osservando che, anche coi nuovi elementi, dei due gruppi di formule di trasformazione destinati ad introdurli [(22) e (23)], viene in uso soltanto il primo per la parte principale $-f\frac{m\,m'}{\Delta}$, soltanto il secondo per il termine complementare $\frac{1}{m_0}(p_x\,p'_x + p_y\,p'_y + p_z\,p'_z)$.

Neues Verfahren zur Herleitung der Differentialgleichung für das relative Extremum eines Integrals.

(*Von* O. Hölder, *in Leipzig.*)

Das Variationsproblem, bei dem Differentialgleichungen als Nebenbedingungen gegeben sind, pflegt mit der berühmten Euler-Lagrange'schen Multiplicatorenmethode (*) behandelt zu werden. Diese Methode ist durch die Arbeiten von A. Mayer, Kneser, Hilbert, Hahn strenge bewiesen worden (**). Wenn ich hier ein neues, elementares Verfahren angebe, das einfachste dieser Probleme zu bearbeiten, so hat meine Auseinandersetzung mehr nur die Bedeutung einer Erläuterung und Veranschaulichung. Ich werde zeigen, dass man gewisse specielle Variationen, obwohl sie durch eine Differentialgleichung mit einander verknüpft sind, so genau abschätzen kann, dass sich mit ihrer Hilfe die Differentialgleichung des Problems ohne den Euler-Lagrange'schen Multiplicatorenkunstgriff gewinnen lässt. Es sind dabei Grössen verschiedener Ordnung in verschiedenen Intervallen der unabhängigen Veränderlichen zu berücksichtigen, wodurch besondere Vorsicht erfordert

(*) Cf. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas, etc.* (1744), p. 114-119 (für einen specielleren Fall); Lagrange, *Oeuvres*, X, p. 420-421.

(**) Cf. A. Mayer, *Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung*, Math. Annalen, Bd. 26, p. 74; A. Kneser, *Lehrbuch der Variationsrechnung*, 1900, p. 227 ff.; D. Hilbert, *Zur Variationsrechnung*, Göttinger Nachr., 1905, p. 159; H. Hahn, *Über die Lagrange'sche Multiplicatorenmethode*, Monatshefte für Math. u. Phys., Bd. 14, p. 325. M. vergl. auch die in der *Variationsrechnung* von O. Bolza (deutsche Ausgabe, 1909, p. 566-569) gegebene Übersicht. Für den Specialfall der isoperimetrischen Probleme hat lange vor den erwähnten Publicationen Weierstrass einen strengen Beweis des Multiplicatorenverfahrens in seinen Vorlesungen vorgetragen (Vgl. auch P. du Bois-Reymond, *Math. Annalen*, Bd. 15, p. 311, wo sich derselbe Beweis findet). Durch diesen Beweis sind auch spätere Untersuchungen beeinflusst worden; m. vergl. L. Scheeffer, *Math. Annalen*, Bd. 25, p. 583 und die durch diese Arbeit beeinflusste oben schon erwähnte Abhandlung von A. Mayer.

wird. Im Gegensatz dazu stellt das LAGRANGE'sche Multiplicatorenverfahren eine Regel dar, die auch denjenigen, der sich um die strenge Begründung der Methode wenig bekümmert, fast nie in Irrtümer verfallen lässt.

Ich werde mich im Folgenden begnügen, zu beweisen, dass die zu entwickelnde Gleichung erfüllt sein muss, wenn die Variation δI des Integrals I für alle diejenigen Variationen der zu Grunde liegenden Functionen verschwindet, die der variirten Nebenbedingung $\delta H = 0$ genügen. Ich zweifle nicht daran, dass sich das Problem auch mit dem neuen Verfahren weiter führen lässt, obwohl ich dabei vorläufig noch auf eine gewisse Schwierigkeit gestossen bin. Iedenfalls scheint mir das Abschätzungsverfahren für die hier benutzten Variationen von Interesse zu sein.

§ 1.

Die Variationen.

Man wird auf die Variationen, die wir benutzen wollen, ganz von selbst geführt, wenn man zunächst die einfache Aufgabe, das Integral

$$\int_r^s G(t, x')\, dt \tag{1}$$

zu einem Extremum zu machen, behandelt, ohne dabei die LAGRANGE'sche partielle Integration (*) anzuwenden. Die Function G soll stetige erste partielle Differentialquotienten besitzen. Die Integrationsgrenzen sind fest gedacht, die zu bestimmende Function $x(t)$ so, dass sie einen stetigen Differentialquotienten hat und an den Grenzen r und s des Intervalls vorgegebene Werte annimmt. Wir setzen (vergl. § 5) einfach die Integralvariation:

$$\int_r^s \frac{\partial G}{\partial x'}\, \delta x'\, dt \tag{2}$$

gleich Null. Da nun

$$\int_r^s \delta(x')\, dt = \int_r^s \frac{d}{dt}(\delta x)\, dt = (\delta x)_r^s$$

(*) *Oeuvres*, I, p. 337 (aus den *Miscellanea Taurinensia*, t. II, 1760-1761).

ist, und die Variation δx an den Grenzen verschwinden soll, so ist $\delta x'$ eine Function von t, die der Bedingung

$$\int_r^s \delta x' \, d t = 0 \tag{3}$$

genügt, während sie sonst nur noch der Bedingung der Stetigkeit unterworfen ist.

Trägt man t als Abscisse und $\delta x'$ als Ordinate auf, so sieht man, dass der Bedingung (3) nicht durch eine solche Curve genügt werden kann, die nur in *einem* kleinen Intervall von Null verschieden ist und hier überall nach der gleichen Seite von der Abscissenaxe abweicht. Deshalb kann man aus dem Verschwinden der Variation (2) nicht schliessen, dass $\frac{\partial G}{\partial x'} = 0$ sein müsse. Es kann aber der Bedingung (3) durch eine Curve genügt werden, die nur in *zwei* kleinen Intervallen von der Abscissenaxe abweicht und im erstem Intervall nach der einen, im anderen nach der anderen Seite eine Ausbuchtung macht, so dass dabei beide Ausbuchtungen denselben Flächeninhalt abgrenzen (Fig. 1). Man erkennt nun leicht, indem man die beiden Intervalle auf Punkte $t = \sigma_0$ und $t = \sigma_1$ zusammenzieht, dass das Verschwinden von (2), wenn es für alle die erwähnten Variationen $\delta x'$ eintreten soll, die Relation

Fig. 1.

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x'}\right)_{\sigma_0} = \left(\frac{\partial G}{\partial x'}\right)_{\sigma_1},$$

d. h. also die Gleichung

$$\frac{\partial G}{\partial x'} = \text{const.}$$

nach sich zieht.

Die eben gezogene Folgerung, der unschwer eine strenge Form gegeben werden kann (vergl. das hier Folgende), ist zugleich eine unmittelbare Folge von dem jetzt sogenannten « du Bois-Reymond'schen Lemma ». Dieses besagt, dass aus einer Gleichung

$$\int_r^s F \cdot \frac{d\eta}{dt} \, dt = 0,$$

wenn sie für alle an den Enden des Intervalls verschwindenden, mit ihren

Ableitungen stetigen Functionen η besteht, falls zugleich F eine stetige Function von t ist, die Beziehung

$$F = \text{const.}$$

erschlossen werden kann (*).

Jetzt soll das Integral

$$I = \int_r^s G(t, x, y, x', y')\, dt \tag{4}$$

zu einem Extremum gemacht werden, indem dabei die Functionen x und y der unabhängigen Veränderlichen t, die wir zweimal stetig differentiirbar annehmen wollen (**), der Nebenbedingung

$$H(t, x, y, x', y') = 0 \tag{5}$$

unterworfen werden. Von den Functionen G und H wollen wir noch voraussetzen, dass sie stetige erste und zweite partielle Differentialquotienten nach sämmtlichen Argumenten besitzen. Wir nehmen nun einfach (s. o.) zwei stetig differentiirbare Variationen δx und δy an, die der Gleichung $\delta H = 0$, d. h. der Gleichung

$$H_2\, \delta x + H_3\, \delta y + H_4 \frac{d}{dt}\, \delta x + H_5 \frac{d}{dt}\, \delta y = 0 \tag{6}$$

genügen. Dabei bedeuten $H_1, H_2, \ldots$, die partiellen Ableitungen der Function H

(*) Die angestellte Überlegung ist von den bekannten Beweisen des du Bois-Reymond'schen Lemmas nicht wesentlich verschieden; vrgl. *Math. Annalen*, Bd. 15, p. 313 und p. 310. Du Bois-Reymond führt hier den Gedanken, eine Variation nur in zwei kleinen, beliebig gewählten Intervallen von Null verschieden zu setzen, auf R. Reiff zurück, der das entsprechende Verfahren auf ein Raumintegral angewendet hat (*Über den Einfluss der Capillarkräfte auf die Form der Oberfläche einer bewegten Flüssigkeit;* Dissertation, Tübingen, 1879, p. 8). Man hätte ein ähnliches Verfahren, wenn man bei der Euler'schen Behandlung der isoperimetrischen Probleme zwei beliebige Ordinaten des der Curve substituirten polygonalen Zuges variirte und die anderen ungeändert liesse, während Euler zwei *benachbarte* Ordinaten variirt (*Methodus inveniendi, etc.*, p. 176, p. 184 und Fig. 15 der zweiten Tafel). Man vergleiche ferner die auf demselben Gedanken beruhenden strengen Beweise des Lemmas bei Bolza, *Lectures on the Calculus of Variations*, 1904, p. 22 und bei Whittemore, *Annals of Mathematics* (2), vol. 2, 1901, p. 132; die letzte Darstellung beruht auf einer von Hilbert 1899 gehaltenen Vorlesung.

(**) Man könnte die Voraussetzungen verringern, worauf aber für den Zweck der vorliegenden Arbeit wenig ankommt.

nach ihrem 1ten, 2ten,... Argument, und es ist bereits von den Relationen

$$\delta x' = \frac{d}{dt}\delta x, \quad \delta y' = \frac{d}{dt}\delta y$$

Gebrauch gemacht.

Im Integral (4) sollen wieder die Endwerte von x und y vorgegeben sein, weshalb die Variationen δx und δy für $t = r$ und $t = s$ gleich Null sein müssen. Betrachtet man jetzt δx als den genannten Bedingungen gemäss vorgegeben, so kann man die Function δy von t aus der Gleichung (6), die eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung ist, bestimmen, indem man von den an den Enden geltenden Bedingungen zunächst nur die eine, dass δy für $t = r$ verschwindet, berücksichtigt. Man erhält so unter der Voraussetzung, dass für die Functionen $x(t)$, $y(t)$, die das Integral (4) zu einem Extremum machen, die Grösse H_5 von $t = r$ bis $t = s$ durchweg von Null verschieden ist,

$$\delta y = -e^{-\int_r \frac{H_3}{H_5} dt} \int_r \left(\left[\frac{H_2}{H_5}\delta x + \frac{H_4}{H_5}\frac{d}{dt}\delta x \right] e^{\int_r \frac{H_3}{H_5} dt} \right) dt. \tag{7}$$

Zerlegt man die eckige Klammer und damit das darüberstehende Integral in zwei Glieder, von denen man das zweite partiell integrirt, so ergiebt sich

$$\delta y = -\frac{H_4}{H_5}\delta x - e^{-\int_r \frac{H_3}{H_5} dt} \int_r \left(\frac{H_2}{H_5} e^{\int_r \frac{H_3}{H_5} dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{H_4}{H_5} e^{\int_r \frac{H_3}{H_5} dt} \right) \right) \delta x \, dt. \tag{8}$$

Hier ist δx bereits als eine an den Enden verschwindende Function gedacht, weshalb der bei der partiellen Integration vor das Integral tretende Teil

$$\left(-\frac{H_4}{H_5}\delta x \right)_r^t = -\frac{H_4}{H_5}\delta x$$

gesetzt worden ist.

Dafür, dass nun δy auch für $t = s$ verschwindet, muss erst gesorgt werden. δx nehme ich jetzt selbst so an, dass es nur in zwei kleinen Intervallen $t_0 \dots t'_0$ und $t_1 \dots t'_1$ von Null verschieden ist ($r < t_0 < t'_0 < t_1 < t'_1 < s$) und in jedem dieser Intervalle nur ein Vorzeichen besitzt. Wird nun zur Abkürzung

$$\frac{H_2}{H_5} e^{\int_r \frac{H_3}{H_5} dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{H_4}{H_5} e^{\int_r \frac{H_3}{H_5} dt} \right) = \Phi(t) \tag{9}$$

gesetzt, so ist in Folge der früher gemachten Voraussetzungen $\Phi(t)$ eine stetige Function. Das grosse Integral in (8) enthät als einzige von Null verschiedene Elemente diejenigen, die aus den Intervallen $t_0 \dots t'_0$ und $t_1 \dots t'_1$ herrühren. Da nun δx in diesen Intervallen sein Vorzeichen nicht wechselt, so kann man für jedes dieser Intervalle oder für einen Teil davon aus dem betreffenden Integral einen Mittelwert von Φ heraussetzen. Man erhält so folgende Tabelle:

t:	δy:	
$r \dots t_0$	0	
$t_0 \dots t'_0$	$-\frac{H_4}{H_5}\delta x - e^{-\int_r \frac{H_3}{H_5} dt}\,\Phi(\tau'_0)\int_{t_0}\delta x\,d t$	
$t'_0 \dots t_1$	$-e^{-\int_r \frac{H_3}{H_5} dt}\,\Phi(\tau_0)\int_{t_0}^{t'_0}\delta x\,d t$	(10)
$t_1 \dots t'_1$	$-\frac{H_4}{H_5}\delta x - e^{-\int_r \frac{H_3}{H_5} dt}\left\{\Phi(\tau_0)\int_{t_0}^{t'_0}\delta x\,d t + \Phi(\tau'_1)\int_{t_1}\delta x\,d t\right\}$	
$t'_1 \dots s$	$-e^{-\int_r \frac{H_3}{H_5} dt}\left\{\Phi(\tau_0)\int_{t_0}^{t'_0}\delta x\,d t + \Phi(\tau_1)\int_{t_1}^{t'_1}\delta x\,d t\right\}.$	

Hier bedeutet τ'_0 ein Argument des Intervalls $t_0 \dots t'_0$, das von der in demselben Intervall variabeln Grösse t abhängt, τ'_1 ein Argument im Intervall $t_1 \dots t'_1$, das sich wiederum nach t richtet, welches in diesem Fall selbst zwischen t_1 und t'_1 gelegen ist. Dagegen sind τ_0 und τ_1 feste Argumente der beiden Intervalle. So ist z. B.

$$\int_{t_0}\Phi(t)\,.\,\delta x\,.\,d t = \Phi(\tau'_0)\int_{t_0}\delta x\,d t,$$

und

$$\int_{t_0}^{t'_0}\Phi(t)\,\delta x\,d t = \Phi(\tau_0)\int_{t_0}^{t'_0}\delta x\,d t$$

gesetzt worden.

Führt man jetzt die Bezeichnungen

$$\int_{t_0}^{t'_0}\delta x\,d t = D'_0, \quad \int_{t_1}^{t'_1}\delta x\,d t = -D'_1, \quad |D'_0| = D_0, \quad |D'_1| = D_1 \tag{11}$$

ein, so sind D_0 und D_1 wieder zwei Flächeninhalte, die, ähnlich wie in Figur 1, von zwei Ausbuchtungen der die Variation δx darstellenden Curve an der Abscissenaxe abgegrenzt werden. Da nun δy für $t = s$ gleich Null sein soll, so ergiebt die letzte Zeile der Tabelle (10):

$$\Phi(\tau_0) D'_0 - \Phi(\tau_1) D'_1 = 0, \tag{12}$$

und es ist dann $\delta y = 0$ von t'_1 bis s.

§ 2.

Herleitung der Gleichung des Problems.

Nun kann die Differentialgleichung des Problems unschwer hergeleitet werden, indem die Variation des Integrals (4) mit Hilfe der LAGRANGE'schen partiellen Integration gleich in die Form

$$\int_r^s \left(\left(G_2 - \frac{d\, G_4}{d\, t} \right) \delta x + \left(G_3 - \frac{d\, G_5}{d\, t} \right) \delta y \right) d\, t = \delta I \tag{13}$$

geschrieben wird. Wir untersuchen zunächst nur die Bedingung dafür, dass die Variation (13) für alle die hier aufgestellten Variationen δx und δy gleich Null ist, wobei wir uns wegen der Homogeneität unserer Ausdrücke nicht einmal auf kleine Variationen zu beschränken brauchen.

Das Integral (13) ist über die fünf Intervalle

$$r \ldots t_0, \; t_0 \ldots t'_0, \; t'_0 \ldots t_1, \; t_1 \ldots t'_1, \; t'_1 \ldots s$$

zu erstrecken, wobei die beiden äusseren keinen Beitrag ergeben, da in ihnen δx und δy beide verschwinden. Setzt man jetzt in (13) die Werte von δx und die in der Tabelle (10) gegebenen Werte von δy ein, so erscheint

$$\int \delta x\, d\, t$$

unter dem äusseren Integral in verschiedenen Gliedern, bald mit diesen, bald mit jenen Grenzen behaftet. Diese Glieder geben, wenn die äussere Integration zunächst auf die beiden Intervalle $t_0 \ldots t'_0$ und $t_1 \ldots t'_1$ beschränkt wird, zusammen etwas, was absolut kleiner ist als (vrgl. (11))

$$M\left\{D_0(t'_0 - t_0) + D_0(t'_1 - t_1) + D_1(t'_1 - t_1)\right\},$$

wobei M *eine von den Variationen, also auch von der Grösse und Lage der Intervalle* $t_0 \ldots t'_0$ *und* $t_1 \ldots t'_1$ *unabhängige Konstante* bedeutet. Sind nun diese *beiden Intervalle kleiner als* Δ, so ist der eben bezeichnete Wert gleich

$$\vartheta M \Delta (2 D_0 + D_1),$$

wo ϑ *eine zwischen* -1 *und* $+1$ *gelegene Zahl bedeuten soll.* Es ergeben sich aus (13) ausserdem in den beiden betrachteten Intervallen die Werte

$$\int_{t_0}^{t'_0}\left(\left(G_2 - \frac{d\,G_4}{d\,t}\right) - \left(G_3 - \frac{d\,G_5}{d\,t}\right)\frac{H_4}{H_5}\right)\delta x\,d\,t \tag{14}$$

und

$$\int_{t_1}^{t'_1}\left(\left(G_2 - \frac{d\,G_4}{d\,t}\right) - \left(G_3 - \frac{d\,G_5}{d\,t}\right)\frac{H_4}{H_5}\right)\delta x\,d\,t. \tag{15}$$

Das Intervall $t'_0 \ldots t_1$, d. h. das mittlere von jenen fünf, giebt aber zum Integral (13) den Beitrag

$$-D'_0\,\Phi(\tau_0)\int_{t'_0}^{t_1}\left(G_3 - \frac{d\,G_5}{d\,t}\right)e^{-\int_r \frac{H_1}{H_3}dt}\,d\,t.$$

Man erhält also durch Zusammenfassen, falls man aus den Integralen (14) und (15) je einen Mittelwert der Grösse

$$G_2 - \frac{d\,G_4}{d\,t} - \left(G_3 - \frac{d\,G_5}{d\,t}\right)\frac{H_4}{H_5} = \Psi(t)$$

heraussetzt,

$$\begin{aligned}\delta I = \vartheta M(2D_0 + D_1)\Delta + \Psi(\bar{\tau}_0)\,D'_0 - \Psi(\bar{\tau}_1)\,D'_1 \\ - D'_0\,\Phi(\tau_0)\int_{t'_0}^{t_1}\left(G_3 - \frac{d\,G_5}{d\,t}\right)e^{-\int_r \frac{H_3}{H_5}dt}\,d\,t;\end{aligned} \tag{16}$$

dabei bedeuten $\bar{\tau}_0$ und $\bar{\tau}_1$ wiederum Argumente der Intervalle $t_0 \ldots t'_0$ und $t_1 \ldots t'_1$.

Es seien jetzt in der Strecke $r \ldots s$ der Abscissenaxe (t-Axe) zwei Punkte σ_0 und σ_1 herausgegriffen ($\sigma_0 < \sigma_1$), und um diese beiden die Intervalle $t_0 \ldots t'_0$ und $t_1 \ldots t'_1$ beschrieben. $\Phi(\sigma_0)$ möge zunächst von Null verschieden sein. Die

Curve, deren Ordinate die Function δx von t repräsentirt, sei wieder in der angegebenen Weise konstruirt und dabei, was möglich ist (*), so eingerichtet, dass für die Grössen (11) die Relation (12) erfüllt ist; im Übrigen aber möge die Curve irgendwie verlaufen. Wegen der Stetigkeit der Function Φ wird nun $\Phi(\tau_0)$ wenig von $\Phi(\sigma_0)$ verschieden sein, wenn das Intervall $t_0 \ldots t'_0$ hinreichend klein ist, und es ist somit $\Phi(\tau_0)$ sicher von Null verschieden. Wir setzen jetzt den Ausdruck (16) gleich Null, ersetzen in ihm D'_0 nach (12) durch

$$\frac{\Phi(\tau_1)}{\Phi(\tau_0)} D'_1,$$

dividiren mit D'_1 und multipliciren mit $\Phi(\tau_0)$ durch. Indem wir nun die Punkte σ_1 und σ_0 festhalten, die beiden Intervalle aber verkleinern, wobei wir für jede Wahl der Intervalle die Konstruktion von δx und die eben durchgeführte Betrachtung wiederholen, ergiebt sich an der Grenze, wenn die Intervalle unendlich klein gemacht werden, die Relation

$$0 = \Psi(\sigma_0)\Phi(\sigma_1) - \Psi(\sigma_1)\Phi(\sigma_0) - \Phi(\sigma_1)\Phi(\sigma_0)\int_{\sigma_0}^{\sigma_1}\left(G_3 - \frac{dG_5}{dt}\right)e^{-\int_r \frac{H_3}{H_5}dt}\,dt. \quad (17)$$

Wie man sofort erkennt, ergiebt sich dieselbe Relation auf die gleiche Weise, wenn zwar $\Phi(\sigma_0) = 0$, aber $\Phi(\sigma_1)$ von Null verschieden ist.

Sind nun $\Phi(\sigma_0)$ und $\Phi(\sigma_1)$ beide von Null verschieden, so kann die Gleichung (17) in die Form

$$\frac{\Psi(\sigma_0)}{\Phi(\sigma_0)} + \int_r^{\sigma_0}\left(G_3 - \frac{dG_5}{dt}\right)e^{-\int_r \frac{H_3}{H_5}dt}\,dt = \frac{\Psi(\sigma_1)}{\Phi(\sigma_1)} + \int_r^{\sigma_1}\left(G_4 - \frac{dG_5}{dt}\right)e^{-\int_r \frac{H_3}{H_5}dt}\,dt$$

gesetzt werden. Es ergiebt sich also, dass für die Argumente t, für die $\Phi(t)$ von Null verschieden ist,

$$\frac{\Psi(t)}{\Phi(t)} + \int_r\left(G_3 - \frac{dG_5}{dt}\right)e^{-\int_r \frac{H_3}{H_5}dt}\,dt = C, \quad (18)$$

d. h. gleich ein und derselben Constanten sein muss.

Ist dagegen von den Grössen $\Phi(\sigma_0)$ und $\Phi(\sigma_1)$ die eine gleich Null und die andere von Null verschieden, also z. B. $\Phi(\sigma_0) = 0$ und $\Phi(\sigma_1) \gtrless 0$, so ergiebt sich aus (17), dass $\Psi(\sigma_0) = 0$ sein muss.

(*) Man kann die eine Ausbuchtung der Kurve affin abändern.

Es ist also die Gleichung (18) *in der Form*

$$\Psi(t) + \Phi(t) \int_r \left(G_3 - \frac{d\,G_5}{d\,t} \right) e^{-\int_r \frac{H_3}{H_5} dt} d\,t = C\,\Phi(t) \tag{19}$$

dann für das ganze Intervall r...s giltig, wenn es einen Wert t des Intervalls giebt, für den $\Phi \neq 0$ *ist.* Dagegen ist (17) identisch erfüllt, wenn für das ganze Intervall

$$\Phi(t) = 0 \tag{20}$$

ist, in welchem Fall also keine weiteren Schlüsse gezogen werden können.

Es erscheint beachtenswert, dass die Glieder unter dem Integral (13), die

$$\int \delta\,x\,d\,t$$

enthielten, schliesslich nach dem Grenzübergang in der Formel (17) verschwunden sind, soweit sie aus den Intervallen $t_0 \ldots t'_0$ und $t_1 \ldots t'_1$, die beim Grenzübergang unendlich klein wurden, hervorgegangen sind, während andererseits das mittlere Intervall $t'_0 \ldots t_1$, das in $\sigma_0 \ldots \sigma_1$ übergeht, zu (17) einen von Null verschiedenen Beitrag ergiebt, obwohl in ihm die einzige von Null verschiedene Variation $\delta\,y$ eben von der Ordnung von $\int \delta\,x\,d\,t$ ist (vrgl. die Tabelle (10)).

§ 3.

Speciellere Variationen für einen besonderen Fall.

Die zu Grunde gelegte Function $\delta\,x$ von t, aus der sich dann $\delta\,y$ mit Hilfe der Differentialgleichung (6) ergeben hat, war nur in den beiden Intervallen $t_0 \ldots t'_0$ und $t_1 \ldots t'_1$ von Null verschieden; dabei war es nicht nötig, die Gestalt der Function $\delta\,x$ in den beiden Intervallen genau zu kennen. Man könnte deshalb versuchen, $\delta\,x$ in jedem der Intervalle *im Allgemeinen constant*, also im Allgemeinen $\delta\,x = c_0$ für das Intervall $t_0 \ldots t'_0$ und $\delta\,x = -c_1$ für das Intervall $t_1 \ldots t'_1$ zu setzen, wobei aber die Curvenstücke, welche die Function $\delta\,x$ darstellen, wenn t wieder als Abscisse gedeutet wird, bei t_0, t'_0, t_1

und t'_1 etwas abgerundet werden müssten (Fig. 2) (*). Wir nehmen deshalb nach t_0 und vor t'_0 und dann wieder nach t_1 und vor t'_1 die Argumente τ_0, τ'_0, τ_1, τ'_1 an und lassen δx für $t = t_0 \dots \tau_0$ von 0 bis c_0, dann wieder zwischen τ'_0 und t'_0 von c_0 bis 0, ebenso zwischen t_1 und τ_1 von 0 bis $-c_1$ und zwischen τ'_1 und t'_1 von $-c_1$ bis 0 stetig und stetig differentiirbar und jedesmal nur in einem und demselben Sinne übergehen (Fig. 2).

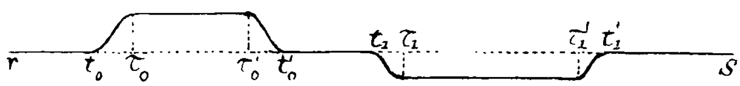


Fig 2

Die jetzt für δx eingeführte Curve giebt insbesondere dann für δy ein einfaches Resultat, wenn die Function $H(t, x, y, x', y')$ die Argumente x und y nicht enthält, so dass also

$$H_2 \equiv H_3 \equiv 0$$

ist. Man erkennt in diesem Fall aus der Gleichung (6), die sich jetzt auf

$$H_4 \frac{d}{dt} \delta x + H_5 \frac{d}{dt} \delta y = 0 \tag{21}$$

reducirt, dass in den Intervallen $r \dots t_0$, $\tau_0 \dots \tau'_0$, $t'_0 \dots t_1$, $\tau_1 \dots \tau'_1$, $t'_1 \dots s$, in denen nunmehr δx genau constant ist,

$$H_5 \frac{d}{dt} \delta y = 0$$

sein muss. Es ist also, da H_5 im ganzen Intervall $r \dots s$ von Null verschieden gedacht war, in jedem der zuletzt genannten Teilintervalle auch δy constant.

Untersucht man nun die Änderung, die δy z. B. im Intervall $t_0 \dots \tau_0$ erhält, so giebt die Gleichung (21) durch Integriren

$$(\delta y)_{t_0}^{\tau_0} = -\int_{t_0}^{\tau_0} \frac{H_4}{H_5} \frac{d}{dt} \delta x \, dt.$$

(*) Vrgl. die Figur bei P. du Bois-Reymond, *Math. Annalen*, Bd. 15, p. 301 und in der Darstellung von Hilbert's Beweis des du Bois-Reymond'schen Lemmas in der deutschen Ausgabe von Bolza's *Variationsrechnung*, p. 28.

Hier kann man, da $\frac{d}{dt}\delta x$ im Intervall $t_0 \ldots \tau_0$ stets dasselbe Vorzeichen hat, einen Mittelwert $\left[\frac{H_4}{H_5}\right]$ von $\frac{H_4}{H_5}$ herausnehmen und man erhält nachher, indem τ_0 an t_0 unendlich nahe herangerückt wird,

$$\lim (\delta y)_{t_0}^{\tau_0} = -\lim \left[\frac{H_4}{H_5}\right] \int_{t_0}^{\tau_0} \frac{d}{dt} \delta x \, dt$$

$$= -\frac{H_4(t_0)}{H_5(t_0)} c_0 .$$

Dabei bedeute z. B. $H_4(t_0)$ den Wert, den die Function $H_4(t, x, y, x', y')$ erhält, wenn in ihren sämmtlichen Argumenten die Variable t zu t_0 specialisirt wird.

Wir halten jetzt die Werte c_0 und c_1, zwischen denen nachher noch eine Beziehung aufgestellt wird, fest und ziehen die vier Übergangsintervalle (Abrundungsintervalle) $t_0 \ldots \tau_0$, $\tau'_0 \ldots t'_0$, $t_1 \ldots \tau_1$, $\tau'_1 \ldots t'_1$ auf Null zusammen. Dabei ergeben sich δx und δy in den verbleibenden Intervallen der folgenden Tabelle gemäss:

t:	δx:	δy:
$r \ldots t_0$	0	0
$t_0 \ldots t'_0$	c_0	$-\frac{H_4(t_0)}{H_5(t_0)} c_0$
$t'_0 \ldots t_1$	0	$\left(\frac{H_4(t'_0)}{H_5(t'_0)} - \frac{H_4(t_0)}{H_5(t_0)}\right) c_0$
$t_1 \ldots t'_1$	$-c_1$	$\left(\frac{H_4(t'_0)}{H_5(t'_0)} - \frac{H_4(t_0)}{H_5(t_0)}\right) c_0 + \frac{H_4(t_1)}{H_5(t_1)} c_1$
$t'_1 \ldots s$	0	$\left(\frac{H_4(t'_0)}{H_5(t'_0)} - \frac{H_4(t_0)}{H_5(t_0)}\right) c_0 - \left(\frac{H_4(t'_1)}{H_5(t'_1)} - \frac{H_4(t_1)}{H_5(t_1)}\right) c_1 .$

(22)

Da nun δy für $t = t_1$ verschwinden sollte, ist zwischen c_0 und c_1 die Beziehung

$$\left(\frac{H_4(t'_0)}{H_5(t'_0)} - \frac{H_4(t_0)}{H_5(t_0)}\right) c_0 - \left(\frac{H_4(t'_1)}{H_5(t'_1)} - \frac{H_4(t_1)}{H_5(t_1)}\right) c_1 = 0$$

festzusetzen.

Führt man die in der Tabelle gegeben Variationen δx und δy in die Variation (13) des Integrals (4) ein, so ergiebt sich, wenn man jetzt auch die Intervalle $t_0 \ldots t'_0$ und $t_1 \ldots t_1'$ auf die Argumente σ_0 und σ_1 zusammenzieht, wieder die Gleichung (17). Dabei ist zu bemerken, dass man sich zunächst δx und somit auch δy noch durch eine zusammenhängende und abgerundete Curve dargestellt zu denken hat; indem man aber gleich nachher die Intervalle $t_0 \ldots \tau_0$, $\tau'_0 \ldots t'_0$, $t_1 \ldots \tau_1$, $\tau'_1 \ldots t'_1$ verschwinden lässt, ergeben sich für δx und δy die durch die Tabelle (22) beschriebenen Linienzüge, *die unstetig sind und aus lauter der Abscissenaxe parallelen geradlinigen Strecken bestehen.*

§ 4.

Übereinstimmung mit dem Ergebnis des Multiplicatorenverfahrens.

Hätte man zur Bestimmung des Extremums des Integrals (4) unter der Nebenbedingung (5) das Euler-Lagrange'sche Multiplicatorenverfahren angewandt, so hätten sich die beiden Differentialgleichungen

$$G_2 - \frac{d}{dt} G_4 + \lambda H_2 - \frac{d}{dt}(\lambda H_4) = 0,$$

$$G_3 - \frac{d}{dt} G_5 + \lambda H_3 - \frac{d}{dt}(\lambda H_5) = 0$$

ergeben. Diese Gleichungen sind, wenn sie entwickelt werden, in λ und $\frac{d\lambda}{dt}$ linear. Rechnet man die beiden Ausdrücke für λ und $\frac{d\lambda}{dt}$ aus den Gleichungen aus und stellt man die Bedingung dafür auf, dass der zweite Ausdruck wirklich gleich dem Differentialquotienten des ersten wird, so ergiebt sich eine λ nicht mehr enthaltende Differentialgleichung. Dieselbe Differentialgleichung erhält man, wenn man aus (19) die Constante C durch Differentiiren und Eliminiren herausschafft.

§ 5.

Weiterführung des Problems.

In unserer Entwicklung ist einfach die Variation (13) des Integrals (4) gleich Null gesetzt worden für solche Variationen δx und δy, die der Gleichung (6) genügen, welche durch Variiren von (5) entstanden ist. Zum Zweck eines vollständigen Beweises dafür, dass die Gleichung (17) für das Extremum des Integrals (4) notwendig ist, müsste man aber zeigen, dass die Änderung des Integrals (4), falls die Gleichung (17) nicht erfüllt wäre, sowohl positiv als auch negativ werden könnte für Variationen δx und δy, die an den Enden verschwinden und für die $x + \delta x$ und $y + \delta y$ der Nebenbedingung (5) genügen. Dabei muss man noch erwägen, dass erstens die vollständige Änderung des Integrals sich von der Variation (13) unterscheidet, und dass zweitens dann, wenn die Bedingung (5) genau erfüllt ist, δx und δy der Gleichung (6) nur näherungsweise genügen. Die aus der ersten Erwägung entspringenden Fragen erledigen sich in bekannter Weise leicht, wenn man die vollständige Änderung des Integrals (4) in die Form setzt:

$$\int_r^s (G(t,\ x+\delta x,\ y+\delta y,\ x'+\delta' x,\ y'+\delta' y) - G(t, x, y, x', y'))\, dt$$
$$= \int_r^s (G_2\, \delta x + G_3\, \delta y + G_4\, \delta' x + G_5\, \delta' y + \rho\, \varepsilon)\, dt;$$

dabei mögen δx, δy, $\delta' x$, $\delta' y$ im ganzen Intervall $r \dots s$ absolut kleiner als ρ sein, und es bedeutet dann ε eine mit verschwindendem ρ gleichmässig für das ganze Intervall verschwindende Grösse.

Die aus der zweiten Erwägung hervorgehenden Schwierigkeiten sind für den Fall, dass die Aufgabe mit der LAGRANGE'schen Multiplicatorenmethode behandelt wird, durch KNESER, HILBERT und HAHN (*) beseitigt worden. Die angedeuteten Fragen lassen sich von dem in der vorliegenden Arbeit angenommenen Standpunkt aus jedenfalls nicht ohne gewisse Umstände erledigen.

(*) M. Vrgl. neben den schon genannten Arbeiten: H. HAHN, *Math. Ann.*, Bd. 58, p. 148 ff. und Bd. 63, p. 253 ff.

Sur un théorème général de l'optique.

(*Par* H. A. LORENTZ, *à Haarlem.*)

Dans le cours de ses recherches sur la théorie des instruments optiques (*), LAGRANGE est parvenu à établir un théorème fondamental (**) bien connu de tous les physiciens. De nombreuses considérations plus modernes sur la marche des rayons lumineux dans un milieu quelconque sont intimement liées à son résultat, et il sera donc peut-être approprié à la présente occasion d'indiquer comment ces considérations peuvent être étendues au cas général des corps biréfringents.

1. Imaginons un milieu transparent qui a en chaque point les propriétés d'un crystal biaxe, et dont la nature change continûment d'un point à un autre. Soit ds une ligne infiniment petite quelconque. Cette ligne peut être regardée comme un élément d'un rayon de lumière, ou plutôt comme un élément de *deux* rayons, pour chacun desquels il y a une direction déterminée des vibrations, et une direction déterminée d'un élément superficiel $d\sigma$ qui appartient à une surface d'onde et qui est conjugué avec l'élément ds. Si l'on connaît les constantes optiques on peut aussi indiquer pour chacun des deux cas la vitesse de propagation de l'onde et la vitesse du rayon. Nous représenterons la première par u et la seconde par v.

Dans ce qui suit nous nous bornerons à une seule direction de vibration; nous dirons donc que cette direction, celle de l'élément d'onde $d\sigma$ et les valeurs de u et de v sont entièrement déterminées quand on a choisi l'élément de rayon ds. Bien entendu, si l'on considère une ligne quelconque s et si l'on regarde les éléments dans lesquels elle peut être divisée comme des éléments de rayon, le choix de la direction de vibration en chaque point

(*) *Sur la théorie des lunettes.* Nouveaux mémoires de l'Acad. royale pour l'année 1778 (Berlin, 1780), Classe de mathématique, p. 162.

(**) *Sur une loi générale d'optique.* Mémoires de l'Acad. royale pour l'année 1803 (Berlin, 1805), Classe de mathématique, p. 3.

devra être fait de telle manière qu'elle change continûment le long de la ligne. Il devra également y avoir continuité quand on passe d'une ligne à une autre qui en est infiniment voisine.

Après avoir fait le choix dont nous venons de parler, on peut calculer pour chaque ligne l'intégrale

$$\int \frac{ds}{v}. \tag{1}$$

La valeur qu'on trouve pour cette expression ne changera pas quand on intervertit la direction de l'intégration. En effet, pour un élément de rayon donné, la vitesse v est indépendante de la direction dans laquelle il est parcouru par la lumière. Ajoutons qu'il en est de même de la direction de vibration, de celle de l'élément d'onde conjugué avec ds et de la vitesse d'onde u.

2. La construction bien connue de Huygens peut servir à déterminer les lignes, courbées dans un milieu non homogène, que suivent les rayons lumineux, et nous fait connaître en même temps les positions successives d'une onde. En général, et c'est à ce cas que nous nous bornerons, il n'y a qu'un seul rayon entre deux points donnés P_1 et P_2 et ce rayon est déterminé par la règle que l'intégrale (1) devient un minimum. Ce minimum, pour lequel nous écrirons

$$T = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v},$$

sera une fonction des coordonnées de P_1 et de P_2; c'est le temps que la lumière met à se propager d'un de ces points à l'autre.

Concevons que des rayons émanent d'un point fixe P_1 dans toutes les directions et choisissons sur chaque rayon un point P_2 tel que le temps T ait pour tous ces points une même valeur déterminée. Les points P_2 se trouveront alors sur une surface σ qui n'est autre chose que la position qu'une onde partie du point P_1 atteindra dans l'intervalle T, chaque élément $d\sigma$ étant conjugué avec le dernier élément ds du rayon qui y aboutit.

Cela posé, si l'on part d'un point déterminé P_2 de la surface σ, on peut facilement indiquer la valeur du coefficient différentiel

$$\frac{\partial T}{\partial h}$$

pour le cas où le point P_2 subit un déplacement infiniment petit dans une direction donnée h.

En effet, si cette direction se trouve dans le plan tangent de la surface σ, la dérivée est nulle, et elle aura la valeur

$$-\frac{1}{u_2}$$

quand h coïncide avec la normale $P_2 N_2$, cette ligne étant dirigée vers le côté où se trouve P_1, et u_2 étant la vitesse d'onde qui appartient au dernier élément du rayon $P_1 P_2$.

Il s'ensuit que dans le cas où la direction h fait un angle ϑ_2 avec $P_2 N_2$, on aura

$$\frac{\partial T}{\partial h} = -\frac{\cos \vartheta_2}{u_2}. \tag{2}$$

Notons ici qu'à partir du point P_1 on peut tirer une ligne analogue à $P_2 N_2$; cette ligne $P_1 N_1$ sera la normale de l'élément d'onde qui est conjugué avec le premier élément du rayon $P_1 P_2$, et elle sera dirigée vers le côté où se trouve P_2.

3. Introduisons maintenant deux axes $P_1 X_1$ et $P_2 X_2$ soumis à la seule condition d'être normaux respectivement à $P_1 N_1$ et à $P_2 N_2$. Un point Q_1 de la première ligne peut être déterminé par la distance $P_1 Q_1 = x_1$, et pareillement un point Q_2 du second axe par la distance $P_2 Q_2 = x_2$, ces deux grandeurs x_1 et x_2 étant prises avec le signe positif ou le signe négatif selon la position des points Q_1 et Q_2.

La valeur de l'intégrale

$$T = \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{d s}{v}$$

calculée pour le rayon qui unit les points Q_1 et Q_2, sera une fonction des variables x_1 et x_2, et nous obtiendrons le théorème dont il s'agit en calculant le coefficient différentiel

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2}$$

pour $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, et en exprimant qu'il est égal à

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

Pour trouver la valeur de

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \, \partial x_2 \, (x_1 = 0, \; x_2 = 0)},$$

nous remarquons d'abord que d'après la formule (2)

$$\frac{\partial T}{\partial x_2 \, (x_2 = 0)} = -\frac{\cos \vartheta_2}{u_2},$$

si l'on entend par u_2 la vitesse d'onde propre au dernier élément du rayon $Q_1 P_2$ et par ϑ_2 l'angle que fait avec l'axe $P_2 X_2$ la normale d'onde correspondant à ce dernier élément, cette normale étant tirée vers le côté où se trouve Q_1.

Donc:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \, \partial x_2 \, (x_1 = 0, \; x_2 = 0)} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\cos \vartheta_2}{u_2}\right)_{x_1=0} \tag{3}$$

4. On trouvera le dernier coefficient différentiel en comparant les valeurs de

$$\frac{\cos \vartheta_2}{u_2}$$

pour deux rayons qui se terminent en P_2 et dont le premier est parti du point P_1 et le second d'un point Q_1, situé sur l'axe $P_1 X_1$ à une distance infiniment petite h_1 de P_1. Si l'on écrit ϑ_2 et u_2 pour les grandeurs qui se rapportent au premier rayon, et ϑ'_2, u'_2 pour celles qui appartiennent au second, on aura

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\cos \vartheta_2}{u_2}\right)_{x_1\,0} = \frac{\dfrac{\cos \vartheta'_2}{u'_2} - \dfrac{\cos \vartheta_2}{u_2}}{h_1}. \tag{4}$$

La normale d'onde qui appartient au dernier élément du rayon $P_1 P_2$ est la ligne $P_2 N_2$, et la ligne correspondante $P_2 N'_2$ pour le rayon $Q_1 P_2$ fera avec $P_2 N_2$ un angle infiniment petit φ. Donc, puisque l'axe $P_2 X_2$ est perpendiculaire à $P_2 N_2$, on aura $\cos \vartheta_2 = 0$ et, si l'on désigne par ω l'angle entre les plans $P_2 N_2 N'_2$ et $P_2 N_2 X_2$,

$$\cos \vartheta'_2 = \sin \varphi \cos \omega,$$

expression qu'on peut remplacer par $\varphi \cos \omega$, ou encore par l'angle ψ_2 que fait avec $P_2 N_2$ la projection de $P_2 N'_2$ sur le plan $P_2 N_2 X_2$. Quant au signe algébrique de ce dernier angle, on regardera comme positive une rotation d'un angle droit de la ligne $P_2 N_2$ vers $P_2 X_2$.

On peut maintenant écrire pour le second membre de l'équation (4)

$$\frac{\psi_2}{u'_2 h_1}$$

et il est permis de remplacer ici u'_2 par u_2, attendu que la différence de ces deux vitesses est infiniment petite et que le numérateur ψ_2 l'est également. On a donc, en vertu des équations (3) et (4),

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2 (x_1 = 0,\ x_2 = 0)} = -\frac{\psi_2}{u_2 h_1}.$$

Or, dans le raisonnement qui précède, on peut échanger entre eux les points P_1 et P_2, ce qu'on exprimera par la permutation des indices 1 et 2. Il en résulte

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial x_1 (x_1 = 0,\ x_2 = 0)} = -\frac{\psi_1}{u_1 h_2}$$

et en fin de compte

$$\frac{\psi_2}{u_2 h_1} = \frac{\psi_1}{u_1 h_2}. \tag{5}$$

5. En tenant compte de ce qu'un rayon peut être parcouru dans les deux directions opposées, on peut exprimer de la manière suivante le résultat que nous venons d'obtenir.

Soient P_1 et P_2 deux points arbitrairement choisis, $P_1 P_2$ le rayon lumineux qui va du premier au second, $P_1 N_1$ la normale d'onde et u_1 la vitesse d'onde telles qu'elles sont au point de départ de ce rayon, $P_1 N_1$ étant tirée dans la direction de la propagation. Désignons pareillement par $P_2 N_2$ et u_2 la normale d'onde et la vitesse d'onde pour le point de départ P_2 du rayon inverse $P_2 P_1$. Soient enfin V_1 et V_2 des plans quelconques passant respectivement par $P_1 N_1$, $P_2 N_2$, et $P_1 X_1$, $P_2 X_2$ deux axes situés dans ces plans, dont le premier est perpendiculaire à $P_1 N_1$ et le second à $P_2 N_2$. Alors, si on prend sur le premier axe un point Q_1 infiniment voisin de P_1 ($P_1 Q_1 = h_1$) et sur le second un point Q_2 infiniment voisin de P_2 ($P_2 Q_2 = h_2$), on peut considérer les rayons qui se propagent, l'un de P_1 à Q_2, l'autre de P_2 à Q_1, et les normales d'onde $P_1 N'_1$ et $P_2 N'_2$ propres aux premiers éléments de ces rayons. En général ces normales sortiront des plans V_1 et V_2. Si on les y projette et si l'on désigne par ψ_1 l'angle infiniment petit que la projection de $P_1 N'_1$ sur V_1 fait avec $P_1 N_1$, et par ψ_2 l'angle entre $P_2 N_2$ et la projection de $P_2 N'_2$ sur le plan V_2, les deux expressions qu'on voit dans la formule (5) auront la même grandeur et le même signe algébrique. Quant aux signes, ils seront déterminés pour h_1 et h_2 par le choix des directions positives $P_1 X_1$ et $P_2 X_2$ et pour ψ_1 et ψ_2 par ce que les rotations de $P_1 N_1$ vers $P_1 X_1$ et de $P_2 N_2$ vers $P_2 X_2$ sont considérées comme positives.

N'oublions pas d'ajouter que le théorème est vrai, non seulement pour un système où il n'y a aucune discontinuité, mais aussi pour le cas où un certain nombre de milieux transparents sont séparés les uns des autres par des surfaces de discontinuité, chacun de ces milieux pouvant du reste présenter un changement graduel, d'un point à un autre, des propriétés optiques. Un artifice mathématique dont il n'est pas nécessaire de parler nous permet d'arriver à cette extension, par laquelle les rayons de lumière deviennent des lignes brisées dont les segments peuvent être rectilignes ou courbés selon les circonstances.

6. En partant de la formule (5) on retrouve facilement des théorèmes bien connus.

Imaginons un système de milieux isotropes et homogènes qui sont séparés par un certain nombre de surfaces sphériques centrées. Prenons pour P_1 et P_2 deux points sur l'axe du système. Le rayon $P_1 P_2$ coïncide alors avec la portion de l'axe comprise entre ces points, et on peut faire en sorte que les points Q_1, Q_2 et tous les rayons dont il est question dans le théorème se trouvent dans un même plan passant par l'axe. De plus, les normales d'onde coïncideront avec les rayons lumineux et les vitesses u_1 et u_2 seront inversement proportionnelles aux indices de réfraction n_1 et n_2 des milieux où se trouvent les points P_1 et P_2. Les lignes $P_1 Q_1$ et $P_2 Q_2$, que nous supposerons avoir la même direction, peuvent être considérées comme deux « objets » perpendiculaires à l'axe et l'on voit facilement qu'alors ψ_1 n'est autre chose que l'angle sous lequel l'object $P_2 Q_2$ est vu du point P_1, et que pareillement ψ_2 est la grandeur apparente de l'objet $P_1 Q_1$ vu du point P_2. La formule (5) devient maintenant

$$n_2 h_2 \psi_2 = n_1 h_1 \psi_1 ,$$

ce qui nous donne

$$h_2 \psi_2 = h_1 \psi_1$$

dans le cas $n_1 = n_2$, et

$$\psi_2 = \psi_1$$

si nous supposons en outre $h_1 = h_2$.

La dernière égalité exprime un théorème qui a été trouvé par HUYGENS en 1653.

7. Revenons au cas général et menons par P_1 un plan W_1 perpendiculaire à $P_1 N_1$ et par P_2 un plan W_2 perpendiculaire à $P_2 N_2$. Portons sur $P_1 N_1$ un segment égal à l'unité de longueur et soit W'_1 un plan passant par l'extrémité de ce segment et parallèle au plan W_1.

Cela posé, si Q_2 est un point quelconque de W_2 infiniment voisin de P_2, on peut considérer le rayon $P_1 Q_2$ et la normale d'onde $P_1 N'_1$ appartenant au premier élément de ce rayon. Soit R le point d'intersection de cette normale avec le plan W'_1 et considérons la relation entre les positions de Q_2 et de R.

A cet effet nous choisissons dans le plan W_1 deux axes de coordonnées $P_1 X_1$ et $P_1 X'_1$ perpendiculaires entre eux, et nous déterminons la position du point R par ses coordonnées x_1 et x'_1 par rapport à ces axes, ou plutôt par rapport aux axes qu'on obtient en projetant $P_1 X_1$ et $P_1 X'_1$ sur le plan W'_1. Quant au point Q_2, sa position pourra être déterminée par ses coordonnées x_2, x'_2 par rapport à deux axes $P_2 X_2$ et $P_2 X'_2$ perpendiculaires entre eux et situés dans le plan W_2.

Evidemment les coordonnées x_1, x'_1 seront des fonctions de x_2, x'_2 et comme toutes ces variables sont infiniment petites et s'annulent en même temps, il faut que la relation cherchée puisse être exprimée par deux équations de la forme

$$x_1 = a_{12}\, x_2 + a_{12'}\, x'_2, \quad x'_1 = a_{1'2}\, x_2 + a_{1'2'}\, x'_2.$$

Si maintenant le point Q_2 prend toutes les positions comprises dans une portion infiniment petite $d\sigma_2$ du plan W_2, le point R prendra toutes les positions qui se trouvent dans une portion correspondante $d\omega_1$ du plan W'_1, et on aura

$$d\omega_1 = D_{12}\, d\sigma_2, \tag{6}$$

si l'on désigne par D_{12} la valeur absolue du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{12}, & a_{12'} \\ a_{1'2}, & a_{1'2'} \end{vmatrix}.$$

Remarquons que $d\omega_1$ est la mesure de l'ouverture du cône qui contient les normales d'onde appartenant aux premiers éléments des rayons qui partent du point P_1 et qui sont reçus par l'élément superficiel $d\sigma_2$ situé au point P_2.

D'une manière tout-à-fait analogue on peut considérer un faisceau de rayons infiniment mince qui émane du point P_2 et qui découpe dans le plan W_1 un élément $d\sigma_1$ situé au point P_1. Les normales d'onde propres aux rayons de ce faisceau à leur point de départ rempliront un certain cône à ouverture $d\omega_2$ et on aura la relation analogue à (6)

$$d\omega_2 = D_{21}\, d\sigma_1\,, \tag{7}$$

où D_{21} est la valeur absolue du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{21}, & a_{21'} \\ a_{2'1}, & a_{2'1'} \end{vmatrix}.$$

Or, en faisant attention à la signification des coefficients a_{12}, $a_{12'}$, etc., on déduit facilement de l'équation (5) que

$$\frac{a_{I\,II}}{u_1} = \frac{a_{II\,I}}{u_2}\,,$$

si l'on entend par I un des indices 1, 1' et par II un des indices 2, 2'. Par conséquent

$$\frac{D_{12}}{u_1^2} = \frac{D_{21}}{u_2^2}$$

et, en vertu des formules (6) et (7),

$$\frac{d\omega_1\, d\sigma_1}{u_1^2} = \frac{d\omega_2\, d\sigma_2}{u_2^2}\,. \tag{8}$$

Notons encore que $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ sont les sections des faisceaux considérés par des plans (W_1, W_2) normaux aux normales d'onde. Il serait facile d'introduire en leur lieu les sections par des plans qui sont normaux aux rayons ou qui ont une direction quelconque.

Pour le cas de milieux isotropes l'équation (8) nous ramène à un théorème qui a été énoncé pour la première fois par M. STRAUBEL (*).

(*) *Physik. Zeitschrift,* 4 (1903), p. 114.

Über die Rektifikation algebraischer Kurven.

(*Von* PAUL STÄCKEL, *Heidelberg*.)

1. In der Geschichte der Mathematik des 18. Jahrhunderts sind die Namen LAGRANGE und EULER eng mit einander verbunden. Nicht nur, dass EULER, als er 1766 Berlin verliess und nach St. Petersburg zurückkehrte, LAGRANGE zu seinem Nachfolger an der Akademie machte, auch auf fast allen Gebieten der Mathematik greifen ihre Arbeiten in einander ein, und wenn der jüngere der beiden grossen Geometer von dem älteren mannigfache Anregungen erhalten hat, so ist doch auch EULER nicht selten durch Ergebnisse angeregt worden, die LAGRANGE gefunden hatte. So stehen zum Beispiel die späteren Untersuchungen EULERS über die elliptischen Integrale unter dem Einfluss der klassischen Abhandlung LAGRANGES: *Sur l'intégration de quelques équations différentielles dont les indéterminées sont séparées, mais dont chaque membre en particulier n'est point intégrable* (Misc. Taur. 4, 1766/69, Oeuvres, vol. 2, S. 5); EULER schreibt darüber in seiner Abhandlung: *Dilucidationes super methodo elegantissima qua illustris* DE LA GRANGE *usus est in integranda aequatione differentiali* $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ (Acta Petrop. 1778, I (1780), S. 20, Opera omnia, series I, vol. 21, S. 1), das Ergebnis und die Methode des Turiner Mathematikers hätten ihn in das äusserste Erstaunen versetzt: « penitus obstipui ». Wenn daher die Lehre von den Integralen algebraischer Funktionen zu den Teilen der Analysis gehört, die LAGRANGES Schöpferkraft gefördert hat, so wird in einer Veröffentlichung, die seinem Gedächtnis gilt, ein Beitrag Platz finden dürfen, der sich auf eine von EULER ausgesprochene Vermutung über die Integrale bezieht, die bei der Rektifikation algebraischer Kurven auftreten.

2. In zahlreichen Abhandlungen über die algebraische Integration von Differentialgleichungen der Form

$$\lambda(\xi)\, d\xi = \lambda(\eta)\, d\eta, \tag{1}$$

bei denen sich das Integral

$$\int \lambda(v)\, d v \tag{2}$$

nicht mittels elementarer Funktionen ausführen lässt, hat EULER die gewonnenen Ergebnisse geometrisch gedeutet, indem er das Integral (2) als den Ausdruck für die Bogenlänge einer algebraischen Kurve auffasste; dabei spielt v die Rolle einer Hilfsgrösse, eines Parameters, mittels dessen sich die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten x, y eines Kurvenpunktes algebraisch ausdrücken lassen. Bei den von ihm genauer untersuchten Differentialgleichungen sind die Kurven die Ellipse, Hyperbel, Parabel, Lemniskate, und als Parameter v ist entweder eine der Koordinaten x, y selbst oder der Fahrstrahl bei Polarkoordinaten gewählt. EULER hat aber wiederholt und mit Nachdruck hervorgehoben, dass seine Sätze nicht bloss für die genannten Kurven gelten, sondern in allen den Fällen anwendbar sind, in denen die Bogenlänge s einer algebraischen Kurve dieselbe besondere Form wie dort hat. Nachdem seine Untersuchungen über die Differentialgleichung (1) zu einem gewissen Abschluss gekommen waren, hat er sich der Aufgabe zugewandt, Scharen von algebraischen Kurve zu finden, bei denen die Bogenlänge s druch ein vorgegebenes Integral der Form (2) dargestellt wird, und es ist ihm im Besonderen für die Ellipse, Parabel und Lemniskate gelungen, solche Kurvenscharen zu ermitteln. Die betreffenden Abhandlungen, die aus dem letzten Jahrzehnt seiner Tätigkeit stammen, sind erst nach seinem Tode, die letzte sogar erst im Jahre 1862, gedruckt worden (*).

3. Um die Ausdrucksweise zu vereinfachen, möge unter einer *algebraischen Parameter-Darstellung einer ebenen algebraischen Kurve* eine Darstellung der Form

$$x = f(v), \quad y = g(v) \tag{3}$$

verstanden werden, in der x und y algebraische Funktionen sind; zum Beispiel wird bei dem Kreise

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{4}$$

eine solche Darstellung durch die Formeln

$$x = \frac{1 - v^2}{1 + v^2}, \quad y = \frac{2 v}{1 + v^2} \tag{5}$$

(*) Alle in diesem Paragraphen erwähnten Abhandlungen EULERS werden in den demnächst erscheinden Bänden 20 und 21 der *Opera Leonhardi* EULERI, series I (herausgegeben von A. KRAZER) wiederabgedruckt werden.

geliefert, aus denen sich für die Bogenlänge s die Gleichung ergibt

$$s = \int \frac{2\,dv}{1+v^2} = 2 \,.\, \mathrm{arctg}\, v. \tag{6}$$

In der Abhandlung: *De lineis curvis quarum rectificatio per datam quadraturam mensuratur* (Opera postuma, I, 1862, S. 439) hat EULER die Vermutung ausgesprochen, dass in dem Integral (2) der Integrand $\lambda(v)$ nicht beliebig gewählt werden dürfe; denn weder er selbst noch ausgezeichnete Geometer, die er befragt habe, hätten eine algebraische Kurven entdecken können, bei der

$$s = a \cdot l\,n\,v \tag{7}$$

ist, wo a eine von Null verschiedenen Konstante bezeichnet. Ferner scheine es Fälle zu geben, in denen die Aufgabe nur eine einzige Lösung besitze; denn für den Fall

$$\lambda(v) = \frac{a}{1+v^2} \tag{8}$$

habe er allein den Kreis auffinden können.

Dass es sich mit den Formeln (6) und (7) für die Bogenlänge s in der soeben angegebenen Weise verhalte, hatte EULER schon in der Abhandlung: *Theoremata quaedam analytica quorum demonstratio adhuc desideratur* behauptet, die am 1. Mai 1775 der Petersburger Akademie vorgelegt, aber erst 1785 im zweiten Bande der *Opuscula analytica*, S. 76 abgedruckt worden ist; die Wahrheit dieser beiden Sätze, meint EULER, könne nicht bezweifelt werden, wenn es ihm auch auf keine Weise gelungen sei, sie in aller Strenge zu beweisen. Wenige Jahre später hat er jedoch erkannt, dass er sich bei dem ersten Satze getäuscht habe, denn am 20. August 1781 legte er der Petersburger Akademie eine Abhandlung vor: *De curvis algebraicis quarum omnes arcus per arcus circulares metiri liceat,* in der er seine frühere Behauptung « feierlich widerrief »; diese Abhandlung ist erst im Jahre 1830 in 11. Bande der Petersburger Memoiren gedruckt worden.

Anders steht es mit dem zweiten Satze. In gewissem Sinne ist er auch unrichtig; EULER selbst hat nämlich bemerkt, dass bei dem Kreise (4) die algebraische Parameter-Darstellung

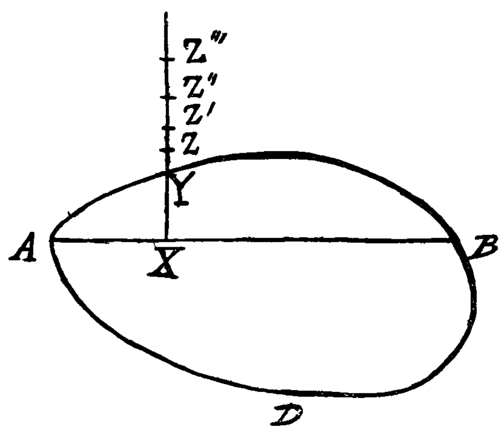
$$x = \frac{1}{2}\,(w^{-1} + w), \quad y = \frac{1}{2}\,i\,(w^{-1} - w) \tag{5'}$$

zu der Gleichung

$$s = i \,.\, l\, n\, w \tag{7'}$$

führt, sodass sein Satz im komplexen Gebiet versagt. Ob dieser im reellen Gebiet, auf das man sich bei Fragen der Rektifikation beschränken wird, richtig ist, soll im Folgenden untersucht werden.

4. Zunächst möge auf die Ueberlegungen eingegangen werden, mittels deren Euler seine Behauptung wahrscheinlich zu machen gesucht hat. Er sagt zunächst, dass bei keiner *geschlossenen* algebraischen Kurve eine algebraische Parameter-Darstellung (3) für die Bogenlänge s die Formel (7) ergeben könne. Es sei nämlich $AYBDA$ eine solche Kurve. Dann liesse sich auf der Ordinate XY ein solcher Punkt Z angeben, dass arc. $AY = a \cdot l\, n\, XZ$ wird. Da aber auch zum Bogen $AYBDAY$ dieselben Koordinaten AX und XY gehören, so gäbe es auf XY einen zweiten Punkt Z', sodass arc. $AYBDAY = a \cdot l\, n\, XZ'$ wird, und es gäbe überhaupt, wenn c den Umfang der geschlossenen Kurve bedeutet, auf XY Punkte Z, Z', Z'', Z''', ..., denen der Reihe nach die Bogen AY, $AY + c$, $AY + 2c$, $AY + 3c$, ..., entsprechen. Alle diese unzählig vielen Punkte sollen, der Voraussetzung nach, durch eine algebraische Formel geliefert werden, und das ist ein Widerspruch, weil eine solche Formel nur eine endliche Anzahl von Punkten ergibt. Mithin kann die gesuchte Kurve nicht geschlossen sein.



Eulers Ueberlegung lässt sich leicht des geometrischen Gewandes entkleiden und in rein analytischer Form darstellen. Bei einer geschlossenen Kurve vom Umfange c gehören zum Kurvenpunkte (x, y) die unzählig vielen Werte der Bogenlänge

$$s_n = s + nc \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots). \tag{9}$$

Besteht nun die Gleichung (4), so sind dem betrachteten Kurvenpunkte die Parameterwerte

$$v_n = e^{\frac{s+nc}{a}} \tag{10}$$

zugeordnet, die im reellen Gebiete alle von einander verschieden sind. Während also bei einer algebraischen Parameter-Darstellung (1) jedem Kurvenpunkte nur eine endliche Anzahl von Parameterwerten zugehört, würde es nach der Gleichung (6) deren unzählig viele geben müssen. Mithin führt die Annahme der Gleichung (4) für die Bogenlänge einer geschlossenen algebraischen Kurve auf eine Widerspruch.

So einleuchtend diese Schlussweise erscheint, so zeigt doch eine genauere Ueberlegung, dass sie unzureichend ist. Damit man erkennt, worin der Mangel liegt, möge dieselbe Schlussweise auf den Fall angewandt werden, dass eine geschlossene algebraische Kurve vom Umfang c algebraisch rektifizierbar ist, dass heisst, dass ihre Bogenlänge s bei der algebraischen Parameter-Darstellung (1) durch eine algebraische Funktion von v dargestellt wird. Dann ist umgekehrt v eine algebraische Funktion von s, etwa

$$v = \varphi(s), \tag{11}$$

und dem Kurvenpunkte (x, y) sind die Parameterwerte

$$v_n = \varphi(s + n c) \tag{12}$$

zugeordnet. Diese unzählig vielen Werte müssen bei einer algebraischen Kurve auf eine endliche Zahl zurückkommen, es muss mithin eine kleinste positive ganze Zahl α geben, sodass

$$\varphi(s) = \varphi(s + \alpha c) \tag{13}$$

ist, und $\varphi(s)$ ist daher eine periodische Funktion mit der primitiven Periode αc. Hieraus würde aber folgen, dass umgekehrt s eine unendlichvieldeutige Funktion von v ist, während s doch eine algebraische Funktion von v sein sollte, und damit ist man auf einen Widerspruch gekommen.

Dass hierin ein Fehlschluss steckt, zeigen die Beispiele der Astroide, der Evolute der Ellipse usw., denn dies sind geschlossene algebraische, algebraisch rektifizierbare Kurven. Wenn man bei diesen Kurven das Integral

$$\int \frac{d s}{d v} d v$$

über die ganze geschlossene Kurve erstreckt, so ergiebt sich als sein Wert Null, sodass man es mit geschlossenen Kurven vom Umfange Null zu tun hat. Ist aber $c = 0$, so verschwindet die Periode αc, und damit entfällt der vorher gefundene Widerspruch. Auf den hiermit bewiesenen, bemerkenswerten

Lehrsatz, dass *alle geschlossenen algebraischen, algebraisch rektifizierbaren Kurven den Umfang Null haben*, soll an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden.

Die vorhergehenden Darlegungen zeigen, dass Euler bei seinem Beweisversuche den Fall der geschlossenen Kurven vom Umfange Null übersehen hat. Da die betrachteten Kurven aus einer endlichen Anzahl von Stücken endlicher Bogenlänge zusammengesetzt sind, auf denen s beständig wächst oder beständig abnimmt, so kann zu dem Parameterwerte $v = 0$ kein Punkt der geschlossenen Kurve gehören. Aus dem Prinzip der analytischen Fortsetzung folgt aber, dass die Identität

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 = \frac{a^2}{v^2}, \tag{14}$$

die zunächst nur gilt, wenn v zu einem Kurvenpunkte gehört, für alle reellen Werte von v bestehen bleibt, dass sie also im Besonderen auch für kleine Werte von v erfüllt sein muss. Jetzt sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden.

Erstens kann zu kleinen Werten von v ein reeller Zweig der betrachteten algebraischen Kurve gehören, der dann notwendig ins Unendliche geht. Für ihn würde auch die Gleichung (4) gelten. Dass dies auf einen Widerspruch führt, wird im Folgenden gezeigt werden.

Zweitens kann das Funktionenpaar x, y für kleine Werte von v komplex werden, sodass diesen Werten kein reeller Zweig der betrachteten algebraischen Kurve entspricht. Dieser Fall bedarf noch weiterer Untersuchung und muss hier unentschieden bleiben.

5. Wenn die Kurve ins Unendliche geht, so muss sie sich, wie es einer algebraischen Kurve zukommt, von dem betrachteten Kurvenpunkte aus nach beiden Seiten hin erstrecken; auf der einen Seite wird s positive, auf der andern negative Werte haben.

Euler hat diesen Fall nicht zu erledigen gewusst. Er begnügt sich vielmehr damit zu erklären, nach einem Satze von J. Bernoulli würde man, sobald eine einzige Kurve der gesuchten Art bekannt ist, daraus unzählig viele andere derselben Art herleiten können (*). Damit könne man aber

(*) Für den Kreis ist diese Schlussweise nicht zulässig, bei diesem wird man vielmehr durch das Verfahren von Bernoulli immer wieder auf den Kreis zurückgeführt. Sobald man aber eine einzige vom Kreise verschiedene Kurve kennt, deren Bogenlänge durch die Formel (6) gegeben wird, erhält man daraus unzählig viele neue Kurven derselben Art.

schwer in Einklang zu bringen, dass es ihm trotz aller Bemühungen nicht gelungen sei, eine solche Kurve zu finden. Dies sei freilich kein strenger Beweis, er wolle vielmehr die Geometer anregen, einen solchen zu erbringen.

Die Lücke in EULERS Darlegungen lässt sich ausfüllen, indem man Reihenentwicklungen der algebraischen Funktionen zu Hilfe nimmt, ein Hilfsmittel, dass allerdings ausserhalb des EULERschen Gedankenkreises liegt.

Wenn die algebraische Kurve ins Unendliche geht, so wird s nach der einen Seite hin negative Werte annehmen, deren Betrag über alle Grenzen wächst, und gleichzeitig wird v unbegrenzt gegen Null abnehmen. Betrachtet man das Stück der Kurve, das zu kleinen Werten von v gehört, so werden nach den allgemeinen Sätzen über die Reihenentwicklungen algebraischer Funktionen die Koordinaten x und y durch Reihen dargestellt werden, die allgemein gesprochen nach steigenden Potenzen einer Wurzel aus v fortschreiten und nur eine endliche Anzahl von Gliedern mit negativen Exponenten enthalten; da die Kurve mit abnehmendem v ins Unendliche geht, muss jedoch mindestens ein solcher negativer Exponent auftreten.

Um die Darstellung zu vereinfachen werde

$$v = w^r \tag{15}$$

gesetzt und die ganze positive Zahl r so gewählt, dass sie sowohl den bei x als auch den bei y auftretenden Wurzelexponenten als Faktor enthält. Dann gehen x und y in algebraische Funktionen von w über, die sich in der Umgebung der Stelle $w = 0$ nach *ganzen* Potenzen w entwickeln lassen, wobei wiederum Potenzen mit negativen Exponenten nur in endlicher Zahl vorkommen, mindestens ein solcher aber vorhanden sein muss. Zu der algebraischen Parameter-Darstellung

$$x = f(w^r), \quad y = g(w^r) \tag{16}$$

gehört dann als Ausdruck der Bogenlänge s:

$$s = a \,.\, l\,n\,(w^r), \; = a\,r \,.\, l\,n\,w, \tag{17}$$

sodass bei der Darstellung durch den Parameter w die Form der Gleichung (7) erhalten bleibt.

Die Reihenentwicklungen von x und y nach Potenzen von w müssen so beschaffen sein, dass die Gleichung

$$\left(\frac{d\,x}{d\,w}\right)^2 + \left(\frac{d\,y}{d\,w}\right)^2 = \frac{a^2\,r^2}{w^2} \tag{18}$$

identisch erfüllt ist. Bei der weiteren Untersuchung empfiehlt es sich zu unterscheiden, ob die Entwicklungen von x und y mit verschiedenen Exponenten oder mit demselben Exponenten beginnen.

Ist im ersten Falle $-\alpha$ der kleinste Exponent, der in den Entwicklungen von x und y vorkommt, so entspringt aus dem betreffenden Gliede auf der linken Seite der Gleichung (18) ein Glied mit dem Exponenten $-2\alpha-2$, und $2\alpha+2$ wäre mindestens gleich 4, weil α mindestens gleich 1 sein muss. Das ist aber ein Widerspruch gegen die angenommene Gestalt $a^2 r^2 w^{-2}$ der rechten Seite.

Im zweiten Falle möge die Entwicklung von x mit dem Gliede $A w^{-\mu}$, die Entwicklung von y mit dem Gliede $B w^{-\mu}$ beginnen, wo A und B von Null verschiedene Konstanten sind; hierbei ist wiederum μ mindestens gleich 1. Alsdann wird die Entwicklung der linken Seite der Gleichung (18) mit dem Gliede

$$\mu^2 (A^2 + B^2) \,.\, w^{-2\mu-2}$$

beginnen, und da $2\mu+2$ mindestens gleich 4 ist, muss der Koeffizient dieser Potenz von w verschwinden. Da hierin im reellen Gebiet ein Widerspruch liegt, so ist auch die zweite Möglichkeit ausgeschlossen und der Beweis vollendet.

Gleichzeitig erkennt man, dass im komplexen Gebiete A^2+B^2 sehr wohl verschwinden kann, ohne dass A und B verschwinden. Dies trifft in der Tat bei der Parameter-Darstellung (5′) des Kreises zu, in der

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2} i \tag{19}$$

ist, und auf diese Art erklärt es sich, dass hier die Gleichung (18) identisch erfüllt ist.

Karlsruhe, im Oktober 1912.

Relazioni tra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di 1.ª specie di una varietà algebrica.

(*Di* FRANCESCO SEVERI, *a Padova.*)

Per quanto LAGRANGE si sia occupato di integrali di differenziali algebrici in una sola Memoria (*), che ha per iscopo principale la rettificazione dell'ellisse e dell'iperbole, non parrà fuor di luogo la pubblicazione in questo Volume, dedicato al sommo Analista (**), di un lavoro sugl'integrali appartenenti ad una superficie o varietà algebrica, tanto più che il concetto medesimo di forma differenziale *integrabile*, che giuoca in modo più o meno esplicito nella mia ricerca, potendosi esprimere mediante una condizione al contorno, si riattacca anche alle celebri Memorie di LAGRANGE sul calcolo delle variazioni.

Allorchè si conoscono sopra una superficie algebrica, due integrali semplici di 1.ª specie, funzionalmente indipendenti, si può formare, con NOETHER (***), un ben determinato integrale doppio di 1.ª specie, che deriva razionalmente da quelli.

(*) *Sur une nouvelle méthode de calcul intégral pour les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré* (Mémoires de l'Ac. royale de Turin, t. II, 1784-85; *Oeuvres,* t. II, p. 253).

(**) Un aneddoto, forse poco noto, che riconferma la grande considerazione in cui LAGRANGE era tenuto anche da'suoi contemporanei, è raccontato dal BRUNACCI. « Napoleone, essendo in Milano, volle sostenere al Brunacci, che la Francia primeggiava sopra l'Italia in forza di matematiche. Il Brunacci rispose francamente: *che se gli rendeva Lagrange — Italiano — si sarebbe battuto* ». (Ved. MORENA, *Vittorio Fossombroni economista*, Arezzo, tipografia Bellotti, 1896.)

(***) *Ueber die totalen algebraischen Differentialausdrücke*, Math. Ann., Bd. 29 (1886). — Vedi pure: PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Paris, Gauthier-Villars, t. I (1897), p. 139.

Nei più recenti sviluppi di geometria sopra una superficie, tale relazione tra integrali semplici e doppi, ha costituito spesso il punto di partenza di notevoli applicazioni.

In questo lavoro mi propongo di mostrare l'esistenza di legami analoghi tra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di 1.ª specie — doppi, tripli,..., k-pli — di una varietà algebrica W_k, a k dimensioni: legami che permettono appunto di costruire razionalmente, in modo immediato, un integrale s-plo di 1.ª specie, appena sieno noti s integrali semplici di 1.ª specie, funzionalmente indipendenti.

La via che si segue per stabilire la relazione di Noether sulle superficie, si può senza dubbio estendere, senza troppe difficoltà; e conduce ad un legame tra gl'integrali semplici e gl'integrali k-pli. Ma nei casi intermedi degli integrali doppi, tripli,..., $(k-1)$-pli, la via stessa è, per ora almeno, addirittura impraticabile, se non altro perchè non si sanno assegnare le *forme normali* di questi integrali intermedi.

Io dunque ho creduto opportuno di riprendere *ex-novo* la questione anche per le superficie, cercando di riattaccare la relazione di Noether a proprietà geometriche della superficie, piuttosto che a proprietà algoritmiche di certi polinomi, come nella trattazione consueta. Ed in tal modo ho ottenuto un procedimento estensibile agl'integrali multipli, di ogni rango, appartenenti ad una varietà.

Dimostro in primo luogo, per via sintetica, che una superficie F d'irregolarità $p > 0$, può sempre considerarsi come la trasformata razionale di una superficie Φ, *di eguale irregolarità,* appartenente alla varietà di Picard V_p, annessa ad F. Va eccettuato soltanto il caso in cui F possegga un fascio irrazionale di genere p: in tal caso F è la trasformata razionale di una curva di genere p, tracciata su V_p, e tutti gl'integrali semplici di 1.ª specie di F son funzioni di uno tra essi.

Indicando con u_1, u_2 due dei p integrali semplici di 1.ª specie di V_p, gli integrali doppi di 1.ª specie della varietà (che è abeliana) saran del tipo $\int\int d u_1 \, d u_2$; e gli uni e gli altri subordineranno su Φ integrali semplici e doppi, i quali alla lor volta si trasformano in integrali analoghi di F. Anzi, dal momento che Φ, F hanno la stessa irregolarità, *tutti* gl'integrali semplici di 1.ª specie di F, si ottengono nel modo indicato dagl'integrali semplici u di V_p (mentre lo stesso non potrebbe dirsi degl'integrali doppi).

Eseguendo la sostituzione razionale che fa passare da Φ ad F, ne segue subito che il determinante jacobiano di due integrali semplici di 1.ª specie della F — supposta immersa in S_3 e di equazione $F(x, y, z) = 0$ — rispetto alle due variabili indipendenti x, y, è la funzione integranda di un integrale doppio di 1.ª specie. Ed è questo appunto il legame scoperto da NOETHER.

Estendo poi alle varietà il procedimento sviluppato per le superficie, provando prima che la data W_k, d'irregolarità superficiale $p > 0$, può considerarsi come la trasformata razionale di una varietà Φ_k, di eguale irregolarità superficiale, tracciata sulla varietà di PICARD V_p, relativa a W_k; a meno che non accada che W_k contenga un sistema ∞^{k-i} $(1 \leq i \leq k-1)$ d'indice 1, di varietà M_i, avente la stessa irregolarità bidimensionale p. Nel qual caso W_k è la trasformata razionale di una Φ_{k-i}, d'irregolarità superficiale p, tracciata su V_p e $k-i+1$ integrali semplici di 1.ª specie di W_k son sempre funzionalmente dipendenti.

Da ciò, tenendo conto che gl'integrali doppi, tripli, ..., di 1.ª specie di V_p, son del tipo:

$$\iint d\,u_1\,d\,u_2, \quad \iiint d\,u_1\,d\,u_2\,d\,u_3, \ldots,$$

ove $u_1, u_2, \ldots$, sono i p integrali semplici di 1.ª specie, deduco la costruzione razionale di integrali doppi, tripli, ..., di 1.ª specie della W_k, a partire da' suoi integrali semplici.

Il teorema geometrico che pongo a fondamento della ricerca, è già di per sè interessante, in quanto da esso possono trarsi varie conseguenze, tra le quali cito, a titolo d'esempio, questa: una superficie irregolare non può possedere un'infinità (neanche discontinua) di curve razionali, senza essere trasformabile birazionalmente in una rigata (irrazionale). La proprietà analoga non sussiste per le superficie regolari.

1. **Caratterizzazione d'una superficie F d'irregolarità $p > 0$, che contenga un fascio di genere p, mediante i sistemi continui ∞^1 di curve tracciate su F.** Supponiamo anzitutto che sulla F esista un sistema algebrico ∞^1, Σ, di curve algebriche A non equivalenti, tale che fra le ∞^2 curve B costituite dalle A passanti pei singoli punti di F, ve ne sieno ∞^1 equivalenti ad una prefissata B, che provenga da un punto generico P di F. Allora i punti P relativi alle ∞^1 B equivalenti tra loro, riempiono una curva algebrica C, variabile in un fascio, necessariamente irrazionale, perchè altrimenti (*) le B, e quindi le A, sarebbero a due a due equivalenti.

(*) Cfr. SEVERI, a) *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche.* Questi Annali, (3), t. XII, (1905), n.ⁱ 1, 6, ed anche: b) *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà.* Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti, t. LXV (1906).

Prendiamo ora su F un sistema continuo completo $\{A\}$, di curve A, costituito da ∞^p sistemi lineari distinti, e supponiamo che, scelto *comunque* entro $\{A\}$ un sistema algebrico ∞^1, Σ, esso goda *sempre* della proprietà sopra indicata. Esisterà allora un fascio irrazionale $\{C\}$, tale che le curve di Σ passanti per un punto P di una C, segheranno ivi un gruppo, il quale, al variare di P su C, si muoverà entro una serie lineare. Donde segue (*) che le A di Σ tagliano su una C qualunque gruppi equivalenti, cioè (**) che esse differiscono per curve C.

Nulla ci vieta di supporre che il sistema Σ possa variare entro $\{A\}$ in una serie algebrica di sistemi analoghi, che invadano complessivamente tutto $\{A\}$, e che contengano una curva fissa A_0. Ciò invero equivale ad affermare che la varietà irriducibile V_p, i cui punti rappresentano gli ∞^p sistemi lineari $\{A\}$, può descriversi tutta mediante una famiglia algebrica di curve (algebriche) passanti per un punto di V_p. In realtà ad ognuna delle curve di quella famiglia, risponderebbe su F non un sistema ∞^1 di curve A, ma una serie ∞^1 di sistemi lineari completi $|A|$. Poichè i sistemi generici $|A|$ hanno la stessa dimensione r, fissati su F r punti generici, si staccherà da ogni $|A|$ una curva e così ci ridurremo a sistemi ∞^1, Σ, di curve A.

Quando Σ descrive il sistema continuo $\{A\}$, il fascio irrazionale $\{C\}$ non può variare, perchè altrimenti descriverebbe un sistema continuo più ampio, mentre $\{C\}$ è già completo. Sopra ogni C le curve di un sistema Σ segano una serie di gruppi equivalenti al gruppo fisso $(A_0\,C)$; cioè tutte le curve di $\{A\}$ staccano sopra una C gruppi equivalenti, ed esse, pertanto, differiscono a due a due per curve C.

Ciò significa insomma che i sistemi $\{A\}$ si ottengono tutti da uno generico di essi, e sia $|A_0|$, aggiungendo e togliendo gruppi di un egual numero ν di curve C.

Osserviamo ora che se si sostituisce ad uno di questi due gruppi di ν curve C, un gruppo equivalente (entro l'ente $\infty^1\{C\}$), il sistema $|A|$, che si ottiene da $|A_0|$, non s'altera, per guisa che i sistemi distinti $|A|$ risultano tanti quante le serie lineari distinte d'ordine ν, entro l'ente $\infty^1\{C\}$. Sia π il genere del fascio. Se fosse $\nu < \pi$, le suddette serie d'ordine ν sarebbero ∞^ν,

(*) Loc. cit. a pag. 203 *a*) n. 1. Vedi pure la dimostrazione geometrica di Castelnuovo, *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* [Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, (5), t. XV, (1906)].

(**) Loc. cit. a pag. 203 *a*) n. 6,

cioè sarebbe $p < \pi$, il che è assurdo. È dunque $\nu \geq \pi$ e le serie d'ordine ν, sono ∞^{π}. Ne segue $p = \pi$.

La proprietà s'inverte subito. Presa infatti sulla F d'irregolarità p, una curva A d'ordine maggiore delle eventuali curve canoniche di F (non depurate dalle curve eccezionali) e di dimensione virtuale non negativa, potrà sempre considerarsi il sistema lineare $|A + H - K|$ (*), ove H, K siano due qualunque gruppi di p curve C di un fascio di genere p, esistente su F. Tenendo fisso H e facendo variare K, si otterranno così tutti gli ∞^p sistemi lineari costituenti il sistema continuo completo $\{A\}$, il che significa che le A tagliano gruppi a due a due equivalenti sopra ogni C. Ne deriva che, preso entro $\{A\}$ un sistema ∞^1, Σ, di curve non equivalenti, se si chiamano omologhi un punto di una fissata C ed una curva di Σ, quando si appartengono, la corrispondenza tra i due enti ∞^1 C, Σ, è a valenza zero in un senso e quindi (**) anche nel senso opposto; cioè i gruppi di curve A passanti pei singoli punti di C sono equivalenti entro l'ente Σ, e sono perciò equivalenti, anche come curve di F.

Possiamo pertanto enunciare:

I. *Sopra una superficie F d'irregolarità $p > 0$, le due proprietà:*

1) *Ogni sistema ∞^1 di curve A, non equivalenti, tolte da un sistema continuo completo di ∞^p sistemi lineari, è tale che la curva composta dalle A per un punto generico di F, è equivalente ad ∞^1 curve analoghe;*

2) *La superficie contiene un fascio irrazionale di genere p;*

sono l'una conseguenza dell'altra.

2. **Trasformazione di una superficie irregolare F in un'altra appartenente alla varietà picardiana di F.** Sia ora una superficie d'irregolarità $p > 1$, non contenente un fascio di genere p (***). Allora considerando su F un sistema completo $\{A\}$ di ∞^p sistemi lineari (non composti con un'involuzione di F), un generico sistema $\Sigma\,\infty^1$, formato da curve A, non equivalenti, *non* godrà della proprietà 1) dell'enunciato precedente; e poichè neppur può darsi che sieno equivalenti a due a due le ∞^2 curve B formate colle $m\,(> 1)$ A uscenti dai punti di F (****), accadrà che ogni B sarà equivalente ad un numero finito $n \geq 1$ di curve analoghe. Indicheremo con Σ' il sistema delle ∞^2 B.

(*) SEVERI, *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica.* Rend. del R. Ist. Lombardo, (2), t. XXXVIII (1905), p. 864.

(**) *Il teorema d'Abel*, ecc. (citato), n. 2.

(***) L'ipotesi $p = 1$ rientra nell'analisi del numero precedente, perchè in tal caso F possiede sempre un fascio ellittico di curve.

(****) *Il teorema d'Abel*, ecc., n. 9, *c*).

Se la dimensione virtuale di un sistema lineare $|A|$ non è negativa, risulterà *a fortiori* non negativa la dimensione virtuale di un sistema lineare $|B|$, perchè essa uguaglia quella di $|mA|$, onde (*) i $|B|$ apparterranno ad un sistema continuo completo contenente ∞^p sistemi lineari distinti.

Consideriamo la varietà V_p di PICARD, i cui punti rappresentano i sistemi $|B|$. Alle curve B di Σ' o meglio ai sistemi $|B|$ da esse individuati, risponde in V una *superficie* Φ, la quale risulta riferita razionalmente ad F, ad ogni punto di F rispondendo una B di Σ' e quindi un punto di Φ, mentre ogni punto di Φ proviene dagli n punti di F relativi a curve B equivalenti tra loro. Si conclude che:

II. *Una superficie F d'irregolarità $p > 0$ o contiene un fascio di genere p, oppure può considerarsi come la trasformata razionale di una superficie, di eguale irregolarità, appartenente alla varietà picardiana di F* (**).

L'affermazione, inclusa in quest'enunciato, che la Φ abbia la stessa irregolarità di F, verrà subito giustificata nelle linee seguenti.

3. **Deduzione dell'identità di Noether.** Conserviamo ancora le ipotesi e le notazioni del numero precedente, e osserviamo, in primo luogo, che gli integrali semplici di 1.ª specie, $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_p$, appartenenti a V, staccano su Φ altrettanti integrali di 1.ª specie linearmente *indipendenti*, perchè in caso contrario Φ apparterrebbe ad una varietà invariante per un sottogruppo (algebrico) del gruppo abeliano formato dalle ∞^p trasformazioni birazionali che mutano in sè V_p, e quindi il sistema Σ di curve A, dal quale siamo partiti, sarebbe particolare entro $|A|$ (***).

I p integrali che così s'ottengono su Φ, mediante la sostituzione razionale tra Φ, F, si mutano nei p integrali distinti di 1.ª specie della F: $I_1, I_2, \ldots, I_p$. Alla lor volta i $\binom{p}{2}$ integrali doppi di 1.ª specie appartenenti a V, che son del tipo (****)

$$\iint d\,u_1\, d\,u_2, \tag{1}$$

(*) SEVERI, *Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Atti della R. Acc. di Torino, t. XL (1905), n. 6.

(**) Pel caso $p = 2$, cfr. CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, (5), t. XIV (1905), p. 661.

(***) È questa un'affermazione pressochè intuitiva, la quale del resto trovasi completamente giustificata, sotto altra forma, in CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici*, ecc., n. 12, p. 657.

(****) Cfr., p. es., SEVERI, *Sulle superficie che rappresentano le coppie dei punti di una curva algebrica.* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, t. XXXVIII (1903). n. 9.

staccano su Φ degli integrali doppi di 1.ª specie, che però posson ridursi a costanti o essere linearmente dipendenti. Comunque sia gl'integrali doppi che così s'ottengono su Φ, si trasformano razionalmente in altrettanti integrali di F, ciascuno dei quali, appunto perchè proviene, mediante una sostituzione razionale, da un integrale del tipo (1), avrà la forma:

$$\iint \frac{D(I_1, I_2)}{D(x, y)} d\,x\,d\,y,$$

ove si supponga che

$$F(x, y, z) = 0$$

sia l'equazione della F (in S_3) e $\frac{D(I_1, I_2)}{D(x, y)}$ denoti il determinante funzionale di I_1, I_2 rispetto alle variabili indipendenti x, y.

Scrivendo gl'integrali I_1, I_2 sotto la forma

$$I_1 = \int \frac{A_1\,d\,x + B_1\,d\,y}{F'_z}, \quad I_2 = \int \frac{A_2\,d\,x + B_2\,d\,y}{F'_z},$$

ove $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, $A_2 = 0$, $B_2 = 0$ son superficie d'ordine $n - 2$, aggiunte alla F, d'ordine n, e soddisfacenti alle debite condizioni (*), perveniamo dunque alla relazione

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = F'_z\,Q,$$

ove $Q = 0$ è una superficie d'ordine $n - 4$ aggiunta ad F.

Resta così dimostrata, in modo sintetico, la ben nota relazione di Noether.

È appena necessario d'avvertire che questa relazione vale anche nel caso escluso dal ragionamento precedente, cioè quando F contiene un fascio di genere p, poichè in tal caso gl'integrali semplici di F son funzioni l'uno dell'altro e si ha identicamente:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0,$$

che è un caso particolare della precedente relazione (Q è identicamente nullo).

4. Alcune conseguenze del teorema II. Prima di passare ad estendere la relazione stessa alle varietà superiori, rileviamo in modo esplicito qualche interessante conseguenza del teorema II.

(*) SEVERI, *Sur les intégrales simples de première espèce attachées à une surface algébrique.* Comptes rendus, t. 152 (1911), p. 1079.

Poichè una varietà di Picard non contiene curve razionali, neppur la Φ, di cui si parla al n. 2, potrà possedere curve razionali e quindi F potrà contenere al più un numero finito di curve razionali provenienti dagli eventuali punti fondamentali della trasformazione tra Φ, F.

Che se poi F possiede un fascio di genere p, è evidente che ogni curva razionale di F è fondamentale pel fascio.

Consideriamo ora una F, d'irregolarità $p>0$, possedente un'infinità (anche discontinua) di curve razionali. Non potendo allora esistere la superficie Φ, di cui sopra, F dovrà contenere un fascio di genere p. La generica curva C di questo fascio potrà supporsi irriducibile, perchè altrimenti le C sarebbero composte colle curve di un fascio di genere π, e da un lato, per la formola di Zeuthen, non potrebbe essere $p>\pi$, e d'altro lato, pel fatto che p è l'irregolarità di F, non potrebbe essere $\pi>p$. Cosicchè risulterebbe $\pi=p=1$ e, ad ogni modo, la superficie F, d'irregolarità 1, conterrebbe un fascio irriducibile di genere uguale all'irregolarità.

Ciò premesso, suppongasi, se è possibile, che il genere delle C sia $\rho>0$. Allora nel fascio vi saranno infinite curve riducibili, contenenti come parti le curve razionali di F. Ma ciò è assurdo, perchè un fascio irriducibile possiede soltanto un numero finito ($\geqq 0$) di curve riducibili.

Si conclude pertanto che, nel caso in esame, F contiene un fascio di genere p di curve razionali, e quindi (*) ch'essa è birazionalmente identica ad una rigata. Riassumendo:

Una superficie d'irregolarità $p>0$ che contenga una curva razionale (*non eccezionale*) *o possiede un'involuzione d'irregolarità p o un fascio di genere p.*

Una superficie d'irregolarità $p>0$, che contenga una infinità (*anche discontinua*) *di curve razionali, è trasformabile birazionalmente in una rigata* (**).

(*) Enriques, *Sulle superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali.* Math. Annalen, Bd. 52 (1899), p. 449.

(**) Nel caso in cui le curve razionali formino un sistema continuo, la cosa era nota. Vedi Castelnuovo-Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche.* Questi Annali (3), t. VI (1901), n. 17. Dal teorema del testo segue in particolare il teorema di Castelnuovo-Enriques, che *una superficie con infinite curve eccezionali, appartiene alla classe delle rigate* (razionali o no). Basta infatti presupporre il teorema di Castelnuovo, circa le condizioni di razionalità d'una superficie ($p_a=P_2=0$) per dedurre subito il teorema riferito, anche per le superficie regolari (il teorema del testo risolvendo la questione soltanto per le superficie irregolari). E invero una superficie regolare con infinite curve eccezionali ha necessariamente tutti i generi nulli.

Per una superficie regolare il fatto analogo non si verifica, se non quando le infinite curve razionali sieno eccezionali. Per es. una superficie del 4.° ordine possedente una conica, possiede in conseguenza infinite curve razionali, e non è trasformabile in una rigata.

Osserviamo inoltre che se F, cioè la varietà di PICARD V_p e quindi anche la superficie Φ, non posseggono integrali riducibili, sulla Φ non possono esistere curve in cui i p integrali semplici di 1.ª specie sieno linearmente dipendenti (*): donde segue che F non potrà contenere curve di genere $\pi < p$, all'infuori delle eventuali curve isolate fondamentali per l'involuzione J_n, i cui punti rispondono a quelli di Φ. E ciò perchè ad una curva di genere $\pi < p$ di F, che non fosse fondamentale per J_n, risponderebbe su Φ una curva di genere $\rho \leq \pi$, e sulla curva stessa i p integrali semplici di Φ non potrebbero esser indipendenti.

Nel caso poi in cui F possegga un fascio di genere p, è ben chiaro che ogni curva di genere $\pi < p$, tracciata su F, è fondamentale pel fascio e quindi isolata. Si conclude che:

Sopra una superficie F d'irregolarità $p > 0$, che non possegga sistemi d'integrali semplici di 1.ª specie riducibili, il genere di una curva tracciata su F e variabile in un sistema continuo, non può scendere al disotto di p. E qualora esistano curve (isolate e non eccezionali) di genere $\pi < p$, la superficie contiene in conseguenza o un'involuzione d'irregolarità p o un fascio di genere p.

5. **Caratterizzazione d'una varietà irregolare che contenga un sistema d'indice 1, della stessa irregolarità, di varietà subordinate.** Il ragionamento del n. 1 si estende facilmente. Se sopra una varietà irriducibile W_k, a k dimensioni, d'irregolarità superficiale $p > 0$, esiste un sistema algebrico ∞^1, Σ, di varietà a $k-1$ dimensioni, A, tale che fra le ∞^k varietà B formate dalle A passanti pei singoli punti di W, ve ne sieno ∞^i $(1 \leq i \leq k-1)$ equivalenti ad una di esse, che provenga da un punto P di W, i punti P relativi alle B equivalenti, riempiono una varietà C ad i dimensioni, variabile in un sistema ∞^{k-i} d'indice 1.

Supponiamo che la proprietà stessa sia verificata allorquando Σ sia scelto comunque entro un sistema algebrico $\{A\}$, formato da ∞^p sistemi lineari distinti. Allora, ripetendo un ragionamento che ho già esposto altrove (**), si vede

(*) CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici*, ecc. (citato), p. 594.

(**) *Sulle superficie e varietà algebriche irregolari di genere geometrico nullo.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, (5), t. XX (1911), n. 6.

che le varietà A segano varietà equivalenti sopra le ∞^{k-i} varietà C, di dimensione i, di un sistema Γ d'indice 1, talchè esse differiscono per varietà composte mediante le C (*). E si conclude, come nella mia Nota lincea citata, che il sistema Γ, considerato come varietà di elementi C, ha la stessa irregolarità p di W_k (si dovrà dire che p è il genere di Γ, quando $i = k - 1$).

La proprietà s'inverte come al n. 1, con pochi cambiamenti. Basta prendere sulla W_k, d'irregolarità p, un sistema continuo $\{A\}$ costituito da ∞^p sistemi lineari e contenente parzialmente tutto un sistema $\{H\}$ composto mediante le C e costituito pure da ∞^p sistemi lineari. A tal uopo si potrà scegliere p. es. come sistema $\{A\}$ quello determinato dalle sezioni di W_k colle forme d'un ordine abbastanza alto, rispetto all'ordine delle H prefissate. Dette allora H_0, H_1 due particolari H, esisterà il sistema lineare $|A + H_0 - H_1|$ e, al variare di $|H_1|$ in $\{H\}$, questo sistema lineare descriverà tutto il sistema $\{A\}$, le cui varietà verranno pertanto a segare sulle C varietà equivalenti.

Si conclude che:

III. *Per una varietà W_k d'irregolarità bidimensionale $p > 0$, le due proprietà:*

1) *Ogni sistema ∞^1 di varietà A, a $k - 1$ dimensioni, non equivalenti, tolto da un sistema continuo completo di ∞^p sistemi lineari, tracciati su W, è tale che la varietà costituita dalla A per un punto generico, è equivalente ad ∞^i $(1 \leq i \leq k - 1)$ varietà analoghe.*

2) *La W contiene un sistema ∞^{k-i} d'indice 1 di varietà ad i dimensioni, avente anch'esso l'irregolarità bidimensionale p;*

sono conseguenza l'una dell'altra.

6. Trasformazione razionale d'una varietà irregolare W_k in un'altra appartenente alla varietà picardiana di W_k. Escludiamo che la W, di irregolarità $p \geq k$, contenga un sistema come quello indicato in III 2) (**). Si potrà allora estendere parola per parola il ragionamento del n. 2, con questa sola avvertenza: che per concludere, com'è necessario, che il sistema completo $\{B\}$ contiene ∞^p sistemi lineari distinti, basterà prendere come sistema $\{A\}$ quello che contiene totalmente le sezioni di W colle forme di un ordine così alto, che i sistemi continui determinati da esse e dalle sezioni colle forme degli ordini successivi, sieno tutti costituiti da ∞^p sistemi lineari.

(*) SEVERI, *Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti di una curva algebrica o tra curve di una superficie.* Atti del R. Ist. Veneto, t. LXX (1911), n. 6.

(**) Se $p < k$, si ha necessariamente una W_k soddisfacente alle proprietà 1) 2) del teor. III. Cfr. *Sulle superficie e varietà algebriche irregolari*, ecc. (citato), n. 6.

Si potrà pertanto enunciare:

IV. *Una varietà W_k d'irregolarità bidimensionale $p > 0$ o contiene un sistema ∞^{k-i}, d'indice 1, di varietà ad i dimensioni, avente anch'esso l'irregolarità bidimensionale p $(1 \leq i \leq k-1)$, oppure può considerarsi come trasformata razionale di una varietà Φ, della stessa irregolarità superficiale, e appartenente alla varietà picardiana di W. Si verifica sempre la prima parte dell'alternativa, quando $p < k$.*

7. Relazioni tra integrali semplici e multipli di 1.ª specie di una varietà. Quando W è birazionalmente identica ad una varietà Φ, a k dimensioni, tracciata sulla varietà di Picard V_p, relativa a W, ogni integrale t-plo $(t \leq k)$ di 1.ª specie di V_p, che è del tipo

$$\int d\,u_1\,d\,u_2 \dots d\,u_t, \tag{2}$$

ove $u_1, u_2, \dots, u_p$ sono i p integrali semplici di 1.ª specie appartenente a V, stacca su Φ un integrale di 1.ª specie (in particolare costante). Per cui se

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = 0$$

è l'equazione di W_k (nello S_{k+1}) e si prendono come variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_k$, mediante la sostituzione razionale tra Φ e W, da (2) ricaveremo un integrale t-plo di 1.ª specie di W:

$$J = \int \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_t} \frac{D(I_1, I_2, \dots, I_t)}{D(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \dots, x_{\lambda_t})}\, d\,x_{\lambda_1}\, d\,x_{\lambda_2} \dots d\,x_{\lambda_t},$$

ove $I_1, I_2, \dots, I_p$ sono i p integrali semplici di 1.ª specie di W — che corrispondono agli integrali $u_1, u_2, \dots, u_p$ di V_p — $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_t$ rappresenta una disposizione semplice degli indici $1, 2, \dots, k$ e $\dfrac{D(I_1, I_2, \dots, I_t)}{D(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \dots, x_{\lambda_t})}$ è il determinante funzionale delle $I_1, \dots, I_t$ rispetto alle variabili indipendenti $x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_t}$.

Ponendo:

$$I_h = \int \sum_{j=1}^{k} A_{hj}\, d\,x_j \quad (h = 1, 2, \dots, p),$$

verrà:

$$J = \int \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_t} \begin{vmatrix} A_{1\lambda_1} & A_{1\lambda_2} & \dots & A_{1\lambda_t} \\ A_{2\lambda_1} & A_{2\lambda_2} & \dots & A_{2\lambda_t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{t\lambda_1} & A_{t\lambda_2} & \dots & A_{t\lambda_t} \end{vmatrix} d\,x_{\lambda_1}\, d\,x_{\lambda_2} \dots d\,x_{\lambda_t}. \tag{3}$$

Agl'integrali semplici di 1.ª specie appartenenti a W, restano pertanto associati degli integrali doppi, tripli, ..., k-pli di 1.ª specie, che si costruiscono razionalmente, in modo ben determinato, a partire dagl'integrali semplici. Un integrale del tipo (3) riducesi ad una costante allora e solo allora che i t integrali $I_1, I_2, \ldots I_t$, considerati come funzioni delle $x_1, x_2, \ldots, x_k$, son fra loro funzionalmente dipendenti.

8. Lo stesso modo di costruzione indicato per gl'integrali multipli di 1.ª specie vale anche nel caso, che ora vogliamo esaminare, in cui W contenga un sistema $\Gamma\,\infty^l$ ($l = k - i$, $1 \leq i \leq k - 1$), d'indice 1, d'irregolarità bidimensionale p, costituito da varietà C ad i dimensioni.

Anzitutto in quest'ipotesi si vede agevolmente, come ho mostrato al n. 8 della mia Nota lincea citata, che $l+1$ integrali semplici di 1.ª specie di W son sempre funzionalmente dipendenti, eccettuato il caso ovvio in cui, essendo $p < k$, W contiene un sistema $\Gamma\,\infty^p$ ($l = p$), d'irregolarità bidimensionale p, formato da varietà a $k - p$ dimensioni. Nel caso generale si può dire senz'altro che l'integrale (3), per $t \geq l + 1$, è di 1.ª specie (è anzi una costante); nel caso eccezionale d'altra parte è sempre $t \leq l$. Cosicchè, per dimostrare in ogni caso che un integrale del tipo (3) è sempre di 1.ª specie, basterà che ci limitiamo all'ipotesi $t \leq l$.

Diciamo V_l una varietà i cui punti rappresentino birazionalmente le varietà C di Γ e supponiamo d'avere stabilito la relazione in questione per tutte le varietà irregolari di dimensione $< k$, e quindi in particolare per V_l.

Sieno

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) = 0, \quad \varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{l+1}) = 0$$

le equazioni di W_k, V_l, che supponiamo rispettivamente immerse in S_{k+1} e in S_{l+1}. Gl'integrali semplici di 1.ª specie di W_k proverranno *tutti* dagl'integrali semplici

$$\int \sum_{j=1}^{l} B_{sj}\, d\,\xi_j \quad (s = 1, 2, \ldots, p) \tag{4}$$

di 1.ª specie di V_l, mediante la sostituzione razionale:

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, \ldots, x_{k+1}), \ldots, \ \xi_{l+1} = \xi_{l+1}(x_1, \ldots, x_{k+1}), \tag{5}$$

che lega W e V. E similmente dagl'integrali doppi di 1.ª specie di V si otterranno integrali doppi di 1.ª specie (ma non necessariamente tutti quelli di W_k); e così per gli altri integrali multipli.

Consideriamo l'integrale t-plo ($t \leq l$) di 1.ª specie di V_l:

$$\int \sum_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_t} \begin{vmatrix} B_{1\mu_1} B_{1\mu_2} \ldots B_{1\mu_t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{t\mu_1} \ldots\ldots\ldots B_{t\mu_t} \end{vmatrix} d\xi_{\mu_1} d\xi_{\mu_2} \ldots d\xi_{\mu_t}. \tag{6}$$

Operando colla sostituzione (5), questo si trasformerà nell'integrale di W_k:

$$J = \int \sum_{\mu_1\ldots\mu_t} \begin{vmatrix} B_{1\mu_1} \ldots B_{1\mu_t} \\ \ldots\ldots\ldots \\ B_{t\mu_t} \ldots B_{t\mu_t} \end{vmatrix} \sum_{\lambda_1\ldots\lambda_t} \frac{D(\xi_{\mu_1}, \xi_{\mu_2}, \ldots, \xi_{\mu_t})}{D(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_t})} d x_{\lambda_1} d x_{\lambda_2} \ldots d x_{\lambda_t} =$$

$$= \int \sum_{\lambda_1\ldots\lambda_t} \begin{Vmatrix} B_{11} B_{12} \ldots B_{1l} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{t1} B_{t2} \ldots B_{tl} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{d\xi_1}{d x_{\lambda_1}} \ldots \frac{d\xi_l}{d x_{\lambda_1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d\xi_1}{d x_{\lambda_t}} \ldots \frac{d\xi_l}{d x_{\lambda_t}} \end{Vmatrix} d x_{\lambda_1} d x_{\lambda_2} d x_{\lambda_t}.$$

Facendo il prodotto per orizzontali delle due matrici, verrà:

$$J = \int \sum_{\lambda_1\ldots\lambda_t} \begin{vmatrix} A_{1\lambda_1} A_{1\lambda_2} \ldots A_{1\lambda_t} \\ \ldots, \ldots\ldots \\ A_{t\lambda_1} A_{t\lambda_2} \ldots A_{t\lambda_t} \end{vmatrix} d x_{\lambda_1} d x_{\lambda_2} d x_{\lambda_t},$$

ove si è posto:

$$A_{hr} = \sum_{s=1}^{l} B_{hs} \frac{d\xi_s}{d x_r}.$$

E poichè gl'integrali semplici

$$\int \sum_{j=1}^{k} A_{hj}\, d x_j \quad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

sono, come si è detto, tutti gl'integrali semplici di 1.ª specie di W_k, possiamo infine enunciare il teorema generale:

V. *Sieno*

$$\int \sum_{j=1}^{k} A_{hj}\, d x_j \quad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

gl'integrali semplici di 1.ª specie, appartenenti ad una varietà W a k dimensioni, d'irregolarità superficiale $p > 0$. ***Allora a W appartengono in conseguenza alcuni integrali doppi, tripli,..., k-pli di 1.ª specie, che si formano razio-***

nalmente a partire dagl'integrali suddetti. Quest'integrali multipli son del tipo:

$$\int \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_t} \begin{vmatrix} A_{1\lambda_1} \ldots A_{1\lambda_t} \\ \cdots\cdots \\ A_{t\lambda_1} \ldots A_{t\lambda_t} \end{vmatrix} d\,x_{\lambda_1}\, d\,x_{\lambda_2} \ldots d\,x_{\lambda_t} \quad (t = 2, \ldots, k),$$

ove $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_t$ *è una disposizione semplice degli indici* 1, 2, ..., *k*.

9. **Verificazione diretta delle condizioni d'integrabilità.** Il fatto che gl'integrali multipli costruiti secondo il teor. V, soddisfacciano alle condizioni d'integrabilità assegnate da Poincaré (*), è senz'altro implicitamente racchiuso nel teorema dimostrato. Ma val la pena di osservare che questo fatto è indipendente dall'algebricità della questione. Si può cioè stabilire in generale che:

Se le p forme differenziali lineari, linearmente indipendenti

$$d\,u_1 = \sum_{r=1}^{k} A_{1r}\, d\,x_r, \ldots, d\,u_p = \sum_{r=1}^{k} A_{pr}\, d\,x_r,$$

ove le A son funzioni analitiche qualunque delle variabili indipendenti x_1, $x_2, \ldots, x_k$, *soddisfanno alle condizioni d'integrabilità, lo stesso accade per le forme del tipo*

$$\sum_{r,s} \frac{D(u_1, u_2)}{D(x_r, x_s)}\, d\,x_r\, d\,x_s, \quad \sum_{r,s,t} \frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x_r, x_s, x_t)}\, d\,x_r\, d\,x_s\, d\,x_t, \text{ ecc.}$$

Per brevità espongo la dimostrazione nel caso della forma quadratica

$$\sum_{r,s} \frac{D(u_1, u_2)}{D(x_r, x_s)}\, d\,x_r\, d\,x_s, \tag{7}$$

giacchè anche in generale il ragionamento corre allo stesso modo.

Osserviamo anzitutto che le condizioni d'integrabilità sono invarianti di fronte ad un cangiamento di variabili. Per convincersene basta p. es. riflettere ch'esse equivalgono ad affermare che il valore dell'integrale

$$\int\!\!\int \sum_{r,s} \frac{D(u_1, u_2)}{D(x_r, x_s)}\, d\,x_r\, d\,x_s \tag{8}$$

si conserva immutato per una variazione continua della superficie d'integrazione (per modo da non traversare punti singolari delle *A*), fermo restando il contorno della superficie stessa.

(*) *Acta mathematica*, t. IX.

Possiamo supporre che le u_1, u_2 sieno funzionalmente indipendenti, giacchè altrimenti si cadrebbe nel caso ovvio in cui l'integrale (8) riducesi ad una costante. Sarà dunque p. es. non identicamente nullo:

$$\frac{D(u_1, u_2)}{D(x_1, x_2)} = \frac{D(u_1, u_2, x_3, \ldots, x_k)}{D(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)},$$

e quindi si potrà passare dalle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_k$ alle $u_1, u_2, x_3, \ldots, x_k$. Con ciò la forma quadratica (7) si muta nella $d u_1 d u_2$, per cui sono evidentemente soddisfatte le condizioni d'integrabilità (*).

In forza dell'invarianza di queste condizioni di fronte ai cangiamenti di variabili, risultano soddisfatte le condizioni stesse anche per la forma (7).

Osservazione. Ciò vale nell'intorno di un punto generico del campo di esistenza delle A. Quando le A — come nel caso del teor. V — son funzioni razionali del punto corrente sopra una varietà algebrica irriducibile W, a k dimensioni, ne segue agevolmente che le condizioni d'integrabilità son soddisfatte in ogni punto di W. Infatti esse si esprimono uguagliando a zero certe funzioni razionali, delle quali, per quanto precede, si sa già che posseggono ∞^k zeri (complessi) intorno ad un punto generico di W. Le dette funzioni razionali risultano perciò identicamente nulle su tutta la varietà.

Padova, 15 dicembre 1912.

(*) Non occorre neppure di scrivere in modo esplicito queste condizioni. Basta osservare soltanto ch'esse s'ottengono uguagliando a zero certe espressioni composte linearmente mediante le derivate dei coefficienti della forma.

Alcuni nuovi problemi di calcolo delle variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali.

(*Di* Guido Fubini, *a Torino.*)

I problemi di calcolo delle variazioni, di cui si occupa il presente lavoro, sono tanto una generalizzazione dei problemi classici, quanto di quei problemi di cui si è occupato l'Holmgren nell'*Arkiv* di Stoccolma (1906), e l'A. stesso negli *Annali di Matematica* e nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* (1910).

Lo studio di questi nuovi problemi apre tutto un nuovo indirizzo di ricerche, in cui sarebbe, secondo me, del massimo interesse il trovare effettivamente condizioni necessarie e sufficienti per un massimo o per un minimo, seguendo l'ordine di studii, che è stato aperto da Legendre, Jacobi, Weierstrass, Hilbert. Ma non può essere questo lo scopo di un primo lavoro, il quale, più che altro, deve essere dedicato a dimostrare con esempi particolari che i nuovi problemi non sono scelti a caso, ma che il loro studio getta nuova luce in altri campi dell'analisi matematica.

E noi proveremo appunto che le nostre ricerche conducono per via semplice ed uniforme a risultati nuovi nel campo delle equazioni integro-differenziali: risultati che non sembrano facilmente conseguibili coi metodi finora applicati alle ordinarie equazioni del Fredholm.

La Memoria si chiude con alcuni teoremi di grande generalità sulle funzioni limiti di una classe di funzioni: teoremi che potranno semplificare tutte le ricerche di natura affine a quelle qui svolte: ciò che il lettore potrà facilmente riconoscere, applicandoli al problema di Dirichlet. Ma nonostante questi risultati, molto più numerose sono le questioni da noi poste, che i problemi risoluti in queste pagine, le quali vogliono essenzialmente contenere i primi germi di un nuovo capitolo di quel calcolo funzionale, alla costruzione del quale tanti sforzi sono ora diretti!

§ 1. Una equazione integrale non lineare.

Dimostreremo che alcuni dei risultati ottenuti da HILBERT e da SCHMIDT per l'equazione integrale lineare omogenea del FREDHOLM si estendono a qualche classe di equazioni non lineari. Come esempio semplicissimo studieremo l'equazione

$$f(x_1) = \lambda \int_0^1 \int_0^1 K(x_1, x_2, x_3) f(x_2) f(x_3) \, d x_2 \, d x_3 , \tag{1}$$

dove $f(x_1)$ è la funzione incognita, supposta integrabile insieme ad $f^2(x_1)$, e dove $K(x_1, x_2, x_3) \neq 0$ è una funzione simmetrica delle x_i, integrabile insieme a K^2. Supporremo di più:

I) Lo $\int_0^1 \Big[K(x_1, x_2, x)\Big]^2 dx$ è una funzione limitata delle x_1 e x_2 nell'intervallo (0, 1),

II) Se x, y sono punti dell'intervallo (0, 1), è:

$$\lim_{y=x} \int_0^1 \int_0^1 \Big\{ K(x_1, x_2, x) - K(x_1, x_2, y) \Big\}^2 d x_1 \, d x_2 = 0.$$

Sarà sottinteso che tutte le nostre variabili variino nell'intervallo (0, 1), e che le integrazioni rispetto alla x_1, od alla x_2, od alla x_3, siano eseguite in tale intervallo. Se φ, ψ, χ sono funzioni integrabili insieme al loro quadrato, otterremo, applicando ripetutamente la disuguaglianza di SCHWARZ:

$$\left[\int\int\int K(x_1, x_2, x_3) \, \varphi(x_1) \, \psi(x_2) \, \chi(x_3) \, d x_1 \, d x_2 \, d x_3\right]^2 \leq$$

$$\leq \int \chi^2(x_3) \, d x_3 \int d x_3 \left[\int\int K(x_1, x_2, x_3) \, \varphi(x_1) \, \psi(x_2) \, d x_1 \, d x_2\right]^2 \leq$$

$$\leq \int \chi^2(x_3) \, d x_3 \int d x_3 \left[\int \varphi^2(x_1) \, d x_1 \int d x_1 \left\{ \int K(x_1, x_2, x_3) \, \psi(x_2) \, d x_2 \right\}^2\right] \leq$$

$$\leq \int \varphi^2(x_1) \, d x_1 \int \chi^2(x_3) \, d x_3 \int \psi^2(x_2) \, d x_2 \int\int\int K^2(x_1, x_2, x_3) \, d x_1 \, d x_2 \, d x_3 .$$

Porremo

$$I(\varphi, \psi, \chi) = \int\int\int K(x_1, x_2, x_3)\, \varphi(x_1)\, \psi(x_2)\, \chi(x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3\,,$$

che non muta permutando φ, ψ, χ. Porremo

$$\int\int\int K^2(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = H^2\,; \quad \int \varphi^2(x)\, dx = i^2(\varphi).$$

Sarà

$$|I(\varphi, \psi, \chi)| \leq H\, i(\varphi)\, i(\psi)\, i(\chi). \tag{2}$$

Cosicchè, se $u(x)$ è una funzione per cui $i(u) = 1$, sarà

$$|I(u, u, u)| \leq H, \quad \text{per} \quad i(u) = 1. \tag{2$^{\text{bis}}$}$$

Noi ci proponiamo di riconoscere se la (1) possiede qualche soluzione oltre alla soluzione evidente $f(x) = 0$. Se così è per un qualche valore di λ, così sarà per tutti i valori di λ, come si riconosce, mutando $f(x)$ in $k\,f(x)$ (se $k =$ cost.). Noi preciseremo la domanda, chiedendoci se esiste per un qualche valore di λ una soluzione $f(x)$ di (1), per cui $i(f) = 1$.

Evidentemente i limiti superiore $+d > 0$ e inferiore $-d$ (*) dei valori che può assumere $I(u, u, u)$, quando $i(u) = 1$, appartengono per $(2)^{\text{bis}}$ all'intervallo $(-H, H)$.

Siano $u_1, u_2, u_3, \ldots$ funzioni integrabili insieme al loro quadrato, tali che

$$i(u_n) = 1 \tag{3}$$

e che, posto

$$\varepsilon_n = I(u_n, u_n, u_n) + d > 0, \tag{4}$$

sia

$$\lim \varepsilon_n = 0. \tag{4$^{\text{bis}}$}$$

Siano $v_n(x)$ funzioni integrabili insieme al loro quadrato. Posto

$$w_n = v_n - u_n \int_0^1 u_n(x)\, v_n(x)\, dx \tag{5}$$

(*) Essi sono uguali, e di segno opposto, perchè $I(u, u, u)$ cambia di segno, quando si muti $u(x)$ in $-u(x)$.

sarà per (3)

$$\int w_n u_n \, dx = \int v_n u_n \, dx - i(u_n) \int v_n u_n \, dx = 0 \tag{6}$$

$$i^2(w_n) = i^2(v_n) - \left[\int u_n v_n \, dx \right]^2 . \tag{6$^{\text{bis}}$}$$

Se λ_n, μ_n sono costanti tali che $i(\lambda_n u_n + \mu_n w_n) = 1$, cioè per (3) e per (6) tali che:

$$\lambda_n^2 + \mu_n^2 i^2(w_n) = 1, \tag{7}$$

sarà (sopprimendo per semplicità di scrittura gli indici n) per ipotesi:

$$I(\lambda u \pm \mu w, \lambda u \pm \mu w, \lambda u \pm \mu w) + d \geqq 0$$

ossia per (4):

$$d + \lambda^3(\varepsilon - d) \pm 3\lambda^2 \mu I(u, u, w) + 3\lambda\mu^2 I(u, w, w) \pm \mu^3 I(w, w, w) \geqq 0$$

ossia, posto

$$\rho = \mu\, i(w); \quad \text{e quindi per (7)} \quad \lambda^2 + \rho^2 = 1, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^3 \varepsilon + (1 - \lambda^3) d \pm 3\lambda^2 \rho \frac{I(u, u, w)}{i(w)} + 3\lambda\rho^2 \frac{I(u, w, w)}{i^2(w)} \pm \\ &\qquad \pm \rho^3 \frac{I(w, w, w)}{i^3(w)} \geqq 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Dalle (2), (3) si trae:

$$\left| \frac{I(u, u, w)}{i(w)} \right| \leqq H; \quad \left| \frac{I(u, w, w)}{i^2(w)} \right| \leqq H; \quad \left| \frac{I(w, w, w)}{i^3(w)} \right| \leqq H. \tag{10}$$

Scegliamo ρ così piccolo che:

$$\left.\begin{aligned} &\left| \frac{3}{2} \lambda^2 \rho \frac{I(u, u, w)}{i(w)} \right| > \left| 3\lambda\rho^2 \frac{I(u, w, w)}{i^2(w)} \right| \\ &\left| \frac{3}{4} \lambda^2 \rho \frac{I(u, u, w)}{i(w)} \right| > \left| \rho^3 \frac{I(w, w, w)}{i^3(w)} \right| \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

ossia che

$$\left.\begin{aligned} &|\rho| < \frac{1}{2} |\lambda| \left\{ \left| \frac{I(u, u, w)}{i(w)} \right| : \left| \frac{I(u, w, w)}{i^2(w)} \right| \right\} \\ &|\rho| < \frac{\sqrt{3}}{2} |\lambda| \sqrt{\left\{ \left| \frac{I(u, u, w)}{i(w)} : \frac{I(w, w, w)}{i^3(w)} \right| \right\}} \end{aligned}\right\} \tag{11$^{\text{bis}}$}$$

che, per (10), saranno certamente soddisfatte se

$$|\rho| < \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda}{H}\frac{I(u,\,u,\,w)}{i(w)}\right|; \quad |\rho| < \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{\lambda}{H}\frac{I(u,\,u,\,w)}{i(w)}\right| \tag{11$^{\text{ter}}$}$$

e quindi, se

$$\left|\frac{\rho}{\lambda}\right| < \frac{1}{2}\frac{1}{H}\left|\frac{I(u,\,u,\,w)}{i(w)}\right| \tag{12}$$

Da (9) segue, supposte λ, ρ positive:

$$\lambda^3\varepsilon + (1-\lambda^3)\,d + 3\lambda\rho^2\frac{I(u,\,w,\,w)}{i^2(w)} \geqq \left|3\lambda^2\rho\frac{I(u,\,u,\,w)}{i(w)} + \rho^3\frac{I(w,\,w,\,w)}{i^3(w)}\right|$$

e per la seconda delle (11) *a fortiori*

$$\lambda^3\varepsilon + (1-\lambda^3)\,d + 3\lambda\rho^2\frac{I(u,\,w,\,w)}{i^2(w)} \geqq \left(3 - \frac{3}{4}\right)\lambda^2\rho\left|\frac{I(u,\,u,\,w)}{i(w)}\right|$$

che, per la prima delle (11) dà:

$$\lambda^3\varepsilon + (1-\lambda^3)\,d \geqq \left(3 - \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)\lambda^2\rho\left|\frac{I(u,\,u,\,w)}{i(w)}\right| = \frac{3}{4}\lambda^2\rho\left|\frac{I(u,\,u,\,w)}{i(w)}\right| \tag{13}$$

che deve essere conseguenza delle (8), (12).

Dividendo ambo i membri per $\lambda^2\rho$, e osservando che per (8) è:

$$\frac{1}{\lambda^2\rho} = \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^2}\right]^{\frac{3}{2}}\frac{\lambda}{\rho},$$

la (13) diventa:

$$\frac{\lambda}{\rho}\left\{\varepsilon + d\left(\left[1 + \frac{1}{\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^2}\right]^{\frac{3}{2}} - 1\right)\right\} \geqq \frac{3}{4}\left|\frac{I(u,\,u,\,w)}{i(w)}\right| \tag{13$^{\text{bis}}$}$$

che per (12) vale per tutti i valori di $\frac{\lambda}{\rho}$ soddisfacenti alla

$$\frac{\lambda}{\rho} \geqq \frac{2H}{\left|\frac{I(u,\,u,\,w)}{i(w)}\right|}. \tag{14}$$

Poichè $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, esiste una delle ε_n, p. es. ε_p, più grande di tutte le altre; cosicchè, se $k > 0$ è una costante tale che $k^2 \varepsilon_p < 1$, sarà per ogni ε anche $k^2 \varepsilon < 1$, e quindi

$$1 + 4 k^2 \varepsilon + 4 k^4 \varepsilon^2 > 1 + 3 k^2 \varepsilon + 3 k^4 \varepsilon^2 + k^6 \varepsilon^3,$$

ossia

$$(1 + 2 k^2 \varepsilon)^2 \geqq (1 + k^2 \varepsilon)^3; \quad 1 + 2 k^2 \varepsilon \geqq (1 + k^2 \varepsilon)^{\frac{3}{2}}.$$

Ricordando che da (14) si deduce $(13)^{\text{bis}}$, riconosciamo che, se non è

$$\frac{1}{k\sqrt{\varepsilon}} \leqq 2 H : \left| \frac{I(u, u, w)}{i(w)} \right|, \tag{15}$$

si può porre $\dfrac{\lambda}{\rho} = \dfrac{1}{k\sqrt{\varepsilon}}$ nella $(13)^{\text{bis}}$, ottenendo che:

$$\frac{1}{k\sqrt{\varepsilon}} \left\{ \varepsilon + d \left[(1 + k^2 \varepsilon)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \right\} \geqq \frac{3}{4} \left| \frac{I(u, u, w)}{i(w)} \right|$$

e quindi *a fortiori* per l'ipotesi fatta su k:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{k} + 2 d k \sqrt{\varepsilon} \geqq \frac{3}{4} \left| \frac{I(u, u, w)}{i(w)} \right|. \tag*{$(15)^{\text{bis}}$}$$

In ogni caso è dunque soddisfatta *almeno* una delle (15), $(15)^{\text{bis}}$. Cosicchè, se K è la massima delle

$$2 H k, \quad \frac{4}{3}\left(\frac{1}{k} + 2 d k\right),$$

sarà in ogni caso

$$I(u, u, w) \leqq K \sqrt{\varepsilon}\, i(w); \quad (K = \text{cost. finita})$$

e quindi, per (5) e $(6)^{\text{bis}}$

$$\left| I(u, u, v) - I(u, u, u) \int u(x) v(x) dx \right| \leqq$$

$$\leqq K \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\int v^2(x) dx - \left[\int u(x) v(x) dx \right]^2},$$

che scriveremo

$$\left.\begin{aligned}\left| I(u_n,\ u_n,\ v_n) + (d - \varepsilon_n)\int_0^1 u_n(x)\, v_n(x)\, dx \right| \leq \\ \leq K\sqrt{\varepsilon_n}\sqrt{\int_0^1 v_n^2(x)\, dx - \left[\int_0^1 u_n(x)\, v_n(x)\, dx\right]^2}\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

che vale per ogni sistema di funzioni v_n tali che v_n e v_n^2 siano integrabili.

Essendo $\int_0^1\int_0^1 \left[K(x_1,\ x_2,\ x)\right]^2 dx_1\, dx_2$, per ipotesi, una funzione limitata della x, per la formola di Schwarz le funzioni

$$\psi_n(x) = \int_0^1\int_0^1 K(x_1,\ x_2,\ x)\, u_n(x_1)\, u_n(x_2)\, dx_1\, dx_2$$

saranno tutte inferiori ad una stessa costante finita indipendente da n. E per un noto teorema, potrò nella successione delle ψ_n scegliere una successione subordinata che tenda a un limite per ogni valore *razionale* della x. E, poichè $\lim_{y=x}\int_0^1\int_0^1 \left\{K(x_1,\ x_2,\ x) - K(x_1,\ x_2,\ y)\right\}^2 dx_1\, dx_2 = 0$, le $\psi_n(x) - \psi_n(y)$ si potranno rendere contemporaneamente (per ogni valore di n) piccole a piacere, scegliendo y abbastanza vicino ad x. Cosicchè detta successione subordinata avrà per limite una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo (0, 1). Noi potremo anzi sopprimere nella successione delle u_n tanti termini, così che sia senz'altro

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \psi_n(x). \qquad (17)$$

Notiamo ancora l'identità, valida per ogni valore di n:

$$\left.\begin{aligned}I(u,\ u,\ v) = \int\int\int K(x_1,\ x_1,\ x)\, u(x_1)\, u(x_2)\, v(x)\, dx\, dx_1\, dx_2 = \\ = \int_0^1 \psi(x)\, v(x)\, dx.\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Si ponga in (16)

$$v_n(x) = \int_0^1 K(x_1,\ x_2,\ x)\, u_n(x_1)\, dx_1.$$

Per provare lecita questa posizione, basterà dimostrare che $v_n^2(x)$ è integrabile; ciò che è evidente per l'ipotesi (I). Anzi $\int_0^1 v_n^2(x)\,dx$ è per tale ipotesi *limitato:* cosicchè il limite del secondo membro di (16) sarà, con tale posizione, nullo per $n=+\infty$.

E la (16) ci darà dunque

$$\lim\left[I(u,\ u,\ v)+(d-\varepsilon)\int\int K(x_1,\ x_2,\ x)\,u_n(x_1)\,u_n(x)\,dx\,dx_1\right]=0.$$

Poichè il limite del secondo termine esiste e vale $d\,f(x_2)$ sarà per (18)

$$\left.\begin{aligned}-d\,f(x_2)=\lim I(u,\ u,\ v)&=\lim\int\psi(x)\,v(x)\,dx=\\&=\lim\int\int K(x_1,\ x_2,\ x)\,u_n(x_1)\,\psi_n(x)\,dx\,dx_1\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

per ogni valore della x_2.

Ponendo in (16) $v_n(x)=\int K(x,\ x_1,\ x_2)\,\psi_n(x_1)\,dx_1$, si otterrà similmente per ogni valore di x_2

$$\begin{aligned}0=\lim&\left[I(u,\ u,\ v)+(d-\varepsilon)\int u\,v\,dx\right]=\\=\lim&\left[\int\int K(x,\ x_1,\ x_2)\,\psi_n(x_1)\,\psi_n(x)\,dx\,dx_1+\right.\\&\qquad\left.+(d-\varepsilon)\int\int K(x,\ x_1,\ x_2)\,u_n(x)\,\psi_n(x_1)\,dx\,dx_1\right].\end{aligned}$$

Cosicchè per (19)

$$\lim\int\int K(x,\ x_2,\ x_3)\,\psi_n(x_2)\,\psi_n(x_3)\,dx_2\,dx_3=d^2\,f(x).$$

Ed, essendo le ψ limitate, si può invertire il segno d'integrale con quello di limite, cosicchè:

$$\int\int K(x,\ x_2,\ x_3)\,f(x_2)\,f(x_3)\,dx_2\,dx_3=d^2\,f(x).\qquad(20)$$

Posto in (16) $v_n=\psi_n$, e ricordando (18), si ottiene:

$$\lim\left\{\int\psi_n^2(x)\,dx+(d-\varepsilon)\int u_n(x)\,\psi_n(x)\,dx\right\}=0$$

ossia

$$\lim \left\{ \int \psi_n^2 (x)\, d\, x + (d - \varepsilon)\, I\,(u_n,\ u_n,\ u_n) \right\} = 0$$

cosicchè:

$$i^2\,(f) = \int_0^1 f^2\,(x)\, d\, x = d^2 \tag{21}$$

ciò che già basta a provare che non è identicamente $f(x) = 0$. La $F(x) = \dfrac{f(x)}{d}$ per (20), (21) soddisfa alle:

$$\int\int K\,(x,\ x_1,\ x_2)\, F\,(x_1)\, F\,(x_2)\, d\, x_1\, d\, x_2 = d\, F\,(x).$$

$$\int F^2\,(x)\, d\, x \qquad\qquad = 1.$$

$$\int\int\int K\,(x_1,\ x_2,\ x_3)\, F\,(x_1)\, F\,(x_2)\, F\,(x_3)\, d\, x_1\, d\, x_2\, d\, x_3 = d \int F^2\,(x)\, d\, x = d.$$

L'ultima di queste equazioni, che è immediata conseguenza delle prime due, dimostra essere $\pm\, d$ effettivamente massimo e minimo di $I\,(u,\ u,\ u)$ quando $i^2\,(u) = 1$.

La prima di queste equazioni risponde alla domanda propostaci per la equazione (1).

§ 2. Estensione dell'equazione differenziale di Eulero.

Siano x, X due variabili; indicheremo sovente, ponendo lettere maiuscole al posto di lettere minuscole in una espressione, il risultato che se ne deduce scambiando x con X. Così, p. es., se $u = \operatorname{sen} x$, $y = x - X$, noi porremo $U = \operatorname{sen} X$, $Y = X - x$, ecc.

Sia u una funzione della x, possedente derivata u'; e sia φ una funzione di u, u', U, U', x, X. Noi supponiamo data la φ, e ci proponiamo di determinare la u in guisa che risulti massimo o minimo l'integrale

$$y = \int_0^1 \int_0^1 \varphi \left[u,\ u',\ U,\ U',\ x,\ X \right] d\, x\, d\, X, \tag{1}$$

e che per $x = 0$, $x = 1$ la u riceva valori prefissati.

Se la φ non contiene U, U', X, questo problema si riduce all'ordinario problema fondamentale del calcolo delle variazioni. Si noti poi che la generalità non viene diminuita, supponendo $\varphi = \Phi$, cioè $\varphi(u, u', U, U', x, X)$ uguale a $\varphi(U, U', u, u', X, x)$; se infatti in (1) si scrive Φ al posto di φ, la y non muta, perchè ciò equivale a cambiare il nome delle variabili di integrazione. Si può dunque scrivere $y = \frac{1}{2} \iint \left[\varphi + \Phi\right] dx\, dX$, dove l'integrando non muta scambiando x con X, u con U: ciò, che noi esprimeremo dicendo che *l'integrando è simmetrico.* Possiamo dunque senz'altro supporre che φ sia simmetrico.

Con ipotesi, e con notazioni analoghe a quelle usate nei problemi comuni di calcolo delle variazioni si trova (poichè φ è simmetrico) che:

$$\delta y = \iint \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial \varphi}{\partial U} \delta U + \frac{\partial \varphi}{\partial U'} \delta U' \right\} dx\, dX =$$

$$= \iint \left[\delta u \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u'}\right) \right\} + \delta U \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial U} - \frac{d}{dX}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial U'}\right) \right\} \right] dx\, dX =$$

$$= \iint \left[\delta u \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u'}\right) \right\} + \delta u \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u'}\right) \right\} \right] dx\, dX.$$

E si otterrà:

Condizione necessaria per un massimo o per un minimo è

$$\int_0^1 \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u'}\right) \right\} dX = 0. \tag{2}$$

L'essere la (2) *identicamente soddisfatta è la condizione necessaria e sufficiente affinchè la y sia indipendente dalla scelta della funzione $u(x)$ e dipenda perciò soltanto dai valori prefissati per la $u(x)$ nei punti $x = 0$, $x = 1$.*

Nello scrivere la (2) si suppone tacitamente che la $u(x)$ possegga derivate seconde. Questa ipotesi si può giustificare con lo stesso metodo, che si usa per la ordinaria equazione di Eulero relativa al caso che φ non dipenda da X, U, U'.

La (2) è una equazione integro-differenziale. Però, mentre per gli ordinari problemi di calcolo delle variazioni, si giunge a un'equazione differenziale, e i teoremi di esistenza per questa sono ben noti, noi ora invece non possediamo quasi teoremi generali di esistenza per la (2). Vogliamo vedere se lo stesso calcolo delle variazioni permette di trovarne qualcuno.

§ 3. Una equazione integro-differenziale alle derivate ordinarie.

Sia φ una forma quadratica nelle u, U, u', U', poniamo

$$\left.\begin{aligned}\varphi = a\,u^2 + 2\,b\,u\,u' + c\,u'^2 + 2\,e\,u\,U' + 2\,\lambda\,u\,U + 2\,\mu\,u'\,U' + \\ + A\,U^2 + 2\,B\,U\,U' + C\,U'^2 + 2\,E\,U\,u',\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

dove le a, b, c, e sono funzioni delle x, X, che si mutano nelle A, B, C, E scambiando x con X, e dove le λ, μ sono funzioni simmetriche delle x, X. Supponiamo che per $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq X \leq 1$, le a, b,... posseggano derivate prime limitate. La nostra equazione integro-differenziale diverrà:

$$\int \left\{ (a\,u + \lambda\,U + e\,U') - \frac{d}{d\,x}\,(c\,u' + \mu\,U' + E\,U) \right\} d\,X = 0.$$

Posto

$$\int a\,d\,X = p\,(x); \quad -\int c'_x\,d\,X = q\,(x); \quad -\int c\,d\,X = r\,(x);$$

$$\lambda - E'_x = \sigma\,(x,\ X); \quad e - \mu'_x = \tau\,(x,\ X),$$

questa equazione si scrive

$$\left.\begin{aligned}0 = p\,(x)\,u\,(x) + q\,(x)\,u'\,(x) + r\,(x)\,u''\,(x) + \\ + \int_0^1 \left\{ \sigma\,(x,\ \xi)\,u\,(\xi) + \tau\,(x,\ \xi)\,u'\,(\xi) \right\} d\,\xi.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Noi, seguendo le idee esposte in fine del § 2, senza occuparci di trattare direttamente per (2) il problema di costruire una soluzione che assuma valori prefissi per $x = 0$, e per $x = 1$, affrontiamo invece senz'altro il problema di minimo.

Supporremo che φ sia una forma definita positiva, o, più generalmente, che essa sia positiva e differente da zero quando almeno una delle u', U' è differente da zero; essa tale rimarrà, se sottraiamo dalle c, C una costante positiva l abbastanza piccola; cosicchè sarà:

$$\varphi > l\,(u'^2 + U'^2). \qquad (3)$$

Poniamo

$$I(u) = \iint \varphi \, dx \, dX = \iint \left[a u^2 + 2 b u u' + \cdots \right] dx \, dX;$$

$$I(u+v) - I(u) - I(v) = 2 I(u, v).$$

Lo $I(u, v)$ sarà l'integrale di una forma bilineare nelle u, U, u', U' e nelle v, V, v', V'. Sia d il limite inferiore di $I(u)$, quando u assume agli estremi dell'intervallo $x = 0$, $x = 1$ i valori prefissati, possiede nell'intervallo (0, 1) una derivata prima, l'integrale della quale riproduce, con la debita indeterminazione, la stessa funzione u.

Sia v una funzione nulla per $x = 0$, $x = 1$, e la cui derivata prima v' gode di proprietà analoghe. Sarà, se k è una *qualsiasi* costante, per ognuna delle funzioni u citate:

$$I(u + k v) = I(u) + 2 k I(u, v) + k^2 I(v) \geq d,$$

cosicchè

$$\left| I(u, v) \right| \leq \sqrt{I(v) \left[I(u) - d \right]} \cdot$$

Se u, $\bar{u}$ sono due funzioni u, se $I(u_1) = d + \eta$, $I(u) = d + \eta$, se p. es. $\bar{\eta} > \eta$ (si ricordi che $\eta > 0$, $\bar{\eta} > 0$), sarà perciò:

$$| I(u - \bar{u}, \bar{u}) | \leq \sqrt{I(u - \bar{u}) \, \bar{\eta}}.$$

E, poichè

$$I(u) = I([u - \bar{u}] + \bar{u}) = I(u - \bar{u}) + I(\bar{u}) + 2 I(u - \bar{u}, u),$$

ossia

$$2 I(u - \bar{u}, \bar{u}) = \eta - \bar{\eta} - I(u - \bar{u}),$$

sarà

$$| \eta - \bar{\eta} - I(u - \bar{u}) | \leq 2 \sqrt{\bar{\eta} \, I(u - u)},$$

ossia *a fortiori* (poichè $\bar{\eta} > \eta$)

$$I(u - \bar{u}) \leq 2 \sqrt{\bar{\eta} \, I(u - \bar{u})} \quad \text{ossia} \quad I(u - \bar{u}) \leq 4 \eta. \tag{4}$$

Queste disuguaglianze sono affatto analoghe a quelle dei signori Hilbert e B. Levi per il problema di Dirichlet.

Quindi per (3), posto $\frac{2}{l} = h^2$, sarà:

$$\frac{1}{2} \iint \left\{ \left[\frac{\partial (u - \bar{u})}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial (U - \bar{U})}{\partial X} \right]^2 \right\} dx \, dX = \int \left[\frac{\partial (u - u)}{\partial x} \right]^2 dx \leq h^2 \bar{\eta}; \tag{5}$$

e quindi:

$$\int \left| \frac{\partial (u - \overline{u})}{\partial x} \right| d\,x \leq h\, \overline{\eta}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{se } I(\overline{u}) = d + \overline{\eta} > d + \eta = I(u)) \qquad (5)^{\text{bis}}$$

$$\left| \int \frac{\partial (u - \overline{u})}{\partial x} d\,x \right| \leq h\, \overline{\eta}^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{id.} \quad \text{id.}) \qquad (5)^{\text{ter}}$$

dove gli integrali possono essere estesi a tutto l'intervallo (0, 1), od anche a un intervallo parziale. In particolare la $(5)^{\text{ter}}$ scritta per l'intervallo $(0, x)$ per $0 < x < 1$, ci dà, quando si ricordi che $u(0) - u(0) = 0$,

$$| u(x) - \overline{u}(x) | \leq h\, \overline{\eta}^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Si ha quindi il teorema seguente:

Se due funzioni u, $\overline{u}$ soddisfano alla $I(u) - d < \sigma$, $I(\overline{u}) - d < \sigma$ (cioè $\eta < \sigma$, $\overline{\eta} < \sigma$), *allora i loro valori in un punto qualsiasi dell'intervallo* (0, 1) *differiscono per meno di $h\sqrt{\sigma}$.*

Da cui si deduce:

Se una funzione u varia, facendo tendere $I(u)$ al suo limite inferiore d, la u tende uniformemente in tutto l'intervallo (0, 1) *ad una funzione limite w; la quale è perciò ancora una funzione continua, che agli estremi dell'intervallo assume i valori prefissati.*

Che cosa possiamo dire delle derivate di w e dell'integrale $I(w)$?

Se $u_1, u_2, u_3 \ldots$ è una successione tale che $\lim I(u_n) = d$, cioè che, posto $I(u_n) = d + \varepsilon_n$, sia $\lim \varepsilon_n = 0$, noi sappiamo che $\lim u_n = w$. Noi possiamo (sopprimendo, caso mai, dei termini della successione) supporre che $\sum \sqrt{\varepsilon_n}$ sia convergente. Per la $(5)^{\text{bis}}$ convergerà la serie degli integrali dei valori assoluti dei termini della

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x}\right) + \cdots \tag{7}$$

Tanto basta per affermare che questa serie converge assolutamente in generale (escluso cioè al più un aggregato di punti di misura nulla) e che è integrabile termine a termine.

In altre parole esiste *in generale* (*) il $\lim \frac{\partial u_n}{\partial x}$; e il suo integrale nell'intervallo $(0, x)$ vale il limite di $\int_0^x \frac{\partial u_n}{\partial x} d\,x = u_n(x)$, cioè vale $w(x)$. Dunque in

(*) Cioè escluso al più un aggregato di misura nulla.

generale

$$w'(x) = \lim \frac{\partial u_n}{\partial x},$$

$$\int_0^x w'(x)\, dx = w(x).$$

Cioè la $w(x)$ appartiene al campo funzionale delle u.

Noi ora dimostreremo che $I(w) = d$, cioè che d è un minimo *effettivo*. Si dovrà cioè dimostrare che per calcolare

$$\lim \int\int (a\, u^2 + 2\, b\, u\, u' + c\, u'^2 + \ldots)\, d\, x\, d\, X$$

si può permutare il segno di limite col segno di integrale. La parte più difficile (a cui ci limiteremo) della dimostrazione è di provarlo per $\int c\, u'^2\, d\, x$. Sia γ un qualsiasi gruppo di punti dell'intervallo (0, 1), M il massimo di c, e si ponga $i(u) = \int_\gamma c\, u'^2\, d\, x$. Considero due funzioni u, $\overline{u}$ per cui

$$I(u) = d + \eta,\ I(\overline{u}) = d + \overline{\eta},\ \overline{\eta} > \eta.$$

È

$$i(u) = i(\overline{u}) + i(u - \overline{u}) + 2\, i(u,\, u - \overline{u}).$$

$\Big($Si è posto $2\, i(u,\, v) = i(u + v) - i(u) - i(v)\Big)$. Quindi è

$$i(u) - i(\overline{u}) = i(u - \overline{u}) + 2\, i(u,\, u - \overline{u})$$

identicamente, dove

$$|\, i(u - \overline{u})\,| \leq M \int_\gamma \left(\frac{\partial\, (u - \overline{u})}{\partial\, x}\right)^2 d\, x \leq M\, h^2\, \overline{\eta} \qquad \Big(\text{per } (5)\Big),$$

$$|\, i(u,\, u - \overline{u})\,| \leq M \sqrt{\int_\gamma \left(\frac{\partial\, u}{\partial\, x}\right)^2 d\, x \int_\gamma \left[\frac{\partial\, (u - \overline{u})}{\partial\, x}\right]^2 d\, x} \quad \text{(per la formola di Schwarz)},$$

$$|\, i(u,\, u - \overline{u})\,| \leq M \sqrt{\frac{d + \eta}{l}\, M\, h^2\, \overline{\eta}}$$

$$\left(\text{perchè } d + \eta = I(u) \geq l \int_0^1 d\, X \int_0^1 \left(\frac{\partial\, u}{\partial\, x}\right)^2 d\, x \geq l \int_\gamma \left(\frac{\partial\, u}{\partial\, x}\right)^2 d\, x\right).$$

Ne segue che la differenza $i(u) - i(\overline{u})$ si può rendere in valore assoluto piccola a piacere, prendendo η, $\overline{\eta}$ abbastanza piccoli; cosicchè, mentre u varia in guisa che $I(u)$ tenda a d, lo $\int_\gamma c\, u'^2\, d\, x$ tende a un limite *in modo uniforme* per ogni aggregato γ di punti dell'intervallo (0, 1).

Sia n così grande che $|\, i(u_p) - i(u_m)\,|$ per $m \geqq n$, $p \geqq n$ sia minore (qualunque sia l'intervallo γ) di un numero ε prefissato.

Sia γ un aggregato, che si può scegliere di misura piccola a piacere, tale che nell'aggregato complementare γ' le $\frac{\partial u_p}{\partial x}$ siano equilimitate, cosicchè

$$\lim_{p=\infty} \int_{\gamma'} c \left(\frac{\partial u_p}{\partial x} \right)^2 d\, x = \int_{\gamma'} c \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 d\, x.$$

Scegliamo γ così piccolo che

$$\left| \int_\gamma c \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 d\, x \right| < \varepsilon$$

e quindi, per ogni $p > n$,

$$\left| \int_\gamma c \left(\frac{\partial u_p}{\partial x} \right)^2 d\, x \right| < 2\, \varepsilon.$$

Potrò scegliere p così grande che

$$\left| \int_{\gamma'} c \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \int_{\gamma'} c \left(\frac{\partial u_p}{\partial x} \right)^2 d\, x \right| < \varepsilon.$$

Sarà, poichè $\int_0^1 = \int_\gamma + \int_{\gamma'}$:

$$\left| \int_{\gamma'} c \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 d\, x - \int_0^1 c \left(\frac{\partial u_p}{\partial x} \right)^2 d\, x \right| < 3\, \varepsilon$$

per p abbastanza grande, e quindi

$$\left| \int_{\gamma'} c \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 d\, x - \lim_{p=\infty} \int_0^1 c \left(\frac{\partial u_p}{\partial x} \right)^2 d\, x \right| \leqq 3\, \varepsilon$$

per γ abbastanza piccolo. Quindi

$$\int_0^1 c\left(\frac{d\,w}{d\,x}\right)^2 d\,x = \lim_{\gamma=0}\int_{\gamma'} c\left(\frac{\partial\,w}{\partial\,x}\right)^2 d\,x = \lim_{p=\infty}\int_0^1 c\left(\frac{\partial\,u_p}{\partial\,x}\right)^2 d\,x. \qquad \text{c. d. d.}$$

§ 4. Deduzione di una equazione integro-differenziale alle derivate parziali.

Sia $u\,(x,\ y,\ t)$ una funzione delle 3 variabili $x,\ y,\ t$, possedente derivate integrabili, la quale sia definita in una regione S del piano $(x,\ y)$, e sul contorno σ di questa assume valori prefissati per ogni valore di t dell'intervallo (0, 1) (il che equivale a prefissare i valori della u sul contorno laterale di un cilindro dello spazio $x,\ y,\ t$). Noi vogliamo render minimo l'integrale

$$\int_0^1\int_S \left\{\left[\frac{\partial\,u\,(x,\ y,\ t)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial\,u\,(t)}{\partial\,y}\right]^2\right\} d\,x\,d\,y\,d\,t +$$

$$+\int\int d\,t\,d\,\tau\int_S\left[\psi_1\,(x,\ y,\ t,\ \tau)\,\frac{\partial\,u\,(x,\ y,\ t)}{\partial\,x}\,\frac{\partial\,u\,(x,\ y,\ \tau)}{\partial\,x} + \psi_2\,\frac{\partial\,u\,(t)}{\partial\,y}\,\frac{\partial\,u\,(\tau)}{\partial\,y}\right] d\,x\,d\,y,$$

dove le ψ_i sono funzioni delle $x,\ y,\ t,\ \tau$, le integrazioni rispetto alla t od alla τ sono estese all'intervallo (0, 1), è posto talvolta per brevità $u\,(t) = u\,(x,\ y,\ t)$, $u\,(\tau) = u\,(x,\ y,\ \tau)$, e le integrazioni in $d\,x\,d\,y$ sono estese al campo S. Se noi cercassimo di applicare i metodi precedenti, troveremmo un primo ostacolo in ciò che l'integrando *non è in nessun caso* una forma definita delle quattro derivate che vi figurano. Si supera questa difficoltà, rendendo (§ 2) l'integrando simmetrico: il che si ottiene integrando il primo addendo rispetto a τ nell'intervallo (0, 1) (ciò che nulla muta); e quindi aggiungendo gli integrali che se ne deducono permutando nell'integrando le variabili $t,\ \tau$. Ciò equivale a raddoppiare l'espressione che si vuol rendere minima, e nulla muta al nostro problema.

Siamo così ridotti al problema di rendere minimo

$$I\,(u) = \int\int d\,t\,d\,\tau\int\int_{(S)} \varphi\,d\,x\,d\,y,$$

ove

$$\varphi = \left[\frac{\partial u(t)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial u(t)}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial u(\tau)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{d\, u(\tau)}{\partial y}\right]^2 +$$

$$+ 2\varphi_1(x, y, t, \tau)\frac{\partial u(t)}{\partial x}\frac{\partial u(\tau)}{\partial x} + 2\varphi_2(x, y, t, \tau)\frac{\partial u(t)}{\partial x}\frac{\partial u(\tau)}{\partial y}$$

ove le $+2\varphi_i = \psi_i(x, y, t, \tau) + \psi_i(x, y, \tau, t)$ sono simmetriche nelle t, τ. Questo problema in ciò differisce ed è più difficile dei precedenti, e dei comuni problemi di calcolo delle variazioni, che *la funzione $u(x, y, t)$ cercata dipende anche da una variabile t, la quale non si può considerare come parametro, mentre l'integrando φ non contiene la derivata della u rispetto alla t.*

Se la u, che rende minimo $I(u)$, possiede derivate prime e seconde si trova coi soliti metodi, annullando la prima variazione, che essa soddisferà alla:

$$\frac{\partial^2 u(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t)}{\partial y^2} + \int_0^1 \left\{ \varphi_1(x, y, t, \tau)\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} + \varphi_2 \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \right\} d\tau = 0; \tag{I}$$

equazione analoga, ma estremamente più generale e complessa di una equazione integro-differenziale del VOLTERRA, *perchè i limiti di integrazione sono costanti.*

Se non ammettiamo che u possegga derivate seconde, si noti che la variazione prima è uguale (posto $v = \delta u$) all'integrale di

$$2\left[\left\{\frac{\partial u(t)}{\partial x}\frac{\partial v(t)}{\partial x} + \frac{\partial u(\tau)}{\partial x}\frac{\partial v(\tau)}{\partial x} + \frac{\partial u(t)}{\partial y}\frac{\partial v(t)}{\partial y} + \frac{\partial u(\tau)}{\partial y}\frac{\partial v(\tau)}{\partial y}\right\} + \right.$$

$$\left. + \left\{\varphi_1 \frac{\partial u(t)}{\partial x}\frac{\partial v(\tau)}{\partial x} + \varphi_1 \frac{\partial u(\tau)}{\partial x}\frac{\partial v(t)}{\partial x} + \varphi_2 \frac{\partial u(t)}{\partial y}\frac{\partial v(\tau)}{\partial y} + \varphi_2 \frac{\partial u(\tau)}{\partial y}\frac{\partial v(t)}{\partial y}\right\}\right],$$

cioè è uguale al quadruplo dell'integrale rispetto alle variabili t, x, y di:

$$\frac{\partial v(t)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left[u(t) + \int_0^1 \varphi_1(x, y, t, \tau)\, u(\tau)\, d\tau\right] + \frac{\partial v(t)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left[u(t) + \int_0^1 \varphi_2 \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} d\tau\right].$$

La v dev'essere nulla sul contorno σ di S.

Si scelga in S un rettangolo R limitato dalle rette $x = a$, $x = b$, $y = \alpha$, $y = \beta$ (a, b, α, β costanti). Si ponga $v = 0$, fuori di R, $v = \frac{-1}{4}\xi\eta$ in R, ove ξ

è funzione delle x, t, nulla per $x = a$, $x = b$, ed η è funzione delle y, t nulla per $y = \alpha$, $y = \beta$. La nostra variazione diventa l'integrale in $d\,t\,d\,x\,d\,y$ di

$$\frac{\partial \left[u(t) + \int \varphi_1\, u(\tau)\, d\tau \right]}{\partial x} \xi'_x \eta + \frac{\partial \left[u(t) + \int \varphi_2\, u(\tau)\, d\tau \right]}{\partial y} \xi \eta'_y ,$$

quando le variabili t, x, y si facciano variare rispettivamente negli intervalli $(0, 1)$, (a, b), (α, β). Tale integrale si può scrivere:

$$\int_a^b (A \xi'_x + B \xi)\, d\,x ,$$

dove

$$A = \int_0^1 d\,t \int_\alpha^\beta \frac{\partial \left[u(t) + \int_0^1 \varphi_1\, u(\tau)\, d\tau \right]}{\partial x} \eta\, d\,y,$$

$$B = \int_0^1 d\,t \int_\alpha^\beta \frac{\partial \left[u(t) + \int_0^1 \varphi_2\, u(\tau)\, d\tau \right]}{\partial y} \eta'_y\, d\,y.$$

Con le ben note considerazioni di Du Bois Reymond per l'ordinario problema del calcolo delle variazioni si proverà nei casi più generali che per valori *generici* delle x (escluso cioè al più un aggregato di misura nulla) è:

$$\frac{d\,A}{d\,x} = B,$$

ossia:

$$\int_0^1 d\,t \int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x} \left[u(t) + \int_0^1 \varphi_1\, u(\tau)\, d\tau \right] \eta\, d\,y =$$

$$= \int_0^1 d\,t \int_\alpha^\beta d\,y\, \eta'_y \int_a^x \frac{\partial}{\partial y} \left[u(t) + \int_0^1 \varphi_2\, u(\tau)\, d\tau \right] d\,x + \text{cost.}$$

Cosicchè l'espressione

$$U = \int_a^x \frac{\partial}{\partial y} \left[u(t) + \int_0^1 \varphi_2\, u(\tau)\, d\tau \right] d\,x + \int_\alpha^y \frac{\partial}{\partial x} \left[u(t) + \int_0^1 \varphi_1\, u(\tau)\, d\tau \right] d\,y \qquad \text{(II)}$$

soddisfa alla

$$\int_0^1 d\,t \int_\alpha^\beta U \eta'_y \, d\,y = \text{cost.}$$

e la differenza Δ dei valori assunti dalla U per due valori generici della x soddisferà alla:

$$\int_0^1 d\,t \int_\alpha^\beta \Delta\, \eta'_y \, d\,y = 0$$

e quindi anche (moltiplicando, com'è lecito, $\eta\,(y)$ per una funzione arbitraria $\varphi\,(t)$ della (t) alla:

$$\int_0^1 d\,t \left\{ \varphi\,(t) \int_\alpha^\beta \eta'_y \Delta \, d\,y \right\} = 0.$$

Per un valore generico della t sarà dunque

$$\int_\alpha^\beta \eta'_y \Delta \, d\,y = 0$$

e quindi, per un valore generico di y, $\Delta = \text{cost.}$, cioè indipendente dalla y (ma non dai valori dati alla x). La U sarà dunque in generale somma di una funzione $X\,(x,\ t)$ delle x, t e di una funzione $Y\,(y,\ t)$ delle y, t. E poichè U è nullo per $x = a$, $y = \alpha$, possiamo evidentemente supporre X nullo per $x = a$, Y nullo per $y = \alpha$, cioè X uguale al valore di U per $y = \alpha$, e quindi derivabile rispetto ad x, Y derivabile rispetto ad y. Sarà cioè in conclusione

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y} = 0; \tag{II$^{\text{bis}}$}$$

equazione che si riduce alla (I), se la u possiede derivate seconde.

Indicheremo ora un metodo che in qualche caso permette di sostituire alla (I) una equazione *equivalente,* ove non compaiono esplicitamente le derivate seconde della u.

Per poter fare il confronto con le equazioni integro-differenziali del Volterra, sostituiamo per un momento alla (I) l'equazione analoga per lo spazio a tre dimensioni:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u\,(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u\,(t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u\,(t)}{\partial z^2} - \\ &-\int_0^1 \left\{ \varphi_1\,(t,\ \tau)\,\frac{\partial^2 u\,(\tau)}{\partial x^2} + \varphi_2\,(t,\ \tau)\,\frac{\partial^2 u\,(\tau)}{\partial y^2} + \varphi_3\,(t,\ \tau)\,\frac{\partial^2 u\,(\tau)}{\partial z^2} \right\} d\,\tau = 0 \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

ove le φ_i si suppongono indipendenti dalle x, y, z. Se il massimo loro non supera $\frac{1}{6}$ si può dimostrare col VOLTERRA col metodo delle successive approssimazioni che la (III) possiede in un punto O scelto *a priori* in S una soluzione fondamentale: una soluzione cioè che si comporta come $\frac{1}{r}$, se r indica le distanze dal punto O.

Indicando con h una costante numerica, con g tale soluzione, con n una normale al contorno σ del campo S, con x_0, y_0, z_0 le coordinate di O, si prova che una soluzione della (III) soddisfa alla

$$\left.\begin{aligned} h\,u(x_0, y_0, z_0, t) = & \int_\sigma \left(u \frac{dg}{dn} - g \frac{du}{dn}\right) d\sigma - \\ & - \int_{(\sigma)} d\sigma \int_0^1 dt \left\{ \varphi_1 \left(u \frac{dg}{dn} - g \frac{du}{dn}\right) + \cdots + \cdots \right\}, \end{aligned}\right\} \quad \text{(IV)}$$

la quale costituisce la formola di GREEN o di reciprocità per la (III). Se si riesce a provare che una funzione soddisfa a (IV), se ne può dedurre che essa possiede derivate seconde, e che soddisfa alla (III). Si prevede dunque che in qualche caso si potrà evitare la dimostrazione *a priori* che la u possiede derivate seconde, sostituendo, come è già stato fatto per il problema di DIRICHLET, la dimostrazione di (IV) alla dimostrazione di (III).

§ 5. **Il teorema di esistenza per il problema di minimo.**

Supponiamo che l'integrando φ del § 4 sia una forma definita positiva nelle $\frac{\partial u(t)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(t)}{\partial y}$, $\frac{\partial u(\tau)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(\tau)}{\partial y}$; per il che basta $|\varphi_1| < 1$, $|\varphi_2| < 1$.

Una tal forma sarà non minore di

$$\lambda \left\{ \left[\frac{\partial u(t)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial u(t)}{\partial y}\right]^2 \right\},$$

dove λ è una costante positiva abbastanza piccola. Le funzioni u, che posseggono in punti generici derivate prime integrabili insieme al loro quadrato tali che $\int \frac{\partial u}{\partial x} dx$ ed $\int \frac{\partial u}{\partial y} dy$ siano, a meno della solita costante additiva, uguali alla u, che per un valore generico della t sono continue su ogni retta generica $x = \text{cost.}$, od $y = \text{cost.}$, che nei punti generici del contorno σ di S assumono valori prefissati, descrivono un campo funzionale $\{u\}$ (*). Sia d il limite inferiore di $I(u)$, quando u varia in $\{u\}$. Vogliamo provare che d è effettivamente un minimo.

La difficoltà che si presenta in questo studio, e che non si presenta nell'ordinario problema di DIRICHLET, è questa che l'integrando non contiene $\frac{\partial u}{\partial t}$, cosicchè esso può essere nullo, senza che la u sia costante. Ciononostante potremo ancora dimostrare il nostro asserto.

Sia $u_1, u_2, \ldots$ una successione di funzioni tale che:

$$I(u_i) = d + \frac{\lambda}{6}\eta_i; \quad \eta_n > \eta_{n+1}; \quad \lim_{n=\infty} \eta_n = 0$$

e che $\sum_n \eta_n^{\frac{1}{4}}$ sia una serie convergente.

Come al § 2 si dimostra che $I(u_n - u_{n-1}) < \lambda \eta_n$, cosicchè anche

$$\int d\,t \iint \left\{ \left[\frac{\partial (u_n - u_{n-1})}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial (u_n - u_{n-1})}{\partial y}\right]^2 \right\} d\,x\,d\,y < \eta_n.$$

Eccettuato un aggregato S_n di valori della t di misura $S_n \leq \eta_n^{\frac{1}{4}}$, per ogni altro valore di t è

$$\iint \left\{ \left[\frac{\partial (u_n - u_{n-1})}{d\,x}\right]^2 + \left[\frac{\partial (u_n - u_{n-1})}{\partial y}\right]^2 \right\} d\,x\,d\,y \leq \eta_n^{\frac{3}{4}}.$$

Eccettuato un aggregato T_m di valori della t di misura

$$T_n = S_n + S_{n+1} + S_{n+2} + \cdots \leq \eta_m^{\frac{1}{4}} + \eta_{m+1}^{\frac{1}{4}} + \eta_{m+2}^{\frac{1}{4}} + \cdots,$$

per tutti gli altri è soddisfatta la precedente disuguaglianza per $m \geq n$. Ora, essendo $\sum \eta_i^{\frac{1}{4}}$ convergente, e quindi $\lim_{n=\infty} T_n = 0$, ed essendo l'aggregato T_{m+1} interno a T_m, l'aggregato T comune a tutti gli aggregati T_m ha misura nulla; eccettuati i valori di t appartenenti a T, per ogni altro valore di t, ossia per

(*) Quando diciamo retta o punto generico, intendiamo che sia escluso al più un aggregato di misura nulla di tali rette o punti.

ogni valore generico di t, sarà da un qualche valore di n in poi:

$$\iint \left\{ \left[\frac{\partial (u_n - u_{n-1})}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial (u_n - u_{n-1})}{\partial y}\right]^2 \right\} d\,x\,d\,y \leq \varepsilon_n ,$$

dove $\varepsilon_n = \eta_n^{\frac{3}{4}}$, e quindi la serie $\sum \varepsilon_n^{\frac{1}{3}}$ è convergente.

Ci troviamo così ridotti a studiare una successione di funzioni u_n, che soddisfano (a partire da un certo punto in poi) alla precedente disuguaglianza, affatto analoga a quella che si presenta (*) nello studiare l'ordinario problema di Dirichlet. E si può dimostrare con procedimenti analoghi a quelli seguiti in tal caso che:

1.°) Su ogni retta generica $x =$ cost., oppure $y =$ cost., la successione delle u_n tende uniformemente ad una funzione limite u di $\{u\}$ continua su tali rette.

2.°) Le derivate $\frac{\partial u_n}{\partial x}$, $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ tendono in un punto generico alle $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

3.°) Integrali lineari delle u_n o superficiali delle u_n, $\frac{\partial u_n}{\partial x}$, $\frac{\partial u_n}{\partial y}$, $\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2$ tendono per $n = \infty$ agli integrali corrispondenti della u, cosicchè in particolare $I(u) = d$; e la d è un *minimo* effettivo. c. d. d.

4.°) Anche gli integrali lineari delle $\frac{\partial u_n}{\partial x}$, $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ estesi a un pezzo qualsiasi di una retta *generica* $x =$ cos., o $y =$ cost. tendono agli integrali analoghi per le $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Non si può dire ancora che la u soddisfi alla nostra equazione integro-differenziale (I). In qualche caso ciò si potrà dimostrare per via indiretta. Così p. es. nel caso, a cui si riferisce l'ultima osservazione del precedente paragrafo, si potrà provare anzitutto la formola di Green per la funzione u (così come si può fare per l'ordinario problema di Dirichlet), deducendone quindi l'equazione integro-differenziale.

Ma si resta anche in questi problemi, come per gli analoghi relativi alle equazioni alle derivate parziali, ben lontani da un risultato generale.

(*) Cfr. la Mem. dell'A.: *Il principio di minimo, ecc.* Rend. del Circolo Matem. di Palermo, Tomo 23 (1907).

§ 6. Alcuni teoremi generali sulle funzioni limiti di una classe di funzioni.

Chiuderò questo lavoro, dimostrando alcuni teoremi generali, i quali possono rendere molto più facili ricerche analoghe alle precedenti, e permettono di considerarle da un solo punto di vista.

A noi si è presentato quasi sempre lo studio di una successione di funzioni, le quali tendevano a un limite in ogni punto *generico* (cioè escluso al più un aggregato di misura nulla), mentre i loro integrali tendevano sempre ad un limite.

Qual'è la ragione di questo fatto? Possiamo noi renderci questi risultati più intuitivi, ricorrendo allo sviluppo delle nostre funzioni in serie (di Fourier, di funzioni ortogonali normali), i coefficienti delle quali si calcolino mediante quadrature? A queste domande rispondono i teoremi seguenti. Il primo riguarda il caso più difficile di integrali, in cui l'integrando contiene solo parte delle derivate parziali del primo ordine delle funzioni considerate.

Teor. 1.° *Sia $\{u\}$ una classe di infinite funzioni $u(x, y)$, definite, p. es., in un rettangolo R coi lati paralleli agli assi coordinati, per le quali gli integrali $\int\int_{(R)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\, dy$ sono tutti inferiori ad una stessa costante finita H.*

Su una retta $y =$ cost. *generica sia $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x} dx = u(x_2, y) - u(x_1, y)$ identicamente. Si può allora in $\{u\}$ scegliere in infiniti modi una successione u_1, $u_2, \ldots$ tale che:*

α) Indicato con $x = 0$ un valore generico prefissato della x in R, i coefficienti dello sviluppo, p. es., in serie di Fourier delle $v_n(x, y) = u_n(x, y) - u_n(0, y)$, considerate come funzioni della y, tendono ciascuno per $n = \infty$ a un limite che è funzione continua della x. La serie di Fourier limite (cioè la serie, che si ottiene passando al limite termine a termine dalle serie di Fourier per le v_n) *definisce per un valore generico* (*) *della y una funzione $V(x, y)$ integrabile insieme al suo quadrato.*

(*) Cioè escluso al più, per ogni valore di x, un aggregato di misura nulla di valori per la y.

β) *I coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier per* $\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) V(x, y)\, dx$ *sono, se* $\varphi(x)$ e $\varphi^2(x)$ *sono funzioni integrabili, i limiti dei corrispondenti coefficienti per* $\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\, v_n(x, y)\, dx$ (*).

γ) *Se* $\varphi(y)$ *e* $\varphi^2(y)$ *sono funzioni integrabili della* y, *è*

$$\int_{y_1}^{y_2} V(x, y)\, \varphi(y)\, dy = \lim_{n=\infty} \int_{y_1}^{y_2} v_n(x, y)\, \varphi(y)\, dy.$$

Per queste ragioni si potrà dire che $V(x, y)$ *è una funzione quasilimite delle* $v_n(x, y)$ *per* $n = \infty$.

Ricordando l'ipotesi del teorema e la formola di Schwarz, si ha, se $\varphi^2(y)$ è integrabile:

$$\left.\begin{aligned} \left| \int_{x_1}^{x_2} dx \int \varphi(y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}\, dy \right|^2 &\leq |x_1 - x_2| \int \varphi^2(y)\, dy \int \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]^2 dy\, dx \\ &\leq H\, |x_1 - x_2| \int \varphi^2(y)\, dy \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ossia:

$$\left| \int \varphi(y)\, v(x_2, y)\, dy - \int \varphi(y)\, v(x_1, y)\, dy \right|^2 \leq H\, |x_1 - x_2| \int \varphi^2(y)\, dy \qquad (2)$$

che, per $x_1 = 0$, $x_2 = x$, diventa:

$$\left| \int \varphi(y)\, v(x, y)\, dy \right|^2 \leq H\, |x| \int \varphi^2(y)\, dy. \qquad (2)^{\text{bis}}$$

È sottinteso che tutte le integrazioni rispetto alla y sieno estese tra due valori assunti dalla y in R. Fissata la $\varphi(y)$, per $(2)^{\text{bis}}$ e per (2) le $F(x) = \int \varphi(y)\, v(x, y)\, dy$ sono dunque tutte inferiori ad una stessa costante, e sono equi-continue; cioè, dato un numero ε piccolo a piacere, esiste un σ

(*) Con x_1, x_2 o con y_1, y_2 indico due valori qualsiasi assunti in R dalla x, o dalla y.

tale che $|F(x_1) - F(x_2)| \leq \varepsilon$ per $|x_1 - x_2| \leq \sigma$; e questo numero σ non dipende dalla particolare funzione $v(x, y)$ scelta. Si può dunque (cfr. § 1) scegliere una successione $v_1, v_2, v_3, \ldots$ tale che le corrispondenti

$$F_n(x) = \int v_n(x, y)\, \varphi(y)\, d y$$

tendano a un limite $\Phi(x)$ per ogni valore razionale della x; dalla equicontinuità delle F_n scenderà che $\Phi(x) = \lim\limits_{n=\infty} F_n(x)$ esisterà per *ogni* valore della x, e sarà anzi una funzione continua della x.

Sia ora $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ una successione di funzioni della y, integrabili insieme al loro quadrato. Esisterà una successione $v_{01}, v_{02}, v_{03}, \ldots$ tale che $\Phi_0(x) = \lim\limits_{n=\infty} \int v_{0n}(x, y)\, \varphi_0(y)\, d y$ sia una funzione continua della x; in questa potrò scegliere una successione *subordinata* $v_{11}, v_{12}, v_{13}, \ldots$ tale che $\Phi_1(x) = \lim\limits_{n=\infty} \int v_{1n}(x, y)\, \varphi_1(y)\, d y$ sia una funzione continua della x. Esisteranno cioè infinite successioni $v_{m1}, v_{m2}, v_{m3}, \ldots$ $(m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, ciascuna delle quali è subordinata alla precedente, ed è tale che $\Phi_m(x) = \lim\limits_{n=\infty} \int v_{mn}\, \varphi_m\, d y$ è una funzione continua della x. Se noi ora, mutando lievemente le notazioni, indichiamo le $v_{nn}(x, y)$ semplicemente con $v_n(x, y)$, troviamo che la successione di tali v_n è, dallo m^{esimo} termine in poi, subordinata alla successione delle $v_{m1}, v_{m2}, v_{m3}, \ldots$, per ogni valore di m. Sarà quindi, con le nuove notazioni, e per ogni funzione φ_m

$$\Phi_m(x) = \lim_{n=\infty} \int v_n(x, y)\, \varphi_m(y)\, d y \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

una funzione continua della x.

Se in particolare le $\varphi_m(y)$ formano un sistema ortogonale normale chiuso relativamente all'intervallo che si considera [se p. es. detto intervallo è l'intervallo

$$0 \leq y \leq 2\pi, \text{ e } \varphi_0 = \frac{1}{2\pi}, \ \varphi_{2h-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos h y, \ \varphi_{2h} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} h y \ (h = 1, 2, 3, \ldots)\Big],$$

la (3) ci dimostra appunto che i coefficienti dello sviluppo in serie di funzioni φ_m [o di FOURIER] per la funzione v_n, considerata come funzione della y, tendono per $n=\infty$ ciascuno ad un limite che è funzione continua della x.

Osserviamo che:

$$\int\left[v_n^2(x,\,y)\right]dy=\int dy\left\{\int_0^x\frac{\partial u_n}{\partial x}dx\right\}^2\leq\int dy\,|x|^2\int\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2dx\leq H\,|x|^2 \qquad (4)$$

sono tutti inferiori ad una stessa costante K.

Se dunque a_{n1}, a_{n2}, a_{n3},... sono i coefficienti del sopra citato sviluppo in serie delle v_n, sarà:

$$a_{n1}^2+a_{n2}^2+a_{n3}^2+\cdots\leq K.$$

Posto $\alpha_i=\lim\limits_{n=\infty} a_{ni}$, la serie $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\cdots$ non può essere nè divergente, nè maggiore di K. In tal caso esisterebbe infatti un intero p così grande che $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_p^2>K$, e quindi anche un n così grande che $a_{n1}^2+a_{n2}^2+\cdots+a_{np}^2>K$, ciò che è assurdo. Dunque

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\cdots$$

converge e non supera K. La serie di funzioni φ_m [o di FOURIER] che ha le α come coefficienti rappresenta dunque una funzione $V(x,\,y)$ definita per i valori generici della y, ed integrabile insieme al suo quadrato. Ed è, ricordiamolo,

$$\int V(x,\,y)\,\varphi_m(y)\,dy=\lim\int v_n(x,\,y)\,\varphi_m(y)\,dy. \qquad (5)$$

Poichè le quantità sotto al segno di limite al secondo membro sono per $(2)^{\text{bis}}$ limitate, si potrà integrare da x_1 ad x_2 rispetto alla x, invertendo il segno di limite con quello di integrale; e altrettanto si può dire, se noi moltiplichiamo per una qualsiasi funzione $\varphi(x)$ limitata della x. Resta così provato il comma β), se $\varphi(x)$ è limitata. Per dimostrare il teorema in generale, basta provare che il limite di $\int_{x_2}^{x_2}\varphi(x)\,dx\int v_n(x,\,y)\,\varphi_m(y)\,dy$ si ottiene integrando da x_1 a x_2 rispetto alla x il $\lim w_n$, ove $w_n=\varphi(x)\int v_n(x,\,y)\,\varphi_m(y)\,dy$, quando $\varphi^2(x)$ è integrabile. Ora

$$\int w_n^2(x)\,dx\leq M\int\varphi^2(x)\,dx,$$

dove con M indico una costante positiva non inferiore ad alcuna delle $\int v_n(x, y)\,\varphi_m(y)\,dy$ (*). Cioè gli $\int w_n^2(x)\,dx$ sono tutti inferiori ad una stessa costante. Ed è facile provare il

Teor. 2.° *Se le* $\int w_n^2(x)\,dx$ *sono inferiori ad una costante* N, è

$$\lim \int w_n\,dx = \int \lim w_n\,dx.$$

Infatti gli integrali indefiniti $\int w_n\,dx$ sono funzioni equiassolutamente continue (**), perchè, se G è un gruppo qualsiasi di punti di misura σ, è

$$\left|\int_G w_n(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\sigma}\sqrt{\int_{(G)} w_n^2(x)\,dx} \leq \sigma N.$$

Dimostriamo ora l'ultimo comma γ). Se $\varphi(y)$ e $\varphi^2(y)$ sono funzioni integrabili, ε è un numero piccolo a piacere, $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sono i coefficienti dello sviluppo di $\varphi(y)$ in serie di funzioni φ_m, si potrà trovare un intero p così grande che:

$$\int \left\{ \varphi(y) - \sum_0^p a_i\,\varphi_i(y) \right\}^2 dy \leq \varepsilon^2.$$

E quindi, per la formola di SCHWARZ

$$\left|\int v_n(x, y)\,\varphi(y)\,dy - \int v_n(x, y) \sum_0^p a_i\,\varphi_i(y)\,dy\right| \leq \varepsilon \sqrt{\int v_n^2(x, y)\,dy} \leq K\varepsilon$$

$$\left|\int V(x, y)\,\varphi(y)\,dy - \int V(x, y) \sum_0^p a_i\,\varphi_i(y)\,dy\right| \leq \varepsilon \sqrt{\int V^2(x, y)\,dy} \leq K\varepsilon.$$

Ricordando le (5), e osservando che p è un numero finito, si deduce:

$$\left|\int V(x, y) \sum_0^p a_i\,\varphi_i(y)\,dy - \int v_n(x, y) \sum_0^p a_i\,\varphi_i(y)\,dy)\right| \leq K\varepsilon$$

(*) Che tale costante esista è evidente. Poichè le $\varphi_m(y)$ formano un sistema ortogonale normale, è $\int \varphi_m^2(y)\,dy = 1$. Dalla (2)^{bis} segue tosto l'asserto.

(**) Cfr. VITALI, *Sull'integrazione per serie.* Rend. del Circolo Matem. di Palermo (1907), Tomo 23.

per n abbastanza grande. Da tutte queste disuguaglianze si deduce tosto che per n abbastanza grande è:

$$\left| \int v_n(x, y)\, \varphi(y)\, dy - \int V(x, y)\, \varphi(y)\, dy \right| < 3\,\varepsilon K,$$

ossia appunto che

$$\int V(x, y)\, \varphi(y)\, dy = \lim_{n=\infty} \int v_n(x, y)\, \varphi(y)\, dy.$$

I risultati finora ottenuti valgono per le $u_n(x\ y)$. Che cosa si può dedurre per le funzioni $\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)$ dall'ipotesi che gli integrali dei loro quadrati sono inferiori ad una stessa costante?

Anzichè rispondere a questa domanda, ci occuperemo del caso analogo delle funzioni di una sola variabile: la dimostrazione e generalizzazione del teorema più sotto enunciato è immediata. I metodi da applicarsi sono quelli stessi, che ci hanno guidato fin qui.

Se $\{u\}$ *è una classe di infinite funzioni della* x *tale che gli* $\int_0^1 u^2(x)\, dx$ *sono tutti inferiori ad una stessa costante* K, *si può in infiniti modi scegliere una successione* $u_1(x), u_2(x), \ldots$ *in guisa che i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier, o di funzioni ortogonali normali, per le* u_n *tendano a limiti finiti, che saranno i coefficienti dello sviluppo in serie di una funzione quasi-limite* $U(x)$, *per cui ancora* $\int_0^1 U^2(x)\, dx \leq K$. *E, se* $\varphi^2(x)$ *è una funzione integrabile, allora:*

$$\lim \int_0^1 u_n(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_0^1 U(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Über zwei Euler'sche Aufgaben aus der Variationsrechnung.

(*Von* Oskar Bolza, *in Freiburg i. B.*)

Im vierten Kapitel seiner *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* behandelt Euler Variationsprobleme, bei welchen nicht ein einzelnes Integral, sondern *eine Function mehrerer Integrale zu einem Extremum zu machen* ist, und leitet die aus dem Verschwinden der ersten Variation sich ergebenden Bedingungen ab. Insbesondere hat er bereits das Resultat, dass die Aufgabe, eine Function von p Integralen J_1, $J_2, \ldots, J_p$ zu einem Extremum zu machen, auf dieselben Differentialgleichungen führt, wie das isoperimetrische Problem, eines der p Integrale zu einem Extremum zu machen, während die übrigen vorgeschriebene Werte haben sollen (*).

Hierüber hinaus scheint diese Klasse von Problemen noch nicht weiter geführt worden zu sein. Es hat zwar keine Schwierigkeiten, durch Anwendung des Lagrange'schen δ-Algorithmus einen Ausdruck für die zweite Variation aufzustellen; bei der weiteren Discussion desselben stellen sich jedoch wesentlich andere Verhältnisse ein als bei den gewöhnlichen Aufgaben der Variationsrechmung, und zu einer vollständigen Behandlung des starken Extremums würde man auf diesem Weg doch nicht kommen. Andererseits lassen sich, wie Hadamard (**) bemerkt, Aufgaben dieser Art auf ein Lagrange'sches Problem zurückführen, aber auf ein solches mit variabeln Endpunkten, also ein Problem, das ebenfalls noch nicht als abgeschlossen betrachtet werden kann.

Es ist nun nicht meine Absicht, hier die allgemeine Theorie dieser Euler'schen Probleme nach einer dieser Richtungen weiter zu verfolgen. Viel-

(*) Euler, loc. cit., p. 161.

(**) Hadamard, *Leçons sur le calcul des variations*, p. 218.

mehr möchte ich an zwei der von Euler behandelten Beispiele zeigen, wie man bei gewissen Problemen dieser Art durch ganz elementare Ueberlegungen zu einer vollständigen Lösung, d. h. zu einem *Hinlänglichkeitsbeweis für ein starkes Extremum*, gelangen kann, wofern nur die zugeordneten isoperimetrischen Probleme vollständig gelöst sind.

Ich wähle dazu die beiden Beispiele:

1) Den Quotienten (*)

$$V = \frac{\int_{x_0}^{x_1} y\,dx}{\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx}$$

zu einem Maximum zu machen;

2) Das Product (**)

$$W = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx \,.\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

zu einem Minimum zu machen.

§ 1. Genauere Formulierung der Aufgabe.

Wir präcisieren die beiden Euler'schen Aufgaben, indem wir sie zugleich etwas vorallgemeinern, folgendermassen:

In einer Ebene, deren Punkte auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen sind, dessen positive y-Axe zur linken der positiven x-Axe liegt, sind zwei Punkte P_0 und P_1 gegeben und eine feste, sie verbindende « Curve » $\mathfrak{K}_0$. Wir ziehen von P_0 nach P_1 eine beliebige « Curve » $\mathfrak{C}$, dargestellt durch die Gleichungen

$$\mathfrak{C} : x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_0 \lesseqgtr t \lesseqgtr t_1 \,,$$

(*) Euler, loc. cit., p. 153.

(**) Euler, loc. cit., p. 148.

und bezeichnen mit $J_{\mathfrak{C}}$ die Länge derselben, mit $K_{\mathfrak{C}}$ den Flächeninhalt, welchen die Curve $\mathfrak{C}$ zusammen mit der Curve $\mathfrak{K}_0$ einschliesst, gemessen durch das Linienintegral

$$\frac{1}{2}\int(xy' - yx')\,dt,$$

genommen entlang $\mathfrak{C}$ von P_0 bis P_1 und entlang $\mathfrak{K}_0$ von P_1 bis P_0. Dabei soll unter einer « Curve » hier und in der Folge stets eine gewöhnliche Curve (*) ohne mehrfache Punkte verstanden werden.

Der Flächeninhalt $K_{\mathfrak{C}}$ ist gleich der Summe aus dem in derselben Weise gemessenen festen Flächeninhalt B, welchen die Gerade $P_0 P_1$ mit der Curve $\mathfrak{K}_0$ einschliesst plus dem Flächeninhalt $S_{\mathfrak{C}}$, welchen die Curve $\mathfrak{C}$ mit der Geraden $P_1 P_0$ einschliesst:

$$K_{\mathfrak{C}} = B + S_{\mathfrak{C}}. \tag{1}$$

Um die Ideen zu fixieren setzen wir voraus, was wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit tun dürfen, dass

$$B \geqq 0, \tag{2}$$

und schreiben dementsprechend: $B = b^2$. Endlich bezeichnen wir den Abstand der beiden gegebenen Punkte mit $2a$.

Nach diesen Festsetzungen formulieren wir nun unsere Aufgabe so:

Unter allen « Curven », welche in der x, y-Ebene von P_0 nach P_1 gezogen werden können, diejenigen zu bestimmen, welche für den Quotienten

$$V_{\mathfrak{C}} = \frac{K_{\mathfrak{C}}}{J_{\mathfrak{C}}} \tag{3}$$

ein Maximum, beziehungsweise für das Product

$$W_{\mathfrak{C}} = J_{\mathfrak{C}} \,.\, K_{\mathfrak{C}} \tag{4}$$

ein Minimum liefern.

(*) « Gewöhnliche Curve » im Sinn meiner *Vorlesungen über Variationsrechnung,* p. 192, gleichbeutendend mit einer stetigen Curve, welche aus einer endlichen Anzahl von Bogen besteht, für welche x, y stetig differentiierbare Functionen eines Parameters t sind und $x'^2 + y'^2 > 0$.

Dabei sind die Worte Maximum, Minimum im Sinn eines ***starken relativen Maximums, Minimums*** (*) zu verstehen.

Die Untersuchung soll so geführt werden, dass aus der Variationsrechnung nichts weiter vorausgesetzt wird als die folgenden beiden Sätze über das specielle isoperimetrische Problem und die dazu reciproke Aufgabe:

Hilfssatz I: Wenn die von P_0 nach P_1 führende « Curve » $\mathfrak{L}$ mit der Geraden $P_1 P_0$ einen grösseren Flächeninhalt einschliesst als jede andere « Curve » derselben Länge, welche in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{L}$ von P_0 nach P_1 gezogen werden kann, so ist $\mathfrak{L}$ ein Kreisbogen (**).

Hilfssatz II: Unter allen « Curven », welche von P_0 nach P_1 gezogen werden können, und mit der Sehne $P_1 P_0$ eine Fläche von gegebenem Inhalt (positiv, null oder negativ) einschliessen, hat der stets eindeutig vorhandene Kreisbogen $P_0 P_1$, welcher dieser Flächenbedingung genügt, die kleinste Länge (***).

§ 2. Constantenbestimmung für die erste Euler'sche Aufgabe.

Wir betrachten zuerst die erste Aufgabe. Wir nehmen an, wir hätten eine zulässige Curve $\mathfrak{C}_0$ gefunden, welche ein Maximum für den Quotienten V liefert. Ersetzen wir dann die Curve $\mathfrak{C}_0$ (falls sie nicht etwa mit der Geraden $P_0 P_1$ identisch ist), durch eine benachbarte Curve $\mathfrak{C}$ von derselben Länge, so bestehen gleichzeitig die beiden Relationen

$$J_{\mathfrak{C}_0} = J_{\mathfrak{C}}, \quad V_{\mathfrak{C}_0} \overline{>} V_{\mathfrak{C}},$$

woraus folgt

$$K_{\mathfrak{C}_0} \overline{>} K_{\mathfrak{C}} \quad \text{und daher nach (1):} \quad S_{\mathfrak{C}_0} \overline{>} S_{\mathfrak{C}}.$$

Die Curve $\mathfrak{C}_0$ liefert also ein Maximum für den Flächeninhalt S bei gegebener Länge; sie muss somit nach dem ersten Hilfssatz ein Kreisbogen von P_0

(*) Im Sinn meiner *Vorlesungen*, etc., § 25, d). Man überzeugt sich leicht, dass ein absolutes Extremum weder für V noch für W möglich ist, da man sowohl V als W durch passende Wahl von $\mathfrak{C}$ beliebig nahe an $+\infty$ oder $-\infty$ heran bringen kann.

(**) Vgl. z. B. meine *Vorlesungen*, etc., § 59, c).

(***) Mit Hilfe der Weierstrass'schen Construction zu beweisen; vgl. z. B., § 63, b) und § 64, a) meiner *Vorlesungen*.

nach P_1 sein, falls sie nicht eine Gerade ist. Um beide Fälle zusammenzufassen, rechnen wir die Gerade $P_0 P_1$ mit unter die Kreisbogen von P_0 nach P_1.

Jeder dieser Kreisbogen lässt sich eindeutig definieren durch seinen Centriwinkel $\omega = \sphericalangle P_0 C P_1$, wenn C den Mittelpunkt des betreffenden Kreises bedeutet. Für die im entgegengesetzten Sinn des Uhrzeigers beschriebenen Kreisbogen von P_0 nach P_1 normieren wir den Winkel ω auf das Intervall: $0 < \omega < 2\pi$, für die im Sinn des Uhrzeigers beschriebenen auf das Intervall: $-2\pi < \omega < 0$, während wir der Geraden $P_0 P_1$ den Centriwinkel 0 beilegen. Es entspricht dann jedem Kreisbogen $P_0 P_1$ (im weiteren Sinn) *ein* Wert von ω zwischen -2π und $+2\pi$ und umgekehrt.

Bei diesen Festsetzungen ist der Radius ρ des Kreisbogens vom Centriwinkel ω gegeben durch

$$\rho = \frac{a}{\left|\sin\frac{\omega}{2}\right|}, \tag{5}$$

seine Länge $J(\omega)$ durch

$$J(\omega) = \frac{a\,\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}, \tag{6}$$

der von dem Kreisbogen $P_0 P_1$ und der Sehne $P_1 P_0$ eingeschlossene Flächeninhalt $S(\omega)$ (zeichenrichtig) durch

$$S(\omega) = \frac{a^2(\omega - \sin\omega)}{2\sin^2\frac{\omega}{2}}.$$

Daher ergibt sich für den von dem Kreisbogen $P_0 P_1$ und der festen Curve $\mathfrak{K}_0$ eingeschlossenen Flächeninhalt $K(\omega)$ der Ausdruck

$$K(\omega) = b^2 + \frac{a^2(\omega - \sin\omega)}{2\sin^2\frac{\omega}{2}}. \tag{7}$$

Da nun der Kreisbogen $\mathfrak{C}_0$ nach Voraussetzung in Beziehung auf die Gesamtheit aller von P_0 nach P_1 führenden « Curven » ein (relatives) Maximum für den Quotienten V liefert, so muss er *a fortiori* auch ein solches liefern in Beziehung auf die Gesamtheit aller Kreisbogen von P_0 nach P_1, d.h. aber, der Centriwinkel des Kreisbogens $\mathfrak{C}_0$ muss die Function

$$V(\omega) = \frac{K(\omega)}{J(\omega)}$$

zu einem Maximum machen. Nun ergibt eine einfache Rechnung

$$\frac{dV}{d\omega} = \frac{1}{a\omega^2}\left(J\frac{a}{\sin\frac{\omega}{2}} - K\right)\left(\sin\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}\right) \tag{8}$$

$$= -\frac{\left(\sin\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}\right)(\omega + \sin\omega)}{2a\omega^2\sin^2\frac{\omega}{2}} \times [b^2\varphi(\omega) - a^2], \tag{8^a}$$

wo

$$\varphi(\omega) = \frac{1-\cos\omega}{\omega + \sin\omega}.$$

Der erste der beiden Ausdrücke für die Ableitung von V liefert für den gesuchten Kreisbogen wegen (5) die Euler'sche Bedingung

$$\rho = \pm\frac{K}{J}, \tag{9}$$

deren weitere Discussion sich dann aus dem zweiten Ausdruck folgendermassen ergibt:

Während ω von 0 bis π und dann weiter bis 2π wächst, nimmt $\varphi(\omega)$ von 0 bis zu dem Maximalwert $2/\pi$ zu und dann wieder ab bis null; überdies ist $\varphi(\omega)$ ungerade.

Da der erste Factor in dem Ausdruck (8^a) beständig negativ ist, so folgt hieraus: Wenn

$$\frac{b^2}{a^2} \leqq \frac{\pi}{2} \tag{10}$$

so wächst die Function $V(\omega)$ beständig von $-\infty$ bis $+\infty$, während ω von -2π bis 2π wächst; sie kann also kein Maximum besitzen, und *a fortiori* kann daher auch kein Maximum für das vorgelegte Variationsproblem existieren.

Wenn dagegen

$$\frac{b^2}{a^2} > \frac{\pi}{2}, \tag{11}$$

so hat die Gleichung

$$b^2\varphi(\omega) = a^2$$

zwei Wurzeln ω_0, ω_1 im Intervall $[-2\pi, +2\pi]$, und zwar ist

$$0 < \omega_0 < \pi, \quad \pi < \omega_1 < 2\pi.$$

Während daher ω von -2π bis ω_0 wächst, nimmt $V(\omega)$ von $-\infty$ bis zu einem Maximalwert $V(\omega_0)$ zu, der sicher positiv ist, da $V(0) = b^2/2a \gtreqless 0$.

Wächst ω weiter bis ω_1, so nimmt $V(\omega)$ ab bis zu einem Minimalwert $V(\omega_1)$, um dann weiter bis $+\infty$ zu wachsen, während ω von ω_1 bis 2π wächst.

Aus alledem folgt: Wenn unsere Aufgabe im Fall (11) überhaupt eine Lösung besitzt, so kann dieselbe nur geliefert werden durch den Kreisbogen $\mathfrak{C}_0$ mit dem Centriwinkel ω_0.

§ 3. Hinlänglichkeitsbeweis für die erste Euler'sche Aufgabe.

Wir wollen nunmehr beweisen, dass im Fall (11) der so definierte Kreisbogen $\mathfrak{C}_0$ in der Tat ein Maximum für den Quotienten V liefert.

Dazu ziehen wir eine beliebige «Curve» $\mathfrak{C}$ von P_0 nach P_1. Wenn $K_{\mathfrak{C}} \leqq 0$, so ist auch $V_{\mathfrak{C}} \leqq 0$, da $J_{\mathfrak{C}}$ stets positiv ist. Es ist also sicher

$$V_{\mathfrak{C}_0} > V_{\mathfrak{C}},$$

da $V_{\mathfrak{C}_0}$, wie oben gezeigt, positiv ist.

Wenn dagegen $K_{\mathfrak{C}} > 0$, so schliessen wir folgenderemassen: Da die Function $K(\omega)$ von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, während ω von -2π bis 2π zunimmt, so gibt es einen und nur einen Wert $\bar{\omega}$ zwischen -2π und $+2\pi$ für welchen

$$K(\bar{\omega}) = K_{\mathfrak{C}},$$

was wir auch schreiben können

$$K_{\bar{\mathfrak{C}}} = K_{\mathfrak{C}}, \tag{12}$$

wenn $\bar{\mathfrak{C}}$ den Kreisbogen $P_0 P_1$ mit dem Centriwinkel $\bar{\omega}$ bedeutet. Nach (1) ist also auch: $S_{\bar{\mathfrak{C}}} = S_{\mathfrak{C}}$. Hieraus folgt aber nach dem zweiten Hilfssatz, dass

$$J_{\bar{\mathfrak{C}}} \leqq J_{\mathfrak{C}}, \tag{13}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $\mathfrak{C} \equiv \bar{\mathfrak{C}}$. Aus (12) und (13) folgt aber, da $K_{\mathfrak{C}}$ positiv vorausgesetzt war,

$$V_{\overline{\mathfrak{C}}} \gtreqless V_{\mathfrak{C}}. \tag{14}$$

Ferner ergibt sich aus der Discussion der Function $V(\omega)$ in § 2, dass dieselbe den Wert $V(\omega_0)$ noch einmal im Intervall $[-2\pi, +2\pi]$ annimmt und zwar zwischen ω_1 und 2π; der betreffende Wert von ω heisse ω'_0. Alsdann können wir die Maximaleigenschaft der Function $V(\omega)$ noch näher dahin präcisieren, dass

$$V(\omega_0) > V(\omega), \quad \text{wenn} \quad -2\pi < \omega < \omega'_0, \quad \omega \neq \omega_0.$$

Wenn daher

$$\bar{\omega} < \omega'_0, \tag{15}$$

so folgt

$$V(\omega_0) \gtreqless V(\bar{\omega}), \quad \text{d. h.} \quad V_{\mathfrak{C}_0} \gtreqless V_{\overline{\mathfrak{C}}}, \tag{16}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $\overline{\mathfrak{C}} \equiv \mathfrak{C}_0$.

Da die Function $K(\omega)$ beständig zunimmt, so ist die Ungleichung (15) äquivalent mit: $K(\bar{\omega}) < K(\omega'_0)$. Aus (12), (14) und (15) schliessen wir daher: Wenn

$$K_{\mathfrak{C}} < K(\omega'_0) \tag{17}$$

so ist

$$V_{\mathfrak{C}_0} \gtreqless V_{\mathfrak{C}}, \tag{18}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{C}_0$.

Nun können wir aber stets eine solche Umgebung von $\mathfrak{C}_0$ angeben, dass die Bedingung (17) sicher erfüllt ist, sobald wir die Curve $\mathfrak{C}$ auf diese Umgebung beschränken. Dazu bezeichnen wir die stets positive Differenz $K(\omega'_0) - K(\omega_0)$ mit D und ziehen eine geschlossene « Curve » $\mathfrak{L}$, welche den Kreisbogen $\mathfrak{C}_0$ in ihrem Inneren enthält, und welche, in positivem Sinn durchlaufen, einen Flächeninhalt einschliesst, welcher $< D$. Wird nun die Curve $\mathfrak{C}$ auf das Innere dieser geschlossenen Curve $\mathfrak{L}$ beschränkt, so zeigt man leicht (*), dass

$$-D < K_{\mathfrak{C}} - K_{\mathfrak{C}_0} < D,$$

woraus dann die Ungleichung (17) folgt. Somit haben wir das Schlussresultat bewiesen:

(*) Allerdings unter Zuhilfenahme einiger anschauungsmässiger Elemente.

Wenn zwischen dem halben Abstand a der beiden gegebenen Punkte P_0, P_1 und dem von der Geraden $P_0 P_1$ mit der gegebenen Curve $\mathfrak{K}_0$ eingeschlossenen Flächeninhalt b^2 die Beziehung besteht

$$\frac{b^2}{a^2} \leqq \frac{\pi}{2},$$

so existiert für den Quotienten

$$V_{\mathfrak{C}} = \frac{K_{\mathfrak{C}}}{J_{\mathfrak{C}}}$$

kein Maximum. Wenn dagegen

$$\frac{b^2}{a^2} > \frac{\pi}{2},$$

so existiert ein starkes (relatives) Maximum, und zwar wird dasselbe geliefert durch den von P_0 nach P_1 führenden Kreisbogen, dessen Centriwinkel die zwischen 0 und π gelegene Wurzel der Gleichung

$$b^2(1 - \cos\omega) - a^2(\omega + \sin\omega) = 0 \tag{19}$$

ist.

In dem speciellen von Euler behandelten Fall besteht die gegebene Curve $\mathfrak{K}_0$ aus den Ordinaten der beiden Punkte P_0, P_1 und dem zwischen ihnen liegenden Stück der x-Axe. Wir wollen uns für diesen Fall noch die Frage vorlegen: Wenn der Punkt P_1 als fest angenommen wird, auf welchen Bereich der Ebene muss dann der Punkt P_0 beschränkt werden, damit ein Maximum für den Punkt Quotienten V existiert?

Um die Ideen zu fixieren, nehmen wir $y_0 > 0$, $y_1 > 0$, $x_1 < x_0$ an; dann ist

$$b^2 = \frac{(x_0 - x_1)(y_0 + y_1)}{2}, \tag{20}$$

$$4a^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 \tag{21}$$

und die Gleichung

$$a^2 - \frac{2}{\pi} b^2 = 0$$

stellt, wenn wir darin x_0, y_0 durch die laufenden Coordinaten x, y ersetzen, eine Ellipse dar, welche im Punkt P_1 die Ordinate dieses Punktes berührt, und deren grosse Axe mit der positiven x-Axe einen Winkel von 45° bildet.

Liegt der Punkt P_0 im Inneren dieser Ellipse, so existiert ein Maximum für den Quotienten V, liegt P_0 auf der Ellipse oder ausserhalb, so existiert kein Maximum.

§ 4. Die zweite Euler'sche Aufgabe.

Ganz ähnliche Ueberlegungen lassen sich für die zweite Euler'sche Aufgabe anstellen und führen zu ganz analogen Resultaten. Man findet zunächst wieder, dass die gesuchte Curve ein Kreisbogen von P_0 nach P_1 sein muss. Für die Ableitung der Function

$$W(\omega) = J(\omega)\, K(\omega)$$

erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{dW}{d\omega} &= \frac{a\left(\sin\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}\right)\left(J\frac{a}{\sin\frac{\omega}{2}} + K\right)}{\sin^2\frac{\omega}{2}} \\ &= -\frac{a\left(\sin\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}\right)(3\omega - \sin\omega)}{2\sin^4\frac{\omega}{2}} \times [b^2\psi(\omega) + a^2], \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

wo

$$\psi(\omega) = \frac{1 - \cos\omega}{3\omega - \sin\omega}.$$

Bezeichnet γ die zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegene Wurzel der Gleichung

$$3\chi = 2\operatorname{tg}\chi \tag{23}$$

(angenähert ist: $\gamma = 55^\circ 26'$), so wächst die Function $\psi(\omega)$ von 0 bis zu dem Maximalwert

$$\varkappa = \frac{\sin 2\gamma}{3 - \cos 2\gamma} = 0{,}2785,$$

während ω von 0 bis 2γ wächst, und nimmt dann wieder ab bis zum Wert 0, während ω von 2γ bis 2π weiter wächst.

Hieraus leitet man dann durch geringe Modificationen der obigen Schlüsse das Resultat ab:

Wenn

$$\frac{b^2}{a^2} \leqq \frac{1}{\varkappa}, \tag{24}$$

so existiert kein Minimum für das Product W; wenn dagegen

$$\frac{b^2}{a^2} > \frac{1}{\varkappa}, \tag{25}$$

so existiert ein starkes Minimum, und zwar wird dasselbe geliefert durch den Kreisbogen von P_0 nach P_1, dessen Centriwinkel die zwischen 0 *und* -2γ *gelegene Wurzel der Gleichung*

$$b^2 (1 - \cos \omega) + a^2 (3\omega - \sin \omega) = 0 \tag{26}$$

ist.

Bei der speciellen von EULER gemachten Annahme über die gegebene Curve $\mathfrak{K}_0$ existiert bei fester Lage von P_1 stets und nur dann ein Minimum, wenn der Punkt P_0 im Inneren der (in demselben Sinn wie oben zu verstehenden) Ellipse

$$a^2 - \varkappa b^2 = 0 \tag{27}$$

liegt.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich auf die ganze im Eingang erwähnte Klasse von Variationsproblemen anwenden. Ob sie zu einer vollständigen Lösung führen, wird in jedem einzelnen Fall einerseits davon abhängen, ob sich die Constantenbestimmung durchführen lässt, andererseits davon, wie weit sich die zugehörigen isoperimetrischen Probleme lösen lassen.

Freiburg i. B., den 26. October 1912.